Une perspective sémantique et dialogique sur l'activité de validation en mathématiques

Thomas Barrier

N° d'ordre 256-2009 Année 2009

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON

Délivrée par

L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1

Pour l'obtention du

DIPLOME DE DOCTORAT

(arrêté du 7 août 2006)

soutenue publiquement le 7 décembre 2009

par

Thomas BARRIER

Spécialité : Didactique de Mathématiques

UNE PERSPECTIVE SEMANTIQUE ET DIALOGIQUE SUR L'ACTIVITE DE VALIDATION EN MATHEMATIQUES

Jury :	Nicolas BALACHEFF	Rapporteur
	Viviane DURAND-GUERRIER	Directrice
	Bertrand REMY	Président
	Gérard SENSEVY	Examinateur
	Denis VERNANT	Rapporteur
	Carl WINSLOW	Rapporteur
	Gilbert ARSAC	Invité

RESUME en français

La thèse s'intéresse aux situations de validation au sens de la Théorie des Situations Didactiques Mathématiques (TSDM). Son objectif est d'interroger la filiation revendiquée de cette théorie à la logique dialogique de Lorenzen. La thèse soutient la pertinence didactique de l'adoption d'une perspective sémantique et dialogique sur les processus de validation en mathématiques. Cette approche consiste à analyser les relations entre les assertions et les objets dénotés au sein des jeux de langage à travers les liens stratégiques de validation qui les relient. La méthodologie générale de la recherche s'appuie à la fois sur des ressources philosophiques et didactiques, l'hypothèse de travail est celle de la complémentarité des méthodes analytique et expérimentale en didactique des mathématiques. Au niveau du travail analytique, la référence principale est la sémantique selon la théorie des jeux de Hintikka et sa correction par Vernant. Elle est mobilisée pour reconsidérer les fondements de la TSDM. Sur le plan expérimental, j'ai analysé les pratiques de quantification d'étudiants en mathématiques lors de leur évaluation de deux preuves en Analyse réelle. Le choix de ces preuves repose sur une brève enquête épistémologique.

TITRE en anglais

A semantic and dialogical perspective on the mathematical activity of validation

---

RESUME en anglais

The thesis deals with situations of validation as understood in the Theory of Didactical Situations (TDS). It investigates the proclaimed lineage between TDS and Lorenzen's dialogic logic. The thesis argues for the didactical relevance of adopting a semantic and dialogic perspective on the validation process in mathematics. This approach consists in analyzing the relationship between assertions and the denoted objects of the language games via the strategic links of validation between them. The methodology adopted draws on both philosophical and didactical resources, and the thesis develops the hypothesis that analytic and experimental methods are complementary in the didactics of mathematics. For the analytic treatment, the leading reference is Hintikka's Game Theoretical Semantics (GTS) and its correction by Vernant. GTS is mobilized to reconsider the foundations of TDS. On the side of the experimental method, I used epistemological criteria to select two proofs in real analysis and then analyzed the quantification practices used by mathematics students when evaluating the validity of these proofs.

DISCIPLINE

Didactique des mathématiques

MOTS-CLES

didactique ; mathématiques ; preuve ; sémantique GTS ; situation de validation ; stratégie

---

INTITULE ET ADRESSE DE L'U.F.R. OU DU LABORATOIRE :

LEPS, EA 4148, équipe Lirdhist, Université Claude Bernard – Lyon 1, Bâtiment « La Pagode », 38 boulevard Niels Bohr, Campus de la Doua, 69622 Villeurbanne.

Remerciements

Le travail nécessaire à la réalisation d'une thèse est difficile. Je souhaite exprimer ici ma reconnaissance envers celles et ceux qui m'ont accompagné et soutenu tout au long de cette recherche.

Je tiens d'abord à remercier ma directrice de recherche, Viviane Durand-Guerrier, pour son encadrement rigoureux, stimulant et amical. J'ai eu la chance de profiter de son expertise concernant l'analyse du langage dans le contexte des apprentissages mathématiques. J'ai aussi beaucoup appris de son ouverture et de sa curiosité.

Je remercie également les membres du jury pour leurs critiques sur ce tapuscrit. Je suis particulièrement reconnaissant à Nicolas Balacheff, Denis Vernant et Carl Winslow qui ont accepté d'être rapporteur sur ce travail malgré leurs multiples responsabilités. Je remercie Gérard Sensevy d'avoir accepté de participer au jury et Bertrand Rémy d'avoir accepté de le présider. Je remercie Gilbert Arsac pour avoir accepté notre invitation et pour sa précieuse relecture d'une version antérieure du texte.

Je remercie Thomas Blossier, enseignant-chercheur en mathématiques, avec qui j'ai réalisé la principale expérimentation de ce travail. J'ai également profité d'échanges très constructifs avec Anne-Cécile Mathé concernant son corpus de thèse.

Je remercie les étudiants de l'Université Lyon 1 et de l'INSA de Lyon qui ont accepté de se prêter au jeu des expérimentations. Merci également à Pierre Crépel et Nicolas Pelay pour leur participation.

Je remercie le Laboratoire d'Etude du Phénomène Scientifique, et en particulier l'équipe LIRDHIST, pour son accueil et les conditions favorables de travail qu'il m'a offert. Je pense en particulier aux doctorants et jeunes chercheurs du laboratoire.

Par ailleurs, ce travail n'aurait certainement pas vu le jour sans la joyeuse contribution d'un certain nombre d'étudiants et de personnels avec qui j'ai pu partager un peu de ma colère contre le fonctionnement et l'évolution de l'université (notamment la formation des enseignants).

Enfin, je tiens à remercier mon amie Fanny et mon fils Maël pour leur soutien et leur patience durant cette période de travail très prenante.

Table des Matières

Table des Annexes

INTRODUCTION ET METHODOLOGIE GENERALE

La validation mathématique est un thème qui fait l'objet de nombreux travaux dans plusieurs disciplines, la didactique des mathématiques mais aussi la philosophie ou encore les mathématiques elles-mêmes. Les différentes approches peuvent parfois diverger au niveau de leur perspective. Par exemple, une recherche en théorie de la démonstration n'engendre par le même genre de démarche qu'une recherche sur la manière par laquelle les mathématiciens s'assurent effectivement de la validité d'une preuve. Au niveau de la recherche en didactique des mathématiques, qui est le domaine principal de mon étude, ce thème de la validation fait l'objet d'un certain dynamisme sur le plan international[1]. Cette année, un groupe de travail de la sixième conférence de la société européenne de recherche sur l'éducation mathématique (CERME 6) a été consacré à l'argumentation et la preuve. Toujours en 2009, une étude spécifique de la commission internationale de l'enseignement des mathématiques s'est intéressée à la preuve et à l'activité de preuve (ICMI 19). Dans cette thèse, je m'intéresse à l'activité mathématique de validation et plus spécifiquement aux pratiques langagières des élèves et des étudiants au sein de cette activité. Ma problématique concerne la pertinence, du point de vue de l'analyse didactique, du développement d'un point de vue sémantique et dialogique sur les situations de validation au sens de Brousseau (1998).

Préliminaires. Afin de préciser le sens général de mon travail, je me permets de citer un peu longuement Guy Brousseau concernant l'origine de la théorie de situations et la notion de jeu mathématique :

> « La représentation des mathématiques la plus répandue est celle d'un système complètement déductif. Elle consiste en gros à considérer la logique mathématique et l'ensemble des énoncés constituant la connaissance actuelle d'une théorie mathématique comme un répertoire de règles. Le jeu consiste alors, *conformément à ces règles*, à construire de nouveaux énoncés valides portant sur les objets de la théorie. […] Sur la même représentation théorique, il met en scène la production de certains théorèmes et axiomes de logique comme moyen de régler des conflits entre un proposant et un opposant. C'est exactement ce « jeu » proposé par P. Lorenzen en 1967 dans son ouvrage «

---

[1] « La lettre de la Preuve » publie régulièrement une lettre d'information internationale recensant les diverses publications et événements concernant le thème de l'enseignement et de l'apprentissage de la preuve.

http://www.lettredelapreuve.it/

> Métamathématique » qui est à l'origine de la théorie des situations. » (Brousseau, 2002, p. 10-11)

La notion de jeu est donc, à travers la référence à Lorenzen (1967), au fondement de la théorie des situations. Plus précisément, la théorie des situations regarde l'activité mathématique de preuve comme un échange d'énoncés entre deux joueurs au sein d'un dialogue réglé. En annexe de ce même texte, Brousseau pose la question suivante : « Ce modèle vaut-il pour la démonstration de tous les théorèmes ? ». Cette question est motivée par une remarque de Lorenzen concernant la formule du tiers exclu (la disjonction formée d'un énoncé et de sa négation). Cette formule ne peut pas être déduite au sein du système proposé par Lorenzen et repris par Brousseau. La raison de cette impossibilité est qu'un joueur qui souhaiterait défendre un énoncé de la forme $a \vee \neg a$ dans un dialogue devrait être capable de décider effectivement lequel des deux éléments a ou $\neg a$ il souhaite défendre. Or ce choix ne repose pas seulement sur la forme de l'énoncé $a \vee \neg a$. Il repose aussi sur la sémantique de la situation. Brousseau affirme alors :

> « Il est très important de remarquer que l'interprétation opératoire de Lorenzen conduit à introduire une sémantique - ce qu'il appelle un contenu - à côté des écritures formelles et que cette introduction conduit elle même à une restriction intuitionniste. » (Brousseau, 2002, p. 27)

Cette remarque, très importante selon Brousseau, me semble marquer une difficulté tout aussi importante de la théorie des situations, ou fondamentale dans le sens où elle se situe au niveau des fondations de la théorie. Le fait est que si Lorenzen introduit une sémantique *à côté* de sa théorie, sa logique dialogique est une théorie formelle de la vérité logique, au sens où elle ne prend en charge que la forme des énoncés. Les aspects sémantiques ne sont présents que de façon annexe. Ils ne prennent aucune part au fonctionnement du système. Ma thèse est une tentative pour essayer de dépasser la contradiction initiale de la théorie des situations qui d'un côté souligne l'importance des questions sémantiques dans les situations de preuve mais qui d'un autre côté s'appuie sur une logique qui est formelle et syntaxique. J'explore dans ce travail les perspectives ouvertes dans cette direction par la sémantique selon la théorie des jeux ou encore sémantique GTS[2] du philosophe et logicien Hintikka (2007). Ma perspective est donc essentiellement théorique et orientée vers une réflexion sur les fondements logiques de la didactique des mathématiques. Cette démarche est d'ailleurs envisagée par Brousseau lui-même dans le texte déjà cité dans cette introduction générale :

[2] GTS pour Game Theoretical Semantics.

> « Le projet de la théorie des situations de *mettre en scène le fonctionnement* des connaissances conduira naturellement à accepter cette logique comme règle des interactions observées. Ceci par conséquent tend à exonérer les commentateurs de la théorie des situations qui l'ont qualifiée de théorie logiquement constructiviste. Il faut cependant remarquer que ce n'est pas la théorie qui est constructiviste, c'est le comportement des acteurs et la logique qu'ils construisent. Ceci ne signifie pas qu'il n'est pas possible de chercher une modélisation d'un logique plus large, avec les méthodes de la théorie des situations. » (Brousseau, 2002, p. 27)

Méthodologie générale. Au niveau de la méthodologie générale, j'ai conduit ma recherche en utilisant aussi bien des méthodes issues d'une approche philosophique du langage que les méthodes « traditionnelles » de la didactique des mathématiques. Ma principale hypothèse de travail est celle de la complémentarité des deux points de vue et plus précisément celle de la complémentarité des approches analytique et expérimentale. De ce point de vue, mon travail s'inscrit dans la continuité des recherches de Viviane Durand-Guerrier et en particulier dans la continuité de son Habilitation à Diriger des Recherches et de ses travaux récents sur l'usage de la Théorie des modèles pour l'analyse didactique du raisonnement mathématique (Durand-Guerrier, 2005, 2007, 2008). La sémantique selon la théorie des jeux (je dirai par la suite sémantique GTS) est en effet un prolongement dialogique de la Théorie des modèles. Au niveau analytique, je me suis intéressé aux explications logiques des pratiques langagières effectives. De manière plus spécifique j'ai accordé une importance particulière à leurs analyses logiques en termes de jeux. Cette réflexion s'est nourrie des apports des travaux d'un certain nombre de philosophes de tradition analytique parmi lesquels Frege, Wittgenstein, Quine et Hintikka. Sur le plan expérimental, mon corpus est essentiellement constitué de transcriptions de dialogues d'élèves et d'étudiants au cours de débats ayant un enjeu de vérité. Il provient pour une part de corpus de thèse qui ont été constitués dans d'autres perspectives (Battie (2003), Mathé (2006)) et dont je propose des relectures et d'autre part d'un recueil propre réalisé au cours de deux expérimentations auprès d'étudiants de l'INSA de Lyon et de l'Université Lyon 1. Un regard didactique sur ces éléments expérimentaux et analytiques m'a conduit à dégager deux directions d'analyse pour les aspects langagiers de l'activité de validation en mathématiques. La première consiste à chercher à comprendre les assertions des élèves et des étudiants à travers leur fonction stratégique à l'intérieur du dialogue qui leur donne sens. La seconde s'appuie sur la distinction entre l'activité syntaxique, qui consiste en une manipulation formelle du langage, et l'activité sémantique qui trouve sa source au-delà du langage, au niveau de la référence des mots. A partir de là, ma question de recherche s'est resserrée autour de l'étude de la potentialité didactique de ces outils d'analyse au niveau de la compréhension de l'activité de validation. En particulier, je cherche à évaluer les apports potentiels des principales idées aux fondements de la sémantique selon la théorie des jeux (Hintikka, 2007) pour l'analyse didactique des situations de validation (Brousseau, 1998). Pour traiter de ces questions, j'ai choisi d'organiser mon travail en trois temps. Le premier temps de la thèse est consacré à la présentation informelle des outils que je propose d'évaluer du point de vue de leur efficacité didactique dans le contexte de la validation. Je mets en place les éléments nécessaires à mon argumentation en articulant les analyses d'extraits de corpus et les présentations plus théoriques. Dans un deuxième temps, mon approche est plus formelle de manière à rendre disponible une méthodologie de modélisation des dialogues des élèves. Dans cette thèse, le terme de modélisation renvoie à l'usage d'un « formalisme logico-mathématique qui représente un système » (Armatte, 2005, p. 92). Dans ces deux premiers moments de la thèse, la question de l'intérêt de l'usage d'une approche sémantique et dialogique est discutée du point de vue de la construction théorique de la didactique des mathématiques. Bien que les approches analytiques et expérimentales soient, conformément à ma méthodologie principale de recherche, constamment entrelacées, le niveau global de l'analyse est relativement général et ne concerne ni un domaine ni une activité particulière. Il m'a alors paru important de compléter mon approche par une étude plus spécifique. Pour des raisons que je développerai dans la thèse, j'ai choisi de me centrer sur l'activité de quantification dans le domaine de l'analyse mathématique. Le dernier moment de la thèse consiste en une étude de cas dont l'enjeu est aussi bien de parvenir à une certaine compréhension des pratiques langagières des étudiants que de confronter les outils d'analyse et de modélisation mis en place précédemment. Cette étude de cas repose sur un important travail expérimental mais aussi sur des études logiques et historiques du concept de quantification. Pour conclure, la méthodologie qui est mise en œuvre dans cette thèse relève d'une approche pluridisciplinaire, articulant les dimensions philosophique, épistémologique et didactique. Ce type d'approche dans les recherches sur les sciences est d'ailleurs un positionnement revendiqué par l'équipe de recherche, le Leps-Lirdhist, au sein de laquelle j'ai réalisé mon travail de doctorat mais aussi par d'autres structures universitaires[3].

Présentation du contenu. Je présente maintenant un peu plus précisément le contenu de cette thèse et l'articulation du raisonnement. Dans une première partie, je présente de manière relativement informelle les outils que je vais utiliser tout au long de la thèse et dont je

[3] Par exemple l'école doctorale '*Savoir scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactiques des disciplines*' de l'Université Paris Diderot – Paris 7.

souhaite évaluer la pertinence didactique. Je montre comment la distinction entre jeux d'intérieur et jeux d'extérieur, empruntée à Hintikka (2007), peut être utilisée pour analyser des processus de construction de preuves (§ 1). Ce vocabulaire permet de distinguer l'activité mathématique qui est interne au langage et celle qui fait intervenir des interprétations extra-langagières. Il rend également compte de la dimension pragmatique du langage en mettant en avant le caractère stratégique les assertions. Je discute ensuite de la manière dont ces concepts permettent d'aborder des thèmes importants de la didactique comme l'explicitation langagière et les paradoxes associés (§ 2) et le rapport entre l'argumentation et la preuve (§ 3). Cette partie permet donc de présenter et de situer l'approche sémantique et dialogique qui est explorée dans cette thèse. Elle souligne certains points de convergence avec des approches didactiques établies et d'autres points de divergences.

La deuxième partie de la thèse constitue un prolongement de cette première partie. Elle intègre l'explicitation d'un formalisme pour les concepts de jeux d'intérieur et de jeux d'extérieur dégagés précédemment. Ce formalisme peut être vu comme un essai de codification des pratiques de recherche des mathématiciens. Il met au cœur de ses préoccupations la manipulation des lettres et des objets (§ 1) et permet de développer un outil de modélisation pour l'analyse des dialogues en situation de validation. Cette modélisation s'inscrit dans la perspective ouverte par la théorie des situations et me semble permettre d'en préciser les fondements (§ 2). Je me sers ensuite des possibilités offertes par le formalisme pour discuter de la référence à l'anthropologie en didactique (§ 3). Cette discussion clôt la partie de la thèse qui s'intéresse à la conceptualisation didactique.

La réflexion théorique des deux premières parties met en avant l'importance de la quantification dans l'analyse didactique en explicitant le rôle joué par les objets et les lettres dans l'activité mathématique. Il m'a alors paru pertinent d'engager un travail expérimental sur les pratiques associées à la quantification chez les étudiants dans l'enseignement supérieur. Les outils didactiques d'analyse développés auparavant trouvent dans cette dernière partie un corpus propre avec lequel se confronter. Ce travail s'appuie également sur une réflexion épistémologique construite à partir d'une étude logique de la quantification (§ 1) et d'une étude de plusieurs preuves d'ouvrage mathématiques d'analyse du XIXème siècle (§ 2). L'expérimentation principale consiste en la lecture par plusieurs groupes d'étudiants de plusieurs niveaux de deux preuves construites à partir de l'analyse épistémologique. Elles contiennent toutes les deux des inférences qu'une lecture contemporaine est susceptible de considérer comme invalides (§ 3).

PARTIE 1 : UNE APPROCHE SEMANTIQUE ET DIALOGIQUE DE LA VALIDATION MATHEMATIQUE

INTRODUCTION

Comme je l’ai souligné dans l’introduction générale, l’enjeu principal de cette thèse est d’explorer les fondements logiques de la théorie des situations. Cette exploration aura lieu dans deux directions principales, la direction dialogique et la direction sémantique. Dans cette première partie, je commence par introduire les concepts qui me seront utiles dans le développement de mon argumentation et à en défendre la pertinence didactique. Le terme d’*approche sémantique* renvoie à la distinction classique entre « syntaxe » et « sémantique ». Je parlerai d’une approche langagière sémantique lorsque, d’une façon ou d’une autre, des éléments extra-langagiers viendront enrichir le milieu des interlocuteurs. Plus précisément, je pense à la prise en compte de la référence des mots employés au cours du processus de validation. De ce point de vue, une approche sémantique s’oppose à une approche formelle ou syntaxique qui utiliserait exclusivement la forme des énoncés, leur structure logique, afin de les manipuler. J’utilise la notion d’*approche dialogique* pour signifier une manière de prendre en considération les assertions des élèves et des étudiants. Analyser une assertion de manière dialogique revient à la situer au sein du dialogue dans lequel elle prend place. Il s’agit d’interpréter les assertions dans leur dimension pragmatique, de les regarder comme des coups dans des jeux de langage structurés. L’ambition première de cette partie est d’argumenter la pertinence de l’approche sémantique et dialogique du langage dans le contexte de la validation mathématique. La deuxième partie de la thèse sera en effet une extension de cette réflexion dans la direction des fondements logiques de la théorie des situations. De ce point de vue la première partie prépare sur le plan conceptuel les considérations plus formelles de la deuxième partie. Le premier chapitre sera essentiellement orienté vers une présentation des possibilités d’usage de la distinction entre une approche sémantique et une approche syntaxique ou formelle des processus de validation. Même si le terme anticipe en partie l’idée d’une approche dialogique, je m’appuierais sur le vocabulaire de Hintikka (2007) qui utilise les catégories de jeux d’intérieur et de jeux d’extérieur. Cette catégorisation sera mise en relation au niveau didactique avec celle utilisée par Weber & Alcock (2004) lesquels opposent les productions syntaxique et sémantique de preuve. Pour terminer ce premier chapitre, j’utiliserai l’exemple du continu mathématique pour illustrer ce qu’est une approche sémantique dans un processus de preuve. Le deuxième chapitre introduit et illustre ce que j’entends par une approche dialogique. Ce concept est mobilisé à partir d’une relecture du corpus de thèse de Mathé (2006). Ce corpus présente des dialogues d’élèves du troisième cycle de l’enseignement primaire dans le cadre d’une activité d’un atelier de géométrie. Je m’intéresse par exemple aux structures des dialogues qui impliquent le mot « côtés » et à leur influence sur les débats des élèves. Le troisième et dernier chapitre de cette partie situe ces premiers éléments conceptuels dans le champ de la recherche en didactique des mathématiques sur l’argumentation et la preuve. A cette occasion, je discute des modélisations de Duval et Toulmin et en particulier du rapport qu’elles entretiennent avec la quantification. La conceptualisation proposée fait de la quantification un élément important de l’analyse du langage dans la mesure où la quantification est l’outil théorique qui permet de rendre compte des interactions des interlocuteurs avec les objets qu’ils sollicitent dans le contexte d’un processus sémantique de validation. Cette prise en compte de la quantification dans l’analyse me paraît susceptible de remettre en cause l’idée, fortement inscrite dans le contexte scolaire, de rupture entre preuve et argumentation. Bien que quelques modélisations soient proposées dans cette partie, ce paragraphe se contente d’une position critique. L’essentiel des propositions seront faites dans la deuxième partie de la thèse.

1. L’ARTICULATION DES JEUX D’INTERIEUR ET DES JEUX D’EXTERIEUR

Le contenu de ce chapitre est amplement et librement inspiré de Barrier, Durand-Guerrier & Blossier (à paraître). Il s’agit de commencer à introduire les concepts qui seront développés tout au long de la thèse et de formuler une première fois la position qui sera argumentée, à savoir la pertinence de l’intégration d’une approche sémantique et dialogique dans l’analyse didactique des situations de validation. Ce chapitre est plus spécifiquement consacré à l’approche sémantique de l’activité de validation en mathématique. Il s’intéresse en particulier au rôle des objets et au rôle de la quantification dans les processus de preuve. Le terme « objet » renvoie aux éléments d’une structure d’interprétation pour un discours donné, à la dénotation des noms d’objet, des noms propres (Frege, 1971, p. 129). Le terme de « quantification » exprime la manière dont sont manipulés les variables et les objets dans la pratique mathématique ou logique. Une théorie de la quantification est une théorie qui permet de prendre en compte le rapport des objets d’un domaine d’interprétation aux énoncés concernant ces objets. Par exemple, le calcul des prédicats est une théorie de la quantification contrairement au calcul des propositions dont il constitue une extension. La centration de l’attention sur la manipulation des objets par les élèves ou les étudiants dans leurs pratiques langagières revient donc à se concentrer sur la manière dont ces pratiques sont quantifiées. Dans toutes cette thèse, les expressions approche sémantique ou jeux sémantiques (etc) sont à regarder comme relevant implicitement du contexte du calcul des prédicats. Une approche sémantique du calcul des propositions est bien sûr envisageable, par exemple au travers des tables de vérités. Je ne m’y intéresse pas pour des raisons que j’exposerai dans le troisième chapitre de cette partie. Je commence ici par exposer la distinction opérée par Hintikka (2007) entre jeux d’intérieur et jeux d’extérieur. Cette distinction sera opératoire tout au long de la thèse.

1.1 La distinction et les relations entre jeux d’intérieur et jeux d’extérieur

Hintikka distingue deux types de jeux dans les procédures de validation. Il les qualifie de jeux d'intérieur et de jeux d'extérieur :

> « Malgré ces liens, il est philosophiquement très important de les distinguer nettement l'un de l'autre. Les jeux sémantiques sont des jeux d'extérieur (*outdoor games*). On les joue sur les objets du langage que l'on parle, et ils consistent principalement pour les deux joueurs à choisir entre différents objets. A l'opposé, les jeux de preuve sont des jeux d'intérieur (*indoor games*). On les joue avec un crayon et du papier, avec une craie et un tableau, ou de nos jours avec un ordinateur. » (Hintikka, 2007, p. 67)

Voici un exemple pour illustrer cette distinction. Il provient de Barallobres (2007). L'utilisation de ce vocabulaire constitue une relecture personnelle de l'article puisque Barallobres ne fait pas de référence à Hintikka. Dans cet article Barallobres analyse les relations entre la signification des expressions algébriques et les actions spatio-temporelles qui leur sont associées par les élèves. Par exemple, les expressions $(n + 1) + n$ et $(n + n) + 1$ renvoient à des actions différentes si bien qu'elles ont tendance à être considérées par les élèves qui découvrent l'algèbre comme dénotant des objets différents. Le jeu qui consiste à appliquer les règles d'associativité et de commutativité à ces expressions afin de les identifier par leur forme est un exemple de ce que Hintikka appelle un jeu d'intérieur. Ce jeu se distingue du jeu qui consiste à choisir un nombre entier (et non une lettre) à y ajouter 1 puis à nouveau le nombre choisi et à comparer le résultat obtenu avec le jeu qui consiste à ajouter ce nombre avec lui-même puis avec 1. Ce dernier jeu est ce que Hintikka appelle un jeu d'extérieur. Il fait intervenir des choix d'objets « du langage que l'on parle ». Barallobres met en évidence que la pratique de ces jeux formels nécessite un apprentissage, que « les pratiques de validation intellectuelles ne sont pas une donnée immanente de l'esprit humain » (Barallobres, 2007, p. 40). Il propose une analyse des interférences entre les deux types de jeux à partir d'une expérimentation conduite autour de la situation « des 10 nombres consécutifs ». Dans cette situation, l'enseignant propose une suite de dix nombres consécutifs et les élèves doivent en calculer la somme. Le groupe le plus rapide est vainqueur de la partie. L'activité est renouvelée plusieurs fois avec des variations sur la grandeur des nombres choisis. Lorsque les élèves pensent avoir trouvé le moyen le plus rapide de faire le calcul, ils sont invités à décrire et défendre une méthode et une formule associées. Plusieurs types des jeux interviennent au cours de l'activité des élèves. Comme jeux d'extérieur, il y a par exemple le calcul posé de la somme des nombres proposés par l'enseignant. Il peut y en avoir aussi d'autres, plus élaborés et surtout plus rapides, comme par exemple prendre le premier nombre de la série donnée, le multiplier par dix et y ajouter 45. Les jeux d'intérieur interviennent lorsque les élèves (dans l'expérimentation de Barallobres, ils ont treize ou quatorze ans) entreprennent de justifier de leur méthode de calcul et leur formule à l'aide de règles. En particulier, cela peut arriver si un groupe cherche à montrer en quoi sa formule correspond bien au même calcul que la somme posée ou lorsqu'il s'agit de comparer deux formules proposées. Cette présentation dichotomique n'a pas pour objectif d'établir un ordre ou une hiérarchie entre ces deux types de jeux. Il est par exemple envisageable que les élèves engagent aussi des jeux d'extérieur pour s'assurer que deux formules proposées sont bien équivalentes. L'hypothèse de Barallobres (2007, p. 41) est que l'usage des formules comme outils de calcul « permet de donner du sens à l'équivalence de deux expressions algébriques qui, au départ, objectivent une ensemble d'actions « différentes » ». Cette hypothèse peut-être interprétée comme celle d'un lien fort (*donner du sens*) entre les actions sur les objets dans les jeux d'extérieur et la manipulation formelle des énoncés (*l'équivalence de deux expressions algébriques*).

Je développe maintenant un exemple qui montre comment les jeux d'extérieur interagissent avec les jeux d'intérieur. Il concerne l'énoncé « pour tout entier naturel n, $10 \times (n + 4) + 5 = 10 \times n + 45$ » (1). Le jeu d'intérieur associé à cet énoncé est le suivant : il faut trouver les règles et relations mathématiques pertinentes et les combiner en une preuve de l'égalité. Ce jeu est d'*intérieur* puisque les règles structurelles de ce jeu interdisent toute utilisation des nombres, de leurs propriétés et de leurs relations. Ici, une stratégie gagnante pour un joueur pourrait être d'utiliser les énoncés $10 \times 4 = 40$ et $40 + 5 = 45$, où « 4 », « 5 », « 10 », « 40 » et « 45 » sont regardés comme des lettres de constantes plutôt que comme des objets, ainsi que les règles de distributivité et d'associativité. La recherche d'une stratégie gagnante dans un jeu d'intérieur peut se heurter à trois difficultés : il faut sélectionner des énoncés utilisables (axiomes théorèmes, ou énoncés connus), sélectionner des règles de déduction et enfin construire une stratégie gagnante sur ces éléments. Une approche de combinatoire naïve semble dans ce cadre inappropriée.

Chacun des deux membres de (1) correspond à une méthode employée par des groupes d'élèves en vue de faire les calculs le plus vite possible. La méthode *multiplier par 10 le premier nombre puis ajouter 45* émerge assez « naturellement » du jeu comme moyen efficace de calculer la somme. La méthode correspondant à la première formule, *prendre le cinquième nombre puis mettre 5 à la fin du nombre*, est plus exotique. Elle se lit moins facilement sur un calcul de somme posé en colonne. Elle est néanmoins encore plus efficace puisqu'elle ne contient aucun véritable calcul. Le groupe qui a proposé la méthode *prendre le* *cinquième nombre puis mettre 5 à la fin du nombre* comme moyen de calcul pour la somme de dix nombres consécutifs entreprend d'expliquer l'équivalence des deux méthodes en commençant par travailler avec la somme 15 + 16 + … + 24. Il s'agit donc d'un jeu d'extérieur. Le groupe montre que sa méthode permet d'effectuer le même calcul numérique ; elle est donc associée au même nombre que l'autre méthode. Ce jeu d'extérieur est à l'origine de la construction de la stratégie du jeu d'intérieur concernant (1) :

> « En partant de la validité de la formule 10 × 15 + 45, ils établissent des relations numériques entre deux méthodes produites. La recherche de l'équivalence (commandée par le besoin de fournir une explication) fonctionne comme un moteur pour la réinterprétation des deux méthodes : « prendre le cinquième » peut maintenant être interprété en termes de « le premier nombre plus 4 », ensuite, « le premier nombre plus 4 et le résultat fois 10 » ; « mettre un 5 à la fin » conduit les élèves à proposer l'équivalence entre $10n + 45 = 10n + 40 + 5$ et ensuite, l'équivalence entre 10n + 40 et « le cinquième nombre fois 10 ». » (Barallobres, 2007, p. 43)

Autrement dit, les actions sur les nombres lors du jeu d'extérieur ont contribué de manière décisive à l'émergence de la structure et de la stratégie du jeu d'intérieur sur l'énoncé (1). Pour les élèves l'exemple du nombre 15 semble avoir joué le rôle de passeur entre les deux types de jeux. Il s'agit dans le vocabulaire de Balacheff d'un exemple générique :

> « L'exemple générique consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus. La formulation dégage les propriétés caractéristiques et les structures d'une famille en restant attachée au nom propre et à l'exhibition de l'un de ses représentants. » (Balacheff, 1987, p. 164-165)

Les deux types de jeux ne semblent cependant pas répondre au même objectif. Un jeu d'extérieur est souvent mis en œuvre pour la recherche sur le statut épistémique d'un énoncé (est-il vrai, faux, probable ?) quand un jeu d'intérieur est davantage une réponse à la recherche des raisons d'une éventuelle vérité (pourquoi est-il vrai ?). D'autre part, une victoire dans un jeu d'extérieur ne prouve rien puisqu'elle pourrait être due à la spécificité des objets choisis alors qu'une victoire dans un jeu d'intérieur assure du fait que l'énoncé soit une déduction logique de la théorie utilisée pour le conduire. Ces remarques seront précisées à l'aide du formalisme logique dans la deuxième partie.

1.2 La distinction entre production de preuve syntaxique et procédure de preuve sémantique

La distinction entre jeux d'intérieur et d'extérieur, que j'emprunte à Hintikka, est en partie parallèle, si l'on met un instant la question du jeu et du dialogue de côté, à la distinction de Weber & Alcock (2004) entre production de preuve syntaxique et sémantique (*syntactic and semantic proof production*). Voici les définitions proposées par ces auteurs :

> « We define a *syntactic proof production* as one which is written solely by manipulating correctly stated definitions and other relevant facts in a logically permissible way. In a syntactic proof production, the prover does not make use of diagrams or other intuitive and non-formal representations of mathematical concepts. In the mathematics community, a syntactic proof production can be colloquially defined as a proof in which all one does is 'unwrap the definitions' and 'push symbols'. » (Weber & Alcock, 2004, 210)[4]

Comme dans une partie d'un jeu d'intérieur, la production de preuve syntaxique est une production formelle, construite sur la syntaxe seule. Une production syntaxique est interne au langage, elle se construit sans aucun autre recours qu'un ensemble donné d'énoncés reconnus comme utilisables (définitions, théorèmes, axiomes, …) et les règles logiques de manipulation de ces énoncés. Dans ces procédures, la nature des objets auxquels référent les symboles n'a pas d'importance.

> « We define a *semantic proof production* to be a proof of a statement in which the prover uses instantiation(s) of the mathematical object(s) to which the statement applies to suggest and guide the formal inferences that he or she draws. » (Weber & Alcock, 2004, 210)[5]

---

[4] « Nous définissons une *production syntaxique de preuve* comme une production de preuve reposant exclusivement sur des manipulations logiquement acceptable de définitions correctement énoncées et d'autres faits pertinents. Dans une production syntaxique de preuve, celui qui prouve n'utilise pas de diagrammes ou d'autres représentations intuitives et non formelles des concepts mathématiques. Dans la communauté mathématique, une production syntaxique de preuve peut être familièrement définie comme une preuve dans laquelle tout ce que l'on fait est 'dérouler les définitions' et 'pousser les symboles'. » (ma traduction)

[5] « Nous définissons une *production sémantique de preuve* comme une preuve d'un énoncé dans laquelle interviennent une ou plusieurs instanciation(s) d'objet(s) mathématiques auxquels s'applique l'énoncé de manière à suggérer et guider les inférences qu'il ou elle effectue. » (ma traduction)

Dans une telle production, les objets mathématiques viennent s'ajouter au milieu (Brousseau, 1998) sur lequel celui qui prouve s'appuie pour construire sa stratégie. De la même manière, les stratégies des jeux d'extérieur se construisent sur des choix d'objets dans la structure d'interprétation. Il y a malgré tout une nuance entre les jeux d'extérieur et les productions sémantiques telles que Weber & Alcock les définissent. Dans les premiers, les stratégies se construisent sur des choix d'objets. Ces choix et les manipulations qui suivent font partie intégrante de la manière dont le jeu se déroule. Les choix d'objets sont de véritables coups dans les jeux d'extérieur. Du point de vue de Weber & Alcock, les instanciations d'objets semblent plutôt relever de l'heuristique pour un jeu d'intérieur, un jeu de preuve. Elles interviennent pour aider à la mise en place d'une stratégie dans laquelle au final elles n'apparaîtront pas. La différence entre les deux classifications tient au fait que les jeux d'extérieur de Hintikka ne sont pas des jeux de preuve mais des jeux de vérification et de falsification des énoncés. Il se peut qu'un joueur gagne un jeu d'extérieur, voire même plusieurs parties, mais qu'il ne parvienne pas à construire une preuve de l'énoncé en jeu. Pour reprendre l'exemple développé plus haut autour de l'énoncé « pour tout n, $(n + 1) + n = (n + n) + 1$ », il est possible qu'un joueur gagne plusieurs fois au jeu qui consiste à choisir une nombre entier, à effectuer le calcul pour chacun des membres de l'égalité et à vérifier que l'égalité est valable sans pour autant qu'il ne parvienne à faire une preuve de la validité de l'énoncé. Ceci dit, affirmer que les productions syntaxiques de preuves sont pauvres comme Weber & Alcock (2004, p. 211) le font revient à dire dans le vocabulaire mis en place que la construction d'une stratégie dans un jeu d'intérieur nécessite souvent l'intervention conjointe de jeux d'extérieur.

Pour terminer ce paragraphe, je présente quelques uns de leurs résultats. Dans une première expérimentation concernant la théorie des groupes, Weber & Alcock (2004) mettent en évidence une différence de comportement entre étudiants de licence de mathématiques (*undergraduate students*) d'une part, et doctorants et algébristes professionnels d'autre part. Les premiers ont davantage tendance à s'engager dans des procédures syntaxiques, procédures qui n'aboutissent que rarement, alors que les seconds s'appuient plus volontiers sur leur connaissance intuitive des objets. Leur étude montre que les étudiants de licence ne disposent pour l'essentiel que d'une connaissance formelle des objets en jeu (essentiellement les définitions). Les auteurs remarquent que ce ne sont pas les connaissances factuelles des énoncés qui sont seules en cause puisque dans plusieurs cas, les étudiants de licence connaissaient les énoncés nécessaires à la construction de la preuve (dans le sens où si on le leur demande, ils répondent avec certitude que l'énoncé est vrai). Dans le même article, les auteurs poursuivent leur recherche dans le domaine de l'analyse et plus précisément des suites numériques. Ce prolongement montre la persistance en analyse du clivage relevé en algèbre. Si les productions syntaxiques leur paraissent faibles, c'est essentiellement en raison de leur aridité puisque, par définition, de telles productions ne sont pas soutenues par une approche sémantique qui pourrait venir enrichir le milieu des élèves :

> « Just as most streets in a town intersect many other streets, at any given point in a proof, there are many valid inferences that can be drawn that might seem useful to an untrained eye […]. Hence, writing a proof by syntactic means alone can be a formidable task. However, when writing a proof semantically, one can use instantiations of relevant objects to guide the formal inferences that one draws, just as one could use a map to suggest the directions that they should prescribe. » (Weber & Alcock, 2004, p. 232)[6]

Dans un autre article, Alcock & Weber (2005) étudient la manière dont treize étudiants de licence contrôlent la validité de preuves en analyse réelle. L'énoncé et la preuve sont (il s'agit de ma traduction) :

Théorème : $\sqrt{n} \to \infty$ lorsque $n \to \infty$
Preuve : Nous savons que $a < b \Rightarrow a^m < b^m$.
Donc $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.
$n < n+1$ donc $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ pour tout n.
Donc $\sqrt{n} \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ ce qu'il fallait démontrer.

La déduction de l'avant-dernière à la dernière ligne de la preuve est invalide. Exactement deux étudiants ont rejeté la preuve pour des raisons sémantiques : leur connaissance des suites numériques leur montrait que la dernière déduction était invalide. Ces étudiants sont d'ailleurs

[6] « Tout comme en ville la plupart des rues croisent de nombreuses autres rues, à tout moment d'une preuve, il y a de nombreuses inférences pouvant être faites qui peuvent paraître utiles à un œil novice […]. Par conséquent, écrire une preuve par les seuls moyens syntaxiques peut être une tâche redoutable. Cependant, lorsque l'on écrit une preuve par des moyens sémantiques, il est possible d'utiliser des instanciations pertinentes d'objets pour guider la conduite des inférences formelles, tout comme on peut utiliser une carte pour suggérer les directions qu'ils devraient emprunter. » (ma traduction)

capables de proposer des contre-exemples à la déduction sur demande. Ce rejet ne repose pas sur la mise en évidence d'une irrégularité logique. Dit autrement, pour ces deux étudiants, le contrôle de cette preuve est passé par la pratique d'un jeu d'extérieur : si quelqu'un me fournit une suite croissante, je vérifie si elle est convergente. Trois autres étudiants ont rejeté la preuve mais en évoquant des raisons différentes. Ils ont argumenté que la forme de la démonstration n'était pas satisfaisante dans la mesure où les définitions des concepts mathématiques en jeu n'étaient pas utilisées. Ce rejet est donc basé sur une certaine conception de ce que doit être une preuve, conception que l'on peut rapprocher de la production syntaxique. Cinq autres étudiants ont accepté la preuve et les étudiants restant n'ont pas été classés parmi ces précédents groupes par les auteurs. Cette étude me paraît révélatrice d'une mécompréhension autour de l'activité de preuve qui semble réduite, pour beaucoup d'étudiants, à une production syntaxique, à des jeux d'intérieur stricto sensu. Même si, comme le font remarquer les auteurs, la tendance à se préoccuper de la forme des productions peut être un signe de maturité mathématique, des approches restrictives comme celle qui consiste à rechercher la présence des définitions dans les preuves contribuent à développer une fausse image de la pratique mathématique. D'une part, les définitions ne sont pas nécessairement employées dans les jeux d'intérieur et, surtout, les preuves mathématiques ne sont qu'exceptionnellement suffisamment détaillées pour qu'il soit possible de les contrôler en ignorant leur contenu sémantique. Ce type de contrôle construit sur la seule syntaxe n'est pas la méthode la plus souvent employée par les mathématiciens professionnels. Par exemple, Weber (2008) montre que les mathématiciens utilisent souvent des arguments informels ou construits sur l'instanciation d'un objet, ou de quelques objets, pour contrôler les preuves, même pour les valider. Son étude s'appuie sur les interviews de huit mathématiciens à qui il demande de contrôler la validité de huit preuves du domaine de la théorie des nombres. Je lui emprunte quelques exemples. Commençons par considérer les explications données par un mathématicien (*Math. B*) autour de la déduction de « $n \times n = 3x$ » à « $3|n$ » (il s'agit à nouveau de ma traduction) :

> « *Math. B* : Hmm, let's see. I suppose they're using something like, if there is a 3 on one side, there's a 3 on the other. There's a 3 in 3*x* so there must be a 3 in *nn*. And because 3 is prime, it must be on of the two. So yeah, there's a 3 in *n*. 3 divides *n*. Yeah, I think I agree with that… My qualm is that they should say that, say that they could make this step because 3 is prime or by some theorem. But

the logic of the proof, I think that's correct. » (Weber, 2008, p. 443)[7]

Ici, la situation est la même que dans l'exemple précédent dans le sens où l'énoncé est vrai et la conclusion également. On peut constater que le contrôle de la preuve fait un usage important du contenu des propositions et que les définitions ne sont pas invoquées. Si la déduction est formellement invalide (car incomplète) elle n'est pas pour autant rejetée puisque son contenu sémantique, en particulier les propriétés du nombre 3, permettrait sans efforts trop importants de la corriger. Les exemples qui viennent maintenant montrent comment des jeux d'extérieur peuvent dans certains cas être considérés comme faisant office de preuves. Je traduis toujours. La justification de *Math. H* concerne la déduction de « $n \equiv 3 (\text{mod } 4)$ » à « n n'est pas un carré parfait » :

> « *Math H* : I'm using examples to see what, where the proof is coming from. So 5^2 is 25 and that's 1 mod 4, 36 is 0 mod 4, 49 is 1 mod 4, 64 is 0 mod 4. I'm thinking that, ah! So it is.. 24 times 24, that's 0 mod 4. So a perfect square has to be 1 mod 4, does'nt it ? n^2 equals 1 mod 4 or 0 mod 4. Alright. » (Weber, 2008, p. 443)[8]

Dans cette validation, Math. H joue plusieurs parties d'un jeu d'extérieur qui consiste à choisir un nombre entier, à le mettre au carré et à chercher sa classe d'équivalence modulo 4. Ces parties suffisent à le convaincre de la validité de la déduction bien que, formellement, aucun jeu de preuve ne soit engagé. Pour autant, Math. H considère la déduction comme valide :

> « One particularly interesting finding from these data was that the justifications that the participants used to convince themselves of the legitimacy of a particular assertion in a proof employed modes of argumentation that would not be

[7] « *Math. B* : Hum, voyons voir. Je suppose qu'ils utilisent quelque chose comme, s'il y a un 3 d'un côté, alors il y a un 3 de l'autre. Il y a un 3 dans 3*x* donc il doit y avoir un 3 dans *nn*. Et parce que 3 est premier, il doit être dans un des deux. Donc ouais, il y a un 3 dans *n*. 3 divise *n*. Ouais, je pense que je suis d'accord avec ça… Mon scrupule est qu'il aurait dû dire que, dire qu'il pouvait faire ce pas parce que 3 est premier ou grâce à un théorème. Mais la logique de la preuve, je pense que c'est correct. » (ma traduction)

[8] « *Math. H* : J'utilise des exemples pour voir ce que, d'où vient la preuve. Alors 5^2 c'est 25 et c'est 1 mod 4, 36 c'est 0 mod 4, 49 c'est 1 mod 4, 64 c'est 0 mod 4. Je pense que, ah ! Donc c'est … 24 fois 24 c'est 0 mod 4. Donc un carré parfait doit valoir 0 mod 4, non ? n^2 est égal à 1 mod 4 ou à 0 mod 4. D'accord. » (ma traduction)

permissible in the presentation of a formal proof. » (Weber, 2008, p. 450)[9]

Pour revenir à l'exemple de Alcock & Weber (2005) concernant la preuve de la divergence de la suite $\sqrt{n}$, il est également révélateur que si seulement deux étudiants l'ont rejeté en relevant le caractère non valide de la dernière déduction, dix étudiants l'ont fait après que l'expérimentatrice leur ait suggéré d'interpréter « $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ pour tout n » comme « la suite est croissante » et « $\sqrt{n} \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ » comme « la suite est divergente ». Mon hypothèse est que cette intervention a permis, à travers le changement de registre du langage formel au langage naturel, un enrichissement du milieu au-delà des seuls éléments langagiers qui a encouragé les étudiants à engager des jeux d'extérieur.

La question de la nature de la preuve mathématique est complexe. L'objectif de la discussion précédente autour des travaux de Weber et de Alcock était de montrer que les aspects syntaxiques et formels étaient souvent surévalués par les étudiants. La partie de la recherche de Segal (2000) concernant la preuve va dans le même sens. Dans son expérimentation, elle propose à des groupes d'étudiant de licence des arguments, une partie de leur tâche est de dire s'ils pensent que l'argument constitue une preuve ou non du résultat. L'expérimentation est répétée trois fois, en début de première année puis au milieu et enfin en début de deuxième année avec à chaque fois un peu plus d'une trentaine d'étudiants. Parmi les arguments proposés, on trouve les deux suivants (Segal, 2000, p. 199, ma traduction) :

Enoncé : Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.
Argument 1 : Lorsque $i \neq j$, $(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{in}B_{nj}$ $= A_{ii}B_{ij}$ puisque comme A est diagonale, $A_{ik} = 0$ lorsque $i \neq k$ $= 0$ puisque comme B est diagonale, $B_{ij} = 0$ car $i \neq j$

[9] « Un résultat particulièrement intéressant issu de ces données est que les justifications utilisées par les participants pour se convaincre du bien-fondé d'une assertion particulière dans une preuve mobilisent des modes d'argumentation qui ne seraient pas autorisés dans la présentation d'une démonstration formelle. » (ma traduction)

Argument 2 :

$$\left(AB\right)_{ii} = \sum_{j} A_{ik} B_{ki} = A_{i1} B_{1i} + A_{i2} B_{2i} + \ldots + A_{in} B_{ni}$$

$= A_{ii} B_{ii}$ puisque comme A et B sont diagonales, $A_{ij} = B_{ij} = 0$

Ces deux arguments ont des formes superficielles proches. L’argument 1 est considéré par Segal comme une preuve valide de l’énoncé. L’argument 2 n’est pas une preuve de l’énoncé mais ne contient pas d’inférence invalide. Chacun des arguments est présenté à une moitié du groupe. Les résultats montrent que « les sujets n’ont pas paru être capable de distinguer la justification correcte de la justification incorrecte » (Segal, 2000, p. 204). Ils montrent aussi que le nombre global d’étudiants qui considèrent que l’argument qui leur est présenté (que ce soit l’argument 1 ou l’argument 2) est valide augmente avec le temps passé à l’université (41% pour la première expérimentation, 77% pour la seconde, puis 81% pour la dernière). Autrement dit, les étudiants semblent s’intéresser essentiellement à la forme superficielle de l’argument dans leur processus d’évaluation des arguments et cette pratique a tendance à progresser au cours des premières années universitaires. Il est assez vraisemblable qu’au cours de leur cursus, les étudiants aient rencontré ce type de calculs, ou des calculs proches. Mon hypothèse est que la gestion locale des calculs et des inférences formelles prend alors le pas sur une interprétation des actions produites.

Le paragraphe qui suit présente un exemple d’étude un peu plus détaillée concernant des processus de preuve en analyse réelle. Il terminera ce premier chapitre de la partie 1 qui s’est efforcé d’introduire les notions de jeux d’intérieur et de jeux d’extérieur, dans un premier temps essentiellement sous l’angle de la dyade syntaxe/sémantique, et les questionnements associés.

1.3 Deux exemples de processus de construction de preuves

Ce paragraphe est construit en deux temps. Le premier temps est celui d’une étude épistémologique d’un mémoire de Bolzano sur le théorème des valeurs intermédiaires

(Bolzano, 1817)[10]. Cette étude réinvestit des éléments de mon mémoire de DEA (Barrier, 2005) et de Barrier (à paraître-b). Le deuxième temps, plus bref, s'appuie sur un travail conduit par des membres de l'IREM de Lyon dans le cadre de Math.en.Jeans[11] (Pontille, Feurly-Raynaud & Tisseron, 1996). L'objectif commun de ces deux moments est de confronter le vocabulaire des jeux (d'intérieur et d'extérieur) installé précédemment aux détails de processus de preuve.

Je commence par la présentation du mémoire de Bolzano sur le théorème de valeurs intermédiaires (Bolzano, 1817, traduit par Sebestik, 1964). Dans ce texte, Bolzano commence par une revue de plusieurs preuves qui ont été faites avant lui. Bien qu'il ne doute à aucun moment de la vérité du théorème qu'il souhaite démontrer, il considère qu'aucune des ces preuves n'est satisfaisante :

> « Dans la méthode de démonstration *la plus courante*, on s'appuie sur une vérité empruntée à la géométrie : *à savoir que toute ligne continue à courbure simple dont les ordonnées sont d'abord positives, puis négatives* (ou inversement), *doit nécessairement couper quelque part l'axe des abscisses en un point situé entre ces ordonnées*. Il n'y a absolument rien à objecter contre la *justesse* ni contre l'*évidence* de ce théorème géométrique. Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable conte la *bonne méthode* qui consiste à vouloir déduire les vérités des mathématiques *pures* (ou générales) (c'est-à-dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse) de considérations qui appartiennent à une partie *appliquée* (ou spéciale) seule, à savoir la géométrie. » (Bolzano, 1817, 1964, p. 137)

Après avoir également sévèrement critiqué les preuves reposant sur les concepts de temps et d'espace, les preuves circulaires, fausses ou indirectes (i.e. reposant sur des théorèmes plus forts qu'il faudrait à leur tour démontrer), il conclut de la manière suivante :

> « De telle lacunes se retrouvent donc dans toutes les démonstrations du théorème qui est énoncé dans le titre de ce mémoire connues jusqu'ici. Or la démonstration que je présente ici au jugement des savants contient, comme je m'en flatte, non seulement une simple *affirmation d'évidence* (Gewissmachung), mais un *fondement* objectif de la vérité à démontrer ; elle est donc véritablement scientifique. » (Bolzano, 1817, 1964, p. 143)

---

[10] Je reviendrai sur ce texte de Bolzano au cours du deuxième chapitre de la troisième partie de la thèse.

[11] http://mathenjeans.free.fr

Ce mémoire se situe dans le projet plus général de Bolzano de recherche de fondements analytiques pour l'analyse (et plus généralement pour l'ensemble des mathématiques qu'il qualifie de « pures »). Ce projet s'inscrit notamment en réaction contre la doctrine kantienne selon laquelle les preuves mathématiques se fondent sur l'usage de l'intuition pure (voir le premier chapitre de la partie 2 pour une présentation succincte de la philosophie des mathématiques de Kant). Il est décrit dans Bolzano (1810, traduit par Ewald, 1996). On peut trouver dans ce texte un appendice intitulé s*ur la doctrine kantienne de la construction des concepts dans l'intuition* dans lequel il montre que le concept d'intuition pure est contradictoire en reprenant pour l'essentiel les arguments pré-kantiens des philosophes empiristes. Selon lui, une intuition sensible ne peut pas assurer la nécessité objective des jugements mathématiques :

> « For ma part, I wish to admit openly that I have not yet been able to persuade myself of the truth of many doctrines of the critical philosophy and especially of the correctness of the Kantian assertions about *pure intuitions* and about the *construction of concepts through them*. Furthermore, I believe that in the *concept of a pure* (i.e. *a priori*) *intuition* there already lies an intrinsic contradiction. » (Bolzano, 1810, 1996, p. 182)[12]

Russell (1953, p. 684-85) utilisera contre Kant le même type d'arguments en considérant, avec Bolzano, que si sa philosophie est une réponse aux philosophes empiristes, cette réponse peut être réfutée « par les arguments de Hume ». Les travaux de Kant en philosophie des mathématiques ont été amplement diffusés et il ne fait aucun doute que l'approche des mathématiques de Bolzano, sa recherche de fondements objectifs constitue une réponse critique à l'approche kantienne (Laz (1993), George (2003), Sebestik (2003)). Bolzano oppose au subjectivisme kantien, qui fait d'une capacité cognitive humaine (la construction des concepts dans l'intuition) le fondement des vérités mathématiques, une sémantique platonicienne : les vérités mathématiques s'organisent dans un réseau de relations de causes à conséquences au sein d'une connexion *objective* des vérités. Selon lui, les arguments qui ont recours à l'intuition peuvent convaincre de la vérité d'une proposition mathématique mais ils ne peuvent pas fournir son fondement objectif, c'est-à-dire sa localisation dans la connexion objective des vérités. Selon Bolzano, et avec toutes les réserves nécessaires à une

---

[12] « Pour ma part, je souhaite reconnaître ouvertement que je n'ai pas encore été capable de me persuader de la vérité de beaucoup de doctrines de la philosophie critique, et en particulier de l'exactitude des déclarations kantiennes à propos de l'*intuition pure* et de la *construction des concepts à travers elle*. De plus, je crois que le *concept de pure* (i.e. *a priori*) *intuition* recèle une contradiction intrinsèque. » (ma traduction)

réinterprétation dans un autre cadre conceptuel, les règles des jeux d'intérieur et des jeux d'extérieur semblent relever de deux champs distincts par nature. Les jeux d'extérieur sont des jeux dont les règles font intervenir les sens. L'intuition sensible donne accès aux objets mathématiques qui peuvent être manipulés afin de parvenir à des décisions et se convaincre de la vérité d'un énoncé. A l'opposé, les jeux d'intérieur se jouent dans un domaine platonicien qui est d'intersection vide avec le domaine des choses sensibles. Pour atteindre les fondements objectifs des énoncés mathématiques, ce que Bolzano se propose de faire pour le théorème des valeurs intermédiaires, les jeux d'intérieur doivent se soumettre à la rigueur analytique et logique. Cette rigueur est pour lui largement négligée en philosophie :

> « Un des traits les plus étonnants des penseurs de notre siècle est qu'ils ne se sentent pas du tout liés ou du moins ne satisfont que très médiocrement aux règles jusque là en vigueur de la logique, notamment au devoir de dire toujours précisément et avec clarté de quoi on parle, en quel sens on prend tel ou tel mot, etc. » (Traité de science de la religion, §63, cité dans Laz (1993, p. 32))

Sur le plan mathématique, Bolzano est amené à une étude précise des concepts, à une décomposition de ceux-ci en termes primitifs. Par exemple, dans le mémoire discuté, il propose, avant Weierstrass, une définition assez moderne de la notion de continuité (bien qu'elle ne permette pas encore franchement de distinguer entre continuité et continuité uniforme) :

> « Car dans une *explication correcte*, on entend par l'expression : *une fonction* f(x) *varie suivant la loi de continuité pour toutes les valeurs de* x *située à l'intérieur ou à l'extérieur de certaines bornes*, rien d'autre que ceci : *si* x *est une telle valeur quelconque*, *la différence* f(x) - f(x + ω) *peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée*, *si l'on peut toujours prendre* ω *aussi petit que l'on voudra*, c'est-à-dire lorsqu'on a (selon les notations […]) : $f(x+\omega) = f(x) + \Omega$. » (Bolzano, 1817, 1964, p. 139)

Sur le plan logique, Bolzano proposera une définition de la notion de conséquence logique, à distinguer de la relation de cause à conséquence, si bien que le travail de Bolzano sur la recherche de fondements pour les mathématiques a pu être considéré comme précurseur de ceux de Frege (Benmakhlouf (2000) p. 489, Chihara (1999) p. 345, Sebestik (1999) p. 481 ou Sinaceur (1996) p. 155), plus rarement ceux de Hilbert (Rusnock (1999) p. 159) et comparé à celui de Tarski (Rusnock (1999) p. 411, Sebestik (1999) p. 501, Sinaceur (1996) p. 159, Morcher (2003) p. 149, Dubucs et Lapointe (2003) p. 230, Siebel (2003) p. 171). Je présente cette relation dans Barrier (2005). Au niveau d'analyse utile à la problématique de cette thèse, je retiendrais essentiellement le fait que Bolzano, à l'opposé de nombre de ses contemporains mathématiciens, s'intéresse davantage à la reconstruction théorique des mathématiques dans le cadre de la relation métaphysique de cause à conséquence qu'à la recherche de nouveaux théorèmes. Comparant les approches mathématiques de Bolzano et de Lagrange, Rusnock (1999, p. 418) affirme que « Lagrange had a real talent for stating significant theorems, Bolzano for grounding them »[13]. Concernant cette fois une comparaison entre le travail de Bolzano et celui de Cauchy, Sinaceur (1973) écrit :

> « Bolzano est avant tout préoccupé de rigueur théorique, d'où le souci constant de démonstrations formelles, qui nous semblent aujourd'hui souvent compliquées, sinon embarrassées ou maladroites ; d'où encore l'absence d'intérêt pour les résultats et leurs conséquences de quelque nature qu'elles soient » (Sinaceur, 1973, p. 102)

Puis, un peu plus loin :

> « Les exigences de Cauchy sont, du moins dans la préface du Cours d'analyse, d'un type opposé. » (Sinaceur, 1973, p. 105)

Pour poursuivre cette mise en perspective du mémoire, on peut remarquer que Bolzano oppose de manière radicale, comme le fera plus tard Frege à travers son anti-psychologisme, l'usage des sens, nos spécificités d'êtres biologiques et les fondements des mathématiques pures. Son objectif est de rendre compte de la stabilité des mathématiques, de ce qu'il appelle leur *objectivité*. Pour faire cela les sens sont selon lui trop labiles. Il en résulte dans sa conception ce que j'interprète a posteriori comme une opposition radicale entre jeux d'extérieur, associés par Bolzano au sens, et jeux d'intérieur, associés à l'objectivité. Une difficulté de ce type de points de vue connue sous le nom du *dilemme de Benacerraf* est alors d'expliquer par quel moyen les mathématiciens parviennent à une connaissance effective de ce qui se trouve hors du champ sensible (pour Bolzano, le réseau des propositions de l'*en-soi*). Bolzano n'y répond pas (Sebestik, 1992, p. 121). Diverses réponses ont été proposées par les philosophes des mathématiques. On peut par exemple postuler l'existence d'une intuition suprasensible qui donnerait accès aux objets non sensibles des mathématiques pures et aux jeux d'intérieur les concernant ce qui revient à réintégrer les jeux d'intérieur dans le domaine du sensible en postulant l'existence d'un sens extrasensible (Gödel, 1947). On peut au contraire réintégrer les mathématiques et les jeux d'intérieur parmi les sciences de la nature et remettre en cause leur caractère *objectif*, ou plutôt chercher l'origine de l'objectivité des

---

[13] « Lagrange avait un véritable talent pour énoncer des théorèmes importants, Bolzano pour les fonder ». (ma traduction)

mathématiques ailleurs que dans un monde platonicien (Maddy, 1990). D'autres solutions sont bien sûr envisageables. S'il m'a semblé pertinent d'utiliser la distinction entre jeux d'intérieur et jeux d'extérieur pour analyser les pratiques mathématiques, leurs relations sont aussi au centre de ce travail. Par la suite, je cherche à montrer que bien que cela paraisse opposé à son positionnement philosophique, l'étude concrète de son mémoire montre que les deux types de jeux interagissent dans sa pratique mathématique. Avant d'en venir à l'analyse mathématique du mémoire, il me faut signaler ici que mon identification des jeux d'extérieur avec les pratiques mathématiques qui font intervenir les sens à travers l'utilisation d'objets dans les processus de preuve est sans aucun doute en contradiction avec les convictions de Hintikka. Comme Bolzano, Hintikka s'oppose à Kant sur l'intervention d'intuitions sensibles, c'est à l'appréhension d'objets à travers les sens, dans l'activité mathématique. Je préciserai ceci dans la deuxième partie de la thèse. Je fais donc en conscience un usage non conforme du vocabulaire de Hintikka en considérant que l'intervention des objets dans les jeux d'extérieur se fait à travers des processus sensibles[14]. De la même manière la notion de jeux d'intérieur, c'est-à-dire de jeux de déduction s'appuyant sur la forme des énoncés est assez différente de celle de relation de cause à conséquence qui est beaucoup plus « chargée » sur le plan métaphysique[15]. Mon interprétation de cette relation par des jeux d'intérieur repose cette fois sur le constat de l'exclusion de la prise en compte des interactions avec les particuliers.

De nombreux auteurs affirment, avec raison, que l'absence d'une définition adéquate des nombres réels rend impossible l'aboutissement complet du projet de Bolzano (par exemple Ewald (1996, p. 226), Sebestik (1992, p. 101), Sinaceur (1996, p. 163) ou Dugac (2003, p. 86)). En particulier, la tentative de preuve de la convergence des séries de Cauchy, que j'étudierai en détail dans la troisième partie de la thèse (chapitre 2), est vouée à l'échec. La perspective de mon analyse est en quelque sorte de renverser ce point : il me parait intéressant d'étudier comment les convictions sémantiques d'un mathématicien comme Bolzano sur la nature des nombres réels associées à ses conceptions philosophiques tranchées l'ont conduit à engager un travail important sur la description formelle des nombres réels. Bolzano est convaincu que l'ensemble des nombres réels doit être tel que le théorème des valeurs intermédiaires soit vrai. Autrement dit, que les jeux d'extérieur dont la structure

[14] De ce point de vue, mon usage est certainement plus proche de celui de Vernant (2007) qui considère que la Nature intervient dans les jeux d'extérieur à travers des *procédures intramondaines*.

[15] Voir par exemple Dubucs (2003) pour des précisions et une critique à propos de la consistance de cette relation.

d'interprétation est l'ensemble des nombres réels se jouent sur un continuum, une structure sans trou. L'objectif de sa preuve n'est donc pas de s'assurer de la vérité du théorème (puisqu'il n'en doute pas) mais de parvenir à « saisir » la structure et les règles d'un jeu d'intérieur susceptible de venir fonder la vérité du théorème. Il s'agit pour lui d'expliquer quelle est la place de ce théorème dans la structure platonicienne des vérités mathématiques. En quelque sorte, dans la démarche de Bolzano, les jeux d'extérieur précèdent les jeux d'intérieur, ils viennent guider la recherche d'un parcours formel entre causes et conséquences à l'intérieur de la connexion objective des vérités. Son travail rompt, tant sur le contenu que sur la forme, avec les standards de ses contemporains. Il « innove sur tant de points et (qui) réussit à éviter les innombrables pièges qui hantaient les analystes du début du XIXième siècle » (Sebestik, 1992, p. 102). Selon Sinaceur (1974, p. 714-715) :

> « Bolzano est ici un contre-exemple : il fausse la linéarité fut-elle multipliée. La marche de l'Histoire par point d'appui successif est, par lui, mise en défaut. Au moment où l'Analyse équilibre les idées par des calculs et les calculs par des idées, où elle n'entreprend rien de fondamental ici qui ne fut « utilitaire », Bolzano « a couru devant tous ses contemporains » et avant celui qu'on tient pour le « vainqueur de la course » (Canguilhem, Etude d'histoire et de philosophie des sciences, 1968, p. 22), Weierstrass ou Cantor. »

Plus que ses convictions métaphysiques, il m'a paru intéressant d'étudier, toujours dans une perspective naturaliste, la pratique mathématique de Bolzano. Je présente maintenant le contenu mathématique de son mémoire en essayant de montrer plus précisément comment les jeux d'extérieur ont contribué à l'émergence de la construction théorique de Bolzano.

Dans ce mémoire, Bolzano entreprend de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions polynomiales. Bolzano l'énonce de la manière suivante (j'utilise à nouveau la traduction de Sebestik) :

> L'un est le suivant : il faut qu'il y ait toujours, entre deux valeurs quelconques de la grandeur inconnue qui donnent deux résultats de signes opposés, au moins une racine réelle de l'équation. (Bolzano, 1817, 1964, p. 136)

Dans la citation précédente, il est implicite que la grandeur inconnue est une fonction polynomiale. Après avoir énoncé ce théorème et après avoir critiqué les preuves de ses contemporains, Bolzano termine une longue préface en revenant sur sa conception des mathématiques et l'organisation globale de son travail et de ses publications mathématiques. La structure de la preuve stricto sensu est alors la suivante : Bolzano commence par énoncer et démontrer le critère de Cauchy pour les séries (§ 7) puis le théorème de la borne inférieure

(§ 12) ; il en déduit le théorème des valeurs intermédiaires (§ 15) pour les fonctions continues. Il lui reste alors à montrer la continuité des fonctions polynomiales (§ 17) avant de conclure (§ 18). Le critère de Cauchy est nécessaire à la preuve du théorème de la borne inférieure. Il est donc raisonnable, selon les conceptions de Bolzano, que celui-ci l'ait placé avant dans l'organisation de sa preuve puisque celle-ci est supposée refléter l'organisation objective des vérités mathématiques. Je reviendrai sur la preuve de ce critère plus loin dans la troisième partie de cette thèse. En attendant, voici comment Bolzano énonce la propriété de la borne inférieure[16] :

> « *Théorème*. Si une propriété *M* n'est pas vérifiée par *toutes* les valeurs d'une grandeur variable *x*, mais appartient à *toutes* celles qui sont plus *petites* qu'un certain *u* : alors il existe toujours une grandeur *U* qui est la plus grande de celles dont on peut affirmer que toutes les valeurs inférieures *x* possèdent la propriété *M*. » (Bolzano, 1817, 1964, p. 153)

Cette formulation est l'élément théorique ad hoc pour expliquer pourquoi les jeux d'extérieur de recherche d'une racine d'une la fonction polynomiale sont systématiquement gagnants. Il est donc « naturel » qu'il intervienne dans le jeu d'intérieur de preuve. La démonstration de l'énoncé fait appel à un procédé dichotomique aujourd'hui classique (utilisé par exemple pour démontrer la version du théorème de Bolzano-Weierstrass pour les nombres réels) mais novateur au moment de la preuve de Bolzano : il s'agit de construire une suite d'intervalle en prenant étape par étape la moitié droite ou gauche du précédent. Pour pouvoir conclure, il est nécessaire de pouvoir affirmer que les suites formées par les extrémités des intervalles convergent. Le critère de Cauchy intervient à ce moment là. La fin de la démonstration est sans surprise. Ce qu'il me paraît intéressant de remarquer est que la procédure de preuve de Bolzano fait très fortement écho aux jeux d'extérieur et ceci malgré les convictions très radicales de Bolzano à propos de la stricte séparation entre la *confirmation* issue de l'intuition et la *justification objective* que devrait selon lui constituer une démarche « vraiment mathématique ». Au-delà de l'expression ad hoc du théorème de la borne inférieure, on peut remarquer que le procédé dichotomique que Bolzano utilise pour démontrer le théorème de la borne inférieure aurait pu lui fournir une preuve plus directe générale des valeurs intermédiaires. Une preuve alternative consiste en effet à appliquer

---

[16] Bolzano n'utilise pas le vocabulaire de « borne inférieure » mais son théorème peut être lu de la manière suivante : « si l'ensemble $\{x, \neg M(x)\}$ est non vide et minoré alors il possède une borne inférieure ». Par ailleurs, cette propriété est équivalente à celle de la borne supérieure qui lui est souvent préférée dans l'enseignement moderne de l'analyse.

directement et « à l'aveugle » le procédé dichotomique sans passer par le théorème de la borne inférieurs en construisant une suite d'intervalle $[a_n;b_n]$ où $[a_0;b_0]=[a;b]$ et $[a_{i+1};b_{i+1}]=\left[a_i;\frac{a_i+b_i}{2}\right]$ si $f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)\geq 0$, $[a_{i+1};b_{i+1}]=\left[\frac{a_i+b_i}{2};b_i\right]$ sinon. En utilisant le même type d'arguments que ceux que Bolzano utilise dans sa preuve, on peut montrer que les deux suites a_n et b_n convergent vers une racine de la fonction polynomiale. Mon hypothèse est que la raison principale pour laquelle Bolzano n'a pas présenté cette preuve, alors qu'il en avait les moyens théoriques et pratiques, est que sa construction de la preuve s'est appuyée de manière importante sur ses convictions sémantiques. Pour dire les choses autrement, il me semble que malgré la volonté de Bolzano de développer une pratique de preuve éthérée, la construction de sa preuve s'inspire du jeu d'extérieur qui consiste à choisir comme candidat pour être une racine de la fonction polynomiale vérifiant les conditions du théorème la plus petite des racines de la fonction à travers un procédé intuitif qui consiste à suivre la courbe de la fonction en attendant qu'elle croise l'axe des abscisses. De ce point de vue il me semble que, bien qu'il le revendique, Bolzano ne parvient pas à éviter le « détour » qui consiste à utiliser une « connaissance accidentelle »[17]. Ce que je voulais mettre en évidence à travers cette étude est le fait que malgré une philosophie des mathématiques opposant farouchement ce que j'ai appelé en reprenant le vocabulaire de Hintikka les jeux d'intérieur et les jeux d'extérieur, l'étude de la pratique mathématique de Bolzano montre plutôt une relation assez fine entre ces jeux.

