Apprentissage des fonctions au lycée avec un environnement logiciel: situations d'apprentissage et genèse instrumentale des élèves

Minh Tran Kiem

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT – PARIS 7
UFR DE MATHÉMATIQUES

THÈSE
Pour l'obtention du titre de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7
Spécialité : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

TRẦN KIÊM MINH

APPRENTISSAGE DES FONCTIONS AU LYCÉE AVEC UN ENVIRONNEMENT LOGICIEL

SITUATIONS D'APPRENTISSAGE ET GENÈSE INSTRUMENTALE DES ÉLÈVES

Thèse dirigée par M. Jean-Baptiste LAGRANGE

Soutenue publiquement le 13 Septembre 2011

JURY

Mme. Michèle ARTIGUE	Professeur émérite, Université Paris 7, *Président*
Mme. Isabelle BLOCH	Professeur, Université Bordeaux IV, *Rapporteur*
M. John MONAGHAN	Professeur, University of Leeds, *Rapporteur*
M. Jean-Baptiste LAGRANGE	Professeur, Université de Reims, *Directeur de thèse*
Mme. Claire CAZES	Maître de conférences, Université Paris 6, *Co-directrice*
M. Luc TROUCHE	Professeur, Ecole Normale Supérieure de Lyon, *Membre*
M. Chi Thanh NGUYEN	Professeur assistant, Université nationale de Hanoi, *Membre*

Paris, 2011

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT – PARIS 7

UFR DE MATHÉMATIQUES

THÈSE

Pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7

Spécialité : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

TRẦN KIÊM MINH

APPRENTISSAGE DES FONCTIONS AU LYCÉE AVEC UN ENVIRONNEMENT LOGICIEL

SITUATIONS D'APPRENTISSAGE ET GENÈSE INSTRUMENTALE DES ÉLÈVES

Thèse dirigée par M. Jean-Baptiste LAGRANGE

Soutenue publiquement le 13 Septembre 2011

JURY

Mme. Michèle ARTIGUE	Professeur émérite, Université Paris 7, *Président*
Mme. Isabelle BLOCH	Professeur, Université Bordeaux IV, *Rapporteur*
M. John MONAGHAN	Professeur, University of Leeds, *Rapporteur*
M. Jean-Baptiste LAGRANGE	Professeur, Université de Reims, *Directeur de thèse*
Mme. Claire CAZES	Maître de conférences, Université Paris 6, *Co-directrice*
M. Luc TROUCHE	Professeur, Ecole Normale Supérieure de Lyon, *Membre*
M. Chi Thanh NGUYEN	Professeur assistant, Université nationale de Hanoi, *Membre*

Paris, 2011

Remerciements

Je me souviens … il y a quatre ans, je suis venu à Paris pour faire une thèse en laissant à la maison, au Vietnam, tout ce que j'avais de plus cher.

Alors que j'arrive au bout de cette thèse et que je pars continuer mon chemin en laissant à Paris aussi un bout de mon cœur.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude envers mon directeur de thèse Jean-Baptiste Lagrange. Sa grande culture scientifique, ses nombreux conseils et ses remarques m'ont permis de nourrir sans cesse ma pensée. Je le remercie pour sa générosité, sa disponibilité, son immense soutien pendant ces longues années. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir appris à découvrir le métier de chercheur.

J'adresse une sincère reconnaissance à Claire Cazes, ma co-directrice de thèse qui m'a toujours accompagné depuis mes premiers pas dans le vaste monde de la didactique des mathématiques.

Je remercie vivement Isabelle Bloch d'avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse dont les remarques ont été très constructives et m'ont permis de porter un autre regard sur mon travail. Le congrès CERME 6 à Lyon est pour moi très important car j'ai rencontré John Monaghan et a eu l'occasion de lui présenter mon travail de thèse. Je lui adresse mes profonds remerciements pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse dont le rapport est une source précieuse et ouvre de nouvelles perspectives pour la suite de mes recherches.

Je suis très honoré que Michèle Artigue et Luc Trouche aient accepté de participer à mon jury de soutenance. Au-delà de ce rôle, Michèle a toujours été d'une exceptionnelle disponibilité pour m'aider durant ces années. J'adresse également mes remerciements à Nguyen Chi Thanh qui a accepté d'être membre du jury.

Je souhaite remercier le Ministère de l'Education et de la Formation du Vietnam pour son soutien financier.

Je tiens vivement à exprimer ma reconnaissance à Xavier Meyrier et ses élèves du Lycée Maupertuis qui m'ont accueilli dans leurs classes. La réalisation de ce travail dépend incontestablement de leur généreuse participation. Je tiens également à remercier Bernard Le Feuvre pour ses aides tout au long des expérimentations.

Je remercie les membres de l'équipe de Didactique des mathématiques du laboratoire LDAR pour les échanges didactiques et amicaux. Je n'oublie pas Fabrice Vandebrouck pour notre travail dans le cadre du projet ReMath, Nicole Gillet et Evelyne Scaron pour les tâches administratives.

Je remercie sincèrement Myriam pour sa gentillesse exceptionnelle et pour son accueil chaleureux lorsque je suis venu à Saint-Gilles pour travailler avec mon directeur de thèse.

Ces remerciements ne seraient pas complets sans une pensée amicale pour l'équipe des jeunes chercheurs du laboratoire LDAR et les amis du bureau 5B01. J'adresse une pensée particulière à Caroline, Mohamed, Thomas, Jérôme, Marc, Raquel… pour les moments passés ensemble durant ces années de thèse.

Enfin, je termine cette page par une pensée pleine de tendresse pour mes parents, ma femme, mon frère et ma sœur pour leur soutien total.

TABLE DES MATIERES

Introduction générale

Cette recherche est une étude des apprentissages des fonctions au lycée avec l'apport d'un environnement logiciel. Elle se situe dans le cadre de l'étude des usages du logiciel Casyopée, un environnement géométrique et algébrique dédié aux fonctions au lycée. Elle s'intéresse plus particulièrement au côté « élèves », avec une étude des situations utilisant Casyopée et de leurs effets sur les apprentissages. La question centrale est celle de la durée et des conditions nécessaires pour que Casyopée devienne un véritable instrument du travail mathématique des élèves. La problématique aborde des questions relatives aux usages des outils technologiques dans l'enseignement/apprentissage des mathématiques et considère l'enseignement des fonctions sous ses aspects épistémologique, cognitif et didactique. Le cadre théorique est construit à partir notamment de l'approche instrumentale, d'une typologie d'activités algébriques sur les fonctions et d'une théorie des représentations sémiotiques.

Cette thèse comprend huit chapitres qui décrivent le cheminement opéré durant plusieurs années pour apporter des éléments de réponse à la question centrale ci-dessus.

Dans le **chapitre 1**, intitulé ***Questions initiales***, nous commencerons par une étude historique de la notion de fonction puis par état de lieu des recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des fonctions, particulièrement avec les apports des outils technologiques. A la fin du chapitre, nous nous posons pour notre travail de recherche des questions initiales.

Dans le **chapitre 2**, intitulé ***Construction des cadres théoriques***, nous décrivons les cadres théoriques que nous avons choisis pour notre étude. Nous présentons d'abord l'approche instrumentale utilisée en didactique des mathématiques. Nous soulignons particulièrement l'articulation entre le développement de connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur le logiciel pendant la genèse instrumentale, et le temps nécessaire d'appropriation de Casyopée par des élèves. Ensuite, nous considérons une typologie d'activités comme un cadre pour analyser les activités pour des élèves sur les fonctions en environnements numériques d'apprentissage. Finalement, nous faisons référence à la notion de registre de représentation sémiotique de Duval pour éclairer les potentialités de multiples représentations offertes par l'environnement Casyopée pour l'apprentissage des fonctions.

Le **chapitre 3**, intitulé ***Curriculum, démarche expérimentale et modélisation fonctionnelle***, présente une analyse institutionnelle de l'enseignement actuel des fonctions en France. Nous soulignons notamment le type de tâche de modélisation fonctionnelle des situations géométriques pour approcher les fonctions dans les manuels scolaires. Nous proposons aussi un cycle de modélisation fonctionnelle et discutons le rapport entre ce cycle de modélisation fonctionnelle et la démarche expérimentale dans le contexte d'usage des environnements technologiques.

Dans le **chapitre 4**, intitulé ***Casyopée et activités des élèves sur les fonctions***, nous présentons d'abord Casyopée, un environnement logiciel particulièrement conçu pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions au lycée. Nous détaillons la mise en œuvre de la typologie d'activités sur les fonctions dans l'environnement Casyopée. Nous analyserons ensuite, dans une étude a priori, les potentialités, les contraintes ainsi que des problèmes d'instrumentation soulevés lors de l'usage de cet environnement.

Le **chapitre 5**, intitulé ***Expérimentation pendant l'année de Première S***, est consacré à la présentation de la séquence expérimentale en classes de Première S au sein d'un projet Européen. A travers l'analyse des séances d'observations, nous en ressortirons des premiers résultats et formulerons les questions de recherche, centrales dans notre thèse, et qui motivent une seconde étude expérimentale.

Le **chapitre 6**, intitulé ***Dispositifs d'expérimentation***, décrit notre seconde expérimentation en classe de Terminale S. Nous nous centrerons principalement sur les observations plus détaillées d'un binôme d'élèves afin de dégager quelques résultats sur leurs processus de la genèse instrumentale, notamment en considérant l'interaction et l'articulation entre le développement de leurs connaissances sur Casyopée et de leurs connaissances mathématiques sur les fonctions. Nous éclairons l'apport de la typologie d'activités pour l'apprentissage des fonctions et considérons comment les activités des élèves dans les différents registres de Casyopée peuvent favoriser une compréhension flexible des fonctions.

Le **chapitre 7**, intitulé ***Résultats***, a pour but de dégager les résultats de notre travail de recherche. Nous comparons la progression des élèves pendant deux expérimentations. Nous indiquons un développement conjoint de connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur le logiciel pendant la genèse. Nous interprétons aussi les observations du point de vue de la typologie d'activités sur les fonctions et précisons l'évolution des élèves dans ces activités. Ensuite, nous montrons qu'il y a bien le développement d'une compréhension flexible des fonctions chez les élèves observés à la fin de la seconde expérimentation après une utilisation régulière de Casyopée sur un temps long.

Finalement, dans le **chapitre 8**, intitulé ***Conclusions générales et perspectives***, nous conclurons ce travail de recherche en précisant des réponses aux questions de recherche. Au-delà de ces réponses, nous discutons aussi les contributions de notre travail de recherche à des questions plus générales comme l'enseignement des fonctions et les apports des outils technologiques.

Partie I

PROBLEMATIQUE ET CADRES THEORIQUES

Chapitre 1

Questions initiales

Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons tout d'abord les différents aspects et approches de la notion de fonction. Ensuite, nous abordons les apports potentiels des TICE pour l'apprentissage et l'enseignement de cette notion. Nous questionnons des problèmes concernant les potentialités de multi-représentations offertes par des TICE, leurs rapports avec des actions des élèves et enfin des implications pour la conception des situations d'apprentissage pour la notion de fonctions.

1.1 FONCTIONS ET RECHERCHES SUR L'APPRENTISSAGE DES FONCTIONS

1.1.1 Aspect historique de la notion de fonction

Nous n'avons pas pour ambition dans cette partie de faire une analyse détaillée de l'histoire du développement de la notion de fonction. Nous ne présentons brièvement que la genèse historique des fonctions en faisant un résumé du développement des idées sur les fonctions à travers les principales époques. L'étude historique vise à préciser l'idée de fonction telle qu'elle est traitée dans la thèse. Nous partons de la définition formelle couramment considéré aujourd'hui et nous la confrontons à des conceptions utilisées par les mathématiciens au cours des siècles.

En fait, la définition formelle de fonction a été introduite tardivement et remonte au début du dix-neuvième siècle. Au sein de la théorie des ensembles, la définition de fonction comme triplet (E, F, f) dans laquelle *f* est un sous-ensemble de $E \times F$ a été formulée dans un livre du groupe Bourbaki (Bourbaki, 1939) :

> « Soient *E* et *F*, deux ensembles distincts ou non, une relation entre une variable *x* de *E* et une variable *y* de *F* est dite relation fonctionnelle en *y* ou relation fonctionnelle de *E* vers *F*, si pour tout *x* appartenant à *E*, il existe un seul *y* appartenant à *F*, qui soit dans la relation considérée avec *x*. On donne le nom de fonction à l'opération qui associe ainsi à tout élément *x* de *E*, l'élément *y* dans *F* qui se trouve dans la relation donnée avec *x*; on dit que *y* est la valeur de la fonction pour l'élément *x*, et que la fonction est déterminée par la relation fonctionnelle considérée ».

Dans cette définition, l'idée de correspondance est prédominante. En revanche, les idées de variation, de co-variation et de mouvement sont absentes. Si l'on examine l'histoire des notions de fonction et de variable, nous pouvons reconnaître qu'elles sont, en revanche, étroitement liées à ces idées, et de plus l'idée de correspondance est éventuellement présente, mais de façon implicite.

Youschkevitch (1976) décrit les étapes principales du développement de l'idée de fonction jusqu'au milieu du 19ème siècle. Nous en reprenons les éléments utiles pour situer la notion de fonction dans notre étude.

a. L'Antiquité : les premières tables de correspondances

A cette étape, l'étude des cas particuliers des dépendances entre deux quantités n'avait pas encore isolé les notions générales de quantités variables et les fonctions. C'est la première étape du concept de fonction. Des mathématiciens Babyloniens ont largement utilisé pour leurs calculs des tables sexagésimaux de nombres inverses, de carrés et de racines carrés. L'idée de fonction dérivait à cette époque de la vie pratique et avait pour objet de faciliter des calculs.

Figure 1.1. Une tablette babylonienne

b. Le Moyen Age : introduction des graphes

A cette époque les notions générales de quantités variables et les fonctions étaient exprimées à la fois dans des formes géométriques et mécaniques, mais comme dans l'Antiquité, chaque cas concret de dépendance entre deux quantités était défini par une description verbale, ou par un graphe plutôt qu'une formule. A cette époque, des mouvements étaient étudiés soit de façon qualitative, en donnant une description verbale du sens de variation, soit en étudiant de façon numérique certaines valeurs isolées du phénomène (sans arriver à une relation numérique précise), ce qui avait tendance à voiler l'aspect de variation continue. On ne considérait que certaines valeurs sans englober ces valeurs dans la notion de variable. Nous pouvons reconnaître qu'il existe une coupure très nette entre nombres et grandeurs. Jusqu'au milieu du 14ème siècle, par les études d'Oresme (1323 – 1382), les premières formes de représentations graphiques se sont développées. Le but d'Oresme était de représenter par une figure géométrique les « intensités d'une qualité d'un sujet ». Ces intensités étaient représentées par des segments.

Figure 1.2. Nicole Oresme (1323 – 1382)[1]

Oresme nous fournit une méthode permettant de représenter les *qualités* (chaleur, densité, distance, vitesse,…) changeantes au sein d'un *sujet* (temps, espace, …). Les intensités de ces qualités sont présentées par des segments érigés perpendiculairement à un autre segment représentant le *sujet*. On obtient ainsi un graphique illustrant les intensités d'une qualité à différents points du *sujet*. Un des buts visés par Oresme avec sa méthode était effectivement de permettre de comprendre plus facilement et plus rapidement la nature des changements.

c. *L'époque Moderne : introduction des expressions algébriques et la formalisation*

❖ **Du 16ème au 17ème siècle :**

A cette époque, des expressions analytiques des fonctions ont commencé à prédominer. La classe de fonctions analytiques est généralement exprimée par des sommes des séries de puissance infinies.

Le principal champ d'étude de Galilée (1564 – 1642), était le mouvement donc la vitesse, l'accélération, la distance parcourue. Il cherchait à relier ces différentes notions à

[1] Source : Wikipedia.

l'aide de lois qui étaient inspirées de l'expérience et de l'observation. Il effectuait plusieurs mesures en reprenant plusieurs fois ses expériences afin d'obtenir les résultats fiables. Son objectif d'étudier les mouvements de façon quantitative a grandement contribué à l'évolution de la notion de fonction.

> « The investigation of a relation of between two varying quantities had been fundamental in arriving at the concept of function » (Malik, 1980, p. 490).

La géométrie analytique initiée par Descartes (1596 – 1650) a conduit à envisager les courbes comme trajectoires ou lieux de points. L'idée d'introduire analytiquement une fonction a été développée par Descartes dans son œuvre célèbre « La géométrie » publié en 1637. Avec cette géométrie, des courbes décrites par des formules se référant à des mouvements ont été incluses dans les recherches mathématiques et une relation représentable par une expression et par son graphe ont été acceptées comme des objets mathématiques. On voit apparaître clairement l'expression de dépendance générale entre deux quantités variables :

> « Même prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x, et ainsi on aura une infinité de divers points tels que celui qui est marqué C, par le moyens desquels on décrira la ligne courbe demandée » (Descartes, 1637, cité par Youschkevitch, 1976, p. 52).

❖ **Du 17ème au 19ème siècle :**

Petit à petit, la notion de fonction se théorise au cours de cette époque. Dans les diverses définitions des fonctions proposées, nous constatons une élaboration de définitions qui décrive les fonctions comme des expressions algébriques. De plus, nous trouvons qu'il y a une référence explicite à la dépendance entre variables et une formulation s'appuyant sur une description géométrique ou graphique et qui sous-entend une perception dynamique et co-variationnelle. Nous présentons maintenant quelques conceptions et définitions des fonctions :

Fermat (1679) :

> « As soon as two unknown quantities appear in a final equation, there is a locus, and the end point of one of the two quantities describes a straight or a curved line » (cité par Youschkevitch, 1976, p. 52).

Bernoulli (1718):

> « On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes » (cité par Youschkevitch, 1976, p. 60).

Euler (1748) : Dans sa définition des fonctions, Euler (l'élève de Bernoulli) a changé le mot « quantité » en « expression analytique » (analytic expression) :

> « A function of a variable quantity is an analytic expression composed in any way from this variable quantity and numbers or constant quantities » (cité par Youschkevitch, 1976, p. 61).

Nous pouvons en déduire une remarque qu'au cours du 17ème et du 18ème siècle, une fonction est considérée comme une expression analytique qui représentait une relation entre variables. L'élargissement à la classe des fonctions discontinues n'était pas encore mentionné. Jusqu'au milieu du 19ème siècle avec les contributions entre autres, de Fourier, Lobatchevski, Dirichlet, des formulations assez proches de la définition moderne de fonction ont été construites. Le caractère arbitraire de la règle de correspondance avait été pris en compte :

Fourier (1821) :

> « En général la fonction *f(x)* représente une suite de valeurs ou ordonnées, dont chacune est arbitraire » (cité par Youschkevitch, 1976, p. 77).

Lobatchevski (1834) :

> « General conception demands that a function of *x* be called a number which is given for each *x* and with changes gradually together with *x*. The value of the function could be given either by an analytical expression, or by a condition which offers a means for testing all numbers and selecting one of them, or lastly the dependence may exist but remain unknown » (cité par Youschkevitch, 1976, p. 77).

Dirichlet (1837) :

> « Soient a et b deux nombres fixes et soit x une grandeur variable, qui prend successivement toutes les valeurs comprises entre a et b. Si à chaque x correspond un y fini unique de façon que, quand x parcourt continûment l'intervalle entre a et b, $y = f\left(x\right)$ varie aussi progressivement, alors y est dite fonction continue de x sur cette intervalle. Pour cela, il n'est pas du tout obligatoire que y, sur toute intervalle, dépend de x par une seule et même loi, ni qu'elle soit représentable par une relation exprimée à l'aide d'opérations mathématiques » (cité par Falcade, 2006, p. 75).

Nous pouvons reconnaître dans ces définitions, en particulier celle de Dirichlet, le lien fertile entre la notion de fonction et les idées de mouvement et de dépendance.

d. Constats

Comme nous l'avions déjà dit plus haut, nous n'avons pas fait une analyse détaillée du développement de la notion de fonction. Ce processus fut en réalité beaucoup plus complexe et subtil. Cependant, de l'analyse du processus de développement des définitions de fonction à travers les principales époques, nous déduisons quelques constats :

- ❖ Le premier constat concerne l'aspect écologique et historique de la notion de fonction. L'idée de fonction dérive premièrement du monde physique et l'origine de cette notion a pour objectif de modéliser des situations issues de la physique. Les problèmes ayant été les moteurs du développement de la notion de fonction sont issus des domaines d'application et de la vie pratique tels que la physique (mouvements, vitesse, cinématique), l'astronomie, la température, le mécanique,… L'objet « fonction » vit au rythme des découvertes et des questions extérieures aux mathématiques. Néanmoins, l'objet « fonction » est également étudié pour lui-même. Il vit dans les mathématiques via des questions internes aux mathématiques (la détermination de tangentes, le calcul de quadrature, …).
- ❖ Notre deuxième constat épistémologique est que des *relations de dépendances* sont des signifiés fondamentaux de la notion de fonction. Il s'agit des relations de dépendances dynamiques entre deux quantités (grandeurs) variables.

1.1.2 Recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des fonctions : une longue histoire

Les fonctions jouent un rôle majeur dans les mathématiques et essentiel dans les sciences expérimentales pour la modélisation mathématique des phénomènes dynamiques issus de domaines d'application.

Il existe plusieurs études sur la notion de fonction et sur la compréhension des fonctions. Nous résumons ci-dessous les grandes perspectives adoptées par plusieurs auteurs afin de mettre en évidence la complexité de l'apprentissage de cette notion ainsi que de placer notre travail par rapport à ces recherches.

a. Transitions entre actions – processus - objets

Les recherches sur la compréhension des fonctions se sont intéressées à la dualité entre *processus* et *objet*. Sfard (1991) distingue la nature *opérationnelle* des fonctions en mettant l'accent sur les processus du calcul de la valeur de sortie pour une valeur d'entrée donnée, et leur nature *structurelle* comme objets constitués d'ensembles de couples. En s'appuyant sur des analyses historiques, épistémologiques et cognitives, Sfard (1992) a conclu que la fonction est un concept que les élèves acquièrent d'abord opérationnellement puis structurellement. Elle nomme « *réification des processus* » la transition de la conception processus à la conception objet. L'auteur a également souligné que les termes *processus* et *objet* devraient être compris comme différentes facettes de la même notion plutôt que comme composants séparés. Autrement dit, les deux aspects opérationnel et structurel sont complémentaires.

Dubinsky et ses collègues (Dubinsky & Harel, 1992 ; Breidenbach et al. 1992) s'intéressent aux transitions entre trois niveaux : actions – processus – objets. Leur idée principale dans ces travaux est que le processus d'apprentissage commence d'abord par des *actions* sur des objets. Lorsque l'action totale peut avoir lieu dans l'esprit du sujet sans courir à travers toutes les étapes spécifiques, nous disons que l'action a été intériorisée en *processus*. Ensuite, le sujet peut utiliser ce processus pour obtenir un nouveau processus, par exemple, en l'inversant, le transformant ou le combinant avec d'autres processus. Lorsqu'il est possible d'opérer de cette façon sur un processus, nous disons que le processus a été encapsulé en un *objet*. Finalement, cet objet peut être investi dans de nouvelles actions. Notons qu'au niveau « processus », la fonction est dépendante du processus, c'est-à-dire deux processus différents peuvent donner les significations différentes chez des élèves d'un même objet fonctionnel. Par exemple, deux formules algébriques équivalentes définissent le même objet « expression », mais correspondent à des processus de calcul différents.

Au début, ces travaux de Sfard, Dunbinsky et leurs collègues portent principalement sur les fonctions, en particulier sur l'idée de relation dans le contexte de l'approche structurelle bourbakiste de la notion de fonction. Les résultats de ces travaux ont conduit d'une part à la conclusion que l'approche bourbakiste élude les constructions cognitives « actions – processus – objets » et mène à ce que Sfard appelle *conception pseudo-structurelle* (*pseudostructural conception* ou bien *pseudo-object*, Sfard, 1992, p. 75). Par exemple, une conception pseudo-structurelle de la notion de fonction considère une formule algébrique comme un objet qui est manipulé sans reconnaître son domaine de définition et la relation dynamique ou statique entre valeurs d'entrée et valeurs de sortie. D'autre part, ces travaux sont appuyés sur l'idée que des travaux sur ordinateur (la programmation) pouvaient soutenir les transitions « actions – processus – objets ». Par exemple, le fait d'écrire un programme (i.e. un processus) amène à passer de la conception « action » à la conception « processus ». De plus la réflexion opérée par l'élève sur l'algorithme en jeu dans l'écriture du programme l'amène à reconnaître l'objet sous-jacent (« While writing the program the students get profound insight into the algorithms hiding behind the abstract object », Sfard (1992, p. 78)).

Les chercheurs ont trouvé que l'acquisition d'une conception « processus » des fonctions n'est pas triviale pour les élèves, et suppose un enseignement prenant explicitement en charge son développement (Dubinsky & Harel, 1992 ; Goldenberg *et al.* 1992). Selon Thompson (1994), à partir du moment où les élèves ont construit une conception

« processus » telle que la représentation du processus soit suffisante pour aider leur raisonnement sur celle-ci, ils peuvent commencer à raisonner formellement sur les fonctions ; ils peuvent raisonner sur les fonctions comme si elles étaient des objets. Une question, en particulier soulevée dans le contexte d'usages des environnements logiciels, est de savoir si les élèves devraient d'abord développer une conception « processus » avant de développer une conception « objet » des fonctions. Selon Thompson dans l'approche des fonctions par un élève, la conception « processus » de fonctions précède la conception « objet », et avec l'aide de nouveaux environnements logiciels, nous pouvons élaborer de nouveaux types d'expériences de façon à permettre aux élèves d'atteindre une conception « objet ».

Les chercheurs ont également reconnu que la conception « objet » semble difficile à acquérir même parmi les élèves ayant des connaissances algébriques avancées. Bien que ce problème puisse découler de difficultés inhérentes à saisir le point de vue structurel, il peut aussi être le résultat d'un accent mis sur les aspects opérationnels (processus) des fonctions dans de nombreuses expériences curriculaires des élèves (Sfard, 1992, O'callaghan, 1998).

White (2009) a conçu un environnement logiciel dédié à l'introduction des fonctions dans le contexte de la cryptographie. En portant l'attention sur la distinction entre deux points de vue « processus » et « objet », l'auteur montre comment les tâches données aux élèves dans cet environnement mettent en jeu différents aspects de la notion de fonction. De plus, il indique que la résolution des problèmes donnés dans cet environnement peut aider les élèves à atteindre un « increasing fluency in interpreting, selecting among and applying procedural and structural features of function toward a task objective », ce que nous appellerons dans notre travail une *compréhension flexible* des fonctions. Ainsi, l'approche des fonctions n'est plus vue comme une transition linéaire des actions aux processus puis aux objets, mais comme une progression vers un usage flexible des ces fonctions sous ces trois aspects.

Dans la même veine, Gray and Tall (1994) ont introduit la notion de « procept » pour exprimer une compréhension supérieure et flexible sur les fonctions. Selon ces auteurs, les élèves acquièrent la conception « procept » lorsqu'ils peuvent montrer leur flexibilité pour la compréhension des fonctions entre *processus* et *objets*. Finalement, malgré des accents et présentations parfois différents, il y a l'affirmation qu'une dualité dialectique *processus/objet* est nécessaire à une compréhension profonde des fonctions.

b. Co-variation et relation de dépendance

D'autres auteurs mettent l'accent sur l'expérience du changement et du mouvement et sur la compréhension de cette expérience comme co-variation ou relation de dépendance entre grandeurs, comme éléments fondamentaux amenant à la notion de fonction. Analyser, manipuler, et comprendre les relations entre quantités variables illustrent le point de vue co-variationnel.

Confrey & Smith (1994) expliquent la notion de co-variation par le mouvement entre des valeurs successives d'une variable en coordination avec le mouvement entre des valeurs successives correspondantes d'une autre variable. Ils proposent une approche co-variationnelle où les élèves travaillent sur un problème en remplissant une colonne dans une table avec des valeurs de x (typiquement en incrémentant chaque valeur de 1) et en remplissant une colonne de valeurs de y par une opération qu'ils construisent dans le contexte du problème (However, in our work with students we have found that a covariational approach is often more powerful, where students working in a problem situation first fill down a table column with x-values, typically by adding 1, then fill down a y-column through an operation they construct within the problem context, Confrey & Smith, 1994).

Radford (2005) propose des situations dans lesquelles le concept de fonction s'appuie sur l'expérience « sensuelle » de dépendances au sein d'un système physique et se construit à partir des variations mutuelles de ses objets. Comin (2005) note que la notion de fonction est fondée sur l'idée de relation de dépendance et ne peut prendre du sens que par l'étude des relations fonctionnelles entre grandeurs. Dans cette perspective, des recherches portent une attention spéciale aux potentialités de représentation des TICE[2] pour la compréhension des dépendances fonctionnelles. En ayant utilisé un dispositif de capture de mouvements et une calculatrice graphique, Arzarello & Robutti (2004) ont demandé aux élèves d'interpréter les graphes et les tableaux de valeurs donnés par la calculatrice en termes de mouvement. Les co-variations et les dépendances entre temps et distance dans le système physique ont été ensuite modélisées en fonctions mathématiques. Dans la perspective Vygotskienne de médiation sémiotique, Falcade, Laborde & Mariotti (2007) ont choisi la Géométrie dynamique comme domaine d'application afin de fournir aux élèves une expérience qualitative de co-variations et de dépendances fonctionnelles. Leur étude a montré que les outils propres à la géométrie dynamique (déplacement des objets, visualisation de leurs traces, définition de macros…) appliqués à différents objets géométriques (segments, demi-droites, figures…) peuvent être utilisés pour amener les élèves à comprendre la notion de fonction.

c. Multi-représentations et visualisation

La troisième perspective concerne les questions de multi-représentations et les rapports des élèves à ces représentations dans l'apprentissage des fonctions.

Bloch (2003) distingue différents cadres (settings) pour la notion de fonction : numérique, algébrique, géométrique, graphique, formel et analytique. S'intéressant aux débuts de l'analyse, elle insiste particulièrement sur l'interaction des cadres graphique et formel pour une ingénierie portant sur la validation des propriétés des fonctions. Elle souligne qu'au moment de son étude, le cadre géométrique est peu utilisé dans l'enseignement et

[2] Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement.

qu'elle estime que sa réintroduction serait « coûteuse ». Dans leur étude sur la place des tableaux de valeurs et de variations pour l'enseignement des fonctions dans le curriculum français, Coppé, Dorier & Yavuz (2007) mettent l'accent sur un usage accru des divers modes de représentation des fonctions dans le curriculum et tentent de caractériser comment sont pris en compte, par les différents acteurs de l'institution, ces récentes modifications.

D'autres chercheurs visent particulièrement à développer ou utiliser des environnements informatiques spécifiques offrant les capacités de multi-représentations pour l'apprentissage des fonctions comme déjà mentionné dans Kieran & Yerushalmy (2004). Par exemple, Borba & Confrey (1996) avaient développé et utilisé le logiciel *Function Probe* pour enseigner les transformations de fonctions grâce à sa capacité de modifier le graphe d'une fonction par translation, déformation et réflexion. Schwarz & Dreyfus (1995) ont analysé l'acquisition des fonctions par des élèves grâce à un logiciel de multi-représentation appelé *Triple Representation Model* (TRM). Cet environnement informatique permet une étroite interrelation dynamique entre registres algébrique, graphique et numérique. Il a été demandé aux élèves d'explorer et d'identifier les propriétés invariantes par des actions de la fonction examinée. Ces activités ont permis une compréhension assez profonde des fonctions chez des élèves.

Dans le but d'encourager des élèves à construire le concept de fonction comme un fondement pour l'apprentissage de l'algèbre, le curriculum *VisualMath* (Yerushalmy & Shternberg, 2001) a utilisé des environnements spécialement conçus pour soutenir une variété d'expériences avec des représentations visuelles des fonctions comme modèles pour construire une représentation symbolique. Maschietto (2008) a porté une attention particulière sur l'interaction entre deux points de vue *global* et *local* dans le contexte d'usage des potentialités de visualisation des TICE (les calculatrices symboliques). Il s'agit d'approcher la notion de dérivée à travers l'identification perceptive d'un processus de linéarisation locale. Un point de vue global considère les fonctions comme identités définies par une ou plusieurs formules ou représentations graphiques ainsi que leurs propriétés sur un intervalle. Un point de vue local sur les fonctions est lié à ce qui se passe en un point spécifique et dans son voisinage. Selon l'auteur, la considération de ce « jeu global/local » est essentielle pour la transition entre algèbre et analyse.

Aujourd'hui, les potentialités de multi-représentation des environnements numériques d'apprentissage pourraient contribuer à la réintroduction d'un cadre géométrique comme mentionné plus haut par Bloch. C'est une hypothèse que font des recherches récentes qui s'appuient sur les nouvelles potentialités de calculatrices et logiciels intégrant des multi-représentations et du calcul formel. Par exemple, dans le cadre du projet e-CoLab (Aldon et al. 2008), les auteurs ont expérimenté et testé les nouvelles potentialités ainsi que les contraintes d'une nouvelle calculatrice TI-*n*spire pour les apprentissages des élèves. Cette calculatrice est innovante, intégrant un logiciel de calcul formel et un environnement de géométrie. Mettant en jeu le calcul formel, ces recherches rejoignent une idée ancienne selon laquelle les environnements de calcul formel peuvent soutenir et changer l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Hodgson & Muller, 1992)

Dans le but d'attester les progrès des élèves dans l'apprentissage des fonctions par l'usage de cette calculatrice, Weigand & Bichler (2010) proposent un modèle de compétences comprenant trois dimensions : compréhension des fonctions, compétences relatives à l'outil, et activation cognitive. La première dimension « compréhension des fonctions » se compose de quatre niveaux différents : intuitive, conceptuelle, relationnelle, et structurelle. La deuxième dimension « compétences relatives à l'outil » comprend trois niveaux : la mode statique, la mode dynamique, et la mode multiple. La dernière dimension « activation cognitive » du modèle concerne trois niveaux : connaissances de base, connaissances avancées, et connaissances complexes.

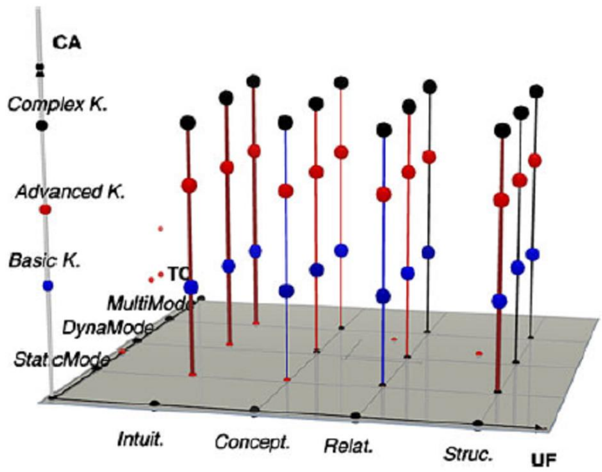


Figure 1.3. Modèle de compétences de Weigand et Bichler avec 36 cellules

Avec ce modèle, les compétences mises en œuvre par un élève pour une tâche donnée peuvent donc être situées dans une matrice croisant ces trois dimensions. Le modèle montre bien la complexité des compétences liées à la notion de fonction. Il a une vision évaluatrice : mesurer sur les fonctions les progrès réalisés par des élèves à la suite de travaux en environnement informatique. Néanmoins, le modèle nous apparaît trop complexe à mettre en œuvre dans le cadre de la thèse et nous évaluons les acquis des élèves en nous intéressant aux processus d'apprentissage sur les fonctions, de telles mesures nous servant utiles.

d. Notre approche des fonctions

Le concept de fonction est évidemment complexe, tant du point de vue épistémologique que du point de vue didactique. Ceci se manifeste par plusieurs approches présentées ci-dessus. Sa complexité nécessite également une approche où les activités des élèves sur les fonctions permettent d'encourager les deux aspects *processus* et *objet*, au sein d'un environnement de multi-représentations.

Nous considérons les fonctions comme modèles de dépendances dans un cadre géométrique tel que défini par Bloch (2003) et utilisé par Falcade, Laborde & Mariotti (2007). La modélisation fonctionnelle permet de relier ce cadre aux autres cadres et représentations des fonctions. Notre hypothèse est donc que les activités fondées sur l'étude des dépendances entre grandeurs ou mesures permettent aux élèves de comprendre les fonctions comme modèles de ces dépendances. Ces activités s'inscrivent dans les dialectiques « locales-globales » et « processus-objet » que nous venons de présenter. Nous situons par ailleurs ces activités dans le cadre d'usages d'un environnement numérique intégrant des représentations multiples, géométriques et algébriques, et le calcul formel. Les représentations géométriques constituent le domaine d'application rendant possible une exploration des relations entre objets et entre grandeurs et l'environnement offre des possibilités d'accéder aux autres représentations.

1.2 TICE ET APPROCHE DES REPRESENTATIONS DANS L'APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES

1.2.1 Objets mathématiques et représentations en environnements numériques d'apprentissage

a. Problèmes de représentation

Plusieurs courants de recherche en didactique et en « éducation mathématique » considèrent l'activité mathématique comme un travail sur des objets qui ne sont pas accessibles directement, mais par le biais de « représentations », c'est-à-dire d'entités matérielles supports de ce travail (Lagrange et al. 2011). A fin d'opérer sur ces objets, il nous faut les représenter. Les questions de représentation en « éducation mathématique » ont fait l'objet de nombreuses recherches parmi lesquelles Goldin & Kaput, 1996 ; Duval, 1999 ; Cobb, 2000 ; Yerushalmy, 2005. L'introduction de nouveaux outils met les questions de représentation au premier plan. Le développement de technologies numériques pour l'enseignement des mathématiques est considéré comme apportant une contribution particulière en élargissant la diversité des représentations et des moyens de les manipuler.

Dans le contexte de recherche en « éducation mathématique », il est important de distinguer entre *représentations externes* et *représentations internes* des objets mathématiques. Le terme *représentations externes* (ou *représentations physiques externes*) concerne des configurations observables, physiquement incarnées comme discours, mots, graphes, formules, dessins, équations, micro-mondes… Elles sont en principe accessibles à l'observation par une personne possédant des connaissances appropriées. En revanche, le terme *représentations internes* (ou *représentations mentales internes*) désigne des configurations et processus mentaux propres aux apprenants, leurs constructions de symbolisation personnelle, c'est-à-dire leurs propres significations des objets mathématiques (des représentations psychologiques des individus), ainsi que, leurs images visuelles et représentations spatiales… Evidemment, ces configurations ne sont pas directement observables. Des chercheurs induisent des configurations mentales des élèves à partir de leurs comportements externes.

L'interaction entre les représentations externes et internes est fondamentale pour des enseignements et apprentissages efficaces. Quelque soit la signification et l'interprétation que l'enseignant peut donner à une représentation externe, c'est sur le développement des représentations internes chez des élèves qu'il faut porter l'attention (Goldin & Shteingold, 2001). A travers l'interaction avec des représentations externes structurées dans l'environnement d'apprentissage, des systèmes de représentations internes se développent chez les élèves. La compréhension conceptuelle consiste en la puissance et la flexibilité des représentations internes, notamment la richesse des relations entre différents types de représentation.

Il est important de reconnaître qu'une représentation particulière peut avoir des significations différentes pour le concepteur et pour l'utilisateur. En particulier, tandis qu'un concepteur de l'outil peut avoir une idée claire de la façon dont une représentation choisie se rapporte à un objet mathématique spécifique, cela ne garantit pas qu'un utilisateur puisse voir la représentation comme étant mathématique. Par conséquent, la représentation a une nature contextualisée et sociale, et la relation entre représentations et objets dépend donc de la perspective de l'interpréteur (Morgan, Mariotti & Maffei, 2009). Ces auteurs présentent notamment ce point de vue en soulignant que la relation entre objet et représentation s'inscrit dans des conventions sociales marquées par la culture d'une communauté. Il en résulte qu'on ne peut pas se limiter à un point de vue strictement cognitif lorsqu'il s'agit des processus d'apprentissage. La relation entre objet et représentation devrait être intégrée dans un processus d'apprentissage considéré de façon globale.

La façon dont les utilisateurs d'outils technologiques considèrent les représentations offertes par ces outils comme apportant une signification mathématique est également une préoccupation commune de l'équipe de recherche Européen TELMA[3] (Bottino & Kynigos, 2009). La méthodologie d'expérimentation croisée utilisée par TELMA a visé à apporter un nouvel éclairage sur la nature contextualisée et sociale des représentations. Dans la même perspective, le projet Européen ReMath[4] (Lagrange et al. 2011) permet de replacer la problématique « représentations numériques » dans l'ensemble du processus d'apprentissage tant au niveau de l'institution éducative et du curriculum que dans les pratiques en classe et dans les problématiques de recherche. Il s'agit de considérer que l'accès aux objets mathématiques passe par des représentations de ces objets, de voir l'impact des outils technologiques pour l'apprentissage des mathématiques par le filtre des représentations et de rechercher comment la question des représentations est posée dans différents cadres théoriques et contextes.

b. Distances épistémologiques et sociales

Dans le cadre de l'expérimentation au sein du projet TELMA, Morgan et ses collègues (*ibid.*) présentent la notion de « distance » comme un moyen de caractériser les différences entre objets et moyens de manipulation fournis par de nouveaux outils technologiques, et ceux utilisés en environnements papier/crayon. Ces auteurs ont également utilisé cette notion de distance pour considérer l'interaction entre des facteurs représentationnels et contextuels à la fois au niveau global (institutionnel et culturel) et local. Ils distinguent deux types de distance : la distance épistémologique et la distance sociale.

[3] Technology Enhanced Learning in Mathematics.

[4] Representing Mathematics with Digital Media, a Specific Targeted Research Project (IST4-26751), http://remath.cti.gr/

La notion de distance épistémologique se rapporte à la relation entre des objets mathématiques et leurs représentations par des objets informatiques. Très schématiquement, un objet informatique se compose d'un composant externe et d'un composant interne. Le composant externe est normalement une représentation sur l'écran de l'ordinateur, immédiatement perceptible et éventuellement manipulable par un utilisateur. Le composant interne est quant à lui la configuration de code nécessaire pour que l'ordinateur puisse produire la représentation et son fonctionnement, notamment ses réponses à la manipulation de l'utilisateur. Les composants internes et externes sont liés de telle manière qu'un changement effectué dans l'un d'entre eux entraîne une modification correspondante dans l'autre. Un objet informatique peut être donc considéré comme une représentation d'un objet mathématique. Par exemple, un objet informatique comme un curseur dans un environnement de géométrie dynamique peut être considéré comme une représentation d'un objet mathématique « variable », et peut être associé à la représentation standard d'une variable avec une lettre. Ce qui est intéressant est que les différentes représentations impliquent différentes significations pour un objet mathématique. Les approches socio-culturelles mettent en avant l'influence des artefacts (et des représentations elles-mêmes) dans la médiation de la construction de connaissances et la nature des connaissances construites. Noss et Hoyles abordent la construction de connaissances dans le contexte d'usage des artefacts informatiques : « knowledge acquired through new tools is new knowledge, Microworld Mathematics is new mathematics » (Noss & Hoyles, 1996, p. 106). Par conséquent, les différents systèmes de représentation offrent différentes possibilités pour la construction de significations mathématiques. Les possibilités (« affordances ») différentes d'accès aux significations (« meanings ») sont selon Morgan et ses collègues (*ibid.*) constitutives de la distance épistémologique.

Les représentations des objets mathématiques offertes par les artefacts numériques influencent les constructions de signification mathématique chez des élèves lorsqu'ils utilisent ces environnements technologiques. L'effet de cette influence dépend de facteurs globaux et locaux comme le curriculum et son implémentation, la nature de pédagogie habituelle, la conception des activités mathématiques des élèves en classe… Kynigos & Psycharis (2009) ont indiqué que ces facteurs affectent non seulement la fréquence dans laquelle les systèmes scolaires et les enseignants sont susceptibles d'utiliser des outils technologiques spécifiques, mais aussi la manière dont ces outils sont susceptibles d'être utilisés en classe. Morgan, Mariotti & Maffei (*ibid.*) utilisent la notion « distance sociale » pour caractériser ces différences liées aux contextes.

1.2.2 TICE et l'apprentissage des fonctions : multi-représentations et possibilités pour l'action des élèves

Une des caractéristiques des nouvelles technologies numériques qui est largement prise en compte par les chercheurs en didactique des mathématiques et les concepteurs de logiciels est la facilité de fournir des -représentations multiples des objets mathématiques et de les relier dynamiquement. Cette caractéristique est beaucoup exploitée dans le cas de l'enseignement et l'apprentissage des fonctions où la possibilité de relier différentes représentations et de basculer de l'une à l'autre est reconnue comme un élément important pour la conceptualisation des fonctions. Dans les environnements numériques dédiés aux fonctions les objets informatiques sur lesquels les élèves travaillent peuvent être considérés soit comme transposition de représentations standard en environnement papier/crayon, soit directement comme représentation d'un objet mathématique (par exemple, un graphe sur calculatrice peut être vu comme l'équivalent d'une représentation graphique en papier/crayon d'une fonction f ou représenter directement l'objet mathématique «*fonction f*» Selon Morgan et ses collègues (*ibid.*), l'avantage pédagogique semble résider dans les possibilités (« affordances ») que les nouvelles représentations informatiques peuvent offrir et les possibilités de relier dynamiquement les différentes représentations (Confrey & Smith, 1994 ; Schwarz & Dreyfus, 1995 ; Kaput & Schorr, 2008).

Une autre caractéristique importante des nouvelles technologies numériques est qu'elles offrent de nouvelles façons de former et de transformer dynamiquement des relations entre représentations. Par exemple, en environnement papier/crayon, un changement de la valeur d'un paramètre dans une équation de fonction serait associé à la construction d'un nouveau graphe. Tandis que dans les environnements logiciels, tout changement dans une formule peut transformer automatiquement le graphe correspondant, ce qui peut permettre aux élèves de comprendre les effets du paramètre sur la relation entre les formes algébrique et graphique, entre la valeur attribuée au paramètre et la forme générale du graphe. Le potentiel cognitif d'un tel fonctionnement des multi-représentations conduit à des activités cognitives cruciales pour développer une compréhension des objets mathématiques (Morgan, Mariotti & Maffei, *ibid.*)

Les représentations dynamiques offertes par les TICE peuvent fournir une représentation visuelle d'une continuité potentielle qui n'est pas disponible dans les objets statiques traditionnels. Dans les environnements de géométrie dynamique, nous pouvons non seulement dessiner mais encore faire l'expérience de la variabilité de nos dessins. L'effet dynamique obtenu lors de l'application de l'outil de déplacement à une figure conduit à percevoir un mouvement continu (une figure mobile) correspondant à une déformation de la figure originale. En s'appuyant sur le point de vue sémiotique, Falcade, Laborde & Mariotti (2007) exploitent la *métaphore du mouvement* via les représentations dynamiques en environnement de Cabri pour représenter des variations et des dépendances. Cela rend ces environnements utiles pour soutenir des formes particulières de conceptualisation, non seulement des figures géométriques. Ceci est transposable aux fonctions.

1.3 QUESTIONS INITIALES

A partir des analyses ci-dessus des travaux de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des fonctions à l'aide des outils technologiques, nous en déduisons quelques constats suivants :

- *Côtés épistémologique et didactique :*

Les analyses épistémologiques et didactiques brièvement résumées ci-dessus rappellent combien la notion de fonction est complexe et son appropriation difficile par des élèves. Développer une *compréhension flexible* sur les fonctions est donc nécessaire. Il s'agit de considérer les fonctions comme modèles de dépendances dans un domaine d'application, de relier les fonctions dans ce domaine et en algèbre, et d'encourager les différents registres de représentations et les deux aspects *processus* et *objet*.

- *Côté des TICE :*

  - Les environnements numériques d'apprentissage, en particulier ceux qui offrent des capacités de multi représentations, sont de plus en plus complexes. Alors que les nouvelles technologiques peuvent offrir des capacités très efficaces de multi-représentations et de manipulations symboliques pour la résolution de problèmes et pour l'apprentissage des fonctions, il existe actuellement peu d'outils qui sont vraiment adaptés à l'usage des élèves au niveau secondaire, en effet :

    - Les logiciels de calcul formel (CAS[5]) existent pour faciliter la manipulation symbolique, mais ils sont conçus pour les utilisateurs plus avancés et il est difficile pour les élèves du secondaire de reconnaître les fonctions et les autres objets introduits par le programme (ensembles de définition, variables, …). Par exemple, dans la plupart des CAS, les fonctions sont considérées sur l'ensemble des nombres réels sans tenir compte d'un ensemble adéquat de définition.

    - Les logiciels de géométrie dynamique offrent un moyen de construire des figures opérationnelles et d'explorer des co-variations et des dépendances dans ces figures, mais l'exploration est limitée à des valeurs numériques. Les élèves ne sont ni encouragés ni aidés à utiliser les notations algébriques et à travailler sur des modèles algébriques des dépendances géométriques.

[5] Computer Algebra Systems

Par conséquent, la conception d'un outil logiciel plus adapté aux activités des élèves sur les fonctions et la mise en place des situations d'apprentissage compatibles avec les programmes récents est un défi pour des concepteurs et des chercheurs.

- ❖ Il existe actuellement peu de travaux de recherche qui utilisent la technologie pour approcher les fonctions via la modélisation des dépendances géométriques. Il s'agit de considérer les fonctions comme outils de modélisation des dépendances géométriques issues des problèmes variés. Parmi les co-variations d'objets ou de grandeurs, les élèves doivent apprendre que certains sont des dépendances fonctionnelles et leur modélisation par des fonctions mathématiques est un puissant outil de résolution de problèmes.

- *Côté des modèles d'analyse :*

  Il nous semble qu'il manque un modèle pertinent pour décrire et analyser des activités pour des élèves sur les fonctions en environnement numériques d'apprentissage.

A partir de ces constats, nous nous posons pour notre travail de recherche les questions initiales suivantes:

- Comment les TICE peuvent-elles aider les élèves à construire une compréhension des fonctions ? En particulier, comment développer une approche des fonctions s'appuyant sur des potentialités offertes par la technologie ?
- Comment concevoir et mettre en place des situations d'apprentissage appropriées afin de favoriser une telle approche ?
- Comment analyser les activités pour des élèves sur les fonctions en environnement numériques d'apprentissage pour favoriser une *compréhension flexible* des fonctions ?

Pour aborder ces questions, nous faisons le choix de considérer un environnement numérique particulier : Casyopée, conçu avec l'ambition de réaliser les potentialités décrites dans ce chapitre. Le cadre théorique et la problématique que nous allons présenter au chapitre 2 est partiellement dépendant du choix de nous limiter à ce seul environnement. Cet environnement sera présenté plus complètement au chapitre 4 à l'aide des éléments apportés par les chapitres 2 et 3.

Chapitre 2

Construction des cadres théoriques

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons et interrogeons les cadres théoriques qui permettent d'éclairer notre problématique de recherche. Plus précisément, nous présenterons d'abord l'approche instrumentale utilisée en didactique des mathématiques puis discuterons de quelques éléments de cette approche pour la recherche dans le domaine de l'intégration des TICE dans l'enseignement des mathématiques. Ensuite, nous construisons une Typologie d'activités et la considérons comme un cadre théorique pour les fonctions en environnements numériques d'apprentissage. Finalement, nous abordons quelques aspects sémiotiques comme éléments théoriques adéquats pour analyser les processus d'apprentissage des élèves sur les fonctions. Ces trois éléments théoriques sont complémentaires et nous permettent d'expliquer et comprendre les trois aspects concernés : ergonomique, épistémologique, et sémiotique.

2.1 APPROCHE INSTRUMENTALE

2.1.1 Introduction

Drijvers et al. (2010) s'intéressent aux cadres théoriques susceptibles d'éclairer les recherches récentes dans le domaine des TICE. Ils situent la théorie de l'instrumentation (Vérillon & Rabardel, 1995) comme un cadre important et fructueux. L'approche instrumentale, le corps de cette théorie, est particulièrement développée par des chercheurs français en relation avec une évolution des études en didactique des mathématiques sur les problèmes d'intégration des TICE. Plusieurs recherches dans le domaine de l'intégration des TICE dans l'enseignement/l'apprentissage des mathématiques ont utilisé l'approche instrumentale comme un cadre théorique essentiel. Citons ici, de façon non exhaustive, des travaux sur l'usage des technologies dans l'enseignement des mathématiques utilisant les éléments théoriques de cette approche : Guin & Trouche, 1999 ; Artigue, 1997 ; Artigue, 2002 ; Lagrange, 2000 ; Guin, Ruthven, & Trouche, 2005 ; Haspekian, 2005 ; Bueno-Ravel & Gueudet, 2009…

2.1.2 Fondements de l'approche instrumentale utilisée en didactique

a. Des artefacts aux instruments mathématiques

L'approche instrumentale se situe dans la perspective socio-culturelle de Vygotsky sur les processus d'apprentissage. Les fondements théoriques de l'approche instrumentale comprennent des éléments de l'ergonomie cognitive (Vérillon & Rabardel, 1995) et de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999).

Le point de départ essentiel de cette approche est la distinction entre artefact et instrument (Rabardel, 1995). Un *artefact* est souvent, mais non nécessairement, un objet physique de l'activité humaine, conçu pour des activités spécifiques. Une règle, une calculatrice, un logiciel de géométrie dynamique sont des artefacts. La fonctionnalité de déplacement d'un logiciel géométrique est aussi un artefact. Un scénario pour l'utilisation d'un logiciel de calcul formel dans l'enseignement de l'algèbre en environnement numérique, par exemple, est un artefact que l'enseignant peut utiliser pour ajuster son enseignement.

La manière dont l'artefact est utilisé est non triviale. Pour un type de tâche donné, l'utilisateur construit et développe des structures cognitives (des schèmes d'utilisation ou des techniques) lors de l'usage de l'artefact pour réaliser ce type de tâche. Selon Rabardel, nous pouvons appeler : *un instrument* l'ensemble constitué d'une partie de l'artefact et des schèmes personnels d'utilisation, pour un type de tâche donné.

La distinction entre artefact et instrument nous a conduit à deux remarques importantes :

- Un instrument n'est pas spontanément disponible mais il est construit par l'individu à travers un processus.
- Ce processus de construction et l'instrument lui-même ne sont pas neutres, ils ont un impact sur la conceptualisation.

b. Genèse instrumentale

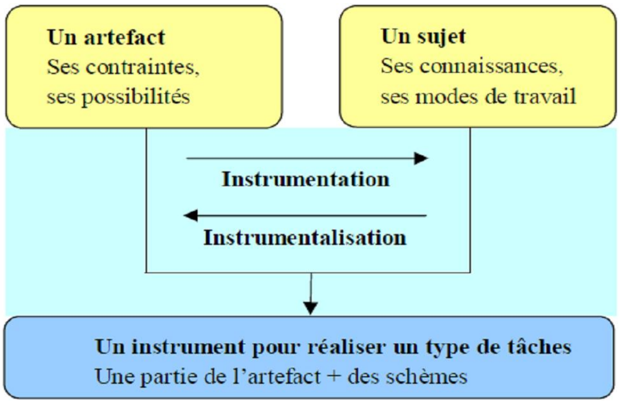


Figure 2.1. La genèse instrumentale (Trouche, 2004)

Un instrument est ainsi une entité mixte, constituée d'une partie de l'artefact mobilisée par l'individu et d'une composante psychologique, les schèmes. Le processus de construction de cet instrument est appelé genèse instrumentale, portant sur l'appropriation des schèmes d'utilisation.

Au cours de la genèse instrumentale, une relation bilatérale entre artefact et sujet est établie :

- vers l'artefact : les connaissances du sujet le guident d'une part pour mettre l'artefact « à sa main ». Ce processus est appelé instrumentalisation (sélection, production de fonctions, les diverses potentialités de l'outil sont progressivement découvertes par le sujet, éventuellement transformées de façon propre,…)

- vers le sujet : les potentialités et les contraintes de l'artefact influencent et conditionnent l'action et les stratégies de résolution de problèmes du sujet. Ce processus est appelé instrumentation[6] (construction des schèmes d'utilisation et de leur fonctionnement, assimilation d'artefact nouveaux à des schèmes déjà constitués,…).

La nature duale de l'instrumentalisation et l'instrumentation au sein de la genèse instrumentale se manifeste à travers la pensée des sujets. En effet, d'une part, la pensée des sujets est influencée par l'usage de l'artefact, et d'autre part, cette pensée détermine également la construction de l'instrument. La genèse instrumentale est un processus complexe, elle nécessite du temps et dépend des caractéristiques de l'artefact (ses potentialités et ses contraintes) et de l'activité du sujet, de ses connaissances et de ses modes de travail. Les recherches en didactique des mathématiques ont montré qu'une telle genèse peut être complexe, même dans le cas des tâches simples comme le cadrage de la représentation graphique d'une fonction dans la fenêtre d'une calculatrice (Guin & Trouche, 1999, p. 217; Artigue, 2002, p. 250).

Pour analyser les processus d'instrumentation, il est nécessaire d'étudier les contraintes et les potentialités d'un artefact, relativement à certains types de tâches. Pour un artefact numérique, Trouche (2002) a distingué trois types de contraintes :

- des *contraintes internes* liées à la nature des matériels (processeur, pixels de l'écran,…) ;
- des *contraintes de commande* liées à la disponibilité et à la syntaxe des commandes ;
- des *contraintes d'organisation*, liées à la disposition du clavier, de l'écran et à l'ergonomie générale de l'artefact.

Les genèses instrumentales sont d'abord des processus individuels. Cependant, ces genèses ont également une dimension sociale, car les élèves développent des schèmes mentaux dans le contexte de la communauté de classe. Hoyles, Noss, & Kent (2004) ont discuté la notion de *situated abstraction* comme un complément à la notion de genèse instrumentale. Selon ces auteurs, bien que les schèmes d'action instrumentée reconnaissent le caractère crucial de l'interaction avec les artefacts lors de l'apprentissage, leur généralité rend d'autant plus important le fait de tenir compte de la façon spécifique dont des connaissances mathématiques ont pu être développées. L'idée principale de la notion de *situated abstraction* est que le processus d'abstraction des

[6] Ici, il faudrait distinguer entre deux significations différentes du terme « instrumentation » dans deux contextes : la genèse instrumentale et la théorie de l'instrumentation.

propriétés mathématiques est un point clé dans l'apprentissage des mathématiques et que ce processus est à la fois situé et déterminé par les outils utilisés et la relation des utilisateurs avec ces outils. Par conséquent, cette notion est considérée comme utile pour compléter l'idée de la genèse instrumentale de façon à décrire le type de connaissances mathématiques qui émanent de l'activité instrumentée individuelle et collective.

c. Schèmes et techniques

La genèse instrumentale est constituée par le développement des schèmes et des techniques. Les notions de schèmes et de techniques correspondent à deux directions au sein de l'approche instrumentale qui s'associent avec les deux fondements théoriques différents : l'ergonomie cognitive et la théorie anthropologique du didactique (Monaghan, 2007).

Dans l'approche de l'ergonomie cognitive, la notion de schème se fonde sur la définition de Vergnaud (1990). Vergnaud a définit un schème, concept introduit par Piaget (1936), comme l'organisation invariante de la conduite pour une classe donnée de situations. Un schème a trois fonctions principales : une fonction pragmatique (il permet au sujet de réaliser une tâche), une fonction heuristique (il permet au sujet d'anticiper et de planifier son activité) et une fonction épistémique (il permet au sujet de comprendre ce qu'il fait). Parce que nous voyons ici un schème comme une partie de l'instrument, nous parlons d'un schème d'instrumentation. Au sein des schèmes d'instrumentation, Rabardel (1995) distingue deux types : schèmes d'utilisation et schèmes d'action instrumentée. Les schèmes d'utilisation sont directement liés à l'artefact et concernent plus spécifiquement le côté matériel de l'instrument. Les schèmes d'action instrumentée sont des schèmes constitués par un sujet dans le cadre de la réalisation d'un type de tâches, réalisation assistée par un artefact.

Les schèmes ne sont pas observés directement. Ce qui est accessible, pour l'observateur, ce sont les gestes réalisées par un sujet. En effet, quand nous observons un élève qui travaille, nous ne pouvons directement accéder aux schèmes, mais seulement aux actions et gestes exécutés. Les *invariants opératoires* (les connaissances implicites contenues dans les schèmes) pilotent les gestes, et la répétition des gestes contribue à l'installation de ces invariants opératoires et à l'extension de leur domaine de validité (Trouche, 2007).

Les schèmes sont non seulement individuels mais encore sociaux. Un schème, selon Piaget (1936), est un moyen d'*assimilation* personnelle d'une situation et des objets auxquels il est confronté, mais pour Rabardel & Samurçay (2001), un schème est également le *produit d'une activité d'assimilation* dans laquelle les artefacts disponibles (de l'environnement) jouent un rôle majeur. Les artefacts sont d'ailleurs le produit d'une expérience sociale en ce sens, ils sont toujours des éléments sociaux. Selon Noss & Hoyles (1996), « Tools are not passive, they are active elements of the culture into which they are inserted ». Les schèmes ont toujours une part sociale et la genèse instrumentale combine toujours des aspects individuels et sociaux.

Il est évident que les artefacts sont utilisés dans un contexte social ou institutionnel et la manière dont on voit des activités dans ce contexte est également importante. Plusieurs chercheurs considèrent les activités mathématiques suivant l'approche anthropologique de Chevallard (1999) où les pratiques sont décrites en termes de tâche, technique, technologie et théorie. Les techniques sont considérées donc comme objets institutionnels. De cette perspective, il est important de considérer des conditions institutionnelles qui conditionnent la genèse instrumentale.

Les tâches et techniques sont particulièrement importantes dans les travaux de Lagrange et Artigue (Lagrange, 1999, 2000 ; Artigue, 2002). Artigue (2002) et ses collègues ont réduit les quatre composantes de pratique (Tâche, Technique, Technologie, Théorie) à trois : Tâche, Technique, et Théorisation. Selon ces auteurs, les tâches sont des artefacts qui sont construits (et reconstruits) dans les institutions. Les techniques ne sont pas simplement des manipulations. Dans le cadre théorique Tâche\Technique\Théorisation, le terme « Technique » doit être donné un sens plus large que d'habitude dans les discours éducatifs :

> « A technique is a manner of solving a task and, as soon as one goes beyond the body of routine tasks for a given institution, each technique is a complex assembly of reasoning and routine work » (Artigue, 2002, p. 248).

Artigue (2002) et Lagrange (2005a) distinguent entre valeurs pragmatiques et valeurs épistémiques d'une technique. Les valeurs pragmatiques concernent l'efficacité, l'étendue d'application d'une technique. Les valeurs épistémiques concernent le rôle de la technique pour faciliter une compréhension mathématique. Une des contributions importantes des travaux de Lagrange et Artigue est l'affirmation que des techniques jouent un rôle épistémique, c'est-à-dire elles contribuent à la conceptualisation. Lagrange (2003, p. 271) a mis en valeur la technique :

> « Technique plays an epistemic role by contributing to an understanding of the objects that it handles, particularly during its elaboration. It also serves as an object for conceptual reflections when compared with other techniques and when discussed with regard to consistency ».

Hitt & Kieran (2009) ont exploré plus loin la conjecture de Lagrange (2000) que l'apprentissage des techniques peut promouvoir la compréhension conceptuelle en étudiant une activité de factorisation des expressions algébriques basées sur les tâches d'un binôme d'élèves d'une classe de Seconde. Cette activité a illustré la façon dont l'usage des calculatrices symboliques, accompagné de tâches appropriées, peut stimuler l'émergence des actions épistémiques au sein d'une activité algébrique orientée vers la technique.

Selon Monaghan (2007), une tension entre les deux approches ergonomique et anthropologique vient de la signification du terme « Technique » dans les travaux de

Lagrange et Trouche. Trouche (2005) se concentre sur la relation agent-outil et la structure psychologique des schèmes :

> « One can describe human activity (and students' activity in particular) in terms of *techniques*, i.e sets of gestures realized by a subject in order to perform a given task. When a technique integrates one or several artefacts, we will speak of an *instrumented technique*. Instrumented technique is thus the observable part of an instrumented action scheme ».

Lagrange (2005a) utilise le sens de « Technique » de Chevallard (1999) comme une manière de faire des tâches :

> « Techniques help to distinguish and reorganize tasks. For instance different techniques exist for the task "find the intervals of growth of a given function" depending on what is known about the function. If the function is differentiable the task can then be related to task "find the zeroes" of another function. In other cases, a search based on a more direct algebraic treatment can be more effective ».

Chaque auteur porte peut-être son attention sur son propre domaine concernant des tâches : Trouche se concentre sur la micro-genèse et Lagrange met l'accent sur l'aspect socio-culturel. Pour conclusion, nous prenons la remarque de Drijvers et al. (2010, p. 110) : ce qui est essentielle dans les deux notions de schèmes et techniques, c'est que les deux aspects, techniques et conceptuelles co-émergent et sont étroitement liés. C'est à cette relation importante qui rend l'approche instrumentale puissante.

d. Orchestration instrumentale

Comme nous avons déjà mentionné plus haut, la genèse instrumentale est non seulement un processus individuel mais, de plus, un aspect social. Afin de décrire ce processus de genèse instrumentale collective et la gestion des instruments individuels par l'enseignant dans le processus d'apprentissage collectif, Trouche (2004) a introduit la notion d'*orchestration instrumentale*. Une orchestration instrumentale est l'organisation systématique et intentionnelle par l'enseignant des différents d'artefacts d'un environnement informatisé d'apprentissage, pour le traitement d'une situation mathématique donnée, afin de guider les genèses instrumentales des élèves. Une orchestration instrumentale est définie par des configurations didactiques (c'est-à-dire l'arrangement des outils disponibles dans l'environnement selon chaque phase de la situation) et par des modes d'exploitation de ces configurations. Alors que nous abordons les manières dont l'enseignant peut orchestrer l'instrumentation collective des élèves, il est nécessaire de noter que les enseignants disposent également de propres artefacts tels que des ressources numériques, des scénarios d'enseignement… Dans cette perspective, l'approche instrumentale peut être un outil fructueux pour les recherches didactiques portant sur le travail du professeur : les enseignants s'engagent eux-mêmes dans un processus de genèse instrumentale pour transformer des artefacts en instruments pour l'accomplissement leurs tâches d'enseignement (Vandebrouck, 2008 ; Bueno-Ravel & Gueudet, 2009). Néanmoins, dans cette thèse nous nous limitons aux genèses des élèves en laissant de côté une discussion sur les choix de l'enseignant et son propre parcours.

e. Synthèse sur les potentialités et apports de l'approche instrumentale

En conclusion, l'approche instrumentale est particulièrement développée par des chercheurs français et elle est reconnue comme un cadre théorique fructueux pour les recherches dans le domaine de l'intégration des TICE dans l'enseignement des mathématiques. Cette approche offre un filtre qui nous permet de prendre en compte, d'examiner et d'évaluer la relation subtile entre l'usage des outils et la conceptualisation. Elle permet d'analyser les genèses instrumentales aussi bien que d'en étudier la gestion didactique. Ces problèmes jouent un rôle essentiel dans les questions d'intégration technologique dans l'enseignement. Par le biais de descriptions a priori des schèmes hypothétiques et leurs genèses, des chercheurs formulent leurs hypothèses et organisent en conséquence leurs observations. Les éléments de l'approche instrumentale aident donc aussi à analyser a posteriori les données d'observation et à tirer des conclusions.

L'approche instrumentale en didactique conduit à une vision critique des potentialités des outils pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Elle nous permet de comprendre une complexité de l'intégration des TICE qui contraste avec l'habituelle opposition « technique/conceptuel » et l'hypothèse d'une intégration « naturelle » supposée dans de nombreux travaux de recherche (Artigue, 2002).

Cependant, l'approche instrumentale ne suffit pas pour comprendre les problèmes de l'intégration des TICE. En revanche, une combinaison avec d'autres perspectives théoriques telles que la médiation sémiotique (Mariotti, 2006), la notion de *communauté de pratique* (Wenger, 1998) ou le constructionisme (la notion de *situated abstraction* - Noss & Hoyles, 1996) est nécessaire et peut être une possibilité fructueuse pour des recherches sur l'intégration des TICE dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Un défi pour le développement de l'approche instrumentale est d'affiner l'équilibre entre le cadre de l'ergonomie cognitive et la théorie anthropologique du didactique :

> « One of the future challenges for the further development of instrumentation theory is to fine-tune the balance – including both the similarities and the differences – between the cognitive ergonomics frame and the anthropological theory of didactics » (Drijvers et al. 2010, p. 113).

2.1.3 Discussion de la problématique avec l'approche instrumentale

La nécessité de considérer les genèses instrumentales des élèves et des enseignants lors de l'introduction de nouveaux artefacts est maintenant largement reconnue (Drijvers et al. 2010). Il est également reconnu que lorsqu'un artefact offre un grand nombre de fonctionnalités profondément liées aux connaissances mathématiques, la genèse instrumentale est complexe et demande du temps. C'est en particulier le cas des artefacts offrant des moyens de travailler à la fois sur des situations géométriques et algébriques, et de les articuler (Weigand & Bichler, 2010). Ces artefacts facilitent particulièrement les activités de modélisation que les curriculums récents du lycée, notamment en France, encouragent pour l'apprentissage des fonctions ; rappelons que cet apprentissage ne peut être réalisé que sur un temps long.

Notre objectif est d'analyser un exemple de genèse instrumentale d'un environnement logiciel géométrique et algébrique dédié aux fonctions, appelé Casyopée, pour l'apprentissage des fonctions au lycée. Nous visons en particulier à évaluer la durée nécessaire pour que des élèves puissent considérer Casyopée réellement comme un instrument de leur activité mathématique concernant les fonctions, et intègrent les fonctionnalités offertes par cet environnement comme constitutives de leurs connaissances mathématiques sur les fonctions.

Notre approche considère les fonctions comme modèles de dépendance dans le cadre géométrique. Nous considérons la conceptualisation de la notion de fonction et le développement de compétences relatives à l'outil dans un processus de genèse instrumentale. La genèse instrumentale que nous considérons ici concerne donc le développement conjoint d'usages et de connaissances sur l'environnement et de connaissances mathématiques sur les fonctions, ce qui rejoint certaines dimensions du modèle de Weigand & Bichler (2010). Nous nous intéressons aux genèses instrumentales des élèves dans l'environnement Casyopée et à la manière dont ces genèses articulent l'appropriation de l'artefact et la construction de connaissances mathématiques. Notre accent est mis notamment sur les phénomènes relatifs au processus d'instrumentation en considérant l'interaction et l'imbrication entre le développement de connaissances mathématiques et de connaissances sur l'artefact chez des élèves pendant un temps long de la genèse.

Comme nous le verrons par la suite, l'approche instrumentale décrite ci-dessus sera utilisée pour :

- étudier le temps et la façon dont Casyopée devient un instrument mathématique pour les élèves à travers l'analyse de ses potentialités et contraintes d'utilisation.

- étudier l'articulation et le développement conjoint d'usages et de connaissances sur l'environnement Casyopée et de connaissances mathématiques sur les fonctions.

2.2 TYPOLOGIE D'ACTIVITES

2.2.1 Modèle pour conceptualiser des activités algébriques

S'appuyant sur l'idée de l'algèbre comme activités, Kieran (2007) a proposé un modèle, appelé modèle GTG, qui synthétise des activités algébriques en trois types : génératives, transformationnelles, et global/méta.

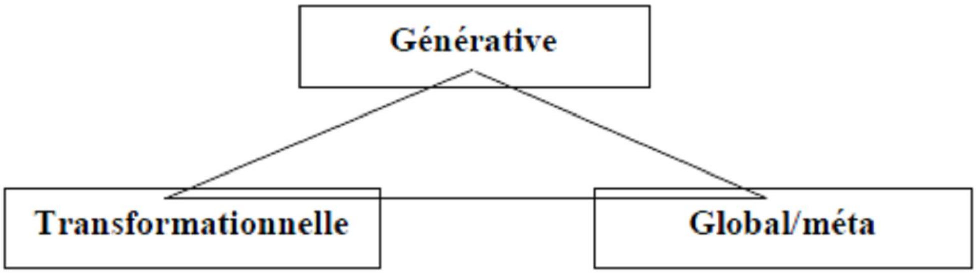


Figure 2.2. Modèle GTG pour conceptualiser des activités algébriques

- Les activités génératives concernent la formation des objets de base que sont les expressions et les équations. Les exemples prototypiques sont : le fait d'associer une variable dépendante à une variable indépendante dans ses aspects numériques (table de valeurs), graphiques (courbe) et algébriques (ensemble de définition et expression) ; les expressions de généralité émanant des modèles géométriques ; les expressions de règles qui déterminent des relations numériques. Plusieurs constructions de signification des objets algébriques apparaissent au sein de ces activités. Ce type d'activité concerne donc le travail avec des variables, des inconnus, l'égalité…
- Les activités transformationnelles portent sur la production de nouveaux objets algébriques à partir des règles telles que le regroupement de termes semblables, le développement, la factorisation, la simplification, la substitution… Beaucoup d'activités de ce type concernent le changement de forme symbolique des expressions ou équations afin de maintenir l'équivalence.
- Les activités de niveau global/méta comprennent la résolution de problèmes, la modélisation, la génération, la recherche de structures. Ces activités conduisent à des justifications et des preuves telles qu'il en apparaît, par exemple, dans des problèmes de modélisation.

Dans la partie suivante, nous présentons une Typologie d'activités intégrant ce modèle et d'autres éléments théoriques. Cette typologie permet une classification beaucoup plus riche que ce modèle GTG des activités des élèves sur les fonctions en environnement numérique d'apprentissage.

2.2.2 Typologie d'activités

Au cours d'un travail récent, Lagrange & Artigue (2009) ont proposé une typologie ayant pour but de classifier et de relier les activités variées sur les fonctions. Cette typologie d'activités croise deux composantes principales : les niveaux de représentation des dépendances et les types d'activités sur ces dépendances.

		Types de représentations et d'activités			
		Enactive-iconique	Générative	Transformationnelle	Global/Méta
Niveaux de représentation	Système physique	Exploration globale : déplacer des éléments et observer les transformations du système.	Percevoir les relations de dépendance entre grandeurs.		Considérer des objets « génériques ».
	Grandeurs et mesures	Exploration locale : faire varier des grandeurs. Observer les variations des mesures.	Choisir une variable. Créer une formule géométrique exprimant la dépendance.		Considérer des grandeurs « génériques ». Interpréter.
	Fonctions mathématiques	Trace locale du graphe. Reconnaissance globale de la courbe. Percevoir les propriétés des graphes.	Représenter algébriquement une formule et un domaine de définition.	Développer, factoriser l'expression. Reconnaître l'équivalence. Substituer un paramètre à une valeur.	Reconnaître la structure de la fonction. Considérer des familles de fonctions. Utiliser des paramètres. Preuve.

Tableau 2.1. Typologie d'activités

Les auteurs ont distingué trois niveaux de représentation : la co-variation et la dépendance dans un système physique, la co-variation et la dépendance entre grandeurs ou mesures, et les fonctions mathématiques. Ces trois niveaux, concernant l'apprentissage des fonctions que nous avons présentés plus haut dans le chapitre 1, sont basés sur des fondements épistémologiques selon lesquels le concept de fonction est lié à des dépendances dans un système physique où nous pouvons observer des variations mutuelles des objets. Cette connexion a également un fondement cognitif : l'idée de fonction est liée à l'expérience sensuelle de dépendances dans un système physique (Radford, 2005).

Les colonnes de la typologie concernent les types de représentation et d'activités sur des dépendances. Les auteurs distinguent deux types de représentation : enactive-iconique et algébrique (générative, transformationnelle, global/méta). Le premier type enactive-iconique est adapté du travail sur différentes représentations de l'analyse de Tall (1996). La représentation de type enative-iconique concerne normalement le développement cognitif influencé par des mouvements des objets dans les systèmes physiques. Selon Tall, des expériences énactives fournissent une base intuitive pour l'analyse élémentaire. Le deuxième type est inspiré du modèle GTG de Kieran.

Les activités dans la colonne « enactive-iconique » concernent des expériences de mouvements à l'intérieur des systèmes physiques telles que le travail sur des représentants numériques ou graphiques de ces mouvements, et les explorations sur les graphes et les tables de valeurs approchées. Dans ces activités, un point de vue local est lié à ce qui se passe « à proximité d'une valeur ». Les activités « locales » ont tendance à explorer des systèmes physiques par des « petits mouvements », des tableaux ou des courbes par le traçage ou la navigation à proximité d'un point, avec un zoom adéquat. Un point de vue globale considère des propriétés de dépendances et sur l'ensemble d'un intervalle. La distinction entre les deux points de vue local et global est importante et essentielle dans la transition à l'analyse (Maschietto, 2008). Les recherches concernant le type de représentation énactive-iconique mettent souvent l'accent sur la complexité des systèmes sémiotiques impliqués dans ces activités. L'étude de Falcade et al. (2007), par exemple, a montré que les outils de géométrie dynamique (Déplacement, Trace, Marco…) et les signes particuliers (des segments, des rayons, des figures…) offrent un système sémiotique commun que peuvent développer des élèves et enseignants.

Nous analysons maintenant l'interface éventuelle entre les trois types d'activités algébriques et les activités énactives-iconiques ainsi que comment une signification de fonction peut développer à cette interface.

- Activités *génératives* et *enactives-iconiques* : Nous mettons particulièrement l'accent sur des connexions entre ces deux types d'activités au niveau de représentation « grandeurs et mesures » : une fois les variables indépendantes et dépendantes construites en utilisant une formalisation spécifique à des grandeurs, les dépendances peuvent être considérées par le raisonnement sur les lois déterminant les grandeurs dans le système et le travail algébrique peut avoir lieu pour exprimer mathématiquement cette dépendance. Au niveau de fonctions mathématiques, des activités génératives significatives peuvent exister à cette interface. Par exemple, l'activité consistant à trouver une expression algébrique (un domaine et une formule) pour une fonction est motivée et prend du sens quand la fonction est conçue comme modèle d'un phénomène enactif.

- Activités *transformationnelles* et *enactives-iconiques* : Au niveau de fonctions mathématiques, il existe également des connexions riches entre activités enactives-iconiques et transformationnelles. Les élèves peuvent par exemple relier la notion d'équivalence qui est centrale dans les activités transformationnelles, aux coïncidences de graphes. Yerushalmy (1999) a conçu le curriculum VisualMath, basé sur un logiciel graphique spécifique, pour que les élèves arrivent à comprendre quelles opérations sur les équations sont légitimes pendant l'effectuation des manipulations comme une manière pour conjecturer et comprendre des résultats « sur l'écran ». Les activités transformationnelles constituent un domaine où, pour plusieurs auteurs (par exemple Waits & Demana, 1999 ; Kutzler, 2000), le calcul formel peut compenser des lacunes des élèves dans les compétences de calcul. Mais comme le note Yerushalmy, les logiciels de calcul formel (CAS) se présentent comme des « outils de solution », ils n'aident pas les élèves à se construire une image de leur apprentissage cohérente avec le curriculum. A ces « outils de solution » Yerushalmy oppose des logiciels construits spécifiquement en fonction d'un projet d'apprentissage :

  > « This design – which favors explorations – could well be interpreted as awkward and restrictive in comparison to the slick, transparent, and quick operation favored by solution tools. But this design is meant to offer a tool that supports the construction of a visible map of the terrain of algebra. It has the potential to support a reform algebra by developing a coherent mathematical language that would allow students to grow with some understanding into the rich but often confusing and ambiguous world of symbolic manipulations » (Yerushalmy, 1999, p. 180).

- Activités *global/méta* et *énactives-iconiques* : L'utilisation des moyens algébriques pour exprimer la généralité dans l'étude des systèmes physiques fait partie de ces activités. La modélisation d'une dépendance concerne souvent des objets « génériques » (par exemple les points libres sur un segment d'une figure géométrique) et le modèle est donc une famille de fonctions. Il est algébriquement exprimé par une fonction dont le domaine et la formule dépendent des paramètres. L'utilisation de ce modèle pour résoudre un problème dans le système physique apporte ensemble des traitements algébriques et des interprétations enactive-iconiques des paramètres.

2.2.3 Discussion de la problématique avec la Typologie d'activités

Comme nous le verrons par la suite, la typologie d'activités décrite ci-dessus sera utilisée dans les parties suivantes pour :

- Donner du sens aux caractéristiques de Casyopée, particulièrement comme une aide pour la modélisation fonctionnelle et pour relier les activités variées.
- Analyser les activités des élèves sur les fonctions dans l'environnement Casyopée.

Nous considérons cette typologie d'activités comme un cadre épistémologique pour les fonctions en environnements numériques d'apprentissage. Elle soutient notre approche où les fonctions sont considérées comme modèles de dépendance dans un domaine d'application. En effet, considérer les activités au niveau intermédiaire des dépendances entre grandeurs et mesures permet de mettre en évidence la modélisation fonctionnelle qui relie les activités sur les fonctions dans un domaine d'application et des connaissances algébriques. Les activités suivantes sont donc fructueuses pour la conceptualisation des fonctions : choisir une variable appropriée pour quantifier des observations, distinguer les dépendances fonctionnelles parmi des co-variations, choisir des variables indépendantes et dépendantes…

2.3 APPROCHE SEMIOTIQUE

2.3.1 Cadres et registres de représentation sémiotique

La notion de *cadre* est introduite par Douady (1986). Elle utilise une définition des cadres qui inclut une forte dimension cognitive :

> « Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuelles diverses et des images mentales associés à ces objets et ses relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outils, des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée ».

Ainsi la notion de cadre est à rattacher à une théorie mathématique. Nous distinguons donc les cadres géométriques, algébriques, numériques. Lorsque les élèves résolvent un problème, ils peuvent considérer ce problème dans différents cadres. Les changements de cadre jouent un rôle moteur : la traduction dans un autre cadre fait émerger de nouvelles questions, apporte de nouveaux outils, provoque des rééquilibrations et donc la construction de « nouveau » à partir de « l'ancien ». Passer d'un cadre à l'autre est important pour que les élèves progressent et que leurs conceptions évoluent. Ils peuvent réaliser ces changements de cadre spontanément ou avec l'aide de l'enseignant.

