



HAL
open science

Bornes garanties de l'erreur locale en élastoplasticité

Benoît Blaysat

► **To cite this version:**

Benoît Blaysat. Bornes garanties de l'erreur locale en élastoplasticité. Autre. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2011. Français. NNT : 2011DENS0057 . tel-00662495

HAL Id: tel-00662495

<https://theses.hal.science/tel-00662495>

Submitted on 24 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

Benoît Blaysat

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse :

**Bornes garanties de l'erreur locale en
élastoplasticité**

Soutenue à Cachan le 8 décembre 2011 devant le jury composé de :

Nicolas MOËS	Ecole Centrale de Nantes	Président
Patrick LABORDE	Université Paul Sabatier de Toulouse	Rapporteur
Géry DE SAXCÉ	Université des Sciences et Technologies de Lille	Rapporteur
Josselin DELMAS	EDF	Examinateur
Umberto PEREGO	Politecnico di Milano	Examinateur
Bing TIE	Ecole Centrale de Paris	Examinatrice
Pierre LADEVÈZE	ENS de Cachan	Directeur de thèse
Éric FLORENTIN	ENS de Cachan	Encadrant de thèse

LMT-Cachan

ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris
61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France

Bien que première page de ce manuscrit, c'est bien en dernier que l'on compose ses mots. Et ce sera la plus lue. J'ai soutenu voilà quatre jours, c'est la tête un peu reposée, "loin" du stress pré-soutenance, de la folie post-soutenance, que je prends le temps d'écrire mes remerciements.

Avant tout, je tiens à remercier mon Jury. Mon président, Nicolas Moës, qui a dirigé cette soutenance d'une main de maître, avec une touche d'humour ; mes rapporteurs Patrick Laborde et Géry de Saxcé, qui ont su prendre le temps nécessaire à la lecture de ce manuscrit, ayant tous deux pour but son amélioration. Ils ont révélé un réel intérêt pour mon travail au travers de leurs questions qui à défaut d'être pièges ouvrent ma réflexion. Je tiens à remercier mes examinateurs, Josselin Delmas, Umberto Perego et Bing Tie, pour leurs remarques pertinentes avec toujours cette curiosité pour mon sujet et ce désir de perfectionnement du manuscrit.

Je tiens aussi à témoigner de la reconnaissance à Pierre Ladevèze. J'ai découvert un homme de recherche, avec des idées plein la tête. Celles-ci m'ont fait bosser pendant un peu plus de trois ans, il m'a fallu les comprendre, les déchiffrer, les imbriquer, pour enfin me les faire miennes. Au fil de lectures, de discussions, il m'a sorti de bien des embûches, et m'a permis de construire ce travail mais aussi de me faire découvrir ce monde de la recherche.

Maintenant le tour de mon petit Éric, avec tout l'amour que tu m'as offert, je te dois bien au moins un petit paragraphe pour toi tout seul. Qu'aurait été cette thèse sans ta présence, ton soutien, nos recettes échangées, nos bières partagées... Derrière l'encadrant de stage, puis de thèse, j'ai découvert un ami. Avec notre goût, prononcé et partagé, des bons repas ; on en aura passé du bon temps. Tantôt professionnel, avec des questions qui nous taraudent puis tantôt amical, avec des envies de refaire le monde... Merci Éric de m'avoir soutenu, de m'avoir offert tant de temps et ton cœur.

Merci à tous les collègues du Labo, qui font son unicité par sa bonne ambiance. Frisette, Pierrounet, PAB, PAG, Arnaud, Huguette, Boubou, Panpan, Xavier, Ludo, le Vrai Camarade JL, Lydia, Nico, Op, Gus, ... et tous ceux que j'oublie.

Cette thèse m'a fait rester quelques années de plus à Cachan. Près de tous les zozos avec qui j'ai commencé cette folle aventure qu'est l'ENS de Cachan. Mon Flavoun, mon Reno, mon Loulou, mon Camillou, mon Bastiou, mon Pedrito, je vous remercie les gars, pour l'amitié offerte, le bon temps partagé, mais tout ça les loups c'est loin d'être fini, attention.

Enfin, je tiens à remercier particulièrement ma famille. Leur présence le jour de la soutenance m'a ému. Maman, Papa, merci pour votre éducation, votre présence, pour m'avoir appris la curiosité et la patience. Mes frérots ; Marco, merci pour ton omniprésente patate, ta joie de vivre ; Steffle, merci pour ta soif de papoter, de construire. Merci à vous quatre pour votre témoignage de vie. Ma Jeannette, tu y es pour beaucoup dans toutes ces lignes, toutes ces heures que tu auras passées à mes côtés en me soutenant et en m'encourageant, merci.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	ix
Introduction	1
1 État de l'art des estimateurs d'erreur	7
1 Préliminaires	8
1.1 Définition du problème continu	8
1.2 Définition du problème approché	10
1.3 Étude de la solution approchée et notion d'erreur	11
2 Estimateurs d'erreur globale	15
2.1 Estimateurs basés sur le lissage des contraintes	15
2.2 Estimateurs basés sur les résidus d'équilibre	19
2.3 Estimateurs basés sur la non-vérification de la relation de com- portement	25
3 Estimateurs d'erreur locale	32
3.1 Erreur en pollution	32
3.2 Méthodes utilisant les techniques d'extraction	35
4 Bilan	42
2 Mise en oeuvre de l'erreur en dissipation sur un problème de réf- érence	45
1 Problèmes d'élastoplasticité	47
1.1 Aspects phénoménologiques	47
1.2 Formulation du comportement	51
2 Problème de référence	56
2.1 Écriture du problème continu	56
2.2 Résolution numérique du problème	58
2.3 Exemple	60
3 Calcul de l'erreur en dissipation	61
3.1 Présentation de l'erreur en dissipation dans le cas élastoplastique	62

3.2	Calcul des champs admissibles	64
3.3	Illustration	67
4	Bilan	69
3	Technique d'encadrement de l'erreur locale	71
1	Mise en place de la technique d'extraction	72
1.1	Définition d'une quantité d'intérêt	72
1.2	Le problème miroir	73
1.3	Réécriture de l'erreur	74
2	Encadrement de l'erreur sur une quantité locale	76
2.1	Proposition d'un encadrement	76
2.2	Étude des bornes dans un cadre d'élastoplasticité	79
3	Bilan	85
4	Problème miroir	87
1	Changement de discrétisation	89
1.1	Projection de x_h	90
1.2	Projection de \hat{x}_h	90
2	Première approche et instabilité numérique	91
2.1	Extension directe du retour radial au problème miroir	91
2.2	Étude de la solution	94
3	Vers une réécriture du retour radial	97
3.1	Écriture de la loi d'évolution au premier ordre	97
3.2	Proposition d'un retour radial dédié au problème miroir	98
3.3	Illustration	100
4	Calcul d'une solution admissible $\delta\hat{x}_h$	102
4.1	Calcul d'une contrainte admissible $\delta\hat{\sigma}_h$	102
4.2	Calcul des variables internes	102
5	Comportement de la solution en fonction du paramètre d'extraction	103
6	Bilan	105
5	Calcul de l'erreur locale	107
1	Rappel : définition du problème central	109
2	Un problème de complémentarité linéaire	110
2.1	Écriture matricielle du problème	110
2.2	Résolution	111
3	Proposition d'une méthode de résolution dédiée	113
3.1	Établissement d'équations locales	113
3.2	Une résolution géométrique	115
3.3	Illustration	116
3.4	Conséquences de la discrétisation de \hat{p} sur le calcul des bornes	119
4	Calcul du α optimal	120
4.1	Comportement quadratique des bornes	121

4.2	Calcul de α_{opti}	121
5	Bilan	121
6	Étude des premières bornes	123
1	Vérification de l'encadrement proposé	125
1.1	Définition du problème direct et de la quantité d'intérêt	125
1.2	Étude des bornes	126
2	Étude des paramètres associés au problème miroir	128
2.1	Définition du problème direct et de la quantité d'intérêt	128
2.2	Influence du maillage	129
2.3	Influence du paramètre d'extraction	132
2.4	Conclusion	133
3	Second cas-test : Étude d'une structure en flexion	134
3.1	Description du problème direct	134
3.2	Premiers résultats	136
3.3	Étude de l'encadrement	137
4	Bilan	140
7	Amélioration de la pertinence de l'encadrement	141
1	Prise en compte du terme élastique	143
1.1	Réécriture du problème central	143
1.2	Résultats	144
2	Introduction d'une nouvelle fonction de pondération	145
2.1	Introduction d'une nouvelle fonction de pondération	145
2.2	Réécriture sous une forme de problème central	146
2.3	Résolution géométrique	147
2.4	Conséquences sur l'encadrement	150
3	Bilan	152
	Conclusion	153
A	Etude du problème adjoint	157
1	Problème de référence	157
2	Quantité d'intérêt	158
3	Problème adjoint	158
B	Calcul de l'erreur en dissipation \hat{e}_{CRE} dans le cas particulier élasto- plastique	161
C	Manipulation sur les bornes	163
1	Découpage de $\ell_{[\delta\hat{x},\hat{x}]}(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*)$	163
2	Etude de l'ordre de grandeur des différents termes	165
2.1	Etude de $\ell_{[\delta\hat{x}_h,\hat{x}_h]}^D(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*)$	166
2.2	Etude de $\ell_{[\delta\hat{x}_h,\hat{x}_h]}^E(\lambda^*, R^*)$	167

2.3	Etude de $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(R^*, p^*)$	169
D	Quelques propriétés d'intégrales	173
	Bibliographie	175

Table des figures

1.1	Représentation de la structure et de son environnement	8
1.2	Définition spatio-temporelle du problème approché	10
1.3	Résumé des propriétés de la solution du problème direct	12
1.4	Figure de principe de l'estimation d'erreur par lissage des contraintes (méthode ZZ2)	16
1.5	Figure de principe de l'estimation d'erreur basée sur les résidus d'équi- libre	20
1.6	Principe de la mesure de l'erreur de comportement	26
1.7	Figure de principe de l'erreur en comportement dans le cas linéaire	27
1.8	Interprétation géométrique de l'erreur en dissipation	30
1.9	Illustration de l'erreur en pollution	32
1.10	Étude de l'erreur locale	33
2.1	Courbes d'écroutissement d'un matériau élastoplastique	47
2.2	Courbes d'écroutissement d'un matériau élasto-viscoplastique	48
2.3	Schéma rhéologique représentant l'élasto(-visco)plasticité	48
2.4	Essais de flexion-torsion	49
2.5	Illustration 2D des critères de limite d'élasticité	50
2.6	Illustration des différents modes d'écroutissements	52
2.7	Représentation de la structure et de son environnement.	57
2.8	Géométrie de la structure étudiée avec ses conditions aux limites et de symétrie	60
2.9	Maillage spatial (gauche) et définition du point A (droite)	61
2.10	Réponse de la structure	61
2.11	Évolution des erreurs globales en fonction de la discrétisation	68
2.12	Courbe de convergence des mesures ϵ_d et $\hat{\epsilon}_d$ en fonction d'un re- maillage spatial ou temporel	69
3.1	Interprétation géométrique de l'utilisation d'une fonction convexe et du calcul de sa fonction duale	78
4.1	Exemple de remaillage spatial	89
4.2	Définition du problème direct	94
4.3	Définition de la zone d'intérêt	95

4.4	Définition des extracteurs	95
4.5	Convergence de l'algorithme initial	96
4.6	$\Delta_\delta p$ au point de Gauss 5636 au fur et à mesure des itérations	96
4.7	Évolution de la direction de la prédiction élastique au point de Gauss 5636 au fur et à mesure des itérations	97
4.8	Évolution du résidu d'équilibre en fonction du nombre d'itérations	100
4.9	Illustration d'une solution du problème miroir	100
4.10	Localisation des points de Gauss 2905, 3875 et 3900	101
4.11	Déformation plastique cumulée aux points de Gauss 2905, 3875 et 3900	101
4.12	Contrainte équivalente de von Mises aux points de Gauss 2905, 3875 et 3900	101
4.13	Étude de l'influence du paramètre d'extraction sur la contrainte du problème miroir	104
4.14	Étude de l'influence du paramètre d'extraction sur la déformation plastique du problème miroir	105
5.1	Solution \bar{p} du problème central, pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 0, 1$	112
5.2	Différence $\Delta\bar{p} = p_h - \bar{p}$, pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 0, 1$	112
5.3	Étude du terme de courbure	113
5.4	Illustration de l'utilisation de l'approche géométrique	116
5.5	Illustration de l'approche géométrique en différents points de Gauss (2905, 3785 et 3900) et différents paramètres α	117
5.6	Comparaison des méthodes de résolution du problème central	117
5.7	Évolution de la différence $\epsilon_{AM-AG}(\bar{p})$ en fonction du maillage	118
5.8	Évolution du gain apporté par l'approche géométrique	118
5.9	Etude de l'influence des paramètres α^\square	121
6.1	Définition du problème direct	126
6.2	Le problème direct : la structure dans son environnement. Définition spatio-temporelle du support de la quantité d'intérêt	128
6.3	Évolution de l'encadrement, en valeur relative, en fonction du nombre d'éléments du maillage associé au problème miroir ($N_t = 20$)	130
6.4	Carte de la déformation plastique cumulée du problème miroir à l'instant final ($t = 0$), pour différents maillages	130
6.5	Évolution de l'encadrement, en valeur relative, en fonction du nombre de pas de temps associé au problème miroir (maillage spatial : 44×44 , soit $N_e = 1936$)	131
6.6	Ordre de grandeur des champs du problème miroir	133
6.7	Le problème direct : la structure dans son environnement, le chargement associé et le maillage support de la résolution numérique	134
6.8	Le problème direct : carte des déformations plastiques cumulées à l'instant final et contribution des points de Gauss à l'erreur globale	135
6.9	Définition de la zone d'intérêt ainsi que de la fenêtre d'extraction	135

6.10	Évolution de la contrainte dans la zone d'intérêt	136
6.11	Évolution de la déformation dans la zone d'intérêt	136
6.12	Carte de la déformation plastique cumulée solution éléments finis du problème miroir à $t = 0$ et zoom sur la zone d'intérêt	137
6.13	Ordre de grandeur des champs du problème miroir	138
7.1	Illustration de l'utilisation de l'approche géométrique avec une fonction constante par morceaux $a(t)$	150
7.2	Définition de $a(t)$	150
7.3	Évolution des bornes inférieure et supérieure en fonction du paramètre t_0 ($N_e = 13450$ et $N_t = 20$).	151

Liste des tableaux

2.1	Paramètres matériaux adimensionnés	60
2.2	Évolution des mesures ϵ_d et $\hat{\epsilon}_d$ de l'erreur globale en dissipation en fonction du remaillage	67
5.1	Évolution des temps nécessaires aux résolutions du problème central en utilisant les approches matricielle ou géométrique en fonction du remaillage temporel	118
6.1	Valeur de l'erreur pour différents λ_Σ	127
6.2	Valeur de l'encadrement et des paramètres (α^-, α^+) optimaux associés pour différents maillages spatiaux ($N_t = 20$)	129
6.3	Valeur de l'encadrement et des paramètres (α^-, α^+) optimaux associés pour différentes discrétisations temporelles (maillage spatial 44×44)	131
6.4	Valeur de l'erreur pour différents λ_Σ	132
6.5	Évolution de l'encadrement en fonction du paramètre d'extraction ($N_e = 13450, N_t = 20$)	138
6.6	Évolution de l'encadrement en fonction du nombre de pas de temps ($N_e = 13450, \lambda_\Sigma = 1$)	139
6.7	Évolution de l'encadrement en fonction du nombre d'éléments ($N_t = 20, \lambda_\Sigma = 1$)	139
7.1	Gain apporté par la prise en compte du terme élastique	145
7.2	Évolution de l'encadrement en fonction de t_0 , ($N_e = 13450$ et $N_t = 20$)	151

Introduction

Depuis maintenant un demi-siècle, les méthodes de conception ont été complètement révolutionnées. Les ingénieurs des bureaux d'études ont quitté les maquettes et les planches à dessin pour des logiciels de Conception Assistée par Ordinateur. Ainsi, devant les contraintes de coût et de temps de plus en plus sévères et omniprésentes dans le monde de l'industrie, l'informatique a apporté de véritables solutions. L'ordinateur assiste les ingénieurs lors des étapes de conception, mais aussi de dimensionnement et a ainsi aidé à réduire leur durée. Par exemple, la clio 1, dont les premiers modèles ont été mis sur le marché en 1990, a nécessité 54 mois de conception. Seize ans plus tard, Renault présente la clio 3, dont la conception s'est faite en 28 mois, soit à peu près deux fois moins de temps.

De nos jours, la simulation numérique devient plus qu'un simple outil de conception. Le «virtual testing», utilisé également en recherche pour mieux comprendre les matériaux nouveaux en est l'exemple le plus éloquent. Des essais dont la durée peut atteindre plusieurs milliers d'heures sont accomplis en une nuit, ou d'autres, impossibles à mettre en oeuvre, offrent par leur simulation, la visibilité de mécanismes clefs propres à certains matériaux.

Le calcul de structure assiste donc aujourd'hui aussi bien l'ingénieur dans toutes les phases de dimensionnement que le chercheur curieux de décrire le comportement d'un nouveau matériau. La complexité des problèmes étudiés ne permet de mener à bien une résolution analytique que dans de rares cas, rendant la solution exacte généralement inaccessible. Un problème approché, associé à une approche de résolution numérique est alors utilisé. À cette fin, on a souvent recours à la méthode des éléments finis. Ces approches n'offrent toutefois qu'une approximation de la solution exacte, dont la qualité dépend des paramètres de discrétisation : tailles et types des éléments finis, tailles des pas de temps pour les problèmes d'évolution, ou encore seuils de convergence des algorithmes adoptés pour les problèmes non-linéaires. La connaissance de cette solution approchée ainsi obtenue est aussi intéressante que la connaissance de son écart avec la solution exacte du problème continu (ou de référence). On appelle *erreur de discrétisation* cet écart.

Dès les débuts de l'utilisation de la méthode des éléments finis, la connaissance de l'erreur de discrétisation associée et sa maîtrise ont été les centres d'intérêt de nombreux travaux de recherches au sein de la thématique vérification et validation (V&V). Tandis qu'en validation on cherche à contrôler la pertinence du modèle

continu, en vérification on s'intéresse particulièrement à la maîtrise de l'erreur de discrétisation. Tributaire de la solution exacte d'un problème, l'erreur associée à une solution approchée n'est généralement pas accessible. L'objet de la vérification est alors la proposition d'outils d'estimation de l'erreur de discrétisation. Tandis que certains évaluent directement l'erreur, d'autres sont construits afin d'offrir une évaluation conservative de bornes inférieure et supérieure de l'erreur. Ces estimateurs permettent alors d'avoir une maîtrise complète du problème approché, en offrant un encadrement strict de l'erreur.

Basés sur une vision globale de l'erreur, différents types d'estimateurs ont vu le jour dans les années 70-80. S'adressant à des problèmes d'élasticité linéaire ou de thermique, ces outils utilisent soit l'erreur en comportement initiée dans [Ladevèze, 1975], soit les résidus d'équilibre introduits dans [Babuška et Rheinboldt, 1978a] ou encore le lissage des contraintes, présenté dans [Zienkiewicz et Zhu, 1987]. De par leur faible coût et leur facilité d'implémentation, les travaux d'estimation par lissage de contrainte sont aujourd'hui les plus largement répandus dans l'industrie. La puissance des ordinateurs augmentant régulièrement, il paraît moins évident de sacrifier la robustesse et l'aspect garanti qu'offrent intrinsèquement les estimateurs en comportement et certains de ceux basés sur les résidus d'équilibre. De nombreux états de l'art ont été présentés dans ce domaine, parmi les plus complets, on trouve : [Babuška et Strouboulis, 2001, Stein *et al.*, 2003, Ladevèze et Pelle, 2004, Oden *et al.*, 2005].

Que ce soit avec des objectifs de "virtual testing" ou de dimensionnement, le calcul de structure est utilisé afin d'étudier des quantités locales. Dans le milieu des années 90, la construction d'outils d'estimation d'erreur sur des quantités locales a alors vu le jour. Dédiés aux problèmes d'élasticité linéaire, les premiers outils s'intéressant à l'erreur locale ont été introduits dans [Babuška *et al.*, 1994]. Basés sur le concept d'erreur en pollution, ces outils n'offrent qu'une estimation de piètre qualité et non garantie. Dans [Becker et Rannacher, 1996], les méthodes d'extraction sont, pour la première fois, utilisées dans une problématique de vérification. Bien que les premières versions n'offrent toujours pas d'évaluation garantie de l'erreur locale, leur simplicité d'implémentation liée à l'utilisation des outils d'extraction l'ont rendue très populaire. Ainsi dans [Cirak et Ramm, 1998, Peraire et Patera, 1998, Prudhomme et Oden, 1999, Ladevèze *et al.*, 1999b, Strouboulis *et al.*, 2000b, Ohnibus *et al.*, 2001], l'association des outils d'extraction avec les différentes méthodes d'estimation de l'erreur globale, alors maîtrisées, offrent une estimation aisée de l'erreur sur une quantité d'intérêt locale. Ainsi construits, ces estimateurs d'erreur locale héritent des propriétés de l'estimateur d'erreur globale utilisé (robustesse, aspect garanti, ...).

Enfin, le développement des ordinateurs et des techniques de calcul offrent des possibilités toujours nouvelles en termes de modélisation. Ainsi, afin d'obtenir une simulation plus réaliste, modèles de comportement et géométries atteignent des niveaux de complexités toujours plus importants. Proposer des outils de vérification

pour les problèmes non-linéaires représente un challenge sur le plan de la recherche. De nombreux travaux étendent au non-linéaire les approches développées dans un cadre linéaire. Les premiers travaux portent sur l'erreur sous une forme globale [Babuška et Rheinboldt, 1982, Coffignal et Ladevèze, 1983, Hansbo et Johnson, 1991, Ladevèze et Moës, 1998]. Dans un second temps, des outils s'intéressant à l'erreur sur des quantités d'intérêt locales ont été présentés [Eriksson *et al.*, 1995, Rannacher et Suttmeier, 1998, Rannacher et Suttmeier, 1999, Maday *et al.*, 1999, Becker et Rannacher, 2001]. La plupart de ces outils reposent sur une extension simple des concepts introduits pour les problèmes linéaires (comportement linéarisé, erreur en temps négligée, ...). Dans le cas des problèmes d'évolution, seuls les outils basés sur l'erreur en dissipation offrent une mesure garantie de l'erreur.

Actuellement, les seuls outils, à notre connaissance, permettant le calcul de bornes garanties de l'erreur sur une quantité d'intérêt locale dans un cadre non-linéaire d'évolution sont ceux introduits dans [Ladevèze, 2006, Ladevèze, 2008b]. Ils reposent sur les concepts de dualité, affiliés à l'erreur en dissipation, et sont associés à une écriture généralisée des outils d'extraction. L'efficacité de la méthode a déjà été démontrée pour les problèmes linéaires, mais dépendant du temps, comme la viscoélasticité [Chamoin et Ladevèze, 2007] et la dynamique [Ladevèze et Waeytens, 2009]. À partir de cette méthode générale développée au LMT-Cachan, ce travail met en place un outil fournissant des bornes garanties de l'erreur de discrétisation commise sur des quantités locales issues de problèmes non-linéaire d'évolution. De nouveaux problèmes, inhabituels en vérification, apparaissent et des solutions sont proposées afin de mener à bien le calcul des bornes.

La généralisation de l'erreur en dissipation associée aux outils d'extraction, illustrée ici dans le cas particulier de l'élastoplasticité, présente de nombreux aspects novateurs. Les contributions originales apportées par ce travail et développées dans ce manuscrit portent sur différents points :

- Le premier concerne l'erreur en dissipation. Cette mesure de l'erreur offre l'atout notoire d'assurer une évaluation garantie de l'erreur. Dans le cadre de l'élasto-viscoplasticité, les premières estimations l'utilisant sont présentées dans [Ladevèze et Moës, 1997]. Une réécriture de cet estimateur est présentée dans [Ladevèze, 2008b], avec pour objectif l'amélioration de sa pertinence. Dans ce travail, cette nouvelle mesure est pour la première fois mise en pratique dans un cadre non-linéaire, comme l'élastoplasticité.
- Dans [Rannacher et Suttmeier, 1999, Rannacher et Suttmeier, 2002], les outils classiques d'extraction, utilisant un problème adjoint, ont été étendus à l'erreur locale en élastoplasticité. Le comportement utilisé au sein du problème adjoint est le comportement tangent du problème de référence. Introduit dans [Ladevèze, 2006], le concept de problème miroir est présenté et, pour la première fois, mis en oeuvre dans ce travail. Ce problème peut être vu comme une généralisation du problème adjoint. La principale différence est l'utilisation d'un nouveau comportement, permettant au problème miroir d'hériter de

l'histoire du problème de référence.

- Un problème de minimisation sous contraintes, appelé problème central, est introduit. Sa résolution est nécessaire afin d'évaluer les bornes de l'erreur locale. Ce problème, d'un type nouveau pour le calcul d'erreur, peut être vu comme un problème de contrôle optimal. Plusieurs approches de résolution numérique de ce problème sont proposées et comparées. Il apparaît que l'une des techniques implémentées, prenant en compte le cadre spécifique du problème de vérification, est particulièrement efficace.

- L'outil final proposé dans ce travail permet l'évaluation garantie de l'erreur sur une quantité d'intérêt à support local issue d'un problème non-linéaire. C'est actuellement, nous semble-t-il, l'unique méthode qui le permet.

- Ce travail est présenté en sept chapitres, organisés de la manière suivante :
- ◇ après un succinct rappel de la méthode des éléments finis et la notion d'erreur de discrétisation, la première partie propose un état de l'art des outils existants permettant d'offrir une évaluation de l'erreur de discrétisation. Les méthodes associées à l'erreur globale, en linéaire comme en non-linéaire sont présentées, ainsi que celles associées à l'erreur sur une quantité d'intérêt locale ;
 - ◇ dans un second temps, un problème classique d'élastoplasticité est présenté. Le calcul de l'erreur en dissipation est détaillé, ainsi que la construction d'une solution dite admissible qui lui est associée ;
 - ◇ la troisième partie présente la technique d'encadrement de l'erreur sur une quantité d'intérêt. Le problème miroir est introduit, ainsi que le problème central. Enfin, une analyse de l'encadrement est conduite, afin d'établir les bornes et d'estimer les ordres de grandeur mis en jeu ;
 - ◇ le quatrième chapitre traite du problème miroir. Une étude fine de son comportement y est menée, afin de proposer un algorithme de résolution dont la convergence est assurée ;
 - ◇ la résolution du problème central est l'objet du cinquième chapitre. Deux approches numériques y sont présentées. L'une, classique, permet d'écrire le problème sous la forme d'une étude de complémentarité linéaire tandis que la seconde, géométrique, est construite autour des propriétés associées au problème central ;
 - ◇ la sixième partie présente la mise en pratique des techniques d'encadrement garanti de l'erreur sur une quantité d'intérêt locale. Les premiers résultats sont illustrés sur deux cas tests maîtrisés permettant de valider l'approche et de comprendre le rôle des différents paramètres introduits. Ensuite, la mise en oeuvre des nouveaux outils introduits est réalisée sur un cas test plus complexe ;
 - ◇ le septième et dernier volet de ce manuscrit propose deux démarches permettant d'améliorer la pertinence de l'outil d'estimation de l'erreur introduit.

Chapitre 1

État de l'art des estimateurs d'erreur

L'objet de ce chapitre est de présenter les principales méthodes de calculs existantes pour le calcul de l'erreur de discrétisation, sous une forme globale et locale. La définition du problème mécanique étudié, la méthode de résolution des éléments finis en déplacement et les approximations retenues sont avant tout présentées.

Sommaire

1	Préliminaires	8
1.1	Définition du problème continu	8
1.2	Définition du problème approché	10
1.3	Étude de la solution approchée et notion d'erreur	11
2	Estimateurs d'erreur globale	15
2.1	Estimateurs basés sur le lissage des contraintes	15
2.2	Estimateurs basés sur les résidus d'équilibre	19
2.3	Estimateurs basés sur la non-vérification de la relation de comportement	25
3	Estimateurs d'erreur locale	32
3.1	Erreur en pollution	32
3.2	Méthodes utilisant les techniques d'extraction	35
4	Bilan	42

1 Préliminaires

Ces préliminaires présentent de manière concise un problème classique de mécanique ainsi que les étapes menant au calcul d'une solution approchée. Les notions d'erreurs globale et locale sont aussi introduites.

1.1 Définition du problème continu

Considérons une structure de domaine Ω et de frontière $\partial\Omega$. Cette structure est soumise à des efforts volumiques f_d , à des efforts surfaciques F_d sur une partie de sa frontière notée $\partial_f\Omega$ et à des déplacements imposés sur la partie complémentaire $\partial_u\Omega$. La figure FIG.(1.1) illustre cette structure dans son environnement. Enfin, on suppose l'évolution quasi-statique sur $[0; T]$.

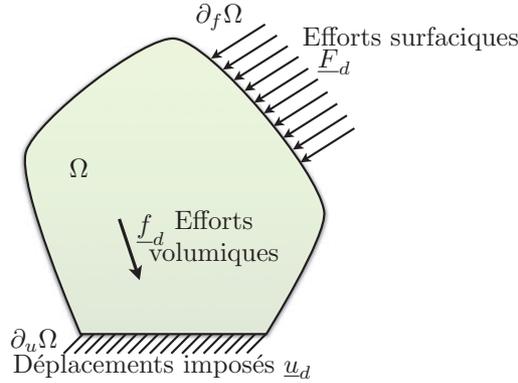


FIGURE 1.1: Représentation de la structure et de son environnement

Les inconnues d'un tel problème sont le déplacement \underline{u} et la contrainte σ en tout point \underline{M} de la structure à tout instant t de l'intervalle d'étude $[0, T]$. Le problème peut s'écrire :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver pour tout } (\underline{M}, t) \in \Omega \times [0, T] : \\ &\left\{ \begin{array}{l} (\underline{u}(\underline{M}, t), \sigma(\underline{M}, t)) \in \mathbf{U}^{ad} \times \mathbf{S}^{ad} \\ \sigma(\underline{M}, t) = \mathbf{A}(\varepsilon(\underline{u}(\underline{M}, \tau))), \tau \in [0, t] \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.1)$$

où \mathbf{U}^{ad} est l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles :

$$\mathbf{U}^{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{u}(\underline{M}, t) \in \mathbf{U} \\ \forall \underline{M} \in \Omega, \underline{u}(\underline{M}, 0) = \underline{0} \\ \forall \underline{M} \in \partial_u\Omega, \underline{u}(\underline{M}, t) = \underline{u}_d(\underline{M}, t) \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

et \mathcal{S}^{ad} l'espace des champs de contrainte statiquement admissibles :

$$\mathcal{S}^{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma(\underline{M}, t) \in \mathcal{S} \\ \forall \underline{M} \in \Omega, \sigma(\underline{M}, 0) = \underline{0} \\ \text{div}(\sigma(\underline{M}, t)) + \underline{f}_d = \underline{0} \\ \forall \underline{M} \in \partial_f \Omega, \sigma(\underline{M}, t) \cdot \underline{n} = \underline{F}_d(\underline{M}, t) \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

Le déplacement et la contrainte sont liés en tout point par la relation de comportement, synthétisée dans l'écriture : $\sigma(\underline{M}, t) = \mathbf{A}(\varepsilon(\underline{u}(\underline{M}, \tau)), \tau \in [0, t])$. Sous l'hypothèse des petites déformations, la déformation ε est la partie symétrique du gradient des déformations $\varepsilon(\underline{u}) = \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}}(\underline{u}) + {}^t \underline{\text{grad}}(\underline{u}))$.

Remarque 1.1 :

Les espaces \mathbf{U} et \mathcal{S} sont les espaces fonctionnels de définition du déplacement et de la contrainte. Usuellement, on les définit tels que, en 3D :

$$\forall t \in [0; T] \left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{u} \in \mathbf{U}, \underline{u}(\underline{M}, t) \in (\mathcal{H}_1(\Omega))^3 \\ \forall \sigma \in \mathcal{S}, \sigma(\underline{M}, t) \in M_s(3) \cap (\mathcal{L}_2(\Omega))^6 \end{array} \right.$$

La régularité en temps peut être choisie telle que ces champs soient dérivables par morceaux. Pour plus d'information quant à la définition fonctionnelle de la solution dans le cadre des systèmes dissipatifs standards, on peut se référer à [Laborde et Nguyen, 1990].

On introduit de la même manière les espaces \mathbf{U}_0^{ad} et \mathcal{S}_0^{ad} . Ils sont respectivement les espaces des champs de déplacement cinématiquement admissibles à 0 et des champs de contrainte statiquement admissibles à 0.

$$\mathbf{U}_0^{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{u}(\underline{M}, t) \in \mathbf{U} \text{ tel que :} \\ \forall \underline{M} \in \Omega, \underline{u}(\underline{M}, 0) = \underline{0} \\ \forall \underline{M} \in \partial_u \Omega, \underline{u}(\underline{M}, t) = \underline{0} \end{array} \right\} \quad (1.4)$$

$$\mathcal{S}_0^{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma(\underline{M}, t) \in \mathcal{S} \text{ telle que :} \\ \forall \underline{M} \in \Omega, \sigma(\underline{M}, 0) = \underline{0} \\ \text{div}(\sigma(\underline{M}, t)) = \underline{0} \\ \forall \underline{M} \in \partial_f \Omega, \sigma(\underline{M}, t) \cdot \underline{n} = \underline{0} \end{array} \right\} \quad (1.5)$$

La plupart des méthodes de résolution reposent sur une formulation faible de l'équation d'équilibre. \mathcal{S}^{ad} se met alors sous la forme :

$$\mathcal{S}^{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma(\underline{M}, t) \in \mathcal{S} \text{ telle que} \\ \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \int_{\Omega} \left\{ \text{Tr}[\sigma \cdot \varepsilon(\underline{u}^*)] - \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \right\} dV = \int_{\partial_f \Omega} \{ \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* \} dS \end{array} \right\} \quad (1.6)$$

On note $(\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex})$ la solution exacte de ce problème. Le calcul de cette dernière n'est réalisable de manière analytique que dans très peu de cas. Le plus souvent, une approche numérique est déployée afin d'obtenir une approximation $(\underline{u}_h, \sigma_h)$. Une méthode très utilisée aujourd'hui est la méthode des éléments finis. La suite de ce travail traite de l'erreur de discrétisation qui lui est associée.

1.2 Définition du problème approché

On s'intéresse à la méthode des éléments finis en déplacement. De cette manière, le déplacement est considéré comme la seule inconnue du problème, la contrainte étant son image par le comportement. Afin de donner un caractère fini à l'espace d'approximation du déplacement \mathbf{u}_h , le domaine d'étude $\Omega \times [0, T]$ est discrétisé en $\Omega_h \times \bigcup_{1 \leq n \leq N_t} [t_{n-1}, t_n]$, h étant un paramètre dimensionnel associé à la finesse du maillage et N_t le nombre de pas de temps introduits. La figure FIG.(1.2) illustre cette discrétisation : la structure Ω est approchée par l'ensemble des éléments constituant Ω_h , une description temporelle discrète est introduite et les conditions aux limites sont projetées sur leur espace d'interpolation respectif.

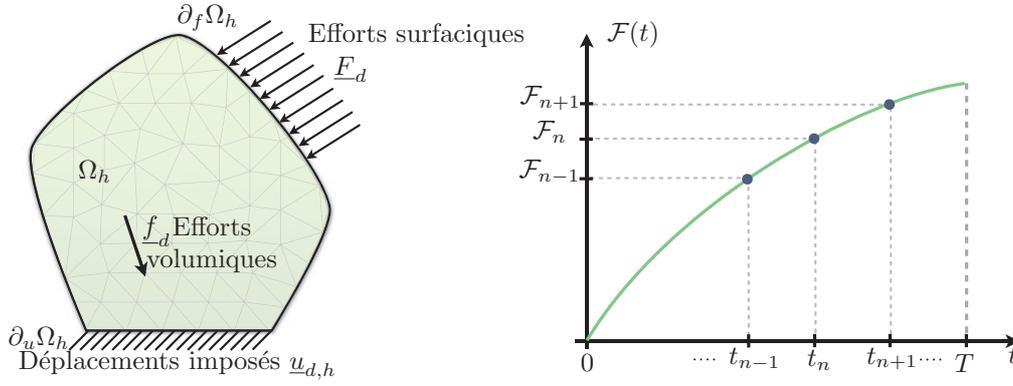


FIGURE 1.2: Définition spatio-temporelle du problème approché

Basé sur ce domaine d'étude discret, on considère \mathbf{u}_h comme l'espace de dimension finie caractérisant le déplacement. Celui-ci y est défini de manière élémentaire, continu ou de degrés supérieurs en espace et en temps. En introduisant le projeté $\underline{u}_{d,h}$ de \underline{u}_d sur \mathbf{u}_h , on peut définir l'espace des déplacements cinématiquement admissibles :

$$\mathbf{u}_h^{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_h(\underline{M}, t) \in \mathbf{u}_h \text{ tel que :} \\ \forall \underline{M} \in \Omega_h, \underline{u}_h(\underline{M}, 0) = \underline{0} \\ \forall \underline{M} \in \partial_u \Omega_h, \underline{u}(\underline{M}, t) = \underline{u}_{d,h} \end{array} \right\} \quad (1.7)$$

Afin de calculer la contrainte, une vision discrète du comportement \mathbf{A}_h est introduite. Elle sous-entend la mise en place d'algorithmes de résolution dans le cas non-linéaire, et d'une approche itérative en temps dans le cas d'un comportement dit d'évolution. Dans le cas linéaire, on a $\mathbf{A}_h = \mathbf{A}$. Reste à définir l'espace des contraintes statiquement admissibles au sens des éléments finis, basé sur la formulation faible de l'équation d'équilibre :

$$\mathcal{S}_h^{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_h(\underline{M}, t) \in \mathcal{S}_h \text{ telle que :} \\ \forall \underline{u}^* \in \mathbf{u}_{0,h}^{ad}, \int_{\Omega_h} \left\{ \text{Tr} [\sigma_h \cdot \varepsilon(\underline{u}^*)] - \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \right\} dV = \int_{\partial_f \Omega_h} \{ \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* \} dS \end{array} \right\} \quad (1.8)$$

où $\mathbf{u}_{0,h}^{ad}$ est l'espace approché des déplacements cinématiques admissibles à 0.

Le problème approché peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver pour tout } (\underline{M}, t) \in \Omega \times [0, T] : \\ & \left\{ \begin{array}{l} (\underline{u}_h(\underline{M}, t), \sigma_h(\underline{M}, t)) \in \mathbf{U}_h^{ad} \times \mathcal{S}_h^{ad} \\ \sigma_h(\underline{M}, t) = \mathbf{A}_h(\varepsilon(\underline{u}_h(\underline{M}, \tau)), \tau \in [0, t]) \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.9)$$

On note $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ la solution de ce problème. De plus amples précisions sur la méthode des éléments finis en déplacement sont disponibles dans [Zienkiewicz *et al.*, 2005].

1.3 Étude de la solution $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ et notion d'erreur

Dans cette étude, on se place dans le cas particulier où Ω et Ω_h coïncident ($\Omega = \Omega_h$). Les solutions $(\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex})$ et $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ ont donc même support et sont comparables. De plus, dans [Oden *et al.*, 2005], les auteurs illustrent que les défauts de recouvrement influent peu sur la qualité de la solution $(\underline{u}_h, \sigma_h)$.

1.3.1 Propriétés de la solution éléments finis $(\underline{u}_h, \sigma_h)$

La solution $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ est par essence une solution approchée. Mais étant obtenue par la méthode des éléments finis, elle vérifie certaines propriétés connues.

Etude de \mathbf{U}_h^{ad}

Dans tout le domaine, l'espace d'approximation choisi (polynôme de degré p fixé sur chaque élément) est un sous-espace de l'espace \mathcal{H}_1 , ainsi $\mathbf{U}_h \subset \mathbf{U}$.

De plus, dans les cas où les conditions aux limites en déplacement sont imposées par élimination ou au moyen de coefficients de Lagrange, la solution en déplacement \underline{u}_h vérifie exactement les conditions aux limites du problème $\underline{u}_{d,h}$. Si l'espace d'approximation est suffisamment riche pour les décrire (soit $\underline{u}_{d,h} = \underline{u}_d$), alors les conditions aux limites en déplacement sont exactement vérifiées.

En ce plaçant dans le cas figure adéquat, le déplacement solution \underline{u}_h est cinématiquement admissible sous sa définition continue, soit :

$$\underline{u}_h \in \mathbf{U}_h^{ad} \subset \mathbf{U}^{ad} \quad (1.10)$$

Etude de \mathcal{S}_h^{ad}

Logiquement, la méthode des éléments finis étant une approche en déplacement, c'est la contrainte qui porte le plus de défauts. Dans la plupart des cas, la contrainte ne vérifie ni les conditions aux limites ni l'équilibre, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{dans } \Omega, \underline{\text{div}}(\sigma_h) + \underline{f}_d \neq 0 \\ \text{sur } \partial_f \Omega, \sigma_h \cdot \underline{n} \neq \underline{F}_d \end{array} \right. \quad (1.11)$$

avec \underline{n} la normale sortante.

De la même manière, la continuité du vecteur contrainte est imposée sous une forme faible. Elle peut présenter des discontinuités entre les éléments du maillage. La solution approchée en contrainte σ_h n'est donc pas statiquement admissible, soit :

$$\sigma_h \in \mathcal{S}_h^{ad} \not\subset \mathcal{S}^{ad} \quad (1.12)$$

Autres sources d'approximation

Les sources d'erreur inhérentes à la méthode des éléments finis ne concernent pas seulement la contrainte. Ainsi dans le cas d'étude de matériaux non-linéaires, l'algorithme mis en place afin de résoudre le comportement est défini avec un seuil, sous-entendant une erreur. On peut aussi noter que pour toutes les approches temporelles, la discrétisation temporelle est également à prendre en compte : le comportement, mais aussi l'équilibre sont vérifiés en un sens approché uniquement aux seuls instants discrets correspondant aux piquets de temps.

La figure FIG.(1.3) résume les caractéristiques de la solution du problème direct.

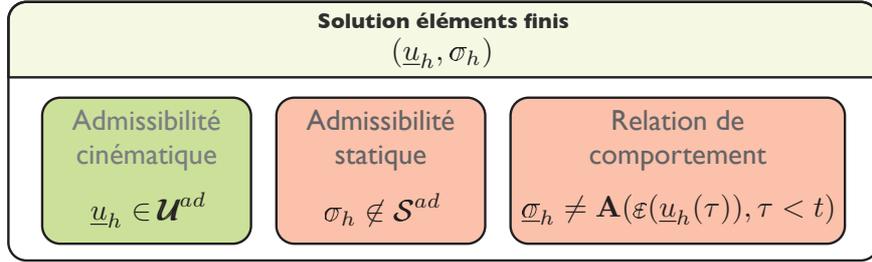


FIGURE 1.3: Résumé des propriétés de la solution du problème direct

1.3.2 Notion d'erreur et d'estimateur

La solution approchée $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ présente donc des défauts inhérents à la méthode de résolution utilisée pour l'obtenir. Afin de connaître la qualité de l'information portée par $(\underline{u}_h, \sigma_h)$, il est nécessaire de lui associer une erreur. Celle-ci est simplement une mesure de la distance la séparant de la solution exacte.

L'erreur vraie est par définition la quantité associée au déplacement :

$$\underline{e}_h(\underline{u}) = \underline{u}_{ex} - \underline{u}_h \quad (1.13)$$

On peut construire un nouveau problème, dont l'inconnue est $\underline{e}_h(\underline{u})$. Par exemple dans le cas linéaire, en l'injectant dans la formulation faible associée à l'équation

d'équilibre EQ.(1.6), on a :

$$\begin{aligned} \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \int_{\Omega} \{ \text{Tr} [\mathbf{A} \underline{\varepsilon}(\underline{e}_h(\underline{u})) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*)] \} dV = - \int_{\Omega} \{ \text{Tr} [\mathbf{A} \underline{\varepsilon}(\underline{u}_h) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*)] \} dV \\ + \int_{\Omega} \{ \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \} dV + \int_{\partial_f \Omega} \{ \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* \} dS \quad (1.14) \end{aligned}$$

$\underline{e}_h(\underline{u})$ est la fonction appartenant à \mathbf{U}_0^{ad} vérifiant l'équation précédente, appelée équation des résidus. Résoudre exactement ce problème afin de connaître l'erreur vraie est, à l'instar du problème direct, souvent hors de portée. Dans la pratique, on cherche à estimer l'erreur vraie, à moindre coût.

Remarque 1.2 :

De manière analogue, on peut définir l'erreur vraie sur la contrainte ou la déformation.

$$\underline{e}_h(\sigma) = \sigma_{ex} - \sigma_h \text{ et } \underline{e}_h(\varepsilon) = \varepsilon_{ex} - \varepsilon_h \quad (1.15)$$

Remarque 1.3 :

La solution éléments finis est la meilleure approximation de la solution exacte dans l'espace \mathbf{U}_h^{ad} . Dans le cas linéaire, l'erreur associée vérifie alors la propriété suivante, appelée propriété d'orthogonalité de Galerkin :

$$\forall \underline{u}_h^* \in \mathbf{U}_{0,h}^{ad}, \quad \int_{\Omega} \{ \text{Tr} [\mathbf{A} \underline{\varepsilon}(\underline{e}_h(\underline{u})) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{u}_h^*)] \} dV = 0 \quad (1.16)$$

Erreur globale

Les estimateurs d'erreur permettent d'évaluer une mesure de l'erreur. Ainsi, il nous faut choisir une grandeur scalaire la caractérisant. On peut simplement définir l'erreur globale $e_{\Omega,h}$ à l'aide des normes usuelles \mathcal{L}^2 ou énergétique des quantités locales. De cette manière, on a :

$$e_{\mathbf{A},\Omega}(\sigma) = \|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\mathbf{A}^{-1},\Omega}, \text{ et } e_{\mathbf{A},\Omega}(\underline{u}) = \|\underline{u}_{ex} - \underline{u}_h\|_{\mathbf{A},\Omega}$$

ou, pour les problèmes d'évolution :

$$e_{\mathbf{A},\Omega \times [0,T]}(\sigma) = \|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\mathbf{A}^{-1},\Omega \times [0,T]}, \text{ et } e_{\mathbf{A},\Omega \times [0,T]}(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) = \|\underline{\varepsilon}(\underline{u}_{ex} - \underline{u}_h)\|_{\mathbf{A},\Omega \times [0,T]}$$

La norme utilisée ci-dessus est la norme associée à l'opérateur \mathbf{A} , désignant une application linéaire, symétrique et définie positive :

$$\begin{aligned} \|\underline{\varepsilon}(\underline{u})\|_{\mathbf{A}}^2 &= |\text{Tr} [\mathbf{A}(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{u})]| \text{ et } \|\mathbb{X}\|_{\mathbf{A}}^2 = |\text{Tr} [\mathbf{A}(\mathbb{X}) \cdot \mathbb{X}]| \\ \|\underline{\varepsilon}(\underline{u})\|_{\mathbf{A},\Omega}^2 &= \int_{\Omega} \{ \text{Tr} [\mathbf{A}(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{u})] \} dV \text{ et } \|\mathbb{X}\|_{\mathbf{A},\Omega}^2 = \int_{\Omega} \{ \text{Tr} [\mathbf{A}(\mathbb{X}) \cdot \mathbb{X}] \} dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\underline{\varepsilon}(\underline{u})\|_{\mathbf{A},\Omega\times[0,T]}^2 &= \int_{\Omega} \int_0^T \{\text{Tr} [\mathbf{A}(\underline{\varepsilon}(\underline{u})).\underline{\varepsilon}(\underline{u})]\} dt dV \\ \text{et } \|\mathbb{X}\|_{\mathbf{A},\Omega\times[0,T]}^2 &= \int_{\Omega} \int_0^T \{\text{Tr} [\mathbf{A}(\mathbb{X}).\mathbb{X}]\} dt dV\end{aligned}$$

On retrouve la norme usuelle sur \mathcal{L}^2 en injectant l'opérateur identité :

$$\|\mathbb{X}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \|\mathbb{X}\|_{\mathbf{I},\Omega}$$

Quantité d'intérêt et erreur locale

Dans la plupart des cas, un calcul éléments finis est mené afin d'obtenir une valeur locale d'un déplacement, d'une contrainte. Il est donc autrement plus intéressant d'estimer l'erreur non pas sous sa forme globale mais sous un caractère plus local. De cette manière, on introduit la notion de quantité d'intérêt I , traduisant un caractère local d'une solution, comme la moyenne de son déplacement dans la direction \underline{e}_1 sur une zone $\omega \subset \Omega$ entre deux instants t_1 et t_2 ($0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$))(équation EQ.(1.17)) ou même ponctuelle, c'est à dire au point M_I et à l'instant t_I (équation EQ.(1.18)).

$$I_{ex} = \int_{\omega} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\underline{u}_{ex} \cdot \underline{e}_1}{\text{mes}(\omega)(t_2 - t_1)} \right\} dt dV \quad (1.17)$$

$$I_{ex} = \underline{u}_{ex}(M_I, t_I) \cdot \underline{e}_1 \quad (1.18)$$

Bien sûr, on peut étendre ces définitions aux tenseurs des contraintes ou des déformations. On peut également définir une quantité d'intérêt comme une grandeur non-linéaire d'une solution, comme sa contrainte de von Mises en un point.

L'erreur locale associée, ou erreur en quantité d'intérêt, est la mesure entre les valeurs prises par la quantité d'intérêt sur la solution exacte et sur la solution approchée, soit :

$$e_h(I) = I_{ex} - I_h \quad (1.19)$$

Notion d'estimateur

L'estimateur est l'outil offrant une mesure de l'erreur, qu'elle soit globale ou locale. Deux critères permettent de les classer :

1. *a priori* / *a posteriori*

Tout d'abord, on peut définir le caractère *a priori* ou *a posteriori* des estimateurs. Les estimateurs *a priori*, introduits dans [Azziz et Babuška, 1972] et [Ciarlet, 1978] ne nécessitent aucun calcul supplémentaire, ni même la connaissance de la solution approchée $(\underline{u}_h, \sigma_h)$. Ils se basent sur le maillage qu'il soit spatial ou temporel. Par exemple, dans le cas de l'erreur spatiale, sous certaines conditions de régularité, il est montré qu'il existe une constante C telle qu'asymptotiquement, on ait :

$$e_h \leq C.h^q \quad (1.20)$$

où h est la taille des éléments et q le degré d'interpolation élémentaire. La constante C dépend du maillage et des données mais ne peut être déterminée de manière explicite. Ce type d'estimateurs donne une information trop grossière pour être utilisée comme critère, par contre il donne une idée de la convergence de la méthode.

Les estimateurs *a posteriori* sont des outils qui vont au contraire utiliser au moins la solution éléments finis $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ afin d'offrir une estimation précise de l'erreur. De nombreux états de l'art ont été réalisés pour ces méthodes, parmi les plus complets, on trouve : [Babuška et Strouboulis, 2001, Stein *et al.*, 2003, Ladevèze et Pelle, 2004, Oden *et al.*, 2005]. Les deux parties suivantes illustrent les principales méthodes existantes.

2. Aspect strict/garanti

Il est important de différencier les estimateurs selon leur rapport à l'erreur vraie. Ainsi, certains offrent une évaluation de l'erreur $\epsilon_h(\underline{u}) \approx \|\underline{e}_h(\underline{u})\|$ tandis que d'autres permettent d'obtenir une borne garantie de celle-ci $\epsilon_h(\underline{u}) \geq \|\underline{e}_h(\underline{u})\|$. L'aspect garanti est non-négligeable, surtout pour des grandeurs dimensionnantes.

2 Estimateurs d'erreur globale

Les estimateurs d'erreur globale se différencient en trois familles distinctes : ceux basés sur le lissage des contraintes, ceux basés sur les résidus d'équilibre et enfin ceux basés sur l'erreur en comportement.

2.1 Estimateurs basés sur le lissage des contraintes

La méthode du lissage des contraintes, telle qu'elle est introduite dans [Zienkiewicz et Zhu, 1987, Zhu et Zienkiewicz, 1988], ne s'intéresse qu'à l'erreur en contrainte $e_h(\sigma)$. En effet le tenseur des contraintes étant la quantité la plus pauvre en information, elle est celle concentrant le plus de défauts. Les estimateurs en lissage des contraintes réduisent ainsi l'étude de l'erreur d'une solution sur le manque de régularité de sa contrainte. Une contrainte optimisée σ_h^{opti} est introduite, construite à partir de la solution σ_h , que l'on substitue à σ_{ex} dans le calcul de l'erreur.

$$e_{lissage} = \|\sigma_h^{opti} - \sigma_h\|_{.,\Omega} \approx \|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{.,\Omega}$$

Il est bon de remarquer que cette catégorie d'estimateurs, sous leur forme classique, ne conduit pas à une estimation stricte de l'erreur. De plus, la qualité de ces estimateurs dépend intrinsèquement de la définition de l'espace \mathcal{S}_h^{opti} .

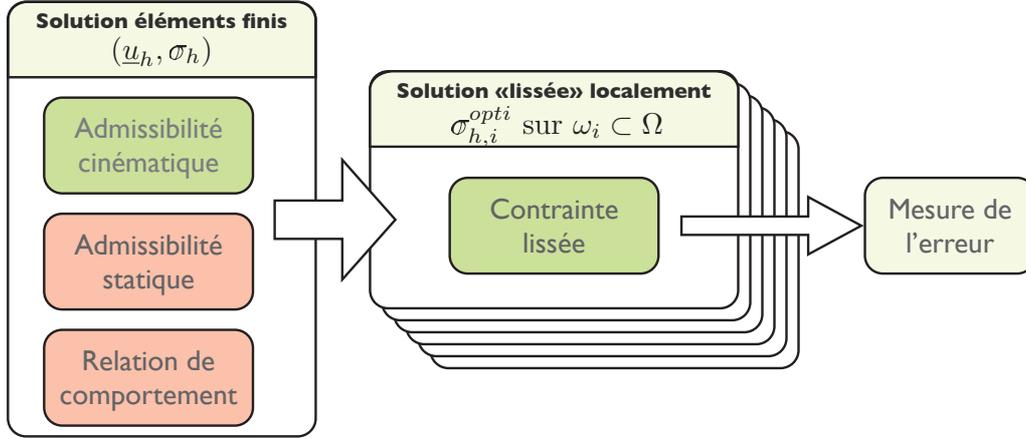


FIGURE 1.4: Figure de principe de l'estimation d'erreur par lissage des contraintes (méthode ZZ2)

2.1.1 Cas des problèmes linéaires

C'est logiquement dans le cas linéaire que la littérature est la plus riche sur ce type d'estimateurs. On détaille ici les méthodes les plus utilisées.

Méthode ZZ1

Introduite dans [Zienkiewicz et Zhu, 1987], elle est la première méthode utilisant l'approche par lissage. La contrainte optimisée σ_h^{opti} y est construite comme une combinaison linéaire des fonctions de forme $\varphi_i(\underline{M})$ définissant l'espace des déplacements éléments finis \underline{u}_h :

$$\sigma_h^{opti}(\underline{M}) = \sum_i \bar{\sigma}_{h,i}^{opti} \cdot \varphi_i(\underline{M})$$

où les valeurs tensorielles aux noeuds $\bar{\sigma}_{h,i}^{opti}$ sont simplement calculés en minimisant l'écart aux moindres carrés avec la solution σ_h :

$$\bar{\sigma}_{h,i}^{opti} = \underset{\bar{\sigma}_{h,i}^{opti} \in \mathbb{R}^6}{\text{Argmin}} \left\{ \|\sigma_h^{opti} - \sigma_h\|_{\mathbf{A}^{-1}, \Omega} \right\}$$

Afin de réduire les coûts de calcul de cette vision globale, une autre approche est introduite : les contraintes nodales $\bar{\sigma}_{h,i}^{opti}$ sont directement construites en interpolant les valeurs prises par σ_h aux points de Gauss avoisinant le sommet i .

Ces méthodes, dont l'implémentation est extrêmement simple, peuvent conduire à des estimations de piètre qualité dans certains cas (maillage grossier ou degrés d'interpolation élevés). Par contre, elles peuvent être très facilement utilisées pour tout type de problème (i.e. que ce soit un problème linéaire, non linéaire, statique ou d'évolution) sachant toujours que l'estimation n'est en aucun cas garantie.

Méthode ZZ2

Proposée par la même équipe que la ZZ1 et dans sa continuité, cette méthode cherche à pallier ses défauts (coût de la minimisation globale, mauvaise qualité de l'estimation pour les maillages grossiers...). Un schéma de principe de la méthode est illustré sur la figure FIG.(1.4). Introduite dans [Zienkiewicz et Zhu, 1992a, Zienkiewicz et Zhu, 1992b, Zienkiewicz et Zhu, 1992c], elle consiste en l'amélioration de la technique d'obtention des valeurs aux noeuds $\bar{\sigma}_{h,i}^{opti}$. Elle se fait en deux étapes :

- le domaine Ω est subdivisé en un ensemble de patches d'éléments ω_k se recouvrant partiellement ($\cup_k \omega_k = \Omega$). Sur chacun de ces patches ω_k , une contrainte $\bar{\sigma}_{h,k}^{opti}$ est recherchée, sous une forme polynomiale \mathbb{P} , de sorte à minimiser l'écart aux moindres carrés avec la solution σ_h sur un ensemble de points d'extrapolation $\mathcal{E}_k \in \omega_k$.

$$\bar{\sigma}_{h,k}^{opti} = \underset{\sigma^* \in \mathbb{P}}{\text{Argmin}} \left\{ \sum_{\underline{M} \in \mathcal{E}_k} \|\sigma^*(\underline{M}) - \sigma_h(\underline{M})\|_{\mathbf{A}^{-1}} \right\}$$

- le tenseur de contraintes optimisé aux noeuds $\bar{\sigma}_{h,i}^{opti}$ est construit à partir de cet ensemble de $\bar{\sigma}_{h,k}^{opti}$. En notant \mathcal{L}_i la liste des patches ω_k contenant le noeud i , on a :

$$\bar{\sigma}_{h,i}^{opti} = \frac{1}{\text{card}(\mathcal{L}_i)} \sum_{k \in \mathcal{L}_i} \bar{\sigma}_{h,k}^{opti}$$

Le tenseur des contraintes optimisées au noeud i est construit comme étant simplement la moyenne des contraintes polynomiales des différents patches recouvrant le noeud i .

La qualité de ces estimateurs dépend énormément des points d'interpolation choisis (soit des espaces \mathcal{E}_k). La méthode de super-convergence, dite SPR, utilise les points donnés par [Barlow, 1976] pour les problèmes unidimensionnels, que [Prathap, 1996] et [Rajendran et Liew, 2003] ont successivement étendu au 2D et 3D.

Variantes

En se basant sur la même approche que la ZZ2, d'autres méthodes ont été développées afin d'en améliorer la qualité. On en présente ici les principales, toutes jouant sur le calcul de la contrainte $\bar{\sigma}_{h,k}^{opti}$.

- dans [Wiberg *et al.*, 1994], une approche de pénalisation est implémentée afin de rajouter du contenu mécanique en prenant en compte l'équation d'équilibre ;
- dans [Boroomand et Zienkiewicz, 1998], la construction de la contrainte par patch est faite en utilisant une condition de prolongement, à l'aide des fonctions de formes EF (on note alors \mathbb{N}_i le tenseur de déformation construit à partir de la fonction de forme φ_i associée au noeud i) :

$$\bar{\sigma}_{h,k}^{opti} = \underset{\sigma^* \in \mathbb{P}}{\text{Argmin}} \left\{ \int_{\omega_k} \{ \text{Tr} [(\sigma^* - \sigma_h) \cdot \mathbb{N}_i] \} dV \right\}$$

- une nouvelle manière de construire ces contraintes optimisées a été introduite dans [Zhang et Naga, 2005]. Ici, la méthode est appliquée au déplacement, en utilisant des polynômes d'un degré supérieur aux méthodes classiques de lissage. Ensuite, la contrainte est calculée en utilisant le comportement. Cette approche assure une encore plus grande robustesse à la méthode ZZ2 ;
- enfin dans [Díez *et al.*, 2007], une correction est apportée de sorte à pallier le principal défaut de cette approche : son aspect heuristique du problème d'estimation. S'appuyant sur la méthode SPR, une démarche est introduite pour que l'estimation soit garantie. On impose que la contrainte lissée σ_h^{opti} soit statiquement admissible sur les patches ω_k .

La facilité d'implémentation et le faible coût de calcul de cette famille d'estimateur ont grandement contribué à son succès. C'est actuellement l'estimateur d'erreur le plus utilisé dans les codes commerciaux. Mais le manque de lien avec l'erreur exacte et le manque de preuve mathématique quant à la qualité de l'estimation sont ses plus lourds défauts. Certes son extension garantie [Díez *et al.*, 2007] en corrige certains. Mais, les résultats numériques qui lui sont associés conduisant à de larges surestimations, son manque de pertinence ne pousse pas à son utilisation.

2.1.2 Extension aux problèmes non-linéaires

On trouve dans la littérature de nombreuses applications en non-linéaire des estimateurs en lissage de contrainte. Les premiers travaux portent sur l'étude de l'erreur pour les problèmes de structure constitués de matériaux non-linéaires. Ainsi, dans [Bass et Oden, 1987], les modèles de matériaux retenus sont avec les lois de Bodner et Partom, de Robinson, de Hart et de Krieg, Swearngen et Rhodes. Toutes ces lois sont construites à partir soit d'approches micros purement phénoménologiques, soit d'extension d'approches visco-élastiques. Elles considèrent des évolutions viscoplastiques mathématiquement régulières, i.e. sans seuil plastique. Dans ces travaux, l'estimateur d'erreur est introduit dans un but d'optimisation du maillage. Les critères caractérisant cet estimateur portent sur sa facilité d'implémentation, sa robustesse et sa rapidité d'exécution au détriment de sa qualité intrinsèque.

La méthode d'estimation retenue est analogue au lissage de contrainte, mais porte sur le déplacement : un champ de déplacement optimisé \underline{u}_h^{opti} est introduit, construit sur une base polynomiale ; il est supposé étant une meilleure estimation du déplacement exact et permet alors une estimation de l'erreur. Afin de prendre en compte la discrétisation temporelle, l'interpolation est portée sur une vitesse optimisée $\dot{\underline{u}}_h^{opti}$, calculée à partir des incréments de déplacement issus du problème direct. Enfin l'erreur introduite étant énergétique, la forme incrémentale du comportement, introduite pour la résolution du problème direct est retenue.

De la même manière, de nombreux travaux utilisent une erreur en vitesse associée à une vision incrémentale du comportement afin de donner une estimation de l'erreur globale. Dans [Zhu et Zienkiewicz, 1988], puis repris dans [Fourment et Chenot,

1993] la méthode classique, en contrainte, a été étendue aux calculs viscoplastiques avec une loi de comportement de Prandtl Reuss (avec seuil). Héту et Pelletier [Hetu et Pelletier, 1992] ont étudié l'efficacité des estimateurs types ZZ2 dans le cadre des fluides visqueux incompressibles. Dans [Boroomand et Zienkiewicz, 1998, Boroomand et Zienkiewicz, 1999], on s'intéresse aux problèmes élastoplastiques (couplés à une évolution dynamique dans [Mathisen *et al.*, 1999]) et dans [Peric *et al.*, 1999], les problèmes à grandes transformations sont traités. On peut aussi noter l'extension de ces approches à des problèmes plastiques enrichis afin d'inclure les aspects de localisation dans [Khoei *et al.*, 2007].

Un bon exemple de l'implémentation des outils de lissage pour les problèmes élasto-viscoplastiques est illustré dans [Barthold *et al.*, 1998]. Des indicateurs de qualité du maillage (aussi bien spatial que temporel) sont mis en avant et utilisés associés à une procédure d'optimisation afin de proposer un outil de contrôle adaptatif. Trois indicateurs spatiaux sont utilisés. L'un repose sur l'approche explicite de l'estimation de l'erreur en résidus, l'autre utilise une solution lissée afin d'en estimer l'erreur en dissipation plastique et le dernier mesure la validité thermodynamique de la solution. L'indicateur en dissipation ϵ_d est défini tel que :

$$\epsilon_d^2 = \left\| \text{Tr} [\sigma_h \cdot (\dot{\epsilon}_{p,h}^{opti} - \dot{\epsilon}_{p,h})] \right\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 + \left\| R_h(\dot{p}_h^{opti} - \dot{p}_h) \right\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2$$

où $\dot{\epsilon}_{p,h}$ est le taux de déformation plastique, \dot{p}_h le taux de déformation plastique cumulée et R_h la variable d'écrouissage, duale de \dot{p}_h . $\dot{\epsilon}_{p,h}^{opti}$, \dot{p}_h^{opti} sont les interpolations optimisées respectives de $\dot{\epsilon}_{p,h}$ et \dot{p}_h . Mais encore on ne parle que d'indicateurs, car leur construction ne repose que sur des propriétés heuristiques. Dans [Stein *et al.*, 1998], la méthode de construction des solutions lissées est enrichie par patch afin de respecter au mieux l'admissibilité statique. Celle-ci est étendue aux problèmes élastoplastiques.

Dans toutes ces approches, on parle d'extension de la méthode, car aucune démarche théorique n'a été introduite. Il ne s'agit que de l'établissement d'une contrainte optimisée σ_h^{opti} (ou d'un autre champs) et d'une évaluation de l'erreur à l'aide de cette dernière et de la solution éléments finis σ_h . L'approche repose seulement sur le fait que σ_h^{opti} est plus régulière et assure une meilleure approximation de σ_{ex} que σ_h . On peut souligner que cette propriété heuristique est toutefois souvent vérifiée, même en non-linéaire, comme le montre par exemple Boussetta pour les problèmes d'écoulements plastiques incompressibles dans [Boussetta *et al.*, 2006].