Pour terminer cette discussion autour des processus de construction de preuve dans le domaine de l'analyse, je présente rapidement une recherche sur ce thème issue de l'IREM de Lyon (Pontille, Feury-Reynaud & Tisseron, 1996). Un groupe de chercheur a observé des élèves volontaires d'un lycée travaillant, dans le cadre de Math.en.Jeans, sur la situation de recherche suivante :

On considère une application *f* de $\{1,2,\ldots n\}$ dans $\{1,2,\ldots n\}$ où *n* est un entier naturel non nul. On suppose *f* croissante, montrer qu'il existe un entier *k* tel que *f(k) = k*, *k* est appelé point fixe.

[17] J'emprunte ici le vocabulaire de Dubucs (2003).

Etudier de possibles généralisations aux cas suivants, avec f croissante :

$f : D \cap [0;1] \rightarrow D \cap [0;1]$, où D est l'ensemble des décimaux.

$f : Q \cap [0;1] \rightarrow Q \cap [0;1]$, où Q est l'ensemble des rationnels.

$f : [0;1] \rightarrow [0;1]$

ou toute autre généralisation possible.

Cette situation leur a été proposée par un chercheur en mathématiques. Les élèves on travaillé en groupe, deux heures par semaines, en dehors du temps d'enseignement obligatoire et durant toute l'année. Ils sont accompagnés par leur enseignant de mathématiques. Plusieurs rencontres avec d'autres groupes travaillant sur le même problème sont organisées au cours de l'année scolaire, en présence du mathématicien qui leur a proposé le problème. Selon Durand-Guerrier[18] :

> « Although the context is far from ordinary teaching, according to me this example supports the hypothesis that it is valuable to propose to students such types of task, allowing work *back and forth* between formal and informal aspects, in order to provide a deep understanding of mathematical objects through significant reasoning activity. »[19]

Dans la tâche proposée aux élèves, les questions possèdent une structure syntaxique très proche. Il s'agit d'étudier l'éventualité d'un point fixe pour une fonction croissante d'un ensemble dans lui-même. Seule change la nature de l'ensemble. Ici, les relations entre jeux d'intérieur et jeux d'extérieur vont structurer la recherche. Alors que le domaine d'objets de la question concernant les entiers naturels est assez familier des élèves de lycée, ce n'est plus le cas (ou de moins en moins le cas) lors de l'extension progressive du domaine vers le segment [0 ; 1]. Dans un premier temps, les jeux d'extérieur sont disponibles : ils vont être premiers et

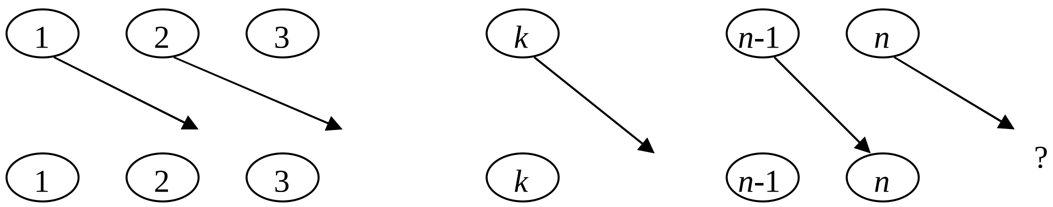
---

[18] Contribution au groupe de travail 34 de ICMI 11 (2008) intitulée “What can we learn from a logical analysis of mathematical tasks with a semantic perspective” (p. 5).

http://tsg.icme11.org/document/get/381

[19] « Bien que le contexte soit loin de l'enseignement ordinaire, cet exemple soutient d'après moi l'hypothèse qu'il est important de proposer aux élèves de tels types de tâches, permettant de travailler en *aller-retour* (*back and forth*) entre les aspects formels et informels, de manière à construire une connaissance profonde des objets mathématiques à travers des activités significatives de raisonnement. » (ma traduction)

servir de base à l'élaboration d'une preuve dans un jeu d'intérieur. Selon le compte rendu des auteurs, les élèves ont commencé par jouer des jeux d'extérieur sur les restrictions de fonctions simples du programme, notamment les fonctions affines, puis par nécessité sur d'autres types de fonctions que les fonctions définies par une formule algébrique. En effet, dans le cadre de la question concernant les entiers naturels, les seules fonctions « simples » vérifiant les conditions de l'énoncé sont la fonction identité et les fonctions constantes. Les élèves ont donc été amenés à manipuler les nombres et à les associer à d'autres nombres pour construire des fonctions. « Ce travail leur a donné l'idée de la solution » affirment Pontille, Feury-Reynaud & Tisseron (1996, p. 14). Dans le cas des entiers naturels, les élèves montrent qu'une fonction croissante de $\{1,2,\ldots n\}$ dans $\{1,2,\ldots n\}$ doit vérifier la propriété « pour tout k de $\{1,2,\ldots n\}$, $f(k) > k$ ». Cette propriété conduit à une contradiction puisque l'on doit avoir $f(n) \leq n$. La preuve se construit par la manipulation individuelle et successive des entiers de la structure d'interprétation selon le schéma suivant :



L'idée est que, pour conserver la croissance de la fonction, les flèches ne peuvent pas se croiser et qu'elles ne peuvent pas non plus être verticales sans quoi la fonction aurait un point fixe. Le schéma est une interprétation personnelle mais je pense qu'il reflète assez bien la preuve qui est formulée par les élèves (Pontille, Feury-Reynaud & Tisseron, 1996, p. 15, annexe 1). A travers cette utilisation, je souhaite mettre en avant le fait que la preuve des élèves repose fondamentalement sur des actions sur les objets en jeu (ordonnancement des nombres, appariement, etc) et que ces actions portent en elles les éléments nécessaire à une formulation a posteriori par induction de la preuve. A la manière de la preuve de Bolzano du théorème des valeurs intermédiaires, il me semble que ce sont les interactions avec les objets du discours qui sont au fondement de l'activité de preuve. Concernant l'arithmétique, Longo

(2009) défend une position philosophique qui me paraît être consistante avec ce point de vue[20] :

> « Consider now the other origin of our mathematical activities: the counting and ordering of small quantities, a talent that we share with many animals, (see Deheane, 1998). By language we learn to iterate further, we stabilize by names the resulting sequence; we propose numbers for these *actions*. […] Thus, since that early conceptual practice of potential infinity, we start seeing the endless number line, a discrete gestalt, because we iterate an action-schema in space (counting, ordering…), and we *well order* it by this very conceptual gesture. […] And arithmetic (logico-formal) induction follows from it, it doesn't found it, contrary to Frege's and Hilbert's views (see below). Its conceptual construction is the result of these ancient practices, by action and language, it organizes the world and allows proofs. » (Longo, 2009, p. 16, les italiques sont de Longo)[21]

Pour illustrer son propos, Longo utilise un exemple dû à Gauss, qui bien qu'encore enfant, proposa une preuve de $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ à partir de l'écriture d'une première ligne comprenant successivement les n premiers entiers naturels, de l'écriture d'une deuxième ligne reprenant la première ligne mais cette fois en inversant l'ordre des nombres, puis de l'addition verticale des couples de nombres ayant pour somme $n + 1$. Bien sûr, une fois la formule connue, il est possible d'en faire une preuve par induction et seule cette preuve a le statut de démonstration du point de vue déductif et formel des jeux d'intérieur. Pour autant, Longo considère que cette preuve n'est pas fondée par l'induction mais plutôt par les actions de construction reposant sur l'ordre et la symétrie qui en sont à l'origine. Dans le vocabulaire emprunté à Hintikka, la procédure de preuve de Gauss, comme celle des élèves travaillant dans le cadre de Math.en.Jeans, relève des jeux d'extérieur dans la mesure où des éléments extra-langagiers

---

[20] Gilbert Arsac m'a signalé que l'explication de Longo ne prend pas en compte la problématique de la notation de nombres. L'usage d'une numération de position est en effet fortement lié avec la possibilité de se représenter et de conceptualiser l'infini potentiel. Je n'ai pas eu le temps d'approfondir cette question.

[21] « Considérons maintenant l'autre origine principale de nos activités mathématiques : Le dénombrement et l'ordonnancement des petites quantités, un talent que nous partageons avec de nombreux animaux (voir Dehaene, 1998). A travers le langage, nous apprenons à poursuivre plus loin le processus, nous stabilisons par des nombres la suite correspondante ; nous proposons les nombres pour ces *actions*. […] Alors, à cause de cette pratique conceptuelle primitive de l'infini potentiel, nous commençons à voir la ligne numérique sans fin, une gestalt discrète, parce que nous répétons un schéma-action [action-schema] dans l'espace (compter, ordonner…), et nous réalisons son *bon ordre* par ce véritable geste conceptuel. […] Et l'induction arithmétique (logico-formelle) provient de là, elle ne la fonde pas, contrairement aux idées de Frege et Hilbert[21] (voir ci-dessous). Sa construction conceptuelle est le résultat de ces anciennes pratiques, par l'action et le langage, elles organisent le monde et permettent les preuves. » (ma traduction)

interviennent. Pour poursuivre la lecture de l'article du groupe de l'IREM de Lyon, il est intéressant de noter qu'une fois les élèves confrontés au problème concernant les nombres décimaux, leur démarche semble s'inverser. Ce sont les jeux d'intérieur qui deviennent le moteur de leur activité. Les élèves vont effet essayer d'adapter l'argument construit pour les entiers naturels :

> « Au départ, les élèves ont pensé reprendre la démonstration effectuée sur les entiers, en utilisant « le plus petit décimal au dessus de 0. » (Pontille, Feury-Reynaud & Tisseron, 1996, p. 14)

Il suit de cette tentative un certain nombre de questionnements et de travaux mathématiques pertinents concernant les nombres décimaux. Ceci est décrit en détail dans l'article cité. Les élèves finiront par apprendre que le jeu d'extérieur qui consiste à prendre le plus petit décimal après zéro n'a pas de solution. Suite à ce travail, leur vision des nombres a sensiblement évoluée. Ils sont en particulier convaincus que, contrairement à l'ensemble des nombres entiers naturels, l'ensemble des nombres décimal n'est pas bien-ordonné, que le type d'action envisagée sur le plus petit nombre décimal après zéro n'est pas disponible. Voici des extraits de leur cahier qui atteste de ce changement de vision :

> « Nous avons alors essayé de nous servir de la démonstration dans *IN* en posant « *e* le plus petit décimal ». On pourrait écrire les décimaux comme suit 0, *e*, 2*e*, 3*e* etc… […]
>
> Mais voyant qu'il était difficile de cerner 10^{∞}, nous avons pris *a* « très grand ». Par exemple, *a* = 10^{1000}. […]
>
> Or on voit tout de suite qu'il « manque » des décimaux, entre 0 et 10^{-1000}, entre 10^{-1000} et 2×10^{-1000} etc… » (Pontille, Feury-Reynaud & Tisseron, 1996, p. 21)

Suite à ce constat, les élèves sont parvenus à produire un contre-exemple, valable également dans le contexte des nombres rationnels. Concernant le travail sur les nombres réels, le problème est plus complexe comme je viens de le montrer à travers l'exemple de la preuve de Bolzano. Il n'a pas pu être résolu par les élèves.

2. LE POINT DE VUE DIALOGIQUE COMME OUTIL DIDACTIQUE

Dans ce deuxième chapitre de la première partie, j'essaie de montrer la pertinence de la dimension dialogique des jeux que j'ai informellement présentés plus haut. Le premier chapitre de la première partie a été l'occasion d'identifier, dans les processus de contrôle ou de production de preuve, les dimensions syntaxique et sémantique de l'activité mathématique. La distinction théorique entre ces deux types de jeux a été complétée par une étude de leur complémentarité, une étude de la manière dont les jeux de types différents viennent se nourrir les uns les autres. Un autre niveau important des analyses de cette thèse est celui de la prise en compte du point de vue dialogique dans l'analyse du discours des étudiants. En d'autres termes, il me paraît important de ne pas se restreindre à une analyse monologique de l'assertion qui ignorerait les questions qui ont conduit aux assertions, la structure plus large du jeu d'arrière plan dans laquelle l'assertion prend place. Le choix qui est fait est de regarder l'activité langagière comme une activité parmi d'autres, une activité qui a ses propres règles émergeant de la situation. La prise en compte de ces règles (le plus souvent tacites) dans l'analyse didactique permet d'affiner la compréhension des assertions puisque ces règles contribuent à la détermination de la signification des termes du langage. Une difficulté importante est alors de contrôler les hypothèses émises puisque rien ne garantit qu'un locuteur joue effectivement le jeu que l'on lui prête. A nouveau, ce qui sera présenté sur un mode informel ici sera précisé par une formalisation dans la seconde partie de la thèse. Le contenu de ce chapitre est issu d'un travail en commun avec Anne-Cécile Mathé, enseignante-chercheure à l'IUFM Nord Pas de Calais. Nous avons retravaillé son corpus de thèse (Mathé, 2006), thèse dans laquelle Mathé s'intéresse à la place du langage dans les apprentissages géométriques en cycle 3 et en particulier au processus d'élaboration d'un vocabulaire spécifique et partagé. Ce travail a donné lieu à un atelier de la quatorzième école d'été de didactique des mathématiques (Mathé & Barrier, 2009).

2.1 Présentation de la thèse de Mathé et de son corpus

Le travail de thèse de Mathé (Mathé, 2006) propose une réflexion sur les caractéristiques et le fonctionnement de la dialectique entre l'usage du langage et la construction des connaissances. Il s'appuie sur l'analyse d'un dispositif d'« Atelier » de géométrie en cycle 3.

Ces dispositifs d'atelier et leur contexte sont présentés dans Dias, Prouchet & Tisseron (2006). Plus précisément, le travail de thèse de Mathé vise à analyser la portée des interactions langagières émergeant dans la résolution de situations problématiques concernant les solides. Il s'agit de comprendre le rôle joué par les dialogues dans l'élaboration d'un vocabulaire et surtout de références spécifiques et partagées en géométrie. La thèse s'attache aussi ensuite à identifier certains moyens permettant à l'enseignant de faire fonctionner les interactions langagières en classe. Elle conclut à la nécessité d'une attention particulière à la dimension interactive du processus de construction des connaissances en considérant que les mots ne peuvent pas être considérés comme un simple support des connaissances. Au contraire, elle propose d'explorer le paradigme selon lequel l'usage du langage et l'élaboration des connaissances sont deux activités liées sans pour autant que l'une soit subordonnée à l'autre. Cette étude s'insère dans une recherche plus large qui a donné lieu à l'ouvrage collectif *Jeux et enjeux de langage dans la construction des savoirs à l'école* (Durand-Guerrier et al. 2006).

Voici maintenant une description du déroulement a priori du dispositif d'Atelier de géométrie tel que l'enseignant l'avait prévu. L'activité de recherche s'accompagne de débats sur les connaissances mobilisées par la situation. D'autre part l'enjeu de communication contribue à la structuration de ces connaissances en savoirs. Du point de vue de l'enseignant, le savoir visé, qu'il institutionnalise progressivement, est l'usage conventionnel du vocabulaire géométrique permettant de décrire les solides étudiés dans l'atelier.

<u>*Première phase (P1)*</u>. La première activité proposée aux élèves est intitulée « découverte ». Elle s'appuie sur une fiche (annexe 2) présentant une situation d'inventaire : un magasinier doit ranger douze objets, dessinés sur la fiche, représentant des produits d'usage courant. Les élèves ont pour tâche d'aider le magasinier dans son activité en « *trouvant comment classer les emballages selon des ressemblances géométriques* ». La recherche de critères géométriques permettant de classer les objets, l'élaboration d'une grille de classement et le classement effectif des emballages sont conduits sous forme de débats collectifs en classe. L'enseignant attend des élèves un classement prenant en compte le nombre et la nature de faces des solides.

<u>*Deuxième phase (P2)*</u>. La deuxième tâche prévue consiste en la mise en correspondance, par le biais d'un tableau (annexe 3), des emballages de la première activité avec des solides de même type (mais de tailles et proportions différentes). Les solides sont proposés sous deux

formes, des maquettes en carton et des dessins en perspective cavalière (annexe 4). Les élèves doivent « *associer les solides qui peuvent avoir des ressemblances* ». Leurs productions sont mises en commun et soumises à l'appréciation de la classe. Un bilan doit recenser les critères géométriques ainsi que les catégories obtenues.

Troisième phase (P3). Une nouvelle activité est ensuite proposée aux élèves. Elle vise à faire utiliser le vocabulaire géométrique dans une tâche de description et non plus d'identification. Elle relève d'une évaluation des apprentissages en cours. Les élèves doivent décrire le nombre et la nature des faces des solides représentés en perspective cavalière sur la fiche 2 en remplissant un tableau figurant sur la même fiche (annexe 4). Les élèves travaillent de façon individuelle et autonome. La correction s'effectue ensuite collectivement, les réponses étant validées par le biais d'un débat au sein de la classe.

Quatrième phase (P4). Les élèves se répartissent en trois groupes. Chaque groupe a pour mission de préparer une communication à destination de l'une des autres classes de l'école, afin de leur faire partager « ce qu'ils ont appris » au cours de l'Atelier de géométrie. Le contenu comme la forme de ces communications sont laissés au choix des élèves. Les communications sont ensuite présentées aux classes auxquelles elles sont destinées.

Le déroulement effectif des six séances du dispositif et leur relation avec les phases prévues peuvent être résumé dans le tableau ci-dessous.

Séance	Le déroulement effectif de l'Atelier de géométrie : activité des élèves
1	- (P1) Identification de critères permettant le classement des emballages de la situation d'inventaire. - (P2) Mise en relation de registres de représentation différents.
2	- (P+) Construction d'une signification partagée des termes « côté », « face », « arête », « sommet ».
3	- (P3) Recherche du nombre et de la nature des faces des solides dessinés en perspective. - (P++) Travail sur un texte à trous destiné à l'évaluation individuelle. (fiche 4,

	annexe 4).
4 et 5	- (P4) Préparation des échanges destinés aux autres classes.
6	- (P4) Échanges avec les autres classes (Grande Section, CP et CE, en parallèle).

Les phases que nous avons décrites sont réalisées aux séances 1, 3, 4, 5 et 6. La séance 2 est consacrée à élucider les difficultés rencontrées par les élèves lors de la séance 1 à propos des notions de « face », « côté », « arête » et « sommet » car l'ampleur de ces difficultés a dépassé ce que l'enseignant avait prévu. En cohérence avec la forme de travail de l'Atelier, celui-ci a donné du temps aux élèves pour élaborer collectivement une signification partagée des mots problématiques (P+). Cet apprentissage fait aussi l'objet, à la séance 3, d'une évaluation individuelle non prévue dans le dispositif (P++). Les analyses qui suivent sont construites autour des transcriptions des trois premières séances (annexes 5, 6 et 7). Une première analyse vise à mettre en évidence l'opacité du langage en montrant, dans le contexte de la géométrie, la dépendance de la référence aux schèmes conceptuels particuliers (Quine, 1977) et la dépendance au contexte d'énonciation, aux « formes de vie » (Wittgenstein, 2004) ou aux « situations » (Brousseau, 1998). Une seconde étudie les mécanismes de dépassement des paradoxes sémantiques identifiés lors de la première analyse.

2.2 Les outils d'analyse du corpus

La première direction d'analyse va s'appuyer sur la distinction de Frege entre le sens et la référence (ou la dénotation). Pour cette thèse, je retiens une idée principale : les énoncés sont directement représentatifs des objets de connaissances, sans passer par la médiation d'une représentation, double (ou reflet) de la réalité dans l'intériorité de la pensée. Pour Frege, lorsque nous parlons, nous ne parlons ni de nos représentations, ni des mots, mais bien des objets formels ou physiques qui sont en dehors du langage (Frege, (1971), pp. 107-108). Pour Frege, il s'agit de prendre ses distances avec la psychologie dans le domaine des fondements des mathématiques :

« Il peut être utile d'examiner les représentations qui accompagnent la pensée

> mathématique et leur déroulement ; mais que la psychologie ne s'imagine pas concourir en quoi que ce soit au fondement de l'arithmétique » (Frege, 1970, p. 119)

L'approche de Frege est donc assez proche de celle de Bolzano (voir les références données ci-dessus sur cette comparaison) dans la mesure où il cherche à rejeter les approches particulières des individus hors du champ de l'explication du fondement des énoncés mathématiques :

> « Quelque chose se passe à la fin du siècle dernier [le XIXème siècle] en logique et en théorie de la connaissance. Toute une série d'auteurs dont les noms vont compter au XX^e siècle dans ces domaines, que ce soit dans un camp ou dans l'autre de la philosophie contemporaine, vont se trouver tous d'accord sur un point fondamental : il faut rompre avec le psychologisme de la logique traditionnelle. Cette thèse anti-psychologiste, qui n'est pas la seule assurément, mais qui a triomphé, se présente essentiellement sous les auspices de ce qu'on pourrait appeler une exigence de référence. Il faut bien que notre discours, nos mots, renvoient à quelque chose, qu'il y ait quelque chose « en face d'eux » qui ne se dissolve pas dans le brouillard de nos représentations. » (J. Benoist (2004), p.86, cité dans Errera & Héraud (2006))

Cependant, selon Frege, le langage mathématique est bien de l'ordre d'un discours sur des objets. Pour Frege, contrairement à la position que j'ai adoptée par exemple dans le paragraphe précédent, notre connaissance de ces objets n'est pas pour autant médiatisée par les sens. Dans les analyses qui viennent, je laisse ce point de côté pour m'intéresser spécifiquement à l'étude de l'usage du langage dans sa capacité à représenter les objets mathématiques de manière partagée et opératoire. Frege distingue donc le mot (en tant que suite de lettres ou de sons), notre représentation de ce mot (à laquelle il dénie tout rôle dans les fondements de mathématiques), la référence du mot (si'il s'agit d'un nom propre, cette référence est un objet) et le sens du mot. Les expressions arithmétiques 4 + 4 et 10 – 2 ont des sens différents mais dénotent une même référence, le nombre 8. De même, « l'étoile du matin » et « Vénus » sont deux noms propres qui ont même référence bien qu'ils aient un sens différent (Frege, 1970, p. 129). Frege avance également une autre distinction : celle entre *concept* et *objet*. Selon lui, dans la proposition « Vénus est une planète », « Vénus », en position de sujet grammatical, joue le rôle d'objet et le prédicat « être un planète » joue le rôle de concept. Vide de contenu, le concept se remplit d'une collection plus ou moins grande d'objets. La volonté de regarder le langage comme le média que nous utilisons pour se référer au monde amène Frege à voir la proposition comme nécessairement marquée par une opposition entre un objet et un concept. Ce positionnement va le conduire à construire une théorie logique de la quantification pour expliquer la manière dont les objets tombent, ou non, sous un concept donné. Je reviendrai sur cette construction dans la troisième partie (Chapitre 2) lors de l'analyse épistémologique autour du concept de quantification. Cette présentation, bien que très succincte, des travaux de Frege, permet de présenter et d'utiliser les apports d'auteurs tels que Wittgenstein et Quine puisqu'ils s'inscrivent dans une continuité critique de ce qui vient d'être dit, en particulier en ce qui concerne les notions de sens (nous dirons dans la suite du texte *signification*) et de référence.

Dans ce que les philosophes appellent sa seconde philosophie, Wittgenstein s'oppose à l'idée selon laquelle les mots et expressions de notre langage courant renvoient à un ensemble fini de significations.

> « Si les jeux de langage changent, changent les concepts et, avec les concepts, les significations des mots. » (Wittgenstein, 1976, §65)

La question n'est alors plus de chercher à atteindre des significations qui transcenderaient les pratiques mais d'étudier l'utilisation que nous faisons des mots puisque, selon lui, celle-ci fonde leur signification. Pour Wittgenstein, la notion de signification est anthropologique : connaître la signification d'un mot peut s'identifier à la maîtrise de son utilisation dans une communauté de langage et dans un contexte donné. Les mots ne peuvent être compris que lorsqu'ils prennent corps à l'intérieur de « *jeux de langage* » qui leur confèrent une signification. De ce point de vue, étant donné la multiplicité tant potentielle qu'effective des *jeux de langage* que l'on peut associer à un terme il semble improbable que l'on puisse fixer un élément commun à ces usages qui pourrait être considéré comme *la* signification du terme en question. Wittgenstein s'attache donc à la notion de contexte en considérant le parler comme une activité parmi d'autre :

> « Le terme « jeu de langage » est destiné à insister sur le fait que parler un langage est une partie d'une activité ou d'une forme de vie. » (Wittgenstein, 1945, 2004, §23).

Comme les figurines du jeu d'échec, l'usage des mots est fixé dans le langage par des règles. Wittgenstein insiste donc sur la nécessité de ne pas dissocier le langage de la globalité d'une pratique extralinguistique, de l'activité humaine qui se trouve en jeu dans son usage et qui donne naissance aux règles d'usage des mots. Cependant, si les coups dans un jeu de langage sont publics, les règles de ces jeux ne sont pas explicites : rien ne permet de dire que les partenaires du jeu jouent bien selon les mêmes règles (Sarrazy, 1997, p. 137, 2007, p. 166). Ainsi, que le sens d'une phrase semble immédiat ne veut absolument pas dire qu'il soit le même pour tous puisque « comme le poteau indicateur, elle [la règle] ne contient pas en elle-même ses propres conditions d'application » (Sarrazy, 2007, p. 165). Les *jeux de langage* ne sont pas exclusivement linguistiques : apprendre un langage c'est non seulement apprendre le fonctionnement de la langue mais aussi apprendre une *forme de vie* (Laugier (2002), §2). Wittgenstein rejette l'idée selon laquelle la compréhension des significations passe par une activité mentale d'ordre réflexive. Le jeu de langage est une activité pratique que l'on expérimente dans le dialogue interactif. La mésentente sur les règles d'usage peut alors entraîner non seulement l'incompréhension, mais aussi, de façon plus grave, la fausse compréhension qui est plus insidieuse puisqu'on ne sait pas qu'elle est là. Il n'y a pas alors d'alternative à la pratique de ces jeux pour démêler, clarifier les usages divergents des termes.

Quine critique également certains usages de la notion de signification. Selon lui, apprendre un langage est d'abord une activité sociale et empirique : l'apprentissage d'un langage est d'abord un « dressage effectué par la société » (Quine, 1977, p. 31). Cependant, même à l'intérieur d'une même communauté linguistique, rien ne nous assure que nos visions du monde coïncident précisément, que nous partagions la référence des termes que nous employons (Quine, 1977, p. 92). Si le langage est une activité sociale, l'interprétation des assertions des membres de sa propre communauté linguistique ou la traduction de celles d'une autre est une activité privée reposant sur son équipement conceptuel. La thèse de Quine est pour l'essentielle dirigée contre un usage philosophique d'une notion naïve de signification qui ferait le pont entre nos différentes interprétations des mots et qui nous permettrait de les faire correspondre. Cette thèse concernant le langage naturel est parallèle à la thèse dite de la sous-détermination empirique des théories scientifiques :

> « If all observable events can be accounted for in one comprehensive scientific theory - one system of the world, to echo Duhem's echo of Newton - then we may expect that they can all be accounted for equally in another, conflicting system of the world. » (Quine, 1975, p. 313)[22]

Selon Quine, les données empiriques ne suffisent pas à déterminer de manière univoque la théorie. Au contraire, les énoncés observationnels peuvent changer de significations selon la théorie dans laquelle ils sont interprétés. Il s'opère en effet, au cours du développement scientifique, une réorganisation des énoncés observationnels qui les inclut dans une trame de

[22] « Si l'on peut rendre compte de tous les événements observables en une théorie scientifique d'ensemble - un système du monde, pour faire écho à l'écho newtonien de Duhem – alors nous pouvons nous attendre à ce que l'on puisse également en rendre compte dans un autre système du monde en conflit avec le premier » (ma traduction)

raisonnement qui en change éventuellement le sens. Les énoncés observationnels acquièrent alors un autre statut qui peut modifier complètement la compréhension des mots dont ils sont composés. Par exemple, l'énoncé observationnel « le soleil se couche » ne veut plus dire la même chose aujourd'hui qu'il y a quelques siècles. Sur le plan sémantique le parallèle est le suivant : ce n'est pas parce que nous partageons un discours (même un simple discours observationnel) que nous nous accordons sur les objets de ce discours : la référence est sous-déterminée par le discours. Ceci ne veut pas dire qu'il n'y ait rien à voir, mais au contraire, qu'il y a tellement de choses à voir que l'observation est impuissante à départager, parmi les références acceptables, celle dont on parle. Les significations les plus problématiques ne sont alors pas forcément celles des mots qui nous sont complètement inconnus, c'est au contraire souvent dans le langage le plus couramment utilisé que se manifestent le plus largement les confusions de significations, car nous pensons savoir ce que l'autre veut dire :

> « Dans l'apprentissage d'un langage, il y a la multiplicité des histoires individuelles susceptibles d'aboutir à un comportement verbal identique. Néanmoins, inspiré par le sens positif du raisonnable, on est disposé à dire de la situation domestique que si deux locuteurs s'accordent dans toutes leur dispositions au comportement verbal, cela n'a aucun sens d'imaginer qu'il existe entre eux des différences sémantiques. Il est ironique de constater que le cas interlinguistique est moins remarqué alors que c'est précisément ici que l'indétermination sémantique reçoit un sens empirique clair. » (Quine, 1977, p. 126).

Les arguments de Quine, comme ceux de Wittgenstein, invitent à la prudence face à l'apparente transparence du langage, que ce soit le langage familier ou le langage scientifique. L'approche dialogique qui est explorée dans la thèse a notamment pour ambition d'avancer dans la prise en compte didactique de la dépendance de la référence tant à la théorie (ou vision du monde) dans laquelle les locuteurs se situent qu'au contexte d'énonciation. L'analyse dialogique des assertions conduit à s'interroger sur la structure du dialogue dans laquelle les assertions prennent place et le rapport de cette structure avec la situation plus générale d'énonciation. Ce processus revient à une tentative d'appropriation du discours, de traduction à l'intérieur d'une structure explicitée.

Considérée dans un contexte didactique, la thèse de Wittgenstein conduit à faire l'hypothèse selon laquelle l'apprentissage de la signification des mots et la construction d'une certaine familiarité intersubjective avec les objets qu'ils dénotent s'effectue par la pratique des jeux de langage qui émergent de l'activité créée par le professeur. Cette position montre un certain parallèle entre la notion de *forme de vie* de Wittgenstein et celle de *situation* de

Brousseau. Les deux auteurs se rejoignent en effet sur la dénonciation de l'apprentissage d'un langage comme un accès à des significations (internes comme dans la thèse psychologiste ou externes chez Frege ou Bolzano par exemple) qui transcenderaient les activités. Pour Brousseau (2004, pp. 244-245), les approches épistémologiques qui distinguent les connaissances des usages « désarment l'action de l'enseignant » et « vident les processus didactiques de leur substance ». Wittgenstein insiste également sur le lien entre les *situations* et le *sens* :

> « De même les mots « je suis ici » n'ont de sens que dans certains contextes, mais non si je les adresse à un interlocuteur assis en face de moi et qui me voit clairement – et cela non parce qu'alors ils sont superflus, mais bien parce que leur sens n'est pas déterminé par la situation alors qu'il a besoin d'une telle détermination. » (Wittgenstein, 1969, 1976, § 348)

Sarrazy (2005) propose une comparaison des deux auteurs plus étayée autour du thème du contrat didactique. Selon lui, le principal point commun entre Brousseau et Wittgenstein est la défense de l'ineffabilité de la sémantique, c'est-à-dire l'affirmation selon laquelle il est vain de vouloir transmettre des significations par un discours. Pour Sarrazy, un apprentissage est une « *acculturation* » (Sarrazy, 2005, p. 3) qui se fait à travers le partage d'une pratique dont les règles sont déterminées par la situation :

> « Cette position commune à Brousseau et Wittgenstein marque la dimension anthropologique de la manière dont l'un et l'autre examinent les conditions susceptibles de montrer ce qui ne peut être dit. » (Sarrazy, 2005, p. 4)

Le travail d'analyse de corpus qui vient s'intéresse aux processus par lesquels les élèves parviennent à un usage réglé des termes du vocabulaire de la géométrie. Il explore dans quelle mesure les interactions langagières permettent en classe de mettre à jour le caractère contextuel de la référence, en particulier lorsqu'il s'agit de termes déjà connus des élèves dans d'autres contextes. La coexistence de valeurs référentielles divergentes associées à un même terme dans un dialogue sera appelée *paradoxe sémantique*.

2.3 Deux exemples de paradoxes sémantiques

Je commence par l'analyse de l'usage par les élèves des termes « forme » et « côté » dans l'activité de classement d'emballages (P1). Le terme « forme » apparaît dès le début de l'activité à travers la suggestion de Damien de « classer avec la forme de l'emballage » (Annexe 5, 47). Cette proposition s'oppose aux propositions d'élèves voulant classer les emballages en fonction de leurs contenus, conformément à la situation ordinaire d'un inventaire. La « forme » réfère alors à une propriété caractérisant l'allure générale des solides de la situation bien que le concept n'ait pas encore été exemplifié (rempli par des objets comme « forme conique », « forme cubique »). Toutefois, les élèves ont déjà un certain nombre de connaissances relatives au mot « forme » et à son usage dans le langage courant. Ce concept semble constituer une entrée dans une « manière de voir » qui se veut idoine à la géométrie. Le terme forme est ensuite associé à l'adjectif « géométrique ». Les exemples cités par les élèves prennent en compte des propriétés relatives aux figures planes constituées par les faces des solides :

> 54. E. : Ben, moi, j'suis d'accord avec Damien parce que mettre le fromage avec le fromage, c'est pas les mêmes formes géométriques. Par exemple, « Le moine » est en rond, c'est en cercle et par exemple, la « crème » c'est ovale, alors si on met le fromage avec le fromage ça va pas aller parce que c'est pas les mêmes formes géométriques.
>
> (Annexe 5)

L'adjectif « géométrique » précise le concept « forme » en accentuant l'opposition déclarée avec les contenus. Cependant, alors que dans la première occurrence, le mot « forme » semblait référer à une propriété des solides, les exemples de « formes géométriques » explicités par cet élève concernent des propriétés relatives aux figures planes constituées par leurs faces. Implicitement, l'allure générale d'un solide est reconnue comme tributaire de l'allure générale des frontières de dimension 2 qui le limitent. Le concept de « forme » est donc à la fois rempli par des objets en trois dimensions (« formes des emballages ») et des objets en deux dimensions (« cercle », « ovale »). Il s'agit donc d'un cas de *paradoxe sémantique*. L'usage de ce terme n'est pas remis en question par l'enseignant qui souhaite sans doute laisser les élèves explorer la situation avec les outils qui leur sont familiers. Un élève propose ensuite de distinguer deux groupes de solides désignés par les expressions respectives « formes rondes », « formes carrées » (annexe 5, 59), confortant la tendance à assimiler l'aspect général des faces avec l'allure d'un solide : ce n'est pas le solide qui est « rond » (ou « carré ») mais certaines de ses faces. Comme précédemment, les échanges semblent attester d'une compréhension partagée de ces expressions, malgré l'équivocité de leur référence. Les élèves sont à ce moment dans une phase d'exploration visant à identifier des propriétés susceptibles de classer et la situation ne contraint donc pas pour l'instant les élèves à lever ces ambiguïtés. Suite à des contraintes de précision induites par la mise à l'essai de ces classes de solides dans le classement effectif des emballages, les adjectifs « rondes » et « carrées » sont ensuite modifiés en « rondes, qui n'ont pas de sommet » (annexe 5, 94) et « polygonales » (annexe 5, 113). Encore une fois, les expressions renvoient plutôt à des objets du plan mais visent ici à caractériser des objets de l'espace. Le terme de « forme » désignera ainsi jusqu'à la fin de l'activité un concept relatif à l'aspect général aussi bien d'un solide que de ses faces. Pour les élèves, au terme de la première séance, ce mot semble donc appartenir à la fois au vocabulaire de la géométrie plane et à celui de la géométrie des solides. Toutefois, l'accord d'usage de ce terme se situe davantage dans le contexte du langage courant que dans le contexte spécifique de la géométrie. La suite de l'analyse nous montrera que cet usage non réglé du terme dans le contexte spécifique de la géométrie provoquera chez les élèves quelques malentendus.

Plus encore que le mot « forme », « côté » est un terme dont les élèves connaissent de nombreuses significations dans le langage courant et qu'ils emploient spontanément pour désigner des objets très différents. Le mot « côté » revêt donc une potentialité importante de paradoxes sémantiques. Ce phénomène apparaît très vite dans le discours des élèves. Les élèves utilisent d'abord le mot dans le contexte de l'activité de classement de solides pour exprimer la dualité du classement envisagé :

> 44. Quentin : Moi, je mettrais tout ce qui est alimentation d'un côté et tout ce qui est chimique de l'autre, parce que si…
>
> 59. Alexis : Ah, alors moi, je mettrais toutes les formes rondes d'un côté, toutes les formes carrées de l'autre.
>
> (Annexe 5)

Associé à l'adjectif « plat », le mot « côté » désigne également une des faces des solides : un usage non conforme à l'usage du mot dans le contexte spécifique de la géométrie mais opératoire en situation car les élèves paraissent en partager la référence. Puis, l'expression « côté plat » est employée comme désignant un élément des solides qui n'appartiennent pas à la classe « formes rondes ». Sans que les objets auxquels se réfère le mot ne soient clairement définis, cette expression fait référence à une des figures planes (ou faces) délimitant certains solides :

> 102. Quentin : Non… ceux qui n'ont aucun côté plat.
>
> 103. P : Ceux qui n'ont pas de sommet et de côté plat ?
>
> 104. E : Mais c'est pas possible de ne pas avoir de côté plat !
>
> 105. E : Ben si, le rond il n'a pas de côté plat [la balle].
>
> 117. Loïc : J'suis pas d'accord parce que « Le moine » [boîte de camembert] on a considéré que ça avait un côté plat, donc ça ne pourrait pas aller ni avec les formes rondes, ni avec les formes polygonales.

(Annexe 5)

Jusqu'à la fin du classement des emballages et la mise à l'essai des classes « formes rondes » et « formes polygonales », le terme « côté » est en effet invariablement associé à l'adjectif « plat » dans l'expression « côté plat ». Comme pour le mot « forme », l'enseignant souhaite sans doute laisser les élèves exercer et éprouver leur mode de vision des objets et que ce soit les interactions avec la situation et la confrontation des propositions entre pairs qui soient les moteurs des apprentissages. Cet usage du terme « côté » ne semble pas d'abord générer de difficulté dans la mesure où cette signification, certes non adéquate au contexte de la géométrie, est opératoire. Cependant, au terme de l'activité de classement, un élève intervient pour exprimer sa difficulté à saisir les objets désignés par l'expression « forme polygonale » (annexe 5, 151). Invités par l'enseignant à traduire cette expression, des élèves identifient ces objets comme des « formes à six côtés » (annexe 5, 153-154-160) et associent les côtés à « des formes plates » ou « planes » (annexe 5, 156-158). Or si la caractérisation d'un polygone comme une figure délimitée par plusieurs côtés est correcte au regard des usages scientifiques et scolaires, le mot « côté » admet du point de vue des élèves une référence différente. L'enseignant ne clarifie pas ici ce paradoxe sémantique mais pointe l'incapacité des élèves à saisir le sens de l'expression qu'ils utilisent et laisse la question en suspens. Les malentendus quand à l'expression « forme polygonale », définie comme « forme à plusieurs côtés », dans les jeux de langage de la situation commencent à se dessiner. Nous observons ainsi la coexistence de discours et de théories potentiellement contradictoires sur les objets de la situation, sans que les intervenants n'en aient d'abord conscience. De ce point de vue, le langage ne saurait constituer une unique institution homogène permettant et limitant l'expression de nos connaissances. Au contraire, les règles d'usage des mots étant aussi nombreuses que les situations dans lesquelles ces mots ont un sens, le langage peut s'appréhender comme relevant de multiples institutions.

L'apprentissage du vocabulaire de la géométrie devra induire une modification de la « manière de voir le monde » chez les élèves, qui passe par un changement référentiel des termes impliqués dans les jeux de langage. Ces modifications sont de véritables réarrangements institutionnels (sur le plan langagier) et ontologiques qui émergent face aux contraintes exercées par les interactions et par la situation. Il y a, comme le souligne Heinzmann, une *simultanéité* entre le travail sur les objets (leur *construction*) et le travail sur le vocabulaire dénotant ces objets et ses règles d'utilisation (leur *description*) :

> « The feature of the here defended dialogic pragmatism can be seen in the simultaneity of object construction and object description, inserted in a process of socialization. Its naturalistic characteristic consists in the fact that theoretical means always depend on practical appropriateness. » (Heinzmann, 2006, p. 292)[23]

La suite des analyses s'intéresse à la manière dont le processus dialogique de maniement des jeux de langage en classe permet (ou non) de dépasser les paradoxes sémantiques relevés et de clarifier l'usage des mots dans le cadre de la géométrie.

2.4 Modélisation de processus conduisant à élaborer un vocabulaire et des références partagées

Les modélisations qui viennent s'appuient sur un extrait de la transcription de la deuxième séance du dispositif consacrée à un débat sur le sens des termes « polygones », « côté » et « face » en géométrie (annexe 6) et un extrait de la transcription de la reprise de ces débats lors de la troisième séance (annexe 7). Lors de la deuxième séance, le travail d'explicitation de la définition de « polygone », d'abord conçu par l'enseignant comme une phase de rappel d'une leçon précédente, met en lumière la divergence des significations assignées au mot « côté » puis au mot « polygone ». Le dessin par un élève d'un objet qu'il pense subsumé par ce concept montre que les élèves ont développé au cours des jeux de langage des interprétations contradictoires du terme « côté ». Beaucoup d'entre eux associent à ce mot une face de solide, recourant alors à un usage non conforme du mot dans le contexte de la géométrie. Quelques élèves s'attachent à distinguer les références de « face » et « côté » et interprètent le mot « côté » comme un segment délimitant une figure plane ou un solide. Des échanges argumentatifs se développent alors entre élèves.

Premier exemple. Invité par l'enseignant à dessiner un polygone (annexe 6, 112), un élève (Loïc) commence par dessiner un rectangle au tableau. Les discussions s'engagent alors pour déterminer le caractère polygonal de ce rectangle, mais Loïc intervient et signale à l'enseignant qu'il n'avait pas terminé : il voulait dessiner un pavé (« faire les côtés », annexe

---

[23] « La caractéristique du pragmatisme dialogique que nous défendons ici peut être vu dans la simultanéité de la construction des objets avec leur description à l'intérieur d'un processus de socialisation. Son caractère naturaliste provient du fait que les moyens théoriques reposent toujours sur l'adéquation pratique. » (ma traduction)

6, 128). L'enseignant lui demande d'exposer son point de vue en reformulant clairement la question qui préoccupe alors la classe (annexe 6, 143) : « Est-ce que tu as dessiné un polygone, c'est-à-dire avec la définition que Justine a donnée tout à l'heure ? ». Nous reportons ici l'échange qui suit :

> « 144. Loïc : Ah ben non, parce que là il n'y a pas de côtés.
> 145. P. : Il n'y a pas de côtés là ? (Loïc prend une boîte cubique et revient au tableau.)
> 146. Loïc : Par exemple, les côtés c'est ça par exemple (il montre les faces du cube).
> 147. P. : Attends. Tu peux expliquer ce que tu entends par côté ?
> 148. Damien : Oui, mais il n'y a pas d'arêtes !
> 149. Loïc : Mais si, ça c'est les arêtes (il montre les côtés du rectangle).
> 150. Manon : Mais là c'est des faces, c'est pas des côtés.
> 151. Loïc : Mais si, les côtés c'est bien ça (il montre les faces) et dans la figure (au tableau) il y a pas de côté**.**
> 152. Damien : Non, il n'y a qu'une face.
> 153. Justine : Les côtés c'est la largeur.
> 154. E. : En 3D, c'est des polygones mais là c'est une figure plane. **»**
> (Annexe 6)

Modélisation en termes de jeux d'intérieur propositionnels (i.e. sans quantification) :

Un jeu d'intérieur est un jeu sur les énoncés. Notons *A* l'énoncé « le rectangle n'a pas plusieurs côtés » et *B* l'énoncé « le rectangle n'est pas un polygone ». Dans l'extrait ci-dessus, Loïc défend la position selon laquelle un rectangle n'est pas un polygone, c'est-à-dire B. La justification qu'il donne peut être résumé par la forme $\left[A \wedge (A \Rightarrow B)\right] \Rightarrow B$, c'est-à-dire la règle de détachement (dite aussi du modus ponens). La déduction de Loïc a donc la forme :

Prémisses : A, $(A \Rightarrow B)$
Règle de déduction : modus ponens
Conclusion : B

La question de l'enseignant (assertion 145) et les justifications et discussions des élèves (assertions 146 à 153) concernent la prémisse *A*. Un jeu d'intérieur ne peut pas rendre compte de ces discussions puisqu'elles s'intéressent au contenu de la proposition *A*, aux propriétés de l'objet « rectangle » dessiné au tableau. La modélisation des interactions langagières en termes de jeux d'intérieur ne permet pas de rendre compte de plusieurs interventions. Deux jeux semblent s'opposer : celui pour lequel le rectangle a des côtés et celui pour lequel il n'en a pas. Une modélisation interne au langage ne permet pas d'intégrer la confrontation entre les structures des jeux d'arrière plan qui s'opposent. On peut remarquer qu'une modélisation construite sur un jeu d'intérieur quantifié autour de l'énoncé n'y parvient pas mieux.

Modélisation en termes de jeux d'intérieur quantifiés :

La formalisation prend l'aspect suivant : A traduit le prédicat « ne pas avoir plusieurs côté », B le prédicat « ne pas être un polygone », r est un lettre de constante pour « le rectangle ». La justification donnée par Loïc prend alors la forme suivante $[A(r) \wedge (\forall x A(x) \Rightarrow B(x))] \Rightarrow B(r)$. La déduction de Loïc est modifiée comme ceci :

> Prémisses : $\forall x A(x) \Rightarrow B(x)$
>
> Règle de déduction : Instanciation universelle (choix de la lettre *r*)
>
> Conclusion : $A(r) \Rightarrow B(r)$
>
> Prémisses : $A(r) \Rightarrow B(r)$, *A(r)*
>
> Règle de déduction : modus ponens
>
> Conclusion : *B(r)*

Cette variante quantifiée ne rend pas mieux compte des interventions 145 à 153 puisque ces interventions ne concernent pas la forme de l'argument mais les propriétés du rectangle. Pour être plus précis, dans cette modélisation le choix de la lettre *r* lors de l'instanciation universelle est un choix de lettre et pas un choix d'objet. Ce choix est fait parce que le joueur (de la modélisation) souhaite utiliser la forme de l'énoncé *A(r)* (« le rectangle n'a pas plusieurs côtés ») enfin d'appliquer la règle du modus ponens, non pas parce qu'il souhaite utiliser le fait que le rectangle n'a pas plusieurs côtés. Or le dialogue qui suit la justification de Loïc ne concerne pas la forme des énoncés mais les propriétés des rectangles dessinés.

Même si les modélisations précédentes ne permettent pas d'intégrer les interrogations des élèves et de l'enseignant sur les propriétés du rectangle et du cube qui sont en jeu, elles permettent de mettre en évidence la contradiction dans la structure des jeux de langage. Le fait que le rectangle ait, ou n'ait pas, la propriété d'avoir plusieurs côtés semble jouer le rôle de ce que Wittgenstein appelle des *convictions inébranlables* :

> Et maintenant si je disais : « c'est ma conviction inébranlable que, etc », cela veut dire, dans le cas présent aussi, que je ne suis pas parvenu à cette conviction consciemment en suivant un processus de pensée déterminé, mais qu'elle est à point ancrée dans toutes mes questions et réponses que je ne peux pas y toucher. (Wittgenstein, 1976, §103)

Modélisation en termes de jeux d'extérieur quantifiés :

La modélisation en termes de jeux d'extérieur permet d'intégrer les questionnements des interlocuteurs sur les propriétés des objets. Elle consiste à interpréter les symboles déjà utilisés ci-dessus dans un domaine d'objets qui peut-être ici constitué des objets de la géométrie à la fois plane et de l'espace. De ce point de vue, l'assertion *A(r)* n'est plus vu comme un axiome ou une prémisse a priori de la déduction. Elle résulte d'une décision du locuteur qui résulte d'une interaction avec le milieu, elle est discutable. La modélisation de la déduction de Loïc est modifiée de la manière suivante :

Prémisses : $\forall x A(x) \Rightarrow B(x)$

Règle de déduction : Instanciation universelle (choix d'un objet du domaine d'objets)

Conclusion : $A(r) \Rightarrow B(r)$

Prémisses : $A(r) \Rightarrow B(r)$

Décision issue d'une interaction avec le milieu : *A(r)*

Règle de déduction : modus ponens

Conclusion : *B(r)*

Les interventions 146 à 153 peuvent être comprises comme une remise en cause d'une décision individuelle intervenant dans le raisonnement. Le fait que les objets et les décisions des individus interviennent dans le raisonnement permet d'expliquer à l'intérieur de la modélisation les discussions des interlocuteurs autrement que par la remise en cause du caractère valide du raisonnement de Loïc. Il reste maintenant aux élèves à parvenir à dépasser les paradoxes sémantiques associés au mot « côté » ce qui s'accompagne de la construction de jeux de langage partagés et spécifiques aux usages géométriques.

Deuxième exemple. Au fil de l'explicitation et de la mise en confrontation des significations contradictoires assignées par les élèves au mot « côté », ceux-ci reviennent progressivement sur leurs positions respectives en les modifiant sous la pression des arguments de la partie adverse. Autrement dit les *convictions inébranlables* finissent par s'ébranler. L'élève initiateur de la position selon laquelle le « côté » dénoterait une face de solide consent à réserver le mot « arête » aux solides et nomme « droites » les côtés des figures planes (annexe 6, 308). Pour lui, la face est désormais le côté des solides – autrement dit selon l'usage orthodoxe de la géométrie, la face – qui se présente devant lui (annexe 6, 315). L’élève adepte de la position associant le mot « côté » aux segments délimitant une surface ou un volume refuse la thèse selon laquelle les objets changeraient de nom selon la façon dont on les regarde. L’enseignant résume les positions de chacun, sans les départager. Un élève dit alors "avoir compris" :

> « 354. Damien : Ah si j’ai compris ! (il désigne le mur de la classe devant lui) (…) Tout ce mur là c’est comme une figure plane et là-bas (il désigne le coin du mur) c’est bien un côté.
>
> 355. P. : Si on prend le mur, effectivement, tu as une figure plane. Là, on est d’accord.
>
> 356. Ensemble : Ouais.
>
> 357. P. : Le concept de figure plane est établi.
>
> (Damien se lève.)
>
> 358. Damien : Là, c’est un côté
>
> 359. Ensemble : C’est une arête !
>
> 360. Damien : Vous, vous dites que y’a que ça, et ben là, c’est le côté droit de la figure plane.
>
> 361. Loïc : Ça veut dire que ça (le rectangle dessiné au tableau) c’est un polygone, ça !? »
>
> (Annexe 6)

A nouveau, il est question de plusieurs décisions concernant les objets de la situation. D’abord, un premier jeu de décision est engagé : il s’agit de savoir si oui ou non le mur est une figure plane. Un consensus se fait, le concept de figure plane subsume bien le mur de la classe (assertions 354 à 357). Ce jeu est un jeu d’extérieur. Un deuxième jeu de décision suit, la question est de savoir si l’objet « coin du mur » appartient bien au concept « côté ». Ces deux jeux ne font intervenir aucune inférence. On peut néanmoins y voir la simultanéité évoquée plus haut à travers la citation de Heinzmann (2006) entre les évolutions théoriques et ontologiques puisque les élèves s’interrogent sur les rapports entre un prédicat P (outil de description) et un objet x. Loïc est alors amené à réinterroger la structure du jeu de validation précédemment étudié (premier exemple). En discuter la validité revient à remettre en cause la structure du jeu de langage qu’il employait jusque là, ce qui est un type de remise en cause plutôt exceptionnel :

> « Il y a une différence entre une erreur qui a pour ainsi dire sa place prévue dans le jeu et une infraction complète aux règles qui apparaît exceptionnellement. » (Wittgenstein, 1976, §647)

Ces deux exemples montrent l’intérêt d’une analyse qui croise les dimensions dialogique (dans le sens où l’analyse s’intéresse à ce qui structure les jeux de langage) et sémantique pour comprendre les processus de construction d’une intersubjectivité de la référence des termes. Ce qu’il me paraît intéressant de relever est le fait que ces dimensions sont étroitement imbriquées, que la dimension langagière et dialogique ne s'oppose pas aux interactions avec les objets, aux transactions intramondaines (Vernant, 2007) de l'activité de validation. Ces relations sont relevées par l'enseignant relativement tard dans la séquence. La pleine prise de conscience du paradoxe sémantique associé au mot « côté » intervient lorsque l'enseignant envoie Loïc au tableau dessiner un polygone (annexe 6, à partir de l'assertion 112). Les seules interactions langagières avait été jusque là insuffisantes. Les contradictions entre les règles d'usage des mots deviennent alors explicites. Leur confrontation dans les dialogues, accompagnée de manipulations d'objets et de décisions les concernant, vont permettre de dépasser les paradoxes.

Je termine ce chapitre en évoquant succinctement la situation pour le mot « forme ». L'analyse des significations assignées par les élèves au mot « forme » lors de l'activité de classement d'emballages a montré que les élèves ajustent leur rapport aux objets de la situation vers un rapport idoine au contexte spécifique de la géométrie via un changement référentiel implicite du mot « forme ». Au cours de la phase d'explicitation de leurs stratégies de classement, les élèves parlent d'abord de « forme des emballages » (annexe 5, 47). Puis, sous les contraintes d'efficacité des critères proposés, ils modifient cette dénomination pour parler de la forme des faces (« forme carrées », « formes rondes » (annexe 5, 59), « formes polygonales » (annexe 5, 113)). Ils parviennent ainsi à mettre en relation des solides à partir de la nature des faces de ces solides satisfaisant de cette manière un des objectifs de l'enseignant pour cette tâche. Les changements référentiels liés au mot « forme » se font conjointement aux changements théoriques concernant les critères de classement. L'opposition entre les concepts de « forme ronde » et de « forme carrée » (annexe 5, 59) ne semble pas permettre à la classe de classer les balles (annexe 5, 91-92) alors qu'elle semble permettre de classer « le Moine » (annexe 5, 84-86-90). L'usage du critère « sans côtés plats » semble répondre à cette difficulté (annexe 5, 102 à 105). Cependant, l'intervention de ce critère affecte aussi les références des autres critères (le prédicat « sans côtés plats » réfère à nouveau à des objets en trois dimensions). Par exemple, Loïc refuse maintenant que le prédicat « forme ronde » s'applique à « Le Moine » (annexe 5, 117), Damien souhaite qu'il s'applique aux balles (annexe 5, 120). Cette difficulté restera puisque, une fois l'usage du critère « sans côtés plats » exclu (ce qui permettra le retour de « Le Moine » parmi les « formes rondes » (annexe 5, 130)), le classement des balles restera problématique (annexe 5, 132-133). Concernant le mot « forme » et ses déclinaisons, l'ambiguïté concernant la référence persistera tout au long de l'activité et ceci malgré l'émergence d'autres critères (forme arrondies (annexe 5, 128-129), formes ovales (annexe 5, 94-96), formes polygonales (annexe 5, 112-113), …). A la différence du mot « côté », la construction de co-références pour le mot « forme » ne semble pas dans ce cas pouvoir se faire (annexe 5, 132-133, 141). Le mot « côté » constitue ce que Quine appelle un *mot ambigu*, c'est-à-dire « associé par conditionnement à deux classes très dissemblables de stimulations, chacune de ces classes étant une classe bien homogène de stimulations semblables entre elles. » (Quine, 1977, p. 192). Les paradoxes sémantiques relatifs à ce mot naissent de la coexistence de deux règles d'usage contradictoires mais bien délimitées et valides dans des *classes de stimulation* bien distinctes (tout du moins la classe de stimulation engendrée par l'usage scolaire du mot est théoriquement bien délimité). Les deux règles d'usage du mot sont alors susceptibles d'être mises en contradiction. A contrario, le mot « forme » ne jouit pas de règle d'usage clairement définie et les situations dans lesquelles il intervient ne sont pas *bien homogènes* et *très dissemblables* en tout cas dans l'activité qui est étudiée.

L'objet de ce chapitre était de montrer la pertinence d'une approche dialogique des assertions mathématiques puisque cette approche sera utilisée dans la deuxième partie. L'étude du corpus de Mathé (2006) a permis de montrer l'existence de paradoxes sémantiques dans le langage ordinaire. L'approche dialogique, qui consiste à rechercher la fonction dialogique des assertions à l'intérieur d'un jeu de langage, en permet une étude explicite. L'insuffisance de l'explicitation langagière comme levier pour les apprentissages est au cœur de la théorie des situations didactiques de Brousseau. J'ai explicité la proximité de cette théorie avec les philosophies de Quine et de Wittgenstein qui sont marquées par l'anthropologie et la critique de l'illusion d'une notion de signification transcendant les usages. En quelque sorte, ces auteurs partagent le point de vue selon lequel l'action est au fondement des apprentissages. Le travail expérimental autour des termes « côté » et « forme » a mis en évidence une dialectique entre l'action langagière (la mise en place d'un vocabulaire, l'explication et l'argumentation à l'intérieur d'un dialogue) et l'action sur un milieu (en particulier les objets auxquels les termes se réfèrent) dans l'émergence de la prise en compte des paradoxes sémantiques, puis dans le cas du terme « côté » de leur dépassement.

3. UNE DISCUSSION AUTOUR DES MODELES DE DUVAL ET DE TOULMIN

> « To look at proof from a mathematical or a psychological perspective, or from a logical or socio-linguistic perspective, may lead to different statements, but what is important then is to relate these differences so as to explain the nature of proof in order to keep the integrity of the object we study (which is what it is, despite the variety of the lights theories and ideologies shade on it…) and to ensure the practical relevance of research. Currently, the situation of our field of research is quite confusing, with profound differences in the ways to understand what is a mathematical proof within a teaching – learning *problématique* but differences which remain unstated. » (Balacheff, 2008, p. 501)[24]

Le type de travail réalisé dans cette thèse, en particulier ses références philosophiques et logiques, est plutôt exotique dans la communauté de recherche en didactique des mathématiques. Il parait donc important de le situer par rapport aux perspectives établies afin de parvenir à mieux comprendre les origines des désaccords. Ce chapitre est un essai de réponse partielle à cet objectif puisqu'il engage une comparaison des possibilités de modélisations que permettent différentes approches. Je me suis néanmoins restreint à une comparaison avec les modèles de Duval et de Toulmin. Le choix du modèle de Duval provient de son importance institutionnelle dans le champ de l'analyse didactique de l'argumentation et de la preuve en France et au-delà, celui du modèle de Toulmin de la parution de plusieurs articles récents y faisant référence. La discussion se fera autour de l'idée selon laquelle il y aurait une rupture en mathématique entre l'activité d'argumentation et l'activité de preuve. Je considère comme acquis le fait que cette idée est dominante dans l'institution scolaire en France. L'objectif principal de ce chapitre est de montrer que cette idée de rupture, que je pense être infondée ou au moins surévaluée, est issue de l'insuffisance du calcul des propositions (sur lequel est explicitement construit le modèle de Duval et implicitement celui de Toulmin) pour l'analyse de l'activité de validation en mathématiques. Je présente les raisons pour lesquelles la perspective de cette thèse et celle offerte par Duval

[24] « Regarder une preuve dans une perspective mathématique ou psychologique, ou dans une perspective logique ou socio-linguistique, peut conduire à des affirmations différentes, mais pour garder l'intégrité de notre objet d'étude (qui est tel qu'il est, malgré la variété des éclairages théoriques et idéologiques…), ce qui est alors important est de les rapprocher de manière à expliquer la nature de la preuve et à assurer la pertinence pratique de la recherche. En ce moment, la situation dans notre champ de recherche est assez confuse, avec des différences profondes dans la façon de comprendre ce qu'est une preuve mathématique à l'intérieur d'une problématique d'enseignement – apprentissage, des différences qui restent cependant tacites. » (ma traduction)

s'opposent sur la question des relations entre la démonstration et la preuve. Le contenu de ce chapitre est inspiré d'un texte collectif présenté lors du colloque CERME 6 (Barrier, Mathé & Durand-Guerrier, 2009).

3.1 Argumentation et démonstration : la prégnance de l'idée de rupture

Je commence par présenter ce que j'entends par « la prégnance » de l'idée d'une rupture entre l'argumentation et la preuve. L'importance de ce thème provient des effets importants que cette conception peut avoir dans les classes de mathématiques :

> « Cependant, si tout le monde est d'accord pour admettre cette différence, les avis divergent très vite lorsqu'il s'agit d'évaluer la distance cognitive que cette différence recouvre. Peut-on, oui ou non, passer de l'une à l'autre, sans trop de coût et sans contre-sens ? On voit tout de suite l'enjeu d'une telle question pour l'apprentissage.
>
> […]
>
> Répondre non, c'est admettre une rupture entre les fonctionnements cognitifs de l'argumentation et les raisonnements en jeu dans une démonstration : la pratique de l'argumentation ne pourrait que maintenir ou renforcer les écrans et les méprises sur ce qu'est une démonstration, car son fonctionnement discursif va à l'encontre du fonctionnement d'un raisonnement valide en langue naturelle. » (Duval, 1992, p. 43)

La volonté de prendre en compte cette rupture entre les fonctionnements cognitifs de l'argumentation et de la démonstration explique certainement les pratiques d'une partie importante des enseignants du secondaire, lesquels mettent particulièrement en avant les aspects formels de la démonstration. Un exemple bien connu est celui de la structuration des preuves selon le schéma ternaire « je sais que », « or », « donc » où le jeu de preuve est réduit à la recherche de la bonne organisation des propositions (il s'agit donc de manière très claire d'un jeu d'intérieur) et où l'accent est mis sur la distinction entre ce travail et celui sur le contenu des propositions. La thèse de Kouki (2008) à propos de l'enseignement des équations, des inéquations et des fonctions relate ce phénomène de prévalence des pratiques formelles dans l'enseignement tunisien. Du point de vue de l'enseignement, une étude auprès de six enseignants du secondaire montre que ceux-ci privilégient (cinq enseignants sur six) les méthodes syntaxiques de résolutions (dans le vocabulaire de cette thèse les jeux d'intérieur).

D’autre part, Kouki a proposé un questionnaire à cent quarante trois élèves de lycée ou de classe préparatoire. Voici un extrait de la conclusion de ces analyses :

> « Les élèves mobilisent des techniques syntaxiques de résolution dès qu’elles sont disponibles. […] Dans le cas de certains types de tâches qui ne se résolvent pas par des techniques syntaxiques du registre algébrique mais qui font appel à un point de vue sémantique qui consiste à l’interpréter dans un registre graphique, nous remarquons que les élèves qui mobilisent prioritairement des techniques syntaxiques ne donnent le plus souvent pas de réponses. » (Kouki, 2008, p. 264)

L’analyse de la situation d’enseignement qu’il a proposée dans le cadre de sa recherche confirme sur le plan qualitatif les résultats des analyses statistiques des questionnaires : le travail sémantique, l’interprétation numérique ou graphique, qui sont des éléments importants du travail informel, sont souvent exclus de la pratique mathématique. Dans le premier chapitre de cette première partie, j’ai donné deux exemples de la tendance des étudiants d’université à favoriser les jeux d’intérieur au détriment des jeux d’extérieur. Le premier exemple est issu de Alcock et Weber (2005). Il concerne l’analyse par des étudiants d’un argument justifiant la divergence de la suite $\sqrt{n}$. Le second est emprunté à Segal (2000) et concerne l’évaluation par des étudiants d’argument expliquant pourquoi le produit de deux matrices diagonales est lui-même diagonal. Je ne reviens pas sur ces exemples. Je place, en accord avec Duval (j’y reviendrai plus loin), les jeux d’extérieur dans le domaine de l’argumentation du fait de la manipulation d’objets particuliers. Ces deux exemples peuvent donc être vus comme illustrant également « la prégnance de l’idée d’une rupture entre l’argumentation et la preuve ». Je termine ce paragraphe en développant un exemple qui concerne l’enseignement secondaire français. Cet exemple, qui sera repris dans la deuxième partie, montre comment cette idée de rupture est intégrée dans les pratiques des élèves.

Exemple. Cet exemple s’appuie sur le corpus de thèse de Battie (2003). L’extrait que j’utilise ici correspond à la transcription des débats d’un groupe de trois élèves de terminale scientifique (option mathématiques) à propos d’une question d’arithmétique. La situation de cet extrait à l’intérieur de l’expérimentation de Battie sera détaillée dans la deuxième partie (chapitre 2). Le jeu que les élèves engagent est structuré à partir de l’énoncé suivant $\forall a \forall b (p\text{gcd}(a,b)=1) \Rightarrow (p\text{gcd}(a^2,b^2)=1)$, qu’ils souhaitent évaluer. Le groupe commence une argumentation construite sur des choix de couples d’entiers naturels premiers entre eux et sur l’évaluation du pgcd de leurs carrés respectifs :

0. N’oublie pas qu’on a a et b premiers entre eux hein. a^2 est premier à b^2 aussi.

1. Pas obligé.

2. Hum, j’en suis pas très sure.

3. Attends on va prendre un exemple. 3 est premier avec 2 donc 9 est premier avec 4.

4. Ouais mais bon…

5. J’sais pas si ça marche *inaudible*

6. **A1 :** Regarde 2 et 5 ils sont premiers entre eux. Non, j’ai rien dit.

(Rires)

7. 9 t’as qu’à prendre 9, 9 et 17. Mais moi j’connais pas le carré de 17.

8. **A1 :** J’ai une calculatrice (en rigolant).

9. Vas-y fais, fais 17 au carré divisé par 9 au par 81.

10. **A1 :** Oui mais c’est deux nombres premiers faudrait prendre/

11. Oui ben c’est ce qu’on a dit, on a dit des nombres premiers.

12. Entre eux.

13. **A :** Mais non ! Premiers entre eux pas premiers Ah ouais d’accord.

14. **A1 :** 4^2 et j’sais pas et euh/

15. J’sais pas prends 15 et euh 15 et ?

16. **A :** 15 et 4 j’ai mis.

17. Ben c’est pareil.

18. **A :** Ou 125 et 16. Ils sont premiers entre eux.

19. J’en sais rien moi.

(Rires)

20. Tu mets 125 divisé par 16 tu verras bien… Non c’est pas comme ça qu’on fait. 16 par 16 c’est 4 2, 2 fois 2/

21. **A :** Non moi j’crois qu’ils sont premiers entre eux, 16 et 125.

22. Ouais quand on met les trucs au carré/

23. **A :** Ouais mais on sait pas, c’est pas écrit dans le cours mais on peut pas le démontrer dans le cas général /

Les jeux qui sont mis en œuvre ici sont des jeux d’extérieur. Les élèves argumentent afin de déterminer la validité de l’assertion (0). Plusieurs parties sont effectuées. En (20), un élève entreprend une décomposition en facteur premier de 16. Son objectif semble être de déterminer les facteurs communs de 16 et 125 afin de dégager le *pgcd* de ces nombres. Cette action pourrait être utilisée pour faire émerger une preuve puisqu’une telle décomposition « montre » que les facteurs premiers d’un entier naturel et de son carré sont les mêmes, que si deux entiers naturels n’ont pas de facteurs premiers en commun, leur carré non plus. La tentative de décomposition en facteurs premiers (20) contraste avec l'assertion de *A* en (23). Il semble que *A*, reflétant la culture scolaire autour de la preuve, ignore par principe la possibilité d'utiliser (20) pour construire une stratégie de preuve à l'intérieur d'un jeu d'intérieur cette fois. Dans cet extrait, les élèves agissent comme si les argumentations construites sur des choix d'objets (les jeux d'extérieur) et la recherche d'une preuve formelle (les jeux d'intérieur) étaient deux activités disjointes et indépendantes, comme si il y avait une rupture entre ces deux activités.

Je vais maintenant présenter puis critiquer les modèles de Duval et de Toulmin qui sont tout deux fréquemment utilisés en didactique des mathématiques dans les études sur la validation (par exemple, Mathé (2006), Tanguay (2005), Inglis & al. (2007), Pedemonte (2007, 2008)). Ma position est que l'usage des propositions (au sens du calcul des propositions, par opposition au calcul des prédicats) comme l'élément de base de la modélisation conduit à surestimer la pertinence de cette idée de rupture qui est fortement ancrée dans l'institution scolaire. En particulier, je pense que la prise en compte des objets mathématiques, au sens de la distinction de Frege introduite dans le précédent chapitre entre objet et concept, et de la quantification dans l'analyse didactique permet une approche différente des processus de validation en mathématiques, une approche qui soit plus en phase avec la pratique des mathématiciens experts.