La notion de *registre de représentation sémiotique* (en abrégé : registre) est introduite par Duval (1993). Cette notion est associée à l'hypothèse que la conceptualisation mathématique passe par la capacité d'identifier un concept dans diverses représentations sémiotiques et qu'elle nécessite un travail spécifique sur l'articulation de ces registres. Duval souligne qu'un objet mathématique est généralement perçu et traité dans plusieurs registres de représentation. Il distingue deux types de transformations des représentations sémiotiques : les traitements et les conversions. Un *traitement* est une transformation interne à l'intérieur d'un registre. Une *conversion* est une transformation de la représentation qui consiste à changer un registre de la représentation, sans modifier les objets eux-mêmes. Il est important que les élèves reconnaissent les mêmes objets mathématiques dans des registres différents et qu'ils puissent effectuer les deux traitements et des conversions.

La théorie de la représentation sémiotique de Duval donne des outils pour travailler essentiellement sur les registres « standards » (le registre graphique, le registre symbolique et le registre numérique). Mais, particulièrement lorsque le processus d'apprentissage a lieu en environnements technologiques, il est nécessaire de prendre en compte des gestes et la coordination entre gestes, langages, et registres « standards ». Les travaux du courant « embodied cognition » (Nemirovsky & Borba, 2004 ;Lakoff & Nunez, 2000) ont complété cette approche sémiotique en soulignant les activités perceptives et motrices (perceptual-motor activity). L'idée est que les processus d'apprentissage en environnements technologiques peuvent amener à créer un premier niveau de conceptualisation des notions mathématiques (par exemple la vitesse, l'accélération…) basées sur la perception et la motricité. Arzarello (Arzarello et al. 2009) appelle « semiotic bundle » des gestes, des langages, des mouvements et leurs coordinations avec les registres « standards » pendant les processus d'enseignement et d'apprentissage.

2.3.2 Représentation de la notion de fonction dans différents registres

La fonction est un objet complexe et est appréhendée à travers différents registres de représentation. On distingue souvent quatre registres auxquels le concept de fonction conduit à faire appel : registre symbolique des formules, registre graphique des courbes, registre numérique des tables de valeurs, et registre du langage. Une fonction dans le registre numérique met en jeu la relation de correspondance et se représente par un tableau de valeurs. Dans le registre graphique, une fonction est représentée par une courbe dans le plan muni d'un repère. Le registre symbolique fournit comme représentation d'une fonction, l'expression algébrique qui permet de calculer l'image $f(x)$ pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de f. Finalement, la représentation d'une fonction dans le registre du langage met en jeu les descriptions verbales des relations fonctionnelles et des processus de communication.

Du point de vue cognitif, la conceptualisation de fonctions requiert la rencontre et l'articulation de plusieurs registres de représentation afin de permettre un détachement nécessaire de l'objet de ses représentations. Les TICE peuvent donner des apports significatifs pour cette articulation grâce aux potentialités de relier dynamiquement et de façon interactive ces registres.

2.3.3 Discussion de la problématique du point de vue des aspects sémiotiques

Les aspects sémiotiques décrits ci-dessus, en particulier celui de Duval, seront utilisés pour présenter l'environnement Casyopée et pour l'analyse des activités des élèves. Comme nous l'avons dit dans le chapitre 1, la fonction est un concept complexe. Différents résultats de recherche ont montré que les *conversions* (les passages) entre registres de représentation de fonction sont difficiles pour une grande partie des élèves (Dagher, 1996 ; Hitt, 1998).

Le développement rapide des TICE, particulièrement des environnements numériques d'apprentissage offrant un grand nombre des capacités de représentation, peut faciliter l'appropriation de la notion de fonction. Avec un nouvel environnement logiciel offrant multiples représentations des fonctions comme Casyopée (voir le détail dans le chapitre 4), nous nous posons des questions générales : comment exploiter ces fonctionnalités variées de représentation afin de développer une compréhension des élèves d'une dépendance fonctionnelle ? Comment concevoir des situations d'apprentissage et des tâches données aux élèves pour faciliter les *traitements* et les *conversions* entre registres ? Une approche sémiotique décrite ci-dessus nous fournit les éléments théoriques permettant d'éclairer les potentialités de multiples représentations offertes par Casyopée et de comprendre comment Casyopée peut encourager une compréhension flexible sur les fonctions.

2.4 ARTICULATION DES CADRES THEORIQUES

La figure ci-dessous illustre un regard général sur les éléments théoriques utilisés. Notre travail de thèse se situe dans le cadre général de l'influence des représentations numériques sur les processus d'apprentissage. Nous nous intéressons particulièrement aux potentialités de représentation offertes par un environnement numérique pour l'apprentissage des fonctions. Nous distinguons trois aspects principaux concernés dans notre travail : ergonomique, épistémologique, sémiotique. L'approche instrumentale relie la Typologie d'activités à travers l'analyse des liens entre potentialités des artefacts et activités des élèves. Cette approche se rapporte également aux aspects sémiotiques via l'analyse de la relation entre les potentialités de multi représentation des artefacts et la conceptualisation des fonctions. La Typologie se rapporte au cadre sémiotique via la mise en évidence des types d'activités des élèves dans les différents registres de représentation sémiotique.

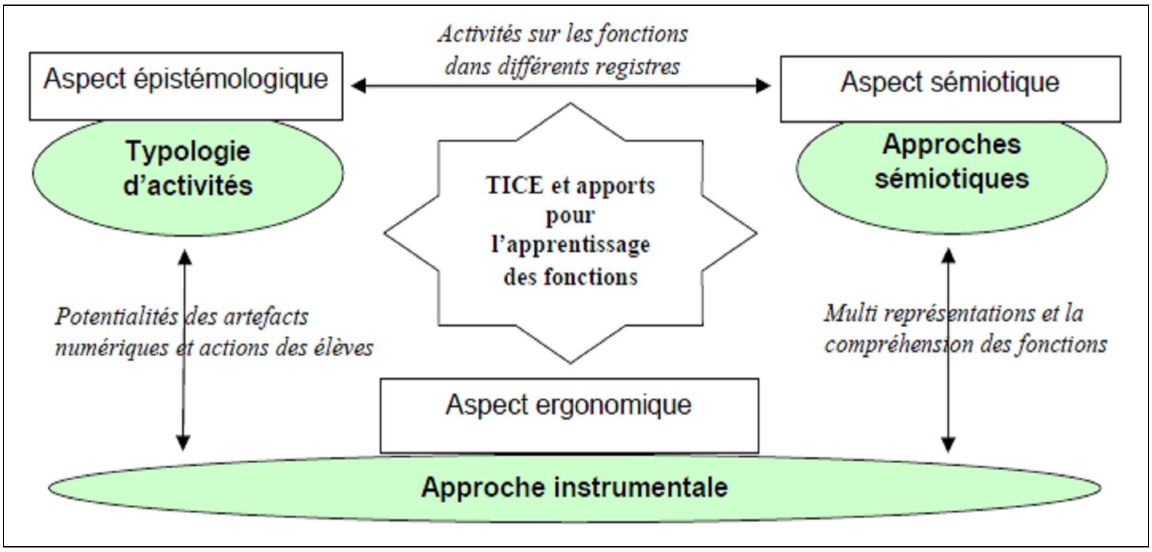


Figure 2.3. Articulation des cadres théoriques

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les éléments théoriques qui éclairent notre recherche. Pour l'approche instrumentale, nous portons particulièrement notre attention sur l'articulation et l'imbrication entre le développement de connaissances des élèves sur l'artefact (Casyopée) et de connaissances mathématiques sur les fonctions pendant la genèse instrumentale. Afin d'analyser le processus d'instrumentation, nous nous concentrerons sur la progression des tâches mathématiques et leurs connections avec l'instrumentalisation progressive de Casyopée.

Afin d'analyser les activités des élèves sur les fonctions en environnements numériques d'apprentissage, nous adoptons la Typologie d'activités introduite par Lagrange & Artigue (2009). Ce cadre soutient notre approche où les fonctions sont considérées comme modèles de dépendance en géométrie. Cette Typologie d'activités n'est pas utilisée de la façon isolée, mais en relation avec l'approche instrumentale car nous considérons l'activité des élèves dans un processus de genèse sur un temps long. Finalement, nous nous référons aux aspects sémiotiques de Duval pour mieux comprendre les potentialités variées de représentation de l'environnement Casyopée pour l'apprentissage des fonctions.

Partie II

TRAVAIL DANS LE CADRE DU PROJET REMATH

Chapitre 3

Curriculum, démarche expérimentale et modélisation fonctionnelle

Introduction

Dans ce chapitre, nous analysons d'abord l'objet d'apprentissage « fonctions » dans le système d'enseignement français au niveau du lycée. Nous nous concentrons principalement sur le curriculum de la classe de Seconde pour mieux comprendre les intentions de l'institution car les fonctions constituent une partie importante à ce niveau. Nous mettons l'accent sur le type de tâche de modélisation fonctionnelle des situations géométriques que le curriculum préconise. Nous soulignons le rôle des TICE, qui est adopté par l'institution en France, ainsi que leur place donnée à l'expérimentation. En revanche, nous ne mentionnons que les moments clés en Terminale concernant notre travail de recherche. Ensuite, nous précisons un cadre didactique pour mieux situer les démarches expérimentales et de modélisation qui sont encouragées par le curriculum.

3.1 LES FONCTIONS DANS LE SYSTEME D'ENSEIGNEMENT FRANÇAIS AU NIVEAU DU LYCEE

3.1.1 Curriculum officiel sur les fonctions et utilisation des TICE

Dans le curriculum mathématique français, comme dans la plupart des autres pays, le travail sur les fonctions joue un rôle essentiel au lycée :

- Premièrement, l'enseignement/l'apprentissage des fonctions est considéré comme un moyen de consolider l'apprentissage de l'algèbre. En effet, une première raison est que l'enseignement/l'apprentissage des fonctions permet une approche « multi-registres » de l'algèbre, c'est-à-dire dans les registres symboliques, graphiques et numériques. Par exemple, la résolution de l'équation $\frac{1}{x} = x - 1$ peut s'interpréter comme la recherche des abscisses des points d'intersections d'une hyperbole et d'une droite. Une seconde raison est que l'enseignement/l'apprentissage des fonctions permet un réinvestissement de compétences en calcul algébrique. Par exemple, la factorisation devient un moyen pour étudier les signes d'une fonction.
- Deuxièmement, les fonctions jouent un rôle dans la préparation à l'analyse. Une des difficultés dans la façon dont les notions d'analyse, comme par exemple la dérivée, sont présentées aux élèves est qu'elles n'apparaissent pas comme réponse à des

problèmes. Il nous semble par exemple, que confronter assez tôt les élèves à des problèmes d'optimisation avec des moyens purement algébrique permet de mieux motiver une introduction à la dérivation.

- Finalement, les fonctions sont aussi des outils de modélisation. L'implication des fonctions dans la résolution des problèmes issus de domaines variés implique de les considérer comme des outils de modélisation. Les élèves doivent apprendre à reconnaitre, parmi des co-variations d'objets ou de grandeurs, celles qui sont des dépendances et pour lesquelles une modélisation par des fonctions mathématiques est un puissant outil de résolution de problèmes.

Plus particulièrement en France, l'approche des fonctions à travers des situations issues d'un domaine d'application est préconisée depuis le programme de 2001 :

> « On étudiera des situations issues, entre autres, de la géométrie, de la physique, de l'actualité ou de problèmes historiques. On réfléchira sur les expressions *être fonction de* et *dépendre de* dans le langage courant et en mathématique[7] ».

Le programme de Seconde de 2009, et un « document ressource » précisent l'accent mis sur les fonctions, insistent particulièrement sur la nécessité de considérer les fonctions en liaison avec un domaine d'application et recommandent l'usage des outils logiciels. De plus, le programme propose d'étudier des problèmes relatifs aux fonctions, notamment des problèmes d'optimisation :

> « L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier un problème d'optimisation ou un problème du type $f(x) > k$ et de le résoudre en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement… Les situations proposées dans ce cadre sont issues de domaines très variés : géométrie plane ou dans l'espace, biologie, économie, physique, actualité etc. Les logiciels mis à la disposition des élèves peuvent être utilement exploités[8] ».

Les fonctions apparaissent ainsi comme un fil directeur pour l'algèbre et l'analyse au lycée. L'optimisation en Seconde prépare l'approche de l'analyse en Première en mettant en avant le type de problème que la dérivation permet de résoudre. Notre étude se situe au niveau de la Première et de la Terminale Scientifique et intègre l'approche des fonctions préconisée par le nouveau programme, notamment la résolution de problèmes d'optimisation issue de domaines variés ainsi que la recommandation d'utiliser les TICE pour expérimenter, modéliser et aider à la résolution.

3.1.2 Contraintes institutionnelles en Première et Terminale

[7] Extrait du programme officiel de Seconde, 2001.
[8] Extrait du programme officiel de Seconde, 2009.

Notons que l'approche des fonctions telle qu'elle est préconisée récemment peut poser des difficultés particulières dans les dernières années de lycée à cause des poids du Baccalauréat, notamment dans les sections scientifiques. Le curriculum réel est formellement plus déterminé par l'évaluation et la représentation que les enseignants s'en font que par les documents écrits. Il n'est donc pas certain que l'approche des fonctions préconisée par les textes qui viennent d'être cités devienne une réalité notamment en Terminale. Jullien, Matheron, & Schneider (2003) ont montré que les changements de l'approche d'une notion mathématique comme les équations différentielles dans une épreuve pratique de Baccalauréat étaient finalement contre productifs. Notre expérimentation en Terminale devra tenir compte de cette donnée.

3.1.3 Type de tâches de modélisation fonctionnelle des situations géométriques dans les manuels scolaires

En France, dès la Sixième, en passant de tableaux à des représentations graphiques les élèves ont étudié des relations entre des grandeurs (prix de masse, aire et longueur, distance et durée). Ce travail a abouti en Troisième, à la notion de fonction comme « un processus faisant correspondre, à un nombre, un autre nombre ». En classe de Seconde, les fonctions constituent une partie importante du programme. Les élèves vont beaucoup utiliser les fonctions pour résoudre des problèmes. Ils vont découvrir de nouvelles fonctions et de nouvelles propriétés. Ce sera aussi l'occasion de mobiliser et de développer leurs compétences en calcul numérique et littéral, et d'utiliser la calculatrice ainsi que différents logiciels : tableur, logiciels de géométrie dynamique et de calcul formel.

Dans cette partie, nous nous intéressons principalement au type de tâches de modélisation fonctionnelle des situations géométriques dans un manuel scolaire.

a. Seconde, Collection math'x, Didier

Ce manuel est rédigé selon le nouveau programme de 2009 où les fonctions y jouent un très grand rôle. La partie des fonctions dans ce manuel est organisée en six chapitres :

Le chapitre 1 est consacré à la « modélisation par une fonction ». Les activités dans ce chapitre soulignent principalement des exercices et problèmes concernant des co-variations et dépendances entre deux quantités. Les trois chapitres suivants portent sur les fonctions sous les titres « *Sens de variation. Fonctions affines* », « *Développer, factoriser pour résoudre* », « *Fonctions de référence : carré, inverse, polynômes de degré 2 et homographiques* », « *Inéquations. Etude de variations* », « *Trigonométrie* ».

Chacun des chapitres se décompose en six parties principales. Par exemple, pour le chapitre 1, la première partie est « *Pour reprendre contact* ». Cette partie propose des « petits » exercices ayant pour objectif de rappeler quelques connaissances et savoir-faire nécessaire aux parties suivantes. La deuxième partie propose des activités permettant d'aborder et de préciser la notion de fonction, d'explorer les propriétés. La troisième partie, intitulée « *cours* », présente la notion de fonction et les notions qui l'accompagnent (l'ensemble de définition, l'antécédent, l'image). Arrivent ensuite les parties réservées aux applications : *Exercices résolus, Travaux pratiques, Exercices*.

Etudions maintenant brièvement chaque chapitre en portant en particulier notre attention sur la modélisation fonctionnelle des situations géométriques.

Chapitre 1 : « Modéliser par une fonction ».

Comme le titre du chapitre l'indique, il s'agit du premier abord de la notion de fonction et des notions qui l'accompagnent (ensemble de définition, antécédent et image, courbe représentative) en portant sur la modélisation fonctionnelle des phénomènes réels, des situations issues d'un domaine d'application. En proposant, dans les activités préparatoires, de différentes situations de dépendances entre grandeurs issues d'un domaine d'application, et en offrant à chaque fois une représentation graphique, un tableau de valeurs ou un programme de calcul, nous pouvons reconnaître que les fonctions seront étudiées tout au long de ces chapitres sous un aspect de relations de dépendances et de multi représentations. Voici un exemple extrait des activités préparatoires de ce chapitre :

Exemple :

Le point M peut se déplacer sur le segment [AB] ; N appartient à [CD] et P à [AD].

Problèmes étudiés

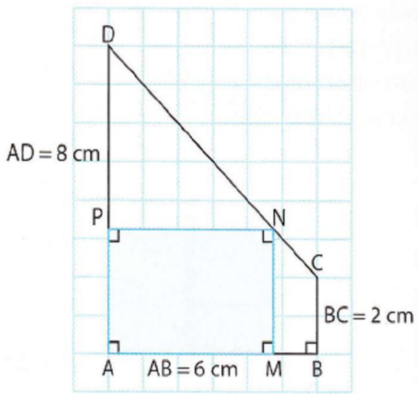
Peut-on placer le point M sur [AB] de telle sorte que l'aire du rectangle AMNP soit :

(A) égale à 15 cm^2 ?

(B) égale à 8 cm^2 ?

(C) égale à 20 cm^2 ?

(D) supérieure ou égale à 12 cm^2 ?



A. Expérimentation

1. Tracer ABCD sur une feuille à petits carreaux.

2. Pour chacune des valeurs suivantes de x :
$x = 2$; $x = 3$; $x = 7$; $x = 6$; $x = -1$; $x = 4{,}5$; $x = 0$

a. Placer lorsque c'est possible, le point M de [AB] tel que la longueur AM ait pour mesure x (en cm) et construire le rectangle AMNP correspondant.

b. Déterminer l'aire du rectangle AMNP (on peut utiliser le quadrillage).

3. Présenter les résultats obtenus dans un tableau.

4. Bilan

a. Dans quel intervalle doit-on choisir x pour que la construction soit possible ?

b. Peut-on apporter des réponses aux questions (A), (B), (C), (D) ?

B. Une fonction pour résoudre

On admet que le programme de calcul dans la marge, appliqué à la mesure x de la longueur AM en cm, fournit l'aire du rectangle AMNP en cm².
Reproduire et compléter, dans l'ordre de votre choix, les cadres suivants.

Du programme de calcul à la formule

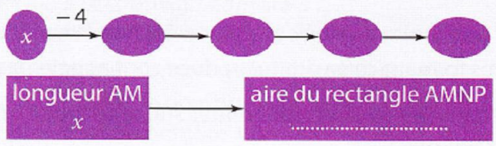
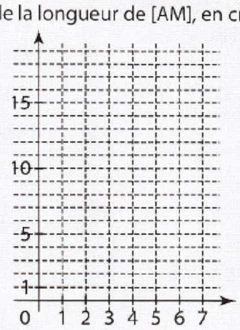


Tableau de valeurs

x	0	1	2	2,6	3	4	5	6
Aire de AMNP			12		15			12

Courbe
Aire de AMNP en cm² en fonction de la longueur de [AM], en cm



Avant de donner une définition de fonction, le manuel souligne une remarque sur la possibilité de modéliser des liens entre deux quantités qui varient :

> « Deux quantités peuvent varier tout en étant liées. Ce lien peut s'exprimer par un tableau de données, une formule ou un graphique (courbe ou nuage de points). Dans certains cas, on peut **modéliser** ce lien par une fonction ».

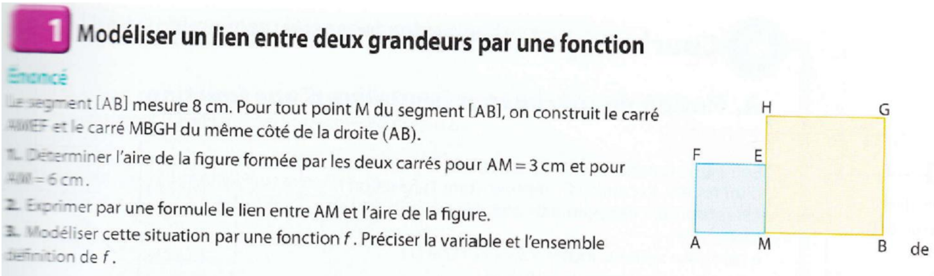
Le cours commence par une définition de la notion de fonction :

Définition

Soit D un ensemble de nombres. On définit une fonction f sur D en associant à chaque nombre x appartenant à D un **seul** nombre y ; f est une fonction de la **variable** x.

La définition ne concerne que les fonctions réelles définies sur un ensemble de nombres. Les expressions telles que « procédé » ou « correspondance » n'apparaissent pas dans cette définition. Ceci peut s'interpréter comme une intention d'introduire la notion de fonction comme une « loi arbitraire » (correspondance), sans nécessairement que celle-ci soit désignée par une règle clairement établie. Ensuite, trois exemples sont présentés pour illustrer les différentes manières de donner une fonction : par un tableau de valeurs, par une courbe, ou par une formule.

Quant aux exercices résolus, nous trouvons qu'une attention est particulièrement portée sur la modélisation des liens entre grandeurs par des fonctions mathématiques et sur les notions de variable et d'ensemble de définition. Voici un des exercices résolus proposés :


1 Modéliser un lien entre deux grandeurs par une fonction

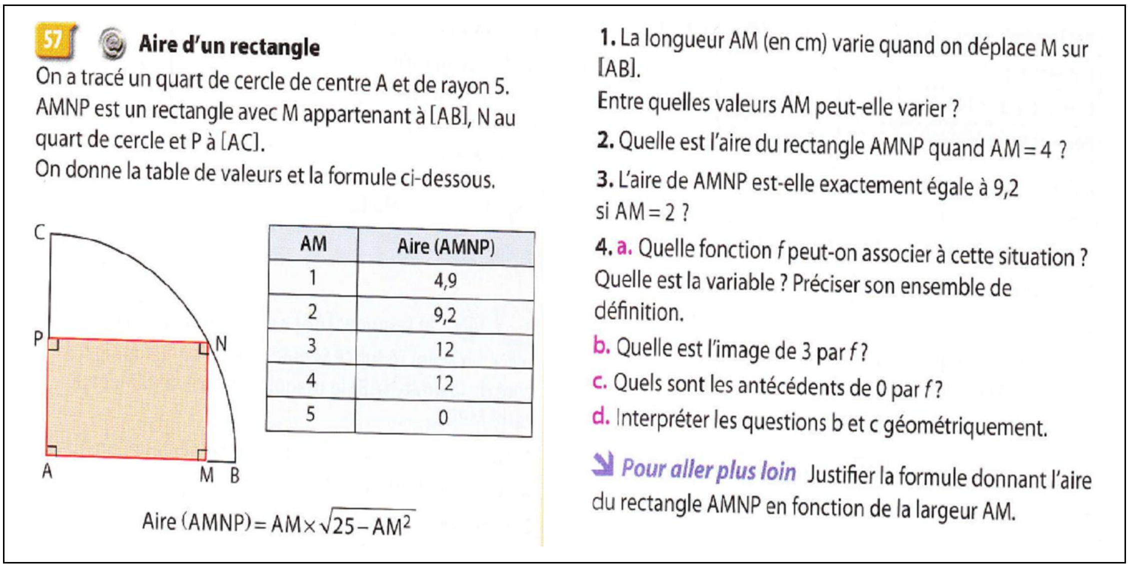
Énoncé

Le segment [AB] mesure 8 cm. Pour tout point M du segment [AB], on construit le carré AMEF et le carré MBGH du même côté de la droite (AB).

1. Déterminer l'aire de la figure formée par les deux carrés pour AM = 3 cm et pour AM = 6 cm.
2. Exprimer par une formule le lien entre AM et l'aire de la figure.
3. Modéliser cette situation par une fonction f. Préciser la variable et l'ensemble de définition de f.

L'objectif est de modéliser une dépendance géométrique entre deux grandeurs par une fonction algébrique. A travers la résolution du problème, il est demandé aux élèves de préciser la variable et l'ensemble de définition de la fonction en jeu.

Les parties « Travaux pratiques » et « Exercices » vise à consolider et approfondir la notion de fonction, la notion de variable et l'ensemble de définition via des situations très variées issues des domaines d'application : la géométrie, la vie pratique, l'économie, la température… L'objectif est d'associer une fonction à une situation, d'associer les différentes représentations à une fonction, et de traduire le lien entre deux grandeurs ou quantités par une formule algébrique et pré-algébrique. L'exemple suivant le montre :


57 Aire d'un rectangle

On a tracé un quart de cercle de centre A et de rayon 5. AMNP est un rectangle avec M appartenant à [AB], N au quart de cercle et P à [AC].
On donne la table de valeurs et la formule ci-dessous.

AM	Aire (AMNP)
1	4,9
2	9,2
3	12
4	12
5	0

Aire (AMNP) = $AM \times \sqrt{25 - AM^2}$

1. La longueur AM (en cm) varie quand on déplace M sur [AB].
Entre quelles valeurs AM peut-elle varier ?

2. Quelle est l'aire du rectangle AMNP quand AM = 4 ?

3. L'aire de AMNP est-elle exactement égale à 9,2 si AM = 2 ?

4. a. Quelle fonction f peut-on associer à cette situation ? Quelle est la variable ? Préciser son ensemble de définition.

b. Quelle est l'image de 3 par f ?

c. Quels sont les antécédents de 0 par f ?

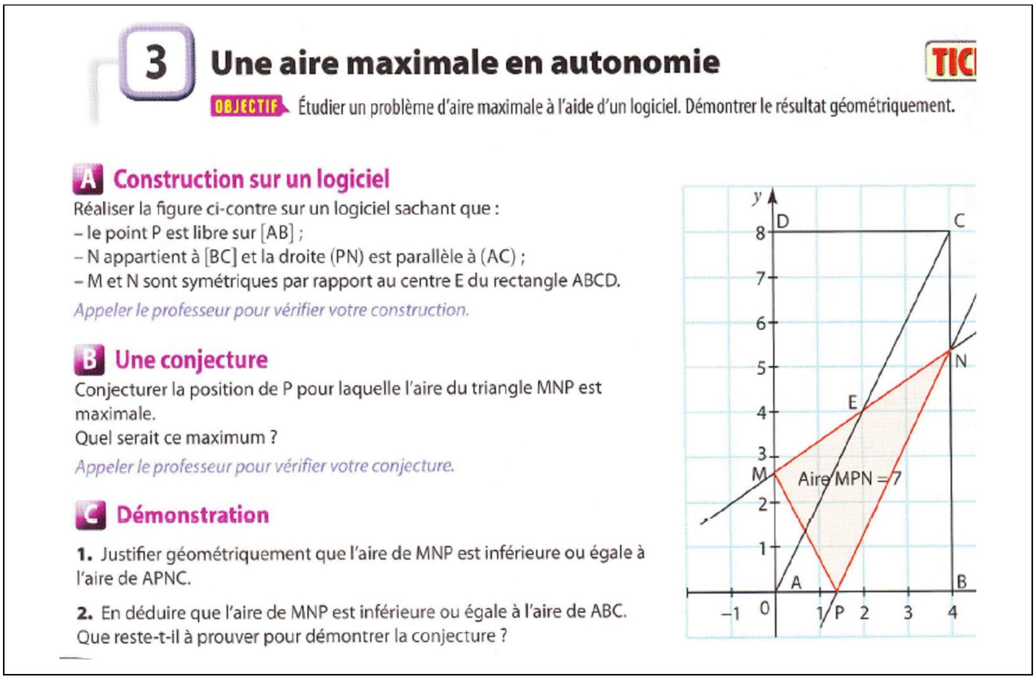
d. Interpréter les questions b et c géométriquement.

Pour aller plus loin Justifier la formule donnant l'aire du rectangle AMNP en fonction de la largeur AM.

Le manuel encourage particulièrement l'utilisation des TICE pour résoudre les problèmes donnés. Les technologies encouragées sont très variées : des calculatrices, des logiciels de géométrie dynamique, des tableurs, des logiciels de calcul formel… En particulier, les éléments d'algorithmique sont également exploités pour approcher des situations. L'objectif est de passer d'un algorithme à une formule, puis d'une formule à une fonction.

Autres chapitres :

Le chapitre 2 aborde le sens de variation et les fonctions affines. La partie « Activités » donne des problèmes portant sur la lecture des variations et des valeurs extrêmes, sur l'observation des variations dynamiques des grandeurs ou mesures, sur le sens de variation et les extremums d'une fonction affine… La partie « cours » donne les définitions de fonction croissante, décroissante, monotone, les extremums d'une fonction. Le sens de la fonction de la fonction affine est donné en tant qu'une propriété dont la démonstration est considérée comme un exercice pour des élèves. Les parties « Travaux pratiques » et « Exercices » approfondissent les propriétés des fonctions affines en donnant des problèmes et des situations issues des domaines très variés. En particulier, nous trouvons que l'étude des problèmes d'optimisation issus des domaines d'application prend une place important dans ce chapitre, surtout à l'aide des TICE. Par exemple, dans le problème ci-dessous, il est demandé aux élèves d'étudier le maximum d'une aire variante à l'aide d'un logiciel et de démontrer le résultat géométriquement :


3 Une aire maximale en autonomie TIC

OBJECTIF Étudier un problème d'aire maximale à l'aide d'un logiciel. Démontrer le résultat géométriquement.

A Construction sur un logiciel

Réaliser la figure ci-contre sur un logiciel sachant que :
– le point P est libre sur [AB] ;
– N appartient à [BC] et la droite (PN) est parallèle à (AC) ;
– M et N sont symétriques par rapport au centre E du rectangle ABCD.

Appeler le professeur pour vérifier votre construction.

B Une conjecture

Conjecturer la position de P pour laquelle l'aire du triangle MNP est maximale.
Quel serait ce maximum ?

Appeler le professeur pour vérifier votre conjecture.

C Démonstration

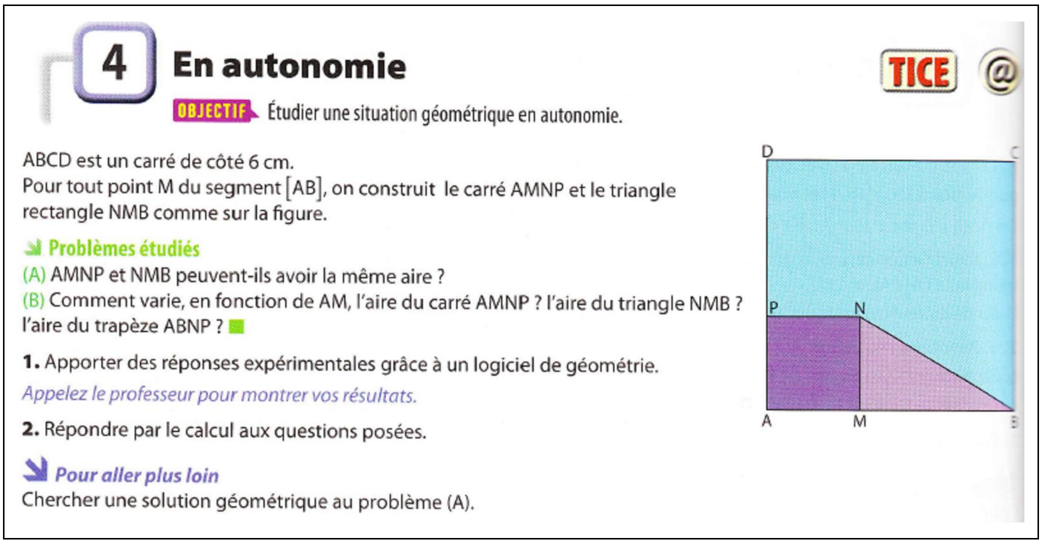
1. Justifier géométriquement que l'aire de MNP est inférieure ou égale à l'aire de APNC.

2. En déduire que l'aire de MNP est inférieure ou égale à l'aire de ABC. Que reste-t-il à prouver pour démontrer la conjecture ?

Le chapitre 3 porte sur le développement et la factorisation des expressions algébriques ainsi que sur les notions d'équation, d'équation équivalente, et de résolution d'équation. La partie de cours présente d'abord la notion d'égalité « pour tout x », puis la notion de résolution d'équation. Ensuite, le cours aborde les notions et les techniques de développement et de factorisation des expressions algébriques. Le manuel présente aussi la factorisation des expressions algébriques en utilisant un logiciel de calcul formel. On peut reconnaître la volonté des auteurs du manuel que les fonctions sont utilisées dans ce chapitre comme outils pour consolider l'apprentissage de l'algèbre, surtout les équations algébriques.

Le chapitre 4 présente des fonctions de référence. Ce chapitre du manuel se compose de quatre cours. Le premier porte sur la fonction carré $x \to x^2$, le seconde sur la fonction inverse $x \to \frac{1}{x}$, le troisième sur les fonctions polynômes de second degré $x \to ax^2 + bx + c$, et le quatrième sur les fonctions homographiques $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$. Avec l'introduction des fonctions de référence, qui ne sont pas des affines, les élèves rencontrent non seulement des fonctions dont la représentation graphique n'est pas une droite, mais aussi des fonctions qui ne sont continues que sur un intervalle donné. Cela devrait non seulement permettre de modéliser et de résoudre un plus grand nombre de problèmes à l'aide des fonctions mais aussi doit conduire à mettre l'accent sur le domaine de définition, sur l'étude du sens de variation et sur ses conséquences graphiques.

Les parties « Travaux pratiques » et « Exercices » portent sur le sens de variation et les extremums des fonctions de référence, surtout les fonctions polynômes de degré 2. L'utilisation des TICE est préconisée, surtout pour des études expérimentales via l'étude des situations issues des domaines d'application. Voici un problème présenté dans la partie « Travaux pratiques » du chapitre 4 :


4 En autonomie

TICE @

OBJECTIF Étudier une situation géométrique en autonomie.

ABCD est un carré de côté 6 cm.
Pour tout point M du segment [AB], on construit le carré AMNP et le triangle rectangle NMB comme sur la figure.

Problèmes étudiés

(A) AMNP et NMB peuvent-ils avoir la même aire ?
(B) Comment varie, en fonction de AM, l'aire du carré AMNP ? l'aire du triangle NMB ? l'aire du trapèze ABNP ?

1. Apporter des réponses expérimentales grâce à un logiciel de géométrie.
Appelez le professeur pour montrer vos résultats.

2. Répondre par le calcul aux questions posées.

Pour aller plus loin
Chercher une solution géométrique au problème (A).

Le chapitre 5 porte sur les inéquations et l'étude de variations. Le premier cours présente la méthode graphique de résolution d'une équation. Le second continue à présenter la méthode algébrique pour résoudre une inéquation via la notion d'inéquations équivalentes. Le troisième cours porte sur les méthodes d'étudier le sens de variation d'une fonction. Le dernier chapitre 6 est réservé à la trigonométrie.

b. Quelques remarques

La volonté des auteurs de faire apparaître la notion de fonction sous une perspective de modélisation fonctionnelle des dépendances ne laisse aucune incertitude. Les fonctions sont introduites sous tous ses aspects : numérique, graphique, algébrique. Une référence à des situations issues des domaines d'application se trouve impliquée dans plusieurs parties de chaque chapitre, avec l'accent mis sur la modélisation et les activités expérimentales.

L'analyse du manuel nous conduit également à affirmer que le type de tâche de modélisation fonctionnelle des situations géométriques est encouragé pour l'approche des fonctions. Pour ces situations, il est souvent demandé aux élèves d'expérimenter et d'observer la co-variation et la relation de dépendance entre grandeurs ou mesures impliqués dans la figure. Ensuite, les élèves doivent reconnaître une dépendance fonctionnelle parmi des co-variations puis l'exprimer en une fonction mathématique. L'étude de sa variation et de ses extremums permet aux élèves de trouver la résolution du problème. En particulier, nous trouvons que les problèmes d'optimisation commençaient à apparaître à ce niveau via des problèmes proposés dans les parties « Travaux pratiques » ou « Exercices ». Nous pensons que les problèmes d'optimisation sont appropriés pour « montrer » le champ d'application des notions telles que variations et extremum. Ce type de problèmes met en œuvre plusieurs cadres et il pose peut-être une certaine complexité pour des élèves de la classe de Seconde. Il nous semble que ce type de problèmes d'optimisation apporte un changement de contrat d'étude relatif aux exercices. Il s'agit d'explorer d'abord les situations et puis de construire une fonction algébrique en fonction d'une grandeur adéquatement choisie. Ensuite, il nécessite de se servir de cette fonction pour résoudre le problème donné.

Une autre remarque concerne la position des TICE. Les TICE sont largement recommandé par les auteurs du manuel. Pour le type de tâche de modélisation fonctionnelle des situations géométriques, le rôle des TICE est encore plus important grâce à leurs potentialités de représentation. La résolution de ces problèmes nécessite souvent l'utilisation des TICE comme un outil pour soutenir des explorations et des hypothèses. Les outils informatiques élargissent considérablement les possibilités d'observation et de manipulation sur les fonctions, les capacités de multi-représentations, ainsi que la prise en charge d'un grand nombre de calculs ou d'une multitude de cas de figure d'observer et vérifier de façon empirique différentes propriétés. Les outils informatiques proposés sont très variés : les logiciels de géométrie dynamique (GeoGebra, Geoplan-Geospace), les logiciels de calcul formel (Xcas), les tableurs, les calculatrices, les logiciels de programmation, … En particulier, les éléments d'algorithmique sont introduits dès le chapitre 1 pour soutenir une approche des fonctions comme un processus du calcul de la valeur de sortie pour une valeur d'entrée donnée. Il s'agit de passer d'un algorithme de calcul à une formule et d'une formule à une fonction mathématique.

3.2 DEMARCHE EXPERIMENTALE ET TICE

3.2.1 Spécificités des TICE dans la démarche expérimentale

Dans la plupart des pays, les programmes de mathématiques mettent de plus en plus l'accent sur la dimension expérimentale de l'activité mathématique ainsi que sur l'aide que peuvent apporter les TICE à la mise en place effective de pratiques expérimentales dans les classes. C'est le cas de la création d'une épreuve pratique au baccalauréat scientifique en France en 2007. Dans cette partie, nous tenterons de préciser en quoi consiste une démarche expérimentale et les aides qu'apportent les TICE à une telle démarche.

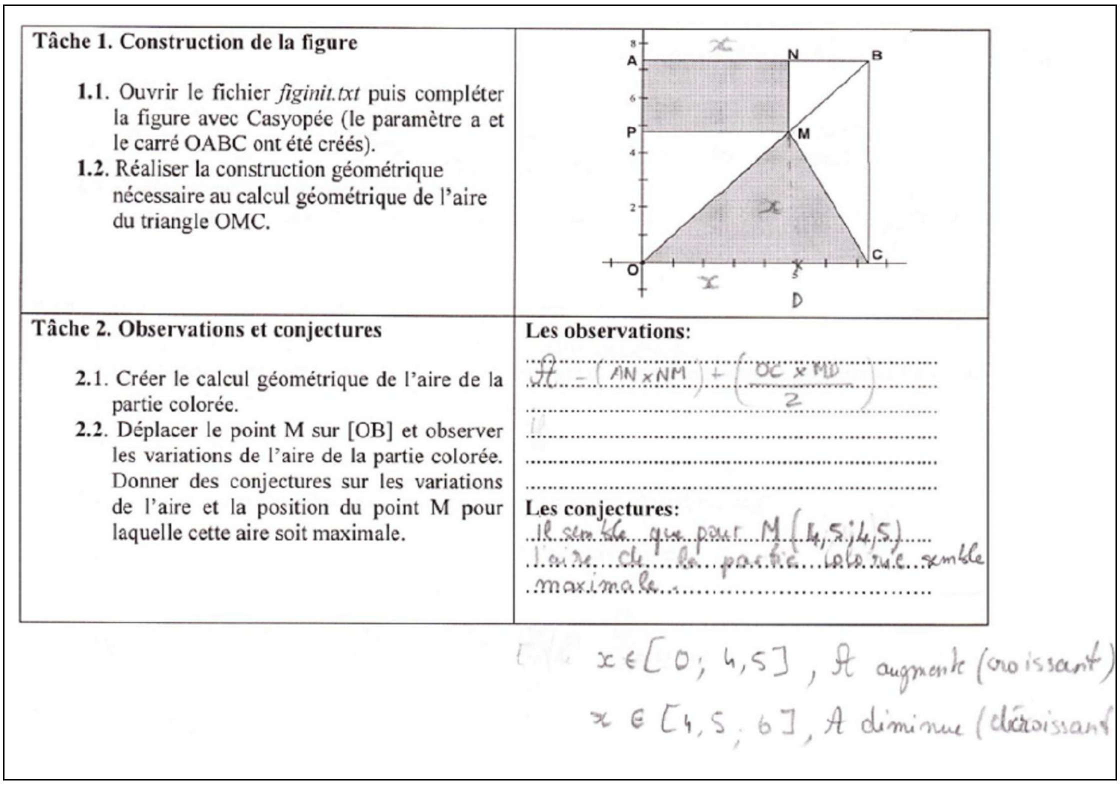
Au niveau de recherche, le rôle des approches expérimentales utilisant des TICE pour la conceptualisation a été mentionné. Par exemple, Yerushalmy (1999) nous rappelle que les concepteurs des outils technologiques ont toujours visé à fournir des moyens pour une meilleure approche expérimentale comme un soutien pour la conceptualisation des élèves. Lagrange (2005b) a discuté comment les choix dans la conception des outils technologiques peuvent fournir aux élèves des approches expérimentales et les aider à la conceptualisation. Il a considéré les limites de la transposition des approches expérimentales des pratiques de recherche aux pratiques de la classe. Il a analysé une relation entre le curriculum, la pratique de la classe et la conception des outils technologiques et comment une réflexion sur le curriculum et les pratiques peut apporter une aide pour la conception des outils logiciels dédiés à des situations expérimentales pour l'apprentissage des fonctions.

Concernant une démarche expérimentale dans le cas spécifique des mathématiques, la question générale est : quelle expérimentation en classe de mathématiques ? Selon Lombard (2008), les expérimentations sont le plus souvent faites pour vérifier des hypothèses. Pour Perrin (2007), la démarche expérimentale est caractérisée par des activités comme « expérience, observation de l'expérience, formulation de conjectures, tentative de preuves, production éventuelles de contre exemples, … ». Nous pouvons déduire de ces travaux de recherche qu'une démarche expérimentale est un type d'activité en classe modélisant le travail exploratoire des chercheurs dont l'objectif est d'offrir aux élèves une nouvelle pratique aussi proche que possible des pratiques mathématiques réelles. La démarche expérimentale se compose souvent des tâches suivantes :

- Formuler un problème
- Expérimenter (réaliser, observer)
- Conjecturer
- Tester la conjecture (éprouver, évaluer)
- Prouver
- Communiquer.

Gueudet & Vandebrouck (2010) s'intéressent à deux moments clefs de la démarche expérimentale : celui de la conjecture et celui de la validation de cette conjecture.

- Le moment de la conjecture : Le moment de la conjecture apparaît comme essentiel dans la démarche expérimentale. Les technologies semblent apporter des potentialités intéressantes permettant aux élèves des activités de conjectures qu'il ne leur serait pas possible de développer dans un environnement papier/crayon. L'exemple ci-dessous est extrait d'une fiche élève dans le cadre des expérimentations de notre thèse. Il montre les apports du logiciel Casyopée (les outils de déplacement et de calcul géométrique) pour le travail d'observations et de conjectures des élèves.



Tâche 1. Construction de la figure **1.1.** Ouvrir le fichier *figinit.txt* puis compléter la figure avec Casyopée (le paramètre a et le carré OABC ont été créés). **1.2.** Réaliser la construction géométrique nécessaire au calcul géométrique de l'aire du triangle OMC.	
Tâche 2. Observations et conjectures **2.1.** Créer le calcul géométrique de l'aire de la partie colorée. **2.2.** Déplacer le point M sur [OB] et observer les variations de l'aire de la partie colorée. Donner des conjectures sur les variations de l'aire et la position du point M pour laquelle cette aire soit maximale.	**Les observations:** $A = (AN \times NM) + \left(\frac{OC \times MD}{2}\right)$ **Les conjectures:** Il semble que pour M (4,5;4,5) l'aire de la partie colorée semble maximale

$x \in [0; 4,5]$, A augmente (croissant)
$x \in [4,5; 6]$, A diminue (décroissant

Figure 3.1. Copie d'une fiche d'élèves de Terminale sur la résolution d'un problème d'optimisation

- Le moment de la preuve : Le deuxième moment clef est celui de la vérification de la conjecture émise. Les potentialités variées des TICE permettent aux élèves de vérifier la conjecture formulée et de les aider dans la réalisation de la preuve. Par exemple, dans le cas ci-dessus, les outils de déplacement et de calcul géométrique de Casyopée aident les élèves à vérifier la conjecture sur les variations de l'aire de la partie colorée. Les fonctionnalités spécifiques de Casyopée (voir le chapitre 4) facilitent également une preuve algébrique chez les élèves.

Selon Vandebrouck et al. (2010), la démarche expérimentale est une occasion pour les élèves de mettre en fonctionnement des connaissances non nécessairement explicitées (au niveau *disponible* (Robert & Rogalski, 2002)) et en dépassant les applications immédiates de ces connaissances. En ce sens, l'intégration des TICE au sein de la démarche expérimentale doit être une occasion supplémentaire d'enrichir l'activité des élèves en facilitant des *adaptations* de connaissances qui ne seraient pas permises par une activité en environnement papier/crayon. D'une part, l'usage de l'outil peut permettre l'activité de conjecture plus facilement qu'en environnement papier/crayon mais il peut d'autre part permettre à l'élève d'entrer en activité face à une démonstration qui lui demande de nombreuses adaptations de connaissances, comme des introductions d'intermédiaires ou bien des choix de méthodes. C'est là que réside l'intérêt d'articuler des activités nouvelles mettant en jeu les TICE avec l'activité mathématique des élèves. Cette articulation entre le travail expérimental et le travail de conjecture et de preuve pose encore des questions intéressantes. Par exemple, comment une approche expérimentale peut faciliter la conceptualisation des élèves ? Comment le travail avec les technologies peut-il susciter l'entrée dans la preuve mathématique ? Comment concevoir des outils technologiques appropriés aux curriculums pour aider la démarche expérimentale ?

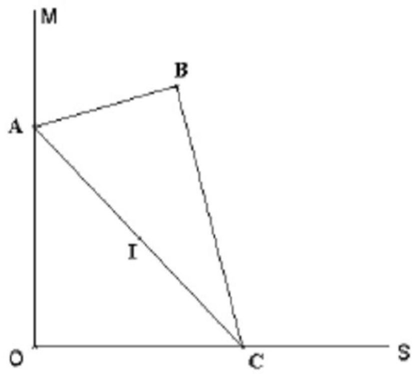
3.2.2 Démarche expérimentale et épreuve pratique en Terminale S

L'importance de la démarche expérimentale dans l'enseignement des mathématiques trouve son aboutissement dans la mise en place en 2007, dans certains établissements, d'une épreuve pratique au baccalauréat scientifique. L'objectif est de tester les capacités des élèves à s'engager dans une démarche expérimentale avec l'aide des TICE. Dans cette épreuve, il est attendu des élèves qu'ils utilisent un outil informatique afin de résoudre un exercice mathématique dont le degré d'ouverture nécessite une démarche expérimentale, c'est-à-dire, plus ou moins selon les exercices proposés, une activité autonome de problématisation, de modélisation avec l'outil TICE, d'observation, de conjecture et de démonstration. A travers cette épreuve pratique, au-delà de l'acquisition stricte de connaissances, on cherche à développer les aptitudes des élèves à poser des problèmes, les explorer, élaborer des conjectures et les tester, produire des argumentations convaincantes et des preuves, communiquer leur travail et les résultats obtenus. Le type de tâche « observer – conjecturer – tester – prouver » est dominant dans les sujets proposés pour cette épreuve pratique. La page suivante montre un exercice extrait de bande d'exercices pour l'épreuve pratique en Terminale S.

sujet 012 — Épreuve pratique de mathématiques — Fiche élève

Etude de lieux géométriques

Énoncé



Le triangle ABC représente une équerre telle que $AB = 3$, $AC = 6$ et l'angle en B est droit.

Les points A et C glissent respectivement sur les demi-droites perpendiculaires $[OM)$ et $[OS)$.

Le point I est le milieu du segment $[AC]$.

On s'intéresse aux lieux des points I et B.

1. Observer les propriétés géométriques de la figure. Avec un logiciel de géométrie, construire une figure dynamique illustrant la situation.

   Appeler l'examinateur pour vérifier la construction ou en cas de difficulté.

2. Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu du point I quand C décrit la demi-droite $[OS)$. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?

   Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

3. Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu du point B quand C décrit la demi-droite $[OS)$. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?

   Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

4. - Donner les mesures des angles de l'équerre, puis celle de $\widehat{AOB}$ (A distinct de O).
   - En déduire que le lieu de B est inclus dans une courbe simple dont on précisera la nature.
   - Démontrer que : $OB = 6\ \sin(\widehat{OAB})$.
   - En déduire le lieu de B.

Figure 3.2. Un exercice extrait de bande d'exercices pour l'épreuve pratique en Terminale S

La démarche expérimentale est explicitement utilisée dans cet exercice. Pour la question 1, il est demandé aux élèves d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour construire la figure et d'observer les propriétés géométriques de la figure. Après l'exploration de la figure avec le logiciel, les élèves doivent formuler des hypothèses sur les lieux des points I et B. Finalement, les élèves ont à faire une preuve pour trouver la solution et valider les hypothèses émises.

3.3 MODELISATION FONCTIONNELLE

3.3.1 Processus de modélisation : considérations théoriques

La modélisation et ses implications dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques sont les questions importantes dans la recherche actuelle sur l'enseignement des mathématiques. Cette importance se manifeste à travers des travaux de recherche dans les trois livres sur ce domaine qui ont été récemment publiés : *Modeling Students' Mathematical Modeling Competences – ICTMA 13* (R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford, 2010) ; *Modelling and Applications in Mathematics Education* (W. Blum, P. L. Galbraith, H-W Henn, & M. Niss, 2007) et *Beyond Constructivism – Models and Modelling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (R. Lesh & H. M. Doerr, 2003). Au niveau théorique, afin d'étudier le processus de modélisation, un point important que soulignent les auteurs porte sur la distinction entre un monde mathématique et un monde réel (ou un monde extra mathématique). Différents points de vue sur cette distinction conduisent aux *cycles de modélisation* avec les différents accents sur les étapes du processus de modélisation. Nous présentons ci-dessous quatre cycles de modélisation proposés dans les travaux récents sur ce domaine :

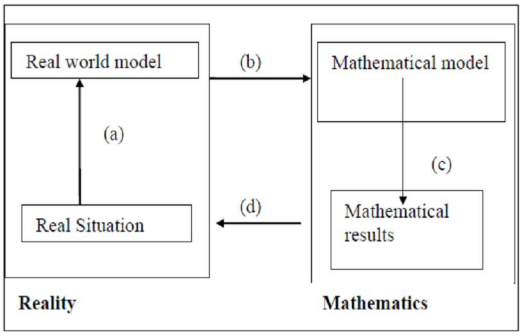


Figure 3.3. Le cycle de modélisation de Kaiser (cité par Borromeo-Ferri, 2006)

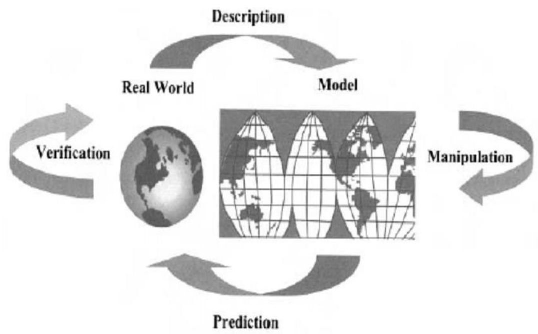


Figure 3.4. Le cycle de modélisation de Lesh & Doerr (2003)

Pour Kaiser, un processus de modélisation suit la procédure suivante :

- Le point de départ est une situation du monde réel (ou une situation réelle). Cette situation est ensuite simplifiée ou structurée (a) pour obtenir un modèle du monde réel.
- Ce modèle est mathématisé (b) pour obtenir un modèle mathématique de la situation de départ.
- Des considérations et manipulations mathématiques (c) dans le modèle mathématique entraînent des résultats mathématiques.

- Ces résultats doivent être réinterprétés (d) dans la situation réelle. L'adéquation doit également être validée.

Dans une perspective de la résolution de problèmes, Lesh & Doerr (2003) soulignent quatre étapes d'un cycle de modélisation : (a) *description* qui établit une « application » du monde réel au monde modélisé ; (b) *manipulation* du modèle afin de générer des résultats mathématiques ; (c) *prédiction* (ou *traduction*) apporte ces résultats dans le monde réel ; et (d) *vérification* concerne l'utilité de ces résultats pour la situation de résolution de problème originale.

Selon Kuzniak & Vivier (2011), la distinction entre *Real Situation* et *Real Model* dans le cycle de modélisation de Kaiser s'avère trop simple lorsque le propos n'est plus seulement de traiter les problèmes calibrés et déjà épurés que proposent les manuels de mathématiques, mais de traiter des situations réelles. C'est ce qui a conduit Blum et Leiss (Blum & Leiss, 2005) à introduire une distinction entre *Real Situation* et *Situation Model* que Borremeo-Ferri (2006) assimile à la représentation mentale de la situation pour développer un point de vue cognitif sur le processus de modélisation chez les élèves.

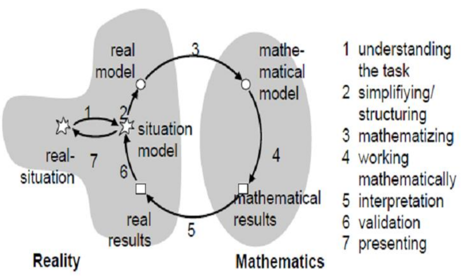


Figure 3.5. Le cycle de modélisation de Blum & Leiss (2005)

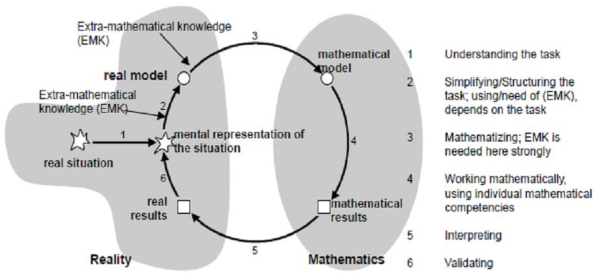
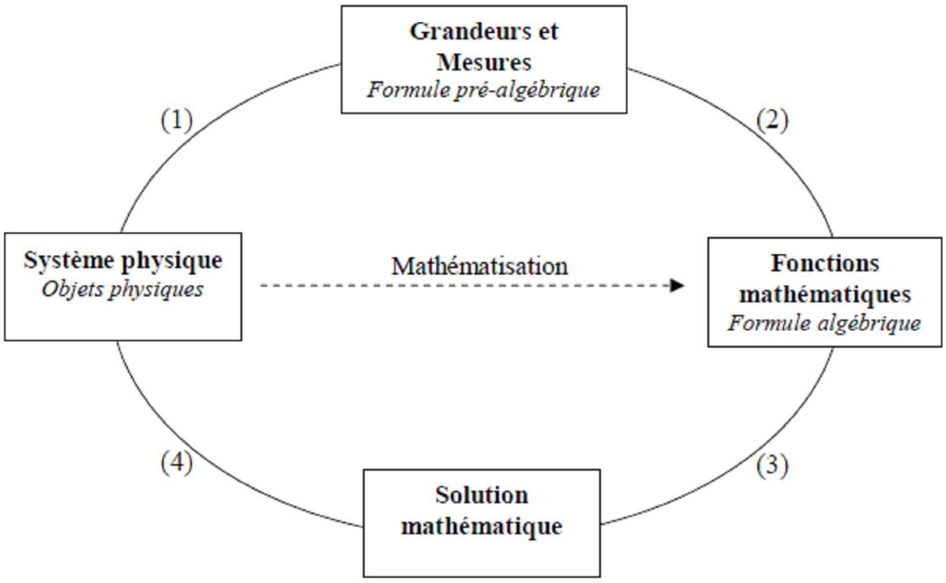


Figure 3.6. Le cycle de modélisation de Borromeo-Ferri (2006) dans une perspective cognitive

3.3.2 Modélisation fonctionnelle

a. Un cycle de modélisation fonctionnelle

Dans les cycles de modélisation proposés ci-dessus, nous nous intéressons plus particulièrement au processus de mathématisation qui transforme un modèle du monde réel en un modèle mathématique. Dans le contexte de l'enseignement et l'apprentissage des fonctions au lycée, il nous semble qu'il est nécessaire de détailler et compléter ce processus de mathématisation afin d'élucider les activités des élèves sur les fonctions impliquées dans ce processus. En s'appuyant sur la typologie d'activités de Lagrange & Artigue (2009), nous proposons ci-dessous notre cycle de modélisation pour approcher les fonctions en environnements numériques d'apprentissage :



(1) Choisir une variable et créer une formule pré-algébrique exprimant la relation de dépendance
(2) Représenter algébriquement la formule pré-algébrique
(3) Preuve algébrique
(4) Interprétation

Figure 3.7. Un cycle de modélisation fonctionnelle

Dans notre cycle de modélisation fonctionnelle, nous mettons l'accent sur le niveau intermédiaire « Grandeurs et mesures » entre le « Système physique » (le monde réel) et les « Fonctions mathématiques » (le monde mathématique). Le processus de mathématisation est divisé en deux étapes (étapes (1) et (2) dans la figure). Des situations ou problèmes issues des domaines d'application sont données aux élèves dans le *Système physique* où ils peuvent observer, explorer et percevoir des relations de dépendances entre grandeurs et mesures. Afin de quantifier les observations, les élèves peuvent choisir une variable puis créer un formule pré-algébrique exprimant la relation de dépendance (l'étape (1)). Ensuite, l'étape (2) concerne un processus de calculer et représenter algébriquement la formule pré-algébrique construite au niveau intermédiaire *Grandeurs et mesures*. Au niveau des *Fonctions mathématiques*, les élèves obtiennent une fonction mathématique modélisant une dépendance fonctionnelle entre grandeurs dans la situation donnée dans le *Système physique*. L'étape (3) comprend des manipulations, des transformations algébriques ou une preuve pour trouver la solution mathématique de la situation. L'étape (4) est le processus d'interprétation. Il s'agit de revenir dans le *Système physique* pour interpréter les solutions mathématiques trouvées.

b. Cohérence entre le cycle de modélisation fonctionnelle et la démarche expérimentale

Nous montrons maintenant la cohérence entre notre cycle de modélisation fonctionnelle et la démarche expérimentale, particulièrement en utilisant des TICE. Le *Système physique* (dans notre cas c'est la Géométrie dynamique) est réservé aux explorations énactive-iconiques où les élèves peuvent déplacer des objets, observer la transformation du système à l'aide des TICE, et percevoir préliminairement les relations de dépendance entre objets. Au niveau de *Grandeurs et mesures*, les élèves peuvent utiliser les potentialités des TICE pour quantifier des explorations et des observations et formuler des conjectures sur la solution du problème donné. La construction d'une formule pré-algébrique exprimant la relation de dépendance entre objets à ce niveau est fructueuse pour soutenir ces explorations et observations. Le niveau de *Fonctions mathématiques* est réservé aux transformations algébriques et preuves. Finalement, le retour dans le *Système physique* a pour objectif de vérifier et valider la solution mathématique.

Dans les chapitres qui suivent, nous illustrons en détails la mise en œuvre de ce cycle de modélisation fonctionnelle dans un environnement numérique dédié à l'apprentissage des fonctions et comment les situations d'apprentissage des fonctions sont conçues de manière cohérente avec la démarche expérimentale et la modélisation fonctionnelle que nous venons de présenter ci-dessus.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons premièrement fait une analyse institutionnelle de la partie « Fonctions » dans le curriculum actuel et dans un manuel scolaire choisi. Cette analyse institutionnelle nous conduit à conclure que le type de tâche de modélisation fonctionnelle des situations géométriques est préconisé dans l'enseignement actuel des fonctions au lycée. Ensuite, nous avons proposé et un cycle de modélisation fonctionnelle des situations géométriques et avons discuté le rapport entre ce cycle de modélisation fonctionnelle et la démarche expérimentale dans le contexte d'usage des TICE.

Chapitre 4

Casyopée et activités des élèves sur les fonctions

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord Casyopée, un environnement logiciel particulièrement conçu pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions au lycée. Nous mettons l'accent sur la mise en œuvre de la Typologie d'activités sur les fonctions dans l'environnement Casyopée. Nous analyserons ensuite, dans une étude a priori, les potentialités, les contraintes ainsi que des problèmes d'instrumentation soulevés lors de l'usage de cet environnement.

4.1 ENVIRONNEMENT CASYOPEE

4.1.1 Projet Casyopée

Casyopée est un environnement logiciel géométrique et algébrique pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions au lycée. Le projet de conception de l'environnement Casyopée est commencé depuis quelques années et est récemment développé dans le cadre du projet Européen ReMath.

Le but du projet Casyopée est d'offrir aux élèves un environnement logiciel pour l'apprentissage des fonctions au lycée avec des capacités de calcul formel, d'explorations graphiques et numériques et d'encourager l'usage des représentations algébriques. Kieran (2006) rappelle que des difficultés avec la notation algébrique sont depuis plusieurs années une question majeure pour l'éducation mathématique :

> « While arithmetic and algebra share many of the same signs and symbols, such as the equal sign, addition and subtraction signs, even the use of letters, many conceptual adjustments are required of the beginning algebra students as these signs and symbols shift in meaning from those commonly held in arithmetic ».

Dans les stratégies courantes de l'enseignement de l'algèbre, ces difficultés ne sont pas traitées: l'algèbre tend à être compris par les élèves comme un ensemble de procédures non liés à des significations ou à des objectifs (Hoyles, Lagrange, & Noss, 2006). Le développement des technologies numériques a soutenu le changement vers des approches expérimentales comme un moyen pour relier l'activité algébrique aux significations et objectifs. L'ambition du projet Casyopée est de contribuer à un changement vers des approches expérimentales en classe afin de permettre un accès à l'utilisation significative de représentation algébrique. Le projet Casyopéee commence en appuyant sur les potentialités suivantes des CAS (Lagrange & Gelis, 2008) :

- Offrir non seulement des expérimentations numériques mais encore un accès à la notation algébrique. Les CAS peuvent fournir des moyens d'expression plus proches des notations algébriques ordinaires et plus puissantes.
- Insister sur le but de transformations plutôt que sur des manipulations. Les capacités de base de CAS (comme développer, factoriser…) aident les élèves à choisir une transformation adéquate pour une tâche donnée.
- Relier des activités algébriques. L'utilisation de CAS par les élèves dans une activité algébrique expérimentale pourrait aider à mieux articuler les différentes activités algébriques.

Malgré les potentialités ci-dessus, les CAS standard offrent peu de soutien au travail des élèves lors de la résolution de problèmes et des enseignants ont du mal à maîtriser l'usage en classe (Lumb, Monaghan & Mulligan, 2000). Une des choix principaux du projet Casyopée est de développer un environnement logiciel incorporant un noyau symbolique, plutôt que d'utiliser un CAS standard. L'objectif du projet est de construire un environnement numérique d'apprentissage que les élèves peuvent maîtriser et connecter facilement avec l'environnement du papier/crayon. Le projet vise également à donner un statut évident à chaque objet algébrique (nombre réel, fonctions, paramètres…) et concentrer sur les objets appropriés dans la résolution de problèmes.

4.1.2 Structure de Casyopée

Concernant la conception générale de Casyopée, à partir d'un noyau de calcul formel gratuit Maxima, les concepteurs ont construit une interface selon un projet d'usage pédagogique. Ensuite, ils ont ajouté un onglet de géométrie dynamique. Comme ce système de géométrie dynamique est basé sur le noyau de calcul formel sous-jacent, Casyopée offre la facilité d'exporter des fonctions géométriques qui ne sont pas fournies par des systèmes de géométrie dynamiques basés sur des calculs numériques.

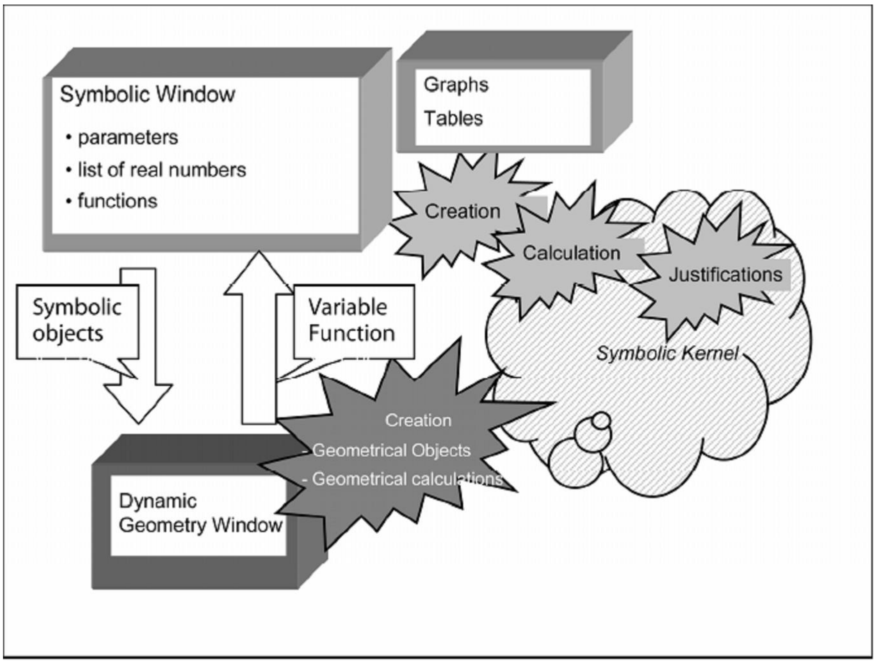


Figure 4.1. Structure de Casyopée

Casyopée comprend deux fenêtres principales qui sont liés : la fenêtre algébrique et la fenêtre géométrique.

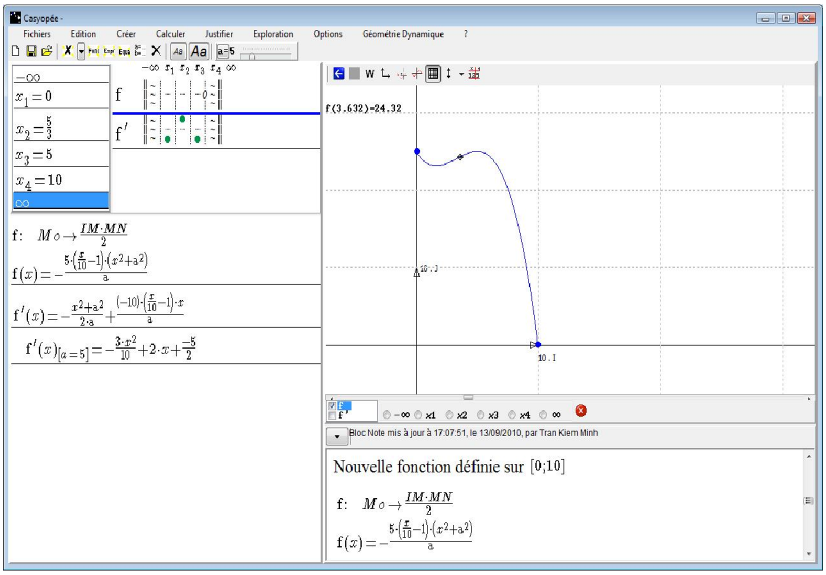


Figure 4.2. La fenêtre algébrique de Casyopée

La fenêtre algébrique fournit aux élèves des outils de calculs symboliques, des capacités de représentation (représentation graphique, symbolique, numérique…) et ainsi que des aides pour la preuve algébrique (développer, factoriser, dérivée, étude de signes, variations…). Les fonctions sont des objets principaux dans Casyopée. Une fonction est définie par une expression et un domaine de définition. Il y a une liste de nombres réels qui permet de définir un ensemble de définition d'une fonction. Un paramètre dans Casyopée peut avoir deux statuts : symbolique et instancié (on peut piloter le paramètre vers des valeurs différentes).

La fenêtre géométrique offre les caractéristiques principales d'un environnement de géométrie dynamique comme la création et l'animation des objets géométriques. Ce volet facilite également la généralisation grâce à des paramètres qui peuvent être entrés dans la définition des objets géométriques.

Dans la fenêtre géométrique, il y a un petit onglet appelé « Mesures ». Les élèves peuvent créer des « calculs géométriques » et explorer leurs valeurs numériques. Cette caractéristique spécifique de Casyopée permet de relier les deux fenêtres algébrique et géométrique. Les calculs géométriques permettent de modéliser des dépendances entre grandeurs : créer un calcul géométrique exprimant la valeur d'une grandeur, en explorer les valeurs numériques, choisir une grandeur adéquate comme variable et finalement exporter, dans la fenêtre algébrique, une dépendance fonctionnelle, si elle existe, entre cette variable et le calcul géométrique pour obtenir une fonction mathématique exprimant cette dépendance.

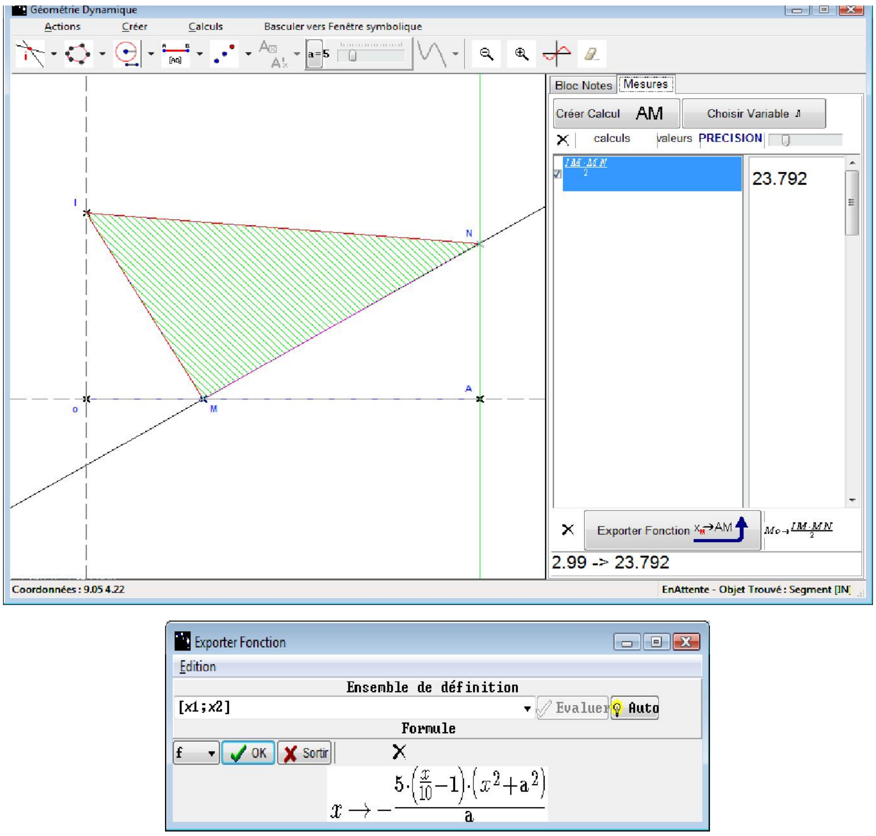


Figure 4.3. La fenêtre géométrique de Casyopée et la forme d'exportation

Le but de Casyopée est donc d'aider les élèves à modéliser des relations de dépendance impliquées dans une situation géométrique donnée, de faciliter les activités sur les fonctions, et finalement de promouvoir une compréhension flexible sur les fonctions.

4.1.3 Prise en compte du contexte et des cadres théoriques dans la conception

L'évolution de la conception de Casyopée dans le cadre du projet ReMath impliquait la prise en compte plus particulière des représentations et interactions avec les représentations. L'équipe Casyopée s'est appuyée sur des éléments théoriques suivants.

Le premier concerne une conception de la notion de fonction, vue comme co-variation entre grandeurs et mesures. De nombre travaux de recherche ont mis en évidence l'importance de cette approche dans les premiers apprentissages de l'analyse au lycée (Radford, 2005 ; Arzarello & Robutti, 2004 ; Falcade, Laborde & Mariotti, 2007 ; voir le détail dans le Chapitre 1).

En appliquant cet élément théorique, trois familles d'objets ont été définies dans Casyopée : (1) les figures géométriques, constituées des objets traditionnels de la géométrie dynamique et munies des fonctionnalités usuelles telles que le déplacement de points ; (2) les grandeurs, qui peuvent être indépendantes (par exemple, une distance comportant un point libre sur segment) ou dépendantes (par exemple l'aire d'une surface dépendant de la grandeur précédente) ; (3) les fonctions, traitées dans une fenêtre symbolique dotée de toutes les fonctionnalités nécessaires, liées aux représentations graphiques, aux valeurs numériques et aux différentes expressions, éventuellement déterminées par l'utilisateur. Ces différents objets et leurs représentations ont été agencés à l'interface de façon à faciliter les changements de registres pour l'élève.

Le second élément théorique dans lequel s'inscrit le développement de Casyopée est la théorie de représentations sémiotiques de Duval (1993). Selon Duval, les registres de représentations sémiotiques permettent les trois activités cognitives fondamentales suivantes : la formation de représentations ; leurs traitement à l'intérieur du registre ; la conversion d'une représentation d'un registre vers un autre registre de représentation. Duval affirme que les capacités de conversions entre registres jouent un rôle essentiel dans la conceptualisation. En prenant en compte cette orientation théorique, les concepteurs de Casyopée ont fait prendre en charge par l'environnement les activités de traitement liées aux différents registres, afin de permettre à l'élève de se consacrer aux activités de conversion entre registres et de lui assurer les meilleures conditions pour conceptualiser.

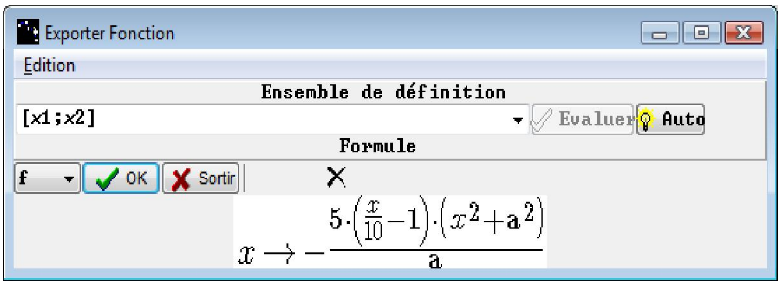
Le troisième élément théorique concerne les différents types d'activités algébriques (Kieran, 2004 ; Kieran, 2007 ; voir le détail dans le chapitre 2). Ce cadre théorique avait déjà été proposé pour classifier les activités algébriques des élèves dans la version de Casyopée préexistant à ReMath (Lagrange, 2005b). Ce cadre est orienté vers le contenu mathématique en jeu et donc susceptible d'interagir directement avec les cadres « représentations » considérés pour l'extension de Casyopée dans ReMath.

Ces éléments théoriques ont fortement guidé l'évolution de Casyopée dans ReMath et ont permis de concevoir des interactions. Ils ont été utilisés pour fonder la notion de fonction sur la co-variation de mesures ou de grandeurs, et classifier les activités qui lui donnent sens.

4.1.4 Quelques éléments fondamentaux dans la conception et contraintes du développement

Le choix de garder l'historique (le Bloc note) permet les chercheurs de suivre toutes les actions de l'élève avec Casyopée pendant la résolution de problèmes. Dans le bloc note, les élèves peuvent ajouter les commentaires après chaque action.

Le choix de donner les formules algébriques conformément aux habitudes en mathématiques au lycée est une aide spécifique de Casyopée. Par exemple, la forme d'exportation d'une dépendance fonctionnelle géométrique dans la fenêtre algébrique est donnée comme suivant :



Ce choix de représentation facilite les activités des élèves sur les expressions algébriques dans la résolution de problème.

Si la prise en compte de ces éléments théoriques dans la conception de Casyopée joue un rôle évident dans le développement, il existe aussi des contraintes qui conduisent à des compromis. Premièrement, la conception et la mise en œuvre du volet de géométrie dynamique ont par exemple mobilisé une part important des forces de développement. Il avait été choisi de limiter les capacités de cette fenêtre pour ne garder qu'un sous-ensemble suffisant pour traiter une classe de problèmes de modélisation, par exemple des aires de polygones dépendant d'une longueur. Un tel choix a été refusé au nom d'une certaine fidélité épistémologique : sans cercles, par exemple, il n'y aurait pas de géométrie dynamique. Cependant, ce refus a été particulièrement coûteux car la conception de Casyopée impose de traiter tous les objets de façon formelle, et les interactions de cercle, par exemple, traitées numériquement par les logiciels de géométrie dynamique classiques, sont beaucoup plus difficiles à traiter de façon formelle que les interactions de droites. En second lieu, certaines connaissances mathématiques peuvent être difficilement implantables en machine. Cet effet relève de la transposition informatique (Balacheff, 1994) qui s'attache à étudier la transformation des connaissances opérée par les dispositifs informatiques. Les concepteurs de Casyopée ont ainsi dû renoncer à une explication, accessible aux élèves des calculs dans la conversion entre registres symboliques (c'est-à-dire une explication du processus d'exporter une dépendance fonctionnelle entre grandeurs en une fonction mathématique) permettant d'inférer une fonction à partir d'un couple de grandeurs en dépendance fonctionnelle. Les élèves se réfèrent usuellement, en papier/crayon, à des théorèmes de géométrie plane non implantés dans l'environnement, alors que celui-ci procède par élimination formelle de paramètres géométriques présents dans les grandeurs en jeu. Ce renoncement présent n'altère pas fondamentalement les objectifs généraux fixés par les éléments théoriques retenus.

4.2 CASYOPEE ET ACTIVITES DES ELEVES SUR LES FONCTIONS

4.2.1 Genèse d'un type de tâche de modélisation fonctionnelle

Au début de l'analyse, la notion de fonction est abordée en relative continuité avec l'algèbre car les objets, points de vue et méthodes spécifiques à l'analyse ne sont pas encore réellement abordées (Artigue, 1993 ; Coppé, Dorier & Yavuz, 2007). A ce moment du curriculum, les tâches de modélisation fonctionnelle occupent une place particulière. Comme nous l'avons dit plus haut, le programme français encourage une approche des fonctions à travers des problèmes d'optimisation géométrique. Il s'agit de la modélisation fonctionnelle des dépendances géométriques.

Pour étudier cette tâche de modélisation fonctionnelle à l'aide de Casyopée, nous considérons les figures, les grandeurs et les fonctions, ainsi que leurs registres de représentations sémiotiques associés tels que les définit Duval (le chapitre 2). Nous considérerons ici les registres numériques, graphiques, symboliques, et ainsi qu'un registre particulier, lié à la figure et appelé registre enactif-iconique. Un registre enactif-iconique est un type de représentation relatif aux actions humaines qui donne du sens à des mouvements, des changements, des vitesses, ou des accélérations.

4.2.2 Objets et registres de représentation impliqués dans ce type de tâches avec Casyopée

Dans cette partie, nous analyserons les objets et registres qui interviennent dans l'appropriation et la résolution de cette tâche de modélisation fonctionnelle dans l'environnement Casyopée. La figure 4.4 propose une tâche de modélisation fonctionnelle d'une situation géométrique.

Soit a un paramètre positif.

Dans un repère orthonormé de centre O, on construit les points $A(10;0)$, $I(0\;;a)$ et la parallèle à l'axe Oy passant par A. M est un point libre sur le segment $[OA]$. On construit le triangle IMN *rectangle* en M, avec N appartenant à la parallèle.

Existe-il une position du point M sur $[OA]$ telle que cette aire soit maximale?

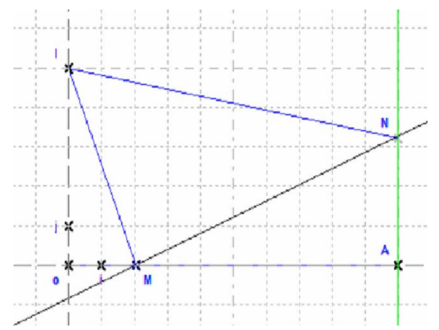


Figure 4.4. Une tâche de modélisation fonctionnelle d'une situation géométrique

Nous reprenons ici l'analyse développée dans le projet ReMath et exposée par Gelis (2009) et Lagrange et al. (2010). Le tableau 4.1 présente les objets et registres impliqués dans une tâche de modélisation fonctionnelle avec Casyopée. Il reprend l'organisation proposée dans la Typologie d'activités sur les fonctions présentée au chapitre 2 en précisant les éléments en jeu dans chaque type d'activité.

Registre / Objet	**Enactif-iconique**	**Numérique**	**Graphique**	**Symbolique**
Figure	Lien dynamique entre points libres et autres objets géométriques.			
Couple de grandeurs	Lien dynamique entre les deux grandeurs, observé sur la figure quand un point libre est déplacé.	Co-variation numérique entre les deux grandeurs		Fonction géométrique exprimant la relation de dépendance entre 2 grandeurs.
Fonction		Co-variation numérique entre variable et image.	Représentation graphique.	Expression algébrique.

Tableau 4.1. Objets et registres impliqués dans une tâche de modélisation fonctionnelle d'une situation géométrique

Le premier objet est la *figure* et pour lequel le registre enactif-iconique est le plus riche. Ce registre est celui des logiciels de géométrie dynamique. Il permet aux élèves d'accéder, en déplaçant les points libres voulus, à l'ensemble des configurations géométriques qu'ils doivent nécessairement appréhender pour résoudre le problème. C'est dans ce registre que s'apprécient les liens entre les objets géométriques et qu'apparaît la dépendance de certains d'entre eux par rapport à d'autres, en particulier par rapport aux autres points libres. Notons qu'une même situation peut donner lieu à des figures de géométrie dynamique différentes.

Le second objet indispensable à la résolution de problèmes est un *couple de grandeurs*. Les variations de la première de ces deux grandeurs permettent de balayer l'ensemble des configurations géométriques étudiées. La seconde grandeur est celle sur laquelle porte la question (ici l'aire du triangle *IMN*) et il faut généralement étudier le sens de variation ou les extremums. Notons que les problèmes proposés possèdent toujours un ou plusieurs couples de grandeur conduisant à une dépendance fonctionnelle mais leur identification est l'une des difficultés de la résolution de tels problèmes. Si les deux grandeurs choisies ne sont pas dans une relation de dépendance fonctionnelle, il sera impossible d'en déduire une fonction. C'est le cas, par exemple, du couple de grandeurs (*IN*, aire(*IMN*) pour le problème de la figure 4.4. Ces deux grandeurs sont bien co-variantes, mais ne permettent pas de définir une fonction puisque à certaines valeurs de *IN* correspondent deux valeurs différentes de l'aire du triangle *IMN*. En revanche, le couple de grandeurs (*OM*, aire(*IMN*)) est dans une dépendance fonctionnelle.