2.2 Estimateurs basés sur les résidus d'équilibre

La méthode des éléments finis repose sur la formulation faible de son équilibre. Les estimateurs basés sur les résidus d'équilibre offrent une mesure de la non-vérification de l'équation d'équilibre. Injecter l'erreur en contrainte vraie dans cette équation pose un nouveau problème dont elle est l'inconnue. Cette équation, déjà

introduite en EQ.(1.14) pour le cas linéaire s'écrit sous sa forme générale :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \int_{\Omega} \left\{ \text{Tr} \left[\underline{e}_h(\underline{\sigma}) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) \right] \right\} dV = - \int_{\Omega} \left\{ \text{Tr} [\underline{\sigma}_h \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*)] \right\} dV + \int_{\Omega} \left\{ \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \right\} dV + \int_{\partial_f \Omega} \left\{ \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* \right\} dS \quad (1.21)$$

Le second membre est alors le résidu de l'équation d'équilibre pris pour la solution $(\underline{u}_h, \underline{\sigma}_h)$, on le note R :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, R(\underline{u}^*) = \int_{\Omega} \left\{ \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \right\} dV + \int_{\partial_f \Omega} \left\{ \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* \right\} dS - \int_{\Omega} \left\{ \text{Tr} [\underline{\sigma}_h \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*)] \right\} dV \quad (1.22)$$

On peut réécrire l'équation que vérifie l'erreur :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \int_{\Omega} \left\{ \text{Tr} \left[\underline{e}_h(\underline{\sigma}) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) \right] \right\} dV = R(\underline{u}^*) \quad (1.23)$$

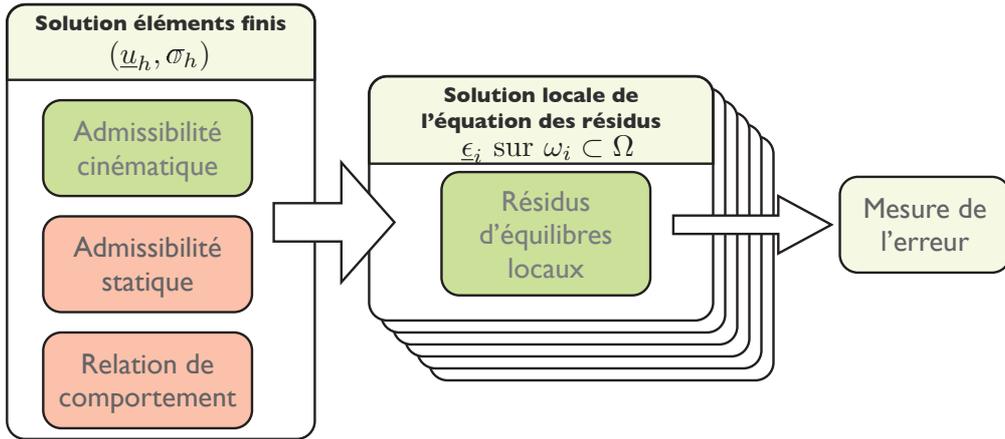


FIGURE 1.5: Figure de principe de l'estimation d'erreur basée sur les résidus d'équilibre

Cette famille d'estimateurs utilise cette écriture afin d'estimer $\underline{e}_h(\underline{\sigma})$. Elle a logiquement été introduite en premier pour les problèmes d'élasticité, puis elle a ensuite été étendue à toutes sortes de problèmes.

2.2.1 Cas des problèmes linéaires

Dans le cas linéaire, l'équivalence entre l'erreur en contrainte et l'erreur en déplacement permet de mettre l'équation EQ.(1.23) sous la forme :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \int_{\Omega} \left\{ \text{Tr} [\mathbf{A} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*)] \right\} dV = R(\underline{u}^*) \quad (1.24)$$

On peut différencier les estimateurs basés sur les résidus d'équilibre en deux catégories. Dans [Babuška et Rheinboldt, 1978a], l'équation EQ.(1.23), la solution $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ et différentes caractéristiques du maillage permettent d'établir une majoration directe de l'erreur vraie. Ces estimateurs sont dits explicites, car ils ne nécessitent aucun calcul supplémentaire. Afin d'améliorer leurs résultats, une seconde catégorie a vu le jour dans [Babuška et Rheinboldt, 1978b]. De nouveaux problèmes y sont alors introduits, afin d'obtenir une estimation plus pertinente de l'erreur, mais alors de manière implicite.

Estimateurs explicites

En choisissant comme cas particulier $\underline{u}^* = \underline{e}_h(\underline{u})$, on obtient l'équation suivante :

$$\|\varepsilon(\underline{e}_h(\underline{u}))\|_{\mathbf{A},\Omega}^2 = R(\underline{e}_h(\underline{u})) \quad (1.25)$$

Ensuite, une vision élémentaire du résidu est introduite. Pour chaque élément E et chaque face élémentaire ∂E , les résidus élémentaires \underline{r}_E et de face $\underline{R}_{\partial E}$ sont définis :

- $\underline{r}_E = \underline{\text{div}}(\sigma_h) + \underline{f}_d$
- $\underline{R}_{\partial E} = \begin{cases} \sigma_h|_E \cdot \underline{n}_E - \underline{F}_d & \text{si } \partial E \subset \partial_f \Omega \\ \sigma_h|_E \cdot \underline{n}_E + \sigma_h|_{E'} \cdot \underline{n}_{E'} & \text{sinon, où } E' \text{ est l'élément voisin} \end{cases}$

L'équation EQ.(1.25) ainsi que les résidus élémentaires introduits permettent d'obtenir une majoration directe de l'erreur :

$$\|\underline{e}_h(\underline{u})\|_{\mathbf{A},\Omega}^2 \leq \mathcal{C} \left[\sum_{E \subset \Omega} \text{mes}(E)^2 \|\underline{r}_E\|_E^2 + \sum_{\partial E \subset \Gamma_E} \text{mes}(E) \|\underline{R}_{\partial E}\|_{\partial E}^2 \right]$$

où Γ_E est l'ensemble des faces des éléments, \mathcal{C} une constante non explicite et dépendante du maillage.

Estimateurs implicites

Ce type d'estimateurs propose une approche locale de l'équation EQ.(1.24). Celle-ci est réécrite sur un patch ω_i contenant tous les éléments connectés au noeud i . Le schéma de principe de ces estimateurs est illustré figure FIG.(1.5). Chacun des sous problèmes revient à trouver $\underline{\varepsilon}_i \in \mathbf{U}_0^{ad}$ vérifiant :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \int_{\omega_i} \{\text{Tr}[\mathbf{A}\varepsilon(\underline{\varepsilon}_i) \cdot \varepsilon(\underline{u}^*)]\} dV = \sum_{E \subset \omega_i} \left\{ \int_E \{\underline{r}_E \cdot \underline{u}^*\} dV - \int_{\partial E} \{\underline{R}_{\partial E} \cdot \underline{u}^*\} dS \right\} \quad (1.26)$$

L'évaluation de l'erreur globale est ensuite donnée par :

$$\epsilon_h^2(\underline{u}) = \sum_{1 \leq i \leq N_e} \|\varepsilon(\underline{\varepsilon}_i)\|_{\mathcal{L}^2(\omega_i)}^2$$

où N_e est le nombre total de noeuds.

Mais ces problèmes locaux sont par essence mal posés : pour tous les patches dont les facettes n'appartiennent pas à $\partial_u \Omega$, les mouvements de corps rigides sont à exclure et rien n'impose leur équilibre global. Afin d'assurer l'existence et l'unicité des solutions de ces sous-problèmes, plusieurs démarches ont été proposées :

- la première approche, introduite dans [Babuška et Rheinboldt, 1978b], consiste à imposer $\underline{\epsilon}_i$ nul sur une partie $\partial_u \omega_i \not\subset \partial_f \Omega$ de la frontière de ω_i . Mais ne prenant en compte que les conditions aux limites de Dirichlet, cette approche tend à sous-estimer l'erreur dans le cas général ;
- dans [Strouboulis et Haque, 1992a, Strouboulis et Haque, 1992b], des conditions de Neumann sont appliquées sur ces mêmes patches, permettant d'obtenir un majorant de l'erreur vraie. Dans ces approches, le noyau des problèmes locaux est supprimé afin de retirer les mouvements de solides rigides ;
- la méthode de partition de l'unité est utilisée dans [Carstensen et Funken, 1999, Morin *et al.*, 2003, Prudhomme *et al.*, 2004, Parés *et al.*, 2006] pour constituer des sous-problèmes auto-équilibrés. Ces approches offrent aussi l'avantage de se passer de la fastidieuse étape de calcul des résidus d'interface $\underline{R}_{\partial E}$, permettant d'économiser un précieux temps de calcul ;
- les problèmes par patch sont résolus en adoptant une approche duale dans [Cirak et Ramm, 1998, Sauer-Budge *et al.*, 2005, Cottureau *et al.*, 2009, Parés *et al.*, 2009]. Sur chacun des éléments E du patch ω_i , on cherche sous une forme polynomiale la contrainte solution du problème. Afin d'assurer l'unicité de la solution, on retient celle minimisant l'énergie complémentaire. Il est nécessaire de préciser que ces méthodes ne permettent pas d'obtenir une estimation garantie de l'erreur pour les problèmes dont le problème de référence est résolu à l'aide d'une interpolation affine.

Une autre famille d'estimateur implicite est présentée dans [Demkowicz *et al.*, 1984], où chacun des patches ω_i est réduit à un unique élément E . Le problème devient : Trouver $\underline{\epsilon}_E \in \mathbf{U}_0^{ad}$ vérifiant :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \int_E \{\text{Tr} [\mathbf{A}\underline{\epsilon}(\underline{\epsilon}_E) \cdot \underline{\epsilon}(\underline{u}^*)]\} dV = \int_E \{r_E \cdot \underline{u}^*\} dV + \int_{\partial E - \partial_u \Omega} \{\hat{R}_{\partial E} \cdot \underline{u}^*\} dS$$

où $\hat{R}_{\partial E}$ est une densité surfacique d'effort donnée. Comme pour les approches par patches, ces problèmes locaux n'admettent de solution tant qu'ils ne sont pas auto-équilibrés ou que les mouvements de solides rigides ne sont pas bloqués. Deux types d'approches ont alors été introduites : celles jouant sur l'espace de définition de $\underline{\epsilon}_E$ et celles imposant des problèmes locaux auto-équilibrés. Une fois ces problèmes résolus, l'erreur globale se met alors sous la forme :

$$\epsilon_h^2(\underline{u}) = \sum_{E \subset \Omega} \|\underline{\epsilon}(\underline{\epsilon}_E)\|_{\mathcal{L}^2(E)}^2$$

Toute l'ingéniosité de ces approches réside dans le choix de l'espace de recherche de $\underline{\epsilon}_i$ et des sous-chargements des facettes $\hat{R}_{\partial E}$. On peut répertorier trois différentes méthodes :

- la méthode originale consiste à chercher les solutions $\underline{\epsilon}_E$ dans des sous-espaces régularisants, i.e. ne contenant pas les champs de déplacement de solides rigides. Les fonctions $\hat{R}_{\partial E}$ peuvent être choisies quelconques, dans la pratique on pose :

$$\hat{R}_{\partial E} = \begin{cases} -R_{\partial E} & \text{si } \partial E \subset \partial_f \Omega \\ -\frac{1}{2}R_{\partial E} & \text{sinon} \end{cases}$$

- une approche, introduite dans [Bank et Weiser, 1985], puis réétudiée dans [Ainsworth et Oden, 1993, Babuška *et al.*, 1994], consiste à choisir $\hat{R}_{\partial E}$ tel que les sous problèmes soient autoéquilibrés. Des densités d'efforts \hat{F} de forme affine sont définies sur chaque facette des éléments dans ce but :

$$\hat{R}_{\partial E} = \hat{F} - R_{\partial E}$$

- enfin, dans [Huerta et Diez, 2000], les problèmes sont posés avec des conditions de Dirichlet, conduisant nécessairement à des problèmes bien posés. Afin de pallier à l'aspect alors minorant de l'erreur, un terme correctif prenant en compte les sauts d'efforts et les effets de pollution peut être introduit.

2.2.2 Extension aux problèmes non-linéaires en espace

On peut différencier deux catégories distinctes de problèmes non-linéaires : les problèmes indépendants du temps et les autres dont la dépendance en temps est donnée par les lois d'évolution.

Les premiers travaux d'estimation de l'erreur en non-linéaire portent sur des non-linéarités matériau et géométrique. Ainsi, dans [Babuška et Rheinboldt, 1982], des outils d'estimation de l'erreur en résidus sont introduits sur le flambage d'un barreau élastoplastique, problème non linéaire indépendant du temps. Dans [Hansbo et Johnson, 1991, Johnson et Hansbo, 1992], les auteurs se sont intéressés à des problèmes de plasticité de type Hencky. Ces lois peuvent être adoptées pour les problèmes de structures soumises à un chargement proportionnel (ou radial), i.e. les problèmes où la contrainte peut être mise sous la forme :

$$\forall (\underline{M}, t) \in \Omega \times [0, T], \sigma(\underline{M}, t) = \alpha(t) \cdot \sigma_0(\underline{M})$$

avec $\alpha(0) = 0$. Sous un tel chargement, les directions du tenseur des contraintes ainsi que celles de sa partie déviatorique restent constantes en fonction du temps. Cette condition permet d'intégrer formellement la loi d'évolution et le problème posé est donc sans effet d'histoire. De plus, une régularisation visqueuse du comportement est utilisée afin d'éviter certaines difficultés techniques inhérentes aux lois avec seuil. Ainsi, dans [Johnson et Hansbo, 1992], le résultat suivant est présenté :

$$\|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\mathbf{A}^{-1}, \Omega}^2 \leq \sum_{j=1}^2 \|h \cdot C_j^i R_j(\sigma_h)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega_e)}^2 + C^s \sum_{j=1}^2 \|h \cdot C_j^i \cdot R_j(\sigma_h)\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega \setminus \Omega_e)}^2$$

où

$$\begin{cases} R_1(\sigma_h) = \|\mathcal{L}_E\|_{\mathcal{L}^2(E)} \text{ pour tout élément } E \in \Omega \\ R_2(\sigma_h) = \sup_{M \in \partial E} \left\{ \frac{\|R_{\partial E}\|_{\mathcal{L}^2(\partial E)}}{2 \cdot \text{mes}(E)} \right\} \text{ pour tout élément } E \in \Omega \\ C^s = \|\varepsilon(\underline{u}_{ex})\|_{\mathcal{L}^1(\Omega)} + \|\varepsilon(\underline{u}_h)\|_{\mathcal{L}^1(\Omega)} \end{cases}$$

$\Omega_e \subset \Omega$ est l'ensemble des points où la solution reste élastique et les quantités C_j^i sont des constantes d'interpolation. Dans la pratique, afin d'obtenir un estimateur explicite, les auteurs proposent de remplacer Ω_e et \underline{u}_{ex} par leur valeur approchée $\Omega_{e,h}$ et \underline{u}_h ; mais l'aspect garanti n'est alors plus respecté. Dans [Bergam *et al.*, 2003], des travaux supplémentaires sont présentés où les valeurs des constantes peuvent être déterminées tout en conservant une estimation garantie de l'erreur.

Repin, dans [Repin, 2000] présente un estimateur pouvant être interprété comme une erreur en résidus pour les problèmes de type Poisson. Il nécessite une résolution supplémentaire du problème global en contrainte. La solution ainsi obtenue permet d'obtenir directement une estimation garantie de l'erreur globale mais à un coût bien supérieur aux techniques locales. On trouve les premières illustrations de la méthode dans [Repin *et al.*, 2004].

Enfin, on peut noter que la méthode a aussi été étendue aux problèmes de grandes déformations. Ainsi, dans [Brink et Stein, 1998] une approche basée sur une vision élémentaire de l'équation des résidus est utilisée. Les différents sous-problèmes y sont construits avec des conditions aux limites de Neumann. Un estimateur garanti de l'erreur y est proposé.

2.2.3 Extension aux problèmes non-linéaires d'évolution

Pour les problèmes d'évolution, la principale difficulté réside dans le fait que l'erreur se propage avec le temps. La première approche d'estimation de l'erreur globale pour les problèmes d'évolution fut sur un problème de plasticité, avec une loi d'évolution de type Prandtl-Reuss. Ainsi, dans [Hansbo et Johnson, 1991], les auteurs étendent les résultats de l'estimateur introduit pour la plasticité de type Hencky. Lors de cette extension, le comportement est alors supposé parfaitement résolu et l'aspect incrémental n'est pas pris en compte. Il hérite des propriétés heuristiques de l'estimateur original avec des hypothèses supplémentaires. Ainsi, l'estimateur proposé ne peut prétendre qu'à être un indicateur de la qualité du maillage spatial.

Développée dans le cadre variationnel de la méthode de Galerkin espace-temps discontinue en temps, la méthode introduite dans [Aubry *et al.*, 1999], est proposée avec un objectif d'optimisation du maillage spatial, pour les problèmes de dynamique. Ce cadre permet de choisir le maillage optimal à chaque piquet de temps. En effet, il offre l'assurance d'une stabilité inconditionnelle même si le maillage spatial évolue sur un intervalle temporel. De cette manière, l'équation des résidus est écrite sur chaque intervalle temporel discret, et un indicateur de l'erreur spatiotemporelle est proposé, reposant sur une méthode des résidus locaux.

Dans [Aubry *et al.*, 2002], toujours à l'aide de la méthode des résidus locaux pour le calcul d'un indicateur d'erreur, la même équipe propose une méthode d'optimisation de maillage dédiée aux problème de déformations localisées. Par contre, l'aspect temporel n'est ici pas pris en compte. L'optimisation du maillage est uniquement spatiale. Cette approche est reprise dans [Puel et Aubry, 2007], avec une problématique de problème inverse. L'optimisation est toujours faite sur un maillage spatial, mais celui-ci est support non pas d'une résolution d'un problème mécanique mais d'une procédure d'identification. La démarche est dans ce papier mise en application sur un exemple de détection de cavités souterraines à partir de mesures de déplacements en surface.

Dans [Cecot, 2007], une autre procédure de construction de maillage est proposée, s'appuyant sur l'indicateur d'erreur explicite introduit par [Babuška et Rheinboldt, 1978a]. Cette extension est adaptée aux problèmes élasto-viscoplastiques issus de lois caractérisant la plasticité sous une forme microscopique, comme dans les premiers travaux d'estimation d'erreur en non-linéaire [Bass et Oden, 1987]. Les effets de discrétisation temporelle sont pris en compte sur le défaut de linéarité du taux de déformation plastique. Ainsi, dans le cas d'une utilisation d'un schéma d'intégration d'Euler semi-implicite :

$$\|\varepsilon_{p,h}(t_i) - \varepsilon_{p,ex}(t_i)\| \leq \frac{1}{2}\Delta t \|\dot{\varepsilon}_{p,h}(t_{i+1}) - \dot{\varepsilon}_{p,h}(t_i)\|$$

Dans [Carstensen *et al.*, 2006], les auteurs s'intéressent aux problèmes de viscoplasticité. La viscosité est dans ce cas nécessaire pour satisfaire une régularité indispensable à l'obtention d'une borne supérieure de l'erreur globale. Cette régularisation, couplée à un schéma d'intégration temporelle implicite permet de majorer l'erreur entre les pas de temps par sa valeur prise aux piquets de temps.

2.3 Estimateurs basés sur la non-vérification de la relation de comportement

2.3.1 Fondements

Le concept d'erreur en relation de comportement repose sur un fort contenu mécanique : l'hypothèse introduite est que les équations les moins fiables sont celles dites de comportement. Initiés dans [Ladevèze, 1975], ces estimateurs ont été dans un premier temps utilisés pour les problèmes de thermique puis étendus progressivement de l'élasticité linéaire aux problèmes non-linéaires. La méthode consiste à découper le problème en deux groupes d'équations :

- les équations fiables : les conditions d'admissibilité statique et cinématique :

$$\underline{u}_h \in \mathbf{U}^{ad} \text{ et } \sigma_h \notin \mathbf{S}^{ad}$$

- les équations non-fiables : la relation de comportement

$$\sigma_h(t) = \mathbf{A}_h(\varepsilon(\underline{u}_h(\tau)), \tau \leq t) \neq \mathbf{A}(\varepsilon(\underline{u}_h(\tau)), \tau \leq t)$$

On parle de solution admissible quand son déplacement est cinématiquement admissible et sa contrainte statiquement admissible.

Remarque 1.4 :

Le découpage du problème en équations fiables et non fiables est ici présenté sous sa forme la plus simple (espaces d'admissibilité cinématique et statique d'une part, relation de comportement d'autre part). Dans le cas où le problème est d'évolution, on peut alors distinguer au sein du comportement les lois d'état et les lois d'évolution. Dans ces cas-ci, la partie linéaire de la loi d'état est considérée comme fiable devant les autres équations alors mises en jeu.

La mesure de la qualité d'une telle solution est alors aisément obtenue en quantifiant sa non-vérification du comportement. Un atout non négligeable de ce type d'estimateur d'erreur est la prise en compte dès le début de toutes les erreurs inhérentes aux méthodes de résolution : discrétisation spatio-temporelle, mais aussi non convergence des algorithmes résolvant le comportement.

Bien que le déplacement \underline{u}_h de la solution éléments finis du problème de référence soit admissible, le manque de régularité de sa contrainte associée σ_h fait que $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ n'est pas admissible. La première étape des estimateurs en comportement consiste en la construction d'une solution $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ vérifiant l'admissibilité cinématique ainsi que l'admissibilité statique. Ensuite, la non-vérification du comportement de cette solution offre une mesure de l'erreur. La figure FIG.(1.6) résume le principe de ces estimateurs.

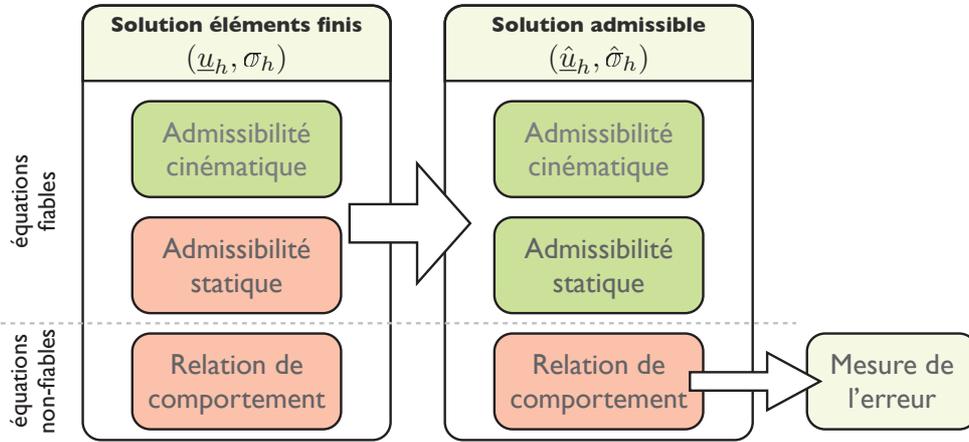


FIGURE 1.6: Caractéristiques des solutions directe $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ et admissible $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$, et principe de la mesure de l'erreur en comportement

Le calcul de la solution admissible est souvent réalisé par prolongation de la solution du problème direct et vérifie donc :

$$(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h), \text{ telle que } \hat{\underline{u}}_h \in \mathbf{U}^{ad} \text{ et } \hat{\sigma}_h \in \mathcal{S}^{ad} \quad (1.27)$$

La figure FIG.(1.7) présente les solutions cinématiquement admissibles, statiquement admissible et exacte, à un même problème linéaire.

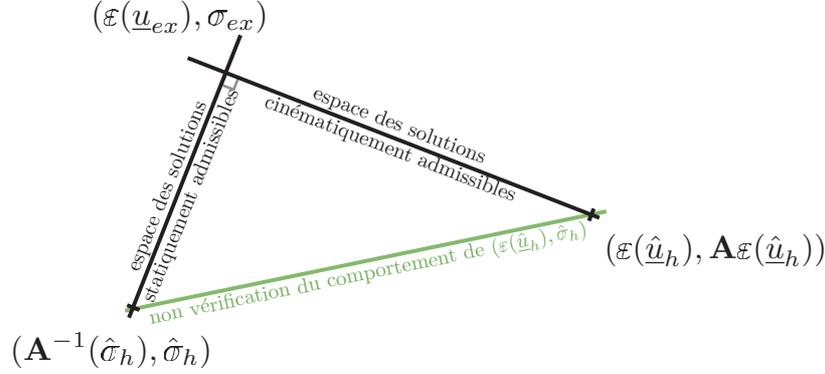


FIGURE 1.7: Figure de principe de l'erreur en comportement dans le cas linéaire

En introduisant l'erreur en comportement comme la mesure :

$$\epsilon_{RdC,h} = \|\hat{\sigma}_h - \mathbf{A}\varepsilon(\hat{u}_h)\|_{\mathbf{A}^{-1},\Omega} \quad (1.28)$$

On retrouve, grâce au théorème de l'hypercercle [Prayer et Synge, 1947], le lien fort entre l'erreur vraie et l'erreur en comportement représenté sur la figure FIG.(1.7) qui s'écrit :

$$\epsilon_{EdC,h}^2 = \|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\mathbf{A}^{-1},\Omega}^2 + \|\varepsilon(\underline{u}_{ex}) - \varepsilon(\hat{u}_h)\|_{\mathbf{A},\Omega}^2$$

Enfin, les estimateurs en comportement assurent l'obtention d'un majorant de l'erreur vraie. Ainsi, en choisissant $\hat{u}_h = \underline{u}_h$, on a la relation :

$$\epsilon_{EdC,h}^2 = \|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\mathbf{A}^{-1},\Omega}^2 + \|\varepsilon(\underline{e}_h(\underline{u}))\|_{\mathbf{A},\Omega}^2$$

Et le terme $\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\mathbf{A}^{-1},\Omega}^2$ étant positif, on a :

$$\epsilon_{EdC,h}^2 \geq \|\varepsilon(\underline{e}_h(\underline{u}))\|_{\mathbf{A},\Omega}^2$$

Remarque 1.5 :

La propriété remarquable derrière le théorème de l'hypercercle que vérifie toute solution admissible à 0 est la suivante ;

$$\forall (\hat{u}_0, \hat{\sigma}_0) \in \mathbf{U}_0^{ad} \times \mathcal{S}_0^{ad}, \quad \int_{\Omega} \{\text{Tr} [\hat{\sigma}_0 \cdot \varepsilon(\hat{u}_0)]\} dV = 0 \quad (1.29)$$

Remarque 1.6 :

Le calcul de l'erreur en comportement comprend ainsi deux étapes : il faut tout d'abord obtenir la solution dite admissible pour ensuite être capable d'évaluer l'erreur. Seul le calcul de l'erreur est explicité ici, la construction des champs admissibles est détaillée dans le chapitre suivant.

2.3.2 Applications

On peut distinguer différentes mesures de l'erreur en comportement. Dans ce travail, seules trois d'entre elles sont illustrées : l'erreur au sens de Drucker, l'erreur associée au problème de vitesse et l'erreur en dissipation (pour plus d'informations, voir [Ladevèze et Pelle, 2004]).

Erreur au sens de Drucker L'erreur au sens de Drucker a été introduite dans [Ladevèze, 1985] et repose sur la condition de stabilité des matériaux de Drucker [Drucker, 1964] :

Soit deux solutions $(\underline{u}_1, \sigma_1)$ et $(\underline{u}_2, \sigma_2)$ vérifiant le comportement, alors :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \mathbf{A}(\varepsilon(\underline{u}_1(\tau)), \tau < t) \\ \sigma_2 = \mathbf{A}(\varepsilon(\underline{u}_2(\tau)), \tau < t) \end{cases}$$

On dit qu'un matériau est stable au sens de Drucker si :

$$\forall t \in [0, T], \int_0^t \{\text{Tr}[(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot (\dot{\varepsilon}(\underline{u}_1) - \dot{\varepsilon}(\underline{u}_2))]\} d\tau \geq 0 \quad (1.30)$$

On dit qu'un matériau est strictement stable au sens de Drucker s'il est stable et si :

$$\forall t \in [0, T], \int_0^t \{\text{Tr}[(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot (\dot{\varepsilon}(\underline{u}_1) - \dot{\varepsilon}(\underline{u}_2))]\} d\tau = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{u}_1(t) = \underline{u}_2(t) \\ \sigma_1(t) = \sigma_2(t) \end{cases} \quad (1.31)$$

En introduisant la notation $\eta(\underline{u}, \sigma) = \text{Tr}[(\sigma - \mathbf{A}(\varepsilon(\underline{u}))) \cdot (\frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{A}^{-1}(\sigma)] - \dot{\varepsilon}(\underline{u}))]$, les propriétés suivantes sont vérifiées par la solution admissible \hat{x}_h :

$$\forall t \in [0, T], \int_0^t \{\eta(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)\} d\tau \geq 0$$

et

$$\forall t \in [0, T], \eta(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\underline{u}}_h = \underline{u}_{ex} \\ \hat{\sigma}_h = \sigma_{ex} \end{cases}$$

Une mesure de l'erreur peut donc être introduite telle que :

$$\epsilon_{Drucker,h}^2 = \sup_{t \in [0, T]} \left\{ \int_{\Omega} \int_0^t \{\eta(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)\} d\tau dV \right\} \quad (1.32)$$

Des techniques de construction de maillages adaptatifs ont été développées autour de cette mesure de l'erreur en élastoplasticité et viscoplasticité dans [Gallimard *et al.*, 1996]. Dans le cas purement élastique en statique, l'erreur au sens de Drucker est exactement équivalente à celles introduites dans [Ladevèze et Leguillon, 1983, Ladevèze *et al.*, 1993, Ladevèze et Rougeot, 1997].

Erreur associée au problème de vitesse Introduite dans [Coffignal et Ladevèze, 1983, Ladevèze *et al.*, 1986], cette mesure de l'erreur en comportement peut être utilisée dans le cas de matériaux standards dont le comportement est formulé en vitesse, comme la plupart des matériaux plastiques et viscoplastiques. Ainsi, on peut formuler le comportement à l'aide de potentiels convexes $\varphi(\dot{\varepsilon})$ et $\varphi^*(\dot{\sigma})$, l'un étant le dual de l'autre par la transformée de Legendre-Fenchel :

$$\varphi(\dot{\varepsilon}) = \sup_{\dot{\sigma}^* \in \mathcal{S}} \{ \text{Tr} [\dot{\sigma}^* \cdot \dot{\varepsilon}] - \varphi^*(\dot{\sigma}^*) \} \quad (1.33)$$

Et le comportement s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \frac{\partial \varphi^*}{\partial \dot{\sigma}} \\ \dot{\sigma} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (1.34)$$

L'estimateur associé au problème de vitesse est défini tel que :

$$\eta(\underline{u}, \sigma) = \varphi(\dot{\varepsilon}(\underline{u})) + \varphi^*(\dot{\sigma}) - \text{Tr} [\dot{\sigma} \cdot \dot{\varepsilon}(\underline{u})] \quad (1.35)$$

et on retrouve les propriétés sur la solution admissible $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$:

$$\forall t \in [0, T], \eta(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) \geq 0$$

et

$$\forall t \in [0, T], \eta(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\underline{u}}_h = \underline{u}_{ex} \\ \hat{\sigma}_h = \sigma_{ex} \end{cases}$$

Enfin une mesure de l'erreur est donc introduite telle que :

$$\epsilon_{Vitesse,h}^2 = \int_{\Omega} \int_0^T \{ \eta(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) \} dt dV \quad (1.36)$$

Erreur en dissipation L'erreur en dissipation, introduite dans [Ladevèze, 1985, Ladevèze, 1989] est une généralisation de l'approche proposée avec l'erreur associée au problème de vitesse. Reposant sur une formulation par variables internes, le comportement est divisé en deux groupes d'équations : les équations fiables, découlant de l'énergie libre, regroupées dans la loi d'état **A** et les équations les moins fiables, caractérisant l'évolution, regroupées dans la loi d'évolution **B**. Afin d'en simplifier l'écriture, on utilise les notations généralisées suivantes : $(e_e, e_p$ et $s)$, notations regroupant l'ensemble des variables linéaires (e_e) , liées aux aspects dissipatifs du matériau (e_p) et de leur variable duale (s) . En introduisant le pseudopotential $\varphi(\dot{e}_p)$ (choisit positif, nulle sur 0 et convexe) et son dual $\varphi^*(s)$ par la transformée de Legendre-Fenchel autour de la dissipation $d(s, \dot{e}_p) = s \cdot \dot{e}_p$, on peut définir la loi d'évolution en s'assurant de vérifier la thermodynamique :

$$\dot{e}_p = \mathbf{B}(s) \text{ où } \mathbf{B} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial s} \quad (1.37)$$

Le formalisme de cette écriture est présentée avec plus de détails au sein du chapitre CHP.2, où l'erreur en dissipation est mise en pratique sur un problème d'élastoplasticité.

L'estimateur en dissipation reprend ensuite la même approche qu'introduite pour les problèmes en vitesse, mais en utilisant les pseudopotentiels ainsi que les notations généralisées :

$$\eta(s, \dot{e}_p) = \varphi(\dot{e}_p) + \varphi^*(s) - d(s, \dot{e}_p) \quad (1.38)$$

et on retrouve les propriétés que satisfait la solution admissible $(\hat{s}_h, \dot{e}_{p,h})$:

$$\forall t \in [0, T], \eta(\hat{s}_h, \dot{e}_{p,h}) \geq 0$$

et

$$\forall t \in [0, T], \eta(\hat{s}_h, \dot{e}_{p,h}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{u}_h = \underline{u}_{ex} \\ \hat{\sigma}_h = \underline{\sigma}_{ex} \end{cases}$$

Enfin, une mesure de l'erreur est donc introduite telle que :

$$\epsilon_{d,h}^2 = \int_{\Omega} \int_0^T \left\{ \eta(\hat{s}_h, \dot{e}_{p,h}) \right\} dt dV \quad (1.39)$$

Remarque 1.7 :

Dans [Moës, 1996], une interprétation géométrique de l'erreur en dissipation est présentée. Dans le plan (s, \dot{e}_p) , la courbe $\eta(s, \dot{e}_p) = 0$ avec $\eta(s, \dot{e}_p) = \varphi(\dot{e}_p) + \varphi^*(s) - s \cdot \dot{e}_p$ représente l'ensemble des états E vérifiant le comportement. Tandis que la dissipation est l'aire totale du rectangle $\mathcal{A}(E_0, \dot{e}_p^a, E^a, s^a)$, les deux pseudopotentiels prennent pour valeur l'aire supérieure $\varphi^*(s^a) = \mathcal{A}(E_0, E^a, s^a)$ et l'aire inférieure $\varphi(\dot{e}_p^a) = \mathcal{A}(E_0, \dot{e}_p^a, E^a)$.

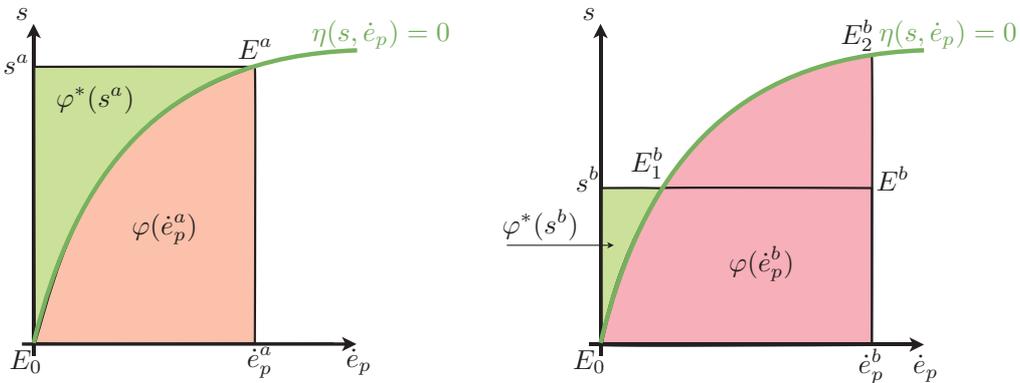


FIGURE 1.8: Interprétation géométrique de l'erreur en dissipation

Dans le cas d'une solution vérifiant exactement le comportement (figure FIG.(1.8) de gauche), on a :

$$\begin{aligned}\eta(s^a, \dot{e}_p^a) &= \varphi^*(s^a) + \varphi(\dot{e}_p^a) - s^a \cdot \dot{e}_p^a \\ &= \mathcal{A}(E_0, E^a, s^a) + \mathcal{A}(E_0, \dot{e}_p^a, E^a) - \mathcal{A}(E_0, \dot{e}_p^a, E^a, s^a) \\ &= 0\end{aligned}$$

Par contre, dans le cas d'une solution ne vérifiant pas le comportement (figure FIG.(1.8) de droite), on a :

$$\begin{aligned}\eta(s^b, \dot{e}_p^b) &= \varphi^*(s^b) + \varphi(\dot{e}_p^b) - s^b \cdot \dot{e}_p^b \\ &= \mathcal{A}(E_0, E_1^b, s^b) + \mathcal{A}(E_0, \dot{e}_p^b, E_2^b) - \mathcal{A}(E_0, \dot{e}_p^b, E^b, s^b) \\ &= \mathcal{A}(E_1^b, E^b, E_2^b) \\ &\neq 0\end{aligned}$$

Plus récemment, l'erreur en dissipation a été redéfinie afin d'offrir une estimation de l'erreur de meilleure qualité et une plus grande robustesse. Ainsi dans [Ladevèze, 2008b], une mesure implicite de l'erreur est introduite :

$$\hat{\epsilon}_d^2 = \int_{\Omega} \left\{ - \inf_{x^* \in \mathcal{B}} \left\{ \int_0^T \int_0^t \left\{ (s^* - \hat{s}_h) \cdot (\dot{e}_p^* - \dot{e}_{p,h}) \right\} \frac{d\tau dt}{T} \right\} \right\} dV \quad (1.40)$$

où \mathcal{B} est l'ensemble des solutions vérifiant le comportement sur $[0; T]$ et dont les variables internes sont choisie nulle à l'instant initial. Cette mesure de l'erreur, basée sur les propriétés de dualité, est l'outil de base pour la suite de ce travail. Dans le chapitre 2, une étude approfondie de son utilisation dans le cas élastoplastique est présentée.

Remarque 1.8 :

À partir de la mesure de l'erreur en dissipation donnée dans [Ladevèze et al., 1999a], Comi et Perego propose dans [Comi et Perego, 2004] un indicateur d'erreur dédié aux problèmes d'endommagement. En effet, le caractère local de l'endommagement est bien pris en compte par cette mesure. Toutefois, les auteurs proposent une nouvelle version de celle-ci, basée sur une reformulation les potentiels. Celle-ci est construite de manière incrémentale et croissante en temps. Les deux indicateurs sont ensuite comparés : tandis que le nouveau offre de bons résultats sur l'étape de prélocalisation, il reste moins pertinent quand le matériau est plus endommagé.

Remarque 1.9 :

Kempeneers, dans [Kempeneers et al., 2010] présente une procédure d'estimation d'erreur globale adaptée aux problèmes élasto-viscoplastiques en couplant une approche duale et l'erreur en comportement. Une approche éléments finis de type équilibre est introduite afin de calculer les champs admissibles. La mesure de l'erreur se fait ensuite sur le comportement.

3 Estimateurs d'erreur locale

Les estimateurs d'erreur globale fournissent une indication de la qualité globale d'une solution. Dans un souci de dimensionnement d'une structure, les grandeurs critiques ayant toujours des caractères locaux, il est judicieux de développer des outils estimant la qualité locale d'une solution. Les années 90 ont alors vu l'essor d'une nouvelle catégorie d'estimateurs, estimant l'erreur sur une quantité locale. Les premiers travaux [Babuška *et al.*, 1995a, Babuška *et al.*, 1995b] introduisent le concept d'erreur en pollution. Par la suite, les outils d'extraction ont été adaptés à l'estimation d'erreur, qui, associés avec un problème dit dual ou adjoint, permettent d'obtenir efficacement une estimation de l'erreur locale.

3.1 Erreur en pollution

L'erreur en pollution a été introduite avec des objectifs d'optimisation de maillage. Elle met en avant le caractère non localisé d'une erreur pourtant définie sur une quantité d'intérêt locale associée à un domaine $\omega \subset \Omega$:

$$e_{h,\omega}(\underline{u}) = \int_{\omega} \{ \underline{u}_{ex} - \underline{u}_h \} dV$$

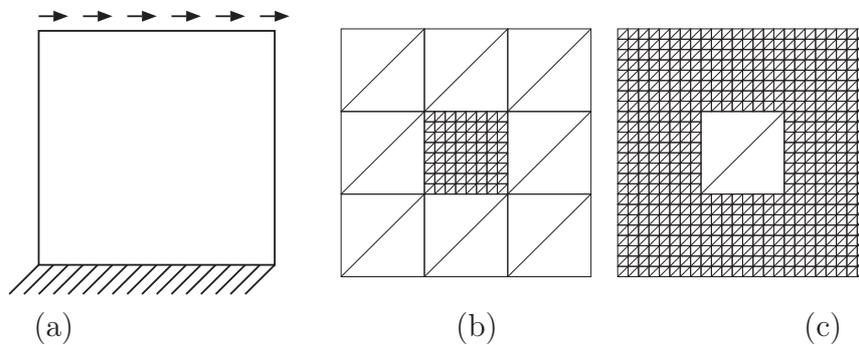


FIGURE 1.9: Illustration de l'erreur en pollution : (a) chargement du cas test ; (b) seule la discrétisation de la zone d'intérêt ω change ; (c) seule la discrétisation de $\Omega \setminus \omega$ change.

On peut illustrer l'erreur en pollution à l'aide du cas test présenté figure FIG.(1.9) (a). Une structure encadrée à sa base est soumise à un effort tangentiel sur sa surface supérieure. Une estimation de l'erreur locale dans le domaine ω est obtenue à l'aide d'une solution quasi exacte calculée sur un maillage très fin. Le problème est de nouveau résolu sur de nouveaux maillages définis de manière plus fine uniquement sur ω (figure FIG.(1.9) (b)) ou sur sa partie complémentaire (figure FIG.(1.9) (c)). Les figures FIG.(1.10) de gauche et de droite illustrent l'évolution de la norme de

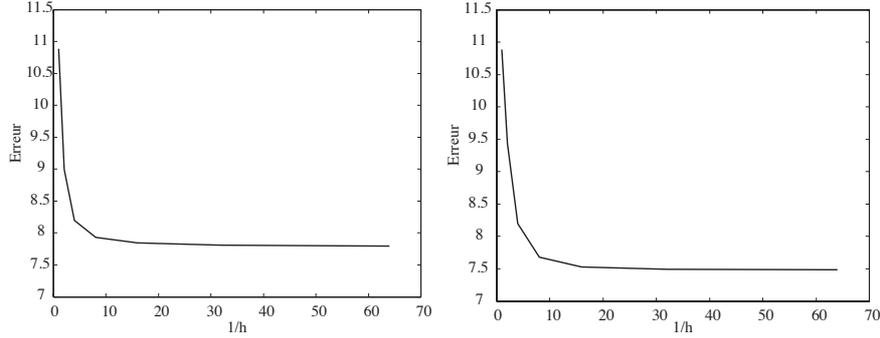


FIGURE 1.10: Évolution de l'erreur $e_{h,\omega}(\underline{u})$ en fonction de $1/h$, où h est un paramètre de remaillage de ω (gauche) ou de $\Omega \setminus \omega$ (droite)

l'erreur $e_{h,\omega}$ en fonction de la discrétisation dans la zone d'intérêt (figure de gauche) ou dans sa zone complémentaire (figure de droite). Dans les deux cas, on voit que l'erreur ne tend pas vers zéro, montrant l'influence de la discrétisation globale sur l'erreur locale.

3.1.1 Notion de pollution

Le concept de l'erreur en pollution, introduit dans [Babuška *et al.*, 1995a, Babuška *et al.*, 1995b] se base sur le fait que la qualité locale d'une solution ne dépend pas seulement de la qualité locale de sa discrétisation. Ainsi, on peut dissocier deux types de contributions à l'erreur dans une partie ω de Ω :

- les contributions internes à ω , dépendant de la discrétisation utilisée pour la caractériser et correspondant alors à une erreur de troncature ;
- les contributions externes à ω , ou les conséquences de la discrétisation du reste du domaine ; la somme de ces contributions est nommée erreur de pollution.

L'erreur en pollution peut se définir avec une approche plus théorique. En reprenant l'équation des résidus EQ.(1.24), on peut introduire un découpage élémentaire :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \int_{\Omega} \{\text{Tr} [\mathbf{A} \underline{e}_h(\underline{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*)]\} dV = \sum_{E \in \Omega} R_E(\underline{u}^*)$$

où R_E sont les résidus auto-équilibrés pour chacun des éléments du maillage. En introduisant un domaine $\tilde{\omega}$ incluant ω plus quelques rangées d'éléments (dans la pratique, seules deux rangées suffisent), la somme sur les résidus peut être séparée en deux termes :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \int_{\Omega} \{\text{Tr} [\mathbf{A} \underline{e}_h(\underline{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*)]\} dV = \sum_{E \in \tilde{\omega}} R_E(\underline{u}^*) + \sum_{E \in \Omega \setminus \tilde{\omega}} R_E(\underline{u}^*)$$

Deux problèmes distincts sont alors introduits :

- Un problème d'inconnue $\underline{\epsilon}_{l,h}(\underline{u})$ traduisant l'erreur intrinsèque à ω , dont le chargement est uniquement constitué des résidus élémentaires issus de $\tilde{\omega}$:

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{u}_0^{ad}, \int_{\Omega} \{ \text{Tr} [\mathbf{A}_{\underline{\epsilon}_{l,h}(\underline{u})} \cdot \underline{\epsilon}(\underline{u}^*)] \} dV = \sum_{E \in \tilde{\omega}} R_E(\underline{u}^*) \quad (1.41)$$

- Un problème, d'inconnue $\underline{\epsilon}_{p,h}(\underline{u})$ traduisant l'erreur de pollution, dont le chargement est uniquement constitué des résidus élémentaires issus de $\Omega \setminus \tilde{\omega}$:

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{u}_0^{ad}, \int_{\Omega} \{ \text{Tr} [\mathbf{A}_{\underline{\epsilon}_{p,h}(\underline{u})} \cdot \underline{\epsilon}(\underline{u}^*)] \} dV = \sum_{E \in \Omega \setminus \tilde{\omega}} R_E(\underline{u}^*) \quad (1.42)$$

Alors, compte tenu de la définition de l'erreur en déplacement, on a directement :

$$\underline{e}_h(\underline{u}) = \underline{\epsilon}_{l,h}(\underline{u}) + \underline{\epsilon}_{p,h}(\underline{u})$$

et le calcul de l'erreur locale peut s'écrire comme la somme d'une contribution locale et d'un terme en pollution :

$$\underline{e}_{h,\omega}(\underline{u}) = \int_{\omega} \{ \underline{\epsilon}_{l,h}(\underline{u}) + \underline{\epsilon}_{p,h}(\underline{u}) \} dV$$

Remarque 1.10 :

$\underline{\epsilon}_{l,h}(\underline{u})$ correspond à la solution d'un problème sur le domaine Ω avec des conditions aux limites de Dirichlet sur sa frontière $\partial\omega$ égales aux valeurs prises par la solution exacte \underline{u}_{ex} .

Remarque 1.11 :

$\underline{\epsilon}_{p,h}(\underline{u})$ correspond à la solution d'un problème sur le domaine Ω avec des conditions aux limites de Dirichlet sur sa frontière $\partial\omega$ égales aux valeurs prises par l'erreur vraie $\underline{e}_h(\underline{u})$.

3.1.2 Estimation de l'erreur locale

Les deux problèmes EQ.(1.41) et EQ.(1.42) ne pouvant être résolus exactement, différentes techniques ont été introduites afin d'estimer l'erreur locale $\underline{e}_{h,\omega}(\underline{u})$. Dans [Babuška *et al.*, 1995b], une estimation de la contribution locale $\underline{\epsilon}_{l,h}(\underline{u})$ à l'erreur est obtenue en adoptant une approche élémentaire. De nouveaux sous-problèmes élémentaires sont définis sur chacun des éléments de ω . Ils sont résolus sur des espaces plus riches que le problème de référence (le degré d'interpolation est choisi plus élevé).

Le calcul de la partie pollution de l'erreur peut être conduit de différentes manières. Dans [Babuška *et al.*, 1995a, Babuška *et al.*, 1995b], $\underline{\epsilon}_{p,h}(\underline{u})$ est estimée à l'aide de l'utilisation des fonctions de Green, celles-ci décrivant les interactions entre les différentes parties du domaine. Ainsi, la partie pollution de l'erreur peut être approchée en utilisant une fonction de Green. Dans [Huerta et Diez, 2000], le problème

EQ.(1.42) est résolu de manière approchée en utilisant le même maillage que pour le problème de référence.

Dans la plupart des cas, l'erreur de pollution est négligeable devant l'erreur intrinsèque au domaine ω . Les limites correspondent aux problèmes résolus avec un maillage non uniforme ou quand la solution présente des singularités locales. La notion de pollution est très importante, car elle montre l'influence globale de la résolution pour une quantité locale. Connaître précisément une quantité locale nécessite une bonne définition globale du problème.

Il est bon de remarquer que l'erreur en pollution a été aussi bien établie pour les problèmes linéaires que non-linéaires comme portant sur des matériaux à comportement visco-plastiques dans [Huerta et Diez, 2000]. Par contre, elle ne prend en compte que les effets de discrétisation spatiale et aucun travail n'a été développé pour des problèmes d'évolution. Enfin, son utilisation se limite en tant qu'indicateurs, très utiles pour les maillages adaptatifs, mais l'absence de preuve sur une évaluation garantie de l'erreur limite son utilisation en tant qu'estimateur d'erreur proprement dit.

3.2 Méthodes utilisant les techniques d'extraction

Les outils d'extraction offrent à des quantités locales en espace ou en temps une vision globale. Ils ont été introduits il y a un demi-siècle dans [Greenberg, 1948] et [Washitzu, 1953], mais ce n'était pas dans le cadre de la méthode des éléments finis. Babuška et Miller ont été les premiers, avec [Babuška et Miller, 1984] à y étendre ces outils. Ils étaient utilisés pour le calcul de facteur d'intensité de contrainte, et nullement dans l'objectif d'une estimation de l'erreur locale.

Les premiers travaux couplant les outils d'extraction et l'estimation d'erreur sont ceux de Becker et Rannacher, dans [Becker et Rannacher, 1996]. Une estimation de l'erreur sur une quantité d'intérêt locale, issue d'un problème linéaire y est présentée. Cette méthode est aujourd'hui la plus couramment utilisée pour l'estimation d'erreur locale. Son principe est ici rappelé dans un cadre de problème linéaire, puis les principales méthodes développées en linéaire et en non-linéaire sont présentées.

Cette méthode d'extraction, associée à une mesure de l'erreur en dissipation est la seule permettant l'obtention d'une mesure garantie de l'erreur sur une quantité d'intérêt issue d'un problème non-linéaire. Elle est ainsi l'objet de ce travail, dédiée aux problèmes d'élastoplasticité.

3.2.1 Définition d'une quantité d'intérêt

Les techniques d'extraction permettent d'écrire l'erreur sur une quantité locale I_{ex} sous une forme énergétique, globale. Ainsi, associé à une quantité d'intérêt donnée, on peut introduire un couple d'extracteurs $(\sigma_\Sigma, \dot{\epsilon}_\Sigma)$:

$$I_{ex} = \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [\sigma_\Sigma \cdot \dot{\epsilon}_{ex} + \sigma_{ex} \cdot \dot{\epsilon}_\Sigma] \} dt dV \quad (1.43)$$

Par exemple, si on s'intéresse à la moyenne dans la zone $\omega \times [t_1, t_2]$ d'une composante de la contrainte σ_{ij} , la quantité d'intérêt est définie telle que :

$$\begin{aligned} I_{ex} &= \int_{\omega} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{(\sigma_{ex} \underline{e}_i) \cdot \underline{e}_j}{\text{mes}(\omega)(t_2 - t_1)} \right\} dt dV \\ &= \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [\sigma_{\Sigma} \cdot \dot{\varepsilon}_{ex} + \sigma_{ex} \cdot \dot{\varepsilon}_{\Sigma}] \} dt dV \end{aligned} \quad (1.44)$$

avec

$$\begin{cases} \sigma_{\Sigma} = \mathbb{O} \\ \forall (\underline{M}, t) \in \omega \times [t_1, t_2], \dot{\varepsilon}_{\Sigma} = \frac{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j}{\text{mes}(\omega)(t_2 - t_1)} \\ \text{sinon } \dot{\varepsilon}_{\Sigma} = \mathbb{O} \end{cases}$$

Remarque 1.12 :

La définition donnée ici au couple d'extracteurs associé à la quantité d'intérêt est générale. Pour les problèmes ne faisant pas intervenir le temps, le couple d'extracteurs consiste en $(\sigma_{\Sigma}, \varepsilon_{\Sigma})$ tel que :

$$I_{ex} = \int_{\Omega} \{ \text{Tr} [\sigma_{\Sigma} \cdot \varepsilon_{ex} + \sigma_{ex} \cdot \varepsilon_{\Sigma}] \} dV$$

Remarque 1.13 :

Dans le cas où le problème de référence est linéaire, un unique extracteur est suffisant et on a la relation :

$$\begin{aligned} I_{ex} &= \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [\sigma_{\Sigma} \cdot \dot{\varepsilon}_{ex} + \sigma_{ex} \cdot \dot{\varepsilon}_{\Sigma}] \} dt dV \\ &= 2. \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [\sigma_{\Sigma} \cdot \dot{\varepsilon}_{ex}] \} dt dV \\ &= 2. \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [\sigma_{ex} \cdot \dot{\varepsilon}_{\Sigma}] \} dt dV \end{aligned}$$

Remarque 1.14 :

La quantité d'intérêt présentée ici reste un exemple. On peut de la même manière définir comme quantité d'intérêt n'importe quelle quantité issue du problème de référence en post-traitement des tenseurs de contrainte ou de déformation. Ainsi, il est possible de définir I_{ex} comme une moyenne locale ou même ponctuelle d'un déplacement, d'une déformation (totale ou d'une de sa partie élastique comme inélastique) mais aussi d'une vitesse.

Par exemple, on peut définir I_{ex} comme la moyenne sur $\omega \times [t_1, t_2]$ d'une composante de la déformation inélastique :

$$I_{ex} = \int_{\omega} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{(\varepsilon_{p,ex} \cdot \underline{e}_i) \cdot \underline{e}_j}{\text{mes}(\omega)(t_2 - t_1)} \right\} dt dV$$

On peut introduire un extracteur intermédiaire \mathbb{A}_Σ , de support la zone d'intérêt, dont la seule composante non nulle est la direction définissant la quantité d'intérêt. Enfin, sa valeur, constante, est telle que son intégrale sur tout le domaine soit égale à 1.

$$I_{ex} = \int_{\omega} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{(\varepsilon_{p,ex} \underline{e}_i) \underline{e}_j}{\text{mes}(\omega)(t_2 - t_1)} \right\} dt dV = \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [\mathbb{A}_\Sigma \cdot \varepsilon_{p,ex}] \} dt dV$$

Plusieurs définitions différentes ont été introduites afin de construire le couple d'extracteurs $(\sigma_\Sigma, \dot{\varepsilon}_\Sigma)$:

- dans [Rannacher et Suttmeier, 1999, Rannacher et Suttmeier, 2002], l'objectif est de retrouver une définition analogue aux quantités des problèmes élastiques, ainsi le comportement tangent $\mathbf{K}_T = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$ du problème de référence est introduit :

$$\begin{cases} \sigma_\Sigma = \mathbb{O} \\ \dot{\varepsilon}_\Sigma = \int_t^T \{ \mathbf{K}_T^{-1} \mathbb{A}_\Sigma - \mathbf{K}^{-1} \mathbb{A}_\Sigma \} d\tau \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \sigma_\Sigma = \mathbb{A}_\Sigma - \mathbf{K} \mathbf{K}_T^{-1} \mathbb{A}_\Sigma \\ \dot{\varepsilon}_\Sigma = \mathbb{O} \end{cases} \quad (1.45)$$

- dans [Ladevèze, 2006], le comportement élastique seul est utilisé :

$$\begin{cases} \sigma_\Sigma = \int_t^T \{ \mathbb{A}_\Sigma \} d\tau \\ \dot{\varepsilon}_\Sigma = -\mathbf{K}^{-1} \mathbb{A}_\Sigma \end{cases} \quad (1.46)$$

Remarque 1.15 :

Certains travaux se sont intéressés à des quantités d'intérêt ne pouvant se mettre sous une forme classique du fait de leur définition. Par exemple, les problèmes s'intéressant à la contrainte équivalente de von Mises demandent des constructions différentes :

- dans [Johnson et Hansbo, 1992, Maday et al., 1999],

$$I_{ex} = \int_{\Omega} \{ A_\Sigma \|\sigma_{d,ex}\| \} dV = \int_{\Omega} \{ \text{Tr} [\mathbb{A}_\Sigma \cdot \sigma_{d,ex}] \} dV \quad \text{avec} \quad \mathbb{A}_\Sigma = A_\Sigma \frac{\sigma_{d,ex}}{\|\sigma_{d,ex}\|} \quad (1.47)$$

- dans [Ladevèze et Chamoin, 2010],

$$I_{ex} = \int_{\Omega} \{ A_\Sigma \|\sigma_{d,ex}\| \} dV = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^5 \left\{ \text{Tr} [\mathbb{A}_\Sigma^i \cdot \sigma_{d,ex}]^2 \right\} \right\} dV \quad (1.48)$$

où les \mathbb{A}_Σ^i ont même support que A_Σ et forment une base de l'espace des tenseurs déviatoriques symétriques.

3.2.2 Définition de l'erreur associée

L'erreur sur la quantité d'intérêt est la quantité $e_h(I) = I_{ex} - I_h$. Dans les cas où le couple d'extracteurs est défini indépendamment des solutions exacte et/ou de référence, l'erreur de discrétisation associée peut se mettre sous la forme :

$$e_h(I) = \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [\sigma_{\Sigma} \cdot (\dot{\varepsilon}_{ex} - \dot{\varepsilon}_h) + (\sigma_{ex} - \sigma_h) \cdot \dot{\varepsilon}_{\Sigma}] \} dt dV \quad (1.49)$$

Remarque 1.16 :

La plupart des travaux s'intéressant à des quantités non-linéaires proposent des démarches où les extracteurs dépendent des différentes solutions du problème. Les remarques 1.14 et 1.15 illustrent pour deux types de quantité d'intérêt deux définitions différentes de couples d'extracteurs. Ainsi dans le cas de l'erreur sur une quantité d'intérêt I_h associé à une contrainte de von Mises, soit définie par Eq.(1.47); on a :

$$\begin{aligned} e_h(I) &= I_{ex} - I_h \\ &= \int_{\Omega} \left\{ A_{\Sigma} \text{Tr} \left[\sigma_{d,ex} \cdot \frac{\sigma_{d,ex}}{\|\sigma_{d,ex}\|} - \sigma_{d,h} \cdot \frac{\sigma_{d,h}}{\|\sigma_{d,h}\|} \right] \right\} dV \\ &\approx \int_{\Omega} \left\{ A_{\Sigma} \text{Tr} \left[(\sigma_{d,ex} - \sigma_{d,h}) \cdot \frac{\sigma_{d,h}}{\|\sigma_{d,h}\|} \right] \right\} dV \end{aligned}$$

L'estimation de l'erreur est ainsi construite sur son seul premier ordre. On ne peut alors pas construire un estimateur garanti de l'erreur locale. Dans le cas des comportements non-linéaires, l'utilisation du comportement tangent pour la construction des extracteurs soulève un problème identique. Dans la pratique, la solution $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ est utilisée pour définir le comportement tangent et on ne retient encore que le premier ordre de l'erreur sur la quantité d'intérêt, travaillant ensuite avec un estimateur non garanti.

3.2.3 Estimation de l'erreur sur une quantité locale

Principe

L'estimation d'erreur associée aux outils d'extraction introduit un nouveau problème, appelé problème dual ou adjoint. Il est associé au couple d'extracteurs définissant maintenant la quantité d'intérêt. On note $(\delta \underline{u}, \delta \sigma)$ sa solution. Dans le cas linéaire, ce problème est défini tel que :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver pour tout } \underline{M} \in \Omega : \\ &\begin{cases} \delta \underline{u} \in \mathbf{U}_{\Sigma, T}^{ad} \text{ (i.e. } \exists \tilde{\underline{u}} \in \mathbf{U}_0^{ad} \text{ tel que } \dot{\varepsilon}(\tilde{\underline{u}}) = \dot{\varepsilon}(\delta \underline{u}) - \dot{\varepsilon}_{\Sigma} \text{ et } \delta \underline{u}(t = T) = \underline{0}) \\ (\delta \sigma - \sigma_{\Sigma}) \in \mathcal{S}_0^{ad} \\ \delta \sigma = \tilde{\mathbf{A}}(\varepsilon(\delta \underline{u})) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.50)$$

L'annexe A s'intéresse à retrouver l'écriture de ce problème, à partir de la définition de la quantité d'intérêt et selon la démarche proposée dans [Becker et Rannacher, 2001]. Le comportement $\tilde{\mathbf{A}}$ est complètement défini à partir de \mathbf{A} .

Afin d'illustrer les mécanismes conduisant à l'estimation de l'erreur sur la quantité d'intérêt, réduisons le cadre de l'étude au seul cas d'élasticité linéaire. On suppose la quantité d'intérêt I définie avec un unique extracteur en contrainte σ_Σ (cf. remarque 1.13). L'erreur sur la quantité d'intérêt peut se mettre sous la forme :

$$e_h(I) = \int_{\Omega} dV \int_0^T dt \{ \text{Tr} [\sigma_\Sigma \cdot (\dot{\varepsilon}_{ex} - \dot{\varepsilon}_h)] \}$$

et le problème adjoint est le suivant :

Trouver pour tout $\underline{M} \in \Omega$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \underline{u} \in \mathbf{U}_{0,T}^{ad} \left(\begin{array}{l} \delta \underline{u} \text{ cinématiquement admissible à } 0 \\ \text{mais avec une condition finale : } \delta \underline{u}(t = T) = \underline{0} \end{array} \right) \\ (\delta \sigma - \sigma_\Sigma) \in \mathcal{S}_0^{ad} \\ \delta \sigma = \mathbf{A} : \varepsilon(\delta \underline{u}) \end{array} \right.$$

La formulation faible associée est :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [(\mathbf{A}\varepsilon(\delta \underline{u}) - \sigma_\Sigma) \cdot \varepsilon(\underline{u}^*)] \} dt dV = 0$$

En prenant comme cas particulier le champ \underline{u}^* égal à l'erreur du problème de référence $\underline{e}_h(\underline{u}) \in \mathbf{U}_0^{ad}$, on obtient :

$$\int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [(\mathbf{A}\varepsilon(\delta \underline{u}) - \sigma_\Sigma) \cdot \varepsilon(\underline{e}_h(\underline{u}))] \} dt dV = 0$$

Et on a alors la relation suivante, liant la solution du problème adjoint et l'erreur sur le problème de référence :

$$e_h(I) = \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [(\mathbf{A}\varepsilon(\delta \underline{u})) \cdot \varepsilon(\underline{e}_h(\underline{u}))] \} dt dV \quad (1.51)$$

Remarque 1.17 :

L'écriture Eq.(1.51) met en avant le rôle de la solution du problème adjoint dans l'expression de l'erreur sur une quantité d'intérêt locale. Elle joue comme une fonction décrivant l'influence de l'erreur globale sur la qualité de l'évaluation de la quantité d'intérêt locale.

De manière analogue au problème de référence, il est rarement possible de déterminer la solution exacte du problème adjoint. Celui-ci peut être aussi résolu de manière analogue au problème direct, en utilisant la méthode des éléments finis.

On note $(\delta \underline{u}_{ex}, \delta \sigma_{ex})$ et $(\delta \underline{u}_h, \delta \sigma_h)$ ses solutions exacte et approchée. L'erreur sur le problème adjoint appartient à l'espace approché des champs cinématiquement admissibles à 0 (i.e. $\underline{e}_h(\delta \underline{u}) \in \mathbf{U}_{h,0}^{ad}$); en utilisant la loi d'orthogonalité de Galerkin EQ.(1.16), on a :

$$e_h(I) = \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [(\mathbf{A} \underline{\varepsilon}(\underline{e}_h(\delta \underline{u}))) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{e}_h(\underline{u}))] \} dt dV \quad (1.52)$$

Alors, en appliquant simplement l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient un majorant de l'erreur locale :

$$|e_h(I)| \leq \| \underline{\varepsilon}(\underline{e}_h(\delta \underline{u})) \|_{\mathbf{A}, \Omega} \cdot \| \underline{\varepsilon}(\underline{e}_h(\underline{u})) \|_{\mathbf{A}, \Omega} \quad (1.53)$$

Ces deux erreurs étant définies sur des solutions ayant pour support le domaine complet, on peut utiliser les outils existants d'estimation d'erreur globale. La méthode de majoration développée ici nécessite l'utilisation de la loi d'orthogonalité de Galerkin (cf. équation EQ.(1.16)), obligeant les problèmes direct et adjoint à être résolus sur des maillages identiques.

Une approche n'ayant pas recours à la propriété de Galerkin a été introduite dans [Ladevèze, 2006]. On obtient un résultat analogue à EQ.(1.53). Par contre, on peut choisir des supports de résolution différents pour les problèmes direct et adjoint. Le majorant de l'erreur sur la quantité d'intérêt étant simplement le produit des erreurs des problèmes direct et adjoint, résoudre de manière très fine le problème adjoint conduit à un estimateur plus pertinent.

Techniques d'extractions couplées à l'estimation d'erreur en résidus

Ces méthodes, introduites dans [Becker et Rannacher, 1996] présentent les premiers outils d'estimation d'erreur sur une quantité locale. Elles couplent les outils d'extraction, permettant d'écrire l'erreur sur la quantité d'intérêt I sous la forme EQ.(1.52), aux outils d'estimations d'erreur en résidus. En reprenant les notations introduites pour l'étude des estimateurs d'erreur globale basés sur la méthode des résidus d'équilibre, on a :

$$e_h(I) = \sum_{E \in \Omega} \left\{ \int_E \{ \underline{r}_E \cdot \underline{e}_h(\delta \underline{u}) \} dV + \int_{\partial E} \{ \underline{R}_{\partial E} \cdot \underline{e}_h(\delta \underline{u}) \} dS \right\}$$

La méthode de majoration introduite, appelée "Dual Weighted Residual" (DWR), consiste à travailler sur chaque élément :

$$\forall E \in \Omega, \left| \int_E \{ \underline{r}_E \cdot \underline{e}_h(\delta \underline{u}) \} dV + \int_{\partial E} \{ \underline{R}_{\partial E} \cdot \underline{e}_h(\delta \underline{u}) \} dS \right| \leq \omega_E \rho_E$$

où ω_E et ρ_E sont définis tels que :

$$\begin{cases} \rho_E = \sqrt{\int_E \{ \underline{r}_E^2 \} dV} + [\text{diam}(E)]^{-1/2} \sqrt{\int_{\partial E} \{ \underline{R}_{\partial E}^2 \} dS} \\ \omega_E = \sqrt{\int_E \{ \underline{e}_h(\delta \underline{u})^2 \} dV} + [\text{diam}(E)]^{1/2} \sqrt{\int_{\partial E} \{ \underline{e}_h(\delta \underline{u})^2 \} dS} \end{cases}$$

Alors :

$$e_h(I) \leq \sum_{E \in \Omega} \{\omega_E \rho_E\}$$

L'erreur sur la solution du problème adjoint n'étant pas explicitement connue, différentes approches ont été proposées afin de poursuivre le calcul. Une première s'intéresse à l'évaluation d'un majorant de l'erreur ; l'erreur exacte sur le problème adjoint étant majorée par l'utilisation d'estimateurs explicites. La seconde méthode introduite consiste à résoudre de manière quasi exacte le problème adjoint, le calcul de ω_E se faisant alors directement sur $\delta \underline{u}_h$. Dans cet esprit, dans [Paraschivoiu *et al.*, 1997] les auteurs proposent une méthode reposant sur deux maillages. Un maillage plus fin est utilisé pour la construction des problèmes locaux inhérents à l'évaluation de l'erreur en résidus, permettant l'obtention d'un encadrement de la quantité d'intérêt. Tous ces travaux ne permettent pas l'obtention de bornes garanties de l'erreur. Dans [de Almeida et Pereira, 2006, Parés *et al.*, 2008, Gallimard, 2009, de Almeida et Oden, 2010], les auteurs proposent différentes démarches afin d'apporter l'aspect conservatif à la méthode DWR.