3.2 Présentation succincte des modèles des Duval et de Toulmin

Je commence par le modèle de Duval en utilisant la présentation que Balacheff en fait :

> « Deductive reasoning holds two characteristics, which oppose it to argumentation. First, it is based on the operational value of statements and not on their epistemic value (the belief which may be attached to them). Second, the development of a deductive reasoning relies on the possibility of chaining the elementary deductive steps, whereas argumentation relies on the reinterpretation or the accumulation of arguments from different points of view. (Following Duval 1991, esp. p. 240–241). » (Balacheff, 2008, p.509)[25]

[25] « Le raisonnement déductif possède deux caractéristiques, qui s'opposent à l'argumentation. D'abord, il est construit sur la valeur opérationnelle des énoncés et non sur leur valeur épistémique (les croyances qui peuvent y être attachées). Deuxièmement, la construction d'un raisonnement déductif repose sur la possibilité d'enchaîner les pas de déduction élémentaires, alors que

Duval insiste fréquemment sur le fait que seule l'argumentation s'appuie sur le contenu des propositions alors que ce qui compte dans une preuve est leur statut opératoire, selon lui la façon dont les propositions s'insèrent dans la structure formelle du modus ponens :

> « Cela introduit une première différence importante entre le raisonnement déductif et le raisonnement argumentatif. Celui-ci recourt à des règles implicites qui relèvent en partie de la structure de la langue, et en partie des représentations des interlocuteurs: le contenu sémantique de propositions y est donc primordial. Au contraire, dans un pas de déduction, les propositions n'interviennent pas directement en fonction de leur **contenu** mais en fonction de leur **statut opératoire**, c'est dire de la place qui leur est préalablement assignée dans le fonctionnement du pas. » (Duval, 1991, p. 235)

Il s'appuie en particulier sur cet argument pour défendre l'idée que la preuve et l'argumentation mettent en jeu des processus cognitifs très différents. Comme le fait remarquer Balacheff :

> « One can imagine how this should raise question in our field considering that other researchers give a central role to ''mathematical arguments'' and ''mathematical argumentation'' in their consideration of what proof is. » (Balacheff, 2008, p. 509)[26]

Récemment, le modèle de Toulmin a été utilisé dans plusieurs travaux qui s'intéressent au raisonnement mathématique (Inglis & al. (2007), Jahnke (2008), Pedemonte (2007, 2008)). Voici par exemple comment Pedemonte (2008, p. 387) présente le modèle de Toulmin restreint :

> « In Toulmin's model an argument consists of three elements (Toulmin, 1993):
>
> C (claim): the statement of the speaker.
>
> D (data): data justifying claim C.
>
> W (warrant): the inference rule, which allows data to be connected to the claim.
>
> In any argument the first step is expressed by a standpoint (an assertion, an opinion). In Toulmin's terminology the standpoint is called the claim. The second step consists of the production of data supporting the claim. The warrant provides the justification for using the data conceived as a support for the data-claim

---

l'argumentation repose sur la réinterprétation ou l'accumulation des arguments issus de différents points de vue. (d'après Duval, 1991, en particulier p. 240-241) » (ma traduction)

[26] « On peut imaginer comment cela devrait faire naître des questions dans notre champ de recherche quand d'autres chercheurs donne un rôle central aux « arguments mathématiques » et à « l'argumentation mathématiques » dans leur considération sur ce qu'est une preuve. » (ma traduction)

relationships. The warrant, which can be expressed as a principle, or a rule, acts as a bridge between the data and the claim. » (Pedemonte, 2008, p. 387)[27]

Le modèle est utilisé autant pour analyser des productions d'arguments mathématiques que des productions de preuves (au sens de Duval cette fois). En particulier, Pedemonte se sert de ce modèle afin de comparer les relations entre l'argumentation et la preuve. Il faut donc regarder le triplet (C, D, W) comme plus inclusif que la structure ternaire du modus ponens (A, $A \rightarrow B$, B) que Duval utilise pour analyser les démonstrations dans le sens où la justification [*warrant*] du modèle de Toulmin n'est pas nécessairement ni une implication, ni un théorème. Néanmoins, un point commun à ces deux modèles est d'utiliser comme éléments de base de la modélisation la proposition au sens du calcul des propositions. Les objets mathématiques et la quantification ne sont pas explicitement pris en compte dans la structure du modèle. Je montre maintenant un exemple d'utilisation d'une théorie de la quantification dans une analyse d'une validation dans le langage naturel.

3.3 Un exemple d'analyse s'appuyant sur une théorie de la quantification

Récemment, plusieurs propositions d'usages de théories du premier ordre ont été faites pour contribuer à l'analyse du raisonnement mathématique. Je pense en particulier à la logique naturelle dans Durand-Guerrier & Arsac (2003, 2005) pour travailler sur le raisonnement en analyse, à la sémantique de Tarski (1972) dans Durand-Guerrier (2008) pour formaliser les processus d'aller-retour entre le travail sur les objets et la construction

---

[27] « Dans le modèle de Toulmin un argument consiste en trois éléments (Toulmin, 1993) :

C (l'assertion [*claim*]) : l'énoncé soutenu par le locuteur.

D (les données [*data*]) : les données justifiant l'assertion C.

W (la justification [*warrant*]) : la règle d'inférence, qui permet de connecter l'assertion avec les données.

Dans tout argument, la première étape s'exprime à travers un point de vue (une assertion, une opinion). Dans la terminologie de Toulmin, ce point de vue est appelé l'assertion [*claim*]. La seconde étape consiste en la production de données [*data*] supportant l'assertion [*claim*]. La justification [*warrant*] fournit une garantie pour l'usage des données [*data*] comprises comme un support pour les relations données-assertion. La justification [*warrant*], qui peut être exprimée comme un principe, ou une règle, fonctionne comme un pont entre les données [*data*] et l'assertion [*claim*]. » (ma traduction) théorique, la logique dialogique de Lorenzen et la sémantique des jeux de Hintikka dans Barrier (2008) qui sera le point de vue développé dans la seconde partie de cette thèse. L'ambition de ces théories est de rendre possible la prise en compte de l'articulation entre les aspects sémantique et syntaxique dans les activités de validation. Duval restreint ses analyses des pas de raisonnement aux possibilités offertes par le calcul propositionnel. Il est même plus restrictif puisqu'il identifie un pas de déduction à l'application du modus ponens. Il affirme par exemple :

> « Le fonctionnement d'un pas de déduction est bien connu. Il est défini par la règle fondamentale du modus ponens, appelée encore règle de détachement. » (Duval, 1992, p. 43)

Durand-Guerrier & Arsac (2005, p. 151-152) ont montré l'insuffisance de ce point de vue pour l'analyse des preuves dans le cas de l'analyse. Ce modèle ne permet pas de rendre compte des démonstrations où la quantification joue un rôle important (voir la troisième partie de la thèse). En particulier, le modus ponens ne permet pas de rendre compte de l'introduction et de la suppression des variables. D'autre part, la règle du modus ponens ne parvient pas à elle seule à épuiser le calcul des propositions dans le sens où d'autres règles de déduction sont nécessaires. Par exemple, je ne vois pas comment montrer qu'un triangle dont les côtés mesurent 3, 4 et 5,5 cm n'est pas rectangle à partir du théorème de Pythagore sans utiliser à un moment ou à un autre la règle du modus tollens[28] ou quelque chose d'équivalent. Pour autant, le pas de déduction issu de la règle de détachement (autre nom du modus ponens) est central dans l'apprentissage de la démonstration au collège et mérite certainement une attention particulière. Cette discussion n'a pas pour objectif de remettre en cause l'importance didactique de traiter cette règle spécifiquement, d'autant plus dans un contexte (l'apprentissage de la démonstration au collège à partir de la géométrie) qui n'est pas celui de ce travail. Elle se concentrera plutôt sur les effets théoriques de cette réduction puisqu'il me semble que ceux-ci vont au-delà du contexte d'où ils proviennent. Le premier de ces effets de la restriction du modèle au calcul des propositions est la surestimation de la distinction entre démonstration et argumentation. En guise d'exemple, je reprends l'analyse que Duval (1992, p. 44-45) fait d'un texte de Sartre (*Les Mains Sales*) puisqu'il se sert de cette analyse pour marquer la rupture discutée dans ce chapitre. Voici le passage qu'il analyse :

> Jessica : Hugo ! Tu parles contre ton cœur. Je t'ai regardé pendant que tu discutais avec Hoerderer :

[28] La règle du Modus Tollens permet de déduire des prémisses $\neg b$ et $a \rightarrow b$ la conclusion $\neg a$.

0. il t’as convaincu.

Hugo : 1. Il ne m’a pas convaincu.

2. Personne ne peut me convaincre qu’(on doit mentir aux camarades).

3a. Mais s’il m’avait convaincu.

3b. ce serait une raison de plus pour le descendre.

4. Parce que ça prouverait qu’il en convaincra d’autres.

Selon Duval cette argumentation fait intervenir le pas de déduction suivant :

Prémisse : S’il m’avait convaincu

Enoncé - Tiers : Personne ne peut me convaincre qu’on doit…

Conclusion : (ça prouverait qu’) il en convaincra d’autres

Cette modélisation de l’argumentation amène Duval à dégager des différences fondamentales entre l’argumentation et la preuve puisque le pas d’argumentation tel qu’il est modélisé est sensiblement différent d’un pas de preuve reposant sur le modus ponens. Ces différences sont résumées par Balacheff dans la citation ci-dessus. Je ne les détaille pas puisque je remets en cause leur fondement. Pour interroger ce modèle et surtout les conclusions qui découlent de la modélisation, je propose une interprétation alternative de ce passage en utilisant les outils du calcul des prédicats. Cette modélisation est construite à partir des règles de la déduction naturelle dont on peut trouver une présentation dans Durand-Guerrier & Arsac (2003, 2005) et dans la premier chapitre de la troisième partie de cette thèse. Il s’agit d’un choix pragmatique, la déduction naturelle étant assez proche de la manière habituelle de raisonner des mathématiciens. L’usage d’autres systèmes de déduction du premier ordre aurait aussi pu convenir. Je note xCy l’affirmation selon laquelle « x a convaincu y ». Le premier pas du raisonnement de Hugo peut alors s’interpréter de la manière suivante :

Donnée : $\forall x \neg(xCHugo)$ (2)

Règle d’inférence : instanciation universelle

Conclusion : $\neg(HoedererCHugo)$ (1)

Pour la suite du raisonnement, je laisse de côté l’affirmation (3b) et j’identifie l’affirmation (4) avec «il en convaincra d’autres ». En effet, (3b) et le « parce que ça prouverait » me paraissent faire partie du métalangage, du discours sur la preuve, et non de la preuve elle-même. La modélisation se poursuit de la manière suivante :

Données : $HoedererCHugo$ (3a)

Règle d'inférence : généralisation existentielle

Conclusion : $\exists xHoedererCx$

Données : $\exists xHoedererCx$ (recyclage)

$\exists xHoedererCx \rightarrow \exists x\exists y(x \neq y) \wedge HoedererCx \wedge HodererCy$ *

(Axiome implicite)

Règle d'inférence : modus ponens

Conclusion : $\exists x\exists y(x \neq y) \wedge HoedererCx \wedge HodererCy$ (4)

La modélisation proposée fait intervenir un axiome implicite (*) (si Hoederer est capable de convaincre une personne, alors il est capable de convaincre au moins deux personnes) sans lequel la déduction de $HoedererCHugo$ à $\exists x\exists y(x \neq y) \wedge HoedererCx \wedge HodererCy$ qui comporte deux pas, serait invalide. Il faut donc en quelque sorte compléter le raisonnement en allant au-delà de ce qui est dit si l'on veut le rendre logiquement valide. Dans cet extrait, on ne sait pas si le théorème implicite utilisé fait partie d'un ensemble d'énoncés conjointement admis par Hugo et Jessica. On ne sait pas non plus s'il n'en fait pas partie. Cependant, ce type de complétion n'est pas une exclusivité de l'argumentation. En mathématiques, les preuves pleinement explicitées sur le plan logique sont illisibles car beaucoup trop longues. Les démonstrations mathématiques font aussi appel à l'implicite, cet appel est même indispensable à la communication. Je l'ai déjà évoqué dans le premier chapitre de cette partie à partir de l'article de Weber (2008) et de l'intervention du mathématicien *Math. B.* Mettre à jour la structure logique des arguments est par exemple ce que Frege (1967) entreprend de faire pour l'arithmétique mais il reconnaît lui-même que ce n'est pas le travail habituel des mathématiciens :

> « It is easy to make a proof look short on the paper by skipping over many intermediate links in the chain of inference and merely indicating large parts of it. Generally people are satisfied if every step in the proof is evidently correct, and this is permissible if one merely wishes to be persuaded that the proposition to be proved is true. But if it is a matter of gaining an insight into the nature of this 'being evident', this procedure does not suffice; we must put down all of the intermediate steps, that the full light of consciousness may fall upon them. Mathematicians generally are indeed only concerned with the content of a proposition and with the fact it is to be proved. What is new in this book is not the content of the proposition, but the way in which the proof is carried out and the

foundations on which it rests. » (Frege, 1967, p. 5-6)[29]

Je suis convaincu de l'intérêt de l'apport de Frege au développement de la philosophie, de la logique et surtout au développement des mathématiques. Il est néanmoins clair que la pratique mathématique ne peut pas être identifiée avec ce que fait Frege dans *The Basic Laws of Arithmetic*. La démonstration mathématique, comme l'argumentation, fait le plus souvent appel à de nombreux implicites. Une question importante qu'il reste à aborder est celle du rapport de la preuve au contenu des propositions. Dans l'exemple abordé, la modélisation s'est construite sur l'usage d'un axiome implicite pour compléter l'analyse formelle du raisonnement. Cet axiome est lié à une certaine idée que l'on peut se faire à propos des objets du domaine d'interprétation (ici, les êtres humains), ce que Duval appelle le contenu sémantique des propositions. En particulier, l'axiome implicite (*) est fondé sur l'idée que les êtres humains forment un ensemble relativement homogène du point de vue de la capacité de Hoederer à les convaincre. Le prochain paragraphe a pour objectif de montrer que le contenu des propositions intervient également dans la construction des preuves.

3.4 A propos du contenu des propositions

Ce paragraphe revient sur quelque chose qui a déjà été abordé dans cette partie : la complémentarité dialectique des jeux d'extérieur et des jeux d'intérieur dans les processus de construction de preuve. Cette complémentarité est incompatible avec l'idée d'une rupture entre les processus argumentatifs et démonstratifs. Je propose un nouvel exemple, construit à partir d'une expérimentation de Inglis, Mejia-Ramos & Simpson (2007). Andrew un doctorant en mathématiques est confronté à la conjecture suivante :

Si n est parfait, alors kn est abondant pour tout $k \in IN$

---

[29] « Il est facile de donner l'apparence de la concision sur le papier à une preuve en sautant de nombreux liens intermédiaires dans la chaîne des inférences et en en indiquant seulement les grandes lignes. Généralement les gens sont satisfaits si chaque étape de la preuve est évidemment correcte, et ceci est acceptable si l'on souhaite simplement se persuader que la proposition à démontrer est vraie. Mais s'il est question d'obtenir un éclairage sur la nature de ce « évidemment correcte », cette procédure ne suffit pas. Nous devons poser toutes les étapes intermédiaires, pour en prendre conscience en pleine lumière. Les mathématiciens ne sont en effet généralement seulement concernés que par le contenu d'une proposition et par le fait qui est à démontrer. Ce qui est nouveau dans ce livre n'est pas le contenu des propositions, mais la manière dont la preuve est menée et les fondations sur laquelle elle repose. » (ma traduction)

Un entier naturel n est un nombre parfait lorsque la somme des ses diviseurs vaut exactement $2n$, il est dit abondant si cette somme dépasse strictement $2n$. Voici un extrait de l'interview de Andrew (Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007, p. 15-16) :

> « ANDREW : Ok, so if n is perfect, then kn is abundant, for any k. OK, so what does it, yeah it looks, so what does it means ? Yeah, so n is perfect, an I take any p_i which divides this n, then afterwards the sum of these p_i s is $2n$. This is the definition. Yeah, ok, so actually we take kn, then obviously all kp_i divide kp, actually, we sum these and we get $2kn$. Plus, we've got also, for example, we've got k dividing this, dividing kn. So we need to add this. As far, as basically, there is no disquiet, k would be the same as this. Yeah. And, how would this one go?
>
> [LONG PAUSE]
>
> INTERVIEWER : So we've got the same problem as up here but in general ? With a… ?
>
> ANDREW : Yeah. Umm, can we find one ? Right, so I don't know. Some example.
>
> INTERVIEWER : I've got some examples for you.
>
> ANDREW : You've got examples of some perfect numbers ? OK, so 12, we've got 1 + 2 + 3 + 4 + 6, then, ok, + 12. [MUTTERS] But this is not ? OK, perfect, I wanted perfect numbers. OK, so let's say six. Yeah, and we've got divisors 2, 4, 6, 12. Plus I claim we've got also divisors. Yeah! actually it's simple because, err, because err, the argument is that we've also got 1 which is divisor, and this divisor is no longer contained here if we multiply. »[30]

Au début de l'extrait, Andrew manipule les définitions des concepts présents dans la conjecture à évaluer. Il est donc engagé dans une procédure syntaxique ou dans le vocabulaire de cette thèse, un jeu d'intérieur. Néanmoins, cette stratégie minimaliste échoue dans la tentative de construire une preuve. Il cherche alors des exemples (qui lui sont fournis par l'expérimentateur) pour commencer une procédure sémantique, un jeu d'extérieur sur les

---

[30] « ANDREW : Ok, donc si n est parfait alors kn est abondant, pour tout k. Ok, donc qu'est-ce ça, ouais on dirait, alors qu'est-ce que ça veut dire ? Ouais, alors n est parfait, et je prends chaque p_i qui divisent ce n, alors après la somme de ces p_i fait $2n$. C'est la définition. Ouais, ok, en fait on prend kn, alors évidemment tous les kp_i divisent kn, en fait, on les ajoute et on obtient $2kn$. Plus, on a aussi, par exemple, on a aussi k qui divise ça, qui divise kn. Donc on doit l'ajouter. A priori, en gros, il n'y a pas de problèmes, k serait le même que ça. Ouais. Et, comment celui-là va aller ?

[LONGUE PAUSE]

INTERVIEWER : Alors nous avons le même problème là-haut mais en général ? Avec un… ?

ANDREW : Ouais. Hum, peut-on en trouver un ? D'accord, alors je ne sais pas. Un exemple.

INTERVIEWER : J'ai des exemples pour vous.

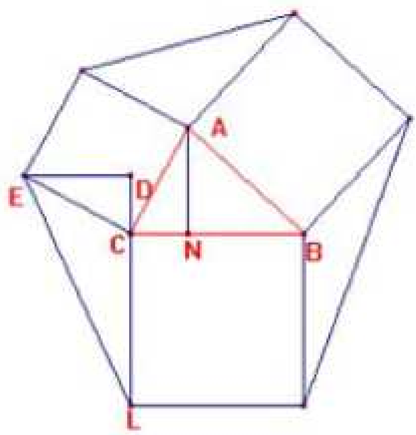
ANDREW : Vous avez des exemples de nombres parfaits ? OK, donc 12, on a 1 + 2 + 3 + 4 + 6, alors, ok, + 12. [INAUDIBLE] Mais c'est pas ? Ok, parfait, je voulais des nombres parfaits. OK, alors disons six. Ouais, et on a comme diviseurs 2, 4, 6, 12. Plus j'affirme qu'on a d'autres diviseurs. Ouais ! en fait c'est simple parce que, euh, parce que euh, l'argument c'est qu'on a aussi 1 qui divise, et ce diviseur n'est plus là lorsqu'on multiplie. » (ma traduction) objets. Comme le fait remarquer Duval, ces derniers jeux, qu'il classe du côté de l'argumentation, font croître la croyance des élèves en la validité de la conjecture (la valeur épistémique de la conjecture). Dans ce sens, ce type de jeux est cumulatif, contrairement aux jeux de preuve. Cependant, cette argumentation, en lien direct avec le contenu de la conjecture, semble être la clef de la complétion de la stratégie d'Andrew dans le précédent jeu d'intérieur. Plus précisément, la manipulation du nombre parfait 6 et de ses diviseurs lui a fourni l'argument manquant : pour tous les entiers naturels k et n, 1 est un diviseur de kn qui n'est pas le produit par k d'un diviseur de n. C'est donc en s'appuyant sur le contenu de la conjecture, en manipulant des objets mathématiques au sein d'un jeu d'extérieur, qu'Andrew est parvenu à construire une preuve, une stratégie gagnante dans un jeu d'intérieur. Pedemonte (2007, p. 32-33) relate deux exemples dans le domaine de la géométrie plane qui sont convergents avec l'exemple ci-dessus. Dans ces exemples, les jeux d'extérieur consistent en des observations de faits sur des figures. Ces jeux sont à l'origine du processus de recherche des causes de ces observations, ils permettent l'émergence des règles de la structure des jeux de preuves. Je présente ci-dessous le deuxième exemple de Pedemonte (2007). Les traductions de l'anglais sont les miennes.

L'énoncé est le suivant :

ABC is a triangle. Three exterior squares are constructed along the triangle's sides. The free points of the squares are connected, defining three more triangles. Compare the areas of these triangles with the area of the triangle ABC[31].

Voici une reproduction de la figure construite par les élèves (lesquels utilisent Cabri Géomètre) :

[31] « ABC est un triangle. Trois carrés extérieurs sont construits sur les côtés du triangle. Les points des carrés qui ne sont pas des points du triangle ABC sont connectés de manière à obtenir 3 nouveaux triangles. Comparer les aires de ces triangles avec l'aire de ABC. » (ma traduction)



Voici les extraits de l'argumentation relatés par Pedemonte :

« 103. C : The areas are always equals… With the calculator the areas are equal.

104. N : Now we have to see why!

105. C : We need to find how the base and the height change… if there is a relationship that makes the area constant… The area is constant… but I don't understand…so we have to find base by height congruent to base by height of the other triangle

106. N: If we take the constant bases and we change the heights...

[…]

115. C: But why are the heights congruent?

116. N: We have…. we see that this side is congruent to this side of triangle ABC …

117. C : Then the small triangle is congruent to the other small triangle …

118. N : … yes it's true, two sides are congruent

119. C : So there is a 90° angle

120. N: We need another side or another angle… »[32]

[32] « 103. C : Les aires sont toujours égales… Avec la calculatrice les aires sont égales.

104. N : Maintenant il faut qu'on voit pourquoi !

105. C : On a besoin de trouver comment changent la base et la hauteur… si il y a une relation qui rend l'aire constante… L'aire est constante… mais je ne comprends pas… alors il faut qu'on trouve que la base par la hauteur est égal [congruent] à la base par la hauteur dans l'autre triangle

106. N : Si on prend les bases constantes et qu'on change les hauteurs…

[…]

115. C : Mais pourquoi les hauteurs sont de même longueur [congruent] ?

116. N : On a… on voit que ce côté est égal au côté du triangle ABC.

117. C : Alors le petit triangle est isométrique [congruent] à l'autre petit triangle…

118. N : … oui c'est vrai, deux côtés sont de même longueur [congruent].

119. C : Alors il y a un angle de 90°.

120. N : On a besoin on a besoin d'un autre côté ou d'un autre angle… » (ma traduction)

Et enfin la preuve telle que les élèves l'ont écrite. Ils considèrent les triangles ABC et ELC :

We know that this base is congruent to the base of the triangle. Now we have to prove that the heights are congruent. We have verified this fact by means of the congruence criterion proved on the sheet with the drawing.[33]

Sur le papier avec le dessin :

Triangle ANC = Triangle EDC

EC = AC

EDC = ANC = 90°

ECD = ACN

because ACE = 90°, DCN = 90° and if the angle DCA is removed from the two other angles we have the same angle.[34]

Dans cet exemple, le contenu des propositions de l'énoncé est rapidement mis à contribution pour formuler la conjecture : les aires sont égales. Ensuite la démarche des élèves évolue. Il s'agit pour eux de comprendre pourquoi la conjecture est valide. Ils démarrent alors une recherche de conditions suffisantes en essayant de remonter jusqu'à une donnée de l'énoncé. A nouveau, le contenu est associé à cette démarche à travers une dialectique entre des énoncés de propositions suffisantes et des observations sur le dessin. Il est également intéressant de remarquer que comme dans la preuve de Bolzano présentée dans ce chapitre, l'organisation du produit final, la preuve écrite, est fortement influencée par le processus de construction comprenant les jeux d'extérieur.

Pedemonte (2008) s'intéresse cette fois aux relations entre argumentation et preuve dans le domaine de l'arithmétique au niveau du secondaire. On trouve à nouveau dans cet article plusieurs exemples d'articulation entre travail sur le contenu et construction d'une preuve

[33] On sait que la base est de même longueur [congruent] que la base de l'autre triangle. Maintenant nous devons prouver que les hauteurs sont de même longueur [congruent]. Nous avons vérifié ce fait à l'aide du critère d'isométrie [congruence criterion], la preuve est sur le papier avec le dessin. (ma traduction)

[34] Parce que ACE = 90°, DCN = 90° et si on ôte l'angle DCA des deux autres angles, on obtient le même angle. (ma traduction)

formelle. Je ne les développe pas. Sur le plan théorique, Pedemonte défend la pertinence d'une argumentation intégrant ce qu'elle appelle des pas d'abduction dans les processus de construction de preuve. Selon son vocabulaire, un pas d'abduction consiste en une inférence autorisant la construction d'une assertion (*claim* dans le modèle de Toulmin) à partir de faits observés (d'interactions avec les objets du domaine d'interprétation associé à l'assertion). La recherche de données (*data* dans le modèle de Toulmin) susceptibles d'être associée à une règle de justification (*warrant*) est alors seconde par rapport à la construction de l'assertion (Pedemonte, 2007, p. 29, 2008, p. 389). Les deux exemples de ce paragraphe contiennent des pas d'abduction : l'argumentation est construite à partir de l'observation d'un fait (« 6 est parfait et 12 est abondant » ou « les triangles ont même aires »), puis les élèves cherchent à expliquer ce fait en cherchant une règle de justification et des données ad hoc. Le fait de mettre en avant les pas d'abduction dans les processus de validation me paraît aller dans le sens d'une certaine continuité entre la pratique des jeux sémantiques (où il est question de faits, de relations entre objets) et celle des jeux de preuve (où il est question d'organisation des énoncés selon une structure démonstrative).

3.5 Le modèle de Toulmin complet

Dans l'article déjà cité, Inglis, Mejia-Ramos & Simpson (2007) défendent l'usage du modèle complet de Toulmin. Ce modèle complet intègre trois nouvelles catégories, le fondement B (*the backing*), le qualification modale Q (*the modal qualifier*) et la clause de rejet (*the rebuttal*). Le fondement B vient en quelque sorte soutenir la justification W (*warrant*), il explique les raisons de la validité de cette loi de passage entre les données D (*data*) et l'assertion C (*claim*). La qualification modale Q exprime le degré de croyance en l'assertion C qui est faite (la valeur épistémique dans le langage de Duval). La clause de rejet R donne les conditions pour lesquelles l'argument ne serait pas valable. Un argument prend alors la forme suivante « l'assertion C provient des données D puisque la justification W (qui peut être soutenue par le fondement B) avec la qualification modale Q à moins que R. » (Jahnke, 2008, p. 370). Inglis, Mejia-Ramos & Simpson montrent que les étudiants de leur étude expérimentale (de très bons étudiants de mathématiques, cinq préparant un doctorat et un, un master) associent l'existence de divers types de justifications W à divers qualificatifs modaux Q. Ils défendent alors l'importance des justifications inductives et intuitives dans l'activité mathématique à partir du moment où ces justifications W sont associées avec la bonne modalité Q concernant la conclusion de l'argument C. En particulier, ils mettent en avant l'intérêt pour la recherche en didactique des mathématiques d'intégrer à l'analyse les qualificatifs modaux :

> « The restricted form of Toulmin's (1958) scheme used by earlier researchers to model mathematical argumentation constrains us to think only in terms of arguments with absolute conclusions. » (Inglis & al., 2007, p. 17)[35]

Dans sa *remarque sur Toulmin*, Jahnke (2008, p. 370) reprend à son compte cette thèse. De son point de vue, il s'agit de parvenir à donner toute leur place aux phrases ouvertes en mathématiques. Le concept de phrase ouverte est un concept de la logique du premier ordre. Il est associé à celui de satisfaction, concept qui permet à Tarski (1972) d'étendre l'explication sémantique de la vérité pour le calcul des propositions (en termes de table de vérité) à la logique de la quantification par un procédé récursif (voir Durand-Guerrier (2008, p. 376-377) pour une présentation). Une phrase ouverte $P(x)$ est satisfaite par un objet a du domaine d'interprétation de la phrase ouverte si et seulement si $P(a)$ est vraie. Par exemple, le nombre 11 satisfait la phrase ouverte « x est un nombre premier », pas le nombre 4. Jahnke (2008), comme Durand-Guerrier (2008), insiste sur l'intérêt didactique d'utiliser ce type de phrase qui ne sont ni susceptibles d'être vraie, ni susceptibles d'être fausse afin d'explorer la dimension expérimentale des mathématiques.

> « Instead of simply denying the procedures of everyday thinking we should create situations in which students can make substantial experiences with checking the generality of statements. Thus, we would propose to have an interplay of empirical work and theoretical argumentation rather than telling our pupils that in mathematics we don't bother about empirical reality. » (Jahnke, 2008, p. 371)[36]

A propos de la règle (valable pour les phrases fermées où la variable est universellement quantifiée) selon laquelle un contre-exemple suffit à montrer qu'un énoncé est faux, Durand-Guerrier (2008, p. 380) affirme :

---

[35] « La forme restreinte du schème de Toulmin (1958) utilisée par de précédents chercheurs pour modéliser l'argumentation mathématique nous contraint à penser seulement les arguments avec une conclusion absolue » (ma traduction)

[36] « Plutôt que de simplement rejeter les procédures de la pensée de tous les jours nous devrions créer des situations dans lesquelles les élèves puissent faire des expériences substantielles en vérifiant la généralité des affirmations. Ainsi, nous pourrions proposer d'avoir des interactions entre le travail empirique et l'argumentation théorique plutôt que de dire à nos élèves qu'en mathématiques on ne se soucie pas de la réalité empirique » (ma traduction)

> « Of course, the equivalence between ‘‘there exists x such that not F(x)’’ and ‘‘not for all x, F(x)’’ is logically valid; however, a rigid application of this rule, independently of the mathematical context, meaning from a syntactic point of view, is not very productive in terms of developing mathematical abilities. In this perspective, it would be relevant to change this kind of situation, proposing open sentences, and asking for the largest domain for which the sentence is true. »[37]

Cette volonté de prise en compte des qualificatifs modaux dans le modèle de Toulmin me paraît révélatrice d’une difficulté rencontrée en didactique des mathématiques, celle de prendre en compte les objets mathématiques et leur manipulation dans des modèles qui sont essentiellement construit sur la logique des propositions et sur une approche syntaxique de l’activité mathématique. Certes, le modèle de Toulmin est plus général et plus souple que le modèle de Duval et il permet certainement dans une certaine mesure, que je ne prétends pas fixer, de rendre compte des interactions des élèves avec le milieu. Un des objectifs de cette thèse est dans un premier temps de souligner l’importance d’une prise en compte conceptuelle de la dimension sémantique (et dialogique) de l’activité mathématique comme par exemple Pedemonte le fait en parlant de pas d’abduction construits sur l’observation de *faits*. Pour autant dans le modèle de Toulmin, rien ne formalise si W est la justification d’un fait, de la vérité d’un énoncé (par un jeu d’extérieur qui concerne les objets mathématiques) ou si W est la justification de la validité d’un énoncé (par un jeu d’intérieur qui concerne la théorie mathématique). La question de savoir si cette distinction conceptuelle mérite une place à l’intérieur de la modélisation ou si l’on peut la traiter informellement comme je l’ai fait le plus souvent dans cette partie n’est pas résolue par les arguments de cette partie. J’apporterai néanmoins quelques éléments en faveur d’une modélisation intégrant formellement cette distinction dans la deuxième partie de la thèse.

Bien entendu, toute argumentation ne donne pas lieu à une preuve, les règles du jeu n’étant pas les mêmes dans les deux activités. Par exemple, une induction naïve en arithmétique ne facilite peut-être pas la construction d’une preuve. En géométrie en particulier, il est probable que l’écart important entre les différents registres sémiotiques renforce la difficulté du passage d’un jeu d’argumentation influencé par le dessin à un jeu de preuve. Selon Balacheff

---

[37] « Bien sûr, l’équivalence entre « il existe *x* tel que non *F(x)* » et « non pour tout *x*, *F(x)* » est logiquement valide ; cependant, une application rigide de cette règle, indépendamment du contexte mathématique, c'est-à-dire d’un point de vue syntaxique, n’est pas très productive en termes de développement des aptitudes mathématiques. Dans cette perspective, il serait pertinent de modifier ce genre de situation, en proposant des phrases ouvertes, et en demandant de chercher le domaine le plus grand dans lequel la phrase est vraie » (ma traduction)

(2008, p. 509), il est nécessaire d'avoir à l'idée cette réflexion sémiotique pour comprendre l'approche de Duval. Cependant, les pratiques enseignantes fondées sur l'hypothèse d'une rupture indépassable entre preuve et argumentation me paraissent être susceptibles de freiner les tentatives de validation par les élèves. En particulier, lorsque la validation n'est pas immédiate (j'entends par là qu'elle ne découle pas immédiatement de la manipulation des définitions des concepts impliqués dans l'énoncé de la proposition à démontrer), un travail sur le contenu des propositions est souvent nécessaire. Du point de vue de l'activité mathématique, le travail de la preuve et la familiarisation avec les objets mathématiques me semblent aller ensemble. Dans ce chapitre, j'ai essayé de montrer que l'origine des désaccords entre ce positionnement et celui de Duval se situe au niveau du type de logique utilisée dans la modélisation (propositionnelle ou prédicative).

CONCLUSION

Un des objectifs de la thèse est de souligner l'importance d'une prise en compte des dimensions sémantiques et dialogiques pour l'analyse de l'activité mathématique de validation. Cette première partie est un essai de réponse à cet objectif. Pour cela, j'ai commencé par introduire la distinction de Hintikka entre jeux d'extérieur et jeux d'intérieur. Dans les premiers, le langage est interprété dans un domaine d'objet. Les jeux d'extérieur s'intéressent à la vérité d'un énoncé à l'intérieur de la structure d'interprétation. Cette structure influe donc sur la validation à travers des choix d'objets, des actions sur ceux-ci et des décisions les concernant. Les jeux d'intérieur ont eux pour objectif de décider de la déductibilité d'un énoncé à l'intérieur d'une théorie. Ces jeux sont des jeux de manipulation sur la syntaxe des énoncés. Ils se jouent sans référence aux contenus des énoncés. J'ai ensuite montré comment l'idée de dialogue et de jeux de langage permet une prise en compte didactique de l'opacité de la référence des termes, des phénomènes d'incompréhension ou de mécompréhension. Cette approche théorique offre une vision de l'activité mathématique construite sur des théories logiques du premier ordre. L'explicitation de cet arrière plan permet de mieux comprendre certains désaccords sur les rapports entre l'argumentation et la démonstration en mathématiques. Cette première partie est donc essentiellement théorique, elle vise à proposer de « nouveaux » concepts pour analyser d'un point de vue didactique l'activité mathématique. Plus précisément, elle vise à montrer l'intérêt de faire migrer certains concepts philosophiques dans le champ didactique. Sur le plan méthodologique, j'ai fait le choix de ne pas séparer le travail expérimental du travail théorique. La présentation d'un concept est donc le plus souvent accompagnée d'un exemple d'analyse de corpus. L'objectif de ces allers et retours est de toujours montrer dans l'action les possibilités d'usage qu'offrent les concepts. Cette partie prend donc la forme d'un croisement entre des présentations d'outils théoriques (Hintikka, Quine, Wittgenstein, Frege, Duval, Toulmin) et des réinterprétations de corpus et d'analyses expérimentales (Barallobres, Weber, Alcock, Segal, Mathe, Pedemonte, Inglis). Une analyse épistémologique d'un mémoire de Bolzano vient compléter la confrontation des outils théoriques. Les résultats de cette partie sont de deux ordres. Le premier résultat concerne la conceptualisation. Il est difficilement quantifiable puisqu'il s'agit de dire que les outils proposés permettent de mieux cerner l'activité mathématique de validation alors que l'on ne dispose pas d'une définition ou d'une caractérisation univoque de l'activité mathématique. Il me semble néanmoins que l'interprétation des processus de construction de preuves comme des processus dialectiques entre des jeux d'extérieur (rendant compte des interactions avec le milieu) et des jeux d'intérieur est éclairant. Le deuxième résultat est plus circonscrit. Il s'agit d'une explication des raisons pour lesquelles certaines théories ou certains chercheurs divergent à propos de leur conception de l'argumentation et de la preuve. Je considère que ces divergences proviennent de la prise en compte ou non des objets et de la quantification dans l'analyse. Dans la deuxième partie de la thèse, je propose une démarche de modélisation pour l'activité mathématique construite à partir des travaux de Hintikka et Vernant. Cette modélisation est construite comme une formalisation des éléments avancés dans cette première partie.

PARTIE 2 : LA SEMANTIQUE SELON LA THEORIE DES JEUX, UN OUTIL POUR LA DIDACTIQUE

INTRODUCTION

Ce travail de thèse trouve son origine dans mon mémoire de DEA en philosophie des mathématiques et de la logique intitulé *fondements logiques vs. fondements cognitifs pour les mathématiques*. Le point de départ de ce mémoire est le constat suivant : au cours des deux derniers siècles, la philosophie des mathématiques s'est concentrée pour une part importante à la recherche de fondements logico-linguistiques, notamment en réaction à la philosophie kantienne. La philosophie de Bolzano développée dans la partie précédente en est un bon exemple, parmi de nombreux autres. Cependant, sans pour autant remettre en cause les apports de cette démarche, il me semble nécessaire de la compléter par une analyse de l'activité mathématique qui rende compte de celle-ci comme le produit d'un être biologique qui se situe dans le temps et dans l'espace. Mon DEA s'intéresse donc aux relations entre les fondements logiques et langagiers des mathématiques et les fondements cognitifs extra-langagiers en discutant quelques exemples. A l'intérieur de cette démarche, la sémantique selon la théorie des jeux (Hintikka & Sandu, 1997) tient une place à part dans la mesure où Hintikka entend concilier l'approche de Kant, pour qui les connaissances mathématiques se fondent sur une capacité cognitive particulière (*l'intuition a prori*), avec l'approche logico-langagière des fondements. Pour cela, il réfute le caractère sensible de la notion d'*intuition a priori*, ce qui lui permet de conserver la structure globale de l'argument kantien sans se trouver confronté aux difficultés liées au subjectivisme, difficultés décrites dans le premier chapitre de la partie précédente en référence à Bolzano. La présentation de cet héritage kantien est l'objet du premier chapitre de cette partie. J'insisterai aussi dans ce chapitre sur ses conséquences didactiques. En particulier l'analyse de la correction de la philosophie kantienne revendiquée par Hintikka contribue à expliquer le rôle central des objets et de la quantification dans les jeux d'extérieur qu'il explore. Ensuite, je me servirai de la sémantique selon la théorie des jeux pour proposer un type de modélisation pour les dialogues des élèves en situation de validation. Plus précisément, je m'appuierai sur la correction de Vernant (2007) de la sémantique GTS, *la logique dialogique de la véridicité*, dans la mesure où elle me semble mieux permettre d'intégrer les interactions avec le milieu au sein de la modélisation, en particulier leur dimension temporelle. Dans ce chapitre, l'accent sera spécifiquement mis sur l'adéquation de cette modélisation avec le positionnement épistémologique de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) à travers la notion de jeu que l'on trouve aussi bien dans le vocabulaire de Brousseau que dans celui de

Wittgenstein ou Hintikka. Ce chapitre est le chapitre central de cette partie. La modélisation mise en place permet de construire un argument assez précis en faveur d'une perspective sémantique dans l'analyse de l'activité mathématique de validation. Le chapitre suivant est consacré à la lecture que la modélisation proposée permet de faire de la dialectique entre les médias et les milieux issue des développements récents de la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard. Plus précisément, je propose une interprétation de cette dialectique au sein de la modélisation construite sur la sémantique selon la théorie des jeux. Cette interprétation permet d'étudier les relations entre la dialectique média/milieu avec la notion de contrat didactique et avec la distinction entre décision et validation (Balacheff, 1987). En conclusion, cette partie propose un type de modélisation des dialogues des élèves en situation de validation qui est évalué en fonction des possibilités d'analyses offertes. Ces possibilités d'analyses concernent d'abord la place des objets dans l'analyse didactique mais aussi la dialectique des médias et des milieux. Cette partie pose également la question des relations entre la philosophie des mathématiques, de la logique et du langage et la didactique des mathématiques.

1. LA SEMANTIQUE GTS COMME CORRECTION DE LA PHILOSOPHIE DES MATHEMATIQUES DE KANT

En guise d'introduction, je commence par un exposé rapide de la philosophie kantienne des mathématiques puisque cette explication de l'activité mathématique comme science de la construction des concepts dans l'intuition constitue le point central contre lequel se développera la philosophie des mathématiques au cours des deux derniers siècles. Pour Kant, il ne fait aucun doute que les raisonnements mathématiques sont ampliatifs, c'est-à-dire qu'il est nécessaire d'aller au-delà de la seule analyse des concepts pour établir les propositions mathématiques. De plus, les raisonnements mathématiques sont indépendants de l'expérience (au sens de l'expérimentation de laboratoire par exemple). La connaissance mathématique est qualifiée par Kant de *synthétique a priori* pour signifier ces deux caractéristiques. La philosophie kantienne va alors se donner pour objectif d'expliquer la possibilité d'une connaissance *synthétique a priori* dont l'existence est considérée comme acquise. Le raisonnement employé par Kant est qualifié de déduction transcendantale et le concept clef est celui d'intuition pure.

La philosophie transcendantale de Kant s'intéresse particulièrement au rôle de l'activité et de la construction chez les individus dans la production de connaissance. Le propre de l'argumentation transcendantale est de chercher dans les contributions des individus l'origine de la connaissance a priori. Cette méthode a pour origine ce que Kant appelle la *révolution copernicienne*. Pour pouvoir se rendre compte du fait que la Terre n'est pas le centre de l'univers, il faut avoir conscience que l'étude des corps célestes n'est pas possible autrement que par nos perceptions de ces corps. Nous disposons seulement dans cette entreprise de connaissance d'informations sur ce que nous percevons. Autrement dit, nos données sensorielles doivent être comprises comme des produits influencés par notre structure cognitive. Cette conception a une conséquence importante dans l'explication de la possibilité de la connaissance *synthétique a priori*. Kant affirme :

> « Pour connaître sûrement une chose a priori, il [le géomètre] ne devrait attribuer à cette chose que ce qu'il résultait nécessairement de ce qu'il avait mis lui-même conformément à son concept. » (Kant, 1987, B 11-12)

Pour Kant, une proposition exprimant une connaissance est de la forme « A est B » où « A » est une *chose*, « est » est la copule et « B » un *concept*. Pour pouvoir expliquer la connaissance synthétique a priori, il faut pouvoir concilier le caractère particulier de la *chose*, et le caractère indépendant de l'expérience de cette *chose*. La solution kantienne est d'affirmer que les mathématiciens mettent dans les objets particuliers et sensibles qu'ils manipulent seulement ce qui correspond au *concept*. Kant appelle cette capacité *l'intuition pure a priori*. Un exemple assez célèbre utilisé par Kant est celui de la preuve du fait que la somme des angles d'un triangle fait deux angles droits. Selon Kant, le géomètre qui cherche à produire une preuve de ce fait s'appuie sur des constructions. Il commence par se donner un triangle sur lequel travailler, puis prolonge un des côtés du triangle et trace une parallèle au côté opposé afin d'obtenir une figure qui permette, en utilisant les propriétés des angles alternes internes et externes de conclure sur la somme des angles :

> « De cette façon il arrive par une chaîne d'inférences, toujours guidé par l'intuition, à une solution parfaitement évidente et en même temps universelle de la question. » (Kant, 1987, B 745)

L'intuition dont il est question dans cette citation doit être pure et a priori pour permettre au géomètre de parvenir à une *solution universelle de la question*. Le propre de la méthode mathématique est selon Kant de recourir à l'intuition a priori, c'est-à-dire la représentation immédiate et indépendante de l'expérience d'un concept général. Dans l'exemple traité, le géomètre se représente un triangle, le prolongement d'une droite et une droite parallèle. Il faut donc s'interroger sur la nature de cette intuition pour comprendre la nature de la connaissance mathématique qui doit d'une certaine manière en refléter la structure. La question est donc la suivante : quels sont les moyens qui nous permettent de saisir les objets particuliers ? Pour Kant le seul moyen d'accéder à la connaissance des particuliers est celui de la médiation de la sensibilité. La connaissance mathématique est donc influencée par la structure de cette sensibilité, la forme de la sensibilité dans le vocabulaire utilisé par Kant :

> « Donc la seule manière qui permette à mon intuition de précéder la réalité de l'objet et d'avoir lieu comme connaissance a priori, c'est qu'elle ne contienne rien d'autre que la forme de la sensibilité, forme qui, dans ma subjectivité, précède toutes les impressions réelles grâce auxquelles je suis affecté par des objets » (Kant, 1986, p. 9)

Cette référence à la sensibilité explique pourquoi Kant affirme que les mathématiques reflètent la structure de notre sensibilité, plus précisément pourquoi il affirme que la géométrie reflète la structure de notre sensibilité externe (selon Kant, celle de l'espace) et que l'arithmétique reflète la structure de notre sensibilité interne (toujours selon Kant, celle du temps). Si nos concepts mathématiques ne sont pas nécessairement spatiaux ou temporels, toute intuition a priori est spatiale et temporelle. Il n'est pas nécessaire ici de rentrer dans le détail de la philosophie kantienne puisque la correction de Hintikka remet en cause un nombre important de concepts kantiens. Ce qui m'intéresse particulièrement est la structure de l'argument de la déduction transcendantale. Cette structure est revendiquée par Hintikka et il me semble qu'elle est un moyen pertinent d'essayer de comprendre les relations entre ce que j'ai appelé dans l'introduction de cette partie les fondements logiques et les fondements cognitifs des mathématiques.

1.1. La correction de Hintikka

Selon Kant, la méthode mathématique se caractérise, en opposition à la méthode philosophique laquelle procède par analyse de concepts, par un recours à ce qu'il appelle l'intuition pure. Le concept d'intuition est souvent compris comme une construction à travers l'imagerie mentale, comme quelque chose de non langagier, de psychologique plutôt que quelque chose logique. La tradition sémantique, dont sont issus les travaux de Hintikka, s'est construite contre l'usage de ce type d'intuition. L'interprétation de Hintikka de la notion d'intuition chez Kant, est sensiblement différente. Il affirme que l'intuition doit se comprendre à travers les règles d'instanciation de la logique du premier ordre. Son interprétation du concept d'intuition est interne au langage. Je ne traite pas de la question de savoir si cette interprétation de Kant est tenable ou non, ce problème étant finalement orthogonal aux préoccupations de cette thèse. De plus, la tâche pourrait être délicate puisque comme l'affirme Coffa l'idée de construction des concepts dans l'intuition pure est un des aspects assez confus de la philosophie de Kant :

> « The truth is that neither Kant nor his followers had any very definite idea of what that 'construction' was. » (Coffa, 1993, p. 44)[38]

Le point qui me paraît intéressant pour ce travail est le fait que Hintikka conserve la structure de la déduction transcendantale et la réinvestit au sein de sa sémantique selon la théorie des jeux. Cela montre en particulier deux choses sur lesquelles je vais revenir en détail. D'abord, Hintikka entend conserver un lien fort entre les fondements logiques et la

[38] « La vérité est que ni Kant ni ses continuateurs n'avaient d'idée vraiment bien définie de ce qu'était cette 'construction'. » (ma traduction)

pratique mathématique. Hintikka revendique le statut de reflet de la pratique mathématique pour sa sémantique GTS. Je développerai cette remarque dans le troisième paragraphe de ce chapitre. Ensuite, le fait que Hintikka se pose en continuateur (ou en correcteur) de Kant montre à quel point la quantification joue un rôle déterminant dans sa compréhension de l'activité mathématique. La notion fondamentale de son interprétation de l'intuition pure a priori kantienne est celle d'instanciation au sens de la logique du premier ordre (i.e. la logique de la quantification). Hintikka place donc les processus d'instanciation au cœur de la pratique mathématique. Je développe ce point ci-dessous.

Selon Kant, l'usage de la notion d'intuition pure a priori caractérise les mathématiques, elle permet la connaissance synthétique a priori. Selon cette acceptation, les mathématiques explorent les possibilités cognitives des êtres humains en termes d'intuitions. Ceci s'oppose, toujours selon Kant, à la logique qui elle explore les possibilités de pensées. La géométrie, par exemple, scrute notre propre structure de la perception visuelle. Elle se préoccupe des possibilités d'intuition de la perception humaine. Ceci explique l'engagement kantien envers la géométrie euclidienne. Cette approche a été largement critiquée dans la mesure où elle considère qu'une partie de l'activité mathématique a lieu en dehors du langage. Par exemple, l'analyse de Kant que j'ai présentée plus haut concernant la preuve du fait que la valeur de la somme des angles d'un triangle vaut 180° ne permet pas de faire apparaître tous les présupposés logiques de la preuve, en particulier son engagement tacite envers les axiomes de la géométrie euclidienne. Sur un plan didactique, cette preuve est analysée par Durand-Guerrier & Arsac (2009). Ces auteurs portent une attention particulière sur la question des relations entre les introductions d'objets et les hypothèses (parfois implicites) utilisées dans les processus de preuves.

Cependant, certains (rares) auteurs font une interprétation différente de la notion d'intuition a priori de Kant. Pour Beth par exemple, rien dans l'intuition kantienne ne réfute la possibilité d'une traduction logique et langagière de l'inférence mathématique :

> « We see that with regard to the methodology of mathematics Kant defends views which essentially agree with Leibniz' and Nieuwentyt's conceptions, and which come quite near to formalist and logicist doctrines in contemporary research on the foundations of mathematics. » (Beth, 1959, p. 45)[39]

[39] « Nous voyons qu'en regard à la méthodologie des mathématiques, Kant défend des vues qui s'accordent essentiellement avec celles de Leibniz et de Nieuwentyt, et qui se rapprochent des

Plutôt que l'inférence synthétique a priori, c'est plutôt l'inférence analytique qui est pour Beth en dehors de la logique puisqu'une telle inférence ne traite que des concepts eux-mêmes plutôt que des symboles particuliers qui les représentent. Bien que fondamentalement différente de l'interprétation de l'intuition en termes de perception, l'interprétation de Beth maintient la caractérisation de l'activité mathématique par l'intervention de concepts particularisés :

> « As Kant puts it : synthetic method considers the universal (that is, the notion) *in concreto*, whereas analytic method is bound to consider it *in abstracto*. » (Beth, 1959, p. 44)[40]

Hintikka réutilise l'idée de Beth selon laquelle l'intuition correspond au processus logique de particularisation du concept abstrait vers l'élément singulier, ce qui correspond en logique du premier ordre aux processus d'instanciation. Par ce biais, celui qui pratique les mathématiques se donne de nouveaux individus, de nouveaux objets afin de conduire les démonstrations. L'idée selon laquelle l'appréhension des individus ne peut être que sensible a été défendue par Aristote. Hintikka qualifie donc la position kantienne d'erreur aristotélicienne. Il relève le caractère passif de cette conception pour laquelle les recherches mathématiques sont caractérisées par la perception d'informations sensorielles. Pour lui, ceci n'est pas compatible avec la créativité mathématique et le rôle qui est assigné aux individus dans la révolution copernicienne. Hintikka reprend ainsi l'argument de Kant en excluant des prémisses l'erreur aristotélicienne et entreprend de corriger la déduction transcendantale. Les questions sont les suivantes : Qu'est-ce que les intuitions ont en commun ? Quelles sont les propriétés que les individus mettent dans les objets lorsqu'ils singularisent les concepts ? Selon Hintikka, toutes les intuitions sont les produits de processus de recherche et de résolution. La sémantique GTS explicite alors les règles générales de ces processus.

> « Even though logical and mathematical inferences do not reflect the structure of our outer and inner senses, they reflect the structure of our language games of speaking and finding. The right approach to the contemporary philosophy of logic and logical semantics is therefore through a study of the rule-governed activities of seeking and finding. These activities, conceived of as games against Nature,

---

doctrines formalistes et logicistes de la recherche contemporaine sur les fondements des mathématiques. » (ma traduction)

[40] « Comme Kant le dit, la méthode synthétique considère l'universel (c'est-à-dire les notions) *in concreto*, alors que la méthode analytique se borne à les considérer *in abstracto*. » (ma traduction)

are precisely my semantical games. » (Hintikka, 1983, p. 34)[41]

Lors d'une intuition, les individus transforment les concepts généraux en objets de recherche et de résolution soumis à des règles de manipulation que Hintikka identifie aux règles de la sémantique GTS. Pour Hintikka, la logique de la quantification (selon lui la manière naturelle d'interpréter les quantificateurs est l'interprétation GTS) réfléchit la manière dont se produisent les jeux de langage mis en œuvre dans l'activité mathématique. Kant estime que les mathématiques rendent compte des formes a priori de la sensibilité, Hintikka des formes a priori des jeux de langage de recherche et de résolution.

> « Je pourrais même dire les choses autrement : la logique reflète les caractéristiques structurelles de nos activités de recherche et de résolution. Ces activités ne sont pas indépendantes de la structure du médium dans lequel on mène la recherche. A long terme, cette structure devra être prise en compte, et nous voilà donc ramenés à des idées qui ressemblent plus aux théories kantiennes qu'à la logique de la recherche et de la résolution. » (Hintikka, 1996, p. 98)

La sémantique GTS est donc candidate au statut de reflet des activités de recherche et de résolution. Etant donné la place centrale de la quantification dans cette théorie, je présente maintenant quelques arguments donnés par Hintikka en faveur de l'interprétation GTS de la quantification. Pour commencer, voici les règles associées aux quantificateurs dans les jeux de langage (je présente les autres règles associées aux quantificateurs ainsi que les règles structurelles de GTS dans le prochain chapitre). L'idée de la sémantique GTS est d'associer à chaque énoncé un jeu qui oppose deux joueurs. Si l'énoncé est existentiel, de la forme $\exists x P(x)$, alors le joueur qui défend l'énoncé choisit un objet *a* dans la structure d'interprétation. Le jeu se poursuit alors par la défense de *P(a)* par le ce même joueur. Si l'énoncé est universel, de la forme $\forall x P(x)$, alors c'est le joueur qui attaque l'énoncé qui choisit un objet *a* dans la structure d'interprétation. Le joueur qui défend l'énoncé poursuit alors le jeu en défendant *P(a)*. Pour simplifier les choses, il peut être utile de supposer que *P(a)* est un énoncé atomique (qu'il ne contient plus de constantes logiques telles que « et », « ou », « il existe », etc). Dans ce cas, pour qu'un joueur gagne une partie d'un jeu construit sur l'énoncé $\exists x P(x)$, il doit trouver un objet *a* tel que *P(a)* soit vrai. Pour qu'un joueur gagne

[41] « Bien que les inférences mathématiques et logiques ne reflètent pas la structure de nos sens internes et externes, elles reflètent celle de nos jeux de langage de recherche et de résolution. La bonne approche de la philosophie de la logique contemporaine et de la sémantique logique est alors celle de l'étude des activités de recherche et de résolution régies par des règles. Ces activités, comprises comme des jeux contre la Nature sont précisément mes jeux sémantiques. » (ma traduction)

une partie d'un jeu construit sur $\forall x P(x)$, il faut que le joueur adverse choisisse un objet a tel que $P(a)$ soit vrai. A plusieurs reprises, Hintikka affirme que cette manière de comprendre la quantification est celle qui est en pratique dans l'activité mathématique :

> « The paradigm problem for game-theoretical semantics (GTS) is the treatment of quantifiers ; primarly logicians' existential and universal quantifiers. As far as the uses of quantifiers in logic and mathematics are concerned, the basic ideas codified in GTS have long been an integral part of logician's and mathematician's folklore. » (Hintikka, 1983, p. 1)[42]

> « En fait, on peut considérer la sémantique des jeux comme une codification de la manière de penser et de parler que les mathématiciens (et les spécialistes de logique mathématique) utilisent depuis des temps immémoriaux (au moins depuis le temps de Cauchy) mais qu'ils n'ont reconnue en tant qu'outil conceptuel que lorsque les autres moyens qu'ils avaient de traiter leurs sujets ont cessé de remplir leur office. » (Hintikka, 1994, p. 142)

L'exemple qu'il utilise le plus souvent est celui de la définition de la continuité des fonctions. Selon lui les règles de GTS pour la quantification rendent bien compte des expressions mathématiques telles que « Pour tout ε, on peut trouver η tel que etc », ou encore « étant donné ε, il existe un η tels que etc ».

> « Prenons un exemple simple. Comment pouvez-vous (et devez-vous) vérifier un énoncé existentiel de la forme suivante :
>
> $(\exists x)S[x]$ (2.1)
>
> où S[x] est sans quantificateur ? La réponse est évidente. Pour vérifier (2.1), on doit trouver un individu, disons *b*, tel que :
>
> S[b]
>
> soit vrai. Ici l'étymologie peut illustrer l'épistémologie. Dans plusieurs langues, l'existence s'exprime par une locution dont la traduction littérale serait « on peut trouver ». Pour la qualité du pudding, la preuve peut-être qu'on le mange, mais pour son existence, c'est qu'on le trouve. […] » (Hintikka, 2007, p. 53)

Hintikka revendique donc un certain héritage de la philosophie kantienne. Le réinvestissement de la déduction transcendantale lui fournit un argument pour défendre son

---

[42] « Le problème paradigmatique pour la sémantique selon la théorie des jeux (GTS) est le traitement des quantificateurs, principalement les quantificateurs existentiel et universel des logiciens. Pour autant que les usages des quantificateurs en mathématiques et en logique soient concernés, les idées de base qui sont codifiées dans GTS ont été depuis longtemps une part intégrale du folklore des logiciens et des mathématiciens. » (ma traduction)

interprétation de la quantification dont il revendique la primauté parmi les explications logiques. Parmi les filiations philosophiques, il est également éclairant de regarder les relations de la sémantique GTS avec la sémantique de Tarski, avec le positionnement des constructivistes, ou encore avec le Wittgenstein des *jeux de langage*. Le paragraphe qui suit présente ces relations. Mon objectif n'est pas de proposer une analyse philosophique vraiment approfondie de la sémantique GTS mais plutôt de montrer en quoi ces relations contribuent à expliquer l'intérêt d'un usage didactique de cette sémantique.

1.2. Sémantique véríconditionnelle et sémantique vérificationniste

Pour Hintikka, la sémantique GTS réalise un formalisation logique de la notion de *jeux de langage* de Wittgenstein que j'ai introduite dans la partie précédente (partie 1, chapitre 2). Selon lui, les *jeux de langage* constituent le médium par lequel les significations peuvent être concrètement abordées par les individus. Ils jouent donc sensiblement le même rôle que GTS, au moins pour une partie des jeux de langage puisque pour lui, la compréhension d'un énoncé consiste en la maîtrise des règles qui lui sont associées au sein du jeu de recherche et de résolution. Ce positionnement lui permet de proposer une synthèse entre ce que les philosophes appellent *sémantique véríconditionnelle* et *sémantique vérificationniste*. En quelque mots, une sémantique véríconditionnelle est une explication de la notion de vérité qui se construit à partir d'une relation du type : un énoncé P est vrai si et seulement si il correspond à un fait. L'exemple type de sémantique véríconditionnelle est proposé par Tarski dans sa définition sémantique de la vérité (Tarski, 1972). La correspondance entre fait et objet est assurée par ce qui est appelé la convention *T* dont une instance est :

La proposition « la neige est blanche » est vraie si et seulement si la neige est blanche.

Dans la phrase précédente, les guillemets marquent la différence entre l'énoncé et le fait. Ce qui est entre guillemets fait partie du langage étudié, le langage-objet. Le reste de la phrase fait partie d'un méta-langage utilisé pour entreprendre d'expliquer le concept de vérité sur le langage-objet.

Une sémantique vérificationniste insiste au contraire sur la nécessité de la manière dont les individus parviennent à déterminer les relations sémantiques. Les philosophes des mathématiques constructivistes s’appuient sur des sémantiques de ce type. Par exemple, la notion de vérité en mathématiques pourrait être expliquée à partir d’un système de déduction explicite. On considérera alors qu’un énoncé est vrai si une preuve satisfaisant les critères de déduction est fournies. L’approche de Lorenzen, qui sera décrite dans le chapitre suivant, en est un exemple représentatif. Il est assez clair qu’une sémantique vérificationniste est davantage susceptible d’être compatible avec des arguments du type de celui de la déduction transcendantale. Celle-ci met au centre des préoccupations l’activité des individus à la manière de la révolution copernicienne. Pourtant jusqu’ici, je me suis implicitement situé du côté de la sémantique vériconditionnelle à travers l’usage des concepts de la sémantique logique (le concept d’objet, de vérité matérielle, de structure d’interprétation, etc). La référence à une sémantique vériconditionnelle, celle de Tarski, est également présente dans les travaux récents de Durand-Guerrier (2005, 2007, 2008). Je les présente rapidement.

Sa note de synthèse en vue de l’obtention de l’habilitation à diriger des recherches s’intéresse explicitement aux *apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique* (Durand-Guerrier, 2005). Selon elle, la théorie des modèles, laquelle est issue des travaux de Tarski, fournit un élément théorique pertinent susceptible de rendre compte des processus de *va et vient* entre la forme et le contenu dans les apprentissages mathématiques. La première partie de cette thèse propose plusieurs exemples dans lesquelles le travail sémantique sur les objets interagit avec le travail théorique sur la forme. Mon analyse s’inscrit donc clairement dans la perspective ouverte par Durand-Guerrier en didactique des mathématiques. Concernant la validation, la théorie des modèles permet de questionner certains usages en lien avec les questions de nécessité logique et de certitude en explicitant la distinction entre validité logique et vérité dans un domaine d’interprétation (Durand-Guerrier, 2008). Durand-Guerrier (2007) met par exemple en évidence une tendance à surévaluer le rôle des contre-exemples dans les apprentissages mathématiques. Une application rigide de la règle du contre-exemple, selon laquelle un contre-exemple suffit à invalider un énoncé universellement quantifié, est susceptible de freiner le travail sur le contenu mathématique des énoncés. Plus généralement, l’approche sémantique permet de mettre en évidence le rôle des objets dans les apprentissages mathématiques, un rôle qui est souvent négligé par les enseignants. Dans cette perspective, elle insiste sur la pertinence de l’usage des phrases ouvertes dans l’enseignement. Ceci a déjà été abordé lors de la discussion à propos des modèles de Toulmin et de Duval dans la partie précédente.

Néanmoins, si la théorie des modèles permet une distinction entre vérité, au sens véričonditionnel de l'adéquation d'un énoncé du langage-objet avec un fait dans un domaine d'interprétation, et validité, au sens de la déductibilité au sein d'un système, elle ne prend pas explicitement en compte la manière dont les individus parviennent à connaître la vérité des énoncés.

> « Un défaut que l'on reproche aux définitions de la vérité à la Tarski, c'est leur abstraction excessive. Des auteurs soi-disant intuitionnistes et constructivistes ont, parmi d'autres, prétendu que de telles définitions caractérisaient simplement une relation abstraite entre les énoncés et les faits. Mais, toujours selon ce raisonnement, de telles définitions n'expliquent pas ce qui fait que cette relation est une relation de vérité. En particulier, ces relations abstraites ne sont pas reliées aux activités par lesquelles nous vérifions et nous falsifions en fait les énoncés de tel ou tel langage, qu'il s'agisse d'une langue naturelle ou d'un langage formel (interprété). Comme Wittgenstein aurait pu le dire, chaque expression appartient à un jeu de langage qui lui donne sa signification. Une spécification des conditions de vérité ne nous fournit pas un tel jeu, ainsi que Dummett l'a obstinément défendu. » (Hintikka, 2007, p. 51)

Pour cette raison, Durand-Guerrier est amenée à introduire la notion de pragmatique. Elle écrit par exemple dans sa note de synthèse en vue d'obtenir l'habilitation à diriger des recherches :

> « Depuis quelques années, l'ensemble de mes travaux fait apparaître la nécessité, pour l'interprétation des énoncés mathématiques en situation d'enseignement et d'apprentissage, d'une prise en compte des aspects syntaxiques, sémantique et pragmatique au sens de Morris. » (Durand-Guerrier, 2005, p. 6)

Plus loin dans la même note, elle explicite son accord avec Gardies (1994) pour qui la pragmatique est nécessaire pour compléter les considérations syntaxiques ou sémantiques dans l'analyse de la connaissance. Gardies utilise le terme de pragmatique « pour désigner par exemple la manière ou les manières mêmes dont la vérité peut accéder à la conscience du sujet connaissant (…) » (Gardies, 1994, p. 188, cité dans Durand-Guerrier, 2005, p. 117). La nécessité de prendre en compte les moyens par lesquels les individus parviennent à aborder les questions sémantiques, celle de la signification et de la vérité en particulier, est également une revendication de Hintikka.

> « Si la compréhension d'une phrase est fondée sur la connaissance de ses conditions de vérité [au sens de la sémantique de Tarski], d'où vient que l'on soit fréquemment incapable de décider si ces conditions de vérité sont satisfaites ou non alors que l'on comprend la phrase en question. » (Hintikka, 1994, p. 170)

Cependant, les outils mis en œuvre dans l'approche de Hintikka sont sensiblement différents de ceux utilisés par Gardies ou Durand-Guerrier. Les outils de Hintikka sont intégrés dans une formalisation logique, au sein de sa sémantique GTS, alors que les considérations pragmatiques sont, aux sens de Gardies, de l'ordre de l'extra-logique. La notion centrale utilisée par Hintikka à cette fin est celle de stratégie au sens mathématique de la théorie des jeux. De manière informelle, la vérité d'un énoncé est définie comme l'existence, toujours au sens mathématique, d'une stratégie gagnante pour le défenseur de l'énoncé dans le jeu de langage, interprété dans un domaine d'objet, qui lui est associé à travers les règles de GTS. En d'autres termes, les conditions de vérité des énoncés ne sont plus exprimées par une relation abstraite du type de celle de la convention T, mais par l'existence d'une stratégie gagnante dans un jeu de recherche et de résolution sur un domaine d'objets. De ce point de vue, Hintikka pense avoir construit un pont entre sémantique vériconditionnelle (en termes de conditions de vérité) et sémantique vérificationniste (qui explicite les actions permettant d'accéder aux relations sémantiques) :

> « Les sortes de critiques dont je parle s'expriment le plus souvent dans les termes d'un besoin de remplacer une sémantique vériconditionnelle par une sémantique vérificationniste. Toutefois, les philosophes qui mettent l'accent sur ce besoin négligent systématiquement (pointé par Hintikka, 1987) que la séparation entre sémantiques vériconditionnelle et vérificationniste n'est pas exclusive. Car d'excellentes conditions de vérité peuvent en principe être définies à partir des activités même de vérification et de falsification. » (Hintikka, 2007, p. 52)

La notion mathématique de stratégie vient expliciter les relations entre la syntaxe des énoncés et les faits matériels au sein du médium que constitue le jeu de langage.

> « Ici, mon point de vue *game-theoretical* facilite une « déduction transcendantale » de la manière dont les idées constructivistes pour les fondements de la logique devraient être implémentées. […] De façon non surprenante, la clef de cette « déduction transcendantale » est la définition *game-theoretical* de la vérité comme étant l'existence d'une stratégie gagnante pour le vérificateur initial. » (Hintikka, 2007, p. 246)

Ceci permet à Hintikka d'inclure la pragmatique dans la sémantique (et réciproquement). Du point de vue didactique, cela me permet d'intégrer les questions pragmatiques (au moins certaines) au sein de la modélisation logique des dialogues dans les situations de validation :

> « Tout ce qu'on peut conclure de telles observations, c'est que la frontière entre le sémantique et la pragmatique est, pour une part, arbitraire. » (Hintikka, 1994, p. 179)

La question de l'intérêt d'intégrer la dimension pragmatique dans la modélisation didactique, et pas seulement dans l'analyse, est une des questions qui émergent de mon travail de thèse puisque la sémantique à la Tarski permet aussi de prendre en compte le travail sur les objets et la quantification dans la modélisation. Je rappelle que l'évaluation de cette prise en compte des objets et de la quantification au sein de la modélisation est la dimension de la problématique qui est à l'étude dans cette partie. Ce que je propose de faire est en quelque sorte une extension des travaux de Durand-Guerrier sur la théorie élémentaire des modèles, une extension qui intègre les idées dialogiques et la notion de stratégie. L'idée principale est que la prise en compte explicite de la pragmatique à l'intérieur de la modélisation est susceptible de mettre en avant les apports conceptuels de l'analyse dialogique que j'ai défendu dans le deuxième chapitre de la première partie de la thèse. Cette question de la place de la notion de jeux, au sens logico-mathématique est également au centre d'un article récent de Marion (2009) en philosophie intitulé « pourquoi jouer des jeux logiques ? » (*Why play logical games ?*) :

> « However while computer scientists might have perfectly good reasons for turning to game semantics, the idea is only slowing picking up within philosophical circles. The obvious reason for this is that better known paradigms, for examples, truth-conditionnal semantics, have more firmly established pedigrees. » (Marion, 2009, p. 6)[43]

Comme il le fait remarquer et comme j'ai essayé de le présenter ci-dessus, les motivations de Hintikka concernent essentiellement les quantificateurs. Cependant, selon Marion, ses explications ne sont pas vraiment satisfaisantes dans la mesure où la notion de stratégie associée à la vérité d'un énoncé dans l'explication GTS n'est pas constructive. Un locuteur peut savoir qu'une stratégie existe sans pour autant pouvoir la mettre en œuvre. En quelque sorte, le reproche qui est fait à Hintikka est de considérer des joueurs idéaux, abstraits capable de jouer stratégiquement là où des êtres humains n'y parviendraient pas. A travers la définition de la vérité comme l'*existence* d'une stratégie gagnante dans un jeu, il fait revenir par la fenêtre le caractère abstrait de la relation de vérité qui venait à peine de sortir par la porte. Hintikka discute de ces objections dans le dixième chapitre de Hintikka (2007) en évoquant notamment la possibilité de restreindre le domaine des stratégies disponibles aux

[43] « Cependant, alors que les informaticiens peuvent avoir de parfaitement bonnes raisons de se tourner vers les jeux sémantiques, l'idée n'est pas vraiment en train de prendre dans les cercles philosophiques. La raison évidente de cela est qu'un paradigme mieux connu, par exemple, la sémantique vériconditionnelle, possède un pedigree bien plus fermement établi. » (ma traduction)

stratégies constructives. Pour ma part, il me semble que malgré ces questions l'usage de la sémantique GTS me semble être porteur d'intérêts du point de vue de la modélisation didactique des situations de validation. Dans le chapitre qui vient, je vais essayer de mettre en avant ces intérêts.