Les registres de représentation des couples de grandeurs et de leur co-variation sont les registres enactif-iconiques, numériques et symboliques. Le registre enactif-iconique permet, en agissant sur la figure et en déplaçant le point libre concerné, d'explorer perceptivement et directement sur la figure les variations ou les extremums de la grandeur visée. Le registre symbolique, permet d'aborder sous l'angle formel, d'un couple de grandeurs et sa relation de dépendance. Par exemple, la dépendance fonctionnelle du couple de grandeurs (*OM*, aire(*IMN*)) s'exprime dans Casyopée sous forme une « fonction géométrique » $Mo \to \frac{IM \cdot MN}{2}$

Comme la manipulation des couples de grandeurs fait interagir fortement les registres enactif-iconique et symbolique, nous considérons pour simplifier un seul registre que désignerons par registre enactif-iconique-grandeurs.

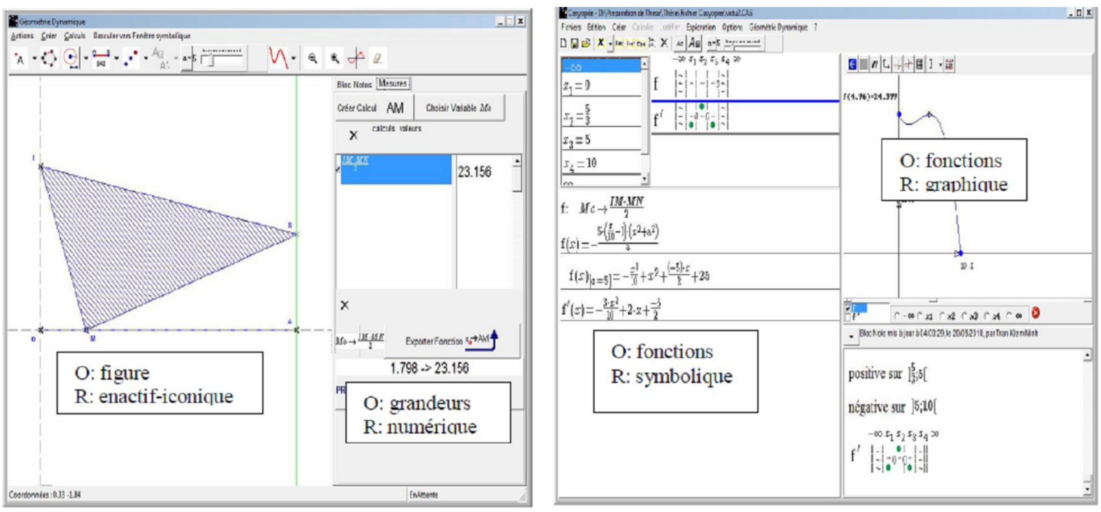


Figure 4.5. Résolution avec Casyopée du problème de la figure 4.4 avec indication de différents objets et registres, notés respectivement O et R.

Le dernier objet impliqué dans la résolution de problème est la *fonction*. Elle modélise la dépendance de la grandeur dont l'étude est visée, en fonction d'une autre. Elle s'appréhende dans les registres numérique, graphique et symbolique. Le registre symbolique peut permettre d'accéder à tous les outils de l'algèbre et de l'analyse (avec la dérivée par exemple).

4.2.3 Mise en œuvre de la Typologie d'activités dans l'environnement Casyopée

Dans ce paragraphe, nous illustrons la mise en œuvre de la Typologie d'activités présentée au chapitre 2 dans l'environnement Casyopée. Plus précisément, nous analyserons les liens entre quelques représentations et activités sur les fonctions via le problème de la figure 4.4.

Le tableau 4.2 ci-dessous montre les liens et les articulations organisés, au sein de l'environnement, entre activités de type énactives-iconiques portant sur différents objets. A ce stade de la résolution, l'élève a déjà défini les objets nécessaires comprenant : (1) la figure ; (2) un couple de grandeurs, constitué de la grandeur dépendante dénotant l'aire du triangle *IMN* et de la grandeur indépendante *OM* ; (3) la fonction, dont l'expression et le domaine ont été calculés par Casyopée sur commande de l'élève qui modélise les variations de l'aire du triangle en fonction de la distance *OM*. La correspondance entre les différentes représentations associées à ces trois objets est assurée de façon dynamique. En effet, tout déplacement du point libre *M* sur le segment *[OM]* entraîne une actualisation des valeurs numériques associées au couple de grandeurs, ainsi qu'un ajustement du point mobile sur le graphe de la fonction (point qui correspond au point libre *M*).

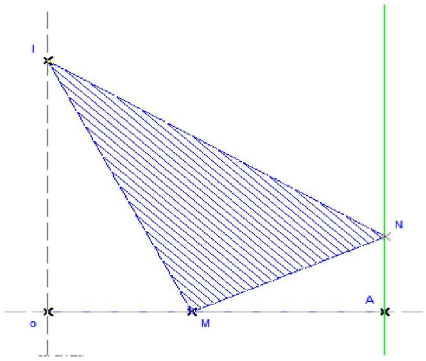
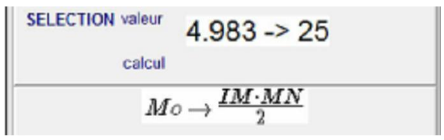
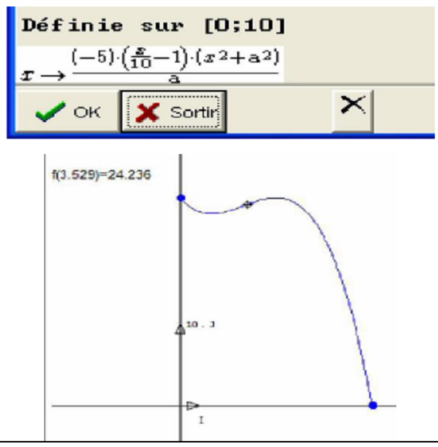
	Enactif-iconique	**Illustration**
Système physique	Déplacer les éléments. Observer les transformations du système	
Grandeurs et mesures	Faire varier des grandeurs. Observer les variations des mesures	
Fonctions mathématiques	Percevoir les propriétés des graphes et tables	

Tableau 4.2. Liens entre activités de même nature, impliquant des objets de types différents

Le tableau 4.3 revient sur l'articulation entre activités de type énactif-iconique d'une part et activité algébrique générative d'autre part. Ces activités impliquent un même type d'objet, ici les grandeurs. L'utilisateur peut définir, de sa propre initiative, différents couples de grandeurs, l'une dépendante, l'autre indépendante avant de se livrer à une exploration de type énactif-iconique pour explorer le lien de dépendance entre ces grandeurs directement sur la figure. Notons qu'une observation de ce même lien est aussi accessible dans le registre numérique associé aux grandeurs.

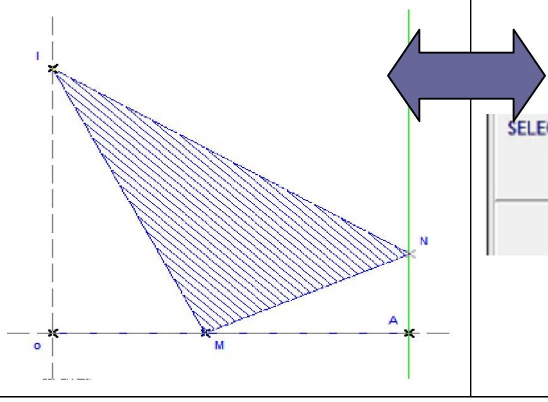
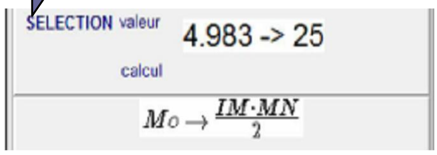
	Enactives-iconiques	**Activité générative**
Grandeurs et mesures	Faire varier des grandeurs. Observer les variations des mesures	Construire une formule pré-algébrique. Choisir la variable.
Illustration		

Tableau 4.3. Lien entre activités de type différent, impliquant le même type d'objets

Le tableau 4.4 montre une activité de conversion entre registres assistée par Casyopée. L'utilisateur a proposé, à ce stade de la résolution, un couple de grandeurs à partir duquel il souhaite calculer une fonction qui modélise la situation. Casyopée prend à sa charge la spécification du domaine de définition de la fonction visée, ainsi que la détermination de son expression.

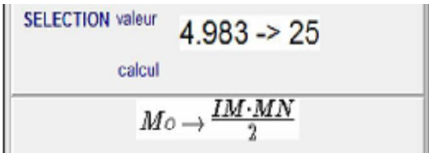
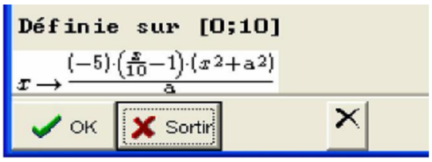
	Activité générative	**Illustration**
Grandeurs et mesures	Construire une formule pré-algébrique. Choisir les variables.	
Fonctions mathématiques	Construire une expression algébrique de la fonction (domaine, formule).	

Tableau 4.4. Passage entre activités algébriques génératives relatives à deux objets de type différents

Notons que si l'initiative de conversion appartient à l'élève, toute une part du travail dévolue généralement à l'élève dans la conversion est ici prise en charge par Casyopée. En fait, calculer le domaine de définition et l'expression algébrique de la fonction, à partir d'un couple de grandeurs valide, constitue un véritable sous-problème susceptible d'accaparer et de le détourner de sa démarche générale de résolution. Cet état de fait peut freiner les changements de registres chez les élèves et compromettre le processus de conceptualisation des fonctions. Notre choix revient donc à privilégier la prise d'initiative par l'élève de l'étape de conversion, avec à sa charge, le choix de variables indépendante et dépendante adéquates, en tirant éventuellement parti des feedbacks de l'environnement.

4.3 CASYOPEE ET LA GENESE INSTRUMENTALE

L'approche instrumentale exposée au chapitre 2 incite à penser que l'usage des artefacts ne sera pas neutre pour la conceptualisation des élèves car ils ont un effet sur le fonctionnement cognitif des utilisateurs. Nous cherchons ici à étudier les potentialités et les limites de Casyopée quant à l'apprentissage des fonctions au lycée. Nous nous intéressons aux possibles genèses instrumentales associées. Nous portons notre attention sur l'articulation et l'implication, dans ces genèses, entre le développement de connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur Casyopée. Nous soulignons particulièrement la période de temps dont les élèves ont besoin pour considérer Casyopée comme un instrument pour leurs activités mathématiques sur les fonctions, en examinant les capacités clés de cet environnement comme éléments de leurs connaissances mathématiques sur les fonctions.

4.3.1 Potentialités

Nous revenons maintenant sur le problème de la figure 4.4. Pour ce type de problème, Casyopée peut fournir des aides spécifiques pour le résoudre :

- moyens pour créer des figures géométriques dynamiques
- des calculs géométriques pour exprimer des grandeurs qui peuvent être considérées comme variables dépendantes
- possibilités de choisir une variable indépendante comme une distance ou une abscisse concernant des points libres, et de fournir des feedbacks sur ce choix de la variable
- moyens d'observer des co-variations numériques entre des points et des calculs, ou entre une variable indépendante et un calcul
- moyens d'exporter une dépendance fonctionnelle entre une variable choisie et un calcul dans la fenêtre symbolique afin d'obtenir une formule algébrique de la fonction
- moyens pour traiter cette forme algébrique dans plusieurs registres.

Pour ce problème, nous pouvons trouver l'aire du triangle *IMN* en papier/crayon en utilisant la propriété des triangles semblables. Dans l'environnement Casyopée, les élèves peuvent résoudre le problème de façon plus flexible. Dans la fenêtre géométrique, les élèves peuvent construire la figure dynamique et puis créer un calcul géométrique exprimant l'aire du triangle *IMN*. Ils peuvent ensuite explorer la co-variation entre le point libre *M* et la valeur numérique de l'aire. Ils peuvent également choisir une grandeur concernant le point libre *M*, par exemple la distance *OM*, comme une variable et continuent à explorer la co-variation entre cette variable et l'aire du triangle *IMN*. Si cette co-variation est une dépendance fonctionnelle, on peut exporter cette dépendance dans la fenêtre symbolique de Casyopée pour obtenir une formule algébrique de la fonction.

Après avoir exporté une fonction dans la fenêtre symbolique, les élèves peuvent travailler sur les différents registres de représentation. Par exemple, ils peuvent faire des transformations algébriques de l'expression algébrique de la fonction dans le registre symbolique. Ils peuvent également explorer la représentation graphique de la fonction dans le registre graphique, ainsi qu'un tableau de valeurs de la fonction. Nous pensons qu'en travaillant dans le cadre géométrique, les élèves comprendront le problème et les objets concernés, et après avoir basculé vers le cadre algébrique, cette compréhension les aidera à donner du sens aux objets et traitements dans les différents registres.

Dans le cas d'un instrument pour travailler ou apprendre les mathématiques comme Casyopée, la genèse instrumentale concerne les connaissances mathématiques sur les fonctions et les connaissances sur les fonctionnalités de Casyopée. Artigue (2002) a déjà montré comment cette genèse peut être complexe, même dans le cas d'une tâche simple telle que cadrer une fonction dans une fenêtre graphique. Plus généralement, beaucoup de fonctionnalités puissantes des outils CAS ont comme contrepartie la complexité de la genèse instrumentale associée (Guin & Trouche, 1999). Nous sommes donc conscients que nous devrions prendre en compte les genèses des élèves lors de l'introduction de Casyopée en classe. De plus, Casyopée offre une multiplicité de représentations dans deux cadres et dans plusieurs registres. La compréhension et la manipulation de ces représentations concernent des connaissances mathématiques variées. Les élèves doivent être introduits progressivement à ces représentations en prenant en compte le développement de leurs connaissances mathématiques.

4.3.2 Difficultés et contraintes

Dans la perspective de l'approche instrumentale, nous souhaitons analyser avec soin l'articulation et l'imbrication entre le développement de connaissances mathématiques des élèves sur les fonctions et les connaissances sur Casyopée pendant la genèse instrumentale. Les expérimentations que nous conduirons en Terminale, les contraintes existantes dans le logiciel, les liens entre représentations, les gestes ou actions nécessaires pour créer et définir des fonctions à partir de grandeurs géométriques imposent une construction avancée de la genèse instrumentale chez les élèves.

Par exemple, la compréhension par les élèves des messages renvoyés par le logiciel lors d'un refus de création de fonctions à partir de grandeurs géométriques, ne peut être assurée que si l'élève dispose de connaissances suffisantes pour interpréter les informations données dans le message. Un refus de création de fonction peut par exemple provenir du fait que la grandeur pressentie comme image dépende, en réalité, non seulement de la grandeur variable supposée, mais également d'une seconde grandeur non identifiée par l'élève dans un premier temps. L'impossibilité d'exprimer de façon univoque la grandeur indépendante dans l'expression de la grandeur dépendante peut être une autre cause d'échec dans le calcul de la fonction.

L'appropriation des retours et réactions de l'environnement passe par une maîtrise de l'environnement en tant qu'instrument pour définir par exemple des gestes d'explorations numériques qui, en déplaçant les points libres sur la figure, vont permettre, en acte, de repérer le comportement de l'expression géométrique supposée dépendante ou les effets d'autres grandeurs sur celui-ci.

4.3.3 Spécificité de notre approche des fonctions

Comme nous l'avons présenté ci-dessus, Casyopée offre une variété des fonctionnalités et des représentations différentes. Dans l'environnement Casyopée, une dépendance fonctionnelle entre deux mesures ou grandeurs peut être représentée dans plusieurs cadres et registres différents : enactif-iconique, graphique, symbolique et numérique. Avec le type de tâche de modélisation fonctionnelle des situations géométriques, les élèves peuvent profiter des potentialités variées de Casyopée pour résoudre les problèmes donnés : explorer des co-variations et des dépendances géométriques entre grandeurs ou mesures dans le cadre géométrique ; modéliser ces relations de dépendances par fonctions mathématiques ; explorer leurs modèles algébriques dans le cadre algébrique avec plusieurs registres différents…

Notre approche s'appuie d'abord sur les fonctions comme modèles de dépendance dans le cadre géométrique. La modélisation fonctionnelle permet ensuite de relier ce cadre aux autres cadres et représentations des fonctions. Nous pensons que les activités fondées sur l'étude des dépendances entre grandeurs ou mesures permettent aux élèves de comprendre les fonctions comme modèles de ces dépendances. Ces activités s'inscrivent dans les dialectiques « locale-globale » et « processus-objet » que nous avons présentées dans le chapitre 1.

Dans le cadre géométrique, les fonctions sont considérées comme des processus dynamiques en tant que co-variations entre grandeurs ou mesures. La modélisation fonctionnelle (l'action de choisir une variable et d'exporter une fonction) permet un passage d'une conception processus à une conception objet où la fonction est exprimée dans le cadre algébrique. Plus précisément, dans le cadre géométrique, les activités de type enactive-iconique avec Casyopée peuvent aider à développer la conception « processus » et à préparer un passage à la conception « objet » sur les fonctions. Les fonctions sont considérées ici comme des processus dynamiques ou des co-variations entre grandeurs ou mesures. Par exemple, dans l'exemple ci-dessus, les élèves peuvent explorer le processus de co-variation entre la valeur du segment $[oM]$ et celle du calcul d'aire $\frac{1}{2}IM \times MN$ en faisant bouger le point mobile *M*. Lorsque les élèves choisissent une variable, par exemple la distance *oM*, Casyopée donne une représentation symbolique de la dépendance fonctionnelle exprimée par la formule pré-algébrique $oM \to \frac{1}{2}IM \times MN$. Le choix d'une variable apparaît donc clairement dans cet exemple comme nécessaire et préparant le passage d'une conception « processus » à une conception « objet » où la fonction est exprimée par une formule symbolique.

L'exportation de la fonction dans la fenêtre algébrique de Casyopée correspond à un changement du cadre géométrique au cadre algébrique. Dans ce cadre, une fonction peut être représentée dans trois différents registres : symbolique, graphique et numérique. Le registre symbolique de Casyopée encourage plutôt la conception « objet » des fonctions, tout en conservant des écritures qui gardent la trace d'une conception « processus ». Les élèves peuvent travailler sur l'expression algébrique de la fonction en la factorisant, développant ou calculant sa dérivée. Dans le registre graphique, les activités avec Casyopée peuvent encourager à la fois les deux conceptions « processus » et « objet ». Une conception « processus » est liée à la considération de la correspondance numérique entre abscisse et ordonnée d'un point mobile sur le graphe. Une conception « objet » considère des propriétés globales du graphe de la fonction. Nous nous attendons à ce que les élèves considèrent une grande variété d'usage des représentations, les comprennent et fassent des liens entre elles.

Avec la possibilité de relier les deux fenêtres géométrique et algébrique, nous pensons que les activités avec Casyopée peuvent aider à développer ces deux conceptions sur les fonctions et à favoriser les passages entre eux.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les spécificités de l'environnement Casyopée et avons discuté les problèmes concernant le contexte et des cadres théoriques dans la conception du logiciel. Nous avons analysé les objets et registres impliqués dans le type de tâche de modélisation fonctionnelle des situations géométriques et la mise en œuvre de la typologie d'activités dans l'environnement Casyopée. Cette analyse nous permis de dégager a priori les problèmes d'instrumentation et d'instrumentalisation de Casyopée. Elle nous a également aidés à préciser notre approche pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions au lycée.

Chapitre 5

Expérimentation pendant l'année de Première S

Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation de la séquence expérimentale en classes de Première S au sein d'un projet Européen que nous allons présenter. A travers l'analyse des séances d'observation nous en ressortirons des premiers résultats et formulerons les questions pour une seconde expérimentation ciblée sur notre projet de thèse.

5.1 PRESENTATION DE LA SEQUENCE EXPERIMENTALE

5.1.1 Projet ReMath

ReMath est un projet Européen comprenant huit équipes de recherche provenant de quatre pays : la France, l'Italie, la Grèce et l'Angleterre. Ses objectifs sont d'étudier les potentialités offertes par des artefacts numériques pour la représentation d'objets mathématiques ainsi que de rendre les recherches sur les TICE plus lisibles au plan international en reliant différents cadres théoriques utilisés et en élaborant des outils et langages communs. Dans le cadre de ce projet, les équipes ont développé six artefacts numériques dont Casyopée et treize scénarios pour l'utilisation pédagogique de ces artefacts. Nous avons participé à la conception et l'expérimentation d'un scénario pour l'apprentissage des fonctions avec le logiciel Casyopée. Les équipes impliquées dans le projet ReMath travaillent à partir d'une question initiale de recherche commune : comment les différentes représentations identifiées dans l'artefact permettent-elles d'atteindre les objectifs d'enseignement visés ?

5.1.2 Contexte d'expérimentation

Notre scénario a pour but de consolider chez les élèves la notion de fonction et de développer leur activité algébrique. Plus précisément, le scénario permet aux élèves de consolider :

- Le sens attribué à la notion de variable et notamment la distinction entre variable et paramètre
- Le fait qu'une même fonction pourrait avoir plusieurs expressions algébriques
- La capacité de modélisation fonctionnelle de certaines situations géométriques.

L'expérimentation du projet s'est déroulée au premier trimestre de l'année scolaire 2007-2008. Elle concerne deux classes de Première S de deux établissements distincts : le Lycée René Cassin à Montfort et le Lycée Maupertuis à Saint-Malo. Chaque classe se compose d'une vingtaine d'élèves. Les deux enseignants de ces classes sont expérimentés dans l'enseignement ainsi que dans le domaine des TICE. Ils participent au projet

Casyopée depuis le debut. La plupart des élèves ne sont pas encore familiers avec les logiciels de géométrie dynamique en classe ni avec Casyopée.

Toutes les séances ont eu lieu en salle informatique. Les élèves travaillent en binômes et nous avons fait des observations de quelques binômes tout au long des séances d'expérimentation.

5.1.3 Scénario

a. Principe de construction du scénario

Le scénario est construit en référence à la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et à l'approche instrumentale. C'est-à-dire qu'il y a une volonté de proposer aux élèves des situations d'apprentissage à potentiel a-didactique et pour cela les rétroactions du logiciel sont systématiquement explorées. De plus, conscient des difficultés nouvelles introduites par l'utilisation d'un artefact dans la réalisation des tâches, le scénario proposent des tâches mathématiques permettant une utilisation progressive de Casyopée.

Le scénario propose une succession organisée de tâches mathématiques afin d'explorer le potentiel a priori offert par Casyopée pour approcher la notion de fonction, en particulier :

- La modélisation fonctionnelle des situations géométriques
- Le rôle joué par des paramètres pour l'étude d'une famille de fonctions

Le scénario met l'accent d'abord sur la construction de tâches et l'utilisation des différents feedbacks fournis par Casyopée. Les tâches construites permettent aux élèves de choisir différentes variables pour explorer des dépendances géométriques entre grandeurs et relier le Système physique (la géométrie) au monde des « Fonctions mathématiques » (l'algèbre). Cette connexion est soutenue par Casyopée grâce aux fonctionnalités de « Calcul géométrique » permettant d'exprimer symboliquement des dépendances fonctionnelles entre grandeurs. De plus, selon le choix des variables, l'expression algébrique obtenue d'une dépendance fonctionnelle peut avoir une complexité différente.

b. Plan du scénario

Le scénario de notre équipe se compose de six séances et est organisé en trois parties. Chaque partie a été conçue afin que les élèves apprennent des notions mathématiques en découvrant les capacités associées de Casyopée :

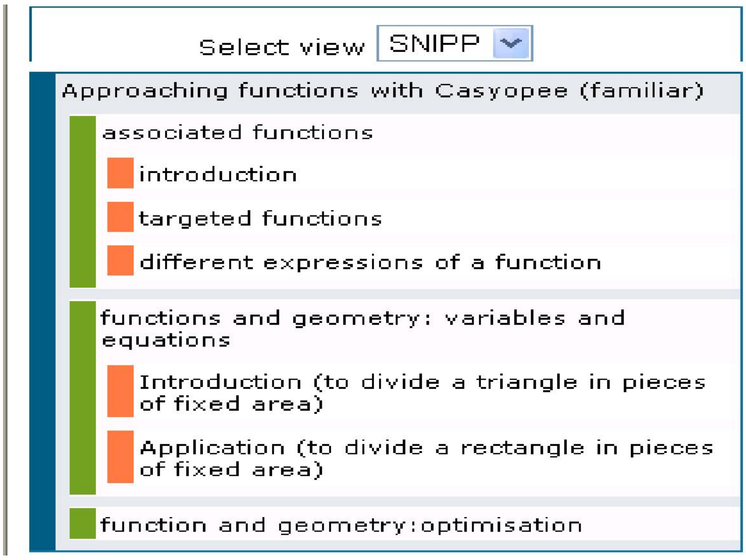


Figure 5.1. Scénario d'expérimentation du projet ReMath

- **Première partie : Fonctions associées**

Cette partie a porté sur les fonctionnalités du module symbolique de Casyopée et sur des fonctions quadratiques. Son objectif est d'aider les élèves à se familiariser avec la manipulation de paramètres afin d'étudier des représentations algébriques des familles de fonctions en reconnaissant qu'une fonction quadratique peut avoir plusieurs expressions et que chaque coefficient dans ces expressions a un sens différent. Ces contenus sont nouveaux pour les élèves de la classe de Première. La tâche centrale est un jeu de « fonction cible » : trouver l'expression concrète d'une forme paramétrique donnée pour une fonction inconnue en pilotant des paramètres. Cette partie comprend trois séances[9] :

- Séance 1 : Introduction (fonctions associées)
- Séance 2 : Fonctions cibles
- Séance 3 : Différentes expressions d'une fonction.

- **Deuxième partie : Fonction et géométrie**

Cette partie a d'abord pour objectif de consolider les connaissances des élèves sur des situations géométriques et de leur présenter les fonctionnalités du module géométrique, ce qui est une spécificité de Casyopée. La tâche centrale est de construire des calculs géométriques pour exprimer des relations de dépendances entre un point libre et l'aire. Elle a également pour but de présenter aux élèves la coordination de différentes représentations dans les deux cadres algébrique et géométrique par le moyen des problèmes concernant des calculs d'aires qui

[9] Les Fiches élèves de ces séances peuvent être trouvées dans les annexes.

peuvent être résolus en exportant une fonction et en résolvant une équation dans la fenêtre symbolique. Cette partie se compose de 2 séances :

- Séance 4 : Introduction (découpages d'un triangle en surfaces d'aires égales)
- Séance 5 : Applications (découpages d'un rectangle en surfaces d'aires égales).

Troisième partie : Problème d'optimisation

Finalement, les élèves doivent profiter de toutes les caractéristiques de Casyopée et activer toutes leurs connaissances algébriques pour résoudre un problème d'optimisation. Cette partie comprend une seule séance :

- Séance 6 : Problème d'optimisation (trouver un rectangle d'aire maximale inscrit dans un triangle).

L'ensemble de ces six séances constitue une initiation à l'utilisation de Casyopée à travers une succession d'activités. L'accent est mis sur le potentiel a priori offert par Casyopée pour approcher des fonctions.

c. Observables et données recueillies

Les observables recueillies sont :

- Les fiches élèves des séances. Chaque élève devait remplir une fiche dans chaque séance expérimentale.
- Nos notes d'observation de classe
- Les enregistrements audio des binômes observés
- Les fichiers vidéo de capture d'écran, récupérés grâce à un logiciel.
- Les fichiers Casyopée (log files).

Dans la suite, nous ne rendons pas compte de la totalité des observables du projet ReMath mais seulement de ceux qui s'avèrent pertinents et intéressants par rapport à notre objectif de recherche et notre expérimentation concernant :

- Des difficultés mathématiques et instrumentales des élèves pendant la réalisation des tâches
- Le processus d'instrumentation et d'instrumentalisation des élèves observés
- L'exploitation des potentialités de Casyopée, en particulier de différents registres de représentations au cours et à l'issue de la genèse instrumentale.

Comme la séance 6 présente une situation géométrique dont la résolution demande aux élèves de profiter des caractéristiques de deux modules de Casyopée, nous nous limitons à cette dernière séance de la séquence expérimentale pour laquelle le problème et la genèse instrumentale des élèves devraient permettre d'exploiter complètement les potentiels de Casyopée.

5.2 ANALYSE DE LA SEANCE 6

5.2.1 Fiche élève

Voici la fiche donnée aux élèves correspondant à la dernière séance de la séquence expérimentale.

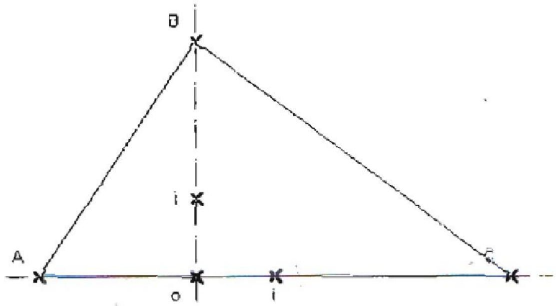
1S SVT **Séance 6 avec Casyopée**

Lycée Maupertuis **Vendredi 7 décembre 2007**

Un problème d'optimisation

Soient a, b et c, trois paramètres positifs.

On considère les points A (– a, 0) et B (0, b) et C(c, 0).



On construit le rectangle MNPQ avec M sur [OA], N sur [AB], P sur [BC] et Q sur [OC].

- Peut-on construire un rectangle MNPQ d'aire maximale ?

Travail demandé

1. Charger le fichier *figinit.CAS* puis compléter la figure avec le logiciel.
   Remarque : il est nécessaire de construire les segments [OA], [AB], [BC] et [OC] pour définir correctement les points du rectangle.
2. Répondre à la question posée avec les consignes suivantes :
   - Indiquer le choix de variable.
   - Rédiger une démarche utilisant les résultats affichés par le
   - Visualiser la réponse dans le module de géométrie dynamique.

5.2.2 Analyse a priori

a. Les tâches

Construction de la figure :

Dans les cinq séances précédentes de la séquence expérimentale, ces élèves se sont déjà familiarisés avec la notion de paramètre ainsi qu'avec les capacités correspondantes de Casyopée. De plus, au niveau de la classe de Première, les élèves devraient s'attaquer aux problèmes génériques qui vont au-delà des cas particuliers. Nous avons donc décidé de considérer le triangle générique *ABC* par le moyen de paramètres, c'est-à-dire que les élèves commenceront donc à travailler avec les trois sommets *A*, *B*, *C* déjà créés comme ci-dessus du triangle générique *ABC*.

Il est demandé aux élèves de charger le fichier Casyopée *figinit.CAS* dans lequel les trois paramètres *a, b, c* et les points $A(-a;0)$, $B(0;b)$, $C(c;0)$ avaient été déjà créés et de construire la figure dynamique. Dans la fenêtre de géométrique dynamique, les élèves devraient construire les segments *[OA]*, *[AB]*, *[BC]*, *[OC]*, le point *M* libre sur le segment *[OA],* et finalement les sommets du rectangle *MNPQ*.

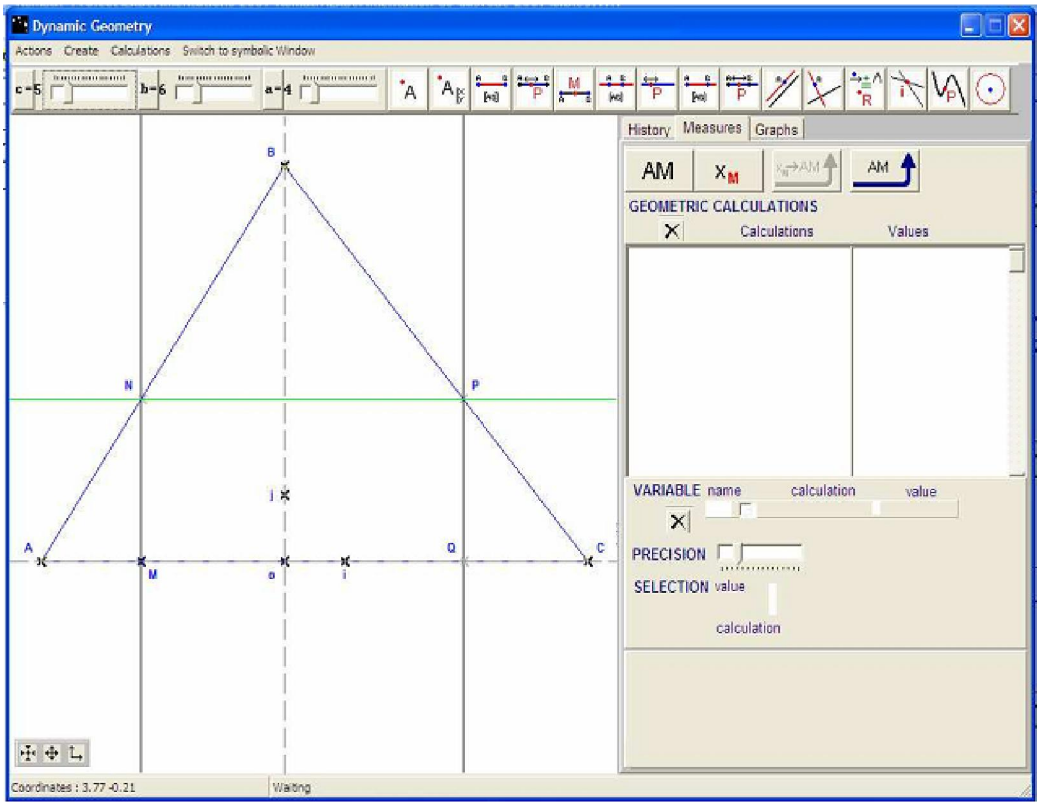


Figure 5.2. La figure construite dans la fenêtre de géométrique dynamique de Casyopée

Pour cette tâche de construction de la figure, nous portons essentiellement notre attention sur les deux activités suivantes :

- La construction du point libre *M*
- La construction du rectangle *MNPQ* à partir du point libre *M*.

Dans ces deux activités, les élèves pourraient avoir du mal à distinguer entre points libres et points dépendants ou points libres et points quelconques. Par exemple, certains élèves pourraient créer un point *M* quelconque, non libre sur le segment *[OA]*, dans le plan ou bien construire un rectangle *MNPQ* « mou » (au sens de Healy (2000)). La tâche proposée dispose d'un potentiel *a-didactique*. En effet, la rétroaction du logiciel sur la déformation de la figure lors d'un déplacement du point *M* aide les élèves à ajuster leurs constructions géométriques.

Aspect mathématique relatif à cette tâche :

- Les propriétés parallèles et perpendiculaires des côtés d'un rectangle

Aspects instrumentaux relatifs à cette tâche :

- Outils de créer un point quelconque, un point libre sur un segment, …
- Outil de déplacement des points libre
- Rétroactions du logiciel sur la déformation de la figure dynamique.

Explorations et conjectures :

Après la construction de la figure, les élèves peuvent explorer la transformation de la figure en déplaçant le point libre *M* sur le segment *[OA]*. Ensuite, ils peuvent créer dans l'onglet « *Mesures* » (Fig. 4.3) un calcul géométrique de l'aire du rectangle *MNPQ*, par exemple $MN \times MQ$ et explorer la co-variation entre la position du point libre *M* et l'aire du rectangle *MNPQ*. La valeur numérique du calcul sera dynamiquement affichée quand l'élève déplace le point libre. Grâce à cette exploration numérique, ils peuvent émettre des conjectures sur la valeur maximale de l'aire.

Aspect mathématique relatif à cette tâche :

- Calcul d'aire d'un rectangle

Aspects instrumentaux relatifs à cette tâche :

- Outil de créer un calcul géométrique

Modélisation fonctionnelle :

Ensuite, les élèves peuvent choisir une grandeur associée à *M*, par exemple la distance OM ou l'abscisse x_M comme variable et puis explorer la co-variation entre la valeur numérique de l'aire et celle de cette variable. Si la grandeur choisie n'est pas appropriée, par exemple elle ne dépend d'aucun point libre, Casyopée donnera une rétroaction sur ce choix. Par contre, si cette co-variation est une dépendance fonctionnelle, c'est-à-dire si le calcul géométrique de l'aire dépend correctement de la variable, Casyopée fournira une rétroaction sur la possibilité d'exporter cette dépendance fonctionnelle dans la fenêtre algébrique pour obtenir une formule algébrique de la fonction. Il donnera également une rétroaction sur la structure de cette formule algébrique. Casyopée calcule automatiquement le domaine de définition et l'expression algébrique de la fonction obtenue.

Aspects mathématiques relatifs à cette tâche :

- Capacité de distinguer entre co-variations et dépendances fonctionnelles

Aspects instrumentaux relatifs à cette tâche :

- Les rétroactions du logiciel sur le choix de variable et sur l'exportation de la fonction.
- Difficultés : il faut savoir où sont les boutons « *Choisir une variable* » et « *Exporter une fonction* » ; l'adaptation aux feedbacks de Casyopée.

Preuve algébrique :

Finalement, les élèves peuvent rédiger une preuve algébrique en papier/crayon avec l'aide de Casyopée. Ils peuvent utiliser les outils de Casyopée pour travailler sur l'expression algébrique de la fonction et trouver la solution.

Il est aussi important que les élèves considèrent la fonction dans le contexte géométrique. C'est dans cette intention que la fiche élève insiste également sur la visualisation géométrique après la preuve algébrique.

b. Co-variations et représentation des dépendances fonctionnelles

Dans le cadre géométrique, un élève peut explorer la variation de l'aire du rectangle *MNPQ* de différentes façons correspondant aux différents registres de représentation. Par exemple, il peut observer la co-variation entre le point libre *M* et l'aire, en regardant les valeurs numériques du calcul géométrique de l'aire qui sont affichées dans le petit onglet « *Mesures* » :

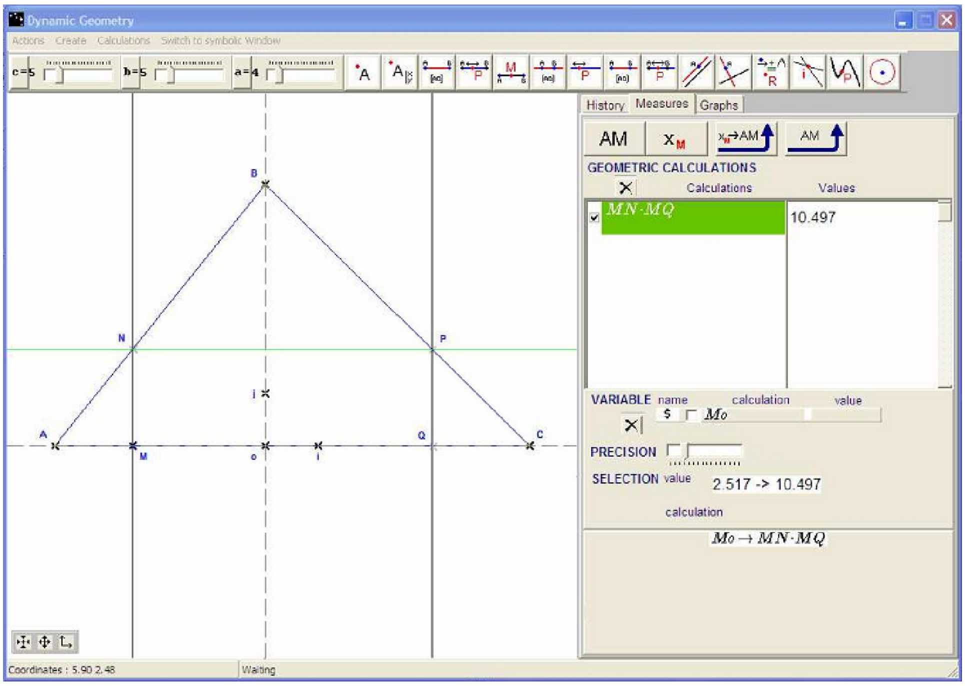


Figure 5.3. Exploration des co-variations dans la fenêtre géométrique

Lorsque l'élève déplace le point *M* du point *A* à l'origine *O*, la valeur de l'aire augmente puis diminue, avec une valeur maximale lorsque *M* se situe au milieu de segment *[OA]*. Il est possible d'observer la co-variation entre une mesure concernant le point libre M, par exemple la distance *OM* ou l'abscisse de *M*, et l'aire. Nous nous attendons aussi des élèves une conjecture sur la position du point *M* pour laquelle la valeur de l'aire est maximale. Finalement, il peut choisir une variable indépendante concernant *M* et observer la dépendance fonctionnelle entre cette variable et l'aire.

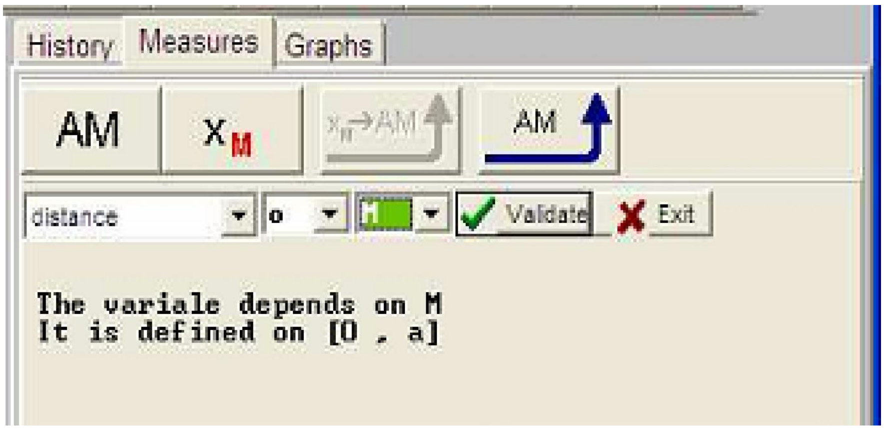


Figure 5.4. Choix de la variable *OM* et le feedback correspondant

L'action d'exporter une fonction avec Casyopée correspond à un changement du cadre géométrique au cadre algébrique.

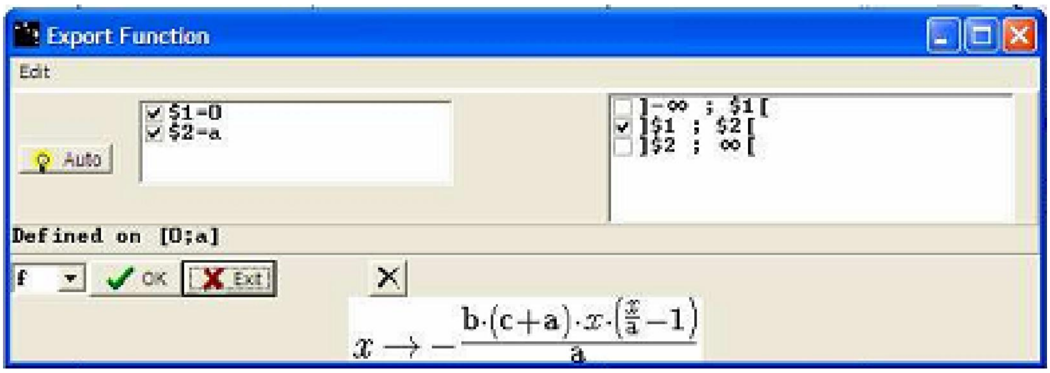


Figure 5.5. Forme d'exportation de la fonction

Dans ce cadre, un élève peut appliquer différentes techniques à la forme algébrique de la fonction pour trouver une preuve. La formule obtenue après l'exportation reflète la structure du calcul. Les élèves ont besoin de développer cette formule afin de reconnaître une fonction quadratique.

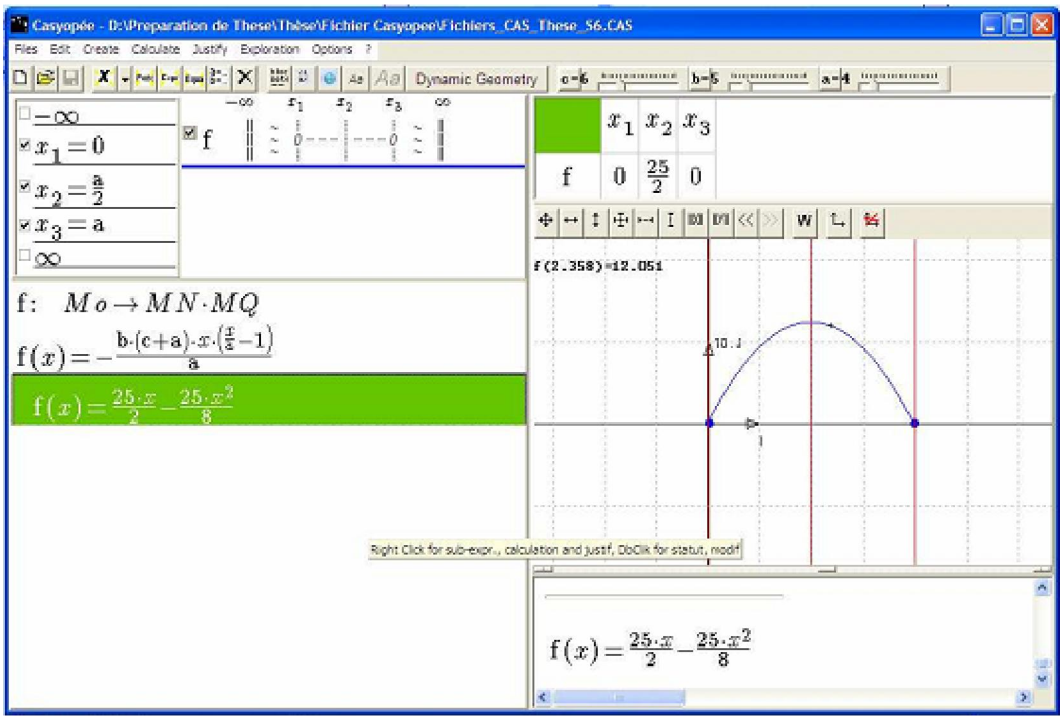


Figure 5.6. La fenêtre symbolique

Ensuite, ils peuvent utiliser leurs connaissances sur les fonctions pour prouver le maximum. Ce n'est pas peut-être facile pour eux car il y a trois paramètres concernés. Les élèves peuvent également utiliser le registre graphique dans ce cadre algébrique pour explorer la courbe et compléter les explorations qu'ils ont faites dans le cadre géométrique : la parabole est familière aux élèves et ils peuvent reconnaître la valeur optimale comme l'abscisse de son sommet ou encore, remarquer que le maximum est situé sur l'axe de symétrie et en déduire facilement son abscisse.

La situation est partiellement *a-didactique*. Dans chaque cadre, les élèves travaillent librement avec Casyopée et utilisent des feedbacks pour comprendre la situation. Néanmoins, quelques points clés comme le passage d'une co-variation vers une dépendance fonctionnelle est difficile pour les élèves de manière prévisible, bien que l'action correspondante (choisir une variable indépendante) a été présentée dans les séances précédentes. Le passage d'un cadre à un autre est également attendu comme difficile pour les élèves. Les actions correspondantes dans Casyopée (exporter une fonction dans la fenêtre symbolique, interpréter une valeur symbolique en termes de position d'un point) ont été présentées avant, mais c'était la première fois que les élèves devaient les faire eux-mêmes.

Les élèves peuvent choisir leur propre variable indépendante parmi différentes possibilités (par exemple la distance *OM*, l'abscisse de *M*, la distance *AM*, …) avec différentes conséquences pour la formule algébrique de la fonction. Ils peuvent les faire par eux-mêmes, mais quelques aides des enseignants peuvent être nécessaires dans ce cas-là. Il est également possible qu'ils changent leur choix de variable pour obtenir une formule algébrique plus simple pour la fonction.

Dans notre stratégie didactique, nous attendons une grande variété d'usage des registres reflétant des interactions libres des élèves avec la situation. Quelques élèves pourraient explorer longtemps des co-variations et avoir besoin des médiations d'enseignant pour passer à une dépendance fonctionnelle, tandis que des autres pourraient passer plus rapidement au cadre algébrique. Dans ce cadre, ils peuvent explorer des graphes ou travailler sur des expressions algébriques.

5.2.3 Déroulement : le cas du binôme Elina-Chloé

Les élèves travaillent en binôme et nous nous concentrons sur l'observation d'un binôme formé de deux élèves que nous appellerons Elina et Chloé. Selon Xavier, leur enseignant, ces deux élèves ont des profils favorables à une bonne instrumentation. Elles sont de « bonnes élèves en mathématiques » et ont un rapport positif à l'utilisation des outils technologiques.

a. Lancement de la séance

L'enseignant (Xavier) précise que c'est un travail moins guidé que d'habitude. Il demande à chaque binôme de produire un compte-rendu sur la feuille distribuée qui sera ramassée à la fin de la séance.

b. Construction de la figure

1mn : Elles lancent Casyopée puis ouvrent le fichier *figinit.CAS* dans lequel les trois points *A, B, C* sont déjà créés.

4mn : Chloé dit qu'il faut d'abord créer les segments. Elina construit les segments *[AB]*, *[BC]* et *[AC]*. Ensuite, elle crée le point *M* libre sur le segment *[AC]*. Chloé intervient en disant que *M* risque d'aller à l'autre côté (la partie du segment au-delà de l'origine *O*). Elina bouge le point *M* de *A* vers *C* puis le supprime. Elle demande comment faire et Chloé suggère ensuite de créer *M* sur la demi-droite *[OA)*. Elina essaie deux fois mais sans succès. Elle ne comprend pas. L'observateur intervient pour expliquer que la demi-droite n'a pas été créée.

8mn : Chloé rectifie que c'est le segment, puis Elina crée le segment *[OA]* et le point libre M sur ce segment. Par la suite, Elina crée les points libres *N* sur *[AB]*, *P* sur *[BC]*, *Q* sur *[OC]* et les segments *[MN]*, *[NP]*, *[PQ]*, *[MQ]*. Elles déplacent les points pour avoir un rectangle mais elles s'aperçoivent que ça ne va pas.

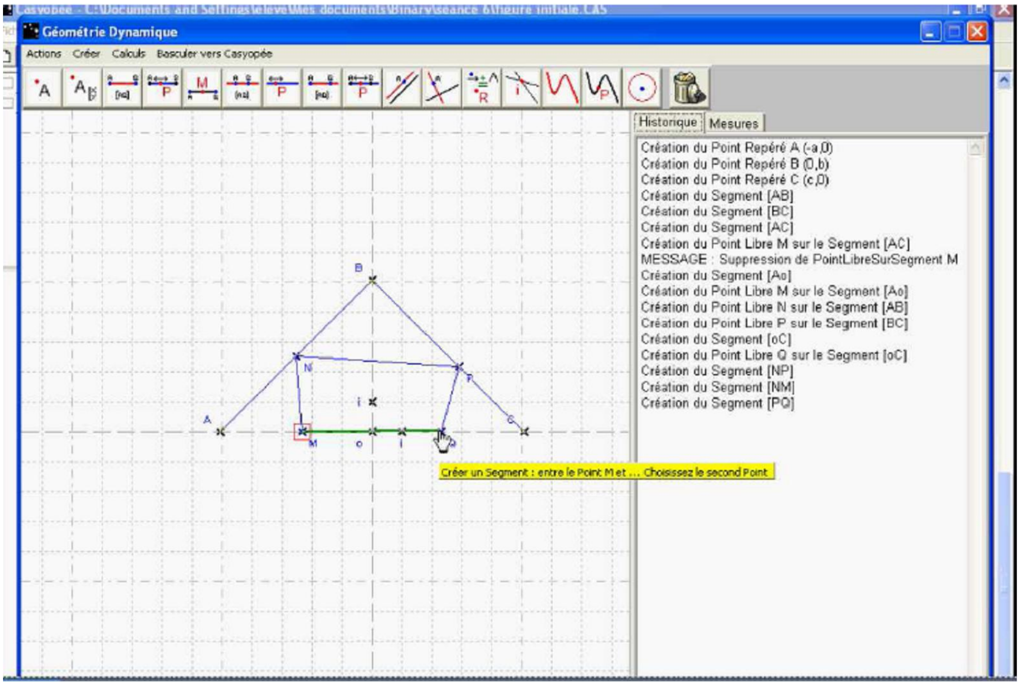


Figure 5.7. Copie d'écran d'une construction géométrique incorrecte

11mn40 : Chloé suggère de tracer des parallèles pour que ce soit juste. Elina lui fait remarquer que si elle trace la parallèle à la droite *(AC)* passant par *N*, elle ne passe par *P*. Chloé lui conseille de détruire *P* et de le recréer comme point d'intersection. Elle crée ensuite la parallèle à *(MN)* passant par *Q*. Cette parallèle passe par *P* mais quand elle bouge *Q*, ce n'est pas plus le cas. Elles sont donc bloquées.

13mn : L'enseignant intervient en expliquant que quand on déplace un point, tout doit se déplacer mais que pour leur tracé ce n'est pas le cas car tout est indépendant. Il leur demande de réfléchir à une stratégie de construction du rectangle.

13mn15 : Elles créent la droite parallèle à *[MQ]*, passant par *N*. Elles bougent le point libre *N* et s'aperçoivent que le point libre *P* n'appartient pas à la parallèle. Alors, elles suppriment le point *P* puis recréent *P* comme point d'intersection de la parallèle et le segment *[BC]*. Elles reviennent à bouger le point *N* et trouvent que le point *P* bougent aussi, c'est bon. Ensuite, elles créent le segment [NM] et la droite parallèle à [NM], passant par *Q*. Elles déplacent le point *Q* et le point *P* ne se déplace pas. Elles reconnaissent l'erreur et puis suppriment *P*. Elles reconstruisent *P* comme point d'intersection de deux droites parallèles. Elles bougent *N* et s'aperçoivent que ça ne va pas, car le sommet *P* n'est pas sur le segment *[BC]*.

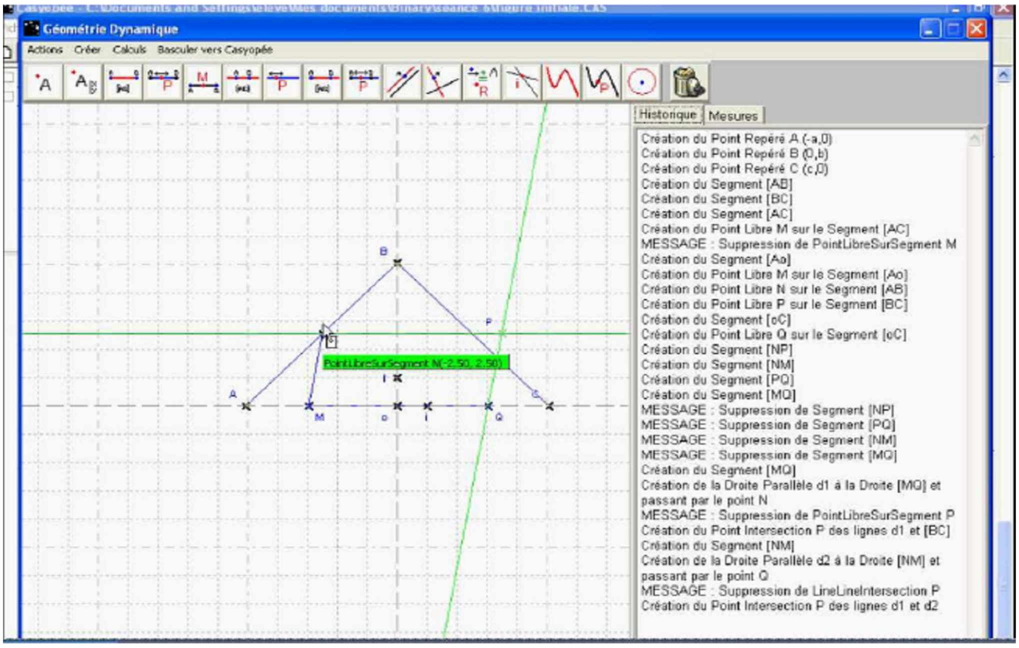


Figure 5.8. Copie d'écran d'une construction géométrique incorrecte « molle »

23mn : L'enseignant leur demande d'essayer de faire la construction sur leur feuille. Elles réussissent le tracé sur papier/crayon et reviennent à la construction de la figure avec Casyopée.

26mn : Elles suppriment tous les segments et commencent à reconstruire correctement le rectangle *MNPQ* (29mn).

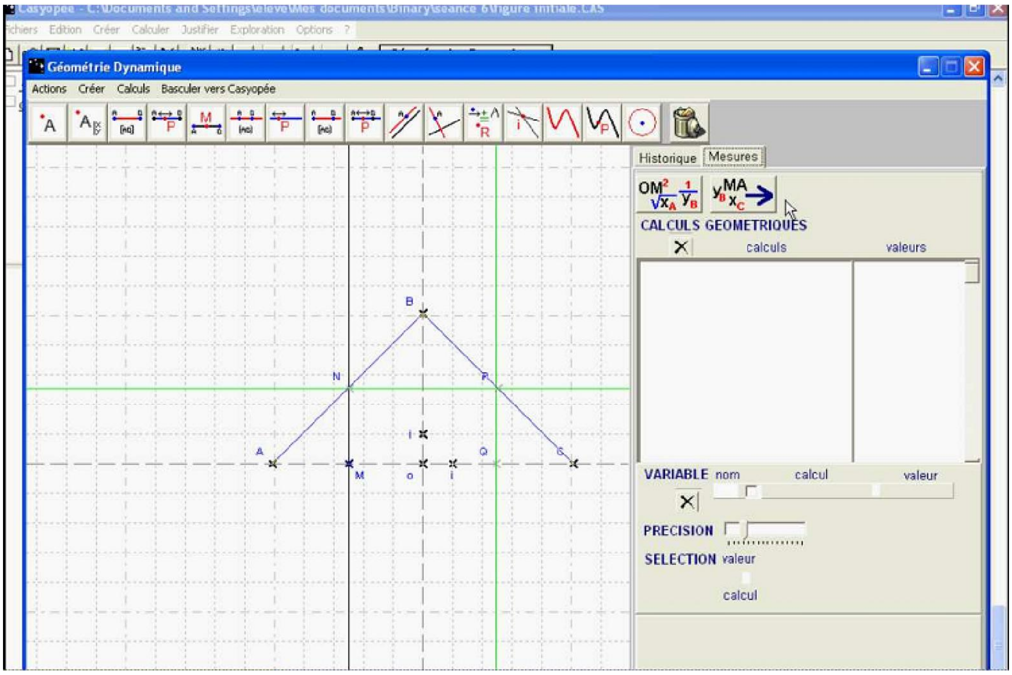


Figure 5.10. La figure définitive

c. *Création de calculs géométriques et explorations numériques*

29mn20 : Elina se demande comment faire l'aire. Elle clique sur l'onglet « *Mesures* » puis hésite. Ensuite, elle choisit « *Créer un calcul* » mais elle ne crée aucun calcul géométrique. Elle hésite un moment. Elle revient à créer le calcul de l'aire du rectangle *MNPQ*. En entrant le calcul, elle fait une erreur et tape $MN \times MP$. Elle fait bouger le point libre *M* puis reconnaît que ça ne va pas : l'aire est visiblement décroissante tandis que sa valeur numérique affichée dans la fenêtre est croissante. Ce premier feedback leur permet de corriger le calcul géométrique en $MN \times MQ$. Elle bouge le point *M* sur le segment *[OA]*, puis s'arrête à la position pour laquelle la valeur de l'aire est *12.5* (*M* est le milieu de *[OA]*)[10]. Elle déclare assez vite : « *c'est quand N est le milieu de [AB] je crois et P le milieu de [BC]* ».

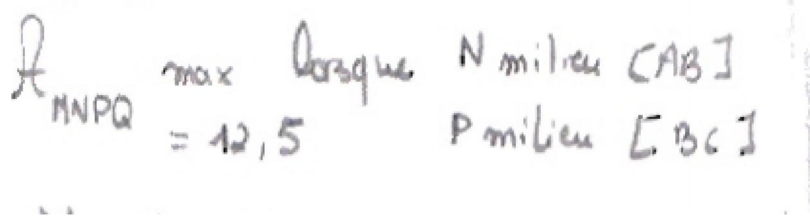

$\mathcal{A}_{MNPQ}$ max = 12,5 lorsque N milieu [AB]
P milieu [BC]

Figure 5.11. Copie d'une partie de leur fiche élève

Elles sont quand même moyennement satisfaites et Chloé dit : « *Après je ne sais pas comment on fait pour faire varier les paramètres* ».

d. *Choix des variables et exportation des fonctions*

40mn : L'enseignant passe et leur demande si elles ont prouvé leur résultat. Elles disent qu'elles ont montré que c'est le maximum dans la fenêtre de géométrie. L'enseignant fait remarquer que ce n'est pas une preuve et leur demande comment elles pourraient faire pour prouver. Chloé suggère de faire une équation, sur un ton très interrogatif (en effet, le problème résolu dans la séance précédente est sur des égalités des aires et avait été résolu à l'aide d'équation). L'enseignant leur demande de regarder ce qu'elles avaient fait dans leur compte-rendu de la séance précédente. Elina et Chloé repèrent qu'elles avaient créé des fonctions. L'enseignant leur demande alors ce qu'il faut faire pour créer une fonction. Chloé répond une variable.

44mn25 : Elles changent la variable. Elles prennent premièrement la distance *NP* et la valident. Casyopée accepte ce choix et indique le domaine de définition $[a+c]$. Avec l'aide de l'enseignant, elles exportent ensuite la fonction en cliquant sur le bouton « *Exporter une fonction* ». La fenêtre suivante apparaît :

---

[10] Ici, les trois paramètres admettent respectivement des valeurs *a=5, b=5* et *c=5*.

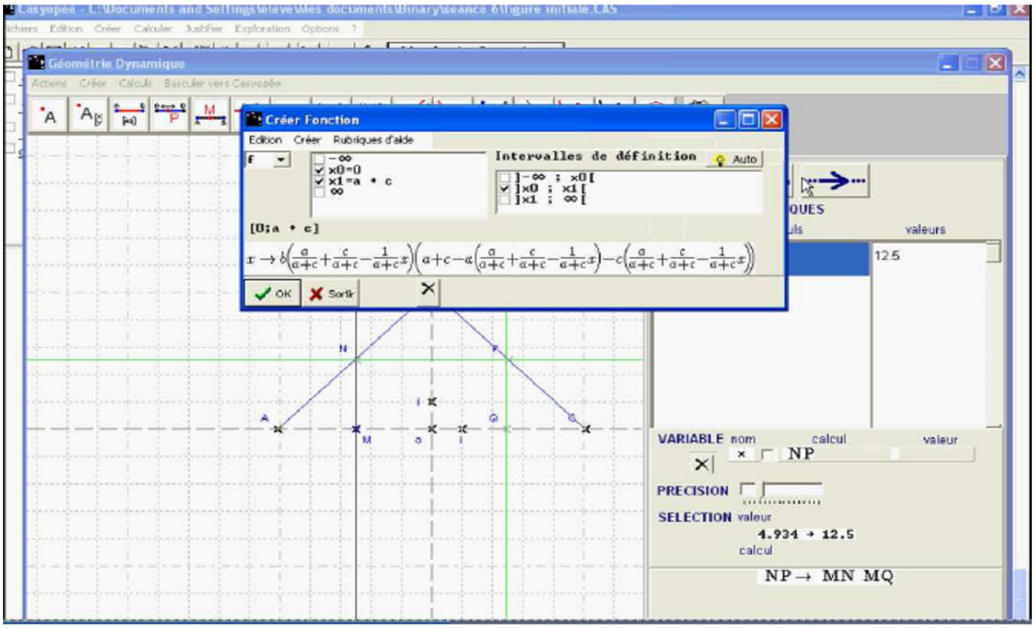


Figure 5.12. Exportation d'une fonction

Alors, elles hésitent un moment devant l'expression assez compliquée de la fonction. Elles quittent cette fenêtre sans exporter la fonction. Elles hésitent puis reviennent à changer la variable. Elles prennent la distance *MQ* puis choisissent « *Exporter une fonction* » :

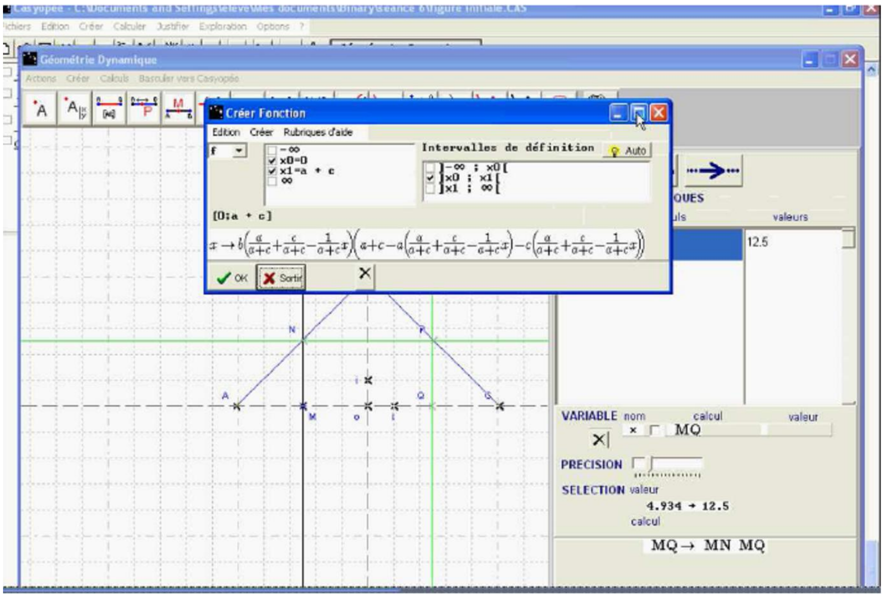


Figure 5.13

Elles s'aperçoivent que l'expression de la fonction est encore compliquée. Elles hésitent et ne la valident pas encore.

48mn : L'observateur leur conseille de regarder le menu de création des variables pour voir ce qui est possible. Chloé pense d'abord à la variable yN qui correspond MN mais propose ensuite la variable $x_O - x_M$ à Elina.

49mn : Elles choisissent la variable $x_O - x_M$ et la valident. Casyopée accepte ce choix et indique le domaine de définition $[0;a]$. Ensuite, elles exportent la fonction dont l'expression est plus simple :

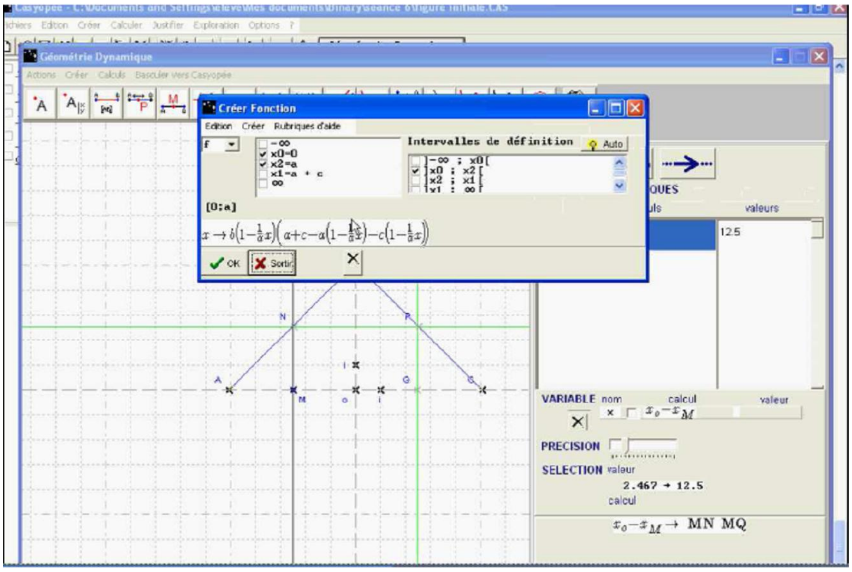


Figure 5.14

Elles font apparaître sa représentation graphique. La création de la fonction et l'obtention du graphe ne leur posent pas de problème, mais elles ne semblent pas beaucoup plus avancées.

e. Exploitation du tracé graphique

Après l'obtention de la représentation graphique de la fonction, elles n'ont pas fait beaucoup d'explorations graphiques.

49mn : Elles ont exporté une fonction et puis fait apparaître le graphe dont une partie était encore cachée.

49mn15 : Elles ont réduit le repère Oxy, puis l'ont élargi rapidement

49mn20 : Elles ont élargi la fenêtre graphique, le graphe de la fonction n'était pas encore visible

49mn50 : Elles ont réduit le repère Oxy, alors le graphe a été visible. Elles ont continué à réduire l'axe des abscisses Ox pour que le graphe ait été plus visible (50mn30).

f. Preuve algébrique

51mn : L'observateur (le chercheur) leur a demandé si elles connaissent le type de fonction exportée. Elles hésitaient et puis ont reconnu que c'était une fonction du second degré. L'observateur leur a demandé ensuite si elles connaissaient le maximum. Chloé a répondu que c'était $-\frac{b}{2a}$. L'observateur leur confirme en leur disant qu'il faut trouver ce qui correspond à a et b car les trois paramètres a, b et c avaient été utilisés. Elles ne voient pas comment faire et l'observateur leur suggère de développer l'expression. Elles ne savent pas encore comment faire. L'observateur continue à leur suggérer de remplacer a, b et c par leurs valeurs numériques. Elles hésitaient encore et l'enseignant est venu le leur montrer.

Après l'intervention de l'enseignant, elles ont obtenue sur papier/crayon l'expression $f = 10x - x^2$ et étaient satisfaites. Ensuite, elles ont utilisé les menus « *Calculer/Développer* » de Casyopée afin de développer l'expression de la fonction. Elles ont piloté des paramètres et sont arrivées à l'expression concrète comme ci-dessus.

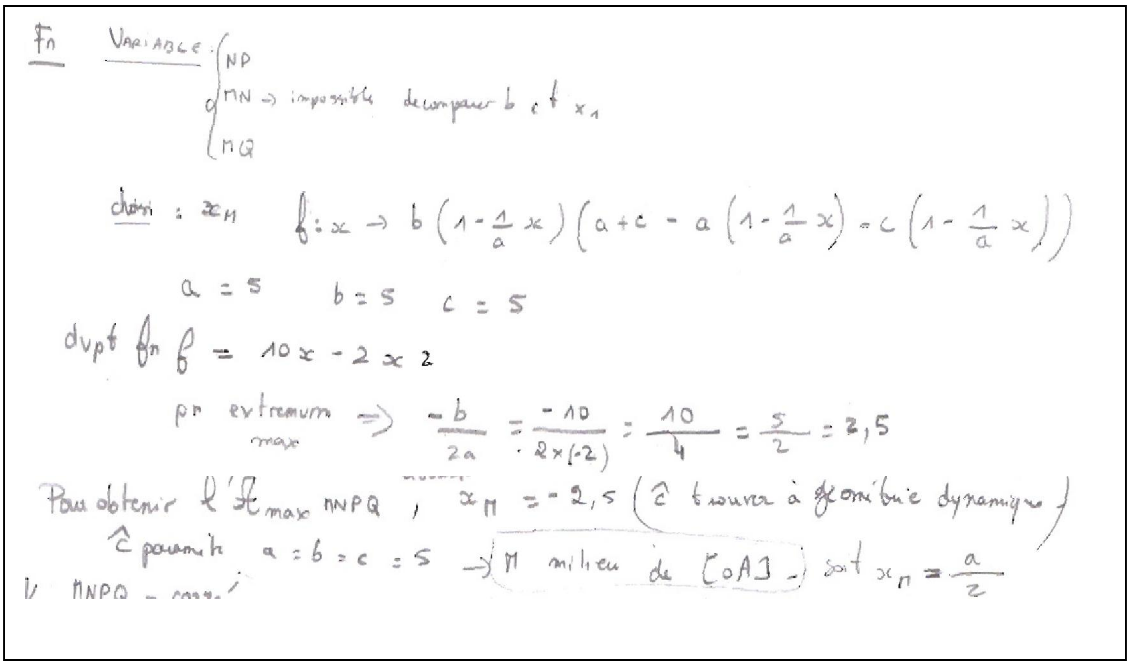


Figure 5.15. La preuve algébrique

Elles ont identifié le a et le b, ont fait des calculs sur papier/crayon et sont facilement arrivées à la valeur numérique $-\frac{b}{2a} = 5/2$. Elles ont également indiqué un résultat généralisé $x_M = \frac{a}{2}$ pour le maximum mais elles n'ont pas essayé de prouver cette propriété généralisée en travaillant sur la formule paramétrique. Elles n'ont que partiellement résolu le problème. Finalement, elles sont revenues à la fenêtre géométrique et ont vérifié ce résultat en disant : « $-2,5$ *c'est bien le milieu* ».

5.2.4 Autres élèves

Nous avons également observé d'autres binômes pendant l'expérimentation. Pour avoir un aperçu plus général ainsi qu'arriver à des constats plus fins sur l'usage de Casyopée dans leur résolution de ce problème, nous donnerons ci-dessous des statistiques quantitatives, mais aussi qualitatives sur la réalisation des tâches.

a. Construction de la figure

Actions observées	Nombre de binômes	Commentaires
• Créer le point M quelconque dans le plan	2	Tous les élèves avaient eu des difficultés dans les premiers temps. Ils n'ont pas reconnu la différence entre points quelconques, points libres et points dépendants. La déformation des figures lors de leur déplacement du point libre est un feedback qui leur permet de reconstruire des rectangles corrects.
• Créer M, N, P, Q respectivement libres sur les segments [OA], [AB], [BC], [OC]	6	

b. Explorer des co-variations

Actions observées	Nombre de binômes	Commentaires
• Bouger le point libre M	6 (oui)	
	2 (non)	
• Créer un calcul géométrique de l'aire	7 (correct)	La durée pour créer un calcul était entre 5 secondes (Lucien) et 8 minutes (Nathalie-Charlotte). Un binôme a tapé un calcul géométrique incorrect $MN \times MP$ (Elina-Chloé).
	1 (incorrect)	
	Avec intervention (0)	

c. *Modélisation fonctionnelle*

Actions observées	Nombre de binômes	Commentaires
• Passer à la modélisation fonctionnelle (le passage au choix d'une variable)	Spontané (0)	Quelques élèves restent longtemps à observer les co-variations, tandis que d'autres élèves passent rapidement au choix de variables. En tout cas, leurs passages à la modélisation fonctionnelle nécessitent une intervention des observateurs ou de l'enseignant.
	Avec intervention (8)	
• Choix des variables	MN (1) $x_o - x_M$ (2) $y_N - y_M$ (1) y_P (1) x_M (3)	En effet, il semble que le choix de variables soit vraiment difficile pour les élèves. Parmi 8 binômes, il y en a *7* qui ont essayé de choisir au moins deux variables différentes. Les feedbacks de Casyopée sur la validation des variables leur ont permis de changer le choix. Il y a eu 5 binômes qui avaient finalement validé x_M ou $x_o - x_M$ comme la variable indépendante.
• Exporter une fonction	Spontané (7)	L'exportation d'une fonction est relativement spontanée.
	Avec intervention (1)	

d. Explorer le tracé graphique

Actions observées	Nombre de binômes	Commentaires
• Passer au registre graphique	Spontané (6)	
	Avec intervention (2)	
• Gestes et manipulations dans la fenêtre graphique		Le passage au registre graphique ne leur pose pas de problème, mais les élèves n'ont pas beaucoup exploité le tracé graphique. Ils ont eu du mal à manipuler les menus dans la fenêtre graphique.
• Faire le lien entre la représentation graphique et la géométrie dynamique	Oui (0)	Ils n'ont pas du tout exploré cette fonctionnalité de Casyopée.
	Non (8)	

e. Preuve algébrique

Actions observées	Commentaires
• Stratégie de preuve • Le rôle de Casyopée • Difficultés dans l'implémentation • Le résultat • Retour à la fenêtre de GD	Les élèves ne reconnaissent pas la forme de l'expression algébrique de la fonction, sauf le binôme Lucile-Justine. Elles la reconnaissent facilement. Avec la suggestion des professeurs, ils ont donné la formule correcte de l'abscisse de sommet de la parabole $x_{max}= -b/2a$ (Elina-Chloé, Nathalie-Charlotte). Cependant, la plupart des élèves a des difficultés pour transformer des expressions algébriques : diviser un nombre par une fraction. Les élèves ont fait afficher la représentation graphique pour chercher le sommet et donner la valeur maximale. Certains élèves ne pensent pas à une démonstration algébrique rigoureuse. Deux binômes ont utilisé la formule $-\frac{b}{2a}$ pour trouver les coordonnées du sommet de la parabole sur papier/crayon. Ils arrivent donc au bon résultat pour un cas particulier des paramètres. Deux autres binômes ont utilisé les menus « *Calculer/Développer* » pour obtenir l'expression de la fonction. Pourtant, ces élèves n'ont pas tenté de faire une démonstration de leur conjecture (recherche d'un maximum) dans le cas général avec des paramètres.

5.3 BILAN ET DISCUSSION

5.3.1 Activités des élèves dans les différents registres de Casyopée

Nous repérons quatre registres impliqués dans le processus de résolution du problème :

- Registre enactif-iconique-grandeurs : c'est le registre dans lequel les élèves construisent la figure dynamique et font l'étude des co-variations entre grandeurs et mesures. A la fin du processus de résolution du problème, ils y reviennent également pour interpréter la solution.
- Registre graphique : il est consacré à l'étude de la dépendance fonctionnelle sur une courbe.
- Registre symbolique : il est consacré à l'étude de la dépendance fonctionnelle sur une expression algébrique.
- Registre numérique : il s'agit des explorations numériques comme un tableau de valeurs ou une instanciation des paramètres pour obtenir des valeurs numériques.

L'itinéraire du binôme Elina-Chloé : (Les flèches **(1)**, la figure **5.16**)

1. Registre enactif-iconique-grandeurs

- Création du calcul géométrique $MN \times MQ$
- Conjecture sur la position du point libre *M* (le milieu de *[OA]*) et la valeur maximale de l'aire du rectangle

2. Registre graphique

- Création du graphe de la fonction
- Pas d'explorations du tracé graphique
- Aides de l'enseignant pour reconnaître la parabole
- Passage au registre symbolique spontanément.

3. Registre symbolique

- Identification du type de fonction de second degré
- Identification de la formule $-\frac{b}{2a}$ pour calculer le maximum
- Sans travail sur l'expression avec des paramètres

4. Registre numérique

- Besoin d'aides de l'enseignant pour travailler sur un cas particulier des paramètres.
- Sans travailler sur le tableau de valeurs de la fonction exportée
- Retour dans le registre enactif-iconique-grandeurs pour vérifier la solution.

L'itinéraire du binôme Justine-Lucile : (Les flèches **(2)**)

1. Registre enactif-iconique-grandeurs

- Création du calcul géométrique $MN \times MQ$
- Pas d'exploration des co-variations entre grandeurs concernant le point *M* et l'aire du rectangle

2. Registre graphique

- Création du graphe de la fonction
- Identification de la parabole

3. Registre symbolique

- Développement et simplification de l'expression de la fonction
- Besoin d'aides de l'enseignant pour reconnaître la formule $-\frac{b}{2a}$
- Retour dans le registre enactif-iconique-grandeurs pour vérifier la solution.

L'itinéraire du binôme Amandine-Pauline : (Les flèches **(3)**)

1. Registre enactif-iconique-grandeurs

- Création du calcul géométrique $MN \times MQ$
- Modifications les valeurs des paramètres et explorations des co-variations.
- Conjecture sur la position du point libre *M* (le milieu de *[OA]*)

2. Registre graphique

- Création du graphe de la fonction
- Repérage des coordonnées du maximum sur le graphe
- Besoin d'aides de l'enseignant pour passer au registre symbolique.

3. Registre symbolique

- Besoin d'aides de l'enseignant pour se souvenir de la formule $-\frac{b}{2a}$.
- Retour dans le registre enactif-iconique-grandeurs.

L'itinéraire de Marine : (Les flèches **(4)**)

1. Registre enactif-iconique-grandeurs

- Besoin d'aide de l'enseignant pour créer le calcul géométrique $MN \times QM$ et la variable x_M
- Sans explorations des co-variations et conjectures sur le maximum.

2. Registre graphique

- L'enseignant l'aide à exporter la fonction et à créer le graphe
- Elle reconnaît la parabole mais elle ne peut pas faire le cadrage du graphe pour visualiser le maximum.
- Besoin d'aides de l'enseignant pour lire les coordonnées maximales sur le graphe.

3. Registre symbolique

- Pas de travail dans le registre symbolique
- Retour dans le registre enactif-iconique-grandeurs et manipuler le point libre *M*.

Les activités des élèves ont été relativement diverses en ce qui concerne le temps qu'ils ont consacré à chaque registre et les difficultés qu'ils ont dû pour passer d'un registre à l'autre. Dans le registre enactif-iconique-grandeurs, quelques élèves restaient longtemps à explorer la co-variation entre le point libre *M* et l'aire du rectangle. Quelques autres élèves ont fait très peu d'explorations de la valeur numérique de l'aire. Pourtant, la plupart des élèves ont reconnu le choix de la variable comme un pas important pour la résolution du problème.

Après avoir exporté une fonction dans le cadre algébrique, les élèves sont souvent passés d'abord par le registre graphique pour explorer le graphe de la fonction. Quelques élèves n'ont pas réellement travaillé dans le registre symbolique. En tout cas, les phases importantes comme le choix d'une variable, l'exportation d'une fonction ou le passage du registre graphique au registre symbolique n'étaient pas encore familières et les aides de l'enseignant ou des observateurs ont souvent été nécessaires.