Des extensions de la méthode ont été proposées pour les problèmes de dynamique dans [Schleupen et Ramm, 2000, Suli et Houston, 2002], pour les problèmes de plasticité parfaite dans [Rannacher et Suttmeier, 1998]. Les seuls travaux s'intéressant à l'estimation de l'erreur sur une quantité locale en élasto-viscoplasticité basés sur la méthode DWR sont dans [Becker et Rannacher, 2001]. Dans ce cas, le problème adjoint basé sur une écriture linéarisée du comportement (cf équation EQ.(1.45)), n'offre qu'une évaluation du premier ordre de l'erreur. Cette linéarisation permet d'établir une démarche identique au cas linéaire afin d'estimer l'erreur sur une quantité d'intérêt locale. Enfin lors de cette démarche, l'erreur de discrétisation temporelle n'est pas prise en compte.

Dans [Tie, 2011], l'auteur présente une utilisation de l'outil d'estimation d'erreur locale dans un but d'optimisation du maillage spatial support de la résolution au regard d'une quantité d'intérêt locale. La méthode employée est le couplage de l'approche introduite dans [Aubry *et al.*, 1999] avec les outils d'extraction. Un indicateur d'erreur spatiotemporelle est ainsi proposé, traduisant l'erreur associé à un maillage spatial sur un intervalle de temps. Il ne s'agit pas d'un outil d'estimation de l'erreur proprement dit, mais d'un outil de calcul adaptatif, optimisant, à chaque pas de temps, le maillage spatial.

Techniques d'extraction couplées à l'estimation d'erreur en dissipation

Ces techniques, introduites dans [Ladevèze, 2006] sont à ce jour les seuls outils permettant d'évaluer une borne garantie de l'erreur locale dans le cadre de problèmes d'évolution. L'utilisation des techniques de construction de champs admissibles est ici étendue au problème adjoint. On note $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ et $(\delta \hat{\underline{u}}_h, \delta \hat{\sigma}_h)$ les solutions admissibles associées aux solutions des problèmes direct $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ et adjoint $(\delta \underline{u}_h, \delta \sigma_h)$. En

utilisant ces solutions et la propriété remarquable EQ.(1.29), on a :

$$\int_{\Omega} \{ \text{Tr} [(\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \cdot (\dot{\epsilon}_{\Sigma} - \dot{\epsilon}(\delta \hat{u}_h)) + (\sigma_{\Sigma} - \delta \hat{\sigma}_h) \cdot (\dot{\epsilon}(\underline{u}_{ex}) - \dot{\epsilon}(\hat{u}_h))] \} dV = 0$$

De plus, dans le cadre d'un comportement linéaire, le comportement du problème adjoint permet à la solution $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ de vérifier la propriété (cf Annexe A, équation EQ.(A.1)) :

$$\int_0^T \{ (\sigma_{ex} - \sigma_h) \dot{\epsilon}(\delta \underline{u}_h) + \delta \sigma_h (\dot{\epsilon}_{ex} - \dot{\epsilon}_h) \} dt = 0$$

Alors

$$e_h(I) = I_{hh} + \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [(\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \cdot \dot{\epsilon}(\delta \hat{u}_h - \delta \underline{u}_h) + (\delta \hat{\sigma}_h - \delta \sigma_h) \cdot (\dot{\epsilon}(u_{ex}) - \dot{\epsilon}(\hat{u}_h))] \} dt dV$$

avec

$$I_{hh} = \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [(\hat{\sigma}_h - \sigma_h) \cdot (\dot{\epsilon}_{\Sigma} - \dot{\epsilon}(\delta \underline{u}_h)) + (\sigma_{\Sigma} - \delta \sigma_h) \cdot (\dot{\epsilon}(\hat{u}_h) - \dot{\epsilon}(\underline{u}_h))] \} dt dV$$

La loi d'orthogonalité de Galerkin n'est dans ce cas pas utilisée, la discrétisation du problème adjoint peut ainsi être choisie très fine afin d'améliorer la pertinence de l'estimateur. Les premières illustrations de cette méthode sont dans [Chamoin et Ladevèze, 2007].

Profitant de l'indépendance des espaces de définition des problèmes direct et adjoint, des méthodes dédiées peuvent être introduites afin de résoudre avec une très bonne qualité le problème adjoint. Dans cet esprit, profitant du caractère extrêmement local de ce problème, un enrichissement non intrusif à l'aide de fonction type "handbook" (i.e. GFEM [Strouboulis *et al.*, 2000a]) est réalisé dans [Chamoin et Ladevèze, 2008]. Ces outils permettent l'obtention de bornes garanties de l'erreur aussi bien sur des quantités locales que des quantités non-linéaires comme une contrainte de von Mises [Ladevèze et Chamoin, 2010]. Plus récemment, l'approche a été appliquée aux problèmes de dynamique [Ladevèze et Waeytens, 2009].

4 Bilan

On a présenté dans ce chapitre une liste non exhaustive des différents outils d'estimation de l'erreur de discrétisation, globale ou sur une quantité d'intérêt à support local. On peut retenir que seule une faible partie de ces estimateurs offrent une estimation garantie de l'erreur, et dans le cadre de problèmes non-linéaires d'évolution, cette sélection est encore plus restreinte. L'erreur en dissipation offre une mesure garantie de l'erreur englobant toutes ses composantes (non-linéarité matériau, discrétisation spatiale et temporelle). Elle est basée sur des concepts à fort contenu mécanique. C'est pour ces raisons que la suite de ce travail s'inspire des notions liées à l'erreur en dissipation.

Les outils d'extraction, aujourd'hui couramment utilisés dès lors que l'on s'intéresse à des quantités locales, permettent d'utiliser des outils originellement destinés à l'étude de l'erreur globale. De cette manière, on peut construire des outils d'estimation de l'erreur locale, qui peuvent hériter de la maîtrise des estimateurs d'erreur globale.

Enfin, on veut construire une méthode de majoration n'utilisant pas la propriété d'orthogonalité de Galerkin. En effet, on veut qu'il y ait indépendance des supports des résolutions des problèmes direct et miroir.

L'objet de ce manuscrit est de présenter un nouvel outil d'estimation de l'erreur locale, pour des problèmes non-linéaires d'évolution. On propose une généralisation de la méthode associant les outils d'extraction et l'erreur en dissipation. L'approche est présentée dans un cadre général d'élasto-viscoplasticité et mise en oeuvre dans le cas de l'élastoplasticité.

Chapitre 2

Mise en oeuvre de l'erreur en dissipation sur un problème de référence

Ce chapitre présente un problème classique d'élastoplasticité. Une première partie s'articule autour de l'écriture du problème continu et du comportement élastoplastique, tandis qu'une seconde illustre une méthode de résolution numérique dédiée à ces problèmes. Enfin, la mise en oeuvre de l'erreur en dissipation est développée, avec la méthode de construction des champs dits admissibles.

Sommaire

1	Problèmes d'élastoplasticité	47
1.1	Aspects phénoménologiques	47
1.2	Formulation du comportement	51
2	Problème de référence	56
2.1	Écriture du problème continu	56
2.2	Résolution numérique du problème	58
2.3	Exemple	60
3	Calcul de l'erreur en dissipation	61

3.1	Présentation de l'erreur en dissipation dans le cas élastoplastique	62
3.2	Calcul des champs admissibles	64
3.3	Illustration	67
4	Bilan	69

1 Problèmes d'élastoplasticité

Le comportement d'un matériau a jusqu'à maintenant été synthétisé dans l'écriture mathématique $\sigma(t) = \mathbf{A}(\varepsilon(\tau), \tau \in [0, t])$. Après une présentation qualitative des phénomènes élasto(-visco)plastique, cette partie a pour objectif de présenter une description particulière, dite de Prandtl-Reuss, de ce comportement.

1.1 Aspects phénoménologiques

1.1.1 Mise en évidence de la plasticité

Destinée à l'origine à caractériser le comportement des métaux ou des alliages métalliques, la plasticité peut se comprendre par les mécanismes liés aux mouvements des dislocations. Aujourd'hui, son formalisme est utilisé pour décrire le comportement d'autres types de matériaux comme le béton, les sols ou même des composites à l'instar du bois, bien que les mécanismes mis en jeu n'ont alors plus rien à voir avec les dislocations. On peut dissocier en deux catégories de solides les matériaux plastiques en fonction de leur dépendance au temps, c'est-à-dire s'il est visqueux ou non.

La figure FIG.(2.1) présente les courbes d'érouissage, de réponse à des essais unidimensionnels de fluage et de relaxation d'un solide élastoplastique. Le comportement de ce type de matériaux est élastique tant que la contrainte est inférieure à un seuil, puis élastoplastique dès que celui-ci est dépassé. On peut noter que la décharge est elle aussi élastique et qu'il subsiste une déformation résiduelle irréversible, dont l'amplitude dépend du chargement.

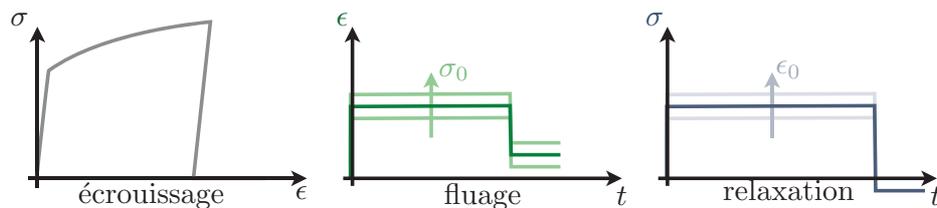


FIGURE 2.1: Courbes d'érouissage, de réponse à un essai de fluage et à un essai de relaxation d'un matériau élasto-plastique

Dans le cas des solides élasto-viscoplastiques, on retrouve sur la figure FIG.(2.2) les courbes d'érouissage, de réponse à des essais unidimensionnels de fluage et de relaxation d'un solide élasto-viscoplastique. On retrouve les notions de seuil et de déformations irréversibles déjà présentes dans le cas élastoplastique, mais avec un effet de vitesse supplémentaire.

Ces exemples unidimensionnels mettent en avant les notions intrinsèques au phénomène de plasticité : qu'elles soient visqueuses ou non, des déformations irréversibles apparaissent dès que la contrainte dépasse la limite d'élasticité notée σ_e ,

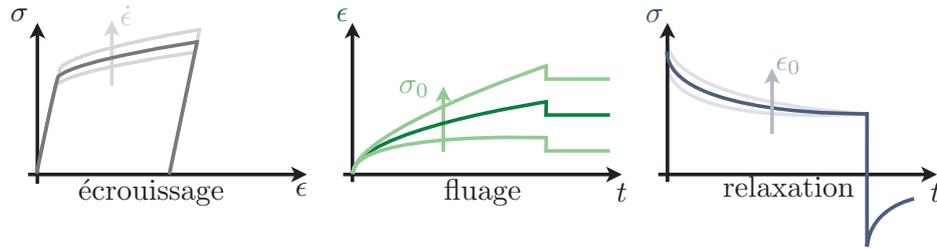


FIGURE 2.2: Courbes d'écrouissage, de réponse à un essai de fluage et à un essai de relaxation d'un matériau élasto-viscoplastique

vérifiant alors une loi d'écrouissage. Le schéma rhéologique FIG.(2.3) synthétise le comportement unidimensionnel (modèle de Bingham généralisé).

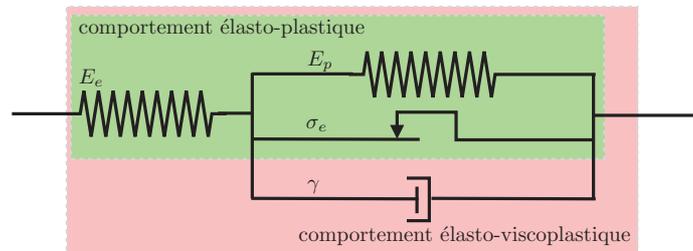


FIGURE 2.3: Schéma rhéologique représentant l'élasto(-visco)plasticité. E_e caractérise la déformation élastique, E_p l'écrouissage, σ_e la limite d'élasticité et γ la viscosité

Partant de constats empiriques, on peut supposer une décomposition de la déformation totale en une partie élastique réversible ϵ_e et une partie plastique irréversible ϵ_p :

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$$

Tandis que la classique loi de Hooke s'applique dans la plupart des cas à la partie élastique, la partie plastique va suivre une loi d'écoulement ou loi d'évolution. Tout d'abord, la déformation plastique n'évolue que si $\sigma = \sigma_e$ ou $f = \sigma - \sigma_e = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_p &= 0 \text{ si } \sigma < \sigma_e \text{ ou } f < 0 \\ \dot{\epsilon}_p &\neq 0 \text{ si } \sigma = \sigma_e \text{ ou } f \geq 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

La définition du seuil de plasticité $f = 0$ est complexe, surtout pour les problèmes multidimensionnels. Deux notions sont nécessaires afin de traduire une représentation proche de la physique. La grandeur f étant scalaire, une mesure tensorielle doit être introduite afin de traduire le critère $f = 0$ permettant de définir la limite d'élasticité. Ensuite, des essais cycliques ont mis en avant l'aspect évolutif de la limite d'élasticité σ_e ; on parle alors d'écrouissage.

1.1.2 Limite d'élasticité

La figure FIG.(2.4) présente le dépouillement d'un essai de traction-torsion dans la direction 33 (voir [Calloch, 1997]). Le seuil de plasticité $f = 0$ y est représenté en fonction des seules composantes de la contrainte non nulles, i.e. σ_{23} et σ_{33} . On remarque que les deux composantes jouent différemment sur la position du seuil, mettant en avant le caractère tridimensionnel de la limite d'élasticité.

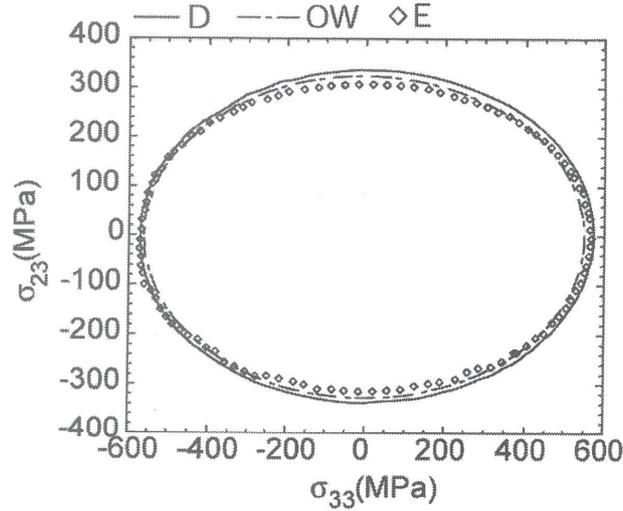


FIGURE 2.4: Seuil de plasticité ($f = 0$) en fonction des contraintes σ_{23} et σ_{33} , issu d'un essai de traction torsion [Calloch, 1997]. Les losanges représentent les valeurs issues des essais, la ligne continue la valeur de la contrainte équivalente de von Mises

Il est alors nécessaire de définir une mesure pour délimiter le domaine élastique

$$f = \text{mes}(\sigma) - \sigma_e < 0 \quad (2.2)$$

On trouve dans la littérature des critères orthotropes ou isotropes ; seuls les deux plus courants critères isotropes sont présentés dans ce travail, mais de nombreux travaux présentent la plupart des outils, dont [Salençon, 2002, Lemaitre *et al.*, 2009]. Les déformations plastiques des métaux sont les résultats de glissements, de cisaillements cristallins, dont l'amorçage est gouvernés par les contraintes tangentielles. Partant de ce constat, la plupart des critères se basent sur le cisaillement.

Critère de Tresca

Le critère de Tresca est un critère en cisaillement maximum. Il stipule que le comportement du matériau rentre dans le régime plastique dès que la contrainte de cisaillement τ dans une direction donnée atteint une valeur critique. Cette contrainte de cisaillement est définie telle que :

$$\tau = \frac{\sup_{i \neq j} |\sigma_i - \sigma_j|}{2}$$

où les contraintes σ_i sont les contraintes principales. La définition du domaine élastique EQ.(2.2) associée au critère de Tresca s'écrit alors :

$$f = \frac{\sup_{i \neq j} |\sigma_i - \sigma_j|}{2} - \sigma_e$$

La figure FIG.(2.5) de gauche illustre le seuil de plasticité dans le plan des contraintes principales (σ_I, σ_{II}) lorsque celui-ci est basé sur le critère de Tresca et que la contrainte σ_{III} est nulle.

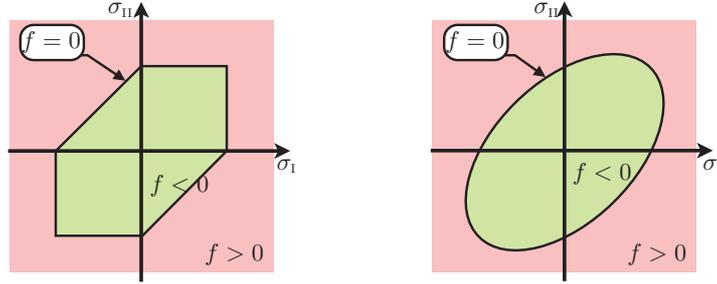


FIGURE 2.5: Seuil de plasticité dans le plan (σ_I, σ_{II}) pour les critères de Tresca (figure de gauche) et de von Mises (figure de droite) ($\sigma_{III} = 0$).

Critère de von Mises

Le critère de von Mises est un critère en énergie. Basé sur l'énergie élastique de cisaillement, il stipule que le comportement du matériau devient plastique lorsque l'énergie élastique de cisaillement \mathcal{W}_c atteint une valeur seuil $\mathcal{W}_{c,f}$. Cette énergie est définie comme l'énergie de déformation élastique à laquelle est retirée l'énergie de déformation hydrostatique associée. En introduisant σ_d et $\varepsilon_{e,d}$ les parties déviatoriques des tenseurs de contraintes et de déformation élastique¹, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_c &= \frac{1}{2} \text{Tr} [\sigma_d \cdot \varepsilon_{e,d}] \\ &= \frac{1}{4\mu} \text{Tr} [\sigma_d \cdot \sigma_d] \\ &\leq \mathcal{W}_{c,f} \end{aligned} \quad (2.3)$$

en utilisant la loi d'élasticité linéaire, où μ est le module de cisaillement.

Dans le cas de l'utilisation d'un critère de von Mises, la limite d'élasticité est ainsi définie sur le carré de la contrainte déviatorique. Afin de retrouver un critère en contrainte, on peut introduire la contrainte équivalente de von Mises σ_{vm} telle

1. $\mathbb{X}_d = \text{dev}(\mathbb{X}) = \mathbb{X} - \frac{1}{3} \text{Tr}[\mathbb{X}] \mathbb{I}$

que² :

$$\begin{aligned}\sigma_{vm} &= \sqrt{\text{Tr}[\sigma_d \cdot \sigma_d]} \\ &= \|\sigma_d\|\end{aligned}\quad (2.4)$$

Et le critère en énergie peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{W}_c \leq \mathcal{W}_{c,f} \Leftrightarrow \|\sigma_d\| \leq \sigma_e \quad (2.5)$$

La définition du domaine élastique EQ.(2.2) associée au critère de von Mises s'écrit alors :

$$f = \|\sigma_d\| - \sigma_e$$

La figure FIG.(2.5) de droite illustre le seuil de plasticité dans le plan $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ lorsque celui-ci est basé sur le critère de von Mises. Ce critère étant le plus courant, c'est celui retenu pour la suite de cette étude.

1.1.3 Notion d'écroûissage

Il existe deux grands types d'écroûissage permettant de traduire l'évolution de la limite d'élasticité en fonction de l'histoire du chargement : l'écroûissage cinématique et l'écroûissage isotrope. L'écroûissage isotrope R consiste en l'agrandissement du domaine d'élasticité et l'écroûissage cinématique \mathbb{X} en son déplacement. Le seuil se met alors sous la forme suivante :

$$f = \text{mes}(\sigma - \mathbb{X}) - (R + R_0) \quad (2.6)$$

où R_0 caractérise la taille initiale du domaine d'élasticité. La figure FIG.(2.6) illustre ces deux phénomènes.

Le travail présenté ici se réduit aux problèmes d'écroûissage isotrope.

1.2 Formulation du comportement

L'étude d'aspects phénoménologiques illustrée dans la partie précédente a mis en avant les notions inhérentes à la plasticité que sont la limite élastique et l'écroûissage. L'objectif est maintenant d'explicitier le comportement d'un matériau plastique à l'aide d'un formalisme thermodynamique.

2. Traditionnellement la contrainte équivalente de von Mises est définie en utilisant le coefficient $\sqrt{3}/2$ supplémentaire. Grâce à celui-ci, dans le cas d'un problème de traction-compression, on a $\sigma_{vm} = \sigma$. L'utilisation de la norme $\|\cdot\| = \sqrt{\text{Tr}[\cdot \cdot]}$ a été privilégiée dans ce travail pour des questions de simplicité.

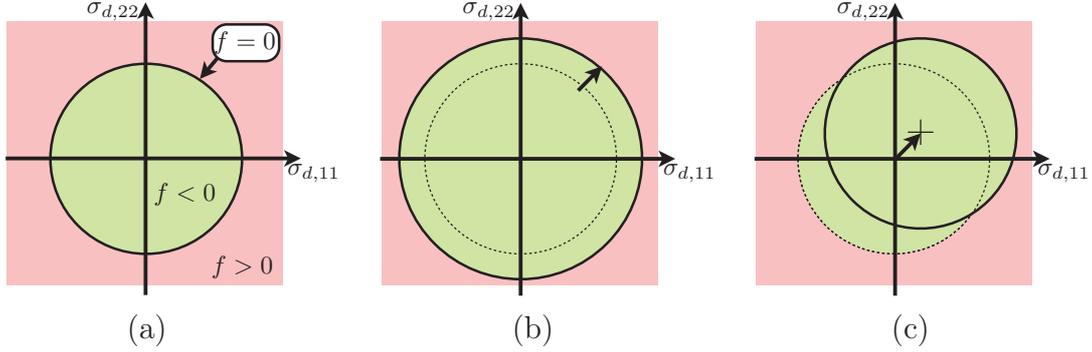


FIGURE 2.6: Illustration des différents modes d'écoulement : (a) définition du domaine élastique, (b) écoulement isotrope, (c) écoulement cinématique

1.2.1 Choix des variables thermodynamiques

La première étape de toute formulation est de déterminer des variables d'état pertinentes afin de décrire toute évolution du matériau. Outre les variables observables (comme la déformation totale ε), il est nécessaire d'introduire trois variables internes pour caractériser un état plastique. En plus de la déformation plastique ε_p , on peut définir deux autres variables afin de déterminer un état d'écoulement. L'introduction d'une grandeur scalaire suffit pour l'écoulement isotrope, mais une variable tensorielle est nécessaire pour l'écoulement cinématique. De cette manière, la déformation plastique cumulée p est par définition³ :

$$\forall t \in [0, T]; \quad p(t) = \int_0^t \{ \|\dot{\varepsilon}_p(\tau)\| \} d\tau \quad (2.7)$$

p étant positif et croissant par définition, elle représente en quelque sorte la longueur de chemin plastique subi par le matériau et traduit ainsi l'écoulement isotrope.

Pour l'écoulement cinématique, une ou plusieurs variables tensorielles peuvent être utilisées. Dans la suite, on utilisera la notation α pour les représenter.

Dans un objectif de simplification des notations, on regroupe l'ensemble des variables internes dans deux variables généralisées :

$$\dot{e}_e = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_e \\ \dot{p} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}, \quad \dot{e}_p = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_p \\ -\dot{p} \\ -\dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Remarque 2.1 :

La déformation plastique ε_p introduite représente un écoulement. Ainsi, pour les matériaux métalliques, on observe généralement l'incompressibilité plastique. Elle

3. La définition retenue ici pour la déformation plastique cumulée p est adimensionnée de la même manière que la contrainte équivalente de von Mises. Traditionnellement, elle est définie telle que $p = \int_0^t \left\{ \sqrt{\frac{2}{3} \text{Tr} [\dot{\varepsilon}_p(\tau) \cdot \dot{\varepsilon}_p(\tau)]} \right\} d\tau$.

doit donc vérifier à tout instant :

$$\text{Tr} [\varepsilon_p] = 0 \text{ ou } \text{Tr} [\dot{\varepsilon}_p] = 0$$

1.2.2 Le comportement décrit par variables internes

Cette partie a pour objectif d'introduire une description du comportement élasto-viscoplastique à l'aide de variables internes. Cette approche, introduite dans [Halphen et Nguyen, 1975] est celle retenue dans la suite de ce travail. De plus, la Thermodynamique des Milieux Continus (TMC) est utilisée, offrant un formalisme fonctionnel rigoureux des lois de comportement. Avec l'hypothèse des petites perturbations, on suppose aussi toute évolution isotherme. Alors, l'inégalité de Clausius-Duhem, ou second principe de la thermodynamique assure que toute transformation vérifie en tout point du matériau :

$$d = \text{Tr} [\sigma \cdot \dot{\varepsilon}] - \rho \dot{\Psi} \geq 0 \quad (2.9)$$

avec

- d la dissipation intrinsèque ;
- σ le tenseur des contraintes de Cauchy ;
- ε le tenseur des déformations généralisées ;
- ρ la masse volumique du matériau ;
- Ψ l'énergie libre de Helmholtz.

Énergie libre et lois d'état

L'énergie de Helmholtz Ψ est considérée comme potentiel thermodynamique ce qui permet de satisfaire les hypothèses de la TMC. En effet, postuler l'existence d'un potentiel thermodynamique permet de vérifier les conditions de stabilité thermodynamique imposées par les inégalités que l'on peut déduire du second principe. Il doit impérativement être convexe par rapport à la déformation totale ε (et σ). La convexité par rapport aux variables internes n'est pas nécessaire, mais dans ce cas la positivité de la dissipation doit être garantie. On peut travailler d'une manière équivalente avec différents potentiels. Pour les solides, l'énergie de déformation est adaptée aux conditions isothermes d'essais mécaniques. Dans le cadre élasto-viscoplastique, elle vaut :

$$\rho \Psi = \frac{1}{2} \text{Tr} [\varepsilon_e \cdot \mathbf{K} \varepsilon_e] + G(p) + \text{Tr} [\beta(p) \cdot \alpha] + \frac{1}{2} \text{Tr} [\alpha \cdot \mathbf{C}(p) \alpha]$$

où \mathbf{K} est l'opérateur de Hooke, et G , β et \mathbf{C} des fonctions dépendantes du matériau. En dérivant ce potentiel par rapport aux différentes variables de e_e , on obtient alors les lois d'état suivantes, en introduisant une constante C^4 :

$$\sigma = \mathbf{K} \varepsilon_e, \quad R = \frac{dG}{dp}(p) \quad \text{et} \quad \mathbb{X} = C \cdot \alpha$$

4. Plus de détails sont donnés dans [Lemaitre *et al.*, 2009]

Ceci définit les quantités duales σ , R et \mathbb{X} des variables thermodynamiques ε_e , p et α . On peut les regrouper dans une notation généralisée, à l'instar de \dot{e}_e et \dot{e}_p :

$$s = \begin{bmatrix} \sigma \\ R \\ \mathbb{X} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

et les lois d'état s'écrivent, sous forme synthétique :

$$s = \mathbf{A}(e_e) \quad (2.11)$$

Dissipation et lois d'évolution

La dissipation intrinsèque s'écrit alors, avec l'utilisation des variables thermodynamiques et de leurs variables duales :

$$d((\sigma, R, \mathbb{X}), (\dot{\varepsilon}_p, -\dot{p}, -\dot{\alpha})) = \text{Tr}[\sigma \cdot \dot{\varepsilon}_p] - R\dot{p} - \text{Tr}[\mathbb{X} \cdot \dot{\alpha}]$$

soit, en reprenant les notations généralisées EQ.(2.8) et EQ.(2.10) :

$$d(s, \dot{e}_p) = s \cdot \dot{e}_p \quad (2.12)$$

où le produit "." représente soit le produit entre réels, soit un produit contracté entre les différentes composantes constituant la notation généralisée.

La nécessité de vérifier le second principe EQ.(2.9) impose la relation suivante :

$$d(s, \dot{e}_p) = s \cdot \dot{e}_p \geq 0 \quad (2.13)$$

autrement dit, il faut inclure dans le modèle une relation entre \dot{e}_p et s . On appelle celle-ci loi d'évolution pour les variables internes constituant \dot{e}_p . Formellement, on pose :

$$\dot{e}_p = \mathbf{B}(s)$$

L'opérateur \mathbf{B} est une caractéristique du matériau. Il doit être positif afin de vérifier l'inégalité de Clausius-Duhem EQ.(2.9). Concernant les conditions initiales, le matériau est supposé vierge ($\varepsilon_p = \mathbb{O}$, $p = 0$ et $\alpha = \mathbb{O}$).

Les matériaux standards

Une approche couramment utilisée pour définir les lois d'évolution relatives aux processus dissipatifs est de postuler l'existence d'un pseudo-potential de dissipation. En effet, dans le cadre des matériaux standards [Moreau, 1966, Halphen et Nguyen, 1975, Ladevèze, 1998, Lemaitre *et al.*, 2009], si l'on choisit φ une fonction vérifiant :

$$\varphi = \varphi(\dot{e}_p), \quad \varphi \text{ convexe}, \quad \varphi \geq 0 \text{ et } \varphi(0) = 0$$

En exprimant la propriété de normalité :

$$s = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{e}_p}$$

Alors, dans ce cas :

$$d(s, \dot{e}_p) = s \cdot \dot{e}_p = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{e}_p} \cdot \dot{e}_p \geq \varphi \geq 0$$

Il est souvent plus pratique de travailler avec la loi inverse. Ainsi, en introduisant la transformée de Legendre-Fenchel, on peut définir le pseudo-potentiel de dissipation φ^* :

$$\varphi^*(s) = \sup_{\dot{e}_p} \{s \cdot \dot{e}_p - \varphi(\dot{e}_p)\}$$

et alors les lois d'évolution s'écrivent :

$$\dot{e}_p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial s} \quad (2.14)$$

1.2.3 Exemples de matériaux standards

A titre d'exemple, on considère le modèle de Prandtl-Reuss qui est utilisé dans la suite de ce travail. On considère l'écoulement isotrope (i.e. $\alpha = \mathbb{O}$ et $\mathbb{X} = \mathbb{O}$). Il est possible de formuler toutes les conditions d'admissibilité thermodynamique à l'aide du formalisme suivant, en $3D$:

$$\mathcal{E}_{Th}^{ad} = \left\{ \dot{e}_p = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_p \\ -\dot{p} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^6 \times \mathfrak{R}, |\text{Tr}[\dot{\varepsilon}_p]| = 0 \text{ et } -\dot{p} \leq 0 \right\}$$

$$\mathcal{S}_{Th}^{ad} = \left\{ s = \begin{bmatrix} \sigma \\ R \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^6 \times \mathfrak{R}, |f = \|\sigma_d\| - (R + R_0) \leq 0 \text{ et } R \geq 0 \right\}$$

On note ϕ_{Esp} la fonctionnelle indicatrice de convexe qui pour tout élément de Esp prend la valeur nulle et l'infini sinon. La formulation des potentiels suivants est donnée dans [Ladevèze, 1996].

Modèle élastoplastique de Prandtl Reuss avec écoulement linéaire

On peut définir les pseudo-potentiels suivants :

$$\begin{aligned} \varphi(\dot{e}_p) &= R_0 \dot{p} + \phi_{\mathcal{E}_{Th}^{ad}}(\dot{e}_p) \\ \varphi^*(s) &= \phi_{\mathcal{S}_{Th}^{ad}}(s) \end{aligned}$$

où R_0 est un paramètre matériau.

Modèle élasto-viscoplastique de Prandtl Reuss avec écrouissage linéaire

On peut choisir les pseudo-potentiels suivants :

$$\begin{aligned}\varphi(\dot{e}_p) &= R_0 \|\dot{e}_p\| + \frac{k \cdot n}{n+1} \left(\frac{\|\dot{e}_p\|}{k} \right)^{\frac{n+1}{n}} + \phi_{\mathcal{E}_{Th}^{ad}}(\dot{e}_p) \\ \varphi^*(s) &= \frac{k}{n+1} \langle \|\sigma_d\| - (R + R_0) \rangle_+ + \phi_{\mathcal{S}_{Th}^{ad}}(s)\end{aligned}$$

où $\langle f \rangle_+$ désigne la partie positive de f et R_0 , n et k sont des paramètres matériaux.

Remarque 2.2 :

Un certain nombre de comportement courant de matériaux ne peuvent se formuler de manière standard. Pour certains matériaux comme la loi de Coulomb du frottement sec ou la loi plastique à écrouissage cinématique non-linéaire, les lois d'évolution peuvent s'écrire de manière élégante en utilisant la notation de bipotentiel introduite par de Saxcé [De Saxcé, 1992]. Cette notation généralise en quelque sorte la notion de pseudo-potentiel au cas des matériaux non-standard. Des indicateurs ont été ensuite proposés, utilisant les propriétés de dualité découlant de la formulation du comportement par bipotentiel. Par exemple, dans le cadre d'un modèle de comportement plastique de Drucker-Prager ; on a [Hjiaj et al., 2003] et pour les problèmes de frottement, on trouve [Coorevits et al., 2000, Coorevits et al., 2001, Fortin et al., 2002, Louf et al., 2003].

2 Problème de référence

Dans toute la suite, on considère un problème élastoplastique avec un modèle de Prandtl-Reuss.

2.1 Écriture du problème continu

En reprenant les notations du premier chapitre, le problème est le suivant : considérons une structure de domaine Ω et de frontière $\partial\Omega$. Cette structure est soumise à des efforts volumiques \underline{f}_d , à des efforts surfaciques \underline{F}_d sur une partie de sa frontière notée $\partial_f\Omega$ et à des déplacements imposés sur la partie complémentaire $\partial_u\Omega$. La figure FIG.(2.7) illustre cette structure dans son environnement.

Les espaces d'admissibilité \mathbf{u} , \mathbf{u}^{ad} et \mathbf{u}_0^{ad} (respectivement \mathcal{S} , \mathcal{S}^{ad} et \mathcal{S}_0^{ad}) peuvent être étendus aux notations généralisées \mathcal{E}^\square (respectivement \mathcal{J}^\square) :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^\square &= \left\{ e = e_e + e_p = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} \mid \varepsilon = \varepsilon(\underline{u}) \text{ avec } \underline{u} \in \mathbf{u}^\square \right\} \\ \mathcal{J}^\square &= \left\{ s = \begin{bmatrix} \sigma \\ R \end{bmatrix} \mid \sigma \in \mathcal{S}^\square \text{ et } R \geq 0 \right\}\end{aligned}$$

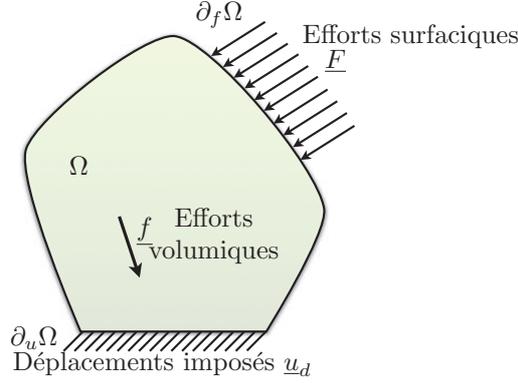


FIGURE 2.7: Représentation de la structure et de son environnement.

Et le problème s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } (s, \dot{e}_p) \text{ tel que, pour tout } (\underline{M}, t) \in \Omega \times [0, T] : \\
 & \begin{cases} (s, e) \in \mathcal{S}^{ad} \times \mathcal{E}^{ad} \\ s = \mathbf{A}(e_e) \\ \dot{e}_p = \mathbf{B}(s) \\ \text{et, à } t=0, s = 0, e = 0 \text{ et } \underline{u} = 0 \end{cases} \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

Dans un cadre d'élastoplasticité linéaire, on peut préciser les lois d'état et d'évolution :

$$s = \mathbf{A}(e_e) \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma = \mathbf{K} \varepsilon_e \\ R = k \cdot p \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\dot{e}_p = \mathbf{B}(s) \Leftrightarrow \begin{cases} f = \|\sigma_d\| - (R + R_0) \leq 0 \\ \dot{p} \geq 0 \\ \dot{p} \cdot f = 0 \\ \dot{e}_p = \dot{p} \frac{\sigma_d}{R + R_0} \end{cases} \quad (2.17)$$

Remarque 2.3 :

On retrouve les propriétés observées. En effet, l'écriture EQ.(2.17) permet de retrouver la règle de normalité EQ.(2.1). Tandis que les équations $f \leq 0$ et $\dot{p} \geq 0$ assurent l'admissibilité thermodynamique de la solution, la condition de complémentarité $\dot{p} \cdot f = 0$ exprime la séparation nette qui existe entre les deux régimes élastique et plastique. Enfin, les déformations plastiques étant de directions perpendiculaires à la surface seuil, on retrouve donc :

$$\dot{e}_p = \dot{p} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{p} \frac{\sigma_d}{\|\sigma_d\|} = \dot{p} \frac{\sigma_d}{R + R_0}$$

Remarque 2.4 :

Les écritures EQ.(2.16) et EQ.(2.17) sont exclusivement formulée pour l'élastoplasticité linéaire, soit dans le cas où \mathbf{A} est linéaire. Dans un cadre plus général, comme par exemple avec de l'érouissage suivant une loi en puissance, \mathbf{A} est non-linéaire. Comme la mesure de l'erreur est faite sur la loi d'évolution, il est alors judicieux de placer toutes les non-linéarités au sein de celle-ci. Dans le cas où la loi d'état est non-linéaire, il existe un formalisme introduisant un changement de variable afin de conserver une loi d'état linéaire. Il s'agit des formulations dites normales (voir [Ladevèze, 1998]).

2.2 Résolution numérique du problème

Dans la plupart des cas, le calcul direct de la solution exacte est impossible. Une approche discrète est alors déployée, la plus courante et support de ces travaux est la méthode des éléments finis couplée à une approche incrémentale. Toujours avec les notations introduites, on a :

$$\text{Trouver } (s_h, \dot{e}_{p,h}) \text{ tel que, pour tout } (\underline{M}, t) \in \Omega \times [0, T] : \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} (s_h, e_h) \in \mathcal{S}_h^{ad} \times \mathcal{E}_h^{ad} \\ s_h = \mathbf{A}(e_{e,h}) \\ \dot{e}_{p,h} = \mathbf{B}_h(s_h) \\ \text{et, à } t=0, s_h = 0, e_h = 0 \text{ et } \underline{u}_h = 0 \end{cases}$$

La loi d'état \mathbf{A} , étant dans ce cas linéaire, peut être résolue exactement. Par contre, la loi d'évolution \mathbf{B} est approchée par \mathbf{B}_h , i.e. résolue pour chaque incrément par une méthode de quasi-Newton sur le déplacement. L'algorithme mis en place afin de satisfaire l'admissibilité plastique ainsi que l'admissibilité statique est celui dit de retour radial. La méthode utilisée pour résoudre le problème à chaque incrément est synthétisée dans l'algorithme ALGO.(1). Les grandeurs $\varepsilon_h, \varepsilon_{h,p}, p_h, \sigma_h$ et R_h sont connues à l'instant t_k (on les note alors $\varepsilon_{h,k}, \varepsilon_{h,p,k}, p_{h,k}, \sigma_{h,k}$ et $R_{h,k}$). On cherche leur valeur à l'instant t_{k+1} suite à un incrément de chargement ΔF (on note ces inconnues $\varepsilon_{h,k+1}, \varepsilon_{h,p,k+1}, p_{h,k+1}, \sigma_{h,k+1}$ et $R_{h,k+1}$) (pour plus d'information, voir [Bonnet et Frangi, 2006]).

Remarque 2.5 :

L'intégration numérique utilisée dans l'algorithme ALGO.(1) est de type différences finies, en choisissant un schéma implicite pour des raisons de stabilité. En effet, à chaque incrément, la loi d'évolution est exprimée aux instants finaux (i.e. t_{k+1}) :

$$f_{k+1} \leq 0, \quad \Delta p \geq 0, \quad \Delta p \cdot f_{k+1} = 0 \quad \text{et } \Delta \varepsilon_p = \Delta p \cdot \frac{\sigma_{d,k+1}}{R_{k+1} + R_0}$$

initialisation :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \text{Calcul du résidu d'équilibre } r_{ref} \text{ en réponse à } \Delta F, r = r_{ref} \end{cases}$$

tant que $r > \text{coef}_{seuil} \cdot r_{ref}$ **faire**

Résolution de l'étape globale : $\mathbf{K}_{EF} \cdot \delta u = -r$

Actualisation du déplacement : $\Delta u = \Delta u + \delta u$

Calcul de l'incrément de déformation totale : $\Delta \varepsilon = \varepsilon(\Delta u)$

Calcul de la contrainte élastique associée : $\sigma_e = \sigma_k + \mathbf{K} \Delta \varepsilon$

si $\|\sigma_e\| - (R_k + R_0) \leq 0$ **alors**

La solution élastique est plastiquement admissible

$p_{k+1} = p_k, \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \Delta \varepsilon, \sigma_{k+1} = \sigma_e$

sinon

La solution élastique est plastiquement non-admissible

Résolution de (Retour radial) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \Delta p > 0 \left[\begin{array}{l} \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_e + \Delta \varepsilon_p \text{ avec } \text{Tr}[\Delta \varepsilon_p] = 0 \\ \sigma_{k+1} = \sigma_k + \mathbf{K} \Delta \varepsilon_e = \sigma_e - \mathbf{K} \Delta \varepsilon_p \\ \|\sigma_{k+1,d}\| - (R_k + k \cdot \Delta p + R_0) = 0 \\ \Delta \varepsilon_p = \Delta p \cdot \frac{\sigma_{d,k+1}}{R_k + k \cdot \Delta p + R_0} \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

fin

Post traitement : $p_{k+1} = p_k + \Delta p$ et $R_{k+1} = R_k + k \Delta p$

Calcul du nouveau résidu d'équilibre r

fin

Algorithme 1: Algorithme de résolution du problème élastoplastique incrémental.

Remarque 2.6 :

On appelle cet algorithme retour radial, car si la contrainte élastique σ_e (ou prédiction élastique) conduit à une solution non plastiquement admissible, alors on montre que la correction à appliquer est dirigée radialement (i.e. colinéaire à la direction radiale joignant le centre de la surface de plasticité au déviateur de la prédiction $\sigma_{e,d}$). De cette manière, la seule inconnue à chaque itération est l'amplitude du retour, à direction de recherche fixée.

Remarque 2.7 :

L'algorithme présenté ici met en avant, au niveau d'une étape locale, celui dit de retour radial. Dans les cas 3D ou sous l'hypothèse des déformations planes, celui-ci est direct. Par contre, dans le cas de problème en contraintes planes, l'inconnue supplémentaire qu'est la composante en déformation totale dans la direction hors plan nécessite la résolution d'un problème sous une forme approchée. Dans la pratique, une méthode sécante est souvent implantée⁵.

5. Dans la pratique le seuil de convergence de l'algorithme ALGO.(1) est 10^{-6} tandis que celui associé au sécant est 10^{-10} .

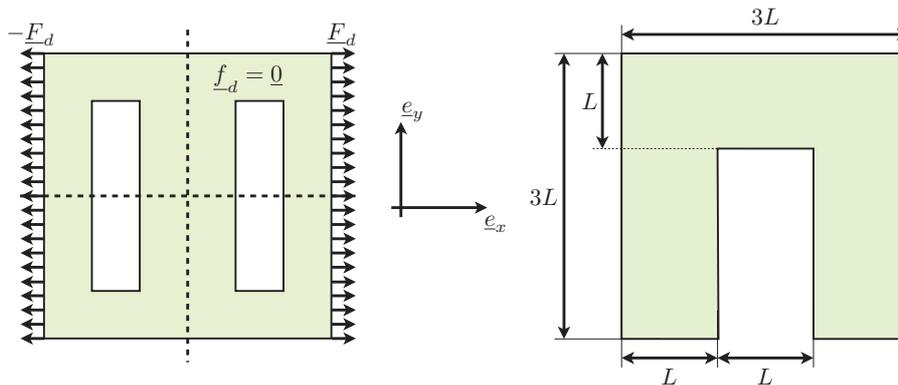
Remarque 2.8 :

Le calcul de la prédiction élastique est ici réalisé à l'aide du comportement élastique. On peut introduire le comportement tangent afin d'améliorer de manière significative la convergence de l'algorithme (voir [Bonnet et Frangi, 2006], pour la méthode classique). De nombreux travaux se sont intéressés à améliorer encore la convergence de ces méthodes, dans différents cadres. On trouve, entre autres, pour les problèmes à comportement élastoplastique à écrouissage linéaire [Perego, 1988] ou, pour les problèmes à comportement thermo-élastoplastique [Laborde et al., 1997].

2.3 Exemple

On considère les paramètres matériaux adimensionnés donnés dans le tableau TAB.(2.1). La géométrie de la structure étudiée est une plaque trouée, illustrée sur la figure FIG.(2.8). Elle est soumise à deux efforts surfaciques sur ces tranches de droite et de gauche. Par symétrie, on ne travaille qu'avec son quart supérieur droit, présenté figure FIG.(2.8). On choisit $L = 100$.

Module d'Young	E	244,95
Coefficient de Poisson	ν	0.3
Rigidité plastique	k	8,16
Limite d'élasticité	R_0	1

TABLE 2.1: Paramètres matériaux adimensionnés**FIGURE 2.8:** Géométrie de la structure étudiée avec ses conditions aux limites et de symétrie

Pour ce premier exemple, on choisit l'effort linéique, linéaire en temps, constant en espace et dirigé par e_x :

$$\underline{F}_d(t) = 0.5 \frac{t}{T} e_x$$

La discrétisation spatiale associée au problème éléments finis est donnée sur la figure FIG.(2.9), l'intervalle de temps $[0, T = 1]$ est découpé en 20 pas de temps égaux.

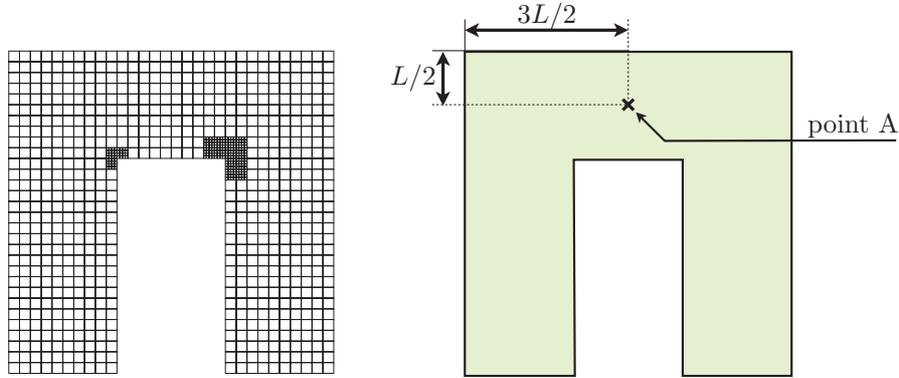


FIGURE 2.9: Maillage spatial (gauche) et définition du point A (droite)

La figure FIG.(2.10) montre une carte de la déformation plastique cumulée au temps $t = T$ ainsi que l'évolution de $\|\sigma_{h,d}\| = f(\|\varepsilon_{ep,h,d}\|)$ au point de Gauss 3043, point le plus proche du point A défini sur la figure FIG.(2.9) de droite.

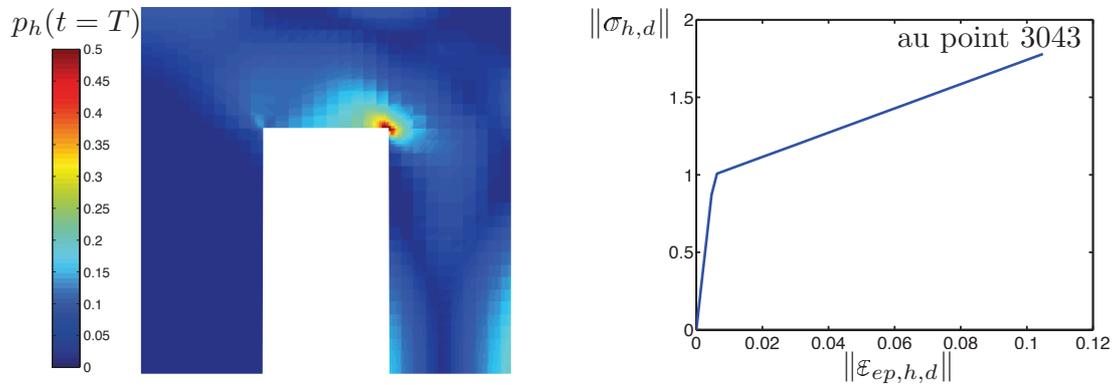


FIGURE 2.10: Réponse de la structure : carte du champ de déformation plastique cumulée $p_h(t = T)$ et évolution de $\|\sigma_{h,d}\| = f(\|\varepsilon_{ep,h,d}\|)$ au point de Gauss 3043

3 Calcul de l'erreur en dissipation

L'objet de cette partie est de présenter une première mise en oeuvre dans un cadre élastoplastique, de la mesure de l'erreur globale introduite dans [Ladevèze, 2008b]. Basée sur les concepts de dualité, elle est comparée à l'erreur en dissipation issue de [Ladevèze et Moës, 1997].

3.1 Présentation de l'erreur en dissipation dans le cas élastoplastique

Pour toute loi d'évolution \mathbf{B} définie à partir de pseudopotentiels φ et φ^* , on a la relation :

$$\forall (s, \dot{e}_p) \quad \varphi^*(s) + \varphi(\dot{e}_p) - s \cdot \dot{e}_p = 0 \Leftrightarrow \dot{e}_p = \mathbf{B}(s) \quad (2.19)$$

De plus, par construction :

$$\forall (s, \dot{e}_p) \quad \varphi^*(s) + \varphi(\dot{e}_p) - s \cdot \dot{e}_p \geq 0$$

Une mesure de la non-vérification de la loi d'évolution d'une solution admissible $\hat{x} = (\hat{s}, \hat{\dot{e}}_p)$ peut être simplement définie comme la quantité :

$$\epsilon_d(\hat{x}) = \int_{\Omega} \int_0^T \left\{ \varphi^*(\hat{s}) + \varphi(\hat{\dot{e}}_p) - \hat{s} \cdot \hat{\dot{e}}_p \right\} dt dV \quad (2.20)$$

Cette mesure de l'erreur en dissipation a fait l'objet de nombreuses publications [Ladevèze et Moës, 1997, Ladevèze et Moës, 1998, Ladevèze et Moës, 1999, Ladevèze *et al.*, 1999a]. Plus récemment, une nouvelle mesure en dissipation a été introduire dans [Ladevèze, 2008b] :

$$\hat{\epsilon}_d(\hat{x}) = - \int_{\Omega} \left\{ \inf_{x^* \in \mathcal{B}} \left\{ \int_0^T \int_0^t \left\{ (s^* - \hat{s}_h) \cdot (\dot{e}_p^* - \dot{e}_{p,h}) \right\} \frac{d\tau dt}{T} \right\} \right\} dV \quad (2.21)$$

où \mathcal{B} est l'espace des solutions vérifiant le comportement et dont les variables internes sont choisies nulles à l'instant initial :

$$\mathcal{B} = \left\{ x = (s, \dot{e}_p) \text{ tel que : } \begin{cases} s \in \mathcal{S} \text{ et } e \in \mathcal{E} \\ s = \mathbf{A}(e_e) \\ \dot{e}_p = \mathbf{B}(s) \\ \text{et } e_p(t=0) = 0 \end{cases} \right\}$$

On introduit la solution $\bar{x} = (\bar{s}, \dot{e}_p)$, telle que :

$$\bar{x} = \text{Argmin}_{x^* \in \mathcal{B}} \left\{ \int_0^T \int_0^t \left\{ (s^* - \hat{s}_h) \cdot (\dot{e}_p^* - \dot{e}_{p,h}) \right\} \frac{d\tau dt}{T} \right\}$$

Cette nouvelle mesure de l'erreur permet d'une part le calcul d'une borne supérieure plus fine de l'erreur de discrétisation. En effet, elle vérifie : $\hat{\epsilon}_d \leq \epsilon_d$ (démonstration dans le même papier). Mais surtout, elle présente un lien fort avec l'erreur vraie. Ainsi, en notant e_{tot} l'erreur élastique vraie et en introduisant la fonctionnelle $l(x, \hat{x})$ telle que :

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_d &= -(\bar{s} - \hat{s}) \cdot (\dot{e}_p - \hat{\dot{e}}_p) \\ e_{tot} &= \frac{1}{2T} \mathbf{K}^{-1}(s_{ex} - \hat{s}) \cdot (s_{ex} - \hat{s}) \\ l(x, \hat{x}) &= (s - \hat{s}) \cdot (\dot{e}_p - \hat{\dot{e}}_p) + \hat{\epsilon}_d \end{aligned}$$

alors :

$$\int_{\Omega} \int_0^T \{a(t)l(x_{ex}, \hat{x}) - \dot{a}(t)e_{tot}\} dt dV + \int_{\Omega} \{a(T)e_{tot,|t=T}\} dV = \int_{\Omega} \int_0^T \{a(t)\hat{\epsilon}_d\} dt dV$$

avec a une fonction arbitraire positive.

Remarque 2.9 :

On peut remarquer que dans tous les cas, si $x_{ex} = \hat{x}$, alors

$$\epsilon_d = \hat{\epsilon}_d = 0$$

Remarque 2.10 :

La seconde intégrale temporelle introduite dans le calcul de l'erreur EQ.(2.21) joue le rôle de fonction de pondération. En effet, pour toute fonction continue f sur $[0; T]$, on a la propriété :

$$\int_0^T \int_0^t \{f(\tau)\} \frac{d\tau dt}{T} = \int_0^T \{a(t)f(t)\} dt, \text{ avec } a(t) = \frac{T-t}{T} \quad (2.22)$$

Le choix de cette fonction de pondération est basé sur les études proposées dans [Chamoin et Ladevèze, 2007]. Dans ces travaux, l'importance de cette pondération a été illustrée pour les quantités dépendantes de l'histoire sur les problèmes linéaires.

Aussi, on peut remarquer qu'avec l'utilisation d'une seconde intégrale temporelle, la mesure introduite au sein de la fonctionnelle est basée non pas sur une densité de puissance, instantanée, mais sur une densité d'énergie, traduisant le chemin parcouru jusqu'à l'instant t .

Afin de comparer des erreurs faisant intervenir les mêmes grandeurs, on redéfinit l'erreur en dissipation classique (EQ.(2.20)) en ajoutant aussi cette pondération temporelle. La définition de ϵ_d que l'on retient pour la suite de ce travail est :

$$\epsilon_d(\hat{x}) = \int_{\Omega} \int_0^T \int_0^t \left\{ \varphi^*(\hat{s}) + \varphi(\dot{\hat{\epsilon}}_p) - \hat{s} \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p \right\} \frac{d\tau dt dV}{T}$$

Cas particulier élastoplastique

En reprenant le comportement donné EQ.(2.16) et EQ.(2.17), les erreurs ϵ_d et $\hat{\epsilon}_d$ s'écrivent :

$$\epsilon_d(\hat{x}) = \int_{\Omega} \int_0^T \int_0^t \left\{ (\hat{R} + R_0)\dot{\hat{p}} - \text{Tr} \left[\hat{\sigma} \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] \right\} \frac{d\tau dt dV}{T} \quad (2.23)$$

$$\hat{\epsilon}_d(\hat{x}) = \int_{\Omega} \int_0^T \int_0^t \left\{ (\hat{R} + R_0)\|\dot{\hat{\epsilon}}_p\| - \text{Tr} \left[\hat{\sigma} \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] + \hat{R}(\dot{\hat{p}} - \|\dot{\hat{\epsilon}}_p\|) \right\} \frac{d\tau dt dV}{T} \quad (2.24)$$

La démonstration de EQ.(2.23) est triviale. Par contre, celle de EQ.(2.24) moins évidente est donnée en annexe ANN.(B).

Remarque 2.11 :

Dans le cas particulier de problèmes élastoplastiques, les deux mesures de l'erreur en dissipation sont très proches ; en effet :

$$\epsilon_d = \hat{\epsilon}_d + \int_{\Omega} \int_0^T \int_0^t \left\{ R_0(\dot{\hat{p}} - \|\dot{\hat{\epsilon}}_p\|) \right\} \frac{d\tau dt dV}{T}$$

Remarque 2.12 :

Pour ces deux erreurs ϵ_d et $\hat{\epsilon}_d$, il est souvent plus intéressant de calculer une erreur relative. Le dénominateur D_d , commun aux deux erreurs, est choisi identique à la définition introduite dans [Ladevèze et Moës, 1997], soit :

$$D_d = 2. \sup_{t \in [0; T]} \left\{ \int_{\Omega} \left\{ \int_0^t \left\{ R_0 \dot{\hat{p}} \right\} d\tau + \text{Tr} [\mathbf{K}^{-1}(\hat{\sigma}) \cdot \hat{\sigma}] + \frac{\hat{R}^2}{k} \right\} dV \right\}$$

Dorénavant, seule l'erreur relative sera utilisée.

3.2 Calcul des champs admissibles

Dans le cadre de l'erreur en dissipation, il est nécessaire de connaître une solution dite admissible $\hat{x}_h = (\hat{s}_h, \dot{\hat{c}}_{p,h})$ telle que \hat{s}_h soit statiquement admissible ($\hat{s}_h \in \mathcal{S}^{ad}$), $\dot{\hat{c}}_h$ cinématiquement admissible ($\dot{\hat{c}}_h \in \mathcal{C}^{ad}$) et vérifiant la loi d'état ($\hat{s}_h = \mathbf{A}(\dot{\hat{c}}_{e,h})$). Le calcul de cette solution se fait par prolongement de la solution éléments finis $x_h = (s_h, \dot{c}_{p,h})$ et requiert trois étapes. La première, commune aux problèmes élastiques linéaires, consiste à utiliser une condition de prolongement en contrainte afin de déterminer $\hat{\sigma}_h$. La seconde étape a pour objectif le calcul de la déformation totale $\hat{\epsilon}_h$. Enfin, la dernière étape s'intéresse aux variables internes $\hat{\epsilon}_{p,h}$, \hat{p}_h et \hat{R}_h .

Avant toute chose, on fait l'hypothèse que le chargement du problème varie linéairement en fonction du temps. Ainsi, le choix d'une description affine entre chaque piquet de temps utilisée pour représenter l'évolution des variables d'état du problème est suffisant. La méthode de construction de la solution admissible repose donc sur le calcul, à chaque piquet de temps, de l'état de la solution pour en supposer l'évolution linéaire entre eux.

3.2.1 Calcul de la contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$

La méthode utilisée dans ce travail pour conduire à une contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ est dans le prolongement de celle initiée dans [Ladevèze et Rougeot, 1997], reprise et améliorée dans [Florentin *et al.*, 2003] et plus récemment dans [Pled *et al.*, 2011]. Celle-ci se décompose en deux phases :

- La première consiste à l'utilisation d'une condition de prolongement Eq.(2.25) afin de construire une répartition de densité d'effort \hat{F} sur chacune des frontières élémentaires du maillage. Cette description doit être autoéquilibrée sur

chacun des éléments et aussi par rapport au chargement extérieur.

$$\forall i, \int_{\partial E} \left\{ \hat{F} \varphi_i \right\} dS = \int_{\partial E} \left\{ \sigma_h n_E \varphi_i \right\} dS - \int_E \left\{ f_d \varphi_i \right\} dV$$

avec φ_i la fonction de forme associée au noeud i . (2.25)

Plusieurs techniques existent actuellement afin d'assurer les conditions d'équilibre. Tandis que les méthodes classiques [Ladevèze et Rougeot, 1997] et [Florentin *et al.*, 2003] se basent sur une approche globale de l'équilibre, une stratégie hybride est proposée dans [Ladevèze *et al.*, 2009, Pled *et al.*, 2011] afin d'assouplir la programmation et d'assurer de bons résultats. Elle fait la jonction entre la méthode classique et celle proposée dans [Díez *et al.*, 2007], où l'écriture locale de l'équilibre est obtenue par utilisation d'une Méthode de Partition de l'Unité.

- La seconde phase porte sur la reconstruction d'une contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ à partir des densités d'effort \hat{F} . On peut encore distinguer différentes démarches :
 - construction analytique : introduite dans [Ladevèze, 1994] et mise en oeuvre pour la première fois dans [Ladevèze et Rougeot, 1997], la contrainte est définie sous une forme polynomiale, définie par morceaux sur un sous-découpage des éléments. Bien que conduisant à une solution exacte en contrainte, cette méthode est peu utilisée à cause de la sur-estimation de l'erreur qu'elle engendre dès que le maillage spatial comporte des éléments très déformés.
 - construction approchée :
 - utilisation d'une méthode $p+k$: c'est la méthode la plus utilisée. Un nouveau problème est redéfini sur chaque élément, et une méthode éléments finis y est déployée en choisissant un espace d'interpolation du déplacement de degré k fois plus élevé que pour la résolution initiale. Dans la pratique $k=3$ suffit (voir [Babuška *et al.*, 1994]) ;
 - utilisation d'une méthode h/N : avec cette méthode, le nouveau problème élémentaire est résolu en subdivisant chaque élément.

Remarque 2.13 :

Dans ce travail, la méthode de construction de la contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ est basée sur la version améliorée, associée au couplage des deux approches h/N et $p+k$. Le choix a été porté sur ces deux méthodes, car elles permettent d'obtenir un champ de contraintes d'une très bonne qualité. Enfin le coût de calcul de ces méthodes, réhibitoire pour la plupart des cas est ici raisonnable grâce à l'utilisation d'un maillage régulier. Ainsi, l'approche $(h/N, p+k)$ a été réalisée sur un maillage 100 fois plus fin ($h/100$) et dont l'interpolation élémentaire est choisie de degré $p+1$.

3.2.2 Calcul de la déformation totale $\hat{\varepsilon}_h$

Le déplacement issu du calcul éléments finis \underline{u}_h vérifie les équations de liaisons à chacun des piquets de temps. Dans le cas linéaire, la déformation totale admissible

$\hat{\varepsilon}_h$ est alors directement déduite de ce déplacement. Par contre dans le cas d'une évolution avec une composante plastique, la condition d'incompressibilité de cet écoulement doit être vérifiée. Soit :

$$\text{Tr} [\hat{\varepsilon}_h - \hat{\varepsilon}_{e,h}] = 0 \Leftrightarrow \text{Tr} [\hat{\varepsilon}_h - \mathbf{K}^{-1}(\hat{\sigma}_h)] = 0$$

Dans le cas d'un problème plan, cette condition peut être très simplement respectée en modifiant la composante hors plan, inconnue. Soit, dans le cas d'un problème de déformations planes, l'incompressibilité permet de déterminer $\hat{\sigma}_{h,33}$, tandis qu'en contraintes planes, on joue sur $\hat{\varepsilon}_{h,33}$. Dans le cas de problèmes tridimensionnels, la construction de la déformation totale admissible n'est plus aussi triviale. Elle est cependant possible en s'inspirant de la méthode proposée dans [Ladevèze *et al.*, 1992] pour les problèmes d'élasticité incompressible et quasi incompressible.

3.2.3 Calcul des variables internes $\hat{\varepsilon}_{p,h}$, \hat{p}_h et \hat{R}_h

La déformation plastique admissible $\hat{\varepsilon}_{p,h}$ est directement déduite de la contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ et de la déformation totale admissible $\hat{\varepsilon}_h$:

$$\hat{\varepsilon}_{p,h} = \hat{\varepsilon}_h - \hat{\varepsilon}_{e,h}$$

La solution admissible \hat{x}_h vérifiant la loi d'état, seul le calcul de la déformation plastique cumulée \hat{p}_h est nécessaire, la variable d'écrouissage associée \hat{R}_h pouvant en être déduite. La méthode retenue est une intégration du comportement introduite dans [Ladevèze et Moës, 1997]. En régime plastique, les lois d'évolution concernant p sont :

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{p} \frac{\sigma_d}{k.p + R_0} \text{ ou } \|\dot{\varepsilon}_p\| = \dot{p} \text{ et } \|\sigma_d\| \leq k.p + R_0$$

On suppose l'évolution de p linéaire entre deux pas de temps. Ainsi, on peut à l'aide de chacune de ces deux lois exprimer deux valeurs différentes p_1 et p_2 de \hat{p}_h à l'instant t_{k+1} à partir de la valeur de \hat{p}_h à l'instant t_k et du taux de déformation totale $\hat{\varepsilon}_{ep,h}$ et de contraintes $\hat{\sigma}_h$ à l'instant t_{k+1} :

$$\begin{aligned} p_1 &= \hat{p}_h(t_k) + (t_{k+1} - t_k) \|\dot{\varepsilon}_{ep,h}(t_{k+1})\| \\ p_2 &\geq \frac{\langle \|\hat{\sigma}_{d,h}(t_{k+1})\| - R_0 \rangle_+}{k} \end{aligned}$$

Dans tous les cas, il faut que $\hat{p}_h(t_{k+1})$ soit supérieur ou égal à p_1 et p_2 afin que la solution \hat{x}_h soit thermodynamiquement admissible. Alors, on choisit :

$$\hat{p}_h(t_{k+1}) = \sup \{p_1, p_2\}$$

En réitérant cette procédure pour chaque pas de temps, on peut déterminer de proche en proche la déformation cumulée \hat{p}_h sur $[0; T]$. Enfin, $\hat{R}_h = k.\hat{p}_h$. La solution admissible \hat{x}_h est alors entièrement connue.

Remaillage spatial ($N_t = 5$)			Remaillage temporel ($Dens = 5$)		
Discrétisation Nb éléments (densité)	ϵ_d ($\times 10^{-3}$)	$\hat{\epsilon}_d$ ($\times 10^{-3}$)	Discrétisation Nb de pas de temps	ϵ_d ($\times 10^{-3}$)	$\hat{\epsilon}_d$ ($\times 10^{-3}$)
175 (2)	39,38	17,32	2	23,45	14,05
175 (4)	21,65	10,27	3	21,03	11,45
175 (5)	18,02	8,68	4	18,63	9,36
700 (10)	10,23	5,42	5	18,02	8,68
1 575 (15)	7,55	4,29	6	17,53	8,45
2 800 (20)	6,19	3,71	7	17,41	8,24
6 300 (30)	4,79	3,11	8	17,34	8,17
11 200 (40)	4,07	2,80	10	17,23	8,09
25 200 (60)	3,34	2,49	12	17,20	8,06
44 800 (80)	2,97	2,33	14	17,19	8,05
84 700 (110)	2,66	2,19	16	17,19	8,06
108 800 (120)	2,59	2,16	20	17,20	8,05

TABLE 2.2: Évolution des mesures ϵ_d et $\hat{\epsilon}_d$ de l'erreur globale en dissipation en fonction du remaillage

Remarque 2.14 :

Une autre méthode est présentée dans [Ladevèze et Moës, 1997]. Les variables internes sont déterminées de sorte à minimiser la valeur de l'erreur en dissipation. Cette approche, dans le cas d'un écrouissage linéaire, mène au même résultat que celle reposant sur la pseudo-intégration du comportement.