2. SEMANTIQUE GTS ET SITUATION DE VALIDATION

L'objectif de ce chapitre est de proposer et d'évaluer un outil, la sémantique GTS, pour l'analyse des dialogues d'élèves dans les moments de recherche et en particulier dans ce que Brousseau a appelé les situations de validation explicite (1998b, p. 109-112). Son contenu est issu de Barrier (2008). Le besoin de ce type d'outils trouve sa source dans le positionnement épistémologique de la Théorie des Situations Didactiques Mathématiques (par la suite TSDM) qui considère l'évolution de la stratégie d'un élève dans une situation donnée comme le critère servant à l'évaluation d'un apprentissage. Pour évaluer les évolutions stratégiques des élèves, les traces écrites d'un travail de recherche en groupe sont insuffisantes, ce qui conduit de nombreux chercheurs à utiliser des enregistrements audio, voir vidéo, des travaux de groupe. Dans mon travail, je considère, avec d'autres auteurs (Durand-Guerrier et al. (2006), Guernier et al. (2007)), qu'une analyse fine des *jeux de langage* est nécessaire. Je fais l'hypothèse que la sémantique GTS offre une référence épistémologique pertinente pour poser la question de savoir comment faire du critère précédent, selon lequel les acquisitions de connaissances s'identifient avec des évolutions stratégiques dans une situation, un critère opératoire. Autrement dit, j'essayerai de montrer en quoi la sémantique GTS permet une analyse de la dimension stratégique des dialogues. Après avoir explicité davantage la question, issue du positionnement épistémologique de la TSDM, que ce chapitre aborde (§ 1), je présente la logique dialogique de Lorenzen. Il s'agit en effet de la référence théorique que Brousseau utilise pour y apporter une réponse. Je montre les possibilités de cette logique dialogique (§ 2) mais également ses limites (§ 3) puisque, selon moi, cette approche n'est que partiellement satisfaisante. Mon ambition est ensuite de proposer une réponse alternative, en appui sur la sémantique GTS et la correction de cette dernière par Vernant (§ 3), qui puisse être fonctionnelle là où la logique dialogique de Lorenzen ne l'est pas. Ce chapitre se termine par une analyse du rôle conféré au point de vue sémantique dans la TSDM, en particulier dans les situations de validation (§ 4).

2.1. Le problème de la « mesure » dans la théorie des situations

Sur le plan épistémologique, Brousseau revendique une relation étroite entre connaissance et stratégie. Il dit par exemple dans son cours donné lors de l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal en 1998 qu'*une connaissance pertinente modifie une tactique ou une stratégie* (1998, p. 4). Cette approche, parente de celle dite anthropologique de Wittgenstein (1976, 2004) est un positionnement critique vis-à-vis d'un usage incontrôlé du vocabulaire de la psychologie. Pour Brousseau comme pour Wittgenstein, ce sont les actions et parmi celles-ci les assertions qui sont révélatrices et constitutives de la connaissance des individus.

> « Et l'usage qu'il fera du mot que je lui explique montre la façon dont il comprend l'explication » (Wittgenstein, 2004, §29))

Ces auteurs partagent également le point de vue selon lequel les objets mathématiques et les discours sur ceux-ci prennent leur sens lorsqu'ils sont plongés dans des situations. Sarrazy (2005) propose une comparaison plus systématique des deux auteurs.

> « L'expression « jeu de langage » doit ici faire ressortir que parler un langage fait partie d'une activité, ou d'une forme de vie » (Wittgenstein, 2004, § 23)

Une des ambitions de la TSDM est de modéliser les activités des élèves de manière à ce qu'il devienne possible d'évaluer l'adéquation des stratégies associées à la situation ou, dit autrement, de mesurer la conformité de l'usage par les élèves des termes avec les règles de l'institution. Brousseau affirme par exemple :

> « En conjuguant l'approche d'Alan Turing et celle de Paul Lorenzen qui semblaient pourtant irréductiblement opposées il a paru possible de représenter les situations à usage didactique par des « automates mathématiques ». » (Brousseau, 1997, p. 4)

Il donne ensuite l'exemple du jeu de la course à 20 et la modélisation qui lui est associée : le jeu est représenté par une succession d'états (un état (θ, n) est la donné d'un joueur et d'un entier naturel plus petit que 20). A partir de là, il devient possible de repérer et d'évaluer les modifications stables de stratégie. Cependant, ce type de modélisation ne réussit que dans des cas très favorables. En accord avec Durand-Guerrier (2007), je considère que les outils proposés par Brousseau – l'approche d'Alan Turing et celle de Paul Lorenzen – sont inadaptés à de nombreuses situations de validation.

Brousseau distingue trois types de situations adidactiques : les *situations d'action* dans lesquelles le milieu ne contraint pas les élèves à intégrer une verbalisation dans leurs stratégies, les *situations de formulation* dans lesquelles le milieu contraint cette fois les élèves à verbaliser et les *situations de validation* dans lesquelles le milieu contraint les élèves à confronter et à justifier leurs verbalisations. Je m'intéresse dans cette thèse essentiellement aux *situations de validation*. A ce propos Brousseau dit :

> « Les situations de validation vont mettre en présence deux joueurs qui s'affrontent à propos d'un objet d'étude composé des messages et descriptions que l'élève a produits d'une part, et du milieu adidactique qui sert de référent à ces messages d'autre part (figure 7). Les deux joueurs sont alternativement un « proposant » et un « opposant »; ils échangent des assertions, des preuves et des démonstrations à propos de ce couple « milieu/message ». (Brousseau, 1998, p. 109)

Les situations adidactiques de validation ont donc une triple dimension, une dimension syntaxique, une dimension sémantique et une dimension pragmatique (*les messages et descriptions, la référence de ces messages, l'échange des assertions*). L'objet d'étude pour celui qui s'intéresse à ces situations est un couple (*un « proposant » et un « opposant »*) et leurs échanges. En disant cela Brousseau fait référence à la logique dialogique de Lorenzen dont il reprend le vocabulaire. Dans le paragraphe qui suit, je présente rapidement cette théorie. Je montre également ce qu'elle permet puis en quoi elle est insuffisante pour modéliser une partie importante des situations de validation.

2.2. La logique dialogique de Lorenzen

Concernant l'assertion, Vernant affirme la chose suivante :

> « De plus et surtout, l'analyse [de l'assertion] inaugurée par Frege, reprise par Austin, poursuivie par Searle et Vanderveken, se centre trop exclusivement sur l'acte du seul locuteur. Son défaut congénital est de rester *monologique*. Le « second » Wittgenstein a bien montré que les assertions ne pouvaient prendre sens que comme coups dans des jeux de langage qui se jouent au moins à deux. Et, avant même Wittgenstein, Peirce avait esquissé une analyse proprement dialogique de l'assertion. Ainsi, comme l'avait d'ailleurs bien compris Frege, l'assertion est *réponse* à une question antérieure. L'assertion doit donc s'analyser comme *interacte* prenant une fonction dialogique particulière. » (Vernant, 2005b, p. 280, traduction de Vernant)

Autrement dit, l'assertion doit être regardée comme un coup à l'intérieur d'un jeu et ne peut être analysée sans prendre en compte le jeu d'arrière plan qui lui donne sens. Voici un exemple, hors du champ mathématique, qui a pour but d'expliciter la citation précédente. Dans sa couverture du 11 Décembre 2007 le journal Métro affirme :

> «Alors que le conseil des ministres examine demain les mesures en faveur du pouvoir d'achat, <u>63% des Français préfèrent l'argent au temps libre</u> et 78% se disent prêt à faire des heures sup. Lire p/04 » (je souligne)

Il me semble qu'une manière « naturelle » de comprendre l'assertion '*63% des Français préfère l'argent au temps libre*' dans une perspective dialogique est qu'à la question posée par un interlocuteur « préférez vous l'argent ou le temps libre ? » (1), 63% des français interrogés répondent « l'argent ». Cette manière de comprendre l'assertion du journal Métro n'est cependant pas la bonne : la question réellement posée lors du sondage (que l'on peut trouver à la quatrième page du journal) est

> « Si vous aviez le choix, que préfèreriez-vous… ? Gagner moins d'argent et avoir plus de temps libre ou gagner plus d'argent mais avoir moins de temps libre » (2)

Lorsqu'il est affirmé que '*63% des Français préfère l'argent au temps libre*', il faudrait donc comprendre que les sondés ont choisi à 63% la deuxième réponse à la question (2). Les questions (1) et (2) ne sont clairement pas équivalentes et donc l'interprétation construite sur la question (1) constitue une mécompréhension de l'assertion en jeu.

L'objectif d'une analyse dialogique est de rechercher *la fonction dialogique*, selon l'expression de Vernant, de l'assertion afin d'éviter ce type de mécompréhensions. Un travail en commun avec Anne-Cécile Mathé sur ce type de questions a été présenté dans la première partie (chapitre 2). Mon objectif ici est de montrer comment une modélisation construite sur la sémantique GTS permet d'approfondir cette approche. La dimension dialogique de l'assertion est prise en compte dans la théorie des situations (les joueurs *échangent*, dit Brousseau) notamment en référence à Lorenzen dont je présente ici la logique dialogique. Je vais essayer de montrer que les préoccupations fondationnelles de Lorenzen l'ont conduit à proposer une théorie dialogique avec une certaine dimension pragmatique :

> « La novation s'avère essentiellement philosophique. Est introduite explicitement la *dimension pragmatique* en logique. Alors qu'en logique standard, la proposition excluait toute dimension énonciative pour se réduire à un simple porteur de valeur de vérité, en logique dialogique chaque proposition est véritablement une *proposition* émanant d'un interlocuteur qui s'*engage* sur elle par un *acte d'assertion*. » (Vernant 2004, p. 9)

La logique dialogique de Lorenzen est un système formel dont l'objectif est de proposer une définition de la notion de vérité logique. Dans sa présentation de sa « logique effective des joncteurs et des quantificateurs » (1967, p. 18-33), Lorenzen insiste sur le fait que sa *nouvelle notion de vérité logique* est *plus forte que celle de la logique classique utilisée* jusqu'ici (1967, p. 23). En particulier, elle permet un éclairage sur le débat entre logique classique et intuitionniste. La logique effective de Lorenzen, je dirai par la suite *logique dialogique*, permet d'interpréter le différent entre tenant de la logique intuitionniste et tenant de la logique classique comme un différent au sujet des règles des dialogues constitutifs de la vérité des énoncés. La clarification de ce débat est un des objectifs majeurs de Lorenzen (1967, p. 9) :

> « Il est aujourd'hui facile de comprendre pourquoi le conflit ne pouvait être tranché sur le plan théorique : c'est qu'il n'existe aucune incompatibilité entre une théorie constructive et une théorie axiomatique des ensembles. Toutes deux sont réalisables. »

Cependant, Lorenzen prend clairement partie pour la logique intuitionniste (1967, p. 19). Marion (2009, p. 5) affirme même que l'ambition de Lorenzen lorsqu'il met en place sa logique dialogique est de fournir une fondation philosophique pour la logique intuitionniste. Quoi qu'il en soit, cette position a des conséquences pragmatiques particulièrement intéressantes du point de vue didactique. Pour Lorenzen, une erreur de la logique classique est de considérer que toutes les propositions sont *v*-définies, autrement dit qu'elles ont toutes une valeur de vérité, indépendamment du fait que nous puissions la vérifier ou non. Il considère qu'il est *pour le moins douteux* d'appliquer la logique classique à ce genre de proposition. Pour reprendre le vocabulaire que j'ai utilisé jusque là, Lorenzen se méfie des sémantiques véríconditionnelles. Par exemple, il n'est pas raisonnable selon lui de considérer la proposition « il y a des nombres impairs qui sont parfaits ou aucun nombre impair n'est parfait » comme une vérité logique si l'on ne dispose d'aucun procédé pour décider si « il y a des nombres impairs qui sont parfaits » ou « aucun nombre impair n'est parfait » en est une. La question de savoir si il existe des nombres impairs et parfaits (dont la somme des diviseurs est égale au double du nombre) est une question ouverte. La conception de la vérité qu'il oppose est une théorie vérificationniste de la vérité. Pour chaque proposition, ce qui importe n'est pas de supposer qu'elle possède une valeur de vérité mais d'être capable de reconnaître une preuve de cette proposition lorsque celle-ci se présente. Lorenzen appelle les propositions, pour lesquelles nous savons identifier une preuve, les propositions *p*-définies. Pour revenir à notre exemple, alors qu'on ne sait pas si elle est vraie ou fausse, la proposition « il y a des nombres impairs qui sont parfaits » est *p*-définie parce que nous savons en identifier a priori une preuve (une preuve de cet énoncé s'identifie à la donnée d'un nombre parfait impair). Il est clair que les disjonctions finies ou infinies, les conjonctions finies de propositions *p*-définies sont des propositions *p*-définies. Par exemple, la proposition « il y a des nombres impairs qui sont parfaits ou aucun nombre impair n'est parfait » est *p*-définie si les propositions « il y a des nombres impairs qui sont parfaits » et « aucun nombre impair n'est parfait » le sont. Cependant, une conjonction infinie ou la négation d'une proposition *p*-définie ne sont pas automatiquement *p*-définie. Afin d'obtenir un ensemble clos sous l'action des constantes logiques, Lorenzen est finalement amené à introduire la notion de propositions *d*-définies (*dialogisch-definit*). Celle-ci donne naissance à une explication dialogique et pragmatique de la validité.

> « D'une façon générale, une proposition sera dite *d*-définie si, pour la soutenir dans un dialogue, les règles des deux partenaires sont déterminées de telle sorte qu'on peut décider à chaque instant si le dialogue est terminé et qui, dans ce cas, a gagné. » (Lorenzen, 1967, p. 21)

Cela permet à Lorenzen de traiter des conjonctions infinies, de la négation et de l'implication. En effet, une conjonction infinie de propositions *d*-définies, une négation de proposition *d*-définie, une implication entre propositions *d*-définies sont, comme il est possible de le vérifier à partir des règles ci-dessous, des propositions *d*-définies. A partir de là, la vérité logique (la validité) effective peut être définie, elle fait intervenir des dialogues entre un opposant qui défend une proposition et un opposant qui tente de la falsifier :

> « Nous dirons qu'une forme propositionnelle est logiquement vraie de manière effective si et seulement s'il est possible de gagner dans un dialogue toute proposition de cette forme (contre tout opposant). » (Lorenzen, 1967, p. 23)

Je présente maintenant les règles qui gouvernent le déroulement pas à pas du dialogue associé à l'évaluation de la validité d'une proposition et qui en assurent la cohérence logique. Les coups à l'intérieur du jeu dialogique sont réglementairement indépendants mais, comme les mouvements dans un jeu d'échec, ils peuvent être stratégiquement organisés (A_1 et A_2 sont des propositions et A un prédicat) :

- Si un joueur soutient $A_1 \wedge A_2$, l'autre joueur peut attaquer la conjonction en faisant un choix entre A_1 et A_2. La défense pour le premier joueur consiste alors à défendre l'assertion choisie par le joueur qui attaque.

- Si un joueur soutient $A_1 \vee A_2$, l'autre joueur peut attaquer la disjonction. Le défenseur choisit alors l'assertion qu'il souhaite défendre (entre A_1 et A_2).

- Si un joueur soutient $\forall x A(x)$, l'autre joueur peut attaquer l'énoncé universel. Le défenseur défend alors l'assertion *A(t)* où la lettre *t* est choisie par l'attaquant.

- Si un joueur soutient $\exists x A(x)$, l'autre joueur peut attaquer l'énoncé existentiel. La défense consiste alors à choisir une lettre *t* et à faire l'assertion $A(t)$.

- Si un joueur soutient $A_1 \Rightarrow A_2$, l'autre joueur peut attaquer le conditionnel en engageant un sous jeu autour de la défense de l'assertion A_1. Si le joueur qui soutenait $A_1 \Rightarrow A_2$ ne parvient pas à gagner ce sous jeu, il peut continuer à se défendre par l'assertion A_2.

- Si un joueur soutient $\neg A_1$, l'autre joueur peut attaquer par l'assertion A_1.

Le joueur en question dans ces règles peut tout aussi bien être le proposant que l'opposant. Par exemple, le rôle d'attaquant et de défenseur est inversé à chaque usage de la règle de négation. Durant le jeu, si le proposant souhaite soutenir une proposition atomique (c'est à dire élémentaire, non composée), il doit s'assurer que celle-ci ait été préalablement soutenue par l'opposant. Cette restriction ne s'applique pas à l'opposant. La raison de cette dissymétrie est que la logique dialogique de Lorenzen est une théorie « syntaxique » de la vérité : seule la forme des énoncés doit être utilisée pour s'assurer de leur validité. Le jeu se termine lorsqu'un des joueurs ne peut plus avancer d'arguments. Ce joueur a alors perdu le dialogue. Dire qu'un énoncé est valide c'est, selon Lorenzen, dire qu'il existe une stratégie qui permette au proposant de gagner le dialogue quels que soient les choix de l'opposant et nous *disposons* d'une démonstration si nous *connaissons* une telle stratégie de gain. Voici un exemple emprunté à Lorenzen concernant la formule du tiers exclu :

	opposant	proposant	Commentaires
1		$a \vee \neg a$	Le proposant soutient la formule du tiers exclu selon lequel la disjonction formée d'un énoncé et de sa négation est valide.
2	?	$\neg a$	L'opposant attaque la disjonction (je le symbolise par le signe ?), le proposant choisit alors de se défendre par $\neg a$ (il n'a pas vraiment le choix

			puisque les règles du jeu lui interdisent de défendre la proposition atomique *a*)
3	*a*		L'opposant répond par *a* (règle de la négation)

Une alternative émerge : soit on considère que le proposant doit répondre à la dernière assertion de l'opposant, à savoir *a*, et dans ce cas il a perdu puisqu'il n'a rien à rétorquer, soit on accepte que le proposant puisse revenir sur le choix qu'il avait fait à la ligne (2) puisque cette fois l'opposant a soutenu *a* à la ligne (3). Dans ce cas, le proposant affirme *a* et il gagne le dialogue. Cette alternative concernant les règles régissant le déroulement du dialogue est liée à l'alternative entre logique standard et logique intuitionniste. Au-delà des règles concernant le déroulement pas à pas du dialogue et l'usage des constantes logiques, il est donc nécessaire de se donner un ensemble de règles structurelles qui précisent le cadre dans lequel les règles d'usage peuvent être utilisées. Pour ce qui concerne cette thèse, il ne me paraît pas nécessaire de les expliciter davantage. Je note simplement que pour Lorenzen, le proposant ne peux pas revenir sur ces décisions. De ce point de vue, la formule du tiers exclu n'est pas une vérité logique puisque le proposant ne dispose pas d'une stratégie gagnante. Un choix adéquat de règles structurelles permet de retrouver exactement les vérités logiques intuitionnistes.

Voici un autre exemple : La proposition $p \Rightarrow \exists x q(x)$ structure le jeu dialogique. Le proposant veut montrer la validité de la proposition $\forall x \neg q(x) \Rightarrow \neg p$, autrement dit, en intégrant l'équivalence entre $\neg \exists x q(x)$ et $\forall x \neg q(x)$, la contraposée de la proposition structurante. La proposition $p \Rightarrow \exists x q(x)$ est considérée comme un axiome du dialogue. Pour rendre la lecture du tableau plus « naturelle », j'identifie la proposition p avec la proposition « $\sqrt{2}$ *est rationnel* » et la phrase *q(x)* par « *x* est un nombre rationnel et $x^2 = 2$ ». J'ai aussi choisi de particulariser les assertions à l'intérieur de sous jeux, liés à la règle d'usage concernant l'implication, en les encadrant.

Axiome : $p \Rightarrow \exists x q(x)$, i.e. « Si $\sqrt{2}$ est rationnel alors il y a un nombre x rationnel qui vérifie l'équation $x^2 = 2$ »

	Opposant	Proposant	Commentaires
(1)		$\forall x \neg q(x) \Rightarrow \neg p$	Le proposant engage le jeu en affirmant que si pour tous les *x*, *x* n'est pas rationnel ou $x^2 \neq 2$ alors on ne peut pas dire que $\sqrt{2}$ soit rationnel.
(2)	$\boxed{\forall x \neg q(x)}$		L'opposant attaque l'implication (1) en engageant le sous jeu associé à son antécédent : il soutient donc que pour chaque *x*, soit *x* n'est pas rationnel soit $x^2 \neq 2$.
(3)		$\neg p$	Le proposant laisse de côté le sous jeu juste commencé en (2) et continue à se défendre par le conséquent de (1) : il affirme donc que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
(4)	p		L'opposant continue ses attaques en affirmant que $\sqrt{2}$ est bien rationnel (règle de la négation).
(5)		$\boxed{p}$	Le proposant reprend à son compte la dernière assertion de l'opposant et attaque l'axiome du jeu en engageant le sous jeu autour de son antécédent (il lui a fallu attendre (4) pour le faire étant donné que *p* est un énoncé atomique).
(6)	$\exists x q(x)$		L'opposant ne peut rien faire pour se défendre dans ce sous jeu. Il poursuit par le conséquent de l'axiome attaqué selon la règle concernant le conditionnel. Il défend donc le fait qu'il existe un *x* qui soit rationnel et qui vérifie $x^2 = 2$.
(7)	$q(a)$	?	Le proposant attaque l'existentiel, il demande à l'opposant de lui dire qui est ce *x* rationnel qui vérifie l'équation $x^2 = 2$. L'opposant choisit la lettre *a*.
(8)	$\boxed{\neg q(a)}$	$\boxed{?a}$	Le proposant revient alors au sous jeu abandonné en (3). Cette fois il est mieux armé pour répondre à l'attaque de l'opposant en (2) : il attaque l'universelle en faisant le même choix que celui de l'opposant en (7). L'opposant doit donc défendre l'assertion selon laquelle il n'est pas vrai que *a* est rationnel et que $a^2 = 2$.
(9)		$\boxed{q(a)}$	Le proposant peut alors répondre que a est rationnel et que $a^2 = 2$ (règle de la négation) puisque l'opposant l'a déjà fait en (7). L'opposant n'ayant plus rien à répondre, le proposant gagne le sous jeu et par

			conséquent la partie.

Dans cet exemple, le proposant dispose d'une stratégie gagnante. Les possibilités de variation dans les choix de l'opposant concernent essentiellement le choix de lettre en (7). La stratégie du proposant est alors de modifier de la même manière son choix de lettre en (8) pour gagner la partie. Autrement dit, la proposition $\forall x \neg q(x) \Rightarrow \neg p$ est bien valide sous l'hypothèse $p \Rightarrow \exists x q(x)$. Pour terminer avec cet exemple, il est intéressant de remarquer que en (7), l'opposant a pu défendre $q(a)$, c'est à dire « a est rationnel et $a^2 = 2$ » sans enfreindre les règles du dialogue. Cette assertion est d'ailleurs reprises par le proposant. Cette possibilité marque la dimension syntaxique ou formelle de l'approche de Lorenzen.

Lorenzen donne comme règle l'impossibilité pour le proposant de soutenir une proposition atomique sans que l'opposant ne l'ait déjà soutenue. Ce modèle ne tient donc pas compte de la possibilité, affirmée par Brousseau, d'échanger des preuves et des démonstrations ou des vérifications sémantiques (Brousseau, 1997, p. 8). Il est possible de tenir compte des échanges de démonstration par une modification de la règle précédente en autorisant le proposant à soutenir des propositions dont il connaît une démonstration (une stratégie gagnante dans le jeu dialogique associé) sans que l'opposant ne puisse la remettre en cause. Par contre, pour pouvoir tenir compte des vérifications sémantiques, il faudrait assouplir la règle concernant les propositions atomiques. Dans ce cas, la forme des énoncés n'intervient plus seule dans la recherche de la vérité, des éléments extérieurs au dialogue interviennent et une théorie sémantique est nécessaire. Il me semble que les règles de la logique dialogique de Lorenzen, ou une version avec des règles du jeu amendées (de nombreuses variations sont possibles), permettent de rendre compte du fonctionnement de ce que Wittgenstein appelle *les convictions inébranlables* dans un extrait déjà cité dans la première partie (Wittgenstein, 1969, 1976, § 103).

Cependant, si une proposition nécessite l'intervention d'un élément extérieur ou d'un tiers ce processus ne peut être pris en compte par le système de Lorenzen. La théorie dialogique et sémantique de Hintikka revendique le traitement des *jeux d'extérieur* (des jeux qui prennent en compte les objets qui sont extérieur au langage) qu'il oppose aux *jeux d'intérieur* décrits ci-dessus (voir le premier chapitre de la première partie pour explication de ce vocabulaire). Je présente la sémantique GTS de Hintikka dans le prochain chapitre. Avant cela, je propose un exemple concret d'usage de la logique dialogique à travers la modélisation d'un dialogue d' « intérieur ».

Exemple 1* : *Une modélisation d'un dialogue autour de la rationalité de $\sqrt{2}$ s'appuyant sur la logique dialogique

Les transcriptions que je vais étudier dans ce paragraphe sont issues du corpus de thèse de Battie (2003). Dans cette recherche, Battie étudie l'hypothèse, qui semble fonder le retour de l'arithmétique dans les programmes français, selon laquelle l'arithmétique est un lieu privilégié pour le travail du raisonnement mathématique. Les extraits qui suivent proviennent de la transcription des dialogues d'un groupe de 3 élèves (le groupe A de son expérimentation) de terminale S (option mathématiques) concernant la rationalité de $\sqrt{2}$. L'exercice proposé aux élèves est le suivant :

> On rappelle qu'un nombre x est rationnel si et seulement s'il existe deux entiers a et b (b>0) tels que $x=\frac{a}{b}$. Etudier la rationalité d'un nombre x, c'est s'intéresser à la question « x est-t-il rationnel ou irrationnel ? ». Problème : Etudier la rationalité de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$.

Analyse a priori. Cette analyse s'appuie sur les travaux de Battie (2003, 2007). Elle se concentre sur l'étude par les élèves de la rationalité de $\sqrt{2}$ puisque le corpus étudié ne dépasse pas cette étude. Battie distingue et explicite six preuves disponibles pour les élèves de ce niveau (la preuve fondamentale, la preuve originale, la preuve classique, la preuve par descente infinie, la preuve par minimalité et la preuve par récurrence). Je restreins l'analyse a priori à la description des seules preuves originales et classiques. Cette description me semble néanmoins suffisante pour éclairer les courts extraits choisis.

Une écriture possible de la preuve classique est la suivante :

« On suppose qu'il existe deux entiers naturels premiers entre eux dont le quotient vaut $\sqrt{2}$. Soient a et b deux tels entiers, on a donc $\frac{a}{b}=\sqrt{2}$. En prenant le carré, on obtient $a^2=2b^2$ (1) ce qui montre que a^2 est multiple de 2, et donc que a est multiple de 2 (2). On peut donc écrire $a=2k$ pour un certain k entier naturel. En réinjectant cette écriture dans (1), on obtient les égalités suivantes : $(2k)^2=2b^2 \Leftrightarrow 2^2k^2=2b^2 \Leftrightarrow 2k^2=b^2$ ce qui montre que b^2 est multiple de 2 et donc que b est multiple de 2 (3). (2) et (3) sont incompatibles avec le fait que a et b soient premiers entre eux, ceci montre que l'hypothèse de départ est fausse et donc que $\sqrt{2}$ est irrationnel. »

Cette preuve par l'absurde est la preuve qui domine institutionnellement. Il s'agit de la preuve attendue par l'enseignante, d'autant plus qu'elle l'a déjà présentée à la classe à l'occasion du cours d'arithmétique.

Une écriture possible de la preuve originale est : « On suppose qu'il existe deux entiers naturels premiers entre eux dont le quotient vaut $\sqrt{2}$. Soient a et b deux tels entiers, on a donc $\frac{a}{b}=\sqrt{2}$. En prenant le carré, on obtient $a^2=2b^2$ ce qui montre que a^2 divise $2b^2$. Mais a^2 et b^2 sont premiers entre eux puisque a et b le sont et donc d'après le théorème de Gauss a^2 divise 2. Ceci montre que a = 1 puisque les seuls diviseurs de 2 sont 1 et 2 et qu'il est impossible que a^2 = 2. La contradiction vient du fait qu'il est impossible que $\frac{1}{b}=\sqrt{2}$ puisque par exemple $\frac{1}{b}<1$, l'hypothèse de départ est donc nécessairement fausse ce qui permet de conclure que $\sqrt{2}$ est irrationnel. »

La preuve originale se distingue de la preuve classique notamment par l'usage du théorème « Soit a et b deux entiers naturels, on a alors $(a \wedge b=1) \Rightarrow (a^2 \wedge b^2=1)$ ». Ce théorème ne fait pas partie du bagage institutionnel de l'arithmétique. D'autre part, cette preuve fait aussi intervenir la divisibilité par 1, laquelle ne vit que rarement dans l'enseignement.

Tous les extraits que j'utiliserai dans cette thèse proviennent de la transcription du dialogue du groupe A. Voici la trame de la transcription de leurs dialogues concernant la rationalité de $\sqrt{2}$. Le découpage proposé s'appuie sur Battie (2003, chapitre 8, II. 2). Je m'en servirai pour y situer les extraits que j'analyse.

Episode 1. Les élèves engagent le problème en écrivant l'égalité $a = b\sqrt{2}$ et se posent des questions quant aux conséquences en termes de divisibilité de cette égalité (ils semblent procéder comme si $\sqrt{2}$ était entier). Finalement, l'idée d'une preuve par l'absurde émerge.

Episode 2. Une nouvelle piste est explorée. Elle consiste à mettre l'égalité $a = b\sqrt{2}$ au carré et à essayer de construire un raisonnement par parité. La piste est abandonnée.

Episode 3. Le groupe travaille à nouveau sur l'égalité $a = b\sqrt{2}$ mais la recherche ne semble pas aboutir.

Episode 4. L'enseignante intervient pour confirmer qu'il est préférable de travailler sur l'égalité $a^2 = 2b^2$. Le travail s'oriente alors autour de la question de la validation de la proposition, essentielle dans la preuve originale, qui affirme que pour tout couple d'entiers naturels, si ils n'admettent que 1 comme diviseur commun alors il en est de même de leur carrés : $\forall a \forall b (p\,\mathrm{gcd}(a,b) = 1) \Rightarrow (p\,\mathrm{gcd}(a^2, b^2) = 1)$. Un extrait de cet épisode est analysé dans le troisième paragraphe de ce chapitre, un autre dans le quatrième.

Episode 5. L'enseignante intervient à nouveau pour montrer comment utiliser le fait, reconnu par les élèves, que a^2 est pair. Cette partie de l'épisode est analysée dans le quatrième paragraphe du chapitre. Les apports de l'enseignante permettent à une élève de parvenir à une solution (il s'agit de la preuve classique).

Episode 6. A la demande de l'enseignante, l'élève qui est parvenue à construire la preuve classique explique sa démarche à une autre élève du groupe. L'analyse ci-dessous s'intéresse à un extrait de cet épisode.

Extrait de l'épisode 6 0. Alors je t'explique. Tu as compris jusqu'à/ 1. Parle doucement. (rires) 2. T'as compris jusqu'à là que a est multiple de 2/ 3. Oui, ça j'ai compris. 4. T'as a est multiple de 2, d'accord ? ?	15. Ben si. 16. -tends, regarde. Ah ! 17. Attends mais c'est la même chose ! 18. Chut ! Tu me laisses parler, tu me laisses parler OK ? Bon. Tu dis, est-ce que ça va si racine de 2 il peut s'écrire a sur b irréductible (elle insiste sur ce mot). D'accord ?

donc que a² est égal à 2b²/ 5. Non mais j'ai compris que b était multiple de 2. 6. Ben voilà… Donc a multiple de 2 donc a égal 2q et b égal 2q', t'es d'accord ? Les deux sont multiples de deux. Quand tu fais a sur b, et ben cette fraction est réductible puisque tu peux la réduire par 2. 7. Et alors ?! 8. Donc c'est pas possible parce que euh, x, euh si racine de 2 s'écrit a sur b il faut que a et b et bien ils soient premiers entre eux. T'es d'accord ? 9. Ben non ces deux là ils sont premiers entre eux maintenant. 10. Mais non a égal 2q et b égal 2q'. 11. Oui ! 12. Donc et ben a et b ils pas premiers entre eux. 13. Ca fait q sur q' 14. On s'en fout de q sur q'.	19. C'est bon me regarde pas comme ça. (rires) 20. Le problème, tu veux savoir si racine de 2 il peut s'écrire avec a sur b avec a et b irré enfin/ 21. Ils sont premiers entre eux. 22. Premiers entre eux. Voilà. PGCD de a b égal 1, d'accord ? Voilà. Or on a fait tout un bidouillage, on a trouvé que a égal 2q et b égal 2q'. Or on a dit que PGCD égal 1 donc là ils ont 2 en commun donc c'est pas possible, donc racine de 2/ 23. D'accord, j'ai compris ! 24. s'écrit pas sur a sur b donc racine de 2 est irrationnel. 25. Voilà. 26. Voilà, maintenant tu rédiges. (Rires) 27. C'est toi qui rédiges, c'est la prof qu'a dit que tu rédiges.

Première partie de l'analyse : une théorie locale. Dans ce paragraphe, j'analyse les interventions des élèves de (0) à (17). Cette analyse décrit l'émergence de normes, organisées en une théorie locale, qui régissent le déroulement du discours. Je me sert de cette théorie locale pour proposer une modélisation. Le proposant modélise l'élève qui explique sa preuve et l'opposant celui qui ne l'a jusque là pas comprise. Cependant, je ne prétends pas qu'il soit possible de faire correspondre chaque assertion des élèves avec les assertions de leur modèle.

Axiomes : $a = 2q\,, b = 2q'\,, (a = 2q \wedge b = 2q') \Rightarrow \neg(a \wedge b = 1)\,,\ a \wedge b = 1$[44]

[44] Ici, comme dans la modélisation qui suit, j'ai choisi de ne pas faire apparaître la quantification pour les lettres en jeu. Il faut donc les considérer comme implicitement déjà introduites. Ce choix me permet de réduire la longueur des tableaux de modélisation.

	Opposant	Proposant
A		$a = 2q \wedge b = 2q'$
B	$\neg(p\text{gcd}(a,b) = 1)$	
C		$p\text{gcd}(a,b) = 1$

Commentaires. Le début du dialogue consiste en une mise en place conjointe de la théorie, les deux premiers axiomes sont explicités de (0) à (5), le troisième en (6) et (7), le quatrième en (8) et (9). Ils font partie, avec les règles d'usage des constantes logiques et les règles structurelles, des règles du jeu qui est joué. Le proposant attaque alors le troisième axiome de la théorie en faisant l'assertion de l'antécédent de l'implication – (10) et *A* – ce à quoi l'opposant rétorque par le conséquent – (12), (13) et *B* – car il est inutile pour lui d'attaquer la conjonction puisque chacun de ses termes sont des axiomes (11). Le proposant peut attaquer en *C* la négation *B* puisque *C* est un axiome de la théorie, ce à quoi l'opposant ne peut rien répliquer. Il gagne donc le dialogue. Au-delà de cette victoire, le proposant dispose d'une stratégie gagnante d'attaque d'un des axiomes de la théorie. La théorie est donc contradictoire. Dans la suite du dialogue, le proposant va essayer de montrer qu'il dispose d'une stratégie qui montre que l'hypothèse de rationalité de $\sqrt{2}$ implique les axiomes de la théorie locale précédente et donc qu'il faut la rejeter. On peut cependant remarquer que dans ce premier temps du dialogue l'élève modélisée par l'opposant ne semble pas se rendre compte de la contradiction revendiquée par l'autre élève – (13), (15) et (17). De ce point de vue, notre modélisation rend certainement mieux compte de l'activité de l'élève qui expose sa preuve, que de l'activité de l'élève qui essaye de la comprendre. Au niveau de la modélisation, l'explication de cette incompréhension semble se situer autour du quatrième axiome de la théorie qui a été considéré comme conjointement admis malgré l'ambiguïté de (9). Il y a dans cette pratique une composante arbitraire puisque aucun élément expérimental ne permet d'affirmer qu'un élève suit effectivement un ensemble de règles (dont font partie ici, les axiomes de la théorie), et, a fortiori, que les deux interlocuteurs du dialogue suivent les mêmes règles.

> « Aussi convient-il d'être attentifs à ces « plaisanteries grammaticales », comme les appelait Wittgenstein, consistant à confondre ou à assimiler les « tout-se-passe-comme-si » aux « tout-se-passe-comme-ça » : rien n'autorise en effet à

affirmer qu'un élève *suit* effectivement une règle, une stratégie même s'il est possible de décrire précisément son comportement à l'aide de cette règle. » (Sarrazy, 1997, p. 137)

Malgré cela, modéliser l'activité langagière de plusieurs interlocuteurs à l'intérieur d'une même structure logique peut permettre d'expliciter les incompréhensions.

Deuxième partie de l'analyse : l'hypothèse de rationalité est contradictoire. Ce paragraphe a pour objet l'analyse des assertions (18) à (24). Le proposant et l'opposant continuent de modéliser les mêmes élèves. Dans cette deuxième partie de dialogue, le proposant, selon notre modélisation, entreprend de montrer qu'une théorie conjointement admise comprenant l'hypothèse de rationalité de $\sqrt{2}$ implique la théorie précédente dont il a montré le caractère contradictoire.

Axiomes : $(\sqrt{2} = \frac{a}{b}) \wedge (p\text{gcd}(a,b) = 1)$, $(\sqrt{2} = \frac{a}{b}) \Rightarrow (\exists k, a = 2k \wedge \exists k', b = 2k')$,

$(a = 2q \wedge b = 2q') \Rightarrow \neg(p\text{gcd}(a,b) = 1)$

	Opposant	Proposant
A	$(\sqrt{2} = \frac{a}{b}) \wedge (pcgd(a,b) = 1)$	? 1
B	$p\text{gcd}(a,b) = 1$	? 2
C	$(\sqrt{2} = \frac{a}{b})$	
D		$(\sqrt{2} = \frac{a}{b})$
E	$\exists k, a = 2k \wedge \exists k', b = 2k'$	? 1 ? k
F	$a = 2q$	? 2 ? k'
G	$b = 2q'$	

Commentaires. Le premier axiome est établi en (18), (19), (20) et (21) les deux suivants en (22). Le proposant va essayer de montrer que cette théorie implique la théorie précédente. Il attaque en *A* et *B* le premier axiome en demandant à l'opposant de soutenir chacun des termes de la conjonction, celui-ci le fait en *B* et *C* – (21) et (22). Le proposant peut alors attaquer en *D* l'antécédent du deuxième axiome (« tout un bidouillage ») puisque cette proposition atomique a été défendue par l'opposant en *C*. L'opposant répond alors en *E* par le conséquent puis concède les deux premiers axiomes de la théorie locale précédente (*F* et *G*). En (22) et (23) le constat est fait que la théorie considérée implique la théorie locale qui émerge des assertions (0) à (17) (les axiomes de cette théorie sont soit des axiomes de cette nouvelle théorie soit des assertions – *B*, *F* et *G* – de l'opposant) et donc que l'hypothèse de rationalité de $\sqrt{2}$ doit être rejetée. Cette fois-ci, l'élève qui se faisait expliquer la preuve dit avoir compris l'argumentation de son interlocutrice, ce qui implique probablement qu'elle a dû relever le lieu de la contradiction et en particulier accepter l'axiome $p\mathrm{gcd}(a,b)=1$ qui jusque là posait problème. Dans la modélisation ceci peut s'interpréter par le fait que l'opposant est contraint de faire l'assertion $p\mathrm{gcd}(a,b)=1$ en *B* et donc qu'il est contraint de l'assumer alors que dans la modélisation de la première phase du dialogue l'opposant ne l'avais pas été.

Conclusion. A travers cet exemple, mon objectif était de montrer la possibilité d'un usage de la logique dialogique à des fins modélisatrices dans le contexte particulier qui est celui d'une explication de raisonnement. Si la référence théorique de Brousseau à Lorenzen semble bien connue, je ne connais pas pour autant de travaux en didactique qui en fassent un usage explicite. Pourtant Lorenzen lui-même revendique une certaine proximité entre les règles de sa logique dialogique et des pratiques plus profondes. Selon Marion :

> This is why Lorenzen argues that this rules are abstracted from what he called our 'practical nonverabl activity' (*die Praxis unseres sprachfreien Handelns*) or our 'prelogical speech practice' (*vorlogische Redpraxis*) […]. (Marion, 2009, p. 11)[45]

Je vais maintenant essayer de montrer que le point de vue sémantique apporté par Hintikka sur les dialogues s'avère plus efficace lorsqu'il s'agit de procéder à des modélisations de phase de recherche.

[45] « C'est la raison pour laquelle Lorenzen soutient que ces règles sont obtenues par abstraction à partir de ce qu'il appelle notre 'activité non-verbale' (*die Praxis unseres sprachfreien Handelns*) ou de nos 'pratique langagière prélogique' (*vorlogische Redpraxis*) […]. » (ma traduction)

2.3. La sémantique GTS de Hintikka et la correction de Vernant

Comme je l'ai expliqué dans le premier chapitre de cette partie, il y a chez Hintikka une volonté de rendre compte, à la manière de Kant, de l'activité mathématique. Il défend en particulier l'idée que sa sémantique GTS constitue la structure *medium*, le point de rencontre, entre la réalité extérieure et notre connaissance de cette réalité. Les jeux de recherche et de résolution dont se préoccupe Hintikka sont des jeux d'extérieur dans le sens où ils mettent en œuvre des manipulations d'objets extra-langagiers, là où la logique dialogique de Lorenzen manipule des symboles du langage. La distinction entre logique dialogique et sémantique GTS se retrouve notamment à travers une variation de vocabulaire puisque Hintikka utilise les termes de *Moi-même* et de *Nature* à la place des termes de *Proposant* et *Opposant*. Selon lui, l'erreur de Lorenzen est de s'être concentré sur des *jeux d'intérieur*, des jeux formels, indépendants de l'expérience alors que la démarche rationnelle de recherche fait intervenir des données extérieures au langage. A nouveau, Hintikka s'appuie sur l'argumentation transcendantale pour expliciter son désaccord :

> « In the « transcendental argument » adumbrated above, I located Kant's mistake in a wrong answer to the question: What are the activities by means of which we come to know the truth of a proposition we are dealing with? Kant's answer – for propositions whose logic is essentially that of quantification theory – was seen to be perception, rather than the activities of seeking and finding. In the approaches I am yet different answer is, in effect, given to the same question. It amounts to identifying formal argumentation as the relevant kind of knowledge-acquiring activity. » (Hintikka, 1983, p. 38-39)[46]

Cependant, comme Vernant le fait remarquer, la Nature n'intervient pas dans les activités de recherche et de résolution comme un interlocuteur mais plutôt comme un arbitre (dans un contexte didactique, le rôle de la Nature peut être joué par l'enseignant, le livre, la calculatrice, …) :

> « La découverte de la pesanteur de l'air par Pascal et Torricelli ne s'est pas faite

[46] « Dans « l'argument transcendantal » esquissé précédemment, j'ai situé l'erreur de Kant dans une réponse fausse à la question : Quelles sont les activités par lesquelles nous parvenons à connaître la vérité d'une proposition dont nous nous préoccupons. La réponse de Kant – pour les propositions dont la logique est essentiellement celle de la théorie de la quantification – était vue comme étant la perception, plutôt que des activités de recherche et de résolution. Dans les approches que je suis en train de critiquer une réponse encore différente est, en effet, donnée à la même question. Elle revient à identifier l'argumentation formelle comme étant la sorte d'activité pertinente de l'acquisition de connaissance. » (ma traduction)

> en dialoguant avec Dame Nature, mais en inventant une hypothèse, en élaborant un protocole expérimental et en faisant effectuer la vérification au sommet du Puy de Dôme. Par contre, dans le dialogue épistolaire entre Pascal et Torricelli, la Nature intervenait constamment en tiers venant sanctionner à travers l'enquête expérimentale, les hypothèses proposées. Hintikka a bien vu la nécessité d'articuler l'interaction dialogique sur une transaction intramondaine, mais il a manifestement confondu fonction dialogique et procédure de vérification. La nature n'est pas l'opposant, mais le tiers qui sanctionne, l'autorité à laquelle se plient les savants. » (Vernant, 2004, p. 13)

A la suite de Lorenzen, Brousseau et Vernant, j'utiliserai les termes de Proposant et Opposant pour désigner les interlocuteurs du dialogue. Les règles du jeu de la sémantique GTS sont des adaptations sémantiques de celles la logique dialogique. En particulier, les règles qui traitent des quantificateurs ou des propositions atomiques sont corrigées. Pour ce qui est des règles structurelles, les variations par rapport au système de Lorenzen sont aussi les conséquences de l'approche sémantique de Hintikka. A l'image de l'explication sémantique de la notion de vérité de Tarski, Hintikka utilise les notions de *domaine d'objets* et d'*interprétation*. Pour associer un jeu à une proposition, il faut tout d'abord interpréter chaque constante extra-logique (les éléments des propositions autres que les lettres de variables et les constantes logiques, i.e. les symboles de constantes, de fonctions, de prédicats et de relations) dans une structure d'interprétation. Ensuite, chaque énoncé atomique reçoit une valeur de vérité. Le fait que les jeux considérés soient des jeux sur des domaines d'objets permet une modification des règles de manipulation des quantificateurs. Plus exactement, alors que dans la logique dialogique ces choix sont des choix formels, des choix de lettres où la liberté de l'interlocuteur consiste à décider s'il choisit une lettre déjà introduite (dans les cas où c'est possible) ou non, les choix de la sémantique des jeux consistent en de véritables sélections d'objets parmi le domaine d'objets (la structure interprétative). D'autre part, étant donné que chaque proposition atomique est interprétée et qu'elle a reçu une valeur de vérité (le jeu est à information complète), le proposant peut, comme l'opposant, soutenir une proposition atomique même si l'opposant ne l'a pas préalablement fait.

Un énoncé est dit vrai (dans une structure d'interprétation) si il existe une stratégie gagnante pour le proposant contre n'importe quel opposant sur le jeu associé à l'énoncé et à l'interprétation sur le domaine d'objets. La validité logique d'un énoncé peut alors se définir comme la vérité pour toutes les interprétations possibles sur des domaines d'objets. La sémantique GTS est donc parente avec la sémantique à la Tarski (voir une des publications de Durand-Guerrier (2005, 2007, 2008) pour une présentation dans une perspective didactique) dans le sens où son objectif est de définir les valeurs de vérité des propositions complexes à partir de la valeur de vérité des propositions atomiques. Là aussi et selon l'expression de Vernant (2004) citée ci-dessus, *la novation s'avère essentiellement philosophique* (un point de vue pragmatique sur la sémantique) puisque, si l'on accepte l'axiome du choix, les deux explications de la notion de vérité sont équivalentes. Cependant, pour notre projet qui est d'avancer vers une modélisation permettant une évaluation de l'évolution des stratégies, la différence me paraît significative.

> « En outre, puisque chaque règle du jeu n'est, en fait, que l'image dans le miroir d'une clause de définition récursive de la vérité [celle de Tarski], aucune manipulation des règles de la sémantique véríconditionnelle ordinaire, fondée sur des définitions de vérité, ne permettra de cerner la signification stratégique. » (Hintikka, 1994, p. 178)

Je ne reviens pas sur la possibilité, exploitée dans les travaux récents de Durand-Guerrier et rapidement exposée plus haut, de prendre en compte la dimension pragmatique de l'analyse à l'extérieur de l'analyse logique. La notion de stratégie étant au cœur de la sémantique selon la théorie des jeux, cette théorie me semble en phase avec le positionnement épistémologique de la TSDM. Une de nos hypothèses est que cette notion logico-mathématique de stratégie puisse contribuer à une explication de la notion informelle de stratégie qui se situe au fondement de la TSDM. En particulier, la modélisation en termes de stratégie permet d'expliciter la *correspondance* avancée par Wittgenstein entre *règle* et *signification* :

> « La signification d'un mot est un mode de son utilisation. En effet, cette signification est ce que nous apprenons au moment où le mot est incorporé dans notre langage. »
>
> « C'est pourquoi il y a une correspondance entre les concepts de « signification » et de « règle ». » (Wittgenstein, 1969, 1976, § 61-62)

Un apprentissage peut alors se comprendre comme le processus de conformation aux règles stratégiques d'usage des termes qui constituent leur signification dans la communauté mathématique. Je présente maintenant la correction de la sémantique GTS par Vernant (2004) dont Durand-Guerrier (2007, p. 22) affirme l'intérêt didactique.

L'hypothèse selon laquelle les jeux structurant les processus de recherche de la vérité se faisaient contre la Nature – un joueur omniscient – a conduit Hintikka à considérer que ces jeux étaient des jeux à information complète (que les valeurs de vérité de toutes les propositions atomiques étaient connues des joueurs). D'autre part, c'est une condition vraisemblablement nécessaire à son entreprise fondationnelle :

> « Ce que fait ma caractérisation, c’est qu’elle étend la notion de vérité [à partir de celle des énoncés atomiques] à tous les autres énoncés du langage en question. Le fait que je restreigne ainsi ma tâche ne signifie pas que je ne pense pas nécessaire d'étendre l'analyse modèle-théorétique des significations. Si j'impose cette restriction, c'est parce que sans elle la portée de mon entreprise deviendrait trop large, irréaliste et ingérable. » (Hintikka, 2007, p. 55)

Cependant, cette supposition, selon laquelle chaque proposition atomique a reçu une valeur de vérité, ne paraît pas compatible avec l’étude des dialogues effectifs des élèves qui, contrairement aux joueurs de Hintikka, ne sont pas omniscients. Le plus souvent, ces dialogues sont à information incomplète, c'est à dire que bien que chaque proposition atomique soit interprétée dans un domaine d'objet, les interlocuteurs ne sont pas capables de donner systématiquement une valeur de vérité aux propositions atomiques. Celles-ci sont parfois évaluées (vrai, faux ou inconnu) dans le cours du jeu, notamment à travers l'intervention d'un tiers (la nature, l'expérience, le livre, l'ordinateur, le professeur, ...). La correction de Vernant prend la forme suivante :

> « RS 1’ – Les propositions *atomiques* assertées par chaque interlocuteur sont vérifiées par une procédure transactionnelle acceptée conjointement par les deux interlocuteurs (chaque proposition est alors admise pour vraie, fausse ou de valeur inconnue). » (Vernant, 2004, p. 14)

Cette version corrigée s’écarte définitivement des perspectives fondationnelles de Lorenzen et de Hintikka pour une perspective réellement pragmatique puisqu’il se peut que des jeux se terminent sans vainqueur si par exemple les joueurs ne parviennent pas à se mettre d’accord sur la valeur de vérité d’une proposition atomique ou alors qu’ils se terminent par la victoire d’un joueur qui n’aurait pas dû gagner (si il y a erreur dans l’évaluation d’une proposition atomique). Cette version permet aussi de prendre en compte une critique souvent formulée à propos de l’usage de la logique pour l’analyse didactique, à savoir l’importance du décalage entre les possibilités de l’outil d’analyse et les possibilités des élèves :

> « C’est la théorie des jeux et les travaux du logicien Paul Lorenzen desquels naîtront l’idée du diptyque proposant-opposant – qui deviendra ultérieurement, en Théorie des Situations, le schéma de base de la dialectique de la validation. Or, si en théorie des jeux le proposant et l’opposant disposent des connaissances nécessaires à cette dialectique, ce n’est pas le cas pour les élèves en situation scolaire. » (Sarrazy, 1997, p. 375-376)

Je propose maintenant un exemple de modélisation construite sur cette correction de la sémantique GTS.

Exemple 2 : Une modélisation d'un dialogue s'appuyant sur la sémantique selon la théorie des jeux.

Je m'appuie à nouveau le corpus de Battie (2003). Le dialogue ci-dessous correspond à une partie de l'épisode 4. Il a déjà fait l'objet d'une analyse informelle dans le troisième chapitre de la première partie lors de la discussion à propos autour des modèles de Duval et Toulmin. Les considérations qui suivent relèvent cette fois de la modélisation. Au début de cet épisode, l'enseignante invalide la manipulation des concepts de divisibilité à partir de l'égalité $a = b\sqrt{2}$ et oriente le travail du groupe vers l'égalité $a^2 = 2b^2$. Elle poursuit son intervention avec pour objectif de mettre les élèves sur la voie de l'étape 4 de la preuve classique. Les élèves ne la suivront cependant pas sur cette piste. Une question émerge : le théorème « pour tout entiers naturels a et b, $(p\gcd(a,b)=1) \Rightarrow (p\gcd(a^2,b^2)=1)$ » est-il valide ?

Un extrait issu de l'épisode 4 0. N'oublie pas qu'on a a et b premiers entre eux hein. a^2 est premier à b^2 aussi. 1. Pas obligé. 2. Hum, j'en suis pas très sûre. 3. Attends on va prendre un exemple. 3 est premier avec 2 donc 9 est premier avec 4. 4. Ouais mais bon… 5. J'sais pas si ça marche [inaudible]. 6. Regarde 2 et 5 ils sont premiers entre eux. Non, j'ai rien dit. (Rires) 7. 9 t'as qu'à prendre 9, 9 et 17. Mais moi j'connais pas le carré de 17. 8. J'ai une calculatrice (en rigolant). 9. Vas-y fait, fait 17 au carré divisé par	13. Mais non ! Premiers entre eux pas premiers Ah ouais d'accord.**A1 :** 4^2 et j'sais pas et euh/ 14. 4^2 et j'sais pas et euh/ 15. J'sais pas prends 15 et euh 15 et ? 16. 15 et 4 j'ai mis. 17. Ben c'est pareil. 18. Ou 125 et 16. Ils sont premiers entre eux. 19. J'en sais rien moi. (Rires) 20. Tu mets 125 divisé par 16 tu verras bien… Non c'est pas comme ça qu'on fait. 16 par 16 c'est 4 2, 2 fois 2/ 21. Non moi j'crois qu'ils sont premiers entre eux, 16 et 125. 22. Ouais quand on met les trucs au carré/

9 au par 81. 10. Oui mais c’est deux nombres premiers faudrait prendre/ 11. Oui ben c’est ce qu’on a dit, on a dit des nombres premiers. 12. Entre eux.	23. Ouais mais on sait pas, c’est pas écrit dans le cours mais on peut pas le démontrer dans le cas général / 24. Oh on s’en fout ! 25. Donc on n’a pas le droit de l’utiliser. Enfin j’crois pas, j’sais pas peut-être qu’on l’a dit dans le cours.

Analyse. La recherche étant menée de manière conjointe par les trois élèves du groupe, le proposant et l’opposant ne modélisent pas d’élèves en particulier. Chaque élève peut être tour à tour dans le rôle de l’opposant où de l’opposant. Le phénomène est d’ailleurs accentué par le fait que les élèves jouent plusieurs fois le même jeu afin vraisemblablement d’une part de se convaincre de la validité du théorème et d’autre part de susciter l’émergence d’une stratégie de preuve. Une modélisation dialogique me semble néanmoins pertinente. Comme le fait remarquer Lorenz, continuateur des travaux de Lorenzen, l’intérêt de l’analyse dialogique ne se limite pas au cas où les interlocuteurs sont clairement distingués :

> « Quand un agent accomplit une action, il est aussi en possession d’une « image » de son action (il se voit agir), et de façon similaire, un locuteur qui parle de quelque chose est aussi, en disant, en possession de ce qu’il/elle « signifie » (il/elle agit toujours comme son propre auditeur). […]. Cependant, à être pleinement conscient, on peut transformer de telles différences en des processus d’apprentissage de chacun […]. » (Lorenz, 2003, p. 59-60)

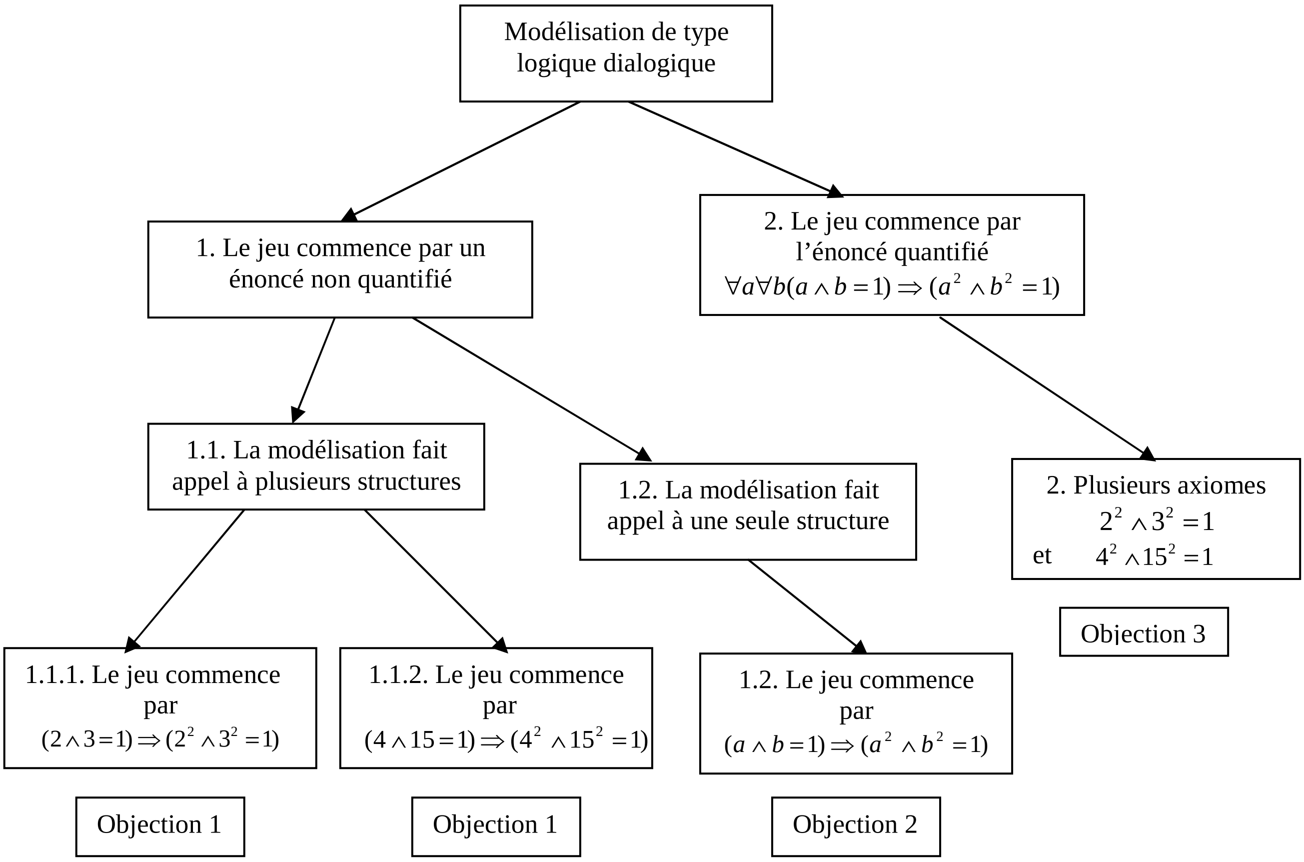
Dans le tableau ci-dessous, chacune des quatre colonnes qui scindent les colonnes « Opposant » et « Valeur de vérité », correspond à une partie du jeu sémantique.

	Opposant				Proposant	Valeur de vérité			
A					$\forall a \forall b (p\,\mathrm{gcd}(a,b)=1) \Rightarrow (p\,\mathrm{gcd}(a^2,b^2)=1)$				
B	*a*=2 *b*=3	*a*=2 *b*=5	*a*=9 *b*=17	*a*=4 *b*=15	$(p\,\mathrm{gcd}(a,b)=1) \Rightarrow (p\,\mathrm{gcd}(a^2,b^2)=1)$				
C	$p\,\mathrm{gcd}(a,b)=1$					vrai	vrai	?	(vrai)
D					$p\,\mathrm{gcd}(a^2,b^2)=1$	vrai	?	?	?/vrai

Commentaires. Les joueurs sont en désaccord sur la validité de la proposition *A* $\forall a \forall b(p\text{gcd}(a,b)=1) \Rightarrow (p\text{gcd}(a^2,b^2)=1)$ dont la structure d'interprétation est l'ensemble des entiers naturels. Il y a donc un enjeu de vérité – (0), (1) et (2). Ensuite, l'opposant fait des choix en *B* d'éléments de la structure d'interprétation – (3), (6), (7), (14) et (15) – qui lui permettent d'attaquer l'antécédent de *B* en *C*. La stratégie de l'opposant consiste à choisir des éléments qui rendent *C* vrai (sinon il perd le dialogue). Le proposant répond alors par le conséquent. Les procédures transactionnelles (Vernant 2004, p. 14) consistent en des calculs (certains sont instrumentés, d'autres non). Certaines parties engagées sont écourtées et ne se terminent pas mais aucune partie ne se termine par la victoire de l'opposant ce qui conduit le groupe à faire l'hypothèse de la validité du théorème (pour l'interprétation qui est faite). La décision semble prise mais le groupe n'entre pas dans le jeu de recherche d'une justification de la robustesse de la stratégie employée, c'est-à-dire d'une justification pour la vérité du théorème.

L'insuffisance d'une modélisation fondée sur la logique dialogique

J'envisage maintenant quatre possibilités de modélisation fondées sur la logique dialogique. Je restreins l'analyse à ce que le point de vue sémantique qualifie de première et de quatrième partie (en considérant que la procédure transactionnelle d'évaluation de $p\text{gcd}(4^2,15^2)=1$ a conduit à lui attribuer la valeur de vérité « vrai »). Cette restriction est favorable au point de vue critiqué et permet de condenser l'argument. Ces possibilités sont récapitulées dans l'organigramme ci-dessous. Je montre pourquoi, de mon point de vue, aucune de ces quatre possibilités n'est satisfaisante.



Modélisation 1.1.1 et 1.1.2. Les deux énoncés $p\gcd(2,3) = 1 \Rightarrow p\gcd(2^2, 3^2) = 1$ et $p\gcd(4,15) = 1 \Rightarrow p\gcd(4^2, 15^2) = 1$ induisent chacun un jeu distinct. Dans ces jeux formels, les énoncés atomiques soutenus par le proposant, qui du point de vue sémantique ont été admis comme vrais, sont considérés comme des axiomes (des règles du jeu) afin que le proposant puisse toujours les soutenir. La modélisation 1.1.1 donne donc lieu au tableau suivant :

Axiome : $p\gcd(2^2, 3^2) = 1$

	Opposant	Proposant
A		$p\gcd(2,3) = 1 \Rightarrow p\gcd(2^2, 3^2) = 1$

B	$p\,\mathrm{gcd}(2,3)=1$	
C		$p\,\mathrm{gcd}(2^2,3^2)=1$

Objection 1. Premièrement, cette modélisation rompt avec l'unité du dialogue en multipliant les structures de modélisation (il est nécessaire d'utiliser autant de modélisations que de parties du point de vue sémantique). Ensuite, le choix de considérer la proposition $p\,\mathrm{gcd}(2^2,3^2)=1$ (respectivement $p\,\mathrm{gcd}(4^2,15^2)=1$) comme un axiome de la modélisation 1.1.1 (respectivement 1.1.2) n'est pas compatible avec la recherche de la fonction dialogique des assertions des élèves. Les « axiomes » font partie des règles structurantes qui contribuent, avec les règles d'usage des connecteurs logiques, à définir la façon dont chacun des jeux peut être joué pas à pas. Considérer la proposition $p\,\mathrm{gcd}(2^2,3^2)=1$ comme un axiome revient à accepter que les règles du jeu puissent se définir en cours de partie. Dans ce cas, toute explication en termes de stratégie semble exclue.

Modélisation 1.2. Le jeu se structure autour de $p\,\mathrm{gcd}(a,b)=1 \Rightarrow p\,\mathrm{gcd}(a^2,b^2)=1$ ce qui permet d'unifier la modélisation. Pour les mêmes raisons que précédemment, l'axiome $p\,\mathrm{gcd}(a^2,b^2)=1$ est nécessaire.

Axiome : $p\,\mathrm{gcd}(a^2,b^2)=1$

	opposant	proposant
A		$p\,\mathrm{gcd}(a,b)=1 \Rightarrow p\,\mathrm{gcd}(a^2,b^2)=1$
B	$p\,\mathrm{gcd}(a,b)=1$	
C		$p\,\mathrm{gcd}(a^2,b^2)=1$

Objection 2. Cette modélisation évite la première partie de l’objection 1. Cependant, le nouvel axiome utilisé ne semble pas plus que les axiomes des modélisations 1.1.1 et 1.1.2 pouvoir être considéré comme un règle logique structurant a priori le dialogue. Ensuite le fait que $p\text{gcd}(a^2, b^2) = 1$ soit une phrase ouverte et contingente (selon les valeurs de *a* et de *b* elle est susceptible d’être vraie ou fausse) n’est pas compatible avec le statut d’axiome : il est très peu probable que cette phrase fasse partie des *convictions inébranlables* des élèves.

Modélisation 2. Dans cette modélisation, le jeu se structure autour de l’assertion par le proposant de la proposition quantifiée $\forall a \forall b (p\text{gcd}(a,b) = 1) \Rightarrow (p\text{gcd}(a^2, b^2) = 1)$. L’objectif est donc d’éviter à la fois l’objection concernant la multiplication des structures d’analyse et d’autre part d’éviter le recours à des phrases ouvertes pour les axiomes.

Axiomes : $p\text{gcd}(2^2, 3^2) = 1$, $p\text{gcd}(4^2, 15^2) = 1$ (ici, comme d’ailleurs dans les modélisation 1.1.1 et 1.1.2, les symboles 2, 3, 4 et 15 ne sont ni des éléments d’une structure d’interprétation, ni des symboles de variables, mais des symboles de constantes)

	opposant		Proposant	
A			$\forall a \forall b (p\text{gcd}(a,b) = 1) \Rightarrow (p\text{gcd}(a^2, b^2) = 1)$	
B	$a = 2 \;\; b = 3$	$a = 4 \;\; b = 15$	$p\text{gcd}(2,3) = 1 \Rightarrow p\text{gcd}(2^2, 3^2) = 1$	$p\text{gcd}(4,15) = 1 \Rightarrow p\text{gcd}(4^2, 15^2) = 1$
C	$p\text{gcd}(2,3) = 1$	$p\text{gcd}(4,15) = 1$		
D			$p\text{gcd}(2^2, 3^2) = 1$	$p\text{gcd}(4^2, 15^2) = 1$

Objection 3. Les difficultés « chronologiques » liées au statut d’axiome pour les propositions atomiques soutenues par le proposant perdurent. Ensuite, dans le dialogue ci-

dessus, l'opposant ne joue pas son rôle : il lui suffirait de faire n'importe quel autre choix en *B* pour gagner la partie.

Conclusion. En rentrant dans le détail de l'analyse, mon objectif est de montrer les raisons pour lesquelles une modélisation adoptant un point de vue sémantique est mieux adaptée à l'extrait choisi qu'une modélisation construite sur la logique dialogique. Pour traduire un jeu sémantique sur un modèle donné en un jeu reposant uniquement sur la syntaxe des énoncés il est « naturel » d'essayer de traduire les informations importantes concernant l'interprétation des énoncés atomiques à travers un certain nombre d'axiomes qui joueront le rôle de spécification syntaxique de ces informations, ceci afin d'obtenir un jeu reposant seulement sur la syntaxe. Rahman & Tulenheimo (2009) utilisent cette idée pour montrer comment construire, étant donné une collection de stratégies gagnantes pour le proposant dans des jeux sémantiques (une stratégie pour chaque structure d'interprétation), une stratégie dans un jeu d'intérieur avec « axiomes » du type des jeux de Lorenzen, et vice versa. Ils affirment :

> « By contrast, the idea behind material dialogues[47] is to avoid having an extra component to dialogues (such as a specification of a model[48]); they are meant to do with the resources of dialogues proper (which are designed for dealing with validity), and the idea is to 'approximate' a characterization of truth by adding a sufficient amount of additional hypotheses − taken to be initial concessions of Opponent − which will serve to specify a model by using the resources of the object language only. » (Rahman & Tulenheimo, 2009, p. 199)[49]

Cependant, cette méthode de traduction n'est pas compatible avec notre objectif. La principale difficulté est une difficulté d'ordre chronologique : il ne me paraît pas pertinent de considérer que les règles du jeu puissent être modifiées en cours de jeu. Plus précisément, la

[47] Ces dialogues ne sont pas matériels au sens d'une intervention d'objets extra-langagiers en leur sein mais au sens de la relativité du dialogue à un modèle donné, lequel est spécifié pas les seuls moyens langagiers.

[48] Ici, le terme de modèle est à prendre au sens de la Théorie des modèles, c'est à dire comme un domaine d'interprétation dans lequel les formules d'une théorie considérée sont vraies (voir Armatte (2005) pour une synthèse autour des différents sens du terme 'modèle').