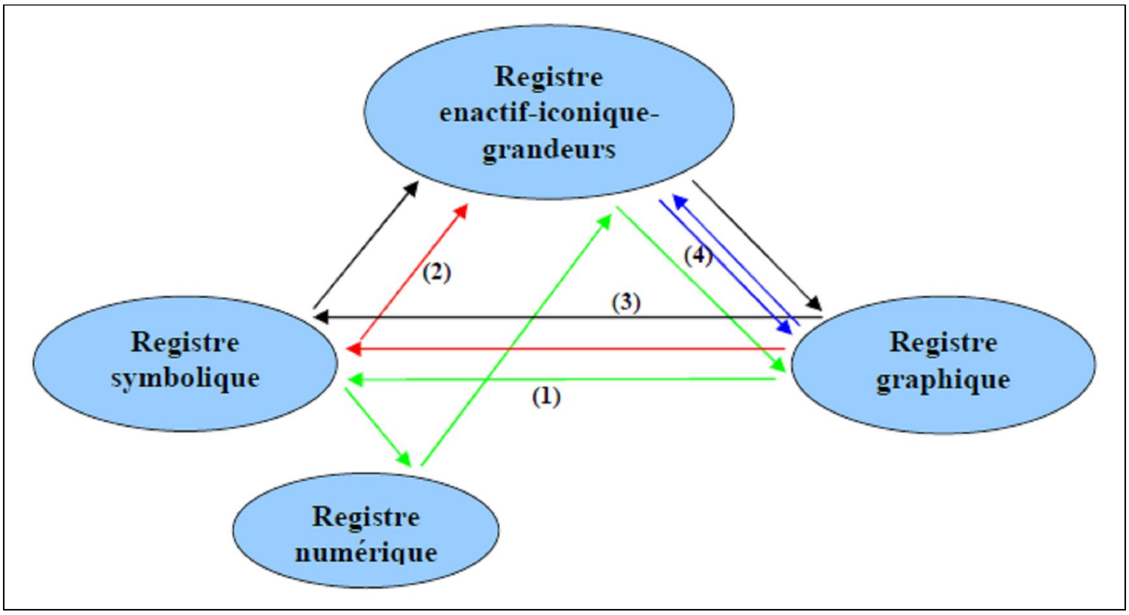


Figure 5.16. Variété d'itinéraires chez les binômes observés[11]

La figure ci-dessus montre une variété d'activités effectives chez les binômes observés. Nous pensons que les tâches proposées ont permis cette variété, même si des interventions des observateurs dans les phases cruciales ont été nécessaires. On peut reconnaître un itinéraire privilégié au sein du cadre algébrique : celui du registre graphique au registre symbolique. Il semble que les élèves visent toujours à repérer l'existence du maximum par le graphe avant d'en chercher une preuve algébrique. Aucun binôme ne peut travailler entièrement seul sur les tâches, même si Casyopée l'accompagne et même si nous avons bien préparé l'introduction de Casyopee avec l'idée de la genèse instrumentale.

5.3.2 Eléments de la genèse instrumentale

La tâche de construction de la figure dynamique demande des connaissances mathématiques de base des élèves. Pourtant, les binômes observés ont eu des difficultés à construire le rectangle *MNPQ*. Une des difficultés que rencontrent les élèves est la distinction entre points libres sur un segment et points dépendants. Celle-ci conduit à une construction « molle » du rectangle *MNPQ*. Ils ont passé longtemps à essayer de construire la figure et finalement ont eu besoin d'aides de l'observateur. L'observateur a donné une suggestion en ayant demandé au binôme Elina-Chloé de réfléchir sur les propriétés des côtés d'un rectangle. Ce binôme reconnaissait le parallélisme et la perpendicularité des côtés et commençait à faire des adaptations. Cependant, leurs adaptations aux aides de l'observateur étaient encore assez lentes.

[11] Les itinéraires démarrent à partir du registre enactif-iconique-grandeurs.

Les feedbacks de Casyopée leurs ont permis de corriger quelques erreurs dans les calculs géométriques. La fonctionnalité « *Calcul géométrique* » de Casyopée était reconnue comme un outil adéquat afin d'explorer des grandeurs.

L'action de modélisation fonctionnelle dans l'environnement Casyopée est gérée par des boutons : « *Choisir une variable* » et « *Exporter une fonction* ». Bien que ces actions aient été précédemment travaillées, les élèves ont eu beaucoup de difficultés à se débrouiller tout seul. La plupart des élèves n'avaient pas compris la nécessité de faire une preuve de leurs conjectures et avaient eu besoin des interventions. Pour le binôme Elina-Chloé, elles n'avaient pas eu d'idée sur le processus de modélisation et l'enseignant a dû suggérer de choisir une variable et d'exporter une fonction.

A propos des calculs algébriques, les élèves ont eu des difficultés. Par exemple, après avoir reconnu une parabole dans la fenêtre graphique, le binôme Elina-Chloé ne savait pas comment faire avec cette parabole et l'observateur les a aidés à se souvenir de la formule $-\frac{b}{2a}$ afin d'obtenir les coordonnées du maximum. Puis elles ont beaucoup de mal à appliquer cette formule à l'expression algébrique de la fonction et n'ont pas pu gérer le calcul algébrique avec des paramètres. Finalement, grâce à l'aide de l'observateur, elles ont réussi avec un cas particulier des paramètres ($a=5, b=5, c=5$) mais ne sont pas arrivées au cas général.

Nous pensons que l'introduction des fonctionnalités de Casyopée en séances expérimentales en parallèle au développement de connaissances des fonctions chez les élèves a relativement contribué aux diverses interactions avec Casyopée. Cela a généralement favorisé des éléments de la genèse instrumentale chez les élèves qui étaient encore en cours.

5.3.3 Rôle de l'enseignant

Nous nous sommes également intéressés aux aides de l'enseignant et des observateurs pour des élèves dans les épisodes cruciaux de la résolution du problème. Nous avons trouvé que les aides de l'enseignant ont souvent été nécessaires pour ces épisodes, particulièrement pour le changement de cadres et les conversions entre registres. Dans le tableau ci-dessous, nous montrons les épisodes cruciaux dans lesquelles les élèves ont travaillé spontanément ou avec les aides et interventions de l'enseignant :

Episodes / **Elèves**	Construire la figure	Créer un calcul géométrique	Choisir une variable	Exporter une fonction	Registre graphique → Registre symbolique
Elina-Chloé	*Intervention*	*Intervention*	*Intervention*	*Intervention*	*Spontané*
Laura	*Intervention*	*Spontané*	*Spontané*	*Spontané*	*Spontané*
Marine	*Intervention*	*Intervention*	*Intervention*	*Intervention*	*Non*
Justine-Lucile	*Spontané*	*Spontané*	*Intervention*	*Spontané*	*Intervention*
Nathalie-Charlotte	*Intervention*	*Spontané*	*Spontané*	*Spontané*	*Intervention*

Tableau 5.1. Interventions de l'enseignant dans les épisodes cruciaux

En regardant ce tableau, nous pouvons reconnaître que les élèves ont généralement eu besoin des aides dans les épisodes comme : construire la figure dynamique, choisir une variable appropriée et la conversion entre le registre graphique et le registre symbolique. Une perspective de notre travail actuel examinera comment les aides de l'enseignant ou des observateurs contribueront aux apprentissages des élèves au-delà de la résolution du problème.

5.4 QUESTIONS DE RECHERCHE

Au chapitre 1, nous avons formulé les questions initiales suivantes :

- Comment les TICE peuvent-elles aider les élèves à construire une compréhension des fonctions ? En particulier, comment développer une approche des fonctions s'appuyant sur des potentialités offertes par la technologie ?
- Comment concevoir et mettre en place des situations d'apprentissage appropriées afin de favoriser une telle approche ?
- Comment analyser les activités pour des élèves sur les fonctions en environnement numériques d'apprentissage pour favoriser la *compréhension flexible* des fonctions ?

Les chapitres 2, 3 et 4 nous ont permis de spécifier le cadre théorique et d'introduire le logiciel Casyopée. Dans ce chapitre 5, nous avons analysé une observation de processus d'apprentissage avec Casyopée en utilisant la Typologie d'activités et l'approche instrumentale. L'analyse montre à la fois la richesse des activités avec Casyopée et aussi que la genèse instrumentale des élèves est encore très embryonnaire, l'issue de quelques semaines d'usage de l'environnement. Nous faisons l'hypothèse que les objectifs énoncés dans nos questions initiales pour le contexte que nous étudions supposent une étude de la genèse instrumentale sur un temps beaucoup plus long. Cette hypothèse conduit aux questions de recherche suivantes :

- Comment l'utilisation régulière de Casyopée sur un temps long en classe permet-elle aux élèves d'articuler le développement de leurs connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur Casyopée ?
- Comment la Typologie d'activités permet-elle d'analyser et de relier les activités variées sur les fonctions en environnement Casyopée ?
- Comment les activités des élèves dans les différents registres sémiotiques de Casyopée favorisent-elles une *compréhension flexible* des fonctions ?

Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre l'organisation de l'expérimentation au sein du projet ReMath. En nous centrant sur les observations du binôme Elina-Chloé et en élargissant aux autres élèves, nous avons donné quelques premières remarques et conclusions. En considérant ces conclusions, nous avons posé des questions pour notre recherche. Afin de chercher leurs réponses, nous avons besoin de construire une autre expérimentation permettant de continuer à observer les activités de ce binôme Elina-Chloé dans l'environnement Casyopée sur un temps plus long. Nous présenterons en détail cette expérimentation dans le chapitre suivant.

Partie III

INGENIERIE POUR LA TERMINALE S

Chapitre 6

Dispositifs d'expérimentation

Introduction

L'analyse de l'expérimentation du projet ReMath nous a donné les premiers éclairages sur les potentialités offertes par Casyopée et l'apprentissage des fonctions chez les élèves. Selon l'approche instrumentale, la genèse instrumentale chez les élèves est complexe, elle nécessite du temps, dépend des caractéristiques de l'artefact et des connaissances du sujet. Il s'agira ici d'explorer les éléments d'instrumentation soulevés dans nos questions de recherche, à travers une autre séquence expérimentale en classe de Terminale S. Dans ce chapitre, nous nous centrerons principalement sur les observations plus détaillées du binôme Elina-Chloé afin de dégager quelques résultats sur leur processus d'instrumentation de Casyopée, notamment en considérant l'interaction et l'articulation entre le développement de leurs connaissances sur ce logiciel et de leurs connaissances mathématiques.

6.1 CONTEXTE D'EXPERIMENTATION

6.1.1 Entre la première expérimentation et la seconde expérimentation

Dans le cadre du projet ReMath, les élèves ont eu six séances de travail en binôme avec Casyopée pendant une durée de trois mois. Dans la suite de l'année, le professeur de la classe a régulièrement utilisé Casyopée. Par exemple, les élèves ont eu l'occasion de travailler avec ce logiciel dans une séance de TP de mathématique en Première S portant sur l'étude de l'aire maximale d'un rectangle inscrit dans la courbe d'équation $y=\sqrt{9-x^2}$. Deux nouvelles fonctionnalités de Casyopée ont été présentées durant cette séance : la construction du point d'intersection entre une droite et une courbe et la construction de l'image d'un point par une symétrie. Après cette séance de TP, le professeur (Xavier) nous donne quelques remarques sur l'utilisation de Casyopée :

> « Pour le traitement algébrique (la simplification de l'expression par développement ou factorisation, le calcul de dérivée, les zéros de la dérivée et l'étude du signe), j'ai eu l'impression d'intervenir énormément dans cette phase, les élèves avaient peu d'autonomie… Parce que de nouvelles fonctionnalités sont venues et elles ont enrichi les fonctionnalités existantes. Cela implique une difficulté car l'environnement logiciel apparaît techniquement instable. Cependant la modélisation devient le cœur de l'activité dans l'environnement, ce qui est conforme à nos attentes… ».

La première expérimentation dans le cadre du projet ReMath a soulevé des questions d'intégration de Casyopée dans l'enseignement et l'apprentissage de fonctions au lycée. Comment les fonctionnalités de Casyopée permettent-elles de relier les activités des élèves sur les fonctions ? Comment expliciter les phénomènes relatifs au processus d'instrumentation chez les élèves, notamment en considérant en même temps l'interaction entre le développement de leurs connaissances mathématiques et leurs connaissances sur l'artefact sur un temps plus long ? Comment les différents registres de représentation de Casyopée favorisent-ils une *compréhension flexible* des fonctions tout au long des phases d'exploration, de conjecture et de preuve dans la résolution de problèmes des élèves ?

Pour mieux cerner et donner des éléments de recherche à ces questions, nous avons mené une seconde expérimentation dans la même classe l'année suivante en Terminale S.

6.1.2 Thème choisi

La première expérimentation nous a montré que l'utilisation de Casyopée s'est avérée adaptée au domaine des fonctions. Cela peut s'expliquer par une variété d'activités effectives chez les élèves observés (Fig. 5.16). De plus, il ressort de notre analyse du curriculum français que l'approche des fonctions via des situations issue d'un domaine d'application est fortement encouragée. C'est pourquoi nous avons continué à choisir l'approche des fonctions à travers la modélisation fonctionnelle des dépendances géométriques avec les objectifs suivants :

- Pour les fonctions :
    - Consolider les notions de co-variation, de variables et de fonctions
    - Développer une *compréhension flexible* sur les fonctions des élèves
    - Enrichir le répertoire des fonctions rencontrées
    - Elargir aux familles de fonctions grâce aux paramètres.
- Pour l'usage de Casyopée :
    - Exploiter les potentialités de représentation des fonctions dans Casyopée, en particulier l'outil de calcul géométrique et les fonctionnalités de « Choisir une variable » et « Exporter une fonction » pour aborder la question de modélisation fonctionnelle.
    - Profiter du début de genèse instrumentale acquis par ces élèves qui avaient déjà travaillé avec Casyopée pendant la première expérimentation.

6.1.3 Contexte institutionnel

La classe de Terminale S que nous avons suivie est, comme nous l'avons dit, composée des mêmes élèves observés pendant l'année de Première S. En particulier, nous avions fait des observations pour le binôme Elina-Chloé tout au long des séances expérimentales, ce qui nous a permis de mieux suivre leur progression pendant un temps long de deux ans.

Cette expérimentation s'est déroulée pendant l'année scolaire 2008 – 2009. Elle concerne une classe de Terminale S du lycée Maupertuis à Saint-Malo. L'enseignant (Xavier) est un des deux enseignants du projet ReMath. Rappelons qu'il a participé à la conception et l'expérimentation de Casyopée depuis le début.

Le binôme Elina-Chloé travaille dans une salle à part avec un équipement informatique (un tableau blanc interactive) facilitant l'observation et les échanges, tandis que les autres élèves travaillent en même temps avec l'enseignant dans une autre salle. Toutes les séances se déroulent dans les salles informatiques et les élèves travaillent en binôme.

6.1.4 Evolution de Casyopée

En ce qui concerne le développement de l'environnement logiciel, notre groupe de recherche y a intégré cette année le noyau de calcul formel Maxima au lieu de Mupad, de façon à donner accès à de nouvelles possibilités d'actions offertes par le calcul symbolique. D'ailleurs, une nouvelle fonctionnalité a été développée. Il s'agit de la possibilité de relier la géométrie dynamique à la représentation graphique de la manière suivante : à un mouvement d'un point mobile dans la fenêtre de géométrie dynamique correspond un déplacement du point correspondant sur le graphe et réciproquement.

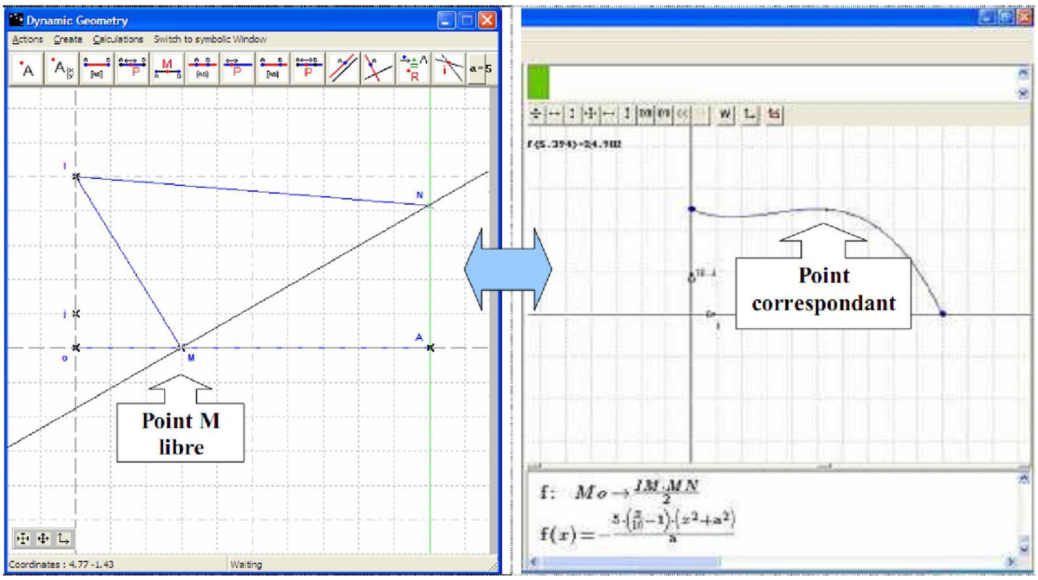


Figure 6.1. Lien entre la géométrie dynamique et la représentation graphique

6.2 VUE GENERALE SUR LA CONSTRUCTION DES SEANCES OBSERVEES

Pour préparer cette seconde expérimentation, nous avons eu une discussion avec Xavier sur l'organisation et la construction des séances à la fin de la première expérimentation. Nous l'avons renseigné sur notre propre travail de recherche suite à l'expérimentation du projet ReMath.

Nous avons mis en place dans le cadre de la seconde expérimentation trois séances d'observations de l'activité des élèves et de ce qu'elle produit :

- **Observations de classe :**
  - Séance C1 (octobre): L'objectif est de consolider l'usage de Casyopée suite à la première expérimentation. Il s'agit de travailler sur les fonctions du second degré via l'étude de la maximisation d'une somme des aires inscrites dans un carré.
  - Séance C2 (novembre):Cette séance a pour but d'approfondir l'exploitation des potentialités de Casyopée. Il s'agit d'approcher les fonctions de troisième degré à travers l'étude de l'aire maximale d'un triangle rectangle en considérant différentes valeurs du paramètre qui conduisent à différentes fonctions.
  - Séance C3 (décembre) : Approcher une situation de problème réelle. Il est demandé aux élèves d'utiliser Casyopée pour modéliser et résoudre d'une manière plus autonome un problème de minimalisation d'une somme de longueurs dans un système de collecte des eaux de pluie et finalement de retourner au traitement du résultat dans la géométrie.
- **Questionnaire** : Les élèves ont répondu à un questionnaire de bilan à la fin de la séquence expérimentale en décembre.
- **Interviews focalisés** : Nous avons également réalisé les entretiens avec le binôme Elina-Chloé et avec l'enseignant à la fin de l'année scolaire (fin mai 2009). Ceux-ci nous ont permis de dégager et de comprendre des évolutions des élèves vis-à-vis de l'usage de Casyopée.

Les séances C1, C2 et C3 se situent sur le premier trimestre de l'année de Terminale. Le choix de grouper nos observations sur ce trimestre se justifie par le fait que lors des trimestres suivants, les élèves se centrent sur la préparation du baccalauréat. Casyopée est encore utilisé dans cette période, mais pour des problèmes plus en relation avec l'épreuve. Nous insérons une observation de bilan (interviews focalisés) en fin d'année pour faire le point sur la genèse instrumentale à l'issue de l'année de Terminale.

De C1 à C2 il y a une gradation du besoin en connaissances mathématiques et en connaissances sur l'usage de Casyopée. Dans la séance C3, c'est davantage la capacité des élèves de mobiliser leurs connaissances mathématiques et connaissances sur Casyopée pour un problème d'optimisation qui est en jeu.

En termes de contenus mathématiques, les fonctions quadratiques, cubiques, irrationnelles ou exponentielles ne sont pas nouvelles pour les élèves. Cependant, notre séquence expérimentale vise à enrichir la notion de fonction comme modèles de dépendances représentés dans les différents registres sémiotiques ainsi que le sens d'une modélisation fonctionnelle des situations géométriques en s'appuyant sur les fonctionnalités spécifiques de Casyopée. Ainsi, Casyopée est exploité ici comme un moyen de donner du sens à notre approche des fonctions.

Par ailleurs, un recueil de données sur une séance de travail mené par le professeur en début de troisième trimestre permet d'étudier comment la genèse se traduit pour des tâches davantage liées au baccalauréat.

6.3 DONNEES RECUEILLIES

Les observables recueillis sont les suivants :

- Les fiches élèves de trois séances
- Nos notes d'observation
- Les fichiers vidéo de capture d'écran
- Les enregistrements audio des binômes observés
- Les fichiers Casyopée
- Des questionnaires
- Des entretiens avec le binôme Elina-Chloé et avec l'enseignant Xavier.

Dans la suite, nous cherchons à analyser, par rapport aux objectifs et aux analyses a priori des séances, les déroulements observés du binôme Elina-Chloé. Nous présentons successivement pour chacune des séances le contexte et les objectifs, la fiche-élève, les analyses a priori et la synthèse des observations. Concernant ces observations, nous choisissons de focaliser systématiquement les épisodes cruciaux liés à l'utilisation de Casyopée : la construction géométrique des figures, les explorations enactive-iconiques et conjectures, la modélisation fonctionnelle et la preuve algébrique.

6.4 SEQUENCE EXPERIMENTALE

6.4.1 Séance C1 : Consolidation de l'usage de Casyopée

a. Contexte et objectifs

Il s'agit de consolider l'usage de Casyopée, surtout la fenêtre géométrique et les fonctionnalités de modélisation comme « Calcul géométrique », « Choisir une variable » et « Exporter une fonction » suite à la première expérimentation dans le cadre du projet ReMath. A l'issue de cette séance nous souhaitons que les élèves puissent mieux comprendre les étapes de la modélisation fonctionnelle d'une situation géométrique effectuée dans Casyopée et aussi qu'une dépendance fonctionnelle peut être représentée dans plusieurs registres. Cette séance s'est déroulée en octobre 2008.

b. Fiche élève

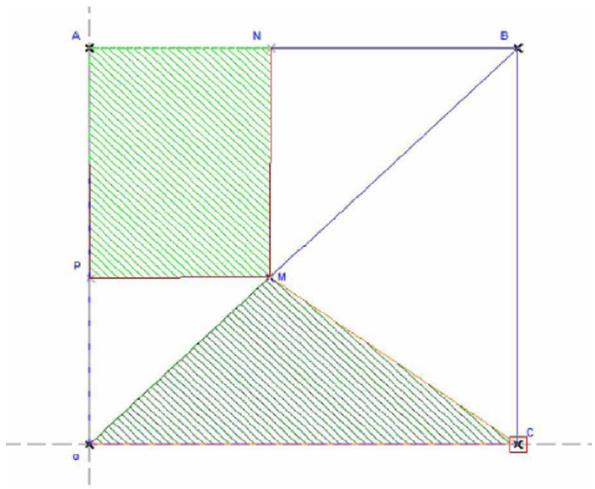
Voici la fiche élève donnée aux élèves correspondant à la première séance C1. Elle contient deux pages.

Fiche élève
Classe: Terminale S **Date**: 24 octobre 2008
Lycée: Maupertuis
Nom et prénom:

Une aire variable

Soit a un paramètre positif.
Dans un repère orthonormé, on considère le carré *OABC* avec *A(0 ;a), C(a ;0)* et *B(a ;a)*. *M* est un point libre sur la diagonale *[OB]*. On construit le rectangle *MNAP* avec *N* sur *[AB]*, *P* sur *[OA]* et le triangle *OMC*. Les intérieurs de ces deux figures ont été colorés.

a. Déplacer le point *M* sur *[OB]* et observer les variations de l'aire de la partie colorée (la somme des aires de deux figures). Donner une conjecture sur ces variations.
b. Existe-il une position du point *M* telle que cette aire soit maximale ?



Tâche 1. Construction de la figure **1.1**. Ouvrir le fichier *figinit.CAS* puis compléter la figure avec Casyopée (le paramètre a et le carré *OABC* ont été créés). **1.2**. Réaliser la construction géométrique nécessaire au calcul géométrique de l'aire du triangle *OMC*.	
Tâche 2. Observations et conjectures **2.1**. Créer le calcul géométrique de l'aire de la partie colorée. **2.2**. Déplacer le point *M* sur *[OB]* et observer les variations de l'aire de la partie colorée. Donner des conjectures sur les variations de l'aire et la position du point *M* pour laquelle cette aire soit maximale.	**Les observations:** .... **Les conjectures:** ....

Tâche 3. Modélisation avec Casyopée

3.1. Choix de la variable x = …………………………………………………………………………
………
3.2. La fonction géométrique exprimant l'aire de la partie colorée affichée dans la fenêtre « *Mesures* »:

La fonction géométrique: ....

f: …… → ………………………………

....

....

Son ensemble de définition:
………
………
Son expression algébrique: …………………………………………………………………………
$f(x) = ...$ ……………………………………………………………………………………………
………

Tâche 4. Recherche algébrique de l'aire maximale (*Quelle démarche vous allez faire*?)
………
....
………
………

Tâche 5. Travail avec Casyopée

5.1. Mettre en œuvre votre démarche
5.2. Conclusion sur les variations de l'aire et la position du point M:
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
5.3. Comparer cette conclusion avec les conjectures que vous avez données:
……………………………………………………………………………………………………

Tâche 6.
6.1. Visualiser la conclusion dans la fenêtre de géométrie dynamique.
6.2. Quelle remarque faites-vous sur les aires du triangle et du rectangle dans la position où l'aire est maximale? Prouvez-la.

Tâche 7. ***(Optionnel)***
7.1. Comment aurais-tu calculé en papier/crayon l'expression algébrique de *f*?

7.2. Comment aurais-tu calculé sa dérivée et les zéros de la dérivée?

Figure 6.2. Fiche élève de la séance C1

Le problème posé aux élèves s'est inspiré de la situation « L'enseigne lumineuse » présentée dans Aldon et al. (2008) avec modifications. Il s'agit ici d'étudier la somme des aires d'un triangle et d'un rectangle inscrits dans un carré. Ce type de situation est assez classique en classe de Première S et de Terminale S. Nous nous appuyons sur la démarche expérimentale qui est encouragée par le curriculum français ainsi que sur l'analyse de la transposition des approches expérimentales par Lagrange (2005b) pour concevoir les tâches mathématiques données dans la fiche élève, avec une mise en évidence du fil principal : *expérimenter – observer – conjecturer – démontrer*.

Dans cette séance, la fonction apparaît comme le moyen de modélisation algébrique des dépendances fonctionnelles entre la somme de deux aires et des grandeurs. Les tâches des élèves consistent à construire la figure avec Casyopée, observer et conjecturer les variations des aires, modéliser des dépendances fonctionnelles par Casyopée et chercher une preuve algébrique.

A propos de la structure de la fiche élève, nous avons pris en compte à la fois le côté des connaissances mathématiques sur les fonctions et le côté des connaissances sur Casyopée dans la conception. Les différentes composantes de la fiche élève se révèlent illustratives de l'articulation entre l'activité mathématique et l'activité sur Casyopée (Fig. 6.2). Nous pensons que cette prise en compte de la structure de la fiche élève accroîtra l'autonomie des élèves ainsi que rendra l'objet d'apprentissage plus « transparent » aux élèves.

c. Analyse a priori

Tâche 1. Construction de la figure

1.1. Ouvrir le fichier *figinit.CAS* puis compléter la figure avec Casyopée (le paramètre *a* et le carré *OABC* ont été créés).

1.2. Réaliser la construction géométrique nécessaire au calcul géométrique de l'aire du triangle *OMC*.

Il est demandé de charger un fichier Casyopée dans lequel le paramètre *a* et le carré *OABC* ont été créés, puis de compléter la figure. Les élèves construisent la diagonale *OB*, puis créent le point libre *M* sur le segment *[OB]*. Ensuite, ils créent des droites perpendiculaires respectivement à l'axe des *x* et au segment *[AB]*, passant par *M* pour construire le rectangle *MNAP*. Afin de réaliser une construction géométrique nécessaire au calcul géométrique de l'aire du triangle *OMC*, les élèves ont des choix différents. Par exemple, ils peuvent construire la hauteur *MH* en créant le point d'intersection *H* du segment *[OC]* et de la droite (MN). Ils peuvent également construire une autre hauteur du triangle *OMC* passant par *O* ou par *C*. Dans ce cas, nous nous attendons des élèves une construction du point d'intersection *H* comme ci-dessus car elle est simple et assez 'naturelle'.

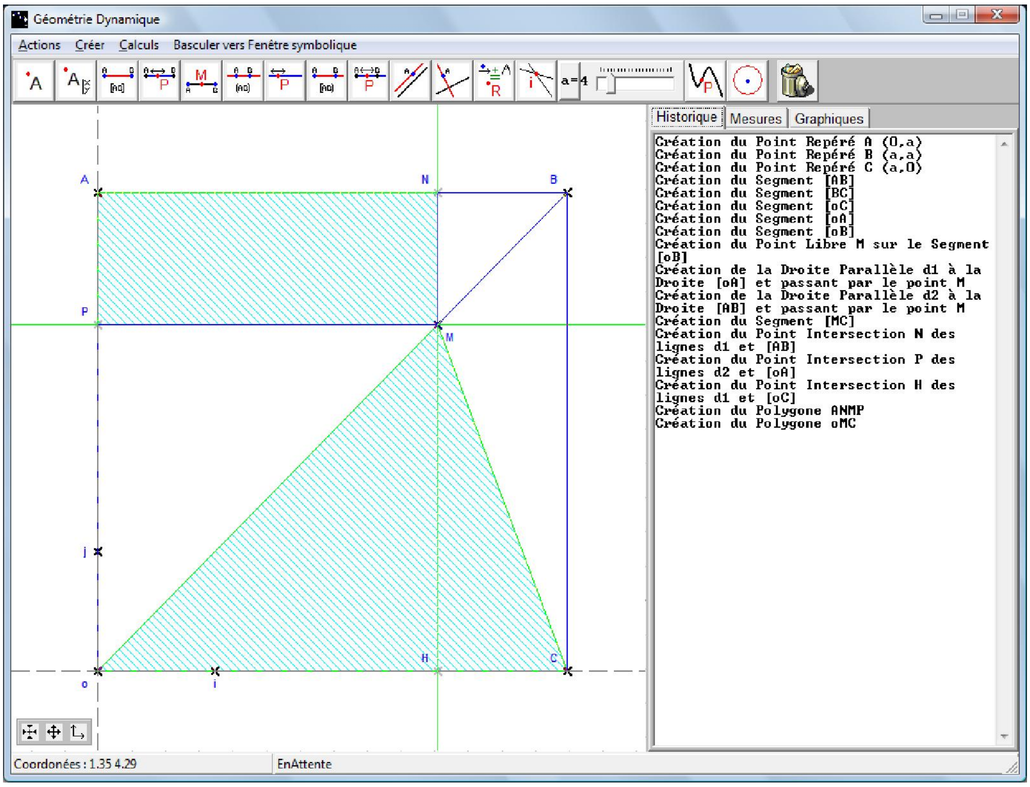


Figure 6.3

Pour cette tâche de construction de la figure, nous portons essentiellement sur deux activités suivantes:

- La construction du point libre *M* et du rectangle *MNAP*
- La construction géométrique de la hauteur pour le calcul de l'aire du triangle *OMC*

Associées respectivement à ces deux activités, nous nous attendons à ce qu'ils rencontrent les difficultés suivantes:

- celle de ne pas savoir bien distinguer un point libre et un point semi-libre (point libre sur un segment).
- celle de ne pas facilement construire les deux perpendiculaires et une hauteur du triangle *OMC*. En fait, pour construire correctement le rectangle, il est nécessaire de comprendre ses propriétés géométriques et le fait que sa conformation ne change pas lors des déplacements.

La tâche proposée dispose d'un potentiel *a-didactique*. En effet, la rétroaction du logiciel sur la déformation de la figure lors d'un déplacement du point *M* aide les élèves à ajuster leur construction géométrique.

Tâche 2. Observations et conjectures	**Les observations:**
2.1. Créer le calcul géométrique de l'aire de la partie colorée. 2.2. Déplacer le point *M* sur *[OB]* et observer les variations de l'aire de la partie colorée. Donner des conjectures sur les variations de l'aire et la position du point *M* pour laquelle cette aire soit maximale.	.... **Les conjectures:** ....

Après avoir complété la figure, la sous tâche 2.1 demande aux élèves de créer un calcul géométrique de l'aire de la partie colorée, par exemple $\frac{MH \times OC}{2} + MN \times MP$. C'est la somme des aires du triangle *OMC* et du rectangle *MNAP*. Les élèves doivent passer dans une petite fenêtre et utiliser le bouton '*Créer un calcul*' (désigné par *AM* dans la figure 6.4) afin d'effectuer cette tâche.

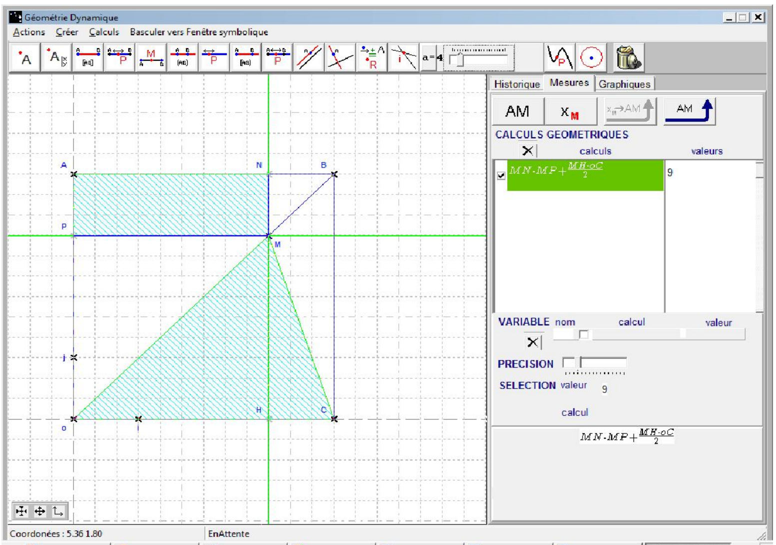


Figure 6.4

La sous tâche 2.2 vise à développer davantage des premières explorations qualitatives et des conjectures sur les variations de l'aire. Les élèves explorent la situation en faisant déplacer le point libre *M* sur le segment *[OB]*. Ils peuvent conjecturer la solution en explorant la valeur numérique de cette aire dans le cadre géométrique. Cette valeur numérique sera dynamiquement affichée quand ils déplacent le point libre *M*. Quand le point *M* bouge de l'origine *O* à *B*, cette aire augmente puis diminue, avec une valeur maximale lorsque M se situe à la position telle que *OM/OB = 3/4*. Il est possible d'observer la co-variation entre une mesure concernant le point libre M, par exemple la distance *OM* ou l'abscisse du point *M*, et cette aire. Pour quelques élèves, il est peut-être difficile de donner une conjecture exacte sur la position demandée du point *M* telle que *OM/OB = 3/4*. On peut se demander si ce résultat est stable par rapport au choix du paramètre *a*. C'est-à-dire qu'on peut faire varier le paramètre *a* et regarder si on trouve le même résultat. Nous n'attendons ici qu'une première conjecture qualitative sur les variations de l'aire. Par exemple, ils pourraient donner les conjectures sur des positions du point *M* où l'aire est croissante ou décroissante. Il nous semble que des explorations riches des co-variations et des dépendances fonctionnelles sont fondamentales pour développer une compréhension chez les élèves sur la notion de fonctions.

Les élèves en Terminale S ont déjà rencontré ce type de problème depuis la classe de Seconde. Notre objectif est donc de voir si la tâche est bien comprise et si les gestes dans Casyopée sont maîtrisés par les élèves.

Aspects instrumentaux relatifs à cette tâche :

- Rétroaction : la mesure dynamique de l'aire relative à la position de *M*
- Difficultés : savoir bien choisir le bouton « *Créer un calcul* » et entrer un calcul géométrique de l'aire.

Tâche 3. Modélisation avec Casyopée

- Choix de la variable x =

……………………………………………………………………………………

- La fonction géométrique exprimant l'aire de la partie colorée affichée dans la fenêtre « *Mesures* »:

La fonction géométrique:

f: …..→…………………………………………………

Son ensemble de définition……………………………………………………

Son expression algébrique:
$f(x) = ...$……………………………………………………………………

Après la tâche 2, les élèves peuvent choisir une valeur associée à *M*, par exemple *xM, OM, OH, AN…* comme une variable puis observent la co-variation entre la valeur numérique du calcul de l'aire et celle de cette variable. Si cette co-variation est une dépendance fonctionnelle, Casyopée renvoie une rétroaction indiquant l'ensemble de la définition de la fonction et que cette variable dépend du point libre M :

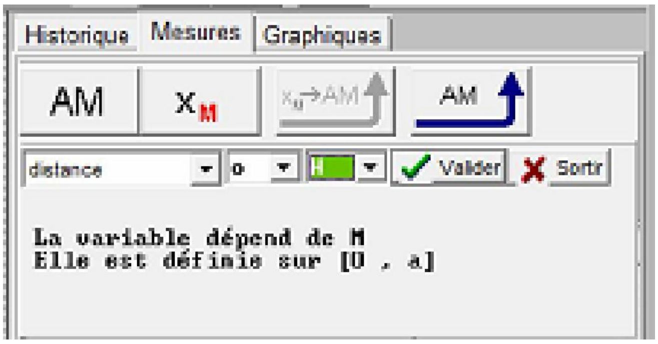
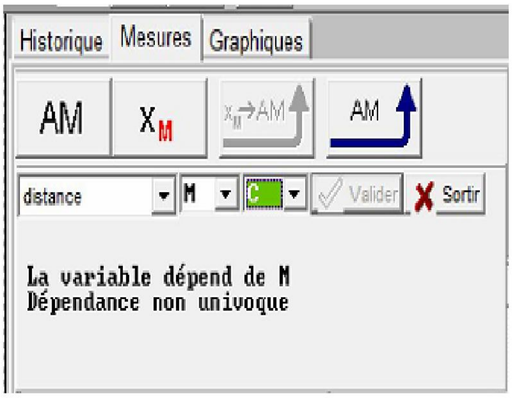


Figure 6.5

Par contre, si cette co-variation n'est pas fonctionnelle, Casyopée donne une rétroaction indiquant que la variable choisie est incorrecte et on ne pourra pas la valider :



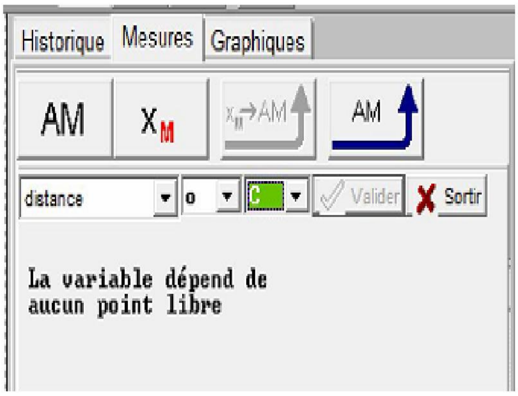


Figure 6.6

Après avoir validé une variable, les élèves peuvent continuer à explorer cette co-variation. La fonction géométrique exprimant symboliquement cette co-variation est également affichée dans l'onglet « *Mesures* » de Casyopée :

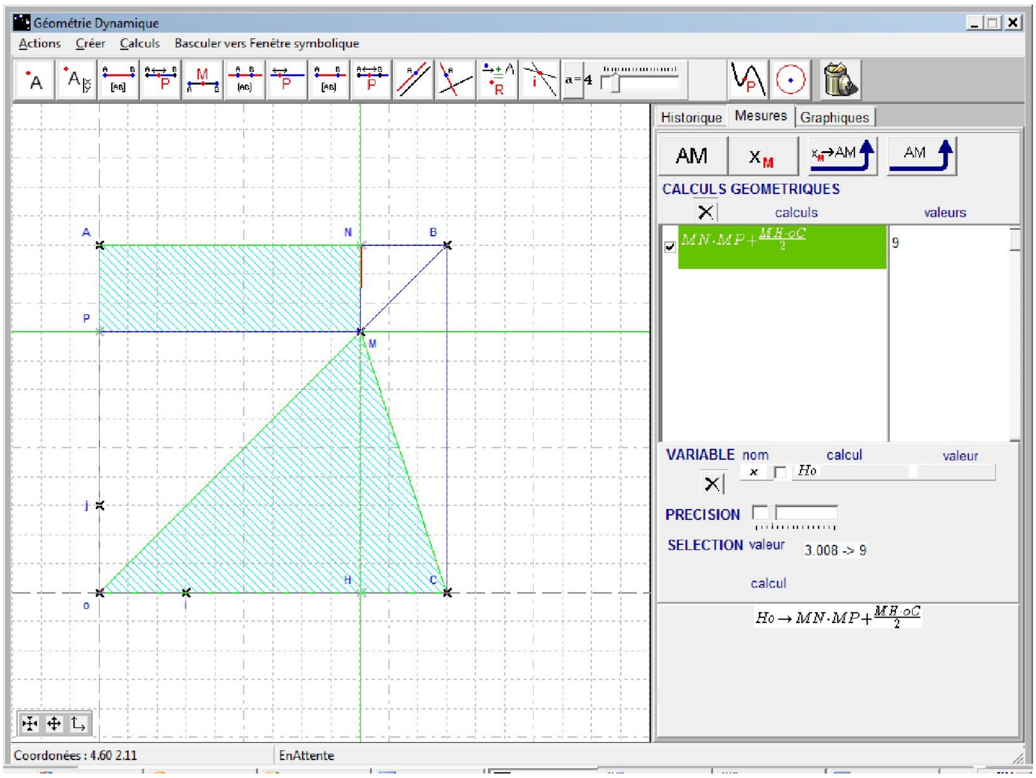


Figure 6.7

Le passage d'une co-variation vers une dépendance fonctionnelle (les actions de choisir et de valider une variable dans Casyopée) est une phase importante et très attendue chez les élèves, malgré le fait que cela ne serait pas facile pour quelques élèves. Ce passage correspond à la phase de changement du cadre géométrique vers le cadre fonctionnel dans la résolution du problème. Il est possible qu'une médiation de l'enseignant soit nécessaire pour ce passage.

Ensuite, les élèves peuvent exporter la fonction géométrique dans la fenêtre algébrique afin d'obtenir son expression algébrique en utilisant le bouton « *Exporter une fonction* ». Casyopée calcule automatiquement l'expression algébrique de la fonction obtenue et son domaine de définition :

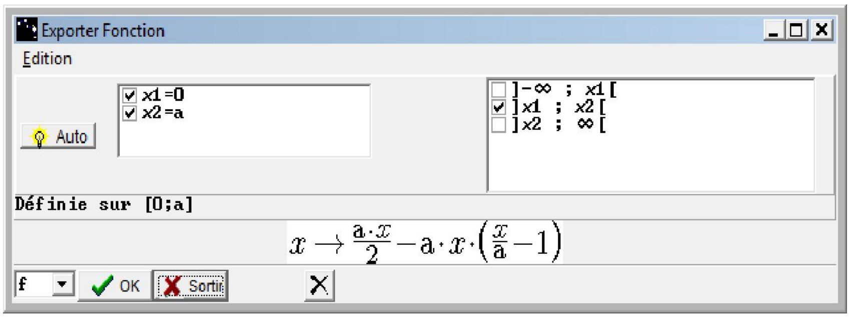


Figure 6.8

La complexité de l'expression algébrique de la fonction exportée dépend de la variable choisie. Par exemple, si on choisit la distance *OM* comme variable, la fonction exportée aura l'expression algébrique comme suivante :

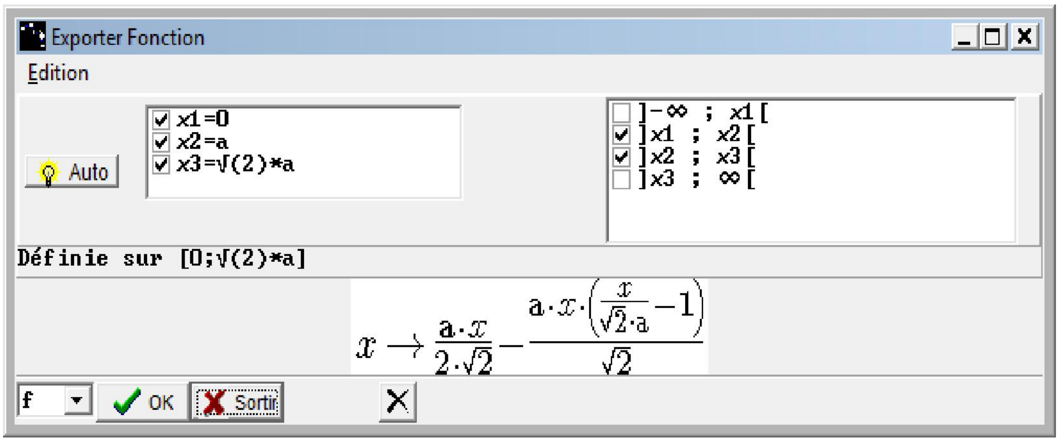


Figure 6.9

Nous espérons que des feedbacks offerts par Casyopée aideront les élèves à choisir et valider une variable adéquate.

La demande d'exprimer l'expression algébrique de la fonction géométrique a pour objectif d'encourager le changement de cadres. Elle n'est pas peut-être évidente pour les élèves. L'action correspondante dans Casyopée est l'exportation d'une fonction dans la fenêtre symbolique, après avoir validé une variable.

Aspects instrumentaux relatifs à la tâche 3 :

- Rétroactions : il y aura un feedback s'il y a un mauvais choix de variable ; le feedback sur la structure de l'expression algébrique d'une fonction exportée.
- Difficultés : il faut savoir où sont les boutons « *Choisir une variable* » et « *Exporter une fonction* » ; l'adaptation aux feedbacks de Casyopée.

Tâche 4. Recherche de l'aire maximale (*Quelle démarche vous allez faire*?)

Après l'exportation de la fonction dans la fenêtre symbolique, les élèves obtiennent une expression algébrique plus ou moins complexe reflétant la structure de calcul. Cette tâche vise à explorer comment les élèves résolvent le problème d'optimisation d'une fonction de deuxième degré. Il y a ici plusieurs possibilités :

- Les élèves peuvent développer (en papier/crayon ou par l'instanciation des paramètres) l'expression algébrique afin d'obtenir une fonction quadratique, puis appliquer des connaissances sur des trinômes de deuxième degré pour trouver le maximum.

- Ils peuvent faire apparaître le graphe grâce à Casyopée puis lire les coordonnées du sommet sur le graphe.

Ils peuvent développer cette expression pour reconnaître une fonction de deuxième degré et puis appliquer leurs connaissances sur des trinômes de deuxième degré afin de trouver le maximum. Ils peuvent également utiliser la représentation graphique dans ce registre pour explorer la courbe et des valeurs maximales. Cette activité mathématique permet de considérer des productions et des transformations de représentations sémiotiques comme traitements et conversions. Par exemple, après l'obtention de l'expression algébrique, les élèves pourraient utiliser des connaissances sur des trinômes de deuxième degré ou sur la dérivée pour trouver le maximum (traitement), ou bien utiliser le graphe (conversion du registre symbolique vers le registre graphique).

Tâche 5. Retour sur la fenêtre géométrique

L'objectif de la tâche est de visualiser la réponse dans la fenêtre de géométrie dynamique. Il est demandé aux élèves de basculer vers la géométrie et repérer la position trouvée du point M. La réalisation de cette tâche encourage un changement du cadre algébrique vers le cadre géométrique et donc peut aider les élèves à acquérir une compréhension profonde.

d. Synthèse des observations

i). Le cas du binôme Elina-Chloé

- **Construction de la figure :**

Dans le fichier *figinit.CAS*, le carré *OABC* et le paramètre *a* ont été créés. Elina propose très vite de construire le segment *OB* et le point *M*. Chloé souligne que *M* est un point libre sur *OB*.

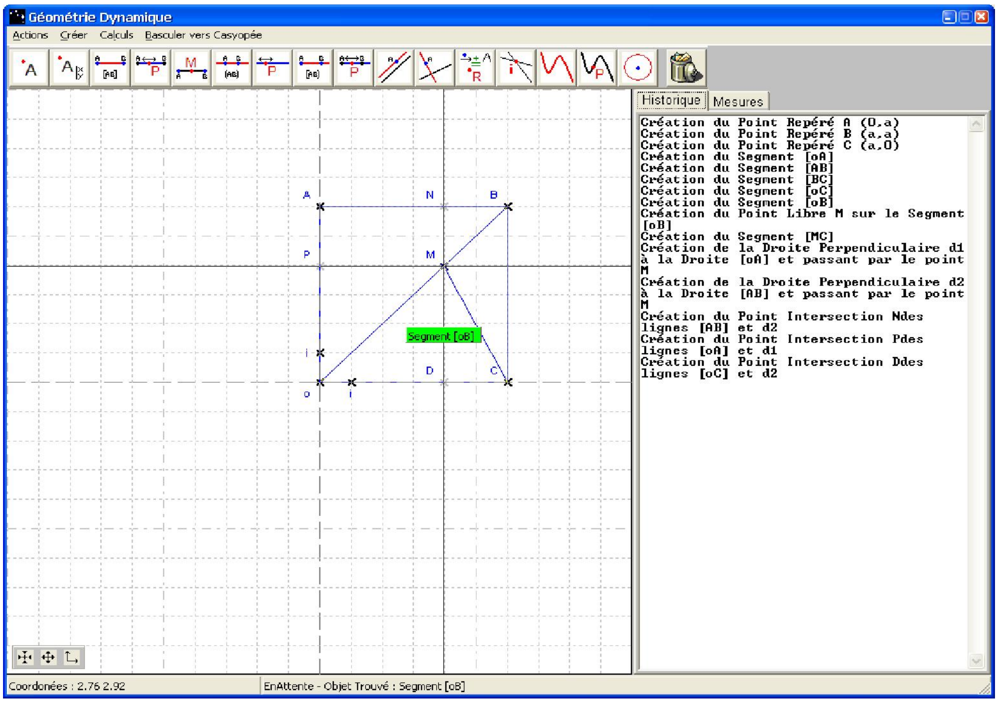


Figure 6.10. Une construction géométrique

Elina propose ensuite de créer le segment *MC*. Elle dit qu'il faut d'abord créer le triangle *OMC*. Ensuite, Chloé fait bouger le point *M*. Elle clique sur le bouton « Créer une droite perpendiculaire » et puis crée une droite perpendiculaire à *AB*, passant par *M* et une droite perpendiculaire à *OA*, passant par *M*. Les deux droites perpendiculaires ont été facilement construites. Ensuite, Cholé crée les intersections *N*, *P* et bouge le point *M*. Elle dit « c'est bon » en regardant l'écran. Cholé suggère de créer une hauteur et puis la construit immédiatement.

- **Explorations et conjectures :**

8mn : Parcourir dans le menu « Calculs » et hésiter.

10mn : Elles remarquent que la partie colorée est la somme des aires de deux figures. Ensuite, elles sélectionnent le bouton « Créer un calcul » puis créent le calcul *(AN.NM)+(oC.MD)/2*.

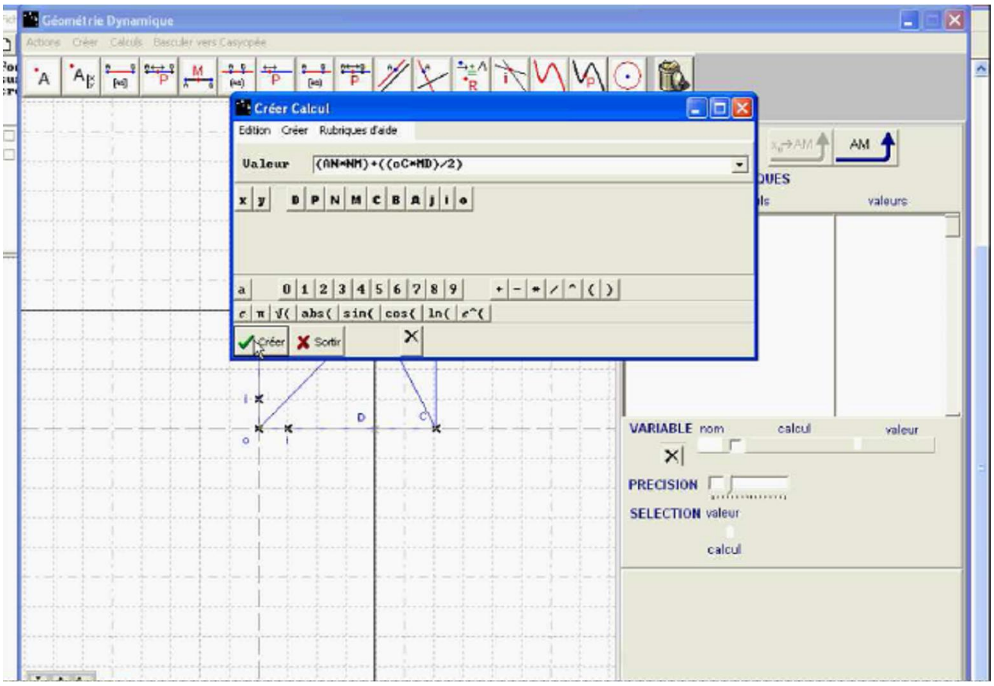
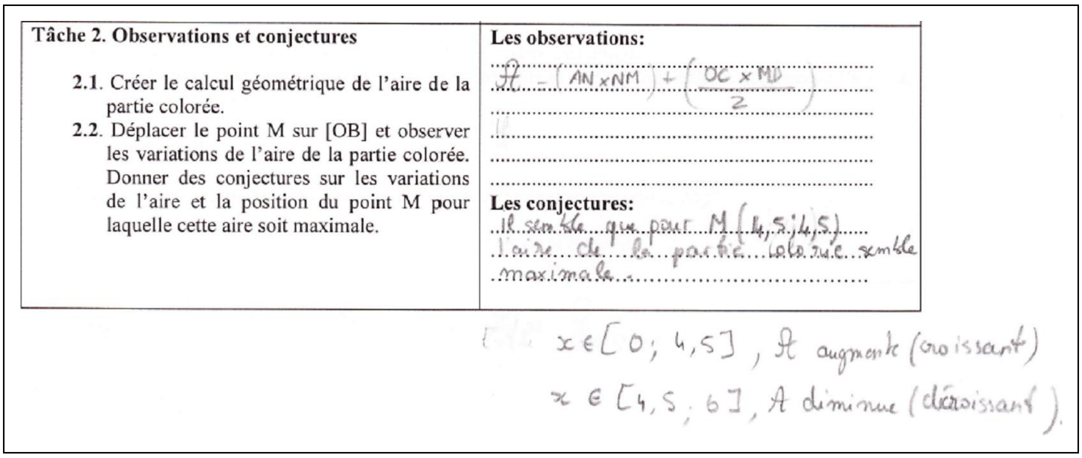


Figure 6.11. Création d'un calcul géométrique

12mn : Elles bougent très attentivement le point *M* en observant les variations de la valeur de l'aire puis s'arrêtent à la position pour laquelle la valeur de l'aire atteint *20.021*.

Ensuite, Chloé a conjecturé que lorsque le point *M* admet les coordonnées $(4{,}5;4{,}5)$ l'aire soit maximale. C'est une conjecture exacte (ici le paramètre $a=6$, $x_M=\frac{3a}{4}=4.5$).

Elle continue à faire bouger très attentivement le point *M* de *O* à *B* et remarque que la valeur de l'aire est d'abord croissante dans l'intervalle $[0;4.5]$ puis décroissante :



Tâche 2. Observations et conjectures	Les observations:
2.1. Créer le calcul géométrique de l'aire de la partie colorée. 2.2. Déplacer le point M sur [OB] et observer les variations de l'aire de la partie colorée. Donner des conjectures sur les variations de l'aire et la position du point M pour laquelle cette aire soit maximale.	$\mathcal{A} = (AN \times NM) + \left(\frac{OC \times MD}{2}\right)$ **Les conjectures:** Il semble que pour M(4,5;4,5) l'aire de la partie colorée semble maximale.

$x \in [0;4,5]$, $\mathcal{A}$ augmente (croissant)

$x \in [4,5;6]$, $\mathcal{A}$ diminue (décroissant).

Figure 6.12. Une conjecture correcte sur la solution du problème

- **Modélisation fonctionnelle :**

Les élèves ont hésité dans le choix de variable et elles ont eu besoin d'intervention. L'observateur leur a suggéré qu'il était nécessaire de choisir une variable adéquate.

18mn : Elles ont choisi le bouton « Choisir une variable ». Elles ont pris d'abord la distance *ND* comme variable. Casyopée ne l'accepte pas en fournissant le feedback : « La variable dépend de aucun point libre ». Les élèves reviennent sur le déplacement du point libre *M*.

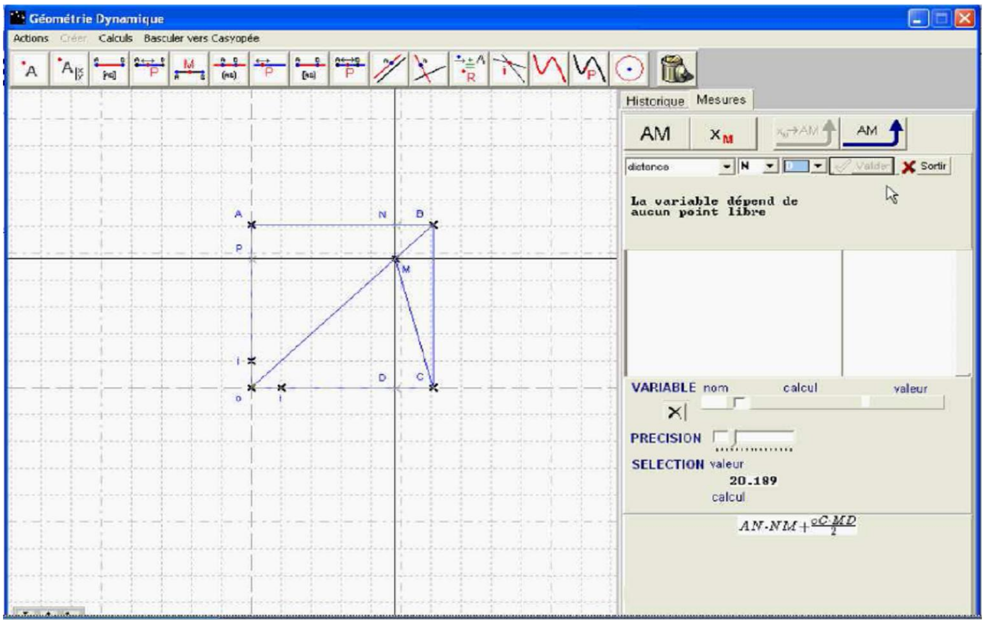


Figure 6.13. Un choix de la variable

19mn : Elles choisissent la variable *MD*. Casyopée l'accepte en fournissant le feedback : « La variable dépend de *M*. Elle est définie sur *[0 ;a]* ». Elles valident cette variable (20mn).

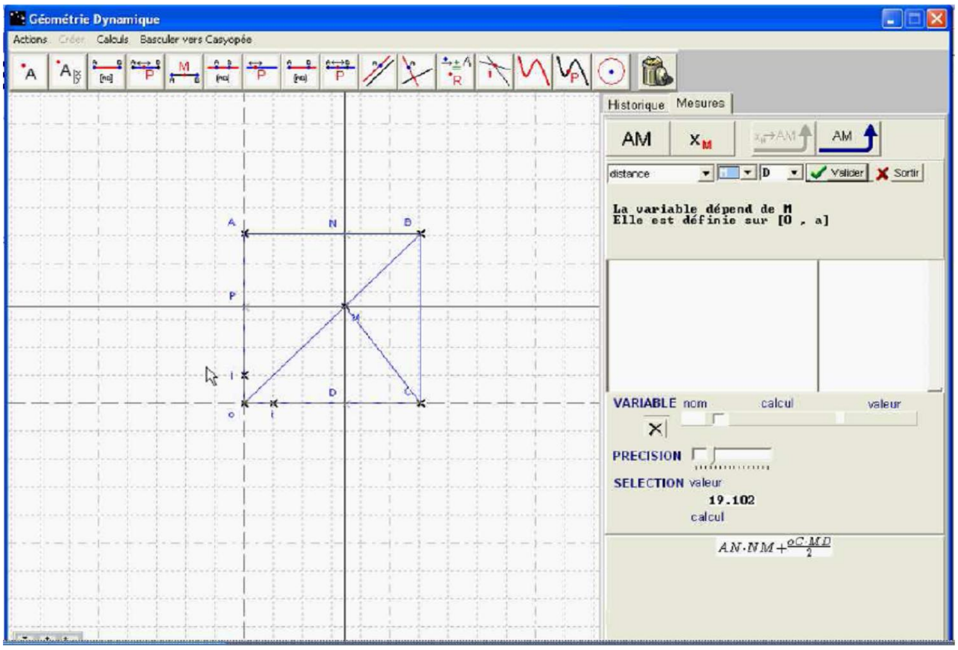


Figure 6.14

Ensuite, elles passent à la fenêtre algébrique puis reviennent dans la fenêtre géométrique. Elles cherchent à exporter la fonction dans la fenêtre algébrique mais elles ne savent pas comment le réaliser. Elles ont du mal à manipuler l'interface de Casyopée.

24mn : Elles choisissent le menu « Créer une nouvelle fonction » et trouvent que ce n'est pas le cas pour l'exportation d'une fonction. Ensuite, elles passent à choisir le bouton « Exporter une expression ». Casyopée le refuse en donnant le feedback : « Impossible d'exporter l'expression demandée. Le point *M* est un point libre ».

25mn : Elles suppriment la variable *MD* et choisissent la variable *OD*. Elles la valident puis passent à choisir le bouton « Exporter une fonction ». Casyopée accepte cette demande :

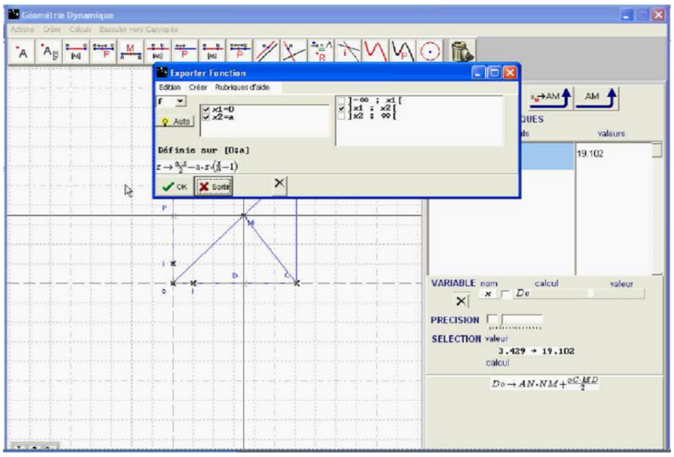
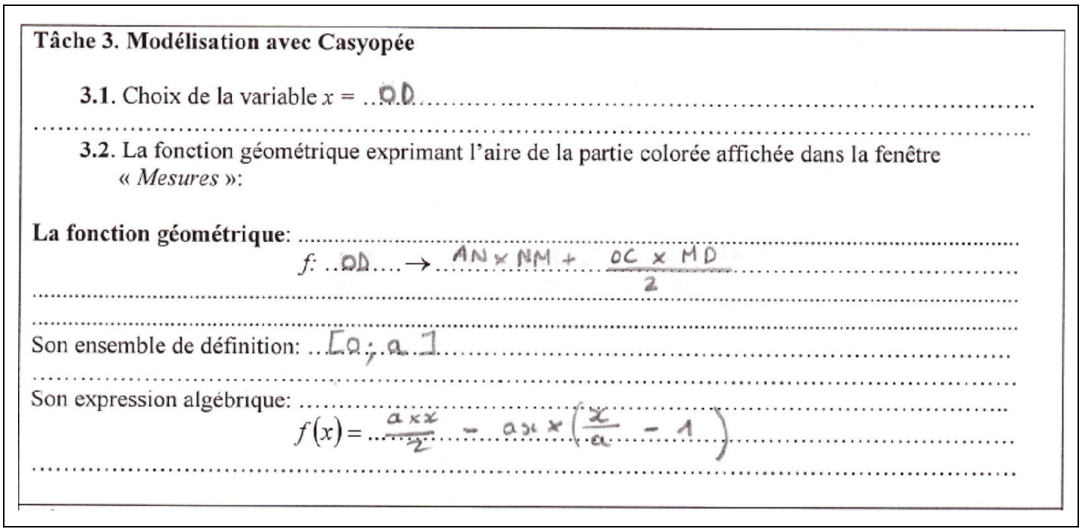


Figure 6.15. Exportation d'une fonction

Finalement, elles obtiennent l'expression de la fonction exportée :



Tâche 3. Modélisation avec Casyopée

3.1. Choix de la variable x = OD

3.2. La fonction géométrique exprimant l'aire de la partie colorée affichée dans la fenêtre « *Mesures* »:

La fonction géométrique:

f: OD → AN × NM + $\frac{OC \times MD}{2}$

Son ensemble de définition: [0 ; a]

Son expression algébrique:

$f(x) = \frac{a \times x}{2} - a \times x \left(\frac{x}{a} - 1\right)$

Figure 6.16

- **Preuve algébrique :**

27mn : Elles font apparaître le tracé graphique de la fonction exportée. Ensuite, elles font le cadrage du graphe (une partie d'une parabole) jusqu'à ce qu'il soit très visible. Elles pointent également le curseur sur le tracé graphique afin de faire apparaître les coordonnées d'un point mobile correspondant au point libre *M* sur la figure géométrique.

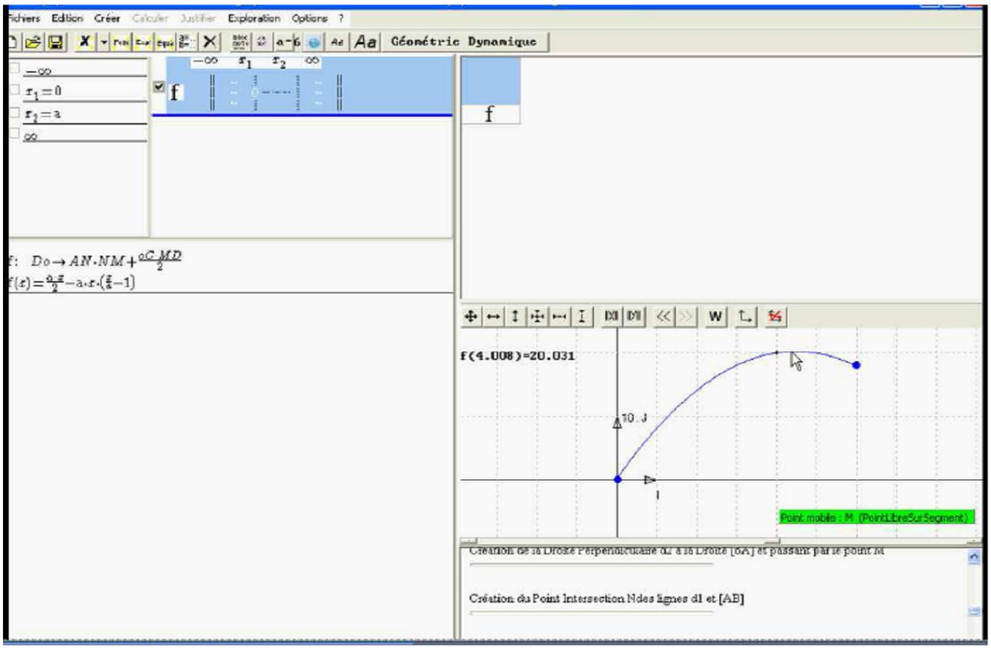


Figure 6.17. Une exploration graphique

Ensuite, elles se discutent pour chercher une preuve algébrique. Leur stratégie vise à construire un tableau de variation de la fonction :

Chloé :	*C'est la fonction qui décrit l'abscisse correspondant à celle du point M.*
Elina :	*Oui. Et l'aire maximale est l'abscisse du point M.*
Observateur :	*Comment trouverez-vous son abscisse ?*
Chloé :	*En lisant sur le graphe, la lecture graphique.*
Observateur :	*Mais ce n'est pas une démonstration.*
Chloé :	*On va trouver une équation ?*
Observateur :	*Là, c'est une fonction de second degré. Comment trouverez-vous son maximum ?*
Elina :	*Ah oui, on va calculer le delta avec* x_1, x_2.
Chloé :	*Oui*
Elina :	*Mais non, quand utilises-tu les variations ?*
Chloé :	*Ah oui, si c'est la dérivée : un tableau de signes, et après le signe de la dérivée, on voit la croissance, décroissance et les extremums.*
Elina :	*Oui, mais est-ce que l'on peut faire ça avec Casyopée ?*
Chloé :	*C'est la dérivée* {elle parcourt dans les menus de Casyopée}.

Cet échange indique une « négociation » sur une preuve algébrique du problème entre ces deux élèves. La fonction est considérée ici comme modèle de description de l'abscisse du point libre *M*. Le binôme a exploré d'abord le tracé graphique comme un moyen d'afficher la valeur maximale de l'aire. La stratégie de preuve est orientée par elles-mêmes vers l'usage de l'outil « Dérivée » de Casyopée après leur échange. Ensuite, les élèves sont passées au registre symbolique et ont utilisé les fonctionnalités de Casyopée pour calculer la dérivée ainsi que son zéro.

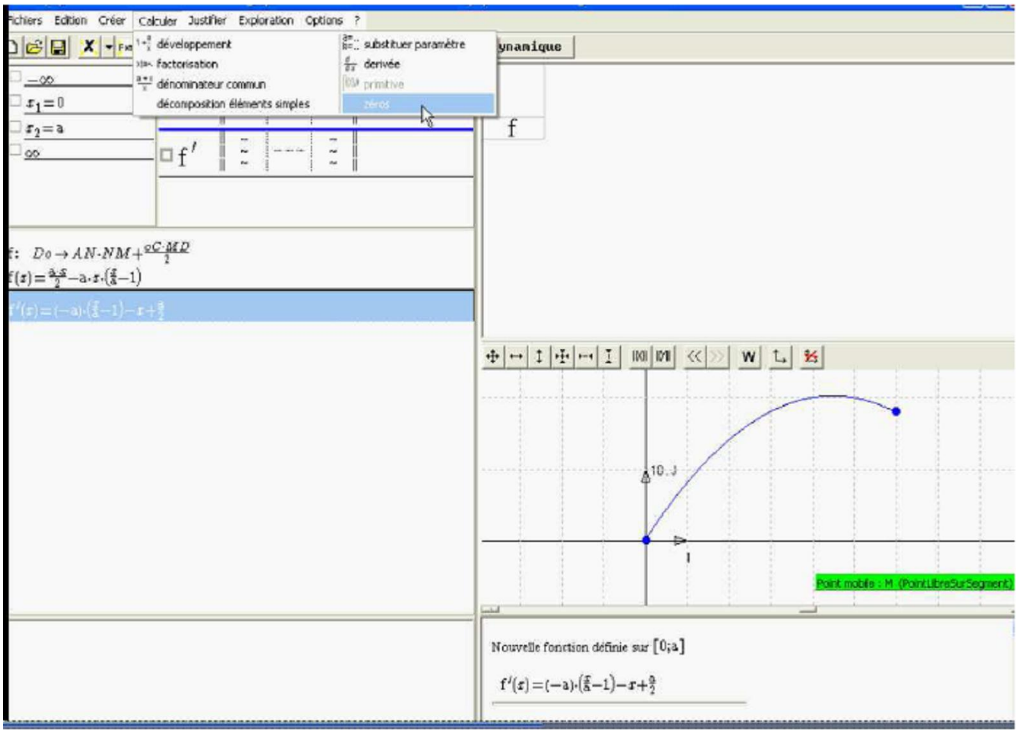
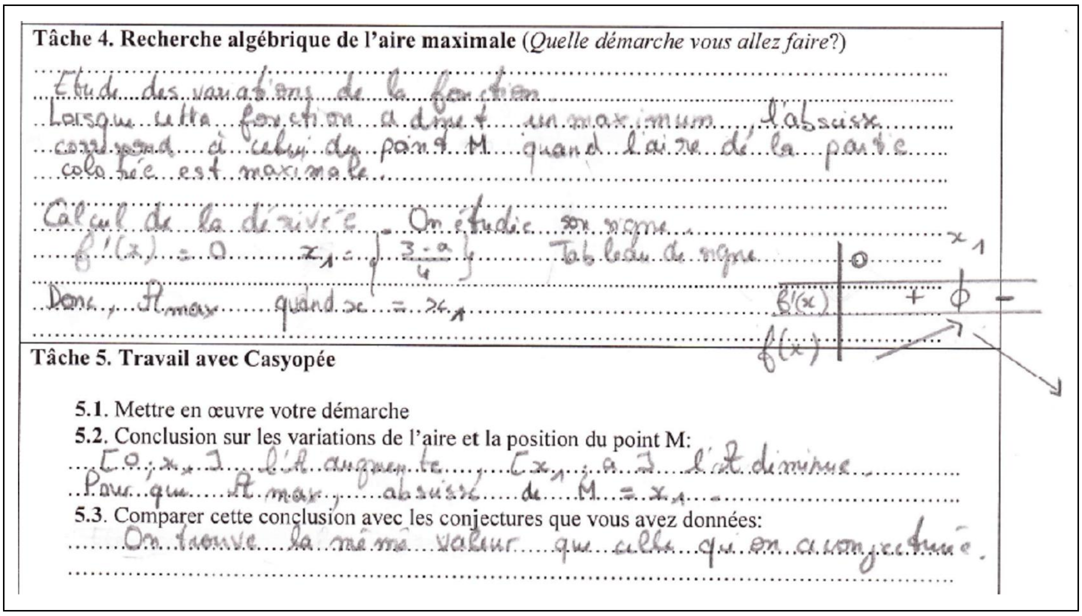


Figure 6.18

Cependant, la reconnaissance d'une fonction de second degré a nécessité une intervention de l'observateur. Dans leur production écrite, elles ont indiqué une solution générale avec le paramètre :



Tâche 4. Recherche algébrique de l'aire maximale (*Quelle démarche vous allez faire*?)

Etude des variations de la fonction
Lorsque cette fonction admet un maximum, l'absisse correspond à celui du point M quand l'aire de la partie colorée est maximale.

Calcul de la dérivée. On étudie son signe.
$f'(x) = 0 \quad x_1 = \left\{\frac{3a}{4}\right\}$ Tableau de signe
Donc, $\mathcal{A}_{max}$ quand $x = x_1$

Tâche 5. Travail avec Casyopée

5.1. Mettre en œuvre votre démarche
5.2. Conclusion sur les variations de l'aire et la position du point M:
$[0; x_1]$ l'$\mathcal{A}$ augmente, $[x_1; a]$ l'$\mathcal{A}$ diminue.
Pour que $\mathcal{A}$ max, absisse de $M = x_1$.
5.3. Comparer cette conclusion avec les conjectures que vous avez données:
On trouve la même valeur que celle qu'on a conjecturé.

Figure 6.19. Une preuve algébrique

9mn : Les élèves sont revenus dans la fenêtre géométrique et visualisent la réponse.

ii). Autres élèves

En considérant les productions écrites des autres binômes, nous trouvons que la plupart d'entre eux créent correctement un calcul géométrique de l'aire (10 sur 12 binômes). Il existe deux binômes qui ne le font pas. Les variables choisies sont assez variées : *OM* (4 binômes), x_M (3 binômes), *OP* (2 binômes), *OD* (1 binôme), *PM* (1 binôme). En particulier, il n'y a que cinq binômes (5 sur 12) qui réussissent à faire une preuve algébrique avec le paramètre. Nous faisons une synthèse dans le tableau suivant :

	Calcul géométrique	**Variable**	**Domaine**	**Expression algébrique**	**Preuve algébrique**
Elina-Chloé	$AN \times NM + \frac{OC \times MD}{2}$	OD	$[0; a]$	$\frac{ax}{2} - ax(\frac{x}{a} - 1)$	Dérivation. Avec succès, $x = \frac{3a}{4}$.
Jennifer	$\frac{OC \times MD}{2} + AN.NM$	OM	$[0; a\sqrt{2}]$	$f(x) = \frac{ax}{2\sqrt{2}} - \frac{ax(\frac{x}{a\sqrt{2}} - 1)}{\sqrt{2}}$	Dérivation. Avec succès, $x = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$.
Pauline	$AN \times AP + \frac{OC \times MD}{2}$	x_M	$[0; a]$	$f(x) = \frac{x(2(x-a)+a)}{2}$	Non *Expression incorrecte*
Amandine	$AN \times AP + \frac{OC \times MD}{2}$	x_M	$[0; a]$	$ax(\frac{x}{a} - 1) + \frac{ax}{2}$	Non *Expression incorrecte*
Ervan	Non	Non	Non	Non	Non
Karl	$\frac{OC \times OP}{2} + AP \times AN$	OM	$[0; a\sqrt{2}]$	$f(x) = \frac{ax}{2\sqrt{2}} - \frac{ax(\frac{x}{a\sqrt{2}} - 1)}{\sqrt{2}}$	Dérivation. Avec succès, $x = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$
Damien	$\frac{OC \times OP}{2} + AP \times AN$	OM	$[0; a\sqrt{2}]$	$f(x) = \frac{ax}{2\sqrt{2}} - \frac{ax(\frac{x}{a\sqrt{2}} - 1)}{\sqrt{2}}$	Dérivation, sans succès
Garcia	$\frac{OC \times OP}{2} + AP \times AN$	OM	$[0; a\sqrt{2}]$	$f(x) = \frac{-x(x - \frac{3a}{\sqrt{2}})}{2}$	Non
Kevin	Non	PM	Non	Non	Non
Cindy	$\frac{OC \times OP}{2} + AP \times AN$	x_M	$[0; a]$	$f(x) = \frac{ax}{2} - ax(\frac{x}{a} - 1)$	Non *Expression incorrecte*
Vincent	$\frac{OC \times OP}{2} + AP \times AN$	OP	$[0; a]$	$\frac{3ax}{2} - x^2$	Dérivation. Avec succès. $x = \frac{3a}{4}$.
Charlotte	$\frac{OC \times OP}{2} + AP \times AN$	OP	$[0; a]$	$\frac{3ax}{2} - x^2$	Dérivation. Avec succès. $x = \frac{3a}{4}$.

Tableau 6.1 Résultats des binômes

e. Remarques et conclusions sur la séance C1

L'itinéraire du binôme Elina-Chloé :

1. Registre enactif-iconique-grandeurs

- Création du calcul géométrique $AN \times NM + \frac{OC \times MD}{2}$
- Explorations quantitatives et aussi qualitatives de l'aire
- Conjecture exacte sur la position du point libre M et la variation de l'aire
- Besoin d'aides pour adapter les feedbacks de Casyopée sur le choix d'une variable appropriée.

2. Registre graphique

- Création du graphe de la fonction et faire le cadrage
- Explorations locales du tracé graphique

3. Registre symbolique

- Besoin d'aides pour reconnaître une fonction de second degré
- Travail en papier/crayon sur la preuve. Utilisation de la dérivation.
- Travail avec le paramètre
- Retour dans le registre enactif-iconique-grandeurs pour interpréter la solution.

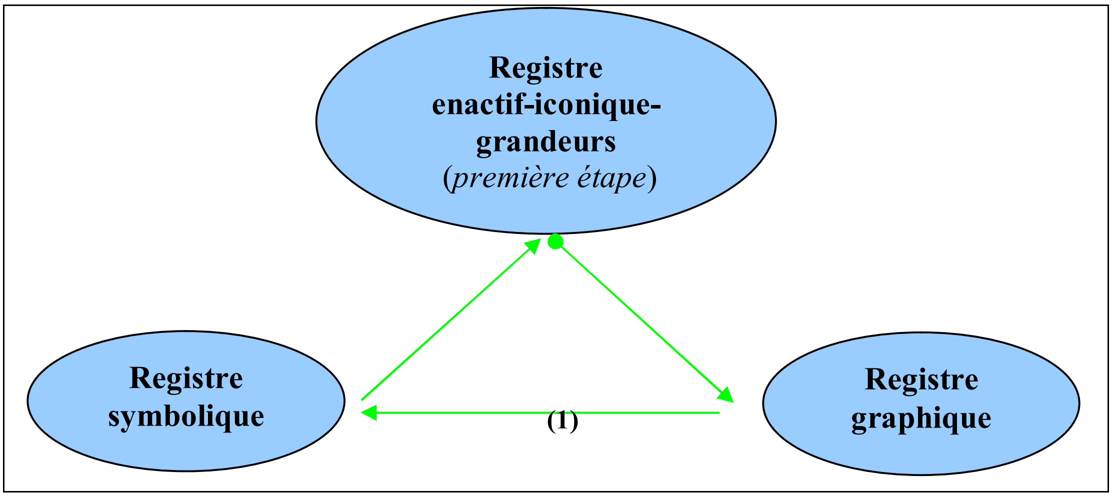


Figure 6.20. Itinéraire du binôme Elina-Chloé[12]

Le binôme Elina-Chloé travaillait en autonomie pour la construction de la figure. Quelques interventions de l'observateur sont négligeables. La modélisation fonctionnelle a témoigné en

[12] L'itinéraire démarre à partir du registre enactif-iconique-grandeurs

premier temps d'une difficulté d'ordre instrumentale. Il s'agit de l'ordre de deux actions : créer un calcul et choisir une variable. La création d'un calcul géométrique de l'aire ne leur pose pas de problèmes. Les activités enactive-iconiques leur ont permis d'explorer les variations de l'aire et d'émettre les conjectures.

Le passage des co-variations vers la modélisation fonctionnelle (l'action de choisir une variable) demande des interventions de l'observateur. Les feedbacks de Casyopée leur ont permis de choisir une variable appropriée. Le binôme a eu du mal à exporter la fonction dans la fenêtre algébrique. Ils n'ont pas pu distinguer les fonctionnalités de Casyopée comme « Créer une nouvelle fonction », « Exporter une expression », et « Exporter une fonction ».

Le registre graphique est prioritaire pour des explorations locales du tracé graphique. Le passage du registre graphique vers le registre symbolique est assez spontané. Ce binôme a exploité la fonctionnalité de dérivée de Casyopée pour aider leur preuve algébrique.

6.4.2 Séance C2 : Une situation plus complexe

a. Contexte et objectifs

Cette deuxième séance s'est déroulée au mois de novembre 2008. Elle a pour objectif d'approfondir l'exploitation des potentialités de Casyopée pour résoudre un problème d'optimisation géométrique plus complexe. Il s'agissait d'approcher les fonctions de troisième degré via l'étude de l'aire maximale d'un triangle rectangle. Nous avons présenté ce problème dans le chapitre 4. La fonction modélisant la dépendance a des propriétés différentes selon les valeurs d'un paramètre. Par exemple, si on choisit la variable $x = OM$, $x \in [0;10]$ l'expression de la fonction modélisant la dépendance entre cette distance *oM* et l'aire du triangle *IMN* sera :

$$f : OM \to \frac{IM.MN}{2}$$

$$f(x) = -\frac{5\left(\frac{x}{10} - 1\right)\left(x^2 + a^2\right)}{a}$$

Quatre cas qui se présentent :

1). $0 < a < 5$:

La fonction $f(x)$ admet deux extrémums dans l'intervalle ouvert $(0;10)$ (un minimum local $x_1 = \frac{10 - \sqrt{100 - 3a^2}}{3}$ et un maximum local $x_2 = \frac{10 + \sqrt{100 - 3a^2}}{3}$). Dans ce cas, la fonction $f(x)$ atteint sa valeur maximale lorsque $x = x_2 = \frac{10 + \sqrt{100 - 3a^2}}{3}$, c'est-à-dire que l'aire du triangle *IMN* est maximale lorsque *M* a pour coordonnées $M(\frac{10 + \sqrt{100 - 3a^2}}{3};0)$.