3.3 Illustration

L'exemple illustré partie 2.3 est ici repris pour montrer une première mise en pratique du calcul de l'erreur en dissipation améliorée $\hat{\epsilon}_d$. Les tableaux TAB.(2.2) présentent l'évolution des erreurs ϵ_d et $\hat{\epsilon}_d$ en fonction du maillage spatial ou temporel. Ces données sont reprises sur les graphiques FIG.(2.11). Ils mettent en avant la meilleure pertinence de la nouvelle erreur $\hat{\epsilon}_d$, puisque heuristiquement, on a :

$$2 \gtrsim \frac{\epsilon_d}{\hat{\epsilon}_d} \gtrsim 1,3$$

Cette mesure trouve son importance pour les problèmes où la discrétisation spatiale utilisée est très grossière puisque c'est dans ces cas là que le rapport prend les proportions les plus intéressantes. Autre résultat important, ce rapport reste constant dans le cas d'un remaillage temporel.

Ces résultats corroborent la construction de la nouvelle mesure de l'erreur en dissipation. En effet, on a vu que par définition, $\hat{\epsilon}_d$ minore ϵ_d . Ce lien permet aussi à $\hat{\epsilon}_d$ d'hériter des différentes propriétés que vérifie ϵ_d , démontrée dans [Ladevèze et

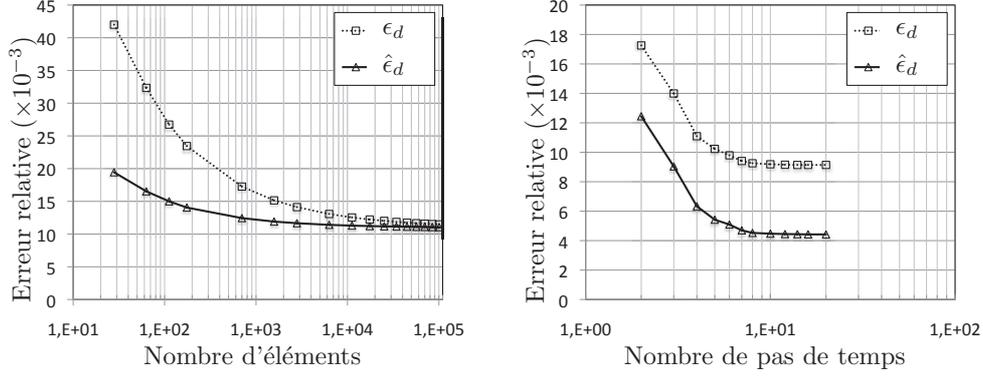


FIGURE 2.11: Évolution des mesures ϵ_d et $\hat{\epsilon}_d$ de l'erreur globale en dissipation en fonction du remaillage ($N_t = 5$ à gauche et $N_e = 5$ à droite)

Moës, 1997]. Par exemple, l'erreur peut se diviser en trois indicateurs spécifiques $I_{\hat{\epsilon}_d}^{\Delta t}$, $I_{\hat{\epsilon}_d}^h$ et $I_{\hat{\epsilon}_d}^{\mathbf{A}_h}$. Chacun traduit l'erreur liée à un paramètre de discrétisation : $I_{\hat{\epsilon}_d}^{\Delta t}$ indique la qualité de la discrétisation temporelle, $I_{\hat{\epsilon}_d}^h$ la qualité du maillage spatial et $I_{\hat{\epsilon}_d}^{\mathbf{A}_h}$ l'écart de non-vérification du comportement. Ils vérifient la propriété suivante :

$$\hat{\epsilon}_d^2 = I_{\hat{\epsilon}_d}^{\Delta t^2} + I_{\hat{\epsilon}_d}^{h^2} + I_{\hat{\epsilon}_d}^{\mathbf{A}_h^2}$$

En étudiant ces différents indicateurs d'erreur, on retrouve aussi un comportement en puissance de la forme :

$$I_{\hat{\epsilon}_d}^{\Delta t} = C_{h,\mathbf{A}_h} \cdot \Delta t^\alpha, \quad I_{\hat{\epsilon}_d}^h = C_{\Delta t,\mathbf{A}_h} \cdot h^\beta \quad \text{et} \quad I_{\hat{\epsilon}_d}^{\mathbf{A}_h} = C_{h,\Delta t} \cdot S_{\mathbf{A}_h}^\gamma$$

où $S_{\mathbf{A}_h}$ correspond au seuil de convergence de l'algorithme résolvant les non-linéarités matériaux.

La figure FIG.(2.12) met en exergue les deux premières propriétés de convergence. En effet, les convergences spatiale et temporelle des deux mesures de l'erreur y sont représentées dans des cas où l'on peut négliger l'erreur associée aux non-linéarités matériaux. Sur la figure de gauche, l'évolution des mesures de l'erreur est tracée en fonction du remaillage spatial, sachant que l'erreur due à la discrétisation temporelle peut être considérée comme négligeable (on a choisi 20 pas de temps). La convergence est d'ordre $\beta \sim 0,90$. Sur la figure de droite, les mesures de l'erreur sont représentées en fonction du remaillage temporel, leur composante issue de la discrétisation spatiale étant négligeable (on a pris 70 000 éléments). On peut retrouver la convergence en puissance, d'ordre environ 1. La convergence est même meilleure pour la mesure $\hat{\epsilon}_d$ ($\alpha \sim 1,17$) que pour la mesure ϵ_d ($\alpha \sim 0,85$) de l'erreur globale,

Enfin, on peut conclure cette étude par le poids pris par chacune des composantes de l'erreur. Dans le cas de chargement monotone comme ceux étudiés dans ce travail, la composante liée à la discrétisation temporelle est souvent négligeable face à l'erreur spatiale.

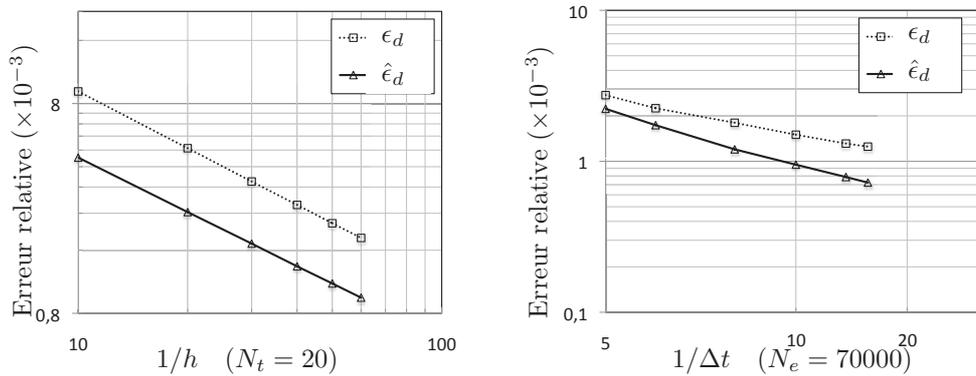


FIGURE 2.12: Courbe de convergence des mesures ϵ_d et $\hat{\epsilon}_d$ en fonction d'un remaillage spatial ou temporel

4 Bilan

Cette partie a présenté une méthode de mesure de l'erreur globale garantie, basée sur l'erreur en dissipation, mise en oeuvre sur un problème d'élastoplasticité. Cette mesure prend en compte les erreurs d'approximation spatiale et temporelle. Le comportement est dissocié en deux types de lois, les lois d'état et les lois d'évolution, en utilisant une description thermodynamique par variables internes. Ensuite, une solution dite admissible est construite, vérifiant toutes les conditions d'admissibilité du problème, cinématique, statique et plastique ainsi que les lois d'état. Les outils nécessaires à la construction de cette solution sont présentés.

Nous possédons alors un outil de mesure de l'erreur de discrétisation globale fiable et robuste, qui de plus présente un lien avec la solution exacte. Les notions introduites à cette fin sont donc des bases solides pour un travail sur des quantités locales.

Chapitre 3

Proposition d'un encadrement de l'erreur locale pour les problèmes d'évolution non-linéaires

Ce chapitre fait le lien entre la définition d'une quantité d'intérêt, le problème miroir et l'erreur en dissipation. Son objectif est l'écriture d'un encadrement de l'erreur sur la quantité d'intérêt et l'étude de l'ordre de grandeur des termes constituant ces bornes. Les points clefs sont détaillés ici tandis que les démonstrations sous-jacentes sont données dans l'annexe ANN.(C).

Sommaire

1	Mise en place de la technique d'extraction	72
1.1	Définition d'une quantité d'intérêt	72
1.2	Le problème miroir	73
1.3	Réécriture de l'erreur	74
2	Encadrement de l'erreur sur une quantité locale	76
2.1	Proposition d'un encadrement	76
2.2	Étude des bornes dans un cadre d'élastoplasticité	79
3	Bilan	85

1 Mise en place de la technique d'extraction

1.1 Définition d'une quantité d'intérêt

Le point de départ de l'estimation d'erreur sur une quantité locale I_h est la définition de celle-ci. Dans ce travail, nous nous limitons aux seules quantités que l'on peut écrire à l'aide d'un couple d'extracteurs $(\sigma_\Sigma, \dot{\varepsilon}_\Sigma)$ sous la forme suivante :

$$I_{ex} = \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [\sigma_\Sigma \cdot \dot{\varepsilon}_{ex} + \sigma_{ex} \cdot \dot{\varepsilon}_\Sigma] \} dt dV \quad (3.1)$$

La zone d'intérêt $\omega \times [t_1; t_2] \subset \Omega \times [0, T]$ définit directement le support du couple d'extracteurs. Par exemple, on choisit de s'intéresser à la moyenne de la déformation plastique dans la direction $\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ sur $\omega \times [t_1; t_2]$. Le couple d'extracteurs prend les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_\Sigma = \int_t^T \{ \mathbb{A}_\Sigma \} d\tau \\ \dot{\varepsilon}_\Sigma = -\mathbf{K}^{-1} \mathbb{A}_\Sigma \end{cases} \quad (3.2)$$

avec

$$\begin{aligned} \forall (\underline{M}, t) \in \omega \times [t_1; t_2] \quad \mathbb{A}_\Sigma &= \frac{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j}{\text{mes}(\omega) \cdot (t_2 - t_1)} \\ \text{sinon} \quad \mathbb{A}_\Sigma &= \mathbb{O} \end{aligned}$$

En effet, de cette manière, on a :

$$\begin{aligned} I_{ex} &= \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [\sigma_\Sigma \cdot \dot{\varepsilon}_{ex} + \sigma_{ex} \cdot \dot{\varepsilon}_\Sigma] \} dt dV \\ &= \int_{\Omega} \int_0^T \left\{ \text{Tr} \left[\int_t^T \{ \mathbb{A}_\Sigma \} d\tau \cdot \dot{\varepsilon}_{ex} - \sigma_{ex} \cdot \mathbf{K}^{-1} \mathbb{A}_\Sigma \right] \right\} dt dV \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \text{Tr} \left[\underbrace{\left[\int_t^T \{ \mathbb{A}_\Sigma \} d\tau \cdot \varepsilon_{ex} \right]_0^T}_0 + \int_0^T \{ \mathbb{A}_\Sigma \cdot \varepsilon_{ex} - \sigma_{ex} \cdot \mathbf{K}^{-1} \mathbb{A}_\Sigma \} dt \right] \right\} dV \\ &= \int_{\Omega} \int_0^T \left\{ \text{Tr} \left[\mathbb{A}_\Sigma \cdot \underbrace{[\varepsilon_{ex} - \mathbf{K}^{-1} \sigma_{ex}]_{\varepsilon_{p,ex}}}_{\varepsilon_{p,ex}} \right] \right\} dt dV \\ &= \frac{1}{\text{mes}(\omega)(t_2 - t_1)} \int_{\omega} \int_{t_1}^{t_2} \{ \varepsilon_{p,ex} \cdot (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \} dt dV \\ &= \frac{1}{\text{mes}(\omega)(t_2 - t_1)} \int_{\omega} \int_{t_1}^{t_2} \{ (\varepsilon_{p,ex,ij}) \} dt dV \end{aligned}$$

Remarque 3.1 :

Dans ce travail, nous choisissons de retenir une composante de la déformation plastique comme quantité d'intérêt. En effet, cette grandeur est caractéristique du

comportement non-linéaire plastique. Estimer l'erreur locale sur une telle quantité est donc un problème intéressant par rapport à l'objectif de ce travail et met en valeur son originalité. On peut toutefois noter qu'une quantité d'intérêt définie sur la contrainte conduirait sans doute à une erreur plus faible, comme conséquence de la perte de rigidité en zone plastique.

1.2 Le problème miroir

Le problème miroir est un problème de perturbation rétrograde autour de la solution x_h du problème direct. Son chargement est le couple d'extracteurs et son comportement choisi afin de rester proche du problème direct. Ses espaces d'admissibilité cinématique et statique sont les suivants :

$$\mathcal{E}_\Sigma^{ad} = \left\{ \delta e = \delta e_e + \delta e_p = \begin{bmatrix} \delta \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} \mid \delta \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_\Sigma = \varepsilon(\delta \underline{u}) \text{ avec } \delta \underline{u} \in \mathbf{U}_0^{ad} \right\}$$

$$\mathcal{S}_\Sigma^{ad} = \left\{ \delta s = \begin{bmatrix} \delta \sigma \\ \delta R \end{bmatrix} \mid \delta \sigma - \sigma_\Sigma \in \mathcal{S}_0^{ad} \text{ et } \delta R \geq 0 \right\}$$

Remarque 3.2 :

Contrairement aux espaces d'admissibilité associés au problème adjoint dans le cadre d'estimation d'erreur locale sur des problèmes linéaires, la présence d'un couple d'extracteurs est ici obligatoire. En effet, on ne peut pas travailler de manière équivalente avec l'extracteur en taux de déformation ou l'extracteur en précontrainte ; les deux sont indispensables et agissent simultanément dans l'écriture du problème miroir. De la même manière, pour une quantité d'intérêt fixée, le problème miroir associé est unique.

Remarque 3.3 :

L'aspect rétrograde en temps du problème donne son nom au problème miroir. Dans ce manuscrit, l'écriture mathématique du problème miroir est toujours proposée en temps " t ", introduisant des signes "-" sur les taux associés à sa solution. Par contre, d'un point de vue pratique, il est bien rétrograde : la méthode de résolution numérique est itérative de $t = T$ (avec alors des conditions "initiales") jusqu'à $t = 0$.

Le problème miroir s'écrit :

$$\text{Trouver } (\delta s, \delta \dot{e}_p) \text{ tel que, pour tout } (\underline{M}, t) \in \Omega \times [0, T] :$$

$$\begin{cases} (\delta s, \delta e) \in \mathcal{S}_\Sigma^{ad} \times \mathcal{E}_\Sigma^{ad} \\ \delta s = \mathbf{A}(\delta e_e) \\ \delta \dot{e}_p = \mathbf{B}_\delta(\delta s) \\ \text{et, à } t=T, \delta s = 0, \delta e = 0 \text{ et } \delta u = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

La partie non-linéaire du comportement est modifiée, c'est pourquoi elle est notée \mathbf{B}_δ . Elle est construite de manière à apporter une attitude de perturbation à la solution $\delta x = (\delta s, \delta \dot{e}_p)$. Il est important de préciser qu'aucune linéarisation n'est introduite.

Afin de définir la loi d'évolution \mathbf{B}_δ , on peut introduire une solution $\tilde{x} = x_h^{Cpt} + \delta x$, où x_h^{Cpt} est la solution du problème direct, vérifiant le comportement. En effet, de la résolution du problème approché, on peut retenir soit une solution vérifiant le comportement, soit une solution vérifiant l'équilibre éléments finis ; l'écart entre les deux étant lié au seuil de convergence de l'algorithme ALGO.(1). Ici, la solution x_h^{Cpt} est celle vérifiant la loi d'état et particulièrement la loi d'évolution \mathbf{B} . Par commodité d'écriture, on notera par la suite directement x_h cette solution. On définit alors :

$$\begin{aligned} \delta \dot{e}_p = \mathbf{B}_\delta(\delta s) &\Leftrightarrow \dot{\tilde{e}}_p = \mathbf{B}(\tilde{s}) \\ &\Leftrightarrow \dot{e}_{p,h} - \delta \dot{e}_p = \mathbf{B}(s_h + \delta s) \\ &\Leftrightarrow -\delta \dot{e}_p = \mathbf{B}(s_h + \delta s) - \mathbf{B}(s_h) \end{aligned}$$

Dans un cadre d'élastoplasticité linéaire, avec les notations introduites au chapitre CHP.2, le comportement miroir s'écrit :

$$\delta \dot{e}_p = \mathbf{B}_\delta(s) \Leftrightarrow \begin{cases} \|\sigma_{h,d} + \delta \sigma_d\| - (R_h + \delta R + R_0) \leq 0 \\ \delta \dot{p} \leq 0 \\ \delta \dot{p} \cdot (\|\sigma_{h,d} + \delta \sigma_d\| - (R_h + \delta R + R_0)) = 0 \\ \dot{\tilde{e}}_{p,h} - \delta \dot{\tilde{e}}_p = (\dot{p}_h - \delta \dot{p}) \frac{\sigma_{d,h} + \delta \sigma_d}{R_h + \delta R + R_0} \end{cases} \quad (3.4)$$

Remarque 3.4 :

Le choix de la loi d'évolution est dicté par la finalité du problème miroir. En effet, l'objectif de ce dernier est d'offrir des propriétés à sa solution qui permettront un encadrement garanti et pertinent de l'erreur sur la quantité d'intérêt. L'étude de l'ordre de grandeur des différents termes met en avant ces choix.

On appelle $\delta x_{ex} = (\delta s_{ex}, \delta \dot{e}_{p,ex})$ la solution exacte de ce problème. À l'instar du problème de référence, cette solution est inaccessible dans la plupart des cas. Une méthode de résolution numérique est alors déployée, développée dans le chapitre CHP.4, elle permet l'obtention d'une solution approchée vérifiant le comportement δx_h . Enfin des outils associés permettent de construire une solution satisfaisant les conditions d'admissibilité $\delta \hat{x}_h$ à partir de δx_h .

1.3 Réécriture de l'erreur

À partir de la définition de la quantité d'intérêt, les extracteurs ne dépendant pas d'une quelconque solution, on a :

$$\begin{aligned} \hat{e}_h(I) &= I_{ex} - \hat{I}_h \\ &= \int_{\Omega} \int_0^T \left\{ \text{Tr} \left[\sigma_{\Sigma} \cdot (\dot{\tilde{e}}_{ex} - \dot{\tilde{e}}_h) + (\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \cdot \dot{\tilde{e}}_{\Sigma} \right] \right\} dt dV \end{aligned} \quad (3.5)$$

La solution $\delta\hat{x}_h$ (et \hat{x}_h) vérifiant les conditions d'admissibilité des espaces définissant le problème miroir \mathcal{J}_Σ^{ad} et \mathcal{E}_Σ^{ad} (rspt. $\hat{x}_h \in \mathcal{J}^{ad} \times \mathcal{E}^{ad}$), on a les propriétés :

- $\delta\hat{\sigma}_h - \sigma_\Sigma$ statiquement admissible à 0;
 $\delta\hat{\dot{\epsilon}}_h - \dot{\epsilon}_\Sigma = \dot{\epsilon}(\delta\underline{u})$ $\delta\underline{u}$ cinématiquement admissible à 0;
- $\hat{\sigma}_h - \sigma_{ex}$ statiquement admissible à 0;
 $\hat{\dot{\epsilon}}_h - \dot{\epsilon}_{ex} = \dot{\epsilon}(\underline{u})$ \underline{u} cinématiquement admissible à 0.

Alors, avec l'utilisation de la propriété remarquable EQ.(1.29), l'équation EQ.(3.5) s'écrit sous la forme :

$$\hat{e}_h(I) = \int_{\Omega} \int_0^T \left\{ \text{Tr} \left[\delta\hat{\sigma}_h \cdot (\dot{\epsilon}_{ex} - \dot{\hat{\epsilon}}_h) + (\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \cdot \delta\dot{\hat{\epsilon}}_h \right] \right\} dt dV \quad (3.6)$$

On peut, en injectant les notations d'erreur en contrainte $\underline{e}_h(\sigma)$ et en déformation totale $\underline{e}_h(\dot{\epsilon})$, mettre l'erreur sur la quantité d'intérêt sous la forme suivante :

$$\hat{e}_h(I) = \int_{\Omega} \int_0^T \left\{ \text{Tr} \left[\delta\hat{\sigma}_h \cdot \underline{e}_h(\dot{\epsilon}) + \hat{e}_h(\sigma) \cdot \delta\dot{\hat{\epsilon}}_h \right] \right\} dt dV$$

Enfin, en introduisant le produit scalaire :

$$(x_1, x_2) = \int_{\Omega} \int_0^T \left\{ \text{Tr} [\sigma_1 \cdot \dot{\epsilon}_2 + \sigma_2 \cdot \dot{\epsilon}_1] \right\} dt dV$$

on a :

$$\hat{e}_h(I) = (\delta\hat{x}_h, e_h(x)) \quad (3.7)$$

Cette dernière écriture met bien en avant le rôle de la solution admissible $\delta\hat{x}_h$ du problème miroir. Elle agit comme une fonction de pondération de l'erreur $e_h(x)$ issue de la résolution du problème direct.

Remarque 3.5 :

Dans le cas linéaire, on peut étendre cette propriété à

$$\hat{e}_h(I) = (e_h(\delta x), e_h(x))$$

où $\hat{e}_h(I)$ est une mesure de l'erreur corrigée avec un terme connu (cf. chapitre CHP.1-PART.3.2.3). Cette manipulation, possible grâce aux propriétés des solutions admissibles est toujours viable en utilisant des méthodes de résolution distinctes pour les deux problèmes. Elle offre alors la possibilité de choisir une résolution dédiée pour le problème miroir (i.e. remaillage local ou enrichissement de l'espace fonctionnel) permettant d'accéder à une excellente mesure de l'erreur. Par contre, cette propriété n'est pas vérifiée en non-linéaire.

On peut remarquer que la partie élastique des deux termes constituant l'erreur $e_h(I)$ s'annulent. En effet :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_0^T \left\{ \text{Tr} \left[\delta \hat{\sigma}_h \cdot (\dot{\varepsilon}_{e,ex} - \dot{\varepsilon}_{e,h}) + (\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \cdot \delta \dot{\varepsilon}_{e,h} \right] \right\} dt dV \\ &= \int_{\Omega} \int_0^T \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\delta \hat{\sigma}_h \cdot \mathbf{K}^{-1} (\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \right] \right\} dt dV \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \left[\delta \hat{\sigma}_h \cdot \mathbf{K}^{-1} (\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \right]_0^T \right\} dV = 0 \end{aligned}$$

Il est alors judicieux de définir un nouveau produit scalaire, faisant uniquement intervenir les taux de déformation plastique :

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \int_{\Omega} \int_0^T \left\{ \text{Tr} [\sigma_1 \cdot \dot{\varepsilon}_{p,2} + \sigma_2 \cdot \dot{\varepsilon}_{p,1}] \right\} dt dV$$

De cette manière, on travaille dorénavant avec :

$$\hat{e}_h(I) = \langle \delta \hat{x}_h, x_{ex} - \hat{x}_h \rangle \quad (3.8)$$

La partie suivante est centrée sur l'écriture d'un encadrement de cette erreur et sur l'étude de l'ordre de grandeur des bornes présentées, afin d'en estimer la pertinence avant toute mise en pratique.

2 Encadrement de l'erreur sur une quantité locale

2.1 Proposition d'un encadrement

L'erreur vraie $\hat{e}_h(I)$ sur la quantité d'intérêt \hat{I}_h fait intervenir la solution exacte x_{ex} , inaccessible. Ici, l'objectif est de proposer un encadrement de cette erreur, c'est-à-dire une borne inférieure et une borne supérieure de $\hat{e}_h(I)$. De plus, un point crucial à respecter est que ces bornes soient conservatives ou strictes. Dans ce but, une méthode classique est d'introduire une fonction $\mathcal{G}(x_{ex} - \hat{x}_h)$ ainsi que sa fonction duale au sens de Legendre-Fenchel telle que :

$$\mathcal{G}_{\hat{x}_h}^*(\delta \hat{x}_h) = \sup_{x^* \in \mathcal{B}} \{ \langle \delta \hat{x}_h, x^* - \hat{x}_h \rangle - \mathcal{G}(x^* - \hat{x}_h) \} \quad (3.9)$$

Alors, on peut facilement écrire une borne supérieure de l'erreur :

$$\hat{e}_h(I) \leq \mathcal{G}_{\hat{x}_h}^*(\delta \hat{x}_h) + \mathcal{G}(x_{ex} - \hat{x}_h)$$

La fonction $\mathcal{G}(x_{ex} - \hat{x}_h)$ ne faisant intervenir que des solutions relatives au problème direct vérifiant les propriétés d'admissibilité, on peut aisément en déterminer

un majorant. En effet, en remarquant que la solution $x_{ex} - \hat{x}_h$ est cinématiquement et statiquement admissible à zéro, elle vérifie la propriété remarquable EQ.(1.29) :

$$\forall t \in [0; T], \quad \int_{\Omega} \left\{ \text{Tr} \left[(\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \cdot (\dot{\varepsilon}_{ex} - \dot{\varepsilon}_h) \right] \right\} dV = 0$$

On peut définir $\mathcal{G}(x_{ex} - \hat{x}_h)$ telle que :

$$\mathcal{G}(x_{ex} - \hat{x}_h) = \int_{\Omega} \int_0^T \int_0^t \left\{ \text{Tr} \left[(\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \cdot (\dot{\varepsilon}_{ex} - \dot{\varepsilon}_h) \right] \right\} \frac{d\tau dt dV}{T} = 0 \quad (3.10)$$

Remarque 3.6 :

On injecte une seconde intégrale temporelle, afin que la mesure de l'erreur porte sur densité d'énergie et non sur une densité de puissance. Déjà utilisée pour le calcul de l'erreur globale, cette approche est précisée dans la remarque REM.(2.10).

La fonction $\mathcal{G}(x^* - \hat{x}_h)$ est de plus convexe sur l'espace des solutions vérifiant le comportement (i.e. $\forall x^* \in \mathcal{B}$), ce qui apporte une certaine régularité à la définition de $\mathcal{G}_{\hat{x}_h}^*(\delta \hat{x}_h)$. Démontrons-le. On note $g(x^* - \hat{x}_h)$, la fonctionnelle sous l'intégrale, soit $\mathcal{G}(x^* - \hat{x}_h) = \int_{\Omega} \int_0^T \{g(x^* - \hat{x}_h)\} dt dV$. En utilisant les propriétés de l'espace \mathcal{B} , prouvons la convexité de g , propriété dont \mathcal{G} héritera.

$$\begin{aligned} g(x^*) &= \int_0^t \left\{ \text{Tr} [\sigma^* \cdot \dot{\varepsilon}^*] \right\} \frac{d\tau}{T} \\ &= \int_0^t \left\{ \text{Tr} [\sigma^* \cdot \dot{\varepsilon}_p^* + \sigma^* \cdot \dot{\varepsilon}_e^*] \right\} \frac{d\tau}{T} \end{aligned}$$

Le premier terme de g^* peut s'exprimer en fonction de la dissipation d (cf définition EQ.(2.12)). En effet, en utilisant les notations généralisées, on a :

$$\begin{aligned} d(x^*) &= s^* \cdot \dot{e}_p^* \\ &= \text{Tr} [\sigma^* \cdot \dot{\varepsilon}_p^*] - R^* \dot{p}^* \\ &= \text{Tr} [\sigma^* \cdot \dot{\varepsilon}_p^*] - (\text{Tr} [\sigma^* \cdot \dot{\varepsilon}_e^*] + R^* \dot{p}^* - \text{Tr} [\sigma^* \cdot \dot{\varepsilon}_e^*]) \\ &= \text{Tr} [\sigma^* \cdot \dot{\varepsilon}_p^* + \sigma^* \cdot \dot{\varepsilon}_e^*] - (s^* \cdot \dot{e}_e^*) \end{aligned}$$

La fonctionnelle $g(x^*)$ s'écrit alors de la manière suivante :

$$g(x^*) = \int_0^t \{d(x^*)\} \frac{d\tau}{T} + \int_0^t \{s^* \cdot \dot{e}_e^*\} \frac{d\tau}{T}$$

Or la dissipation, sur l'espace des solutions satisfaisant le comportement, est un convexe. Ceci se démontre avec la propriété EQ.(2.19), que l'on rappelle ici :

$$\forall x^* = (s^*, \dot{e}_p^*) \in \mathcal{B}, \quad \varphi^*(s^*) + \varphi(\dot{e}_p^*) - d(x^*) = 0$$

où les pseudo-potentiels φ et φ^* sont par définition des fonctions convexes sur \mathcal{B} .

De cette manière, la convexité de la fonctionnelle g^* dépend directement des propriétés de $\int_0^t \{s^* \cdot \dot{e}_e^*\} \frac{d\tau}{T}$. En faisant apparaître l'opérateur \mathbf{A} de la loi d'état, on a :

$$\int_0^t \{s^* \cdot \dot{e}_e^*\} \frac{d\tau}{T} = \int_0^t \{\mathbf{A}(e_e^*) \cdot \dot{e}_e^*\} \frac{d\tau}{T}$$

Dans le cas où \mathbf{A} est linéaire, on démontre trivialement la convexité de cette fonction. Alors, pour tous les modèles de comportement où une formulation normale est possible (cf. remarque REM.(2.4)), la convexité de la fonction g sur l'espace \mathcal{B} est démontrée.

Une interprétation géométrique de cette approche est donnée figure FIG.(3.1). Cette illustration met en avant une caractéristique qui améliore nettement la qualité du majorant. En effet, la distance entre l'erreur vraie $\hat{e}_h(I)$ et la borne $\mathcal{G}_{\hat{x}_h}^*(\delta\hat{x}_h)$ est d'autant plus faible que la solution exacte est proche de la solution minimisant \mathcal{G} .

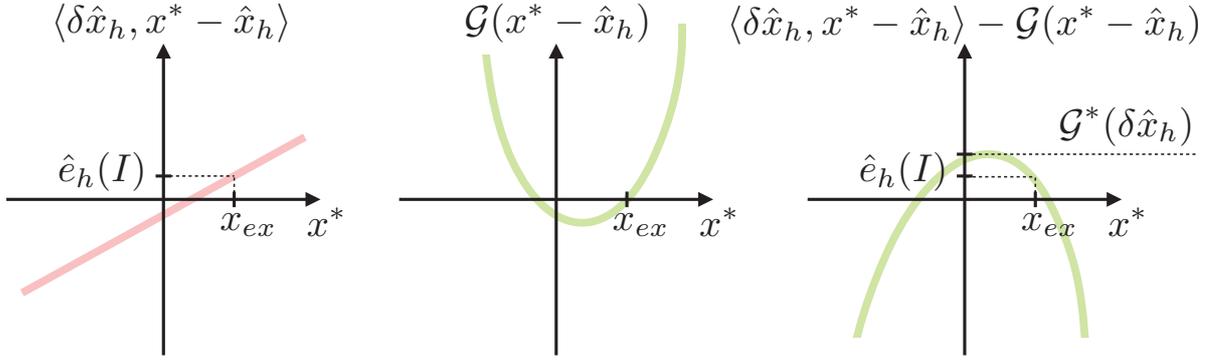


FIGURE 3.1: Interprétation géométrique de l'utilisation d'une fonction convexe et du calcul de sa fonction duale

Afin d'améliorer la pertinence de cette majoration, on peut rajouter un coefficient $\alpha \in \mathfrak{R}^{*+}$. Une étape d'optimisation supplémentaire est alors nécessaire pour obtenir la valeur de α conduisant au meilleur majorant. La borne supérieure de l'erreur s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{e}_h(I) &\leq \inf_{\alpha \in \mathfrak{R}^{*+}} \left\{ \frac{1}{\alpha} \sup_{x^* \in \mathcal{B}} \{ \langle \alpha \delta\hat{x}_h, x^* - \hat{x}_h \rangle - \mathcal{G}(x^* - \hat{x}_h) \} \right\} \\ &\leq \inf_{\alpha \in \mathfrak{R}^{*+}} \left\{ \frac{1}{\alpha} \mathcal{G}_{\hat{x}_h}^*(\alpha \delta\hat{x}_h) \right\} \end{aligned}$$

Remarque 3.7 :

Visuellement, l'utilisation de ce coefficient α peut être interprété comme un changement de la pente de la droite associée au terme $\langle \delta\hat{x}_h, x^* - \hat{x}_h \rangle$ (cf FIG.(3.1)). L'objectif est de rapprocher le sommet du convexe de la solution exacte.

Un travail analogue peut être mené pour le calcul d'une borne inférieure, on obtient alors l'encadrement suivant :

$$\sup_{\alpha^- \in \mathfrak{R}^{*-}} \left\{ \frac{1}{\alpha^-} \mathcal{G}_{\hat{x}_h}^* (\alpha^- \delta \hat{x}_h) \right\} \leq \hat{e}_h(I) \leq \inf_{\alpha^+ \in \mathfrak{R}^{*+}} \left\{ \frac{1}{\alpha^+} \mathcal{G}_{\hat{x}_h}^* (\alpha^+ \delta \hat{x}_h) \right\} \quad (3.11)$$

2.2 Étude des bornes dans un cadre d'élastoplasticité

L'objet de cette partie est de présenter une étude théorique de l'encadrement. En effet, assurons-nous avant toute chose de la pertinence de la majoration mise en place. Après quelques étapes préliminaires visant à simplifier l'écriture du problème, une séparation est proposée, permettant d'estimer l'ordre de grandeur des termes intervenant dans le calcul des bornes.

2.2.1 Préliminaires :

Un problème local

Le calcul de $\mathcal{G}_{\hat{x}_h}^* (\alpha \delta \hat{x}_h)$ est nécessaire pour l'obtention des bornes supérieure ($\alpha \in \mathfrak{R}^{*+}$) et inférieure ($\alpha \in \mathfrak{R}^{*-}$). Il fait intervenir une maximisation sous contrainte :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\hat{x}_h}^* (\alpha \delta \hat{x}_h) &= \sup_{x^* \in \mathcal{B}} \{ \langle \alpha \delta \hat{x}_h, x^* - \hat{x}_h \rangle - \mathcal{G}(x^* - \hat{x}_h) \} \\ &= \sup_{x^* \in \mathcal{B}} \left\{ \int_{\Omega} \int_0^T \left\{ \text{Tr} \left[\alpha \delta \hat{\sigma}_h \cdot (\dot{\hat{\varepsilon}}_p^* - \dot{\hat{\varepsilon}}_{p,h}) + (\sigma^* - \hat{\sigma}_h) \cdot \alpha \delta \dot{\hat{\varepsilon}}_{p,h} \right] - g(x^* - \hat{x}_h) \right\} dt dV \right\} \end{aligned}$$

L'espace contrainte \mathcal{B} représente les solutions vérifiant l'équilibre et des conditions initiales pour les variables internes nulles. Cette restriction est donc locale en espace. Le problème peut ainsi s'écrire sous une forme de maximisation en chaque point de l'espace :

$$g_{\hat{x}_h}^* (\alpha \delta \hat{x}_h) = \sup_{x^* \in \mathcal{B}} \left\{ \int_0^T \left\{ \text{Tr} \left[\alpha \delta \hat{\sigma}_h \cdot (\dot{\hat{\varepsilon}}_p^* - \dot{\hat{\varepsilon}}_{p,h}) + (\sigma^* - \hat{\sigma}_h) \cdot \alpha \delta \dot{\hat{\varepsilon}}_{p,h} \right] - g(x^* - \hat{x}_h) \right\} dt \right\} \quad (3.12)$$

Pour ensuite en calculer l'intégrale :

$$\mathcal{G}_{\hat{x}_h}^* (\alpha \delta \hat{x}_h) = \int_{\Omega} \{ g_{\hat{x}_h}^* (\alpha \delta \hat{x}_h) \} dV$$

Étude de la solution en contrainte sphérique σ_s

Les déformations plastiques étant déviatoriques, l'équation EQ.(3.12) s'écrit :

$$g_{\hat{x}_h}^*(\alpha\delta\hat{x}_h) = \sup_{x^* \in \mathcal{B}} \left\{ \int_0^T \left\{ \text{Tr} \left[\alpha\delta\hat{\sigma}_{d,h} \cdot (\dot{\hat{\epsilon}}_p^* - \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h}) + (\sigma_d^* - \hat{\sigma}_{d,h}) \cdot \alpha\delta\dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \right] \right\} dt \right. \\ \left. - \int_0^T \int_0^t \left\{ \text{Tr} \left[(\sigma_d^* - \hat{\sigma}_{d,h}) \cdot (\dot{\hat{\epsilon}}_p^* - \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h}) + (\sigma^* - \hat{\sigma}_h) \cdot (\dot{\hat{\epsilon}}_e^* - \dot{\hat{\epsilon}}_{e,h}) \right] \right\} \frac{d\tau dt}{T} \right\}$$

De plus on a les propriétés :

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[(\sigma^* - \hat{\sigma}) \cdot (\dot{\hat{\epsilon}}_e^* - \dot{\hat{\epsilon}}_e) \right] &= \text{Tr} \left[(\sigma^* - \hat{\sigma}) \cdot \mathbf{K}^{-1}(\dot{\sigma}^* - \dot{\hat{\sigma}}) \right] \\ &= \frac{1}{2\mu} \cdot \text{Tr} \left[(\sigma_d^* - \hat{\sigma}_d) \cdot (\dot{\sigma}_d^* - \dot{\hat{\sigma}}_d) \right] + \frac{1}{2\mu + 3\lambda} (\sigma_s^* - \hat{\sigma}_s) (\dot{\sigma}_s^* - \dot{\hat{\sigma}}_s) \\ \int_0^T \int_0^t \left\{ \text{Tr} \left[\sigma^* \cdot \dot{\hat{\sigma}} \right] \right\} \frac{d\tau dt}{T} &= \frac{1}{2T} \int_0^T \left\{ \text{Tr} \left[\sigma^* \cdot \hat{\sigma} \right] \right\} dt \end{aligned}$$

L'équation EQ.(3.12) est donc équivalente à

$$g_{\hat{x}_h}^*(\alpha\delta\hat{x}_h) = \sup_{x^* \in \mathcal{B}} \left\{ \int_0^T \left\{ \text{Tr} \left[\alpha\delta\hat{\sigma}_{d,h} (\dot{\hat{\epsilon}}_p^* - \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h}) + (\sigma_d^* - \hat{\sigma}_{d,h}) \alpha\delta\dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^t \left\{ (\sigma_d^* - \hat{\sigma}_{d,h}) (\dot{\hat{\epsilon}}_p^* - \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h}) \right\} \frac{d\tau}{T} \right] - \frac{\|\sigma_d^* - \hat{\sigma}_{d,h}\|^2}{4\mu \cdot T} \right\} dt \left. \right\} \\ + \underbrace{\sup_{\sigma_s^* \in \mathfrak{R}} \left\{ - \int_0^T \left\{ \frac{(\sigma_s^* - \hat{\sigma}_{s,h})^2}{(2\mu + 3\lambda)T} \right\} dt \right\}}_0$$

La partie sphérique des contraintes n'a donc pas de rôle dans le calcul des bornes.

Étude de la solution

La maximisation se faisant sous la contrainte $x^* \in \mathcal{B}$, il peut être intéressant de définir les propriétés de l'espace \mathcal{B} dont la solution x^* va hériter. On a :

$$x^* = (s^*, \dot{\hat{\epsilon}}_p^*) = \left(\left[\begin{array}{c} \sigma^* \\ R^* \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \dot{\hat{\epsilon}}_p^* \\ -\dot{p}^* \end{array} \right] \right)$$

Ainsi, derrière la notation généralisée, deux grandeurs tensorielles $(\sigma^*, \dot{\hat{\epsilon}}_p^*)$ et deux grandeurs scalaires (R^*, \dot{p}^*) sont cachées. Or, comme on a vu dans le paragraphe précédent, seule la partie déviatorique de la contrainte intervient dans le calcul de la borne. L'inconnue en contrainte se réduit donc à sa partie déviatorique.

De plus, la solution x^* vérifiant le comportement ($x^* \in \mathcal{B}$), on a :

$$\dot{\hat{\epsilon}}_p^* = \dot{p}^* \frac{\sigma_d^*}{R^* + R_0} = \dot{p}^* \frac{\sigma_d^*}{\|\sigma_d^*\|}$$

La solution généralisée peut alors être définie par la connaissance d'une direction tensorielle (déviatorique) et trois scalaires :

$$x_r^* \equiv \left(\frac{\sigma_d^*}{\|\sigma_d^*\|}, \|\sigma_d^*\|, R^*, \dot{p}^* \right) = (\mathbb{D}^*, \mathcal{L}^*, R^*, \dot{p}^*)$$

et l'espace \mathcal{B} peut aussi être réduit à \mathcal{B}_r , défini tel que :

$$\mathcal{B}_r = \left\{ x_r^* = (\mathbb{D}^*, \mathcal{L}^*, R^*, \dot{p}^*) \text{ tel que } \begin{cases} \forall t \in [0; T], \mathbb{D}^* \in \mathfrak{R}^5 \text{ (en 3D), } (\mathcal{L}^*, R^*, \dot{p}) \in \mathfrak{R}^{+3} \\ f^* = \mathcal{L}^* - (R^* + R_0) \leq 0 \\ R^* = k.p^* \\ f^* . \dot{p}^* = 0 \\ p(t=0) = 0 \end{cases} \right\}$$

Enfin, le calcul de la fonctionnelle $g_{\hat{x}_h}^*(\alpha \delta \hat{x}_h)$ prend la forme suivante :

$$g_{\hat{x}_h}^*(\alpha \delta \hat{x}_h) = \sup_{x_r^* \in \mathcal{B}_r} \left\{ \int_0^T \left\{ \text{Tr} \left[\alpha \delta \hat{\sigma}_{d,h} . (\dot{p}^* \mathbb{D}^* - \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h}) + (\mathcal{L}^* \mathbb{D}^* - \hat{\sigma}_{d,h}) . \alpha \delta \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \int_0^t \left\{ (\mathcal{L}^* \mathbb{D}^* - \hat{\sigma}_{d,h}) . (\dot{p} \mathbb{D}^* - \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h}) \right\} \frac{d\tau}{T} \right] - \frac{\|\mathcal{L}^* \mathbb{D}^* - \hat{\sigma}_{d,h}\|^2}{4\mu.T} \right\} dt \right\}$$

2.2.2 Réécriture du problème

On note $\ell_{[\delta \hat{x}, \hat{x}]}(\mathbb{D}^*, \mathcal{L}^*, R^*, \dot{p}^*)$ la fonctionnelle suivante :

$$\ell_{[\delta \hat{x}, \hat{x}]}(\mathbb{D}^*, \mathcal{L}^*, R^*, \dot{p}^*) = \text{Tr} \left[\frac{T-t}{T} (\mathcal{L}^* \mathbb{D}^* - \hat{\sigma}_d) . (\dot{p} \mathbb{D}^* - \dot{\hat{\epsilon}}_p) \right. \\ \left. - \left(\delta \hat{\sigma}_d . (\dot{p}^* \mathbb{D}^* - \dot{\hat{\epsilon}}_p) + (\mathcal{L}^* \mathbb{D}^* - \hat{\sigma}_d) . \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p \right) + \frac{(\mathcal{L}^* \mathbb{D}^* - \hat{\sigma}_d)^2}{4\mu.T} \right]$$

En utilisant la propriété EQ.(2.22) et en prenant en compte les différentes propriétés vues dans les préliminaires, l'équation EQ.(3.12) devient :

$$g_{\hat{x}_h}^*(\alpha \delta \hat{x}_h) = - \inf_{x_r^* \in \mathcal{B}_r} \left\{ \int_0^T \left\{ \ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}(\mathbb{D}^*, \mathcal{L}^*, R^*, \dot{p}^*) \right\} dt \right\}$$

Calcul de la direction \mathbb{D}^*

Effectuons quelques manipulations sur ℓ :

$$\ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}(\mathbb{D}^*, \mathcal{L}^*, R^*, \dot{p}^*) = -\text{Tr} \left[\mathbb{D}^* . \left[\mathcal{L}^* \left(\frac{T-t}{T} \dot{\hat{\epsilon}}_p + \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p + \frac{\hat{\sigma}_d}{2\mu T} \right) + \left[\frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_d + \delta \hat{\sigma}_d \right] \dot{p}^* \right] \right] \\ + \frac{T-t}{T} (R^* + R_0) \dot{p}^* + \frac{(\mathcal{L}^* - \|\hat{\sigma}_d\|)^2}{4\mu T} + \frac{\mathcal{L}^* \|\hat{\sigma}_d\|}{2\mu T} \\ + \text{Tr} \left[\delta \hat{\sigma}_d . \dot{\hat{\epsilon}}_p + \hat{\sigma}_d . \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p - \frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_d . \dot{\hat{\epsilon}}_p \right]$$

Comme on cherche la solution $x_r^* = (\mathbb{D}^*, \lambda^*, R^*, \dot{p}^*)$ minimisant $\ell_{[\delta\hat{x}, \hat{x}]}$; et que la direction \mathbb{D}^* n'apparaît qu'une unique fois, on a :

$$\mathbb{D}^* = \frac{\lambda^* \left(\frac{T-t}{T} \dot{\hat{\epsilon}}_p + \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p + \frac{\hat{\sigma}_d}{2\mu T} \right) + \left[\frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_d + \delta \hat{\sigma}_d \right] \dot{p}^*}{\left\| \lambda^* \left(\frac{T-t}{T} \dot{\hat{\epsilon}}_p + \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p + \frac{\hat{\sigma}_d}{2\mu T} \right) + \left[\frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_d + \delta \hat{\sigma}_d \right] \dot{p}^* \right\|}$$

La fonctionnelle $\ell_{[\delta\hat{x}, \hat{x}]}$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \ell_{[\delta\hat{x}, \hat{x}]}(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*) &= - \left\| \lambda^* \left[\frac{T-t}{T} \dot{\hat{\epsilon}}_p + \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p + \frac{\hat{\sigma}_d}{2\mu T} \right] + \left[\frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_d + \delta \hat{\sigma}_d \right] \dot{p}^* \right\| \\ &\quad + \frac{T-t}{T} (R^* + R_0) \dot{p}^* + \frac{\lambda^{*2} + \|\hat{\sigma}_d\|^2}{4\mu T} \\ &\quad + \text{Tr} \left[\delta \hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p + \hat{\sigma}_d \cdot \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p + \frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] \end{aligned}$$

Découpage de $\ell_{[\delta\hat{x}, \hat{x}]}(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*)$

Ce paragraphe a pour but de regrouper les termes de $\ell_{[\delta\hat{x}, \hat{x}]}$ en fonction de leur rôle. On peut en distinguer trois types :

- un terme directionnel

$$\begin{aligned} \ell_{[\delta\hat{x}, \hat{x}]}^D(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*) &= P_{\sigma_h} \left\{ \lambda^* \left(\frac{T-t}{T} \dot{\hat{\epsilon}}_p + \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p + \frac{\hat{\sigma}_d}{2\mu T} \right) + \left[\frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_d + \delta \hat{\sigma}_d \right] \dot{p}^* \right\} \\ &\quad - \left\| \lambda^* \left(\frac{T-t}{T} \dot{\hat{\epsilon}}_p + \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p + \frac{\hat{\sigma}_d}{2\mu T} \right) + \left[\frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_d + \delta \hat{\sigma}_d \right] \dot{p}^* \right\| \quad (3.13) \end{aligned}$$

- un terme élastique

$$\ell_{[\delta\hat{x}, \hat{x}]}^E(\lambda^*, R^*) = \frac{(\lambda^* - \|\hat{\sigma}_d\|)^2 + 2(R^* + R_0 - \lambda^*)(R_1 - \|\hat{\sigma}_d\|)}{4\mu T} \quad (3.14)$$

- un terme dit de "courbure"

$$\begin{aligned} \ell_{[\delta\hat{x}, \hat{x}]}^C(R^*, \dot{p}^*) &= \text{Tr} \left[\delta \hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p + \hat{\sigma}_d \cdot \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p + \frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] + \frac{T-t}{T} (R^* + R_0) \dot{p}^* \\ &\quad - (R^* + R_0) \left[\frac{T-t}{T} P_{\sigma_h} \left\{ \dot{\hat{\epsilon}}_p \right\} + P_{\sigma_h} \left\{ \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p \right\} + \frac{P_{\sigma_h} \left\{ \hat{\sigma}_d \right\} - \|\hat{\sigma}_d\|}{2\mu T} \right] \\ &\quad - \left[\frac{T-t}{T} P_{\sigma_h} \left\{ \hat{\sigma}_d \right\} + P_{\sigma_h} \left\{ \delta \hat{\sigma}_d \right\} \right] \dot{p}^* \quad (3.15) \end{aligned}$$

avec les notations suivantes :

- des outils de projection sont utilisés, ils sont définis tels que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbb{X}} \{ \mathbb{Y} \} &= \text{Tr} [\text{dev} (\mathbb{X}) . \mathbb{Y}]; \\ \mathbb{P}_{\mathbb{X}} \{ \mathbb{Y} \} &= \mathbb{P}_{\mathbb{X}} \{ \mathbb{Y} \} \frac{\text{dev} (\mathbb{X})}{\| \text{dev} (\mathbb{X}) \|}; \\ \mathbb{P}_{\mathbb{X}^\perp} \{ \mathbb{Y} \} &= \mathbb{Y} - \mathbb{P}_{\mathbb{X}} \{ \mathbb{Y} \} \end{aligned}$$

- la quantité R_1 est définie telle que :

$$R_1 = P_{\sigma_h} \{ \hat{\sigma}_d \} + 2\mu P_{\sigma_h} \left\{ (T - t) \dot{\hat{\epsilon}}_p + T \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p \right\}$$

L'annexe ANN.(C) s'intéresse à démontrer l'égalité suivante :

$$\ell_{[\delta \hat{x}, \hat{x}]}(\mathcal{L}^* R^*, \dot{p}^*) = \ell_{[\delta \hat{x}, \hat{x}]}^D(\mathcal{L}^*, R^*, \dot{p}^*) + \ell_{[\delta \hat{x}, \hat{x}]}^E(\mathcal{L}^*, R^*) + \ell_{[\delta \hat{x}, \hat{x}]}^C(R^*, \dot{p}^*)$$

Remarque 3.8 :

Avec la définition introduite pour $\mathbb{P} \{ \cdot \}$, on a la propriété suivante :

$$\text{Tr} [\mathbb{P}_{\mathbb{X}^\perp} \{ \mathbb{Y} \} . \mathbb{X}_d] = 0 \quad (3.16)$$

2.2.3 Étude des différents termes

Le découpage proposé EQ.(3.16) permet de souligner différentes propriétés. Il offre tout d'abord une nette séparation des divers phénomènes intervenant dans la minimisation. Ainsi, le terme directionnel $\ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}^D(\mathcal{L}^*, R^*, \dot{p}^*)$ fait intervenir des grandeurs tensorielles. C'est sur ce terme que vont jouer les différences de direction entre les solutions admissibles des problèmes direct \hat{x}_h et miroir $\delta \hat{x}_h$.

Aussi, l'étude proposée dans l'annexe ANN.(C) permet de simplifier la dépendance des deux premières fonctionnelles $\ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}^D$ et $\ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E$ en fonction de leurs paramètres respectifs. Ainsi :

$$\begin{aligned} \ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}^D(\mathcal{L}^*, R^*, \dot{p}^*) &= \ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}^D(R^*, \dot{p}^*) \\ \ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E(\mathcal{L}^*, R^*) &= \ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E(R^*) \end{aligned}$$

Ensuite, cette même annexe apporte des informations complémentaires sur ce découpage. Par exemple, elle démontre le signe des termes $\ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}^D(R^*, \dot{p}^*)$ et $\ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E(R^*)$, permettant de comprendre leur influence sur le calcul des bornes.

$$\begin{aligned} \ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}^D(R^*, \dot{p}^*) &\leq 0 \\ \ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E(R^*) &\geq 0 \end{aligned}$$

De cette manière, comme $\ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}^D(R^*, \dot{p}^*)$ est négatif, connaître sa valeur précisément est nécessaire afin d'obtenir des bornes strictes. Tandis que $\ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E(R^*)$ est positif et un meilleur calcul de sa valeur conduira à des bornes plus pertinentes.

Enfin, on montre que les trois termes constituant $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}(R^*, \dot{p}^*)$ sont petits. Soit, plus précisément :

$$\begin{aligned} \ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^D(R^*, \dot{p}^*) & \text{ est du second ordre} \\ \ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E(R^*) & \text{ est du second ordre} \\ \ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(R^*, \dot{p}^*) & \text{ est du premier ordre quand } \dot{p}_h = 0 \\ & \text{ est du second ordre sinon.} \end{aligned}$$

Des trois termes, le seul à nous permettre de dissocier le régime plastique du régime élastique de la solution x^* sur le minimum est celui de courbure $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(R^*, \dot{p}^*)$. On propose alors la méthode suivante pour le calcul de $g_{\hat{x}_h}^*(\delta\hat{x}_h)$:

$$g_{\hat{x}_h}^*(\delta\hat{x}_h) = -\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}(\bar{R}, \dot{\bar{p}}) \text{ avec } (\bar{R}, \dot{\bar{p}}) = \underset{\substack{p^*(t=0) = 0 \\ R^* = k.p^* \geq 0 \\ \dot{p}^* \geq 0}}{\text{Argmin}} \left\{ \int_0^T \{ \ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(R^*, \dot{p}^*) \} dt \right\}$$

Enfin, en reprenant les notations introduites dans l'annexe ANN.(C) pour décrire la fonctionnelle $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(R^*, \dot{p}^*)$, on peut mettre ce problème sous la forme suivante, dite "centrale" :

$$\begin{aligned} g_{\hat{x}_h}^*(\delta\hat{x}_h) &= - \int_0^T \{ \ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}(\bar{R}, \dot{\bar{p}}) \} dt \quad \text{avec :} \\ (\bar{R}, \dot{\bar{p}}) &= \underset{\substack{p^*(t=0) = 0 \\ R^* = k.p^* \geq 0 \\ \dot{p}^* \geq 0}}{\text{Argmin}} \left\{ \int_0^T \left\{ \frac{T-t}{T} \left[\Delta R^* \Delta \dot{p}^* + \mathcal{R}_h \Delta \dot{p}^* + \Delta R^* \dot{\mathcal{P}}_h \right] \right\} dt \right\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_h &= R_h + R_0 - \|\sigma_{d,h}\| - P_{\sigma_h} \{ \Delta \sigma_h \} - \frac{T}{T-t} P_{\sigma_h} \{ \delta \hat{\sigma}_{d,h} \} \\ \dot{\mathcal{P}}_h &= -P_{\sigma_h} \{ \Delta \dot{\hat{e}}_{p,h} \} - \frac{T}{T-t} P_{\sigma_h} \{ \delta \dot{\hat{e}}_{p,h} \} - \frac{(\Delta \|\sigma_{d,h}\|)^2 - \|\Delta \sigma_{d,h}\|^2}{4\mu(T-t)\|\sigma_{d,h}\|} \end{aligned}$$

et pour les champs $\Delta \square$:

$$\begin{aligned} \Delta x^* &= x^* - x_h \\ \Delta x_h &= \hat{x}_h - x_h \end{aligned}$$

3 Bilan

Ce chapitre a présenté une extension de l'utilisation des outils d'extraction pour l'estimation garantie de l'erreur sur une quantité locale, dans le cadre des problèmes non linéaires. Le problème miroir y est introduit, permettant de faire le pont entre des quantités locales et globales. Le chapitre suivant s'intéresse aux points difficiles rencontrés lors de sa mise en oeuvre.

Une technique d'encadrement garanti de l'erreur sur une quantité d'intérêt locale a été ensuite introduite. Des bornes ont été introduites pour tout modèle de comportement admettant une formulation normale.

Enfin, le passage de l'expression de l'erreur contenant la solution exacte à un encadrement qui en est exempt, a permis d'introduire plusieurs fonctionnelles, traduisant chacune des phénomènes particuliers mis en jeu dans le calcul des bornes de l'erreur. L'évaluation de ces bornes nécessite l'écriture et la résolution d'un nouveau type de problème, dit "problème central", local en espace, mais global en temps EQ.(3.17). Le chapitre CHP.5 s'intéresse à la résolution de ce problème.

Chapitre 4

Problème miroir

Ce chapitre présente les différentes étapes nécessaires à une bonne mise en oeuvre du problème miroir. La première partie s'intéresse à des outils de projection, les discrétisations associées aux problèmes de référence et miroir pouvant être différentes. Dans un second temps, la méthode d'intégration du comportement élastoplastique local est revisitée. Enfin, le problème miroir étant posé comme un problème de perturbation, un paramètre adimensionnant peut être introduit, c'est l'objet d'étude de la dernière partie de ce chapitre.

Sommaire

1	Changement de discrétisation	89
1.1	Projection de x_h	90
1.2	Projection de \hat{x}_h	90
2	Première approche et instabilité numérique	91
2.1	Extension directe du retour radial au problème miroir	91
2.2	Étude de la solution	94
3	Vers une réécriture du retour radial	97
3.1	Écriture de la loi d'évolution au premier ordre	97
3.2	Proposition d'un retour radial dédié au problème miroir	98
3.3	Illustration	100

4	Calcul d'une solution admissible $\delta\hat{x}_h$	102
4.1	Calcul d'une contrainte admissible $\delta\hat{\sigma}_h$	102
4.2	Calcul des variables internes	102
5	Comportement de la solution en fonction du paramètre d'extraction	103
6	Bilan	105

1 Changement de discrétisation

Le problème direct est résolu sur un maillage $\Omega_{h,\Delta t}$ donné. Or le caractère local des conditions aux limites associées au problème miroir peut conduire à choisir un maillage dont la discrétisation est plus fine. Mais, afin d'écrire le comportement du problème miroir, il est nécessaire de connaître la solution approchée du problème direct satisfaisant le comportement direct x_h . De plus, le calcul de l'encadrement de l'erreur fait intervenir aussi bien les solutions admissibles des problèmes direct \hat{x}_h et miroir $\delta\hat{x}_h$. Il faut donc projeter x_h et \hat{x}_h sur la discrétisation fine. Afin que ces projections soient conservatives, il est nécessaire de prendre quelques précautions.

Jusqu'à maintenant, on a noté x_h et \hat{x}_h la solution éléments finis du problème direct et sa prolongation admissible associée sur le maillage $\Omega_{h,\Delta t}$. On introduit maintenant les solutions $x_{h'}$ et $\hat{x}_{h'}$, projections de x_h et \hat{x}_h sur la nouvelle discrétisation $\Omega_{h',\Delta t'}$.

Afin de faciliter la démarche, on choisira toujours le maillage $\Omega_{h',\Delta t'}$ comme une sous-discrétisation de $\Omega_{h,\Delta t}$. La figure FIG.(4.1) illustre deux discrétisations spatiales associées.

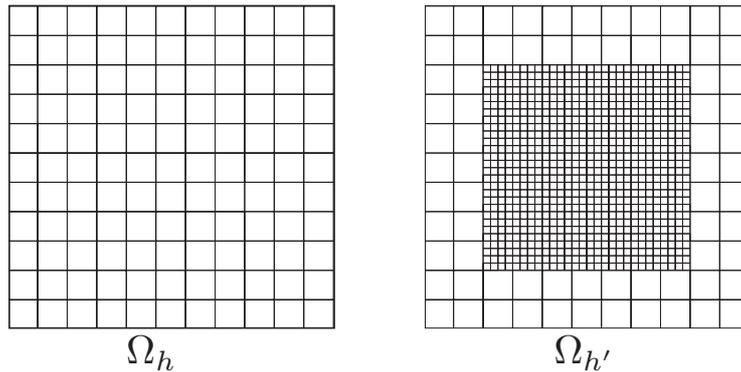


FIGURE 4.1: Exemple de remaillage spatial

On veut conserver pour ces deux solutions $x_{h'}$ et $\hat{x}_{h'}$ les propriétés qui les caractérisent, c'est à dire :

- $x_{h'}$ doit vérifier exactement le comportement et les conditions initiales, soit :

$$x_{h'} \in \mathcal{B} \text{ et } \begin{cases} s_{h'}(t=0) = 0 \\ e_{h'}(t=0) = 0 \end{cases}$$

- $\hat{x}_{h'}$ doit être cinématiquement et statiquement admissible, soit :

$$\hat{x}_{h'} = (\hat{s}_{h'}, \dot{\hat{e}}_{p,h'}) \text{ tel que } \begin{cases} \hat{s}_{h'} \in \mathcal{J}^{ad} \text{ et } \hat{e}_{h'} \in \mathcal{E}^{ad} \\ \hat{s}'_h = \mathbf{A}(\hat{e}_{e,h'}) \end{cases}$$

1.1 Projection de x_h

On rappelle les caractéristiques que doit vérifier la solution $x_{h'}$:

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_{h'} \in \mathcal{B} &\Leftrightarrow \left\{ (s_{h'}, \dot{e}_{p,h'}) \text{ tel que : } \left\{ \begin{array}{l} s_{h'} \in \mathcal{S}_{h'} \text{ et } e_{h'} \in \mathcal{E}_{h'} \\ s_{h'} = \mathbf{A}(e_{e,h'}) \\ \dot{e}_{p,h'} = \mathbf{B}(s_{h'}) \\ \text{et } e_{p,h'}(t=0) = 0 \end{array} \right\} \right. \\ \bullet \quad s_{h'}(t=0) &= 0 \text{ et } e_{h'}(t=0) = 0 \end{aligned}$$

La loi d'état étant linéaire, sa vérification ne pose pas de problème majeur. Les conditions initiales sont aussi trivialement imposées. C'est la loi d'évolution qui va diriger la méthode de projection.

$$\dot{e}_{p,h'} = \mathbf{B}(s_{h'}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{h'} = \|\sigma_{d,h'}\| - (R_{h'} + R_0) \leq 0 \\ \dot{p}_{h'} \geq 0 \\ \dot{p}_{h'} \cdot f_{h'} = 0 \\ \dot{e}_{p,h'} = \dot{p}_{h'} \frac{\sigma_{d,h'}}{R_{h'} + R_0} \end{array} \right.$$

En effet, à partir de la loi d'évolution et connaissant la contrainte $\sigma_{h'}$, il est possible de reconstruire toutes les autres variables. On peut, de cette manière, résumer la procédure de projection dans la série d'étapes suivantes :

1. $\sigma_h \rightarrow \sigma_{h'}$: projection élément par élément du maillage maître sur le maillage esclave, en utilisant une interpolation de même degré que celle du problème direct, aussi bien en temps qu'en espace. De cette manière, on est sûr que la nouvelle contrainte vérifie l'équilibre affaibli associé au problème éléments finis. En appliquant la loi d'état, on obtient $\varepsilon_{e,h'}$.
2. Calcul des variables d'écrouissage afin de satisfaire l'admissibilité plastique. $R_{h'}$ est construit de manière incrémental afin qu'à chaque piquet de temps t_{k+1} , on ait :

$$R_{h'}(t = t_{k+1}) = \sup \{ \|\sigma_{d,h'}\| - R_0, R_{h'}(t_k) \}$$

On en déduit $p_{h'}$ en utilisant la loi d'état.

3. La loi de normalité est utilisée afin de définir la déformation plastique cumulée :

$$\dot{e}_{p,h'} = \dot{p}_{h'} \frac{\sigma_{d,h'}}{R_{h'} + R_0}$$

1.2 Projection de \hat{x}_h

La déformation totale admissible $\hat{\varepsilon}_h$ est un post-traitement de celle issue du calcul éléments finis. Une résolution éléments finis en déplacement utilise celles-ci comme inconnus du problème. Dans cette approche, les conditions d'admissibilité cinématique sont directement imposées et alors exactement vérifiées. De plus, dans tous les cas supports de nos études, le maillage $\Omega_{h',\Delta t'}$ est un sous maillage de $\Omega_{h,\Delta t}$.

Alors, le déplacement u_h , défini sur $\Omega_{h,\Delta t}$, peut être étendu sur $\Omega_{h',\Delta t'}$ sans perte et sans ajout d'information. Une fois le déplacement \underline{u}_h exprimé sur le nouveau maillage, on peut facilement en déduire la déformation totale en chacun des points de Gauss de ses éléments.

Le calcul de la contrainte admissible $\hat{\sigma}_{h'}$ se fait par prolongement de la solution $\sigma_{h'}$. La méthode utilisée est identique à celle introduite pour le calcul de $\hat{\sigma}_h$ à partir de σ_h .

Enfin, une procédure similaire à celle introduite pour la construction des champs admissibles est utilisée en post-traitement pour déterminer toutes les autres grandeurs admissibles, soit $\hat{R}_{h'}$, $\hat{p}_{h'}$, et $\hat{\varepsilon}_{p,h'}$.

Dans toute la suite de ces travaux, la projection est considérée comme un travail de fond. Ainsi, on simplifiera les notations et ne travaillera qu'avec x_h , \hat{x}_h , δx_h et $\delta \hat{x}_h$.

2 Première approche et instabilité numérique

2.1 Extension directe du retour radial au problème miroir

Cette partie a pour objectif de présenter une première implémentation du problème miroir. En effet, à l'instar du problème de référence, il présente des non-linéarités matériau qu'il faut résoudre. Cette première approche, intuitive, consiste à reproduire le schéma reposant sur le retour radial déjà utilisé pour résoudre le problème direct.

Plaçons-nous dans un schéma incrémental, mais rétroverse : l'état de la solution δx_{k+1} est parfaitement connu au piquet de temps t_{k+1} et l'on cherche la réponse δx_k à l'instant t_k aux chargements en déformation $\Delta_\delta \varepsilon_\Sigma$ et en précontrainte $\Delta_\delta \sigma_\Sigma$. L'algorithme ALGO.(2) présente l'extension au problème miroir de la méthode de résolution classique illustrée dans l'algorithme ALGO.(1).