[49] « Par contraste, l'idée derrière les dialogues matériels [*material dialogues*] est d'éviter le recours à des composants externes au dialogue (comme la spécification d'un modèle); ils sont censés faire avec les ressources propres des dialogues (qui sont façonnés pour traiter de la validité), et l'idée est de faire une 'approximation' de la caractérisation de la vérité en ajoutant une quantité suffisante d'hypothèses additionnelles – considérées comme étant des concessions initiales de l'opposant – qui vont servir à spécifier le modèle en utilisant seulement les ressources du langage-objet » (ma traduction)

correction de Vernant, qui rend possible les transactions intramondaines en cours de dialogue, n'est pas compatible avec la correspondance décrite qui suppose des jeux sémantiques à informations complètes. On peut remarquer que la correction de Vernant est une autre solution au problème soulevé par Lorenzen lorsqu'il refuse de considérer toutes les propositions comme *v*-définies. Ce problème est à la fois un problème fondationnel et un problème pragmatique. Lorenzen avance une réponse fondationnelle en introduisant la notion de proposition *d*-définies et en considérant des *jeux d'intérieur*. Vernant propose une solution au problème pragmatique en considérant des jeux d'extérieur dans lesquels les propositions ne sont pas regardées comme nécessairement *v*-défines. Du point de vue de la modélisation de l'activité mathématique, la correction de Vernant permet d'éviter que le problème chronologique ne s'applique à la modélisation sémantique en permettant aux évaluations des propositions atomiques d'être effectuées en cours de partie. Ces évaluations ne modifient pas les règles du jeu, elles décident seulement de qui gagne (s'il y a lieu d'avoir un gagnant) et ce rôle est prévu dans les règles du jeu.

Je termine avec une remarque à propos des parties dans lesquelles les procédures transactionnelles n'aboutissent pas (comme pour les deuxième et troisième parties de l'exemple considérée). Dans la perspective d'une modélisation assise sur la logique dialogique, les objections relevées précédemment dans le cas où les procédures transactionnelles des parties aboutissent s'appliquent de la même manière. Une nouvelle difficulté vient même s'ajouter. Etant donné que la valeur épistémique associée aux énoncés atomiques soutenus par le proposant n'est pas univoque, les difficultés quand aux statuts des axiomes potentiels de la modélisation se trouvent encore renforcées. L'alternative se situe alors entre écourter la modélisation ou renforcer le caractère arbitraire dans le choix des axiomes. Aucune de ces solutions n'est satisfaisante.

2.4. Le rôle de la sémantique dans les situations de validation

> « Nous pensons avoir montré, que le modèle de Lorenzen, malgré l'intérêt incontestable de l'aspect dialogique qu'il a développé, ne suffit pas pour comprendre et analyser l'activité mathématique. Nous faisons même l'hypothèse qu'il contribue à en donner une image déformée, en exacerbant le travail sur les énoncés au détriment du travail sur les objets, leurs propriétés et les relations mutuelles qu'ils entretiennent. » (Durand-Guerrier, 2007, p. 23)

Prolongeant le travail de Durand-Guerrier, j'ai montré qu'il n'est pas souhaitable, au moins dans certains cas, de séparer dans les analyses les objets mathématiques des énoncés les concernant. Au contraire, il semble que pour une partie de l'activité mathématique, le travail sur la forme des énoncés se fasse conjointement avec un travail sur les objets. Comme les autres éléments du milieu, les objets contribuent à la détermination des jeux de langage et à l'émergence des stratégies dans ces jeux (ils ne servent pas seulement à réfuter les énoncés). Dans la citation de Brousseau que j'ai utilisé à propos des situations de validation dans le premier paragraphe de ce chapitre (Brousseau, 1998, p. 109), celui-ci fait référence aux assertions, aux démonstrations ou aux preuves concernant les objets mathématiques mais pas aux objets eux-mêmes et aux procédures transactionnelles. Ce point de vue qui consiste à privilégier les énoncés par rapport aux objets conduit à faire un usage essentiellement syntaxique de l'analyse logique. Il est probable qu'il participe à la minoration du rôle des objets dans la construction des raisonnements. La trichotomie de la théorie des situations (situations d'action, situations de formulation et situations de validation), dans laquelle j'ai inscrit ce texte, est susceptible de masquer l'importance des objets et des actions sur ceux-ci dans la situation de validation. Je cite à nouveau Brousseau, cette fois à partir d'un autre texte où il est question du schéma de situation de preuve :

> « Les schémas de l'action et de la formulation comportent des processus de correction empirique ou culturelle propre à assurer la pertinence, l'adéquation, l'adaptation ou la conformité des connaissances mobilisées. Mais la modélisation en termes de situation permet de distinguer un nouveau type de formulation. L'émetteur n'y est plus un informateur mais un proposant et le récepteur un opposant. Ils sont supposés posséder les mêmes informations nécessaires. Ils coopèrent dans la recherche de la vérité, c'est-à-dire du moyen de rattacher de façon sûre une connaissance à un champ de savoirs déjà établis, mais s'opposant à chaque instant dès qu'il y a doute. Ils s'occupent ensemble des relations formulées entre un milieu et une connaissance relative à ce milieu. Chacun peut prendre position par rapport à un énoncé, et s'il y a désaccord, demander une démonstration ou exiger que l'autre applique ses déclarations dans la situation d'action avec le milieu. » (Brousseau, 1997, p. 8)

Selon Brousseau les joueurs s'occupent des *relations formulées*, ce que j'ai appelé jusqu'ici des assertions. Des procédures de vérification sémantiques (*application des déclarations dans la situation d'action avec le milieu*) sont susceptibles d'intervenir en cas de désaccord entre les interlocuteurs. La trichotomie de la théorie des situations n'est donc pas exclusive, les situations de validation peuvent intégrer des phases d'action sur les objets de la situation. L'adéquation de cette description avec la *logique dialogique de la véridicité* de

Vernant (2004) est importante. Cependant, je pense avoir montré que les actions sur les objets n'interviennent pas seulement lorsqu'il s'agit de se mettre d'accord sur un énoncé. A ce propos, Durand-Guerrier (2007) fait l'hypothèse d'une centration excessive sur le rôle du contre-exemple en mathématiques. Mettre des objets (génériques ou individuels) à travers les règles d'instanciation universelle ou existentielle dans le milieu contribue à faire vivre les jeux de validation. L'utilisation stratégique des règles du jeu de la validation dépend de ces objets autant qu'elle dépend des autres paramètres de la situation. Autrement dit, la manipulation des objets ne sert pas seulement à confirmer la validité d'un énoncé (ou au contraire à l'invalider) mais aussi à l'émergence des stratégies. Il me semble que la distinction introduite par Balacheff (1987, p. 153) entre situation de décision et situation de validation permet de préciser ces remarques :

> « Dans la situation de décision, les opérations intellectuelles du raisonnement hypothético-déductif (en tant que système légitime et fiable de production d'informations) peuvent être mises en oeuvre sans que pour autant une preuve ne soit produite. Les contrôles logiques et sémantiques fonctionnent localement dans le cours de l'élaboration de la solution. Eventuellement, en tant que mathématiciens, nous reconnaîtrons dans ce processus une organisation qui est de l'ordre de la démonstration ; mais ici elle est dans le fonctionnement du sujet un outil et non un objet (cf. pour cette distinction Douady, 1985). »

Selon cette définition, les situations de décision s'opposent à celles de validation dans leur rapport avec la preuve, dans un cas un objectif du dialogue est explicitement la production d'une preuve et dans l'autre l'objectif est celui de la production d'énoncés vrais. Dans cette citation, il me semble que Balacheff partage l'approche de Brousseau à propos du rôle de la sémantique dans ce type de situations puisqu'il lui confère un statut de contrôle des raisonnements plutôt que de construction de ceux-ci. Cependant, les précisions apportées par cette classification permettent de mieux décrire le rôle des actions dans ces situations. Si on réutilise celle-ci pour classer les dialogues, le dialogue concernant la rationalité de $\sqrt{2}$ est un dialogue de validation, il a une visée démonstrative, et le dialogue rapporté sur la conservation de la relation « être premier entre eux » après un passage au carré est un dialogue de décision, l'objectif est d'abord de se mettre d'accord sur la validité de la proposition.

Dans le premier, le proposant insiste sur la stratégie qu'il met en œuvre. Les objets n'interviennent pas (j'ai montré qu'une modélisation à partir de la logique dialogique est disponible), les choix effectués sont des choix formels de lettres. Cette analyse ne constitue pas pour autant un contre-exemple à la thèse selon laquelle le rôle des objets est important dans la construction des stratégies par les élèves. En effet, dans le cas de ce dialogue, la mise en place de la stratégie gagnante du proposant a été prise en charge presque exclusivement par l'enseignante et on peut douter des apprentissages effectifs des élèves (les élèves ont d'ailleurs déjà vu une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ dans leur cours). Celle-ci intervient dans les épisodes 4 et 5. Ses interventions sont en italiques et précédées d'un *P* :

Extraits issus des épisodes 4 et 5

Episode 4

0. *P : Bon, vous vous en sortez ?*

1. Non.

2. *P : Pas du tout ?!*

3. Non.

--

4. *P : Attends, racine de 2 diviseur ça veut rien dire parce que racine de 2 c'est pas un entier il faut forcément que tu travailles avec un entier. Faut forcément travailler avec ça. Voilà, c'est là dessus qu'il faut travailler !*

5. **A1 :** C'était une bonne idée de mettre au carré ?

6. *P : Oui bien-sûr. C'était, C'était forcément une bonne idée puisque … si tu veux pouvoir travailler sur les entiers, faut, faut avoir ça.*

7. Ben/

8. *P : Donc c'est là dessus qu'il faut travailler.*

9. *P : Ben continue. Qu'est-ce que tu peux en déduire ?*

10. 2 divise a^2.

11. *P : Donc qu'est ce que tu peux en déduire sur a ? Par exemple.*

20. Non.

21. *P : Non ? !*

22. <u>inaudible</u>

23. *P : Mais si elle en avait tout à l'heure.*

24. A1 : a^2 est multiple de 2 et pis euh/

25. P : et a alors, a il est quoi ?

26. a^2 est multiple de 2.

27. P : a^2 est multiple de 2.

28. A1 **:** Ben il est multiple de 2 (hésitant).

29. *P : Forcément ou pas ? Oui ou non je sais pas j'te demande !*

30. Ca fait a fois a multiple de 2, donc le carré est multiple de 2.

31. Oui.

32. *P : Tu essaies de m'écrire ça et puis si a est multiple de a tu vas peut-être pouvoir l'écrire ! Comment tu l'écrirais que a est multiple de 2 ?*

33. a égal 2k.

34. *P : Voilà !*

35. <u>inaudible</u>

36. *P : Attends, avant de dire je vais être bloquée, essaye !*

37. A1 **:** Ah oui, ben forcément, oui ben oui ! a est multiple de 2.

38. *P : Voilà !*

(rires)

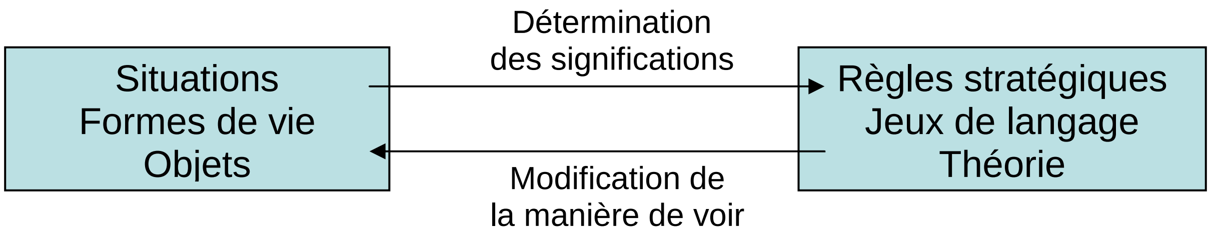
39. *P : Bon ben alors du coup tu vas pouvoir écrire. Ecris-le que a est*

12. Qu'il est supérieur à inaudible . *13. P : Tu peux en déduire un peu plus que ça.* 14. C'est un multiple de 2. *15. P : Voilà ! Ben continue dans cette voie. Suis ta, suis les idées de A1 elles m'ont l'air bonnes.* 16. Eh oui évidemment. (Rires) 17. J'l'ai toujours dit. Euh… -- 18. Dis-nous A1 tout ce qui te passe par la tête. *Episode 5* *19.* P : Alors, est-ce que les idées de A1 aboutissent ?	*multiple de 2 ! Qu'est-ce que ça te donne ? !* 40. A1 **:** *a* égal 2q *41. P : Voilà.* 42. A1 **:** Et donc quand … *43. P : Reprends le moral A2.* (rires) 44. J'attends. *45. P : Ah non ! Tu n'attends pas. Tu aides A1.*

Dans le second exemple que j'ai présenté, les objets interviennent d'abord pour contribuer à la décision. Cependant, il me semble que les élèves, reflétant la culture scolaire, dans laquelle on montre qu'un énoncé est vrai par un travail sur les énoncés et l'on montre qu'un énoncé est faux par un contre-exemple, négligent la possibilité que la manipulation des objets (ici les entiers naturels) puisse contribuer à l'émergence d'une preuve. Cette possibilité est ignorée au moment où une élève s'engage dans l'action de décomposition du nombre 16 en nombres premiers (20), le groupe préférant s'en remettre au cours. Cette conception de l'activité mathématique de validation comme essentiellement restreinte à l'usage de déduction construite à partir des théorèmes du cours et des hypothèses de la situation me paraît susceptible de freiner le travail de recherche. Les élèves semblent ici considérer qu'agir sur les objets et chercher une démonstration sont deux activités disjointes ou dit autrement qu'il y a une rupture entre les moments de décisions et les moments de validation[50].

[50] Dans le premier chapitre de la première partie, je propose deux exemples (issus d'une expérimentation de Barallobres (2007) et d'un mémoire de Bolzano) qui me paraissent remettre en cause l'idée de séparation entre la démarche d'action et celle de validation intellectuelle.

Conclusion



Dans le premier exemple que j'ai traité, un élève expose à un autre élève une preuve. Le dialogue est dans ce cas un dialogue formel, l'élève expose la structure d'un jeu de langage en mettant en évidence des choix stratégiques déjà connus. Il me semble que la logique dialogique de Lorenzen permet une modélisation de ce type de dialogue que j'ai situé sur le pôle droit de notre schéma. Cependant, dans les situations de validation (au sens large) les objets sont des composants indispensables du milieu et leur manipulation est nécessaire à l'émergence des stratégies. Malgré les citations que j'ai ai faites de Brousseau et de Balacheff concernant la place des objets dans les situations de validation (ces citations insistent plus sur la flèche du bas du schéma que sur celle du haut), cette position s'accorde avec les principes de la théorie des situations tant celle-ci insiste sur l'importance des situations pour *montrer* (pôle gauche de notre schéma) *ce qui ne peut être dit* (pôle droit du schéma) selon le vocabulaire de Sarrazy (2005, p. 378).

En intégrant les objets, la sémantique GTS de Hintikka permet des modélisations des activités de recherche qui tiennent compte conjointement des deux pôles. Si l'on considère que l'émergence de stratégies dans une situation est rendue possible par des allers-retours entre les deux pôles du schéma à travers des corrections de la théorie - le plus souvent implicite - (flèche du haut) et des confrontation avec les objets (flèche du bas) (Lakatos, 1984, Dias et Durand-Guerrier, 2005) une modélisation de ce type paraît nécessaire. Il s'agit donc de mettre en avant le rôle des objets mathématiques dans la relation dialectique outil/objet concernant la preuve. Bien qu'il n'y ait pas de rupture franche, j'ai montré que les dialogues pouvaient être de nature différente dans les situations de décision et dans les situations de validation dans le sens où ils peuvent être modélisés de manières différentes et non traductibles d'un point de vue à l'autre. Cette distinction entre décision et validation est vraisemblablement en partie parallèle à celle établie par Marion (2006) entre les jeux de recherche et de résolution (« *games of seeking and finding* ») et les jeux d'assertions (« *games of giving and asking for reasons* »), les premiers servant de support à la sémantique selon la théorie des jeux de Hintikka et les seconds étant des jeux d'intérieur (la logique dialogique de Lorenzen en est une formalisation). En effet, dans un jeu de recherche et de résolution la question en jeu est celle de la vérité d'une proposition alors qu'à travers les jeux d'assertions l'accent est mis sur la justification des propositions. Selon Marion (2006, p. 261), chacun de ces deux types de jeux peut être vu comme une extension raisonnable des idées Wittgensteiniennes dans le sens où les jeux de recherche et de résolution et les jeux d'assertions (sans regarder davantage à leur formalisation) ne peuvent pas être exclus a priori de ce que Wittgenstein entend par « jeux de langage ». Du point de vue de la modélisation, ce qui distingue ces jeux me semble être l'intervention d'éléments extra-dialogiques et en particulier des objets d'une structure d'interprétation. J'ai essayé de montrer que faire une hypothèse réaliste, assumant l'existence d'une structure d'interprétation remplie d'objets mathématiques, est un élément important de l'analyse des dialogues de recherche et de résolution. En particulier, l'explication de la possibilité d'une recherche qui ne sache pas déjà ce qu'elle va trouver passe par le dépassement de ce que j'ai appelé le problème chronologique. Il s'agit de réussir à expliquer comment il est possible d'acquérir de nouvelles connaissances sans que celles-ci ne soient déjà contenues dans les règles d'usage du jeu de la recherche. Le principal objectif de ce chapitre est de montrer qu'une modélisation s'appuyant sur la seule syntaxe (le pôle droit du schéma) n'y parvient pas. Une telle modélisation ne peut pas rendre compte des interactions avec le milieu au cours du temps. Il m'a alors paru indispensable d'intégrer une dimension sémantique (le pôle gauche du schéma) et une dimension transactionnelle qui prenne en charge les interactions avec le milieu (les deux flèches entre les pôles du schéma).

3. QUELQUES REMARQUES SUR LA DIALECTIQUE DES MEDIAS ET DES MILIEUX

Je termine cette partie par une discussion à propos de la dialectique des médias et des milieux. Ce chapitre est une relecture de Barrier (à paraître-a). Cette dialectique est issue de développements récents de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). Voici la définition que donne Chevallard de ces concepts :

> « Généralisant la notion commune correspondante, on entend par média, ici, tout système de mise en représentation du monde (ou d'une partie du monde) à l'adresse d'un certain type de publics : un traité savant est ainsi un média (ou plus exactement une production relevant d'un certain genre médiatique), de même qu'est un média le cours du professeur, ou le système des rumeurs, etc. Le mot milieu, quant à lui, renvoie, en consonance avec la TSD[51], à tout système regardé comme dénué d'intention dans la réponse qu'il peut apporter (de manière éventuellement implicite) à telle question déterminée, en sorte qu'il paraît à son égard comme un fragment de nature. » (Chevallard, 2007-a, p. 745)

Il me semble que cette dialectique, et les questions qu'elle soulève, n'est pas sans rapport avec ma problématique puisqu'il s'agit de s'intéresser aux relations entre les systèmes de représentation du monde et le milieu au sens de la TSDM. L'objet de cette thèse est en effet d'analyser, et de proposer des outils pour analyser les interactions entre les objets mathématiques, compris comme des éléments importants du milieu, et la construction des procédures de validation au sein des jeux de langage, que je regarde, à la suite de Hintikka, comme un medium particulier. Dans ce chapitre, je m'efforce de réinvestir le travail de conceptualisation et de modélisation réalisé jusqu'ici en empruntant cette fois le vocabulaire de la TAD. Mon objectif est à nouveau de situer mon approche parmi celles qui sont le plus utilisées au sein de la communauté didactique, à commencer par la communauté francophone, comme je l'ai déjà fait par rapport aux modèles de Toulmin et de Duval (Partie 1, Chapitre 3) ou par rapport à la TSD (Partie 2, Chapitre 2). Balacheff (2008) rappelle cette nécessité dans un article déjà cité. Ce chapitre est organisé en deux temps. Dans un premier paragraphe, je compare l'usage du terme *anthropologique* qui est fait dans le cadre de la TAD avec celui qui en est fait lorsque des auteurs – philosophes – qualifient d'anthropologique la philosophie de Quine ou celle du Wittgenstein des jeux de langage. En didactique, l'usage de ce terme par

[51] Théorie des Situations Didactiques.

Sarrazy relève de cette dernière pratique. Bien qu'il y ait des points communs entre ces usages, je montrerais que ceux-ci se distinguent au niveau local de l'analyse des dialogues et de la prise en compte des aspects langagiers dans les processus de construction des connaissances. Le deuxième paragraphe s'intéresse à la distinction entre les médias et les milieux du point de vue des dialogues en situation de validation. Les questions qui sont posées sont les suivantes : Par quels moyens les assertions parviennent-elles, ou non, à jouer un rôle de média efficace au sein des jeux de langage de validation ? Quels sont les types de milieux interrogés lors de ces processus d'interprétation ?

3.1. Quelle(s) anthropologie(s) pour la didactique ?

Au sein de la recherche en didactique des mathématiques, le vocabulaire de l'anthropologie apparaît dans deux contextes distincts. Il y a d'une part ce que Sarrazy appelle l'approche anthropo-didactique et d'autre part les travaux en lien avec la Théorie Anthropologique du Didactique. Bien que partageant une partie de son vocabulaire, ces deux cadres d'analyse ont chacun leurs spécificités et des désaccords conceptuels existent (voir par exemple les critiques de Sarrazy (2007-a) concernant les concepts de la TAD). Dans ce paragraphe, je vais essayer d'expliciter succinctement chacune des approches afin d'y situer le travail qui est fait dans cette thèse. Je commence par la présentation de l'approche anthropo-didactique de Sarrazy. La plupart de ses articles récents se situent dans ce cadre (Sarrazy, 1995, 1997, 2005, 2007-a, 2007-b). Comme son nom l'indique, l'objectif de l'approche anthropo-didactique est d'articuler les dimensions didactique et anthropologique dans l'analyse des situations d'enseignement. La première dimension entend rendre compte de la spécificité didactique des situations d'enseignement, c'est à dire ce que les situations portent comme objectif d'apprentissage, leurs intentions spécifiques d'enseignement. Un aspect important des situations d'enseignement est effectivement leur organisation en fonction de la connaissance visée par l'enseignant. Ce constat est un élément important des fondements de la didactique des mathématiques. Dans une certaine mesure, cette organisation peut-être étudiée indépendamment des spécificités individuelles ou collectives des élèves ou des enseignants. Cependant, comme le fait remarquer Sarrazy, cet aspect est insuffisant. La sociologie de l'éducation, par exemple, a montré l'influence de l'environnement des élèves sur les conditions de possibilité des apprentissages. A un autre niveau d'analyse, j'ai aussi montré dans la première partie de la thèse, lors de l'analyse du corpus de géométrie (Partie 1, Chapitre 2), que les croyances des élèves, au sens d'un ensemble de règles que les élèves semblent mettre en œuvre dans leur discours, contribuent à expliquer leurs assertions aussi bien que la situation elle-même. Ces règles ne sont pas réductibles aux seules spécificités de la situation ; elles lui préexistent dans une large mesure. Pour être clair, dans l'exemple développé auparavant, il n'est pas possible de comprendre pourquoi Loïc dessine un pavé au tableau lorsque l'enseignant lui demande d'aller dessiner un polygone si l'on ne s'intéresse qu'à la structuration de la situation didactique et pas à la structuration des jeux de langage des élèves. Sarrazy se sert de la référence à l'anthropologie pour introduire dans l'analyse les spécificités humaines et sociales des individus :

> « Cette seconde dimension, qualifiée d'anthropologique, ouvre sur tout un ensemble de dimensions (comme les croyances, les valeurs, les idéologies…) qui déterminent (non causalement) la manière de faire ce qui est fait […]. » (Sarrazy, 2007b, p. 32)

A travers cette référence, l'objectif de l'auteur est aussi de marquer une certaine méfiance vis-à-vis des approches mentalistes qui confondent les interprétations des faits avec les faits eux-mêmes (Sarrazy, 2007-a) et des approches méta-cognitives qui minorent les effets de contrat et l'impossibilité d'expliciter ce qui doit être appris (Sarrazy, 1995, 1997). Il est en effet tentant, à travers les raccourcis que cela autorise, d'analyser les processus d'enseignement et d'apprentissage à travers des théories mécanistes ou contractuelles construites sur des concepts mal fondés. La TSDM s'est notamment construite sur ce constat en proposant une analyse de la notion de contrat qui explique les apprentissages comme des ruptures de contrats plutôt que comme des accomplissements de contrats. L'approche anthropo-didactique est issue d'un croisement entre les intuitions fondamentales de la TSDM et la philosophie dite *anthropologique* de Wittgenstein laquelle est également une attaque forte contre le mentalisme et le psychologisme mais cette fois dans le domaine de la philosophie de la connaissance :

> « Wittgenstein, Brousseau. Le premier est philosophe ; le second didacticien ; tous deux, passionnés par les mathématiques et leur diffusion, les ont enseigné à de jeunes enfants. Leur intérêt pour une approche non mentaliste des questions de sens, de compréhension et d'apprentissage constitue un point de rencontre original des deux œuvres que nous rapprochons ici sur une idée force : l'indicibilité des relations sémantiques dans ses rapports avec la genèse de la signification. » (Sarrazy, 2007-b, p. 33)

J'ai déjà évoqué la position de Wittgenstein dans la première partie (chapitre 2, paragraphe 2) de la thèse. Cette position se distingue à la fois de l'explication psychologiste du concept de signification mais aussi de celle de Frege. Je reviendrai sur cet usage du vocabulaire de l'anthropologie comme rempart contre le mentalisme plus loin. Avant cela, je présente rapidement le sens dans lequel la Théorie Anthropologique du Didactique est une théorie *anthropologique*.

Sur le plan génétique, la TAD provient d'une volonté d'*émancipation épistémologique et institutionnelle de la position du didacticien et de la science didactique* (Chevallard, 2007-b, p. 1). La présence de l'adjectif *anthropologique* au sein de la TAD entend vraisemblablement rappeler le rôle déterminant des institutions sur leurs sujets, en particulier sur les didacticiens et les enseignants. La perspective émancipatrice est celle de la prise en compte des contraintes et des possibilités qui sont associées à l'assujettissement des individus aux structures dans lesquelles ils évoluent. Cette volonté de prise en compte des influences de l'environnement direct explique aussi la présence du vocabulaire de l'écologie. Ceci s'exprime clairement dans l'article introductif de Chevallard pour la revue *Education & Didactique* :

> « Plus généralement, il me paraît indispensable, ne serait-ce déjà que pour assainir le débat social à propos de l'Ecole – qui n'en peut mais –, de mettre en tension la didactique (en tant que science de la diffusion des praxéologies) et l'ensemble des champs scientifiques qui se vouent à révéler des conditions et des contraintes de tous niveaux tout en laissant fréquemment en suspens la question de leur expression didactique dans la vie des institutions et des personnes. » (Chevallard, 2007-b, p. 23)

A l'image de l'approche anthropo-didactique, Chevallard relève la nécessité d'articuler la dimension didactique, en rapport avec les contenus d'enseignement, avec une, ou plutôt des dimensions anthropologiques qui font peser des contraintes sur la diffusion de ces contenus d'enseignement. Une première étape de la construction théorique de la TAD s'est appuyée sur la notion de rapport $R(x,o)$ d'un individu x à un objet o et de rapport $R_I(p,o)$ d'un sujet idéal en position p dans une institution I à cet objet o :

> « Il s'agit, par cela, d'une part de subsumer sous une unique entité tout ce que la culture, dans sa frénésie « psychologique » a élaboré autour de la vie de l'esprit, d'autre part d'objectiver l'infinitude bigarrée des postures personnelles ou institutionnelles pouvant coexister au sein d'un espace cognitif culturellement partagé. » (Chevallard, 2007-a, p. 708)

L'étape suivante de la théorisation de la TAD est l'explicitation de la notion de praxéologie qui découle d'une analyse de la notion de rapport. L'accent est mis plus directement sur l'activité des élèves et l'étude de ces activités. Connaître l'*équipement praxéologique* d'un individu revient à connaître ses pratiques (en y incluant les discours) dans des circonstances données. Davantage de détails sur la théorisation de la TAD ne me semble pas nécessaire pour en arriver là où je veux en venir. Le fait est que l'anthropologie de l'approche anthropo-didactique est plus locale que l'anthropologie de la TAD. Ce caractère local provient en particulier de la référence à la notion de jeu de langage de Wittgentein. Il y a clairement chez Sarrazy la volonté de prendre en compte les contraintes et possibilités offertes par les micro-institutions que sont les jeux de langage. L'usage de la sémantique des jeux qui est exploré dans cette thèse relève de la même perspective mais d'un point de vue plus analytique. Il y a donc des dissonances sur la manière de faire référence à l'anthropologie dans les deux approches présentées. Ces dissonances concernent en particulier l'importance accordée au langage dans l'analyse. Afin de clarifier ce point, citons à nouveau Chevallard à propos du concept d'institution :

> « Une institution *I* est un dispositif social « total », qui peut certes n'avoir qu'une extension très réduite dans l'espace social (il existe des « micro-institutions »), mais qui permet – et impose – à ses *sujets*, c'est-à-dire aux personnes *x* qui viennent y occuper les différentes positions *p* offertes dans *I*, la mise en jeu de *manières de faire et de penser propres*. » (Chevallard, 2003, p 82)

Chevallard signale dans ce passage l'existence de micro-institutions, comme le sont pour moi les jeux de langage. Selon lui, ces institutions permettent et imposent aux individus des manières de faire et de *penser* propres. Cette conception est également avancée dans Chevallard (2007a, p. 709). Il est intéressant ici de signaler une différence importante de cette approche avec celle de Wittgenstein. Wittgenstein essaye d'étudier les phénomènes de l'esprit, tels que la pensée, par l'examen des usages du langage. Il y a ici une variation fine mais portant à conséquences. Selon Wittgenstein, l'étude des jeux de langage est susceptible de dire *tout* ce qu'il y a à dire sur les processus de pensée. De ce point de vue l'approche anthropologique de Wittgenstein est plus radicale que le simple fait de considérer que les institutions contraignent la pensée (dans le sens d'un processus interne et inaccessible) :

> « C'est l'examen de *nos usages du langage* (l'investigation grammaticale) qui peut nous dire tout ce qu'il y a d'important à dire sur les processus dont veut s'occuper la psychologie. Ce qui est important pour Wittgenstein, c'est notre usage des mots comme penser, se rappeler, voir, attendre, etc., qui est obscurci à nos yeux pour nous par les images – communes à la psychologie et à la

> philosophie – de processus intérieur, de croyance, qui nous bloquent l'accès à l'usage du mot tel qu'il est, à la description de ses emplois. De ce point de vue, Wittgenstein fait bien de la philosophie de l'esprit par la philosophie du langage. » (Laugier, 2002)

Ces questions dépassent largement le cadre de cette thèse. Elles permettent néanmoins d'expliciter une divergence conceptuelle forte par rapport à l'usage qui est fait en didactique de l'étude du langage. Cette divergence a des conséquences méthodologiques quant aux choix des objets d'étude. Par exemple, je me suis efforcé dans cette thèse d'entrer dans une étude relativement fine des pratiques langagières et de la structure des jeux de langage, ceci en référence notamment à Wittgenstein. Ce travail me paraît globalement cohérent avec le cadre de l'approche anthropo-didactique. La TAD semble pour sa part moins s'intéresser à ces questions. Tout du moins, les jeux de langage ne font pas explicitement parti des micro-institutions qu'elle étudie. Chevallard semble par exemple considérer que le langage est une unique institution :

> « En particulier, l'*infans* est assujetti d'emblée à cette institution qu'est le *langage*, et plus précisément à *cette* langue, bien qu'il ne la parle pas encore : il ne peut y échapper, et, en même temps, c'est elle qui lui donnera sa puissance linguistique. » (Chevallard, 2003, p. 83)

Pour Wittgenstein, il y a une multitude de jeux de langage possibles. Chaque activité, chaque forme de vie, fait émerger une nouvelle institution langagière. Le point de vue dialogique (Partie 1, Chapitre 2) dont la sémantique GTS (Partie 2, Chapitre 1 et 2) permet une modélisation se donne pour objectif l'étude de ces institutions dans leur propension à interagir avec l'activité langagière des élèves et la construction des preuves. Avant d'entrer dans la partie plus constructive de ce chapitre, dans laquelle je discuterais de la dialectique entre les médias et les milieux du point de vue de l'anthropologie « locale » Wittgensteinienne, je termine ce paragraphe en revenant sur la critique anthropologique du mentalisme.

La philosophie de Quine est aussi parfois qualifiée d'anthropologique. Quoiqu'il en soit, sa critique du mentalisme est elle aussi véhémente :

> « Nous devons étudier le langage comme système de dispositions au comportement verbal et non pas remonter de manière indolente à la surface de la mer des Sargasses du mentalisme. » (Quine, 2002, p. 229).

Quine réfute le caractère explicatif des objets mentaux. Pour lui, une personne comprend une phrase, par exemple, « cet objet est rouge », si cette personne est disposée à acquiescer à cette phrase à peu près dans les mêmes conditions que les autres locuteurs de la langue française (c'est à dire essentiellement en présence d'un objet rouge). Il insiste sur les fondements sociaux et intersubjectifs du langage : pour lui, l’apprentissage d’un langage est d’abord un dressage imposé par une communauté linguistique. Il affirme ailleurs :

> « Dans les deux cas les mots n'ont de sens que dans la mesure où leur emploi est conditionné à des stimuli sensoriels, qu'ils soient verbaux ou autres. Toute théorie réaliste des fondements de la connaissance doit être inséparable de la psychologie des stimuli et des réponses, appliquées aux phrases. » (Quine, 1977, p. 46)

La position de Quine est donc tout autant critique envers la nature éclairante du mentalisme qu’envers l’antipsychologisme radical de Frege et la notion de signification qui y est associée (Partie 1, Chapitre 2). Cependant, le critère de Quine pour la compréhension des phrases occasionnelles par les individus en termes de maîtrise des conditions de vérité s’applique de diverses manières selon les situations considérées. A la suite de Hintikka, je considère ce critère comme trop restrictif (Hintikka, 1994, p. 170). Il me semble qu’il néglige les aspects stratégiques des assertions au sein des dialogues. Cette discussion recoupe celle à propos des sémantiques vériconditionnelle et vérificationniste. Si le critère proposé par Quine s’applique bien aux énoncés d’observation pour lesquels les jeux de langage consistent à se prononcer sur l’application ou non d’un prédicat à un objet, il devient inadapté pour des énoncés plus complexes. Les énoncés observationnels sont associés à des formes de vie assez élémentaires, dans le cas de la couleur rouge, on peut penser par exemple à l’apprentissage des couleurs par les jeunes enfants. La dimension stratégique de ces jeux est faible dans la mesure où ils se jouent en un coup. Il est possible d’imaginer des jeux dans lesquels les dimensions stratégiques des actions sont plus conséquentes et ou le critère sur la maîtrise des conditions de vérité semble devenir inopérant. Pour utiliser un exemple déjà présenté, les étudiants de l’expérimentation de Battie (2003) semblent comprendre l’énoncé $\forall a \forall b (p\,\mathrm{gcd}(a,b)=1) \Rightarrow (p\,\mathrm{gcd}(a^2,b^2)=1)$ sans pour autant savoir si ses conditions de vérité sont vérifiées ou non (Partie 2, Chapitre 2). Ils montrent une certaine maîtrise stratégique de cette proposition alors qu’ils n’en maîtrisent pas complètement le domaine d’objets et donc les conditions de vérité. Précisément, ils sont en mesure de prendre part à un jeu de langage réglé qui implique cette proposition. Quine semble admettre cette dimension de la compréhension pour les énoncés théoriques lorsqu’il affirme :

> « Les énoncés théoriques, comme la phrase « les neutrinos sont dépourvus de masse », ou la loi d'entropie, ou la constance de la vitesse de la lumière, sont à

> l'autre extrémité du spectre. C'est quand on l'applique à des phrases de ce genre, en somme, que l'aphorisme de Wittgenstein est vrai : « comprendre une phrase signifie comprendre un langage. » De pareilles phrases, ainsi que d'innombrables phrases situées entre ces deux extrêmes, sont dépourvues de significations linguistiquement neutres. » (Quine, 1977, p. 123)

L'accès à la compréhension passe donc par une certaine acculturation langagière. Dans cette perspective la compréhension d'une phrase s'identifie avec la maîtrise de son utilisation pour une activité donnée. Pour y parvenir, il n'y a pas d'autres moyens que de partager les pratiques d'une communauté, intégrer une « forme de vie » dans le vocabulaire de Wittgenstein. Comme l'a mit en évidence Sarrazy, cette conception résonne avec les fondements de la TSDM. Elle insiste sur l'importance de l'étude de l'usage dans l'étude de la connaissance et des processus d'apprentissage par opposition aux constructions mentalistes :

> « Mais si l'on dit « comment puis-je savoir ce qu'il veut dire, je ne vois rien que ses signes ?» - je dis à mon tour : « Comment peut-t-il savoir lui-même ce qu'il veut dire ; lui aussi n'a que des signes ». » (Wittgenstein, 1974, p. 61)

Dans une même veine, Brousseau insiste sur la confusion qu'entretiennent les approches épistémologiques qui distinguent les connaissances des usages :

> « Pourtant, ces conceptions épistémologiques conduisent immanquablement à utiliser un vocabulaire, des méthodes d'études et des concepts différents pour l'objet de l'enseignement, la connaissance, et pour son résultat, l'erreur, ou la représentation, entre lesquels une irréductible opposition s'établit. [...] Finalement, ces théories désarment l'action de l'enseignant en renvoyant à des lois d'apprentissage et en le déchargeant ainsi de la tâche de recréer l'histoire et la fonction de chaque connaissance. Elles vident à l'avance les processus didactiques de leur substance. » (Brousseau, 2004, p. 244-245)

Dans la suite de ce chapitre je propose une analyse « anthropologique », dans le sens fort dégagé précédemment, de plusieurs jeux de langage associés à des situations mathématiques. Cette analyse essaiera également de se situer vis-à-vis de mon interprétation langagière de la dialectique des médias et des milieux.

3.2. La dialectique des médias et des milieux

Dans ce paragraphe, je propose d'utiliser les outils de modélisation mis en place dans le précédent chapitre de cette partie pour conduire une analyse didactique d'un problème d'algèbre linéaire. La modélisation construite permettra aussi de discuter de la dialectique des médias et des milieux. Je m'intéresse donc toujours aux dialogues et aux assertions des élèves au sein de ces dialogues. Les dialogues forment un type particulier de médias dans la mesure où ils mettent en œuvre des assertions porteuses d'information. Cependant, cette information n'est pas univoque. Il appartient aux interlocuteurs d'interpréter les assertions au sein d'un jeu de langage afin d'en déterminer la fonction dialogique. J'ai montré, notamment dans le deuxième chapitre de la première partie que ces processus d'interprétation peuvent conduire à des incompréhensions. Mon objectif ici est d'analyser sur plusieurs exemples le type de milieu qui peut être questionné par un interlocuteur afin de construire sa compréhension d'une assertion. Dans un premier temps, j'étudie le cas d'un dialogue déséquilibré entre un enseignant et un élève en prenant l'exemple d'un exercice d'algèbre linéaire donnant lieu à une erreur assez stable chez les étudiants des premières années universitaires. Je m'appuierai sur une modélisation a priori et sur des éléments expérimentaux recueillis auprès d'étudiants en première année à l'INSA de Lyon. La deuxième illustration concerne à nouveau des dialogues du corpus de Battie (2003). Il s'agit cette fois d'un dialogue entre élèves. Le retour sur ce corpus est aussi l'occasion d'intégrer les hypothèses avancées sur le rôle des objets dans l'émergence des stratégies de preuve dans le cadre de la dialectique étudiée.

Première illustration : dialectique médias/milieux et jeu à information incomplète

Je commence par une analyse a priori d'un exercice d'algèbre linéaire dont l'énoncé est le suivant :

Enoncé. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $f \in L(E)$ telle que $\forall x \in E$, $(x,f(x))$ est lié. Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x$.

Confrontés à cet exercice, de nombreux d'étudiants produisent une preuve de $\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x$ puis en restent là, convaincus de s'être conformés à l'intention didactique du concepteur de l'exercice. Je précise ces remarques en m'appuyant sur la notion de jeu à information incomplète. Les jeux à information incomplète sont des jeux pour lesquels un des joueurs n'a pas une connaissance complète de la structure du jeu. Yildizoglu (2003) modélise ce déséquilibre en faisant intervenir un nouveau joueur « la Nature » qui fixe la structure du jeu en début de partie. Dans cette modélisation, le choix de « la Nature » n'est pas transparent pour au moins un des joueurs. Le joueur qui est lésé au départ n'a pas alors d'autre choix que de s'appuyer sur les choix des autres joueurs pour se construire une opinion sur la structure du jeu qu'il est en train de jouer :

> « Dans un contexte dynamique, les choix du joueur 1 auront un intérêt particulier pour le joueur 2 dans la mesure où ces choix suivent l'observation du choix de la Nature. C'est dans ce contexte que des phénomènes vraiment intéressants, comme l'utilisation des choix comme des signaux ou la révélation de l'information privée, peuvent apparaître. » (Yildizoglu, 2003, p. 113)

J'utilise ce cadre pour proposer une modélisation a priori, fondée sur la logique dialogique, de cet exercice. Dans cette modélisation, un des joueurs – qui modélise l'enseignant – et un seul, dispose a priori d'une information complète. L'autre joueur – qui modélise l'étudiant – doit néanmoins défendre sa position dans le jeu.

Choix de « la Nature ». La « Nature » choisit entre deux jeux. Dans le premier, le proposant engage la partie avec l'assertion :

$$A \Rightarrow B_1 : \qquad (\forall x, \exists \alpha, \exists \beta, (\alpha, \beta) \neq (0,0) \wedge (\alpha x + \beta f(x) = 0)) \Rightarrow (\forall x, \exists \lambda, f(x) = \lambda x)$$

Dans le second, le proposant engage la partie par :

$$A \Rightarrow B_2 : \qquad (\forall x, \exists \alpha, \exists \beta, (\alpha, \beta) \neq (0,0) \wedge (\alpha x + \beta f(x) = 0)) \Rightarrow (\exists \lambda, \forall x, f(x) = \lambda x)$$

Modélisation en termes de jeux dialogiques.

Axiome : $\forall x \big(\exists \alpha \exists \beta (\alpha, \beta) \neq (0,0) \wedge (\alpha x + \beta f(x) = 0) \Rightarrow (\exists \lambda, f(x) = \lambda x)\big)$

	Opposant	Proposant
1		$A \Rightarrow B_i$
2	$\boxed{A}$	
3		$\boxed{x = x, ?\alpha, ?\beta}$
4	$\boxed{(\alpha,\beta) \neq (0,0) \wedge (\alpha x + \beta f(x) = 0)}$	
5		x=x
6	$\exists\alpha\exists\beta(\alpha,\beta) \neq (0,0) \wedge (\alpha x + \beta f(x) = 0) \Rightarrow (\exists\lambda, f(x) = \lambda x)$	
7		$\boxed{\exists\alpha\exists\beta(\alpha,\beta) \neq (0,0) \wedge (\alpha x + \beta f(x) = 0)}$
8	$\boxed{?\alpha, ?\beta}$	
9		$\boxed{(\alpha,\beta) \neq (0,0) \wedge (\alpha x + \beta f(x) = 0)}$
10	$\exists\lambda, f(x) = \lambda x$	
11		? λ
12	$f(x) = \lambda x$	
13		B_i

Commentaires. « La Nature » commence par choisir entre i = 1 et i = 2. Le proposant ne connaît pas ce choix mais s'engage dans la défense de l'énoncé $A \Rightarrow B_i$ (1), que l'opposant attaque en ouvrant un sous jeu autour de l'antécédent du conditionnel (2). Le proposant poursuit en choisissant une lettre à substituer à l'emplacement marqué par x et exige de l'opposant qu'il fasse de même pour les emplacements marqués par α et β (je conserve les mêmes lettres) (3). L'opposant défend alors l'énoncé sans quantificateurs correspondant (4). Même si il peut encore attaquer la conjonction de (4), le proposant a perdu le sous jeu. Il poursuit alors par l'utilisation de l'axiome en forçant l'opposant à le défendre. Le proposant choisit à cette occasion (5 et 6) le même lettre qu'il avait déjà choisie en (3). Le proposant attaque le conditionnel, il ouvre un sous jeu dans lequel il en avance l'antécédent (7). En (8), l'opposant exige un choix de lettre pour substituer aux emplacements marqués par α et β, le proposant construit son choix sur le choix de l'opposant en (3). Comme le proposant l'avait fait en (5), l'opposant abandonne le sous jeu (il pourrait attaquer la conjonction mais cette attaque est sans intérêt stratégique ; une réponse du proposant serait de modifier symétriquement sa stratégie en (5)). En (10), il poursuit par la conclusion du conditionnel (6). Il n'a pas d'autre choix. Le proposant demande à l'opposant de faire un nouveau choix de lettre (11) & (12) puis n'ayant plus d'alternative, le proposant défend B_i (13).

Analyse. Ce jeu possède une symétrie au niveau du choix des lettres associé aux règles concernant la manipulation des quantificateurs. En (9), le proposant reproduit le choix effectué par l'opposant en (5). Or ce choix de lettres constitue l'essentiel de la marge de manœuvre stratégique de ce jeu de preuve. Autrement dit, le proposant a la possibilité de construire jusqu'en (12) une stratégie fiable qui repose essentiellement sur les informations apportées par l'opposant et ceci de manière aveugle par rapport au choix de la nature concernant la structure du jeu qui est joué. Cependant, les règles du jeu forcent le proposant à faire une hypothèse sur i en (13). Il faut tout du moins, pour que le jeu se poursuive que l'opposant fasse un choix sur ce qu'il souhaite défendre en (13), B_1 ou B_2.

Dans le cas où le proposant choisit B_1, la situation est la suivante. Si le choix de « la Nature » était i = 1, le choix de B_1 est un coup autorisé qui permet l'émergence d'une stratégie gagnante. Il lui suffit en effet de reprendre la partie qui vient d'être jouée en repoussant l'attaque de l'axiome après la défense de B_1 et le choix d'une lettre par l'opposant pour l'emplacement marqué par x dans B_1 (ce sont les assertions E et F du tableau ci-dessous). Le tableau ci-dessous détaille la stratégie gagnante du proposant. A l'inverse si le choix de « la Nature » était B_2, le coup du proposant est « hors-jeu ».

	Opposant	proposant
A		$A \Rightarrow B_1$
B	$\boxed{A}$	
C		$\boxed{x = x, ?\alpha, ?\beta}$
D	$\boxed{(\alpha,\beta) \neq (0,0) \wedge (\alpha x + \beta f(x) = 0)}$	
E		B_1
F	x=x	
G		x=x
H	$\exists\alpha\exists\beta(\alpha,\beta) \neq (0,0) \wedge (\alpha x + \beta f(x) = 0) \Rightarrow (\exists\lambda, f(x) = \lambda x)$	
I		$\boxed{\exists\alpha\exists\beta(\alpha,\beta) \neq (0,0) \wedge (\alpha x + \beta f(x) = 0)}$
J	$\boxed{?\alpha, ?\beta}$	
K		$\boxed{(\alpha,\beta) \neq (0,0) \wedge (\alpha x + \beta f(x) = 0)}$
L	$\exists\lambda, f(x) = \lambda x$	
M		? λ
N	$f(x) = \lambda x$	
O		$\exists x f(x) = \lambda x$

P	? λ	
Q		$f(x) = \lambda x$

Dans le cas où le proposant choisit B_2, la situation est la suivante. Si le choix de « la Nature » était i = 2, ce choix est celui que le proposant doit tenter. Il n'existe cependant pas dans ce jeu de stratégie gagnante pour le proposant (sans hypothèses supplémentaires structurant le jeu de langage comme la linéarité de la fonction considérée) et par conséquent aucune stratégie de preuve n'émerge. Si le choix de « la Nature » était i = 1, le choix du proposant est « hors-jeu ».

Conclusion. Le proposant a donc pour tâche en (13) de chercher dans les assertions de l'opposant reçues jusqu'ici des éléments susceptibles de le guider dans la construction de son hypothèse concernant le choix préalable de « la Nature ». Autrement dit, pour parvenir à lire l'énoncé de l'exercice, à rendre effective la fonction de média de cette assertion, il doit s'appuyer essentiellement sur un milieu composé des assertions de l'opposant dans le jeu dans la mesure où celles-ci sont susceptibles de laisser transparaître des informations sur le choix de « la Nature ». Comme évoquée plus haut, la seule possibilité de victoire dans le jeu de preuve présenté est de jouer B_1 en espérant que le choix de « la Nature » ait effectivement été i = 1. Il paraît alors assez rationnel de faire cette hypothèse sur le choix de « la Nature » dans la mesure où le milieu n'est pas enrichi par d'autres éléments. Cette attitude peut être interprétée comme résultant d'un effet de contrat. L'activité mathématique se trouve freinée par la conjonction d'un milieu plutôt pauvre et de l'hypothèse selon laquelle l'enseignant a pour charge la présentation d'un milieu suffisamment riche pour permettre la bonne compréhension de son discours.

Eléments expérimentaux. Les extraits ci-dessous proviennent d'une expérimentation menée auprès de deux groupes d'étudiants de première année de l'INSA de Lyon, une école d'ingénieur qui recrute des étudiants à la sortie du lycée (le plus souvent des étudiants scientifiques ayant eu une mention bien, ou très bien, au baccalauréat). Le premier groupe est composé de trois étudiants *K*, *B* et *T*, le second de quatre *R*, *G*, *A* et *P*. Deux expérimentateurs interviennent dans ces dialogues, *M* (Viviane Durand-Guerrier) et *N* (moi-même). Le sujet complet de l'expérimentation se trouve en annexe (annexe 8). L'expérimentation s'est déroulée sur la base du volontariat et en dehors du temps normal de classe. Le travail des étudiants a été enregistré et filmé. Les extraits qui suivent proviennent de discussions autour du quatrième exercice de l'expérimentation dont l'énoncé est identique à l'exercice évoqué au dessus. Les transcriptions complètent des dialogues de l'expérimentation qui concernent cet exercice sont en annexe[52].

Groupe 1, épisode 1 (assertions 6-8 ; 14-20) :

6. K : Ben tu as $(x, f(x))$ qui est lié ça veut dire que $x+\lambda x=0$ donc $x=-\lambda x$.

7. B : Mais c'est « est lié ».

8. T : Oui, c'est qu'il existe $\lambda \in E$ tel que…

[…]

14. K : Mais, c'est nul ce truc là… Mais c'est tout nul ! Mais c'est évident !! Si la famille elle est liée, ça veut dire que $x+\lambda f(x)=0$ et que λ est non nul. Ben c'est bon, tu as fini !

15. T : C'est lié bon d'accord. Lié, ça veut dire que…

16. B : Lié, ça veut dire que quand/

17. K : Il existe λ tel que $x+\lambda f(x)=0$.

18. B : Non, ça veut dire que ça… Ouais, c'est vrai, avec λ et euh… Différent de zéro.

19. T : Ouais ben si, c'est facile.

20. B : Ben ouais, c'est faisable.

Groupe 1, épisode 2 (assertions 21-24 ; 39-40) :

21. K : Ouais, mais faut montrer que c'est le même pour tout les x.

22. T : Merde.

23. B : Ben on le vérifie deux fois.

24. K : C'est un endomorphisme donc c'est une application linéaire… Ça peut

40. B : C'est vrai, c'est vrai… Fais voir, fais voir…

[K explique sa solution]

Groupe 1, épisode 3 (assertions 58-60 ; 64 ; 100 ; 106-110) :

58. K : Ça veut dire que $k=k'=k''$, tu as pas le choix.

59. T : Ouais, mais ça sert à rien.

60. K : Si, ça montre que le k il est unique.

[…]

64. K : Parce que là, on montre qu'il en existe un mais pas forcément le même pour tous. Là, c'est marqué « il existe λ tel que pour tout x… ». Remarque, pas sûr, il mettrait « un unique ». Nous, on a montré que c'était le même, on est trop fort !

[…]

100. M : Qu'est-ce que vous avez démontré pour le quatrième ?

[…]

106. T : Faut encore que je dise que, en fait, il est unique, qu'ils sont uniques les λ.

107. K : Ben si t'as marqué ça… Voilà.

108. B : L'unicité n'est pas à vérifier mais… Bon.

109. T : Donc il existe un unique/

110. K : Non il existe tout court !

[52] Pour le groupe 1, il s'agit de l'annexe 9 et pour le groupe 2 de l'annexe 10.

peut-être servir. […] 39. K : Ouais c'est bon, j'ai démontré.	[Rires]

Analyse. Dans le premier épisode, les étudiants commencent par engager un jeu d'intérieur, une production syntaxique de preuve (cf. partie 1, Chapitre 1). La manipulation des quantificateurs leur permet d'accéder à la relation $f(x) = \lambda x$ qui correspond à l'assertion (12) de la modélisation proposée (cf. ci-dessus, p. 143). Les étudiants semblent alors pencher pour l'interprétation selon laquelle le jeu de preuve est terminé (14, 19, 20). Au niveau de la modélisation, cette interprétation revient en acte à choisir B_1 en (13) et à supposer que le choix de « la Nature » est i = 1. Les étudiants paraissent trouver le jeu plutôt pauvre, la fonction de média de l'énoncé de l'exercice est critiquée puisque l'interprétation qu'ils en font est peu informative. Dans cet épisode, le milieu fréquenté est composé des seuls éléments de la production syntaxique, c'est-à-dire des assertions formelles. Dans le deuxième épisode, *K* change d'avis sur le sens de $f(x) = \lambda x$ et sur la structure du jeu associé à l'exercice. La fonction médiatique de l'énoncé n'est pas seulement d'informer sur une relation entre les vecteurs et leurs images mais aussi d'informer sur l'invariance de cette relation lorsque les vecteurs changent. La fonction dialogique de la relation $f(x) = \lambda x$ se trouve modifiée. *K* se charge alors d'étendre le milieu interrogé en y intégrant notamment la linéarité de la fonction *f*. Cela qui lui permet de se donner les structures d'un jeu de preuve autorisant l'émergence d'une stratégie de preuve formelle pour la nouvelle interprétation de l'énoncé. Le troisième épisode montre que les étudiants, au moins *B* et *T*, ne semblent pas considérer l'énoncé de l'exercice comme quelque chose ayant une signification déterminée. En particulier l'ordre des quantificateurs n'est pas perçu comme un élément contraignant de la fonction de média de l'énoncé, ce qui est cohérent avec la modélisation proposée, en particulier avec l'intervention de « la Nature » dans le jeu de preuve. La troisième partie de la thèse revient plus en détail sur l'usage des quantificateurs par les étudiants.

Groupe 2, épisode 1 (assertions 83-85 ; 115-119) :	*Groupe 2, épisode 3 (assertions 179 ; 186-197 ; 201-206)* :
83. R : Pourquoi, pourquoi on cherche… Si la famille est liée, ça veut dire tout	179. N : Posez-vous la question du choix des α et des β que vous avez

simplement que tu as λ, tu as $\alpha x+\beta f(x)=0$ et α et β sont pas égaux à zéro. Donc ça veut dire que $f(x)=-(\alpha/\beta)x$.

84. G : Oui, donc on peut exprimer $f(x)=\lambda x$.

85. A, R : Ben oui, oui.

[…]

115. R : Hum… Ouais, ben ouais, c'est ça.

116. R : On écrit ça, c'est bon alors ?

117. G : Ouais, ça marche.

118. A : Tu as besoin de papier ou pas ?

119. R : On est trop fort… Tiens, commence. Attends, je copie l'exercice… Holala, la faute d'orthographe !

Groupe 2, épisode 2 (assertions 128-130 ; 152-158 ; 160-162 ; 173) :

128. N : Vous avez rédigé l'exercice quatre ?

129. R : Ouais, on l'a presque fait.

130. G : Je suis en cours.

[…]

152. N : Euh, donc juste par rapport à ça… Je voudrais vous demander si ce que vous avez démontré, c'est bien ce qu'il y a écrit ici ?

153. P : Oui.

154. A : Ca, ça veut dire non, hein ?

155. R : [Rires]

156. P : Ah non, il existe λ…

157. G : Ben, il existe λ et ce λ est égal à $-\alpha/\beta$.

158. R : Ben oui, il existe. λ appartient à *IR*… Ouais, il existe parce que α et β, ils sont différents de zéro.

[…]

160. A : Moi, je trouve ça logique aussi, mais trop en fait.

pris… Quand est-ce que vous faites ce choix ?

[…]

186. N : Ouais, mais ils viennent d'où, pourquoi ils existent ?

187. A : Ben c'est nous qui les posons.

188. R : Parce que la famille est liée.

189. P : Parce qu'elle est liée, ouais.

190. N : Donc vous les choisissez après avoir choisi les *x* quoi ?

191. P : Ben…

192. R : Ah ouais…

193. P : *x*, il est quelconque donc euh…

194. R : C'est pour un *x* fixé qu'on a α et β, c'est pas forcément pour tout *x*… Parce qu'après c'est marqué pour tout *x*.

195. G : Ah ouais, ouais, ouais…

196. R : Ah ouais… Parce que c'est pour chaque *x* fixé, tu as la famille qui est liée…

197. G : Qui est liée, mais elle est pas liée pareil pour tous les *x*.

[…]

201. R : Ben, tu poses deux *x* différents et tu montres qu'on n'a pas le même λ.

202. P : Je…

203. R : Non, je sais pas ?

204. P : Qu'est-ce que ça pourrait être d'autre à part λx ?

205. G : Je vois pas trop comment le démontrer.

206. R : Ouais, moi non plus, je sais pas. Mais ça pourrait être ça qu'il faudrait démontrer.

[…]

Groupe 2, épisode 4 (assertions 227-229) :

227. A : On n'a aucune… On n'a rien sur *x* et *f*(*x*)…

228. R : Ah mais, il faut « montrer

161. P : Attends, y a une subtilité, là… 162. A : Ben oui, y a une subtilité. [Ils reproduisent le même jeu que plus haut.] 173. P : Ça, c'est un truc pour nous faire douter devant la caméra. [Ils continuent de chercher.]	que », donc ça veut dire que c'est juste. Donc ça veut dire que les α et β vont varier mais peut être que le rapport justement, il varie pas… Ça, ça doit aller avec le fait que c'est une application linéaire. 229. G : Si, mais justement, j'étais en train de regarder ça, j'ai voulu mettre un contre-exemple, mais en voulant mettre un contre-exemple je me suis rendu compte que ce que j'ai mis, c'était pas linéaire. Donc justement, je pense qu'il faut utiliser le fait que c'est linéaire maintenant.

Analyse. Dans l'épisode 1, les étudiants déroulent les définitions selon des procédés syntaxiques. Il s'agit donc à ce moment d'un jeu d'intérieur. Comme le groupe précédent, ils pensent avoir terminé l'exercice un fois parvenus à l'expression $f(x)=\lambda x$. L'intervention de l'expérimentateur (152) – épisode 2 – est alors nécessaire pour immiscer le doute (160-162, 173) dans le groupe. Ce doute concerne davantage la fonction de média de l'expression $f(x)=\lambda x$ au sein du jeu de preuve, sa fonction dialogique, que la correction de l'expression elle-même. A l'image de l'autre groupe, *A* semble trouver la structure du jeu, dans la forme de leur interprétation commune de l'énoncé, trop triviale au regard des habitudes de la classe (160). Plusieurs nouvelles interventions de l'expérimentateur (179, 186, 190) permettent de débloquer la situation (épisode 3). Pour autant, deux étudiants ne semblent pas complètement convaincus de la nécessité de modifier la structure du jeu sous-jacent (204, 206). A nouveau, le procédé est exclusivement syntaxique, le milieu utilisé pour faire fonctionner la fonction de média de l'énoncé est composé des seules assertions des étudiants et de l'expérimentateur. Dans l'épisode 4, le type de milieu interrogé change. *G* dit s'être appuyé sur la recherche d'un contre-exemple pour se rendre compte de la nécessité d'utiliser le caractère linéaire de la fonction dans la preuve. En effet, *G* s'aperçoit que l'énoncé, compris de manière régulière, est faux si l'on autorise des fonctions non linéaires à faire partie de la structure d'interprétation. Cette dernière remarque rejette définitivement la structure de la première tentative de preuve (épisode 1). Il est alors naturel de modifier la structure du jeu, en introduisant de nouveaux axiomes structurants, de manière à exclure la présence de ces éléments de toutes structures potentielles d'interprétations. Le caractère linéaire de la fonction considéré est un bon candidat pour ce rôle.

Synthèse. Les deux analyses des extraits proposés montrent une difficulté pour les étudiants à situer la relation $f(x) = \lambda x$ dans un cadre stratégique. Sa fonction dialogique n'est pas transparente. La modélisation proposée, construite sur le principe des jeux dialogiques à informations incomplètes, rend compte de cette difficulté en introduisant de l'aléatoire, le choix de « la Nature », dans la structure du jeu. Les deux transcriptions analysées distinguent deux temps dans la recherche des étudiants. D'abord, les deux groupes semblent jouer un jeu dans lequel leur interprétation de l'énoncé à démontrer s'identifie avec le cas de notre modélisation pour lequel le choix de « la Nature » est i = 1. Ensuite, un changement s'opère vers la pratique d'un jeu dans lequel la stratégie initiale échoue. Au niveau de la modélisation, ce jeu peut s'identifier avec celui pour lequel le choix de « la Nature » est i = 2, complété par la présence d'axiomes concernant la linéarité de la fonction. Le milieu utilisé par les étudiants est composé d'assertions formelles (à l'exception de l'épisode 4 du groupe 2) dont ils recherchent les possibilités stratégiques au sein de la structure explorée. Le fait que ces possibilités soient fortes et immédiates dans le cas où l'énoncé est compris comme $(\forall x, \exists \alpha, \exists \beta, (\alpha, \beta) \neq (0,0) \wedge (\alpha x + \beta f(x) = 0)) \Rightarrow (\forall x, \exists \lambda, f(x) = \lambda x)$ – elles débouchent de manière immédiate sur une stratégie gagnante – conduit les étudiants à être peut regardants vis-à-vis du média, le langage, qu'ils utilisent.

Deuxième illustration : les dialectiques médias/milieux et décision/validation

Je reviens ici sur des extraits du chapitre 8 la thèse de Battie (2003) que j'ai déjà utilisés au chapitre précédent de cette partie. Mon objectif est d'essayer d'intégrer les questions liées à la dialectique média/milieu à ma précédente analyse sur la place de la sémantique dans les situations de validation en mathématiques. Je commence par revenir sur l'extrait provenant de l'épisode 4 dans lequel un groupe d'étudiants se posait la question de la validité de l'énoncé « tout entiers naturels a et b, $(p\operatorname{gcd}(a,b) = 1) \Rightarrow (p\operatorname{gcd}(a^2, b^2) = 1)$ ». Ma modélisation s'est construite sur une analyse sémantique puisqu'au cours du jeu de langage, de véritables choix d'objets sont intervenus pour enrichir le milieu. Comme je l'ai souligné, ce dialogue est resté un dialogue de décision dans la mesure où les élèves n'ont pas su utiliser les différentes parties et choix effectués pour glaner de l'information sur les raisons du succès de chacune des parties engagées. Les objets mathématiques amenés dans le milieu n'ont pas permis de montrer la raison des victoires répétées du proposant dans le jeu. Les assertions des joueurs, regardées dans le rôle de média, n'ont pu être interprétées (situées stratégiquement). Je reviens maintenant sur le deuxième extrait analysé dans le chapitre précédent. Il s'agit de l'épisode 6 du corpus de Battie dans lequel une élève expliquait à d'autres élèves sa preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Ce dialogue est de validation, l'usage des assertions par les élèves est un usage stratégique et non plus exploratoire comme dans le jeu précédent. Les objets n'interviennent plus dans le milieu, les différents choix formels suffisent à rendre visible la signification des assertions du proposant, à interpréter les messages du média. Autrement dit, le milieu est exclusivement composé d'éléments langagiers. Cependant, tous les jeux de langage de la séance autour de la rationalité de $\sqrt{2}$ ne sont pas de ce type. Voici par exemple un extrait de l'épisode 1 de ce corpus.

Episode 1 : a égal b$\sqrt{2}$ / Eh, a et b sont premiers entre eux ? Non, là on sait rien sur a et b. **A :** Oui mais s'il est rationnel normalement c'est de la forme irréductible donc a et b… Oui. C'est vrai. J'ai dit c'est vrai. **A :** Donc, a devrait être multiple de $\sqrt{2}$ Regarde si tu l'écris comme ça. Oui. a divise $\sqrt{2}$. Oui. Or il peut pas diviser $\sqrt{2}$.	**A :** Non $\sqrt{2}$ il divise a. Ah oui, excuse-moi, $\sqrt{2}$ il divise a… Ben si c'est, imaginez a c'est 4. $\sqrt{2}$ il divise 4. **A :** C'est a sur $\sqrt{2}$ égal b. Donc. Ouais euh, a c'est un multiple de $\sqrt{2}$? Fin euh, $\sqrt{2}$ divise a. Oui. -- - Ouais mais bon eh mais attends mais c'est chaud ! $\sqrt{2}$ divise a et euh ça ça donne un entier b. ça j'suis d'accord. Oui mais bon comment tu trouves a et b ? ...

Il y a dans ce dialogue un aller retour entre le formel (« non là on sait rien sur *a* et *b* ») et le sémantique (« imaginez *a* c'est 4 »). Contrairement à l'extrait de l'épisode 6, les joueurs ne sont pas fortement engagés envers leurs assertions, il n'y a aucune injonction. Le jeu est un jeu de décision, les énoncés sont projetés dans le milieu dans l'attente de voir émerger une stratégie pour le moment absente. On peut également noter que les objets ne sont pas absents du milieu. Le nombre 4 est également manipulé par les interlocuteurs pour essayer d'accéder à la fonction médiatique des assertions en jeu.

Synthèse des exemples. Dans les dialogues de décision, il semble que le dialogue soit équilibré dans le sens où les assertions de chacun des joueurs ont un même statut de média. Le milieu interrogé se construit sur les choix des partenaires du jeu. Parmi ces choix, il y a dans les exemples traités le choix des assertions effectuées par les joueurs mais également le choix d'objets dans une structure d'interprétation. Dans les dialogues de validation, l'usage de la parole est déséquilibré. Un des joueurs a une position privilégiée, ses assertions sont regardées par l'autre joueur dans leur fonction de média. Cet autre joueur a alors pour tâche de relever leur dimension stratégique en s'appuyant pour l'essentiel sur les assertions du joueur en position privilégiée. Comme je l'ai explicité dans la première partie, il me semble que l'activité mathématique de validation se caractérise par des processus dialectiques entre décision et validation, entre jeux d'extérieur et jeux d'intérieur. Je propose de reformuler cette thèse en empruntant le vocabulaire de la dialectique des médias et des milieux appliqué aux jeux de langage. Au niveau de la validation mathématique, les jeux de langage forment le média par lequel les interlocuteurs appréhendent aussi bien les objets mathématiques que leur description au sein d'une théorie. Le milieu interrogé peut être de nature différente, selon qu'il comporte ou non des références à un domaine d'interprétation. Une approche formelle du processus d'interprétation stratégique des assertions (dans leur fonction de média) comporte des difficultés liées aux effets de contrats, à l'ineffabilité de la sémantique. Une approche sémantique permet un enrichissement du milieu susceptible de lever certaines ambiguïtés de langage (cf. partie 1, chapitre 2). Par exemple, la transcription du groupe 2 travaillant sur l'exercice d'algèbre linéaire montre comment un étudiant en vient à réinterpréter l'énoncé de l'exercice dans sa dimension stratégique par une confrontation avec une interprétation (épisode 4) :

G : Si, mais justement j’étais en train de regarder ça, j’ai voulu mettre un contre-exemple, mais en voulant mettre un contre-exemple je me suis rendu compte que ce que j’ai mis c’était pas linéaire. Donc justement je pense qu’il faut utiliser le fait que c’est linéaire maintenant.

Pour autant, les procédés sémantiques ne sont pas transparents, la présentation d’un objet ne règle pas nécessairement les divergences de vue. Autrement dit, la référence est sous déterminée par l’ostension (cf. partie 1, chapitre 2, notamment la référence à Quine). Par exemple, dans l’expérimentation de Battie (2003), les élèves ne « voient » pas qu’un nombre et son carré ont les mêmes diviseurs premiers alors que la manipulation qu’ils font des nombres 4 et 15 permet l’émergence de cette propriété pour des observateurs plus habitués à fréquenter les entiers naturels. En résumé, la tâche de rendre effective la fonction de média d’un jeu de langage est soumise à deux difficultés, chacune associée à la nature du milieu interrogé (syntaxique ou sémantique). Sarrazy (2008, p. 37) exprime vraisemblablement quelque chose de proche lorsqu’il affirme :

> « L’ostension est à la dévolution ce qu’est l’explicitation au contrat : elle désigne toujours un au-delà qui veut être montré mais qui ne peut être vu que par celui qui sait (c’est souvent à ce « vu » que l’on voit que l’élève a appris). » (Sarrazy, 2008, p. 37)

Regarder les processus de validation comme des processus dialectique entre jeux d’intérieur et jeux d’extérieur revient alors à regarder les processus d’interprétation des jeux de langage comme des processus dialectiques entre l’interrogation de milieu syntaxique et de milieu sémantique.

Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre a pour objectif de situer l’apport théorique de l’approche sémantique et dialogique proposée dans cette thèse avec d’autres approches bien installées dans le champ didactique, la TAD et l’approche anthropo-didactique. Il fait suite à la présentation de l’outil de modélisation des dialogues, la sémantique selon la théorie des jeux dans une version amendée par Vernant, que je propose pour un usage didactique en cohérence avec les fondements épistémologiques de la TSD. Cette recherche de positionnement théorique me paraît susceptible de favoriser les discussions autour de problématiques issues de recherches conduites dans d’autres cadres conceptuels. La question de la dialectique média/milieu en est un exemple. Après avoir souligné les divergences quant à la prise en compte des questions langagières au sein du travail didactique entre les méthodes de cette thèse et la TAD à travers une discussion sur l'usage du vocabulaire anthropologique, il m'a semblé pertinent d'envisager l'écho que pouvait trouver cette dialectique par rapport à mes questions de recherche.