La figure du problème et le graphe de la fonction pour ce cas sont trouvées dans la figure 6.21.

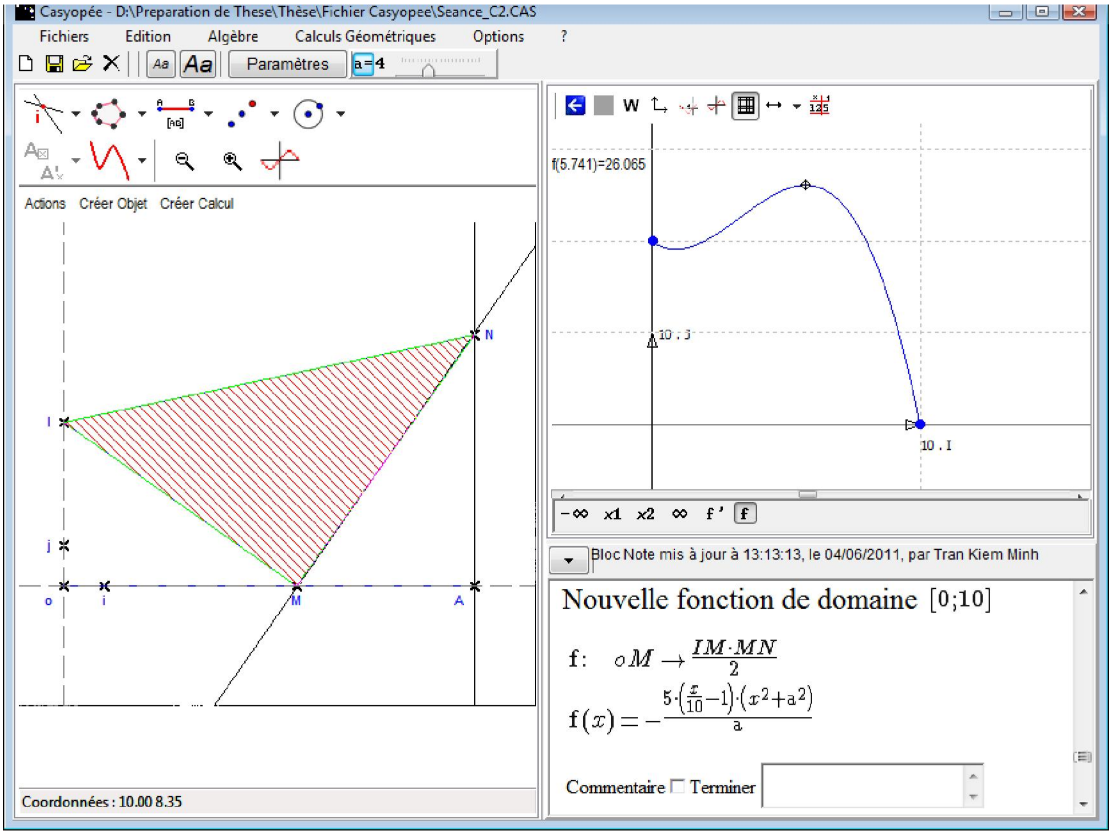


Figure 6. 21. La figure du problème et le graphe de la fonction pour un cas $0 < a < 5$

2). $a = 5$:

La fonction $f(x)$ admet deux extrémums dans l'intervalle ouvert $(0;10)$ (un minimum local $x_1 = \dfrac{10 - \sqrt{100 - 3a^2}}{3} = \dfrac{5}{3}$ et un maximum local $x_2 = \dfrac{10 + \sqrt{100 - 3a^2}}{3} = 5$). Dans ce cas, la fonction $f(x)$ atteint sa valeur maximale *25* lorsque $x = x_o = 0$ ou $x = x_2 = \dfrac{10 + \sqrt{100 - 3a^2}}{3} = 5$, c'est-à-dire que l'aire du triangle *IMN* est maximale lorsque $M \equiv O$ (*O* est l'origine) ou M est le milieu du segment $[OA]$.

La figure du problème et le graphe de la fonction pour ce cas sont trouvées dans la figure 6.22.

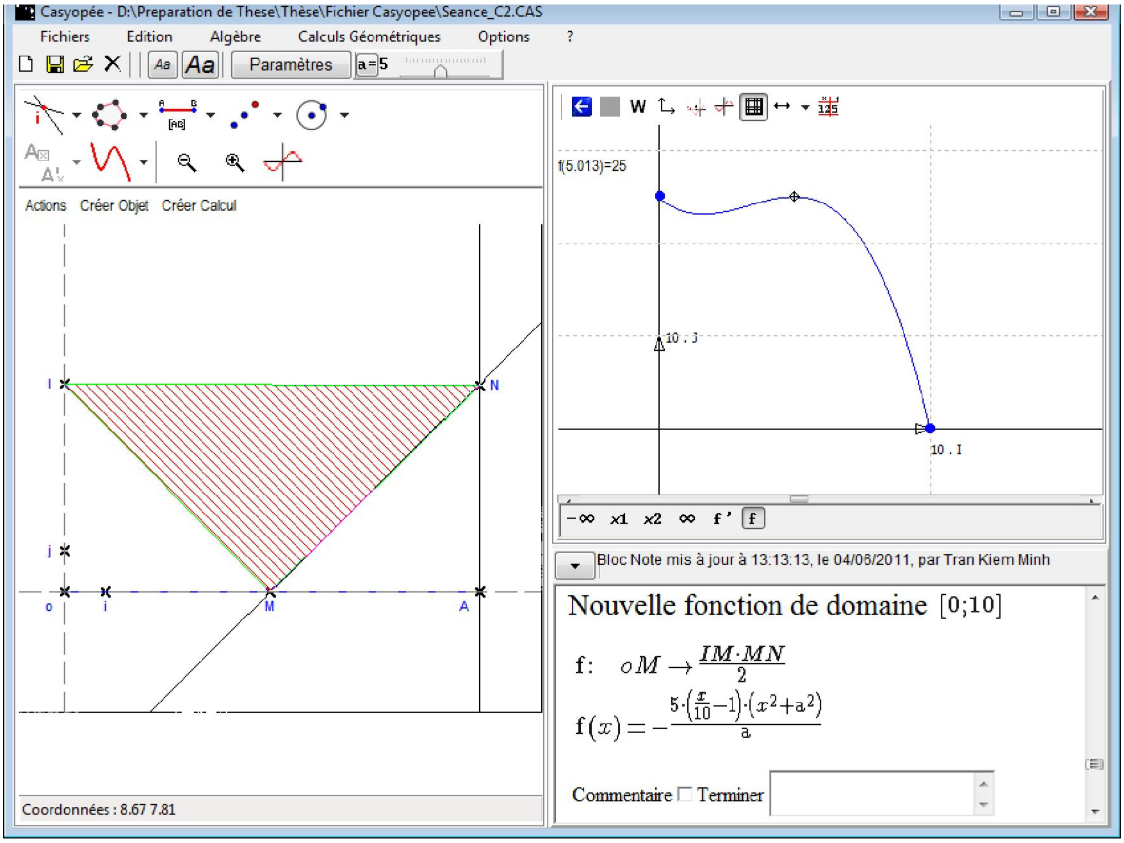


Figure 6.22. La figure du problème et le graphe de la fonction pour le cas $a = 5$

3). $5 < a < \dfrac{10}{\sqrt{3}}$:

La fonction $f(x)$ admet deux extrémums dans l'intervalle ouvert $(0;10)$ (un minimum local $x_1 = \dfrac{10 - \sqrt{100 - 3a^2}}{3}$ et un maximum local $x_2 = \dfrac{10 + \sqrt{100 - 3a^2}}{3}$). Dans ce cas, la fonction $f(x)$ atteint sa valeur maximale $5a$ lorsque $x = 0$, c'est-à-dire que l'aire du triangle *IMN* est maximale lorsque $M \equiv O$.

La figure du problème et le graphe de la fonction pour ce cas sont trouvées dans la figure 6.23.

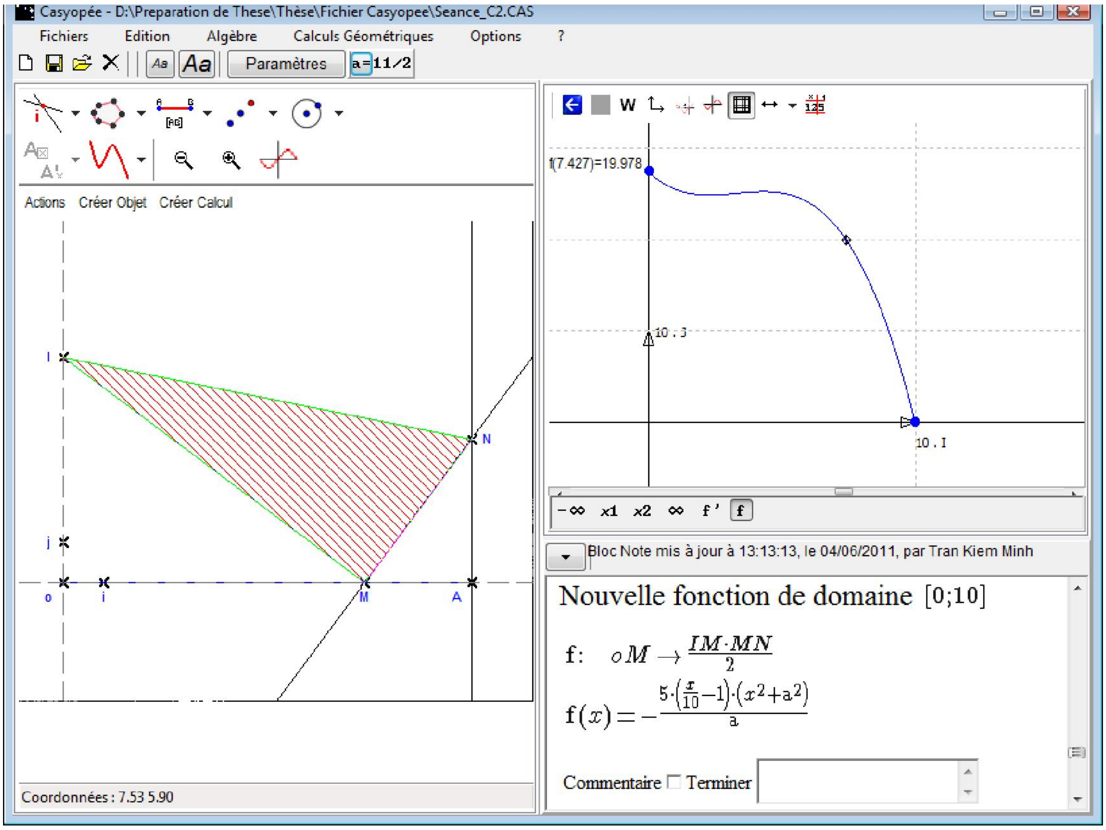


Figure 6. 23. La figure du problème et le graphe de la fonction pour un cas $5 < a < \dfrac{10}{\sqrt{3}}$

4). $a \geq \dfrac{10}{\sqrt{3}}$:

La fonction $f(x)$ est décroissante sur l'intervalle ouvert $(0;10)$ et n'admet aucun extrémum dans cet intervalle. Dans ce cas, la fonction $f(x)$ atteint sa valeur maximale *5a* lorsque $x = 0$, c'est-à-dire que l'aire du triangle *IMN* est maximale lorsque $M \equiv O$.

La figure du problème et le graphe de la fonction pour ce cas sont trouvées dans la figure 6.24.

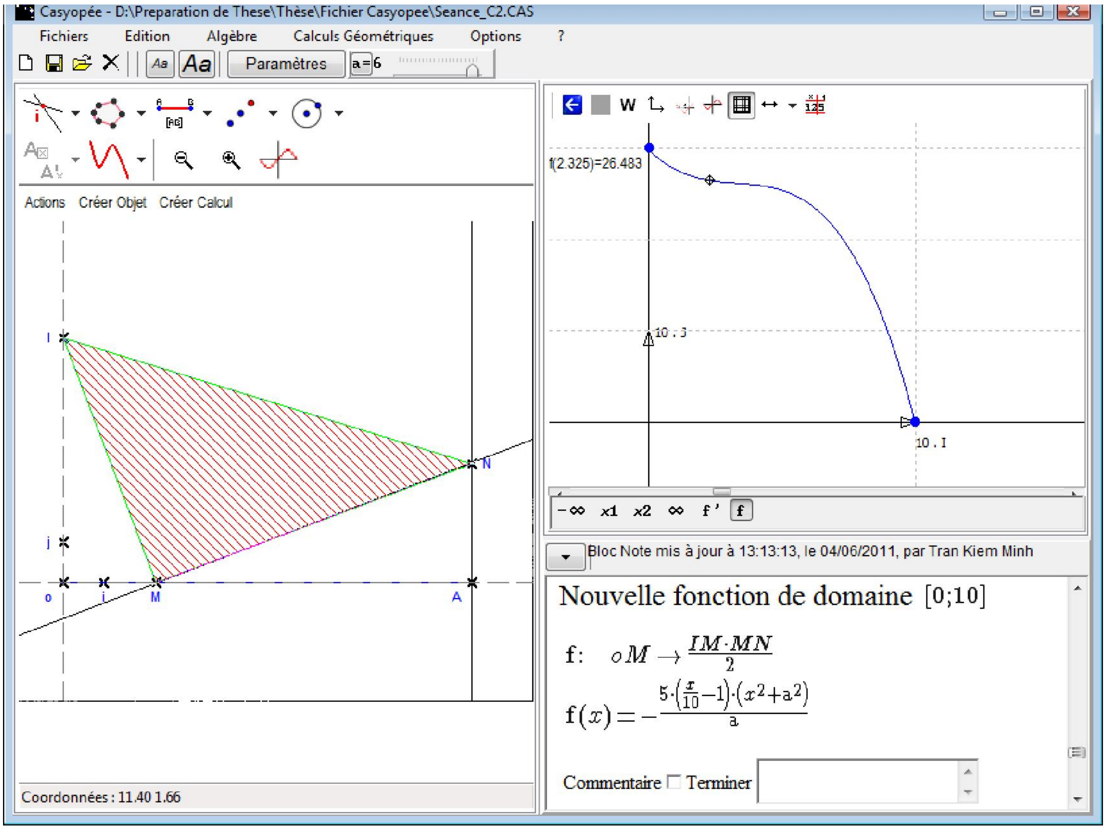


Figure 6. 24. La figure du problème et le graphe de la fonction pour un cas $a \geq \dfrac{10}{\sqrt{3}}$

Dans la tâche demandée aux élèves, nous n'envisageons pas tous les cas, ce qui donnerait une étude trop complexe. Nous nous limitons au cas *a=5* qui donne une configuration intéressante à analyser pour une valeur donnée, puis au cas $a \geq \dfrac{10}{\sqrt{3}}$ qui conduit à mobiliser des outils algébriques.

b. Fiche élève

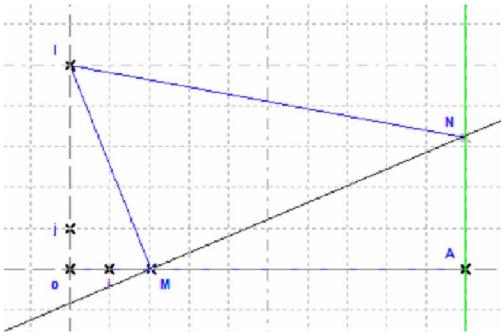
La fiche est présentée dans la page suivante. La structure de la fiche élève est identique à la précédente :

Classe: Terminale S Date: 14 novembre 2008
Lycée: Maupertuis
Nom et prénom:

Une aire d'un triangle rectangle

Soit *a* un paramètre positif.
Dans un repère orthonormé de centre *O*, on construit les points *A(10;0), I(0 ;a)* et la parallèle à l'axe *Oy* passant par *A*. *M* est un point libre sur le segment *[OA]*. On construit le triangle *IMN rectangle* en M, avec *N* appartenant à la parallèle.

a. Déplacer le point *M* sur *[OA]* et observer les variations de l'aire du triangle *IMN*. Donner une conjecture sur ces variations.
b. Existe-il une position du point *M* sur *[OA]* telle que cette aire soit maximale? Justifier?



1. Phase 1: Etudes pour le cas *a = 5*

Tâche 1. Construction de la figure	
Tâche 2. Observations et conjectures **2.1**. Créer le calcul géométrique de l'aire du triangle rectangle *IMN*. **2.2**. Déplacer le point *M* sur *[OA]* et: - observer les variations de l'aire du triangle. - donner des conjectures sur les variations de l'aire et les positions du point *M* pour les quelles l'aire du triangle *IMN* soit maximale.	**Les observations:** .... **Les conjectures**: ....
Tâche 3. Modélisation avec Casyopée **3.1**. Choix d'une variable adéquate: x = ………………………………………………………….. **3.2**. La fonction géométrique exprimant l'aire du triangle *IMN* affichée dans la fenêtre « Mesures »: La fonction géométrique: *f* : ……….→………………………………………………………….	

.... Son ensemble de définition: .... Son expression algébrique: *f(x)* = ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………………………………………...
Tâche 4. Recherche algébrique de l'aire maximale (*Quelle démarche vous allez faire*?) …………………………………………………………………………………………………….. .... ……………………………………………………………………………………………………... …………………………………………………………………………………………………….. …………………………………………………………………………………………………….. …………………………………………………………………………………………………….. …………………………………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………………………………… .... …………………………………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………………………
Tâche 5. Travail avec Casyopée **5.1**. Mettre en œuvre votre démarche **5.2**. Conclusion sur les variations de l'aire et les positions du point *M*: …………………………………………………………………………………………………….. …………………………………………………………………………………………………….. **5.3**. Comparer cette conclusion avec les conjectures que vous avez données: …………………………………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………………………………… **Tâche 6. Visualiser la conclusion dans la fenêtre de géométrie dynamique.** **Tâche 7.** ***(Optionnel)*** **7.1**. Comment aurais-tu calculé en papier/crayon l'expression algébrique de *f*? **7.2**. Comment aurais-tu calculé sa dérivée et les zéros de la dérivée?

<u>2. Phase 2:</u>

a. Prendre le paramètre $a = 6$, puis faire une étude qualitative sur des variations de l'aire du triangle *IMN*. Donner une conjecture sur ces variations.

b. Dans le cas général, démontrer que pour chaque $a \in [\frac{10}{\sqrt{3}}; infini[$, l'aire du triangle est strictement décroissante quand on déplace *M* du point *O* au point *A*.

c. *Analyse a priori*

i). Tâches

La fiche élève comprend deux phases principales :

- Phase 1 : Il est demandé aux élèves de travailler sur le cas $a = 5$. Ils doivent créer le paramètre puis le piloter vers la valeur *5*. Dans ce cas, la fonction exprimant l'aire du triangle *IMN* sera un polynôme de troisième degré. Elle admet deux extrémums locaux dans l'intervalle ouvert $(0;10)$.

- Phase 2 : Les élèves explorent le problème avec le cas $a = 6$ où la fonction exprimant l'aire du triangle *IMN* sera un polynôme de troisième degré et strictement décroissante sur son intervalle de définition. Ensuite, ils travaillent sur le cas général du paramètre $a \in [\frac{10}{\sqrt{3}}; infini[$ afin de démontrer une propriété générale de l'aire.

Pour cette deuxième séance, il y a une évolution de la complexité des tâches mathématiques données aux élèves par rapport à la première séance :

- Explorer et faire des conjectures : les variations des valeurs de l'aire sont plus complexes. De plus, il y a deux positions possibles du point *M* pour lesquelles l'aire est maximale dans le cas *a=5*.

- Modéliser le problème : la fonction « exportée » dans la fenêtre algébrique est un polynôme de troisième degré tandis que pour la première séance, la fonction est un trinôme de second degré.

- Trouver le maximum : la preuve algébrique nécessite l'usage de la dérivée car la fonction est un polynôme cubique.

- Considérer la généralisation : la généralisation amène à une étude de cas selon les valeurs du paramètre.

Pour chaque tâche donnée, nous indiquons dans le tableau suivant une composante mathématique, une composante relative à Casyopée ainsi que des aides et des feedbacks fournies par Casyopée. Nous pensons que l'éclairage de ces composantes est important et nécessaire pour analyser les activités des élèves et comprendre les potentialités de Casyopée pour la résolution du problème.

Composante mathématique	**Composante relative à l'outil**	**Aides et rétroactions fournies par Casyopée**	**Spécificité des activités**
• Concevoir la figure	• Créer des objets géométriques, définir et piloter des paramètres	• Outils de géométrie dynamique ; « robustesse » de la construction	• Construction d'un triangle rectangle *IMN*.
• Explorer et faire des conjectures	• Bouger les objets géométriques libres	• Créer un « calcul géométrique »; affichage dynamique des valeurs numériques du calcul.	• Explorer la dépendance entre le point M et l'aire du triangle.
• Modéliser le problème	• Choisir une variable adéquate ; exporter une fonction dans le module symbolique	• Fonctionnalités : « choisir une variable » et « exporter une fonction » ; feedbacks sur le choix de variable ; calcul automatique de l'expression algébrique et du domaine de définition de la fonction exportée.	• Modéliser cette dépendance géométrique par une fonction mathématique.
• Faire une preuve algébrique	• Faire des transformations algébriques ; calculer la dérivée et trouver ses signes	• Fonctionnalités de calcul formel ; aider à trouver des signes ; visualiser le tracé graphique ; liens entre la représentation graphique et la géométrie dynamique.	• Chercher une preuve algébrique du problème à l'aide de Casyopée.
• Considérer la généralisation	• Travailler sur des paramètres	• Pilotage des paramètres.	• Explorer un autre cas du problème.
• Retourner dans le cadre géométrique.	• Visualiser la réponse dans la fenêtre géométrique	• Capacité de relier les deux modules ; liens entre la géométrie dynamique et la représentation graphique.	• Changer de cadres et de registres

Tableau 6.25. Composantes mathématiques, composantes relatives à l'outil, et rétroactions de Casyopée

ii). Etapes cruciales de la modélisation fonctionnelle

Construction de la figure :

Il est demandé aux élèves de construire le point libre *M* sur le segment *[OA]* puis le triangle *IMN* rectangle en *M*. La construction de la figure nécessite l'usage du menu « Droite perpendiculaire » de Casyopée. La distinction entre point libre, point semi-libre et point restreint pourrait être une difficulté pour des élèves.

Les explorations et les conjectures :

Les élèves peuvent créer un calcul géométrique exprimant l'aire du triangle, par exemple $\frac{1}{2} IM \times MN$ en cliquant sur le bouton « Créer un calcul » de Casyopée. Ensuite, ils peuvent explorer des co-variations entre grandeurs et mesures. Par exemple, les élèves peuvent observer la co-variation entre le point libre *M* et la valeur de l'aire. Ils peuvent également observer la co-variation entre une mesure concernant le point libre *M* et l'aire. Pour le cas $a = 5$, la variation de l'aire du triangle *IMN* est assez complexe. Lorsqu'ils déplacent le point *M* de l'origine *O* au point *A*, cette valeur diminue puis elle augmente jusqu'à la valeur maximale de *25* quand *M* est le milieu du segment *OA*. Finalement, elle diminue dans le reste. Notant que l'aire admet également une valeur maximale de *25* lorsque *M* coïncide avec l'origine *O*.

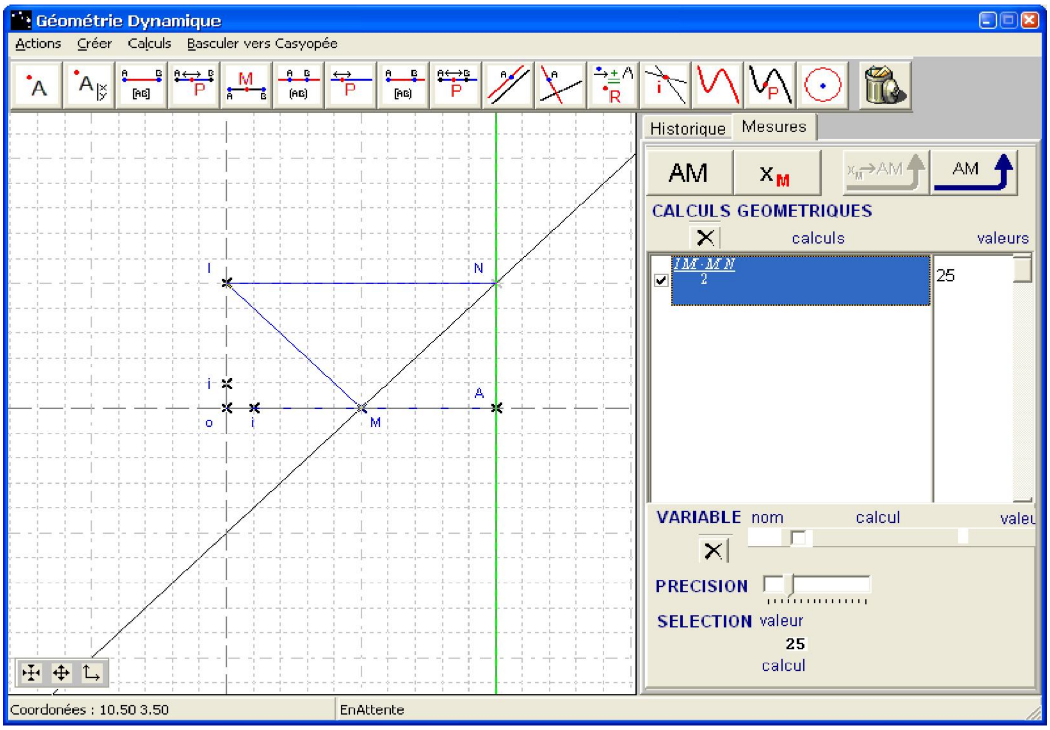


Figure. 6.26

Pour cette tâche, nous attendons des élèves des explorations enactive-iconiques des co-variations et des conjectures qualitatives sur la variation des valeurs de l'aire et sur les positions du point *M* pour lesquelles l'aire est maximale. Il est possible que quelques élèves restent longtemps à explorer des co-variations et aient besoin de médiation de l'enseignant afin de passer à la modélisation fonctionnelle. D'autres élèves peuvent avoir du mal à donner des conjectures car la fonction exprimant l'aire a deux extremums et atteint le maximum en deux positions différentes du point *M*.

Modélisation fonctionnelle :

La modélisation fonctionnelle des dépendances géométriques dans Casyopée est caractérisée par les actions de choisir une mesure comme variable et puis d'exporter la dépendance fonctionnelle obtenue. Le passage d'une co-variation à une dépendance fonctionnelle est une phase importante et très attendue chez les élèves, malgré le fait que cela ne soit pas facile pour quelques-uns. Il est possible qu'une aide de l'enseignant soit nécessaire pour ce passage. Les élèves peuvent choisir une variable adéquate parmi plusieurs choix possibles : la distance *OM*, l'abscisse du point *M*, la distance *AM*, … Casyopée fournira un feedback sur la validité de chaque choix de variable. Notons bien qu'un choix inadéquat de variable implique des conséquences sur la complexité de l'expression algébrique de la fonction exportée.

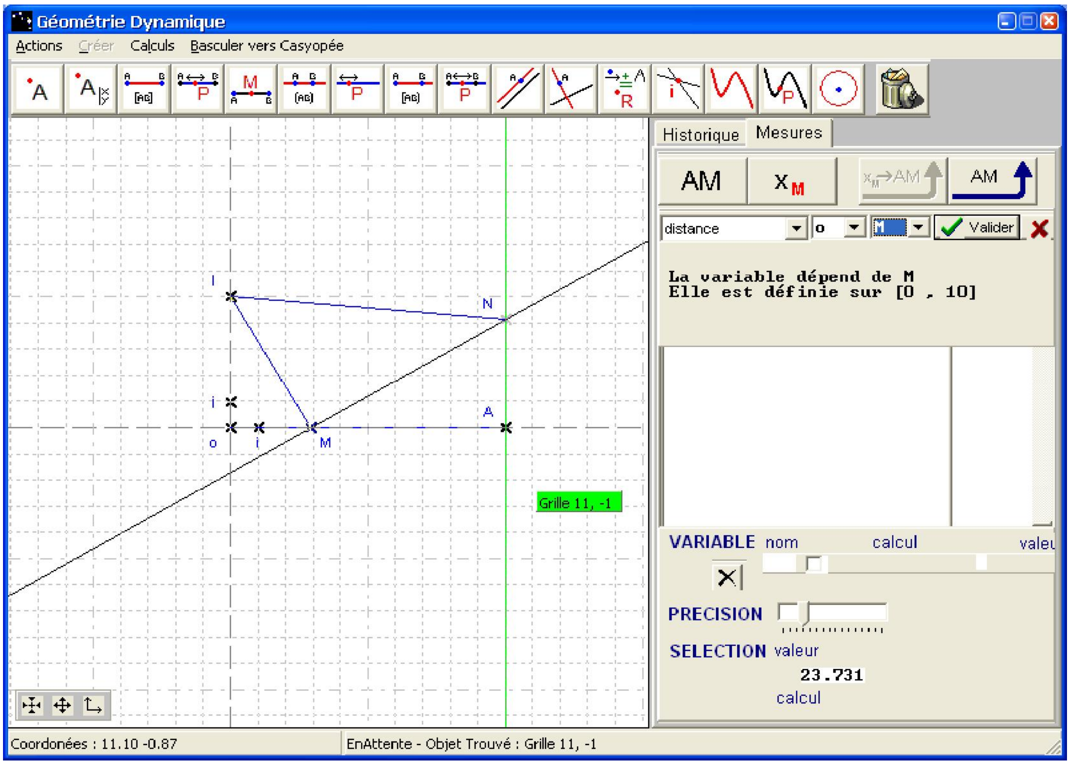


Figure 6.27

Ensuite, les élèves peuvent exporter la dépendance fonctionnelle dans la fenêtre symbolique pour obtenir son expression algébrique. Casyopée fournira un feedback indiquant l'intervalle de définition et l'expression de la fonction. Par exemple, avec le choix de la variable $x = OM$, une fonction exprimant l'aire du triangle *IMN* sera $f(x) = \dfrac{(-5)(\frac{x}{10}-1)(x^2+a^2)}{a}$.

Cette exportation correspond à un changement du cadre géométrique vers le cadre algébrique.

Preuve algébrique :

Dans le cadre algébrique, les élèves peuvent mobiliser différentes techniques et registres sémiotiques pour trouver une preuve algébrique. Ils peuvent utiliser le registre graphique pour compléter l'exploration des variations de l'aire et le maximum de la fonction. Ils peuvent également passer du registre graphique au registre symbolique pour réaliser des transformations algébriques.

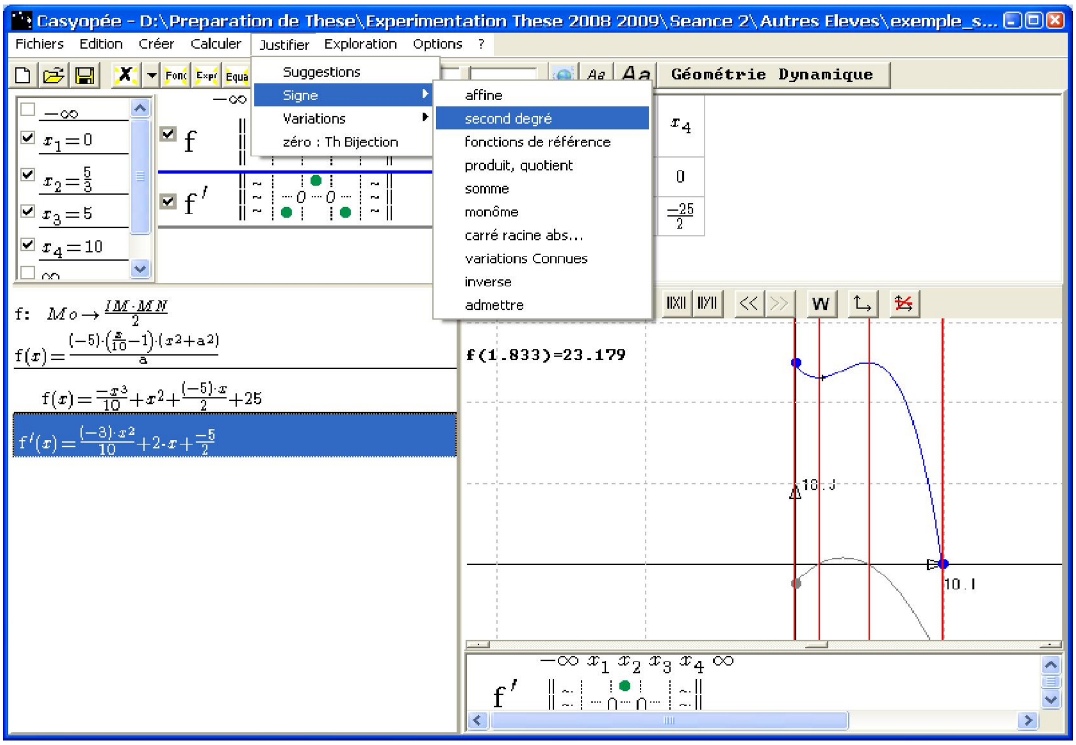


Figure 6.28

Casyopée permet de développer ou factoriser l'expression algébrique pour obtenir une expression algébrique plus simple. Casyopée permet aussi aux élèves de calculer la dérivée de la fonction et ses signes pour arriver à une preuve algébrique. Finalement, la visualisation de la réponse dans la fenêtre géométrique a pour but d'encourager un changement de cadre et aussi de valider la réponse du problème.

Pour le cas $a = 6$, les élèves doivent piloter le paramètre a vers la valeur $a = 6$ et continuer à explorer le nouveau problème. Comme nous l'avons signalé ci-dessus, la fonction exportée n'a pas d'extremum dans l'intervalle ouvert dans ce cas. L'aire du triangle *IMN* est strictement décroissante quand on bouge *M* du point *O* au point *A*. Notre intention didactique vise à dégager le rôle du paramètre *a* pour les différentes variations de l'aire et aussi pour la réponse du problème. Nous espérons que cette tâche peut donner un autre sens à la notion de paramètre chez les élèves. La généralisation du problème demande de démontrer une propriété de la fonction pour le cas $a \in [\frac{10}{\sqrt{3}}; \infty[$.

iii). Niveaux de représentation et types d'activités sur les fonctions

Nous analysons maintenant les apports de Casyopée pour relier les différents niveaux de représentation et types d'activités sur les fonctions.

D'abord, la fenêtre de géométrie dynamique est considérée comme un système physique pour des activités enactives-iconiques. A ce premier niveau, les élèves peuvent faire une exploration globale des formes variées de l'aire du triangle *IMN*. L'action de créer un calcul géométrique exprimant l'aire du triangle (une formule pré-algébrique, par exemple $\frac{1}{2}IM \times MN$) est de type d'activité générationnelle et correspond au passage du niveau « système physique » au niveau intermédiaire « grandeurs et mesures ».

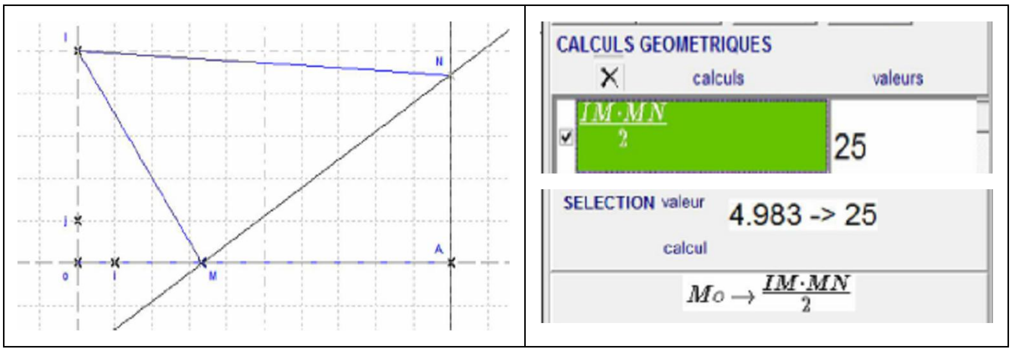


Figure 6.29. Passage du niveau « système physique » au niveau « grandeurs et mesures »

Ensuite, cette formule pré-algébrique sert à des explorations locales de type enactive-iconique au niveau intermédiaire telles que : faire varier des grandeurs concernant le point *M*, observer les variations de l'aire et conjecturer une valeur maximale. L'activité générationnelle à ce niveau correspond encore à une modélisation fonctionnelle des relations de dépendances qui est caractérisée par l'action de choisir une variable. Après cette action, Casyopée peut afficher la dépendance fonctionnelle sous la forme d'une fonction géométrique, comme par exemple $OM \rightarrow \frac{1}{2}IM \times MN$.

L'exportation de cette fonction géométrique dans la fenêtre algébrique de Casyopée correspond à un passage du niveau « grandeurs et mesures » vers le niveau « fonctions mathématiques ». L'identification de la variable, de son domaine de définition et la validation de sa formule sont des étapes importantes. Casyopée donne une aide pour ces étapes en calculant le domaine et la formule, tout en laissant l'élève libre du choix de la variable.

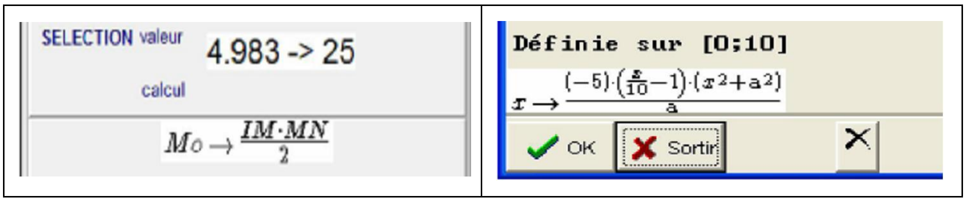


Figure 6.30. Passage du niveau « grandeurs et mesures » au niveau « fonctions mathématiques »

Au niveau « fonctions mathématiques », l'activité de type enactive-iconique concerne des explorations locales et globales du tracé graphique de la fonction. Casyopée peut permettre de relier ce niveau au niveau « système physique » grâce à sa caractéristique spécifique : le déplacement d'un point mobile sur le tracé graphique implique un mouvement correspondant du point libre *M* dans la figure dynamique.

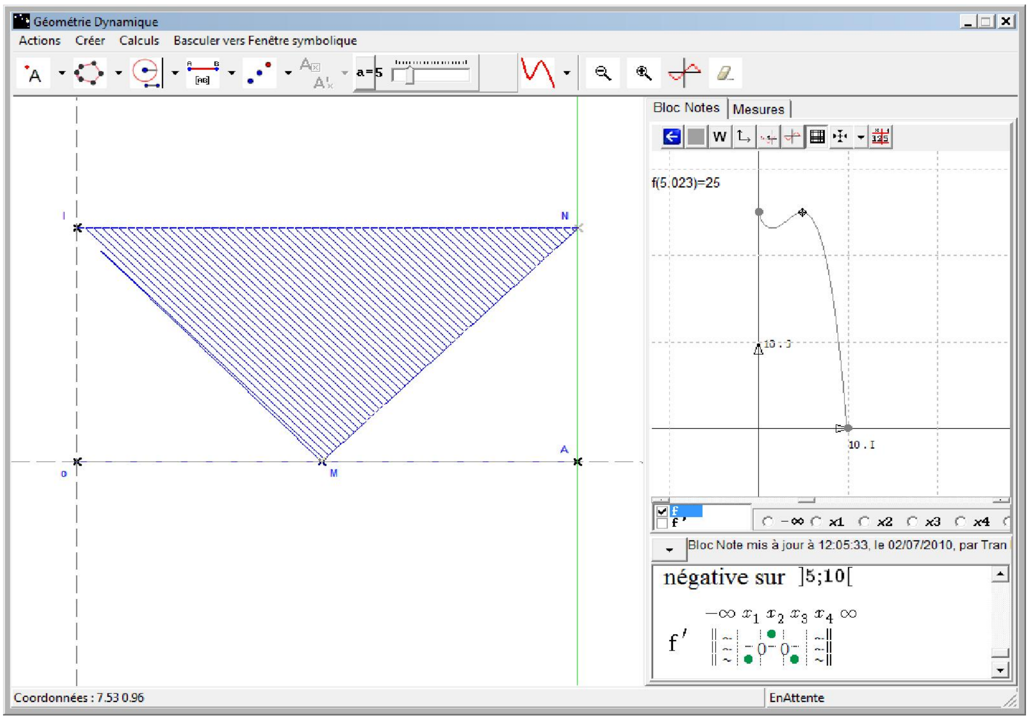


Figure 6.31. Passage de « fonctions mathématiques » à « système physique »

d. Synthèse des observations

i). Le cas du binôme Elina-Chloé

Construction de la figure :

3mn : Les élèves créent d'abord le point repéré *A(10 ;0)*. Elles continuent en créant le point *I*, sans avoir créé le paramètre *a*. Elles font une confusion entre le caractère A et le paramètre *a* en entrant le point *I(0 ; A)*.

4mn : Créer le paramètre positif *a* puis le point *I(0 ;a)*.

5mn : Cliquer sur le bouton « Créer parallèle » pour construire la droite parallèle d_1 à l'axe *Oy*, passant par *A*. Ensuite, elles créent le point *M* libre sur le segment *[OA]*.

7mn : Créer un point *N* libre sur la droite parallèle d_1.

10mn : Créer le segment *[IM]*, puis la droite perpendiculaire d_2 à *[IM]*, passant par *I*.

Ensuite, les élèves bougent le point *N* et s'aperçoivent que ça ne va pas car le point *N* n'appartient pas à la droite perpendiculaire d_2.

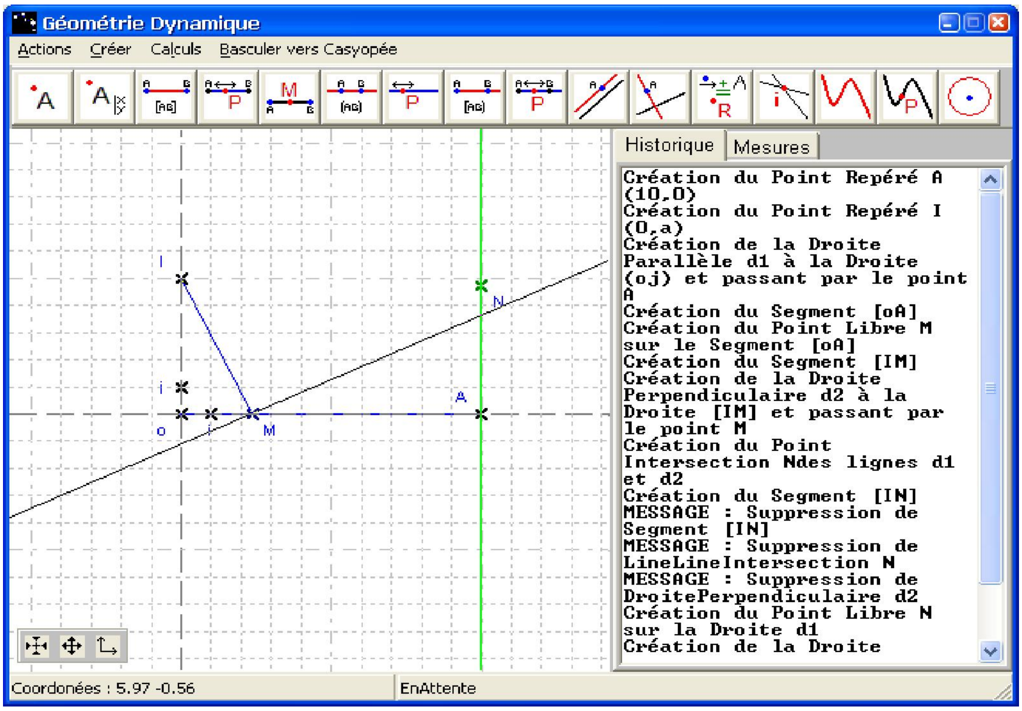


Figure 6. 32. Une construction incorrecte

Elles reconnaissent cette erreur et suppriment le point libre *N*.

11mn : Elles reconstruisent le point *N* comme l'intersection de deux droites d_1 et d_2, puis le segment *[IN]*. Le triangle rectangle *IMN* est construit.

Explorations et conjectures :

12mn : Elles commencent à bouger le point *M* sur le segment *[OA]*. Ensuite, elles passent à la fenêtre symbolique pour ajuster le paramètre vers $a = 5$. Elles reviennent dans la fenêtre géométrique.

14mn : Elles cliquent sur le bouton « Mesures » pour créer le calcul géométrique de l'aire $\dfrac{IM \times MN}{2}$:

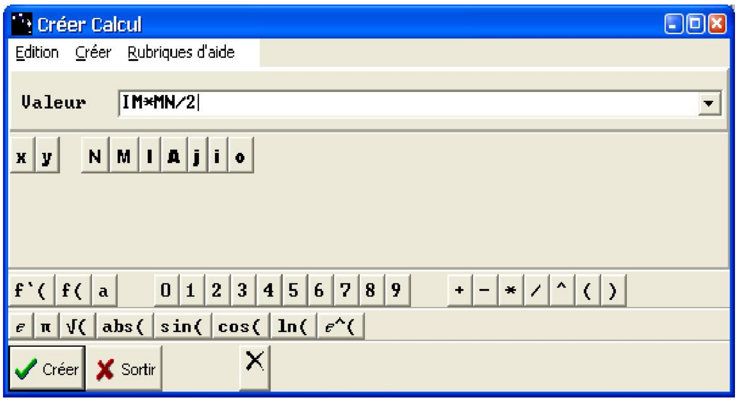


Figure 6.33. Création d'un calcul géométrique de l'aire

Elles continuent à bouger attentivement le point *M* puis s'arrêtent au milieu du segment *[OA]* pour lequel la valeur de ce calcul atteint *25*. Elles déplacent encore le point *M* de *O* vers *A*, puis font le retour. Elles s'arrêtent également à la position de l'origine *O* pour laquelle la valeur de l'aire est *25* :

Chloé : *C'est 25*

Elina : *Oui, soit* $x_M = 0$, *ah quand M a les coordonnées (0 ;0) ou soit M a les coordonnées: demi de OA et zéro* {*M* est le milieu de *[OA]*}.

Chloé : *C'est croissante puis décroissante.*

Elina : *Mais non, regarde! On part de 25, c'est décroissante, puis croissante jusqu'à M a les coordonnées: demi de OA et zéro. Après, c'est décroissant.*

Tâche 2. Observations et conjectures	**Les observations:**
2.1. Créer le calcul géométrique de l'aire du triangle rectangle IMN.	$\mathcal{A} = \dfrac{IM \times MN}{2}$
2.2. Déplacer le point M sur [OA] et: - observer les variations de l'aire du triangle. - donner des conjectures sur les variations de l'aire et les positions du point M pour les quelles l'aire du triangle IMN soit maximale.	**Les conjectures:** $\left.\begin{array}{l} x_M = 0 \\ x_M = \frac{1}{2} OA \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{A}_{max} = 25$ x_{max} $x_n = \frac{1}{2} OA$ $\mathcal{A}$: ↘ ↗ ↘

Figure 6.34. Une conjecture sur la solution du problème

Ces élèves ont fait beaucoup d'explorations locales et globales de l'aire. Elles ont également conjecturé les variations de la valeur de l'aire et donné les conjectures assez exactes. Une progression concernant les connaissances sur des fonctions s'est manifestée à travers les termes comme « croissante », « décroissante » trouvés dans leur conversation.

Modélisation fonctionnelle :

20mn : Elles passent spontanément à créer une variable sans avoir besoin des interventions de l'observateur. Elles choisissent la distance *OM* comme variable. Casyopée l'accepte et donne un feedback. Elles valident cette variable :

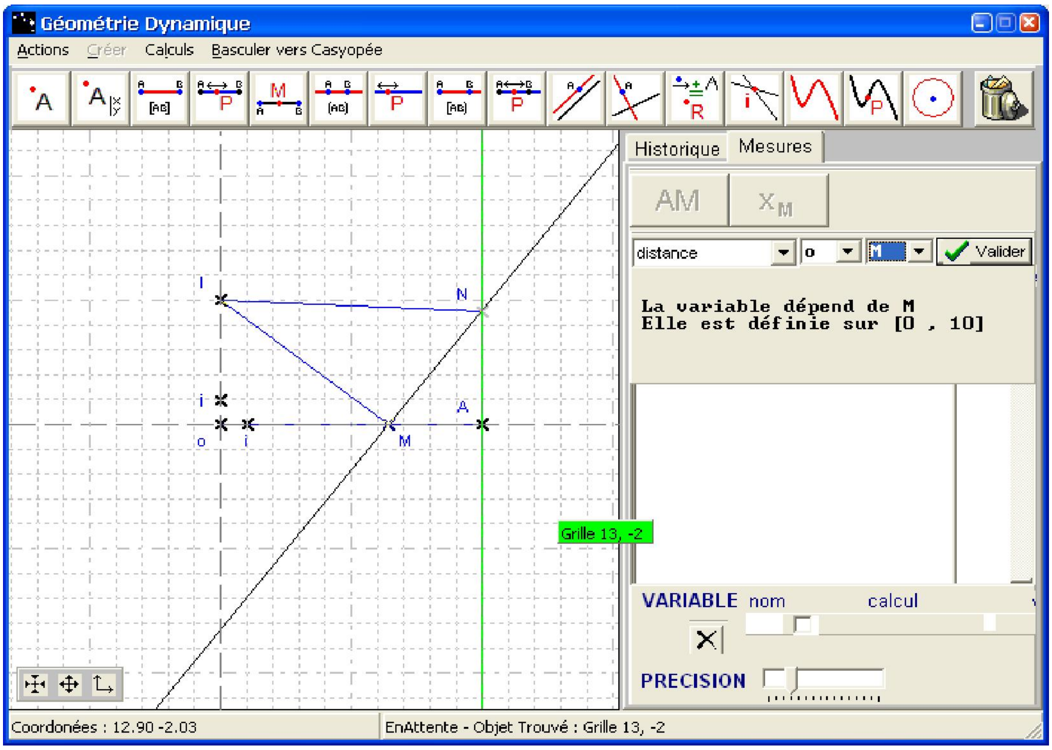


Figure 6.35. Un choix de la variable *OM*

20mn12 : Elles cliquent immédiatement sur le bouton « Exporter une fonction » pour exporter la fonction dans la fenêtre algébrique :

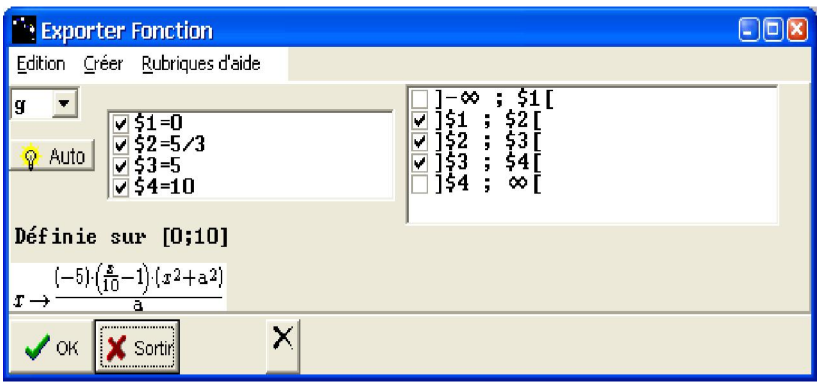
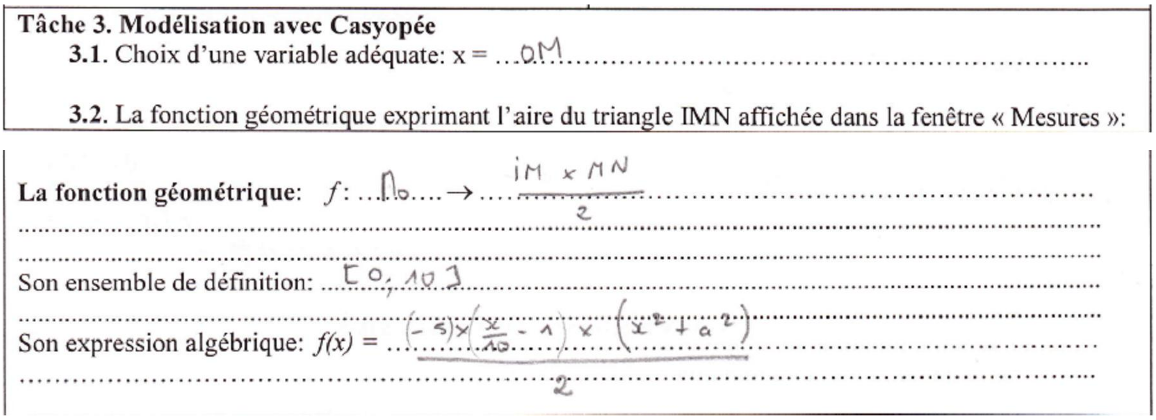


Figure 6.36. L'exportation de la fonction

L'expression algébrique de la fonction exportée est :

$$f : Mo \to \frac{IM.MN}{2}$$

$$f(x) = \frac{(-5)(\frac{x}{10} - 1)(x^2 + a^2)}{a}$$


Tâche 3. Modélisation avec Casyopée

3.1. Choix d'une variable adéquate: x = OM

3.2. La fonction géométrique exprimant l'aire du triangle IMN affichée dans la fenêtre « Mesures »:

La fonction géométrique: f: Mo → $\frac{IM \times MN}{2}$

Son ensemble de définition: [0;10]

Son expression algébrique: $f(x)$ = $\frac{(-5)\times(\frac{x}{10} - 1) \times (x^2 + a^2)}{2}$

Figure 6.37

Nous pouvons trouver quelques éléments de leur évolution dans la modélisation fonctionnelle à travers un extrait suivant :

Chloé : *Choix d'une variable ? La dernière fois, on a fait avec la hauteur.*

Elina : *Non, OM. Je pense que c'est ça va pour une variable*

Chloé : *Oui.* {Elle valide cette variable puis exporte la fonction}

Elina : *Son ensemble de définition ?*

Chloé : *C'est* $\left]-\infty;+\infty\right[$. *Ah non, c'est* $[0;10]$

Elina : *Regarde ! C'est marqué, l'ensemble de définition.*

Preuve algébrique :

23mn : Les élèves font apparaître le graphe de la fonction. Elles essaient d'ajuster le repère pour visualiser le graphe. Elles font réduire puis agrandir le repère. Elles font encore le cadrage pour bien visualiser le graphe.

26mn : Chloé propose d'étudier la fonction en calculant sa dérivée, les signes de la dérivée et les variations. Elle sélectionne la fonction *f(x)* puis calcule la dérivée. Elle obtient :

$$f'(x) = \frac{-(x^2 + a^2)}{2a} - \frac{10(\frac{x}{10} - 1)x}{a}.$$

27mn : Les élèves prévoient de développer la dérivée *f'(x)*. Elles ont choisi le menu « Calculer/Développement » mais ne l'ont pas encore validé. Ensuite, elles reviennent dans ce menu et le valident pour cette fois. L'expression algébrique de la dérivée est

$$f'(x) = \frac{-3x^2}{10} + 2x + \frac{-5}{2}.$$

29mn : Elles calculent les zéros de la dérivée en utilisant les menus « Calculer/Zéros ». Casyopée donne l'ensemble des zéros avec le paramètre

$$\left\{ \frac{\sqrt{100-3a^2}+10}{3}, \frac{-\left(\sqrt{100-3a^2}-10\right)}{3} \right\}.$$

Ensuite, Elina propose de faire un calcul en remplaçant le paramètre a par sa valeur $a = 5$. Elles obtiennent finalement les deux zéros *x1 = 5, x2 = 5/3* en papier/crayon.

35mn : Elles reviennent dans le menu « Justifier/Signe/Seconde degré » pour trouver le signe de la dérivée. Elles entrent les deux zéros *5* et *5/3* de la dérivée *f'(x)* dans la petite fenêtre qui apparaît :

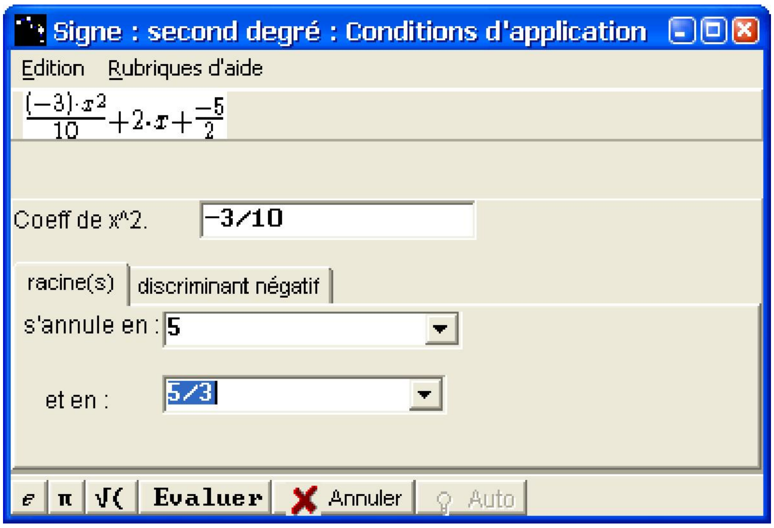


Figure 6.38. Les zéros de la fonction dérivée

Elles cliquent sur le bouton « Evaluer », une autre fenêtre apparaît et elles hésitent un moment :

Figure 6.39

Ensuite, elles ont choisi le bouton « Auto » pour faire apparaître les signes de la dérivée :

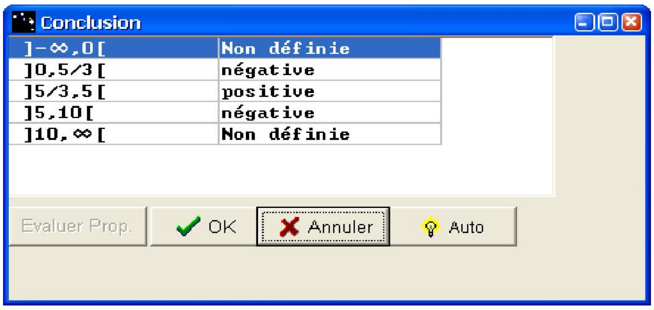


Figure 6.40. Justification de signes de la fonction dérivée

Finalement, elles cliquent sur le bouton « OK » et reviennent dans la fenêtre algébrique. Elles font un tableau de variation sur leur fiche.

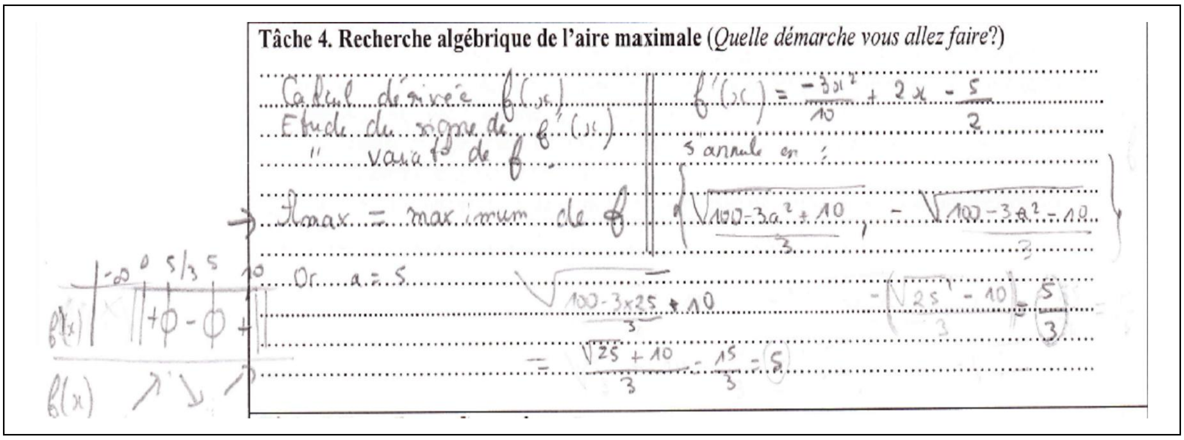
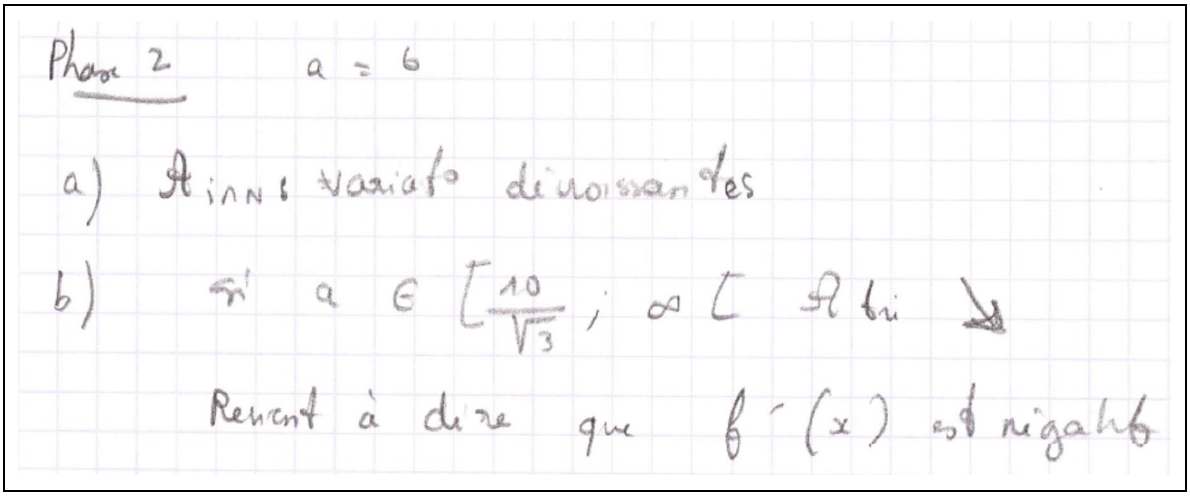


Figure 6.41. Une preuve algébrique

Dans leur fiche élève, ces élèves ont trouvé les deux zéros de la dérivée. Cependant, il y avait une confusion de variations. Leur tableau ci-dessus indique les variations de la fonction $-f(x)$, pas celles de la fonction $f(x)$. C'est peut-être une erreur d'étourderie parce que l'on trouve dans leurs conversations les conclusions correctes. Chloé dit : « La position *M* coïncide avec l'origine *O*. *5/3* correspond à la valeur en bas dans le tableau de variation, et *5* correspond à la valeur plus haute ». Elina affirme que la fonction atteint le maximum en *0* et *5*. Chloé ajoute que le minimum est en *5/3*. Finalement, Chloé affirme : *« Quand le point M a l'abscisse xM = 0 ou xM = 5, l'aire du triangle IMN est maximale »*. Elle précise également : *« C'est juste qu'on a trouvé »*.

Chloé bascule vers la fenêtre géométrique et bouge le point *M*. Elle visualise les deux positions du point *M* correspondant aux *xM = 0* et *xM = 5*.

Pour la deuxième phase, Chloé pilote le paramètre *a* vers *6*. Elle bascule vers la fenêtre géométrique et déplace très attentivement le point *M*. Elle constate : *« l'aire est décroissante tout le temps »*. Ensuite, le binôme passe à la dernière tâche et propose d'étudier la fonction *f(x)* et de prouver que la dérivée *f'(x)* est toujours décroissante.



Phase 2 $a = 6$

a) A ainsi variato décroissantes

b) si $a \in [\frac{10}{\sqrt{3}} ; \infty[$ A tri ↘

Revient à dire que $f'(x)$ est négatif

Figure 6.42. Réponses pour la phase 2

Les explorations qualitatives sur la variation de l'aire ont été bien réalisées pour cette deuxième phase. Pour la dernière tâche de démonstration, ce binôme a également proposé une démarche correcte : il faut démontrer que la dérivée *f'(x)* est toujours négative sur $[\frac{10}{\sqrt{3}};\infty[$.

Pourtant, il n'est pas encore arrivé à une preuve algébrique.

ii). Autres élèves

Pour éviter d'alourdir l'analyse, nous ne présentons qu'ici le cas a = 5.

	Calcul géométrique	Variable	Domaine	Expression algébrique	Preuve algébrique
Elina-Chloé	$\frac{IM \times MN}{2}$ Conjecture : exacte	OM	[0;10]	$f(x)=\frac{(-5)(\frac{x}{10}-1)(x^2+a^2)}{a}$ (correcte)	Démarche : Dérivation, tableau de variation. Preuve : incomplète. Conclusion : exacte, $x=0, x=5$.
Jennifer	$\frac{IM \times MN}{2}$ Conjecture : exacte	OM	[0;10]	$f(x)=\frac{(-5)(\frac{x}{10}-1)(x^2+a^2)}{-a}$ (incorrecte)	Démarche : non Preuve : non Conclusion : non.
Pauline	$\frac{IM \times MN}{2}$ Conjecture : non exacte.	MO	[0;10]	$f(x)=\frac{(-5)(\frac{x}{10}-1)(x^2+a^2)}{a}$ (correcte)	Démarche : Dérivation, tableau de variation. Preuve : incomplète. Conclusion : non.
Amandine	$\frac{IM \times MN}{2}$ Conjecture : incorrecte.	OM	[0;10]	$f(x)=\frac{(-5)(\frac{x}{10}-1)(x^2+a^2)}{a}$ (correcte)	Démarche : Dérivation, tableau de variation. Preuve : incomplète. Conclusion : non.
Ervan	$\frac{IM \times MN}{2}$ Conjecture : non exacte	OM	[0;10]	$\frac{(-x+10)(x^2+25)}{10}$ (correcte)	Démarche : chercher le maximum sur le graphe, puis confirmer par le calcul. Preuve : non Conclusion : non.
Karl	$\frac{MN \times MI}{2}$ Conjecture : non exacte.	OM	Non	$f(x)=\frac{(-5)(\frac{x}{10}-1)(x^2+a^2)}{a}$ (correcte)	Démarche : non Preuve : non Conclusion : non.

Damien	$\frac{MN \times MI}{2}$ Conjecture : incomplète.	x_M	$]-\infty;+\infty[$	$f(x)=\frac{(x^2+a^2)\lvert x-10\rvert}{2a}$ (correcte)	Démarche : incorrecte Preuve : incorrecte. Conclusion : non.
Garcia	$\frac{MN \times MI}{2}$ Conjecture : exacte	MO	$[0;10]$	$f(x)=\frac{(-5)(\frac{x}{10}-1)(x^2+a^2)}{a}$ (correcte)	Démarche : Dérivation Preuve : non Conclusion : incomplète.
Kevin	$\frac{IM \times MN}{2}$ Conjecture exacte.	MO	$[0;10]$	$\frac{-x^3}{10}+x^2-\frac{5}{2}x+25$ (correcte)	Démarche : Dérivation Preuve : non Conclusion : non.
Vincent	$\frac{IM \times MN}{2}$ Conjecture : exacte	OM	$[0;10]$	$f(x)=\frac{(-5)(\frac{x}{10}-1)(x^2+a^2)}{a}$ (correcte)	Démarche : Dérivation. Preuve : incomplète. Conclusion : exacte.
Charlotte	$\frac{IM \times MN}{2}$ Conjecture : exacte	OM	$(0;10)$	$f(x)=\frac{(-5)(\frac{x}{10}-1)(x^2+a^2)}{a}$ (correcte)	Démarche : Dérivation. Preuve : incomplète. Conclusion : exacte.

Tableau 6.3. Réponses des autres binômes

❖ **Remarque** :

- Tous les élèves ont correctement créé le calcul géométrique de l'aire du triangle *IMN*. Il y a sept binômes (*7* sur *11*) qui ont donné des conjectures exactes sur les positions du point M pour lesquelles l'aire est maximale. Quatre binômes ont formulé des conjectures non exactes sur les positions du point *M*.
- Le choix de la variable *OM* est dominant. Pourtant, il existe deux binômes qui ont indiqué des domaines de définition non exacts.
- Sept binômes ont proposé ou utilisé la démarche de dérivée pour chercher une preuve algébrique. Cependant, il n'y en a que trois qui ont trouvé les bonnes réponses. Deux binômes ne donnent aucune démarche de preuve et les deux autres proposent des démarches incorrectes.

e. Remarques et conclusions sur la séance C2

L'itinéraire du binôme Elina-Chloé :

1. Registre enactif-iconique-grandeurs

- Création du calcul géométrique $\frac{1}{2} IM \times MN$
- Beaucoup d'explorations numériques de l'aire
- Conjecture exactes sur la position du point libre *M* (soit *M* coïncide l'origine *O*, soit *M* est le milieu de *[OA]*) et les variations de l'aire du triangle *IMN*
- Sans interventions de l'observateur.

2. Registre graphique

- Création du graphe de la fonction et faire des cadrages
- Passage au registre symbolique spontanément.

3. Registre symbolique

- Travail sur les transformations algébriques à l'aide ce Casyopée (développer, calculer la dérivée, les zéros…)
- Travail sur l'expression algébrique avec le paramètre.

4. Registre numérique

- Travai sur un cas particulier des paramètres.
- Pas de travail sur le tableau de valeurs de la fonction exportée.
- Retour dans le registre enactif-iconique-grandeur pour interpréter la solution.

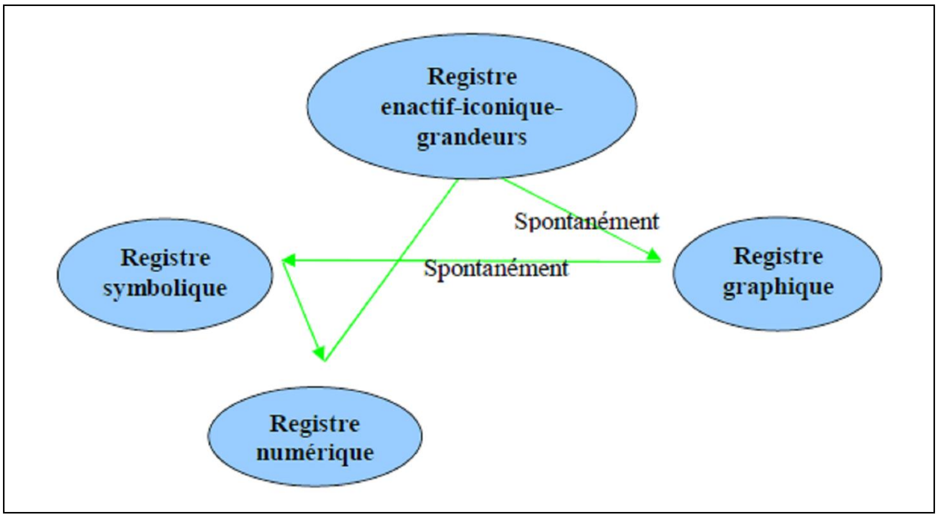


Figure 6.43. Itinéraire du binôme Elina-Chloé[13]

[13] L'itinéraire démarre à partir du registre enactif-iconique-grandeurs

Le binôme Elina-Chloé a pu utiliser les outils « Droite perpendiculaire » et « Droite parallèle » pour la construction du triangle rectangle *IMN*. En général, ce binôme avait encore du mal à construire la figure avec Casyopée. Cependant, il a pu corriger les erreurs et les dépasser facilement.

Pour la modélisation fonctionnelle, il y avait une évolution des élèves par rapport à la séance C1. Les deux actions de choisir une variable et d'exporter une fonction ont été facilement exécutées sans aide de l'observateur. Elles ont pu adapter spontanément les feedbacks de Casyopée sur ces deux actions.

Concernant la preuve algébrique, les élèves explorent premièrement le registre graphique de Casyopée avant de chercher une preuve algébrique dans le registre symbolique. L'itinéraire prioritaire d'ordre « registre graphique $\rightarrow$ registre symbolique » est invariable par rapport la séance précédente.

L'exportation d'une fonction est considérée comme un moyen pour obtenir un graphe plutôt qu'une fonction. Le binôme a proposé une démarche correcte de preuve en utilisant la dérivée, accompagnée d'un usage des fonctionnalités de Casyopée comme « Dérivée », « Signes », … Les élèves étaient à l'aise avec ces fonctionnalités.

En général, la séance C2 a témoigné d'une progression pour la réalisation des tâches données. Les élèves ont déjà eu plus d'autonomie dans la construction de la figure. Les feedbacks fournis par Casyopée sur la robustesse de la figure les ont aidés à corriger les erreurs. La création d'un calcul géométrique ne leur pose pas de problème. On a observé beaucoup d'explorations numériques de l'aire. Le choix des variables et l'exportation des fonctions sont assez spontanés. Pour la preuve algébrique, les élèves ont principalement exploité les menus « Dérivée » et « Calculer/Zéros » pour trouver la dérivée et ses racines. La fonctionnalité « Justifier/Signes » a été peu exploitée par des élèves (sauf le binôme Elina-Chloé).

6.4.3 Séance C3 : Recherche autonome d'un problème d'optimisation « contextualisé »

a. Contexte et objectifs

Cette troisième séance d'observation s'est déroulée en décembre 2008. Elle a pour objectif d'utiliser Casyopée pour modéliser une situation réelle. Il s'agit de minimiser la longueur totale d'un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Cette situation est issue de la banque de sujets de l'expérimentation d'une épreuve pratique de mathématiques au baccalauréat en 2007. La situation n'introduit pas de complexité supplémentaire par rapport à la séance C2. Il s'agit d'observer comment les élèves mobilisent leurs connaissances mathématiques et connaissances sur Casyopée.

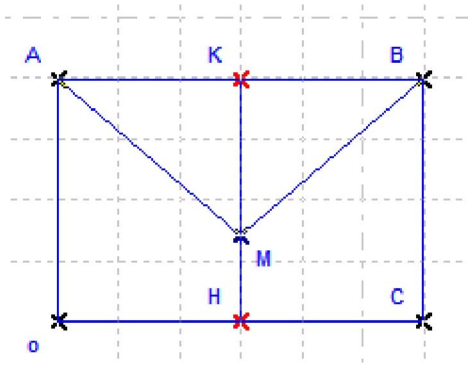
b. Fiche élève

Fiche élève
Classe: Terminale S — Date:
Lycée:
Nom et prénom:

Des tuyaux de collecte des eaux

On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluie pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.

On donne ici le plan de cette façade.



Sur le plan:

[AM] et [BM] représentent les deux premiers tuyaux.

[MH] représente le troisième tuyau.

M est un point sur la médiane [HK] du rectangle.

Il s'agit de trouver, sur la façade de cette maison, la position du point M qui minimise la longueur totale des trois tuyaux.

Premier cas : AB=6, oA=4

- Faire la figure dans la fenêtre de Géométrie Dynamique

Il est possible de créer des points de coordonnées entières en cliquant sur la grille.

- Etudier le problème dans la fenêtre de Géométrie Dynamique. Ecrire votre conclusion.
- Etudier le problème dans la fenêtre algébrique. Expliciter les étapes de l'étude.
- Dans la position où la longueur totale des tuyaux est minimale, quelle est la longueur de KM ? quelle est la mesure de l'angle AMB ?

Second cas : AB=6, oA=1

- Refaire l'étude de la même manière. Expliciter les étapes et écrire une conclusion.

c. Analyse a priori

La figure est donnée dans la fiche élève. Nous avons simplifié le problème en considérant le point *M* sur la médiane *HK* du rectangle *OABC*. Pour le premier cas, il est demandé aux élèves de travailler sur le cas $AB = 6, OA = 4$. Dans ce cas, les trois angles du triangle *AHB* sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$ et donc la position du point *M* correspondant à la valeur minimale de la longueur totale (la somme $MA + MB + MH$) des tuyaux coïncide avec le point de Torricelli du triangle *AHB*. Pour le deuxième cas où $AB = 6, OA = 1$, la position du point *M* pour laquelle la longueur totale des trois tuyaux est minimale coïncide avec le point *H*.

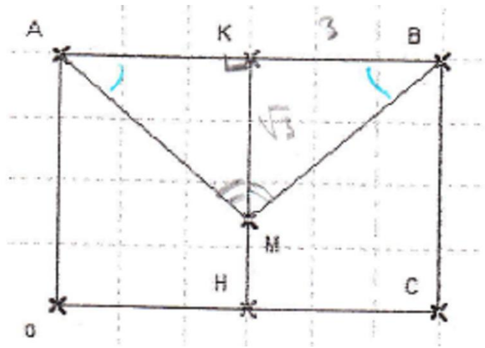
Il est demandé aux élèves de concevoir la figure dans la fenêtre de géométrie dynamique de Casyopée. Ils peuvent créer directement des points de coordonnées entières en cliquant sur la grille ou utiliser des paramètres. Après la construction de la figure, nous attendons que les élèves fassent des explorations numériques et des conjectures sur la valeur minimale de la longueur et la position du point *M*. Ensuite, les élèves peuvent modéliser le problème en choisissant une variable appropriée puis en exportant une fonction dans la fenêtre algébrique. L'expression algébrique exprimant la longueur totale des trois tuyaux est une expression irrationnelle. Ce ne serait peut-être pas facile pour quelques élèves de faire des transformations algébriques et de trouver la réponse. Cependant, pour cette séance, nous portons notre attention sur l'acquisition du processus de modélisation par les élèves. Nous attendons des élèves une maîtrise des étapes de la modélisation avec Casyopée, avec lesquelles ils se sont déjà familiarisés pendant les séances précédentes.

d. Synthèse des observations

i). Le cas du binôme Elina-Chloé

Construction de la figure :

Le binôme crée d'abord le point *A(0;4)* puis le segment *[oA]*. Ensuite, il construit le poitnt *B(6 ;4)*, le segment *[AB]* et la droite perpendiculaire à *[AB]* passant par *B*. Il crée le point *C(0 ;6).* Il regarde la figure et reconnaît l'erreur pour les coordonnées du point *C*. Il recrée le point *C(6 ;0)* puis le segment *[BC]*. Il continue à terminer la construction de la figure. Ce travail prend 1 minute 40.



Explorations et conjectures :

Le binôme passe au menu « Mesures » pour créer un calcul géométrique exprimant la longueur totale. Elina propose immédiatement de créer le calcul *AM+MB+MH* :

> Chloé: *On fait un calcul géométrique?*
>
> Elina: *Oui.*

La création du calcul géométrique ne leur pose pas de problème. Ensuite, le binôme bouge très attentivement le point *M* en observant les valeurs numériques de ce calcul géométrique. Il s'arrête à une position pour laquelle la valeur du calcul atteint *9.197*. Il continue à bouger le point libre *M*. Chloé conclut : *« c'est ça, 9.196. Le point M.... ».*

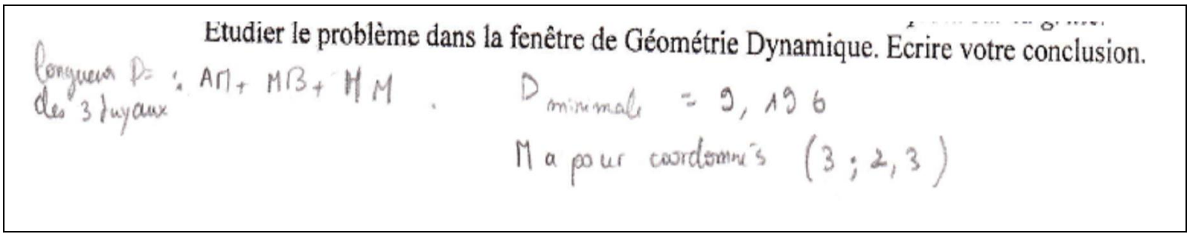


Figure 6.44. Une conjecture sur la solution du problème

Modélisation fonctionnelle :

Le binôme propose rapidement de créer une variable. Il choisit la distance MH comme variable. Ensuite, il fait exporter immédiatement la fonction dans la fenêtre algébrique de Casyopée. L'expression de la fonction est $f(x) = 2\sqrt{(4-x)^2+9} - 4(\frac{4-x}{4} - 1)$. Chloé regarde cette expression et dit : « La variable KM, c'est plus adaptée ». Alors, le binôme revient à sélectionner la variable KM et la valide rapidement.

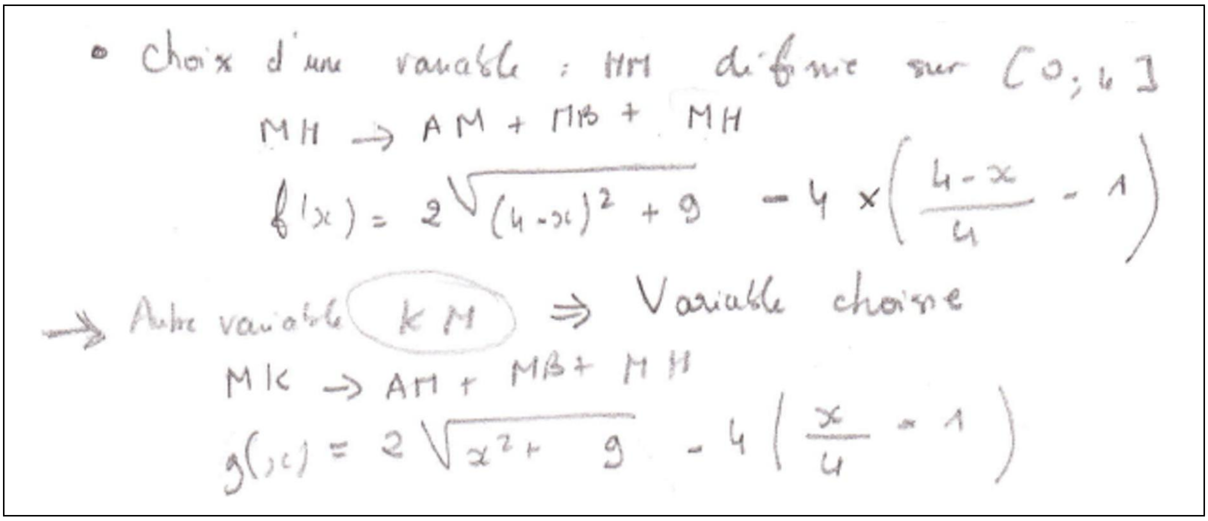


Figure 6.45. Un choix de la variable

Il exporte la fonction géométrique dans la fenêtre algébrique et obtient l'expression $g(x) = 2\sqrt{x^2+9} - 4(\frac{x}{4} - 1)$. En observant cette expression, Chloé dit à Elina : « C'est plus simple que celle-ci ».