Détaillons alors l'aspect nouveau de ce problème : le retour radial dédié au problème miroir. À incrément de déformation totale $\Delta_\delta \varepsilon$ connu, il faut trouver $\Delta_\delta p > 0$ afin d'annuler le seuil de plasticité ; soit :

$$\exists \Delta_\delta p > 0 \text{ telle que : } \begin{cases} \Delta_\delta \varepsilon = \Delta_\delta \varepsilon_e + \Delta_\delta \varepsilon_p \text{ avec } \text{Tr} [\Delta_\delta \varepsilon_p] = 0 \\ \delta \sigma_k = \delta \sigma_{k+1} + \mathbf{K} \Delta_\delta \varepsilon_e \\ \|\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{k,d}\| - (R_{k+1} + \delta R_{k+1} + k \cdot \Delta_\delta p + R_0) = 0 \\ \Delta_\delta \varepsilon_p + \Delta_\delta \varepsilon_p = (\Delta p + \Delta_\delta p) \frac{\sigma_{d,k+1} + \delta \sigma_{k,d}}{R_{k+1} + \delta R_{k+1} + k \cdot \Delta_\delta p + R_0} \end{cases} \quad (4.1)$$

Remarque 4.1 :

La loi d'évolution du problème miroir est écrite comme une perturbation sur le problème direct. De cette manière, on reprend le schéma implicite utilisé pour la résolution approchée du problème direct. Le seuil fait donc intervenir les quantités (σ_h, R_h) à l'instant t_{k+1} , et la loi d'évolution s'écrit aussi implicitement : $\Delta_\delta \varepsilon_p = \Delta p \frac{\sigma_{k+1,d}}{\|\sigma_{k+1,d}\|}$ devient $\Delta_\delta \varepsilon_p + \Delta_\delta \varepsilon_p = (\Delta p + \Delta_\delta p) \frac{\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{k,d}}{\|\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{k,d}\|}$.

initialisation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_\delta u = 0 \\ \text{Calcul du résidu d'équilibre } \delta r_{ref} \text{ en réponse à } \Delta_\delta \sigma_\Sigma, \delta r = \delta r_{ref} \end{array} \right.$$

tant que $\delta r > \text{coef}_{seuil} \cdot \delta r_{ref}$ **faire**

Résolution de l'étape globale : $\mathbf{K}_{EF} \cdot \delta_\delta u = -\delta r$

Actualisation du déplacement : $\Delta_\delta u = \Delta_\delta u + \delta_\delta u$

Calcul de l'incrément de déformation totale : $\Delta_\delta \varepsilon = \varepsilon(\Delta_\delta u) + \Delta_\delta \varepsilon_\Sigma$

Calcul de la contrainte élastique associée : $\delta \sigma_e = \delta \sigma_{k+1} + \mathbf{K} \Delta_\delta \varepsilon$

si $\|\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{e,d}\| - (R_{k+1} + \delta R_{k+1} + R_0) \leq 0$ **alors**

La solution élastique est plastiquement admissible

$$\delta p_k = \delta p_{k+1}, \delta \varepsilon_k = \delta \varepsilon_{k+1} + \Delta_\delta \varepsilon, \delta \sigma_k = \delta \sigma_e$$

sinon

La solution élastique est plastiquement non-admissible

Résolution de (Retour radial) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \Delta_\delta p > 0 \mid \left[\begin{array}{l} \Delta_\delta \varepsilon = \Delta_\delta \varepsilon_e + \Delta_\delta \varepsilon_p \text{ avec } \text{Tr}[\Delta_\delta \varepsilon_p] = 0 \\ \delta \sigma_k = \delta \sigma_{k+1} + \mathbf{K} \Delta_\delta \varepsilon_e \\ \|\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{k,d}\| - (R_{k+1} + \delta R_{k+1} + k \Delta_\delta p + R_0) = 0 \\ \Delta_\delta \varepsilon_p + \Delta_\delta \varepsilon_p = (\Delta p + \Delta_\delta p) \frac{\sigma_{d,k+1} + \delta \sigma_{k,d}}{R_{k+1} + \delta R_{k+1} + k \Delta_\delta p + R_0} \end{array} \right] \end{array} \right.$$

fin

Post traitement : $\delta p_k = \delta p_{k+1} + \Delta_\delta p$ et $\delta R_k = \delta R_{k+1} + k \Delta_\delta p$

Calcul du nouveau résidu d'équilibre δr

fin

Algorithme 2: Algorithme de résolution du problème miroir, élastoplastique incrémental et rétrograde.

Enfin, prenons la contrainte supplémentaire de travailler en contrainte plane (i.e. $\delta \sigma_{zz} = 0$). Afin de satisfaire cette dernière hypothèse, on introduit une nouvelle inconnue $\Delta_\delta \varepsilon^{zz}$, une correction à apporter sur l'incrément déformation totale $\Delta_\delta \varepsilon$ afin que la contrainte élastique associée à celle-ci soit plane; soit :

$$\Delta_\delta \varepsilon^{zz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_\delta \varepsilon^{zz} \end{bmatrix} \quad \text{telle que} \quad [\mathbf{A}(\Delta_\delta \varepsilon - \Delta_\delta \varepsilon^{zz})]_{zz} = 0$$

En utilisant le comportement et les propriétés d'écoulement incompressible, ainsi que d'additivité des déformations, on a la propriété :

$$\Delta_\delta \varepsilon_{p,zz} = \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \Delta_\delta \varepsilon^{zz}$$

Le problème du retour radial en contraintes planes se met alors sous la forme :

$$\exists \Delta_{\delta p} > 0 \text{ telle que : } \begin{cases} \Delta_{\delta \mathcal{E}} = \Delta_{\delta \mathcal{E}_e} + \Delta_{\delta \mathcal{E}_p} + \Delta_{\delta \mathcal{E}^{zz}} \\ \text{avec } \begin{cases} \text{Tr} [\Delta_{\delta \mathcal{E}_p}] = 0 \\ \Delta_{\delta \mathcal{E}^{zz}} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \Delta_{\delta \epsilon_{p,zz}} \underline{e}_{zz} \otimes \underline{e}_{zz} \end{cases} \\ \delta \sigma_k = \delta \sigma_{k+1} + \mathbf{K} \Delta_{\delta \mathcal{E}_e} \\ \delta R_k = \delta R_{k+1} + k \cdot \Delta_{\delta p} \\ \|\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{k,d}\| - (R_{k+1} + \delta R_k + R_0) = 0 \\ \Delta_{\mathcal{E}_p} + \Delta_{\delta \mathcal{E}_p} = (\Delta p + \Delta_{\delta p}) \frac{\sigma_{d,k+1} + \delta \sigma_{k,d}}{R_{k+1} + \delta R_k + R_0} \end{cases}$$

On conserve ici une approche semblable à l'approche classique du retour radial. Ainsi, on injecte dans les équations précédentes la prédiction élastique $\delta \sigma_e$, connue :

$$\begin{aligned} \delta \sigma_{e,d} &= \delta \sigma_{k+1,d} + [\mathbf{A}(\Delta_{\delta \mathcal{E}} - \Delta_{\delta \mathcal{E}^{zz}})] = \delta \sigma_{k+1,d} + 2\mu(\Delta_{\delta \mathcal{E}_d} - \Delta_{\delta \mathcal{E}_d^{zz}}) \\ \delta \sigma_{k,d} &= \delta \sigma_{k+1,d} + [\mathbf{A}(\Delta_{\delta \mathcal{E}_e})]_d = \delta \sigma_{k+1,d} + 2\mu \Delta_{\delta \mathcal{E}_e,d} \\ &= \delta \sigma_{e,d} - 2\mu(\Delta_{\delta \mathcal{E}_p} - \Delta_{\delta \mathcal{E}_d^{zz}}) \\ \sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{k,d} &= \sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{e,d} - 2\mu(\Delta_{\delta \mathcal{E}_p} - \Delta_{\delta \mathcal{E}_d^{zz}}) \\ &= \sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{e,d} + 2\mu(\Delta_{\mathcal{E}_p} + \Delta_{\delta \mathcal{E}_d^{zz}}) - 2\mu(\Delta_{\mathcal{E}_p} + \Delta_{\delta \mathcal{E}_p}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

De cette dernière équation, on tire une propriété importante : comme la loi d'évolution donne $\Delta_{\mathcal{E}_p} + \Delta_{\delta \mathcal{E}_p}$ parallèle à $\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{k,d}$, on a $\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{e,d} + 2\mu(\Delta_{\mathcal{E}_p} + \Delta_{\delta \mathcal{E}_d^{zz}})$ qui leur est aussi parallèle. Alors :

$$\|\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{k,d}\| = \|\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{e,d} + 2\mu(\Delta_{\mathcal{E}_p} + \Delta_{\delta \mathcal{E}_d^{zz}})\| - 2\mu(\Delta p + \Delta_{\delta p}) \quad (4.3)$$

Enfin, en injectant cette même égalité EQ.(4.2) dans la loi d'évolution et en ne retenant que la composante sur $\underline{e}_{zz} \otimes \underline{e}_{zz}$, on a une relation supplémentaire :

$$\Delta \epsilon_{p,zz} + \Delta_{\delta \epsilon_{p,zz}} = (\Delta p + \Delta_{\delta p}) \frac{\sigma_{k+1,d,zz} + \sigma_{e,d,zz} + 2\mu(\Delta_{\delta \epsilon_{d,zz}^{zz}} - \Delta_{\delta \epsilon_{p,zz}})}{R_{k+1} + \delta R_{k+1} + k \cdot \Delta_{\delta p} + R_0} \quad (4.4)$$

Et on peut finalement réécrire toutes les inconnues du problème en fonction du seul incrément de déformation plastique cumulée $\Delta_{\delta p}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{\delta \epsilon_{zz}^{zz}} &= \frac{(\Delta p + \Delta_{\delta p})(\sigma_{k+1,d,zz} + \delta \sigma_{e,d,zz}) - (R_{k+1} + \delta R_{k+1} + k \Delta_{\delta p} + R_0) \Delta \epsilon_{p,zz}}{\frac{1-2\nu}{1-\nu}(R_{k+1} + \delta R_{k+1} + k \Delta_{\delta p} + R_0) + 2\mu(\Delta p + \Delta_{\delta p})} - \frac{4\mu}{3}(\Delta p + \Delta_{\delta p}) \\ \Delta_{\delta \mathcal{E}} &= \Delta_{\delta \mathcal{E}} + \Delta_{\delta \mathcal{E}^{zz}} \\ \Delta_{\delta \mathcal{E}_p} &= (\Delta p + \Delta_{\delta p}) \frac{\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{e,d} + 2\mu(\Delta_{\mathcal{E}_p} + \Delta_{\delta \mathcal{E}_d^{zz}})}{\|\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{e,d} + 2\mu(\Delta_{\mathcal{E}_p} + \Delta_{\delta \mathcal{E}_d^{zz}})\|} - \Delta_{\mathcal{E}_p} \\ \delta \sigma_k &= \delta \sigma_{k+1} + \mathbf{A}(\Delta_{\delta \mathcal{E}} - \Delta_{\delta \mathcal{E}_p}) \end{aligned}$$

Le système ainsi mis en place permet d'exprimer étape par étape les différentes variables caractérisant l'état de la solution δx_k associé à un incrément de déformation plastique cumulée $\Delta_{\delta p}$. De la même manière, la valeur du seuil f_{k+1} ne dépend plus que de $\Delta_{\delta p}$. Il nous faut donc résoudre ce problème non-linéaire afin de déterminer l'incrément $\Delta_{\delta p} > 0$ qui conduira à un seuil f_{k+1} nul. Dans la pratique, un algorithme de type "sécant" est utilisé.

Remarque 4.2 :

L'extension du retour radial, proposée ici pour résoudre les non-linéarités matériau associés au problème miroir présente un aspect fondamentalement différent de l'approche classique. En effet, à chaque "retour", la direction est inconnue. Ainsi, alors que dans l'approche classique on cherche uniquement l'amplitude du retour assurant la nullité du seuil, il faut ici trouver son amplitude ainsi que sa direction associée afin d'assurer l'admissibilité plastique.

2.2 Étude de la solution**Définition des problèmes direct et miroir**

Le support de cette étude est le problème suivant : soit une plaque carrée de côté $2L$ soumise à deux efforts homogènes opposés sur ses tranches de droite et de gauche, comme illustré figure FIG.(4.2) de gauche. Par symétrie, on ne considère qu'un quart de la plaque (cf figure FIG.(4.2)).

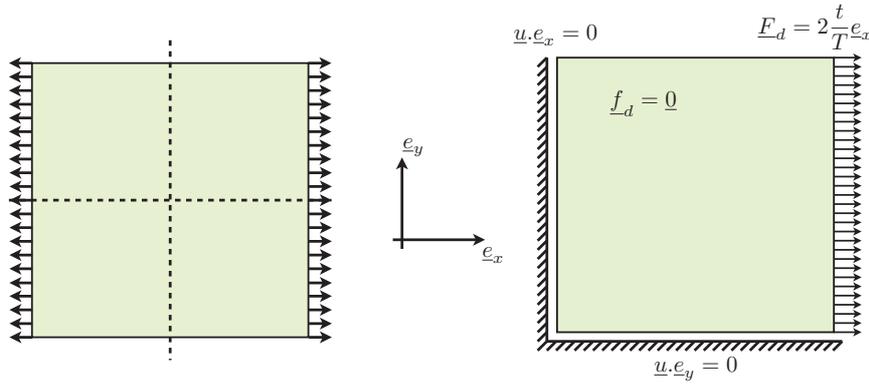


FIGURE 4.2: Schéma de la structure support du problème de référence, ainsi que de son chargement

Ce problème peut s'écrire comme un problème de point de Gauss : l'erreur spatiale est nulle. On choisit toutefois une discrétisation spatiale de 44×44 éléments car celle-ci servira de support à la résolution du problème miroir. On divise l'intervalle d'étude $[0; T]$ en 21 pas de temps ; de cette manière, les seules erreurs se résument à l'erreur de discrétisation temporelle et celle de non-linéarité matériau. À chaque pas de temps, l'état de la solution x_h est homogène sur toute la structure. À l'instant final, la contrainte σ_h et la déformation plastique cumulée p_h prennent les valeurs suivantes :

$$\sigma_h = 2 \cdot \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad \text{et} \quad p = 7,75 \cdot 10^{-2}$$

On s'intéresse maintenant à l'erreur sur la composante $\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$ de la déformation plastique dans la zone d'intérêt $\omega \times [t_1; t_2]$ présentée en rouge sur la figure FIG.(4.3) entre une solution approchée x_h et la solution exacte de ce problème x_{ex} . La figure FIG.(4.4) illustre le couple d'extracteurs. On y voit les valeurs qu'ils prennent en

fonction du temps en un point de Gauss au centre de la zone d'intérêt. Le maillage support du problème miroir est choisi ici identique au maillage du problème direct.

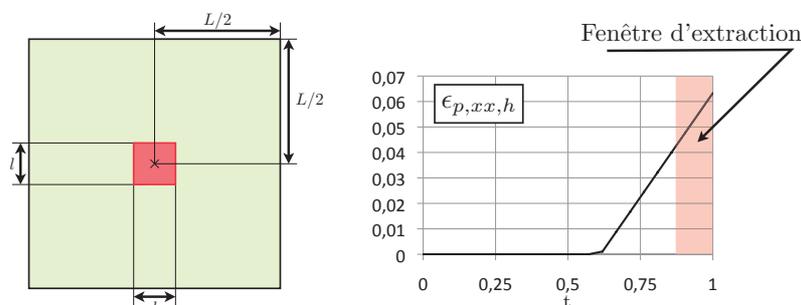


FIGURE 4.3: Définition de la zone d'intérêt ($L = 22$ et $l = 1$) et de la fenêtre d'extraction

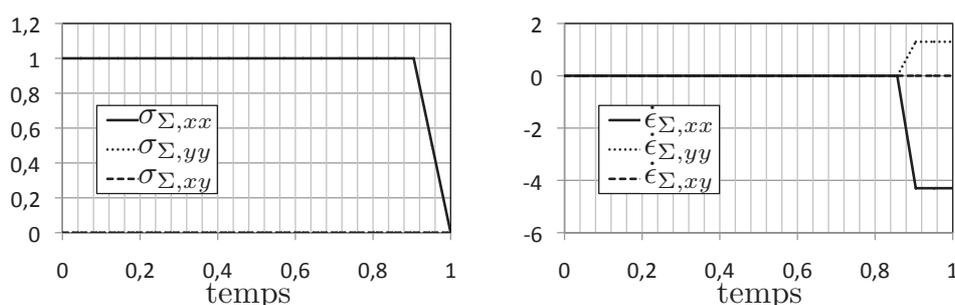


FIGURE 4.4: Extracteurs en un point de Gauss au milieu de la zone d'intérêt

Non convergence de la solution

On se place au temps $t_{k+1} = T$ et on cherche à résoudre le problème incrémental associé au problème miroir afin de déterminer la solution δx_k au temps t_k . La figure FIG.(4.5) de gauche montre l'évolution du résidu d'équilibre au fur est à mesure des itérations. Cette même figure met aussi en avant, sur celle de droite, la localisation des instabilités. En effet, la différence entre deux évaluations successives de l'incrément de déformation plastique cumulée, adimensionnée par leur valeur prise sur les derniers incréments y est représentée.

Les zones blanches représentent les lieux où la plasticité sur le problème miroir est nulle. Les zones concernées par ces instabilités sont donc les zones de frontière entre le régime élastique et le régime plastique de la solution du problème miroir. On note 5636 un point de Gauss de cette frontière.

La figure FIG.(4.6) présente l'évolution à chaque itération de l'incrément $\Delta_{\delta p}$ au point de Gauss 5636. On retrouve l'instabilité mise en avant sur le résidu d'équilibre.

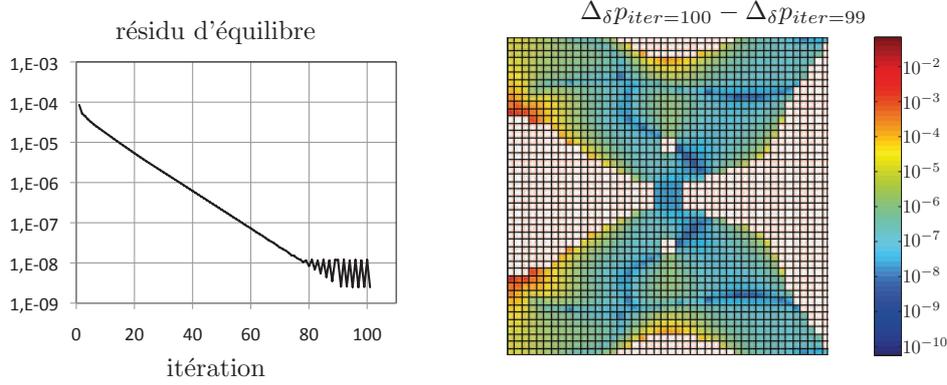


FIGURE 4.5: À gauche : évolution du résidu d'équilibre en fonction des itérations. À droite : carte de la différence $|\Delta_{\delta p}(iter = 100) - \Delta_{\delta p}(iter = 99)|$ adimensionnée

D'un autre coté, la figure FIG.(4.7) montre l'évolution de la direction du déviateur de la prédiction élastique $\delta\sigma_{e,d}$, dans le plan $(\frac{\sigma_{d,xx}}{\|\sigma_d\|}, \frac{\sigma_{d,yy}}{\|\sigma_d\|})$, au fur et à mesure des itérations, toujours au point de Gauss 5636. On rappelle que la contrainte solution du problème de référence est portée par $\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$.

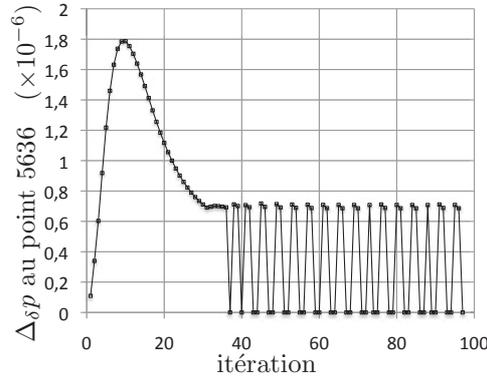


FIGURE 4.6: $\Delta_{\delta p}$ au point de Gauss 5636 au fur et à mesure des itérations

Ces deux dernières figures mettent en exergue la difficulté qu'a l'algorithme à résoudre le problème de non-linéarité matériau. En effet, à chaque itération, on cherche le vecteur (i.e. l'amplitude et la direction associée) correctif à appliquer afin que la solution soit plastiquement admissible. La figure FIG.(4.7) nous apprend que sa composante non convergée est celle dirigée perpendiculairement à la direction σ_{k+1} ($\sigma_{k+1} = \sigma_{k+1}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$). Tandis qu'une prédiction élastique telle que $\text{Tr}[\sigma_{k+1} \cdot \delta\sigma_{e,d}] > 0$ conduit à une correction d'amplitude $\Delta_{\delta p} > 0$, une prédiction telle que $\text{Tr}[\sigma_{k+1} \cdot \delta\sigma_{e,d}] < 0$ est plastiquement admissible (i.e. $\Delta_{\delta p} = 0$). L'algorithme oscille entre ces deux situations.

En conclusion, la recherche, à chaque itération, d'un vecteur correctif présente

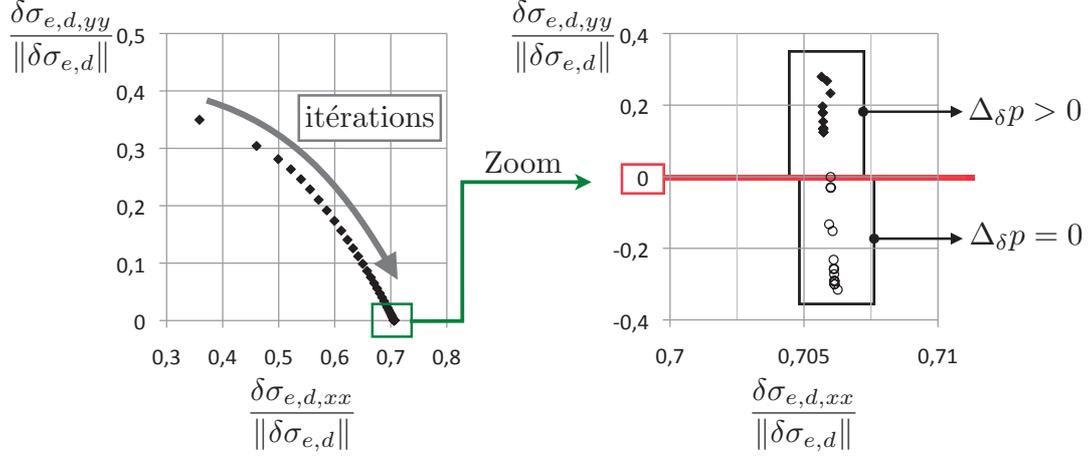


FIGURE 4.7: Évolution de la direction de la prédiction élastique au point de Gauss 5636 au fur et à mesure des itérations

des instabilité. Celles-ci sont localisées aux frontières du domaine élastique, soit dès que l'on travaille sur des corrections petites. De plus, la direction conduisant à cette perte de convergence est celle orthogonale à σ_{k+1} , ou $\sigma_{k+1,d}$ (puisque $\text{Tr}[\sigma_{k+1} \cdot \delta\sigma_{e,d}] = \text{Tr}[\sigma_{k+1,d} \cdot \delta\sigma_{e,d}]$).

3 Vers une réécriture du retour radial

La partie précédente a mis en avant des instabilités associées au schéma de résolution utilisé pour résoudre le problème miroir. Ces instabilités surviennent à la frontière des régimes élastiques et plastiques. Soit quand la solution δx est petite devant x_h , notée ici x . Soit :

$$\Delta_\delta x = o(\Delta x) \quad \text{et} \quad \delta x = o(x)$$

Fort de ce constat, on cherche tout d'abord à réécrire la loi d'évolution au premier ordre afin d'en dégager, dans un second temps, un algorithme de retour radial approprié.

3.1 Écriture de la loi d'évolution au premier ordre

On s'attache à réécrire au premier ordre la loi d'évolution, soit la loi de normalité ainsi que le seuil. De cette manière, on a :

$$\begin{aligned} \Delta_\delta \mathcal{E}_p &= (\Delta p + \Delta_\delta p) \frac{\sigma_{k+1,d} + \delta\sigma_{k,d}}{\|\sigma_{k+1,d} + \delta\sigma_{k,d}\|} - \Delta \mathcal{E}_p \\ &= \Delta p \left(\frac{\sigma_{k+1,d} + \delta\sigma_{k,d}}{\|\sigma_{k+1,d} + \delta\sigma_{k,d}\|} - \frac{\sigma_{k+1,d}}{\|\sigma_{k+1,d}\|} \right) + \Delta_\delta p \frac{\sigma_{k+1,d} + \delta\sigma_{k,d}}{\|\sigma_{k+1,d} + \delta\sigma_{k,d}\|} \end{aligned}$$

Ce qui devient, au premier ordre :

$$\Delta_\delta \varepsilon_p \sim \delta \mathbb{T}_{k,d} \Delta p + \Delta_\delta p \frac{\sigma_{k+1,d}}{\|\sigma_{k+1,d}\|}$$

où le terme $\delta \mathbb{T}_{k,d}$ représente la direction tangente à la contrainte $\sigma_{k+1,d}$.

Au premier ordre, le seuil f_δ s'écrit :

$$f_\delta \sim f_{k+1} + \frac{\text{Tr}[\sigma_{k+1,d} \cdot \delta \sigma_{k,d}]}{\|\sigma_{k,d}\|} - k \Delta_\delta p$$

Ainsi, au voisinage de la frontière d'élasticité, la composante de la déformation qui tient le rôle principal dans le calcul du seuil est celle parallèle à la contrainte issue du calcul éléments finis.

3.2 Proposition d'un retour radial dédié au problème miroir

Afin d'assurer une stabilité au schéma, nous proposons une réécriture du retour radial, adaptée au problème miroir. L'objectif est de le construire autour d'une direction de "retour" fixée. Or la direction intervenant le plus dans le calcul du seuil est colinéaire à la partie déviatorique de la contrainte du problème direct $\sigma_{k+1,d}$. On propose alors de prendre en compte la partie orthogonale à $\sigma_{k+1,d}$ de manière itérative. À cette fin, on réécrit une prédiction élastique telle que :

$$\delta \tilde{\sigma}_e = \delta \sigma_{k+1} + \mathbf{K}(\Delta_\delta \varepsilon - \delta \mathbb{T}_{k,d} \Delta p)$$

l'incrément de déformation plastique est dirigé de manière plus simple :

$$\tilde{\Delta}_\delta \varepsilon_p = \frac{\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{k,d}}{\|\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{k,d}\|} \Delta_\delta p$$

La composante $\delta \mathbb{T}_{k,d} \Delta p$ dépend de la solution $\delta \sigma_{k,d}$. Dans la pratique, $\delta \mathbb{T}_{k,d} \Delta p$ est pris en compte de manière incrémentale. La démarche proposée est résumée dans le nouvel algorithme de retour radial, illustré dans ALGO.(3).

De plus, la validité thermodynamique de la solution est assurée par ce schéma, car on a la propriété suivante :

$$\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{k,d} = \sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{e,d} - 2\mu \tilde{\Delta}_\delta \varepsilon_p$$

Ce qui nous apprend que $\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{e,d}$ est colinéaire à $\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{k,d}$ et $\tilde{\Delta}_\delta \varepsilon_p$. De cette manière, on peut écrire cette même équation sous forme de norme, comme $\Delta_\delta p \geq 0$:

$$\begin{aligned} \|\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{k,d}\| &= \|\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{e,d} - 2\mu \tilde{\Delta}_\delta \varepsilon_p\| \\ &= \|\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{e,d}\| - 2\mu \Delta_\delta p \\ &\leq \|\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{e,d}\| \end{aligned}$$

initialisation :

$$\begin{cases} \Delta_\delta u = 0, \text{ et } \delta\sigma_k = \delta\sigma_{k+1} \\ \text{Calcul du résidu d'équilibre } \delta r_{ref} \text{ en réponse à } \Delta_\delta \sigma_\Sigma, \delta r = \delta r_{ref} \end{cases}$$

tant que $\delta r > \text{coef}_{seuil} \cdot \delta r_{ref}$ **faire**

Résolution de l'étape globale : $\mathbf{K}_{EF} \cdot \delta_\delta u = -\delta r$

Actualisation du déplacement : $\Delta_\delta u = \Delta_\delta u + \delta_\delta u$

Calcul de l'incrément de déformation totale : $\Delta_\delta \varepsilon = \varepsilon(\Delta_\delta u) + \Delta_\delta \varepsilon_\Sigma$

Calcul du terme tangent : $\delta \mathbb{T}_{k,d} = \frac{\sigma_{k+1,d} + \delta\sigma_{k,d}}{\|\sigma_{k+1,d} + \delta\sigma_{k,d}\|} - \frac{\sigma_{k+1,d}}{\|\sigma_{k+1,d}\|}$

Calcul de la contrainte élastique associée :

$$\delta \tilde{\sigma}_e = \delta\sigma_{k+1} + \mathbf{K} (\Delta_\delta \varepsilon - \delta \mathbb{T}_{k,d} \Delta p)$$

si $\|\sigma_{k+1,d} + \delta \tilde{\sigma}_{e,d}\| - (R_{k+1} + \delta R_{k+1} + R_0) \leq 0$ **alors**

La solution élastique est plastiquement admissible

$$\delta p_k = \delta p_{k+1}, \delta \varepsilon_k = \delta \varepsilon_{k+1} + \Delta_\delta \varepsilon, \delta \sigma_k = \delta \tilde{\sigma}_e + \delta \mathbb{T}_{k,d}$$

sinon

La solution élastique est plastiquement non-admissible

Résolution de (Retour radial) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \Delta_\delta \varepsilon = \Delta_\delta \varepsilon_e + \Delta_\delta \varepsilon_p \\ \text{Tr} [\Delta_\delta \varepsilon_p] = 0 \\ \delta \sigma_k = \delta \sigma_{k+1} + \mathbf{K} \Delta_\delta \varepsilon_e \\ \|\sigma_{k+1,d} + \delta \sigma_{k,d}\| - (R_{k+1} + \delta R_{k+1} + k \Delta_\delta p + R_0) = 0 \\ \tilde{\Delta}_\delta \varepsilon_p = \Delta_\delta p \frac{\sigma_{d,k+1} + \delta \sigma_{k,d}}{R_{k+1} + \delta R_{k+1} + k \Delta_\delta p + R_0} \\ \Delta_\delta \varepsilon_p = \tilde{\Delta}_\delta \varepsilon_p + \delta \mathbb{T}_{k,d} \Delta p \end{array} \right] \\ \exists \Delta_\delta p > 0 \end{array} \right\}$$

fin

Post traitement : $\delta p_k = \delta p_{k+1} + \Delta_\delta p$ et $\delta R_k = \delta R_{k+1} + k \Delta_\delta p$

Calcul du nouveau résidu d'équilibre δr

fin

Algorithme 3: Nouvel algorithme de résolution du problème miroir, élasto-plastique incrémental et rétrograde

Ainsi, le seuil calculé avec la prédiction élastique $\delta\sigma_e$ prendra toujours une valeur supérieure au seuil pris par la solution finale. On est ainsi sûr de vérifier l'admissibilité plastique.

La figure FIG.(4.8) illustre l'évolution du résidu, associé au même problème que précédemment, mais résolu en utilisant l'approche dédiée du problème radial. La convergence est plus lente, mais on ne rencontre aucune instabilité.

Remarque 4.3 :

L'étude présentée ici est réduite à la résolution 3D du problème. Elle s'applique sans modification aux problèmes de déformations planes. Par contre, dans le cas particulier des contraintes planes, la démarche est similaire à celle adoptée dans la partie CHP.4-PART.2.1. La déformation totale est décomposée en deux parties : l'une image d'une contrainte plane par la loi d'état et l'autre, hors plan.

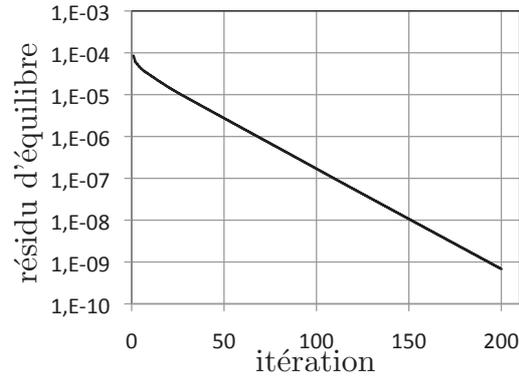


FIGURE 4.8: Évolution du résidu d'équilibre en fonction du nombre d'itérations

3.3 Illustration

On illustre ici la solution au problème miroir décrit dans la partie précédente. La figure FIG.(4.9) présente une carte de la contrainte équivalente de von Mises ainsi que de la déformation plastique cumulée à l'instant final associé au problème miroir ($t = 0$). Ces cartes mettent en avant le caractère local en espace de la solution du problème miroir. En effet, on constate un rapport de 10 entre les quantités au coeur de la zone d'intérêt et celles à l'extérieur.

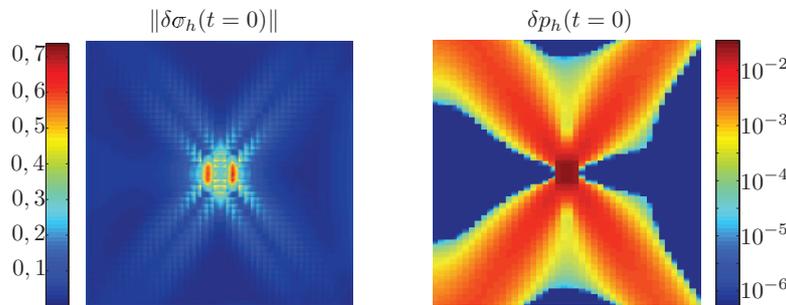


FIGURE 4.9: Carte de la contrainte équivalente de von Mises $\|\delta\sigma_{d,h}\|$ et de la déformation plastique cumulée δp_h à $t = 0$

La figure FIG.(4.10) localise trois points de Gauss différents : l'un est situé dans la zone d'intérêt (3875), les deux autres en sont éloignés : 2905 est dans une zone "perturbée" sous la zone d'intérêt et 3900 est dans une zone où le comportement miroir reste élastique sur $[0; T]$. Les figures FIG.(4.11) et FIG.(4.12) présentent la solution en déformation plastique cumulée et en contrainte en différents points de Gauss. Dans les deux cas, les courbes associées aux solutions x_h et $x_h + \delta x_h$ sont aussi représentées. Ces deux solutions vérifient par définition le comportement. Ces figures illustrent le rôle de perturbation que prend la solution du problème miroir sur

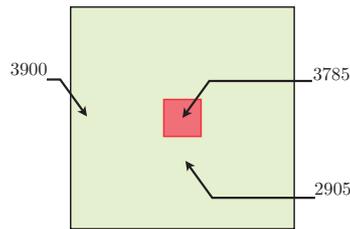


FIGURE 4.10: Localisation des points de Gauss 2905, 3875 et 3900

le problème de référence. Toutefois, on est, dans ce cas, à la limite de la perturbation. En effet, $\delta x_h > 10\%x_h$ au coeur de la zone d'intérêt.

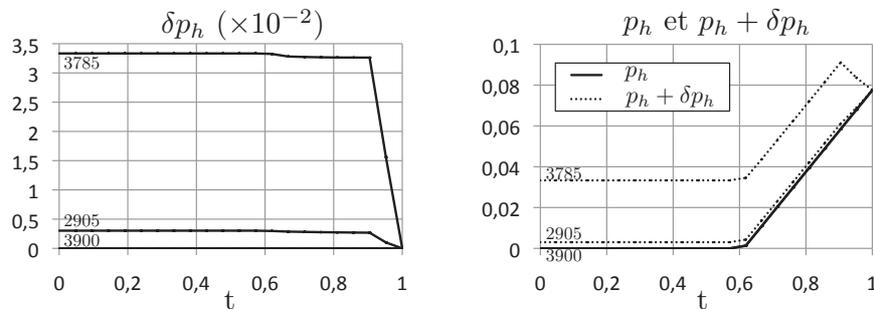


FIGURE 4.11: Déformation plastique cumulée aux points de Gauss 2905, 3875 et 3900

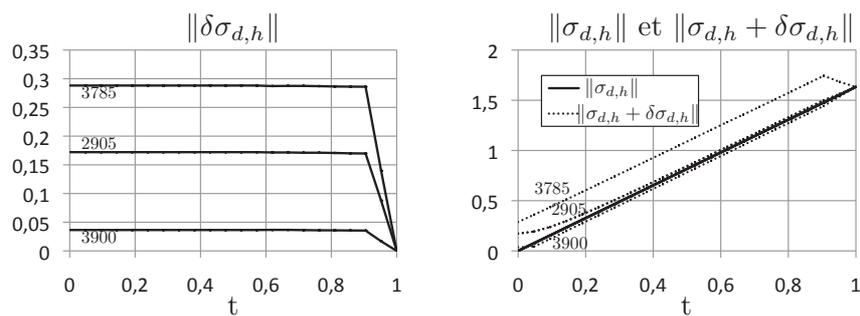


FIGURE 4.12: Contrainte équivalente de von Mises aux points de Gauss 2905, 3875 et 3900

Enfin, ces deux dernières figures mettent en avant le caractère évolutif local de la solution δx_h . En effet, son évolution a principalement lieu au sein de la fenêtre d'extraction.

4 Calcul d'une solution admissible $\delta\hat{x}_h$

La construction d'une solution admissible aux conditions aux limites du problème miroir $\delta\hat{x}_h$ se fait d'une manière analogue à celle du problème direct. Rappelons les définitions des espaces d'admissibilité :

$$\mathcal{E}_\Sigma^{ad} = \left\{ \delta e = \delta e_e + \delta e_p = \begin{bmatrix} \delta \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} \mid \delta \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_\Sigma = \varepsilon(\delta \underline{u}) \text{ avec } \delta \underline{u} \in \mathbf{U}_0^{ad} \right\}$$

$$\mathcal{J}_\Sigma^{ad} = \left\{ \delta s = \begin{bmatrix} \delta \sigma \\ \delta R \end{bmatrix} \mid \delta \sigma - \sigma_\Sigma \in \mathcal{S}_0^{ad} \text{ et } \delta R \geq 0 \right\}$$

Comme pour le problème direct, on peut retenir du calcul éléments finis la solution admissible en déformation totale $\delta\hat{\varepsilon}_h$. En effet, comme nous nous plaçons dans des problèmes de contraintes planes, la déformation hors plan est "libre". Cette liberté nous permet de respecter la contrainte d'incompressibilité de l'écoulement plastique (pour plus d'informations, voir CHP.2-PART.3.2).

La première étape est le calcul d'une contrainte admissible $\delta\hat{\sigma}_h$. On peut en déduire dans un second temps les valeurs des variables internes.

Enfin, l'étude présentée ici se réduit aux extracteurs $(\sigma_\Sigma, \dot{\varepsilon}_\Sigma)$ dont l'évolution temporelle est continue, affine par morceaux. De cette manière, une discrétisation affine par morceaux convient pour décrire les grandeurs admissibles. Dans la pratique, on calcul la valeur des champs à chaque piquet de temps et l'on pose leur évolution affine sur chaque intervalle.

4.1 Calcul d'une contrainte admissible $\delta\hat{\sigma}_h$

Par définition, la contrainte admissible est telle que $\delta\hat{\sigma}_h - \sigma_\Sigma$ soit statiquement admissible à zéro. Elle est construite de la même manière que pour le problème direct, mais, pour la simplification des calculs, on considère la contrainte $\tilde{\delta}\hat{\sigma}_h = \delta\hat{\sigma}_h - \sigma_\Sigma$ comme le prolongement de la différence $\tilde{\delta}\sigma_h = \delta\sigma_h - \sigma_\Sigma$. Ainsi, lors de la minimisation du problème global permettant de déterminer les densités d'efforts équilibrées aussi bien sur le plan élémentaire que global, on n'a pas à prendre en compte les extracteurs. Dans la pratique, les outils utilisés sont exactement les mêmes que ceux introduits pour la construction de la contrainte admissible du problème direct.

4.2 Calcul des variables internes

Connaissant les valeurs d'une déformation totale admissible $\delta\hat{\varepsilon}_h$ et d'une contrainte admissible $\delta\hat{\sigma}_h$ au problème miroir, on peut aisément en déduire la valeur de la déformation plastique admissible $\delta\hat{\varepsilon}_{p,h}$. En effet, la solution admissible $\delta\hat{x}_h$ vérifiant l'additivité des déformations et la loi d'état, on a :

$$\delta\hat{\varepsilon}_{p,h} = \delta\hat{\varepsilon}_h - \delta\hat{\varepsilon}_{e,h} = \delta\hat{\varepsilon}_h - \mathbf{K}(\delta\hat{\sigma}_h)$$

De la même manière, les grandeurs liées à l'écroissage satisfont aussi la loi d'état ; alors $\delta\hat{R}_h = k.\delta\hat{p}_h$. Il ne reste ainsi que l'une de ces deux variables à déterminer. Comme pour leur construction sur le problème direct, on va utiliser l'intégration de la loi d'évolution afin de déterminer \hat{p}_h . Ainsi, on a :

$$\dot{\hat{e}}_p - \delta\dot{\hat{e}}_p = (\dot{p} - \delta\dot{p}) \frac{\sigma_d + \delta\sigma_d}{\|\sigma_d + \delta\sigma_d\|} \text{ ou } \|\dot{\hat{e}}_p - \delta\dot{\hat{e}}_p\| = \dot{p} - \delta\dot{p} \quad \text{et} \quad \|\sigma_d + \delta\sigma_d\| \leq k(p + \delta p) + R_0$$

En intégrant chacune de ces relations, et en y introduisant δp_1 ou δp_2 ; on obtient :

$$\begin{aligned} \delta p_1 &= \delta\hat{p}_h(t_{k+1}) + (t_{k+1} - t_k)(\|\dot{\hat{e}}_p - \delta\dot{\hat{e}}_p\| - \dot{p}) \\ \delta p_2 &\geq \frac{\langle \|\sigma_d + \delta\sigma_d\| - (kp + R_0) \rangle_+}{k} \end{aligned}$$

Enfin, pour que la solution vérifie l'admissibilité thermodynamique il faut que $\delta\hat{p}(t_k)$ soit supérieur à δp_1 et δp_2 . Alors, on choisit :

$$\delta\hat{p}_h(t_k) = \sup \{ \delta p_1, \delta p_2 \}$$

5 Comportement de la solution en fonction du paramètre d'extraction

Jusqu'à maintenant, on a émis l'hypothèse que le problème miroir était un problème de perturbation. Mais le chargement de ce dernier étant entièrement défini par le couple d'extracteurs $(\sigma_\Sigma, \dot{\hat{e}}_\Sigma)$, il est directement lié à la quantité d'intérêt. Plus précisément, par construction, les extracteurs sont pondérés par une mesure du support de la quantité d'intérêt. Ceci a pour conséquence que plus la quantité d'intérêt est définie sur une petite zone, plus ses extracteurs prennent des valeurs élevées.

Afin de s'affranchir de cette dépendance à la mesure du support et de toujours pouvoir considérer le problème miroir comme un problème de perturbation, on peut introduire un paramètre d'extraction, noté λ_Σ . Il agit directement sur la définition de l'erreur :

$$\lambda_\Sigma \hat{e}_h(I) = \int_\Omega \int_0^T \left\{ \text{Tr} \left[\lambda_\Sigma \sigma_\Sigma \cdot (\dot{\hat{e}}_{ex} - \dot{\hat{e}}_h) + (\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \cdot \lambda_\Sigma \dot{\hat{e}}_\Sigma \right] \right\} dt dV \quad (4.5)$$

Maintenant, le problème miroir est construit autour du couple d'extraction $(\lambda_\Sigma \sigma_\Sigma, \lambda_\Sigma \dot{\hat{e}}_\Sigma)$. De cette manière, on peut toujours considérer le problème miroir comme un problème de perturbation en choisissant le paramètre d'extraction λ_Σ adéquat.

La figure FIG.(4.13) présente la contrainte équivalente de von Mises $\|\sigma_{d,h} + \delta\sigma_{d,h}\|$ de différentes solutions satisfaisant le comportement associé à différents paramètres d'extraction au point de Gauss 3875.

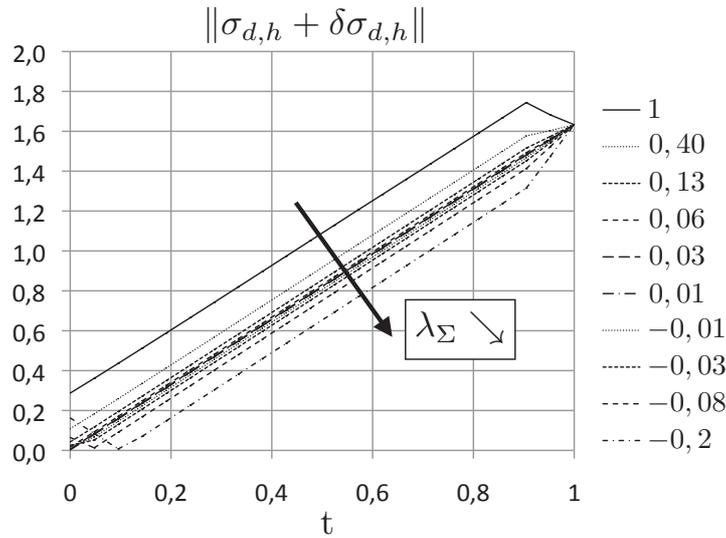


FIGURE 4.13: Évolution de la contrainte équivalente de von Mises $\|\sigma_{d,h} + \delta\sigma_{d,h}\|$ au point de Gauss 3875 pour différents points de Gauss

Afin d'obtenir une courbe plus interprétable, on trace sur la figure FIG.(4.14) l'évolution en fonction du paramètre d'extraction λ_Σ le rapport suivant :

$$\frac{\delta p_{h|t=0}(\lambda_\Sigma)}{\lambda_\Sigma \cdot \delta p_{h|t=0}(\lambda_\Sigma = 1)}$$

On a retenu la valeur à l'instant final car c'est la plus grande et la plus représentative de l'histoire de la solution miroir sur $[0; T]$. L'évolution de ce rapport est présentée en différents points de Gauss : 2905, 3975 et 3900, et pour des paramètres d'extraction négatifs comme positifs. Dans le cas où $\lambda_\Sigma < 0$, la déformation plastique cumulée associée au problème miroir au sein de la zone d'intérêt est constamment nulle du fait que sous ce chargement, celle-ci subit un déchargement, et la solution $x_h + \delta x_h$ passe alors en régime élastique.

On peut retenir de cette étude que la solution du problème miroir peut appartenir à deux types différents. Soit elle ressemble à une réponse de type linéaire, dans le cas où le paramètre d'extraction est petit ($|\lambda_\Sigma| \leq 10^{-2}$ dans le cas présenté), soit elle est non-linéaire, et dépend alors énormément de l'état de la solution du problème direct ($|\lambda_\Sigma| > 10^{-2}$ dans notre cas). Ces différences de régime s'expliquent simplement du fait que quand le chargement du problème miroir est petit (soit λ_Σ petit), alors le comportement est dicté par le premier ordre qui lui est linéaire.

Enfin, avec l'introduction de ce paramètre d'extraction, l'encadrement ne se fait plus sur la quantité $\hat{e}_h(I)$, mais sur le produit $\lambda_\Sigma \hat{e}_h(I)$. Toutefois, il reste en tout point identique à celui proposé dans le chapitre CHP.3.

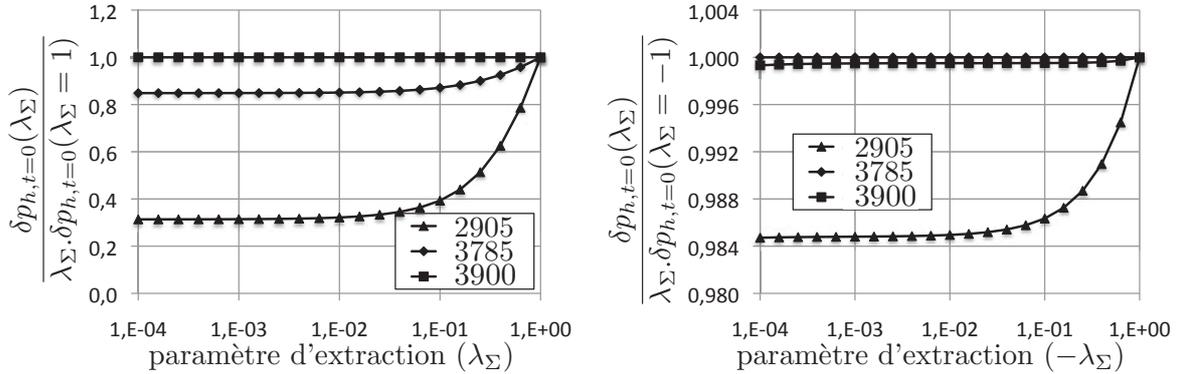


FIGURE 4.14: Évolution de $\frac{\delta p_{h,t=0}(\lambda_\Sigma)}{\lambda_\Sigma \cdot \delta p_{h,t=0}(\lambda_\Sigma = 1)}$ en fonction du paramètre d'extraction

6 Bilan

Nous avons proposé dans cette partie différents outils permettant de mener à bien le calcul du problème miroir. Dans un premier temps, une technique de projection a été présentée afin de pouvoir poser le problème miroir sur un maillage plus fin que le problème direct. Dans un second temps, l'algorithme de résolution du problème incrémental a été revisité afin d'assurer la convergence de la résolution numérique du problème miroir, tout en satisfaisant l'admissibilité plastique de la solution. Enfin, un paramètre d'extraction a été introduit, afin d'assurer l'aspect perturbation au problème miroir. En effet, cette propriété est nécessaire pour obtenir des bornes pertinentes.

Nous maîtrisons une approche de résolution du problème miroir fiable. Il est donc possible de connaître, avec une précision voulue, une solution δx_h satisfaisant le comportement miroir et une autre $\delta \hat{x}_h$, vérifiant les conditions d'admissibilité cinématique et statique associées à ce même problème.

Chapitre 5

Calcul de l'erreur locale

Ce chapitre s'intéresse au calcul d'un encadrement de l'erreur sur une quantité d'intérêt. En effet, on a vu au chapitre CHP.3 que le calcul des bornes fait apparaître un nouveau problème, dit problème central. On s'applique dans ce chapitre à la résolution de ce problème. La première partie s'intéresse à la mise en pratique d'une méthode classique issue de l'analyse des problèmes de complémentarité linéaire. Dans la seconde, une méthode dédiée, dite "géométrique" est proposée.

Enfin, une analyse du comportement quadratique des bornes permet d'avancer une technique d'obtention de ses paramètres optimaux.

Sommaire

1	Rappel : définition du problème central	109
2	Un problème de complémentarité linéaire	110
2.1	Écriture matricielle du problème	110
2.2	Résolution	111
3	Proposition d'une méthode de résolution dédiée	113
3.1	Établissement d'équations locales	113
3.2	Une résolution géométrique	115
3.3	Illustration	116

3.4	Conséquences de la discrétisation de \dot{p} sur le calcul des bornes	119
4	Calcul du α optimal	120
4.1	Comportement quadratique des bornes	121
4.2	Calcul de α_{opti}	121
5	Bilan	121

1 Rappel : définition du problème central

La définition du problème central donnée ici est identique à celle détaillée dans le chapitre CHP.3. On rappelle succinctement son cadre associé au calcul d'un encadrement de l'erreur $\hat{e}_h(I)$:

$$\sup_{\alpha^- \in \mathfrak{R}^{*-}} \left\{ \frac{1}{\alpha^-} \int_{\Omega} \{g_{\hat{x}_h}^*(\alpha^- \cdot \delta \hat{x}_h)\} dV \right\} \leq \hat{e}_h(I) \leq \inf_{\alpha^+ \in \mathfrak{R}^{*+}} \left\{ \frac{1}{\alpha^+} \int_{\Omega} \{g_{\hat{x}_h}^*(\alpha^+ \cdot \delta \hat{x}_h)\} dV \right\} \quad (5.1)$$

avec la fonction $g_{\hat{x}_h}^*$ définie telle que :

$$g_{\hat{x}_h}^*(\alpha \delta \hat{x}_h) = - \int_0^T \{ \ell_{[\alpha \delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}(\bar{R}, \dot{p}) \} dt$$

$\ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}$ est détaillée dans le chapitre CHP.3. Par contre, le calcul de la solution \bar{x} , faisant intervenir le problème dit central est l'objet de ce chapitre :

$$(\bar{R}, \dot{p}) = \underset{\substack{p^*(t=0) = 0 \\ R^* = k \cdot p^* \geq 0 \\ \dot{p}^* \geq 0}}{\text{Argmin}} \left\{ \int_0^T \left\{ \frac{T-t}{T} [\Delta R^* \Delta p^* + \mathcal{R}_h \Delta p^* + \Delta R^* \dot{P}_h] \right\} dt \right\} \quad (5.2)$$

où les quantités $\Delta \square$ représentent des différences :

$$\Delta x^* = x^* - x_h \quad \text{et} \quad \Delta x_h = \hat{x}_h - x_h$$

et les champs \mathcal{R}_h et \dot{P}_h sont connus et définis tels que :

$$\mathcal{R}_h = R_h + R_0 - \|\sigma_{d,h}\| - P_{\sigma_h} \{ \Delta \sigma_h \} - \frac{\alpha T}{T-t} P_{\sigma_h} \{ \delta \hat{\sigma}_{d,h} \} \quad (5.3)$$

$$\dot{P}_h = -P_{\sigma_h} \{ \Delta \dot{\hat{\varepsilon}}_{p,h} \} - \frac{\alpha T}{T-t} P_{\sigma_h} \{ \delta \dot{\hat{\varepsilon}}_{p,h} \} - \frac{(\Delta \|\sigma_{d,h}\|)^2 - \|\Delta \sigma_{d,h}\|^2}{4\mu(T-t)\|\sigma_{d,h}\|} \quad (5.4)$$

À partir des propriétés des différents champs solutions x_h , \hat{x}_h et $\delta \hat{x}_h$, détaillons celles dont \mathcal{R}_h et \dot{P}_h héritent afin de leur donner une description de dimension finie :

- Intéressons-nous tout d'abord à \mathcal{R}_h . Les quatre premiers termes qui le composent sont tous continus, mais en plus affines par morceaux. Le dernier est le quotient d'une fonction continue et affine par morceaux, $\delta \hat{\sigma}_h$, et d'une fonction affine $T-t$. Dans la pratique, on choisit la représentation classique continue, affine par morceaux pour décrire \mathcal{R}_h . Son dernier terme est alors approché.
- Par contre, compte tenu des sauts des grandeurs en vitesses composant \dot{P}_h , on le choisit uniquement affine par morceaux, autorisant des sauts aux piquets de temps.

2 Un problème de complémentarité linéaire

2.1 Écriture matricielle du problème

L'écriture matricielle du problème central consiste en une écriture discrète de celui-ci. À cette fin, on réduit l'espace de définition de $\Delta\dot{p}^*$ à l'ensemble des fonctions continues, affines par morceaux. En notant $\Delta\dot{p}_i^*$ les valeurs prises par $\Delta\dot{p}^*$ à chaque piquet de temps $t_i \in [0; T]$ et $\varphi_i(t)$ les fonctions chapeaux classiques définies sur chaque intervalle $[t_{i-1}; t_{i+1}]$, on a :

$$\Delta\dot{p}^* = \sum_{i=1}^{N_t} \Delta\dot{p}_i^* \varphi_i(t)$$

On peut intégrer cette relation pour définir Δp^* , définition qui prendra alors intrinsèquement en compte la condition $\Delta p^*(t=0) = 0$:

$$\Delta p^* = \sum_{i=1}^{N_t} \Delta\dot{p}_i^* \int_0^t \{\varphi_i(\tau)\} d\tau = \sum_{i=1}^{N_t} \Delta\dot{p}_i^* \phi_i(t) \quad \text{avec } \phi_i(t) = \int_0^t \{\varphi_i(\tau)\} d\tau$$

De plus, on introduit les vecteurs de dimension N_t , $\underline{\Delta\dot{P}^*}$, $\underline{\varphi}(t)$ et $\underline{\phi}(t)$, dont chaque $i^{\text{ème}}$ composante est $\Delta\dot{p}_i^*$, $\varphi_i(t)$ et $\phi_i(t)$. Alors, on a :

$$\Delta\dot{p}^* = {}^t(\underline{\Delta\dot{P}^*})\underline{\varphi}(t) \quad \text{et} \quad \Delta p^* = {}^t(\underline{\Delta\dot{P}^*})\underline{\phi}(t)$$

Enfin, en utilisant la même base, on peut définir le vecteur $\underline{\dot{P}}$, dont chaque composante représente la valeur de \dot{p} à chaque piquet de temps.

Par définition de la discrétisation adoptée, \mathcal{R}_h et \mathcal{P}_h peuvent se mettre sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_h &= \sum_{i=1}^{N_t} \mathcal{R}_h(t_i) \varphi(t) = {}^t\underline{\mathcal{R}_h} \cdot \underline{\varphi}(t) \\ \dot{\mathcal{P}}_h &= \sum_{i=1}^{N_t} \left\{ \dot{\mathcal{P}}_h^c(t_i) \varphi_i(t_i) + \dot{\mathcal{P}}_h^h(t_i) \dot{\varphi}_i(t_i) \right\} = {}^t\underline{\dot{\mathcal{P}}_h^c} \cdot \underline{\varphi}(t) + {}^t\underline{\dot{\mathcal{P}}_h^h} \cdot \underline{\dot{\varphi}}(t) \end{aligned}$$

où on a décomposé $\dot{\mathcal{P}}_h$ en sa partie continue $\dot{\mathcal{P}}_h^c$ et sa partie constante par morceaux $\dot{\mathcal{P}}_h^h$. Avec ce formalisme, le terme sous l'intégral du problème central devient :

$$\frac{T-t}{T} \left[k \cdot {}^t \left[\underline{\phi}, \underline{\Delta\dot{P}^*} \right] \left[{}^t \underline{\varphi}, \underline{\Delta\dot{P}^*} \right] + {}^t \left[\underline{\varphi}, \underline{\mathcal{R}_h} \right] \left[{}^t \underline{\varphi}, \underline{\Delta\dot{P}^*} \right] + {}^t \left[\underline{\varphi}, \underline{\dot{\mathcal{P}}_h^c} + \underline{\dot{\varphi}}, \underline{\dot{\mathcal{P}}_h^h} \right] \left[k {}^t \underline{\phi}, \underline{\Delta\dot{P}^*} \right] \right]$$

On introduit la matrice \mathbb{M} et le vecteur ${}^t\underline{N}$ de dimension respective $N_t \times N_t$ et N_t , où N_t est le nombre de piquets de temps. Ils sont définis tels que :

$$\begin{aligned} \mathbb{M} &= \int_0^T \left\{ \frac{T-t}{T} \left[k \cdot \underline{\phi}, {}^t \underline{\varphi} \right] \right\} dt \\ {}^t\underline{N} &= \int_0^T \left\{ \frac{T-t}{T} \left[{}^t \underline{\mathcal{R}_h} \left[\underline{\varphi}, {}^t \underline{\varphi} \right] + k \left({}^t \underline{\dot{\mathcal{P}}_h^c} \left[\underline{\varphi}, {}^t \underline{\phi} \right] + {}^t \underline{\dot{\mathcal{P}}_h^h} \left[\underline{\dot{\varphi}}, {}^t \underline{\phi} \right] \right) \right] \right\} dt \end{aligned}$$

Le problème central s'écrit, en utilisant ces notations :

$$\underline{\Delta\dot{P}} = \underset{\dot{P}^* \geq 0}{\text{Argmin}} \left\{ {}^t \underline{\Delta\dot{P}} \mathbb{M} \underline{\Delta\dot{P}} + {}^t \underline{N} \cdot \underline{\Delta\dot{P}} \right\}$$

2.2 Résolution

2.2.1 Écriture de la stationnarité

On note Γ la valeur atteinte au minimum. Alors, on a :

$$\Gamma = {}^t \underline{\Delta\dot{P}} \mathbb{M} \underline{\Delta\dot{P}} + {}^t \underline{N} \cdot \underline{\Delta\dot{P}}$$

La stationnarité de la fonctionnelle autour de ce minimum donne :

$$\begin{aligned} d\Gamma &= {}^t d\underline{\dot{P}} \mathbb{M} \underline{\Delta\dot{P}} + {}^t \underline{\Delta\dot{P}} \mathbb{M} d\underline{\dot{P}} + {}^t \underline{N} \cdot d\underline{\dot{P}} \\ &= {}^t d\underline{\dot{P}} \left[({}^t \mathbb{M} + \mathbb{M}) \underline{\Delta\dot{P}} + \underline{N} \right] \end{aligned}$$

$\underline{\dot{P}}$ étant la solution au minimum, on a nécessairement $d\Gamma \geq 0$. L'équation ci-dessus étant vérifiée quel que soit $d\underline{\dot{P}}$, on peut en déduire les conditions suivantes, dites de Kuhn-Tucker :

$$\begin{cases} \underline{\dot{P}} \geq 0 \\ ({}^t \mathbb{M} + \mathbb{M}) \underline{\Delta\dot{P}} + \underline{N} \geq 0 \\ {}^t \underline{\dot{P}} \cdot \left[({}^t \mathbb{M} + \mathbb{M}) \underline{\Delta\dot{P}} + \underline{N} \right] = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

2.2.2 Résolution du problème

Le problème de complémentarité linéaire EQ.(5.5) introduit peut être résolu en utilisant un algorithme classique de type LEMKE, ${}^t \mathbb{M} + \mathbb{M}$ étant symétrique. On construit alors une procédure calculant \mathbb{M} une fois pour toutes, et bouclant ensuite sur les points de Gauss afin de résoudre chaque problème local. La méthode proposée est ainsi hautement parallélisable.

Afin d'illustrer cette méthode, on s'intéresse au quart de plaque en traction, cas identique à celui utilisé pour illustrer le problème miroir, au chapitre CHP.4. On s'affranchit ici du paramètre d'extraction ($\lambda_\Sigma = 1$). La figure FIG.(5.1) illustre la solution \bar{p} en différents points de Gauss pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 0, 1$. La figure FIG.(5.2) présente la différence $\Delta\bar{p}$ pour les mêmes α .

Par définition, le coefficient α vient pondérer la solution admissible du problème miroir $\delta\hat{x}_h$ dans le calcul de la borne (cf équations EQ.(5.3) et EQ.(5.4)). Cette solution présente des aspects locaux en temps, autour de la zone d'extraction ($[0, 9048.T; T]$ ici). On retrouve sur les courbes FIG.(5.1) et FIG.(5.2) la perturbation issue du problème miroir et on peut remarquer que l'amplitude de son influence est liée au paramètre α .

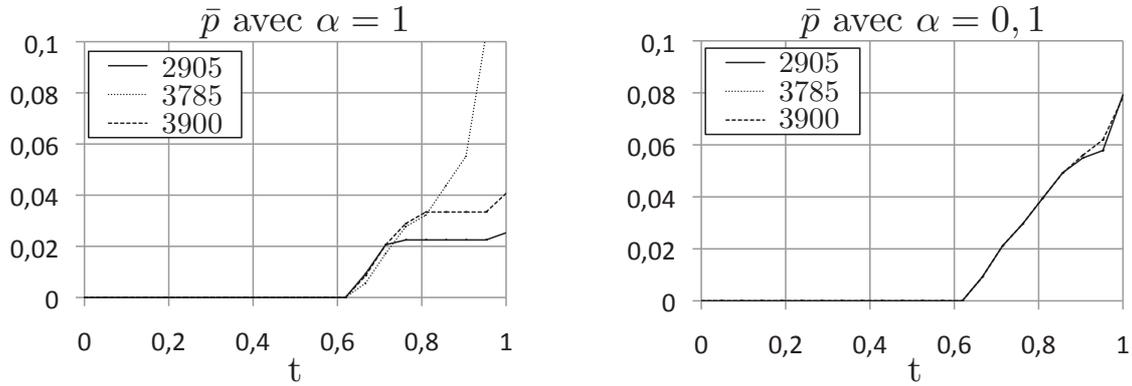


FIGURE 5.1: Solution \bar{p} du problème central, pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 0, 1$

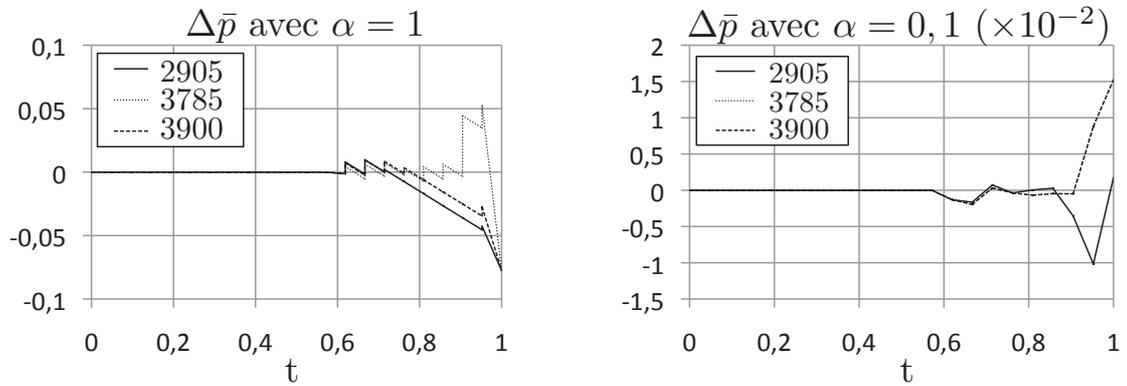


FIGURE 5.2: Différence $\Delta\bar{p} = p_h - \bar{p}$, pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 0, 1$

On s'intéresse maintenant à la pertinence de cette méthode de résolution. Pour cela, on enrichit l'espace de définition de \dot{p} : chaque intervalle de temps est divisé en n sous intervalles. Les solutions x_h , \hat{x}_h et $\delta\hat{x}_h$ sont projetées sur ce nouveau maillage. La figure FIG.(5.3) représente l'évolution de la valeur que prend le terme de courbure $\ell_{[\alpha\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(\bar{R}, \dot{p})$ sur le minimum en fonction du nombre de subdivisions de la discrétisation temporelle originale.

Ces courbes mettent en avant un premier point. Quand la discrétisation utilisée pour résoudre le problème central est grossière, on sous-estime la valeur prise par la fonctionnelle $\ell_{[\alpha\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(\bar{R}, \dot{p})$ aux points de Gauss y apportant la plus grosse contribution. Ceux-ci sont ceux au sein de la zone d'intérêt (comme le point 3785 ici). À l'opposé, aux points de Gauss éloignés de la zone d'intérêt, la valeur prise par $\ell_{[\alpha\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(\bar{R}, \dot{p})$ dépend peu de la qualité du maillage support de la résolution du problème central.

On constate aussi que ces propriétés sont indépendantes de α .