CONCLUSION

Dans la première partie de la thèse, je présente des arguments en faveurs de l'intégration d'une approche sémantique et dialogique dans l'analyse didactique du processus de validation en mathématiques. Dans cette partie, je montre comment la sémantique GTS permet de construire des modélisations de dialogues d'élèves dans les situations de validation qui se situent dans l'approche sémantique et dialogique explicitée dans la partie précédente. Ce travail peut être vu comme un prolongement des recherches de Viviane Durand-Guerrier concernant l'usage didactique de la théorie élémentaire des modèles de Tarski dans le sens d'une intégration de la dimension pragmatique au sein même de la modélisation de l'activité mathématique. Cette méthode de modélisation permet de construire un argument assez précis en faveur d'une approche sémantique de certaines activités mathématiques, celles dans lesquelles les objets sont des éléments indispensables du milieu. Par la suite, j'ai réinvesti les méthodes d'analyse présentées pour engager une discussion à propos de la dialectique des médias et des milieux qui est issue des réflexions récentes de la TAD. En quelques mots, les processus d'interprétation des assertions dans leur fonction de média me paraissent relever d'un usage dialectique de deux types de milieux, un milieu syntaxique et un milieu sémantique, lesquels sont soumis respectivement aux paradoxes du contrat et de l'ostension.

Les résultats de cette partie sont, comme ceux de la partie précédente, de nature essentiellement théorique. Il s'agit dans les deux cas de proposer et d'analyser des outils, conceptuels ou plus formels, pour l'analyse didactique de la validation mathématique. Ce travail a mobilisé aussi bien des réflexions issues de la philosophie du langage et de la logique que des réflexions issues de la didactique des mathématiques. Malgré des différences de méthodologie entre les deux disciplines, il me semble que des interactions peuvent être fructueuses[53].

Les deux premières parties de la thèse ont montré le rôle central de la manipulation des objets dans l'activité mathématique. Je me suis appuyé sur cet argument pour défendre l'intérêt de l'usage d'une théorie de la quantification, laquelle rend compte de la manière dont

---

[53] DURAND-GUERRIER, V. & BARRIER, Th. (2008). Interactions between Philosophy and Didactic of Mathematics: the case of logic, language and reasoning, *11th international congress on mathematical education, Discussion Group 5*. 6 au 13 Juillet 2008, Monterrey, Mexico.

l'on se donne les objets mathématiques, pour l'analyse didactique (Partie 1, Chapitre 3). La sémantique GTS, et sa correction par Vernant, en sont des exemples. Pour les mêmes raisons, mais en changeant d'angle d'analyse, d'une réflexion sur les outils didactiques à une réflexion directement didactique, il me semble important de s'intéresser aux pratiques des étudiants concernant la quantification. Ceci fait l'objet de la partie qui vient. Cette dernière partie sera aussi l'occasion de confronter les outils développés dans cette partie à un corpus plus conséquent afin d'en évaluer plus précisément la pertinence.

PARTIE 3 : LA PRATIQUE DE LA QUANTIFICATION CHEZ LES ETUDIANTS : L’EXEMPLE DE L’ANALYSE

INTRODUCTION

B : On peut tromper mille fois une personne mais…
T : Non, on peut pas.
B : Si on peut ![54]

A plusieurs reprises au cours des deux parties précédentes, j'ai essayé de montrer que la logique propositionnelle était insuffisante pour conduire certaines analyses didactiques. Par exemple, ceci était explicitement l'objectif du troisième chapitre de la première partie dans lequel j'ai proposé une critique des modèles de Duval et de Toulmin. L'alternative que j'ai mise en avant repose sur une analyse des propositions qui utilise la distinction, issue des travaux de Frege, entre « objet » et « concept ». Ce type d'analyse s'accompagne naturellement de l'usage d'une théorie de la quantification. En effet, une fois le langage analysé à travers ce point de vue, il devient nécessaire de prendre en charge la manière dont les objets peuvent être, ou non, être subsumés par un concept donné. Je me suis également situé dans cette perspective dans la deuxième partie. Cette fois-ci, je l'ai fait de manière plus indirecte, à travers la présentation de la sémantique selon la théorie des jeux et la défense de sa pertinence didactique comme outil d'analyse des dialogues des élèves en situation de validation. Dans cette deuxième partie, j'ai également explicité la filiation de la sémantique GTS avec la philosophie kantienne des mathématiques. Le fait que Hintikka se revendique de cette approche de l'activité mathématique montre que la sémantique GTS, et par extension sa correction par Vernant, accorde une place centrale dans ses préoccupations à la question de la quantification. En effet, Kant considère que la « construction des concepts » à travers l'intuition « pure », c'est-à-dire la manière dont il explique la façon dont nous accédons aux particuliers en mathématiques, est un élément caractéristique de l'activité mathématique. Pour résumer, les deux premières parties de la thèse mettent en évidence l'importance de la quantification du point de vue de l'observation didactique des pratiques mathématiques.

Cette troisième et dernière partie procède à un changement de point de vue. La cible du travail n'est plus la conceptualisation ou la modélisation en didactique des mathématiques mais plus directement les pratiques des étudiants en mathématiques à l'université concernant

[54] Extrait d'un dialogue de la pré-expérimentation (assertion 68-70, annexe 12).

la quantification. Il s'agit d'une approche didactique alors que l'essentiel du travail précédent consistait en une réflexion sur la didactique. Ce changement de point de vue est motivé par le travail théorique précédent. Si les processus de quantification tiennent une place centrale dans l'activité mathématique, il est important d'en étudier la maîtrise par les élèves ou les étudiants. En particulier, il semble qu'une maîtrise assez fine de la quantification et de son formalisme est nécessaire pour les étudiants en mathématiques de l'enseignement supérieur. Plus précisément, de nombreuses notions d'Analyse comme celle de convergence, de continuité (et de continuité uniforme), de limite ou de borne supérieure s'appuient sur un usage relativement complexe de la quantification. Ces constats soutiennent mon choix du domaine de l'Analyse et du niveau de l'enseignement supérieur. Par ailleurs, plusieurs recherches de didactique ont mis en évidence la difficulté des apprentissages touchant à la quantification dans le contexte de l'enseignement supérieur (Chelloughui, 2004, Dubinsky & Yiparaki, 2000, Durand-Guerrier & Arsac, 2005, Epp, 2009, Selden & Selden, 1995). Cette dernière partie comprend néanmoins un deuxième aspect qui le rattache aux préoccupations théoriques des parties 1 et 2. Le travail expérimental qui va être mené dans cette partie va permettre de confronter sur des corpus propres les outils d'analyse introduits auparavant. Une ambition sera alors de discuter de leur pertinence.

La partie est organisée en trois temps. D'abord, je complète l'analyse logique de la quantification réalisée jusqu'ici. J'explicite et compare plusieurs explications logiques de la quantification, aussi bien au niveau des jeux d'intérieur que des jeux d'extérieur. La perspective de ce travail est d'étoffer les possibilités d'analyse de l'activité mathématique de quantification. Cette démarche épistémologique se poursuit dans le deuxième chapitre de cette troisième partie à travers une approche historique. Je propose une lecture de plusieurs preuves en Analyse produites au XIXème siècle par trois mathématiciens, Bolzano, Lacroix et Duhamel. Mon analyse épistémologique comprend donc des aspects logique et historique. Le troisième chapitre correspond à l'approche expérimentale proprement dite. Deux expérimentations sont présentées. Les analyses a posteriori sont construites en appui sur des corpus composés de transcriptions de dialogues de groupes d'étudiants de plusieurs niveaux. Dans la première expérimentation (la pré-expérimentation), des étudiants sont confrontés à des énoncés quantifiés dans un contexte non mathématique. Leur tâche est de se prononcer sur la valeur de vérité des énoncés. Ils doivent aussi chercher à construire une interprétation sémantique pour laquelle l'énoncé change de valeur de vérité. Le contexte de la principale expérimentation (la seconde) est celui de la lecture par des groupes d'étudiants de preuves d’Analyse comprenant des pas de déduction qui, d’un point de vue moderne, peuvent paraître discutables. Comme je l’ai souligné dans la première partie, les processus d’évaluation et de production de preuves ne peuvent reposer de manière exclusive sur des arguments logiques explicites. Ceci est notamment le cas pour les preuves en Analyse, y compris pour celles qui sont proposées dans les premières années de l’enseignement supérieur. Elles seraient le plus souvent illisibles si elles étaient écrites selon les standards d’une logique mathématique. De nombreux pas d’inférence reposent sur un consensus collectif, une certitude (Wittgenstein, 1976), qui repose à son tour sur une bonne familiarité avec le domaine mathématique en jeu. Une difficulté importante au niveau de l’enseignement est que ces pratiques sont tacites et susceptibles de nourrir des incompréhensions. Mon expérimentation principale s’intéresse à ce phénomène en essayant de d’analyser le comportement des étudiants.

1. LES EXPLICATIONS LOGIQUES DE LA QUANTIFICATION

Pour commencer, je présente la manière dont plusieurs approches logiques rendent compte de la quantification mathématique. Même si certaines de ces explications revendiquent une proximité avec la pratique ordinaire des mathématiques, mon objectif n'est pas de proposer des outils pour servir de fondement à une modélisation de l'activité des étudiants comme j'ai pu le faire dans la partie précédente (partie 2, chapitre 2). Dans une perspective didactique, ces explications logiques contribuent à rendre disponible un ensemble de repères visant à mieux comprendre le rôle de la quantification du point de vue des notions de déductibilité et de vérité. L'explicitation de ces repères permet de comparer précisément les pratiques des étudiants avec un ensemble construit a priori. L'écart qui peut être relevé entre les pratiques effectives des étudiants et les explications logiques de ces pratiques offre un espace pour la construction d'un discours didactique. Cette explicitation me paraît d'autant plus nécessaire qu'aucun cadre particulier ne permet actuellement d'aborder les questions de quantification dans l'enseignement supérieur de manière homogène[55].

1.1 Au niveau des jeux d'intérieur

Un système formel de déduction a déjà été présenté dans la partie précédente (partie 2, chapitre 2). Il s'agit de la *Logique Dialogique* de Lorenzen. Je propose également à cet endroit plusieurs exemples d'usage. Je rappelle simplement ci-dessous les règles de manipulation associées à chacun des deux quantificateurs :

Règle de manipulation pour le quantificateur universel : Si un joueur soutient $\forall x A(x)$, l'autre joueur peut attaquer l'énoncé universel. Le défenseur poursuit alors par l'assertion *A(t)* où la lettre *t* est choisie par le joueur qui attaque.

[55] Arsac & Durand-Guerrier (2001) relèvent par exemple la variété des habitudes des enseignants concernant leur traitement de la quantification existentielle à l'université.

Règle de manipulation pour le quantificateur existentiel : Si un joueur soutient $\exists x A(x)$, l'autre joueur peut attaquer l'énoncé existentiel. La défense consiste alors à choisir une lettre *t* et à faire l'assertion *A(t)*.

Je présente maintenant un autre système de déduction, la *Déduction Naturelle*. Ce système permet de construire des démonstrations dont la structure est assez proche de la structure ordinaire des preuves mathématiques. Pour cette raison, il a déjà été utilisé en didactique des mathématiques (Durand-Guerrier & Arsac, 2005, Arsac & Durand-Guerrier, 2001, Chellougui, 2004). Ces auteurs s'appuient sur la version de la déduction naturelle due à Copi (1954). Concernant la quantification, le choix de présentation que j'utilise ci-dessous correspond selon le vocabulaire de Pelletier (2006, p. 118) à un système de Fitch (Fitch-system). Il est légèrement différent du système de Copi. Dans la déduction naturelle, chaque pas de déduction d'une preuve conduit à éliminer ou à introduire un connecteur logique ou un quantificateur par l'usage d'une règle d'inférence dite d'introduction ou d'élimination. Je me concentre sur les règles de manipulation des quantificateurs en optant pour une présentation en ligne (les déductions sont parfois présentées sous forme d'arbre) :

Règle d'introduction du quantificateur existentiel (intro$\exists$) : étant donné *P(a)*, on peut déduire $\exists x P(x)$ où *x* est une lettre de variable.

Règle d'élimination du quantificateur existentiel (élim$\exists$): étant donné $\exists x P(x)$, si en faisant l'hypothèse *P(a)*, où *a* est une nouvelle lettre de constante, on peut déduire la formule *Q* (formule dans laquelle la lettre *a* n'apparaît pas), alors on peut déduire *Q* de l'hypothèse de départ.[56]

Règle d'élimination du quantificateur universel (élim$\forall$): à partir de $\forall x P(x)$, on peut

[56] Cette règle fait intervenir une sous preuve au sein de laquelle la lettre *a* est introduite. Selon Pelletier (2000), cette présentation est utilisée par Fitch (mais aussi par Gentzen). Ce choix de l'introduction d'une sous preuve pour la manipulation de la nouvelle variable introduite distingue ce système de celui introduit en didactique par Durand-Guerrier en référence à Copi. L'exemple qui suit précisera cette distinction.

déduire *P(a)* où *a* est une lettre de constante choisie sans restriction.

Règle d'introduction du quantificateur universel (intro$\forall$) : à partir de *P(a)*, on peut déduire $\forall xP(x)$ dans la mesure où la lettre de constante *a* n'apparaît pas dans les hypothèses dont *P(a)* dépend[57].

Voici maintenant un exemple de manipulation de ces règles d'introduction et d'élimination. Il est possible de démontrer la formule $\exists x\forall y(xRy) \Rightarrow \forall y\exists x(xRy)$ de la manière suivante :

1. $\exists x\forall y(xRy)$	Hypothèse
2. $\quad\forall y(aRy)$	Nouvelle hypothèse
3. $\quad aRb$	Elimination de l'universel sur (2)
4. $\quad\exists x(xRb)$	Introduction de l'existentiel sur (3)
5. $\exists x(xRb)$	Elimination de l'existentiel sur (1) et (4), l'usage de cette règle décharge l'hypothèse (2)
6. $\forall y\exists x(xRy)$	Introduction de l'universelle sur (5), ceci est possible puisque la seule hypothèse dont dépend (5) est (1)
7. $\exists x\forall y(xRy) \Rightarrow \forall y\exists x(xRy)$	Introduction de l'implication sur (1) et (6)

Le fait que (5) ne dépende que de (1) est lié au fait que la règle d'introduction du quantificateur existentiel a utilisé une sous-preuve. Cette sous-preuve est close par l'application de la règle d'introduction si bien que les assertions (2), (3) et (4) ne comptent pas comme des hypothèses pour (5). Si l'on souhaite se passer de ces sous-preuves, il est nécessaire de modifier la version de la règle d'introduction du quantificateur universel donnée ci-dessus. Si l'on reprend la preuve précédente en supposant qu'il n'y a pas de sous-preuve, dans ce cas (2) n'est pas introduite comme une hypothèse mais par l'usage de la règle d'élimination d'un quantificateur existentiel, la formulation actuelle de la règle d'introduction de l'universel ne permet pas de montrer la déductibilité de $\exists x\forall y(xRy) \Rightarrow \forall y\exists x(xRy)$. En

[57] La restriction sur l'usage de cette règle a pour objectif d'empêcher les déductions invalides comme dans le cas où *P(a)* aurait été obtenu en faisant une hypothèse ou par une instanciation existentielle.

effet, dans la preuve ci-dessous, la lettre b apparaît en (3) et ceci empêche, par la clause de restriction, l'introduction du quantificateur universel après (4)[58] :

1. $\exists x \forall y(xRy)$	Hypothèse
2. $\forall y(aRy)$	Elimination de l'existentiel sur (1)
3. aRb	Elimination de l'universel sur (2)
4. $\exists x(xRb)$	Introduction de l'existentiel sur (3)

Il faut trouver une nouvelle formulation des restrictions de la règle d'introduction du quantificateur universel. La règle utilisée par Copi[59] et repris par Durand-Guerrier, Arsac et Chelloughui en didactique stipule que l'on peut déduire $\forall x P(x)$ à partir de $P(a)$ dans la mesure où la lettre a n'est pas été introduite par une hypothèse et qu'aucune lettre de constante présente dans $P(a)$ (a y compris) n'ait été introduite par l'usage de la règle d'élimination du quantificateur existentiel. Dans le cas ci-dessus, cette règle permet d'introduire un quantificateur universel sur $\exists x(xRb)$ puisque la lettre b a été introduite par l'usage de la règle d'élimination du quantificateur universel. Elle maintient néanmoins ce qui est nécessaire dans les restrictions d'usage afin d'empêcher la possibilité de déductions invalides. Dans la perspective de ce paragraphe qui est de rechercher des expressions explicites pour les pratiques de la quantification, il m'a paru intéressant de présenter un système faisant intervenir un sous-jeu. Le choix de présentation des déductions qu'il propose permet une prise en charge d'une partie des restrictions d'usage par des considérations de forme (les assertions qui se situent sur la droite – i.e. dans les sous-preuves closes – ne comptent pas comme hypothèses). D'un point de vue pratique, la règle utilisée par Copi confère une responsabilité plus grande à celui qui construit la preuve et contribue potentiellement à générer une part d'implicite accrue.

Le *Calcul des Séquents* est un autre système, issu de la déduction naturelle, permettant de présenter des déductions. Comme la déduction naturelle, il est dû à Gentzen. Le principal changement est lié au fait que l'on fait apparaître à chaque séquent (chaque ligne de calcul), les hypothèses $A_1,...,A_n$ et la conclusion B. Un séquent possède alors la forme $A_1,...,A_n \| B$.

---

[58] Dans la formulation des restrictions des règles le terme d'hypothèse doit ce comprendre comme synonyme d'assertion préalable qui n'a pas été déchargée (par un processus de sortie d'une sous-preuve).

[59] Dans la deuxième édition de son ouvrage (cf. Pelletier (2000)).

Dans le calcul des séquents, les preuves manipulent de manière symétrique les hypothèses et les conclusions. Les règles associées aux quantificateurs sont les suivantes :

Règle du quantificateur existentiel à droite ($\exists$ droite) : du séquent $H \| P(a)$, on peut dériver le séquent $H \| \exists P(x)$.

Règle du quantificateur universel à droite ($\forall$ droite) : du séquent $H \| P(a)$, on peut dériver le séquent $H \| \forall x P(x)$. Cette règle est valable dans la mesure où *a* ne figure pas dans *H*.

Règle du quantificateur existentiel à gauche ($\exists$ gauche) : du séquent $H, P(a) \| C$, on peut dériver le séquent $H, \exists P(x) \| C$. Cette règle est valable dans la mesure où *a* ne figure ni dans *H*, ni dans C.

Règle du quantificateur universel à gauche ($\forall$ gauche) : du séquent $H, P(a) \| C$, on peut dériver le séquent $H, \forall x P(x) \| C$.

Pour reprendre l'exemple déjà utilisé ci-dessus, une dérivation de $\exists x \forall y (xRy) \Rightarrow \forall y \exists x (xRy)$ se présente cette fois de la manière suivante :

1. $aRb \| aRb$	Axiome, $A \| A$ « de A, on peut déduire A »
2. $\forall y(aRy) \| aRb$	Règle de l'universel à gauche
3. $\forall y(aRy) \| \exists x(xRb)$	Règle de l'existentiel à droite
4. $\exists x \forall y(xRy) \| \exists x(xRb)$	Règle de l'existentiel à gauche, ceci est possible car, hormis dans $\forall y(aRy)$, *a* n'apparaît plus dans (3)
5. $\exists x \forall y(xRy) \| \forall y \exists x(xRy)$	Règle de l'universelle à droite, ceci est possible car, hormis dans $\exists x(xRb)$, *b* ne figure pas dans (4)
6. $\| \exists x \forall y(xRy) \Rightarrow \forall y \exists x(xRy)$	Règle d'introduction du conditionnel à droite

On peut remarquer que le calcul des séquents n'est pas un moyen de présenter des preuves à proprement parler, il s'agit plutôt d'un système de transformation d'une preuve en une autre preuve. Selon Joinet (à paraître), la perspective de Gentzen a évolué entre la déduction naturelle et le calcul des séquents. Les règles de la déduction naturelle montrent une certaine recherche de la *naturalité* au sens où ces règles logiques peuvent se voir comme un essai de formalisation des pratiques implicites de déduction que les mathématiciens mettent en œuvre tacitement. Le calcul de séquents relève quant à lui d'une *sorte d'esthétisme mathématique où "symétrie", "simplicité", "élégance" prennent le pas sur la naturalité […]*[60]. Néanmoins, s'il est possible de dériver un séquent de la forme $\| A$, cela signifie que l'on a construit une preuve de A à partir d'autres preuves (les seules preuves « données » sont celles issues de l'utilisation de l'axiome $A \| A$).

Pour mon objectif, qui est de présenter quelques explications logiques de la quantification (de manière certes très superficielle), il est intéressant d'en préciser les régularités. Les deux exemples de preuves précédents explicitent un parallèle entre les règles de la déduction naturelle et celles du calcul des séquents concernant l'usage des quantificateurs. Je résume ces régularités dans le tableau ci-dessous :

DN	*CS*	Commentaires
Elim $\forall$	$\forall$ gauche	« Elim $\forall \to \forall$ gauche » : si on connaît une preuve (au sens de *DN*) de C à partir de $P(a)$ alors on peut construire une preuve de C à partir de $\forall x P(x)$. Il suffit d'appliquer élim $\forall$ puis de copier la preuve connue de C à partir de $P(a)$. « $\forall$ gauche $\to$ élim $\forall$ » : La validité de la règle élim $\forall$ se montre

60 Joinet, J.-B. (à paraître). Nature et Logique de G. Gentzen à J.-Y. Girard.

Texte disponible à l'adresse http://www-philo.univ-paris1.fr/Joinet/GentzenGirard.pdf

		(au sens de *CS*) en appliquant l'axiome d'identité $P(a)\|P(a)$ puis en appliquant $\forall$ gauche pour obtenir $\forall x P(x)\|P(a)$.
Intro $\exists$	$\exists$ droite	« Intro $\exists \rightarrow \exists$ droite » : Si on connaît une preuve (au sens de *DN*) de $P(a)$ à partir de *H* alors on peut construire une preuve de $\exists x P(x)$ à partir de *H*. Il suffit de copier la preuve de $P(a)$ puis d'appliquer intro $\exists$. « $\exists$ droite $\rightarrow$ Intro $\exists$ » : $\exists$ droite revient à dire qu'une preuve de $P(a)$ sous l'hypothèse *H* peut être transformée en une preuve de $\exists x P(x)$. Cela revient à dire que si l'on peut déduire $P(a)$ alors on peut aussi déduire $\exists x P(x)$, ce qu'exprime intro $\exists$.
Elim $\exists$	$\exists$ gauche	« Elim $\exists \leftrightarrow \exists$ gauche » : La règle élim $\exists$ dit exactement ce que dit $\exists$ gauche au niveau des preuves. D'autre part, les restrictions d'application coïncident. Dire que *a* est une nouvelle lettre au sens de élim $\exists$ revient à dire que *a* est n'est pas dans *H* au sens de $\exists$ gauche. D'autre part, les deux règles affirment que *a* ne doit pas apparaître dans la conclusion.
Intro $\forall$	$\forall$ droite	« Intro $\forall \rightarrow \forall$ droite » : Si on connaît une preuve (au sens de *DN*) de $P(a)$ à partir de *H*, alors on peut construire une preuve de $\forall x P(x)$ à partir de *H*. Il suffit de copier la preuve de $P(a)$ puis d'appliquer intro $\forall$. Si *a* n'apparaît pas dans H alors a n'est pas non plus dans les hypothèses de $P(a)$ et la restriction de intro $\forall$ ne s'applique pas. « $\forall$ droite $\rightarrow$ intro $\forall$ » : $\forall$ droite revient à dire qu'une preuve de $P(a)$ sous l'hypothèse *H* peut être transformée en une preuve de $\forall x P(x)$ dans la mesure ou *a* n'apparaît pas dans *H*. Cela revient à dire que si l'on peut déduire $P(a)$ sans faire d'hypothèse sur *a* alors on peut déduire $\forall x P(x)$, ce qu'exprime intro $\forall$.

Cette comparaison peut s'étendre à la logique dialogique. Le fait qu'il y ait dans ces systèmes deux règles associées à la manipulation des constantes logiques, introduction et élimination ou droite et gauche, alors qu'il n'y en avait qu'une seule dans la logique dialogique de Lorenzen résulte de leur caractère monologique. Plus précisément les deux règles de manipulation des constantes logiques de ces approches sont synthétisées en une seule règle à travers l'introduction d'un deuxième joueur dans la logique dialogique. Je propose plus bas une mise en relation explicite des règles du calcul des séquents avec celles de la logique dialogique. Il est par ailleurs possible de regarder une assertion faite par l'opposant dans un jeu dialogique comme une hypothèse du même jeu interprété de manière monologique. Une assertion du proposant peut être vu de manière monologique comme quelque chose qu'il faut chercher à justifier à partir des hypothèses données par les assertions de l'opposant. Le déséquilibre à propos de la possibilité pour les joueurs d'énoncer une proposition atomique[61] peut alors s'interpréter comme le fait qu'il est toujours possible de faire des hypothèses arbitraires alors que la seule manière de justifier d'une proposition atomiques est qu'elle fasse partie des hypothèses. Cependant, le calcul des séquents progresse en travaillant sur des couples (hypothèses, conclusion). On peut interpréter ces couples, via la correspondance développée plus haut avec la déduction naturelle, comme des couples pour lesquels on sait construire une preuve de la conclusion à partir des hypothèses. A contrario, la logique dialogique fonctionne à partir de couples (toutes les assertions de l'opposant, la dernière assertion du proposant) pour lesquels une relation de preuve n'est à priori pas connu. En particulier, une partie de logique dialogique commence par l'assertion par le proposant de ce que l'on cherche à démontrer. Ce que dit le proposant est ce qu'il faut justifier en faisant faire les bonnes assertions à l'opposant, c'est-à-dire en se donnant les bonnes hypothèses, à travers des choix stratégiques pertinents d'attaque. La progression d'un dialogue va d'un ensemble de plus en plus grand d'assertions faites par l'opposant à un ensemble de plus en plus petit de choses à justifier pour le proposant. Le terme « petit » est ici à prendre au sens de la décomposition des formules logiques en éléments plus simples de formules logiques complexes. Le terme « grand » est à comprendre en termes de nombre d'assertions que le proposant peut utiliser, chacune d'entre elles étant plus « petite » au sens précédent. Si l'objectif est d'établir un théorème, le calcul des séquent progresse dans le sens inverse, c'est-à-dire d'un ensemble d'hypothèses dont il faut se débarrasser, il en faut un nombre moins

[61] Le proposant ne peut soutenir une proposition atomique que lorsque cette proposition a déjà été soutenue par l'opposant. L'opposant n'est pas soumis à cette contrainte.

« grand », à une conclusion qu'il faut construire au sens de la composition logique des formules. Le calcul s'arrête quand il n'y a plus d'hypothèse et que la conclusion est là. On peut d'ailleurs remarquer que les parties de la logique dialogique se terminent par les assertions par les joueurs des énoncés atomiques alors que les preuves formulées dans le calcul des séquents commencent par l'usage des énoncés atomiques à travers l'usage de l'axiome (voir la preuve ci-dessus pour un exemple). Lorenzen (1967, p. 30) évoque cette symétrie entre les deux méthodes de preuves en montrant comment les règles du calcul des séquents pouvaient être obtenues à partir de celle de la logique dialogique par un retournement des tableaux de logique dialogique. Pour établir les correspondances, il faut se souvenir que toutes les assertions de l'opposant sont gardées en mémoire en vue d'être utilisées alors que du côté du proposant, seule la dernière assertion doit être conservé pour être défendue. Je continue ci-dessous ma comparaison des explications de la quantification au niveau des jeux d'intérieur en explicitant les relations entre les règles du calcul des séquents et celles de la logique dialogique concernant la manipulation des quantificateurs. Par extension, cette comparaison exprime aussi les relations entre la logique dialogique et la déduction naturelle.

Règle du quantificateur universel utilisée par l'opposant :

H	C
$\forall x P(x)$	*?a*
P(a)	

Ce tableau, lu de bas en haut, correspond à la règle $\forall$ gauche du calcul des séquents (ou élim. $\forall$ en déduction naturelle) :

De $H, P(a), \forall x P(x) \| C$, on peut dériver $H, \forall x P(x) \| C$

Cette règle est équivalente à la règle donnée plus haut :

De $H, P(a) \| C$, on peut dériver $H, \forall x P(x) \| C$

On obtient la deuxième à partir de la première en faisant un affaiblissement gauche (en rajoutant un hypothèse) et on obtient la première à partir de la deuxième par une contraction gauche (en supprimant une redondance dans les hypothèses).

Correspondance des restrictions d'usage : cette règle est valable sans restriction sur *a* ce qui signifie en inversant l'ordre de lecture que le choix est libre pour le proposant, autrement dit que l'on peut librement choisir cette lettre dans la recherche d'une stratégie gagnante pour le proposant.

Règle du quantificateur existentiel utilisée par le proposant :

H	…
?	$\exists x P(x)$
	$P(a)$

Cette règle correspond à la règle $\exists$ droite (ou intro. $\exists$ en déduction naturelle) :

$$\text{De } H \| P(a) \text{, on peut dériver } H \| \exists P(x)$$

Correspondance des restrictions d'usage : cette règle est valable sans restriction sur *a* ce qui signifie que le choix est libre pour le proposant, autrement dit que l'on peut librement choisir cette lettre dans la recherche d'une stratégie gagnante pour le proposant.

Règle du quantificateur existentiel utilisée par l'opposant :

H	C
$\exists x P(x)$	?
$P(a)$	

Cette règle correspond à la règle $\exists$ gauche (ou élim. $\exists$ en déduction naturelle) :

de $H, \exists x P(x), P(a) \| C$, on peut dériver $H, \exists x P(x) \| C$

Cette règle est équivalente à la règle donnée plus haut :

De $H, P(a) \| C$, on peut dériver le séquent $H, \exists P(x) \| C$

On obtient la deuxième à partir de la première en faisant un affaiblissement gauche (en rajoutant une hypothèse) et on obtient la première à partir de la deuxième par une contraction gauche (en supprimant une redondance dans les hypothèses).

Correspondance des restrictions d'usage : le fait que l'on exige dans le calcul des séquents que *a* ne figure ni dans *H*, ni dans C correspond en logique dialogique à la dévolution du choix de la lettre à l'opposant. Pour gagner une partie, l'opposant n'a pas intérêt de faire son choix parmi les lettres déjà avancées dans le jeu lors des précédentes assertions de l'opposant, c'est-à-dire les hypothèses dans le vocabulaire du calcul des séquents, ou dans la dernière assertion du proposant, la conclusion. De ce point de vue et puisque l'objectif de l'étude d'un jeu dialogique est de parvenir à trouver une stratégie gagnante pour le proposant contre n'importe quel opposant, on peut supposer sans conséquences réelles que l'opposant utilise une nouvelle lettre.

Règle du quantificateur universel utilisée par l'opposant :

H	…
?a	$\forall x P(x)$
	P(a)

Cette règle correspond à la règle $\forall$ droite (ou intro. $\forall$ en déduction naturelle) :

de $H \| P(a)$, on peut dériver $H \| \forall x P(x)$.

Correspondance des restrictions d'usage : dans le calcul des séquents, cette règle ne peut être appliquée que dans la mesure où a ne figure pas dans H. Cela revient à faire dévolution du choix de la lettre à l'opposant (qui d'un point de vue des possibilités stratégiques du proposant n'a pas intérêt à recycler une lettre).

1.2 Au niveau des jeux d'extérieur

Dans ce paragraphe, je reviens sur deux jeux d'extérieur qui ont déjà été présentés dans les parties précédentes. Je commence par la *Théorie des Modèles* issue des travaux de Tarski. La notion de satisfaction d'une phrase ouverte est évoquée dans la première partie (chapitre 3, paragraphe 5) et la convention T, fondement d'une approche véríconditionnelle de la vérité, dans la deuxième partie (chapitre 2, paragraphe 1). La théorie des modèles propose une explication sémantique de la notion de vérité pour les langages formalisés. Etant donné un langage et un ensemble, le domaine d'interprétation, sur lequel ce langage puisse être interprété, l'explication de la notion de vérité se construit à partir de l'explication par induction d'une autre notion, celle de satisfaction. Pour ce qui est des connecteurs logiques, la méthode est la même que pour l'explication de la notion de vérité dans le calcul des propositions. Par exemple, on dira que $A \wedge B$ est satisfaite dans le domaine d'interprétation si A est satisfaite dans le domaine d'interprétation et B également ; on dira que $\neg A$ est satisfaite si A n'est pas satisfaite etc. La notion de satisfaction permet surtout d'étendre ce procédé aux quantificateurs. La définition est la suivante :

- $\forall x P(x)$ est satisfaite dans le domaine d'interprétation si pour tous les objets a du domaine d'interprétation $P(a)$ est satisfaite dans le domaine d'interprétation.

- $\exists x P(x)$ est satisfaite dans le domaine d'interprétation si il y a un objet a du domaine d'interprétation tel que $P(a)$ est satisfaite dans le domaine d'interprétation.

Il reste alors à donner la définition de la satisfaction d'une proposition atomique pour clore la définition récursive de la satisfaction. C'est à ce moment que le domaine d'interprétation intervient de manière indispensable. Tarski procède de la manière suivante :

Pour tout *a*, *a* satisfait la fonction propositionnelle « *x* est blanc » si et seulement si *a* est blanc. (Tarski, 1972, p. 193)

Ceci donne, pour la forme que j'ai choisie pour la définition, la proposition atomique $P(a_1, a_2,..., a_n)$ est satisfaite si la suite d'objets $(a_1, a_2,..., a_n)$ satisfait la fonction propositionnelle $P(x_1, x_2,..., x_n)$, c'est-à-dire si $\overline{P}(\overline{a}_2, \overline{a}_2,..., \overline{a}_n)$. Les barres horizontales sont là pour signifier (dans un métalangage à distinguer du langage utilisé pour écrire $P(a_1, a_2,..., a_n)$) que $\overline{P}(\overline{a}_2, \overline{a}_2,..., \overline{a}_n)$ doit être regardé comme l'interprétation dans le domaine d'interprétation de $P(a_1, a_2,..., a_n)$. En terme ensembliste, on pourrait dire la chose suivante, si D est l'ensemble correspondant au domaine d'interprétation $P(a_1, a_2,..., a_n)$ est satisfaite si $(\overline{a}_2, \overline{a}_2,..., \overline{a}_n)$ qui est un élément de D^n appartient à $\overline{P}$ qui est un sous ensemble de D^n. De fait savoir si $\overline{P}(\overline{a}_2, \overline{a}_2,..., \overline{a}_n)$ est au-delà du travail logique dans le sens où cela va au-delà de la recherche d'une explication de la notion de vérité pour le langage formalisé considéré puisque $\overline{P}(\overline{a}_2, \overline{a}_2,..., \overline{a}_n)$ ne fait pas parti du même langage que $P(a_1, a_2,..., a_n)$. Dans le vocabulaire adopté dans le chapitre précédent, « savoir si $\overline{P}(\overline{a}_2, \overline{a}_2,..., \overline{a}_n)$ » relève de ce que Vernant appelle les procédures transactionnelles (partie 2, chapitre 2). Ces procédures ont pour objectif de prendre en charge la confrontation des fonctions propositionnelles avec le domaine d'interprétation. Finalement, pour la théorie élémentaire des modèles, un énoncé (une formule sans variable libre) est dit vrai dans une interprétation donnée lorsque cet énoncé est satisfait dans cette interprétation.

La *Sémantique GTS* de Hintkka est déjà présentée dans la partie précédente (partie 2, chapitre 3). Dans ma présentation, je souligne l'importance accordée à la quantification dans la genèse de la théorie (notamment à travers l'héritage revendiqué de la philosophie kantienne des mathématiques). Etant donné un langage formel et un domaine d'interprétation, l'idée est d'associer à un énoncé un jeu opposant deux joueurs, le proposant qui cherche à montrer que l'énoncé est vrai et l'opposant, qui cherche à le falsifier. La vérité de l'énoncé sur le domaine d'interprétation est définie par l'existence d'une stratégie gagnante pour le proposant. Les règles du jeu se définissent à partir de règles de manipulation pour les constantes logiques et d'autres règles structurelles. Les règles associées aux quantificateurs sont les suivantes :

- pour le quantificateur universel : si un joueur soutient $\forall x P(x)$ alors l'autre joueur fait le choix d'un objet *a* du domaine d'interprétation et le jeu se poursuit par la défense par le premier joueur de *P(a)*.

- pour le quantificateur existentiel : si un joueur soutient $\exists x P(x)$ alors il fait le choix d'un objet *a* du domaine d'interprétation et le jeu se poursuit par la défense par ce premier joueur de *P(a)*.

Ces choix constituent la part essentielle de la dimension stratégique des jeux dans la mesure où ce sont ces choix qui conduisent les joueurs à gagner ou à perdre lorsqu'une proposition atomique arrive dans le jeu (la procédure pour les propositions atomiques est similaire à celle présentée pour la théorie des modèles). Récemment, Hintikka et Sandu (Hintikka & Sandu (1997)) ont développé une nouvelle logique, issue assez naturellement de l'explication des quantificateurs en termes de jeux. Il s'agit de la logique IF (*Independence Friendly*). Le principe est de considérer aussi les cas où l'information des joueurs concernant les précédents choix qui ont été fait au cours de la partie n'est pas complète. Ces jeux sont dits à information imparfaite. Par exemple, si l'on considère le jeu associé à l'énoncé $\forall x \exists y (x = y)$, il est nécessaire que le joueur qui fait le choix de l'objet associé au quantificateur existentiel connaisse le choix du joueur qui choisit l'objet pour le quantificateur universel pour qu'il puisse construire une stratégie gagnante. Si ce n'est pas le cas, il n'y a pas de stratégie gagnante dans ce jeu pour ce joueur (le proposant). Au niveau de la syntaxe, la logique IF introduit le symbole « / »pour marquer l'indépendance. L'énoncé $\forall x \exists y / \{x\} (x = y)$ n'est donc pas vrai sur l'ensemble {0,1}. Il n'est pas non plus faux si l'on définit le faux par l'existence d'une stratégie gagnante pour l'opposant[62]. Cette dernière approche invite donc en prendre en compte, non seulement l'ordre des quantificateurs mais également des relations de dépendance plus fine.

Selon les explications sémantiques, la bonne manipulation des énoncés quantifiés nécessite une bonne familiarité avec les objets de la structure d'interprétation. Les choix des objets associés à ces manipulations sont des éléments déterminants du gain ou de la perte des parties des jeux sémantiques. Ce rapport aux objets est une caractéristique des règles d'usage des quantificateurs parmi les constantes logiques. Je m'intéresse maintenant aux conséquences didactiques de cette spécificité :

> « La vérité des propositions catégoriques est tributaire des objets, fussent-ils extérieurs et accessibles seulement par inférence, auxquels les termes composants de ces propositions peuvent être attribués avec vérité. Ce que sont ces objets, n'est pas déterminé de manière univoque par les significations-

[62] L'exemple provient de l'appendice de Hintikka (2007), écrite par Sandu.

> stimuli. [...] De tout ce que nous considérons comme étant la logique, il semble que la partie comprenant les fonctions de vérité soit la seule partie que nous puissions reconnaître et « épingler » dans un langage étranger avec les ressources des critères béhavioristes. » Quine (1977, p. 102)

L'absence de détermination de la signification des termes du langage par les significations-stimuli est une formulation de la thèse d'indétermination de la traduction de Quine. Je l'ai présentée dans la première partie (partie 1, chapitre 2). J'ai également évoqué ce phénomène à propos de l'indétermination sémantique des processus ostensifs au sein des jeux d'extérieur (partie 2, chapitre 3). Dans la citation précédente, Quine distingue la vérité des « propositions catégoriques », comprenant un usage de la quantification, de celle des « fonctions de vérité », c'est-à-dire la partie de la logique construite sur le calcul des propositions. Pour résumer, Quine considère que l'on peut reconnaître les connecteurs logiques propositionnels sur la base de critère exclusivement comportementaux alors que cela n'est pas possible pour les quantificateurs. L'argument a la forme suivante. Si je souhaite contrôler si quelqu'un dont je ne comprends pas la langue utilise le même type de logique propositionnelle que moi, je peux tester les tables de vérité pour chacun des candidats potentiels à la traduction. Supposons que je fasse l'hypothèse que le mot « $\wp$ » soit une bonne traduction pour le mot français « et ». Pour vérifier si mon hypothèse est bonne, je peux observer si les individus dont j'étudie la langue sont disposés à acquiescer lorsque que quelqu'un affirme « x $\wp$ y » dans la mesure où je sais si ils sont disposés à acquiescer à « x » et à « y » dans la même situation. Si les individus dont j'étudie la langue acquiesce à « x $\wp$ y » lorsque qu'ils sont disposés à acquiescer à « x » et « y » et seulement à ce moment là, alors je peux décider que mon hypothèse de traduction est la bonne[63]. Cependant, le procédé ne s'adapte pas aux quantificateurs dans la mesure où les tables de vérité ne s'étendent pas aux quantificateurs. L'impossibilité de repérer les quantificateurs dans un langage étranger à l'aide de critères béhavioristes est due à l'intervention des procédures transactionnelles dans la démarche d'évaluation de la vérité des énoncés atomiques. L'argument de Quine est de dire que cette démarche repose de manière fondamentale sur les schèmes conceptuels privés des individus, c'est-à-dire, dans un vocabulaire moins élaboré, sur leur manière de voir le monde. Les

[63] Ce procédé pose certaines difficultés. Par exemple, la table de vérité de la disjonction ne s'accordent pas nécessairement avec nos comportements. On peut en effet être disposé à reconnaître que « *a* ou (non *a*) » est vraie sans pour autant être disposé à reconnaître la vérité de a ni celle de (non a). Mon objectif n'est pas de discuter de ces difficultés mais de mettre en évidence les différences entre les connecteurs propositionnels et les quantificateurs.

conséquences didactiques de ce constat me paraissent important puisque de ce point de vue, il n'est pas possible de distinguer la bonne maîtrise de la quantification d'une certaine forme d'homogénéité de nos perceptions des objets d'un domaine d'interprétation.

Synthèse

Dans ce chapitre, j'ai présenté plusieurs explications de la notion de quantificateurs logiques en utilisant comme distinction principale la distinction entre jeux d'intérieur, lesquels traitent de la déductibilité, et jeux d'extérieur, qui traitent de la vérité des énoncés. Ces deux types de jeux ne sont pas sans rapports. Sur le plan logique, les notions de déductibilité et de vérité logique (au sens de la vérité pour toutes les interprétations sur des domaines d'objets) coïncident pour la logique du premier ordre. Sur le plan didactique, l'étude de leur rapport occupe une part importante des deux premières parties de cette thèse. Les analyses de ce chapitre montrent la relative complexité technique des explications de la quantification qui se donnent comme contrainte de répondre aux critères de précision de la logique. En ce sens, elles permettent de se défaire d'une part de la naturalité de ce concept qui est le plus souvent utilisé de manière informelle dans le contexte de l'enseignement des mathématiques, y compris dans l'enseignement supérieur. D'autre part, elles mettent en évidence la coexistence de plusieurs types d'explications qui ne sont pas nécessairement conceptuellement compatibles, quand bien même elles pourraient être logiquement équivalentes (permettant de prouver les mêmes théorèmes ou conduisant aux mêmes vérités logiques). Par exemple, j'ai montré que la logique dialogique et le calcul des séquents ne procédaient pas selon le même ordre. D'autre part, les éléments auxquels s'appliquent les règles de la déduction naturelle ne sont pas du même type que ceux du calcul des séquents, etc. Ceci me paraît d'autant plus important que chacun des auteurs dont j'ai brièvement présenté les constructions théoriques revendique une certaine proximité de leur explication avec la pratique ordinaire des mathématiques (à l'exception du calcul des séquents). Je l'ai déjà explicité dans la partie précédente pour ce qui concerne les formalisations de Lorenzen et de Hintikka (partie 2, chapitre 2). Les remarques faites à propos de la sémantique GTS valent également pour son extension aux jeux à information imparfaite. Pour Hintikka, l'interprétation des quantificateurs de la logique IF est même plus naturelle que l'interprétation sans indépendance. Il regarde cette dernière comme une restriction arbitraire de la diversité des jeux logiques envisageables. A propos de la déduction naturelle de Gentzen, Joinet (à paraître) affirme :

> « A l'opposé des systèmes « à la Hilbert » tournés vers la question de la prouvabilité, l'élaboration de la déduction naturelle résulte ainsi d'une clarification du sens de chaque connecteur logique par l'examen attentif des pratiques « naturelles » (au sens ici de pratiques historiques effectives) du mathématicien, une sorte de « zoom avant » étant pratiqué sur chaque type d'usage des connecteurs logiques dans le texte mathématique non formalisé (quoique sans doute légèrement idéalisé) comme étape de construction d'une preuve. »

En ce qui concerne Tarski, l'intérêt de son approche sémantique des sciences déductives pour comprendre et décrire l'activité mathématique a particulièrement été mise en avant par Durand-Guerrier (2005, 2008). L'existence de différentes explications revendiquant un caractère naturel me semble révéler une multiplicité des pratiques autour de la quantification qui vient s'ajouter à sa complexité technique. Au-delà de cette diversité réelle, un point commun me paraît néanmoins émerger. Il s'agit de l'intervention de processus de substitution lors de l'usage d'une règle de quantification. Dans le cas des jeux d'intérieur, ces processus font intervenir des lettres de variables et des lettres de constantes. Dans les jeux d'extérieur, ils font intervenir des lettres de variables et des lettres d'objets (des noms d'objets). Je reviens en contraste sur ces processus de substitution dans le paragraphe suivant en évoquant notamment l'usage du vocabulaire de la variation pour rendre compte de la quantification mathématique. De manière plus générale, je poursuis mon approche épistémologique en m'intéressant aux pratiques effectives de plusieurs mathématiciens du XIXème siècle par le biais de l'étude de plusieurs preuves.

2. QUELQUES EXEMPLES HISTORIQUES EN ANALYSE

Chelloughui (2004, p. 19-69) propose une analyse historique de la construction du concept de quantification à travers l'étude de quatre auteurs, Aristote, Frege, Russell et Quine. Elle relève également la diversité des approches et la complexité de l'objet d'analyse. Mon point de vue dans ce chapitre est plutôt d'essayer de rendre compte de pratiques de mathématiciens à travers l'étude ponctuelle de quelques preuves en analyse produites au XIXème siècle. L'objectif de ce travail est de mettre en évidence la manière dont plusieurs mathématiciens, Bolzano, Lacroix et Duhamel, traitent de certaines difficultés mathématiques qui seraient aujourd'hui résolues à travers un usage explicite de la quantification et donc, comme je l'ai souligné en conclusion du chapitre précédent, par des processus de substitution organisés et réglés[64]. D'un point de vue moderne en logique, la notion de variation d'une variable est une notion métaphorique. Une variable n'est pas à proprement parler quelque chose qui varie dans le temps mais plutôt un symbole, un *marque-place*, auquel on peut substituer des lettres de constantes ou d'objets à travers la manipulation des règles de quantification. Cependant, la possibilité conceptuelle de cette pratique repose sur une analyse interne des propositions à travers la distinction entre concepts et objets. J'ai présenté cette distinction dans la première partie de la thèse en référence aux travaux de Frege (partie 1, chapitre 2). Réciproquement, la distinction entre objet et concept rend nécessaire le développement d'une théorie de la quantification afin de concilier les notions de vérité, de généralité et de négation. En effet, la notion de généralité émerge de la distinction concept/objet lorsque l'on se pose la question d'attribuer ou non une valeur de vérité à une expression du type $P(x)$ où P dénote un concept et x marque la place d'un potentiel argument dénotant un objet. Une possibilité est d'attribuer le vrai à cette expression lorsque tous les objets du domaine d'interprétation tombent sous le concept P. Il faudrait alors lui attribuer le faux dans le cas où au moins un objet de ce domaine ne serait pas subsumé par P. Mais comme l'affirme Frege (1967, p. 41), *la portée de la généralité ne serait pas bien délimitée par cette clause*. La difficulté repose sur l'attribution d'une valeur de vérité pour la négation de l'expression en question que l'on pourrait noter $\neg P(x)$. L'alternative est de choisir d'attribuer la valeur de vérité opposée à celle de $P(x)$ ou de préférer y attribuer la valeur de vérité de l'expression $(\neg P)(x)$. Supposons que $P(x)$

[64] Voir sur cette question Durand-Guerrier & Arsac (2003)

corresponde à l'expression « x est un nombre pair ». Le premier choix conduirait à attribuer le vrai à $\neg P(x)$ puisque tous les nombres ne sont pas pairs et la second le faux puisque tous les nombres ne sont pas impairs. Ce dilemme montre la nécessité d'introduire dans la syntaxe du langage utilisé des éléments comme $\forall$ et $\exists$ (ou d'autres, les choix symboliques de Frege sont sensiblement différents) pour prendre en compte les questions de généralité et de négation et distinguer entre $\neg\forall x P(x)$ et $\forall x \neg P(x)$. Dans cette partie, j'ai sélectionné quelques exemples de pratiques de mathématiciens à un moment de l'histoire des mathématiques, le XIXème siècle, où ces éléments n'étaient pas ou peu présents, sous cette forme ou sous une autre, dans la syntaxe usuelle. Les travaux de Weierstrass ont contribué de manière importante au développement de l'usage de la syntaxe de la quantification dans la pratique mathématique à partir de la deuxième moitié du XIXème siècle (Dugac, 2003, p. 125). Ce développement s'accompagne de la formulation précise de certains concepts fondamentaux de l'analyse comme celui de la continuité. Il rend par ailleurs disponibles des démonstrations plus rigoureuses de théorèmes importants comme le théorème des valeurs intermédiaires ou des accroissements finis. Pour autant ces pratiques « modernes » ont cohabité un certain temps avec les anciennes. Mon choix de me centrer sur cette période historique repose aussi sur le constat de l'absence d'une définition explicite des nombres réels. Cette définition ne sera disponible qu'à partir des années 1870. Cette proximité historique entre la construction des nombres réels et le développement d'outils logiques pour rendre compte de la quantification est cohérente avec le positionnement de cette thèse (partie 1) qui regarde l'activité mathématique comme une co-construction des objets et du discours sur ces objets (incluant les outils formels). Selon l'argument développé plus haut à partir de la citation de Quine, la maîtrise de la quantification va de pair avec la familiarité avec les objets sur lesquels la quantification agit. De ce point de vue, mon choix du domaine mathématique de l'analyse et du XIXème siècle (essentiellement la première moitié) s'explique par la recherche d'un corpus historique à partir duquel je puisse observer des pratiques dans une situation où les contrôles logiques ne sont pas nécessairement disponibles et où la familiarité avec les objets en jeu qui offre une autre méthode de contrôle des preuves[65] est limitée. Comme je le rappelle dans l'introduction de cette partie cette situation (maîtrise incomplète des outils logiques et

[65] « D'une manière générale, la bonne application de ces règles repose sur l'expertise mathématique de l'acteur. Ceci montre qu'une compétence qui semble relever du protomathématique est en fait largement contrôlée par le savoir mathématique » (Durand-Guerrier & Arsac, 2003, p. 333)

faible familiarité avec les objets) est aussi celle dans laquelle se trouvent le plus souvent les étudiants à l'université, en particulier au cours des premières années de Licence. Une hypothèse de mon travail est alors que l'étude des quelques preuves de cette période et de ce domaine est susceptible de donner des pistes pour comprendre l'activité mathématique des étudiants. Ce chapitre est organisé en trois temps. Dans le premier, je reviens sur un mémoire de Bolzano déjà évoqué dans la première partie de la thèse. Je me concentre cette fois plus spécifiquement sur une preuve, celle de la convergence des séries vérifiant le critère de Cauchy. Ensuite, je m'intéresse à quelques preuves de deux traités d'analyses. Les premières proviennent d'un ouvrage de Lacroix, les secondes d'un ouvrage de Duhamel.

2.1 1^er^ exemple : retour sur Bolzano (1817)

Le mémoire de Bolzano (1817) sur le théorème des valeurs intermédiaires a déjà été présenté dans la première partie de ce travail. Mon objectif était de montrer comment les convictions sémantiques de Bolzano concernant les propriétés des nombres réels l'avaient conduit à mettre en place un ensemble d'éléments théoriques lui permettant de rendre compte, au niveau des jeux d'intérieur et de la déductibilité, de la vérité du théorème en question. En particulier, ce travail sur la théorie l'a conduit à énoncer le critère de Cauchy pour la convergence des séries et à engager une tentative de preuve. Dans ce paragraphe, je reviens spécifiquement sur cette preuve. Mon objectif est cette fois d'en étudier les aspects relatifs à la quantification. Je reproduis ci-dessous une traduction de Sebestik (1964) de la démonstration de ce critère proposée par Bolzano (les italiques sont de Bolzano) :

> *Théorème*. Si dans une série de grandeurs :
>
> $$F_1(x), F_2(x), F_3(x), ..., F_n(x), ..., F_{n+r}(x)$$
>
> la différence entre son n^e terme $F_n(x)$ et tout terme ultérieur $F_{n+r}(x)$, aussi éloigné soit-il du n^e, reste plus petite que toute grandeur donnée, si l'on a pris n suffisamment grand : alors il existe toujours une certaine *grandeur constante*, et *une seule*, dont s'approchent toujours davantage les termes de cette série et dont ils peuvent s'approcher d'aussi près que l'on voudra, lorsqu'on prolonge la

série suffisamment loin.

Démonstration. Il ressort du §6 qu'une série telle que la décrit le théorème est possible. La supposition cependant qu'il existe une grandeur *X* dont s'approchent aussi près que l'on veut les termes de cette série lorsqu'on la prolonge plus loin, ne comporte certainement aucune impossibilité, si l'on ne suppose pas encore que cette grandeur soit seulement *unique* et *invariable*. Car si cela doit être une grandeur qui peut varier, on pourra la prendre assurément toujours telle qu'elle s'approche de très près du terme $F_n(x)$ qu'on est en train de lui comparer, et même telle qu'elle lui soit tout à fait égale. Mais également l'hypothèse d'une grandeur *invariable* ayant cette propriété d'approcher les termes de notre série ne contient rien d'impossible : cela vient du fait que cette hypothèse permet de déterminer cette grandeur avec la précision que l'on voudra. Car en admettant qu'on veuille déterminer *X* avec une précision telle que la différence entre la valeur supposée et la vraie valeur de *X* ne dépasse pas une valeur donnée *d* si petite soit elle : il suffit de choisir dans la série donnée, un terme $F_n(x)$ ayant la propriété que tout $F_{n+r}(x)$ suivant en diffère de moins de $\pm d$. Par hypothèse, un tel $F_n(x)$ doit exister. Je dis maintenant que la valeur $F_n(x)$ diffère au plus de $\pm d$ de la vraie valeur de la grandeur *X*. Car si on augmente arbitrairement *r*, avec le même *n*, alors la différence :

$$X - F_{n+r}(x) = \pm\omega$$

doit être aussi petite que l'on veut. Mais la différence :

$$F_n(x) - F_{n+r}(x)$$

reste toujours $< \pm d$, aussi grand que l'on prenne *r*. Par conséquent la différence :

$$X - F_n(x) = \left(X - F_{n+r}(x)\right) - \left(F_n(x) - F_{n+r}(x)\right)$$

doit rester toujours :

$$< \pm(d+\omega).$$

Mais comme cette différence est une grandeur *constante* pour le même *n* et que ω peut être rendu aussi petit que l'on voudra par l'augmentation de *r* : alors on doit avoir :

$$X - F_n(x) = ou < \pm d .$$

Car si elle était *plus grande* et par exemple :

$$= \pm(d+e),$$

il serait impossible d'avoir la relation :

$$d + e < d + \omega\,,$$

c'est-à-dire $e < \omega$,

lorsqu'on continue à diminuer de plus en plus ω. La vraie valeur de *X* diffère donc au plus de *d* de la valeur du terme $F_n(x)$, et peut être déterminée aussi exactement que l'on voudra, puisqu'on peut prendre *d* arbitrairement petit. Il existe donc une *grandeur réelle* dont s'approchent d'aussi près que l'on voudra les termes de la série que nous venons de discuter, si on la prolonge suffisamment loin. Or, il n'existe qu'une valeur *unique* de cette sorte. Car si nous supposions qu'il existe, à côté de *X*, encore une autre valeur *constante Y*, dont s'approchent d'aussi près que l'on veut les termes de la série lorsqu'on la prolonge suffisamment loin, alors les différences :

$$X - F_{n+r}(x) = \omega \text{ et } Y - F_{n+r}(x) = \omega^1$$

devraient être aussi petite que l'on veut, lorsqu'on laisse *r* devenir suffisamment grand. La même chose devrait donc être valable aussi pour leur propre différence, c'est à dire pour :

$$X - Y = \omega - \omega^1$$

ce qui est impossible si *X* et *Y* doivent être des grandeurs *constantes*, à moins que l'on ne suppose $X = Y^1$.

Un énoncé anachronique de ce théorème est l'affirmation de l'existence et l'unicité d'une limite pour une série vérifiant le critère de Cauchy. Dans le début de la preuve, Bolzano affirme quelque chose que l'on peut interpréter, toujours de manière anachronique, comme un avertissement concernant l'importance de l'ordre des quantificateurs. Ceci distingue cette preuve de celles étudiées par Durand-Guerrier & Arsac (2003, 2005) qui mettent en œuvre un usage non régulier de la règle d'introduction du quantificateur universel (au regard des critères de la déduction naturelle une déduction de $P(a)$ à $\forall x P(x)$ alors que *a* est présent dans les hypothèses de $P(a)$). Bolzano montre ensuite que son énoncé n'a rien d' « impossible » dans la mesure où il est possible de déterminer *X* de manière aussi précise que souhaitée. Il affirme ensuite à nouveau l'existence de la limite recherchée puis en démontre l'unicité. Ce rapide résumé montre qu'une interprétation attribuant à Bolzano une erreur de logique autour de la manipulation de la lettre *X* est disponible. En effet, du point de vue de l'analyse logique anachronique, la lettre X semble être introduite par un processus d'instanciation sur un énoncé affirmant que X est la limite de la série. La conclusion concernant l'existence de la limite de la série ne peut donc pas s'appuyer sur l'argument concernant la « possibilité » de l'existence de la limite sans introduire une forme de circularité. Il s'agit d'ailleurs de l'interprétation que font Sebestik (1964) et Dugac (2003). Dans la suite de ce paragraphe j'essaye de montrer que des interprétations alternatives sont également disponibles.

Sebestik (1992, p. 86-87) affirme que dans *Der binomische Lehrsatz* (1816), Bolzano *évite soigneusement le terme de limite, bien qu'il en ait le concept qu'il décrit par des paraphrases*. Ce terme n'est pas davantage utilisé dans le mémoire sur le théorème des valeurs intermédiaires bien que certaines formulations pourraient également et selon nos critères actuels faire office de définition. Sinaceur remarque également que le concept demeure sans nom et sans notation spécifique :

> « Il est en effet déconcertant de constater combien est rigoureux le concept de limite impliqué dans la définition de la continuité (préface du « Rein Analytischer Beweis ») tandis que reste obscure et compliquée la formulation du critère de convergence (§§ 6 et 7), où une périphrase peu maniable renvoie au concept demeuré sans nom et sans notation symbolique » (Sinaceur, 1973, p. 109)

L'usage de périphrases variées contribue vraisemblablement à maintenir une certaine confusion autour de l'unité du concept (Sebestik, 1992, p. 87). D'autre part, on peut observer que dans la preuve ci-dessus, Bolzano est particulièrement attentif au vocabulaire qu'il utilise pour qualifier la lettre X (la limite de la série). A l'exception de *théorème* et *démonstration*, tous les termes en italique sont associés au concept de limite. Le vocabulaire qu'il emploie reflète un usage qui diffère sensiblement des standards logiques présentés dans la première partie de ce chapitre. Par exemple, Bolzano fonde la distinction entre des énoncés du type $\forall x \exists y (xRy)$ et $\exists y \forall x (xRy)$ sur une distinction entre l'existence d'une quantité variable et l'existence d'une quantité invariable vérifiant une même propriété (être la limite d'une série) alors que du point de vue de la déduction naturelle, la démonstration de ces énoncés se distingue à travers l'ordre de l'usage des règles d'introduction des quantificateurs. La syntaxe de la logique du premier ordre ne me semble pas être en mesure de rendre compte de la pratique de Bolzano, pas plus, ce qui revient au même, que la distinction entre objet et concept ne semble pouvoir s'appliquer à l'idée de quantité variable. Dans le contexte historique de l'écriture du mémoire de Bolzano concernant la construction des nombres réels, construire une interprétation du premier ordre de sa conclusion dans laquelle il affirme l'existence de la limite me semble conduire à se confronter à la difficulté pointé par Quine à laquelle j'ai déjà fait allusion plus haut. La validation d'une interprétation au sein de la logique du premier ordre nécessiterait que l'on puisse statuer sur le fait que Bolzano soit, ou non, convaincu d'être en présence d'un nombre réel au sens où nous l'entendons aujourd'hui. Cette validation me semble très délicate d'autant plus que, comme je viens de le souligner, le concept de limite qui est utilisé par Bolzano n'est pas réellement clarifié. Face à cette difficulté, il me semble intéressant d'envisager un autre type d'interprétation. Si l'on fait l'hypothèse que pour Bolzano, montrer l'existence d'une limite pour une série revient à montrer qu'une quantité variable vérifiant certaines propriétés ne varie pas, il devient possible d'interpréter sa preuve de la manière suivante :

Preuve. Donnons nous une limite X [une quantité variable] que la série approche (ce qui est toujours possible). Puisque la série $F_n(x)$ *est de Cauchy, dès que, pour tout r, l'écart entre* $F_n(x)$ *et* $F_{n+r}(x)$ *ne dépasse plus d (disons à partir de N), X doit être à une distance plus petite que d de* $F_N(x)$. *Mais puisque d peut être choisi aussi petit que l'on veut, X ne peut pas varier et donc la série converge.*

Selon cette interprétation, le problème concernant la convergence des séries est transféré vers un problème concernant la variation de l'« objet » limite[66]. Cette dernière notion doit se comprendre en dehors de la distinction utilisée jusqu'ici entre objet et concept. Un des intérêts de cette manière de voir est aussi de s'abstenir d'attribuer une erreur de logique à Bolzano puisque comme je l'ai expliqué dans la première partie, le contexte de ce mémoire est plutôt celui d'une rigueur radicale. En effet, le caractère potentiellement circulaire de la preuve disparaît avec cette interprétation dans la mesure où l'instanciation qui conduit à introduire la lettre *X* dans la preuve ne porte pas sur la même propriété que l'énoncé de la conclusion. La première instanciation porte sur une « grandeur variable » alors que la conclusion porte sur une « grandeur invariable ». Il me semble que cette approche est susceptible d'être comprise de deux manières différentes et complémentaires selon qu'on la considère comme relevant d'un jeu d'intérieur ou d'un jeu d'extérieur.

[66] On trouve aussi un usage du vocabulaire de la variation associé au mot « limite » chez Cauchy : « Lorsqu'une quantité variable converge vers une limite fixe [...]. » (Cauchy (1821), cité dans Dugac (2003) p. 26)

Au niveau des jeux d'intérieur, il s'agit d'envisager la possibilité d'une règle de déduction qui permette la conclusion du précédent raisonnement. En d'autres termes, il s'agit d'intégrer la convergence des suites de Cauchy dans le réseau objectif des vérités mathématiques à travers l'usage d'une règle ad hoc concernant la notion de limite. Cette règle de déduction s'appuie sur une habitude liée à l'usage du vocabulaire de la variation et ne peut faire l'objet d'une traduction dans la logique du premier ordre sans introduire de circularité dans la preuve de Bolzano. Evidemment, cette interprétation fait appel à une notion de déductibilité, de relation de cause à conséquence au sein de l'organisation objective des vérités dans le vocabulaire de Bolzano, qui n'est pas claire pour une lecture contemporaine de la preuve. Cependant, même si un des objectifs de Bolzano est bien d'avancer dans la direction d'une approche analytique de l'analyse, il ne s'appuie sur aucune définition de la déductibilité. Comme l'affirme Chihara :

> « This relation is not something that one is apt to find discussed in any of our typical logic books. » (Chihara, 1999, p. 346)[67]

> « Compared with Frege's thesis of the analyticity of arithmetic, Bolzano's doctrine of the provability of all mathematical truths is, like Bostock's, decidely lacking of specificity, precision and clarity. » (Chihara, 1999, p. 359)[68]

Par ailleurs, un article de Majolino (2000) semble également soutenir la plausibilité de cette hypothèse concernant la pratique mathématique de Bolzano. A propos de la notion de variation, il affirme que l'*une des singularités du style bolzanien est justement d'autoriser un sens de modification même lorsqu'il s'agit du côté formel de la variation* (Majolino, 2000, p. 474). Autrement dit, alors que les mathématiques modernes font un usage métaphorique de la notion de variation à travers la notion de quantification et les règles logiques qui y sont associées, Majolino défend une interprétation alternative de l'usage de ce concept par Bolzano qui se situe hors de la logique du premier ordre. Une difficulté importante de l'interprétation de la preuve de Bolzano se situe autour du statut de la lettre *X*. L'interprétation attribuant une erreur logique à Bolzano considère que cette lettre est obtenue par l'usage d'une instanciation sur une proposition affirmant l'existence de la limite. L'interprétation alternative utilise d'autres moyens pour se donner des lettres à manipuler que ceux offerts par exemple par la

[67] « Cette relation n'est pas quelque chose que l'on est en mesure de trouver discuté dans aucun de nos livres de logique habituels. » (ma traduction)

[68] « Comparée à la thèse de l'analycité de l'arithmétique de Frege, la doctrine de la prouvabilité de toute les vérités mathématiques de Bolzano, comme celle de Bostock, manque définitivement de spécification, de précision et de clarté. » (ma traduction)

déduction naturelle. Ces moyens permettent de se donner des lettres « variables » et de construire des déductions à partir de ces lettres.

Au niveau des jeux d'extérieur, l'interprétation se porte vers les questions de vérité plutôt que de déductibilité. Je reviens ici, sur des remarques qui ont déjà été faites dans la première partie. Selon Bolzano, la saisie d'un enchaînement objectif de causes à conséquences est susceptible de fonder simultanément la vérité des causes (les axiomes) et de la conséquence (l'énoncé que l'on démontre) dans la mesure où la preuve met en évidence la connexion entre les deux vérités. D'autre part, les convictions philosophiques de Bolzano le conduisent à rejeter les méthodes intuitives dans la recherche de fondements pour les mathématiques pures. Pour autant, Bolzano en reconnaît l'intérêt heuristique, notamment lorsqu'il s'agit de se convaincre de la vérité d'un énoncé. Dans cette perspective, il me paraît envisageable de regarder la démonstration de la convergence des séries vérifiant le critère de Cauchy comme un discours de l'ordre du métalangage ayant pour objectif de se convaincre sur le plan intuitif de la vérité de l'énoncé et non pas de le fonder. Contrairement aux deux premières interprétations, cette dernière rompt avec la recherche de règle de déduction. L'enjeu n'est plus de développer une démarche analytique de preuve. Le texte de Bolzano peut alors être compris comme un texte métamathématique dont l'objectif est de contrôler le caractère vraisemblable du résultat obtenu par la remontée effectuée dans le réseau des inférences. La vérité de ce résultat n'est alors plus fonder à travers un maillon déductif mais par la mise en évidence de sa nécessité théorique.

Au final, je propose donc trois interprétations du texte de Bolzano. Les deux premières sont des jeux d'intérieur. Elles diffèrent par la nature des règles qui servent à expliquer la démarche stratégique de la preuve. La troisième s'appuie sur un « jeu » d'extérieur. Le texte est interprété sur un autre niveau de discours, un métalangage utilisé pour convaincre plutôt que fonder. Ce métalangage ne cherche pas nécessairement à respecter un ensemble analytique de règles. Je ne m'intéresse pas spécialement à la recherche de l'hypothèse la plus précise dans la mesure où mon objectif n'est pas vraiment de conduire une étude épistémologique fine du travail de Bolzano. Par contre, il me semble que mettre en avant ces diverses possibilités contradictoires de lecture de la démonstration permet de faire émerger différents statuts disponibles pour la compréhension de l'usage du vocabulaire de la variation dans la pratique mathématique. Il y a d'abord un usage interne au langage de la preuve. La difficulté est alors de faire une hypothèse adéquate sur la forme du jeu qui est en place. La question de savoir si cette forme peut être décrite ou non dans la logique du premier ordre me semble se poser avec insistance si l'on s'intéresse à des textes qui émanent d'une communauté mathématique pour laquelle la quantification n'est pas formellement intégrée à la conceptualisation (notamment à travers des signes spécifiques dans la syntaxe) et où les objets sur lesquels quantifier ne disposent pas d'un statut stabilisé. Ensuite, tout le texte écrit d'une preuve n'a pas nécessairement pour objet de faire partie du langage de la preuve au sens des outils de la déduction. Une partie du langage peut avoir pour objectif d'être descriptif, de renseigner sur les objets en jeu et leur propriété. J'ai jusqu'ici référé à ce type de jeu en parlant de jeu d'extérieur. Ceci dit, il me paraît important de distinguer les jeux d'extérieur tels qu'ils sont décrits par la sémantique des jeux ou la théorie des modèles et le type de jeux d'extérieur auxquels je fais référence ici et que j'appelle par la suite jeux de description. Dans les premiers le rapport entre la syntaxe de l'énoncé et le domaine sur lequel l'énoncé est évalué est assuré par l'usage conjoint de la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un objet (élément du domaine d'interprétation) avec les règles de manipulation de la syntaxe (et notamment les quantificateurs et les variables). Le rapport des jeux de description aux énoncés est différent dans la mesure où la syntaxe de la quantification n'est pas nécessairement prise en compte dans l'évaluation de leur vérité. La mise en relation entre l'énoncé et le domaine d'interprétation est assurée par une notion de vérité beaucoup moins précise qui s'exprime essentiellement à travers la convention *T* :

La proposition « p » est vraie si et seulement si p

Au niveau du langage, le niveau d'analyse de cette convention *T* est un niveau propositionnel. Savoir si *p* est un fait relève d'un travail extra-logique dans lequel la syntaxe de « *p* » n'intervient pas. Du point de vue des jeux de description, la décision concernant la vérité d'un énoncé « *p* » du langage de la preuve est essentiellement élaborée dans un métalangage qui n'est pas contraint par la structure logique de « *p* ». Les jeux sémantiques (au sens GTS par exemple) précisent la convention *T* en engageant une analyse interne des propositions. Ils explicitent la manière de prendre en compte la syntaxe de la proposition « *p* » dans l'évaluation de sa valeur de vérité. Au niveau de l'explication GTS, la notion fondamentale du métalangage est celle de stratégie. La construction d'une stratégie repose aussi bien sur des données issues de la syntaxe de l'énoncé évalué que sur les relations entre les objets du domaine d'interprétation. La syntaxe de l'énoncé influe donc de manière plus précise dans les jeux sémantiques que dans les jeux de description. Cette distinction est parallèle à la distinction entre les deux types de jeux d'intérieur que j'ai utilisée précédemment. Elle s'établit elle aussi au niveau de la prise en compte de règles spécifiques pour traiter de la quantification ou plutôt de la conformité des règles utilisées avec les explications de la quantification présentées dans le premier chapitre de cette partie. Au niveau de l'interprétation en termes de jeux d'extérieur de la preuve de Bolzano, on peut également considérer qu'il commet une erreur dans un jeu sémantique réglé par exemple par la sémantique GTS. En effet, l'énoncé dont il souhaite évaluer la vérité affirme l'existence d'une limite pour une suite donnée vérifiant le critère de Cauchy. Du point de vue GTS, il faut s'assurer de l'existence d'une stratégie qui permette de gagner dans le jeu sémantique associé à l'énoncé. L'existence de cette stratégie repose sur la possibilité pour le proposant de trouver un nombre réel qui soit la limite de la suite considérée. Or la stratégie exposée par Bolzano conduit seulement à une approximation de la limite et donc à une stratégie perdante dans le jeu rapidement évoqué. Selon ce point de vue de l'interprétation en termes de jeux de description, Bolzano n'est pas engagé dans un jeu réglé par les standards des explications logiques du premier ordre (GTS ou théorie des modèles). Il est engagé dans un processus d'explication des relations entre objets. Il dit en particulier que les valeurs prises par la suite sont proches entre elles et proche de la limite, aussi proche que l'on souhaite si l'on se place suffisamment loin. Pour Bolzano, cette description explique, au sens de la convention *T*, la vérité de l'énoncé regardé comme une entité entière et non divisible.