Preuve algébrique :

❖ Utilisation de Casyopée :

Le binôme utilise d'abord les menus « Calcul/Dérivée » pour trouver la dérivée de la fonction. Il obtient $g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}} - 1$. Cependant, il ne sait pas comment faire pour transformer cette expression et trouver son signe. Il a besoin d'interventions de l'observateur :

Observateur : *Comment simplifiez-vous l'expression de $g'(x)$?*

Binôme : *On fait le dénominateur {Il fait le dénominateur et obtient $g'(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}$ }.*

Observateur : *Le signe de g'(x) est celui de quelle expression?*

Binôme : *C'est le signe de l'expression* $2x - \sqrt{x^2+9}$.

Ensuite, le binôme sélectionne le menu « Créer fonction » et crée la fonction $h = 2x - \sqrt{x^2 + 9}$. Il prend les menus « Justifier/Signe/Affine » pour trouver le signe de l'expression *h*. Il hésite un moment puis remarque : « C'est pas affine ». L'observateur intervient :

Observateur :	*Est-ce que vous connaissez la quantité conjuguée?*
Elina:	*Ah oui.*
Observateur :	*Quelle est la quantité conjuguée de* $a + \sqrt{b}$?
Elina:	*C'est* $a - \sqrt{b}$.

Il commence à transformer l'expression de la fonction *h* en papier/crayon.

❖ Travail en papier/crayon :

• Etude du signe de $g'(x)$ est : le signe de $2x - \sqrt{x^2+9}$
car $\sqrt{x^2+9} > 0$

• On crée une autre fonction : $h(x) = 2x - \sqrt{x^2+9}$
On utilise l'expression conjuguée : $2x + \sqrt{x^2+9}$

$(2x - \sqrt{x^2+9}) \times (2x + \sqrt{x^2+9})$
$= 4x^2 - (\sqrt{x^2+9})^2$
$= 4x^2 - x^2 + 9$
$= 3x^2 + 9 = 3(x^2-3)$

Etude du signe : $x^2 - 3$
$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 \times (-3) = 12$
$x_1 = -\sqrt{3}$
$x_2 = \sqrt{3}$

(voir suite) = feuille 2

1er cas

	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$		↗		↘		↗	

Longueur de 3 tuyaux : $AM + MB + HM$ est minimale lorsque $KM = \sqrt{3}$

Dans la position où la longueur totale des tuyaux est minimale, quelle est la longueur de KM ? quelle est la mesure de l'angle AMB ?

Longueur totale de tuyaux est minimale quand $KM = \sqrt{3}$.

$KB = 3$
$KM = \sqrt{3}$

$\tan \widehat{KMB} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3}$

$\widehat{KMB} = \tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{3}\right) = 60°$

Or $\widehat{AMB} = \widehat{AMK} + \widehat{KMB}$
tel que $\widehat{AMK} = \widehat{KMB} = 60°$
Donc $\widehat{AMB} = 60° + 60° = 120°$

Figure 6.46. Une preuve algébrique

Il étudie le signe de l'expression $x^2 - 3$ en calculant le delta et trouve deux racines $\pm\sqrt{3}$. Il construit un tableau de variation puis conclut le minimum de la longueur des trois tuyaux.

Second cas $oA = 1, AB = 6$ **:**

❖ Utilisation de Casyopée :

La conception de la figure ne leur pose pas de problème. Après avoir créé un calcul géométrique exprimant la longueur totale des trois tuyaux, le binôme bouge le point libre *M* et observe les valeurs numériques du calcul. Il bouge le point *M* attentivement en observant le changement des valeurs du calcul géométrique. Elles trouvent que le point M coïncide avec *H* lorsque la valeur du calcul atteint *6.325*.

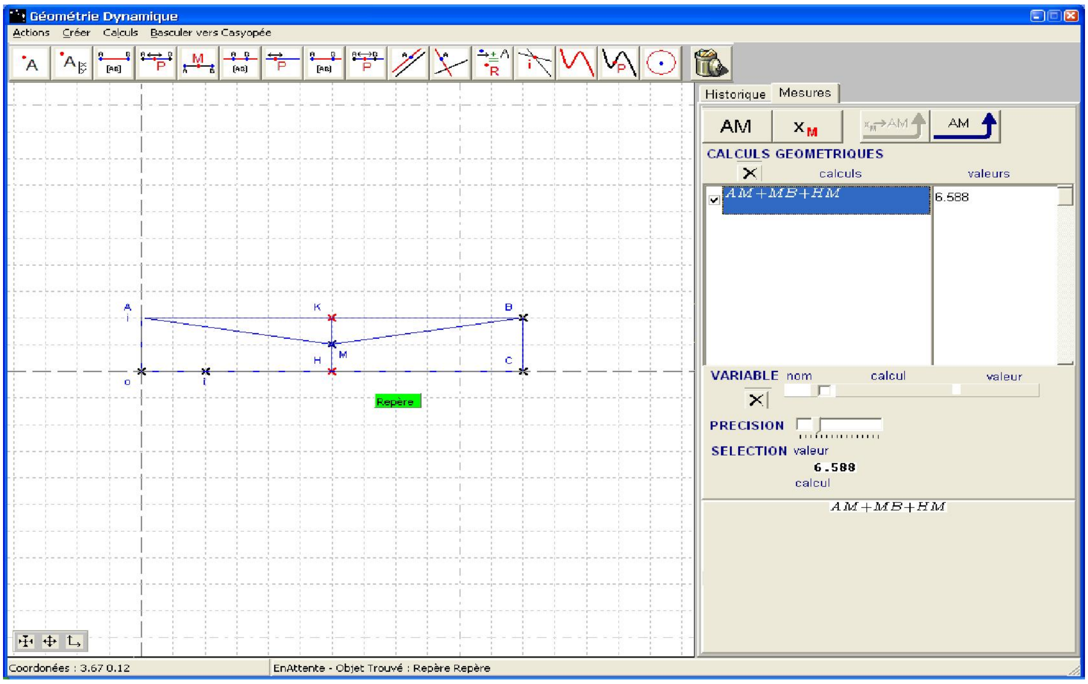


Figure 6.47. Une construction géométrique

Ensuite, le binôme choisit *KM* comme variable et Casyopée l'accepte. Il exporte une fonction dans la fenêtre algébrique. Le binôme utilise le menu Calculer/Dérivée de Casyopée pour trouver la dérivée. Il constate que la dérivée est la même que celle du premier cas. Il commence à rédiger une preuve algébrique en papier/crayon.

❖ Travail en papier/crayon :

2nd cas AB=6 oA=1

Refaire l'étude de la même manière. Expliciter les étapes et écrire une conclusion.

• Calcul : somme des 3 longueurs : $D = AM + MB + MH$

D_{min} lorsque $M = H$ les 2 points sont confondus soit $M/3$

choix variable : $KM \rightarrow AM + MB + MH$

$f(x) = 2\sqrt{x^2+9} - x + 1$

$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}} - 1$ soit $f'(x) = g'(x)$ comme le 1^{er} cas

$f'(x)$ et $g'(x)$ ont le même signe, donc $f(x)$ et $g(x)$ ont m̂ variat°.

• Somme des 3 longueurs minimale : lorsque $KM = \sqrt{3}$.

• $KB = 3$
$KM = \sqrt{3}$ $\widehat{AMB} = 120°$ (comme le 1^{er} cas).

❖ <u>Remarque :</u>

Le binôme comprend bien les étapes de la modélisation fonctionnelle avec Casyopée. Le passage à choisir une variable est spontané. Au début, le binôme a choisi la variable $x = MH$ et puis a exporté une fonction. Le feedback de Casyopée sur la complexité de l'expression algébrique obtenue l'a aidé à changer la variable. Pour le premier cas, le binôme est arrivé à trouver une preuve correcte. En revanche, pour le second cas, il a réussi à trouver la dérivée avec Casyopée, mais il n'est pas arrivé à une preuve algébrique correcte. En fait, il n'a pas pris en compte du domaine de définition de la fonction *f(x)* dans ce cas ($[0;1]$).

En fait, après avoir correctement modélisé, les élèves ont obtenu une fonction avec un intervalle de définition correct dans Casyopée. Ensuite, la nature de la fonction dérivée fait qu'il n'a pas été possible de poursuive la recherche du minimum avec le logiciel. Les élèves sont passés en papier crayon et on traité la recherche du minimum sans considérer l'ensemble de définition. Ils ne sont pas non plus revenus à la situation géométrique dans la fenêtre correspondante de Casyopée, ce qui leur aurait fait apercevoir le problème posé dans la seconde situation. L'observation montre donc une certaine fragilité du processus de modélisation, des qu'il n'est plus « encadré » dans Casyopée.

ii). Autres élèves

- **Le cas d'Amandine** :
  - ❖ La modélisation fonctionnelle :

I- Modélisation de la situation dans Casyopée:

On cherche la position du point M qui minimise la longueur totale de AM + BM + HM. Pour cela, il faut d'abord definir une variable.

On sait que : - A, B, H sont des points fixes.
- M un point libre sur [KH]

De plus, on a conjecturer que la position du point M qui minimiserait la longueur total de HM + AM + BM, serait quand $KM = \frac{AM}{2} = \frac{BM}{2}$.

On décide donc de prendre comme variable KM définit sur [0;4] car : - K est un point fixe
- M variable sur [KH] = 4.

Une fois notre choix de variable fait, on réalise (avec l'aide du logiciel Casyopée) notre calcul des trois longueurs (HM + AM + BM) en fonction de la variable KM, ce qui nous donne l'expression algébrique suivante

$f : KM \rightarrow HM + AM + BM$

Ainsi, la fonction exportée qui correspond à cette expression algébrique est:

$f : x \rightarrow 2\sqrt{x^2+9} - x + 4$

❖ La preuve algébrique :

On a $f(x) = 2\sqrt{x^2+9} - x + 4$ qui correspond au calcul de AH+BH+HH en fonction de KH = x.
On cherche donc le minimum de $f(x)$.

Pour cela, on va calculer la dérivée de $f(x)$ afin d'établir un tableau de variations.
On, avec l'aide de casyopée, on a pu directement calculer la dérivée de $f(x)$. Ce qui nous donne :

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}} - 1$$

On calcul, quand est-ce que $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}} - 1 = 0$$
$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+9}} = 1$$
$$2x = \sqrt{x^2+9}$$
$$(2x)^2 = (\sqrt{x^2+9})^2$$
$$4x^2 = x^2+9$$
$$4x^2 - x^2 = 9$$
$$3x^2 = 9$$
$$x^2 = 3 \iff x = \sqrt{3}$$

Donc $f'(x) = 0$ quand $x = \sqrt{3}$.

On peut donc avec ces éléments établir le tableau de variation.

x	0		$\sqrt{3}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$3\sqrt{3}+4$	$\nearrow$	

L'interprétation du tableau nous montre bien que $f(x)$ atteint sa minimum quand $x = \sqrt{3}$.

- **Le cas de Charlotte** :

❖ La modélisation fonctionnelle :

1) Modélisation de la situation dans Casyopée

Nous avons crée, dans un pemier temps, les paramètres suivant : $a \in]0 ; 10[$ et $b \in]0 ; 10[$.

Ensuite, nous avons choisit la variable KH.

Pour répondre au probleème posé, nous avons choisit la fonction exportée :

$f : KH \longrightarrow AH + HB + HH$

La fonction algébrique associée est donc :

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + b^2} - a\left(\frac{x}{a} - 1\right).$$

❖ La preuve algébrique :

– En observant l'allure de la fonction, nous avons remarqués la présence d'extrêmums.

– Nous avons donc calculé la dérivée de la fonction f à l'aide du logiciel.

La dérivée est donc la suivante :

$$f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + b^2}} - 1$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{4x}{\sqrt{4x^2 + b^2}} - 1 = 0$$

Nous avons ensuite étudié les variations de la fonction f avec x définit sur $[0 ; a]$

$x \in [0 ; 4]$

x	0		$\sqrt{3}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$3\sqrt{3}+4$ $(\simeq 9,2)$	$\nearrow$	

Le minimum est atteint par la fonction f lorsque $x = \sqrt{3}$.

- **Le cas de Garcia** :
  - ❖ La modélisation fonctionnelle :

1.) Modélisation de la situation dan Casyopée.

La variable que nous avons choisi pour résoudre ce problème est [MH] /

L'expression algébrique que nous avons obtenu est : AM + BM + MH.

La fonction exportée, obtenue grâce à Casyopée est $f(x) = 2\sqrt{(4-x)^2+9} - 4\left(\frac{x+4}{4} -\right.$

❖ La preuve algébrique :

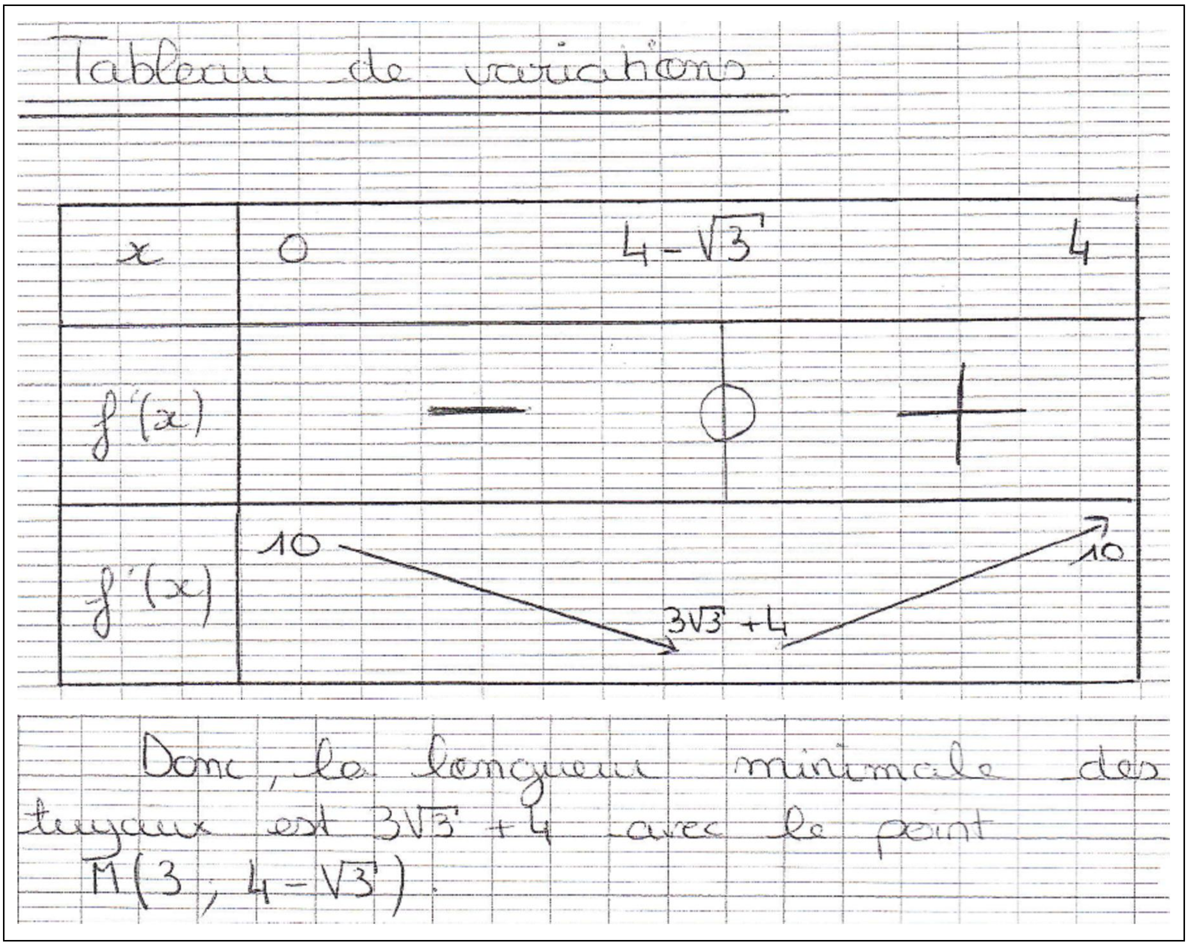


Tableau de variations

x	0		$4-\sqrt{3}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	10	$\searrow$	$3\sqrt{3}+4$	$\nearrow$	10

Donc, la longueur minimale des tuyaux est $3\sqrt{3}+4$ avec le point $M(3\ ;\ 4-\sqrt{3})$.

e. Remarques et conclusions sur la séance C3

Tous les binômes observés ont bien compris les étapes de la modélisation fonctionnelle avec Casyopée : créer un calcul géométrique, choisir une variable, exporter une fonction. Le choix de la variable et l'exportation d'une fonction ont été effectués sans aides de l'observateur. Les choix de variable se répartissent entre KM et MH. La plupart des élèves ont utilisé Casyopée pour calculer la dérivée, puis ont trouvé son signe et son tableau de variation en papier/crayon. Pour cette séance C3, comme nous avions dit, nous n'avons principalement porté notre attention que sur l'acquisition des élèves des étapes de la modélisation fonctionnelle avec Casyopée. L'analyse des observations et des productions écrites nous a montré un résultat positif. Les élèves semblent avoir bien acquis un processus de modélisation fonctionnelle avec Casyopée : créer un calcul géométrique correct, choisir une variable adéquate, exporter spontanément une fonction… Cependant , comme nous l'avons vu, le processus de modélisation reste fragile : quand les élèves quittent le logiciel, ils n'ont plus conscience des contraintes de la situation modélisée.

6.5 QUESTIONNAIRES

6.5.1 Contexte

A la fin de la séquence expérimentale C1, C2, C3 en décembre 2008, les élèves ont répondu à un questionnaire de bilan (voir annexe). Notre objectif est d'éclairer de plus les apports de Casyopée pour l'apprentissage des fonctions ainsi que des difficultés que rencontrent les élèves.

6.5.2 Résultats

En considérant les réponses à ce questionnaire, il apparaît quelques éléments intéressants et significatifs concernant les usages du Casyopée et la façon dont les élèves ont perçu le travail avec Casyopée. Dans la partie suivante, nous analysons en détail les réponses des élèves. Nous portons seulement notre attention sur des questions cruciales dont les réponses sont ciblées pour notre étude.

a. Remarques sur le logiciel Casyopée

Concernant la question « Avez-vous rencontré des difficultés pour apprendre à utiliser Casyopée ? Si oui, précisez lesquelles ? », il apparaît que les premiers usages ont été difficiles à cause de la variété des fonctionnalités de Casyopée :

> *« On ne connaît pas exactement les différentes fonctions, différents outils qu'il y a dans Casyopée. On obtient des calculs et on ne sait pas comment on a fait pour y arriver : le déroulement du calcul »* (Elina).
>
> *« Le logiciel possède plusieurs fonctionnalités, donc parfois on ne sait pas quelle fonctionnalité prendre. J'oublie où se trouvent les outils pour résoudre le problème posé »* (Marc).

Les élèves ont indiqué comment les difficultés ont été dépassées au long de l'expérimentation. Leur maîtrise de Casyopée est justifiée par l'utilisation régulière et l'aide de l'enseignant :

> *« J'ai téléchargé Casyopée sur Google donc je l'utilise quelques fois pour l'entraînement… Au début, j'avais du mal à trouver quelques fonctionnalités pour utiliser mais maintenant c'est bon »* (Chloé).
>
> *« Au début, quand on ne connait pas le logiciel, il faut un certain temps pour s'y habituer. Mais une fois expliquér, il n'est pas difficile d'apprendre à utiliser Casyopée… Avec l'aide du professeur qui nous explique comment faire pour résoudre certains problèmes »* (Amandine).
>
> *« Manipulation des fenêtres du logiciel m'a amélioré même si cela n'avait pas d'autre but que de manipuler »* (Kevin).
>
> *« Kevin m'a laissé plus longtemps gérer l'ordinateur. Donc, cela m'a permis de répéter les tâches »* (Marc).

Par rapport à une calculatrice graphique ou symbolique, la plupart des élèves ont déjà indiqué quelques caractéristiques nouveaux et pratiques de Casyopée comme : les calculs géométrique, le choix de la variable, l'exportation de la fonction et les feedbacks ; la possibilité de basculer du module géométrique vers le module symbolique ; la capacité de définir une fonction,… Pour les questions « Par rapport à une calculatrice graphique ou symbolique, qu'est-ce qui vous paraît nouveau ? Qu'est-ce qui paraît mieux ? », nous voyons apparaître des réponses intéressantes :

> *« Le choix de la variable, je trouve cela intéressant de choisir une variable puis de construire soi-même quelque chose afin de trouver une fonction… Faire toutes les démarches est super : construction de la figure, tableau de variation, calcul de dérivée… »* (Chloé).
>
> *« La transposition des figures en fonction, les applications et les fonctionnalités… On voit le déroulement de problème, de calculs (historique)… »* (Elina).
>
> *« Le fait de pouvoir basculer du monde géométrique au monde algébrique en un seul clic. Alors qu'avec une calculatrice on doit d'abord effectuer plusieurs opérations… »* (Chahinez).
>
> *« Le passage de la géométrie à l'étude d'une fonction…On peut tout faire sans avoir besoin de changer de mode… Ces fonctionnalités permettent facilement de passer d'une étape géométrique à une étape algébrique »* (Amandine).
>
> *« On peut modéliser facilement le problème. On peut créer des calculs alors que la calculatrice n'a pas cette option… J'aime bien utiliser le logiciel pour modéliser le problème »* (Marc).
>
> *« Tout ce que l'on fait apparaît dans le bloc-notes ce qui est pratique »* (Guillosson).
>
> *« C'est un peu plus clair et la calculatrice n'est pas capable de définir une fonction seule grâce à une variable »* (Cindy).

En ce qui concerne des contraintes et des difficultés d'utilisation de Casyopée, les réponses trouvées montrent deux contraintes principales : la complexité des formules algébriques données et la variété des fonctionnalités. La première difficulté vient principalement du désaccord entre l'affichage d'une formule géométrique et celui de la formule algébrique correspondante. Ces feedbacks des élèves avait permis aux concepteurs du logiciel d'améliorer l'interface ainsi que l'affichage des expressions algébriques après la séquence expérimentale.

b. Casyopée et l'apprentissage des fonctions

A la fin de la séquence expérimentale, il nous paraît intéressant de noter les réponses des élèves concernant les potentialités de Casyopée pour l'étude des fonctions. En ce qui concerne la question « Quels sont les avantages du logiciel Casyopée pour l'étude des fonctions ? », les réponses trouvées ont montré une réelle prise de conscience des apports de Casyopée à l'apprentissage des fonctions chez des élèves. Ils sont intéressés surtout par les caractéristiques spécifiques de Casyopée comme : le calcul géométrique, le choix de la variable, la possibilité de relier la géométrie dynamique et l'algèbre… Nous présentons ci-dessous quelques réponses significatives :

- **Apports de Casyopée pour l'apprentissage des fonctions :**

  « On peut utiliser les différentes variables, tracer des figures, visualiser des fonctions, faire un tableau de signe et trouver la dérivée…. » (Elina).

  « Un très grand avantage est la conversion de calcul géométrique en fonction. C'est énorme » (Kevin).

  « Le choix de la variable n'est pas souvent aborder dans les problèmes sur papier. Le logiciel m'a permis de mieux comprendre le but d'une variable » (Marc).

  « Les calculs de dérivée, le développement et la factorisation d'une fonction et les représentations graphiques des fonctions obtenues… Casyopée plus explicite et pratique. On a des images et des représentations pour mieux comprendre » (Garcia).

  « On voit ce qui se passe. On a une perception des étapes à faire aboutir à notre recherche… C'est plus intéressant car on voit ce qu'on fait (figures, calculs,…). On se repère facilement et on voit nos erreurs » (Chahinez).

- **Par rapport à une calculatrice :**

  « Casyopée est plus rapide et plus commode que sur une calculatrice…. On a en même temps le côté géométrique et algébrique du problème. On voit mieux comment une fonction « réagit ». C'est pratique et intéressant » (Chloé).

- **Passage Géométrie – Algébrique :**

  « Casyopée permet de faire les calculs facilement d'une dérivée, de factoriser, de calculer les zéros… et d'en plus d'avoir directement à côté dans la même fenêtre la modélisation graphique de la fonction. Il permet sur un problème géométrique d'étudier facilement en calculer les distances, autres calculs géométriques ; de pouvoir établir des variables qui pourront ensuite servir pour étudier le problème par des fonctions… Il est moins d'abstrait et plus de concret » (Amandine).

  « La possibilité de créer des variables, le passage d'une fenêtre à l'autre : géométrie ↔ fonction » (Karl).

On peut reconnaître ici un double développement de connaissances sur Casyopée et de connaissances mathématiques sur les fonctions dans des processus de genèse instrumentale.

Les élèves ont eu les remarques positives par rapport aux caractéristiques spécifiques de Casyopée, notamment la modélisation fonctionnelle et la possibilité de relier dynamiquement les deux modules géométrique et algébrique. Les potentialités de Casyopée ont été perçues comme éléments favorables pour l'apprentissage des fonctions car elles ont permis d'aborder le problème de manière spécifique, pratique et intéressant. Nous pouvons repérer quelques éléments d'instrumentation dans les réponses de Chloé et Marc. Les caractéristiques spécifiques de Casyopée ont affecté leur compréhension sur les fonctions, notamment la signification de la notion de variable. La genèse instrumentale a créé chez les élèves une motivation à la fin de l'expérimentation et a permis un travail significatif sur ce type de problème.

6.6 ENTRETIENS

6.6.1 Contexte

Les entretiens avec le binôme Elina-Chloé et avec le professeur de la classe (Xavier) ont été réalisés en mai 2009 après l'épreuve pratique en Terminale S. L'objectif de l'entretien avec le binôme visait essentiellement à cerner et dégager l'évolution des problèmes d'instrumentation et d'instrumentalisation de Casyopée. L'interview avec l'enseignant nous permet d'avoir en plus des remarques précises sur l'évolution de ce binôme.

6.6.2 Scénario

Le scénario de la séance d'entretien se compose de trois parties :

- Première partie : Entretien avec le binôme Elina-Choé. Les élèves travaillent sur un problème donné en salle informatique. Il s'agit de maximiser l'aire d'un triangle inscrit dans une courbe.
- Deuxième partie : Entretien avec le professeur
- Troisième partie : Exploitation d'un travail avec le profeseur.

Nous présentons maintenant le scénario en détail :

Partie 1. Entretien avec Elina-Chloé

Objectif : Faire dégager des problèmes d'instrumentation, considérer l'exécution des tâches, préciser des obstacles instrumentaux et mathématiques.

Questions prévues : Il est demandé à ce binôme de préciser et interpréter des actions et des phases cruciales au fil de leur résolution de problème donné.

- Phase 1 : Utilisation des fonctionnalités spécifiques de Casyopée
- Phase 2 : Etapes de modélisation fonctionnelle avec Casyopée
- Phase 3 : Opinions sur l'usage de Casyopée.

Partie 2. Entretien avec le professeur

- Questions sur l'évolution du binôme Elina-Chloé pendant et après l'expérimentation.

Partie 3. Exploitation d'un travail fait avec le professeur.

Figure 6.48. Scénario de l'entretien

6.6.3 Résultat

a. Partie 1. Entretien avec le binôme Elina-Chloé

- **Phase 1 : Utilisation des fonctionnalités spécifiques de Casyopée :**

A propos des questions sur l'utilisation des fonctionnalités spécifiques de Casyopée, nous avons porté notre attention sur la genèse instrumentale du binôme, notamment sur le développement conjoint de connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur Casyopée dans les réponses du binôme. La genèse leur a permis de comprendre mieux les notions de variable, de fonction et le sens d'une modélisation fonctionnelle des situations géométriques en s'appuyant sur l'outil « calcul géométrique » de Casyopée :

Intervieweur : *Comment créer un calcul géométrique ?*

Chloé : *Dans le menu « Créer/calcul » on crée un calcul géométrique.*

Intervieweur : *D'accord, et ça va vous servir quand ?*

Elina : *Pour calculer des distances, des aires,…*

Chloé : *Quand tu auras besoin de variables, et après si on a un calcul avec variables.*

Intervieweur : *Et finalement, pour résoudre quel type de problème ?*

Elina : *Géométrie.*

Intervieweur : *Et comment on l'utilise pour la géométrie ?*

Chloé : *D'abord, on fait des conjectures, et après on essaie de trouver des calculs qui nous ont aidé de valider des conjectures. Après, on exporte des calculs qu'on a faits dans la fenêtre de géométrie dynamique… On calcule l'aire du triangle, et on a défini une variable pour l'associer à une fonction comme le x.*

Intervieweur : *Et comment vous avez fait pour l'associer à une variable ?*

Elina : *C'est peut-être l'abscisse de M, ou de certaines distances qui varient… Il faut quand même que la variable qu'on a choisie nous aide à résoudre… En fait, il y a des choix mais il faut vraiment choisir une bonne variable.*

Chloé : *Il faut que l'aire varie aussi en fonction de cette variable.*

Intervieweur : *Et quand vous êtes là, qu'est-ce que vous faites ?*

Chloé : *Là on choisit et exporte la fonction.*

Intervieweur : *Oui, et après avoir exporté la fonction, qu'est-ce qui se passe ?*

Chloé : *On a la valeur des coefficients de l'expression. Elle nous servira, par exemple, à calculer la dérivée. Après on sert de la fonction qu'on a trouvée pour résoudre le problème.*

Intervieweur : *Et comment cadrer le graphe ?*

Chloé : *On peut grandir, modifier l'unité du repère. On peut déplacer le repère et zoomer sur une partie de la fenêtre.*

Intervieweur : *Et le petit point qui est marqué sur le graphe, il représente quoi ?*

Elina : *C'est le point mobile M.*

Intervieweur : *Oui, c'est bien.*

Le binôme a montré une maîtrise des fonctionnalités de Casyopée ainsi qu'une meilleure compréhension sur les notions de variable et de fonction. La signification de fonction a été perçue comme une modélisation fonctionnelle d'une dépendance géométrique entre grandeurs (entre distance et aire) et ensuite la fonction obtenue est considérée comme moyen pour résoudre le problème.

- **Phase 2 : Etapes de modélisation fonctionnelle avec Casyopée :**

Pour la seconde phase de l'entretien, nous avons porté notre attention sur le processus de modélisation fonctionnelle avec Casyopée. Les réponses du binôme ont bien montré leur acquisition d'un processus de modélisation fonctionnelle. Cependant, une double décontextualisation mathématique et instrumentale chez ce binôme est encore limitée. Dans ses réponses, il se situe encore dans le contexte du problème donné et de Casyopée.

Intervieweur : *Et finalement, quelles sont les étapes de la modélisation ?*

Chloé : *On trace la figure, on fait des conjectures.*

Elina : *On fait le calcul*

Chloé : *Oui, on trace la figure, on fait le calcul.*

Chloé : *Et après le calcul, justement on regarde ce qui se passe, et on conjecture.*

Elina : *Ensuite, on choisit la variable*

Chloé : *Oui, on exporte la fonction et essaie de valider la conjecture.*

Les extraits ci-dessus nous ont bien montré la maîtrise de ces élèves pour l'usage des fonctionnalités spécifiques ainsi qu'une acquisition d'un sens de modélisation fonctionnelle avec Casyopée. Dans la partie ci-dessous, nous analyserons l'entretien avec l'enseignant afin de mieux comprendre l'usage de Casyopée dans sa classe pendant l'expérimentation et l'évolution de ce binôme tout au long de l'expérimentation.

- **Phase 3 : Opinions sur l'usage de Casyopée :**

Pour les questions concernant l'opinion sur l'usage de Casyopée, il est à noter un sentiment positif après deux ans. Le premier usage n'est pas toujours facile, mais à la fin de l'expérimentation, les élèves ont pu utiliser facilement Casyopée pour leur épreuve pratique en Terminale S :

Intervieweur :	*Quand avez-vous commencé à utiliser Casyopée ?*
Chloé :	*L'an dernier*
Intervieweur :	*D'accord. Avez-vous une opinion sur Casyopée ? Cette opinion a-t-elle évolué ?*
Chloé :	*On a compris. Ce n'est pas facile mais c'est un peu tout le temps les mêmes manipulations. On a le problème de manipulation : on crée la figure, après on étudie le choix des variables, après c'est toujours l'étude de fonctions. C'est bien parce que du coup ça permet de visualiser ce qu'on fait...*
Intervieweur :	*Vous avez fait l'épreuve pratique aussi ?*
Chloé :	*Oui*
Intervieweur :	*Et là, comment ça s'est passé ?*
Elina-Chloé :	*C'est intéressant. On utilise Casyopée.*
Chloé :	*On a plus d'habitude d'utiliser Casyopée donc c'est tout facile…*

b. Partie 2. Entretien avec l'enseignant

- **Sur l'usage de Casyopée en classe :**

A part des séances d'expérimentation, les élèves ont eu l'occasion d'utiliser Casyopée dans le cadre des séances de TP. Selon les remarques de l'enseignant, Casyopée a été bien utilisé par l'ensemble des élèves.

> *« Suite à la séance expérimentale en novembre, j'ai utilisé Casyopée dans le cadre de TP en salle ordinateur. Je l'ai utilisé notamment pour étudier une famille de fonctions dépendant des paramètres. Il y a une partie conjecturée des variations possibles, et puis en explorant des paramètres et en observant des courbes. Et puis après, toutes ces conjectures devaient être justifiées, démontrées en utilisant les possibilités du logiciel… On a étudié aussi un problème de tangente. C'est un problème on a étudié sous forme de TP. Avec Casyopée, il a été bien fait et traité par l'ensemble des élèves. Ça nous a rassurés par rapport un sujet traité avec un tableur. Les élèves, ont réussi et ont été assez impressionnés par leur faculté de résoudre des problèmes, d'aller jusqu'à l'interprétation des résultats… ».*

- **Sur le profil des élèves :**

> *« Elina est une très bonne élève, qui a d'excellents résultats. Chloé est une élève qui est intéressée par Casyopée. Elle a découvert beaucoup de choses avec Casyopée. Ce n'est pas une élève qui a forcément un excellent niveau en mathématiques, mais c'est une élève qui est assez intéressée, qui aime bien comprendre des choses. Mais souvent elle a du mal en mathématiques parce qu'elle ne comprend pas. Ce sont des élèves qui sont très motivées par la chose scolaire. Ils sont plus très sensibles à un investissement qu'on peut avoir. Donc travailler avec un logiciel, de leur prévoir des usages, des activités construites, ... ça les intéresse beaucoup ».*

- **Sur les difficultés des élèves :**

Une des difficultés que l'enseignant a repérée chez les élèves est le choix de la variable. Cette remarque est visible dans les réponses des élèves dans le questionnaire. Selon lui, les élèves ont du mal à choisir une variable appropriée car la modélisation fonctionnelle avec Casyopée donne un autre sens par rapport à la pratique courante des cours :

> *« Première difficulté qui est fondamentale, c'est le choix de la variable. Quelque part dans un problème il y a un point mobile… Qu'est-ce qui fait varier ce point ? Et de là on comprend que la résolution du problème va être en choisissant une variable qui influe sur la position du point et qui va permettre d'expliquer sa position et d'étudier une aire, une distance en fonction de ça. C'est quelque chose que les élèves ont énormément de difficultés à comprendre. Je dirais que dans la pratique courante des cours, ça commence toujours par « Soit x…. » et puis tout vient automatiquement, mais quel x choisir ? C'est quelque chose de fondamental en terme de difficulté ».*

Une autre difficulté que l'enseignant a repérée est la signification des expressions algébriques. La facilité d'obtention des expressions algébriques masque pour les élèves leur signification :

> *« La difficulté que j'ai repérée, c'est l'autonomie par rapport aux expressions algébriques… la facilité d'obtention des formules par Casyopée fait que les élèves sont complètement concentrés sur la signification de la fonction comme modèle et ne s'intéressent pas à l'expression obtenue. On libère les élèves de la génération de la fonction, mais on souhaiterait qu'ils fassent le lien entre l'expression pré-algébrique en terme de grandeurs et l'a formule calculée par Casyopée. Ça devrait, mais dans la réalité ça leur pose quand même des difficultés. Ça met en lumière les difficultés sur la compréhension des formules, mais ça ne les résout pas. C'est un truc que j'ai repéré dans l'expérimentation et dans l'épreuve pratique ».*

Ceci rejoint notre observation que pour les élèves, l'exportation sert d'abord à obtenir le graphe de la fonction. Les élèves observent assez souvent l'intervalle de définition, mais ignorent la formule algébrique elle aussi calculée par Casyopée. Le fil directeur que constitue la dépendance fonctionnelle du cadre géométrique au cadre algébrique est bien mis en évidence par Casyopée, mais dans le cadre algébrique, le registre graphique domine au détriment du registre symbolique.

c. Partie 3. Exploitation d'un travail fait avec le professeur

1). Contexte

En dehors des trois séances expérimentales de l'ingénierie, les élèves ont eu l'occasion de travailler avec Casyopée lors des séances de TP réalisées par le professeur de la classe. Nous pensons donc qu'il est nécessaire d'éclairer l'instrumentation hors du contexte direct de l'ingénierie et dans une situation plus proche des problèmes posés aux épreuves pratiques du Baccalauréat. Il s'agit de l'étude d'une famille de fonction avec Casyopée. Cette séance a été menée au second semestre en Terminale S (en janvier 2009).

2). Fiche élève

Le problème donné aux élèves est inspiré d'un exercice du livre Maths repères Terminale S (Edition 2008, page 116). Voici la fiche élève :

Fiche élève
Classe: Terminale S Date:
Lycée:
Nom et prénom:

Etude d'une famille de fonction

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit k un paramètre réel. On s'intéresse à la fonction f_k définie par $f_k\left(x\right)=xe^{-x}+kx$. On appelle $\left(C_k\right)$ sa courbe représentative.

Le but du problème est d'étudier la famille de fonction f_k.

Première partie : étude d'un cas particulier

Etudier les variations de la fonction f_2 définie par $f_2\left(x\right)=xe^{-x}+2x$.

Deuxième partie : étude du cas général

Examiner la courbe pour différentes valeurs de k et conjecturer des propriétés de la fonction.

Troisième partie : justification

Démontrer les conjectures.

3). Analyse a priori

L'objectif est d'étudier une famille de fonction dépendant d'un paramètre dans l'environnement Casyopée. En appuyant sur une démarche expérimentale, il est demandé aux élèves d'utiliser Casyopée pour :

- définir une fonction dépendant d'un paramètre
- piloter le paramètre pour explorer les différentes variations de la fonction
- émettre des conjectures
- démontrer les conjectures

Le questionnement est assez ouvert permettant aux élèves de prendre des initiatives, d'émettre des conjectures, de choisir des outils mis à disposition dans l'environnement et de mettre en œuvre des démarches de preuve. A l'issue de la séance, les élèves rédigent un compte-rendu de l'activité.

Apports du logiciel : En soulageant l'élève des techniques de calcul,

- il favorise les prises d'initiatives dans les démarches expérimentales et de preuve

- il aide à créer un paramètre et facilite des calculs complexes
- il participe à la compréhension des différentes écritures algébriques

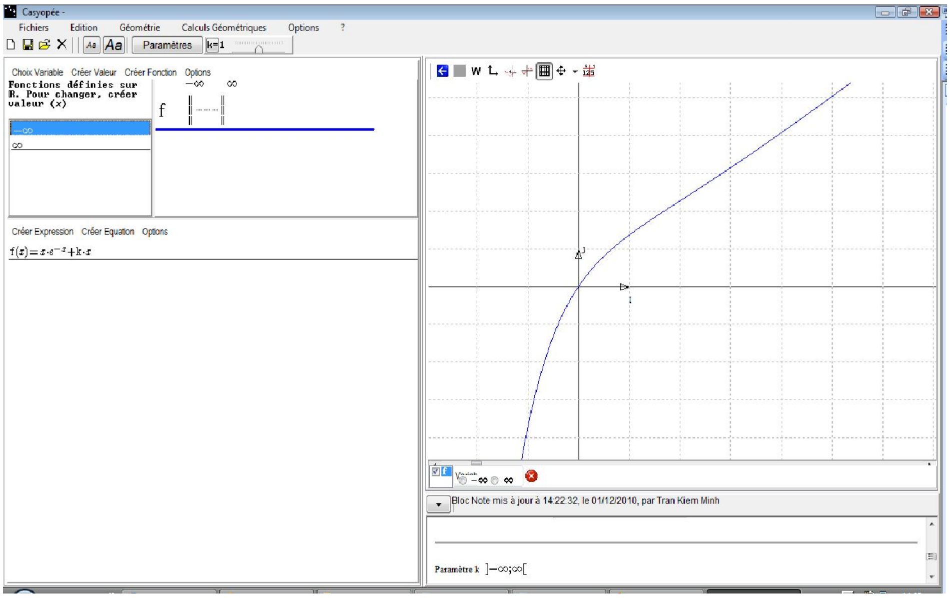
il favorise les conversions entre les registres symbolique, graphique et numérique.

Première partie : $k = 2$

Pour ce cas, les élèves devraient calculer la dérivée seconde de la fonction $f_2(x) = xe^{-x} + 2x$ afin de trouver ses variations. La fonction $f_2^{'}(x) = 2 + (1-x)e^{-x}$ admet un minimum en $x = 2$ sur l'intervalle ouverte $(-\infty;+\infty)$ et $f_2^{'}(2) = 2 - \frac{1}{e^2} > 0$. D'où la fonction $f_2(x)$ est croissante sur l'ensemble de définition R.

Deuxième partie : le cas général

Il est demandé aux élèves d'explorer l'allure de la courbe de la fonction pour différentes valeurs de *k* et de conjecturer des propriétés de la fonction suivant les valeurs du paramètre. Les élèves devraient piloter le paramètre *k* vers les différentes valeurs en observant l'allure de la courbe représentative. Ces activités d'exploration et de conjecture sont importantes et encouragées dans les problèmes posés à l'épreuve pratique du Baccalauréat où l'approche expérimentale est préconisée. Nous nous attendons à ce que les élèves explorent l'allure de la courbe et les variations de sa fonction avant d'en chercher une preuve algébrique.



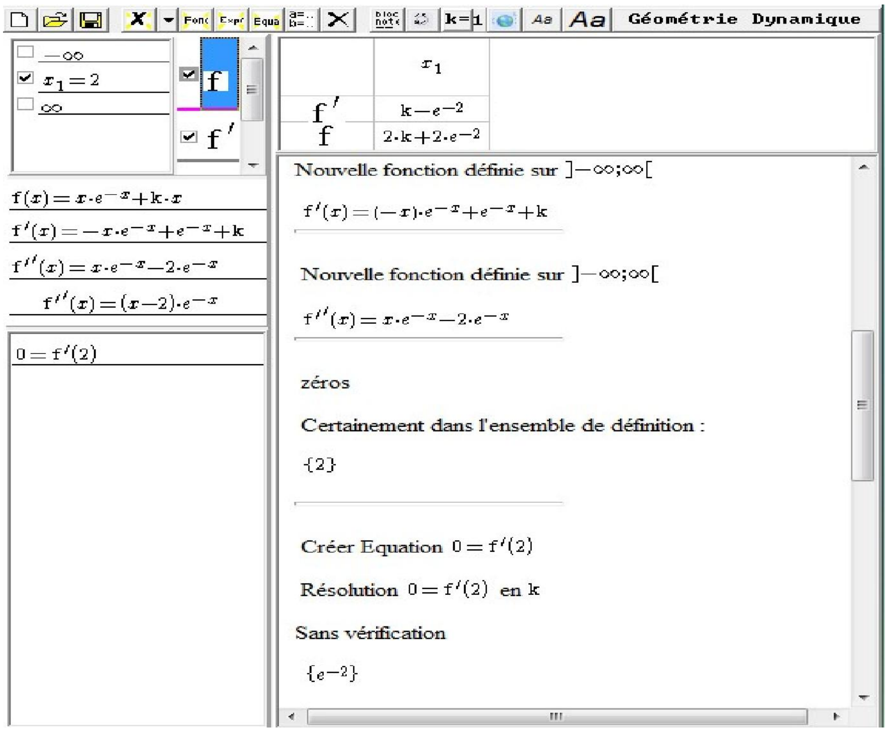
Troisième partie : justification

Les élèves devraient calculer la dérivée seconde de la fonction $f_k(x)$ et considérer le signe de $f_k^{'}(x)$ suivant les valeurs du paramètre *k*. Voici le tableau de variation de la fonction dérivée $f_k^{'}(x)$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f_k''(x)$		$-$	0	$+$	
$f_k'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$k-\frac{1}{e^2}$	$\nearrow$	k

On peut en déduire les variations de la fonction $f_k(x)$ selon les valeurs du paramètre k comme suivant :

- $k-\frac{1}{e^2}\geq 0 \Leftrightarrow k\geq\frac{1}{e^2}$: la fonction $f_k(x)$ est croissante sur R.
- $0<k$ et $k-\frac{1}{e^2}<0$ ou $0<k<\frac{1}{e^2}$: il existe deux valeurs x_1, x_2 telles que $x_1<2<x_2$ et $f_k(x)$ soit croissante sur $(-\infty; x_1)$, décroissante sur $(x_1; x_2)$ et croissante sur $(x_2; +\infty)$.
- $k\leq 0$: il existe une certaine valeur x_0 telle que la fonction $f_k(x)$ soit croissante sur $(-\infty; x_0)$ et décroissante sur $(x_0; +\infty)$.



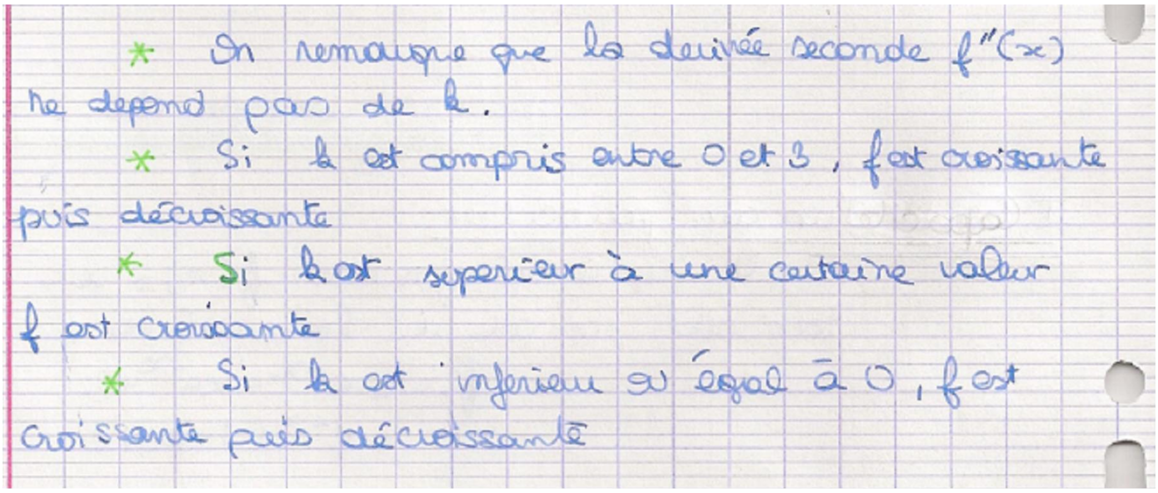
Aspects instrumentaux : définition d'une fonction dépendant d'un paramètre, pilotage du paramètre, l'exploitation des outils de calcul formel de Casyopée pour la justification.

4). Analyse de travaux d'élèves

Enoncés de conjectures

Voici quelques exemples de conjectures. Elles illustrent la variété des conjectures émies par les élèves :

- Le cas d'Elina-Chloé :

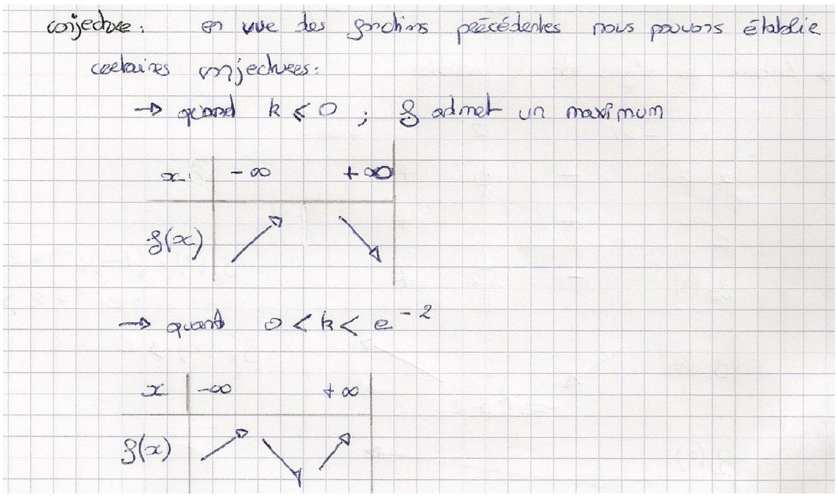


* On remarque que la derivée seconde $f''(x)$ ne depend pas de k.
* Si k est compris entre 0 et 3, f est croissante puis décroissante
* Si k est superieur à une certaine valeur f est croissante
* Si k est inferieur ou égal à 0, f est croissante puis décroissante

Ce binôme décrit l'ensemble des cas. Son travail de justification doit l'amener à préciser « la certaine valeur » qu'il mentionne dans sa conjecture. Cependant, sa conjecture sur l'intervalle $0 < k < 3$ n'est pas correcte.

- Autres binômes :

<u>Binôme 1 :</u>



conjecture : en vue des fonctions précédentes nous pouvons établie certaines conjectures :
→ quand $k \leq 0$; g admet un maximum

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$	↗		↘

→ quand $0 < k < e^{-2}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$	↗	↘	↗

Ce binôme a fait référence à la valeur $k = e^{-2}$ (la solution de l'équation $f_k'(2) = 0$). Sa recherche de conjecture ne s'est pas limitée à une exploration graphique, mais à des appels au calcul.

<u>Binôme 2 :</u>

On remarque, en changeant certaines valeurs, que si :
$k \leq 0$, $f(x)$ est d'abord croissante puis décroissante.

À partir du moment que k est supérieur à une valeur, f est strictement croissante.

Ce binôme ne mentionne que les cas qui lui ont paru caractéristiques suite à son exploration graphique : fonction décroissante puis croissante lorsque $k \leq 0$, fonction strictement croissante lorsque k est plus grand qu'une valeur. Cependant, sa recherche de conjecture n'est pas exhaustive.

Rédactions de démonstration

Nous présentons maintenant deux rédactions de preuve qui reflètent la qualité des travaux des élèves et leurs difficultés rencontrées.

- Le binôme Elina-Chloé :

→ $f''(x) = (x-2)e^{-x}$: la dérivée seconde ne dépend pas de k.

→ Comme $f'(x)$ atteint un extremum pour $x=2$ on calcule pour quelle valeur de k cet extremum est égal à 0 $f'(2) = e^{-2}(e^2k-1)$
Par conséquent on pose $f'(2) = 0$ puis on résout l'équation $e^{-2}(e^2k-1)=0$

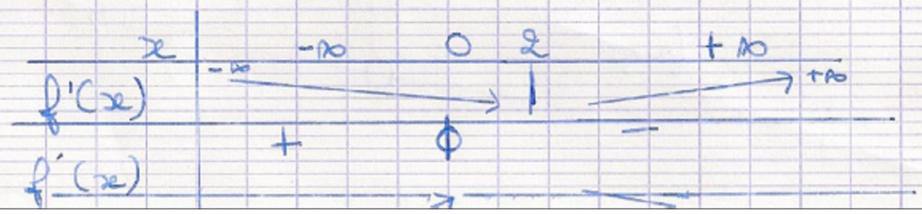
$e^2k-1=0$

$e^2k=1$

$k = \frac{1}{e^2} = e^{-2}$

Donc f est croissante quand k est supérieur à e^{-2}

→ Quand $k \geq 0$



$f(x)$ est bien croissante puis décroissan[te] sur $]-\infty\,;+\infty[$ quand k prend une valeur inferieure ou égale à 0

→ quand $0<k<e^{-2}$

$\lim\limits_{x \to k} f'(x) = k$ $\qquad$ $k>0$

et

$\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = +\infty$ $\qquad$ $f'(2)<0$

Il existe deux valeurs (une sur $]-\infty\,;2[$ [et] l'autre sur $]2\,;+\infty[$) qui annulent $f'(x)$

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↘		$f'(2)<0$	↗	$k>0$
$f'(x)$	$+$	|	$-$		|	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗	

Donc $f(x)$ est bien croissante, décroissante pu[is] croissante sur $]-\infty\,;+\infty[$ quand $0 \leq k \leq e^{-}$[…]

La démonstration a abouti. Le binôme a fait référence aux données nécessaires et a choisi les outils appropriés.

- Autre binôme :

Deuxième partie : $f(x) = xe^{-x} + kx$

Conjecture : _ La dérivée seconde ne dépend pas de k

_ Quand $k > e^{-2} \Rightarrow f$ est croissante.

_ Quand $0 < k \leq e^{-2}$ =

x	$-\infty$		$+\infty$
f	↗	↘	↗

_ Quand $k \leq 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f	↗	↘

Troisième partie : $f(x) = xe^{-x} + kx$

$f'(x) = -xe^{-x} + e^{-x} + k$

$f''(x) = (x-2)e^{-x}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f'	↘	$e^{-2}(e^2 k - 1)$	↗

Le signe de $f'(x)$ dépend de k

On cherche à savoir quand $e^{-2}(e^2 \times k - 1) \geq 0$

~~soit que~~

$e^{-2}(e^2 \times k - 1) > 0$ quand $k > e^{-2}$

Quand $k > e^{-2}$

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	$+$	
f	↗	

Quand $0 < k \leq e^{-2}$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'	$+$	$-$	$+$
f	↗	↘	↗

La démarche est correcte. L'élève a compris que le signe de $f_k^{'}(x)$ dépend de *k*. Il a justifié correctement une de ses conjectures : lorsque $k \geq e^{-2}$, f_k est croissante. Il reconnaît que le signe de $f_k^{'}(x)$ dépend aussi de la limite de $f_k^{'}(x)$ en $+\infty$ et donc du signe de *k* ($\lim\limits_{x \to +\infty} f_k^{'}(x) = k$) mais il ne le justifie pas.

Remarques et évaluation du professeur de la classe

Compétences	Remarques du professeur
Réaliser une production de qualité	Les élèves ont su représenter la situation en créant une fonction dépendant d'un paramètre dans l'environnement Casyopée.
Faire une recherche active	La recherche est organisée. La démarche expérimentale est dynamique et autonome. L'élève a développé lui-même les outils de son expérience. Il a utilisé de façon pertinente les outils d'exploration de Casyopée : représentation graphique, pilotage d'un paramètre, utilisation d'une table de valeurs.
Enoncer une conjecture	L'élève a su émettre des conjectures cohérentes avec le problème posé. Il a été capable préciser une conjecture grâce aux outils de calcul mis à disposition. Il a su distinguer le statut d'une conjecture à celui d'une propriété démontrée.
Savoir utiliser les résultats du cours	L'élève a eu une exploitation du logiciel de calcul formel en conformité avec les méthodes souvent utilisées en analyse. Il a su élaborer un schéma de démonstration en précisant les différentes étapes : étude du signe de $f_k^{''}$, étude de variation de $f_k^{'}$, le signe de $f_k^{'}$ suivant les valeurs de *k*. En rentrant dans une démarche de preuve, l'élève a pu être éventuellement amené à préciser sa conjecture, la remettre en question.
Rédiger une démonstration structurée	L'élève rédige un raisonnement cohérent à partir des données de l'énonce mais qui n'aboutit pas nécessairement. La rédaction, rigoureuse et organisée, s'appuie sur les outils du cours. En accord avec sa recherche effectuée avec le logiciel, l'élève sait retranscrire par écrit les pas de sa démonstration, à l'aide du vocabulaire et des notations appropriées.
Rédiger une démonstration complète	La démonstration a abouti même si la rédaction n'est pas rigoureuse et structurée. L'élève fait référence aux données nécessaires et a choisi les outils appropriés. Il a pu justifier l'étude du cas général.

Conclusions

Dans ce chapitre, nous nous sommes centrés principalement sur les observations plus détaillées du binôme Elina-Chloé. Nous avons visé à dégager des éléments concernant la genèse instrumentale des élèves, notamment l'articulation entre le développement de leurs connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur le logiciel. Nous avons également éclairé l'apport de la Typologie d'activités pour l'apprentissage des fonctions et avons considéré comment les activités des élèves dans les différentes registres de Casyopée peuvent favoriser une compréhension flexible des fonctions.

Notre expérimentation a duré pendant un temps long de l'année scolaire 2008 – 2009. L'ingénierie comprend trois séances d'observation en classe, un questionnaire de bilan, et un entretien avec le binôme observé et avec l'enseignant suivi de l'analyse de travaux réalisés avec le professeur. Nous avons continué à exploiter les potentialités de l'environnement Casyopée pour approcher la notion de fonction via la modélisation fonctionnelle des dépendances géométriques, à travers la mise en place des situations d'apprentissage appropriées.

A la fin de notre expérimentation, nous avons trouvé les éléments positifs en termes des progrès des élèves pour l'usage de Casyopée et pour la compréhension des fonctions. Nous allons présenter en détails les résultats de notre étude dans le chapitre suivant.

Chapitre 7

Résultats

Introduction

Dans ce chapitre, nous essayons de dégager quelques résultats de notre travail de recherche. Notre méthodologie est de comparer les observations des élèves réalisées pendant deux expérimentations. Nous considérons ici trois étapes importantes : deux séances d'observations aux moments clés dans chaque année d'expérimentation et les résultats d'un entretien et d'un questionnaire à la fin de la seconde expérimentation. Pour la première expérimentation dans le cadre du projet ReMath, nous choisissons la dernière séance d'observation (séance 6) comme un premier moment d'observation clé dont les données recueillies avaient été analysées dans le chapitre 5. Le second moment d'observation clé est la séance C2 de notre expérimentation où les élèves ont beaucoup exploité les fonctionnalités de Casyopée pour résoudre le problème donné.

7.1 PROGRESSION DANS LA REALISATION DES TACHES

Nous rappelons ici les éléments d'observation clés concernant la séance 6 en Première et la séance C2 en Terminale.

7.1.1 Le cas du binôme Elina-Chloé

Nous comparons maintenant des éléments significatifs issus de la réalisation des tâches par le binôme dans deux séances mentionnées ci-dessus.

a. Conception de la figure

Les observations ont montré que cette tâche est difficile et demande de mobiliser des connaissances mathématiques concernées. Les difficultés que le binôme a rencontrées concernent principalement la distinction entre point libre, point semi-libre et point restreint.

Durant la première expérimentation, le binôme avait passé beaucoup de temps à construire la figure. Il avait fait d'abord une construction « molle » du quadrilatère $MNPQ$ en prenant en compte des propriétés de parallélisme et perpendicularité des côtés d'un rectangle seulement « au jugé ». La déformation de la figure lors du déplacement du point libre M l'a aidé à reconnaître cette erreur. Cependant, il a montré des adaptations insuffisantes à ce feedback et l'observateur a dû intervenir pour l'aider. Dans la deuxième expérimentation, ces difficultés restent encore mais ce binôme a pu les corriger et les dépasser sans l'aide de l'observateur.

b. Explorations et conjectures

Nous avons repéré une difficulté d'ordre instrumental de ces élèves lors de la première expérimentation. Il s'agit de la confusion entre deux actions : « créer un calcul » et « choisir une variable » qui correspondent à deux icônes adjacentes dans onglet « Mesures » de Casyopée. D'autre part, le binôme a fait une erreur en tapant le calcul géométrique de l'aire

$MN \times MP$ au lieu de $MN \times MQ$. Il a fait ensuite varier le point M et a observé des valeurs numériques croissantes alors que visiblement l'aire diminuait sur la figure. Ce feedback l'a aidé à repérer l'erreur et la corriger. Quant à la recherche des conjectures, le binôme l'a faite sur la position du point N et non sur celle de M qui est le point libre. Il n'est pas intéressé aux variations de l'aire du rectangle $MNPQ$ mais uniquement à la valeur du maximum.

Durant la seconde expérimentation, ce binôme a beaucoup exploré des propriétés de l'aire, tant locales que globales. Il a fait des conjectures sur la position exacte du point libre M ainsi que sur le sens de variation de la valeur de l'aire. Nous pensons que ces explorations locales et globales sont significatives pour les élèves avant de passer au niveau de la fonction mathématique. Nous avons également trouvé dans leurs échanges oraux des signifiés liés à l'idée de co-variation comme « croissante », « décroissante », …

c. Modélisation fonctionnelle des dépendances géométriques

L'action de modéliser une dépendance géométrique est principalement gérée par deux boutons « Choisir une variable », « Exporter une fonction » et aussi par des feedbacks associés dans Casyopée. L'observation a montré que ces deux élèves avaient du mal à réaliser ces actions pendant la première expérimentation. D'abord, le passage au choix d'une variable n'était pas spontané et ils ont besoin d'aide de l'observateur. Enfin, ils ont choisi des variables peu appropriées comme la distance *NP*, puis *MQ*. L'action d'exporter une fonction a nécessité aussi l'intervention de l'observateur. Seulement grâce aux feedbacks du logiciel, ils ont finalement choisi une variable adéquate x_M.

En revanche, l'observation dans la seconde expérimentation a montré l'évolution marquante de ces deux actions de modélisation (choix de la variable et exportation de la fonction). Les deux élèves ont rapidement et spontanément réalisé ces actions sans avoir besoin des interventions de l'observateur. L'extrait suivant montre cette évolution :

Chloé :	*Choix d'une variable ? La dernière fois, on a fait avec la hauteur.*
Elina :	*Non, oM. Je pense que c'est ça va pour une variable*
Chloé :	*Oui.* {Elle valide cette variable puis exporte la fonction}
Elina :	*Son ensemble de définition ?*
Chloé :	*C'est* $\left]-\infty;+\infty\right[$. *Ah non, c'est* $\left[0;10\right]$
Elina :	*Regarde! C'est marqué, l'ensemble de définition.*

Cependant, leur acquisition d'un processus de modélisation fonctionnelle plus général reste en cours. L'extrait suivant de l'entretien à la fin de l'année avec ces deux élèves montre bien que leur conception d'un problème d'optimisation reste contextualisée à Casyopée et au contexte géométrique :

Observateur :	*Et finalement, quelles sont les étapes de la modélisation ?*
Chloé :	*On trace la figure, on fait des conjectures.*

Pour Chloé, la modélisation renvoie d'emblée à une figure géométrique où l'on explore un phénomène.

Elina : *On fait le calcul.*

Chloé : *Oui, on trace la figure, on fait le calcul.*

Elina et Chloé se réfèrent aux observables de Casyopée (figures en géométrie dynamique et calculs géométriques).

Chloé : *Et après le calcul, justement que l'on regarde ce qui se passe, et on conjecture.*

Elina : *Ensuite, on choisit la variable.*

Chloé : *Oui, on exporte la fonction et essaie de valider la conjecture.*

Le choix de la variable et le passage à une expression algébrique sont vus à travers les outils de Casyopée.

Ainsi, l'évolution des élèves montre la potentialité *a-didactique* de la tâche proposée et l'effet positif des feedbacks du logiciel, mais aussi qu'une décontextualisation serait nécessaire.

d. Preuve algébrique

La première expérimentation a témoigné d'une réussite faible du binôme pour cette tâche. En fait, après avoir reconnu la parabole dans la fenêtre graphique, il ne savait pas comment exploiter et mobiliser leurs connaissances. Il avait besoin d'interventions de l'observateur pour se souvenir de la formule $-\frac{b}{2a}$ des coordonnées du maximum et l'utiliser. Finalement, il n'a obtenu la réponse qu'en considérant une valeur particulière pour les paramètres.

Dans la seconde expérimentation, ce binôme a proposé une démarche correcte pour la preuve en utilisant les outils algébriques proposés par Casyopée. Il était à l'aise avec des fonctionnalités de Casyopée comme « Développer », « Factoriser » et a utilisé les nouvelles fonctionnalités comme « Dérivée », « Justifier/Signes » (les nouvelles fonctionnalités utilisées dans cette expérimentation) pour construire une preuve. Le binôme a utilisé les menus « Calculer/Zéros » pour calculer les zéros de la dérivée. Il a obtenu deux racines dépendant du paramètre a. Il a substitué la valeur numérique *5* au paramètre a puis a construit un tableau de variation pour cette valeur du paramètre.

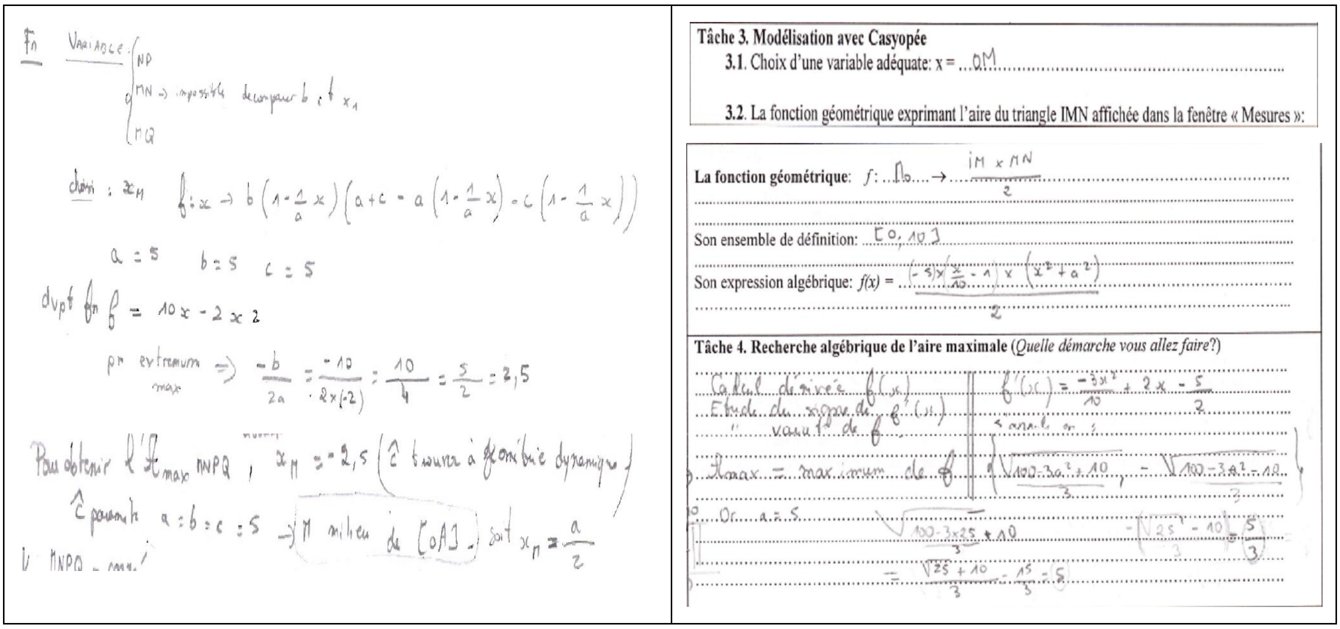


Figure 7.1. Preuves algébriques dans les deux expérimentations

e. Retour dans la fenêtre géométrique

Finalement, le binôme est retourné dans la fenêtre géométrique de Casyopée et a vérifié les positions trouvées du point libre *M* correspondant à l'aire maximale. Pour la deuxième phase, il a piloté le paramètre vers la valeur $a = 6$, a conjecturé et prouvé le problème.

7.1.2 Autres élèves

Durant la première expérimentation, tous les élèves observés avaient eu du mal à construire la figure dynamique et ont pris beaucoup de temps pour achever cette tâche. La plupart d'entre eux ont d'abord construit un rectangle *MNPQ* « mou » avec des points *M*, *N*, *P*, *Q* libres dans le plan. Ils s'aperçoivent de cette erreur en faisant bouger les points. Certains élèves ont eu besoin d'aide de l'enseignant ou de l'observateur pour finir la construction de la figure. La création d'un calcul géométrique de l'aire ne leur pose en général pas de problèmes. Pourtant, les élèves n'ont pas fait beaucoup d'explorations numériques et de conjectures sur les variations de l'aire. Les choix de variables sont variés mais l'exportation d'une fonction a très souvent nécessité l'intervention de l'enseignant. Pour la preuve algébrique, les élèves ont principalement travaillé en papier/crayon sur un cas particulier des paramètres et ont peu utilisé les outils algébriques disponibles dans Casyopée pour le calcul de la valeur maximale.

En général, la seconde expérimentation a témoigné d'une progression pour la réalisation des tâches données. Ils ont eu plus d'autonomie dans la construction de la figure. Tous les élèves observés ont correctement créé un calcul géométrique de l'aire du triangle *IMN*. On a observé beaucoup d'explorations numériques de l'aire. Sept binômes (*7* sur *11*) ont donné des conjectures exactes sur les positions du point *M* correspondant à l'aire maximale. Le choix des variables et l'exportation des fonctions ont été spontanés. Le choix de la variable *oM* est dominant. Concernant la preuve algébrique, sept binômes ont utilisé la dérivée pour chercher une réponse. Les élèves étaient à l'aise avec les fonctionnalités comme « Développer », « Factoriser » ou « Dérivée » de Casyopée.

7.2 DEVELOPPEMENT CONJOINT DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES ET DE CONNAISSANCES SUR L'ARTEFACT PENDANT LA GENESE

Nous interprétons ici les observations du point de vue de la genèse instrumentale, vue comme le développement conjoint de connaissances mathématiques et de connaissances sur Casyopée.

Les réponses des élèves données dans le questionnaire au premier trimestre de Terminale et dans l'entretien de fin d'année ont mis l'accent sur plusieurs phénomènes liés à l'usage de Casyopée. Il apparaît clairement que les premiers usages ont été difficiles à cause de la variété des fonctionnalités de Casyopée. Ils confondent une fonction et une fonctionnalité :

> *On ne connaît pas exactement les différentes fonctions, différents outils qu'il y a dans Casyopée. On obtient des calculs et on ne sait pas comment on a fait pour y arriver : déroulement de calcul* (Elina, questionnaire).
>
> *Le logiciel possède plusieurs fonctions, donc parfois on ne sait pas quelle fonction prendre* (Marc, questionnaire).

Les élèves ont également rencontré des difficultés relatives à l'artefact mais aussi aux mathématiques lors de la phase de modélisation fonctionnelle, particulièrement sur l'action de choisir une variable :

> *La chose la plus dure, c'est le choix de variable. Après, il faut bien choisir la bonne variable* (Chloé, entretien).

Ces élèves ont indiqué comment les difficultés ont été dépassées au long de l'expérimentation. Leur maîtrise de Casyopée est justifiée par l'utilisation régulière et l'aide de l'enseignant :

> *J'ai téléchargé Casyopée sur Google donc je l'utilise quelques fois pour l'entraînement… Au début, j'avais du mal à trouver quelques fonctionnalités pour utiliser mais maintenant c'est bon… Avec l'aide du professeur qui nous explique comment faire pour résoudre certains problèmes* (Chloé, questionnaire).

Malgré les difficultés repérées dans les premiers usages, les élèves ont eu à la fin de la seconde expérimentation des remarques positives par rapport aux caractéristiques spécifiques de Casyopée, notamment la modélisation fonctionnelle et la possibilité de relier dynamiquement les deux fenêtres géométrique et algébrique.

> *Le choix de variable, je trouve que cela est intéressant… Faire toutes les démarches est super : construction de la figure, tableau de variation, calcul de dérivée… Casyopée est plus rapide et plus commode qu'une calculatrice… On a en même temps le côté géométrique et algébrique du problème... On voit mieux comment une fonction « réagit », c'est pratique et intéressant* (Chloé, questionnaire).
>
> *Utiliser différentes variables, tracer la figure, visualiser les fonctions (plusieurs en même temps), faire le tableau de signe, trouver la dérivée* (Elina, questionnaire).

> *Casyopée permet sur un problème géométrique d'étudier facilement en calculant les distances géométriques, de pouvoir établir des variables qui pourront ensuite servir pour étudier le problème par des fonctions* (Amandine, questionnaire).

Les potentialités de Casyopée ont été perçues comme éléments favorables pour l'apprentissage des fonctions car elles ont permis d'aborder le problème de manière spécifique, pratique et intéressante. La genèse instrumentale a créé chez les élèves une motivation à la fin de la deuxième expérimentation et a permis un travail significatif sur ce type de problème.

Dans le tableau ci-dessous, nous soulignons les liens et les articulations entre la progression des usages de Casyopée et le développement des connaissances mathématiques du binôme Elina-Chloé entre la première et la seconde expérimentation. Comme nous l'avions dit, cette progression est représentative de celle observée chez une majorité des élèves de la classe.

Tâches	**Progression des usages de Casyopée**	**Développement de connaissances mathématiques**
Conception de la figure	- Correction plus rapide des erreurs après l'observation des déformations inattendues de la figure.	- Meilleure compréhension des dépendances fonctionnelles dans la figure.
Exploration et conjecture	- Définition correcte et utilisation d'un calcul géométrique pour l'aire - Distinction entre deux boutons « Créer un calcul » et « Choisir une variable ».	- Compréhension de la formule d'aire du triangle comme co-variation entre le point mobile M et la valeur de l'aire.
Modélisation fonctionnelle	- Usage spontané et facile des boutons « Choisir une variable » et « Exporter une fonction » - Adaptations rapides aux feedbacks du logiciel.	- Comprendre une dépendance fonctionnelle - Distinguer une dépendance fonctionnelle parmi des co-variations.
Preuve algébrique	- Utilisation facile des transformations algébriques de Casyopée. - Pilotage des paramètres.	- Compréhension de différents comportements de la fonction dépendant du paramètre. - Compréhension d'une fonction paramétrique comme une famille de fonctions.

Tableau 7.1. Développement conjoint de connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur Casyopée

En fait, chaque tâche mentionnée ci-dessus demande d'associer des connaissances mathématiques et des capacités à utiliser Casyopée. L'observation des élèves pendant un temps long nous a montré que l'épisode de modélisation fonctionnelle est une étape où la l'association entre connaissances mathématiques et connaissances sur l'artefact est particulièrement en jeu. Les manipulations avec Casyopée et les adaptations à ses feedbacks dans cette étape supposent de bien identifier des éléments mathématiques tels que calculs, variables et fonctions. Les fonctions, sous leur forme algébrique prennent sens comme résultat d'un processus de modélisation fonctionnelle.

7.3 CONNEXION DES ACTIVITES SUR LES FONCTIONS DANS LA TYPOLOGIE

Nous interprétons ici les observations du point de vue de la Typologie d'activités sur les fonctions, de façon à préciser l'évolution des élèves dans ces activités.

7.3.1 Système physique – Grandeurs et mesures

Création d'un calcul géométrique : La première expérimentation a témoigné d'une difficulté pour le passage du niveau « système physique » au niveau « grandeurs et mesures ». Le binôme a passé beaucoup de temps pour créer un calcul géométrique et choisir une variable appropriée. Il a fait une confusion d'ordre instrumental entre deux actions de créer un calcul géométrique et de choisir une variable. En entrant un calcul géométrique de l'aire du rectangle *MNPQ*, il a fait une erreur et a tapé $MN \times MP$. Dans la seconde expérimentation, le binôme a créé correctement un calcul géométrique de l'aire du triangle *IMN* sans l'intervention de l'observateur.

Choix d'une variable : L'action de choisir une variable est le passage du type d'activité enactive-iconique au type d'activité générative dans le même niveau « grandeurs et mesures ». Dans la première expérimentation, le binôme a eu du mal à choisir une variable adéquate et a eu besoin d'aides de l'observateur. Cette action a été améliorée pendant la seconde expérimentation. Le choix de la variable a été plus spontané et rapidement réalisé. Notons que, après avoir choisi une variable appropriée, ce binôme ne continuait pas à explorer la dépendance fonctionnelle et passaient rapidement à l'exportation d'une fonction.

7.3.2 Grandeurs et mesures – Fonctions mathématiques

Exportation d'une fonction : La première expérimentation a montré les difficultés des élèves dans le passage entre le niveau des grandeurs et celui des fonctions algébriques, marquées par les aides de l'observateur pour l'action d'exporter une fonction. Les feedbacks de Casyopée sur la complexité des formules algébriques de la fonction exportée les ont aussi aidés à trouver une variable plus appropriée.

A la fin de la deuxième expérimentation, les élèves ont montré une facilité pour ce passage ainsi que pour l'adaptation aux feedbacks concernés sans l'aide de l'observateur. Ils ont également identifié le domaine de définition de la fonction exporté.

7.3.3 Fonctions mathématiques – Système physique

Durant les séances d'observation en classe, nous avons trouvé que les élèves n'ont pas montré une connexion claire entre ces deux niveaux. Une des difficultés pour cette connexion pourrait être issue de l'ergonomie de l'interface de deux fenêtres : on ne pouvait pas voir facilement en même temps la fenêtre de géométrie dynamique et la fenêtre graphique.

A la fin de la deuxième expérimentation, les concepteurs du logiciel ont intégré un onglet « Graphiques » dans la fenêtre de géométrie dynamique de Casyopée qui permet d'afficher la représentation graphique de la fonction. Ce développement a effectivement facilité cette connexion chez des élèves. Nous présentons ci-dessous un extrait de l'entretien avec le binôme Elina-Chloé :

Intervieweur : *Bon, et comment cadrer le graphe ?*

Chloé : *On peut grandir, modifier l'unité du repère. On peut déplacer le repère et zoomer sur une partie de la fenêtre.*

Intervieweur : *D'accord. Et le petit point qu'il est marqué sur le graphe, il représente quoi ?*

{L'intervieweur montre le point mobile sur le graphe dans la fenêtre graphique}

Elina : *C'est le point M.*

Intervieweur : *Oui, c'est bien.*

Chloé : *C'est le point libre M de la figure.*

Cet extrait montre que, lors de l'expérimentation C2 en Terminale, ce binôme comprend une connexion entre le niveau « fonctions mathématiques » et le « système physique » via le lien dynamique entre le graphe de la fonction et la figure.

7.4 CO-DEVELOPPEMENT DES CONCEPTIONS « PROCESSUS » ET « OBJET »

Nous interprétons ici les observations du point de vue de la compréhension flexible des fonctions.

Dans le cadre géométrique, le binôme Elina-Chloé a bougé longtemps le point mobile *M* pour explorer des co-variations entre grandeurs. Il a d'abord exploré la co-variation entre la position du point *M* et l'aire du triangle *IMN*. Ces explorations encouragent la conception « processus », la co-variation étant considérée comme un processus associant deux grandeurs. Ensuite, le binôme a choisi la variable *oM* puis exploré la co-variation entre la valeur de cette variable et celle du calcul d'aire $\frac{1}{2}IM \times MN$, exprimée par la représentation pré-algébrique $oM \rightarrow \frac{IM.MN}{2}$. C'est un passage de la conception « processus » à la conception « objet » où la fonction est exprimée par un symbole. Les explorations locales dans ce cadre ont encouragé le binôme à faire l'hypothèse, tant locale que globale sur la position du point mobile *M* et sur la valeur maximum de l'aire du triangle *IMN*.

Après avoir exploré les fonctions comme processus dynamiques dans le cadre géométrique, le binôme a exporté la dépendance fonctionnelle dans la fenêtre symbolique et a obtenu une expression algébrique de la fonction. Dans le cadre algébrique, ce binôme a d'abord exploré le graphe de la fonction. Il a fait le cadrage du graphe pour le visualiser. Ensuite, il a bougé un point mobile sur le graphe afin de repérer les coordonnées maximales. De notre point de vue, l'action de faire le cadrage du graphe favorise la conception « objet » sur la fonction, tandis que le repérage des coordonnées maximales en déplaçant un point mobile sur le graphe aide les élèves à développer la conception « processus ». Finalement, le binôme est passé au registre symbolique ce qui suppose une conception « objet ». Le travail de transformation algébrique ultérieur met en jeu un processus sur cet objet. Il y a bien le développement d'une conception flexible des fonctions.

7.5 PARCOURS DANS LES DIFFERENTS REGISTRES DE REPRESENTATION SEMIOTIQUE

Nous interprétons ici les observations du point de vue du travail dans les différents registres de représentation

Première expérimentation	**Seconde expérimentation**
1. Registre enactif-iconique grandeurs • Construction de la figure dynamique • Création du calcul géométrique $MN \times MQ$ • Conjecture sur la position du point libre *M* (le milieu de *[OA]*) et la valeur maximale de l'aire du rectangle **2. Registre graphique** • Création du graphe de la fonction • Pas d'explorations du tracé graphique • Besoin d'aides de l'enseignant pour reconnaître la parabole • Passage au registre symbolique spontanément **3. Registre symbolique** • Identification du type de fonction de second degré • Identification de la formule $-\frac{b}{2a}$ pour calculer le maximum • Pas de travail sur l'expression avec des paramètres **4. Registre numérique** • Besoin d'aides de l'enseignant pour travailler sur un cas particulier des paramètres. • Pas de travail sur le tableau de valeurs de la fonction exportée. • Retour dans le registre enactif-iconique-grandeurs pour interpréter la solution.	**1. Registre enactif-iconique grandeurs** • Construction de la figure dynamique • Création du calcul géométrique $\frac{1}{2} IM \times MN$ • Beaucoup d'explorations numériques de l'aire • Conjecture exactes sur la position du point libre *M* (soit *M* coïncide l'origine *O*, soit *M* est le milieu de *[OA]*) et les variations de l'aire du triangle *IMN* • Sans interventions de l'observateur. **2. Registre graphique** • Création du graphe de la fonction et faire des cadrages • Passage au registre symbolique spontanément. **5. Registre symbolique** • Travail sur les transformations algébriques à l'aide ce Casyopée (développer, calculer la dérivée, les zéros, …) • Capacité de travailler sur l'expression algébrique avec le paramètre **6. Registre numérique** • Travail sur un cas particulier des paramètres. • Pas de travail sur le tableau de valeurs de la fonction exportée. • Retour dans le registre enactif-iconique-grandeurs pour interpréter la solution.