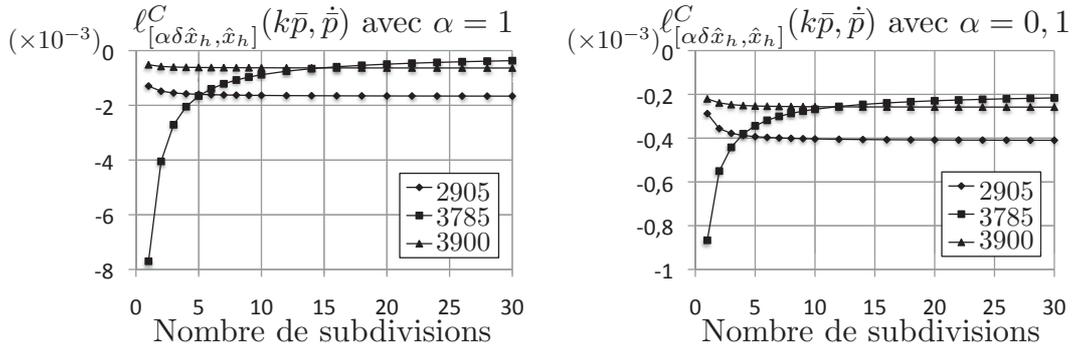


FIGURE 5.3: Évolution de $\ell_{[\alpha\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(\bar{R}, \dot{\bar{p}})$ en fonction du nombre de subdivision du maillage temporel initial

Remarque 5.1 :

Pour avoir un ordre de grandeur des coûts de calcul mis en jeu, résoudre ce problème sur une structure contenant 10 000 points de Gauss et où l'évolution est représentée par 200 piquets de temps, demande 1h30 (pour cette résolution, le travail a été dispatché sur 250 processeurs).

Remarque 5.2 :

Pour plus d'informations sur les outils d'optimisation liés aux problèmes de complémentarité linéaire, voir [Cottle et al., 2009].

Remarque 5.3 :

L'algorithme LEMKE utilisé est une fonction issue d'une "toolbox" matlab, disponible sur le site de l'éditeur. Aucun travail d'optimisation ou d'implémentation d'un solveur dédié au problème central n'a été réalisé pour résoudre le problème matriciel.

3 Proposition d'une méthode de résolution dédiée

La méthode décrite au paragraphe précédent permet certes d'utiliser des outils classiques mais sa mise en oeuvre pour résoudre le problème central demande un coût exorbitant. Afin de réduire celui-ci, on propose dans cette section une méthode dédiée, introduite dans [Ladevèze, 2008a]. Elle est dite géométrique en vertu de l'utilisation des propriétés de convexité liées à la solution \bar{x} .

3.1 Établissement d'équations locales

L'objet de cette partie est d'établir des équations locales que vérifie la solution du problème de minimisation. Pour cela, on pose Γ la valeur atteinte au minimum,

associée à la solution \bar{x} . Effectuons quelques manipulations sur cette quantité :

$$\begin{aligned}\Gamma &= \int_0^T \left\{ \frac{T-t}{T} \left[\Delta \bar{R} \Delta \dot{\bar{p}} + \mathcal{R}_h \Delta \dot{\bar{p}} + \Delta R \dot{\mathcal{P}}_h \right] \right\} dt \\ &= \int_0^T \left\{ \int_0^t \left\{ \Delta \bar{R} \Delta \dot{\bar{p}} \right\} \frac{d\tau}{T} + \frac{T-t}{T} \left[\mathcal{R}_h \Delta \dot{\bar{p}} + \Delta \bar{R} \dot{\mathcal{P}}_h \right] \right\} dt \\ &= \int_0^T \left\{ \frac{1}{2T} k (\Delta \bar{p})^2 + \frac{T-t}{T} \left[\mathcal{R}_h \Delta \dot{\bar{p}} + k \cdot \Delta \bar{p} \dot{\mathcal{P}}_h \right] \right\} dt\end{aligned}$$

Maintenant, on écrit la stationnarité de cette quantité au voisinage de la solution :

$$\begin{aligned}d\Gamma &= \int_0^T \left\{ k (\Delta \bar{p} d\bar{p}) + (T-t) \left[\mathcal{R}_h d\dot{\bar{p}} + k d\bar{p} \dot{\mathcal{P}}_h \right] \right\} \frac{dt}{T} \\ &= \int_0^T \left\{ k \left[\Delta \bar{p} + (T-t) \dot{\mathcal{P}}_h \right] d\bar{p} + (T-t) \mathcal{R}_h d\dot{\bar{p}} \right\} \frac{dt}{T} \\ &= \int_0^T \left\{ \left[k \int_t^T \left\{ \Delta \bar{p} + (T-\tau) \dot{\mathcal{P}}_h \right\} d\tau + (T-t) \mathcal{R}_h \right] d\dot{\bar{p}} \right\} \frac{dt}{T}\end{aligned}$$

Afin de simplifier l'écriture des équations locales, on peut introduire la quantité \mathcal{Z}_h telle que :

$$\mathcal{Z}_h = k \int_t^T \left\{ p_h - (T-\tau) \dot{\mathcal{P}}_h \right\} d\tau - (T-t) \mathcal{R}_h$$

Alors,

$$d\Gamma = \int_0^T \left\{ \left[k \int_0^t \left\{ \bar{p} \right\} \frac{d\tau}{T} - \mathcal{Z}_h \right] d\dot{\bar{p}} \right\} \frac{dt}{T}$$

La solution \bar{x} étant celle minimisant la fonctionnelle, une petite variation autour de celle-ci conduit forcément à une valeur positive de la fonctionnelle. Soit, $\forall d\dot{\bar{p}}, d\Gamma \geq 0$. On peut alors en déduire les deux lois suivantes :

– la définition d'un "seuil" :

$$\bar{f} = k \int_t^T \left\{ \bar{p} \right\} \frac{d\tau}{T} - \mathcal{Z}_h \geq 0$$

– une loi de normalité :

$$\dot{\bar{p}} \cdot \bar{f} = 0$$

Ainsi, associée aux conditions portant sur la solution \bar{x} , on peut reposer le problème central sous la forme :

Trouver \bar{p} défini sur $[0; T]$ tel que :

$$\begin{cases} \bar{p}(t=0) = 0 \\ \dot{\bar{p}} \geq 0 \\ \bar{f} = k \int_t^T \left\{ \bar{p} \right\} \frac{d\tau}{T} - \mathcal{Z}_h \geq 0 \\ \dot{\bar{p}} \cdot \bar{f} = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Remarque 5.4 :

On retrouve un problème faisant intervenir une fonction croissante (\bar{p}), à valeur initiale nulle, satisfaisant un seuil et une loi de normalité. Le problème central ainsi posé ressemble à un problème classique de plasticité. Mais le calcul du seuil \bar{f} à un instant t , nécessitant la connaissance des valeurs des différentes grandeurs du problème sur tout l'intervalle $[t; T]$, ne permet pas d'envisager une approche incrémentale.

3.2 Une résolution géométrique

L'idée de l'écriture de l'approche géométrique vient des propriétés qui découlent des différentes solutions et fonctions caractérisant les équations locales. À cette fin, on introduit \bar{P} , la primitive de \bar{p} s'annulant à $t = T$:

$$\bar{P} = \int_t^T \{\bar{p}\} \frac{d\tau}{T}$$

\bar{P} satisfait les propriétés suivantes :

- \bar{P} prend une valeur nulle à l'instant final. La fonctionnelle \mathcal{Z}_h s'annule elle aussi en $t = T$. De cette manière, on a $k \cdot \bar{P}(t = T) = \mathcal{Z}_h(t = T)$;
- le seuil \bar{f} est positif ou nul. On a donc $k \cdot \bar{P} \geq \mathcal{Z}_h$.
- la solution \bar{p} représente une déformation plastique cumulée. Elle est donc par essence croissante. Ainsi, sa primitive s'annulant à l'instant final est une fonction convexe : \bar{P} convexe ;
- \bar{p} doit vérifier une condition initiale nulle. Ainsi, on a $\bar{p}(t = 0) = 0$. La pente de \bar{P} est donc nulle à l'instant initial ; soit $\frac{\partial}{\partial t} [\bar{P}] (t = 0) = 0$.

L'approche géométrique consiste en une démarche dont l'objet est la détermination de \bar{P} sur $[0; T]$. La figure FIG.(5.4) illustre cette démarche. En représentant l'évolution de \mathcal{Z}_h sur l'intervalle de temps $[0; T]$, on peut directement en déduire \bar{P} . En effet, l'enveloppe convexe de \mathcal{Z}_h vérifie toutes les propriétés énoncées ci-dessus.

En particulier, la loi de normalité $\dot{\bar{p}} \cdot \bar{f} = 0$ est vérifiée et apporte la définition de l'évolution de \bar{P} . Différentions les deux régimes associés à cette loi de normalité et leur conséquence sur la construction de \bar{P} :

- $\dot{\bar{p}} = 0$; alors $\bar{f} = k\bar{P} - \mathcal{Z}_h \geq 0$. De cette manière, la courbe $k\bar{P}$ est au dessus de \mathcal{Z}_h . Mais de plus, comme $\dot{\bar{p}} = 0$, \bar{P} est affine.
- $\dot{\bar{p}} > 0$; alors $\bar{f} = k\bar{P} - \mathcal{Z}_h = 0$, soit $\bar{P} = \frac{\mathcal{Z}_h}{k}$.

Une fois \bar{P} déterminé, on en déduit \bar{p} par dérivation. Afin de minimiser les erreurs numériques, on adopte deux calculs différents en fonction du régime de la solution. Si $\bar{f} = 0$, on peut directement dériver \mathcal{Z}_h ; sinon on a \bar{p} qui prend une valeur constante (i.e. \bar{P} affine). Avec cette écriture, \bar{p} peut être décrit comme la somme d'une fonction continue, affine par morceaux, \bar{p}^c et d'une fonction constante par morceaux \bar{p}^h .

$$\bar{p} = \bar{p}^c + \bar{p}^h$$

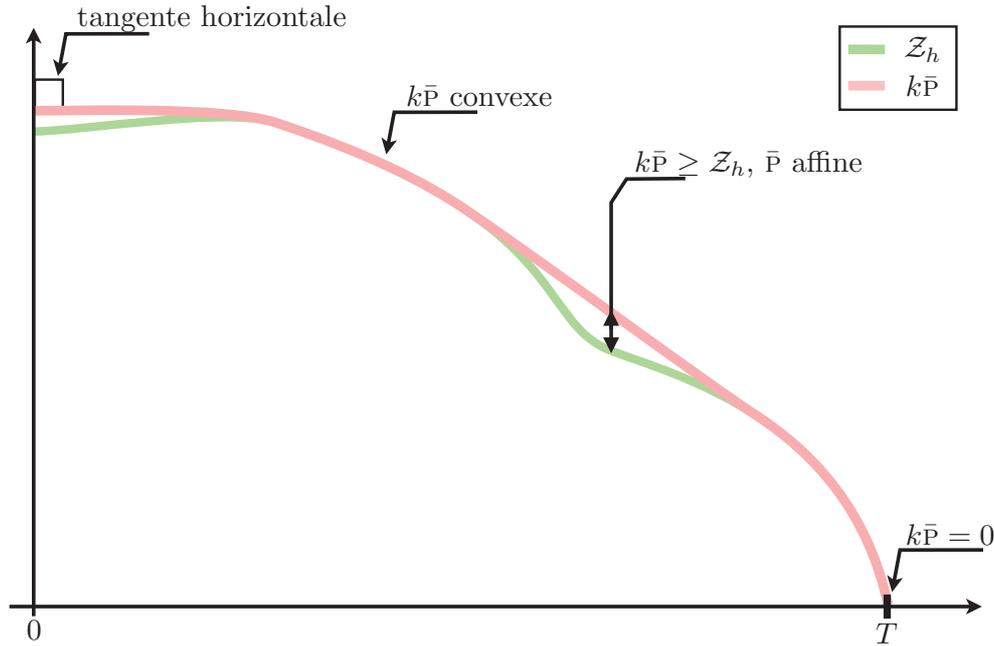


FIGURE 5.4: Illustration de l'utilisation de l'approche géométrique

Cette approche permet de trouver la solution du problème central en une opération. Associée à sa facilité d'implémentation, elle offre des résultats équivalents à ceux de la méthode "classique".

Remarque 5.5 :

L'aire entre les deux courbes $\mathcal{A} = \int_t^T \{k \cdot \bar{p}\} \frac{d\tau}{T} - Z_h$ donne une première idée de l'ordre de grandeur de l'erreur. En effet, au premier ordre, $Z_h = \int_t^T \{k \cdot p_h\} \frac{d\tau}{T}$. L'aire entre les deux courbes caractérise ainsi la distance entre les solutions \bar{p} et p_h . Or l'écriture du problème central donnée EQ.(5.2) met en avant le lien entre la valeur prise au minimum et la différence $\Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_h$.

3.3 Illustration

L'exemple support de ce paragraphe est toujours le même. Il s'agit du quart de plaque soumis à des efforts de traction. La quantité d'intérêt a pour support une zone centrale de 4×4 éléments et sa fenêtre d'étude est $[0, 9048s; 1s]$. Le paramètre d'extraction est pris égal à l'unité, soit $\lambda_\Sigma = 1$. La figure FIG.(5.5) présente la mise en oeuvre de l'approche géométrique en différents points de Gauss et pour différents paramètres α .

Les solutions \bar{p} issues de l'approche matricielle et de l'approche géométrique sont visuellement similaires, comme le met en avant la figure FIG.(5.6). Afin d'étendre les propriétés que vérifie la méthode de résolution matricielle à la nouvelle, géométrique, on compare leur solution respective \bar{p}_{AM} et \bar{p}_{AG} . On introduit alors l'erreur relative

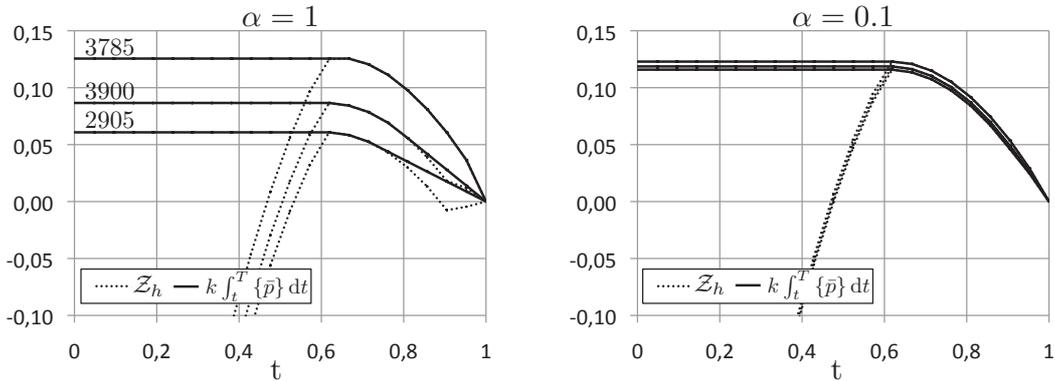


FIGURE 5.5: Illustration de l'approche géométrique en différents points de Gauss (2905, 3785 et 3900) et différents paramètres α

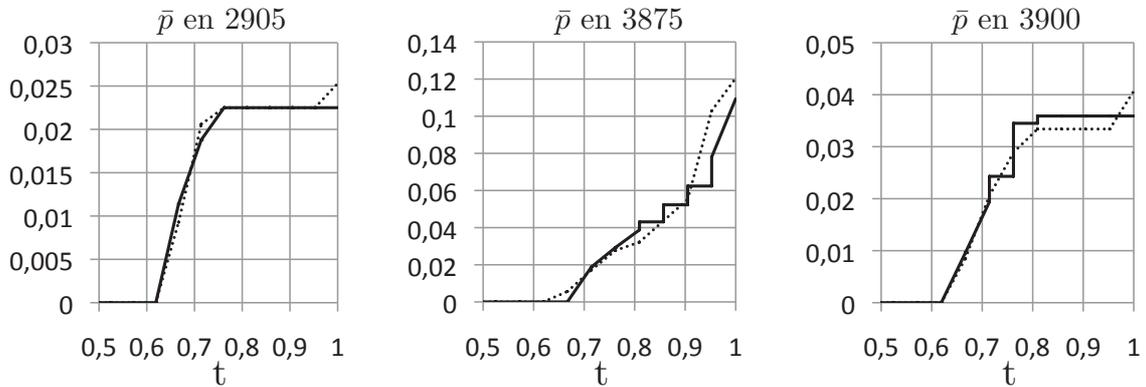


FIGURE 5.6: Comparaison de \bar{p} obtenue avec l'approche géométrique (traits continus) et l'approche matricielle (traits en pointillés) en différents points de Gauss ($\alpha = 1$)

suivante :

$$\epsilon_{AM-AG}(\bar{p}) = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} \int_0^T \{(\bar{p}_{AG} - \bar{p}_{AM})^2\} dt dV}}{\int_{\Omega} \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}(\bar{p}_{AG} + \bar{p}_{AM}) \right\} dt dV}$$

La courbe FIG.(5.7) présente l'évolution de cette erreur, en fonction d'une augmentation de la discrétisation temporelle.

D'un autre côté, le tableau TAB.(5.1) présente le temps que nécessite chacune des approches, matricielle ou géométrique, pour résoudre le problème central. Le rapport entre le temps demandé par l'approche géométrique et celui par l'approche matricielle est noté gain. Même sur la discrétisation initiale, la mise en oeuvre de l'approche géométrique nécessite moins du tiers de temps. Comme le montre la figure FIG.(5.8), ce gain explose avec la surdiscrétisation.

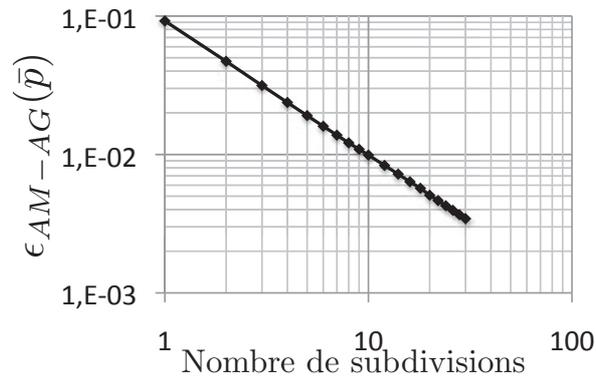


FIGURE 5.7: Évolution de la différence $\epsilon_{AM-AG}(\bar{p})$ en fonction du remaillage

Remaillage	Temps approche géométrique (s)	Temps approche matricielle (s)	Gain
1	3,07	14,68	4,78
2	5,02	19,26	3,83
4	8,78	36,51	4,16
6	12,95	75,13	5,80
8	18,24	178,99	9,81
10	23,86	305,88	12,82
14	39,35	754,22	19,16
18	58,99	1584,93	26,87
24	90,81	4891,59	53,86

TABLE 5.1: Évolution des temps nécessaires aux résolutions du problème central en utilisant les approches matricielle ou géométrique en fonction du remaillage temporel

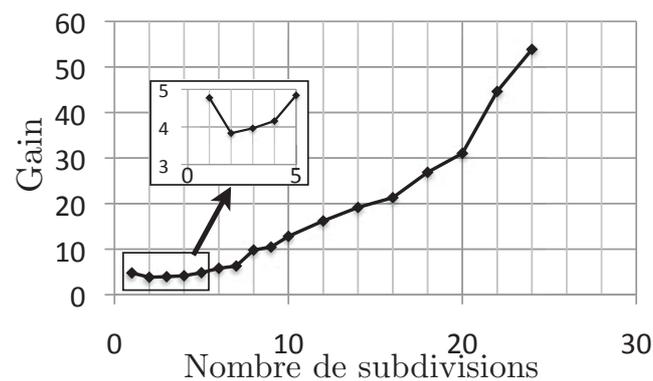


FIGURE 5.8: Évolution du gain apporté par l'approche géométrique

Remarque 5.6 :

Les temps du tableau TAB.(5.1) ont été mesurés sur le même ordinateur, sans autre utilisateur "gourmand" en ressources. Les différents calculs ont été lancés de manière successive. Enfin, l'écart entre les deux méthodes étant significatif, une étude plus approfondie des temps n'est pas nécessaire.

3.4 Conséquences de la discrétisation de $\dot{\bar{p}}$ sur le calcul des bornes

La résolution géométrique permet de calculer la solution du problème central à un coût très faible. Mais la solution obtenue \bar{p} est d'un degré inférieur à celle des autres problèmes (p_h , \hat{p}_h et $\delta\hat{p}_h$). Ainsi, le taux de déformation plastique cumulé $\dot{\bar{p}}$ fait apparaître un peigne de Dirac. On peut séparer ses irrégularités en utilisant les notations \bar{p}^c et \bar{p}^h :

$$\dot{\bar{p}} = \dot{\bar{p}}^c + \dot{\bar{p}}^h$$

Dans ce cas $\dot{\bar{p}}^c$ est une fonction constante par morceaux et $\dot{\bar{p}}^h$ un peigne de Dirac. Or dans la discrétisation choisie pour décrire le problème, on ne peut pas définir ce peigne de Dirac. Comme $\dot{\bar{p}}$ intervient dans le calcul des bornes, il nous faut donc les réécrire afin de ne plus faire intervenir $\dot{\bar{p}}^h$. Seuls les termes de courbure et directionnel font intervenir $\dot{\bar{p}}$.

3.4.1 Le terme de courbure

Par définition, on a :

$$\ell_{[\delta\hat{x}, \hat{x}]}^C(\bar{R}, \dot{\bar{p}}) = \int_0^T \left\{ \frac{T-t}{T} \left[\Delta\bar{R}\Delta\dot{\bar{p}} + \mathcal{R}_h\Delta\dot{\bar{p}} + \Delta\bar{R}\dot{\mathcal{P}}_h \right] + \dot{\mathcal{W}}_h \right\} dt$$

On cherche alors à mettre $\dot{\bar{p}}$ sous une forme intégrée afin de ne plus travailler avec des peignes de Dirac. De cette manière :

$$\begin{aligned} \ell_{[\delta\hat{x}, \hat{x}]}^C(\bar{p}, \dot{\bar{p}}) = \int_0^T \left\{ \frac{k}{2T}(\Delta\bar{p})^2 + \frac{1}{T}\mathcal{R}_h\Delta\bar{p}^c + \int_t^T \left\{ k\Delta\bar{p}\dot{\mathcal{P}}_h - \Delta\bar{p}^c\dot{\mathcal{R}}_h \right\} d\tau + \dot{\mathcal{W}}_h \right\} dt \\ + \sum_{0 < t_i < T} \left\{ \frac{T-t_i}{T}\mathcal{R}_h(t_i) \llbracket \bar{p}^h \rrbracket_{t_i} \right\} \end{aligned}$$

En effet, en utilisant des propriétés sur les intégrales rappelées en annexe ANN.(D), on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\{ \frac{T-t}{T} \Delta \bar{p} \Delta \dot{\bar{p}} \right\} dt &= \int_0^T \int_0^t \left\{ \Delta \bar{p} \Delta \dot{\bar{p}} \right\} \frac{d\tau dt}{T} = \int_0^T \left\{ \frac{\Delta \bar{p}^2}{2T} \right\} dt \\
\int_0^T \left\{ \frac{T-t}{T} \mathcal{R}_H \Delta \dot{\bar{p}} \right\} dt &= \int_0^T \int_0^t \left\{ \mathcal{R}_H \Delta \dot{\bar{p}} \right\} \frac{d\tau dt}{T} \\
&= \int_0^T \int_0^t \left\{ \mathcal{R}_H \Delta \dot{\bar{p}}^c \right\} \frac{d\tau dt}{T} + \sum_{0 < t_i < T} \left\{ \frac{T-t_i}{T} \mathcal{R}_h(t_i) \llbracket \bar{p}^H \rrbracket_{t_i} \right\} \\
&= \int_0^T \left\{ [\mathcal{R}_H \Delta \bar{p}^c]_0^t - \int_0^t \left\{ \dot{\mathcal{R}}_H \Delta \bar{p}^c \right\} d\tau \right\} \frac{dt}{T} \\
&\quad + \sum_{0 < t_i < T} \left\{ \frac{T-t_i}{T} \mathcal{R}_h(t_i) \llbracket \bar{p}^H \rrbracket_{t_i} \right\}
\end{aligned}$$

3.4.2 Le terme directionnel

Le terme directionnel, $\ell_{[\delta \hat{x}, \hat{x}]}^D(\bar{R}, \dot{\bar{p}})$ est construit différemment en fonction du régime de la solution \bar{x} . Ainsi, en régime élastique ($\dot{\bar{p}} = 0$), on a :

$$\ell_{[\delta \hat{x}, \hat{x}]}^D = \frac{-(R^* + R_0) \|\dot{\hat{x}}_\perp\|^2}{\|\dot{\hat{x}}_d\| + \|\dot{\hat{x}}_d + \dot{\hat{x}}_\perp\|}$$

ce qui ne pose aucun problème d'intégration. Par contre, en régime plastique ($\dot{\bar{p}} > 0$), l'expression de $\ell_{[\delta \hat{x}, \hat{x}]}^D$ dépend de la dérivée de \bar{p} et fait donc intervenir un peigne de Dirac.

$$\ell_{[\delta \hat{x}, \hat{x}]}^D(k \cdot \bar{p}, \dot{\bar{p}}) = \frac{-\|(k \cdot \bar{p} + R_0) \dot{\hat{x}}_\perp + \sigma_\perp \dot{\bar{p}}\|^2}{\|(k \cdot \bar{p} + R_0) \dot{\hat{x}}_d + \sigma_d \dot{\bar{p}}\| + \|(k \cdot \bar{p} + R_0) (\dot{\hat{x}}_d + \dot{\hat{x}}_\perp) + (\sigma_d + \sigma_\perp) \dot{\bar{p}}\|}$$

Afin de le calculer, on injecte une interpolation de degrés supérieurs de \bar{p} . Cette interpolation admet alors une dérivée finie et permet de continuer le calcul. Cette méthode de calcul est faite dans la pratique dès que $\bar{p} > 0$. En effet, par construction, on peut avoir la solution \bar{x} plastifiée mais qui n'est pas en régime plastique.

4 Calcul du α optimal

On présente dans cette partie les premiers résultats sur l'estimation des bornes. Le cas test est toujours le même quart de plaque où la définition de la quantité d'intérêt reste identique. En notant $\mathcal{G}_{\hat{x}_h}^*$ l'intégrale spatiale de la fonctionnelle $g_{\hat{x}_h}^*$, l'encadrement FIG.(5.1) devient :

$$\sup_{\alpha^- \in \mathfrak{R}^{*-}} \left\{ \frac{1}{\alpha^-} \mathcal{G}_{\hat{x}_h}^* (\alpha^- \delta \hat{x}_h) \right\} \leq \hat{e}_h(I) \leq \inf_{\alpha^+ \in \mathfrak{R}^{*+}} \left\{ \frac{1}{\alpha^+} \mathcal{G}_{\hat{x}_h}^* (\alpha^+ \delta \hat{x}_h) \right\}$$

4.1 Comportement quadratique des bornes

La figure FIG.(5.9) présente l'évolution des bornes inférieure et supérieure en fonction du paramètre α . Les losanges représentent les estimations faites pour différents α , tandis que la courbe continue utilise une interpolation quadratique de la fonction $\mathcal{G}_{\hat{x}_h}^*(\alpha\delta\hat{x}_h)$.

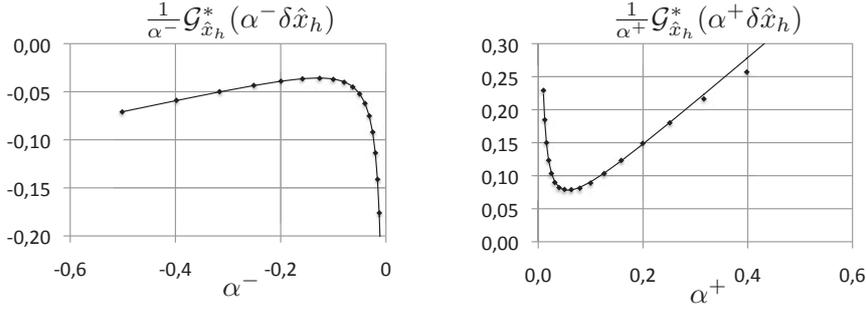


FIGURE 5.9: Évolution des bornes en fonction des paramètres α^\square . Les losanges représentent les valeurs prises par les bornes, tandis que le trait continu représente une interpolation quadratique

Ce comportement quadratique de la fonctionnelle $\mathcal{G}_{\hat{x}_h}^*$ par rapport à la variable α découle de l'utilisation d'une fonction convexe lors de la majoration.

4.2 Calcul de α_{opti}

En utilisant les remarques faites au paragraphe précédent on peut déterminer le paramètre α_{opti} conduisant à la meilleure borne à partir de deux premières estimations $\mathcal{G}_{\hat{x}_h}^*(\alpha_1\delta\hat{x}_h)$ et $\mathcal{G}_{\hat{x}_h}^*(\alpha_2\delta\hat{x}_h)$. En effet, le cas $\alpha = 0$, conduisant, par définition de l'encadrement, à une valeur nulle, deux uniques estimations suffisent. Et alors :

$$\alpha_{opti} = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}_{\hat{x}_h}^*(\alpha_1\delta\hat{x}_h) * \alpha_2^2 - \mathcal{G}_{\hat{x}_h}^*(\alpha_2\delta\hat{x}_h) * \alpha_1^2}{\mathcal{G}_{\hat{x}_h}^*(\alpha_1\delta\hat{x}_h) * \alpha_2 - \mathcal{G}_{\hat{x}_h}^*(\alpha_2\delta\hat{x}_h) * \alpha_1}$$

Remarque 5.7 :

Dans la pratique, cette propriété n'étant pas vérifiée exactement, la mise en pratique d'un algorithme basé sur le comportement quadratique de la fonction $\mathcal{G}_{\hat{x}_h}^$, et donc sur le résultat précédent permet de trouver les bornes optimales avec un faible coût de calcul.*

5 Bilan

Dans ce chapitre, deux méthodes permettant de mener à bien la résolution du problème central sont proposées.

La première approche, classique, repose sur des algorithmes connus et est facilement parallélisable. Toutefois, son coût reste élevé et on propose ainsi une méthode dédiée. Celle-ci, directe, permet de trouver efficacement et à moindre coût la solution du problème central.

Enfin, on a introduit une méthode dédiée, issue des propriétés de convexité héritées de la technique de majoration qui permet de connaître les coefficients α^{\square} optimaux.

Ainsi, on dispose des outils nécessaires aux calculs des bornes.

Chapitre 6

Étude des premières bornes

On s'intéresse dans ce chapitre à présenter les premiers résultats d'estimation garantie de l'erreur sur une quantité locale issue d'un problème élastoplastique. Dans un premier temps, une vérification de la démarche est proposée sur un cas d'école. Ensuite, sur un second test maîtrisé, une étude des différents paramètres utilisés est présentée afin de comprendre leur influence sur le calcul des bornes. Enfin, l'utilisation des outils d'estimation est illustrée sur un cas plus complexe.

Sommaire

1	Vérification de l'encadrement proposé	125
1.1	Définition du problème direct et de la quantité d'intérêt . . .	125
1.2	Étude des bornes	126
2	Étude des paramètres associés au problème miroir	128
2.1	Définition du problème direct et de la quantité d'intérêt . . .	128
2.2	Influence du remaillage	129
2.3	Influence du paramètre d'extraction	132
2.4	Conclusion	133
3	Second cas-test : Étude d'une structure en flexion	134
3.1	Description du problème direct	134

3.2	Premiers résultats	136
3.3	Étude de l'encadrement	137
4	Bilan	140

1 Vérification de l'encadrement proposé

On a introduit de nouveaux outils permettant d'estimer l'erreur sur une quantité d'intérêt locale. Il est nécessaire de valider cette approche complexe pour en vérifier la pertinence et comprendre le rôle des différents paramètres introduits. À cette fin, une première étude s'intéresse au calcul de l'erreur sur un problème maîtrisé, c'est-à-dire où l'erreur vraie est connue.

1.1 Définition du problème direct et de la quantité d'intérêt

Le problème de référence repose toujours sur l'étude d'une plaque en traction. Afin de simplifier la résolution, on peut ne considérer qu'un quart de cette plaque. Le chargement est affine en temps et fixé nul à l'instant $t = 0$. On choisit une description spatiale simple, soit 11×11 éléments. Afin de représenter l'évolution, on découpe l'intervalle $[0; T]$ en 20 pas de temps. Cette description est choisie en adéquation avec le chargement. En effet, sous un tel chargement ($\underline{F}_d = 2\frac{t}{T}\underline{e}_x$) et avec les conditions aux limites de symétrie, la contrainte est homogène en espace. En choisissant de décrire parfaitement l'instant où la structure franchit le seuil de plasticité, la solution $(\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex})$ appartient à l'espace d'approximation $\mathbf{U}_h \times \mathbf{S}_h$.

L'erreur associée à la solution du problème direct est réduite à celle issue de la non-linéarité matériau. Par exemple, avec un seuil de 10^{-6} sur l'algorithme de retour radial, l'erreur globale vaut :

$$\hat{\epsilon}_d = 6,1227 \cdot 10^{-10}$$

Le but de cette partie est de juger la pertinence de la méthode proposée. On définit, à cette fin, une quantité d'intérêt de telle sorte que la résolution du problème miroir qui en découle, soit, à l'instar de celle associée au problème direct, elle aussi quasi exacte.

Pour cela, en posant la zone d'intérêt égale à tout le domaine, l'erreur de discrétisation spatiale associée à la résolution du problème miroir est nulle. La quantité d'intérêt portant sur une moyenne en temps entre deux instants, sa définition temporelle est moins restrictive. On choisit de prendre la moyenne de la déformation plastique, dans la direction $\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$ entre les instants $0,95.T$ et T . La discrétisation introduite pour le problème direct est suffisante, et on a bien : $(\delta\underline{u}_{ex}, \delta\sigma_{ex}) \in \mathbf{U}_h \times \mathbf{S}_h$.

La figure FIG.(6.1) illustre le problème direct dans son environnement, sa discrétisation et aussi l'évolution de la déformation plastique dans la direction $\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$ où l'on voit la fenêtre d'extraction.

Sur cet exemple, on a :

$$\hat{I}_h = 9,5 \cdot 10^{-2}$$

Remarque 6.1 :

Le problème direct présenté ici peut être résolu analytiquement. En effet, il s'agit d'une plaque en traction pure, la contrainte est ainsi non nulle dans la seule

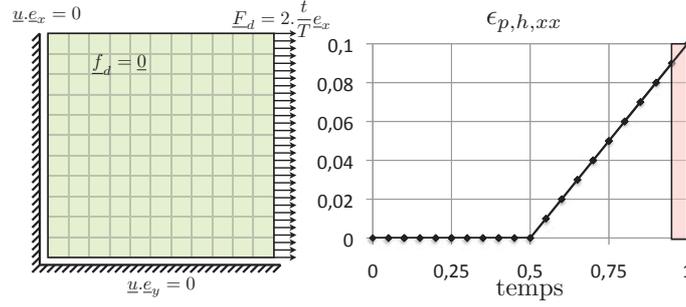


FIGURE 6.1: Illustration d'un premier exemple : à gauche, la structure dans son environnement, avec le maillage spatial ; à droite, la déformation plastique cumulée et la fenêtre d'extraction

direction $\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$ et évolue avec le chargement donné de manière linéaire :

$$\sigma_{xx,ex} = \frac{F_d(t)}{S} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$$

En écrivant la loi d'évolution dans le cas particulier de la traction pure, la déformation plastique cumulée vérifie la relation suivante :

$$\mathfrak{E}_{p,xx,ex} = \int_0^t \left\{ \dot{p}_{ex} \sqrt{\frac{2}{3}} \right\} d\tau$$

Enfin, la déformation plastique cumulée vérifie la relation suivante :

$$R_{ex}(t) = \frac{\langle \|\sigma_{d,ex}\| - R_0 \rangle_+}{k}$$

De cette manière, la solution exacte en déformation plastique peut s'exprimer explicitement en fonction du chargement et on en déduit l'erreur vraie :

$$\hat{e}_h(I) = 1,42 \cdot 10^{-9}$$

1.2 Étude des bornes

1.2.1 Formalisme des résultats

On propose de mettre les résultats sous une forme centrée sur la quantité d'intérêt exacte I_{ex} . Pour cela on introduit une valeur estimée corrigée I_h ainsi que l'intervalle relatif associé ΔI_h tels que :

$$I_{ex} = I_h \pm \Delta I_h \%$$

avec

$$I_h = \hat{I}_h + \frac{1}{2} \left[\sup_{\alpha^- \in \mathbb{R}^{*-}} \left\{ \frac{1}{\alpha^-} \mathcal{G}_{\hat{x}_h}^* (\alpha^- \cdot \delta \hat{x}_h) \right\} + \inf_{\alpha^+ \in \mathbb{R}^{*+}} \left\{ \frac{1}{\alpha^+} \mathcal{G}_{\hat{x}_h}^* (\alpha^+ \cdot \delta \hat{x}_h) \right\} \right]$$

$$\Delta I_h = \frac{1}{2 \cdot I_h} \left[\inf_{\alpha^+ \in \mathbb{R}^{*+}} \left\{ \frac{1}{\alpha^+} \mathcal{G}_{\hat{x}_h}^* (\alpha^+ \cdot \delta \hat{x}_h) \right\} - \sup_{\alpha^- \in \mathbb{R}^{*-}} \left\{ \frac{1}{\alpha^-} \mathcal{G}_{\hat{x}_h}^* (\alpha^- \cdot \delta \hat{x}_h) \right\} \right]$$

Remarque 6.2 :

Sous ce formalisme, l'intervalle exact prend la valeur $\Delta I_h^{ex} = 1,50.10^{-6}\%$

1.2.2 Valeurs des bornes

Le tableau TAB.(6.1) présente les valeurs que prennent les bornes pour différents λ_Σ . On a retenu uniquement les paramètres d'extraction issues de la partie "linéaire" du problème miroir. L'ordre de grandeur des mesures offertes sont de $10^{-5}\%$, soit des mesures absolues de l'ordre de 10^{-7} .

λ_Σ	α^-	α^+	Borne inférieure	Borne supérieure	I_h	ΔI_h (%)
10^{-4}	$-9,87.10^4$	$4,09.10^{-2}$	$-3,16.10^{-8}$	$3,08.10^{-8}$	$9,5.10^{-2}$	$3,29.10^{-5}$
10^{-2}	$-39,65$	$4,10.10^{-4}$	$-3,30.10^{-8}$	$3,08.10^{-8}$	$9,5.10^{-2}$	$3,36.10^{-5}$
1	$-0,24$	$4,10.10^{-6}$	$-3,30.10^{-8}$	$3,08.10^{-8}$	$9,5.10^{-2}$	$3,36.10^{-5}$
-10^{-4}	$4,56.10^{-2}$	$-4,55.10^{-2}$	$-8,81.10^{-8}$	$2,68.10^{-8}$	$9,5.10^{-2}$	$6,05.10^{-5}$
-10^{-2}	$4,56.10^{-4}$	$-4,55.10^{-4}$	$-8,81.10^{-8}$	$2,68.10^{-8}$	$9,5.10^{-2}$	$6,05.10^{-5}$
-1	$4,56.10^{-6}$	$-4,55.10^{-6}$	$-8,81.10^{-8}$	$2,68.10^{-8}$	$9,5.10^{-2}$	$6,05.10^{-5}$

TABLE 6.1: Valeur de l'erreur pour différents λ_Σ

Ce cas test "jouet" nous permet de mettre en avant certaines caractéristiques de l'estimateur proposé.

Tout d'abord, la robustesse de la méthode est mise en avant. En effet, avec une erreur vraie très faible (puisqu'elle vaut, en valeur absolue 10^{-8}), les résultats offerts par l'estimateur restent pertinents. Pourtant, l'ordre de grandeur des différents termes mis en jeu est très faible. En effet, le code travaille avec des termes petits. Par exemple, dans le cas $\lambda_\Sigma = 1$, la borne supérieure prend la valeur $3,08.10^{-8}$. Or, elle est atteinte pour $\alpha^+ = 4,1.10^{-6}$, soit $\mathcal{G}_{\hat{x}_h}^*(\alpha^+ \delta \hat{x}_h) = 1,26.10^{-13}$. L'ordre de grandeur des chiffres en jeu est proche du zéro machine. On peut préciser que de la même manière, même en travaillant aux limites du numérique, l'estimation de l'erreur reste garantie. De plus, on peut noter que les bornes conservent un comportement quadratique par rapport à α^\square , ce qui a permis de déterminer α^- et α^+ malgré les ordres de grandeur très faibles mis en jeu.

Enfin, ces premiers calculs montrent le rôle joué par le paramètre d'extraction λ_Σ . Certes, comme on s'est placé dans la partie quasi-linéaire du comportement miroir, si ce coefficient reste de même signe, son influence est limitée. Par contre, en changeant de signe, il peut conduire à une meilleure estimation des bornes. Ainsi, en prenant λ_Σ positif pour le calcul de la borne inférieure et en le choisissant négatif pour la borne supérieure, on a :

$$\Delta I_h = 3,07.10^{-5}\%$$

Remarque 6.3 :

Les résultats présentés ci-dessus ont été réalisés en utilisant une "surdiscrétisation" temporelle pour la résolution du problème central. Chaque intervalle de temps a été ainsi divisé en 10 sous-intervalles.

2 Étude des paramètres associés au problème miroir

On cherche maintenant à comprendre l'impact de la discrétisation du problème miroir et du paramètre d'extraction λ_Σ sur la qualité de l'encadrement.

2.1 Définition du problème direct et de la quantité d'intérêt

Afin de déterminer l'impact de la discrétisation du problème miroir sur la qualité de l'encadrement, on construit un problème dédié. On choisit un problème où une quantité d'intérêt peut être calculée de manière quasi exacte, mais dont le problème miroir associé est résolu de manière nécessairement approché.

Afin de décrire spatialement la solution exacte, on s'intéresse encore au problème d'une plaque en traction pure dont on ne modélise qu'un quart. En utilisant un maillage régulier, on a $(u_{ex}, \sigma_{ex}) \in \mathbf{U}_h \times \mathcal{S}_h$. En choisissant une zone réduite du domaine comme support spatial de la quantité d'intérêt, la résolution numérique du problème miroir est source d'erreur de discrétisation spatiale. À cette fin, on définit une tranche de la plaque comme zone d'intérêt.

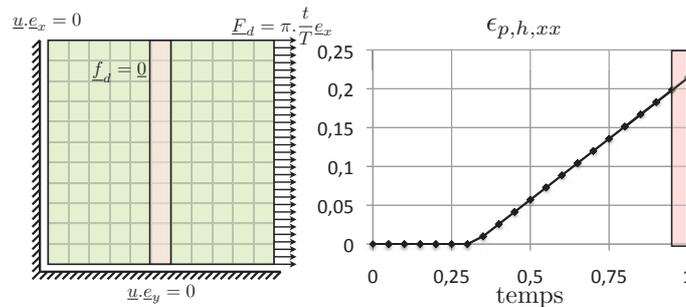


FIGURE 6.2: Le problème direct : la structure dans son environnement. Définition spatio-temporelle du support de la quantité d'intérêt

De la même manière, afin d'introduire une erreur de discrétisation temporelle, dont le problème miroir héritera, mais qui n'influe pas sur le calcul de la quantité d'intérêt, on choisit de "mal" représenter le franchissement du seuil plastique. On opte ainsi pour une discrétisation temporelle ne permettant pas de décrire l'évolution de la solution exacte sur $[0; T]$. Avec $F_d = \pi \frac{t}{T} e_x$, le franchissement du seuil plastique n'est jamais réalisé sur un piquet de temps, mais dans un intervalle discret $[t_p^-; t_p^+]$.

Par contre, sur tous les autres intervalles de temps, la seule composante de l'erreur de discrétisation est celle liée à la non-linéarité du matériau.

La figure FIG.(6.2) présente le problème de référence ainsi défini et la zone spatiotemporelle définissant le support de la quantité d'intérêt. Elle illustre le problème direct dans son environnement, ainsi que le maillage introduit pour le résoudre et l'évolution de la déformation plastique dans la direction $\underline{e}_x \times \underline{e}_x$.

On s'intéresse donc à l'erreur sur la moyenne de la déformation plastique dans une zone d'intérêt réduite à une "tranche" de la plaque et sur le dernier pas de temps.

$$\hat{I}_h = 2,06.10^{-1}$$

Remarque 6.4 :

De la même manière que pour le problème direct de la partie précédente, on peut calculer analytiquement la solution exacte pour ce problème. Alors, on peut en déduire l'erreur vraie sur la quantité d'intérêt ; elle est donc :

$$\Delta I_h = 1,09.10^{-6}\%$$

2.2 Influence du remaillage

2.2.1 Remaillage spatial

On augmente uniquement le nombre d'éléments du maillage miroir, afin d'améliorer la qualité spatiale des solutions éléments finis δx_h et admissible $\delta \hat{x}_h$. On cherche de cette manière à cerner l'influence de la qualité spatiale des solutions du problème miroir sur le calcul de l'encadrement. Le tableau TAB.(6.2) présente l'évolution de l'encadrement en fonction du remaillage. La figure FIG.(6.3) met en avant l'évolution de ΔI_h en fonction du nombre d'éléments.

Discrétisation spatiale	Nombre d'éléments	α^-	α^+	Borne inférieure	Borne supérieure	I_h	ΔI_h (%)
11×11	121	-1, 13	$4,30.10^{-1}$	$-4,99.10^{-2}$	$1,05.10^{-1}$	$2,34.10^{-1}$	33,19
22×22	484	-1, 24	$4,28.10^{-1}$	$-4,51.10^{-2}$	$1,07.10^{-1}$	$2,37.10^{-1}$	32,01
33×33	1089	-1, 30	$4,29.10^{-1}$	$-4,29.10^{-2}$	$1,07.10^{-1}$	$2,38.10^{-1}$	31,48
44×44	1936	-1, 33	$4,28.10^{-1}$	$-4,18.10^{-2}$	$1,07.10^{-1}$	$2,39.10^{-1}$	31,21
66×66	4356	-1, 36	$4,28.10^{-1}$	$-4,07.10^{-2}$	$1,08.10^{-1}$	$2,40.10^{-1}$	30,93
88×88	7744	-1, 37	$4,27.10^{-1}$	$-4,01.10^{-2}$	$1,08.10^{-1}$	$2,40.10^{-1}$	30,80

TABLE 6.2: Valeur de l'encadrement et des paramètres (α^-, α^+) optimaux associés pour différents maillages spatiaux ($N_t = 20$)

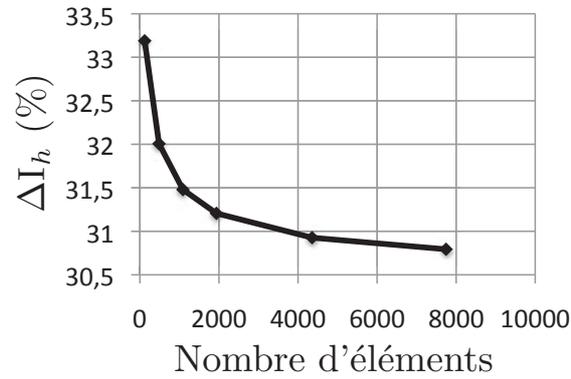


FIGURE 6.3: Évolution de l'encadrement, en valeur relative, en fonction du nombre d'éléments du maillage associé au problème miroir ($N_t = 20$)

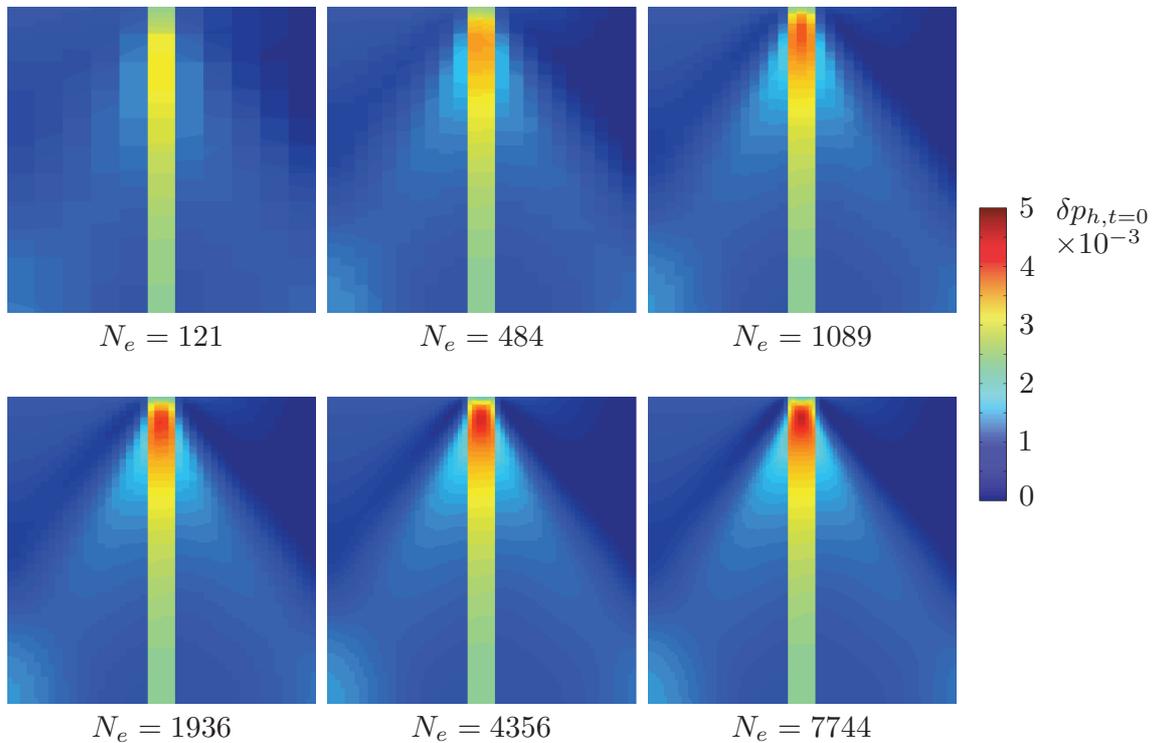


FIGURE 6.4: Carte de la déformation plastique cumulée du problème miroir à l'instant final ($t = 0$), pour différents maillages

L'évaluation des bornes de l'erreur dépend de la qualité du maillage du problème miroir. Ainsi, plus ce maillage est riche, meilleure est l'estimation. La figure FIG.(6.4) illustre la qualité de la déformation plastique cumulée à l'instant $t = 0$ pour les différents maillages. Elle met en avant le caractère local de la solution miroir. Ainsi, seule une description riche permet de bien la représenter et peut conduire à une

estimation pertinente.

Enfin, on peut noter que l'estimation de l'erreur sur la quantité d'intérêt ne dépend pas seulement de la qualité du maillage spatial. En effet, l'écart entre les bornes ne tend pas vers zéro, mais vers une valeur finie, positive.

2.2.2 Remaillage temporel

On cherche maintenant à cerner l'importance de la définition temporelle de l'espace d'approximation des solutions δx_h et $\delta \hat{x}_h$. Le tableau TAB.(6.3) présente l'évolution de l'encadrement en fonction du nombre de pas de temps utilisés lors de la résolution du problème miroir. La figure FIG.(6.5) illustre l'évolution du seul terme ΔI_h .

Nombre de pas de temps	α^-	α^+	Borne inférieure	Borne supérieure	I_h	ΔI_h (%)
20	-1,33	$4,28 \cdot 10^{-1}$	$-4,18 \cdot 10^{-2}$	$1,07 \cdot 10^{-1}$	$2,39 \cdot 10^{-1}$	31,21
40	$-7,43 \cdot 10^{-1}$	$5,64 \cdot 10^{-1}$	$-1,99 \cdot 10^{-2}$	$4,54 \cdot 10^{-2}$	$2,19 \cdot 10^{-1}$	14,91
60	$-3,15 \cdot 10^{-1}$	$2,71 \cdot 10^{-1}$	$-8,48 \cdot 10^{-3}$	$1,79 \cdot 10^{-2}$	$2,11 \cdot 10^{-1}$	6,25
100	$-2,50 \cdot 10^{-1}$	$2,21 \cdot 10^{-1}$	$-6,76 \cdot 10^{-3}$	$1,40 \cdot 10^{-2}$	$2,10 \cdot 10^{-1}$	4,95
120	$-2,18 \cdot 10^{-1}$	$1,95 \cdot 10^{-1}$	$-5,90 \cdot 10^{-3}$	$1,22 \cdot 10^{-2}$	$2,09 \cdot 10^{-1}$	4,31
200	$-1,57 \cdot 10^{-1}$	$1,44 \cdot 10^{-1}$	$-4,26 \cdot 10^{-3}$	$8,64 \cdot 10^{-3}$	$2,08 \cdot 10^{-1}$	3,09

TABLE 6.3: Valeur de l'encadrement et des paramètres (α^- , α^+) optimaux associés pour différentes discrétisations temporelles (maillage spatial 44×44)

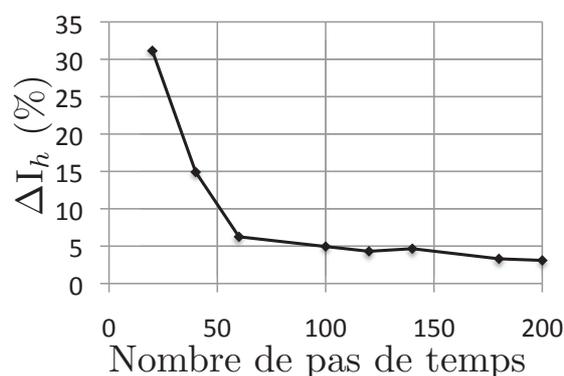


FIGURE 6.5: Évolution de l'encadrement, en valeur relative, en fonction du nombre de pas de temps associé au problème miroir (maillage spatial : 44×44 , soit $N_e = 1936$)

L'évolution des bornes de l'erreur en fonction du remaillage temporel correspond à nos attentes. En adoptant une description temporelle riche pour résoudre le

problème miroir, la qualité des bornes est grandement améliorée. Le comportement de l'estimateur étant identique en fonction d'un remaillage spatial ou temporel, on peut conclure qu'afin d'établir une estimation pertinente de l'erreur sur une quantité d'intérêt, il est nécessaire de bien résoudre le problème miroir.

De la même manière que pour l'étude portant sur l'évolution de l'encadrement en fonction de la finesse du maillage spatial associé au problème miroir, on peut noter qu'en remaillant uniquement temporellement l'erreur ne tend pas vers une valeur nulle, mais une valeur finie. L'erreur sur une quantité locale a ainsi un comportement analogue à l'erreur globale en dissipation introduite au chapitre CHP.2, dont on peut extraire des indicateurs associées aux discrétisations spatiales ou temporelles.

Enfin, sur ce cas particulier, on peut noter que les poids de ces deux composantes de l'erreur ne sont pas équivalents. Ceci peut s'expliquer par le fait que la résolution du problème direct est exacte en espace. La discrétisation spatiale a un impact plus faible. Attention, toutefois seule une étude sur un cas plus complexe peut révéler une différence entre les poids relatifs des deux discrétisations dans les valeurs prises par l'encadrement.

2.3 Influence du paramètre d'extraction

On cherche maintenant à comprendre le rôle joué par le paramètre d'extraction λ_Σ . Le tableau TAB.(6.4) présente l'évolution des bornes, ainsi que les coefficients (α^-, α^+) associés pour différents λ_Σ .

λ_Σ	α^-	α^+	Borne inférieure	Borne supérieure	I_h	ΔI_h (%)
-10^2	$-1, 15.10^4$	$6, 28.10^3$	$-6, 45.10^{-1}$	$8, 79.10^{-2}$	$2, 18.10^{-1}$	34, 95
-10^1	$-1, 15.10^3$	$6, 28.10^2$	$-6, 40.10^{-1}$	$8, 76.10^{-2}$	$2, 18.10^{-1}$	34, 76
-1	$-1, 15$	$6, 28.10^{-1}$	$-6, 32.10^{-1}$	$8, 75.10^{-2}$	$2, 18.10^{-1}$	34, 69
-10^{-1}	$-1, 15.10^1$	$6, 28$	$-6, 32.10^{-1}$	$8, 75.10^{-2}$	$2, 18.10^{-1}$	34, 69
-10^{-2}	$-1, 15.10^2$	$6, 28.10^1$	$-6, 32.10^{-1}$	$8, 75.10^{-2}$	$2, 18.10^{-1}$	34, 69
-10^{-3}	$-1, 15.10^3$	$6, 28.10^2$	$-6, 32.10^{-1}$	$8, 75.10^{-2}$	$2, 18.10^{-1}$	34, 69
10^{-5}	$-1, 40.10^5$	$4, 42.10^4$	$-3, 95.10^{-2}$	$1, 03.10^{-1}$	$2, 38.10^{-1}$	29, 89
10^{-4}	$-1, 40.10^4$	$4, 42.10^3$	$-3, 95.10^{-2}$	$1, 03.10^{-1}$	$2, 38.10^{-1}$	29, 89
10^{-3}	$-1, 40.10^3$	$4, 42.10^2$	$-3, 95.10^{-2}$	$1, 03.10^{-1}$	$2, 38.10^{-1}$	29, 89
10^{-2}	$-1, 40.10^2$	$4, 42.10^1$	$-3, 95.10^{-2}$	$1, 03.10^{-1}$	$2, 38.10^{-1}$	29, 90
10^{-1}	$-1, 40.10^1$	$4, 43$	$-3, 95.10^{-2}$	$1, 03.10^{-1}$	$2, 38.10^{-1}$	29, 94
1	$-1, 40$	$4, 32.10^{-1}$	$-3, 95.10^{-2}$	$1, 06.10^{-1}$	$2, 40.10^{-1}$	30, 44

TABLE 6.4: Valeur de l'erreur pour différents λ_Σ

Une première remarque est que pour des paramètres d'extraction petits (soit ici quand $-1 < \lambda_\Sigma < 0$ ou $0 < \lambda_\Sigma < 10^{-3}$), l'encadrement hérite du comportement quasi-linéaire du problème miroir mis en avant dans la partie CHP.4-PART.5. De

cette manière, le coefficient α^\square vient jouer un rôle analogue à λ_Σ et les valeurs prises par l'encadrement sont similaires. De plus, dès que l'on quitte ce régime de petites perturbations, l'évaluation des bornes devient moins pertinente.

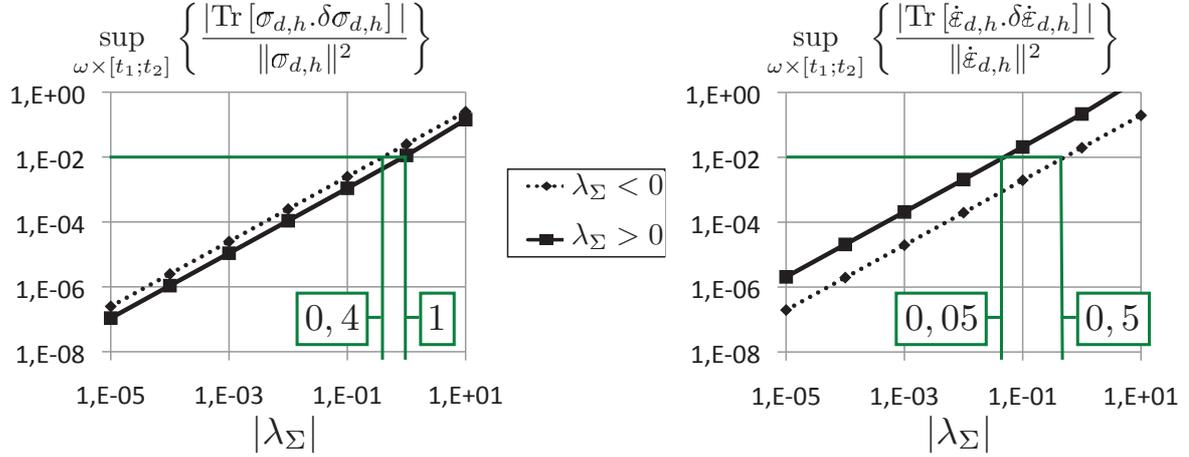


FIGURE 6.6: Évolution du rapport entre les quantités miroir et de référence en fonction du paramètre d'extraction

La figure FIG.(6.6) illustre l'évolution de l'ordre de grandeur des quantités de la solution du problème miroir par rapport aux quantités issues du problème de référence en fonction du paramètre d'extraction λ_Σ . L'aspect perturbation peut être défini tel que la solution miroir soit inférieure à 1% de la solution du problème de référence. On retient la condition la plus restrictive entre les quantités en contrainte et en taux de déformations. De cette manière, on a :

$$\delta x_h \leq 1\%.x_h \text{ si et seulement si } \begin{cases} 0 < \lambda_\Sigma < \min \{1; 0,05\} = 0,05 \\ \text{ou } \sup \{-0,4; -0,5\} = -0,4 < \lambda_\Sigma < 0 \end{cases}$$

On retrouve les résultats présentés dans le tableau TAB.(6.4) : c'est dans ces plages de variation du paramètre λ_Σ que les bornes sont de meilleure qualité et presque invariantes.

Enfin, on peut remarquer l'influence du signe de λ_Σ sur la qualité des bornes. Ainsi, un paramètre d'extraction négatif permet d'obtenir une meilleure évaluation d'une borne supérieure, tandis qu'un $\lambda_\Sigma > 0$ conduira à une borne inférieure de meilleure qualité. Ce dernier résultat est à corrélérer avec le cas particulier du problème direct. En effet, celui-ci est un problème de traction pure; ainsi, avec un produit $\alpha^\square.\lambda_\Sigma$ négatif, on vient décharger le problème et la perturbation est minimale.

2.4 Conclusion

L'étude des outils introduits conduisant à un encadrement de l'erreur sur une quantité locale sur des problèmes maîtrisés nous permet de souligner deux points.

Tout d'abord, on peut améliorer la qualité des bornes en affinant la résolution numérique introduite par le problème miroir. La maîtrise de celui-ci est indiscutablement un point clef pour l'obtention de bornes pertinentes. On retrouve ici une propriété démontrée pour les problèmes linéaires d'évolution. En effet, dans les cas viscoélastiques et dynamiques, une résolution fine du problème adjoint offre des bornes de bonne qualité (voir [Chamoïn et Ladevèze, 2008, Waeytens *et al.*, 2011]).

Enfin, l'étude du paramètre d'extraction λ_Σ a mis en avant le fait que la technique d'encadrement hérite du comportement linéaire de perturbation du problème miroir lorsqu'il est suffisamment petit. De plus, c'est dans ce régime que les résultats sont les plus pertinents.

3 Second cas-test : Étude d'une structure en flexion

3.1 Description du problème direct

Le problème direct porte sur l'étude d'une plaque encadrée à sa base et soumise à des efforts sur une de ses tranches. La figure FIG.(6.7) illustre la géométrie de la structure (on choisit $L = 100$), son environnement, ainsi que l'évolution du chargement. On propose de résoudre le problème direct sur un maillage de 8035 éléments ($h \leq L/40$) et 20 pas de temps.

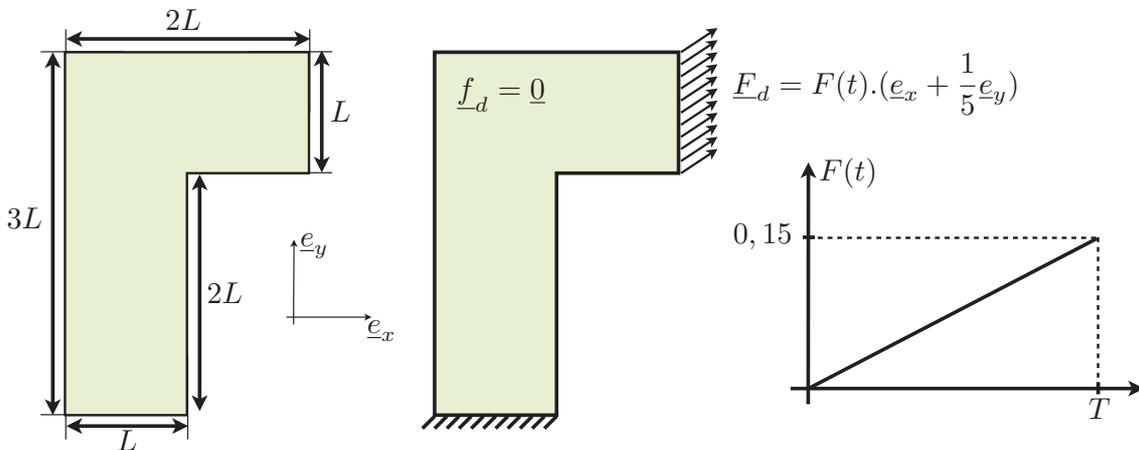


FIGURE 6.7: Le problème direct : la structure dans son environnement, le chargement associé et le maillage support de la résolution numérique

La figure FIG.(6.8) présente une carte de la solution en déformation plastique cumulée à $t = T$. La carte des contributions à l'erreur globale $\hat{\epsilon}_d$ y est aussi représentée. On peut remarquer que les éléments contribuant le plus à l'erreur globale sont ceux proches des singularités.

Sur ce problème approché la mesure en dissipation de l'erreur globale relative

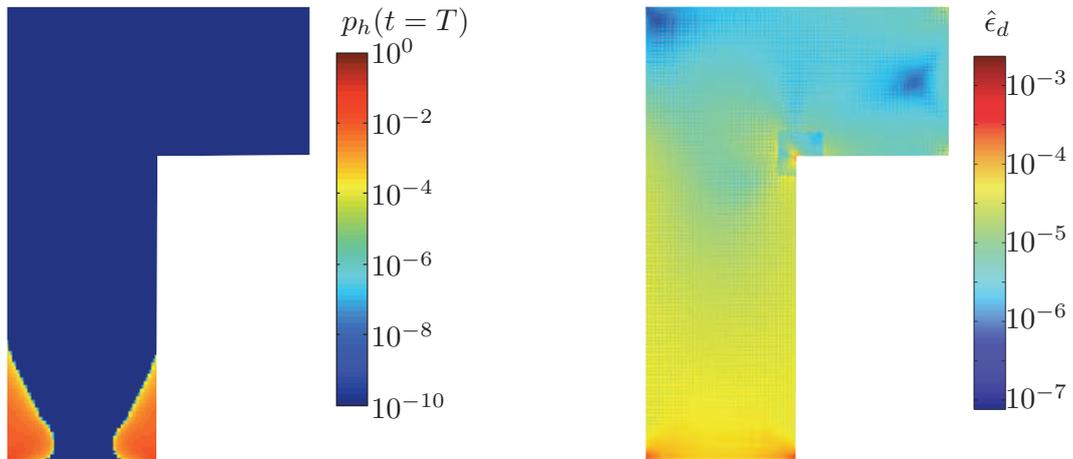


FIGURE 6.8: Le problème direct : carte des déformations plastiques cumulées à l'instant final et contribution des points de Gauss à l'erreur globale

prend la valeur suivante :

$$\hat{\epsilon}_d = 6,50 \cdot 10^{-3}$$

Enfin, on s'intéresse à une quantité d'intérêt définie sur la déformation plastique dans la direction $\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$. On prend sa valeur moyenne dans le coin inférieur gauche (zone carrée de côté $l = L/5$) entre les instants $t_1 = 0,85 \cdot T$ s et $t_2 = T$. La figure FIG.(6.9) illustre la définition spatio-temporelle de la quantité d'intérêt. Cette

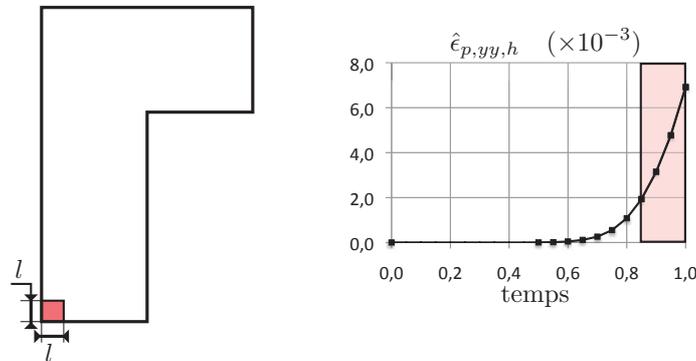


FIGURE 6.9: Définition de la zone d'intérêt ainsi que de la fenêtre d'extraction

quantité d'intérêt prend la valeur suivante :

$$\hat{I}_h = 4,19 \cdot 10^{-3}$$

Les figures FIG.(6.10) et FIG.(6.11) présentent les évolutions respectives de la moyenne de la contrainte $\sigma_{yy,h}$, de la déformation totale $\epsilon_{yy,h}$ et des deux extracteurs dans la zone d'intérêt.