Avant de poursuivre cette approche historique en étudiant deux traités d'analyse parus au XIXème siècle, je présente rapidement l'explication pragmatique de la notion de quantification par Peirce. Je m'appuie pour cela de manière importante sur un article de Chauviré (2005). Cette présentation a pour objectif de soutenir l'idée selon laquelle l'explication Frégéenne, sur laquelle j'ai construit une part importante de mon argumentation jusqu'à maintenant, gagne à être utilisée avec précaution dans l'analyse de la pratique mathématique au XIXème siècle. Elle évoque une approche conceptuellement assez différente de la quantification qui me paraît venir en support de la décision précédente d'envisager des jeux d'intérieur et d'extérieur qui ne s'accorde pas avec les explications logiques reposant sur l'approche de Frege. Selon Chauviré (2005, p. 76) :

> Objectivement, les lois fondamentales du calcul des prédicats chez Peirce ressemblent tout à fait à la forme devenue standard du calcul. Mais l'esprit dans lequel est conçue la quantification n'est pas frégéen, et n'a peut-être pas non plus à être jugé à l'aune frégéenne […]. »

L'explication de Peirce est fortement influencée par son approche pragmatique. Il différencie d'ailleurs les différents types d'énoncés du premier ordre (universels, existentiels et atomiques) à partir de distinctions pragmatiques plutôt que logiques. Pour Peirce, toutes les propositions du premier ordre ont la même forme logique du point de vue de la quantification. Chacune d'entre elles concerne des individus. Il distingue alors les propositions à partir de considérations pragmatiques concernant leur sujet logique. Le sujet logique d'une proposition universelle est dit général (ou universel), le sujet d'une proposition existentielle est qualifié de vague et le sujet d'une proposition atomique de précis. Ces qualificatifs attribués aux sujets logiques renvoient à la manière dont un locuteur les présente à son interlocuteur dans un dialogue. Les quantificateurs jouent le rôle d'index. Ils indiquent la manière dont l'objet (le sujet logique) est désigné à travers le signe. Cette explication dialogique anticipe celle qui sera avancée par la sémantique selon la théorie des jeux :

> « En d'autres termes, si la proposition est universellement quantifiée – si elle a un index général, et non pas vague, comme sujet logique – l'interprétation a le droit de choisir l'objet singulier que $\prod$ [le quantificateur universel] est censé lui indiquer ; l'emploi du quantificateur universel transfère ainsi à l'interprète le choix de l'objet en question. » (Chauviré, 2005, p. 86)

Cependant, selon Chauviré, Peirce localise le vague ou le général dans l'objet visé plutôt que dans la façon dont les quantificateurs indiquent. Les propositions gardent toutes la structure sujet-prédicat des propositions atomiques. L'objet lui-même peut être associée à des adjectifs d'une manière qui n'est pas seulement métaphorique dans le sens où ce sont ces adjectifs qui définissent son statut logique. Cette rapide analyse montre que ce qui est de l'ordre d'une notion logique primitive chez Frege, l'objet ou l'individu, ne l'est pas chez Peirce. La notion d'*objet vague* fournit alors un nouvel exemple, après celui de *grandeur variable*, dont l'analyse semble échapper à la logique classique du premier ordre.

2.2 2^ième^ exemple : Les traités d'analyse de Lacroix et Duhamel

Le choix d'utiliser le texte de Bolzano sur le critère de Cauchy est issu d'un concours de circonstances puisque j'avais lu ce texte avant de m'intéresser spécifiquement à la quantification. Ma recherche d'autres textes mathématiques susceptibles de m'éclairer sur la pratique de la quantification des étudiants s'est construite à partir de la lecture de plusieurs articles de Zerner (1986, 1989, 1994). Ces articles s'intéressent, selon différentes approches, aux traités français d'Analyse ayant eu une édition entre 1870 et 1914, période durant laquelle se développe une pratique « moderne » de l'analyse. Zerner étudie en particulier la percolation des fondements de l'analyse inspirés par l'école de Weierstrass au sein de ces traités français. Pour cela, il est amené à proposer une périodisation de ces traités en trois générations. *La première génération* est composée au sens strict de deux ouvrages qui ont connu une première édition au début du XIXème siècle. Trois autres ouvrages plus tardifs, avec une première édition entre 1869 et 1887 peuvent être rattachés à cette première génération (Zerner les appelle des archaïsmes de deuxième espèce). *La deuxième génération* (dix traités) regroupe des ouvrages ayant eu leur première édition de 1856 à 1887. Elle aussi possède ses archaïsmes de deuxième espèce dont la première publication est plus tardive. Cette deuxième génération se caractérise par une définition des infiniment petits comme une quantité ayant 0 pour limite, une définition des fonctions continues, mais surtout par la présence au début du calcul différentiel du principe de substitution des infiniment petits. Ce principe, souvent présenté comme important, consiste à permettre la substitution de quantités infiniment proches dans la recherche de la limite d'un quotient où d'une somme. Il est à la base du calcul différentiel et intégral. Le principe sur les sommes pose bien sûr un certain nombre de problèmes de validité. *La troisième génération* est composée de six livres parus pour la première fois entre 1886 et 1912. Le principe de substitution n'y figure plus. Par contre, on y trouve une construction des nombres réels et les théorèmes sur les fonctions continues qui reposent sur cette construction. Le travail de Zerner offre une appréhension globale de ce qui ce faisait dans l'enseignement à un moment de l'Histoire des mathématiques où se posait la question de l'intégration de l'analyse en ε - δ et de la construction des nombres réels (tous les traités de son corpus ont eu au moins une parution entre 1870 et 1914). Selon une hypothèse déjà avancée plus haut, il me parait pertinent d'envisager l'étude de ce type de textes dans la perspective de la mise en place d'un cadre d'étude pour l'analyse didactique des pratiques des étudiants d'aujourd'hui de l'enseignement supérieur. Conformément à mon hypothèse, j'ai exclu les ouvrages de la troisième génération puisqu'ils comprenaient une construction des nombres réels. J'ai alors décidé de retenir, de manière plutôt arbitraire, un traité de chacune des deux autres périodes. Parmi les deux traités disponibles (au sens strict) pour la première génération, j'ai choisi celui de Lacroix (1802)[69] qui est le plus ancien. Au niveau de la deuxième génération, j'ai également sélectionné celui qui ouvre la classification de Zerner. Il s'agit de l'ouvrage de Duhamel (1856). Au niveau du choix des preuves à étudier, je me suis essentiellement intéressé aux arguments concernant

[69] Date de la première parution.

l'étude des fonctions réelles à une variable qui correspond aux premières difficultés rencontrées par les étudiants qui arrivent à l'université. Cette étude des propriétés des fonctions est assez limitée dans les ouvrages de première génération, a fortiori dans Lacroix (1802). Elle est un peu plus développée dans les ouvrage de deuxième génération avec notamment l'apparition du théorème de Rolle (Zerner, 1994, p. 12). Ensuite, j'ai porté une attention plus importante aux preuves qui comportent des inférences qu'une lecture contemporaine peut considérer comme imprécises voire invalides. Il me semble que la centration de l'attention sur ce type de preuve permet de lever une illusion quant à l'homogénéité des pratiques et l'homogénéité sémantique. Le livre de Lacroix dont j'analyse quelques extraits maintenant a connu neuf éditions de 1802 à 1881. Les textes cités ci-dessous proviennent tous de la première partie (la partie intitulée « Calcul Différentiel ») de la cinquième édition (1837).

2.2.1 Le traité de Lacroix (1802, 1837)

Je commence par aborder la question, déjà soulignée lors de l'étude du texte de Bolzano, du vocabulaire de la variation en rapport avec celui de la quantification. Voici tout d'abord comment Lacroix présente les objectifs du calcul différentiel (je souligne) :

> « Dans cette partie de l'Analyse, on prend pour sujet <u>le passage</u> d'une ou plusieurs quantités par différents états de grandeur, et les changements qui en résultent dans d'autre quantités dont la valeur dépend de celle des premières. » (Lacroix, §1)

Le sujet d'étude du calcul différentiel est donc le passage des quantités par plusieurs états de grandeurs. La deuxième partie de la phrase montre que Lacroix distingue cette notion de quantité susceptible de passer par plusieurs états de celle de fonction. Deux paragraphes plus loin, Lacroix donne le nom de *variable* à cette notion de quantité changeant de valeur et le nom de *constante* pour celle qui conserve la même valeur « au cours du calcul ». Selon lui, « c'est la nature de la question posée qui détermine quelles sont les quantités qu'on doit regarder comme variables » (Lacroix, §3). La distinction entre ces deux éléments semble donc plutôt de nature pragmatique que de nature logique. Elle me paraît relativement cohérente avec le type d'analyse proposée plus haut concernant la démonstration de Bolzano et impliquant une notion de variation ne reposant pas sur les processus de quantification.

Toujours dans le début de l'ouvrage, Lacroix énonce le principe selon lequel toute fonction est dérivable :

> « Ainsi, lorsque les accroissements respectifs d'une fonction et de sa variable s'évanouissent, leur rapport ne s'évanouit pas, mais il atteint une limite dont il s'est approché par degré ; et il existe, entre cette limite et la fonction dont elle dérive, une dépendance mutuelle qui détermine l'une par l'autre. » (Lacroix, § 4)

L'usage du verbe évanouir est assez fréquent dans le texte lorsqu'il s'agit de rechercher des limites. On peut également trouver des périphrases un peu plus précises du type :

> « […] est la *limite* de $\frac{u'-u}{h}$, c'est-à-dire *la valeur vers laquelle ce rapport tend à mesure que la quantité h diminue, et dont il peut approcher autant qu'on le voudra*. » (Lacroix, §4)

Ceci dit, le concept n'est pas clairement délimité et occupe plutôt une place secondaire dans l'ouvrage. On trouve par exemple un argument qui laisse à penser que pour qu'une quantité tende vers 0, il est nécessaire qu'elle soit « multiple » de la variable (qu'elle soit un « grand O » de la variable) :

> « En effet, la quantité P-*p*, s'évanouissant avec h, doit nécessairement avoir cet accroissement au nombre de ces facteurs ; et ce qu'on peut faire de plus général est de supposer sur $P\text{-}p=Qh^n$, l'exposant n étant positif, mais quelconque d'ailleurs, et Q ne devenant pas infini lorsque h=0 » (Lacroix, § 6)

Dans cet argument, *P* représente le taux d'accroissement de la fonction et *p* la limite de ce taux d'accroissement. L'argument est utilisé pour montrer que toute fonction dérivable admet un développement limité d'ordre au moins deux. Il est bien sûr invalide. Cependant, les contre-exemples concernant ce type d'affirmation (par exemple la fonction $x \to x^{3/2}\sin(1/x)$ en 0) ne seront réellement mobilisés que dans les ouvrages de troisième génération. Le texte peut alors être compris comme une description d'un ensemble d'objets davantage que comme une déduction puisque toute les fonctions « usuelles » vérifient cette propriété d'être dérivable et d'avoir un développement limité d'ordre au moins deux. Au niveau des catégories qui ont émergé de l'analyse de la preuve de Bolzano, ce type d'activité correspond à ce que j'ai appelé des jeux de description. Le vocabulaire de la variation est mobilisé dans un but explicatif. Le langage utilisé ne semble pas avoir pour préoccupation d'analyser les propositions en intégrant les questions de quantification. Il rend plutôt compte de la familiarité de l'auteur avec les objets de son discours. Au niveau des ouvrages de première génération, cette familiarité exclut les fonctions qui ne sont pas suffisamment régulières. Ce genre d'analyse en termes de jeux de description me semble fréquemment mobilisable dans ce traité. C'est notamment le cas lorsque la syntaxe des énoncés est délaissée dans les raisonnements qui s'appuient de manière essentielle sur des figures géométriques. Dans ces situations, le tracé de courbe empêche la prise en compte de certaines fonctions (par exemple celle qui ne sont pas monotones par morceaux). Les décisions sémantiques concernant la vérité des énoncés reposent alors sur l'observation de faits géométriques. C'est le cas par exemple de l'affirmation de la dérivabilité de toutes les fonctions – *lorsque les accroissements respectifs d'une fonction et de sa variable s'évanouissent, leur rapport ne s'évanouit pas* (Lacroix, § 4) – dont la démonstration (Lacroix, § 58) repose sur une identification des fonctions aux courbes qui conduit à réduire le domaine d'interprétation des énoncés aux fonctions qui possèdent des tangentes. Ce type d'approche renforce un usage du vocabulaire de la variation (par exemple celui des trajectoires, du déplacement etc) dont la traduction mathématique dans des jeux de preuve est délicate. Le positionnement sémantique de Lacroix est assumé clairement dans le paragraphe qui suit cette preuve géométrique :

> « Mais quel que soit l'origine qu'on lui assigne [au calcul différentiel], il reposera toujours immédiatement sur *un fait analytique* antérieur à toute hypothèse, comme la chute des corps graves vers la surface de la terre, est antérieur aux diverses explications qu'on en a données : et ce fait est précisément la propriété dont jouissent toutes les fonctions, d'admettre une limite dans le rapport de leur accroissement avec ceux de la variable dont elle dépendent. » (Lacroix, § 59)

La dérivabilité des fonctions est présentée comme un fait immédiat et antérieur à toute hypothèse. Dans cette perspective, la preuve qu'il en donne dans le paragraphe précédent (Lacroix, § 58) est plutôt à regarder comme une explication dans un jeu de description que comme l'explicitation d'une stratégie gagnante dans un jeu de preuve sur les énoncés. Au niveau de l'étude des fonctions, le paragraphe soixante propose une interprétation géométrique des dérivées première et seconde. Il s'appuie sur l'hypothèse implicite de la convexité par morceaux (quatre dessins sont réalisés, selon la monotonie et la convexité). Cela lui permet ensuite de lire sur les courbes les liens entre dérivée première et monotonie et dérivée seconde et convexité (§ 62). Il s'agit donc à nouveau de jeux de description. Il me semble qu'un aspect important de ce texte est que les questions délicates qui seraient traitées de manière anachronique par les outils de la quantification sont abordées presque exclusivement à travers un niveau descriptif et que ce niveau ne facilite pas leur formulation précise. Les outils syntaxiques mis en place sont alors plutôt lâches et ne semblent pas particulièrement relever d'un usage réglé au sens des jeux utilisés jusque là. Selon Dugac

(2003, p. 128-129), la prise de conscience de la nécessité d'une reprise des bases de l'analyse est issue de la confrontation des mathématiques avec les premières tentatives de preuves de théorèmes comme celui des valeurs intermédiaires ou celui des accroissements finis. Le passage de la première à la deuxième génération dans la classification de Zerner peut-être vu comme une étape de ce processus. Par exemple, les traités de la deuxième génération énoncent le théorème de Rolle alors que Lacroix ne le fait pas. Ce théorème permet notamment d'envisager des preuves plus analytiques des théorèmes précédents concernant la monotonie et la convexité des fonctions. La pratique mathématique de Lacroix ne rend pas nécessaire ce genre de démarche puisqu'il s'appuie pour l'essentiel sur une approche propositionnelle et descriptive des mathématiques. Par ailleurs, il est marquant de constater combien les aspects théoriques concernant les fondations du calcul occupent une place restreinte au regard du volume de questions pratiques abordées dans son ouvrage.

Avant d'en venir à une analyse de l'usage de la quantification dans le traité de Duhamel, je présente une dernière preuve issue de celui de Lacroix. Cette preuve intervient au début du texte. Elle concerne l'énoncé « deux fonctions égales ont des différentielles égales » :

> « Il est aisé de voir que deux fonction égales ont des différentielles égales ; car, lorsque deux fonctions sont égales entre elles, quelle que soit la valeur de la variable dont elles dépendent, il faut que les changements respectifs qu'elles reçoivent en conséquence de celui qu'on attribue à cette variable, soient toujours égaux. Si, par exemple, *u* et *v* désignent des fonctions de *x* telles que *u* = *v*, quel que soit *x*, et que quand *x* devient *x* + d*x*, *u* se change en *u*' et *v* en *v*', on aura encore *u*'=*v*' ; retranchant de cette équation la précédente, il en résultera
>
> $$u' - u = v' - v$$
>
> puis divisant par d*x*, on obtiendra
>
> $$\frac{u'-u}{dx} = \frac{v'-v}{dx}$$
>
> quels que soient x et dx. Si donc *p* et *q* désignent les limites respectives des rapports ci-dessus, les valeurs générales de ces rapports pourront, d'après ce qui précède, être représentées par $p+\alpha$ et $q+\beta$, *p* et *q* ne dépendant pas de d*x*, tandis que α et β décroissent et s'évanouissent en même temps que d*x* ; et l'on aura :
>
> $$p+\alpha = q+\beta \text{, d'où } p-q = \beta-\alpha$$
>
> Il suit de là que *p* = *q* ; [je passe la fin de la preuve]. » (Lacroix, § 7)

Cette preuve permet d'avancer quelques éléments sur la pratique de la quantification de Lacroix dans ce que j'interprète comme un jeu d'intérieur. Sa présence peut se comprendre comme la volonté de s'assurer de la conservation de la relation l'égalité par le passage à la différentielle. Dans l'enseignement contemporain, ce type de résultats est obtenu comme une conséquence de la propriété d'unicité de la limite puisque la notion de limite est plus fondamentale, sur le plan de l'organisation théorique moderne, que celle de dérivée ou de différentielle. La preuve repose alors sur deux processus d'instanciation universelle conduisant à l'introduction de deux lettres de constante vérifiant la même propriété (être le limite d'une fonction donnée). On montre alors qu'il y a égalité entre les lettres introduites. Ce qui me semble intéressant dans la preuve de Lacroix est le fait qu'il introduise les lettres p et q à partir d'instanciation réalisée sur des énoncés impliquant deux lettres de fonction distinctes. Cette différence de forme peut s'interpréter au regard du caractère premier de la notion de différentielle chez Lacroix. Regarder l'existence de la différentielle comme *un fait analytique* me semble impliquer d'adopter dans un même temps et de manière implicite une forme d'unicité de cette différentielle. Selon cette analyse, l'objectif de la preuve ci-dessus est davantage de s'assurer que deux fonctions égales, au sens de l'égalité des valeurs prises par ces fonctions, qu'il me semble important de ne pas confondre avec l'identité entre fonctions même si la distinction échappe à une analyse mathématique ayant clarifié le concept, ont bien les mêmes différentielles. Autrement dit, l'argument me semble autant porter sur la notion de fonction[70] que sur celle de différentielle. Comme je l'ai affirmé ci-dessus, la considération pratique de la différentiabilité comme quelque chose d'inanalysable absorbe et empêche d'émerger une partie de la complexité liée à la quantification. D'autre part, l'usage du vocabulaire de la variation ne permet pas non plus une définition précise de la notion de fonction. La preuve ci-dessus me semble avoir pour objectif de préciser le rapport entre les concepts de différentiation et de fonction, un rapport qui sera plus tard pris en compte par la définition en ε - δ de la différentielle.

2.2.2 Le traité de Duhamel (1856)

---

[70] « Pour exprimer qu'une quantité dépend d'une ou de plusieurs autres, soit par des opérations quelconques, soit même par des relations impossibles à assigner algébriquement, mais dont l'existence est déterminée par des conditions certaines, on dit que la première est *fonction* des autres. <u>L'usage de ce mot en éclaircira la signification</u>. » (Lacroix, § 2, je souligne).

Dans ce chapitre, j’aborde la question de la place de la quantification dans Duhamel (1856). Cet ouvrage est le premier de ce que Zerner appelle la deuxième génération. Le traité est organisé en trois livres. Les éléments qui suivent sont extraits des deux premiers qui sont intitulés « Des quantités considérées comme limites » et « Calcul des dérivées et différentielles des fonctions. Calcul inverse ou intégration des différentielles ». Le troisième livre « Des limites de sommes. Calcul inverse du calcul différentiel » est en effet plutôt consacré à l’intégration. Au niveau du vocabulaire, le terme de grandeur est toujours utilisé aussi bien pour parler des suites et des fonctions que pour parler des nombres. Selon l’objet qui est visé, il peut à nouveau se trouver associé aux qualificatifs de « constante » ou de « variable ». Le principe de substitution, qui fait partie des éléments caractéristiques des traités de deuxième génération, apparaît dès la préface de l’ouvrage. Il est présenté comme un outil fondamental de simplification des calculs :

> « Dans toutes ces recherches, on fait un fréquent usage d’un principe général très simple, qui consiste en ce que la limite d’une somme d’infiniment petits n’est pas changée, quand on altère ses éléments de quantités infiniment petites par rapport à eux-mêmes ; ou en d’autres termes, quand on remplace ces éléments par d’autres dont les rapports avec les premiers ont respectivement pour limite l’unité. […] Nous sommes passé ensuite à la considération des limites de rapports d’infiniment petits ; le principe précédent s’y applique encore, et les limites ne sont pas changées quand on altère les termes variables des rapports, de quantités infiniment petites par rapport à ces termes. » (Duhamel, préface)

On peut également noter que, même si la question de la construction n’est pas abordée, l’ouvrage commence par une tentative de caractérisation de l’égalité des nombres réels. J’ai souligné plus haut le lien qu’il y a entre la construction des nombres réels et la possibilité du développement d’un usage mathématique d’une quantification qui puisse permettre d’agir efficacement sur ces nombres. Duhamel caractérise l’égalité de deux « incommensurables » x et y par l’existence d’une suite d’entiers b_n qui « croissent indéfiniment » et telle que pour tout n et pour tout a (je reformule pour plus de concision en utilisant un langage symbolique et quantifié que Duhamel n’utilise pas) :

$$\frac{a}{b_n} < x < \frac{a+1}{b_n} \Leftrightarrow \frac{a}{b_n} < y < \frac{a+1}{b_n}$$

Il montre ensuite que cette caractérisation ne dépend pas de la suite b_n choisie, ce qui revient, à la manière des coupures de Dedekind[71], à caractériser les irrationnels par la donnée des rationnels qui sont plus petits et de ceux qui sont plus grands. Après avoir défini la notion de limite, Duhamel revient sur cette caractérisation et constate que les « incommensurables » sont limites de « commensurables » et *donc* « que tous les principes des limites y sont applicables » (Duhamel, § 14). La notion de limite est définie de la manière suivante :

> « Lorsqu'une grandeur prend successivement des valeurs qui se rapprochent de plus en plus de celle d'une grandeur constante, de telle sorte que la différence avec cette dernière puisse devenir et rester moindre que toute grandeur désignée, soit que la variable soit toujours au-dessous, toujours au-dessus, ou tantôt au-dessous et tantôt au-dessus de la constante, on dit que la première *approche indéfiniment* de la seconde, et que celle-ci en est la *limite*. » (Duhamel, § 5)

Dans cette définition, on peut observer la cohabitation du vocabulaire de la substitution et de celui de la variation. Par exemple, le terme « successivement » sous-entend que la « grandeur » prenne plusieurs valeurs différentes par un processus de réitération plutôt que par un processus de modification intrinsèque. Il fait néanmoins référence à un processus temporel. Les deux approches de la variation, substitution et variation, continueront à être employée tout au long du texte. Selon l'objet qui est visé, le terme de grandeur peut se trouver associé aux qualificatifs de « constante » ou de « variable ». Ceci dit, il faut noter un changement important sur l'espace, physique et conceptuel, que la notion de limite occupe dans ce traité en comparaison de celui de Lacroix. Au niveau du volume, un chapitre entier, bien que relativement court, est consacré à la notion. Si l'on fait abstraction du chapitre sur les nombres, ce chapitre occupe la place qu'occupait le chapitre consacré à la notion de différentielle dans l'ouvrage de Lacroix. Au niveau conceptuel, la notion de limite, et celle d'infiniment petit défini comme « grandeur variable dont la limite est zéro », remplace celle de différentielle dans la construction du cours. Duhamel revendique ce choix dans sa préface :

> « La notion des infiniment petit remonte à Archimède ; elle s'est présentée d'elle-même dans la mesure des grandeurs géométriques, aussitôt qu'on a voulu considérer les aires de courbes différentes du cercle, ou les volumes de corps

[71] Néanmoins, l'approche de Duhamel se rapproche plus de celle d'Euclide que de celle de Dedekind dans la mesure où l'équivalence précédente ne dit pas ce que sont x et y. Elle donne seulement une caractérisation de l'égalité qui suppose qu'une relation d'ordre ait été construite pour les nombres réels. L'utilisation de la notion de « grandeur » comme sous-jacente à la construction des nombres (cf. le paragraphe sur Bolzano) masque cette nécessité (sur ces questions voir en particulier la correspondance entre Dedekind et Lipschitz publiée dans Dedekind (2006)).

terminés par des surfaces courbes autres que celle du cylindre, du cône et de la sphère. Déjà pour la comparaison des volumes de ces derniers corps, ainsi que pour la mesure du cercle, on avait été amené à la conception fondamentale des limites. Ainsi les deux idées générales les plus fécondes des sciences mathématiques, remontent presque jusqu'à leur berceau, et doivent, par conséquent, se présenter presque au début de leur enseignement. » (Duhamel, préface)

En portant son attention sur l'idée de limite, Duhamel se trouve en situation d'avancer plus en profondeur que Lacroix dans l'étude des notions fondamentales de l'analyse comme celle de continuité, de dérivabilité etc. Son traité est d'ailleurs intitulé « éléments de calcul infinitésimal » plutôt que « calcul différentiel ». Par ailleurs, l'étude des fonctions est sensiblement approfondie sur le plan théorique. Pour autant, de nombreuses analogies existent. Par exemple, Duhamel propose une preuve du fait que « si deux variables sont constamment égales et tendent chacune vers une limite, ces deux limites sont nécessairement égales » dans un esprit assez proche de ce celui de Lacroix dans la preuve présentée et analysée ci-dessus :

> « En effet, deux grandeurs toujours égales ne présentent qu'une seule valeur, et il semble inutile de démontrer qu'une valeur variable ne peux tendre à la fois vers deux limites inégales, c'est-à-dire vers deux grandeurs constantes, différentes l'une de l'autre. Il est au reste bien facile d'ajouter quelques développements qui rendent plus claire encore, s'il est possible cette importante proposition. Supposons, en effet que deux variables toujours égales aient des limites différentes A et B, A étant, par exemple, la plus grande, et surpassant B d'une quantité déterminée Δ. » (Duhamel, § 7) [Je reproduis la suite de la preuve ci-dessous]

Mis à part le fait que l'existence de la limite est cette fois clairement posée comme une hypothèse (plus haut dans le texte de la preuve) et que l'argumentation porte sur la notion de limite plutôt que sur celle de différentielle et même si au passage Duhamel affirme que « deux grandeurs toujours égales » ne forment qu'une seule « valeur variable », l'interprétation faite plus haut concernant la preuve de Lacroix me semble toujours en partie disponible au sens où l'argument semble porter autant sur la notion de limite que sur celle de grandeur ou de valeur variable. La preuve est en effet toujours construite à partir d'instanciations effectuées sur des énoncés qui semblent impliquer deux variables différentes. Ceci dit, la fin de la preuve de Duhamel est assez différente de celle de Lacroix. Elle marque une certaine maîtrise de la quantification. La question de la relation entre la limite et la variable est abordée à travers un argument assez détaillé alors que, dans une même situation, Lacroix construit son argument en s'appuyant exclusivement sur le vocabulaire de la variation :

> « Il suit de là que $p = q$ [72]; car si on supposait $p - q = D$, il en résulterait que la quantité $\beta - \alpha$ ne pourrait pas tomber en-dessous de D, tandis qu'elle s'évanouit : il faut donc que D = 0[73] » (Lacroix, § 7)

Duhamel termine sa preuve de la manière suivante :

> « La première variable ayant A pour limite, finira par rester constamment comprise entre deux valeurs, l'une plus grande, l'autre plus petite que A, et ayant avec A une différence aussi petite que l'on voudra : bornons nous à supposer cette différence moindre que $\frac{1}{2}\Delta$. Semblablement la seconde variable finira par rester indéfiniment à une distance de B moindre que $\frac{1}{2}\Delta$. Or il est évident qu'alors les deux variables ne pourraient plus être égales ; » (Duhamel, § 7)

Cette comparaison rapide entre les preuves de Lacroix et Duhamel me semble mettre en évidence une certaine rupture dans la pratique de la quantification. Pour autant, l'usage de la notion de variable, comme celle de limite, ne peut pas s'identifier sans risque avec un usage contemporain. Par exemple, la considération simultanée de deux grandeurs variables toujours égales comporte quelque chose d'inhabituel pour une lecture anachronique. Dans la suite de ce paragraphe, je présente quelques preuves de Duhamel comportant ce qui peut s'interpréter comme des inférences non valides. L'étude de ces inférences a pour objectif de lever une partie de l'illusion d'uniformité des pratiques concernant la quantification.

***La preuve de Duhamel du principe de substitution** :*

La première preuve sur laquelle je souhaite m'arrêter est celle du principe fondamental de substitution pour les sommes que Duhamel présente dans la préface et dont Zerner souligne l'importance historique. Cette preuve intervient dans un chapitre, le sixième, consacré « aux grandeurs considérées comme limites de sommes d'infiniment petits ». Ces grandeurs forment avec celles « considérées comme limites de séries ou de rapports d'infiniment petits» les

---

[72] *p* et *q* sont les limites des taux d'accroissements des deux variables que Lacroix considère. α et β sont des quantités qui « décroissent et s'évanouissent ». Voir la preuve de Lacroix analysée plus haut.

[73] En note à cet endroit, Lacroix fait remarquer que cette preuve montre aussi que deux limites d'une même variable doivent être égales.

« différentes manières dont les quantités peuvent être considérées comme limites de variables ». Il s'agit de prouver le théorème :

> « Théorème. – *La limite de la somme de quantités positives infiniment petites n'est pas changée, lorsqu'on remplace ces quantités par d'autres dont les rapports avec elles ont respectivement pour limite l'unité*.

La preuve proposée par Duhamel est la suivante :

> Soient, en effet, les infiniment petits
>
> $$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_m,$$
>
> dont la somme tend vers une limite à mesure que leur nombre augmente indéfiniment. Soient d'autres infiniment petits
>
> $$\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_m,$$
>
> tels que les rapports
>
> $$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3}, ..., \frac{\alpha_m}{\beta_m},$$
>
> aient tous pour limite l'unité.
>
> Or on sait que si l'on a une suite de fractions dont les dénominateurs soient positifs et les numérateurs de signes quelconques, la somme algébrique des numérateurs divisée par la somme des dénominateurs est intermédiaire entre les deux qui sont algébriquement la plus petite et la plus grande.
>
> La fraction
>
> $$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m}{\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_m}$$
>
> sera donc comprise entre la plus grande et la plus petite des précédentes, et tendra nécessairement aussi vers l'unité : d'où il résulte que les limites de son numérateur et de son dénominateur sont égales ; la somme $\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_m$ a donc la même limite que $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m$. Ce qu'il fallait démontrer. » (Duhamel, § 26)

L'inférence qui m'intéresse spécifiquement est celle associée au terme « nécessairement » dans l'affirmation selon laquelle la plus grande et la plus petite des fractions parmi les fractions suivantes $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3}, ..., \frac{\alpha_m}{\beta_m}$ tend vers l'unité. Dans cet argument, il ne semble pas y avoir de bornes sur *m*, si bien qu'on peut le regarder comme invalide puisque des contre-exemples existent. Néanmoins, ces contre-exemples reposent sur un usage assez précis de la quantification dans le sens où ils reposent sur une certaine lecture de l'énoncé en jeu qui précise la nature des « variables » $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3}, ..., \frac{\alpha_m}{\beta_m}, ...$. Par exemple, on peut associer à chaque quotient $\frac{\alpha_j}{\beta_j}$ une suite $(a_{i,j})_{i \geq j}$ et s'appuyer sur le tableau ci-dessous pour lequel chacune des colonnes représentent une suite qui a pour limite un :

	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	…	$a_{i,l}$	…
$a_{1,j}$	2	*	*	…	*	…
$a_{2,j}$	3/2	2	*	…	*	…
$a_{3,j}$	4/3	3/2	2	…	*	…
…	…	…	…	…	…	…
$a_{l,j}$	$(l+1)/l$	$l/(l-1)$	$(l-1)/(l-2)$	…	2	…
$a_{l+1,j}$	(l+2)/(l+1)	$(l+1)/l$	$1/(l-1)$	…	3/2	…
…	…	…	…	…	…	…

Pour construire un contre-exemple à l'affirmation concernant le maximum, il suffit de placer une suite de nombres plus grands que 1 qui ne converge pas vers 1 de manière à ce que l'on puisse trouver des éléments de cette suite aussi bas que l'on veuille dans le tableau. Puisque chaque colonne représente une suite qui tend vers 1, cela contraint à placer ces éléments toujours plus à droite. Dans l'exemple choisi, la diagonale formée de 2 procure une telle suite. Le maximum sur chaque ligne vaut 2, il ne converge donc pas vers 1.

Je rentre maintenant dans une étude plus précise de la quantification. L'énoncé affirmant que chaque suite $(a_{i,j})_{i \geq j}$ converge vers l'unité a la forme suivante :

$$\forall j \in IN, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in IN, \forall i \in IN, (i \geq j \wedge i \geq N) \Rightarrow |a_{i,j} - 1| \leq \varepsilon \quad (1)$$

L'énoncé affirmant que le maximum des $(a_{i,j})_{i \geq j}$ converge vers l'unité s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in IN, \forall j \in IN, \forall i \in IN, (i \geq j \wedge i \geq N) \Rightarrow |a_{i,j} - 1| \leq \varepsilon \quad (2)$$

Sur le plan logique, l'affirmation de Duhamel revient à une inversion de quantificateurs entre un quantificateur universel et un existentiel. Au niveau des jeux d'intérieur, l'impossibilité d'une telle déduction peut se comprendre à partir des restrictions d'usage de la règle d'introduction du quantificateur universel. Selon les critères de la déduction naturelle, la « preuve » ci-dessous contient une erreur :

1. $\forall x \exists y (xRy)$	(hypothèse)
2. $\exists y (aRy)$	(élimination de l'universel)
3. aRb	(nouvelle hypothèse)
4. $\forall x (xRb)$	(introduction de l'universel sur (3))
5. $\exists y \forall x (xRy)$	(introduction de l'existentiel sur (4))
6. $\forall y \exists x (xRy)$	(élimination de l'existentiel sur (2) et (5), l'usage de cette règle décharge l'hypothèse (3))
7. $\forall x \exists y (xRy) \Rightarrow \exists y \forall x (xRy)$	(introduction de l'implication sur (1) et (6))

En (4), l'usage de la règle d'introduction de l'universel enfreint les restrictions d'usage puisque celles-ci précisent que la lettre *a* ne doit pas apparaître dans les hypothèses de (3) alors que cette lettre apparaît en (2). Au niveau des jeux dialogiques, l'impossibilité de trouver une stratégie gagnante pour le proposant repose sur le fait que le choix du proposant de la lettre associé à l'existentiel doit être fait avant le choix associé à l'universel qui est de la responsabilité de l'opposant. Je ne détaille pas le tableau associé à ce jeu d'intérieur. Au niveau des jeux d'extérieur, une analyse de cette inférence en termes de jeux sémantiques conduit au tableau suivant (l'expression $\forall i \in IN, (i \geq j \wedge i \geq N) \Rightarrow |a_{i,j} - 1| \leq \varepsilon$ est représentée par $\varphi(j, \varepsilon, N)$) :

	Opposant	Proposant	Valeur de vérité
A	$\forall j \forall \varepsilon \exists N, \varphi(j, \varepsilon, N)$		

B		$\forall\varepsilon\exists N\forall j,\varphi(j,\varepsilon,N)$	
C	? ε L'opposant choisit un nombre ε_0	$\exists N\forall j,\varphi(j,\varepsilon_0,N)$	
D	? *N* L'opposant veut que le proposant choisisse un rang		
E	$\exists N,\varphi(j_0,\varepsilon_0,N)$	? j ? ε Avant de répondre à la question de l'opposant, le proposant attaque *A* en choisissant un indice j_0 et en reprenant le choix ε_0 de l'opposant en *C*.	
F	$\varphi(j_0,\varepsilon_0,N_0)$ L'opposant répond à demande du proposant en choisissant un rang N_0	? *N*	Vrai (on suppose que sur le domaine d'interprétation choisi pour les suites, celles-ci convergent toutes vers l'unité, si bien que l'opposant peut faire un choix qui rende son assertion vraie).
G		$\forall j,\varphi(j,\varepsilon_0,N_0)$ Le proposant doit maintenant répondre à la question formulée en *D*. Il reprend le choix N_0 de l'opposant en *G*.	
H	? j L'opposant choisit un indice j_1 pour laquelle le proposant doit s'engager	$\varphi(j_1,\varepsilon_0,N_0)$	? : la valeur de vérité de cette assertion dépend du choix de l'opposant mais aussi du domaine d'interprétation dans lequel les suites peuvent être interprétée, c'est-à-dire de la nature des « variables » en

			jeu.

La possibilité de disposer d'une stratégie gagnante pour le proposant, ou l'opposant, dépend de la nature des quotients « variables » $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3}, ..., \frac{\alpha_m}{\beta_m}$ en jeu. Il existe des domaines d'interprétation pour les $(a_{i,j})_{i \geq j}$ dans lesquels il n'existe pas de stratégie gagnante pour le proposant. C'est le cas par exemple des domaines d'interprétations qui autorisent l'interprétation faite plus haut. Pour gagner, l'opposant peut choisir $\varepsilon_0 = 1/2$ en *C*, puis le rang $N_0 = j_0 + 1$ où j_0 est le choix du proposant en *E* et finalement $j_1 = N_0$. L'inférence de (1) à (2) n'est donc pas logiquement valide. Ceci dit, le proposant peut disposer d'une stratégie gagnante si l'on impose certaines restrictions au domaine d'interprétation, si l'on fait l'hypothèse d'une certaine homogénéité entre les « quotients variables ». Par homogénéité, je pense par exemple au cas où l'ensemble des quotients considérés peut être décrit par un nombre fini d'entre eux, au sens où l'ajout de nouveaux quotients de l'ensemble ne perturbe plus les maximums et les minimums. Pour construire une stratégie gagnante sur ce domaine d'interprétation, il suffit alors au proposant de répéter, autant de fois que nécessaire pour parcourir l'ensemble fini mais « descriptif » de suites, le sous jeu conduisant à l'obtention d'un rang N_0 en *F* puis de prendre le plus grand de ces rangs comme choix en *G*. Cette remarque fournit une classe de modèles sur lesquels l'inférence de (1) à (2) est vraie. Par ailleurs, ce critère d'homogénéité peut être étendu au cas où l'ensemble des quotients est susceptible d'être décrit par un nombre fini d'entre eux moyennant une approximation aussi fine que l'on veuille. Ceci revient à dire que l'ajout de nouveaux quotients ne vient plus perturber, à partir d'un certain moment, le maximum de l'ensemble que d'une certaine quantité choisie à l'avance et aussi petite que souhaitée. Ce critère d'homogénéité « étendu » fournit le domaine d'interprétation le plus grand pour lequel le proposant dispose d'une stratégie gagnante dans le jeu précédent (sa stratégie s'adapte de la stratégie précédemment décrite).

Cette approche sémantique met en évidence le rôle joué par la structure dans laquelle les quotients variables $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3}, ..., \frac{\alpha_m}{\beta_m}$ sont interprétés. En particulier, la construction du contre-exemple que j'ai proposé repose sur une interprétation de ces variables par des suites et sur un usage assez précis de la quantification. Or les notions de « variables », de « fonctions » ou d' « infiniment petits » ne sont pas construites selon ce schéma. Il est alors délicat, en s'appuyant seulement sur l'usage du vocabulaire de la variation, d'envisager ce type de contre-exemple qui repose sur la manipulation de quantificateurs multiples et de nature différente.

La preuve de Duhamel de l'existence de la différentielle

Je m'intéresse maintenant à la manière dont Duhamel traite de la question de l'existence des tangentes. Un premier constat est le fait que, conformément à la place accordée à la notion de limite dans le traité, le problème de l'existence de la différentielle est défini comme celui de l'existence de la limite du taux d'accroissement et que cette existence n'est pas considérée comme évidente. Duhamel propose alors une preuve reposant sur les hypothèses explicitement assumées de continuité et de monotonie par morceaux de la fonction :

> « Cela posé [les hypothèses en question], il est facile de démontrer que, sous ces conditions, pour toute valeur de *x* il existe une limite finie pour le rapport des accroissements infiniment petits correspondant de *h* et *k* ; c'est-à-dire qu'il ne peut y avoir que des valeurs exceptionnelles de *x* pour lesquelles ce rapport croisse ou décroisse indéfiniment.
>
> En effet, soient x_0, X deux valeurs de *x* satisfaisant aux conditions ci-dessus indiquées ; y_0, Y les valeurs correspondantes de *y* ; partageons l'intervalle $X - x_0$ en *n* parties égales, que nous désignerons par *h*, et soient $k_1, k_2, k_3, ..., k_n$ les valeurs correspondantes des accroissements positifs de *y*, on aura
>
> $X - x_0 = nh$, $Y - y_0 = k_1 + k_2 + ... + k_n$;
>
> d'où résulte
>
> $$\frac{Y - y_0}{X - x_0} = \frac{\frac{k_1}{h} + \frac{k_2}{h} + ... \frac{k_n}{h}}{n}$$

> C'est-à-dire que le rapport invariable des accroissements finis de *x* et de *y*, quand on passe de x_0 à X, est la moyenne arithmétique des rapports $\frac{k_1}{h},\frac{k_2}{h},...\frac{k_n}{h}$ quel que soit le nombre entier *n*.
>
> Si maintenant on fait croître *n* indéfiniment, les termes de ces rapports tendront vers zéro, et leur moyenne arithmétique étant toujours égale à la quantité finie $\frac{Y-y_0}{X-x_0}$, il est impossible qu'ils tendent tous vers zéro, ou qu'ils croissent tous indéfiniment. […] » (Duhamel, § 69)

Du point de vue de la validité des inférences, plusieurs points peuvent être discutés en rapport avec la quantification. Une première chose est que Duhamel semble considérer de manière implicite que l'étude des accroissements $\frac{k_1}{h}+\frac{k_2}{h}+...\frac{k_n}{h}$ permet de conclure sur tous les nombres réels, ou au moins l'essentiel, de l'intervalle entre x_0 et *X*. La question du lien entre un résultat sur ces rapports d'infiniment petits et la question de la dérivabilité pour chaque nombre réel (dont une caractérisation est proposée au début du traité, cf. ci-dessus) n'est pas abordée. Ensuite, il semble que Duhamel considère que ne pas tendre vers l'infini ou ne pas tendre vers 0 signifie avoir une limite finie et qu'il identifie « pas tous » avec un nombre fini. Je ne rentre pas dans le détail de ces arguments pour me concentrer sur l'inférence selon laquelle il est impossible que tous les rapports $\frac{k_1}{h},\frac{k_2}{h},...\frac{k_n}{h}$ tendent vers l'infini (ou qu'ils tendent tous vers zéro) puisque leur moyenne arithmétique est constante. Cette inférence peut à nouveau être regardée comme invalide. A la manière de l'analyse précédente, une interprétation à l'aide de suites permet de construire un contre-exemple. Dans le tableau ci-dessous, chaque colonne représente une suite qui tend vers l'infini. La somme arithmétique de chaque ligne est constante :

	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	$a_{i,4}$	$a_{i,5}$	…
$a_{1,j}$	1	*	*	*	*	…
$a_{2,j}$	1+1/2	1-1/2	*	*	*	…
$a_{3,j}$	1+1/2+1/3	1-1/2+1/3	1-2/3	*	*	…
$a_{4,j}$	1+1/2+1/3+1/4	1-1/2+1/3 +1/4	1-2/3+1/4	1-3/4	*	…
$a_{5,j}$	1+1/2+1/3 +1/4+1/5	1-1/2+1/3 +1/4+1/5	1-2/3+1/4 +1/5	1-3/4+1/5	1-4/5	…
…	…	…	…	…	…	…

Il existe des contre-exemples du même type pour les suites qui tendent vers zéro (au sens des colonnes du tableau). Dans le paragraphe suivant (Duhamel, § 70), Duhamel affirme que « si tous les rapports tendent vers zéro, leur moyenne y tendra nécessairement », ce qui relève vraisemblablement de la même approche. Sans renouveler une analyse détaillée de la forme logique de la déduction, on peut néanmoins remarquer que la construction du contre-exemple repose à nouveau sur une analyse en termes de suites et de quantification de la notion de rapport d'infiniment petits. Il me semble qu'il y a une certaine régularité de pratiques avec les affirmations précédentes de Duhamel concernant le comportement du maximum d'un ensemble d'infiniment petits que je propose de résumer par la phrase suivante : si toutes les variables ont le même comportement au niveau de leur limite alors leur maximum (resp. leur minimum ou leur moyenne) suit ce comportement. Comme je l'ai montré plus haut, cette conception s'applique à une classe relativement importante de suites de « variables », celles pour lesquelles il y a une forme d'uniformité au niveau de la convergence si bien que la construction ou l'identification[74] d'un contre-exemple demande une certaine familiarité avec la quantification, et en particulier l'enchaînement des quantificateurs.

Synthèse

Dans ce chapitre, je présente des preuves issues de travaux de Bolzano, Lacroix et Duhamel, qui ont été produits dans la première moitié du XIXème siècle. Mon hypothèse de travail est que leurs pratiques sont susceptibles d'éclairer celles des étudiants en mathématiques à l'université dans la mesure où leur contexte historique est celui d'une construction inachevée tant des nombres réels que de la théorie elle-même (incluant un usage réglé de la quantification). Mon objectif est d'utiliser ces preuves pour essayer de mettre en place des éléments d'analyse de l'activité des étudiants en mathématiques confrontés à des problèmes impliquant l'usage de la quantification. L'étude de ces textes conduit à distinguer plusieurs niveaux de lecture. Au niveau des jeux d'intérieur, il est d'abord possible de

---

[74] Bolzano a construit autour de 1834 une fonction continue sur un intervalle et nulle part dérivable sur cet intervalle dans un texte qui ne sera publié qu'au XXième siècle. L'exemple de Weierstrass date de 1861 et sera publié en 1875. (Sebestik, 1992, p. 418, Dugac, 2003, p. 88)

comprendre les productions à partir de la logique du premier ordre (le premier chapitre de cette partie en précise les règles d'usages associées aux quantificateurs). Concernant les preuves analysées ici, cette lecture permet de repérer un certain nombre d'erreurs logiques, d'utilisation de pas d'inférence non valides (au sens du cadre de référence pour la validité de la logique du premier ordre). Cependant, cette interprétation conduit à utiliser des outils anachroniques qui ne me semblent pas rendre compte de manière satisfaisante de l'usage de vocabulaire de la variation, très présent dans les textes étudiés. Au niveau de la déduction, il semble alors intéressant d'envisager d'autres types de règles de validation reposant sur des jeux de langage spécifiques à ce vocabulaire. Par exemple, l'usage de processus d'instanciation produisant des « lettres variables » me paraît susceptible de préciser la compréhension du texte de Bolzano. Pour Lacroix, la possibilité de considérer la différentielle d'une fonction semble être une règle fondatrice et structurante de sa pratique du calcul différentiel. J'ai aussi pu relever une règle en acte selon laquelle lorsque toutes les variables d'un ensemble donné ont la même limite (y compris la « limite » infinie) alors leur minimum, leur maximum et leur moyenne arithmétique ont ce même comportement. Au niveau des jeux d'extérieur, le langage des textes étudiés peut aussi parfois être interprété comme un métalangage dont l'objectif n'est pas de développer une démarche déductive à partir de la structure des énoncés de la preuve mais plutôt de partager un point de vue sur un ensemble d'objets. Par exemple, la preuve de Bolzano peut être interprétée comme une explication de la vérité du critère de Cauchy plutôt que comme une preuve formelle. D'autre part, il est possible d'interpréter certains passages de Lacroix (1802) comme une description d'un état de faits, description qui n'utilise pas nécessairement les outils sémantiques de la quantification. Enfin, je me suis aussi servi de jeux sémantiques réglés pour essayer de mettre en évidence le fait que plusieurs contre-exemples que l'on pouvait opposer aux inférences étudiées reposaient sur une vision d'un domaine d'interprétation pour le langage utilisé fortement imprégnée d'une appréhension de la quantification comme processus de substitution. Les contre-exemples concernant le principe de substitution me paraissent rentrer dans ce cadre.

3. APPROCHE EXPERIMENTALE

A travers des études logique et historique, les deux chapitres précédents ont contribué à la mise en place d'un cadre pour l'analyse didactique de la pratique mathématique liée à la quantification. La synthèse précédente en rappelle les grandes lignes. Dans ce troisième chapitre, je m'appuie sur ces outils d'analyse pour conduire la partie expérimentale du travail et en analyser les résultats. Mon approche expérimentale de la pratique des étudiants autour de la quantification a connu deux moments principaux. Dans un premier temps, j'ai réalisé une pré-expérimentation qui s'intéresse au traitement par des étudiants en mathématiques d'énoncés quantifiés isolés dans un contexte essentiellement non mathématique. Il s'agissait de recueillir des éléments sur la pratique ordinaire du langage. Cette pré-expérimentation se situe dans la continuité de la recherche expérimentale de Dubinski & Yiparaki (2000). Dans cet article, les auteurs s'intéressent à la compréhension par les étudiants des énoncés mobilisant deux quantificateurs de nature différente (un universel et un existentiel). Je me suis ensuite recentré sur le contexte mathématique lors de ma principale expérimentation. Cette dernière est à la fois plus importante du point de vue de la dimension du corpus recueilli mais aussi plus directement en lien avec l'objectif de cette thèse qui concerne l'activité mathématique. Cette expérimentation a consisté en la lecture par plusieurs groupes d'étudiants de différents niveaux, de deux preuves d'Analyse réelle, une de Liouville et une de Cauchy. Ces preuves concernent des énoncés connus des étudiants et contiennent des déductions qu'ils sont susceptibles de considérer comme invalides. L'objectif de cette expérimentation est de décrire et d'étudier les outils que les étudiants se donnent pour faire face à des difficultés mathématiques et logiques liées à un usage complexe de la quantification. Dans chacune des expérimentations, les étudiants ont été enregistrés. Leurs discussions ont ensuite été transcrites afin d'être analysées.

3.1 Pré-expérimentation : l'évaluation par les étudiants d'énoncés isolés

Cette première expérimentation concerne les méthodes d'évaluation d'énoncés isolés mobilisant un usage de plusieurs quantificateurs. Elle se situe dans la perspective de Dubinsky

& Yiparaki (2000) et propose un prolongement à leur étude. Ce prolongement sera limité au regard de l'ampleur du corpus recueilli par ces auteurs. Je commence par présenter leur travail avant de proposer le compte rendu de ma propre expérimentation.

3.1.1 Présentation de Dubinsky & Yiparaki (2000)

Dans cet article, Dubinsky et Yiparaki exploitent une expérimentation menée auprès d'étudiants scientifiques américains de différents niveaux. Leur objectif est d'étudier la compréhension par les étudiants des énoncés AE (de la forme « pour tout… il existe… ») et EA (de la forme « il existe… pour tout… »). Leur corpus est constitué des réponses de soixante trois étudiants à un questionnaire et des interviews de quatorze d'entre eux (sélectionnés comme représentatifs d'une classe de réponses au questionnaire). Le questionnaire est composé d'une série d'énoncés que les étudiants doivent évaluer (dire si l'énoncé est « Vrai » ou « Faux » et fournir un explication d'une ou deux lignes). Ces énoncés sont :

1. (AE) Everyone hates somebody.
Tout le monde déteste quelqu'un.
2. (AE) Every pot has a cover.
Chaque pot a un couvercle.
3. (EA) Someone is kind and considerate to everyone.
Quelqu'un est gentil et attentionné envers chacun.
4. (EA) There is a mother for all children.
Il y a une mère pour tous les enfants.
5. (AE) All good things must come to an end.
Toutes les bonnes choses ont une fin.
6. (EA) There is a magic key that unlocks everyone's heart.
Il y a une clef magique qui ouvre le cœur de tout le monde.
7. (AE) All medieval Greek poems described a war legend.
Tous les poèmes médiévaux décrivent une légende de guerre.
8. (EA) There is a perfect gift for every child.
Il y a un cadeau parfait pour chaque enfant.
9. (EA) There is a fertilizer for all plants.

Il y a un engrais pour toutes les plantes.
10. (AE) For every positive number a there is a positive number b such that $b < a$.
Pour tout nombre positif a il y a un nombre positif b tel que $b < a$.
11. (EA) There is a positive number b such that for every positive number a $b < a$.
Il y a un nombre positif b tel que pour tout nombre positif a $b < a$.

La classification ci-dessus entre AE et EA est celle utilisée par les auteurs. Elle correspond à l'ordre d'apparition des quantificateurs dans la syntaxe dans les phrases proposées. Il ne préfigure pas de l'interprétation qui peut en être faite par les étudiants. J'ai respecté cet ordre pour la « traduction » française des phrases. Il faut donc prendre ces « traductions » comme une éventuelle aide à la lecture de la phrase anglaise plutôt que comme quelque chose qui en conserverait le sens. Dubinsky et Yiparaki mettent en évidence un certain nombre de phénomènes concernant les pratiques des étudiants. En premier lieu, ils constatent une faible attention à la syntaxe des énoncés :

> « That is, aside from which interpretation conventions[75] they might or might not have used, and aside from their own interpretation (AE or EA), they did not focus on the statements as entities on their own right. » (Dubinsky & Yiparaki, 2000, p. 53)[76]

Dans cette citation, le terme d'interprétation est à comprendre comme un synonyme de « reformulation » ou de « lecture ». La méthodologie d'analyse des auteurs consiste à essayer, lorsque cela est possible, de catégoriser les réponses des étudiants selon que leur appréhension des phrases leur paraisse relever de la structure AE ou EA. Cette catégorisation est notamment comparée à la classification initiale des énoncés qui reposait sur l'ordre d'apparition des quantificateurs. Il faut donc distinguer cet usage du terme de celui qui est fait en théorie des modèles (ou en sémantique GTS) pour lequel une interprétation correspond à l'attribution d'une référence extra-langagière pour les termes (non logiques) du langage. Par la suite, j'ai fait l'hypothèse que le contexte rendait les choses suffisamment claires. Le constat de Dubinsky et Yiparaki est donc que les étudiants utilisent peu la syntaxe des énoncés pour les

[75] Un exemple de *convention d'interprétation* auquel font référence les auteurs et qui n'est pas utilisée par les étudiants est la convention mathématique selon laquelle l'ordre de lecture est primordial.

[76] « C'est-à-dire, quelles que soient les conventions d'interprétation qui ont pu, ou non, être utilisées par les étudiants, et quelle que soit leur propre interprétation (AE ou EA), ils ne portent pas leur attention sur les énoncés comme des entités à part entière. » (ma traduction)

évaluer et que le fait que leur lecture de la phrase soit catégorisée AE ou EA n'est pas corrélé à ce phénomène. Selon eux, les étudiants ont davantage tendance à s'appuyer sur des éléments de contexte, sur leur opinions concernant les relations entre les objets auxquels réfèrent les termes des énoncés pour décider de leur attribuer la valeur de vérité « vrai » ou « faux ». Dans ce processus d'évaluation, la question de la syntaxe et de la quantification est évacuée :

> « Continuing on the trend described above, students did not appear to use the syntax of a statement to analyse it. Rather, they referred to a world they were already familiar with and they considered that the statement described that world. They interpreted the statement and decided on its truth or falsity based on the nature and properties of this world. » (Dubinsky & Yiparaki, 2000, p. 53)[77]

Une autre manière de formuler les choses serait de dire que les questions sémantiques qui sont prises en charge par la quantification pour décider de la vérité d'une proposition au niveau des jeux d'extérieur sont intériorisées et traitées de manière tacite. En réutilisant le vocabulaire mis en place, les étudiants pratiques des jeux de description plutôt que des jeux sémantiques. Les auteurs affirment que, lors des interviews, ce phénomène a résisté à leurs demandes explicites de prendre en compte la syntaxe des énoncés, de ne pas se servir exclusivement de leurs opinions au cours du processus d'évaluation. Je propose ci-dessous un extrait de transcription qui me parait être un exemple représentatif des pratiques que décrivent les auteurs. Le dialogue concerne l'énoncé (6) « there is a magic key that unlocks everyone's heart ». *I* est l'interviewer et *GIT* un étudiant :

> I : Ok, all right. Good. Let's move on to number 6. The magic key. You have decided that's true. Can you tell me a little bit about how you were thinking about it.
>
> GIT : OK… OK. Ahm… Somebody might be sensitive, … or… OK let's say that somebody might be sensitive, I mean might hold it inside him… So, … but… there might be a time where he expresses his feeling. So he unlocks his feeling (laughs)
>
> I : Hm-hm, that's good.
>
> GIT : So, he unlocks his heart. Where he opens to talk about it. So that's the magic key. He opens his heart sometimes. And talks about it.
>
> I : OK, now when you were talking about someone, was that a particular person you had in mind or were you taking about people in general?
>
> GIT : No, people in general.
>
> I : Ok. Everybody or some people ?

[77] « Pour poursuivre sur la tendance décrite ci-dessus, les étudiants n'ont pas semblé utiliser la syntaxe des énoncés pour les analyser. Ils ont plutôt fait référence à un monde avec lequel ils étaient déjà familiers et ont considéré que l'énoncé décrivait ce monde. Ils ont interprété l'énoncé et ont décidé de sa vérité ou de sa fausseté à partir de la nature de ce monde et de ces propriétés. » (ma traduction)

GIT : (laughs)… Ahmmmmm, maybe some people, not everybody… Well, I don't know if everybody is sensitive; or you know has other characteristics…

I : Sure.

GIT : But I know some that are sensitive. I know from my knowledge…

(Dubinsky & Yiparaki, 2000, p. 31)[78]

Selon Dubinsky et Yiparaki, ce type de pratiques contribue aussi à expliquer une tendance à favoriser une lecture AE des énoncés plutôt que EA dans la mesure où les étudiants privilégient les énoncés vrais[79]. Un exemple caractéristique est l'interprétation de l'énoncé (4) qui est de type EA au sens de l'ordre d'apparition des quantificateurs au niveau de la syntaxe. 16% des étudiants font une interprétation EA, 81% une interprétation AE et ce n'est pas clair pour les 3% restant. L'hypothèse des auteurs est que ces résultats s'expliquent par le fait que l'interprétation EA est plutôt absurde. En résumé, les principales conclusions de cette recherche[80] sont que les étudiants se soucient peu de l'ordre des quantificateurs dans la syntaxe des énoncés qui leur sont proposés ; que les processus de quantification sont tacites au moment de prendre une décision sur la vérité des énoncés et qu'ils le restent même lorsque les

[78] I : Ok, très bien. Bien. Passons à la numéro six. La clef magique. Tu as décidé que c'était vrai. Peux-tu m'en dire un peu plus sur la façon dont tu as pensé à ça ?

GIT : Ok… OK. Hmm… Quelqu'un pourrait [might] être sensible, … Or … Ok. Disons que quelqu'un puisse [might] être sensible, je veux dire qu'il puisse [might] le porter en lui… Alors, … Mais… Il devrait [might] y avoir un moment où il exprime ses sentiments. Alors il déverrouille ses sentiments (rires).

I : Hmm, c'est bien.

GIT : Alors, il déverrouille son cœur. Quand il l'ouvre pour en parler. Alors c'est la clef magique. Il ouvre parfois son cœur. Et en parle.

I : OK, maintenant quand tu parles de quelqu'un, est-ce que tu parles de quelqu'un, est-ce que c'est une personne particulière à laquelle tu penses ou est-ce que tu parles des gens en général ?

GIT : Non, les gens en général.

I : Ok. Tout le monde, ou certaines personnes ?

GIT : (rires)… Hummm, peut-être certaines personnes, pas tout le monde… Bon, je ne sais pas si tout le monde est sensible, ou si, vous savez, possède d'autres caractéristiques…

I : Bien sûr.

GIT : Mais j'en connais certains qui sont sensibles. Je le sais de ma connaissance…

(ma traduction)

[79] Un énoncé EA est en effet plus fort que sa version AE dans le sens où l'on a $\exists y \forall x P(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x,y)$. Les discussions explicites sur la quantification n'émergeant que rarement, la mise en évidence de cette tendance relève de l'analyse des implicites.

[80] Je ne discute pas des conclusions concernant les différences relevées par les auteurs entre les énoncés mathématiques et les autres.

chercheurs cherchent à faire émerger une discussion ; que ces processus sont associés à une forme pragmatique de bienveillance de la communication dans le sens où les reformulations personnelles des énoncés conduisant à des énoncés absurdes ou trop triviaux sont souvent exclues.

Dans le domaine mathématique de l'Analyse réelle, les processus de quantification possèdent sans aucun doute des spécificités disciplinaires. En particulier, la formulation d'un nombre important de propositions et de théorèmes de ce domaine utilise de manière irréductible des enchaînements de quantificateurs plus complexes que ceux envisagés ci-dessus. D'autre part, j'ai souligné précédemment l'importance de la nature des objets considérés sur les pratiques de quantification et donc a fortiori l'influence des spécificités disciplinaires. Ceci dit, il me semble qu'une étude locale de la prise en compte de la quantification dans l'évaluation des énoncés AE et EA (que ces énoncés concernent les mathématiques ou non) est susceptible de contribuer à mon étude dans la mesure où les contextes mathématique et « ordinaire » ne sont pas imperméables les uns aux autres. L'étude présentée apporte une contribution expérimentale assez importante. Ses résultats me semblent résonner avec l'étude historique réalisée précédemment au niveau de la prise en compte de la syntaxe de la quantification. L'étude expérimentale de Dubinsky et Yiparaki met clairement en évidence que les questions traitées par un usage explicite de la quantification en mathématiques sont souvent traitées de manière tacite dans l'usage ordinaire du langage. Il me semble que je me suis confronté à un phénomène semblable lors de l'analyse du traité de Lacroix. Les pratiques des étudiants ne semblent pas pouvoir être interprétées à travers l'usage des règles sémantiques pour la quantification. Les étudiants s'engagent dans une pratique descriptive d'un domaine d'interprétation pour l'énoncé en précisant certaines relations entre les objets mais ne relient pas ces relations à la syntaxe de la quantification des énoncés. Ils pratiquent donc des jeux de description au sens dégagé précédemment lors de l'analyse épistémologique. Evidemment, ces pratiques sont vraisemblablement pertinentes dans la cadre de l'usage quotidien du langage et mon propos n'est pas de regretter que les outils mathématiques ne soient pas utilisés dans des domaines où rien ne montre a priori qu'ils soient efficaces. Par contre, je fais l'hypothèse que les habitudes issues des pratiques non mathématiques sont susceptibles d'avoir des effets sur la pratique mathématique. Je termine l'analyse de cet article en proposant un extrait de transcription qui illustre ce que j'entends par jeux de description. Cette fois-ci, le contexte est mathématique. Le dialogue concerne l'énoncé (10) « For every positive number a there is a positive number b such that $b < a$ ». *AND* est un étudiant et *I* est toujours l'interviewer :

> I : OK. Good. OK let's move on to number 10. Now this statement you say is false.
>
> AND : (long pause) Well, cause I mean it depends on where they are located. On the number line. I mean yeah, I mean I know in math they say a is less than b or b is less than a … but I mean here you are saying for every positive number a there is a positive number b such that b is less than a ?
>
> I : Hm-hm.
>
> AND : Not necessarly true. It depends on where those are located at the point. I mean who gets to pick where a and b are? I mean, I always put a less than b, so to me, I mean if I chose the points, I would pick a to be 1, and b to be 2. So it depends on who is picking the points or if you are saying … you know … this is where b is, this is where a is. Therefore, you know…
>
> I : What about the words 'for every' and 'there is' – do they affect anything?
>
> AND : (long pause) Well I suppose… because I mean if you were to say for a positive number a there is a positive number b such that b is less than a, but for 'every' … I mean you are saying in all cases, there is no exceptions to this rule. In every single case. I mean and in some cases, I mean it just depends on who picks where a and b go.
>
> (Dubinsky & Yiparaki, 2000, p. 33)[81]

Dans cet extrait, l'étudiant affirme que l'énoncé est susceptible d'être soit vrai soit faux en fonction du choix qui est fait pour la dénotation des lettres a et b. On peut comprendre ces affirmations comme résultant d'une analyse de la satisfaction de la phrase ouverte « b est plus petit que a » pour plusieurs choix de couples de nombres (a, b). Son analyse de l'énoncé (10) repose donc sur la description de plusieurs relations entre nombres sur le domaine d'interprétation qu'il utilise pour l'évaluation (ici, vraisemblablement les entiers naturels). Il

---

[81] I : OK. Bien. Ok passons au numéro 10. Tu dis maintenant que cet énoncé est faux.

AND : (longue pause) Ben, parce que je veux dire que ça dépend d'où ils sont situés. Sur la droite des nombres. Je veux dire ouais, je veux dire je sais qu'en maths ils disent a est plus petit que b ou b est plus petit que a… mais je veux dire ici tu dis pour tout nombre positif a il y a un nombre positif b tel que b est plus petit que a ?

I : Hm-hm.

AND : Pas forcément vrai. Ca dépend d'où sont placés les points. Je veux dire qui a à choisir où sont a et b ? Je veux dire, je mets toujours a plus petit que b, donc pour moi, je veux dire si je choisis les points, je choisirais 1 pour a et 2 pour b. Donc ça dépend de qui choisit les points ou si tu dis… tu sais… c'est ici qu'est b, c'est ici qu'est a. Alors tu sais…

I : A propos des mots 'pour tout' et 'il y a' – est-ce qu'ils ont une quelconque influence ?

AND : (longue pause) Ben je suppose… Parce que je veux dire si on disait pour un nombre positif a il y a un nombre positif b tel que b est plus petit que a, mais pour 'tout'… Je veux dire tu dis dans tous les cas, il n'y a pas d'exception à cette règle. Dans chaque cas particulier ? Je veux dire et dans certains cas, je veux dire ça dépend juste de qui choisit où vont a et b.

(ma traduction)

montre aussi une certaine compréhension de la quantification en opposant, de manière isolée, les règles associées à chacun des deux quantificateurs. Ceci dit, une analyse en termes de jeux sémantiques semble ici exclue dans la mesure où AND ne fait pas le rapprochement entre la responsabilité des choix des nombres dénotés par les lettres a et b et la syntaxe de la quantification de l'énoncé proposé. Les moyens de quantification utilisés pour faire le lien entre les analyses de la satisfaction de la phrase ouverte « b est plus petit que a » et l'énoncé quantifié ne sont pas verbalisés et le contexte ne permet pas vraiment de formuler des hypothèses pour y remédier.

3.1.2 Compte rendu de la pré-expérimentation

Je propose maintenant un compte rendu d'une expérimentation propre réalisée dans la perspective de prolonger le travail qui vient d'être discuté. Je souhaitais me faire une idée plus directe de la pratique des étudiants concernant l'évaluation d'énoncés du type de ceux proposés par Dubinsky et Yiparaki à travers une observation sans intermédiaire. Mon expérimentation a été menée auprès de deux groupes d'étudiants de première année de l'INSA de Lyon, une école d'ingénieur qui recrute des étudiants à la sortie du lycée (le plus souvent des étudiants ayant obtenu une mention bien, parfois très bien, à un baccalauréat scientifique). Un sujet composé de cinq exercices leur a été proposé (annexe 8). Le quatrième exercice et les réponses des deux groupes d'étudiants à cet exercice a déjà fait l'objet d'une analyse dans la partie précédente (partie 2, chapitre 3). Les élèves ont travaillé par groupe dans un temps non limité. La consigne était de prendre le temps nécessaire pour répondre aux questions, peu importe si ils parvenaient à terminer le sujet ou non. L'expérimentation a eu lieu en dehors de leur cursus ordinaire et sur la base du volontariat. Deux expérimentateurs étaient présents, dont leur enseignant de mathématiques (moi-même). Leurs dialogues ont été enregistrés et pour une partie d'entre eux filmés. Je m'intéresse ici à l'exercice 1. Les débats correspondants ont été intégralement transcrits (annexe 11 et 12). Le choix de faire travailler les étudiants en groupe répondait à la volonté d'une observation relativement naturaliste de leurs pratiques.