Tableau 7.2. Parcours du binôme Elina-Chloé dans les différents registres

Nous illustrons ces parcours dans la figure suivante :

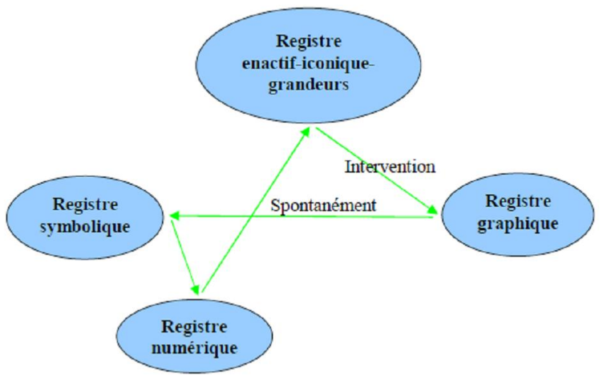
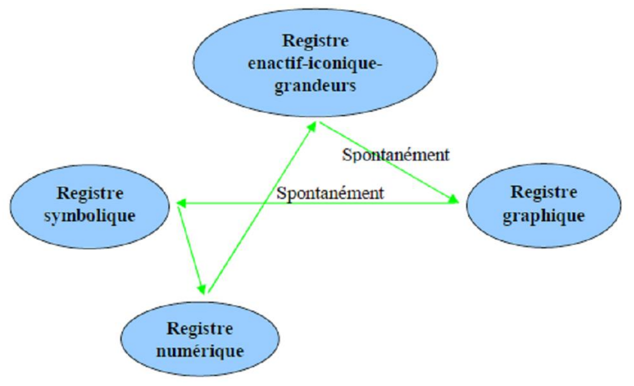
Première expérimentation	**Seconde expérimentation**
	

Figure 7.2. Illustration des parcours dans les différents registres du binôme Elina-Chloé

Remarque :

- Le parcours du binôme Elina-Chloé est relativement stable durant deux expérimentations.
- Les conversions entre registres, notamment entre « Registre enactif-iconique-grandeurs ↔ Registre graphique » et « Registre graphique ↔ Registre symbolique » sont de plus en plus spontanées (sans interventions de l'enseignant ou de l'observateur).
- Notamment, nous avons trouvé que le registre graphique est prioritaire parmi les registres dans le cadre algébrique pour ce binôme et aussi pour les autres élèves observés. En fait, après avoir exporté une fonction dans le module algébrique, les élèves préféraient travailler d'abord dans le registre graphique (faire apparaître et explorer le graphe de la fonction) avant de passer au registre symbolique pour travailler sur la formule algébrique. Cela amène à une conclusion que l'approche graphique est prédominante chez les élèves, notamment dans les environnements logiciels géométriques et algébriques comme Casyopée pour les problèmes d'optimisation.
- Le registre numérique est seulement consacré à travailler sur les cas particulier des paramètres. Les élèves n'ont pas exploré le tableau de valeurs de la fonction. Généralement, le registre numérique n'est pas beaucoup impliqué dans l'activité des élèves.
- Les activités diverses des élèves dans les différents registres offerts par Casyopée les aident à comprendre les fonctions dans les différents niveaux et conceptions.

Partie IV

CONCLUSIONS

Chapitre 8

Conclusions générales et perspectives

Introduction

Ce chapitre est consacré aux conclusions générales de notre travail de recherche. Nous discutons aussi les contributions, les limites ainsi que les perspectives évoquées issues de notre recherche.

8.1 CONCLUSIONS GENERALES DE LA RECHERCHE

Notre questionnement initial porte sur le processus d'apprentissage des fonctions en environnement technologique. Nous nous intéressons à un cadre didactique et ergonomique rendant compte des potentialités d'environnements géométriques et algébriques pour l'apprentissage des fonctions et les éléments significatifs de la genèse instrumentale des élèves durant le processus d'apprentissage. Nous prenons l'exemple de Casyopée.

Nos objectifs principaux sont d'expliciter une approche des fonctions s'appuyant sur les potentialités de ces environnements géométriques et algébriques, d'analyser les activités pour des élèves sur les fonctions dans cette approche, et de repérer des éléments éclairant la genèse instrumentale des élèves. Ces objectifs nous ont conduits à construire une ingénierie didactique et des situations d'apprentissage appropriées. Cette méthodologie nous a permis d'analyser les évolutions des élèves de la Première à la Terminale, donc sur le temps long de l'apprentissage des fonctions au lycée.

Nous avons eu recours à trois références théoriques différentes. D'une part, nous nous sommes appuyés sur l'approche instrumentale pour comprendre les phénomènes concernant le processus d'appropriation de Casyopée en lien avec l'apprentissage des fonctions par des élèves. D'autre part, nous avons considéré la Typologie d'activités, développée par Lagrange & Artigue (2009), comme un outil théorique qui nous a permis d'analyser les activités pour des élèves sur les fonctions dans l'environnement Casyopée. Nous avons fait aussi référence aux éléments de la théorie de représentations sémiotiques de Duval pour souligner la dimension sémiotique, particulièrement les conversions entre registres de représentation offertes par Casyopée, dans l'activité des élèves. Nous avons également mobilisé le cadre « processus/objet » pour interpréter et expliciter les observations des activités des élèves du point de vue de la compréhension flexible des fonctions.

Ces références nous ont conduits à spécifier nos objectifs en questions de recherche :

- Comment l'utilisation régulière de Casyopée sur un temps long en classe permet-elle aux élèves d'articuler le développement de leurs connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur Casyopée ?
- Comment la Typologie permet-elle d'analyser et de relier les activités variées sur les fonctions en environnement Casyopée ?
- Comment les activités des élèves dans les différents registres sémiotiques de Casyopée favorisent-elles une compréhension flexible des fonctions ?

Nous reprenons chacune des questions dans les paragraphes qui suivent.

8.1.1 L'articulation du développement de connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur Casyopée

Nous avons considéré une approche des fonctions via la modélisation fonctionnelle de dépendances géométriques dans un environnement numérique d'apprentissage. Plus précisément, nous nous somme intéressés aux apprentissages des fonctions au lycée sur un temps long d'utilisation de l'environnement Casyopée. L'analyse des observations sur un temps long a montré les progrès des élèves observés. Ces progrès avec Casyopée peuvent être interprétés comme une genèse instrumentale adéquate, particulièrement en ce qui concerne les fonctionnalités de modélisation de Casyopée (Créer un calcul géométrique, Choisir une variable, Exporter une fonction) et les connaissances mathématiques qui y sont liées. Notre recherche a indiqué chez le binôme observé Elina-Chloé et chez autres élèves un développement conjoint de connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur Casyopée pendant la genèse instrumentale et a montré comment l'utilisation régulière de l'artefact permet aux élèves d'articuler ces deux types de connaissances. Nous pensons que le développement conjoint de ces deux types de connaissances est une caractéristique de la genèse instrumentale. Les élèves ont perçu l'importance et les difficultés de l'étape de modélisation fonctionnelle et comment la réalisation de cette étape mobilise ce développement conjoint de connaissances.

L'originalité de notre étude est qu'elle se situe sur le temps long de l'apprentissage d'une notion. Nous montrons que l'ingénierie construite dans le projet ReMath, bien qu'elle prenne en compte les besoins instrumentaux des situations proposées ne constitue qu'une première étape dans une genèse qui, même à la fin de la Terminale, ne paraît pas totalement achevée. En effet, les élèves ont très notablement progressé dans leurs usages du logiciel et leur compréhension des fonctions, mais leur compréhension d'un problème d'optimisation reste relativement contextualisée aux situations qu'elles ont rencontrées.

8.1.2 La Typologie pour analyser et relier les activités variées sur les fonctions en environnement Casyopée

Nous avons complété la Typologie d'activités et éclairé sa mise en œuvre pour la modélisation fonctionnelle en environnements numériques d'apprentissage. L'analyse des usages de Casyopée en classe a indiqué les potentialités fructueuses de la Typologie pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions au lycée. Elle a permis de concevoir les situations d'apprentissage, d'analyser et d'éclairer les types d'activités variées des élèves sur les fonctions au niveau du lycée.

Notre étude a également affirmé comment une telle approche des fonctions dans un cadre géométrique (Bloch, 2003) peut exister au lycée grâce à des logiciels géométriques et algébriques comme Casyopée.

Une ambition du projet ReMath était de progresser dans la connexion et l'intégration des cadres théoriques dans le domaine de l'apprentissage des mathématiques avec les TICE. La plupart des cadres impliqués dans cette connexion comme la théorie des situations didactiques, la théorie anthropologique du didactique, la théorie de l'activité, la théorie de médiation sémiotique, et l'approche instrumentale se situent à un niveau assez général. Ces théories générales étaient influentes, mais trop générales pour leurs usages. Nous pensons donc que la Typologie d'activités proposée est un cadre local nécessaire et approprié pour le cas de notre travail sur les fonctions.

8.1.3 Une compréhension flexible des fonctions

Nous avons analysé comment l'usage de Casyopée peut faire émerger chez les élèves un co-développement des conceptions « processus » et « objet ». Dans le registre enactif-iconique-grandeurs de Casyopée, les élèves explorent les fonctions comme processus dynamiques de variations entre grandeurs. L'exportation de la fonction dans la fenêtre algébrique favorise une première transition « processus-objet » où ils obtiennent un objet fonctionnel (une formule algébrique, un graphe). Dans ce cadre algébrique, les élèves peuvent travailler sur les différents registres : graphique, symbolique, et numérique. Le registre graphique encourage à la fois les deux conceptions « processus » et « objet » chez les élèves : le cadrage du graphe pour le visualiser favorise d'une part une conception « objet », et d'autre part le repérage des coordonnées maximales en déplaçant un point mobile sur le graphe aide les élèves à développer la conception « processus ». Le passage au registre symbolique suppose d'abord une conception « objet » des fonctions. Le travail de transformation algébrique ultérieur met en jeu un processus sur cet objet.

En ayant observé l'usage de Casyopée sur un temps long par des élèves, nous avons trouvé que les activités diverses dans les différents registres de représentation de Casyopée peuvent les aider à atteindre une compréhension flexible des fonctions, c'est-à-dire une aisance à mobiliser les caractéristiques opérationnelle et structurelle des fonctions dans chaque étape de la résolution de problèmes.

8.2 CONTRIBUTIONS DE LA RECHERCHE ET PERSPECTIVES

Au-delà des réponses aux questions de recherche que nous venons d'exposer, notre travail apporte une contribution à des questions plus générales comme l'enseignement des fonctions et les apports des TICE. Il ouvre aussi sur des perspectives de recherche.

8.2.1 Une approche de l'enseignement des fonctions

Un premier résultat de notre travail est de montrer la possibilité d'une approche où les fonctions sont considérées comme modèles de dépendances dans un cadre géométrique. En fait, les activités fondées sur l'étude des relations de dépendances entre grandeurs ou mesures ont permis aux élèves observés de comprendre la notion de fonction. Une telle approche a assez renouvelé l'enseignement des fonctions au lycée dans l'institution actuelle.

Notre approche a mis en évidence la modélisation fonctionnelle qui permet de relier le monde réel (le système physique) et le modèle mathématique (les fonctions mathématiques). Nous mettons l'accent sur le niveau intermédiaire « grandeurs et mesures » dans le cycle de modélisation fonctionnelle proposé. De notre point de vue, les activités des élèves à ce niveau telles que créer un calcul géométrique exprimant la valeur d'une grandeur, explorer les co-variations entre grandeurs et mesures, choisir une grandeur appropriée comme une variable pour quantifier la dépendance fonctionnelle géométrique, calculer une fonction mathématique exprimant cette dépendance fonctionnelle… sont fructueuses pour la conceptualisation des fonctions.

La combinaison de cette approche avec la démarche expérimentale nous a conduits à la construction des situations d'apprentissage appropriées pour approcher les fonctions. Cette combinaison nous a également permis de concevoir une ingénierie adéquate qui s'est révélée efficace dans le contexte actuel de l'enseignement des fonctions.

8.2.2 Les apports des TICE pour l'enseignement des mathématiques

Revenant sur la question générale de l'intégration des TICE dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, en particulier dans le domaine des fonctions, voici ce que notre étude peut apporter :

- Elle confirme tout d'abord qu'il est important de ne pas sous-estimer la durée nécessaire à une véritable genèse. Le développement de connaissances sur les fonctions s'inscrit dans le temps long de l'apprentissage, c'est-à-dire plusieurs années. Notre étude montre que la genèse instrumentale d'un logiciel dédié aux fonctions comme Casyopée s'inscrit aussi nécessairement dans cette durée. Ceci montre de façon particulièrement évidente qu'une tendance à considérer les TICE comme simples adjuvants pédagogiques utilisés ponctuellement, empêcherait de prendre en charge les genèses instrumentales et leurs implications avec les apprentissages des mathématiques et de concevoir des tâches appropriées pour soutenir les apprentissages dans environnements numériques. Ce serait donc un obstacle didactique majeur.
- Elle propose une approche des fonctions qui se révèle efficace, mais au prix d'une analyse fine des activités possibles et des potentialités du logiciel. Cela nécessite une analyse avec un cadre théorique approprié articulant un cadre ergonomique -l'approche

instrumentale, un cadre cognitif –la distinction processus-objet-, un cadre sémiotique – les cadres et registres et un cadre épistémologique –la typologie d'activités.

- Dans les approches actuelles de l'enseignement des mathématiques, la dimension expérimentale est souvent mise en avant (par exemple les démarches d'investigation). Notre approche de l'enseignement des fonctions proposée dans cette thèse peut s'y rattacher. Le logiciel Casyopée et les tâches que nous développons sont conçues pour encourager les élèves d'expérimenter au cours du processus de modélisation fonctionnelle de façon plus libre que dans les situations habituelles. Cet objectif est très partiellement atteint au cours de l'expérimentation ReMath. En fait il n'est atteint qu'assez tard dans la genèse à l'issue de notre ingénierie (Séance C3). Il est donc nécessaire de penser les activités « expérimentales » dans la durée et dans une perspective de genèse instrumentale.

8.2.3 Perspectives

Notre ingénierie didactique se révèle efficace dans le contexte institutionnel actuel de l'enseignement des fonctions en France et dans un contexte local où Casyopée est partie intégrante des pratiques du professeur. Cela peut amener à une étude de l'influence des éléments contextuels (des théorisations sous-jacentes ou implicites, des données curriculaires ou institutionnelles, habitus des enseignants…) et des conditions pour mettre en œuvre cette ingénierie dans d'autres contextes. Cette perspective se situe dans le cadre des recherches récentes sur des problèmes liés aux contextes dans la pratique de recherche et dans la diffusion des technologies numériques pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Morgan, Kynigos, & Lagrange, 2010 ; Hoyles & Lagrange, 2010). Il est clair qu'une expérimentation est d'autant plus sensible aux effets de contexte qu'elle se déroule sur un temps long.

Par ailleurs, notre étude intègre les deux premières dimensions du modèle de compétences de Weigand & Bichler (2010) : la compréhension des fonctions et les compétences relatives à l'outil, tout en les considérant dans un processus de développement sur un temps long. Cependant ce modèle vise une analyse plus fine des compétences à un moment donné de l'activité des élèves et il sera intéressant de considérer son utilisation pour analyser plus précisément des moments clé des apprentissages que nous avons étudiés.

Dans notre travail de thèse, nous analysons des séances expérimentales et faisons un recueil de données sur la genèse instrumentale. Nous laissons cependant de côté des aspects importants dans le développement d'une compréhension de la notion de fonction. Notamment, nous ne nous attardons pas sur les interactions langagières dans l'activité du binôme observé. Par ailleurs, nous observons les élèves dans des phases de travail autonome sans considérer tout le travail fait avec l'enseignant de la classe. Or, l'aspect langagier et le rôle de l'enseignant dans la classe sont des aspects importants dans la construction de la notion de fonction. Une perspective de notre recherche examinera le rôle de l'enseignant et les interactions langagières autours des fonctions et du logiciel dans la classe en mobilisant le cadre de la médiation sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Dans le cadre d'une observation sur un temps long dans l'esprit de notre thèse, nous avons souligné notamment que le fil directeur que constitue la dépendance fonctionnelle du cadre géométrique au cadre algébrique est bien mis en évidence par Casyopée et par les tâches proposée aux élèves, mais aussi que dans le cadre algébrique, le registre graphique domine au détriment du registre symbolique. Il sera intéressant de reprendre cette analyse en considérant les chaînes sémiotiques qui concrétisent ce fil directeur et de travailler sur des tâches à même de faire travailler par les élèves la continuité entre les formes symboliques au niveau des grandeurs et au niveau des fonctions algébriques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aldon et al. (2008). Nouvel environnement technologique, nouvelles ressources, nouveaux modes de travail : le projet e-CoLab. *Repères IREM*, 72, 51-78.

[2] Artigue, M. (1993). Enseignement de l'analyse et fonctions de référence. *Repères IREM*, 11, 115-139.

[3] Artigue, M. (1997). Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics, 33(2)*, 133-169.

[4] Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectic between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7(3),* 245–274.

[5] Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 70(2)*, 97-109.

[6] Arzarello, F., & Robutti, O. (2004). Approaching functions through motion experiments. *Educational Studies in Mathematics*, *57(3)*, Special Issue, CD-Rom.

[7] Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, and D. Tirosh (Eds.) *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 2nd edition, (pp. 746-805). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

[8] Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differenciations of phases in the modelling process. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *38(2)*, 86-95.

[9] Bottino, R. A., & Kynigos, C. (2009). Mathematics Education & Digital Technologies: Facing the Challenge of Networking European Research Teams. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14(3)*, 203-215.

[10] Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enables students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics, 52(1)*, 3-28.

[11] Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H-W., & Niss, M. (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*. New York: Springer.

[12] Blum, W., & Leiss, D. (2005). "Filling Up" – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1623-1633), ISBN 84-611-3282-3. Spain: Universitat Ramon Llull.

[13] Borba, M. C & Confrey, J. (1996). A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment. *Educational Studies in Mathematics,* 31(3), 319-337.

[14] Bourbaki, N. (1939). *Théorie des ensembles*. Paris : Hermann.

[15] Breidenbach, D. E., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). The development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23,* 247-285.

[16] Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

[17] Bueno-Ravel, L., & Gueudet, G. (2009). Online resources in mathematics, teachers' geneses and didactical techniques. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14(1)*, 1-20.

[18] Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2)*, 222-265.

[19] Cobb, P. (2000). From representations to symbolizing: Introductory comments on semiotics and mathematical learning. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms: Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design,* (pp. 17-36). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

[20] Comin, E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée : méprise didactique ou quiproquo interinstitutionnel. *Petit x*, 67, 33-61.

[21] Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 135-164.

[22] Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26 (1)*, 66-86.

[23] Coppé, S., Dorier, J. L., & Yavuz, I. (2007). Des usages des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 27(2)*, 151-186.

[24] Dagher, A. (1996). Apprentissage dans un environnement informatique : possibilité, nature, transfert des acquis. *Educational Studies in Mathematics, 30(4)*, 367-398.

[25] Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7 (2)*, 5-31.

[26] Drijvers, P., Kieran, C., & Mariotti, M. A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain* (pp. 89-132). New York: Springer.

[27] Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The Nature of Process Conception of Function. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). Washington, DC: Mathematical Association of America.

[28] Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *5*, 37-65.

[29] Duval R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt, & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American Chapter of the PME Conference*. (pp. 3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico.

[30] Falcade, R. (2006). *Théorie des situations, médiation sémiotique et discussions collectives dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction*. Grenoble : Université J. Fourier : Unpublished doctoral dissertation.

[31] Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, *66(3)*, 317-333.

[32] Gelis, J. M. (2009). Une double approche, par objets et registres, appliquée aux actions des élèves dans des EIAH d'apprentissage de l'analyse. *Actes de la conférence EIAH 2009, Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain*, Le Mans, France.

[33] Goldenberg, E. P., Lewis, P., & O'Keefe, J. (1992). Dynamic Représentation and the Development of a Process Understanding of Function. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 235-260). Washington, DC: Mathematical Association of America.

[34] Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective of the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. P. Steffe, & P. Nesher (Eds.), *Theory of mathematical learning* (pp. 397-430). Mahwah, NJ: Erlbaum Associates.

[35] Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The Roles of Representations in School Mathematics* (pp. 1-23). Reston, VA. National Council of Teachers of Mathematics.

[36] Gray, E & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26 (2)*, 115-141.

[37] Gueudet, G., & Vandebrouck, F. (2010). Technologies, enseignement et apprentissage des mathématiques : revue de questions. In L. Coulange & C. Hache (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2009*. Paris : IREM de Paris 7.

[38] Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (2005). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument*. New York: Springer.

[39] Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3(3)*, 195–227.

[40] Haspekian, M. (2005). An « instrumental approach » to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10(2)*, 109-141.

[41] Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behaviour, 17(1)*, 123-134.

[42] Hitt, F., & Kieran, C. (2009). Constructing Knowledge via a Peer Interaction in a CAS Environment with Tasks Designed from a Task-Technique-Theory Perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14*, 121-152.

[43] Hodgson, R., & Muller, E. R. (1992). The Impact of Symbolic Mathematical Systems on Mathematics Education. In B. Cornu, & A. Ralston (Eds.), *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and Its Teaching. Science and Technology Education Series, 44* (pp. 93-107). Paris: UNESCO.

[44] Hoyles, C & Lagrange, J. B. (2010). *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain*, The 17th ICMI Study. New York: Springer.

[45] Hoyles, C., Noss, R., & Kent, P. (2004). On the Integration of Digital Technology into Mathematics Classroom. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9(3)*, 309-326.

[46] Jullien, M., Matheron, Y., & Schneider, O. (2003). Quelques éléments de réflexion sur le sujet de mathématiques du Baccalauréat 2003 – Série S. *Petit x, 62*, 72-77.

[47] Kieran, C. (2006). Research on learning and teaching Algebra. In A. Gutirrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 11-40), Rotterdam: Sense Publishers.

[48] Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

[49] Kieran, C., & Yerushalmy, M. (2004). Research on the role of technological environments in algebra learning and teaching. In K. Stacey, H. Shick & M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 99-152). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

[50] Kaput, J., & Schorr, R. (2008). Changing representational infrastructures changes most every thing. The case of SimCalc, Algebra and Calculus. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics. Cases and Perspectives* (pp. 211-253). Cambridge: IAP.

[51] Kuzniak, A., & Vivier, L. (2011). *La modélisation dans l'enseignement des mathématiques: Mise en perspective critique*. Paris : IREM de Paris 7.

[52] Kynigos, C., & Psycharis, G. (2009). Investigating the Role of Context in Experimental Research Involving the use of Digital Media for the Learning of Mathematics: Boundary Objects as Vehicles for Integration. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14(3)*, 265-298.

[53] Lagrange, J. -B. (1999). Complex calculators in the classroom: Theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 4(1)*, 51-81.

[54] Lagrange, J. -B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics, 43*, 1-30.

[55] Lagrange, J. –B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: a practical and theoretical reflection. In J. T. Fey (Ed.), *Computer algebra systems in school mathematics* (pp. 269-284). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[56] Lagrange, J. –B. (2005a). Using symbolic calculators to study mathematics. In D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (pp. 113-136). New York: Springer.

[57] Lagrange, J. -B. (2005b). Curriculum, classroom practices and tool design in the learning of functions through technology-aided experimental approaches. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10(2),* 143–189.

[58] Lagrange, J.-B., & Artigue, M. (2009). Students' activities about functions at upper secondary level: a grid for designing a digital environment and analysing uses. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of 33rd Conference of the International Groupe for the Psychology of Mathematics Education*. Thessaloniki, Greece: PME.

[59] Lagrange, J. –B., Artigue, M., Cazes, C., Gélis, J. M., & Vandebrouck, F. (2011). Représenter des Mathématiques avec l'ordinateur. In M. Abboud-Blanchard, & A. Fluckiger (Dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp. 67-100). Paris : IREM de Paris 7.

[60] Lagrange, J.-B., & Gelis, J.-M. (2008). The Casyopée project: a CAS environment for students' better access to algebra. *Int. J. Continuing Engineering Education and Life-Long Learning*, *18(5/6)*, 575-584.

[61] Lakoff, G., & Nunez, R. (2000). *Where mathematics come from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

[62] Lesh, L., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[63] Lesh, L., Galbraith, P. L., Haines, C. R., & Hurford, A. (2010). *Modeling Students' Mathematical Modeling Competences – ICTMA 13*. New York: Springer.

[64] Lombard, P. (2008). Les methods expérimentales en géométrie. *Repère IREM*, 73, 21-47.

[65] Lumb, S., Monaghan, J., & Mulligan, S. (2000). Issues arising when teachers make extensive use of computer algebra. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 7(4)*, 223-240.

[66] Malik, M. A. (1980). Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 11(4)*, 489-492.

[67] Mariotti, M. A. (2006). New artefacts and the mediation of mathematical meanings. In C. Hoyles, J. –B. Lagrange, L. H. Son, & N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth ICMI Study Conference* (pp. 378-385). Hanoi University of Technology.

[68] Maschietto, M. (2008). Graphic Calculators and Micro-Straightness: Analysis of a Didactic Engineering. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13(3)*, 207-230.

[69] Monaghan, J. (2007). Computer algebra, instrumentation and the anthropological approach. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 14(2)*, 63-72.

[70] Morgan, C., Kynigos, C., & Lagrange, J. –B. (2010). Research Forum: The Conceptualisation and Role of Context in Research with Digital Technologies. In *Proceedings of 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Belo Horizonte, Brazil: PME (to appear).

[71] Morgan, C., Mariotti, M. A., & Maffei, L. (2009). Representation in Computational Environments: Epistemological and Social Distance. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14(3)*, 241-263.

[72] Nemirovsky, R., & Borba, M. (2004). Bodily activity and imagination in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 57(3)*, 303-321.

[73] Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers*. Dordrecht: Kluwer.

[74] Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x*, 73, 6-34.

[75] Piaget, J. (1936). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Neuchâtel, Paris : Delachaux et Niestlé.

[76] O'callaghan, B. R. (1998). Computer-Intensive Algebra and Students' Conceptual Knowledge of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 29(1)*, 21-40.

[77] Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

[78] Rabardel., & Samurçay, R. (2001). From artefact to instrument-mediated learning. In *Proceedings of International Symposium on New challenges to research on Learning*. Helsinki: University of Helsinki.

[79] Radford, L. (2005). Kant, Piaget, and the Calculator. Rethinking the Schema from a Semiotic-Cultural Perspective. In M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard, & F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education. Festschrift for Michael Otte*. Dordrecht: Kluwer.

[80] Robert, A., & Rogalski, M. (2002). Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe. *Petit x*, *60,* 6-25.

[81] Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22(1)*, 1-36.

[82] Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification–The case of function. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59-84). Washington, DC: Mathematical Association of America.

[83] Schwarz, B., & Dreyfus, T. (1995). New actions upon old objects: a new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematics, 29*, 259-291.

[84] Tall, D. (1996). Functions and calculus. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Kluwer Academic Publishers.

[85] Thompson, P. W. (1994). Students, functions and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, 1* (Issues in Mathematics Education, vol.4, pp. 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.

[86] Trouche, L. (2002). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. In D. Guin & L. Trouche (Dir), *Calculatrices symboliques – Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique* (pp. 187-214). Grenoble : La Pensée Sauvage.

[87] Trouche, L. (2004). Environnements informatisés et mathématiques : quels usages pour quels apprentissages. *Educational Studies in Mathematics*, *55*, 181-197.

[88] Trouche, L. (2005). An instrumental approche to mathematics learning in symbolic calculators environments. In D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (pp. 137-162). New York: Springer.

[89] Trouche, L. (2007). Environnements informatisés d'apprentissage: quelle assistance didactique pour la construction des instruments mathématiques? In R. Floris, & F. Conne (Eds.), *Environnement informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques* (pp. 19-38). Bruxelles : De Boeck.

[90] Vandebrouck, F. (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : OCTARES.

[91] Vandebrouck, F., Baroux, D., Bonal, G., Galland, S., Guignard, M., Hérault, F., Marbeuf, G., Petitjean, C., & Yvert, B. (2010). *Démarche expérimentale et TICE en classe de mathématique au lycée*. Paris : IREM de Paris 7.

[92] Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (2/3)*, 133-170.

[93] Vérillon, P & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, *10(1)*: 77-101.

[94] Weigand, H.-G., & Bichler, E (2010). Towards a competence model for the use of symbolic calculators in mathematics: the case of functions. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *42(7)*, 697-713.

[95] Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge University Press.

[96] White, T. (2009). Encrypted objects and decryption processes: problem-solving with functions in a learning environment based on cryptography. *Educational Studies in Mathematics*, *72(1)*, 17-37.

[97] Yerushalmy, M. (1999). Making Exploration Visible: On Software Design and School Algebra Curriculum. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 4(2-3)*, 169-189.

[98] Yerushalmy, M. (2005). Functions of Interactive Visual Representations in Interactive Mathematical Textbooks. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10 (3)*, 217 – 249.

[99] Yerushalmy, M. & Shternberg, B. (2001) A Visual Course to Functions. In A. A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The Roles of Representations in School Mathematics* (pp. 251-268). Reston, VA. National Council of Teachers of Mathematics.

[100] Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19^{th} century. *Archive for History of Exact Sciences, 16(1)*, 37-85.

ANNEXES

EXPERIMENTATION AU SEIN DU PROJET REMATH

Séance 1 : Fiche élève

1S 2007-10-12

Fonctions associées

Le but de la séance est l'étude de fonctions associées (à une fonction donnée).
Soit une fonction f définie sur un ensemble E.
Les fonctions g, h, t définies par $g(x) = f(x)+2$, $h(x)= f(x+2)$, $t(x)= 2f(x)$ sont des exemples de *fonctions associées* à f (remarque : il est nécessaire de préciser les ensembles de définition de ces fonctions).
Le logiciel Casyopée permettra d'illustrer sur ces exemples cette étude.
Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1. Fonctions associées à la fonction sin

On a représenté graphiquement, sur la feuille annexe, la fonction sinus.
Représenter graphiquement sur cette feuille les fonctions g, h, t.

2. Fonctions associées à la fonction carré

a. Soit la fonction carré définie sur IR par $f(x) = x^2$.
Représenter graphiquement les fonctions g, h, t sur la feuille annexe.

b. Même question avec les fonctions u, v, w et s définies par :
$u(x)= f(x) -3$; $v(x)= f(x-1)$; $w(x)= -f(x)$; $s(x) = f(-x)$.

Quelle transformation géométrique permet d'obtenir la représentation graphique de u à partir de celle de f ?

Même question avec v, w et s.

3. Fonctions associées avec paramètres

Soit f une fonction.
On considère les fonctions associées suivantes :
$g(x) = f(x) + a$; $h(x) = f(x + b)$; $t(x) = -f(x)$; $s(x)= f(-x)$.
Observer les représentations graphiques des fonctions associées obtenues avec le logiciel Casyopée pour compléter la conclusion.

Conclusion

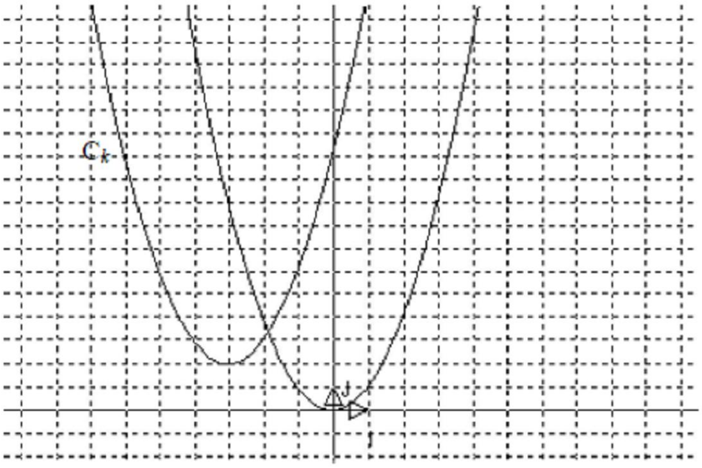
Soit C la représentation graphique d'une fonction f.
C_g, C_h, C_t et C_s désignent les représentations graphiques des fonctions g, h, t et s.
a et b désignent des paramètres.

Si $g(x) = f(x) + a$ alors C_g est l'image de C par …..
Si $h(x) = f(x + b)$ alors C_h est l'image de C par …..
Si $t(x) = -f(x)$ alors C_t est l'image de C par …
Si $s(x) = f(-x)$ alors C_s est l'image de C par …

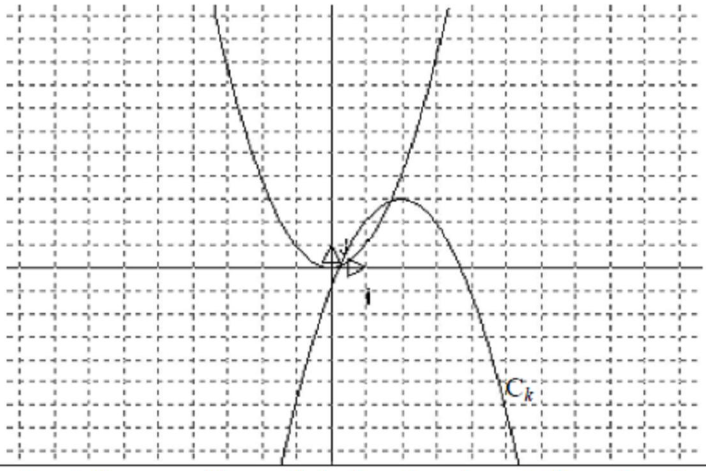
4. Fonction cible

Dans chacun des cas suivant, on donne les représentations graphiques de la fonction carré et d'une fonction k, fonction associée à la fonction carré.
Déterminer l'expression de k (précise ta méthode).

- Cas n°1 $\boxed{k(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

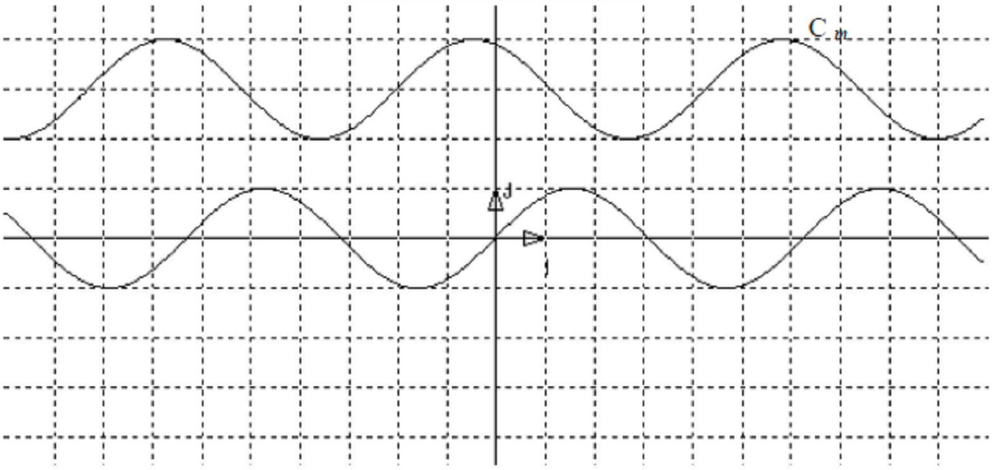


- Cas n° 2 $\boxed{k(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$



On donne les représentations graphiques de la fonction sinus et d'une fonction m fonction associée à la fonction sinus.
Déterminer l'expression de m.

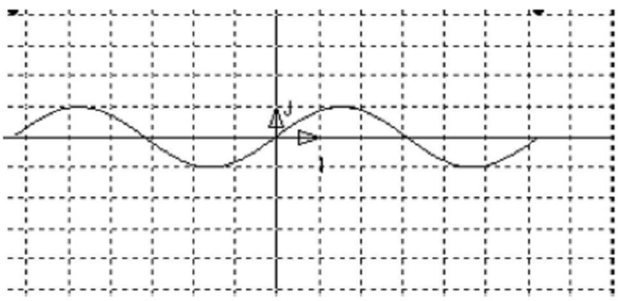
$\boxed{m(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$



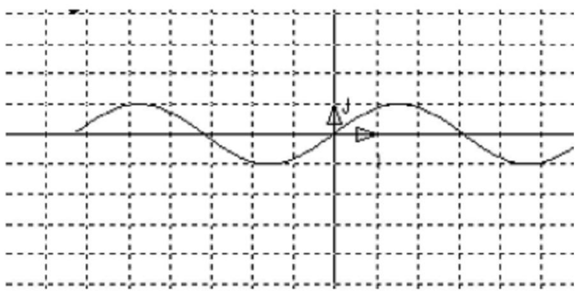
Annexe : Fonctions associées

$\boxed{f(x) = \sin(x)}$

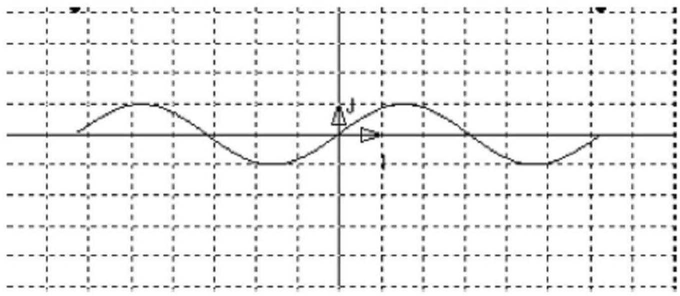
$g(x) = f(x) + 2$



$h(x) = f(x + 2)$

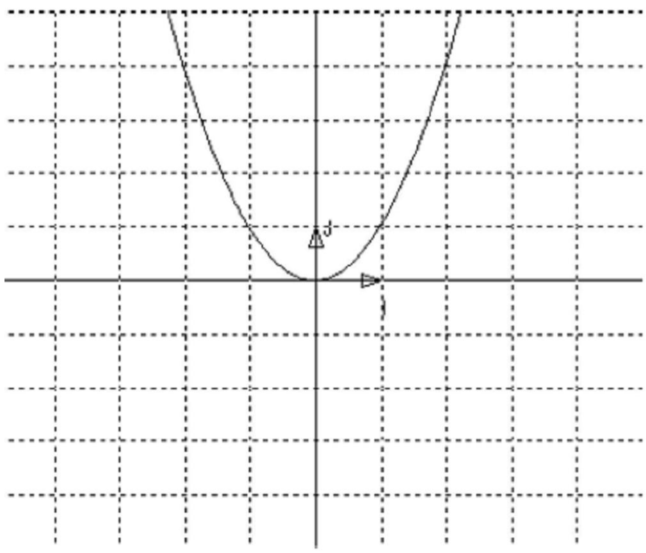


$t(x) = 2\,f(x)$

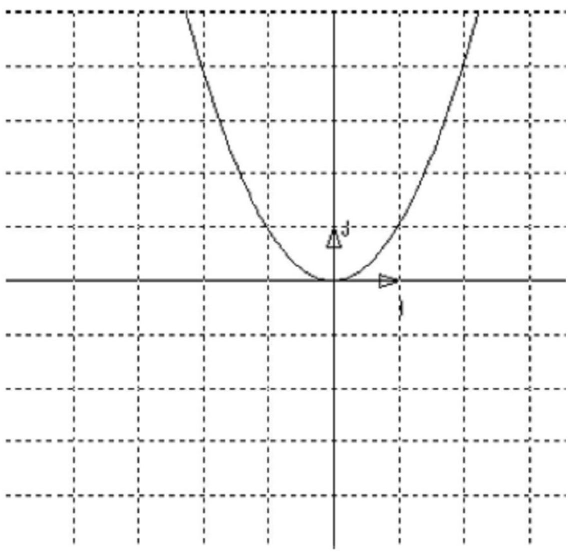


$\boxed{f(x) = x^2}$

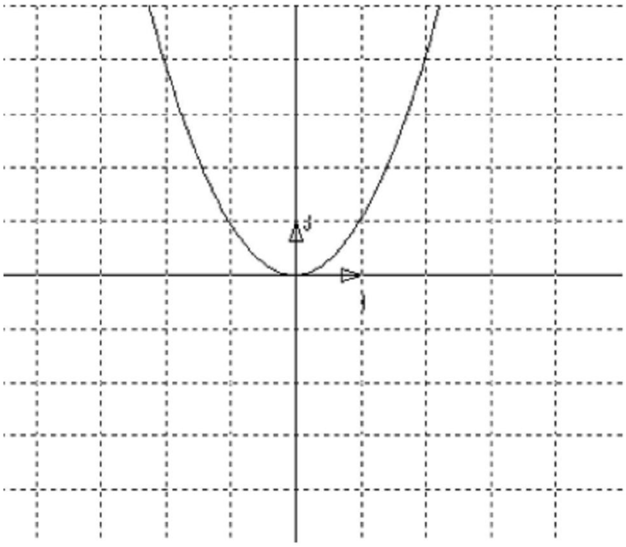
$g(x) = f(x) + 2$



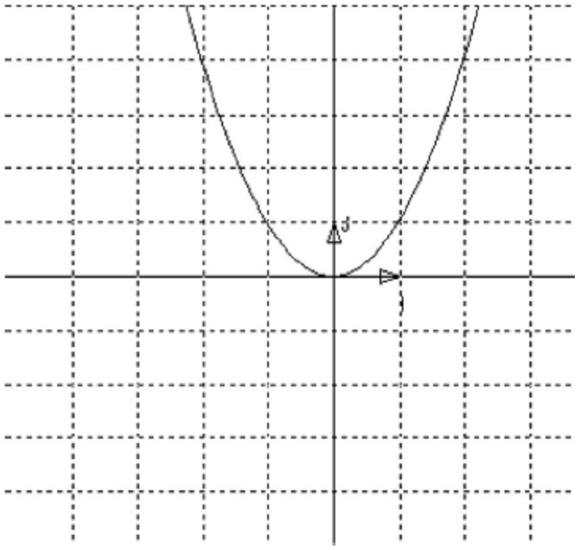
$h(x) = f(x + 2)$



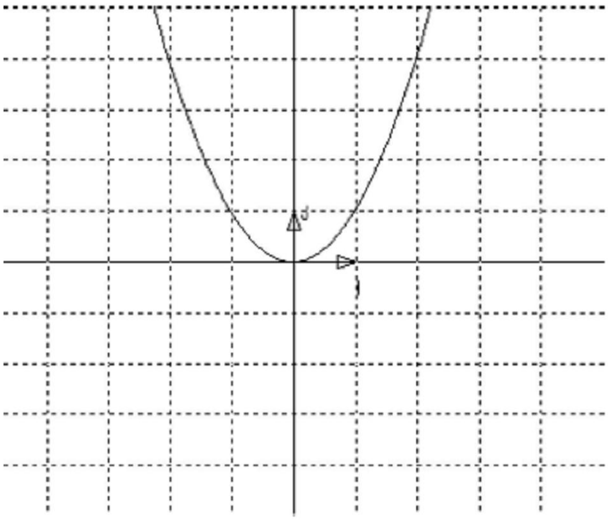
$t(x) = 2\,f(x)$



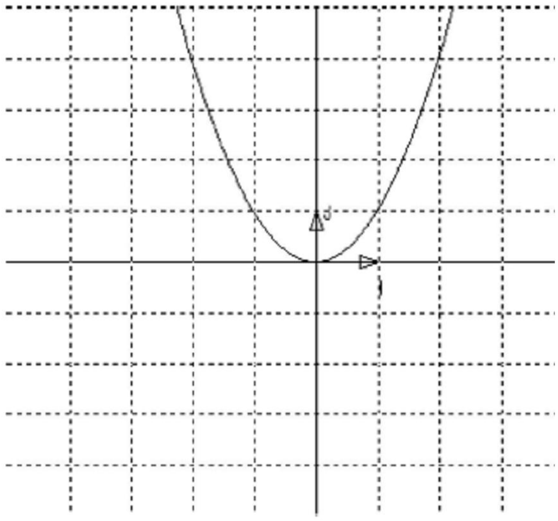
$u(x) = f(x) - 3$



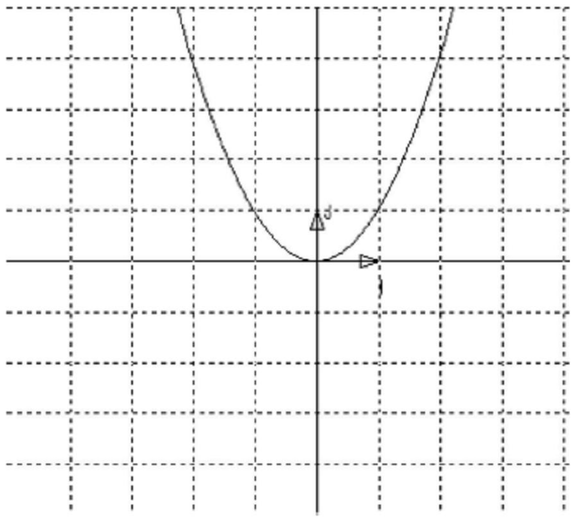
$v(x) = f(x-1)$



$w(x) = -f(x)$



$s(x) = f(-x)$



2007-10-12
Déroulement prévu
Phase 1

- Le prof présente les fonctions associées

Phase2

- Les élèves font la tâche1
- Un élève vient donner sa solution au tableau blanc *(tracé à la main)*
- Le prof explique la partie algèbre de Casyopée *[entrer une fonction, représentation graphique tableau de valeurs, entrer une valeur de x tableau de valeurs symboliques (choisir pi/6, pi/3, racine(3) etc…, bloc note]* et s'en sert pour corriger en projetant la réponse sur la solution de l'élève

Phase3

- Idem pour tâche 2 mais c'est un élève qui vient manipuler Casyopée pour les corrections.

Pour $s(x) = f(-x)$, prendre aussi f = sinus.

Phase 4

- Le prof entre les fonctions associées avec des paramètres, et montre les différents tracés quan on fait varier les paramètres *(choisir les fonctions sinus et carré déjà utilisées)*
- Il fait passer un (ou plusieurs élèves) avec Casyopée pour faire la même manip.
- Bilan discussion sur l'interprétation géométrique.

Phase 5

- Le prof explique le problème inverse (fonction cible) on a le graphe, on doit trouv l'expression de la fonction associée.

On peut envisager différentes stratégies

- *en papier crayon l'élève analyse les représentations graphiques, conjecture les transformations à utiliser (translations, symétries) puis vérifie en faisant le dessin ou en utilisant le logiciel*
- *avec Casyopée, l'élève peut, à partir de la fonction de référence f, définir la fonction $g(x) = +/- f(x + a) + b$ et faire varier les deux paramètres pour atteindre la cible.*

- Après laissé les élèves chercher pour le cas n°1, il résout ce cas en insistant sur le fait que quand il y a plusieurs paramètres, il faut manœuvrer l'un puis l'autre.

Pour la fonction m le professeur indique que les paramètres sont des entiers.

- Il annonce que la prochaine séance portera là-dessus.

Séance 2: Fiche élève

1ère S
Lycée Maupertuis – Saint Malo

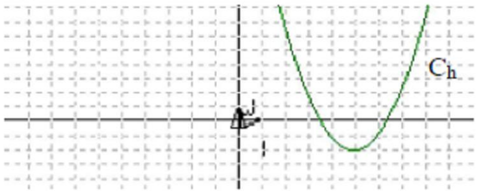
Séance 2 avec Casyopée
vendredi 19 octobre 2007

Fonctions cibles

Le but de la séance est de réinvestir le travail réalisé sur les fonctions associées en utilisant le logiciel Casyopée.
Dans chaque activité, on considère la fonction carré f définie sur IR par $x \longrightarrow x^2$.
On représente graphiquement une fonction h dont l'expression est cachée.

Il s'agit de déterminer l'expression d'une fonction g, définie à partir de f, dont le graphe se superpose avec celui de h.

Activité cible 1 $g : x \longrightarrow f(x+k) + a$



Travail avec Casyopée

Ouvrir le fichier cible 1.

Représentation graphique de f

Dans le menu *Créer*, utiliser la commande *Créer fonction* pour entrer la fonction f définie sur IR par : $x \longrightarrow x^2$ *(x^2 s'obtient avec x^2).*
Cocher ☑f pour faire apparaître la représentation graphique de *f*.

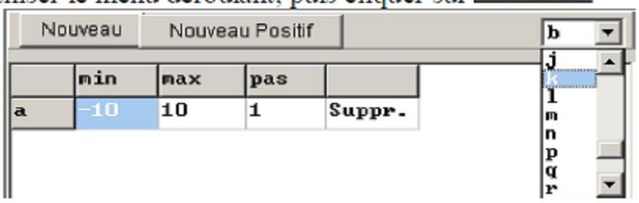
Représentation graphique de h

Cocher ☑h pour faire apparaître la représentation graphique de *h*.

Création des paramètres a et k

Dans le menu *Créer* choisir *Paramètre.*

Dans la fenêtre qui apparaît cliquer sur Nouveau.
Les valeurs minimale et maximale sont par défaut -10 et 10.
Pour créer k, utiliser le menu déroulant, puis cliquer sur Nouveau



Création de la fonction g

Dans le menu *Créer*, utiliser la commande *Créer fonction* pour entrer la fonction g définie sur IR par : $x \longrightarrow f(x+k) + a$

Pilotage des paramètres

Piloter les paramètres ***a*** et ***k*** a=0 pour superposer le graphe de g sur celui de h.

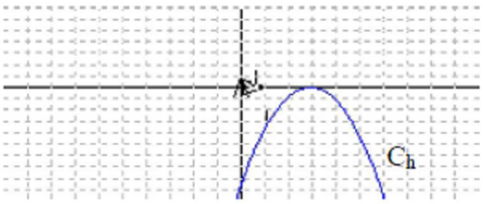
Bilan

Donner la valeur des paramètres solution et l'expression de la fonction g :

Expliquer comment la solution pouvait être anticipée à partir de considérations géométriques :

Interpréter quand c'est possible l'effet du changement du paramètre k ; même question avec le paramètre a :

Activité cible 2 $g : x \longrightarrow a\ f(x+k)$



Travail avec Casyopée

- Ouvrir le fichier cible 2.
- Créer les paramètres $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{k}$
- Créer la fonction g définie sur IR par : $x \longrightarrow a\ f(x+k)$
- Manipuler les paramètres $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{k}$  pour superposer le graphe de g sur celui de h.

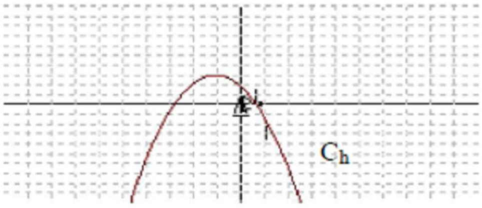
Bilan

Donner la valeur des paramètres solution et l'expression de la fonction g :

Expliquer comment la solution pouvait être anticipée à partir de considérations géométriques :

Interpréter quand c'est possible l'effet du changement du paramètre k ; même question avec le paramètre a :

Activité Cible 3



Travail avec Casyopée

- Ouvrir le fichier cible 3
- Créer une fonction g définie à partir de f et dont le graphe se superpose avec celui de h

Bilan

Donner l'expression de la fonction g solution :

Expliquer votre méthode :

Activité "devinez la fonction cachée"

Par équipe de deux choisissez une fonction de référence puis construire une fonction associée suivant les modèles des activités ci-dessus.
Présenter la représentation graphique de la fonction associée à un autre groupe qui devra deviner son expression.
Noter les étapes de leur recherche et les aides que vous leur avez fournies.

Activité « d'autres fonctions cibles »

- Ouvrir le fichier cible 4 : trois fonctions cibles ont été tracées.
- Créer trois fonctions à partir de f et dont les graphes se superposent à ceux des fonctions cibles tracées.

Donner l'expression de ces trois fonctions.
Interpréter quand c'est possible l'effet du changement du (ou des) paramètre (s).

1ère S SVT **Séance 3 avec Casyopée**
Lycée Maupertuis **vendredi 26 octobre 2007**
Nom et prénom :

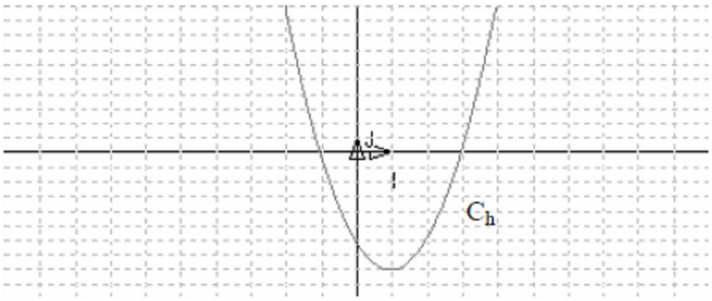
Etude de trinômes du second degré

Par définition, un trinôme du second degré est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$, où a ($a \neq 0$), b et c désignent des réels. Le but de la séance est l'étude de différentes expressions de trinômes et en déduire des propriétés.

Activité 1

Dans le fichier cible1, on représente graphiquement une fonction h dont l'expression est cachée. La fonction h est un trinôme du second degré.
Il s'agit de déterminer l'expression de trois fonctions f, g et p dont les graphes se superposent avec celui de h. On cherche ainsi à obtenir trois formes équivalentes $f(x)$, $g(x)$ et $p(x)$ de $h(x)$.

NB : Dans le fichier cible1, les paramètres servant à définir les fonctions sont déjà créés.



Déterminer dans chaque cas les valeurs des paramètres pour que la représentation graphique de la fonction (respectivement f, g , p) se superpose à celle de h.

1. La fonction f est définie par $f(x) = a\,(x - k)^2 + e$. **(forme 1)**
   $f(x) = \ldots\ (x - \ldots\ldots)^2 + \ldots\ldots$
   $f(x) = \ldots\ldots x^2 + \ldots\ldots x + \ldots\ldots$
2. La fonction g est définie par $g(x) = a\,[(x - k\,)^2 + m)]$. **(forme 2)**
   $g(x) = \ldots[(x - \ldots\ldots)^2 + \ldots\ldots]$
   $g(x) = \ldots x^2 + \ldots\ldots x + \ldots\ldots$
3. La fonction p est définie par $p(x) = a(x - u)(x - v)$. **(forme 3)**
   $p(x) = \ldots\ (x - \ldots)\ (x - \ldots)$
   $p(x) = \ldots x^2 + \ldots x + \ldots\ldots$
4. En déduire la forme développée et réduite de la fonction h.
   $h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Indiquer la (ou les) méthode(s) utilisée(s) pour déterminer les valeurs des paramètres

Donner une interprétation, quand cela est possible, des paramètres

Activité 2

1. Soit q le trinôme du second degré défini par $q(x) = -5x^2 + 4x - 1$
   a) Mettre, quand cela est possible, $q(x)$ sous la forme (1), (2) ou (3).

   b) Déterminer l'abscisse de son extrémum en indiquant la méthode utilisée.

2. Mêmes questions avec le trinôme s défini par $s(x) = 3x^2 + 2x + 6$

Bilan : Es-il toujours possible de mettre les trinômes sur les 3 formes

- $a(x-k)^2 + e$ **(forme 1)**
- $a[(x-k)^2 + m]$ **(forme 2)**
- $a(x-u)(x-v)$ **(forme 3) ?**

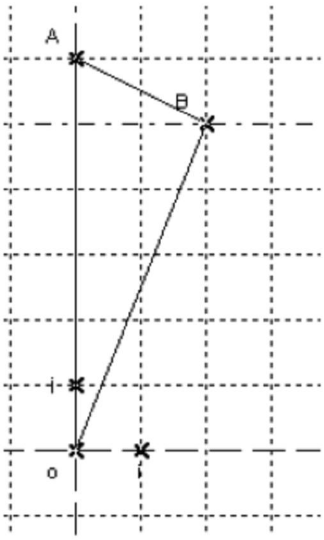
1ère S SVT **Séance 4 avec Casyopée**
Lycée Maupertuis **vendredi 16 novembre 2007**

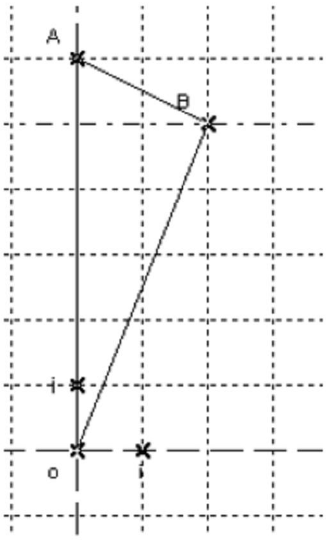
Découpages d'un triangle

Premier problème
Dans un repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$ on considère les points A(0 ; 6) et B(2 ; 5).

On souhaite partager le triangle oAB en deux parties (pas forcément de forme triangulaire) mais d'aire égale.

1. Comment s'y prendre en 1 coup de ciseaux ?
2. Comment s'y prendre en 2 coups de ciseaux ?

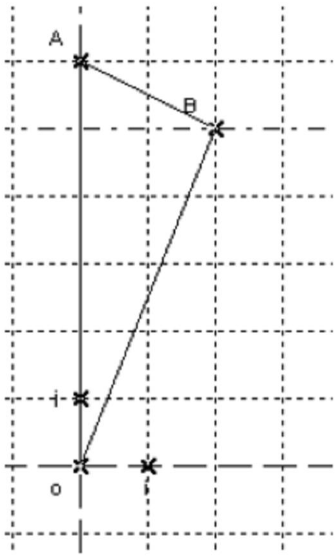




Deuxième problème

Sur le même triangle oAB, on construit un point libre M sur le segment [OA]. La parallèle à (OB) passant par M coupe AB en P ; la parallèle à OA passant par P coupe OB en Q.

1. Comment choisir M pour que l'aire de OMPQ soit la moitié de celle du triangle OAB ?
2. Et si on veut que l'aire de OMPQ soit les $\frac{4}{9}$ de l'aire du triangle OAB ?
3. Et si on change les valeurs des coordonnées de A ?



2-2

1S vendredi 23 novembre 2007

Séance 5

Nom et prénom :

Des histoires de partage

Dans un repère orthonormé, on considère les points A (a, 0) ; B (0; b) et C (a ; b), où a et b sont deux paramètres $a \in [0,10]$ et $b \in [0,10]$.

Comment choisir un point M dans le plan pour que l'aire du triangle BMC soit le tiers de celle du rectangle oACB ?

Travail avec Casyopée

Ouvrir le fichier `figure_initiale`, dans lequel les paramètres a et b sont déjà créés. *(Enregistrer le fichier dans un répertoire personnel avec le nom de fichier seance5).*

Géométrie dynamique

- Construire le rectangle oACB *(changer les valeurs des paramètres pour obtenir un rectangle non carré).*
- Créer le Calcul géométrique de l'aire de oABC.
- Choisir un point libre M.
- Réaliser la construction géométrique nécessaire au calcul l'aire de BMC.
- En déplaçant M, conjecturer des positions de M pour lesquelles l'aire de BMC est le tiers de celle de oACB.

Pour résoudre le problème posé, on veut le modéliser en définissant la fonction géométrique de l'aire du triangle BMC et en choisissant une variable adéquate. Comme on l'a vu en classe, le logiciel Casyopée permet de choisir la variable.

- Remplir le tableau suivant

Choix de la variable	Réponse de Casyopée	Expression éventuelle de la fonction (aire de MBC)
BC		
OM		
BM		
xM		
yM		

Indique, si c'est le cas, un autre choix de variable auquel tu as pensé :
Quelle réponse donne Casyopée et peux-tu créer la fonction demandée ? :

1S séance 6 vendredi 7 décembre 2007

Un problème d'optimisation

Soient a, b et c, trois paramètres positifs.
On considère les points A (– a, 0) et B (0, b) et C(c, 0).
On construit le rectangle MNPQ avec M sur [oA], N sur [AB], P sur [BC] et Q sur [oC].

- Peut-on construire un rectangle MNPQ d'aire maximale ?
- MNPQ peut-il être un carré ?

Travail demandé

1. Charger le fichier figinit.cas puis compléter la figure avec le logiciel.
   remarque : il est nécessaire de construire les segments [oA], [AB], [BC] et [oC] pour définir correctement les points du rectangle.
2. Répondre aux deux questions posées avec les consignes suivantes :
   - Indiquer le choix de variable.
   - Rédiger une démarche utilisant les résultats affichés par le logiciel.
   - Visualiser la réponse dans le module de géométrie dynamique.

Séance 6 : La Fiche de travail du binôme Elina-Chloé

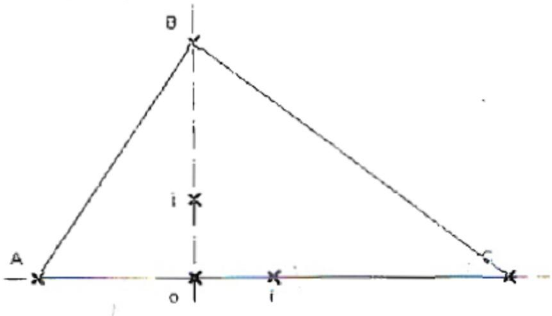
RABARIJAONA Elina
RADUREAU Chloé

1ère S SVT
Lycée Maupertuis
Nom et prénom :

Séance 6 avec Casyopée
vendredi 7 décembre 2007

Un problème d'optimisation

Soient a, b et c, trois paramètres positifs.
On considère les points A (– a, 0) et B (0, b) et C(c, 0).



On construit le rectangle MNPQ avec M sur [Ao], N sur [AB], P sur [BC] et Q sur [oC].

$MN \times MQ$
- Peut-on construire un rectangle MNPQ d'aire maximale ? $\mathcal{A}_{MNPQ}$ max $= 12,5$ lorsque N milieu [AB] P milieu [BC]
- MNPQ peut-il être un carré ? Oui . lorsque MN = MQ

Variable MN = 2,553

Travail demandé

1. Charger le fichier figinit.cas puis compléter la figure avec le logiciel.
   remarque : il est nécessaire de construire les segments [oA], [AB], [BC] et [oC] pour définir correctement les points du rectangle.

2. Répondre aux deux questions posées avec les consignes suivantes :
   - Indiquer le choix de variable.
   - Rédiger une démarche utilisant les résultats affichés par le logiciel.
   - Visualiser la réponse dans le module de géométrie dynamique.

Variable : $\begin{cases} NP \\ MN \Rightarrow \text{impossible de comparer } b \text{ et } x_1 \\ MQ \end{cases}$

choisi : x_M $\quad f : x \to b\left(1-\frac{1}{a}x\right)\left(a+c-a\left(1-\frac{1}{a}x\right)-c\left(1-\frac{1}{a}x\right)\right)$

$a = 5 \quad b = 5 \quad c = 5$

ipt fn $f = 10x - 2x2$

pr extremum max $\Rightarrow \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2\times(-2)} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2,5$

Pour obtenir l'$\mathcal{A}_{max}$ MNPQ, abscisse $x_M = -2,5$ (ĉ trouvé à géométrie dynamique) ĉ paraît $a = b = c = 5$ → M milieu de [OA] soit $x_M = \frac{a}{2}$

* MNPQ = carré

il faudrait que MN = MQ $\boxed{\text{tjr } \widehat{m} \text{ variable } x_M}$

→ créat : fn : MN : $x \to b\left(1 - \frac{1}{a}x\right)$ MQ : $x \to a + c - a\left(1 - \frac{1}{a}x\right) - c\left(1 - \frac{1}{a}x\right)$

équat : fns ⟹ MN = MQ

$$s = \frac{ab}{a+b+c} = x_3$$

Dans notre cas $s = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$

Pour que MPPQ soit un carré, $x_M = \frac{5}{3}$, abscisse $-\frac{5}{3}$

* $\mathcal{A}_{max}$ MNPQ et MNPQ carré. $a = 5$ $b = 7$ $c = 5$

$$\frac{ab}{a+b+c} = \frac{a}{2} \qquad a : \text{inconnue}$$

$$\frac{\cancel{a}\,7}{a+12} = \frac{\cancel{a}}{2}$$

$$\frac{7}{a+12} = \frac{1}{2}$$

$$14 = a + 12$$

$$a = 2$$

* Rapport simple entre l'$\mathcal{A}$ triangle ABC et le rectangle MNPQ.

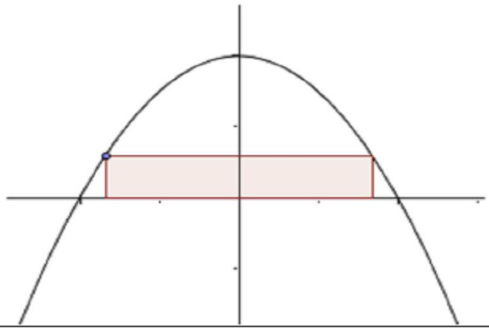
$\mathcal{A}_{MNPQ}$ = la moitié $\mathcal{A}_{ABC}$

Séance supplémentaire

1ère S SVT **Séance 7 avec Casyopée**
Lycée Maupertuis **vendredi 1er février 2008**
Nom et prénom :

Rectangle inscrit dans une parabole

Le but de l'activité est d'inscrire dans une parabole, un rectangle dont l'aire soit la plus grande possible



Première partie Etude de la fonction f et de sa représentation graphique

a étant un réel strictement positif, on considère la fonction *f* définie su *IR* par $f(x) = a - x^2$ et sa courbe représentative *P*.

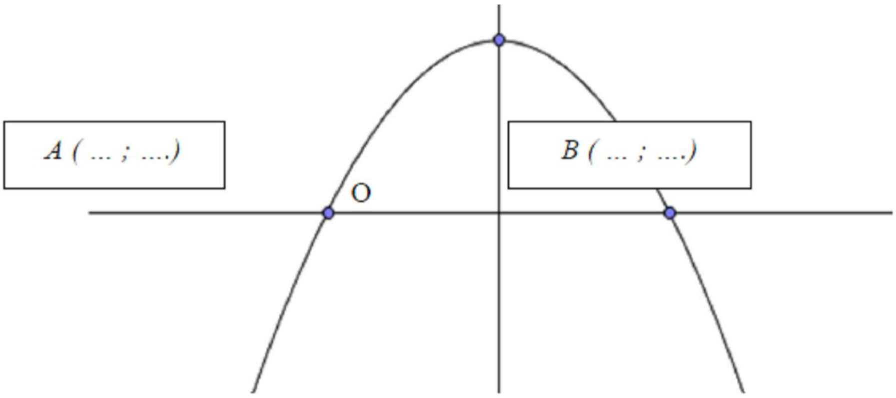
Travail dans la fenêtre algébrique de Casyopée :

- Créer le paramètre positif
- Créer la fonction *f*
- Représenter graphiquement *f*

Déterminer les coordonnées des points *A, B* intersections de *P* et de l'axe des abscisses.

Complète le graphique :

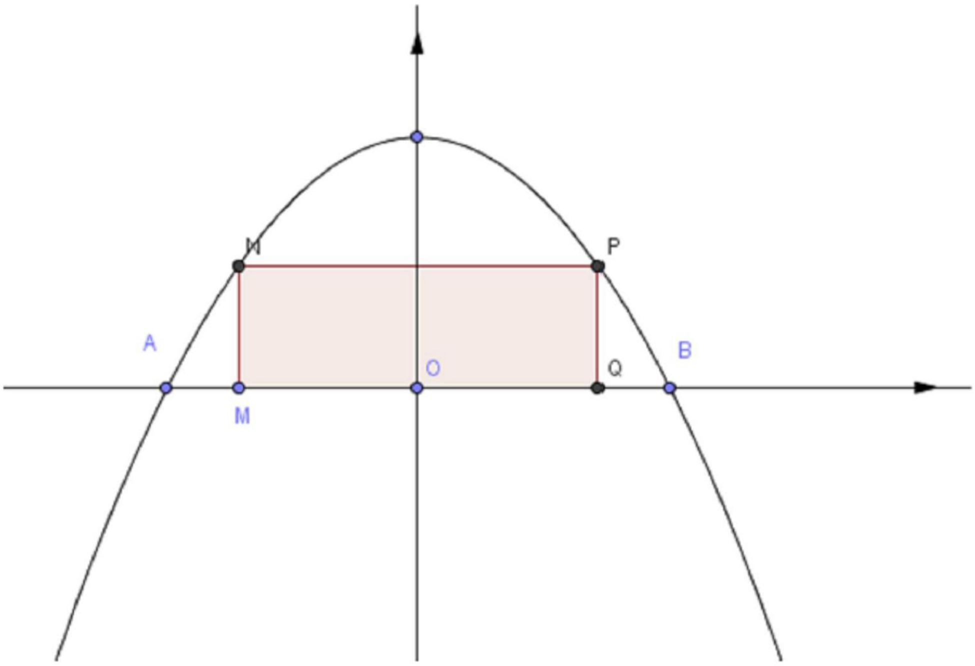
C (... ; ....)



Deuxième partie : Géométrie Dynamique

Dans la fenêtre « géométrie dynamique »,

- Créer la courbe et les points *A, B, C.*
- Créer un point *M* libre sur le segment *[AO]*
- Construire le rectangle *MNPQ* (on pourra utiliser les coordonnées x_M et y_M pour construire les autres points).



Troisième partie : Résolution du problème

Déterminer la(les) position(s) de *M* rendant l'aire du rectangle *MNPQ* la plus grande possible.

Répondre à la question posée avec les consignes suivantes :

- Indiquer le choix de variable.
- Rédiger une démarche utilisant les résultats affichés par le logiciel.
- Visualiser la réponse dans le module de géométrie dynamique.

➢

SECONDE EXPERIMENTATION EN TERMINALE S

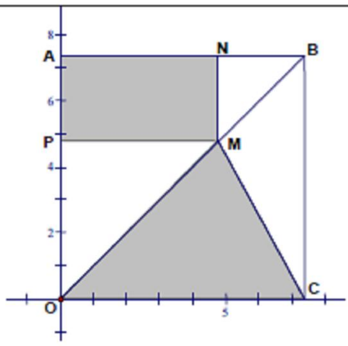
Séance C1 (Octobre 2008) : Fiche élève

Fiche élève
Classe: Terminale S Date:
Lycée:
Nom et prénom:

Une aire variable

Soit a un paramètre positif.
Dans un repère orthonormé, on considère le carré OABC avec A(0 ;a), B(a ;a) et C(a ;0) . M est un point libre sur la diagonale [OB]. On construit le rectangle MNAP avec N sur [AB], P sur [OA] et le triangle OMC. Les intérieurs de ces deux figures ont été colorés.

a. Déplacer le point M sur [OB] et observer les variations de l'aire de la partie colorée (la somme des aires de deux figures). Donner une conjecture sur ces variations.
b. Existe-il une position du point M telle que cette aire soit maximale ?



Travail demandé

Tâche 1. Construction de la figure **1.1**. Ouvrir le fichier *figinit.txt* puis compléter la figure avec Casyopée (le paramètre a et le carré OABC ont été créés). **1.2**. Réaliser la construction géométrique nécessaire au calcul géométrique de l'aire du triangle OMC.	
Tâche 2. Observations et conjectures **2.1**. Créer le calcul géométrique de l'aire de la partie colorée. **2.2**. Déplacer le point M sur [OB] et observer les variations de l'aire de la partie colorée. Donner des conjectures sur les variations de l'aire et la position du point M pour laquelle cette aire soit maximale.	**Les observations:** .... **Les conjectures:** ....

Tâche 3. Modélisation avec Casyopée

3.1. Choix de la variable x = ...

3.2. La fonction géométrique exprimant l'aire de la partie colorée affichée dans la fenêtre « *Mesures* »:

La fonction géométrique: ....

f: .... → ....

....

....

Son ensemble de définition: ....

....

Son expression algébrique: ....

$f(x) = \ldots$ ....

....

Tâche 4. Recherche algébrique de l'aire maximale (*Quelle démarche vous allez faire*?)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Tâche 5. Travail avec Casyopée

5.1. Mettre en œuvre votre démarche

5.2. Conclusion sur les variations de l'aire et la position du point M:

....

....

5.3. Comparer cette conclusion avec les conjectures que vous avez données:

....

....

Tâche 6.

6.1. Visualiser la conclusion dans la fenêtre de géométrie dynamique.

6.2. Quelle remarque faites-vous sur les aires du triangle et du rectangle dans la position où l'aire est maximale? Prouvez-la.

Tâche 7. ***(Optionnel)***

7.1. Comment aurais-tu calculé en papier/crayon l'expression algébrique de f?

7.2. Comment aurais-tu calculé sa dérivée et les zéros de la dérivée?

Fiche de travail du binôme Elina-Chloé :

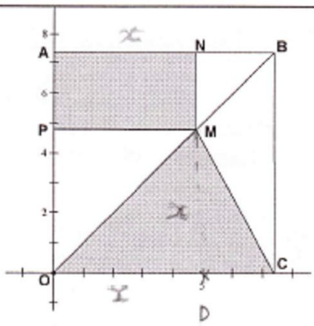
Fiche élève
Classe: Terminale S
Lycée: MAUPERTUIS
Nom et prénom: Elina & Chloé

Date: 24 Octobre 2008

Une aire variable

Soit a un paramètre positif.
Dans un repère orthonormé, on considère le carré OABC avec A(0 ;a), B(a ;a) et C(a ;0) . M est un point libre sur la diagonale [OB]. On construit le rectangle MNAP avec N sur [AB], P sur [OA] et le triangle OMC. Les intérieurs de ces deux figures ont été colorés.

a. Déplacer le point M sur [OB] et observer les variations de l'aire de la partie colorée (la somme des aires de deux figures). Donner une conjecture sur ces variations.
b. Existe-il une position du point M telle que cette aire soit maximale ?



Travail demandé

Tâche 1. Construction de la figure **1.1.** Ouvrir le fichier *figinit.txt* puis compléter la figure avec Casyopée (le paramètre a et le carré OABC ont été créés). **1.2.** Réaliser la construction géométrique nécessaire au calcul géométrique de l'aire du triangle OMC.	
Tâche 2. Observations et conjectures **2.1.** Créer le calcul géométrique de l'aire de la partie colorée. **2.2.** Déplacer le point M sur [OB] et observer les variations de l'aire de la partie colorée. Donner des conjectures sur les variations de l'aire et la position du point M pour laquelle cette aire soit maximale.	**Les observations:** $A = (AN \times NM) + \left(\frac{OC \times MD}{2}\right)$ **Les conjectures:** Il semble que pour M(4,5;4,5) l'aire de la partie colorée semble maximale.

$x \in [0 ; 4,5]$, A augmente (croissant)
$x \in [4,5 ; 6]$, A diminue (décroissant

Tâche 3. Modélisation avec Casyopée

3.1. Choix de la variable x = OD

3.2. La fonction géométrique exprimant l'aire de la partie colorée affichée dans la fenêtre « *Mesures* »:

La fonction géométrique:

f: OD $\rightarrow$ AN × NM + $\frac{OC \times MD}{2}$

Son ensemble de définition: $[0 ; a]$

Son expression algébrique:

$f(x) = \frac{a \times x}{2} - ax \times \left(\frac{x}{a} - 1\right)$

Tâche 4. Recherche algébrique de l'aire maximale (*Quelle démarche vous allez faire?*)

Etude des variations de la fonction.
Lorsque cette fonction a atteint un maximum, l'abscisse correspond à celui du point M quand l'aire de la partie colorée est maximale.

Calcul de la dérivée. On étudie son signe.
$f'(x) = 0$ $x_1 = \left\{\frac{3 \cdot a}{4}\right\}$ Tableau de signe

Donc, A_{max} quand $x = x_1$

x	0		1	
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗		↘

Tâche 5. Travail avec Casyopée

5.1. Mettre en œuvre votre démarche

5.2. Conclusion sur les variations de l'aire et la position du point M:
$[0 ; x_1]$ l'A augmente, $[x_1 ; a]$ l'A diminue.
Pour que A max, abscisse de M = x_1.

5.3. Comparer cette conclusion avec les conjectures que vous avez données:
On trouve la même valeur que celle qu'on a conjecturé.

Tâche 6.

6.1. Visualiser la conclusion dans la fenêtre de géométrie dynamique.

6.2. Quelle remarque faites-vous sur les aires du triangle et du rectangle dans la position où l'aire est maximale? Prouvez-la.

Tâche 7. ***(Optionnel)***

7.1. Comment aurais-tu calculé en papier/crayon l'expression algébrique de f?

7.2. Comment aurais-tu calculé sa dérivée et les zéros de la dérivée?

6.2. Lorsque A_{max} : $A_{OMC} = 2 \times A_{ANMP}$

Gérer calcul $A_{ANMP} = AN \times MP$

$A_{OMC} = \frac{MD \times OC}{2}$

7.1

$f : OD = AN \times NM + \frac{MD \times OC}{2}$ $\qquad f : x = \frac{a \times x}{2} - ax \times \left(\frac{x}{a} - 1\right)$

$f : x = x \times (a - x) + \left(\frac{x \times a}{2}\right)$

$= ax - x^2 + \left(\frac{ax}{2}\right)$

$= \frac{ax}{2} - ax\left(-1 + \frac{x}{a}\right) = ax\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{x}{a}\right)$

7.2

$= ax\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right)$

On pose $u = ax$ $\qquad V = \frac{x}{a} - \frac{1}{2} = \frac{1}{a} \times x - \frac{1}{2}$

$u' = a$ $\qquad V' = \frac{1}{a}$

$f'(x) = u'V + uV'$

$= a \times \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right) + ax \times \frac{1}{a}$

$=$

TRANSCRIPTION DE LA SEANCE C1

Binôme: Elina-Chloé

Chercheur:	Il faudrait lancer tout d'abord Casyopée et après vous ouvrez le fichier.
Chloé:	D'accord.
Chercheur:	Là, en bas.
Chloé:	Oui.

2mn39

Chloé:	Ça, c'est le point qu'on bouge déjà, non?
Elina:	Oui
Elina:	Créer un point libre, M?
Chloé:	C'est sur OB.
Elina:	Et le segment MC, non?
Chloé:	Oui, je pense que c'est ça.
Elina:	Le rectangle.
Chloé:	Oui, le rectangle
Elina:	D'abord, le triangle OMC
Chloé:	Oui.

4mn54

Chloé:	Donc on trace pareil le rectangle avec…
Elina:	Avec une droite perpendiculaire et parallèle. On trace une droite parallèle à BC, passant par M. Et après on trace la parallèle?
Chloé:	Non, la perpendiculaire à [oA], passant par M. Ça, c'est le point…
Elina:	Point d'intersection.

6mn43

Elina:	On va déplacer le point M sur OB
Elina:	C'est la base d'hauteur de la perpendiculaire
Chloé:	Oui.
Elina:	Il faut qu'on trace la hauteur, c'est l'intersection ici.
Chloé:	AN.NB?
Elina:	Oui.
Elina:	Donc on va faire MD*OC/2

Chloé: Oui

Elina: Il faut aller dans 'Calculs'

Chloé: Oui

8mn22

Chloé: (demander à Chercheur)

Est-ce que là, c'est bon? En effet, on a fait la construction géométrique.

<u>Chercheur:</u> Oui.

Chloé: Ah, la partie colorée est ça plus ça

Chloé: Les variables, ce serait plutôt après qu'on trouve la position du point M.

Elina: La variable, c'est OM?

Chloé: Oui

<u>Chercheur:</u> Où est ce que le menu pour créer un calcul géométrique?

Elina: Ah oui, c'est là.

Chloé: Donc l'aire de la partie colorée est d'abord cette aire là plus cette aire là.

Elina: Oui. Donc c'est AN*AP

Chloé: Oui. Et ça, je prends directement N.

Elina: Si non, à mon avis, ce serait plus facile de faire OP*AP?

Chloé: Non, je ne sais pas.

Chloé: Donc ça fait AN*NM et OC*MD/2.

12mn

Chloé: Peut-être on écrit en même temps. Est-ce qu'il y a un compte-rendu après?

Chercheur: Comment?

Chloé: Est-ce qu'on doit donner par écrire les observations?

<u>Chercheur:</u> Oui, vous écrivez un petit peu sur les variations de l'aire: quand est ce qu'elle est croissante, décroissante… et les conjectures sur des positions du point M pour que l'aire soit maximale…

Chloé: D'accord, donc l'aire est (AN*NM) + OC*MD/2

Chloé: Il semble qu'il y a un point que quand M a les coordonnées (4 ;4), l'aire de la partie colorée….

Elina: Maximale, non?

Chloé:	Oui, maximale
Chercheur:	Et les variations? Quand est ce que l'aire est croissante, décroissante?
Chloé:	D'abord croissante, et après décroissante.
Chloé&Elina:	On part de zéro, c'est d'abord croissante, et après le maximum, c'est décroissante.
Chloé:	De zéro jusqu'au point M. Ah non, de zéro jusqu'à 4.
Chloé:	24.5
Elina:	et 4.5 d'abscisse?
Chloé:	oui
Elina:	Et l'ordonnée?
Chloé:	C'est pareille.
Elina:	Donc, j'écris là?
Elina:	Ben, donc l'aire…
Chloé:	Il faut dire que c'est décroissante ou croissante.
Elina:	Oui, donc de 0 jusqu'à 4.5
Chloé:	C'est croissante, et à partir de ce moment 4.5 où l'aire est maximale, ça devient décroissante.

16mn30

Elina :	Choix d'une variable
Cholé:	C'est OM
Chercheur:	Il faudrait réfléchir pour choisir quelle variable
Elina:	Le segment ND? Parce que ses valeurs sont calculées facilement.
Chloé:	On va prendre les deux?
Elina:	Oui
Chloé:	La variable, c'est ND
Elina:	Du coup, on a besoin de notre formule pour calculer l'aire.
Chloé:	Regarde! la variable dépend de aucun point libre. Mais normalement elle va dépendre de M.
Elina:	Oui
Chloé:	Si quand on bouge N, ah quand on bouge M, la variable ne se multiple pas. C'est que peut-être pas la main.

Elina: MN, oM, MB.

19mn10

Chloé: Ce qu'on a cité, c'est MD

Elina: La fonction géométrique. C'est de basculer ver Casyopée.

Elina: Attends, on tourne à la géométrie

Chloé: Ouvrez par 'Mesures'?

Chercheur: Attention, c'est la fonction géométrique, entre des quantités (mesures).

Chloé: Ah, c'est là.

Elina: Non, c'est ça

Chloé: L'ensemble de définition, ça va être [0 ;6].

Elina: Notre a est égale à 6

Chloé: Sinon, non regarde! Les coordonnées du point P, c'est quoi? C'était… Ça va être 0.

Elina: [0 ;a]

Chloé: Oui, [0 ;a]. Comme ça c'est le cas général.

Chloé: Donc l'expression algébrique. Là, c'est certainement parallèle.

Chercheur: Comment est ce que vous trouverez l'expression algébrique?

Chloé: Normalement c'est assez super avec Casyopée.

Chercheur: Il faut trouver un menu pour exporter une fonction

Chloé: La longueur DM, on pourrait prendre la distance

Elina: Mais avant, il m'a donné directement la fonction avec x. Je ne me souviens pas que c'est la même ou non.

Elina: Calcul/ Exporter.

Chloé: On change la variable

Elina: oui.

Chloé: Je pense qu'on prend peut-être la distance DN.

Elina: Mais il y a le point M.

Chloé: Ah oui, quand tu avais écrit DN, Casyopée dit « ça dépend de aucun point libre ».

Elina: OB? xC, OD?