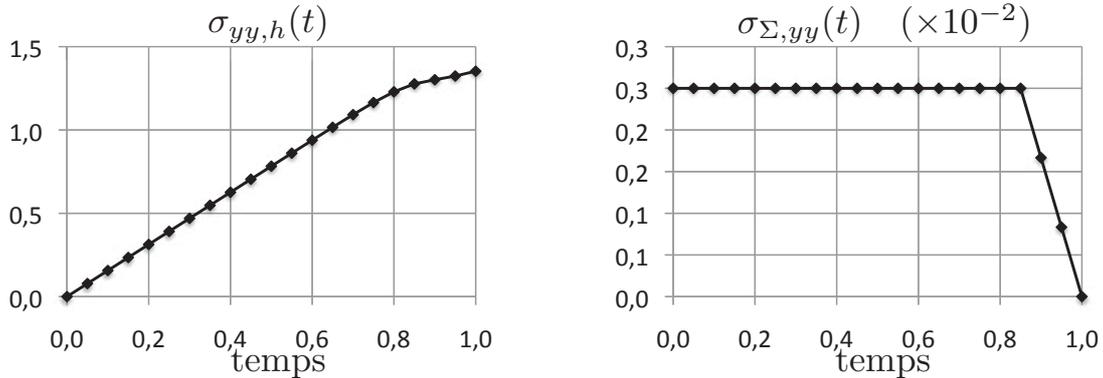


FIGURE 6.10: Évolution de la moyenne sur la zone d'intérêt de la composante $\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$ de la contrainte éléments finis et de l'extracteur en contrainte

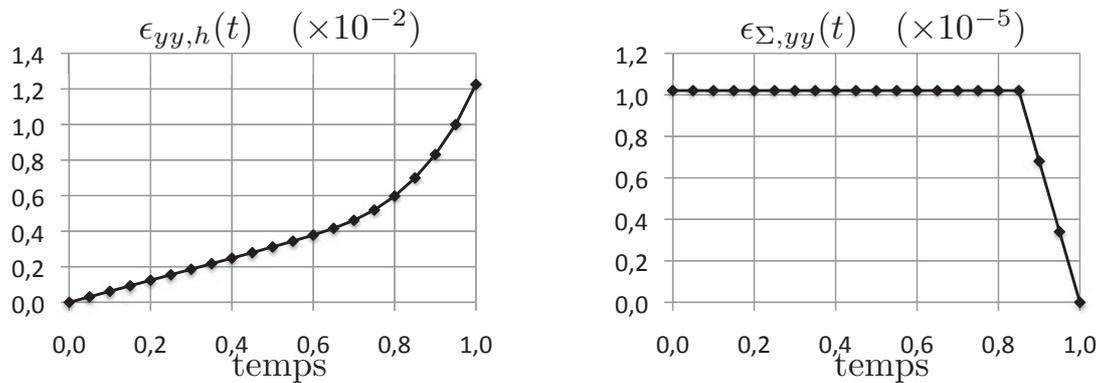


FIGURE 6.11: Évolution de la moyenne sur la zone d'intérêt de la composante $\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$ de la déformation totale éléments finis et de l'extracteur en déformation

Sans paramètre d'extraction (ou $\lambda_{\Sigma} = 1$), les extracteurs étant "petits" par rapport aux quantités issues du problème direct (i.e. $< 1\%$), on s'attend à être dans le régime du comportement miroir conduisant aux meilleures bornes.

3.2 Premiers résultats

Afin de résoudre le problème miroir, on s'appuie dans un premier temps sur une discrétisation temporelle identique à celle utilisée sur le problème direct (soit 20 pas de temps). Par contre, afin de décrire le mieux possible spatialement la solution miroir, on remaille la zone d'intérêt et les éléments alentour. En effet, l'étude présentée dans la partie précédente a mis en avant le lien entre une riche description de la solution du problème miroir et la qualité de l'estimation de l'erreur. De cette manière, on divise chaque élément du support spatial des extracteurs plus quelques rangées d'éléments (10, ici) en 16 sous éléments.

La figure FIG.(6.12) montre la carte de la déformation plastique cumulée de la solution éléments finis du problème miroir. Un zoom permet de mettre en avant le caractère local de la solution de ce problème.

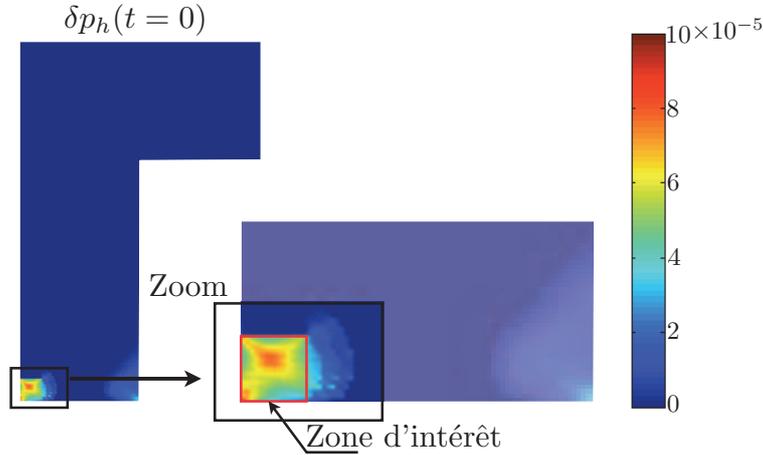


FIGURE 6.12: Carte de la déformation plastique cumulée solution éléments finis du problème miroir à $t = 0$ et zoom sur la zone d'intérêt

À l'aide de la technique de majoration proposée dans ce manuscrit et des outils associés, on peut calculer un premier encadrement de l'erreur sur la quantité d'intérêt :

$$-1,44.10^{-3} \leq \hat{e}_h(I) \leq 3,51.10^{-3}$$

On peut réécrire ce résultat sous la forme d'un intervalle garanti sur la quantité d'intérêt exacte :

$$I_{ex} = 5,22.10^{-3} \pm 47,41\%$$

3.3 Étude de l'encadrement

3.3.1 Paramètre d'extraction

Le tableau TAB.(6.5) présente l'évolution de l'encadrement en fonction du paramètre d'extraction. On retrouve dans cette étude le comportement quasi-linéaire de l'encadrement. Ainsi, avec $0 < \lambda_\Sigma < 10^{-2}$, l'évaluation des bornes est identique. Toutefois, dans ce cas test plus général, l'impact du paramètre d'extraction est moins marqué ; ainsi pour $\lambda_\Sigma = 1$, la surévaluation de l'encadrement n'est que de 0,10%.

Enfin, on peut remarquer qu'ici, retenir un λ_Σ négatif conduit toujours à une évaluation des bornes de l'erreur de moins bonne qualité.

La figure FIG.(6.13) présente l'évolution du rapport entre les quantités issues des problèmes miroir et de référence. Si on veut que le problème miroir soit bien une perturbation ($\delta x_h \leq 1\%.x_h$), les paramètres d'extraction associés sont dans les

λ_Σ	α^-	α^+	Borne inférieure ($\times 10^{-3}$)	Borne supérieure ($\times 10^{-3}$)	I_h ($\times 10^{-3}$)	ΔI_h (%)
10^2	$-1,97.10^{-1}$	$2,18.10^{-2}$	-1,66	3,78	5,25	51,80
10	-2,18	$6,59.10^{-1}$	-1,46	3,53	5,22	47,73
1	$-2,20.10^1$	6,64	-1,44	3,51	5,22	47,41
10^{-1}	$-2,20.10^2$	$6,65.10^1$	-1,44	3,50	5,22	47,34
10^{-2}	$-2,20.10^3$	$6,66.10^2$	-1,44	3,50	5,21	47,33
10^{-3}	$-2,20.10^4$	$6,66.10^3$	-1,44	3,50	5,21	47,33
-10^2	$6,30.10^{-1}$	$-5,04.10^{-2}$	-4,15	6,09	5,16	99,22
-1	$6,30.10^1$	-5,04	-4,15	6,09	5,16	99,22
-10^{-2}	$6,30.10^3$	$-5,04.10^2$	-4,15	6,09	5,16	99,22

TABLE 6.5: Évolution de l'encadrement en fonction du paramètre d'extraction ($N_e = 13450$, $N_t = 20$)

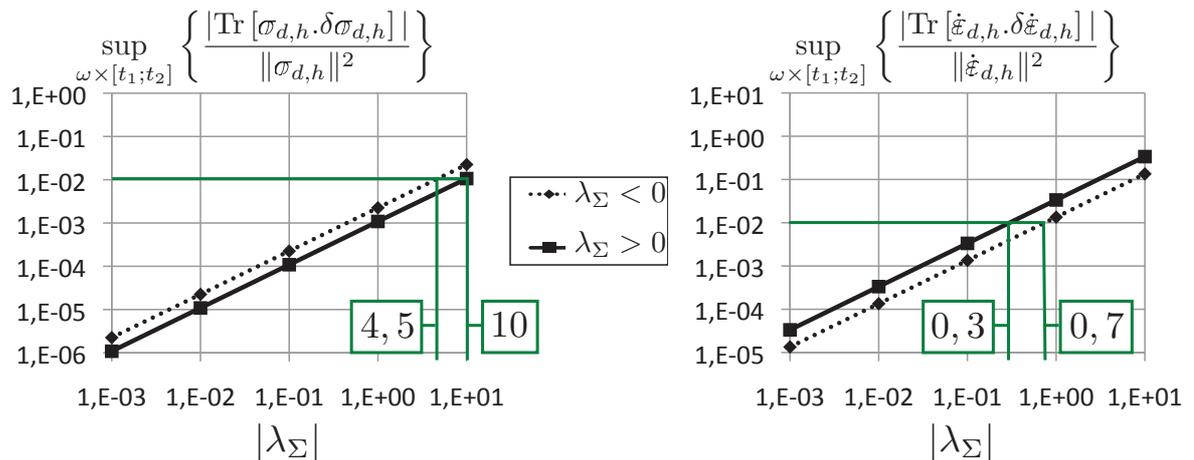


FIGURE 6.13: Évolution du rapport entre les quantités miroir et de référence en fonction du paramètre d'extraction

plages :

$$0 < \lambda_\Sigma < 0,3 \quad \text{ou} \quad -0,7 < \lambda_\Sigma < 0$$

Ces résultats corroborent l'étude directe de l'influence du paramètre d'extraction sur les valeurs prises par les bornes. Cette définition de perturbation, déjà validée sur un cas test école, est ainsi confirmée sur ce cas plus complexe.

3.3.2 Remaillage temporel

Différentes évaluations des bornes en fonction du nombre de pas de temps utilisé pour la résolution du problème miroir sont présentées sur le tableau TAB.(6.6). La

qualité de l'estimation est ainsi meilleure avec une description fine du problème miroir. Toutefois, l'amélioration n'est pas aussi marquée que pour l'étude présentée dans la partie précédente.

Nombre de pas de temps	α^-	α^+	Borne inférieure ($\times 10^{-3}$)	Borne supérieure ($\times 10^{-3}$)	I_h ($\times 10^{-3}$)	ΔI_h (%)
20	$-2, 20.10^1$	6, 64	-1, 44	3, 51	5, 22	47, 41
40	$-1, 99.10^1$	6, 99	-1, 40	3, 46	5, 19	46, 90
60	$-1, 92.10^1$	7, 14	-1, 36	3, 40	5, 16	46, 10
80	$-1, 90.10^1$	7, 22	-1, 32	3, 35	5, 15	45, 38

TABLE 6.6: Évolution de l'encadrement en fonction du nombre de pas de temps ($N_e = 13450$, $\lambda_\Sigma = 1$)

3.3.3 Remaillage spatial

Le tableau TAB.(6.7) présente les valeurs que prend l'encadrement en fonction du nombre d'éléments. Pour la première ligne du tableau, les maillages associés aux problèmes direct et miroir sont identiques. Ensuite, pour les deux autres lignes, on a remaillé la zone d'intérêt ainsi que quelques rangées d'éléments l'entourant en les subdivisant par 16 et 64.

Nombre de d'éléments	α^-	α^+	Borne inférieure ($\times 10^{-3}$)	Borne supérieure ($\times 10^{-3}$)	I_h ($\times 10^{-3}$)	ΔI_h (%)
8 035	$-2, 12.10^1$	6, 68	-1, 53	4, 84	5, 59	52, 58
13 450	$-2, 20.10^1$	6, 64	-1, 44	3, 51	5, 22	47, 41
36 070	$-2, 27.10^1$	6, 61	-1, 43	3, 51	5, 23	47, 22

TABLE 6.7: Évolution de l'encadrement en fonction du nombre d'éléments ($N_t = 20$, $\lambda_\Sigma = 1$)

Sur le maillage à 8 035 éléments, la zone d'intérêt est représentée par 8×8 éléments. Ce maillage, trop grossier pour conduire une résolution fine du problème miroir, permet toutefois d'obtenir des résultats, en terme d'encadrement, ne surmajorant que peu les mesures obtenues sur des maillages plus fins. En choisissant le maillage intermédiaire, la zone d'intérêt est discrétisée en 32×32 éléments. Au vu de l'allure de la solution du problème miroir illustré sur la figure FIG.(6.12), cette discrétisation semble toutefois plus apte à la décrire. Enfin, le gain offert par la dernière discrétisation est trop faible par rapport au coût général de l'estimateur.

4 Bilan

Ce chapitre a illustré la mise en pratique de la technique d'encadrement de l'erreur sur une quantité d'intérêt locale. Les différents outils nécessaires à cette mise en oeuvre ont montré leur pertinence sur des cas tests maîtrisés.

Enfin, l'étude de l'erreur sur une quantité locale issue d'un problème plus complexe a été réalisée. On y retrouve les mêmes propriétés que pour les problèmes maîtrisés. Toutefois, l'impact de la discrétisation miroir sur la qualité des bornes est plus léger. Améliorer la qualité des bornes en utilisant ce seul aspect représente un coût colossal avec les techniques de remaillage classique.

On dispose maintenant d'un outil fiable pour le calcul de l'erreur sur une quantité d'intérêt à support local issue d'un problème non-linéaire.

Chapitre 7

Amélioration de la pertinence de l'encadrement

La technique de majoration présentée dans le chapitre CHP.3 repose sur l'utilisation de différents outils. La maîtrise de ceux-ci est nécessaire afin d'améliorer la qualité des bornes. Dans les chapitres CHP.5 et CHP.6, on s'est attaché à résoudre de manière adéquate le problème central ainsi qu'à présenter les premiers encadrements. On propose dans ce chapitre deux manières différentes d'améliorer la pertinence des bornes. La première partie amène à reposer le problème central afin de prendre en compte le terme élastique des bornes. La seconde partie propose une pondération temporelle sur la fonction convexe introduite lors de l'encadrement.

Sommaire

1	Prise en compte du terme élastique	143
1.1	Réécriture du problème central	143
1.2	Résultats	144
2	Introduction d'une nouvelle fonction de pondération	145
2.1	Introduction d'une nouvelle fonction de pondération	145
2.2	Réécriture sous une forme de problème central	146

2.3	Résolution géométrique	147
2.4	Conséquences sur l'encadrement	150
3	Bilan	152

1 Prise en compte du terme élastique

En reprenant les notations introduites dans le chapitre CHP.3, l'encadrement se réduit au calcul d'une fonctionnelle $g_{\hat{x}_h}^*$ en chaque point de Gauss :

$$g_{\hat{x}_h}^*(\delta\hat{x}_h) = - \int_0^T \left\{ \ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^p(\bar{R}, \dot{p}) + \ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E(\bar{R}, \dot{p}) + \ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(\bar{R}, \dot{p}) \right\} dt \quad \text{avec :}$$

$$(\bar{R}, \dot{p}) = \underset{\substack{p^*(t=0) = 0 \\ R^* = k \cdot p^* \geq 0 \\ \dot{p}^* \geq 0}}{\text{Argmin}} \left\{ \int_0^T \left\{ \frac{T-t}{T} \left[\Delta R^* \Delta \dot{p}^* + \mathcal{R}_h \Delta \dot{p}^* + \Delta R^* \dot{\mathcal{P}}_h \right] \right\} dt \right\}$$

où les champs $\mathcal{R}_h, \dot{\mathcal{P}}_h$ sont construits en étudiant le minimum du terme de courbure, c'est à dire la fonctionnelle $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C$. On a vu que le terme élastique $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E(\bar{R}, \dot{p})$ contribue positivement aux bornes et qu'une mauvaise estimation de son minimum conduit ainsi à une surmajoration.

On propose ici une réécriture du problème central, i.e. des termes \mathcal{R}_h et $\dot{\mathcal{P}}_h$ afin de calculer la solution \bar{x} minimisant la somme $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E + \ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C$.

1.1 Réécriture du problème central

Afin de simplifier les notations, on introduit $\mathcal{R}_h^C, \dot{\mathcal{P}}_h^C$ et $\dot{\mathcal{W}}_h^C$ pour les termes précédemment notés $\mathcal{R}_h, \dot{\mathcal{P}}_h$ et $\dot{\mathcal{W}}_h$, puisqu'ils ont été calculés uniquement avec la fonctionnelle $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C$. On a :

$$\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(R^*, \dot{p}^*) = \frac{T-t}{T} \left[\Delta R^* \Delta \dot{p}^* + \mathcal{R}_h^C \Delta \dot{p}^* + \Delta R^* \dot{\mathcal{P}}_h^C \right] + \dot{\mathcal{W}}_h^C$$

L'annexe ANN.(C) met en avant des propriétés que vérifie la fonctionnelle $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E$. On sait qu'elle ne dépend de R^* qu'en régime plastique et qu'elle y atteint sa valeur minimale. On peut ainsi inclure la valeur prise par $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E$ en régime plastique dans le problème central, puis revenir sur le critère $s^* = \inf\{R^* + R_0, R_1\}$ pour le calcul de la borne.

Effectuons quelques manipulations sur le terme d'élasticité afin de lui donner une forme similaire :

$$\begin{aligned} \ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^{E, \text{plas}}(R^*) &= \frac{(R_0 + R^* - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|)^2}{4\mu T} \\ &= \frac{1}{4\mu T} \left[\Delta R^{*2} - 2\Delta R^*(R_0 + R_h - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|) + \|\hat{\sigma}_{d,h}\|^2 \right] \end{aligned}$$

En intégrant sur l'intervalle $[0; T]$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\{ \ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^{E, \text{plas}}(R^*, \dot{p}^*) \right\} dt &= \frac{1}{4\mu T} \int_0^T \left\{ \Delta R^{*2} - 2\Delta R^*(R_0 + R_h - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|) + \|\hat{\sigma}_{d,h}\|^2 \right\} dt \\ &= \frac{1}{4\mu T} \int_0^T \left\{ 2 \int_0^t \{ \Delta R^* \Delta \dot{p}^* \} d\tau - 2\Delta R^*(R_0 + R_h - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|) + \|\hat{\sigma}_{d,h}\|^2 \right\} dt \end{aligned}$$

On peut réécrire l'intégrale de $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^{E, \text{plas}}$ sous la forme suivante :

$$\int_0^T \left\{ \ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^{E, \text{plas}}(R^*, \dot{p}^*) \right\} dt = \frac{k}{2\mu} \int_0^T \left\{ \frac{T-t}{T} \left[\Delta R^* \Delta \dot{p}^* + \Delta R^* \dot{\mathcal{P}}_h^E \right] + \dot{\mathcal{W}}_h^E \right\} dt$$

avec les champs \mathcal{R}_h^E , $\dot{\mathcal{P}}_h^E$ et $\dot{\mathcal{W}}_h^E$ définis tels que :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}}_h^E &= -\frac{R_0 + R_h - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|}{k(T-t)} \\ \dot{\mathcal{W}}_h^E &= \frac{\|\hat{\sigma}_{d,h}\|^2}{2kT} \end{aligned}$$

L'intégrale sur $[0; T]$ de la somme des deux fonctionnelles $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C$ et $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^{E, \text{plas}}$ peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\{ \ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(R^*, \dot{p}^*) + \ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^{E, \text{plas}}(R^*, \dot{p}^*) \right\} dt \\ = \left(1 + \frac{k}{2\mu} \right) \int_0^T \left\{ \frac{T-t}{T} \left[\Delta R^* \Delta \dot{p}^* + \mathcal{R}_h \Delta \dot{p}^* + \Delta R^* \dot{\mathcal{P}}_h \right] + \dot{\mathcal{W}}_h \right\} dt \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{R}_h = \frac{2\mu \mathcal{R}_h^C}{k + 2\mu}; \quad \dot{\mathcal{P}}_h = \frac{2\mu \dot{\mathcal{P}}_h^C + k \dot{\mathcal{P}}_h^E}{k + 2\mu} \quad \text{et} \quad \dot{\mathcal{W}}_h = \frac{2\mu \dot{\mathcal{W}}_h^C + k \dot{\mathcal{W}}_h^E}{k + 2\mu}$$

Sous ce formalisme, on peut injecter ces nouvelles définitions des champs \mathcal{R}_h , $\dot{\mathcal{P}}_h$ et $\dot{\mathcal{W}}_h$ dans le problème central et ainsi reprendre la méthode proposée au chapitre CHP.5 afin de mener à bien le calcul des bornes.

1.2 Résultats

Le tableau TAB.(7.1) présente le gain apporté lorsque le problème central est écrit sur les termes de courbure et élastique. L'apport de cette technique est faible. Les gains offerts par cette amélioration soulignent les ordres de grandeurs mis en jeu. Ainsi, comme présenté dans l'annexe ANN.(C), le terme d'élasticité est inférieur d'un ordre à celui de courbure.

Problème direct	Quantité d'intérêt	ΔI_h (approche originale)	ΔI_h (nouvelle approche)	Gain
Plaque en traction (CHP.6-PART.2)	Tranche centrale	4,30%	4,29%	0,01
Plaque en traction-flexion (CHP.6-PART.3)	coin inférieur gauche	47,41%	47,39%	0,02

TABLE 7.1: Gain apporté par la prise en compte du terme élastique

2 Introduction d'une nouvelle fonction de pondération

2.1 Introduction d'une nouvelle fonction de pondération

La technique de majoration introduite au chapitre CHP.3 repose essentiellement sur l'introduction d'une fonctionnelle convexe $\mathcal{G}(x_{ex} - \hat{x}_h)$. On note $g(x_{ex} - \hat{x}_h)$ la définition locale de cette fonction, soit :

$$g(x_{ex} - \hat{x}_h) = \int_0^t \{(\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h)(\dot{\epsilon}_{ex} - \dot{\epsilon}_h)\} \frac{d\tau}{T}$$

De cette manière, en réutilisant les différentes notations introduites dans le chapitre CHP.3, l'écriture de la borne supérieure peut se mettre sous la forme suivante :

$$\hat{e}_h(I) \leq \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^{**+}} \left\{ \frac{1}{\alpha} \sup_{x^* \in \mathcal{B}} \left\{ \int_{\Omega} \int_0^T \{ \langle \langle x^* - \hat{x}_h, \alpha \delta \hat{x}_h \rangle \rangle - g(x^* - \hat{x}_h) \} dt dV \right\} \right\}$$

avec $\langle \langle x_1, x_2 \rangle \rangle = \text{Tr} [\sigma_1 \cdot \dot{\epsilon}_{p,2} + \sigma_2 \cdot \dot{\epsilon}_{p,1}]$. Toujours dans le chapitre CHP.3, on a montré que la maximisation pouvait se mettre sous une forme locale en espace. Soit :

$$\hat{e}_h(I) \leq \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^{**+}} \left\{ \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \left\{ \sup_{x^* \in \mathcal{B}} \left\{ \int_0^T \{ \langle \langle x^* - \hat{x}_h, \alpha \delta \hat{x}_h \rangle \rangle - g(x^* - \hat{x}_h) \} dt \right\} \right\} dV \right\} \quad (7.1)$$

La fonction dont on cherche le maximum, sous la contrainte $x^* \in \mathcal{B}$ est globale en temps et fait intervenir deux termes. L'un est directement lié à la quantité d'intérêt par le problème miroir ($\langle \langle x^* - \hat{x}_h, \alpha \delta \hat{x}_h \rangle \rangle$), tandis que le second traduit l'erreur globale ($g(x^* - \hat{x}_h)$). Ainsi par essence, les deux termes ne sont pas de même nature. Certes l'introduction du coefficient α permet de pondérer l'amplitude globale de la solution miroir avec les solutions du problème de référence, mais leurs évolutions respectives ne sont pas semblables et conduisent à une surestimation de l'erreur.

Afin de pallier ces problèmes, on propose d'injecter une pondération à la fonctionnelle globale, avec une fonction $a(t)$ positive afin de conserver les propriétés de

convexité. La borne supérieure se met alors sous la forme suivante :

$$\hat{e}_h(I) \leq \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^{*+}} \left\{ \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \left\{ \sup_{x^* \in \mathcal{B}} \left\{ \int_0^T \{ \langle x_{ex} - \hat{x}_h, \alpha \delta \hat{x}_h \rangle - a(t) \cdot g(x^* - \hat{x}_h) \} dt \right\} \right\} dV \right\} \quad (7.2)$$

Remarque 7.1 :

L'introduction de la fonction de pondération $a(t)$ permet de conserver l'aspect garanti de l'outil proposé. En effet, on a :

$$\hat{e}_h(I) \leq \mathcal{G}_{\hat{x}_h}^*(\delta \hat{x}_h) + \mathcal{G}(x_{ex} - \hat{x}_h)$$

et, avec l'introduction de la fonction de pondération, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x_{ex} - \hat{x}_h) &= \int_{\Omega} \int_0^T \{ a(t) g(x_{ex} - \hat{x}_h) \} dt dV \\ &= \int_0^T \left\{ a(t) \int_0^t \left\{ \int_{\Omega} \{ (\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h)(\dot{\epsilon}_{ex} - \dot{\epsilon}_h) \} dV \right\} \frac{d\tau}{T} \right\} dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le terme issu de l'erreur globale prend donc une valeur nulle, quelque soit la fonction $a(t)$ injectée.

2.2 Réécriture sous une forme de problème central

On définit $A(t)$ la valeur primitive de la fonction de pondération a s'annulant à l'instant final, soit :

$$A(t) = \int_t^T \{ a(\tau) \} \frac{d\tau}{T}$$

Alors, on propose un découpage similaire à celui introduit au chapitre CHP.3 en trois termes, un dit directionnel $\ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}^D$, un dit élastique $\ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E$ et un dernier, dit de courbure $\ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C$. Avec l'introduction de la fonction de pondération $a(t)$, en procédant de manière analogue à la démarche illustrée dans l'annexe ANN.(C), ils s'écrivent :

$$\begin{aligned} \ell_{[\delta \hat{x}, \hat{x}]}^D(s^*, R^*, \dot{p}^*) &= P_{\sigma_h} \left\{ s^* \left(A(t) \dot{\epsilon}_p + \delta \dot{\epsilon}_p + a(t) \frac{\hat{\sigma}_d}{2\mu T} \right) + [A(t) \hat{\sigma}_d + \delta \sigma_d] \dot{p}^* \right\} \\ &\quad - \left\| s^* \left(A(t) \dot{\epsilon}_p + \delta \dot{\epsilon}_p + a(t) \frac{\hat{\sigma}_d}{2\mu T} \right) + [A(t) \hat{\sigma}_d + \delta \sigma_d] \dot{p}^* \right\| \\ \ell_{[\delta \hat{x}, \hat{x}]}^E(s^*, R^*) &= a(t) \frac{(s^* - \|\hat{\sigma}_d\|)^2 + 2(R^* + R_0 - s^*)(R_1 - \|\hat{\sigma}_d\|)}{4\mu T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell_{[\delta\hat{x},\hat{x}]}^C(R^*, \dot{p}^*) &= \text{Tr} \left[\delta\hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p + \hat{\sigma}_d \cdot \delta\dot{\hat{\epsilon}}_p + A(t)\hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] + A(t)(R^* + R_0)\dot{p}^* \\ &\quad - (R^* + R_0) \left[A(t)P_{\sigma_h} \left\{ \dot{\hat{\epsilon}}_p \right\} + P_{\sigma_h} \left\{ \delta\dot{\hat{\epsilon}}_p \right\} + a(t) \frac{P_{\sigma_h} \left\{ \hat{\sigma}_d \right\} - \|\hat{\sigma}_d\|}{2\mu T} \right] \\ &\quad - [A(t)P_{\sigma_h} \left\{ \hat{\sigma}_d \right\} + P_{\sigma_h} \left\{ \delta\hat{\sigma}_d \right\}] \dot{p}^* \end{aligned}$$

où la quantité R_1 est définie telle que

$$a(t)R_1 = a(t)P_{\sigma_h} \left\{ \hat{\sigma}_d \right\} + 2\mu TP_{\sigma_h} \left\{ A(t)\dot{\hat{\epsilon}}_p + \delta\dot{\hat{\epsilon}}_p \right\}$$

Enfin, on veut mettre le problème de maximisation EQ.(7.2) sous une forme de problème central afin de réutiliser les mêmes outils pour le résoudre. À cette fin, on redéfinit les termes \mathcal{R}_h , $\dot{\mathcal{P}}_h$ tels que :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_h &= R_h + R_0 - \|\sigma_{d,h}\| - P_{\sigma_h} \left\{ \Delta\sigma_h \right\} - \frac{1}{A(t)} P_{\sigma_h} \left\{ \delta\hat{\sigma}_{d,h} \right\} \\ \dot{\mathcal{P}}_h &= -P_{\sigma_h} \left\{ \Delta\dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \right\} - \frac{1}{A(t)} P_{\sigma_h} \left\{ \delta\dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \right\} - \frac{a(t) (\Delta\|\sigma_{d,h}\|)^2 - \|\Delta\sigma_{d,h}\|^2}{4\mu\|\sigma_{d,h}\|} \end{aligned}$$

et le problème se met alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} (\bar{R}, \dot{p}) &= \underset{\substack{p^*(t=0) = 0 \\ R^* = k.p^* \geq 0 \\ \dot{p}^* \geq 0}}{\text{Argmin}} \left\{ \int_0^T \left\{ A(t) \left[\Delta R^* \Delta \dot{p}^* + \mathcal{R}_h \Delta \dot{p}^* + \Delta R^* \dot{\mathcal{P}}_h \right] \right\} dt \right\} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Remarque 7.2 :

La discrétisation choisie lors de l'approche classique dans le chapitre CHP.5 peut être conservée. En effet, sous ce nouveau formalisme, les champs \mathcal{R}_h et $\dot{\mathcal{P}}_h$ sont respectivement continu et continu par morceaux. On choisit de les représenter sur l'espace des champs continus et affines par morceaux pour \mathcal{R}_h et uniquement affines par morceaux pour $\dot{\mathcal{P}}_h$.

On peut résoudre ce problème avec une fonction $a(t)$ quelconque en utilisant l'approche matricielle développée dans le chapitre CHP.5. Mais pour des raisons de coût de calcul, on préfère réduire la définition de $a(t)$ afin de proposer une méthode de résolution basée sur une extension de l'approche géométrique. On choisit alors $a(t)$ constant par morceaux.

2.3 Résolution géométrique

On développe ici une technique géométrique étendue, afin de résoudre la nouvelle écriture du problème central EQ.(7.3). À cette fin, on note Γ la valeur prise par le

minimum par la fonctionnelle définissant le problème central. Cette valeur s'écrit, avec l'utilisation de la solution \bar{x} :

$$\Gamma = \int_0^T \left\{ A(t) \left[\Delta \bar{R} \Delta \dot{\bar{p}} + \mathcal{R}_h \Delta \dot{\bar{p}} + \Delta \bar{R} \dot{\mathcal{P}}_h \right] \right\} dt$$

2.3.1 Établissement d'équations locales

En travaillant sur les différents termes de Γ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_0^T \left\{ a(t) \int_0^t \left\{ \Delta \bar{R} \Delta \dot{\bar{p}} \right\} d\tau + A(t) \left[\mathcal{R}_h \Delta \dot{\bar{p}} + \Delta \bar{R} \dot{\mathcal{P}}_h \right] \right\} dt \\ &= \int_0^T \left\{ \frac{a(t)}{2T} k \Delta(\bar{p})^2 + A(t) \left[\mathcal{R}_h \Delta \dot{\bar{p}} + k \cdot \Delta \bar{p} \dot{\mathcal{P}}_h \right] \right\} dt \end{aligned}$$

La stationnarité de cette quantité au voisinage de la solution \bar{x} donne :

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \int_0^T \left\{ a(t) k \Delta(\bar{p}) d\bar{p} + A(t) \cdot T \left[\mathcal{R}_h d\dot{\bar{p}} + k \cdot d\bar{p} \dot{\mathcal{P}}_h \right] \right\} \frac{dt}{T} \\ &= \int_0^T \left\{ \left[k \int_t^T \left\{ a(\tau) \Delta \bar{p} + A(\tau) T \dot{\mathcal{P}}_h \right\} d\tau + A(t) T \mathcal{R}_h \right] d\dot{\bar{p}} \right\} \frac{dt}{T} \end{aligned}$$

On souhaite adopter une approche similaire à celle introduite dans le chapitre CHP.5. Ainsi, on introduit le champ \mathcal{Z}_h :

$$\mathcal{Z}_h = k \int_t^T \left\{ a(\tau) p_h - A(\tau) T \dot{\mathcal{P}}_h \right\} \frac{d\tau}{T} - A(t) T \mathcal{R}_h$$

Remarque 7.3 :

On peut noter que malgré l'utilisation d'une fonction de pondération $a(t)$ discontinue, le champ \mathcal{Z}_h reste continue. En effet, seule sa forme intégrée, continue, apparaît dans le calcul de \mathcal{Z}_h .

La stationnarité prend alors la forme suivante :

$$d\Gamma = \int_0^T \left\{ \left[k \int_0^t \left\{ a(\tau) \bar{p} \right\} \frac{d\tau}{T} - \mathcal{Z}_h \right] d\dot{\bar{p}} \right\} \frac{dt}{T}$$

On doit avoir $d\Gamma \geq 0, \forall d\dot{\bar{p}}$; ce qui permet d'écrire les équations locales :

$$\text{Trouver } \bar{p} \text{ défini sur } [0; T] \text{ tel que : } \begin{cases} \bar{p}(t=0) = 0 \\ \dot{\bar{p}} \geq 0 \\ \bar{f} = k \int_0^T \left\{ a(\tau) \bar{p} \right\} \frac{d\tau}{T} - \mathcal{Z}_h \geq 0 \\ \dot{\bar{p}} \cdot \bar{f} = 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

On choisit la description suivante de $a(t)$ sur $[0; T]$:

$$\begin{aligned} a(t) &= a^- \quad \text{si } 0 \leq t < t_0 \\ &= a^+ \quad \text{si } t_0 < t \leq T \end{aligned}$$

On peut réécrire les équations EQ.(7.4) en injectant la définition précédente de $a(t)$ sur $[0; T]$. De plus, on découpe la définition du seuil \bar{f} afin de l'adapter à la fonction de pondération $a(t)$. Enfin, on introduit une relation de continuité sur \bar{p} en $t = t_0$. Le problème central se formule alors sous la forme suivante :

$$\text{Trouver } \bar{p} \text{ défini sur } [0; T] \text{ tel que : } \begin{cases} \bar{p}(t=0) = 0 \\ \dot{\bar{p}} \geq 0 \\ \forall t \in [0; t_0[; \bar{f} = ka^- \cdot \int_t^T \{\bar{p}\} \frac{d\tau}{T} - \mathcal{Z}_h \geq 0 \\ \bar{p}(t_0^-) = \bar{p}(t_0^+) \\ \forall t \in]t_0; T]; \bar{f} = ka^+ \cdot \int_t^T \{\bar{p}\} \frac{d\tau}{T} - \mathcal{Z}_h \geq 0 \\ \dot{\bar{p}} \cdot \bar{f} = 0 \end{cases}$$

2.3.2 Résolution géométrique

De la même manière que pour l'approche classique, on veut utiliser les propriétés de convexité de la solution $\int_t^T \{\bar{p}\} d\tau$ pour proposer une méthode de résolution, directe, du problème central. On introduit à cette fin \bar{P}_a , la primitive de $a(t) \cdot \bar{p}$ s'annulant en $t = T$:

$$\bar{P}_a = \int_t^T \{a(\tau)\bar{p}\} \frac{d\tau}{T}$$

\bar{P}_a doit alors vérifier les propriétés suivantes :

- \bar{P}_a prend une valeur nulle à l'instant final. La fonctionnelle \mathcal{Z}_h s'annule elle aussi en $t = T$. De cette manière, on a $k \cdot \bar{P}_a(t = T) = \mathcal{Z}_h(t = T)$;
- le seuil \bar{f} est positif ou nul. On a donc $k \cdot \bar{P}_a \geq \mathcal{Z}_h$;
- la solution \bar{p} représente une déformation plastique cumulée. Ainsi, elle est par essence croissante. Alors sa primitive s'annulant à l'instant final est une fonction convexe : \bar{P}_a est convexe sur chacun des tronçons $[0; t_0[$ et $]t_0; T]$;
- la solution \bar{p} est choisie continue en t_0 . Alors \bar{P}_a vérifie la propriété suivante à l'instant $t = t_0$: $a^+ \frac{\partial}{\partial t} [\bar{P}_a](t_0^-) = a^- \frac{\partial}{\partial t} [\bar{P}_a](t_0^+)$;
- \bar{p} doit vérifier une condition initiale nulle. Ainsi on a $\bar{p}(t = 0) = 0$. La pente de \bar{P}_a est donc nulle à l'instant initial ; soit $\frac{\partial}{\partial t} [\bar{P}_a](t = 0) = 0$.

Comme illustré sur la figure FIG.(7.1), on peut construire directement la solution \bar{P}_a sur $[0; T]$. On prend l'enveloppe convexe de \mathcal{Z}_h , sous la contrainte liant les pentes en t_0^- et t_0^+ .

De la même manière que pour l'approche géométrique classique, on peut déduire complètement la solution \bar{x} par post-traitement de \bar{P}_a .

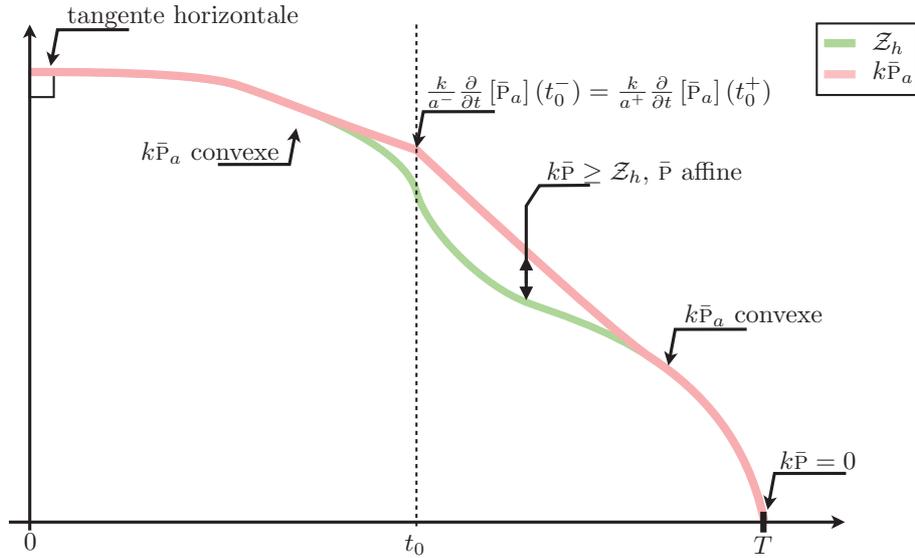


FIGURE 7.1: Illustration de l'utilisation de l'approche géométrique avec une fonction constante par morceaux $a(t)$

2.4 Calcul de la fonction $a(t)$ optimale et évaluation des bornes associées

On choisit $a(t)$ comme une fonction constante par morceaux avec un unique saut en $t = t_0$. La figure FIG.(7.2) illustre cette fonction.

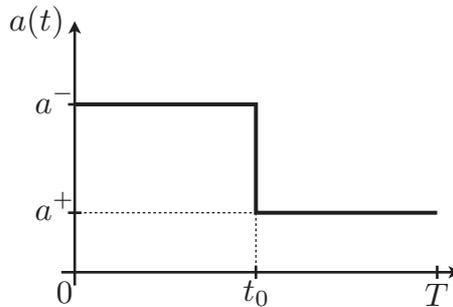


FIGURE 7.2: Définition de $a(t)$

On montre que les coefficients a^- et a^+ peuvent être déterminés simplement en utilisant le comportement quadratique des bornes. En effet, la fonction $a(t)$ étant en facteur de la fonction g , on conserve la convexité. Afin de déterminer les paramètres optimaux, on emploie l'algorithme introduit au chapitre CHP.5 pour déterminer α^- et α^+ . Le tableau TAB.(7.2) présente les paramètres a^- et a^+ optimaux ainsi que les valeurs des bornes associées pour différentes valeurs de t_0 . Ces résultats sont repris sur la figure FIG.(7.3).

t_0	Borne inférieure				Borne supérieure			
	α^-	a^-	a^+	Borne ($\times 10^{-3}$)	α^+	a^-	a^+	Borne ($\times 10^{-3}$)
–	–22,03	1	1	–1,44	6,64	1	1	3,78
0,1	–22,21	0,68	1,02	–1,44	3,02	0,17	0,24	1,56
0,2	–22,23	0,74	1,01	–1,44	4,23	0,25	0,35	1,68
0,3	–22,30	0,73	1,03	–1,43	4,24	0,25	0,36	1,67
0,4	–22,69	0,71	1,05	–1,43	4,23	0,24	0,36	1,66
0,5	–23,09	0,67	1,07	–1,42	4,22	0,22	0,36	1,65
0,6	–23,36	0,61	1,09	–1,41	4,23	0,20	0,36	1,63
0,7	–23,83	0,50	1,14	–1,37	4,17	0,15	0,35	1,56
0,8	–24,52	0,38	1,25	–1,29	4,21	0,11	0,37	1,44
0,9	–19,43	0,34	1,37	–1,31	2,97	0,06	0,27	2,97

TABLE 7.2: Évolution de l'encadrement en fonction de t_0 , ($N_e = 13450$ et $N_t = 20$)

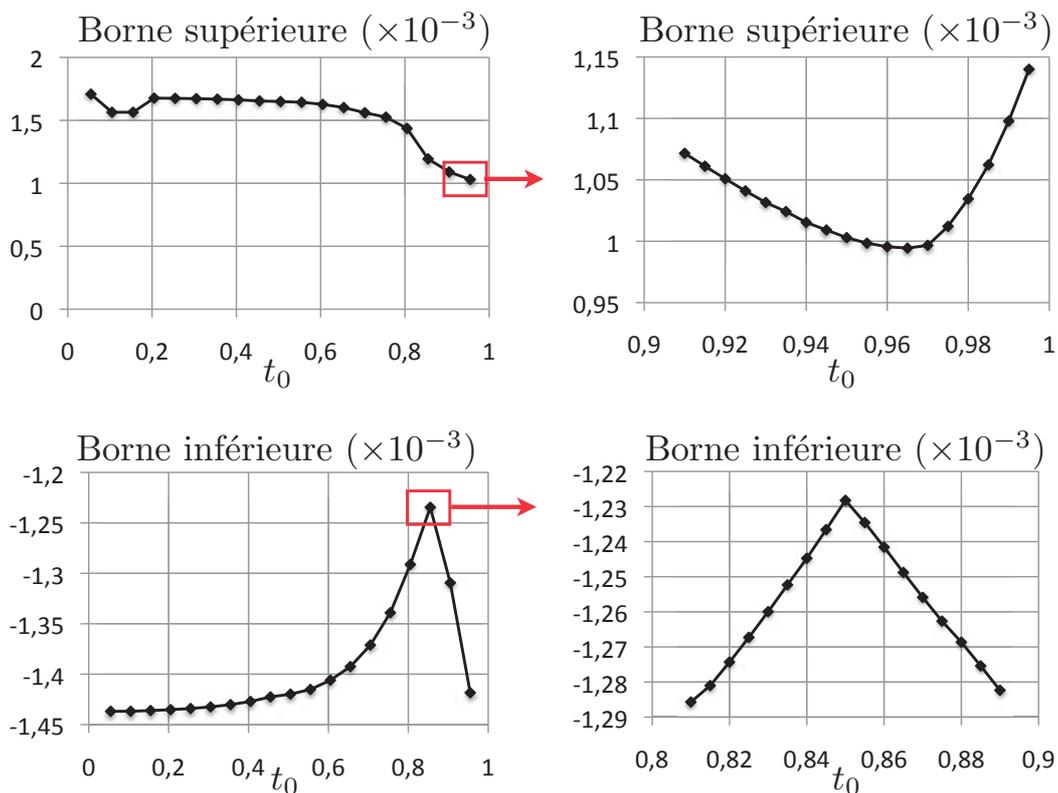


FIGURE 7.3: Évolution des bornes inférieure et supérieure en fonction du paramètre t_0 ($N_e = 13450$ et $N_t = 20$).

L'ajout de la fonction de pondération a un impact différent sur le calcul des bornes inférieure et supérieure. Dans le cas du calcul du minorant, la fonction $a(t)$

conduisant à la meilleure borne inférieure (i.e. la plus grande) est celle où le saut a lieu à la limite de la fenêtre d'extraction. De cette manière, le poids de la fonctionnelle g est intensifié sur la fenêtre d'extraction.

Pour le calcul de la borne supérieure optimale (i.e. la valeur la plus faible), la fonction $a(t)$ y conduisant présente un saut en $t_0 = 0,965.T$, soit proche de T . Ainsi, elle permet d'accentuer le poids relatif à l'erreur globale sur la fin de la fenêtre d'extraction.

Remarque 7.4 :

Dans le cas d'étude avec un coefficient d'extraction pris négatif ($\lambda_\Sigma = -1$, par exemple). Le comportement des bornes en fonction de t_0 est analogue au cas $\lambda_\Sigma = 1$, mais inversé. Ainsi, la meilleure borne supérieure correspond à $t_0 = 0,85.T$ et la meilleure borne inférieure à t_0 proche de T . Toutefois, le gain est plus faible, puisque la borne supérieure passe à $4,13.10^{-3}$ ($6,09.10^{-3}$ précédemment) et la borne inférieure à $-4,14.10^{-3}$ (valeur quasi-identique précédemment).

En ne retenant que les coefficients a^- et a^+ conduisant aux meilleurs bornes, on trouve l'encadrement suivant :

$$-1,23.10^{-3} \leq \hat{I}_h \leq +9,94.10^{-4}$$

Ce qu'on peut réécrire comme intervalle garanti sur la quantité d'intérêt exacte :

$$I_{ex} = 4,07.10^{-3} \pm 27,31\%$$

3 Bilan

Dans ce chapitre, on a présenté deux améliorations afin d'améliorer la pertinence des bornes de l'erreur locale. La première méthode, qui consiste à réécrire le problème central non plus sur le seul terme de courbure mais sur la somme du terme de courbure et du terme d'élasticité n'offre qu'une faible amélioration.

D'un autre côté, on propose d'injecter dans la technique de majoration une fonction de pondération temporelle devant le terme issue de l'erreur globale. Associée à cette méthode, on introduit une extension de la technique de résolution géométrique du problème central. L'ajout de cette fonction de pondération permet d'améliorer considérablement la pertinence de l'outil proposé.

Conclusion

Ce travail a mis en place les outils nécessaires au calcul d'un encadrement de l'erreur sur une quantité d'intérêt locale, issue d'un problème non-linéaire. Cette mesure de l'erreur exploite les propriétés de dualité issues de la formulation du comportement à l'aide du pseudo-potentiel de dissipation. Ce cadre offert par les concepts de dualité associés aux outils d'extraction permet de proposer un estimateur satisfaisant les exigences suivantes :

- ◇ l'encadrement offert est strict ;
- ◇ l'estimateur est non-intrusif : le calcul des bornes se fait en post-traitement de la résolution du problème de référence ;
- ◇ le coût de calcul nécessaire à l'évaluation des bornes est raisonnable ;
- ◇ enfin, l'approche proposée est générale et non limitée au seul cadre des matériaux à comportement linéaire.

En effet, l'utilisation des propriétés de dualité permet de prendre intrinsèquement en compte toutes les erreurs numériques (discrétisation spatiale, discrétisation temporelle et résolution des non-linéarités). Son emploi, combiné avec les outils d'extractions a permis de proposer une nouvelle méthode de mesure de l'erreur locale, introduite dans [Ladevèze, 2006]. Contrairement aux méthodes classiques, cette méthode n'utilise pas la propriété d'orthogonalité de Galerkin. De cette manière, le support de la technique numérique introduite pour le calcul de l'encadrement peut être choisi totalement indépendamment des paramètres de discrétisation du problème direct.

Dans un premier temps, à partir de cette méthode générale, ce travail présente le premier outil, à notre connaissance, d'estimation garantie de l'erreur locale en non-linéaire. Sa mise en oeuvre dans un cadre élastoplastique soulève de nouveaux problèmes, inédits au sein de la thématique de vérification : le problème miroir et le problème central.

- Le **problème miroir** est une généralisation du problème adjoint. C'est un problème rétrograde en temps, associé à une unique quantité d'intérêt. Son comportement, hérité du problème de référence, nécessite une écriture fine afin de mettre en avant un algorithme de résolution associé dont la convergence est assurée. Enfin, c'est un problème dont le chargement, lié à la définition de la quantité d'intérêt, est localisé en espace et en temps. Des techniques de remaillages ont donc été proposées afin que sa résolution soit de bonne qualité.

- Le **problème central** est un problème de minimisation nécessaire pour le calcul des bornes. C'est un problème de contrôle optimal et on peut donc utiliser des outils de résolution classiques. Afin d'alléger le coût requis par sa résolution, une approche géométrique de ce problème est introduite dans le présent travail.

Dans un second temps, l'étude de ces bornes permet de soulever quelques propriétés que vérifie l'estimateur. Ainsi, on a introduit un paramètre d'extraction afin d'assurer au problème miroir un rôle de perturbation. L'étude des bornes conjointement aux différentes grandeurs associées aux problèmes de référence et miroir nous ont permis d'introduire un critère de définition de perturbation. Et c'est dans cette plage où les résultats sont les plus intéressants. De plus, cette première étude a mis en avant une propriété dont l'estimateur hérite du cas linéaire : plus la résolution du problème miroir est fine, meilleure est la qualité des bornes proposées. De cette manière, l'estimateur n'est plus seulement un outil permettant de valider des choix de discrétisation appliqués à un problème en vue de leur optimisation. Mais l'estimateur proposé devient aussi, par son aspect garanti, un véritable outil de calcul pour les quantités d'intérêts avec un maximum de précision.

Enfin, deux améliorations sont introduites afin d'améliorer la pertinence des bornes. La première, basée sur une réécriture du problème central, n'offre pas une réelle amélioration de la qualité des bornes. Par contre, la seconde, utilisant une nouvelle fonction de pondération temporelle permet d'obtenir un encadrement de meilleure qualité.

Ce travail n'est toutefois qu'une première étape pour l'estimation de l'erreur locale dans le cadre des problèmes non-linéaire. En effet, dans le prolongement du travail proposé, on peut envisager différentes perspectives, à court ou long terme :

- Tout d'abord, les outils introduits dans cette thèse ont été illustrés sur des problèmes plans. Le principal obstacle à la mise en pratique de ces outils sur des problèmes à maillages plus complexes ou 3D est le coût. En effet, le problème central, élément clef de la technique d'encadrement, est un problème local. Il est posé et résolu point de Gauss par point de Gauss. Ainsi, son écriture comme sa résolution sont identiques quelque soit la dimension du problème et le maillage utilisé. Par contre, la gestion des données et les méthodes de résolution proposées dans ce manuscrit devront être revisitées face à de nouvelles problématiques, comme le stockage mémoire ou le temps de calcul. Dans le même ordre d'idée, la démarche introduite peut être étendue à d'autres types de matériaux, plus complexes. La technique de majoration reste identique, mais sa mise en oeuvre aussi bien pour le problème miroir que central peut présenter de nouveaux défis.

Enfin, à long terme, l'objectif est d'offrir aux ingénieurs un outil de vérification complet de l'erreur associée à la résolution numérique d'un problème. En effet, disposer d'un outil permettant d'estimer une quantité locale ainsi

que son intervalle garanti offre alors une maîtrise totale de la simulation. La méthode introduite dans ce travail présente les fondements nécessaires à cet objectif, dans le sens où la technique de majoration introduite est générale.

- Ensuite, l'expertise développée ces dernières années au sein du laboratoire permet de proposer quelques extensions de la méthode. On a vu que la résolution du problème miroir est un point clef de la méthode. Il est nécessaire que celle-ci soit fine pour proposer une évaluation pertinente des bornes. Des techniques de calcul dédiées pourraient alors être implantées, afin de proposer une résolution efficace du problème miroir, à moindre coût.

Enfin, la méthode introduite dans ce manuscrit porte principalement sur l'étude de l'erreur sur différentes composantes de la déformation plastique. On peut adopter une démarche identique afin de proposer des outils s'intéressant à l'erreur sur les variables internes ; par exemple la déformation plastique cumulée qui est une grandeur garante de l'histoire du matériau.

Annexe A

Etude du problème adjoint

1 Problème de référence

On rappelle la définition du problème direct dans un cadre linéaire :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver pour tout } (\underline{M}, t) \in \Omega \times [0, T] : \\ & \begin{cases} (\underline{u}(\underline{M}, t), \sigma(\underline{M}, t)) \in \mathbf{U}^{ad} \times \mathbf{S}^{ad} \\ \sigma(\underline{M}, t) = \mathbf{A}(\varepsilon(\underline{u}(\underline{M}, \tau))), \tau \in [0, t] \end{cases} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{ad} &= \left\{ \begin{array}{l} \underline{u}(\underline{M}, t) \in \mathbf{U} \text{ tel que :} \\ \forall \underline{M} \in \Omega, \underline{u}(\underline{M}, 0) = \underline{0} \\ \forall (\underline{M}, t) \in \partial_u \Omega \times [0, T], \underline{u}(\underline{M}, t) = \underline{u}_d \end{array} \right\} \\ \mathbf{S}^{ad} &= \left\{ \begin{array}{l} \sigma(\underline{M}) \in \varepsilon(\mathbf{U}) \text{ telle que :} \\ \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \int_{\Omega} \{ \text{Tr} [\sigma \cdot \varepsilon(\underline{u}^*)] + \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \} dV = \int_{\partial_f \Omega} \{ \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* \} dS \end{array} \right\} \end{aligned}$$

On peut introduire $a(.,.)$ et $b(.)$ telles que :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{u}, \underline{v}) \in \mathbf{U}^2, a(\underline{u}, \underline{v}) &= \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [\mathbf{A}(\varepsilon(\underline{u}|_{\tau}), \tau \in [0, t]) \cdot \dot{\varepsilon}(\underline{v})] \} dt dV \\ \forall \underline{v} \in \mathbf{U}, b(\underline{v}) &= \int_{\Omega} \int_0^T \{ \underline{f}_d \cdot \dot{\underline{v}} \} dt dV + \int_{\partial_f \Omega} \int_0^T \{ \underline{F}_d \cdot \dot{\underline{v}} \} dt dS \end{aligned}$$

alors le problème direct s'écrit simplement :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \underline{u} \in \mathbf{U}^{ad} \text{ tel que :} \\ & \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, a(\underline{u}, \underline{u}^*) = b(\underline{u}^*) \end{aligned}$$

2 Quantité d'intérêt

On définit une quantité d'intérêt avec le couple d'extracteur $(\sigma_\Sigma, \dot{\varepsilon}_\Sigma)$:

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega \int_0^T \{\text{Tr} [\sigma_\Sigma \cdot \dot{\varepsilon} + \sigma \cdot \dot{\varepsilon}_\Sigma]\} dt dV \\ &= \int_\Omega \int_0^T \{\text{Tr} [\sigma_\Sigma \cdot \dot{\varepsilon}(\underline{u}) + \mathbf{A}(\varepsilon(\underline{u}_\tau), \tau \in [0, t]) \cdot \dot{\varepsilon}_\Sigma]\} dt dV \end{aligned}$$

on peut introduire une forme J afin de définir cette quantité d'intérêt :

$$I = J(\underline{u})$$

On peut alors redéfinir la quantité d'intérêt comme la solution d'un problème de minimisation sous contrainte :

$$I = \inf_{\underline{u}^* \in \mathcal{U}^*} (J(\underline{u}^*)) \text{ avec } \mathcal{U}^* = \{\underline{u}^* \in \mathbf{U}^{ad} \mid \forall \underline{v}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, a(\underline{u}^*, \underline{v}^*) = b(\underline{v}^*)\}$$

3 Problème adjoint

Le problème de minimisation associé à la définition de la quantité d'intérêt peut être écrit comme un problème de point selle sur le Lagrangien L :

$$L(\underline{u}^*, \underline{v}^*) = J(\underline{u}^*) + [a(\underline{u}^*, \underline{v}^*) - b(\underline{v}^*)]$$

En écrivant la stationnarité de ce Lagrangien dans un cadre linéaire (i.e. $a(.,.)$ bilinéaire et $b(.)$ linéaire), on a :

- stationnarité par rapport à \underline{v}^* :

$$\forall \underline{v}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \left[\frac{\partial L}{\partial \alpha}(\underline{u}, \alpha \underline{v}^*) \right]_{\alpha=0} = 0 \Leftrightarrow \forall \underline{v}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, a(\underline{u}, \underline{v}^*) = b(\underline{v}^*)$$

ce qui correspond au problème central ;

- stationnarité par rapport à \underline{u}^*

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \left[\frac{\partial L}{\partial \alpha}(\alpha \underline{u}^*, \underline{v}) \right]_{\alpha=0} = 0 \Leftrightarrow \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, a(\underline{u}^*, \underline{v}) = -J(\underline{u}^*)$$

définissant alors le problème adjoint.

Le problème adjoint s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \underline{v} \in \mathbf{U}_0^{ad} \text{ tel que :} \\ \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, a(\underline{u}^*, \underline{v}) = -J(\underline{u}^*) \end{aligned}$$

Ce problème satisfait donc :

$$\begin{aligned} \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad} \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [\mathbf{A} (\underline{\varepsilon}(\underline{u}_\tau^*), \tau \in [0, t]) \cdot \underline{\varepsilon}(\dot{\underline{v}})] \} dt dV \\ = - \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [\sigma_{\Sigma} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*) + \mathbf{A} (\underline{\varepsilon}(\underline{u}_\tau^*), \tau \in [0, t]) \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}_{\Sigma}] \} dt dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad} \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [\mathbf{A} (\underline{\varepsilon}(\underline{u}_\tau^*), \tau \in [0, t]) \cdot (\underline{\varepsilon}(\dot{\underline{v}}) + \dot{\underline{\varepsilon}}_{\Sigma})] \} dt dV \\ = - \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [\sigma_{\Sigma} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*)] \} dt dV \end{aligned}$$

On note $\delta \underline{v}$ tel que $\underline{\varepsilon}(\delta \dot{\underline{v}}) = \underline{\varepsilon}(\dot{\underline{v}}) + \dot{\underline{\varepsilon}}_{\Sigma}$, alors

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad} \int_{\Omega} \int_0^T \{ \text{Tr} [\mathbf{A} (\underline{\varepsilon}(\underline{u}_\tau^*), \tau \in [0, t]) \cdot \underline{\varepsilon}(\delta \dot{\underline{v}}) + \sigma_{\Sigma} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*)] \} dt dV = 0$$

- Dans le cas où A traduit un comportement élastique linéaire :

$$\begin{aligned} \int_0^T \{ \text{Tr} [\mathbf{A} (\underline{\varepsilon}(\underline{u}_\tau), \tau \in [0, t]) \cdot \underline{\varepsilon}(\delta \dot{\underline{v}})] \} dt &= \int_0^T \{ \text{Tr} [\mathbf{A} (\underline{\varepsilon}(\underline{u})) \cdot \underline{\varepsilon}(\delta \dot{\underline{v}})] \} dt \\ &= [\text{Tr} [\mathbf{A} (\underline{\varepsilon}(\underline{u})) \cdot \underline{\varepsilon}(\delta \underline{v})]]_0^T - \int_0^T \{ \text{Tr} [\mathbf{A} (\underline{\varepsilon}(\dot{\underline{u}})) \cdot \underline{\varepsilon}(\delta \underline{v})] \} dt \\ &= [\text{Tr} [\mathbf{A} (\underline{\varepsilon}(\underline{u})) \cdot \underline{\varepsilon}(\delta \underline{v})]]_T - \int_0^T \{ \text{Tr} [\mathbf{A} \underline{\varepsilon}(\delta \underline{v}) \cdot (\underline{\varepsilon}(\dot{\underline{u}}))] \} dt \end{aligned}$$

Alors ce problème satisfait :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad} \int_{\Omega} \left\{ [\text{Tr} [\mathbf{A} (\underline{\varepsilon}(\delta \underline{v})) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*)]]_T - \int_0^T \{ \text{Tr} [(\mathbf{A}(\underline{\varepsilon}(\delta \underline{v})) - \sigma_{\Sigma}) \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*)] \} dt \right\} dV = 0$$

Ce qui donne les équations locales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \underline{v} \in \mathbf{U}_{\Sigma, T}^{ad} \text{ (i.e. } \exists \tilde{\underline{v}} \in \mathbf{U}_0^{ad} \text{ tel que } \dot{\underline{\varepsilon}}(\tilde{\underline{v}}) = \dot{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{v}) - \dot{\underline{\varepsilon}}_{\Sigma} \text{ et } \delta \underline{u}(t = T) = \underline{0}) \\ (\delta \sigma - \sigma_{\Sigma}) \in \mathcal{S}_0^{ad} \\ \delta \sigma = \mathbf{A} \underline{\varepsilon}(\delta \underline{v}) \end{array} \right.$$

- Dans le cas où A traduit un comportement viscoélastique linéaire :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) = \sum_i \left\{ \mathbf{A}_i^{-1} \frac{\partial^i \sigma}{\partial t^i}(\underline{u}) \right\}$$

On note $\tilde{\mathbf{A}}$ le comportement associé à la solution \underline{v} ; soit :

$$\dot{\varepsilon}(\underline{v}) = \sum_i \left\{ \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} \frac{\partial^i \sigma}{\partial t^i}(\underline{v}) \right\}$$

Or on a la propriété :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}, \int_0^T \left\{ \sigma(\underline{u}) \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} \frac{\partial^i \sigma}{\partial t^i}(\underline{v}) \right\} dt &= \sum_{k=1}^i (-1)^{k-1} \left[\frac{\partial^{k-1} \sigma}{\partial t^{k-1}}(\underline{u}) \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} \frac{\partial^{i-k} \sigma}{\partial t^{i-k}}(\underline{v}) \right]_{|T} \\ &+ (-1)^i \int_0^T \left\{ \frac{\partial^i \sigma}{\partial t^i}(\underline{u}) \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} \sigma(\underline{v}) \right\} dt \end{aligned}$$

Alors en prenant le champs \underline{v} ainsi que ses dérivées successives nuls à $t = T$ et en choisissant $\forall i \in \mathbb{N}$, $\tilde{\mathbf{A}}_i = (-1)^{i+1} \mathbf{A}_i$, on a :

$$\int_0^T \{ \sigma(\underline{u}) \dot{\varepsilon}(\underline{v}) + \sigma(\underline{v}) \dot{\varepsilon}(\underline{u}) \} dt = 0 \quad (\text{A.1})$$

Et le problème vérifie la formulation faible suivante :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad} \int_{\Omega} \int_0^T \left\{ \text{Tr} \left[\left(\tilde{\mathbf{A}}(\varepsilon(\delta \underline{v})) - \sigma_{\Sigma} \right) \cdot \dot{\varepsilon}(\underline{u}^*) \right] \right\} dt dV = 0$$

Ce qui donne les équations locales :

$$\begin{cases} \delta \underline{v} \in \mathbf{U}_{\Sigma, T}^{ad} \text{ (i.e. } \exists \tilde{\underline{v}} \in \mathbf{U}_0^{ad} \text{ tel que } \dot{\varepsilon}(\tilde{\underline{v}}) = \dot{\varepsilon}(\delta \underline{v}) - \dot{\varepsilon}_{\Sigma} \text{ et } \delta \underline{v}(t = T) = \underline{0}) \\ (\delta \sigma - \sigma_{\Sigma}) \in \mathcal{S}_0^{ad} \\ \delta \sigma = \tilde{\mathbf{A}} \varepsilon(\delta \underline{v}) \text{ avec } \forall i \in \mathbb{N}, \tilde{\mathbf{A}}_i = (-1)^i \mathbf{A}_i \end{cases}$$

Annexe B

Calcul de l'erreur en dissipation $\hat{\epsilon}_{CRE}$ dans le cas particulier élasto-plastique

Par définition, on a :

$$\hat{\epsilon}_{CRE}(\hat{x}) = - \int_{\Omega} \left\{ \inf_{x^* \in \mathcal{B}} \left\{ \int_0^T \int_0^t \left\{ (s^* - \hat{s}_h) \cdot (\dot{e}_p^* - \dot{e}_{p,h}) \right\} \frac{d\tau dt}{T} \right\} \right\} dV \quad (\text{B.1})$$

où

$$\mathcal{B} = \left\{ x = (s, \dot{e}_p) \text{ tel que : } \begin{cases} s \in \mathcal{S} \text{ et } e \in \mathcal{E} \\ s = \mathbf{A}(e_e) \\ \dot{e}_p = \mathbf{B}(s) \\ \text{et } e_p(t=0) = 0 \end{cases} \right\}$$

En travaillant sur $a(x^*, \hat{x}_h)$ la quantité sous l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} a(x^*, \hat{x}_h) &= (s^* - \hat{s}_h) \cdot (\dot{e}_p^* - \dot{e}_{p,h}) \\ &= \text{Tr} \left[(\sigma^* - \hat{\sigma}_h) \cdot (\dot{\varepsilon}_p^* - \dot{\varepsilon}_{p,h}) \right] - (R^* - \hat{R}_h)(\dot{p}^* - \dot{p}_h) \end{aligned}$$

Et, en utilisant les propriétés de \mathcal{B} , particulièrement

$$\dot{\varepsilon}_p^* = \dot{p}^* \frac{\sigma_d^*}{R^* + R_0} \text{ et } \text{Tr} [\sigma^* \cdot \dot{\varepsilon}_p^*] = (R^* + R_0) \dot{p}^*$$

on a :

$$\begin{aligned} a(x^*, \hat{x}_h) &= -\text{Tr} \left[\sigma_d^* \cdot \left[\dot{p}^* \frac{\hat{\sigma}_{d,h}}{R^* + R_0} + \dot{\varepsilon}_{p,h} \right] \right] + \text{Tr} \left[\hat{\sigma}_{d,h} \cdot \dot{\varepsilon}_{p,h} \right] \\ &\quad + \left[(\hat{R}_h + R_0) \dot{p}^* + (R^* + R_0) \dot{p}_h \right] - (\hat{R}_h + R_0) \dot{p}_h \end{aligned}$$

Le minimum est atteint, $\forall(\underline{M}, t) \in \Omega \times [0; T]$ pour :

$$\sigma_d^* = \|\sigma_d^*\| \cdot \frac{(R^* + R_0)\dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} + \hat{\sigma}_{d,h}\dot{p}^*}{\|(R^* + R_0)\dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} + \hat{\sigma}_{d,h}\dot{p}^*\|}$$

Or comme $x^* \in \mathcal{B}$,

$$0 \leq \|\sigma_d^*\| \leq R^* + R_0$$

et le minimum est atteint pour $\|\sigma_d^*\| = R^* + R_0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} a(x^*, \hat{x}_h) &= -\|(R^* + R_0)\dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} + \hat{\sigma}_{d,h}\dot{p}^*\| + \text{Tr} \left[\hat{\sigma}_{d,h} \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \right] \\ &\quad + \left[(\hat{R}_h + R_0)\dot{p}^* + (R^* + R_0)\dot{\hat{p}}_h \right] - (\hat{R}_h + R_0)\dot{\hat{p}}_h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \dot{p}^*}(x^*, \hat{x}_h) &= -\frac{\text{Tr} \left[\hat{\sigma}_{d,h} \cdot \left[(R^* + R_0)\dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} + \hat{\sigma}_{d,h}\dot{p}^* \right] \right]}{\|(R^* + R_0)\dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} + \hat{\sigma}_{d,h}\dot{p}^*\|} + (\hat{R}_h + R_0) \\ &\geq -\|\hat{\sigma}_{d,h}\| + (\hat{R}_h + R_0) \end{aligned}$$

Or \hat{x}_h est thermodynamiquement admissible, et vérifie alors $\|\hat{\sigma}_{d,h}\| - (\hat{R}_h + R_0) \leq 0$, ainsi $\frac{\partial a}{\partial \dot{p}^*} \geq 0$. De cette manière, $\forall(\underline{M}, t) \in \Omega \times [0, T]$, le champs \dot{p}^* qui conduit au minimum de a est le champs constamment nul. Comme, de plus $p^*(t = 0) = 0$, on a $\forall(\underline{M}, t) \in \Omega \times [0, T]$ $p = 0$ et $R = 0$.