Chloé: Du coup, l'expression géométrique, c'est AN.NM + oC.MD/2. Du coup, la définition, c'est [0 ;a]. L'expression algébrique…

Chloé: f(x) est égale à $\frac{ax}{2}$.

Chloé: Mais regarde!, si tu fais le bouton là. Alors…

Elina: C'est ça le maximum.

Chloé: Il faudrait décrire les variations de fonction.

Elina: Quand est-ce que la fonction est maximale? Quand est-ce que l'aire de la fonction est maximale?

Chloé: En effet, le maximum, ça va correspondre à l'abscisse du point M, il est là. L'image qu'on va trouver, ça va nous donner le point sur le quel on va mettre le point M pour que l'aire soit maximale.

29mn30

<u>Chercheur:</u> La tâche 4: Recherche algébrique de l'aire maximale. Quelle démarche allez-vous faire? Qu'est-ce que vous allez faire comme démarche pour trouver son maximum?

Chloé: Il y a le truc normalement 'étude de fonction'.

Elina: On va voir quand cette fonction a un maximum.

<u>Chercheur</u>: Vous écrivez la démarche: qu'est-ce que vous allez faire et après, vous travailler avec Casyopée pour mettre en œuvre votre démarche.

Chloé: Nous trouverons ici les variations de fonction et quand cette fonction ait l'aire maximale.

Elina: L'abscisse, c'est …

Chloé: On ne fait pas l'abscisse jusqu'à présente.

Elina: L'abscisse c'est correspondre à…

Chloé: Ah, oui, comme ci c'est le point M. C'est la fonction qui décrit l'abscisse qui correspond à celui du point M.

Elina: Oui

Elina: L'aire maximale, c'est à l'abscisse du point M.

Chloé: Donc l'aire de la partie colorée maximale.

32mn

<u>Chercheur</u>: Comment trouvez-vous son abscisse?

Chloé: En lisant sur le graphique, lecture graphique

<u>Chercheur:</u> Mais attention, ce n'est pas une démonstration.

Chloé: On va trouver une équation?

Chercheur:	Là, c'est la fonction de deuxième degré. Comment trouvez-vous son maximum?
Elina:	Ah oui, on va écrire le delta
Elina:	Il dit c'est un truc de second degré. Tu sais quand tu fais avec un truc de second degré, tu calcules le delta avec x1, x2.
Chloé:	Oui
Elina:	Non. Quand tu utilises les variations?
Chloé:	Ah oui, si c'est la dérivée: un table de signes, et après la signe de la dérivée, au voir la croissance, la décroissance et calculer les extremums, mais…
Elina:	Mais est-ce qu'on peut faire ça dans Casyopée?
Chloé:	(parcourir dans les menus). C'est la dérivée.
Chercheur:	Il faut calculer la dérivée
Chloé:	Si non, il faut calculer la dérivée ou le logiciel qui le fait?
Chercheur:	Le logiciel
Chercheur:	Il faut d'abord choisir la fonction, et après?
Chloé:	'calculer', à côté. Alors, dérivée.
Elina:	Essayez? Tu l'as fait, *f'(x)?*
Chloé:	Oui
Elina:	Et on étudie son signe et ensuite on détermine les variations de la fonction.
Chloé:	Donc, les zéros, x1, x2 = 3a/4.
Elina:	C'est f(x) = 0, ça?
Chloé:	Ah, non, c'est après f'(x) = 0.
Chloé:	Ah oui, c'est la valeur qui s'annule, mais attends!
Elina:	Mais f(x) ou f'(x)?
Chloé:	Ah non, c'est f(x) que j'ai cochée.

37mn40

Chloé:	Qu'est-ce qu'on essaie pour f'(x)?
Elina:	Mais après, le signe de a est extérieur: + puis – puis +.
Elina:	Ah oui, donc le signe qui est avant a, après le zéro.
Elina:	Oui, 3a/4 c'est le maximum.

Elina:	Conclusion sur les valeurs, ça veut dire que la fonction, elle va croissante. C'est positive et négative.
Chloé:	Donc après x1, c'est le 0, avant c'est +. C'est - après x1, et + avant.
Elina:	Non, c'est toujours plus, je crois. C'est toujours positif?
Chloé:	Oui, c'est positif et après négatif.
Elina:	Positif et après négatif?
Chloé:	Oui
Chloé:	Mais quand tu calcules la racine, c'est toujours le signe de a.
Chloé:	Ah oui, mais ce n'est pas logique, parce que là, c'est croissante, donc ça doit être positif.
Elina:	Regarde! Je fais ça, par exemple x1 c'est ici. Ça fait comme ça, non?
	{*Elina trace deux paraboles ayant les sommets inverses pour montrer une con-exemple*}.
Elina:	Donc ça fait croissante, comme ça, et décroissante, comme ça.
Chloé:	Et là, il faut calculer f(x)
Elina:	Oui
Chloé:	Il faut créer la fonction f(3a/4)
Chloé:	On sait que l'aire est maximale en x. Comme l'aire est maximale en x, pour prendre sa valeur de l'aire, on calcule f(x).
Elina:	L'aire augmente et diminue. Il faut qu'on fasse…
Chloé:	Oui, c'est ça. De 0 à x1, l'aire augmente, et de x1 à a, l'aire diminue.
Chloé:	Là, par contre je ne sais pas comment on calcule f(x)?
Elina:	Donc l'aire maximale est 20.25
Chercheur:	Regarde! C'est le tableau de valeur de f.
Elina:	Ah, le tableau de valeur de f, c'est là.
Chloé:	Ah, oui, voilà!
Elina:	Le bouton Graphe pour justifier l'étape.
Elina:	signe
Chloé:	On peut faire ça pour les variations.
Chloé:	Il faut que je coche comme le tien, sinon?
Elina:	Oui.

Chloé:	Regarde! C'est ça, 4.46
Chercheur:	Et quelle est la position du point M?
Chloé:	Elle a pour l'abscisse de x.
Chloé:	En sachant que x1, f(x1) = 4.46.
Chloé:	C'est logique avec ce que j'avais dit: un point de coordonnées (4.5 ;4.5)
Elina:	On avait donné comme la conjecture 4.5 et là on a trouvé 4.5
Chloé:	La conjecture est vérifiée.
Elina:	On trouve la même valeur. (47mn)
Chloé:	On trouve une valeur semblable avec celle conjecturée.

Séance C2

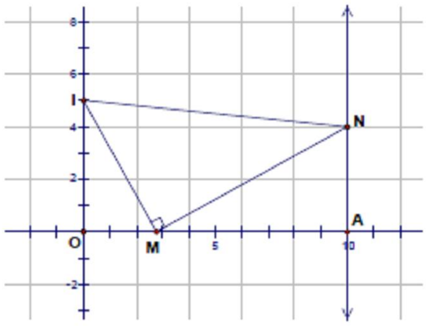
Fiche élève :

Fiche élève
Classe: Terminale S Date:
Lycée:
Nom et prénom:

Une aire d'un triangle rectangle

Soit a un paramètre positif.
Dans un repère orthonormal de centre O, on construit les points A(10;0), I(0 ;a) et la parallèle à l'axe des y passant par A. M est un point libre sur le segment [OA]. On construit le triangle IMN *rectangle* en M, avec N appartenant à la parallèle.

a. Déplacer le point M sur [OA] et observer les variations de l'aire du triangle IMN. Donner une conjecture sur ces variations.
b. Existe-il une position du point M sur [OA] telle que cette aire soit maximale? Justifier?



1. Phase 1: Etudes pour le cas *a* = 5 *(piloter le paramètre a vers 5)*

Tâche 1. Construction de la figure	
Tâche 2. Observations et conjectures **2.1**. Créer le calcul géométrique de l'aire du triangle rectangle IMN. **2.2**. Déplacer le point M sur [OA] et: - observer les variations de l'aire du triangle. - donner des conjectures sur les variations de l'aire et les positions du point M pour les quelles l'aire du triangle IMN soit maximale.	**Les observations:** .... **Les conjectures**: ....
Tâche 3. Modélisation avec Casyopée **3.1**. Choix d'une variable adéquate: x = …………………………………………………….. **3.2**. La fonction géométrique exprimant l'aire du triangle IMN affichée dans la fenêtre « Mesures »:	

La fonction géométrique: f : ………. → ……………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Son ensemble de définition: ……………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Son expression algébrique: $f(x)$ = ……………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Tâche 4. Recherche algébrique de l'aire maximale (*Quelle démarche vous allez faire*?)

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Tâche 5. Travail avec Casyopée

5.1. Mettre en œuvre votre démarche

5.2. Conclusion sur les variations de l'aire et les positions du point M:

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

5.3. Comparer cette conclusion avec les conjectures que vous avez données:

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Tâche 6. Visualiser la conclusion dans la fenêtre de géométrie dynamique.

Tâche 7. ***(Optionnel)***

7.1. Comment aurais-tu calculé en papier/crayon l'expression algébrique de f?

7.2. Comment aurais-tu calculé sa dérivée et les zéros de la dérivée?

2. Phase 2:

a. Prendre le paramètre a = 6, puis faire une étude qualitative sur des variations de l'aire du triangle IMN. Donner une conjecture sur ces variations.

b. Dans le cas général, démontrer que pour chaque $a \in [\frac{10}{\sqrt{3}}; infini[$, l'aire du triangle est strictement décroissante quand on déplace M du point O au point A.

Fiche de travail du binôme Elina-Chloé :

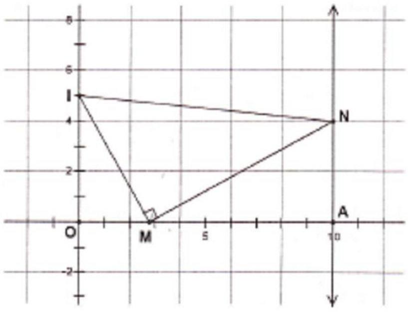
Fiche élève
Classe: Terminale S
Lycée: MAUPERTUIS
Nom et prénom: Elina & Chloé

Date: 14 Novembre 2008

Une aire d'un triangle rectangle

Soit *a* un paramètre positif.
Dans un repère orthonormal de centre O, on construit les points A(10;0), I(0 ;a) et la parallèle à l'axe des y passant par A. M est un point libre sur le segment [OA]. On construit le triangle IMN *rectangle* en M, avec N appartenant à la parallèle.

a. Déplacer le point M sur [OA] et observer les variations de l'aire du triangle IMN. Donner une conjecture sur ces variations.
b. Existe-il une position du point M sur [OA] telle que cette aire soit maximale? Justifier?



1. Phase 1: Etudes pour le cas *a* = 5 *(piloter le paramètre a vers 5)*

Tâche 1. Construction de la figure	
Tâche 2. Observations et conjectures **2.1.** Créer le calcul géométrique de l'aire du triangle rectangle IMN. **2.2.** Déplacer le point M sur [OA] et: - observer les variations de l'aire du triangle. - donner des conjectures sur les variations de l'aire et les positions du point M pour les quelles l'aire du triangle IMN soit maximale.	**Les observations:** $\mathcal{A} = \frac{IM \times MN}{2}$ **Les conjectures:** $\left.\begin{array}{l} x_M = 0 \\ x_M = \frac{1}{OA} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{A}_{max} = 25$ $x_{M=0}$ $x_n = \frac{1}{2} OM$ $\mathcal{A}$: ↘ ↗ ↘
Tâche 3. Modélisation avec Casyopée **3.1.** Choix d'une variable adéquate: x = …OM…… **3.2.** La fonction géométrique exprimant l'aire du triangle IMN affichée dans la fenêtre « Mesures »:	

La fonction géométrique: f: $\mathcal{A}$ → $\dfrac{IM \times MN}{2}$

Son ensemble de définition: $[0; 10]$

Son expression algébrique: $f(x) = \dfrac{(-5)\times\left(\frac{x}{10}-1\right)\times\left(x^2+a^2\right)}{2}$

Tâche 4. Recherche algébrique de l'aire maximale (*Quelle démarche vous allez faire?*)

Calcul dérivée $f(x)$
Etude du signe de $f'(x)$
" variat° de f

$\mathcal{A}max$ = maximum de f

$f'(x) = \dfrac{-3x^2}{10} + 2x - \dfrac{5}{2}$

s'annule en :

$\left\{\sqrt{\dfrac{100-3a^2}{3}}+10 \,;\, -\sqrt{\dfrac{100-3a^2}{3}}-10\right\}$

1° Or $a = 5$

$\sqrt{\dfrac{100-3\times25}{3}}+10$

$= \dfrac{\sqrt{25}+10}{3} = \dfrac{15}{3} = 5$

$-\left(\dfrac{\sqrt{25}-10}{3}\right) = \dfrac{5}{3}$

Tâche 5. Travail avec Casyopée

5.1. Mettre en œuvre votre démarche

5.2. Conclusion sur les variations de l'aire et les positions du point M:

variat° $\mathcal{A}$ ↗ ↘ ↗ quand a pour abscisse 0 et 5 l'$\mathcal{A}$max
5/3 $\mathcal{A}$ minimal

5.3. Comparer cette conclusion avec les conjectures que vous avez données:

Tâche 6. Visualiser la conclusion dans la fenêtre de géométrie dynamique.

Tâche 7. ***(Optionnel)***

7.1. Comment aurais-tu calculé en papier/crayon l'expression algébrique de f?

7.2. Comment aurais-tu calculé sa dérivée et les zéros de la dérivée?

2. Phase 2:

a. Prendre le paramètre a = 6, puis faire une étude qualitative sur des variations de l'aire du triangle IMN. Donner une conjecture sur ces variations.

b. Dans le cas général, démontrer que pour chaque $a \in [\frac{10}{\sqrt{3}}; infini[$, l'aire du triangle est strictement décroissante quand on déplace M du point O au point A.

Tâche 7 : variable : OM $f : n_0 \to \frac{in \times mn}{2}$

$in^2 = on^2 + oi^2$ $MN^2 = MA^2 + AN^2$

$in^2 = x^2 + a^2$ $= (10-x)^2 +$

Or $a = 5$ $in^2 = \sqrt{x^2} + 5^2$

$iM = \sqrt{x^2 + 5^2}$

D'après Théorème de Thalès :

oin et MNA tri rectangle en O et A respectivement.

donc $(oi) // (NA)$

$\frac{oi}{NA} =$

Phase 2 $a = 6$

a) Ainsi variations décroissantes

b) si $a \in [\frac{10}{\sqrt{3}} ; \infty[$ Ali ↘

Revient à dire que $f'(x)$ est négatif.

Fiche de travail du binôme Jennifer-Chahinez :

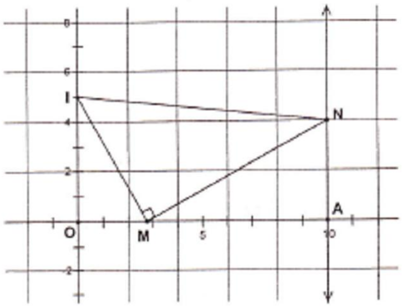
Fiche élève
Classe: Terminale S
Lycée: MAUPERTUIS
Nom et prénom: Jennifer & Chahinez

Date: 14 Novembre 2008

Une aire d'un triangle rectangle

Soit a un paramètre positif.
Dans un repère orthonormal de centre O, on construit les points A(10;0), I(0 ;a) et la parallèle à l'axe des y passant par A. M est un point libre sur le segment [OA]. On construit le triangle IMN *rectangle* en M, avec N appartenant à la parallèle.

a. Déplacer le point M sur [OA] et observer les variations de l'aire du triangle IMN. Donner une conjecture sur ces variations.
b. Existe-il une position du point M sur [OA] telle que cette aire soit maximale? Justifier?



1. Phase 1: Etudes pour le cas $a = 5$ *(piloter le paramètre a vers 5)*

Tâche 1. Construction de la figure	
Tâche 2. Observations et conjectures **2.1.** Créer le calcul géométrique de l'aire du triangle rectangle IMN. **2.2.** Déplacer le point M sur [OA] et: - observer les variations de l'aire du triangle. - donner des conjectures sur les variations de l'aire et les positions du point M pour les quelles l'aire du triangle IMN soit maximale.	**Les observations:** L'aire du triangle varie entre 0 et 25. Elle est maximale lorsque M est au milieu de [OA] et sur O. et elle est nulle lorsque [OM] ~~est nu~~ = 10 **Les conjectures:** M milieu de [OA] et M confondue à O.
Tâche 3. Modélisation avec Casyopée **3.1.** Choix d'une variable adéquate: x = OM **3.2.** La fonction géométrique exprimant l'aire du triangle IMN affichée dans la fenêtre « Mesures »:	

La fonction géométrique: $f: MO \to \frac{IM \cdot MN}{2}$

Son ensemble de définition: $[0 ; 10]$

Son expression algébrique: $f(x) = (-5) \times \left(\frac{x}{10} - 1\right) \times (x^2 + a^2)$

$f(x) = \frac{}{-a}$

Tâche 4. Recherche algébrique de l'aire maximale (*Quelle démarche vous allez faire?*)

Tâche 5. Travail avec Casyopée

5.1. Mettre en œuvre votre démarche

5.2. Conclusion sur les variations de l'aire et les positions du point M:

5.3. Comparer cette conclusion avec les conjectures que vous avez données:

Tâche 6. Visualiser la conclusion dans la fenêtre de géométrie dynamique.

Tâche 7. ***(Optionnel)***

7.1. Comment aurais-tu calculé en papier/crayon l'expression algébrique de *f*?

7.2. Comment aurais-tu calculé sa dérivée et les zéros de la dérivée?

2. Phase 2:

a. Prendre le paramètre a = 6, puis faire une étude qualitative sur des variations de l'aire du triangle IMN. Donner une conjecture sur ces variations.

b. Dans le cas général, démontrer que pour chaque $a \in [\frac{10}{\sqrt{3}} ; infini[$, l'aire du triangle est strictement décroissante quand on déplace M du point O au point A.

Transcription de la séance C2

Le binôme Elina-Chloé

4mn35

Elina :	M est un point libre
Chloé :	Point M sur [OA]
Elina :	Oui

6mn

Chloé :	N appartient à la parallèle, d'accord.
Chloé :	Il faut qu'on trace le segment là.
Elina :	Non non, tu peux prendre l'autre, à côté de [OM]
Chloé :	Oui, c'est mieux
Chloé :	Et là, il faut que l'on trace MN
Elina :	Mais attention sur un truc qui est tracé
Elina :	Traces IM, et ensuite tu traces la perpendiculaire, passant par M et perpendiculaire à IM.
Elina :	Il faut que tu fasses N qui appartient à l'intersection {Elles ont créé N comme un point libre sur la parallèle}
Chloé :	Donc, je vais effacer N
Elina :	Oui, c'est pour ça qu'on va changer.

9mn48

Elina :	Déplacez le point M
Chercheur :	*Attention, pour la phase 1, on prend le paramètre a = 5.*
Chloé :	D'accord
Chloé :	Il faut qu'on trace une hauteur, la perpendiculaire ?
Elina :	Elle est parallèle à la perpendiculaire IM
Chercheur :	*Le triangle IMN est comment ?*
Elina :	Ah, oui rectangle, donc c'est IM*MN/2.
	{Elles créent le calcul géométrique de l'aire avec Casyopée}

12mn20

Chloé :	C'est quand M est milieu de [OA].
Elina :	Et, vas-y vers la droite

Chloé : Et quand l'abscisse de M est égale à l'abscisse de I.

Elina : L'abscisse de quoi ?

Chloé : C'est quand x_I est égale… Ah non, y_I est égale à x_M .

Chloé : Oui

Chloé : C'est 25. {Elle est en train de bouger M}

Elina : Oui

Chloé : Soit $x_M = 0$. Ah, quand le point M a pour les coordonnées (0 ;0).

Elina : Oui

Chloé : Ou le point M a pour les coordonnées : demi de [OA] et 0. {M est milieu de [OA]}

Chloé : C'est croissante puis décroissante

Chloé : Ah, regarde ! On part de 25, puis décroissante, croissante…

Elina : Décroissante

Chloé : Mais non, regarde ! On part de 25, c'est décroissante, et là c'est croissante.

Décroisante, croissante jusqu'à M a les coordonnées: (un demi de OA ; 0). Et après c'est décroissante.

Elina : Oui

16mn :

Chloé : Dernière fois, on a fait avec la hauteur.

Elina : Non, OM, je pense que c'est ça va pour une variable.

Chloé : Oui.

{Elles créent la variable, exportent une fonction et écrivent sur la feuille l'expression de la fonction}

Elina : Son ensemble de définition?

Chloé : C'est $]-\infty;+\infty[$. Ah non, c'est $[0;10]$.

Elina : Regardes ! C'est marqué, l'ensemble de définition.

Chloé : Certainement réel. {Elle regarde sur le bloc note de Casyopée}

22mn30

Chloé : Alors, on étudie cette fonction là ?

Elina : Oui

Chloé : Avec le calcul de dérivée, faire l'étude des signes et on a les variations de fonction.

Elina : On calcule la dérivée, la variation de f et l'aire maximale est le maximum de f.

Chloé : Oui, tu fais le calcul de dérivée.

Chercheur : *La dérivée, c'est la fonction de quel degré ?*

Chloé : Deuxième.

{Elles utilisent Casyopée pour développer l'expression de *f'(x)*}

Chloé : C'est $\frac{-3x^2}{10}+2x-\frac{5}{2}$

Chloé : On va calculer les signes

Chercheur : *Oui.*

{Elles utilisent les menus Justifier/Signes/Seconde degré de Casyopée pour trouver les signes de la dérivée}

Chercheur : *Le coefficient de x^2 est combien ?*

Chloé : C'est $\frac{-3}{10}$.

Chloé : a égale 5.

Elina : Ah oui, on prend le calcul.

Chloé : Je n'ai pas compris

Elina : Là, on va remplacer le paramètre a par 5.

Chloé : Ah oui.

{Elles effectuent le remplacement}

Chercheur : *C'est combien, les deux zéros ?*

Chloé : 35/3 et 25/3

Elina : -5/3

{Elles se sont trompées les racines. Elles ont écrivent $\frac{\sqrt{100-3\times a^2+10}}{3}$ et $\frac{\sqrt{100-3\times a^2-10}}{3}$ au lieu de $\frac{\sqrt{100-3\times a^2}+10}{3}$ et $\frac{-(\sqrt{100-3\times a^2}-10)}{3}$}

Chloé : Ah, d'accord.

Chercheur : *Ça fait combien ?*

Chloé : 15/3, ça fait 5. Ça fait 5 et -5, les zéros.

Chercheur : *Faites attention sur le signe moin (-).*

Chloé : Ah oui, d'accord. Ah, toute est au moin (-). Ça fait donc 5 et 5/3. (34mn)

Chercheur : *Vous l'avez trouvé ?*

Chloé : Oui.

34mn20

Chercheur : *Et après ?*

Chloé : On va calculer les signes.

{Elles utilisent les menus Justifier/Signes/Seconde degré pour trouver les signes de la dérivée}

Chercheur : *Casyopée peut aider à trouver le signe de f'.*

Chloé : Oui

Chloé : ON va calculer le maximum de la fonction

Chercheur : *Vous avez trouvé le signe ?*

Chloé : Oui

Chloé : En effet, les positions du point M, ça va être les zéros. En 5/3, c'est pour la valeur pour laquelle M est le plus bas. En zéro, ça va être la valeur pour laquelle le point M est le plus haut, en 5/3, c'est la valeur pour laquelle il descend et en 5 pour laquelle il est le plus haut. En effet, quand le point M dont l'abscisse est chez des zéros, que soit l'aire maximale, soit l'aire minimale.

Elina : L'aire est maximale en 5 et en 0, et minimale en 5/3.

Chloé : Quand M a pour abscisse de 0 et 5, l'aire est maximale et quand M a pour abscisse 5/3, l'aire est minimale.

40mn50

Chloé : La visualisation dans la fenêtre de géométrie dynamique : là aussi, là aussi et là.

{Elles passent à la tâche 7}

Elina : La variable, c'est OM

Chloé : L'expression algébrique, ce n'est pas là, IM.MN/2 ?

Elina : Non

Chloé : Ah non non.

Chercheur : *Comment trouvez vous son l'expression algébrique en papier/crayon ?*

Elina : Avec le théorème de Pythagore ?

Chercheur : *Essayez-vous !*

Elina : On sait que la variable est MO, donc peut définir la distance IM

Chloé : $IM = OM^2 + IO^2$

Elina : C'est IM^2

Chloé : Oui, $IM^2 = OM^2 + IO^2$

<u>Chercheur</u> : *La distance IO ?*

Chloé : C'est a. Donc, ça fait $IM^2 = a^2 + x^2$

Elina : C'est que a c'est 5

Chloé: Oui

<u>Chercheur</u> : *Donc, IM c'est combien ?*

Chloé : Ça fait $x + 5$

Elina : Non, $IM = \sqrt{a^2 + x^2}$

Chloé : Oui, tu fais $\sqrt{5^2 + x^2}$

<u>Chercheur</u> : *Et MN, c'est combien ?*

Chloé : MA, ça fait 10-x. On fait $MN^2 = MA^2 + NA^2$

Elina : Et NA, c'est quoi ? On fait la même chose, mais…

<u>Chercheur</u> : *Attention, les deux triangles rectangles IOM et MAN sont-ils comment ?*

Chloé : Semblables

<u>Chercheur</u> : *Pourquoi ?*

Chloé : Mais ils sont proportionnels, non ?

<u>Chercheur</u> : *Pourquoi sont-ils semblables ?*

Elina : Ils ont les mêmes angles.

<u>Chercheur</u> : *D'accord.*

Elina : Le théorème de Thalète ?

Chloé : $\frac{OM}{OA} = \frac{OI}{AN}$?

51mn40 (Phase 2)

Chloé : C'est quoi une étude qualitative ?

Elina : Est-ce que tu as pris a = 6 ?

Chloé : Oui

Chloé : Mais là, c'est descendantes tout le temps en effet quand on prend a = 6.

<u>Chercheur</u> : *Ecrivez sur la feuille ce que vous avez trouvé, surtout les variations de l'aire dans ce cas.*

Chloé : C'est toujours décroissante.

Chloé : Les variations de l'aire sont décroissantes.

Chercheur : *D'accord*

Chloé : Une démonstration de la dernière tâche par récurrence ?

Elina : Non, ici c'est la géométrie alors.

Chloé : C'est quoi $\frac{10}{\sqrt{3}}$?

Chercheur : *Quelle est la fonction exprimant l'aire du triangle ?*

Chloé : Là

Chercheur : *Et qu'est-ce que vous allez démontrer ? Pour démontrer l'aire est strictement décroissante, qu'est-ce que vous allez faire ?*

Chloé : On va étudier les variations de fonction et voir que *f'(x)* est toujours négative.

Chercheur : *D'accord*

Elina : Il faut faire quoi ?

Chloé : Il faut démontrer *f'(x)* est toujours négative

Séance C3

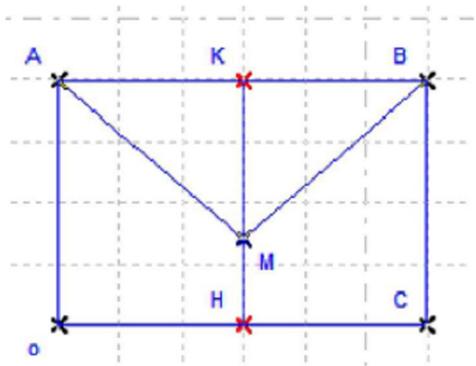
Fiche élève :

Fiche élève
Classe: Terminale S   Date:
Lycée:
Nom et prénom:

Des tuyaux de collecte des eaux

On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluie pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.

On donne ici le plan de cette façade.



Sur le plan:

[AM] et [BM] représentent les deux premiers tuyaux.

[MH] représente le troisième tuyau.

M est un point sur la médiane [HK] du rectangle.

Il s'agit de trouver, sur la façade de cette maison, la position du point M qui minimise la longueur totale des trois tuyaux.

Premier cas : AB=6, oA=4

- Faire la figure dans la fenêtre de Géométrie Dynamique

Il est possible de créer des points de coordonnées entières en cliquant sur la grille.

- Etudier le problème dans la fenêtre de Géométrie Dynamique. Ecrire votre conclusion.
- Etudier le problème dans la fenêtre algébrique. Expliciter les étapes de l'étude.
- Dans la position où la longueur totale des tuyaux est minimale, quelle est la longueur de KM ? quelle est la mesure de l'angle AMB ?

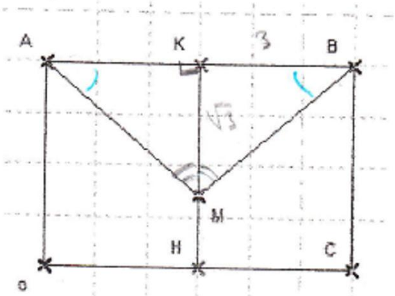
Second cas : AB=6, oA=1

- Refaire l'étude de la même manière. Expliciter les étapes et écrire une conclusion.

Fiche de travail du binôme Elina-Chloé :

Des tuyaux de collecte des eaux

On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluie pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.
On donne ici le plan de cette façade.



Sur le plan:

[AM] et [BM] représentent les deux premiers tuyaux.
[MH] représente le troisième tuyau.
M est un point sur la médiane [HK] du rectangle.

Il s'agit de trouver, sur la façade de cette maison, la position du point M qui minimise la longueur totale des trois tuyaux.

1er cas AB=6 oA=4

- Faire la figure dans la fenêtre de Géométrie Dynamique

Il est possible de créer des points de coordonnées entières en cliquant sur la grille.

Etudier le problème dans la fenêtre de Géométrie Dynamique. Ecrire votre conclusion.

Longueur D des 3 tuyaux : AM + MB + HM . $D_{minimale} = 9,196$

M a pour coordonnés $(3 ; 2,3)$

Etudier le problème dans la fenêtre algébrique. Expliciter les étapes de l'étude.

- Choix d'une variable : HM définie sur $[0 ; 4]$

MH → AM + MB + MH

$$f(x) = 2\sqrt{(4-x)^2+9} - 4 \times \left(\frac{4-x}{4} - 1\right)$$

→ Autre variable KM ⇒ Variable choisie

MK → AM + MB + MH

$$g(x) = 2\sqrt{x^2+9} - 4\left(\frac{x}{4} - 1\right)$$

- $g'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+9}} - 1 = \dfrac{2x - \sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}$

- Etude du signe de $g'(x)$ est : le signe de $2x - \sqrt{x^2+9}$ car $\sqrt{x^2+9} > 0$
- On crée une autre fonction : $h(x) = 2x - \sqrt{x^2+9}$

On utilise l'expression conjuguée : $2x + \sqrt{x^2+9}$

$(2x - \sqrt{x^2+9}) \times (2x + \sqrt{x^2+9})$
$= 4x^2 - (\sqrt{x^2+9})^2$
$= 4x^2 - x^2 + 9$
$= 3x^2 + 9 = 3(x^2-3)$

Etude du signe : $x^2 - 3$
$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 \times (-3) = 12$
$x_1 = -\sqrt{3}$
$x_2 = \sqrt{3}$

(Voir suite) = feuille 1

Dans la position où la longueur totale des tuyaux est minimale, quelle est la longueur de KM ? quelle est la mesure de l'angle AMB ?

Longueur totale des tuyaux est minimale quand $KM = \sqrt{3}$.

$KB = 3$
$KM = \sqrt{3}$

$\tan \widehat{KMB} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3}$
$\widehat{KMB} = \tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{3}\right) = 60°$

Or $\widehat{AMB} = \widehat{AMK} + \widehat{KMB}$
tel que $\widehat{AMK} = \widehat{KMB} = 60°$
Donc $\widehat{AMB} = 60° + 60° = 120°$

2nd cas AB=6 oA=1

Refaire l'étude de la même manière. Expliciter les étapes et écrire une conclusion.

- Calcul : somme des 3 longueurs : $D = AM + MB + MH$

D_{min} lorsque $M = H$ les 2 points sont confondus soit $M \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix}$

choix variable : $KM \rightarrow AM + MB + MH$

$f(x) = 2\sqrt{x^2+9} - x + 1$

$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}} - 1$ soit $f'(x) = g'(x)$ comme le 1er cas

$f'(x)$ et $g'(x)$ ont le même signe, donc $f(x)$ et $g(x)$ ont même variatio.

- Somme des 3 longueurs minimale : lorsque $KM = \sqrt{3}$.
- $KB = 3$
$KM = \sqrt{3}$ $\quad \widehat{AMB} = 120°$ (comme le 1er cas).

→ Voir suite sur feuille 1 pour la conclusion.

1er cas

A

	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$		↗		↘		↗	

Longueur de 3 tuyaux : AM + MB + HM est minimale
lorsque $KM = \sqrt{3}$

CONCLUSION 2e cas

Quand AB = 6 , quelque soit OA -
L'angle $\widehat{AMB}$ est toujour egale à $120°$ -

Donc l'angle $\widehat{AMB}$ ne dépend pas de OA -

et de $\widehat{m}$, MK toujours egale à $\sqrt{3}$, lorsque. AM+MB+MH est minimale.

Quand OA = 1 les points M et H sont confondus

Plus OA est petit, plus le point M se rapproche du point H -

QUESTIONNAIRE DE BILAN

QUESTIONNAIRE DE BILAN

Nom:
Prénom:
Classe:
Etablissement:

I. Remarques sur le logiciel Casyopée

1. Actuellement, estimez-vous vous débrouiller avec Cayopée:
☐ Pas très bien ☐ Moyennement ☐ Bien

2. Pouvez-vous citer quatres fonctionalités utiles de Casyopée pour apprendre des mathématiques, notamment des fonctions?

- ………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………

3. Avez-vous rencontré des difficultés pour apprendre à utiliser Casyopée ?
☐ Oui ☐ Non

Si oui, précisez lesquelles:……………………………………………………………
………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

4. Comment ces difficultés ont-elles été dépassées pendant les dernières séances d'expérimentation ?
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Par rapport à une calculatrice graphique ou symbolique,

5. qu'est-ce qui vous paraît nouveau?
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

6. qu'est-ce qui vous paraît moins bien ?
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

7. qu'est-ce qui vous paraît mieux?
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

8. Pour Casyopée, qu'est-ce qui vous plaît plus ? (applications, fonctionalités…), pourquoi ?
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
9. Pour Casyopée, qu'est ce qui vous déplaît ou vous gêne ? (applications, fonctionalités…)
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

II. Casyopée et l'apprentissage des fonctions

10. D'après vous, quels sont les avantages du logiciel Casyopée pour l'étude des fonctions ?
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
11. Vous avez déjà utilisé Casyopée pour étudier des fonctions via trois problèmes d'optimisation d'origine géométrique. D'après vous, quels sont les avantages de Casyopée pour l'étude de ce type de problèmes ? (applications, fonctionalités, fenêtres…)
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
12. Casyopée vous a-t-il aidé à mieux comprendre la notion de fonction et de dépendance fonctionelle ? ☐ Oui ☐ Non
Si oui, précisez :
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
13. Faire des mathématiques avec le logiciel Casyopée c'est :
☐ plus intéressant ☐ pareil ☐ moins intéressant
Précisez :
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
14. Vous avez participé à une expérimentation avec Casyopée. Vous avez étudié des fonctions via trois problèmes d'optimisation d'origine géométrique. Qu'est-ce que vous avez apprécié et vous n'avez pas apprécié dans cette expérimentation ?
J'ai apprécié :
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Je n'ai pas apprécié :

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

III. Savoir-faire

Pour chacune des tâches suivantes, évaluez –vous par une note 1 ou 2 (1 : je ne sais pas encore faire, 2 : je sais faire)

Construire une figure géométrique	
Créer un calcul géométrique	
Choisir une variable	
Exporter une fonction dans la fenêtre algébrique	
Développer une fonction pour reconnaître son dégré	
Faire apparaître le graphe de la fonction exportée ci-dessue	
Faire le zoom dans la fenêtre graphique pour ajuster le graphe d'une fonction	
Déplacer des objets dans une figure ou un graphique	
Créer un tableau de valeur d'une fonction	
Créer la dérivée d'une fonction	
Trouver le signe d'une fonction dérivée	

IV. Rapport entre Casyopée et « papier/crayon » dans la résolution des problèmes

15. Comment Casyopée vous a-t-il aidé à trouver les solutions des problèmes donnés ? Quels sont les apports de Casyopée à une démonstration en papier/crayon?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

16. Comment utilisez-vous Casyopée et aussi du paier et un crayon pour résoudre les problèmes donnés ?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

V. Autres remarques

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Merci pour vos réponses.

Extrait des copies

Elina :

QUESTIONNAIRE DE BILAN

Nom: RABARIJAONA
Prénom: Elina
Classe: T° SVT
Etablissement: Maupertuis

I. Remarques sur le logiciel Casyopée

1. Actuellement, estimez-vous vous débrouiller avec Cayopée:
☐ Pas très bien ☒ Moyennement ☐ Bien

2. Pouvez-vous citer quatres fonctionalités utiles de Casyopée pour apprendre des mathématiques, notamment des fonctions?
- calcul aire, longueur → transformer en f(x)
- calcul dérivée
- " zéros
- études de signes, tableau de variat°

3. Avez-vous rencontré des difficultés pour apprendre à utiliser Casyopée ?
☒ Oui ☐ Non

Si oui, précisez lesquelles: On ne connait pas exactement les différentes fonctions, différents outils ... qu'il y a dans casyopée. On obtient des calculs qu'on ne sait comment on a fait pour y arriver : déroulement calculs.

4. Comment ces difficultés ont-elles été dépassées pendant les dernières séances d'expérimentation ?
Grâce à l'aide du professeur, et Minh.

Par rapport à une calculatrice graphique ou symbolique,

5. qu'est-ce qui vous paraît nouveau?
transposition figure en fonction (calcul aire ...)
tracer figure

6. qu'est-ce qui vous paraît moins bien ?
très complexe → dans l'utilisation (pleine d'options ...)
erreur immanigeable

7. qu'est-ce qui vous paraît mieux?
visualiser fonc et tracer fig. calcul dérivée, zéros

8. Pour Casyopée, qu'est-ce qui vous plaît plus ? (applications, fonctionalités…), pourquoi ?
applicat°s fonctionnalités, tracer figures, voir déroulement problème, calcul (historique)

9. Pour Casyopée, qu'est ce qui vous déplaît ou vous gêne ? (applications, fonctionalités…)

Complexe = trop de choses

II. Casyopée et l'apprentissage des fonctions

10. D'après vous, quels sont les avantages du logiciel Casyopée pour l'étude des fonctions ?

utiliser différentes variables, tracer fig., visualiser fonc (plusieurs en même temps). faire tableau de signe, trouver la dérivée.

11. Vous avez déjà utilisé Casyopée pour étudier des fonctions via trois problèmes d'optimisation d'origine géométrique. D'après vous, quels sont les avantages de Casyopée pour l'étude de ce type de problèmes ? (applications, fonctionalités, fenêtres…)

Figure + fonctions.

12. Casyopée vous a-t-il aidé à mieux comprendre la notion de fonction et de dépendance fonctionelle ? ☐ Oui ☒ Non

Si oui, précisez :

13. Faire des mathématiques avec le logiciel Casyopée c'est :

☐ plus intéressant ☒ pareil ☐ moins intéressant

Précisez :

On obtient les résultats des calculs mais sans savoir comment on a fait pour les trouver. Pas de calculs détaillés.

14. Vous avez participé à une expérimentation avec Casyopée. Vous avez étudié des fonctions via trois problèmes d'optimisation d'origine géométrique. Qu'est-ce que vous avez apprécié et vous n'avez pas apprécié dans cette expérimentation ?

J'ai apprécié :

Aide de Minh, plus facile

Je n'ai pas apprécié :
Trouver raisonnement (le bon) pour résoudre calcul.

III. Savoir-faire

Pour chacune des tâches suivantes, évaluez –vous par une note 1 ou 2 (1 : je ne sais pas encore faire, 2 : je sais faire)

Construire une figure géométrique	2
Créer un calcul géométrique	2
Choisir une variable	2
Exporter une fonction dans la fenêtre algébrique	2
Développer une fonction pour reconnaître son dégré	2
Faire apparaître le graphe de la fonction exportée ci-dessue	1
Faire le zoom dans la fenêtre graphique pour ajuster le graphe d'une fonction	2
Déplacer des objets dans une figure ou un graphique	1
Créer un tableau de valeur d'une fonction	1
Créer la dérivée d'une fonction	2
Trouver le signe d'une fonction dérivée	2

IV. Rapport entre Casyopée et « papier/crayon » dans la résolution des problèmes

15. Comment Casyopée vous a-t-il aidé à trouver les solutions des problèmes donnés ? Quels sont les apports de Casyopée à une démonstration en papier/crayon?
Pour vérifier les calculs justes ou non.

16. Comment utilisez-vous Casyopée et aussi du paier et un crayon pour résoudre les problèmes donnés ?
À l'aide de nos connaissances acquises dans la classe précédente.

V. Autres remarques

Merci pour vos réponses.

<u>Chloé</u> :

QUESTIONNAIRE DE BILAN

Nom:
Prénom: Chloé
Classe:
Etablissement:

I. Remarques sur le logiciel Casyopée

1. Actuellement, estimez-vous vous débrouiller avec Cayopée:
☐ Pas très bien ☐ Moyennement ☒ Bien

2. Pouvez-vous citer quatres fonctionalités utiles de Casyopée pour apprendre des mathématiques, notamment des fonctions?
- calcule de dérivée
- tableau de dérivation
- choix de variable
- tracer le C

3. Avez-vous rencontré des difficultés pour apprendre à utiliser Casyopée ?
☐ Oui ☒ Non

Si oui, précisez lesquelles:……………………………………………………

4. Comment ces difficultés ont-elles été dépassées pendant les dernières séances d'expérimentation ?
j'ai téléchargé Casyopée sur Moodle donc je l'utilise quelquefois pour l'entraînement

Par rapport à une calculatrice graphique ou symbolique,

5. qu'est-ce qui vous paraît nouveau?
choix de variable je trouve cela intéressant de choisir sa variable pour de l'apprendre. De même construire soi-même quelque chose afin de tracer une fonction

6. qu'est-ce qui vous paraît moins bien ?
……………………………………………………

7. qu'est-ce qui vous paraît mieux?
+ simple niveau dérivée et tableau de variation, plus de précisions

8. Pour Casyopée, qu'est-ce qui vous plaît plus ? (applications, fonctionalités…), pourquoi ?
faire toutes les démarches est super : construction de la figure, tableau variation, calcule dérivée…

9. Pour Casyopée, qu'est ce qui vous déplaît ou vous gêne ? (applications, fonctionalités…)

II. Casyopée et l'apprentissage des fonctions

10. D'après vous, quels sont les avantages du logiciel Casyopée pour l'étude des fonctions ?

plus rapide et plus commode que sur une calculatrice = fonction + dérivée tracée par Casyopée.

11. Vous avez déjà utilisé Casyopée pour étudier des fonctions via trois problèmes d'optimisation d'origine géométrique. D'après vous, quels sont les avantages de Casyopée pour l'étude de ce type de problèmes ? (applications, fonctionalités, fenêtres…)

on a en même temps le côté géométrique et algébrique du problème ☺

12. Casyopée vous a-t-il aidé à mieux comprendre la notion de fonction et de dépendance fonctionelle ? ☒ Oui ☐ Non

Si oui, précisez :

on "voit" mieux ~~p~~ comment une fonction "réagit"

13. Faire des mathématiques avec le logiciel Casyopée c'est :

☒ plus intéressant ☐ pareil ☐ moins intéressant

Précisez :

c'est de la pratique donc + intéressant je trouve.

14. Vous avez participé à une expérimentation avec Casyopée. Vous avez étudié des fonctions via trois problèmes d'optimisation d'origine géométrique. Qu'est-ce que vous avez apprécié et vous n'avez pas apprécié dans cette expérimentation ?

J'ai apprécié :

recherche à la fois géométrique et algébrique

le travail en binôme, l'autonomie

....

Je n'ai pas apprécié :

....

au début j'avais du mal à trouver quelques fonctionnalités mais maintenant c'est bon !

III. Savoir-faire

Pour chacune des tâches suivantes, évaluez –vous par une note 1 ou 2 (1 : je ne sais pas encore faire, 2 : je sais faire)

Construire une figure géométrique	2
Créer un calcul géométrique	2
Choisir une variable	2
Exporter une fonction dans la fenêtre algébrique	2
Développer une fonction pour reconnaître son dégré	2
Faire apparaître le graphe de la fonction exportée ci-dessue	2
Faire le zoom dans la fenêtre graphique pour ajuster le graphe d'une fonction	2
Déplacer des objets dans une figure ou un graphique	2
Créer un tableau de valeur d'une fonction	2
Créer la dérivée d'une fonction	2
Trouver le signe d'une fonction dérivée	2

IV. Rapport entre Casyopée et « papier/crayon » dans la résolution des problèmes

15. Comment Casyopée vous a-t-il aidé à trouver les solutions des problèmes donnés ? Quels sont les apports de Casyopée à une démonstration en papier/crayon?

ça n'aide pas à la démonstration d'une dérivée ou fonction ! c'est à nous de le faire c'est un entraînement !
Mais ça aide à comprendre la fonction, ses variations etc.

16. Comment utilisez-vous Casyopée et aussi du paier et un crayon pour résoudre les problèmes donnés ?

Casyopée permet de vérifier nos recherches, nos résultats !

....

....

V. Autres remarques

Questionnaires trop long !!!

....

Merci pour vos réponses.

Marc :

QUESTIONNAIRE DE BILAN

Nom: Driber
Prénom: Marc
Classe: Term SSVT
Etablissement: Lycée Maupertuis

I. Remarques sur le logiciel Casyopée

1. Actuellement, estimez-vous vous débrouiller avec Cayopée:

☐ Pas très bien ☒ Moyennement ☐ Bien

2. Pouvez-vous citer quatres fonctionalités utiles de Casyopée pour apprendre des mathématiques, notamment des fonctions?

- …
- le logiciel permet d'avoir un problème
- moins abstrait, ainsi il permet de
- rendre les problèmes de fonction plus facile.

3. Avez-vous rencontré des difficultés pour apprendre à utiliser Casyopée ?

☒ Oui ☐ Non

Si oui, précisez lesquelles:

J'oublie facilement où se trouve les outils pour résoudre le problème posé.

4. Comment ces difficultés ont-elles été dépassées pendant les dernières séances d'expérimentation ?

Kévin m'a laissé plus longtemps géré l'ordinateur. Donc, cela m'a permis de répéter les tâches (exporté, crée une fonction etc).

Par rapport à une calculatrice graphique ou symbolique,

5. qu'est-ce qui vous paraît nouveau?

On peut modéliser plus facilement le problème

6. qu'est-ce qui vous paraît moins bien ?

…

7. qu'est-ce qui vous paraît mieux?

On peut crée des calcules alors que la calculatrice n'a pas cette option.

8. Pour Casyopée, qu'est-ce qui vous plaît plus ? (applications, fonctionalités…), pourquoi ?

J'aime bien utiliser le logiciel pour modéliser le problème.

9. Pour Casyopée, qu'est ce qui vous déplaît ou vous gêne ? (applications, fonctionalités…)

Le logiciel possède plusieurs fonctions, donc parfois on ne sait pas quelle fonction prendre.

II. Casyopée et l'apprentissage des fonctions

10. D'après vous, quels sont les avantages du logiciel Casyopée pour l'étude des fonctions ?

visualiser plus facilement le problème.

11. Vous avez déjà utilisé Casyopée pour étudier des fonctions via trois problèmes d'optimisation d'origine géométrique. D'après vous, quels sont les avantages de Casyopée pour l'étude de ce type de problèmes ? (applications, fonctionalités, fenêtres…)

On a l'impression que le problème posé est difficile à résoudre alors que avec le logiciel, il se résout facilement. (ça ne serait pas le cas sur papier).

12. Casyopée vous a-t-il aidé à mieux comprendre la notion de fonction et de dépendance fonctionelle ? ☒ Oui ☐ Non

Si oui, précisez :

Par exemple, le choix de la variable n'est pas souvent aborder dans les problèmes sur papier. Le logiciel m'a permis de mieux comprendre le but d'une variable.

13. Faire des mathématiques avec le logiciel Casyopée c'est :

☒ plus intéressant ☐ pareil ☐ moins intéressant

Précisez :

on traite les notions mathématiques sur un côté ludique

14. Vous avez participé à une expérimentation avec Casyopée. Vous avez étudié des fonctions via trois problèmes d'optimisation d'origine géométrique. Qu'est-ce que vous avez apprécié et vous n'avez pas apprécié dans cette expérimentation ?

J'ai apprécié :

....

Je n'ai pas apprécié :

....

....

....

III. Savoir-faire

Pour chacune des tâches suivantes, évaluez –vous par une note 1 ou 2 (1 : je ne sais pas encore faire, 2 : je sais faire)

Construire une figure géométrique	2
Créer un calcul géométrique	2
Choisir une variable	2
Exporter une fonction dans la fenêtre algébrique	2
Développer une fonction pour reconnaître son dégré	2
Faire apparaître le graphe de la fonction exportée ci-dessue	2
Faire le zoom dans la fenêtre graphique pour ajuster le graphe d'une fonction	2
Déplacer des objets dans une figure ou un graphique	1
Créer un tableau de valeur d'une fonction	1
Créer la dérivée d'une fonction	2
Trouver le signe d'une fonction dérivée	2

IV. Rapport entre Casyopée et « papier/crayon » dans la résolution des problèmes

15. Comment Casyopée vous a-t-il aidé à trouver les solutions des problèmes donnés ? Quels sont les apports de Casyopée à une démonstration en papier/crayon?

Le logiciel permet de calculer des calculs difficiles, par exemple calcul de la dérivée, donc le logiciel nous permet de passer plus de temps sur d'autres choses.

16. Comment utilisez-vous Casyopée et aussi du paier et un crayon pour résoudre les problèmes donnés ?

On fait la manipulation sur le logiciel, puis sur papier on rédige le problème en faisant quelques calculs à la main.

V. Autres remarques

....

....

....

....

Merci pour vos réponses.

Amandine :

QUESTIONNAIRE DE BILAN

Nom: DONEAU
Prénom: Amandine
Classe: Term. S - SVT
Etablissement: MAUPERTUIS

I. Remarques sur le logiciel Casyopée

1. Actuellement, estimez-vous vous débrouiller avec Cayopée:
☐ Pas très bien ☐ Moyennement ☒ Bien

2. Pouvez-vous citer quatres fonctionalités utiles de Casyopée pour apprendre des mathématiques, notamment des fonctions?
- Représentation géométrique
- Possibilité de variable
- calcule de fonction, de distances...
- représentation graphique des fonctions calculer

3. Avez-vous rencontré des difficultés pour apprendre à utiliser Casyopée ?
☒ Oui ☐ Non
Si oui, précisez lesquelles: au début, quand on ne connais pas un logiciel, il faut un certain temps pour s'y habituer. Mais une fois expliquer, il n'est pas difficile d'apprendre à utiliser casyopée.

4. Comment ces difficultés ont-elles été dépassées pendant les dernières séances d'expérimentation ?
Avec l'aide du professeur qui nous expliquer comment faire pour résoudre certains problèmes.

Par rapport à une calculatrice graphique ou symbolique,
5. qu'est-ce qui vous paraît nouveau?
le passage de la géométrie, à l'étude d'une fonction.

6. qu'est-ce qui vous paraît moins bien ?
Rien.

7. qu'est-ce qui vous paraît mieux?
Qu'on peut tout faire sans avoir besoin de changer de mode.

8. Pour Casyopée, qu'est-ce qui vous plaît plus ? (applications, fonctionalités...), pourquoi ?
Ces fonctionnalités car permet facilement de passer d'une géométrique, à une étape algébrique.
étape

9. Pour Casyopée, qu'est ce qui vous déplaît ou vous gêne ? (applications, fonctionalités…)

Ce qui me gêne parfois, c'est malgré que le fait que c'est très pratique, pour aller étudié les fonctions en forme la fenêtre dynamique.

II. Casyopée et l'apprentissage des fonctions

10. D'après vous, quels sont les avantages du logiciel Casyopée pour l'étude des fonctions ?

Permet de faire les calculs facilement d'une dérivée, de factoriser, calculer les signes.
Et d'en plus d'avoir directement à côté dans la même fenêtre la modélisation graphique de la fonction.

11. Vous avez déjà utilisé Casyopée pour étudier des fonctions via trois problèmes d'optimisation d'origine géométrique. D'après vous, quels sont les avantages de Casyopée pour l'étude de ce type de problèmes ? (applications, fonctionalités, fenêtres…)

Permet sur un problème géométrique d'étudier facilement en calculer les distances, ou autres calculs géométrique ; de pouvoir établir des variables qui pourront ensuite servir pour étudier le problème par des fonctions

12. Casyopée vous a-t-il aidé à mieux comprendre la notion de fonction et de dépendance fonctionelle ? ☒ Oui ☐ Non

Si oui, précisez :

Oui, je comprends mieux la notion de fonction. Mais je ne vois pas ce que vous voulez dire par " dépendance fonctionnelle "

13. Faire des mathématiques avec le logiciel Casyopée c'est :

☒ plus intéressant ☐ pareil ☐ moins intéressant

Précisez :

- Les calculs sont plus rapide et facile
- On a les représentations graphique qui nous aide à visualiser le problème
- Moins d'abstrait, je dirais, et plus de concret

14. Vous avez participé à une expérimentation avec Casyopée. Vous avez étudié des fonctions via trois problèmes d'optimisation d'origine géométrique. Qu'est-ce que vous avez apprécié et vous n'avez pas apprécié dans cette expérimentation ?

J'ai apprécié :

....

Je n'ai pas apprécié :

....

....

....

III. Savoir-faire

Pour chacune des tâches suivantes, évaluez –vous par une note 1 ou 2 (1 : je ne sais pas encore faire, 2 : je sais faire)

Construire une figure géométrique	2
Créer un calcul géométrique	2
Choisir une variable	2
Exporter une fonction dans la fenêtre algébrique	2
Développer une fonction pour reconnaître son dégré	2
Faire apparaître le graphe de la fonction exportée ci-dessue	2
Faire le zoom dans la fenêtre graphique pour ajuster le graphe d'une fonction	2
Déplacer des objets dans une figure ou un graphique	2
Créer un tableau de valeur d'une fonction	1
Créer la dérivée d'une fonction	2
Trouver le signe d'une fonction dérivée	2

IV. Rapport entre Casyopée et « papier/crayon » dans la résolution des problèmes

15. Comment Casyopée vous a-t-il aidé à trouver les solutions des problèmes donnés ? Quels sont les apports de Casyopée à une démonstration en papier/crayon?

- Quand on visualise, cela nous paraît plus logique et donc facile.
- De plus, cela est encore plus facile quand les calculs sont réalisés avec Casyopée, car on passe moins de temps à écrire des résultats, mais plus à étudier logiquement le problème

16. Comment utilisez-vous Casyopée et aussi du paier et un crayon pour résoudre les problèmes donnés ?

- Casyopée nous les fonctions, on les étudie sur feuille et vérifie si on obtient pareil

....

....

....

V. Autres remarques

NON.

....

....

....

Merci pour vos réponses.

Chahinez :

QUESTIONNAIRE DE BILAN

Nom: CLOAREC
Prénom: Chahinez
Classe: TSSVT
Etablissement: Maupertuis

I. Remarques sur le logiciel Casyopée

1. Actuellement, estimez-vous vous débrouiller avec Cayopée:
   - ☐ Pas très bien ☐ Moyennement ■ Bien
2. Pouvez-vous citer quatres fonctionalités utiles de Casyopée pour apprendre des mathématiques, notamment des fonctions?
   - Exporter une fonction
   - Étudier sa dérivée (de la fonction)
   - Étudier les zéros de la fonction → tableau de variation
   - Ensemble de définition

3. Avez-vous rencontré des difficultés pour apprendre à utiliser Casyopée ?
   - ☐ Oui ■ Non

Si oui, précisez lesquelles:

4. Comment ces difficultés ont-elles été dépassées pendant les dernières séances d'expérimentation ?

On a rencontré des problèmes techniques (beugue!) qui n'ont pas été rapidement résolus et c'est pour cela qu'on a très souvent dû faire des calculs à la main !

Par rapport à une calculatrice graphique ou symbolique,

5. qu'est-ce qui vous paraît nouveau?

le fait de pouvoir basculer du monde géométrique au monde algébrique en un seul clic ; alors qu'avec une calculatrice on doit d'abord effectuer plusieurs opérat

6. qu'est-ce qui vous paraît moins bien ?

pas grand chose à part le fait que le logiciel beugue !

7. qu'est-ce qui vous paraît mieux?

pouvoir tout effectuer sans avoir recours à des notions de mathématiques !

8. Pour Casyopée, qu'est-ce qui vous plaît plus ? (applications, fonctionalités…), pourquoi ?

avoir des résultats rapidement et avec précision.

9. Pour Casyopée, qu'est ce qui vous déplaît ou vous gêne ? (applications, fonctionalités…)

rien !

II. Casyopée et l'apprentissage des fonctions

10. D'après vous, quels sont les avantages du logiciel Casyopée pour l'étude des fonctions ?

- on voit se qui se passe
- on a une perception des étapes à faire pour obtenir à notre recherche

11. Vous avez déjà utilisé Casyopée pour étudier des fonctions via trois problèmes d'optimisation d'origine géométrique. D'après vous, quels sont les avantages de Casyopée pour l'étude de ce type de problèmes ? (applications, fonctionalités, fenêtres…)

12. Casyopée vous a-t-il aidé à mieux comprendre la notion de fonction et de dépendance fonctionnelle ? ■ Oui ☐ Non

Si oui, précisez :

13. Faire des mathématiques avec le logiciel Casyopée c'est :

■ plus intéressant ☐ pareil ☐ moins intéressant

Précisez :

c'est plus intéressant car on voit ce qu'on fait (figures, calculs .....), on se repère facilement et on voit nos erreurs.

14. Vous avez participé à une expérimentation avec Casyopée. Vous avez étudié des fonctions via trois problèmes d'optimisation d'origine géométrique. Qu'est-ce que vous avez apprécié et vous n'avez pas apprécié dans cette expérimentation ?

J'ai apprécié :

- de travailler autrement
- rechercher comment faire pour répondre aux tâches.
- J'ai préféré le dernier travail car on devait imaginer les taches pour répondre au problème posé.

~~[illegible]~~

Je n'ai pas apprécié :

les problèmes ~~[illegible]~~ techniques (beugues!)

III. Savoir-faire

Pour chacune des tâches suivantes, évaluez –vous par une note 1 ou 2 (1 : je ne sais pas encore faire, 2 : je sais faire)

Construire une figure géométrique	2
Créer un calcul géométrique	2
Choisir une variable	2
Exporter une fonction dans la fenêtre algébrique	2
Développer une fonction pour reconnaître son dégré	2
Faire apparaître le graphe de la fonction exportée ci-dessue	2 ±
Faire le zoom dans la fenêtre graphique pour ajuster le graphe d'une fonction	2
Déplacer des objets dans une figure ou un graphique	2
Créer un tableau de valeur d'une fonction	2
Créer la dérivée d'une fonction	2
Trouver le signe d'une fonction dérivée	2

IV. Rapport entre Casyopée et « papier/crayon » dans la résolution des problèmes

15. Comment Casyopée vous a-t-il aidé à trouver les solutions des problèmes donnés ? Quels sont les apports de Casyopée à une démonstration en papier/crayon?

- avoir les résultats rapidement

16. Comment utilisez-vous Casyopée et aussi du paier et un crayon pour résoudre les problèmes donnés ?

crayon/papier pour - tracer le tableau de variations
- calculer les zéros (car le logiciel beugue

V. Autres remarques

Merci pour vos réponses.

<u>Cindy</u> :

QUESTIONNAIRE DE BILAN

Nom: MERZOUK
Prénom: Cindy
Classe: TS (SVT)
Etablissement: Paupert.

I. Remarques sur le logiciel Casyopée

1. Actuellement, estimez-vous vous débrouiller avec Cayopée:

☒ Pas très bien ☐ Moyennement ☐ Bien

2. Pouvez-vous citer quatres fonctionalités utiles de Casyopée pour apprendre des mathématiques, notamment des fonctions?

- Representation graphiq de la fonction et de sa derive.
- Calcule : derive / developpement
- L'ordi est capable de trouver une fonction à partir d'une vari-
- On peut trouver graphiqt la solution cherchée, il suffit chai après de retrouver la solution par le calcule.

3. Avez-vous rencontré des difficultés pour apprendre à utiliser Casyopée ?

☒ Oui ☐ Non

Si oui, précisez lesquelles: Aucune maîtrise de l'ordinateur notamment du logiciel Casyopée

4. Comment ces difficultés ont-elles été dépassées pendant les dernières séances d'expérimentation ?

J'ai été pas mal assistée.

Par rapport à une calculatrice graphique ou symbolique,

5. qu'est-ce qui vous paraît nouveau?

C'est un peu plus claire et la calculatrice n'est pas capable de définir une fonction seule grâce à une variable.

6. qu'est-ce qui vous paraît moins bien ?

la maîtrise.

7. qu'est-ce qui vous paraît mieux?

Plus claire.

8. Pour Casyopée, qu'est-ce qui vous plaît plus ? (applications, fonctionalités…), pourquoi ?

Applicatio : Derivé, sens de variation, trouver une fonction...

....

....

9. Pour Casyopée, qu'est ce qui vous déplaît ou vous gêne ? (applications, fonctionalités…) (aux calculs et autres)

l'accès si on ne connait pas est difficile

à faire

....

II. Casyopée et l'apprentissage des fonctions

10. D'après vous, quels sont les avantages du logiciel Casyopée pour l'étude des fonctions ?

On voit concrètement ce que l'on traite.

....

11. Vous avez déjà utilisé Casyopée pour étudier des fonctions via trois problèmes d'optimisation d'origine géométrique. D'après vous, quels sont les avantages de Casyopée pour l'étude de ce type de problèmes ? (applications, fonctionalités, fenêtres…)

....

12. Casyopée vous a-t-il aidé à mieux comprendre la notion de fonction et de dépendance fonctionelle ? ☒ Oui ☐ Non

Si oui, précisez :

Du point de vue géométrique on voit plus

de quoi on parle.

....

13. Faire des mathématiques avec le logiciel Casyopée c'est :

☐ plus intéressant ☒ pareil ☐ moins intéressant

Précisez :

Pareil qu'avec le tableau numérique

au cours, mais individuellement c'est mieux

....

14. Vous avez participé à une expérimentation avec Casyopée. Vous avez étudié des fonctions via trois problèmes d'optimisation d'origine géométrique. Qu'est-ce que vous avez apprécié et vous n'avez pas apprécié dans cette expérimentation ?

J'ai apprécié :

....

....

Je n'ai pas apprécié :

III. Savoir-faire

Pour chacune des tâches suivantes, évaluez –vous par une note 1 ou 2 (1 : je ne sais pas encore faire, 2 : je sais faire)

Construire une figure géométrique	
Créer un calcul géométrique	2
Choisir une variable	2
Exporter une fonction dans la fenêtre algébrique	1
Développer une fonction pour reconnaître son dégré	2
Faire apparaître le graphe de la fonction exportée ci-dessue	2
Faire le zoom dans la fenêtre graphique pour ajuster le graphe d'une fonction	1
Déplacer des objets dans une figure ou un graphique	1
Créer un tableau de valeur d'une fonction	2
Créer la dérivée d'une fonction	2
Trouver le signe d'une fonction dérivée	2

IV. Rapport entre Casyopée et « papier/crayon » dans la résolution des problèmes

15. Comment Casyopée vous a-t-il aidé à trouver les solutions des problèmes donnés ? Quels sont les apports de Casyopée à une démonstration en papier/crayon?

A trouver des fcts par rapport à la variable, les représentatio graphique nous aide à trouver la solution et de savoir de quoi on parle.

16. Comment utilisez-vous Casyopée et aussi du paier et un crayon pour résoudre les problèmes donnés ?

Simultanement casyopé / papier. Affichag absolut avec Casyopeé j'essaye de trouver des simplificatio ac papier et crayon.

V. Autres remarques

Les questions sont un peu repetitive ainsi les nombreuses repetitions gen...

Merci pour vos réponses.

Garcia :

QUESTIONNAIRE DE BILAN

Nom: GARCIA
Prénom: Manon
Classe: Term S SVT.
Etablissement:

I. Remarques sur le logiciel Casyopée

1. Actuellement, estimez-vous vous débrouiller avec Cayopée:
☐ Pas très bien ☒ Moyennement ☐ Bien

2. Pouvez-vous citer quatres fonctionalités utiles de Casyopée pour apprendre des mathématiques, notamment des fonctions?
- géométrie dynamique
-
-
-

3. Avez-vous rencontré des difficultés pour apprendre à utiliser Casyopée ?
☒ Oui ☐ Non

Si oui, précisez lesquelles: Pr tracer des figure

4. Comment ces difficultés, ont-elles été dépassées pendant les dernières séances d'expérimentation ?
Grâce à l'aide de Mr Minh, Mr Meyrier et de Lucile

Par rapport à une calculatrice graphique ou symbolique,

5. qu'est-ce qui vous paraît nouveau?
C'est bcp moins général qu'une calculatrice, on peut développer, factoriser et trouver la dérivée.

6. qu'est-ce qui vous paraît moins bien ?

7. qu'est-ce qui vous paraît mieux?
les calculs

8. Pour Casyopée, qu'est-ce qui vous plaît plus ? (applications, fonctionalités…), pourquoi ?
Applicat° cela permet de résoudre + rapidemt les problèmes.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

9. Pour Casyopée, qu'est ce qui vous déplaît ou vous gêne ? (applications, fonctionalités…)

Lorsqu'on fait trop de choses en m̂ temps, il y a des bugs, et faut tout refaire.

II. Casyopée et l'apprentissage des fonctions

10. D'après vous, quels sont les avantages du logiciel Casyopée pour l'étude des fonctions ?

les calculs de dérivées, les développemt et factorisat° d'une fonct° et les représentations graphiques des fonct° obtenues.

11. Vous avez déjà utilisé Casyopée pour étudier des fonctions via trois problèmes d'optimisation d'origine géométrique. D'après vous, quels sont les avantages de Casyopée pour l'étude de ce type de problèmes ? (applications, fonctionalités, fenêtres…)

Casyopée est ⊕ rapide et plus pratique que des calculs faits à la main.

12. Casyopée vous a-t-il aidé à mieux comprendre la notion de fonction et de dépendance fonctionelle ? ☒ Oui ☐ Non

Si oui, précisez :

Bcp ⊕ explicite, on a des images et des représentat° pr mieux comprendre.

13. Faire des mathématiques avec le logiciel Casyopée c'est :

☒ plus intéressant ☐ pareil ☐ moins intéressant

Précisez :

J'ai ⊕ envie d'aller en cours de maths quand on est sur Casyopée que quand on fait du cours.

14. Vous avez participé à une expérimentation avec Casyopée. Vous avez étudié des fonctions via trois problèmes d'optimisation d'origine géométrique. Qu'est-ce que vous avez apprécié et vous n'avez pas apprécié dans cette expérimentation ?

J'ai apprécié :

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

....

Je n'ai pas apprécié :

....

....

....

III. Savoir-faire

Pour chacune des tâches suivantes, évaluez –vous par une note 1 ou 2 (1 : je ne sais pas encore faire, 2 : je sais faire)

Construire une figure géométrique	
Créer un calcul géométrique	2
Choisir une variable	2
Exporter une fonction dans la fenêtre algébrique	2
Développer une fonction pour reconnaître son dégré	2
Faire apparaître le graphe de la fonction exportée ci-dessue	2
Faire le zoom dans la fenêtre graphique pour ajuster le graphe d'une fonction	2
Déplacer des objets dans une figure ou un graphique	1
Créer un tableau de valeur d'une fonction	1
Créer la dérivée d'une fonction	2
Trouver le signe d'une fonction dérivée	2

IV. Rapport entre Casyopée et « papier/crayon » dans la résolution des problèmes

15. Comment Casyopée vous a-t-il aidé à trouver les solutions des problèmes donnés ? Quels sont les apports de Casyopée à une démonstration en papier/crayon?

On voit bcp mieux avec Casyopée qu'avec une démonstrat° papier/crayon

C'est bcp ⊕ concret.

16. Comment utilisez-vous Casyopée et aussi du paier et un crayon pour résoudre les problèmes donnés ?

C'est surtout pour des petits calculs et pour verifier les données importantes qui on utilisent du papier. On rédige un peu ce que l'on comprend sur Casyopée

V. Autres remarques

....

....

....

....

Merci pour vos réponses.

<u>Guillosson</u> :

QUESTIONNAIRE DE BILAN

Nom: Guillosson
Prénom: Armand
Classe: Term S SVT
Etablissement: Maupertuis

I. Remarques sur le logiciel Casyopée

1. Actuellement, estimez-vous vous débrouiller avec Cayopée:
☐ Pas très bien ☒ Moyennement ☒ Bien

2. Pouvez-vous citer quatres fonctionalités utiles de Casyopée pour apprendre des mathématiques, notamment des fonctions?
- géométrie dynamique
- définir une inconnue
- exporter une fonction
- ……

3. Avez-vous rencontré des difficultés pour apprendre à utiliser Casyopée ?
☐ Oui ☒ Non
Si oui, précisez lesquelles: /

4. Comment ces difficultés ont-elles été dépassées pendant les dernières séances d'expérimentation ?
/

Par rapport à une calculatrice graphique ou symbolique,

5. qu'est-ce qui vous paraît nouveau?
tout ce qu'on fait apparait dans le bloc ce qui est pratique

6. qu'est-ce qui vous paraît moins bien ?
/

7. qu'est-ce qui vous paraît mieux?
calcul de dérivée rapide, factorisation/développement facile à effectuer

8. Pour Casyopée, qu'est-ce qui vous plaît plus ? (applications, fonctionalités…), pourquoi ?
géométrie dynamique

<u>Karl</u> :

QUESTIONNAIRE DE BILAN

Nom: Baullebreich
Prénom: Karl
Classe: TSSVT
Etablissement: Maupertuis.

I. Remarques sur le logiciel Casyopée

1. Actuellement, estimez-vous vous débrouiller avec Cayopée:
   ☐ Pas très bien ☐ Moyennement ☒ Bien
2. Pouvez-vous citer quatres fonctionalités utiles de Casyopée pour apprendre des mathématiques, notamment des fonctions?
   - ……………………………………………………………
   - ……………………………………………………………
   - ……………………………………………………………
   - ……………………………………………………………

3. Avez-vous rencontré des difficultés pour apprendre à utiliser Casyopée ?
   ☐ Oui ☒ Non

Si oui, précisez lesquelles:……………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………

4. Comment ces difficultés ont-elles été dépassées pendant les dernières séances d'expérimentation ?
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………

Par rapport à une calculatrice graphique ou symbolique,
5. qu'est-ce qui vous paraît nouveau?
Dérivation, partie géométrique
……………………………………………………………
……………………………………………………………

6. qu'est-ce qui vous paraît moins bien ?
bug.
……………………………………………………………

7. qu'est-ce qui vous paraît mieux?
voir 5.
……………………………………………………………
……………………………………………………………

8. Pour Casyopée, qu'est-ce qui vous plaît plus ? (applications, fonctionalités…), pourquoi ?
géométrie, j'aime créé les figures.
……………………………………………………………

9. Pour Casyopée, qu'est ce qui vous déplaît ou vous gêne ? (applications, fonctionalités…)

Les bugs.

II. Casyopée et l'apprentissage des fonctions

10. D'après vous, quels sont les avantages du logiciel Casyopée pour l'étude des fonctions ?

Possibilité de créer des variables que l'on peut ensuite transformer en nombre ~~Z~~

11. Vous avez déjà utilisé Casyopée pour étudier des fonctions via trois problèmes d'optimisation d'origine géométrique. D'après vous, quels sont les avantages de Casyopée pour l'étude de ce type de problèmes ? (applications, fonctionalités, fenêtres…)

Passage d'une fenêtre à l'autre (géométrie → fonctions).

12. Casyopée vous a-t-il aidé à mieux comprendre la notion de fonction et de dépendance fonctionelle ? ☐ Oui ☒ Non

Si oui, précisez :

13. Faire des mathématiques avec le logiciel Casyopée c'est :

☒ plus intéressant ☐ pareil ☐ moins intéressant

Précisez : C'est en plus!

14. Vous avez participé à une expérimentation avec Casyopée. Vous avez étudié des fonctions via trois problèmes d'optimisation d'origine géométrique. Qu'est-ce que vous avez apprécié et vous n'avez pas apprécié dans cette expérimentation ?

J'ai apprécié : la simplicité d'utilisation du logiciel

Je n'ai pas apprécié :

Les bugs.

III. Savoir-faire

Pour chacune des tâches suivantes, évaluez –vous par une note 1 ou 2 (1 : je ne sais pas encore faire, 2 : je sais faire)

Construire une figure géométrique	2
Créer un calcul géométrique	2
Choisir une variable	2
Exporter une fonction dans la fenêtre algébrique	2
Développer une fonction pour reconnaître son dégré	2
Faire apparaître le graphe de la fonction exportée ci-dessue	2
Faire le zoom dans la fenêtre graphique pour ajuster le graphe d'une fonction	2
Déplacer des objets dans une figure ou un graphique	2
Créer un tableau de valeur d'une fonction	2
Créer la dérivée d'une fonction	2
Trouver le signe d'une fonction dérivée	2

IV. Rapport entre Casyopée et « papier/crayon » dans la résolution des problèmes

15. Comment Casyopée vous a-t-il aidé à trouver les solutions des problèmes donnés ? Quels sont les apports de Casyopée à une démonstration en papier/crayon?

Moins de calculs.

16. Comment utilisez-vous Casyopée et aussi du paier et un crayon pour résoudre les problèmes donnés ?

Casyopée donne la réponse à moi de développer

V. Autres remarques

C'est un bon logiciel

Merci pour vos réponses.

Transcription de l'entretien avec le binôme Elina-Chloé

Chercheur :	*Donc, juste quelques petites questions comme ça pour savoir si vous vous souvenez de l'utilisation des fonctionnalités spécifiques de Casyopée. Comment créer un calcul géométrique ?*
Chloé :	Dans le menu « Créer/Calcul » on crée un calcul géométrique
Chercheur :	*D'accord, et ça vous sera servi quand ?*
Elina :	Pour calculer les distances, des aires…
Chloé :	Quand tu auras besoin des variables, et après si on a un calcul avec variables…
	{Chloé le montre par manipulations sur ordinateur}
Chercheur :	*Et finalement, pour résoudre quel type de problème ?*
Elina :	Géométrie
Chercheur :	*Et comment on l'utilise pour la géométrie ?*
Chloé :	D'abord, on fait des conjectures, et après on essaie de trouver des calculs qui nous ont aidé de valider des conjectures. Après on export des calculs qu'on a faits dans la fenêtre de géométrie dynamique
Chercheur :	*Alors, qu'est-ce qui se passe entre le calcul, par exemple dans cet exemple-là, le calcul pour quoi faire ?*
Elina :	Pour calculer l'aire du triangle, et on a défini une variable pour l'associer à une fonction comme le x
Chercheur :	*Et comment vous avez fait pour l'associer à une variable ?*
Elina :	C'est peut-être l'abscisse de M, ou de certaines distances qui varient
Chercheur :	*Par exemple là, vous avez pris l'abscisse de M. Vous n'avez pas pris d'autres choses ?*
Chloé :	Il faut quand même que la variable qu'on a choisie nous aide à résoudre… En effet, il y a des choix mais il faut vraiment choisir une bonne variable.
Chercheur :	*Et comment faites-vous alors ?*
Elina :	Il faut que l'aire varie aussi en fonction de cette variable
Chercheur :	*Oui. Là, vous auriez pu prendre d'autres variables ?*
Elina :	OM
Chercheur :	*Après, vous avez dit vous exportez une fonction. Où ça ?*

Elina :	Dans la fenêtre algébrique
	{Chloé le montre}
Chercheur :	*Et quand vous êtes là, qu'est-ce que vous faites ?*
Chloé :	Là on choisit et exporte la fonction
Chercheur :	*Oui, et après avoir exporté la fonction, qu'est-ce qui se passe ?*
Chloé :	On a la valeur des cœfficients des équations (expressions). On va servir de cette équation. Elle nous servira, par exemple à calculer la dérivée. Après on sert de la fonction qu'on a trouvé pour résoudre le problème.
Chercheur :	*D'accord. Par exemple dans cet exemple vous avez choisi la variable OM, vous avez exporté une fonction, et puis qu'est-ce que vous avez trouvé ?*
Chloé :	C'est $\frac{3f(x)}{2}$. Parce que celle-ci on nous a donnée. Et on calcule la dérivée. Normalement, après on fait un tableau des signes, et on le fait à la main.
Chercheur :	*D'accord. Comment faire apparaître le graphe de la fonction ?*
Elina :	Juste cocher le truc ici {elle le montre sur l'écran}
Chercheur :	*Bon. Et comment cadrer le graphe ?*
Chloé :	On peut grandir, modifier l'unité du repère. On peut déplacer le repère et zoomer sur une partie de la fenêtre.
Chercheur :	*D'accord. Et le petit point qu'il est marqué là, il représente quoi ?*
	{Chercheur montre le point mobile sur le graphe qui correspond au point M libre dans la fenêtre de la géométrie dynamique}
Elina :	C'est le point M
Chercheur :	*Oui, c'est bien*
Chloé :	C'est le point libre M de la figure.
Chercheur :	*Alors après, comment pouvez – vous aller aux coordonnées maximales sur le graphe ? Par exemple, cet exercice-là, l'aire maximale ?*
Chloé :	Donc sur celui-là ? {Elle montre le graphe}
Chercheur :	*Oui*
Elina :	Les coordonnées de maximum ?
Chercheur :	*Oui*

Elina :	On retrouve dans notre fenêtre, et on va dans… On va dans « Calculer », il y a un truc qui indique le maximum…
Chloé :	On fait l'étude de variation, puis trouver le maximum
Chercheur :	*Comment étudiez-vous la variation de la fonction f ?*
Chloé :	On calcule la dérivée, et après on calcule les zéros et fait le tableau de signe
	{Elle dit en travaillant avec Casyopée}
Chercheur :	*D'accord*

Des questions sur l'utilisation de Casyopée

Chercheur :	*Quand avez-vous commencé à utiliser Casyopée ?*
Chloé :	L'an dernier
Chercheur :	*D'accord. Avez-vous une opinion sur Casyopée ou avez-vous changé l'idée ?*
Chloé :	On a compris. Ce n'est pas facile mais c'est un peu tout le temps les mêmes manipulations. On a le problème de manipulation : on crée la figure, après on étudie le choix des variables, après c'est toujours l'étude de fonctions. C'est bien parce que du coup ça permet de visualiser ce qu'on fait.
Chercheur :	*Et au début, qu'est-ce que vous n'avez pas encore remarqué ?*
Elina :	Au début, on ne savait pas tout ce qu'on peut faire avec Casyopée. Donc c'était dur à comprendre…
Chercheur :	*Et cette année, avez-vous appris la dérivée ? L'année dernière, vous n'avez pas l'appris ?*
Chloé :	Si, on apprend la dérivée depuis l'année dernière
Chercheur :	*Et vous l'avez utilisé chez vous ?*
Chloé :	Non
Chercheur :	*Vous avez fait l'épreuve pratique aussi?*
Chloé :	Oui
Chercheur :	*Et là, comment ça s'est passé ?*
Elina&Chloé :	C'est intéressant, on utilise Casyopée
Chloé :	On a plus d'habitude d'utiliser Casyopée donc c'est tout facile…
Chercheur :	*Vous avez fait combien de séance avec Casyopée ?*
Chloé&Elina :	Oui, on a fait pas mal, environ quinzaine…

Chercheur :	*Et s'il y a une copine par exemple qui veut apprendre à utiliser Casyopée. Qu'est-ce que vous lui disiez au début ?*
Chloé :	C'est comme tous les logiciels, en effet il faut se familiariser avec les outils.

Modélisation fonctionnelle avec Casyopée

Chercheur :	*Par exemple, vous imaginez qu'il y ait quelqu'un qui va passer l'épreuve pratique sur Casyopée mais il n'a pas utilisé Casyopée avant. Si vous voulez lui dire un peu ?*
Chloé :	En effet, la chose la plus dure, c'est le choix de variable, la modélisation. Après, il faut bien choisir la bonne variable.
Chercheur :	*C'est quoi la modélisation que vous appelez ?*
Chloé :	C'est la figure à faire, c'est de tracer la figure
Chercheur :	*Vous tracez la figure, et puis après ?*
Elina :	Après on exporte la fonction
Chercheur :	*Et le calcul, alors ?*
Chloé :	Tout à l'heure, on a fait la figure. On a regardé ce qui s'est passé. On a créé un calcul, avec la base et l'hauteur. Après on a exporté la fonction et on a fait le calcul…
Chercheur :	*Après l'exportation de la fonction ?*
Elina :	Etude de l'aire ?
Chloé :	Oui, mais on l'a fait avant dans le calcul de l'aire
Minh :	Et après le calcul de l'aire ?
Chloé :	On exporte une fonction ?
Chercheur :	*Une fonction quoi ?*
Elina :	Une fonction qui exprime l'aire du triangle en fonction de la variable
Chercheur :	*Bien. Et finalement dans l'ordre, c'est quoi ?*
Chloé :	On trace la figure
Chercheur :	*Oui*
Chloé :	On conjecture
Chercheur :	*Mais même pour conjecturer, comment faites-vous ?*
Elina :	On fait le calcul
Chloé :	Oui, on trace la figure, on fait le calcul

Elina : Il faut tracer aussi les droites parce que dans le calcul on n'a pas tout trouvé.

Chercheur : *Oui, par exemple, il faut tracer la hauteur*

Chloé : Et après le calcul, justement que l'on regarde ce qui se passe, et on conjecture.

Elina : Ensuite, on choisit la variable

Chloé : Oui, et on exporte la fonction et essaie de valider la conjecture

Chercheur : *D'accord*

Chercheur : *Et tout ça, le plus dur, non ?*

Chloé : Le choix de variable.

Question sur le problème sans Casyopée

Chercheur : *Et si vous n'avez pas Casyopée ? Si vous avez le même problème sans Casyopée ? Si vous avez juste ce texte-là, vous réglez comment ?*

Elina : On va passer la fonction sur la calculatrice, et…

Chloé : Normalement, on aurait cherché mais on se serait douté mon avis que quand…

Elina : Quand la courbe atteint le maximum sur l'intervalle, on s'imagine de différentes positions de M sur la courbe. C'est plus précis avec Cayopée, apparemment comme ça.

Chloé : Oui, on a une meilleure… Comme on voit ce qui se passe, c'est plus facile après, pour le problème. Je pense on a réussit comme ça./.