On a donc :

$$a(x^*, \hat{x}_h) = R_0(\dot{\hat{p}}_h - \|\dot{\hat{\epsilon}}_{p,h}\|) + \text{Tr} \left[\hat{\sigma}_{d,h} \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \right] - (\hat{R}_h + R_0)\dot{\hat{p}}_h$$

Et on retrouve l'équation 2.24.

Annexe C

Manipulation sur les bornes

L'objet de cette annexe est de présenter les étapes de calculs nécessaires aux démarches proposées dans le chapitre CHP.3.

1 Découpage de $\ell_{[\delta\hat{x},\hat{x}]}(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*)$

La fonction $\ell_{[\delta\hat{x},\hat{x}]}(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*)$ dont la connaissance du minimum est nécessaire afin d'établir un encadrement, peut être dissociée en plusieurs *sous-fonctionnelles*. Le but de cette écriture est de séparer les difficultés. En effet, différents aspects sont à prendre en compte, comme le fait de travailler avec des formes tensorielles ou les élastiques ou non linéaire de la fonctionnelle. En séparant les différents termes, il sera plus aisé de comprendre leur rôle et leur ordre de grandeur.

En notant $I = \ell_{[\delta\hat{x},\hat{x}]}(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*)$, on a :

$$\begin{aligned}
 I &= - \left\| \lambda^* \left[\frac{T-t}{T} \dot{\hat{\epsilon}}_p + \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p + \frac{\hat{\sigma}_d}{2\mu T} \right] + \left[\frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_d + \delta \sigma_d \right] \dot{p}^* \right\| \\
 &\quad + \text{Tr} \left[\delta \hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p + \hat{\sigma}_d \cdot \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] + \frac{T-t}{T} \left((R^* + R_0) \dot{p}^* + \text{Tr} \left[\hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] \right) + \frac{\lambda^{*2} + \|\hat{\sigma}_d\|^2}{4\mu T} \\
 &= \ell_{[\delta\hat{x},\hat{x}]}^D(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*) \\
 &\quad - P_{\sigma_h} \left\{ \lambda^* \left[\frac{T-t}{T} \dot{\hat{\epsilon}}_p + \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p + \frac{\hat{\sigma}_d}{2\mu T} \right] + \left[\frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_d + \delta \sigma_d \right] \dot{p}^* \right\} \\
 &\quad + \text{Tr} \left[\delta \hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p + \hat{\sigma}_d \cdot \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] + \frac{T-t}{T} \left((R^* + R_0) \dot{p}^* + \text{Tr} \left[\hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] \right) + \frac{\lambda^{*2} + \|\hat{\sigma}_d\|^2}{4\mu T}
 \end{aligned}$$

où la fonctionnelle $\ell_{[\delta\hat{x},\hat{x}]}^D(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*)$ est définie telle que :

$$\begin{aligned}
 \ell_{[\delta\hat{x},\hat{x}]}^D(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*) &= P_{\sigma_h} \left\{ \lambda^* \left[\frac{T-t}{T} \dot{\hat{\epsilon}}_p + \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p + \frac{\hat{\sigma}_d}{2\mu T} \right] + \left[\frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_d + \delta \sigma_d \right] \dot{p}^* \right\} \\
 &\quad - \left\| \lambda^* \left[\frac{T-t}{T} \dot{\hat{\epsilon}}_p + \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p + \frac{\hat{\sigma}_d}{2\mu T} \right] + \left[\frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_d + \delta \sigma_d \right] \dot{p}^* \right\|
 \end{aligned}$$

La quantité I s'écrit alors maintenant :

$$\begin{aligned}
I &= \ell_{[\delta\hat{x},\hat{x}]}^D(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*) \\
&\quad - P_{\sigma_h} \left\{ \lambda^* \left[\frac{T-t}{T} \dot{\hat{\epsilon}}_p + \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] + \left[\frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_d + \delta \sigma_d \right] \dot{p}^* \right\} \\
&\quad + \text{Tr} \left[\delta \hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p + \hat{\sigma}_d \cdot \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] + \frac{T-t}{T} \left((R^* + R_0) \dot{p}^* + \text{Tr} \left[\hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] \right) \\
&\quad + \frac{(\lambda^* - \|\hat{\sigma}_d\|)^2 - 2\lambda^* (P_{\sigma_h} \{ \hat{\sigma}_d \} - \|\hat{\sigma}_d\|)}{4\mu T}
\end{aligned}$$

Afin de simplifier l'écriture, on peut introduire la quantité R_1 :

$$R_1 = P_{\sigma_h} \{ \hat{\sigma}_d \} + 2\mu P_{\sigma_h} \left\{ (T - \tau) \dot{\hat{\epsilon}}_p + T \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p \right\}$$

En l'injectant dans l'équation définissant la quantité I , on a :

$$\begin{aligned}
I &= \ell_{[\delta\hat{x},\hat{x}]}^D(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*) + \frac{(\lambda^* - \|\hat{\sigma}_d\|)^2 - 2\lambda^* (R_1 - \|\hat{\sigma}_d\|)}{4\mu T} \\
&\quad - P_{\sigma_h} \left\{ \left[\frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_d + \delta \hat{\sigma}_d \right] \dot{p}^* \right\} + \text{Tr} \left[\delta \hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p + \hat{\sigma}_d \cdot \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] + \frac{T-t}{T} \left((R^* + R_0) \dot{p}^* + \text{Tr} \left[\hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] \right) \\
&= \ell_{[\delta\hat{x},\hat{x}]}^D(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*) + \frac{(\lambda^* - \|\hat{\sigma}_d\|)^2 + 2(R^* + R_0 - \lambda^*) (R_1 - \|\hat{\sigma}_d\|)}{4\mu T} \\
&\quad - (R^* + R_0) \left[P_{\sigma_h} \left\{ \frac{T-t}{T} \dot{\hat{\epsilon}}_p + \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p + \frac{\hat{\sigma}_d}{2\mu T} \right\} - \frac{\|\hat{\sigma}_d\|}{2\mu T} \right] - P_{\sigma_h} \left\{ \left[\frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_d + \delta \hat{\sigma}_d \right] \dot{p}^* \right\} \\
&\quad + \text{Tr} \left[\delta \hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p + \hat{\sigma}_d \cdot \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] + \frac{T-t}{T} \left((R^* + R_0) \dot{p}^* + \text{Tr} \left[\hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] \right) \\
&= \ell_{[\delta\hat{x},\hat{x}]}^D(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*) + \ell_{[\delta\hat{x},\hat{x}]}^E(\lambda^*, R^*) \\
&\quad - (R^* + R_0) \left[P_{\sigma_h} \left\{ \frac{T-t}{T} \dot{\hat{\epsilon}}_p + \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p + \frac{\hat{\sigma}_d}{2\mu T} \right\} - \frac{\|\hat{\sigma}_d\|}{2\mu T} \right] - P_{\sigma_h} \left\{ \left[\frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_d + \delta \hat{\sigma}_d \right] \dot{p}^* \right\} \\
&\quad + \text{Tr} \left[\delta \hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p + \hat{\sigma}_d \cdot \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] + \frac{T-t}{T} \left((R^* + R_0) \dot{p}^* + \text{Tr} \left[\hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] \right)
\end{aligned}$$

où l'on a introduit la fonctionnelle $\ell_{[\delta\hat{x},\hat{x}]}^E(\lambda^*, R^*)$ telle que :

$$\ell_{[\delta\hat{x},\hat{x}]}^E(\lambda^*, R^*) = \frac{(\lambda^* - \|\hat{\sigma}_d\|)^2 + 2(R^* + R_0 - \lambda^*) (R_1 - \|\hat{\sigma}_d\|)}{4\mu T}$$

Enfin, on note :

$$\begin{aligned} \ell_{[\delta x, \hat{x}]}^C(R^*, \dot{p}^*) &= \text{Tr} \left[\delta \hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p + \hat{\sigma}_d \cdot \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p + \frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_d \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_p \right] + \frac{T-t}{T} (R^* + R_0) \dot{p}^* \\ &\quad - (R^* + R_0) \left[\frac{T-t}{T} \text{P}_{\sigma_h} \{ \dot{\hat{\epsilon}}_p \} + \text{P}_{\sigma_h} \{ \delta \dot{\hat{\epsilon}}_p \} + \frac{\text{P}_{\sigma_h} \{ \hat{\sigma}_d \} - \|\hat{\sigma}_d\|}{2\mu T} \right] \\ &\quad - \left[\frac{T-t}{T} \text{P}_{\sigma_h} \{ \hat{\sigma}_d \} + \text{P}_{\sigma_h} \{ \delta \hat{\sigma}_d \} \right] \dot{p}^* \end{aligned}$$

Et on peut ainsi séparer la fonctionnelle $\ell_{[\delta \hat{x}, \hat{x}]}^E(\mathcal{L}^*, R^*)$ en trois *sous-fonctionnelles* :

$$\ell_{[\delta \hat{x}, \hat{x}]}(\mathcal{L}^*, R^*, \dot{p}^*) = \ell_{[\delta x, \hat{x}]}^D(\mathcal{L}^*, R^*, \dot{p}^*) + \ell_{[\delta \hat{x}, \hat{x}]}^E(\mathcal{L}^*, R^*) + \ell_{[\delta x, \hat{x}]}^C(R^*, \dot{p}^*)$$

2 Etude de l'ordre de grandeur des différents termes

Le but de cette partie est de présenter une étude de l'ordre de grandeur de la fonctionnelle $\ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}(\mathcal{L}^* R^*, \dot{p}^*)$. Afin de mener à bien celle-ci, on présente ici une étude terme à terme de $\ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}(\mathcal{L}^* R^*, \dot{p}^*)$. Enfin, on introduit la différence Δx_h entre les solutions admissible et éléments finis du problème direct telle que :

$$\Delta x_h = \hat{x}_h - x_h \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \sigma_h = \hat{\sigma}_h - \sigma_h \\ \Delta \dot{\epsilon}_{p,h} = \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} - \dot{\epsilon}_{p,h} \\ \Delta \dot{p}_h = \dot{\hat{p}}_h - \dot{p}_h \\ \Delta R_h = \hat{R}_h - R_h \end{cases}$$

En outre, afin de mener une étude sur les ordres de grandeur, il nous faut définir ce qui est petit ou négligeable devant qui. On suppose alors les quantités du problèmes direct comme les grandeurs de référence. De plus, on fait l'hypothèse que ce problème est résolu de manière suffisamment précise de manière à ce que l'erreur qui lui est associée soit de premier ordre. Enfin, on suppose que les quantités issues du problème miroir soient des perturbations de celles issues du problème direct et ainsi qu'elles soient de premier ordre.

Sous ses hypothèses, on a les relations :

$$\Delta x_h = o(x_h) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \sigma_h = o(\sigma_h) \\ \Delta \dot{\epsilon}_{p,h} = o(\dot{\epsilon}_{p,h}) \\ \Delta \dot{p}_h = o(\dot{p}_h) \\ \Delta R_h = o(R_h) \end{cases} \quad \text{et} \quad \delta \hat{x}_h = o(x_h) \Leftrightarrow \begin{cases} \delta \hat{\sigma}_h = o(\sigma_h) \\ \delta \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} = o(\dot{\epsilon}_{p,h}) \\ \delta \dot{\hat{p}}_h = o(\dot{p}_h) \\ \delta \hat{R}_h = o(R_h) \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

2.1 Etude de $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^D(\mathfrak{L}^*, R^*, \dot{p}^*)$

On introduit les champs suivants, "orthogonaux" deux à deux :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_d &= \mathbb{P}_{\sigma_h} \left\{ \frac{T-t}{T} \dot{\varepsilon}_{p,h} + \delta \dot{\varepsilon}_{p,h} + \frac{\hat{\sigma}_{d,h}}{2\mu T} \right\} \\ &= \left[\frac{T-t}{T} \frac{\dot{p}_h}{R_h + R_0} + \frac{1}{2\mu T} \right] \sigma_{d,h} + \mathbb{P}_{\sigma_h} \left\{ \frac{T-t}{T} \Delta \dot{\varepsilon}_{p,h} + \delta \dot{\varepsilon}_{p,h} + \frac{\Delta \sigma_{d,h}}{2\mu T} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_\perp &= \mathbb{P}_{\sigma_h^\perp} \left\{ \frac{T-t}{T} \dot{\varepsilon}_{p,h} + \delta \dot{\varepsilon}_{p,h} + \frac{\hat{\sigma}_{d,h}}{2\mu T} \right\} \\ &= \frac{T-t}{T} \Delta \dot{\varepsilon}_{p,h} + \delta \dot{\varepsilon}_{p,h} + \frac{\Delta \sigma_{d,h}}{2\mu T} - \mathbb{P}_{\sigma_h} \left\{ \frac{T-t}{T} \Delta \dot{\varepsilon}_{p,h} + \delta \dot{\varepsilon}_{p,h} + \frac{\Delta \sigma_{d,h}}{2\mu T} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_d &= \mathbb{P}_{\sigma_h} \left\{ \frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_{d,h} + \delta \hat{\sigma}_{d,h} \right\} \\ &= \frac{T-t}{T} \sigma_{d,h} + \mathbb{P}_{\sigma_h} \left\{ \frac{T-t}{T} \Delta \sigma_{d,h} + \delta \hat{\sigma}_{d,h} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\perp &= \mathbb{P}_{\sigma_h^\perp} \left\{ \frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_{d,h} + \delta \hat{\sigma}_{d,h} \right\} \\ &= \frac{T-t}{T} \Delta \sigma_{d,h} + \delta \hat{\sigma}_{d,h} - \mathbb{P}_{\sigma_h} \left\{ \frac{T-t}{T} \Delta \sigma_{d,h} + \delta \hat{\sigma}_{d,h} \right\}\end{aligned}$$

$$\Delta \sigma_{d,h}$$

Des hypothèses EQ.(C.1), on peut lier l'erreur en contrainte et l'erreur en taux de déformation totale. Ainsi, en séparant les régimes élastique et plastique, on a :

- en régime élastique : $\Delta \sigma_{d,h} = \Delta \mathbf{A}(\varepsilon_{e,h}) = 2\mu \Delta \varepsilon_{e,h} \approx 2\mu T \Delta \dot{\varepsilon}_{e,h} = 2\mu T \Delta \dot{\varepsilon}_h$
- en régime plastique : $\Delta \sigma_{d,h} = k \cdot \Delta p_h \approx k T \Delta \dot{p}_h = k T \Delta \dot{\varepsilon}_{p,h} \approx k T \Delta \dot{\varepsilon}_h$

En utilisant ces dernières remarques, on peut donner l'ordre de grandeur des différents tenseurs ε_d , ε_\perp , σ_d et σ_\perp , :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_d &= \left(\frac{T-t}{T} \frac{\dot{p}_h}{R_h + R^*} + \frac{1}{2\mu T} \right) \sigma_{d,h} + (2\mu + k) T \cdot o(\dot{\varepsilon}_h) \\ \dot{\varepsilon}_\perp &= (2\mu + k) T \cdot o(\dot{\varepsilon}_h) \\ \sigma_d &= \frac{T-t}{T} \sigma_{d,h} + o(\sigma_{d,h}) \\ \sigma_\perp &= o(\sigma_{d,h})\end{aligned}$$

Enfin, on peut faire des remarques sur les projections des tenseurs ε_d et σ_d selon la direction $\sigma_{d,h}$. Ayant leur premier ordre respectif dirigé positivement par

rapport à la contrainte éléments finis $\sigma_{d,h}$, on montre aisément : $P_{\sigma_h} \{\dot{\epsilon}_d\} = \|\dot{\epsilon}_d\|$ et $P_{\sigma_h} \{\sigma_d\} = \|\sigma_d\|$.

En prenant en comptes toutes les considérations et remarques précédentes, on peut effectuer quelques manipulations sur $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^D(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*)$:

$$\begin{aligned} \ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^D(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*) &= P_{\sigma_h} \{\lambda^*(\dot{\epsilon}_d + \dot{\epsilon}_\perp) + (\sigma_d + \sigma_\perp) \dot{p}^*\} - \|\lambda^*(\dot{\epsilon}_d + \dot{\epsilon}_\perp) + (\sigma_d + \sigma_\perp) \dot{p}^*\| \\ &= \|\lambda^* \dot{\epsilon}_d + \sigma_d \dot{p}^*\| - \|\lambda^*(\dot{\epsilon}_d + \dot{\epsilon}_\perp) + (\sigma_d + \sigma_\perp) \dot{p}^*\| \\ &= \frac{\|\lambda^* \dot{\epsilon}_d + \sigma_d \dot{p}^*\|^2 - (\lambda^*(\dot{\epsilon}_d + \dot{\epsilon}_\perp) + (\sigma_d + \sigma_\perp) \dot{p}^*)^2}{\|\lambda^* \dot{\epsilon}_d + \sigma_d \dot{p}^*\| + \|\lambda^*(\dot{\epsilon}_d + \dot{\epsilon}_\perp) + (\sigma_d + \sigma_\perp) \dot{p}^*\|} \\ &= \frac{\|\lambda^* \dot{\epsilon}_d + \sigma_d \dot{p}^*\|^2 - ((\lambda^* \dot{\epsilon}_d + \sigma_d \dot{p}^*) + (\lambda^* \dot{\epsilon}_\perp + \sigma_\perp \dot{p}^*))^2}{\|\lambda^* \dot{\epsilon}_d + \sigma_d \dot{p}^*\| + \|\lambda^*(\dot{\epsilon}_d + \dot{\epsilon}_\perp) + (\sigma_d + \sigma_\perp) \dot{p}^*\|} \\ &= \frac{-\|\lambda^* \dot{\epsilon}_\perp + \sigma_\perp \dot{p}^*\|^2}{\|\lambda^* \dot{\epsilon}_d + \sigma_d \dot{p}^*\| + \|\lambda^*(\dot{\epsilon}_d + \dot{\epsilon}_\perp) + (\sigma_d + \sigma_\perp) \dot{p}^*\|} \end{aligned}$$

Afin de comprendre la dépendance de $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^D$ en fonction de ses paramètres $(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*)$, étudions sa valeur en fonction du régime de la solution x^* .

– Si x^* est en régime élastique, on a $\dot{p}^* = 0$; alors :

$$\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^D(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*) = \frac{-\lambda^* \|\dot{\epsilon}_\perp\|^2}{\|\dot{\epsilon}_d\| \|\dot{\epsilon}_d + \dot{\epsilon}_\perp\|} \stackrel{\min}{=} \frac{-(R^* + R_0)^* \|\dot{\epsilon}_\perp\|^2}{\|\dot{\epsilon}_d\| \|\dot{\epsilon}_d + \dot{\epsilon}_\perp\|}$$

– Si x^* est en régime plastique, on a $\lambda^* = \|\sigma_d^*\| = R^* + R_0$, la fonctionnelle $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^D(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*)$ s'écrit donc :

$$\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^D(\lambda^*, R^*, \dot{p}^*) = \frac{-\|(R^* + R_0) \dot{\epsilon}_\perp + \sigma_\perp \dot{p}^*\|^2}{\|(R^* + R_0) \dot{\epsilon}_d + \sigma_d \dot{p}^*\| \|(R^* + R_0) (\dot{\epsilon}_d + \dot{\epsilon}_\perp) + (\sigma_d + \sigma_\perp) \dot{p}^*\|}$$

Ainsi, dans tous les cas, la variable λ^* n'intervient pas. On peut donc conclure :

$$\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^D(R^*, \dot{p}^*) \text{ est un terme } \mathbf{n\acute{e}gatif d'ordre 2}.$$

2.2 Etude de $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E(\lambda^*, R^*)$

Avant toutes choses, intéressons-nous au signe de $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E(\lambda^*, R^*)$. On montre que cette fonction est positive. En effet, la solution x^* étant plastiquement admissible, la norme de sa contrainte λ^* vérifie $R^* + R_0 - \lambda^* \geq 0$. De plus $R_1 - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|$ est aussi positif ; en effet :

$$\begin{aligned} R_1 - \|\hat{\sigma}_{d,h}\| &= P_{\sigma_h} \{\hat{\sigma}_d\} - \|\hat{\sigma}_{d,h}\| + 2\mu P_{\sigma_h} \left\{ (T-t) \dot{\epsilon}_{p,h} + T \delta \dot{\epsilon}_p \right\} \\ &= o(\|\sigma_{d,h}\|) + 2\mu \cdot O(\dot{p}_h) \geq 0 \end{aligned}$$

Effectuons maintenant quelques manipulations sur la fonctionnelle $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E(\lambda^*, R^*)$ afin de déterminer son minimum :

$$\begin{aligned}\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E(\lambda^*, R^*) &= \frac{(\lambda^* - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|)^2 + 2(R^* + R_0 - \lambda^*)(R_1 - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|)}{4\mu T} \\ &= \frac{(\lambda^* - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|)(\lambda^* - \|\hat{\sigma}_{d,h}\| - 2(R_1 - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|))}{4\mu T} \\ &\quad + \frac{(R^* + R_0 - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|)(R_1 - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|)}{2\mu T}\end{aligned}$$

$\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E(\lambda^*, R^*)$ est une fonction convexe en λ^* , elle atteint sa valeur minimum pour $\lambda^* = \inf\{R_0 + R^*, R_1\}$.

Pour déterminer l'ordre de grandeur, étudions la valeur qu'elle prend en fonction du régime de la solution :

- Cas du régime élastique (i.e. $\lambda^* = R_1 \leq R^* + R_0$)

$$\begin{aligned}\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^{E,\text{élas}}(R^*) &= \frac{(R_1 - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|)(-R_1 + \|\hat{\sigma}_{d,h}\|)}{4\mu T} + \frac{(R^* + R_0 - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|)(R_1 - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|)}{2\mu T} \\ &= \frac{(R_1 - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|)(2((R^* + R_0) - R_1) + R_1 - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|)}{4\mu T} \\ &= \frac{(R_1 - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|)^2 + 2((R^* + R_0) - R_1)(R_1 - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|)}{4\mu T} \\ &\stackrel{\min}{=} \frac{(R_1 - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|)^2}{4\mu T}\end{aligned}$$

- Cas du régime plastique (i.e. $\lambda^* = R^* + R_0 \leq R_1$)

$$\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^{E,\text{plas}}(R^*) = \frac{(R_0 + R^* - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|)^2}{4\mu T} \stackrel{\min}{=} 0$$

On peut tout d'abord noter que le minimum de $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E$ ne dépend pas de la variable λ^* . De plus, sur chacun des régimes élastique et plastique, c'est un terme petit d'ordre 2. On peut ainsi résumer :

$$\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^E(R^*) \text{ est un terme } \mathbf{\text{positif d'ordre 2}}.$$

2.3 Etude de $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(R^*, \dot{p}^*)$

On propose ici une réécriture du terme $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(R^*, \dot{p}^*)$. Ainsi effectuons tout d'abord quelques manipulations sur cette fonctionnelle.

$$\begin{aligned} \ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(R^*, \dot{p}^*) &= \text{Tr} \left[\delta\hat{\sigma}_{d,h} \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} + \hat{\sigma}_{d,h} \cdot \delta\dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} + \frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_{d,h} \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \right] + \frac{T-t}{T} (R^* + R_0) \dot{p}^* \\ &\quad - (R^* + R_0) \left[\frac{T-t}{T} P_{\sigma_h} \{ \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \} + P_{\sigma_h} \{ \delta\dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \} + \frac{P_{\sigma_{d,h}} \{ \hat{\sigma}_{d,h} \} - \| \hat{\sigma}_{d,h} \|}{2\mu T} \right] \\ &\quad - \left[\frac{T-t}{T} P_{\sigma_h} \{ \hat{\sigma}_{d,h} \} + P_{\sigma_{d,h}} \{ \delta\hat{\sigma}_{d,h} \} \right] \dot{p}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(R^*, \dot{p}^*) &= \text{Tr} \left[\delta\hat{\sigma}_{d,h} \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} + \hat{\sigma}_{d,h} \cdot \delta\dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} + \frac{T-t}{T} \hat{\sigma}_{d,h} \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \right] \\ &\quad + \frac{T-t}{T} (\Delta R^* + R_h + R_0) (\Delta \dot{p}^* + \dot{p}_h) \\ &\quad - (\Delta R^* + R_h + R_0) \left[\frac{T-t}{T} \dot{p}_h + \frac{T-t}{T} P_{\sigma_h} \{ \Delta \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \} + P_{\sigma_h} \{ \delta\dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \} \right. \\ &\quad \quad \left. + \frac{P_{\sigma_h} \{ \hat{\sigma}_{d,h} \} - \| \hat{\sigma}_{d,h} \|}{2\mu T} \right] \\ &\quad - \left[\frac{T-t}{T} \| \sigma_{d,h} \| + \frac{T-t}{T} P_{\sigma_h} \{ \Delta \sigma_{d,h} \} + P_{\sigma_{d,h}} \{ \delta\hat{\sigma}_{d,h} \} \right] (\Delta \dot{p}^* + \dot{p}_h) \end{aligned}$$

On introduit le champ Δx^* comme la différence entre le champ inconnu x^* solution éléments finis du problème direct x_h : $\Delta R^* = R^* - R_h$ et $\Delta \dot{p}^* = \dot{p}^* - \dot{p}_h$. La fonctionnelle $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(R^*, \dot{p}^*)$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(R^*, \dot{p}^*) &= \frac{T-t}{T} \Delta R^* \Delta \dot{p}^* \\ &\quad + \frac{T-t}{T} \Delta R^* \left[-P_{\sigma_h} \{ \Delta \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \} - \frac{T}{T-t} P_{\sigma_h} \{ \delta\dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \} - \frac{P_{\sigma_h} \{ \hat{\sigma}_h \} - \| \hat{\sigma}_{d,h} \|}{2\mu(T-t)} \right] \\ &\quad + \frac{T-t}{T} \left[R_h + R_0 - \| \sigma_{d,h} \| - P_{\sigma_h} \{ \Delta \sigma_{d,h} \} - \frac{T}{T-t} P_{\sigma_h} \{ \delta\hat{\sigma}_{d,h} \} \right] \Delta \dot{p}^* \\ &\quad + \text{Tr} \left[\delta\hat{\sigma}_{d,h} \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} + \hat{\sigma}_{d,h} \cdot \delta\dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \right] + (R_h + R_0) P_{\sigma_h} \{ \delta\dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \} - P_{\sigma_h} \{ \delta\hat{\sigma}_{d,h} \} \dot{p}_h \\ &\quad + \frac{T-t}{T} \left[\text{Tr} \left[\hat{\sigma}_{d,h} \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \right] - (R_h + R_0) \dot{p}_h - (R_h + R_0) P_{\sigma_h} \{ \Delta \dot{\hat{\epsilon}}_{p,h} \} \right. \\ &\quad \quad \left. - P_{\sigma_h} \{ \Delta \sigma_{d,h} \} \dot{p}_h \right] \\ &\quad - (R_h + R_0) \frac{P_{\sigma_h} \{ \hat{\sigma}_{d,h} \} - \| \hat{\sigma}_{d,h} \|}{2\mu T} \end{aligned}$$

On remarque que la solution $\delta\hat{x}_h$ est défini en temps rétrograde. Elle admet donc des conditions finales $\delta\hat{x}_h(t = T) = 0$. De plus, on admet que leur pente est aussi

nulle à l'instant finale. De cette manière, on se permet de forcer la factorisation par $\frac{T-t}{T}$, conduisant alors aux termes $\frac{T}{T-t}\delta\hat{x}_h$ qui prennent ainsi la valeur finie nulle à $t = T$.

$$\begin{aligned}
\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(R^*, \dot{p}^*) &= \frac{T-t}{T} \Delta R^* \Delta \dot{p}^* \\
&+ \frac{T-t}{T} \Delta R^* \left[-\text{P}_{\sigma_h} \{ \Delta \dot{\hat{e}}_{p,h} \} - \frac{T}{T-t} \text{P}_{\sigma_h} \left\{ \delta \dot{\hat{e}}_{p,h} \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\text{P}_{\sigma_h} \{ \hat{\sigma}_{d,h} \} - \|\hat{\sigma}_{d,h}\|}{2\mu(T-t)} \right] \\
&+ \frac{T-t}{T} \left[R_h + R_0 - \|\sigma_{d,h}\| - \text{P}_{\sigma_h} \{ \Delta \sigma_{d,h} \} - \frac{T}{T-t} \text{P}_{\sigma_h} \{ \delta \hat{\sigma}_{d,h} \} \right] \Delta \dot{p}^* \\
&+ \text{Tr} \left[\delta \hat{\sigma}_{d,h} \cdot \dot{\hat{e}}_{p,h} + \hat{\sigma}_{d,h} \cdot \delta \dot{\hat{e}}_{p,h} + \sigma_{d,h} \cdot \delta \dot{\hat{e}}_{p,h} - \delta \hat{\sigma}_{d,h} \cdot \dot{\hat{e}}_{p,h} \right] \\
&\quad + (R_h + R_0 - \|\sigma_{d,h}\|) \text{P}_{\sigma_h} \left\{ \delta \dot{\hat{e}}_{p,h} \right\} \\
&+ \frac{T-t}{T} \left[\text{Tr} \left[\hat{\sigma}_{d,h} \cdot \dot{\hat{e}}_{p,h} - \sigma_{d,h} \cdot \dot{\hat{e}}_{p,h} - \sigma_{d,h} \cdot \Delta \dot{\hat{e}}_{p,h} - \Delta \sigma_{d,h} \cdot \dot{\hat{e}}_{p,h} \right] \right. \\
&\quad \left. - (R_h + R_0 - \|\sigma_{d,h}\|) \text{P}_{\sigma_h} \{ \Delta \dot{\hat{e}}_{p,h} \} \right] \\
&- \frac{R_h + R_0}{\|\sigma_{d,h}\|} \frac{(\Delta \|\sigma_{d,h}\|)^2 - \|\Delta \sigma_{d,h}\|^2}{4\mu T} \\
&= \frac{T-t}{T} \Delta R^* \Delta \dot{p}^* \\
&+ \frac{T-t}{T} \Delta R^* \left[-\text{P}_{\sigma_h} \left\{ \Delta \dot{\hat{e}}_{p,h} \right\} - \frac{T}{T-t} \text{P}_{\sigma_h} \left\{ \delta \dot{\hat{e}}_{p,h} \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\Delta \|\sigma_{d,h}\|)^2 - \|\Delta \sigma_{d,h}\|^2}{4\mu(T-t)\|\sigma_{d,h}\|} \right] \\
&+ \frac{T-t}{T} \left[R_h + R_0 - \|\sigma_{d,h}\| - \text{P}_{\sigma_h} \{ \Delta \sigma_{d,h} \} - \frac{T}{T-t} \text{P}_{\sigma_h} \{ \delta \hat{\sigma}_{d,h} \} \right] \Delta \dot{p}^* \\
&+ (R_h + R_0 - \|\sigma_{d,h}\|) \left[\text{P}_{\sigma_h} \left\{ \delta \dot{\hat{e}}_{p,h} \right\} - \frac{T-t}{T} \text{P}_{\sigma_h} \{ \Delta \dot{\hat{e}}_{p,h} \} \right] \\
&+ \text{Tr} \left[\delta \hat{\sigma}_{d,h} \cdot \Delta \dot{\hat{e}}_{p,h} + \Delta \sigma_{d,h} \cdot \delta \dot{\hat{e}}_{p,h} + \frac{T-t}{T} \Delta \sigma_{d,h} \cdot \Delta \dot{\hat{e}}_{p,h} \right] \\
&\quad - \frac{R_h + R_0}{\|\sigma_{d,h}\|} \frac{(\Delta \|\sigma_{d,h}\|)^2 - \|\Delta \sigma_{d,h}\|^2}{4\mu T}
\end{aligned}$$

Enfin, dans un but de simplification de l'écriture de $\ell_{[\delta\hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(R^*, \dot{p}^*)$, on introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_h &= R_h + R_0 - \|\sigma_{d,h}\| - \text{P}_{\sigma_h} \{ \Delta \sigma_h \} - \frac{T}{T-t} \text{P}_{\sigma_h} \{ \delta \hat{\sigma}_{d,h} \} \\
&= R_h + R_0 - \|\sigma_{d,h}\| + \text{o}(\|\sigma_{d,h}\|)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{P}}_h &= -P_{\sigma_h} \left\{ \Delta \dot{\hat{\varepsilon}}_{p,h} \right\} - \frac{T}{T-t} P_{\sigma_h} \left\{ \delta \dot{\hat{\varepsilon}}_{p,h} \right\} - \frac{(\Delta \|\sigma_{d,h}\|)^2 - \|\Delta \sigma_{d,h}\|^2}{4\mu(T-t)\|\sigma_{d,h}\|} \\ &= o(\dot{p}_h)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{W}}_h &= (\|\sigma_{d,h}\| - R_h + R_0) \left[P_{\sigma_h} \left\{ \delta \dot{\hat{\varepsilon}}_p \right\} + \frac{T-t}{T} P_{\sigma_h} \left\{ \Delta \dot{\hat{\varepsilon}}_{p,h} \right\} \right] \\ &\quad - \frac{R_h + R_0}{\|\sigma_{d,h}\|} \frac{(\Delta \|\sigma_{d,h}\|)^2 - \|\Delta \sigma_{d,h}\|^2}{4\mu T} \\ &\quad + \text{Tr} \left[\delta \sigma_d \cdot \Delta \dot{\hat{\varepsilon}}_{p,h} + \Delta \sigma_{d,h} \cdot \delta \dot{\hat{\varepsilon}}_{p,h} + \frac{T-t}{T} \Delta \sigma_{d,h} \cdot \Delta \dot{\hat{\varepsilon}}_{p,h} \right] \\ &= (\|\sigma_{d,h}\| - R_h + R_0) o(\dot{p}_h) + o(\|\sigma_{d,h}\|) o(\dot{p}_h)\end{aligned}$$

Alors,

$$\ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(R^*, \dot{p}^*) = \frac{T-t}{T} \left[\Delta R^* \Delta \dot{p}^* + \mathcal{R}_h \Delta \dot{p}^* + \Delta R^* \dot{\mathcal{P}}_h \right] + \dot{\mathcal{W}}_h$$

Et les ordres de grandeurs des différents termes nous permet de conclure :

La fonction $\ell_{[\delta \hat{x}_h, \hat{x}_h]}^C(R^*, \dot{p}^*)$ est du **premier ordre** quand la solution x_h est en régime élastique et du **deuxième ordre** dès qu'elle est en régime plastique.

Annexe D

Quelques propriétés d'intégrales

Les propriétés suivantes sont vraies pour toutes fonctions (f, g) intégrables sur $[0; T]$. Dans le cas de la propriété EQ.(D.2), la fonction f doit être en plus dérivable sur cet intervalle. Enfin, dans le cas de la propriété EQ.(D.4), on travaille sur les fonctions f (resp. g) définies sur $[0; T]$ comme la somme d'une fonction continue f^c (resp. g^c) et d'une fonction constante par morceaux f^h (resp. g^h).

$$\int_0^T \int_0^t \{f(\tau)\} d\tau dt = \int_0^T \{(T-t).f(t)\} dt \quad (D.1)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \{f^2(t)\} dt &= \int_0^T \left\{ \int_0^t \{2.f(\tau)\dot{f}(\tau)\} d\tau + f^2(0) \right\} dt \\ &= \int_0^T \{2(T-t)f(t)\dot{f}(t) + f^2(0)\} dt \end{aligned} \quad (D.2)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^t \{f(\tau).\dot{g}(\tau)\} \frac{d\tau dt}{T} &= \int_0^T \int_0^t \{(f^c(\tau) + f^h(\tau)).(\dot{g}^c(\tau) + \dot{g}^h(\tau))\} \frac{d\tau dt}{T} \\ &= \int_0^T \int_0^t \{f^c(\tau)\dot{g}^c(\tau) + f^c(\tau)\dot{g}^h(\tau) + f^h(\tau)\dot{g}^c(\tau) + f^h(\tau)\dot{g}^h(\tau)\} \frac{d\tau dt}{T} \\ \int_0^T dt \int_0^t \frac{d\tau}{T} \{f^c(\tau).\dot{g}^h(\tau)\} &= \sum_{0 < t_i < T} \left\{ \frac{T-t_i}{T} f^c(t_i) \llbracket g^h \rrbracket_{t_i} \right\} \\ \int_0^T dt \int_0^t \frac{d\tau}{T} \{f^h(\tau).\dot{g}^h(\tau)\} &= \sum_{0 < t_i < T} \left\{ \frac{T-t_i}{T} \frac{f^h(t_i^+) + f^h(t_i^-)}{2} \llbracket g^h \rrbracket_{t_i} \right\} \\ \int_0^T dt \int_0^t \frac{d\tau}{T} \{f(\tau).\dot{g}^h(\tau)\} &= \sum_{0 < t_i < T} \left\{ \frac{T-t_i}{T} \frac{f(t_i^+) + f(t_i^-)}{2} \llbracket g^h \rrbracket_{t_i} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T dt \int_0^t \frac{d\tau}{T} \{f(\tau) \cdot \dot{g}(\tau)\} &= \int_0^T dt \int_0^t \frac{d\tau}{T} \{f(\tau) \dot{g}^c(\tau)\} \\
&+ \sum_{0 < t_i < T} \left\{ \frac{T - t_i}{T} \frac{f(t_i^+) + f(t_i^-)}{2} \llbracket g^H \rrbracket_{t_i} \right\}
\end{aligned} \tag{D.3}$$

Bibliographie

- [Ainsworth et Oden, 1993] AINSWORTH, M. et ODEN, J. (1993). A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods. *Numerische Mathematik*, 65(1):23–50.
- [Aubry *et al.*, 1999] AUBRY, D., LUCAS, D. et TIE, B. (1999). Adaptive strategy for transient/coupled problems applications to thermoelasticity and elastodynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 176(1-4):41–50.
- [Aubry *et al.*, 2002] AUBRY, D., TIE, B., JAY, G. et MUZZOLINI, R. (2002). Méthodes adaptatives pour les déformations localisées : Adaptive methods for localized behaviour. *Mécanique & industries*, 3(5):425–430.
- [Azziz et Babuška, 1972] AZZIZ, K. et BABUŠKA, I. (1972). *The mathematical foundation of the finite element method with applications to partial differential equations*, volume 33.
- [Babuška et Miller, 1984] BABUŠKA, I. et MILLER, A. (1984). The post-processing approach in the finite element method - part 2 : the calculation of stress intensity factors. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:1111–1129.
- [Babuška et Rheinboldt, 1978a] BABUŠKA, I. et RHEINBOLDT, W. (1978a). Error estimates for adaptative finite element computation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 15(4):736–754.
- [Babuška et Rheinboldt, 1978b] BABUŠKA, I. et RHEINBOLDT, W. (1978b). A posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12:1597.
- [Babuška et Rheinboldt, 1982] BABUŠKA, I. et RHEINBOLDT, W. C. (1982). Computational error estimates and adaptive processes for some nonlinear structural problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 34(1-3):895 – 937.
- [Babuška et Strouboulis, 2001] BABUŠKA, I. et STROUBOULIS, T. (2001). *The Finite Element Method and its Reliability*. Oxford Science Publications.
- [Babuška *et al.*, 1994] BABUŠKA, I., STROUBOULIS, T., MATHUR, A. et UPADHYAY, C. (1994). Pollution error in the h-version of the finite element method and the local quality of a-posteriori estimators. *Finite Elements in Analysis and Design*, 17:273–321.

- [Babuška *et al.*, 1995a] BABUŠKA, I., STROUBOULIS, T., UPADHYAY, C. et GANGARAJ, S. (1995a). A-posteriori estimation and adaptive control of the pollution-error in the h-version of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:4207–4235.
- [Babuška *et al.*, 1995b] BABUŠKA, I., STROUBOULIS, T., UPADHYAY, C. S. et GANGARAJ, S. K. (1995b). A model study of element residual estimators for linear elliptic problems : The quality of the estimators in the interior of meshes of triangles and quadrilaterals. *Computers and Structures*, 57(6):1009 – 1028.
- [Bank et Weiser, 1985] BANK, R. et WEISER, A. (1985). Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Mathematics of Computation*, 44(170):283–301.
- [Barlow, 1976] BARLOW, J. (1976). Optimal stress locations in finite element models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10:243–251.
- [Barthold *et al.*, 1998] BARTHOLD, F., SCHMIDT, M. et STEIN, E. (1998). Error indicators and mesh refinements for finite-element-computations of elastoplastic deformations. *Computational Mechanics*, 22(3):225–238.
- [Bass et Oden, 1987] BASS, J. et ODEN, J. (1987). Adaptative finite element methods for a class of evolution problems in viscoplasticity. *International Journal of Engineering Science*, 25(6):623–653.
- [Becker et Rannacher, 1996] BECKER, R. et RANNACHER, R. (1996). A feed-back approach to error control in finite element methods : Basic analysis and examples. *East-West Journal of numerical Mathematics*, 4:237–264.
- [Becker et Rannacher, 2001] BECKER, R. et RANNACHER, R. (2001). An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. *A. Iserels (Ed.), Acta Numerica, Cambridge University Press*, 10:1–120.
- [Bergam *et al.*, 2003] BERGAM, A., MGHAZLI, Z. et VERFÜRTH, R. (2003). Estimations a posteriori d'un schéma de volumes finis pour un problème non linéaire. *Numerische Mathematik*, 95(4):599–624.
- [Bonnet et Frangi, 2006] BONNET, M. et FRANGI, A. (2006). *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. Editions Ecole Polytechnique.
- [Boroomand et Zienkiewicz, 1998] BOROOMAND, B. et ZIENKIEWICZ, O. (1998). Recovery procedures in error estimation and adaptivity : Adaptivity in non-linear problems of elasto-plasticity behaviour. In LADEVÈZE, P. et ODEN, J., éditeurs : *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, volume 47 de *Studies in Applied Mechanics*, pages 383 – 410. Elsevier.
- [Boroomand et Zienkiewicz, 1999] BOROOMAND, B. et ZIENKIEWICZ, O. (1999). Recovery procedures in error estimation and adaptivity. part ii : Adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behaviour. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4):127 – 146.

- [Boussetta *et al.*, 2006] BOUSSETTA, R., COUPEZ, T. et FOURMENT, L. (2006). Adaptive remeshing based on a posteriori error estimation for forging simulation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(48-49):6626–6645.
- [Brink et Stein, 1998] BRINK, U. et STEIN, E. (1998). A posteriori error estimation in large-strain elasticity using equilibrated local Neumann problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 161(1-2):77 – 101.
- [Calloch, 1997] CALLOCH, S. (1997). *Essais triaxiaux non-proportionnels et ingénierie des modèles de comportement*. Thèse de doctorat, PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [Carstensen et Funken, 1999] CARSTENSEN, C. et FUNKEN, S. (1999). Fully reliable localized error control in the FEM. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21: 1465.
- [Carstensen *et al.*, 2006] CARSTENSEN, C., KLOSE, R. et ORLANDO, A. (2006). Reliable and efficient equilibrated a posteriori finite element error control in elastoplasticity and elastoviscoplasticity with hardening. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(19-22):2574–2598.
- [Cecot, 2007] CECOT, W. (2007). Adaptive fem analysis of selected elastic-viscoplastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(37-40):3859–3870.
- [Chamoin et Ladevèze, 2007] CHAMOIN, L. et LADEVÈZE, P. (2007). Bounds on history-dependent or independent local quantities in viscoelasticity problems solved by approximate methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71(12):1387–1411.
- [Chamoin et Ladevèze, 2008] CHAMOIN, L. et LADEVÈZE, P. (2008). A non-intrusive method for the calculation of strict and efficient bounds of calculated outputs of interest in linear viscoelasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:994–1014.
- [Ciarlet, 1978] CIARLET, P. (1978). *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland.
- [Cirak et Ramm, 1998] CIRAK, F. et RAMM, E. (1998). A posteriori error estimation and adaptivity for linear elasticity using the reciprocal theorem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 156(1-4):351 – 362.
- [Coffignal et Ladevèze, 1983] COFFIGNAL, G. et LADEVÈZE, P. (1983). Error computation and optimal mesh in elasticity and elastoplasticity. *In Proc. SMIRT*, 7(L):177–182.
- [Comi et Perego, 2004] COMI, C. et PEREGO, U. (2004). Criteria for mesh refinement in nonlocal damage finite element analyses. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 23(4):615 – 632.
- [Coorevits *et al.*, 2001] COOREVITS, P., HILD, P. et HJIAJ, M. (2001). A posteriori error control of finite element approximations for Coulomb’s frictional contact. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 23(3):976–999.

- [Coorevits *et al.*, 2000] COOREVITS, P., HILD, P. et PELLE, J. (2000). A posteriori error estimation for unilateral contact with matching and non-matching meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 186(1):65–83.
- [Cottreau *et al.*, 2009] COTTEREAU, R., DÍEZ, P. et HUERTA, A. (2009). Strict error bounds for linear solid mechanics problems using a subdomain-based flux-free method. *Computational Mechanics*, 44(4):533–547.
- [Cottle *et al.*, 2009] COTTLE, R., PANG, J. et STONE, R. (2009). *The linear complementarity problem*. Society for Industrial Mathematics.
- [de Almeida et Pereira, 2006] de ALMEIDA, J. M. et PEREIRA, O. A. (2006). Upper bounds of the error in local quantities using equilibrated and compatible finite element solutions for linear elastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(4-6):279 – 296. Adaptive Modeling and Simulation.
- [de Almeida et Oden, 2010] de ALMEIDA, R. C. et ODEN, J. T. (2010). Solution verification, goal-oriented adaptive methods for stochastic advection-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, In Press, Corrected Proof:–.
- [De Saxcé, 1992] DE SAXCÉ, G. (1992). Une généralisation de l’inégalité de Fenchel et ses applications aux lois constitutives. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l’univers, Sciences de la Terre*, 314(2):125–129.
- [Demkowicz *et al.*, 1984] DEMKOWICZ, L., ODEN, J. et STROUBOULIS, T. (1984). Adaptive finite elements for flow problems with moving boundaries. I-Variational principles and a posteriori estimates. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 46:217–251.
- [Díez *et al.*, 2007] DÍEZ, P., JOSÉ RÓDENAS, J. et ZIENKIEWICZ, O. (2007). Equilibrated patch recovery error estimates : simple and accurate upper bounds of the error. *International journal for numerical methods in engineering*, 69(10):2075–2098.
- [Drucker, 1964] DRUCKER, D. (1964). On the postulate of stability of material in the mechanics of continua. *Journal of Mechanics*, 3(2):235–249.
- [Eriksson *et al.*, 1995] ERIKSSON, K., ESTEP, D., HANSBO, P. et JOHNSON, C. (1995). Introduction to adaptive methods for differential equations. *Acta numerica*, 4(-1):105–158.
- [Florentin *et al.*, 2003] FLORENTIN, E., GALLIMARD, L., LADEVÈZE, P. et PELLE, J. P. (2003). Local error estimator for stresses in 3d structural analysis. *Computers and Structures*, 81(18-19):1751 – 1757. Civil Comp Special Issue.
- [Fortin *et al.*, 2002] FORTIN, J., HJIAJ, M. et de SAXCÉ, G. (2002). An improved discrete element method based on a variational formulation of the frictional contact law. *Computers and Geotechnics*, 29(8):609 – 640.

- [Fourment et Chenot, 1993] FOURMENT, L. et CHENOT, J. (1993). Error estimators for viscoplastic materials : application to forming processes. *Engineering Computations*, 12(5):469–490.
- [Gallimard, 2009] GALLIMARD, L. (2009). A constitutive relation error estimator based on traction-free recovery of the equilibrated stress. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78(4):460–482.
- [Gallimard et al., 1996] GALLIMARD, L., LADEVÈZE, P. et PELLE, J. (1996). Error estimation and adaptivity in elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(2):189–217.
- [Greenberg, 1948] GREENBERG, H. (1948). The determination of upper and lower bounds for the solution of Dirichlet problem. *Journal of Mathematics and Physics*, 27:161–182.
- [Halphen et Nguyen, 1975] HALPHEN, B. et NGUYEN, Q. (1975). On generalized standard materials. *Journal de Mécanique*, 14:39–63.
- [Hansbo et Johnson, 1991] HANSBO, P. et JOHNSON, C. (1991). Adaptive streamline diffusion methods for compressible flow using conservation variables. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 87(2-3):267 – 280.
- [Hetu et Pelletier, 1992] HETU, J. et PELLETIER, D. (1992). Fast, adaptive element scheme for viscous incompressible flows. *AIAA journal*, 30(11):2677–2682.
- [Hjiaj et al., 2003] HJIAJ, M., FORTIN, J. et de SAXCÉ, G. (2003). A complete stress update algorithm for the non-associated drucker-Prager model including treatment of the apex. *International Journal of Engineering Science*, 41(10):1109 – 1143.
- [Huerta et Diez, 2000] HUERTA, A. et DIEZ, P. (2000). Error estimation including pollution assessment for nonlinear finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181:21–41.
- [Johnson et Hansbo, 1992] JOHNSON, C. et HANSBO, P. (1992). Adaptive finite element methods in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101(1-3):143 – 181.
- [Kempeneers et al., 2010] KEMPENEERS, M., DEBONGNIE, J. et BECKERS, P. (2010). Pure equilibrium tetrahedral finite elements for global error estimation by dual analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(4):513–536.
- [Khoai et al., 2007] KHOEI, A., GHAREHBAGHI, S., TABARRAIE, A. et RIAHI, A. (2007). Error estimation, adaptivity and data transfer in enriched plasticity continua to analysis of shear band localization. *Applied Mathematical Modelling*, 31(6):983 – 1000.
- [Laborde et Nguyen, 1990] LABORDE, P. et NGUYEN, Q. S. (1990). Etude de l'équation d'évolution des systèmes dissipatifs standards. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 24:67–84.

- [Laborde *et al.*, 1997] LABORDE, P., TOSON, B. et PESQUÉ, J. (1997). On the consistent tangent operator algorithm for thermo-plastic problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 146(3-4):215–230.
- [Ladevèze, 1975] LADEVÈZE, P. (1975). *Comparaison de modèle de milieux continus*. Thèse de doctorat, Université de Pierre et Marie Curie.
- [Ladevèze, 1985] LADEVÈZE, P. (1985). Sur une famille d’algorithmes en mécanique des structures. *Comptes Rendus Académie des Sciences - Mécanique, Paris*, 300(2):41–45.
- [Ladevèze, 1989] LADEVÈZE, P. (1989). The large time increment methode for analysis of structures with nonlinear behavior described by internal variables (in french). *Comptes Rendus Académie des Sciences - Mécanique, Paris*.
- [Ladevèze, 1994] LADEVÈZE, P. (1994). La méthode d’évaluation d’erreur en relation de comportement appliqué à la MEF : Qualité et amélioration. Rapport technique 150, LMT-Cachan.
- [Ladevèze, 1996] LADEVÈZE, P. (1996). Mécanique non linéaire des structures. *Hermes, Paris*.
- [Ladevèze, 1998] LADEVÈZE, P. (1998). *Nonlinear computational structural mechanics : new approaches and non-incremental methods of calculation*. Springer.
- [Ladevèze, 2006] LADEVÈZE, P. (2006). Upper error bounds on calculated outputs of interest for linear and non linear structural problems. *Comptes Rendus Académie des Sciences - Mécanique, Paris*, 334:399–407.
- [Ladevèze, 2008a] LADEVÈZE, P. (2008a). Une nouvelle approche pour la vérification des calculs éléments finis en élastoplasticité. compléments. Rapport interne 272, LMT - Cachan.
- [Ladevèze, 2008b] LADEVÈZE, P. (2008b). Strict upper error bounds on computed outputs of interest in computational structural mechanics. *Computational Mechanics*, 42(2):271–286.
- [Ladevèze et Chamoin, 2010] LADEVÈZE, P. et CHAMOIN, L. (2010). Calculation of strict error bounds for finite element approximations of non-linear pointwise quantities of interest. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(13):1638–1664.
- [Ladevèze *et al.*, 2009] LADEVÈZE, P., CHAMOIN, L. et FLORENTIN, É. (2009). A new non-intrusive technique for the construction of admissible stress fields in model verification. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(9-12):766–777.
- [Ladevèze *et al.*, 1986] LADEVÈZE, P., COFFIGNAL, G. et PELLE, J. (1986). Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis. *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations (Babuska, Gago, Oliviera and Zienkiewicz Editors)*, Wiley, London, 11:181–203.

- [Ladevèze et Leguillon, 1983] LADEVÈZE, P. et LEGUILLON, D. (1983). Error estimate procedure in the finite element method and applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20(3):448–509.
- [Ladevèze et al., 1992] LADEVÈZE, P., MARIN, P., PELLE, J. et GASTINE, J. (1992). Accuracy and optimal meshes in finite element computation for nearly incompressible materials. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 94(3):303–315.
- [Ladevèze et Moës, 1997] LADEVÈZE, P. et MOËS, N. (1997). A new a posteriori error estimation for nonlinear time-dependent finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157:45–68.
- [Ladevèze et Moës, 1998] LADEVÈZE, P. et MOËS, N. (1998). A posteriori constitutive relation error estimators for nonlinear finite element analysis and adaptive control. In LADEVÈZE, P. et ODEN, J., éditeurs : *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, volume 47 de *Studies in Applied Mechanics*, pages 231 – 256. Elsevier.
- [Ladevèze et Moës, 1999] LADEVÈZE, P. et MOËS, N. (1999). Adaptive control for finite element analysis in plasticity. *Computers and Structures*, 73(1-5):45 – 60.
- [Ladevèze et al., 1999a] LADEVÈZE, P., MOËS, N. et DOUCHIN, B. (1999a). Constitutive relation error estimators for (visco)plastic finite element analysis with softening. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176:247–264.
- [Ladevèze et Pelle, 2004] LADEVÈZE, P. et PELLE, J. (2004). *Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics*. Springer, NY.
- [Ladevèze et al., 1993] LADEVÈZE, P., PELLE, J. et ROUGEOT, P. (1993). Error estimation and mesh optimization for classical finite elements. *Engineering Computations*, 8(1):69–80.
- [Ladevèze et Rougeot, 1997] LADEVÈZE, P. et ROUGEOT, P. (1997). New advances on a posteriori error on constitutive relation in f.e. analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 150:239–249.
- [Ladevèze et al., 1999b] LADEVÈZE, P., ROUGEOT, P., BLANCHARD, P. et MOREAU, J. (1999b). Local error estimators for finite element linear analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4):231 – 246.
- [Ladevèze et Waeytens, 2009] LADEVÈZE, P. et WAEYTENS, J. (2009). Model verification in dynamics through strict upper error bounds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198:1775–1784.
- [Lemaitre et al., 2009] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J., BENALLAL, A. et DESMORAT, R. (2009). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod.
- [Louf et al., 2003] LOUF, F., COMBE, J. et PELLE, J. (2003). Constitutive error estimator for the control of contact problems involving friction. *Computers & structures*, 81(18-19):1759–1772.

- [Maday *et al.*, 1999] MADAY, Y., PATERA, A. et PERAIRE, J. (1999). A general formulation for a posteriori bounds for output functionals of partial differential equations ; application to the eigenvalue problem*. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 328(9):823–828.
- [Mathisen *et al.*, 1999] MATHISEN, K. M., HOPPERSTAD, O. S., OKSTAD, K. M. et BERSTAD, T. (1999). Error estimation and adaptivity in explicit nonlinear finite element simulation of quasi-static problems. *Computers and Structures*, 72(4-5):627 – 644.
- [Moës, 1996] MOËS, N. (1996). *Une méthode de mesure d'erreur a posteriori pour les modèles de matériaux décrits par variables internes*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan.
- [Moreau, 1966] MOREAU, J. J. (1966). *Fonctionnelles convexes*. Collège de France.
- [Morin *et al.*, 2003] MORIN, P., NOCHETTO, R. et SIEBERT, K. (2003). Local problems on stars : a posteriori error estimators, convergence, and performance. *Mathematics of Computation*, 72(243):1067–1098.
- [Oden *et al.*, 2005] ODEN, J. T., BABUSKA, I., NOBILE, F., FENG, Y. et TEMPONE, R. (2005). Theory and methodology for estimation and control of errors due to modeling, approximation, and uncertainty. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:195–204.
- [Ohnibus *et al.*, 2001] OHNIMUS, S., STEIN, E. et WALHORN, E. (2001). Local error estimates of FEM for displacements and stresses in linear elasticity by solving local Neumann problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(7):727–746.
- [Paraschivoiu *et al.*, 1997] PARASCHIVOIU, M., PERAIRE, J. et PATERA, A. T. (1997). A posteriori finite element bounds for linear-functional outputs of elliptic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 150(1-4):289 – 312. Symposium on Advances in Computational Mechanics.
- [Parés *et al.*, 2006] PARÉS, N., DÍEZ, P. et HUERTA, A. (2006). Subdomain-based flux-free a posteriori error estimators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (195):297–323.
- [Parés *et al.*, 2008] PARÉS, N., DÍEZ, P. et HUERTA, A. (2008). Bounds of functional outputs for parabolic problems. part ii : Bounds of the exact solution. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:1661–1679.
- [Parés *et al.*, 2009] PARÉS, N., SANTOS, H. et DÍEZ, P. (2009). Guaranteed energy error bounds for the Poisson equation using a flux-free approach : Solving the local problems in subdomains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(10):1203–1244.
- [Peraire et Patera, 1998] PERAIRE, J. et PATERA, A. (1998). Bounds for linear-functional outputs of coercive partial differential equations : Local indicators and

- adaptive refinement. In LADEVÈZE, P. et ODEN, J., éditeurs : *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, volume 47 de *Studies in Applied Mechanics*, pages 199 – 216. Elsevier.
- [Perego, 1988] PEREGO, U. (1988). Explicit backward difference operators and consistent predictors for linear hardening elastic-plastic constitutive laws. *SM archives*, 13(2):65–102.
- [Peric et al., 1999] PERIC, D., VAZ, M. et al. (1999). On adaptive strategies for large deformations of elasto-plastic solids at finite strains : computational issues and industrial applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 176(1-4):279–312.
- [Pled et al., 2011] PLED, F., CHAMOIN, L. et LADEVÈZE, P. (2011). On the techniques for constructing admissible stress fields in model verification : Performances on engineering examples. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- [Prathap, 1996] PRATHAP, G. (1996). Barlow points and gauss points and the aliasing and best fit paradigms. *Computers and Structures*, 58:321–325.
- [Prayer et Synge, 1947] PRAYER, W. et SYNGE, J. (1947). Approximation in elasticity based on the concept of functions spaces. *Quarterly of Applied Mathematics*, 5:261–269.
- [Prudhomme et al., 2004] PRUDHOMME, S., NOBILE, F., CHAMOIN, L. et ODEN, J. (2004). Analysis of a subdomain-based error estimator for finite element approximations of elliptic problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 20(2):165–192.
- [Prudhomme et Oden, 1999] PRUDHOMME, S. et ODEN, J. (1999). On goal-oriented error estimation for elliptic problems : application to the control of pointwise errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4):313 – 331.
- [Puel et Aubry, 2007] PUEL, G. et AUBRY, D. (2007). Régularisation de problèmes inverses par utilisation de maillages adaptatifs. In *8 ème Colloque National en Calcul des Structures*.
- [Rajendran et Liew, 2003] RAJENDRAN, G. et LIEW, K. M. (2003). Optimal stress sampling points of plane triangular elements for patch recovery of nodal stresses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58:579–607.
- [Rannacher et Suttmeier, 1999] RANNACHER, R. et SUTTMEIER, F. (1999). A posteriori error estimation and mesh adaptation for finite element models in elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176:333–361.
- [Rannacher et Suttmeier, 2002] RANNACHER, R. et SUTTMEIER, F. (2002). *Error-Controlled Adaptive FEMs in Solid Mechanics*, chapitre "Error estimation and adaptive mesh design for FE models in elasto-plasticity", pages 5–52. John Wiley, Chichester.

- [Rannacher et Suttmeier, 1998] RANNACHER, R. et SUTTMEIER, F. T. (1998). A posteriori error control in finite element methods via duality techniques : Application to perfect plasticity. *Computational Mechanics*, 21:123–133.
- [Repin, 2000] REPIN, S. (2000). A posteriori error estimation for nonlinear variational problems by duality theory. *Journal of Mathematical Sciences*, 99(1):927–935.
- [Repin *et al.*, 2004] REPIN, S., SAUTER, S. et SMOLIANSKI, A. (2004). A posteriori error estimation for the Poisson equation with mixed Dirichlet/Neumann boundary conditions. *Journal of computational and applied mathematics*, 164:601–612.
- [Salençon, 2002] SALENÇON, J. (2002). *De l'élasto-plasticité au calcul à la rupture*. Editions Ecole Polytechnique.
- [Sauer-Budge *et al.*, 2005] SAUER-BUDGE, A., BONET, J., HUERTA, A. et PERAIRE, J. (2005). Computing bounds for linear functionals of exact weak solutions to Poisson's equation. *SIAM journal on numerical analysis*, pages 1610–1630.
- [Schleupen et Ramm, 2000] SCHLEUPEN, A. et RAMM, E. (2000). Local and global error estimations in linear structural dynamics. *Computers & Structures*, 76(6): 741–756.
- [Stein *et al.*, 1998] STEIN, E., BARTHOLD, F., OHNIMUS, S. et SCHMIDT, M. (1998). Adaptive finite elements in elastoplasticity with mechanical error indicators and Neumann-type estimators. In LADEVÈZE, P. et ODEN, J., éditeurs : *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, volume 47 de *Studies in Applied Mechanics*, pages 81 – 99. Elsevier.
- [Stein *et al.*, 2003] STEIN, E., RAMM, E., RANK, E., RANNACHER, R., SCHWEIZERHOF, K., STEIN, E., WENDLAND, W., WITTUM, G., WRIGGERS, P. et WUNDERLICH, W. (2003). *Error-controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics*. Wiley.
- [Strouboulis *et al.*, 2000a] STROUBOULIS, T., BABUSKA, I. et COPPS, K. (2000a). The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 181(1-3):43–69.
- [Strouboulis *et al.*, 2000b] STROUBOULIS, T., BABUSKA, I. et GANGARAJ, S. (2000b). Guaranteed computable bounds for the exact error in the finite element solutions - part ii : Bounds for the energy norm of the error in two dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:427–475.
- [Strouboulis et Haque, 1992a] STROUBOULIS, T. et HAQUE, K. (1992a). Recent experiences with error estimation and adaptivity, part i : Review of error estimators for scalar elliptic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 97(3):399 – 436.
- [Strouboulis et Haque, 1992b] STROUBOULIS, T. et HAQUE, K. (1992b). Recent experiences with error estimation and adaptivity, part ii : Error estimation for h-adaptive approximations on grids of triangles and quadrilaterals. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100(3):359 – 430.

- [Suli et Houston, 2002] SULI, E. et HOUSTON, P. (2002). Adaptive finite element approximation of hyperbolic problems.
- [Tie, 2011] TIE, B. (2011). Remaillage adaptatif et contrôle d'erreurs en quantité d'intérêt pour la modélisation numérique de la propagation des ondes élastiques. *In CSMA giens*.
- [Waeytens et al., 2011] WAEYTENS, J., CHAMOIN, L. et LADEVÈZE, P. (2011). Guaranteed error bounds on pointwise quantities of interest for transient viscodynamics problems. *Computational Mechanics*, pages 1–17.
- [Washitzu, 1953] WASHITZU, K. (1953). Bounds for solutions of boundary value problems in elasticity. *Journal of Mathematics and Physics*, 32:117–128.
- [Wiberg et al., 1994] WIBERG, N., ABDULWAHAB, F. et ZIUKAS, S. (1994). Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(20):3417–3440.
- [Zhang et Naga, 2005] ZHANG, Z. et NAGA, A. (2005). A new finite element gradient recovery method : Superconvergence property. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(4):1192–1213.
- [Zhu et Zienkiewicz, 1988] ZHU, J. Z. et ZIENKIEWICZ, O. C. (1988). Adaptive techniques in the finite element method. *Communications in Applied Numerical Methods*, 4(2):197–204.
- [Zienkiewicz et al., 2005] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. et ZHU, J. Z. (2005). *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals*. Elsevier.
- [Zienkiewicz et Zhu, 1987] ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1987). A simple error estimator and adaptative procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:337–357.
- [Zienkiewicz et Zhu, 1992a] ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1992a). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1 : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1331–1364.
- [Zienkiewicz et Zhu, 1992b] ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1992b). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 2 : Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1365–1382.
- [Zienkiewicz et Zhu, 1992c] ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1992c). The superconvergent patch recovery (spr) and adaptive finite element refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101(1-3):207 – 224.