Les étudiants de cette pré-expérimentation se connaissent bien et j'ai fait l'hypothèse que leurs débats seraient assez nourris sans qu'il soit nécessaire d'intervenir directement[82].

L'énoncé de l'exercice est le suivant :

Pour chacune des propositions suivantes, dites si elle est vraie ou fausse en justifiant au mieux votre réponse et décrire un monde imaginaire dans lequel elle aurait une valeur de vérité différente : 1. Pour chaque planète du système solaire, il existe une étoile autour de laquelle elle tourne. 2. Tous les animaux iront dans un paradis. 3. Tous les poèmes de la Grèce médiévale décrivent une guerre légendaire. 4. Un caporal peut devenir général si et seulement si un caporal peut devenir général.

Le premier énoncé est de type AE dans le sens de l'ordre d'apparition des quantificateurs. D'autre part, il est assez raisonnable de considérer que l'interprétation EA de cet énoncé est une proposition vraie. Cet énoncé a pour objectif de discuter de l'affirmation de Dubinsky et Yiparaki selon laquelle les étudiants auraient tendance à faire des lectures des énoncés AE plutôt que des lectures EA. J'ai fait le choix de proposer un énoncé de forme AE qui ait une interprétation EA raisonnable de manière à voir si le phénomène d'inversion qu'ils ont observé (des interprétations AE d'énoncé de forme EA) est susceptible de s'appliquer dans l'autre sens. Puisque les deux versions de l'énoncé sont « raisonnables », le principe pragmatique favorisant les énoncés vrais n'est pas susceptible d'intervenir. Pour autant, l'interprétation AE peut être perçue comme trop faible. Elle conduit en effet à une perte d'information dans la mesure où son affirmation exclut moins de « mondes possibles » (moins de domaines d'objets) que l'affirmation de sa version EA. L'hypothèse qui est évaluée à travers l'énoncé (1) est donc celle de l'influence d'un principe pragmatique d'information

[82] Les étudiants de l'expérimentation proviennent d'un même groupe pour lequel j'ai assuré les TD de mathématiques pendant un semestre. Je connaissais leurs dispositions favorables à l'interaction.

maximale. Aucun des onze énoncés choisis par Dubinski et Yiparaki n'est du type de ce premier énoncé (i.e. de forme AE avec une interprétation EA raisonnable).

Les deux énoncés suivants avaient un objectif commun. Il s'agissait de discuter de l'éventualité que les étudiants fassent une interprétation des énoncés qui leur sont proposés sous la forme d'un conditionnel universellement quantifié, c'est-à-dire une interprétation de la forme $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$. Ce type de pratiques pourrait contribuer à expliquer pourquoi les étudiants n'ont pas jugé nécessaire d'engager une analyse explicite de la quantification dans leur processus d'évaluation des énoncés. Je laisse cette question en suspens au niveau de l'analyse a posteriori puisque la principale préoccupation de cette partie de la thèse est d'analyser les pratiques de quantification des étudiants plutôt que de proposer une critique de l'article de Dubinsky et Yiparaki.

L'idée d'utiliser le quatrième énoncé provient de Hintikka (1994), lequel s'intéresse au terme « any » de la version anglaise de la phrase. En français, il me semble qu'il est possible d'interpréter cette phrase de plusieurs manières selon le choix de lecture que l'on fait pour le terme « un ». Par exemple, le fait de considérer que la variable « caporal » soit, ou non, soumise à l'action d'un même quantificateur conduit à des interprétations différentes (qui pourraient être $\forall xP(x) \Leftrightarrow P(x)$ ou $\forall x \forall yP(x) \Leftrightarrow P(y)$ ou encore $\forall xP(x) \Leftrightarrow \exists xP(x)$[83]). L'objectif de cet énoncé, dont la structure logique est plus complexe que les précédents (au sens de l'intervention de l'équivalence), est d'essayer de faire émerger une discussion sur la quantification. L'étude de Dubinsky et Yiparaki montre que cette discussion n'émerge pas lorsque des énoncés de la forme des trois premiers énoncés de cette pré-expérimentation sont proposés aux étudiants. Mon hypothèse est que le choix d'un énoncé plus complexe est susceptible de parvenir à poser explicitement le problème de la quantification de manière à ce que l'on puisse observer le traitement explicite de ces questions.

La consigne de l'exercice invite aussi les étudiants à décrire un monde imaginaire dans lequel l'interprétation de la phrase changerait de valeur de vérité. L'objectif est à nouveau d'essayer de contraindre les étudiants à rompre avec la tendance à la description d'un domaine d'interprétation familier et à s'intéresser aux relations entre énoncé quantifié et domaine d'interprétation. La recherche d'un monde imaginaire dans lequel l'énoncé change

[83] J'opte ici pour une présentation qui ne fait pas intervenir la variable « général » pour faciliter l'écriture des interprétations.

de valeur de vérité nécessite la prise en compte de la relation entre la forme de l’énoncé, incluant la quantification, et le domaine sur lequel il est interprété.

Cette brève analyse a priori me conduit à formuler les questions suivantes qui me serviront de guide pour l’analyse a posteriori :

- Dans quelle mesure la syntaxe des énoncés, et en particulier la syntaxe de la quantification, est-elle prise en compte par les étudiants ?

- La tendance des étudiants à considérer que les énoncés qu’ils doivent évaluer décrivent un monde qui leur est familier conduit-elle les étudiants à faire une interprétation EA de l’énoncé (1) ?

- Le travail sur l’énoncé (4) a-t-il favorisé l’émergence d’une discussion explicite sur la quantification et sa syntaxe dans les processus d’évaluation sémantique des énoncés ? Quelle forme cette discussion a-t-elle pris ?

Je commence par aborder les deux premières questions solidairement. En ce qui concerne le premier groupe (*R*, *G*, *P* et *A*), on peut remarquer que deux approches coexistent concernant l’évaluation de la première question. Je relève ici les premières interventions de *P* et *R* concernant l’évaluation de l’énoncé (1) :

5. P : Pour chaque planète du système solaire, il existe une étoile autour de laquelle elle tourne.

6. R : Ben oui pourquoi pas ?

[…]

8. R : Pourquoi y aurait pas de planètes qui tournent autour d’une étoile ?

[…]

12. R : C’est uniquement dans le système solaire !

13. P : Ah ouf.

14. R : Ben c’est bête parce qu’elle tourne toute autour du soleil !

15. R : Elles vont pas tourner chacune autour d’une étoile, c’est plus un système solaire sinon.

16. P : Non mais t’es d’accord que pour chaque planète du système solaire il existe une étoile…

17. R : Ah ben ouais mais c’est le soleil.

[…]

20. P : Ouais ben donc c’est vrai !!

[…]

24. R : Il existe une étoile, ah ouais ça peut être une étoile différente… c'est louche.

[…]

36. R : Ben, c'est faux déjà.

37. P : Non, c'est vrai.

[38. G : Mais oui c'est vrai.

39. A : Moi je suis plutôt d'accord avec R.]

L'interprétation de *P* semble être une interprétation AE pour laquelle l'énoncé est considéré comme vrai. Pour *R*, cette interprétation est « louche ». Ce désaccord peut être analysé à partir des outils de la sémantique GTS. Selon l'interprétation AE de l'énoncé, le proposant doit faire sur le choix d'une étoile après que l'opposant ait fait le choix d'une planète. Dans ce jeu, il existe une stratégie gagnante pour le proposant qui ne tient pas compte du choix préalable de l'opposant. Le fait de disposer d'une stratégie de gain dans un jeu sans se servir des coups de l'adversaire rend le jeu associé à l'interprétation AE de l'énoncé « louche ». Il s'agit en effet d'une situation plutôt exceptionnelle dans le langage quotidien puisque les dialogues supposent en général une prise en compte des assertions de l'interlocuteur. Cette situation incite *R* à envisager que l'énoncé soit faux. Sa position est essentiellement pragmatique dans la mesure où ce sont des considérations sur les habitudes de communication que l'on peut supposer être à l'origine de son scepticisme concernant la vérité de l'interprétation AE. Pour autant, et contrairement à mon hypothèse de recherche selon laquelle les étudiants seraient susceptibles de faire une lecture EA de l'énoncé, son interprétation prend en compte l'ordre d'apparition des quantificateurs dans la syntaxe de l'énoncé. Ceci dit, l'interprétation associée ne peut pas être dite AE au sens qui a été utilisé jusque là puisqu'il semble que les règles d'usage que *R* envisage pour les quantificateurs soient 'non standards'. Je reviendrai sur ce phénomène au moment de l'analyse des débats du second groupe à propos de ce même énoncé. On peut également observer que l'origine du désaccord entre les interprétations concurrentes de la quantification reste dans un premier temps tacite. Par exemple, lorsque *R* remet en cause la vérité de l'énoncé en affirmant « Elles vont pas tourner chacune autour d'une étoile », l'argument que *P* oppose consiste en une réaffirmation de l'ensemble de l'énoncé pris solidairement (en tant que proposition). Par la suite, les étudiants entrent dans l'analyse des propositions. *P* insiste notamment sur le quantificateur existentiel. Sa position, c'est-à-dire l'interprétation de l'énoncé selon l'ordre d'apparition des quantificateurs, fera rapidement consensus :

40. G : Ben les planètes, elles tournent autour d'une étoile et cette étoile c'est le soleil.

41. R : D'accord.

42. P : Donc elle existe.

43. R : Ok ben d'accord, c'est bon, ok c'est bon.

Les questions en débat dans ce groupe l'ont aussi été dans l'autre groupe (*K*, *T* et *B*). En particulier, on retrouve dans la discussion du groupe (*K*, *T*, *B*) l'opposition entre une interprétation sémantique (au sens des jeux sémantiques) et une interprétation pragmatique de la quantification de l'énoncé (1). A nouveau, les considérations pragmatiques conduisent les étudiants à douter de la vérité de l'énoncé plutôt qu'à faire une interprétation EA de l'énoncé comme je l'ai évoqué dans l'analyse a priori. L'analyse logique sous-jacente semble être quelque chose qui échappe à la classification des interprétations entre EA et AE[84]. Plus précisément, il semble que les étudiants tiennent compte de l'ordre des quantificateurs mais que leur interprétation des quantificateurs reflète l'usage de règles 'non standards' (du point de vue de la sémantique GTS). Ces règles non standards peuvent se comprendre comme résultant d'une modification des règles structurelles de la sémantique GTS. Au niveau de la sémantique GTS, l'existence d'une stratégie gagnante pour un énoncé du type $\forall x\exists y(xRy)$[85] peut s'exprimer à partir de la formule $\exists f\forall x(xRf(x))$ où *f* est une fonction, dite de Skolem, du domaine d'interprétation dans lui-même. La règle pragmatique de communication selon laquelle une assertion dans un dialogue doit tenir compte des assertions des interlocuteurs peut par exemple s'intégrer parmi les règles structurelles de la sémantique GTS en imposant à la fonction de stratégie *f* de vérifier la condition $\forall x\forall y(f(x)=f(y)\Rightarrow x=y)$, c'est-à-dire la condition d'être une fonction injective. La spécificité du groupe (*K*, *T*, *B*) est d'avoir clairement identifié que leurs désaccords provenaient de leur interprétation de la quantification. La discussion s'est rapidement concentrée sur la syntaxe de l'énoncé en jeu et son rapport avec la nature du domaine d'objets sur lequel la vérité de l'énoncé est évaluée :

15. T : « Pour chaque planète du système solaire il existe une étoile autour de laquelle elle tourne ».

16. B : Le problème/

17. T : Le soleil.

18. B : A mon avis, à mon avis, le problème il porte sur « chacun ».

19. T : Ouais, mais est-ce que…

---

[84] L'interprétation des étudiants peut par exemple s'écrire (*xTy* formalise la relation « *x* tourne autour de *y* ») : $\forall x\exists y(xTy)\wedge(\forall x\forall y\forall s\forall t(xTs\wedge yTt)\Rightarrow(x\neq y\Rightarrow s\neq t))$

[85] Toutes les formules du premier ordre peuvent se ramener à des formules sous forme prénexe, c'est-à-dire des formules où tous les quantificateurs sont placés au début.

20. B : Parce que « pour chaque planète il existe une étoile », c’est pas vrai, ça, c’est vachement pas vrai !

21. K : Ben non !

22. B : Ca veut dire que dans notre système solaire qui est à je sais plus combien/

23. T : Y aurait huit étoiles.

24. B : Y aurait neuf étoiles ou huit étoiles, ouais.

25. K : Ben non.

26. B : Donc c’est pas, ça c’est sûr, y a comme un souci déjà.

27. T : Ouais.

28. K : C’est pas marqué « il existe une unique étoile ».

29. B : « Pour chaque », « il existe », moi je comprends.

30. K : Ben oui !

31. T : Ouais. Je comprends qu’il en existe neuf.

32. K : Moi, je pense que c’est un petit problème de français.

33. B : De linguistique.

34. K : Non mais, c’est rien.

35. T : On est en mathématiques, là.

36. K : C’est un problème de français ce truc là... « Il existe un étoile pour chaque ». Mais est-ce que c’est une étoile différente pour chaque planète ou pas ?

37. T : Exactement !

38. B : Bonne question, excellente remarque.

Plus loin dans le texte, la question de l’interprétation de la quantification est à nouveau posée, cette fois de manière plus précise :

133. T : Y a une ambiguïté sur le « une », là. Y a une ambiguïté sur le « une », là.

134. B : Non pour moi l’ambiguïté est sur le « chacun ». Enfin « chaque » et « une », en fait ça va ensemble.

Ces extraits permettent de mettre en évidence une différence importante avec les résultats avancés par Dubinsky et Yiparaki concernant la prise en compte de la syntaxe dans l’interprétation des énoncés par les élèves. Les deux groupes d’étudiants de cette expérimentation se sont préoccupés de la syntaxe, le deuxième groupe de manière importante et assez précise. Ces résultats sont en décalage avec l’étude de Dubinski et Yiparaki dont le résumé affirme :

> « We found that student are not inclined to use the syntax of a statement in order to interpret it, particularly if they do not understand it very well; rather, they use the context of a statement to discuss their own opinion about the topic in general,

not the actual statement. » (Dubinsky & Yiparaki, 2000, résumé)[86]

Plusieurs raisons peuvent être avancées pour contribuer à expliquer cette différence. D'abord, la population des deux études n'est pas la même. D'une manière générale, les étudiants français et américains ont des profils mathématiques assez différents. Ce phénomène est probablement renforcé entre des étudiants de l'INSA de Lyon et des étudiants en mathématiques, éducation mathématique, sciences ou sciences de l'ingénieur de deux grandes universités publiques de l'état de Géorgie (pour moitié) et d'un « liberal arts college » de petite taille[87]. Une autre différence est que les étudiants de mon expérimentation me connaissaient comme enseignant de mathématiques. Cette relation institutionnelle a pu jouer en faveur d'une prise en compte de la syntaxe des énoncés puisqu'il s'agit de l'usage mathématique. *B* affirme par exemple « faut juste qu'on se rappelle ce qu'on a fait en maths en fait ». Enfin, la méthodologie des deux expérimentations est différente puisque je me suis appuyé sur un travail de groupe alors que l'étude de Dubinsky et Yiparaki repose sur des travaux individuels et des interviews. La comparaison des résultats est donc délicate, d'autant plus que mon échantillon est numériquement faible. Ceci dit, le principal intérêt de ces études est pour moi la mise en évidence des relations qu'entretient les jeux de description réalisés sur le domaine d'objets implicitement associé à l'énoncé et la prise en compte de la syntaxe dans l'interprétation de l'énoncé, i.e. sa traduction dans son langage propre, et son évaluation. Dans un certain nombre de cas de l'étude de Dubinsky & Yiparaki, les étudiants s'appuient exclusivement sur des jeux de description et des habitudes de langage dans l'interprétation et l'évaluation des énoncés. Au niveau conceptuel, cette pratique est essentiellement propositionnelle (au sens du calcul des propositions). D'autres étudiants, notamment certains de mon étude, complètent cette approche par la prise en compte de l'ordre des quantificateurs au niveau de la syntaxe des énoncés. Pour autant, les habitudes de langage issues de la pratique ordinaire continuent à être influentes. Enfin, d'autres étudiants s'en tiennent à la syntaxe des énoncés et substituent aux habitudes de communication les règles logiques des

[86] « Nous avons constaté que les étudiants ne sont pas enclins à utiliser la syntaxe d'un énoncé pour l'interpréter, en particulier s'ils ne le comprennent pas très bien ; ils utilisent plutôt le contexte de l'énoncé pour discuter de leurs propres opinions à propos du sujet en général, mais pas de l'énoncé lui-même. » (ma traduction)

[87] Un « Liberal Arts Collège » est un établissement d'enseignement supérieur. Les termes de « Liberal Arts » expriment une distinction avec l'enseignement professionnel. Cependant, à la différence des étudiants de l'INSA, les étudiants américains ne sont pas tous en première année, neuf d'entre eux ont d'ailleurs déjà une licence.

jeux sémantiques pour l'évaluation des énoncés. C'est par exemple le cas de *B* lorsqu'il affirme :

124. B : Bon, ça c'est clair. Le truc c'est pour chaque planète il existe un unique ou pas ? « Une » c'est indéfini donc ça peut être deux fois la même.

Pour ce qui est de l'énoncé (1), les habitudes de communication ont le plus souvent conduit les étudiants à envisager une interprétation qui fasse usage de règles sémantiques amendées pour la quantification (en restreignant l'ensemble des stratégies possibles aux fonctions de choix injectives). Néanmoins, le deuxième groupe (*K*, *T* et *B*) a aussi envisagé une interprétation EA, en accord cette fois avec mon hypothèse de l'analyse a priori d'une influence d'un principe pragmatique d'information maximale :

88. T : Non, moi en fait je dirais que la (1) c'est juste.

89. B : Mais ça dépend, je suis désolé ça dépend.

90. K : Non, ce serait plutôt « il existe une étoile pour chaque planète ». Dans l'autre sens ça serait plus français.

91. B : Mais tu as le droit de…

92. K : Oui mais y aurait moins d'ambiguïtés au niveau du français.

93. B : Attend, « il existe un étoile autour de laquelle elle tourne… pour chaque planète ». Faut voir, faut modifier/

94. K : Non mais « il existe une étoile autour de laquelle tourne chaque planète du système solaire ».

95. T : « tourne chaque planète du système solaire ». Voilà, dans ce sens-là c'est vrai.

96. B : Moi, on dit ambigu ça.

97. K : Ca sent l'ambiguïté !

Je poursuis maintenant par l'analyse des débats autour du quatrième énoncé de l'exercice. Son objectif était de susciter des débats explicites à propos de la quantification. Finalement, ces débats ont déjà émergé lors du travail sur le premier énoncé. Au niveau de l'énoncé (1), j'ai explicité trois interprétations de l'énoncé, une première interprétation AE, une autre faisant usage de règles non standards pour le jeu sémantique associé et enfin une interprétation EA. Les débats sur la quantification ont été nourris par les oppositions entre ces interprétations. Au niveau de l'énoncé (4), le statut de la variable « caporal » est ambigu et peut conduire à plusieurs types interprétations. Dans mon analyse a priori, je considère qu'elle peut être, ou non, soumise à l'action d'un même quantificateur. Pour l'essentiel, trois types d'interprétation me paraissent disponibles. Pour la première, les deux instances de la variable « caporal » relèvent de l'action d'un même quantificateur universel (l'interprétation est de la forme $\forall x(P(x) \Leftrightarrow P(x))$). Pour la seconde, les deux instances de la variable « caporal » relèvent de l'action de deux quantificateurs universels distincts (l'interprétation est de la forme $\forall x \forall y (P(x) \Leftrightarrow P(y))$. Pour la troisième interprétation envisagée dans l'analyse a priori, les deux instances de la variable « caporal » relèvent de l'action de deux quantificateurs de nature distincte (l'interprétation est de la forme $\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x P(x)$). La troisième interprétation a seulement été évoquée par un étudiant du premier groupe[88]. Les débats concernant la quantification ont essentiellement porté sur ce que l'on peut comprendre comme des oppositions entre les deux premiers types d'interprétation.

Le premier type d'interprétation possède plusieurs variantes, propositionnelle (de la forme $p \Leftrightarrow p$) ou quantifiées ($\forall x (P(x) \Leftrightarrow P(x))$ ou $\forall x \exists y P(x, y) \Leftrightarrow \forall x \exists y P(x, y)$). Elles conduisent toutes à attribuer la valeur de vérité « vrai » à l'énoncé. La position principale de *R* dans les débats du premier groupe relève de ce type d'interprétation. Il affirme par exemple :

322. R : Si tu prends une proposition, tu dis que « si et seulement si » et exactement pareil.

323. A : Ben on marque les deux solutions et puis…

324. R : Ce stylo, il est orange si et seulement si ce stylo, il est orange, ben c'est vrai ! Y a pas de peut être que… Avec un peu de chance, il est un peu noir…

Dans le deuxième groupe, cette position est défendue par deux étudiants, *B* et *T* :

466. B : Non mais au niveau, si on le prend au niveau linguistique, on prend cette proposition là, hop, celle-là…

467. T : Tu peux pas nier que c'est pas équivalent.

468. K : T'en sais rien.

469. B : Même au niveau des lettres, c'est équivalent.

470. T : C'est équivalent.

471. K : T'en sais rien.

Dans le premier groupe, la remise en cause de la première interprétation provient de l'activité de recherche d'un monde imaginaire dans lequel l'énoncé (4) est faux. Etant donné que cette interprétation correspond à une tautologie (un énoncé vrai quel que soit le domaine sur lequel il est évalué), cette activité est vouée à l'échec. Cette situation contraint certains étudiants à envisager alors d'autres formes de reformulation logique pour l'énoncé.

Pour le deuxième type d'interprétation, le terme « caporal » ne réfère pas nécessairement à la même personne (au même objet) dans chacun des termes de l'équivalence. En termes de

[88] G : Un monde dans lequel « Un » en majuscule ne voudrait pas dire la même chose que « un » en minuscule.

jeux sémantiques, cela correspond à deux choix distincts d'individus pour la variable correspondante. Cette interprétation est associée à la formalisation $\forall x \forall y (P(x) \Leftrightarrow P(y))$ ou encore $\forall x \exists s \forall y \exists t (P(x,s) \Leftrightarrow P(y,t))$. Dans le premier groupe, cette position est rapidement envisagée, plutôt sur le ton de la plaisanterie, par *A* et *R* :

272. A : Non, tu peux définir deux sens de général, deux sens de caporal…

273. G : Oui, mais ça reste quand même vrai.

274. R : Ouais mais si en trottant/

275. A : Euh…

276. R : Si quand t'es en train de dire « si et seulement si » le caporal il se casse une jambe, il peut plus devenir général. Tu sais, tu dis un caporal peut devenir général/

277. A : C'est très imaginatif ça.

278. R : Tu vois ton caporal tu dis « oh tu peux devenir général » et tu dis « si et seulement si » et paf, il se casse une jambe… Eh ben, il peut plus être général.

[Rires]

279. R : Pourquoi pas… Non mais franchement, tu veux faire comment ?

Dans le deuxième groupe, cette position est prise au sérieux par *K*. Elle fait l'objet d'une longue discussion contradictoire avec *B* et *T* de plus de deux cents assertions. J'en extrais ci-dessous deux passages significatifs :

476. K : Qui te dit que là, il parle du même caporal qu'ici ?

477. B : Si tu… Ouais, ouais.

478. K : Peut-être d'un gars et là, d'un autre.

479. B : Mais regarde, mais non, non, non, regarde, non, non, non. C'est exactement comme si tu faisais euh, *a* inférieur ou égal à *b* si et seulement si *a* inférieur ou égal à *b*.

[…]

612. B : On en revient toujours à la même question. On en revient toujours à la même question.

613. K : Tu leur donnes un petit nom, tu l'appelle Bob et Jojo, tu vois.

614. T : Ok.

615. K : Jojo le caporal peut devenir général si Bob, il peut devenir général. C'est pas vrai.

Du point de vue de l'analyse des pratiques des étudiants autour de la quantification, le principal intérêt de ces discussions est qu'elles permettent d'observer les moyens mis en œuvre pour débattre des questions de quantification. La discussion est assez rapide dans le groupe 1, elle est plus développée dans le groupe 2. Néanmoins, les étudiants ne semblent pas repérer que leurs désaccords proviennent d'une divergence sur l'interprétation qu'ils font de la quantification des énoncés. Les désaccords s'expriment à travers le vocabulaire du changement ; les étudiants introduisent une temporalité dans leur discours sur l'évaluation des énoncés. Ceci est très clair dans l'extrait ci-dessus concernant le premier groupe (*R*, *G*, *P*, *A*). On peut aussi trouver des passages du même type au cours des débats du deuxième groupe :

617. T : Ouais non, en fait t'as raison en fait, c'est comme là, *a* et *a*.

618. B : Mais oui, ça c'est exactement ça.

619. T : Et *b* et *b* du coup.

620. K : Non c'est pas la même chose. Parce que là c'est un truc plutôt maths, tu vois. Et là, tu as une règle présupposée qui dit que celui-là, il change pas le long de ta phrase alors que là, tu as aucun truc qui dit… Ça peut très bien changer dans une phrase française. Un chien, ça peut être un chien au début puis il peut changer à la fin. Alors que dans un truc, tu mets une transition, comme ça tu sais très bien que ta lettre elle changera pas comme ça, à moins que tu le précises. Alors que là, tu sais pas.

Les difficultés d'interprétation du langage sont traitées en termes de stabilité et de mouvement de la référence des variables. Ces pratiques avaient déjà été repérées dans le contexte des analyses historiques du précédent chapitre. Un aspect intéressant des discussions du deuxième groupe est que les étudiants font référence à une règle implicite en mathématiques selon laquelle les variables ne changent pas de valeurs « le long de ta phrase ». Ce point de vue est notamment avancé par *B* un peu plus tôt dans le débat :

487. B : Ouais mais communément, en maths, tu dis ouais d'accord, en maths tu fais d'accord *a* c'est *a*, ben là *a* c'est *a* et *a* c'est *a*.

488. T : Là, je suis d'accord avec *B*.

489. B : Ben moi je pense que ça c'est pas mal comme euh…

490. K : Ben je pense que c'est faux parce que y a aucun endroit où on dit que ça, c'est pareil que ça et que ça c'est pareil que ça.

491. B : Ouais, mais là c'est pareil, y a aucun endroit où on dit que *a* est égal à *a*.

492. K : Ben ouais ! Et ben ça peut très bien dire *a* là et changer après !

493. B : Mais attends, arrête de nous prendre la tête. En maths, tu écris ça et tu comprends que *a* est égal à *a* quoi !

Cette référence à la pratique mathématique par les étudiants peut être mise en relation avec les habitudes liées à un usage implicite de la quantification qui veut que lorsque l'on utilise deux fois la même lettre de variable dans un calcul, celle-ci soit implicitement associée au même quantificateur universel. Par exemple, dans la résolution d'équation, laquelle occupe une place importante dans la familiarisation avec l'usage des variables dans l'enseignement, l'usage est d'interpréter la phrase ouverte $2x+3=4 \Leftrightarrow 2x=-1$ par l'énoncé $\forall x(2x+3=4 \Leftrightarrow 2x=-1)$ plutôt que par l'énoncé $\forall x(2x+3=4) \Leftrightarrow \forall x(2x=-1)$.

Une autre interprétation, que je n'avais pas envisagé lors de l'analyse a priori, a consisté à considérer plusieurs sens pour le verbe pouvoir ce qui conduit à des interprétations du type de la première mais pour lesquelles les deux membres de l'équivalence font intervenir des propositions, prédicats ou relations différentes : $p \Leftrightarrow q$, $\forall x(P(x) \Leftrightarrow Q(x))$ etc… Cette interprétation a été avancée par deux étudiants du premier groupe. Je n'analyse pas les débats afférents dans la mesure où il me ne semble pas qu'ils aient spécifiquement concerné des questions de quantification.

En conclusion, cette pré-expérimentation a principalement permis de mettre en évidence deux choses. D'abord, il se confirme que l'analyse des pratiques liées à la quantification nécessite une prise en compte du domaine d'objet sur lequel les énoncés sont évalués par les étudiants. Les jeux de description, qui s'intéresse aux relations entre les objets de ces domaines, influent parfois de manière prépondérante sur la manière dont les étudiants comprennent la syntaxe des énoncés. Cette pratique semble trouver son origine dans les habitudes construites dans le contexte de la communication quotidienne où les règles logico-mathématiques de manipulation de la syntaxe ne sont pas nécessairement pertinentes[89]. Ensuite, le contenu des dialogues étudiés montre que les étudiants ne parviennent pas toujours à expliquer leurs désaccords à partir d'une référence explicite à la quantification même si ceux de mon étude ont montré une propension à s'intéresser à la syntaxe des énoncés qui leur ont été soumis. Ce constat est cohérent avec d'autres travaux qui mettent en évidence les difficultés rencontrées par les étudiants pour interpréter les énoncés mathématiques à l'aide de la logique de la quantification (par exemple Selden & Selden (1995)[90] ou Chellougui (2004)). Ils font par exemple référence à des habitudes issues de différents contextes, mathématiques

---

[89] Voir par exemple Deloustal-Jorrand (2004) pour une comparaison de la logique naturelle et la logique mathématique concernant l'implication.

[90] « No student in this study, the majority of whom were third- or fourth-year university students specializing in mathematics or secondary mathematics education, could consistently unpack informally written mathematical statements into equivalent formal versions using the symbols of predicate calculus with which they were familiar. At best, a few students could do so occasionally. » (Selden & Selden, 1995, p. 139)

> « Aucun étudiant de notre étude, la majorité desquels étaient en troisième – ou quatrième – année spécialisées en mathématiques ou en éducation mathématique, n'est parvenu à interpréter (*unpack*) de manière régulière des énoncés mathématiques écrits de manière informelle en des versions équivalentes utilisant les symboles du calcul des prédicats avec lesquels ils sont familiers. Au mieux, quelques étudiants ont pu le faire occasionnellement. » (ma traduction)

ou non mathématiques. Dans certaines situations, ils utilisent le vocabulaire de la variation et de la temporalité.

3.2 Description et analyse a priori de l'expérimentation principale

Dans les deux premières parties de la thèse, je souligne l'importance des processus d'instanciation dans l'activité mathématique. Cette troisième et dernière partie aborde la question de la quantification du point de vue de l'activité des étudiants. Une première analyse logique a permis de mettre en évidence la multiplicité des explications logiques disponibles. Elle a aussi permis de clarifier un certain nombre de normes d'usage des quantificateurs et des lettres (ou des objets) du point de vue logico-mathématique. Je me suis servi de ces normes pour repérer et décrire des pratiques historiques du XIXème siècle en Analyse. Je m'en suis également servi pour étudier les usages des étudiants confrontés à l'évaluation d'un énoncé quantifié isolé. Ces approches épistémologiques et expérimentales conduisent à dégager plusieurs sources de motivation pour mon expérimentation principale. En premier lieu, le constat de pratiques « non standards » dans un nombre important de preuves en analyse au XIXème siècle invite à s'intéresser aux usages des étudiants dans leurs démarches déductives. Il s'agit en particulier d'étudier la façon dont ils manipulent les lettres dans les preuves. Je souhaite en particulier situer ces manipulations par rapport aux usages logiques mais aussi évaluer l'influence potentielle de l'usage du vocabulaire de la variation. Ensuite, l'étude de Dubinsky & Yiparaki (2000), complétée par la pré-expérimentation et présentée dans le paragraphe précédent, montre la possible influence du domaine d'interprétation des énoncés sur la compréhension de leur syntaxe par les étudiants. Des processus pragmatiques issus des habitudes de communication viennent parfois se substituer aux règles logiques aux cours des processus de validation. Ce phénomène est observé lors de l'évaluation d'énoncé isolé. La question de son influence dans le contexte d'une activité mathématique fait partie des motivations générales pour ce travail expérimental. La préparation de l'expérimentation, son déroulement ainsi qu'une partie de son analyse a été réalisée en collaboration avec Thomas Blossier, enseignant-chercheur à l'université Lyon 1. Ceci est brièvement décrit dans (Blossier, Barrier & Durand-Guerrier, 2009). L'expérimentation est organisée autour de la lecture et de l'évaluation par plusieurs groupes d'étudiants de deux preuves en Analyse réelle. Ces preuves s'inspirent, à des degrés divers, de textes historiques du XIXème siècle (un texte de Liouville et un autre de Cauchy). L'idée générale est de recueillir un corpus de dialogues qui puisse être analysé selon les directions que je viens d'évoquer dans ce paragraphe et que j'affinerai par la suite.

3.2.1 Preuve issue de Liouville (1847-1848)

La preuve a été proposée aux étudiants sous la forme suivante :

Enoncé 1

> Soit *f* une fonction réelle définie et dérivable sur *IR*. Si la dérivée de *f* est constamment nulle alors *f* est constante.

Preuve donnée par Liouville lors de son cours à Polytechnique en 1847-1848 (cf. document joint[91]) :

> *Soient a<b deux réels. Montrons que f(a) = f(b).*
>
> *Considérons les points entre a et b partageant l'intervalle [a,b] en m segments de même longueur h = (b-a)/m. Ces points sont :*
>
> $a + h, a + 2h, a + 3h, \ldots, a + (m-1)h.$
>
> *Rappelons l'équation générale*
>
> $f(x+h) - f(x) = h(f'(x) + \varepsilon)$ *avec* ε *qui tend vers 0 quand h tend vers 0.*
>
> *En vertu de cette équation, on a, puisque f'(x) est constamment nulle :*

[91] Le texte original était fourni aux étudiants en même temps que la version ci-dessous.

f(a+h) - f(a) = $h\varepsilon_1$

f(a+2h) - f(a+h) = $h\varepsilon_2$

f(a+3h) - f(a+2h) = $h\varepsilon_3$

....

f(b) - f(a+(m-1)h) = $h\varepsilon_m$.

En ajoutant membre à membre, on obtient :

f(b) – f(a) = h($\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + ... + \varepsilon_m$*)*

Soit ε *la plus grande de toutes les quantités représentées par* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ *etc. On a :*

$f(b) - f(a) \leq hm\varepsilon$.

Mais hm = b – a donc $f(b) - f(a) \leq (b-a)\varepsilon$.

Comme ε *a pour limite zéro quand m croit indéfiniment, on en déduit que le premier membre de l'égalité est nécessairement nul. Donc* $f(b) = f(a)$*. Ce qu'il fallait démonter.*

Remarques générales :

Cette preuve est une adaptation assez fidèle d'une preuve de Liouville (1995, p. 6-7). Les modifications concernent d'abord l'ensemble de définition et l'hypothèse de dérivabilité de la fonction. Le choix de *IR* comme ensemble de définition a pour objectif d'éviter d'introduire de nouvelles lettres dans la preuve. Dans, le texte de Liouville, l'hypothèse de dérivabilité est seulement sous-entendue. Elle est explicite dans la preuve proposée aux étudiants. Il vient ensuite un certain nombre d'aménagements secondaires dont l'objectif est de rapprocher le texte des formulations contemporaines. D'autres aspects comme le fait que les questions de signe ou de valeur absolue ne soient pas abordées explicitement ont été conservés. La version originale du texte de Liouville est en annexe (annexe 13). La principale modification du texte original consiste en l'ajout de la précision « *avec* ε *qui tend vers 0 quand h tend vers 0* » après l'énoncé de l'équation générale[92]. Le but de cet ajout est de rendre plus familier ce que Liouville appelle l'équation générale, c'est-à-dire le développement limité d'ordre 1 de la fonction f en x dans le vocabulaire moderne, afin d'éviter que ce point de la preuve ne fasse l'objet de trop de débats. La preuve a déjà été étudiée par Arsac & Durand-Guerrier (2001). Elle contient une affirmation « ε *a pour limite zéro quand m croit indéfiniment* » qui n'est pas justifiée. Comme ces auteurs le font remarquer, il est assez délicat de se défaire de ses propres outils habituels d'analyse pour faire des hypothèses sur les déductions qui sont étudiées. Je me suis déjà confronté à cette difficulté dans les analyses de textes historiques du deuxième chapitre de cette partie. Dans le cas présent et concernant l'affirmation qui n'est pas justifiée, on ne sait pas sur quelle(s) prémisse(s), Liouville fait reposer son affirmation. Je reviendrai là-dessus dans l'analyse mathématique de la preuve. Dans tous les cas, que l'on fasse l'hypothèse qu'elle soit ou non associée à une déduction invalide, l'affirmation selon laquelle le maximum des ε_i tend vers 0 pose problème. Il s'agit de la raison principale de mon choix de cette preuve pour l'expérimentation. J'ai montré dans le chapitre précédent que ce type d'« évidence » concernant le comportement du minimum, du maximum ou encore de la moyenne arithmétique d'un ensemble de « quantités variables »[93] était présent à plusieurs reprises dans le traité de Duhamel. Par ailleurs, je propose en annexe une preuve de Bertrand (1864)[94] qui met en œuvre les mêmes arguments que ceux utilisés par Liouville dans la preuve ci-dessus (annexe 14). Plus précisément, dans le cadre d'une argumentation ayant d'autres objectifs que ceux de Liouville, Bertrand est amené à montrer que les seules fonctions ayant des taux d'accroissement qui sont des infiniment petits (au sens des ε_i de Liouville) sont les fonctions constantes. Il utilise pour cela l'affirmation du caractère infiniment petit du maximum de quantités infiniment petites (et s'en servira aussi à d'autres endroits de son traité). Cette pratique me semble avoir une certaine consistance épistémologique et j'ai fait l'hypothèse qu'elle serait suffisamment résistante pour qu'il soit intéressant de la proposer à des étudiants en mathématiques dans l'enseignement supérieur. De ce point de vue, la preuve de Liouville rentre clairement dans le cadre des questionnements de cette partie de thèse.

[92] Dans le texte original, cette information se trouve juste avant la preuve.

[93] Liouville (1995) utilise les notions de quantité variable, de quantité constante, de quantité dépendante et indépendante.

[94] Le traité de Bertrand (1864) est un autre ouvrage de la deuxième génération pour la catégorisation de Zerner.

Même si la syntaxe de la quantification n'apparaît pas, ou très peu, dans le texte, la compréhension et l'évaluation de la validité de la preuve nécessite un usage important de la quantification. De plus, l'énoncé de la preuve est connu des étudiants et les concepts mathématiques utilisés sont plutôt élémentaires, au sens où les étudiants en mathématiques à l'université fréquentent ces concepts depuis le lycée. Elle me semble donc un bon candidat pour susciter des interactions entre les élèves.

<u>Analyse de la quantification</u> :

On peut noter que les fonctions $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_m$ introduites dans le début de la preuve sont chacune des fonctions de *m* (je considère ici que *a* et *b* sont des lettres de constantes). Leur maximum est donc à nouveau une fonction de *m*. Il est de la forme $\varepsilon : m \to g(m,m)$ où $g(x,y) = \max_{1 \le i \le x} \{|\varepsilon_i(y)|\}$. En revenant à la définition de la limite, pour montrer que $\varepsilon(m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, il faut que pour chaque $\alpha > 0$, on puisse trouver un nombre entier *M* tel que $\varepsilon(m) < \alpha$, c'est à dire $g(m,m) < \alpha$. Cette remarque montre qu'on ne peut pas travailler sans précaution sur un nombre fixé de ε_i, comme Liouville semble le faire, puisque le choix de ce nombre de ε_i doit aussi correspondre au choix d'un rang associé au réel $\alpha > 0$ tel que l'on ait $|\varepsilon_i| < \alpha$ pour l'ensemble des ε_i (défini par ce même choix). Il est également possible de présenter cette difficulté à partir de la condition suffisante suivante : rien n'assure que le plus petit rang *N* tel que $\forall k \ge N \quad |\varepsilon_1(k)| < \alpha$, $|\varepsilon_2(k)| < \alpha$, …, $|\varepsilon_m(k)| < \alpha$ soit toujours plus petit que *m*. La propriété $\varepsilon(m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$\forall \alpha > 0 \exists M \in IN \forall m \ge M |\varepsilon_1(m)| < \alpha \wedge |\varepsilon_2(m)| < \alpha \wedge ... \wedge |\varepsilon_m(m)| < \alpha \quad (1)$$

En langage naturel, cela signifie que pour tout nombre $\alpha > 0$, il est possible de trouver un nombre entier *M* tel que pour toute subdivision régulière du segment [*a* ; *b*] en plus de *M* intervalles, le taux d'accroissement de la fonction sur chacun des intervalles de la subdivision ne dépasse pas le nombre α.

La syntaxe de la quantification permet de distinguer la formule (1) de la suivante :

$$\forall \alpha > 0 \forall k \in IN \exists M \in IN \forall m \ge M |\varepsilon_1(m)| < \alpha \wedge |\varepsilon_2(m)| < \alpha \wedge ... \wedge |\varepsilon_k(m)| < \alpha \quad (2)$$

En reprenant le vocabulaire de la logique dialogique, on voit que dans (2) le choix de l'entier *M* par le proposant fait suite au choix par l'opposant d'un entier *k* correspondant au nombre de ε_i que le proposant doit prendre ensuite en compte pour poursuivre le jeu dialogique. Il peut se servir de cette donnée pour construire sa stratégie de jeu pour le choix de *M* et la défense de la conjonction. Dans (1), le proposant ne dispose pas d'une telle information. Le proposant doit construire sa stratégie à l'aveugle concernant le nombre de ε_i à prendre en compte. Sur le plan didactique, il est intéressant de constater que la preuve de Liouville ne contient quasiment aucune mention concernant la quantification (cette caractéristique est conservée dans la version amendée qui a été proposée aux étudiants). Or, si l'on ôte la syntaxe de la quantification des deux précédentes formules, il devient délicat d'en distinguer le sens. Concernant la lecture de cette preuve par les étudiants, je fais l'hypothèse que le passage traitant de la limite du maximum des ε_i va susciter un débat dans lequel les questions de quantification émergeront. Ce débat potentiel pourrait notamment permettre d'analyser dans quelle mesure les étudiants se rendent compte que l'énoncé pose problème et d'observer les outils mis spontanément en œuvre pour aborder la question (en particulier l'usage du vocabulaire de la variation). Par ailleurs, l'usage de l'« équation générale » pour des points qui mobilisent la variable *h*, me paraît également susceptible de susciter des débats sur le thème de la quantification. En particulier, la question de la convergence individuelle vers zéro des ε_i n'est pas abordée dans le texte. Elle est pourtant problématique et dans les cas de convergence, il ne s'agit pas d'une application directe de la définition (anachronique) de la dérivabilité. Pour terminer ces remarques sur la quantification, il me paraît important de signaler le fait que l'usage par Liouville du maximum des quantités ε_i lui permet de faire disparaître de la syntaxe du texte la dépendance par rapport au nombre de termes à considérer dans processus du passage à la limite. Cette dépendance est explicite dans la notation $h(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+...+\varepsilon_m)$. Elle devient tacite dans l'expression $(b-a)\varepsilon$ via l'usage de l'égalité $hm = (b - a)$. Selon Arsac & Durand-Guerrier (2001), Liouville sait que l'on ne peut pas déduire la convergence vers 0 d'une somme à partir de la convergence vers 0 de la convergence individuelle de chacun des termes. Cette remarque vient soutenir l'hypothèse selon laquelle l'introduction du maximum ε_i permet à Liouville de lever une possible indétermination à propos de la limite du produit $h(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+...+\varepsilon_m)$.

Analyse de la validité de la preuve :

Je commence par préciser ce que j'entends par « l'analyse de la validité de la preuve ». Au cours de la deuxième partie de la thèse (chapitre 2, paragraphe 3), j'ai présenté une définition du concept de validité concernant les énoncés en référence à la sémantique GTS. Selon cette approche, un énoncé est dit valide (ou logiquement vrai) lorsqu'il est vrai pour toutes les interprétations possibles de ses constantes extra-logiques. Cette définition s'étend aux déductions (ou à la relation de conséquences) entre deux énoncés. Une déduction est dite valide (ou logiquement vraie) lorsque, à chaque fois que les prémisses sont vraies, au sens de la vérité pour une interprétation dans un domaine donné, la conclusion l'est aussi. On peut montrer facilement qu'une déduction qui est faite selon les règles des systèmes formels de preuve tels que la logique dialogique ou la déduction naturelle est valide. De ce point de vue, une preuve peut être dite valide lorsqu'elle respecte les règles de manipulation d'un système logique de déduction qui lui-même conserve la vérité des propositions. Cependant, cette explication de la validité des preuves ne se transfère pas sans difficulté aux preuves mathématiques puisque celles-ci n'utilisent pas le langage des systèmes formels de déduction. La situation est alors plus complexe. Une autre solution pourrait être de ne considérer que les hypothèses et la conclusion de la preuve et d'identifier la validité de la preuve avec la validité de la relation de conséquence entre les hypothèses et la conclusion. Cette solution n'est pas non plus satisfaisante puisque la méthode conduirait à considérer comme valides toutes les preuves pour lesquels la conclusion du raisonnement est conséquence logique des prémisses alors qu'il est envisageable que de telles preuves comportent des pas d'inférence 'locaux' invalides. Il est donc nécessaire de prendre en compte les assertions qui sont produites en cours de démonstration et d'en contrôler également la validité comme conséquences d'autres énoncés. Une des difficultés de l'analyse est alors de choisir, pour chaque assertion *A*, les énoncés que l'on regarde comme faisant partie des prémisses de la déduction qui a conduit à l'assertion *A*. La solution qui consiste à prendre pour prémisses tous les énoncés qui précédent physiquement l'assertion considérée ne me paraît pas pertinente (l'analyse de la preuve de Liouville montrera pourquoi). D'autre part, il est aussi indispensable d'intégrer à ces prémisses des énoncés qui ne font pas physiquement partie de la preuve pour prendre en compte les implicites. De ce point de vue, une analyse de la validité d'une preuve consiste à sélectionner des énoncés au sein de la preuve, à faire des hypothèses sur des prémisses possibles de ces énoncés puis à évaluer la validité de la déduction de ces prémisses potentielles aux énoncés sélectionnés.

Pour la preuve de Liouville, j'ai décidé de concentrer mon analyse sur l'assertion selon laquelle « ε *a pour limite zéro quand m croit indéfiniment* ». On peut d'abord considérer que la déduction de Liouville s'appuie exclusivement sur la convergence vers zéro de chaque fonction ε_i (sans prendre en compte la nature de ces fonctions ε_i qui sont obtenues comme des taux d'accroissement d'une fonction donnée). La déduction associée à cette perspective est clairement invalide. J'ai donné des contre-exemples à ce type d'inférence dans le deuxième chapitre de cette partie. D'autre part, la question de la convergence vers zéro des ε_i est problématique et son affirmation n'est pas explicite dans le texte de Liouville. Par contre, si l'on regarde « ε *a pour limite zéro quand m croit indéfiniment* » comme une conséquence de prémisses différentes (ou d'un nombre de prémisses plus grand) la question devient plus délicate. Par exemple, dans le cas où l'on considère que l'assertion selon laquelle la fonction est de dérivée nulle fait partie des prémisses alors il existe une preuve, reposant sur une axiomatique pour la construction des nombres réels, du fait que la fonction est constante[95] et donc que chacun des taux d'accroissement de la fonction est nul, tout comme leur maximum. De ce point de vue, l'énoncé $\forall \alpha > 0 \exists M \in IN \forall m \geq M, \max_{1 \leq i \leq m} \{|\varepsilon_i(m)|\} < \alpha$ (1) est une conséquence logique de ces nouvelles prémisses. Cette remarque montre que la recherche d'un contre-exemple reposant sur une interprétation de l'énoncé dans le contexte de l'analyse sur *IR* est vouée à l'échec ou, dit autrement, que lorsque l'on mobilise une fonction définie sur *IR* qui possède une dérivée nulle, cette fonction possède effectivement un maximum ε qui a pour limite zéro. Il est donc nécessaire de rentrer plus en détail dans la preuve de Liouville si l'on souhaite tenir compte du contexte de la preuve, c'est-à-dire dans une certaine mesure utiliser la nature des ε en jeu et exclure la possibilité du contre-exemple « aveugle » évoqué ci-dessus[96], sans pour autant considérer que puisque le développement des mathématiques a permis de construire une théorie des nombres réels dans laquelle une preuve de l'assertion est disponible alors la preuve de Liouville est valide. On peut par exemple faire le choix d'utiliser les définitions des ε_i proposées par Liouville sans pour autant considérer que la dérivée de la fonction *f* est nulle. Dans ce cas, la déduction associée est invalide. La fonction *f* définie sur

[95] Une preuve est brièvement évoquée à la fin du paragraphe.

[96] Je parle du contre-exemple qui s'adresse à la déduction dont la prémisse est « chaque ε_i tend vers zéro » et la conclusion « ε tend vers 0 ». Ce contre-exemple est « aveugle » dans le sens où il ne prend pas en compte le fait que les fonctions ε_i sont obtenues comme des taux d'accroissement.

IR par $f : x \in IR^* \to x^2 \sin(1/x)$ et $f(0) = 0$ procure un contre-exemple. Cette fonction est dérivable sur *IR* et en se plaçant sur l'intervalle [0 ; 1] on obtient :

$$\varepsilon_2(h) = \frac{f(2h) - f(h)}{h} - f'(h) = 4h\sin(1/2h) - h\sin(1/h) - 2h\sin(1/h) + \cos(1/h)$$

$|\varepsilon_2(h)|$ n'a pas de limite quand *h* tend vers zéro et donc $\varepsilon(h)$ non plus. Ce contre-exemple est aussi un contre-exemple pour la question de la convergence individuelle ε_i vers zéro à partir des mêmes prémisses. Néanmoins, l'ajout de certaines prémisses « implicites » permet d'exclure ce type de fonction irrégulière. Par exemple, une hypothèse d'uniforme dérivabilité sur *IR* de la fonction *f* permet se s'assurer facilement que chaque ε_i converge bien vers zéro, ainsi que leur maximum ε. De même, une hypothèse de continuité de la dérivée *f'* de la fonction *f* permet de montrer la convergence vers zéro de chaque ε_i et de leur maximum. Sous ces hypothèses, le théorème des accroissements finis permet d'écrire :

$$\varepsilon_i(h) = \frac{f(a+ih) - f(a+(i-1)h)}{h} - f'(a+ih) = f'(c_{i,h}) - f'(a+ih)$$

où $c_{i,h} \in]a+(i-1)h; a+ih[$. Ceci montre $\varepsilon_i(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Ensuite, si l'on suppose que ε ne converge pas alors on peut construire, pour un réel $\alpha > 0$ donné une suite convergente $(a_n)_{n\in IN}$ (par compacité de l'intervalle [a ;b]) telle que :

$$\frac{f(a_n) - f(a_n + h)}{h} - f'(a_n) > \alpha$$

Une nouvelle application du théorème des accroissements finis permet de conclure à une contradiction. Cependant, considérer que Liouville appuie sa déduction sur des hypothèses implicites d'uniforme dérivabilité ou de continuité de la dérivée relève de l'anachronisme. Le très faible usage de marqueurs syntaxiques pour la quantification dans la pratique des mathématiques de Liouville réduit en effet de manière importante les possibilités d'usage des concepts de continuité et de dérivabilité. Je termine cette analyse de la validité de la preuve en envisageant un dernier cas de figure. Je suppose cette fois que l'énoncé « *ε a pour limite zéro quand m croit indéfiniment* » repose sur l'hypothèse de la convergence individuelle des ε_i vers 0 en tenant compte du fait que les ε_i sont les différences entre le taux d'accroissement et la dérivée (je ne suppose toujours pas que *f'* est nulle). Cette hypothèse exclut le contre-exemple précédemment présenté. Elle est moins forte que les hypothèses d'uniforme dérivabilité et de continuité de la dérivée et présente l'avantage d'être formulable dans un langage qui fait un usage moindre de la quantification. Il s'agit du point de vue adopté dans l'analyse mathématique de la preuve par Arsac & Durand-Guerrier (2001). Ces auteurs procèdent à une réécriture de la proposition $\forall\alpha > 0 \exists M \in IN \forall m \geq M, \max_{1\leq i\leq m}\{|\varepsilon_i(m)|\} < \alpha$ (1) qui utilise la convergence ε_i. On sait que pour tout $i \in IN$ et pour tout $\alpha > 0$ il est possible de trouver des M_i tels que $\forall m \in IN, m > M_i \Rightarrow |\varepsilon_i(m)| < \alpha$. On appelle N_i le plus petit de ces M_i. Une reformulation équivalente de (1) est alors :

$$\forall\alpha > 0 \exists M \in IN \forall m \geq M, m > \max_{1\leq i\leq m} N_i$$

Les deux membres de l'inégalité sont des fonctions de *m* et le second est assez difficile à cerner :

> « Il faut en conclure que l'évidence implicitement supposée par Liouville ne résulte pas d'une déduction logique simple reposant sur la définition de la dérivée. » (Arsac & Durand-Guerrier, 2001, p. 38/44)

Par contre, si l'on ajoute aux hypothèses la continuité de la dérivée au point *b*, on peut remarquer que la déduction devient valide. En effet, si l'on suppose que ε ne converge pas alors on peut construire, pour un réel $\alpha > 0$ donné et comme lors de la discussion utilisant l'hypothèse de continuité de *f'*, une suite convergente $(a_n)_{n\in IN}$ (par compacité de l'intervalle [a ;b]) telle que :

$$\frac{f(a_n) - f(a_n + h)}{h} - f'(a_n) > \alpha$$

L'hypothèse de convergence vers zéro des ε_i permet de montrer que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$, la continuité de *f'* en *b* suffit alors pour conclure. Ceci dit, la variation est mineure par rapport au cas où l'on suppose la dérivée de la fonction *f* continue sur tout l'intervalle [*a* ;*b*] dans la mesure où la lettre *b* est obtenue dans la preuve par un instanciation universelle.

Parmi les hypothèses que j'ai prises en compte jusqu'à présent, je n'ai pas systématiquement fais pas apparaître les axiomes qui définissent les nombres réels bien qu'ils en fassent pleinement partie. La fonction définie sur les rationnels par *f(x)* = 0 si $x < \sqrt{2}$ et *f(x)* = 1 si $x > \sqrt{2}$ est en effet un contre-exemple à la restriction suivante de l'énoncé : « si la dérivée d'une fonction est nulle (sur l'ensemble des nombres rationnels) alors cette fonction est constante ». Dans l'enseignement supérieur français, le théorème démontré par Liouville est souvent présenté comme une conséquence du théorème des accroissements finis. Son rapport avec la construction des nombres réels peut être masqué par cette approche. Je termine cette analyse de la validité par la présentation d'une preuve par l'absurde du théorème. Cette preuve permet de mettre en évidence les liens qu'il y a entre ce théorème et la donnée d'une axiomatique pour les nombres réels.

Preuve :

Si l'on suppose qu'il existe deux réels $a<b$ tels $f(a)<f(b)$ (par exemple), on a alors $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$. On construit par dichotomie deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in IN}$ et $(b_n)_{n\in IN}$ de manière à ce que $\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$. Les suites $(a_n)_{n\in IN}$ et $(b_n)_{n\in IN}$ sont de Cauchy et convergent vers une même limite c et on a la contradiction suivante :

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=\frac{f(b_n)-f(c)}{b_n-a_n}+\frac{f(c)-f(a_n)}{b_n-a_n}<\frac{f(b_n)-f(c)}{b_n-c}+\frac{f(c)-f(a_n)}{c-a_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}2f'(c)=0$$

<u>Conclusion</u> :

Du point de vue de la quantification, les potentialités d'analyse de la preuve de Liouville sont importantes. Les possibilités de traduction logique dans un langage familier pour les étudiants me semblent assez ouvertes en raison notamment de la place très faible qui est accordée à la quantification dans le texte. L'évaluation de cette preuve par les étudiants est susceptible de faire fonctionner des mécanismes similaires que ceux observés lors de la pré-expérimentation. Selon Arsac & Durand-Guerrier (2001), Liouville s'appuie sur « la connaissance du contenu mathématique » pour contrôler de la validité de sa preuve. Pour les étudiants, la familiarité avec le domaine disciplinaire de l'Analyse réelle est en cours de construction. Un axe important d'analyse de leur production pourra être d'étudier les rapports entre leur conception des nombres réels, c'est-à-dire leur connaissance des contenus en jeu, et leur prise en compte des aspects liés à la quantification au cours de l'évaluation de la preuve de Liouville. Cet axe d'analyse se situe donc dans la continuité de la pré-expérimentation puisqu'il interroge les rapports entre les jeux de description et la prise en compte de la syntaxe des énoncés. Cependant, le contexte est cette fois celui d'une activité mathématique. Sur le plan des jeux d'intérieur, certaines déductions de cette preuve sont discutables. Il me paraît intéressant d'une part d'observer si les étudiants parviennent à relever que les inférences liées à la convergence des ε_i et de leur maximum ne repose pas sur des déductions logiques évidentes et d'autre part d'étudier la forme, au sens de la structure des jeux d'intérieur, que les discussions peuvent prendre au cours de cette activité.

3.2.2 Preuve issue de Cauchy (1821)

L'énoncé a été proposé aux étudiants sous la forme suivante :

Enoncé 1

On considère la suite définie par, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

On a alors : $\lim_{n\to\infty} u_n = e$

Rappel :

Enoncé :

On considère la suite définie par, pour entier naturel n, $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

On a alors $\lim_{n\to\infty} v_n = e$

Preuve :

v_n est croissante ($v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geq 0$)

et majorée par exemple :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} \leq 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$$

Preuve de l'énoncé 1 inspirée par le Cours d'analyse donné à l'école polytechnique en 1821 par Cauchy :

Soit m un nombre entier :

$$u_m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{1}{m^k}$$

$$u_m = 1 + m\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2}\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{1}{m^3} + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}\frac{1}{m^n} + ... + \frac{1}{m^m}$$

$$u_m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\frac{m(m-1)}{m^2} + \frac{1}{3!}\frac{m(m-1)(m-2)}{m^3} + ... + \frac{1}{n!}\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{m^n} + ... + \frac{1}{m^m}$$

On commence par montrer que u_m *a une limite quand m tend vers l'infini* :

Si on regarde le (n+1)ième terme de cette somme, c'est-à-dire $\dfrac{1}{n!}\dfrac{m(m-1)...(m-n+1)}{m^n}$, on constate que ce terme augmente avec l'augmentation de m car :

$$\frac{1}{n!}\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{m^n} = \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{m}\right)$$

En effet, chacun des facteurs du produit augmente puisque les termes en $\dfrac{k}{m}$ diminuent quand m augmente. Ceci montre que la suite $\left(1 + \dfrac{1}{m}\right)^m$ est croissante.

En plus, on a :

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\frac{m(m-1)}{m^2}+\frac{1}{3!}\frac{m(m-1)(m-2)}{m^3}+...+\frac{1}{n!}\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{m^n}+...+\frac{1}{m^m}$$

$$\leq 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}+...+\frac{1}{m!}\leq e\ .$$

En effet $\frac{m(m-1)}{m^2}\leq 1$; $\frac{m(m-1)(m-2)}{m^3}\leq 1$; $\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{m^n}\leq 1$; $\frac{1}{m^m}\leq\frac{1}{m!}$

La suite est donc croissante et majorée, elle converge.

On montre maintenant que $(u_n)_{n\in IN}$ *converge vers e* :

En effet, si l'on regarde attentivement l'égalité

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\frac{m(m-1)}{m^2}+\frac{1}{3!}\frac{m(m-1)(m-2)}{m^3}+...+\frac{1}{n!}\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{m^n}+...+\frac{1}{m^m}$$

On constate que le *(n+1)*ième terme tend vers $\frac{1}{n!}$ quand *m* tend vers l'infini. On a donc

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}+...=e$$

<u>Remarques générales</u> :

Cette preuve trouve son inspiration dans une preuve de Cauchy (1821, première partie, Chapitre six, §4). Cependant, contrairement au cas de la preuve de Liouville, la preuve qui a été proposée aux étudiants est assez éloignée de celle de Cauchy. De ce point de vue, il aurait peut-être été préférable ne pas écrire preuve « inspirée par le Cours d'analyse donné à l'école polytechnique en 1821 » dans le texte proposé aux étudiants. J'ai extrait et réinvestit dans la preuve ci-dessus la déduction suivante du texte de Cauchy[97] :

[97] La notation en accolade est de Cauchy. Il s'agit pour lui de délimiter des bornes pour la variable *x*.

« […] $(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2}(1-\alpha) + \frac{x^3}{1.2.3}(1-\alpha)(1-2\alpha) + \&c... \quad \left\{ \begin{matrix} x = -\dfrac{1}{\alpha} \\ x = +\dfrac{1}{\alpha} \end{matrix} \right\}$

Cette dernière équation devant subsister, quelque petite que soit la valeur numérique de α, si l'on désigne à l'ordinaire, par l'abréviation *lim.* placée devant une expression qui renferme la variable α, la limite vers laquelle converge cette expression, tandis que la valeur numérique de α décroît indéfiniment, on trouvera, en passant aux limites,

(21) $\lim.(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \&c... \left\{ \begin{matrix} x = -\infty \\ x = +\infty \end{matrix} \right\}$ »

Ce raisonnement est utilisé pour faire la déduction entre les deux dernières lignes de la preuve proposée aux étudiants. En reprenant les termes du chapitre précédent empruntés à Zerner (partie 3, chapitre 2), on peut dire qu'il s'agit d'une application du principe de substitution. Ce principe est un principe fondamental et caractéristique des traités de la deuxième génération[98]. Avant de revenir sur la preuve, je voulais souligner le fait qu'au niveau mathématique, le principe de substitution possède certains liens avec la déduction sur laquelle je me suis concentré dans la preuve précédente concernant le comportement du maximum d'un ensemble de variables qui tendent vers 0. En effet, il est possible de « démontrer » le principe de substitution concernant l'addition en utilisant la propriété (erronée) de convergence vers zéro de ce maximum. J'ai présenté l'exemple de Duhamel plus haut dans l'analyse historique mais on peut aussi trouver cette démarche dans les traités de Bertrand (1864) ou de Sturm (1863)[99]. Il est également intéressant de remarquer que le type de preuve présenté ci-dessus a fait l'objet d'une critique de Liouville lui-même dans un article de 1840 :

« La démonstration dont on fait ordinairement usage pour prouver que cette limite a pour valeur le nombre $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + ...$ n'est pas suffisamment rigoureuse ; elle suppose en effet que pour tout $m = \infty$, le produit $\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)...\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$ se réduit à l'unité, ce qui est vrai quand *n* est un

---

[98] Le cours de Cauchy ne fait pas partie du corpus de Zerner puisqu'il n'a pas eu d'édition entre 1870 et 1914.

[99] La preuve de Bertrand est proposée en annexe (annexe 15). Celle de Sturm est analysée dans Zerner (1986, p. 15).

nombre déterminée indépendant de m, mais ne l'est plus quand on a par exemple $n = m$ ou $n = m - 1$, etc. » (Liouville, 1840, p. 208)[100]

Dans la preuve distribuée aux étudiants, ce principe est inséré dans une argumentation plus vaste. Il y a plusieurs raisons à cela. D'abord, je souhaitais recueillir des éléments de la pratique naturelle des étudiants. L'immersion de l'argument impliquant le principe de substitution parmi un ensemble d'autres éléments est un moyen d'éviter de le présenter comme un moyen de déduction trop suspect. La présentation de l'argument comme un élément parmi d'autres d'un calcul de limite répond à cette volonté. Ce choix m'a conduit à allonger la preuve notamment en introduisant la partie « Rappel » et surtout à développer des arguments redondants concernant la croissance et la convergence de la suite u_m dans la preuve de l'énoncé. Ensuite, les étudiants de première année de Licence de mathématiques à l'université ne sont pas familiers avec le concept de série (il n'est pas abordé avant la deuxième année de Licence), encore moins avec celui de séries entières. La situation est la même pour les étudiants de première année de l'INSA. Les étudiants de première année représentant une part importante de la population envisagée pour l'expérimentation, j'ai choisi de travailler autant que possible avec des sommes finies, c'est-à-dire jusqu'à la conclusion qui doit nécessairement porter sur un nombre infini de termes si l'on veut que l'usage du principe de substitution ait un sens. Pour la même raison d'accessibilité mathématique, j'ai choisi de travailler sur une somme donnée plutôt que sur une série entière. Au niveau du contenu mathématique, il est assez probable que le résultat en jeu dans cette preuve, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} u_n = e$, soit connu des étudiants. Dans l'enseignement supérieur, il est souvent présenté et démontré en utilisant les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.

Analyse de la quantification :

Dans cette preuve, la quantification intervient essentiellement lors de la démonstration de la croissance de la suite et lors de l'utilisation du principe de substitution. Les objets sur lesquels agit la quantification sont des entiers naturels ; il n'y a plus d'usage des notions de continuité et de dérivabilité. De ce point de vue, cette preuve est moins complexe que la preuve précédente inspirée par le cours de Liouville. Cependant, des questions de « dépendance » entre les variables (au sens des contraintes exercées sur certains choix de

[100] Il propose ensuite une correction de la preuve qui se trouve en annexe (annexe 16).

lettres dans les jeux dialogiques) persistent. Elles sont du même type que celles qui se trouvent dans la preuve de Liouville. Concernant la preuve de Liouville, l'énoncé sur lequel je me suis concentré est de la forme $\forall\alpha > 0 \exists M \in IN \forall m \geq M, \max_{1\leq i\leq m}\{|\varepsilon_i(m)|\} < \alpha$ ou encore, en reprenant la notation introduite plus haut $\forall\alpha > 0 \exists M \in IN \forall m \geq M, g(m,m) < \alpha$ [101]. Dans la preuve étudiée dans ce paragraphe, une reformulation de l'énoncé affirmant la convergence de la suite $(1+1/m)^m$ est la suivante :

$$\forall\alpha > 0 \exists M \in IN \forall m \geq M, |s(m,m) - e| < \alpha \quad (3)$$

Ou alors, de manière équivalente :

$$\forall\alpha > 0 \exists M \in IN \forall m \geq M, \left|s(m,m) - \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\right| < \alpha \quad (3')$$

Avec $v_{k,m} = C_m^k \dfrac{1}{m^k}$ $(k \leq m)$ et $s(n,m) = \sum_{k=0}^{n} v_{k,m}$ $(n \leq m)$.

La similarité de ces deux preuves au niveau de la quantification peut se voir à travers l'utilisation des fonctions à deux variables *g* et *s* pour lesquelles les énoncés suivants sont connus :

$$\forall\alpha > 0 \forall l \in IN \exists M \in IN \forall m \geq M, g(l,m) < \alpha \quad (2)$$

$$\forall\alpha > 0 \forall l \in IN \exists M \in IN \forall m \geq M, \left|s(l,m) - \sum_{k=0}^{l}\frac{1}{k!}\right| < \alpha \quad (4)$$

La difficulté de l'évaluation de ces énoncés réside dans le fait que le choix par le proposant de la lettre *m* pour les énoncés (3) ou (3') doit répondre à deux questions de manière simultanée alors que, a priori, on ne sait répondre à ces questions que dans un ordre bien déterminé et qui est explicité par la quantification de (4) (i.e. choisir d'abord le nombre *l* de terme de la somme et choisir ensuite le rang *m* à partir duquel la somme des *l* termes est suffisamment proches de la somme des *l* premiers termes de l'exponentielle). Comme pour la première preuve de l'expérimentation, mais cette fois dans le contexte des suites, je fais l'hypothèse que ces difficultés vont faire émerger des débats concernant la quantification.

---

[101] $g(x,y) = \max_{1\leq i\leq x}\{|\varepsilon_i(y)|\}$. Voir l'analyse de la quantification pour le preuve de Liouville.

La preuve inspirée par le cours d'Analyse de Cauchy possède néanmoins une spécificité sur le plan logique. Un nouveau type de lettres vient en effet s'ajouter aux lettres de variable, d'objet ou de constante utilisée jusque là, les lettres d'indice dans les sommes[102]. Dans la preuve du théorème sur les fonctions de dérivées nulles, l'usage de ces lettres d'indice est absorbé par un usage important des points de suspension. Ici, elles interviennent entre deux séries de points de suspension dans les sommes ou encore en bas du signe somme lorsque celui-ci est utilisé. Le statut logique de ces lettres est particulier. Plus précisément, elles ne me paraissent pas faire partie du langage de la preuve au sens où ce ne sont ni des lettres de variables (elles ne sont pas associées à un quantificateur), ni des lettres d'objets (elles n'ont pas été introduites par un processus d'instanciation associé à une règle d'usage pour un quantificateur), ni des lettres de constantes. Il me faudrait néanmoins approfondir cette question davantage. Sur le plan pragmatique, les lettres d'indice jouent un rôle important au moment de la preuve de la croissance de la suite $(u_n)_{n\in IN}$ et de la preuve de la convergence de cette suite vers *e*. Ce rôle pragmatique est matérialisé par la formule du métalangage « si on regarde le (n+1)ième terme de la somme… » dans la démonstration de croissance. Les lettres d'indice contribuent en particulier à faire le lien entre le travail sur les suites $(v_{k,m})_{m\in IN}$ pour des nombres entiers *k* fixés et les sommes $(s(m,m))_{m\in IN}$. Un intérêt spécifique de faire travailler les étudiants sur cette preuve est de se donner les moyens d'observer l'usage qu'ils font des lettres d'indice dans un contexte de quantification particulier dans lequel la variable *m* fait doublement office d'argument pour la suite *s*. Dans cette preuve, la preuve de la croissance de la suite $(u_n)_{n\in IN}$ se fait à travers l'étude de la différence entre deux termes consécutifs de la suite, par exemple u_{m+1} et u_m. Mais puisque $u_m = s(m,m)$, la considération du terme u_{m+1} de la suite conduit à se décaler d'une ligne vers le bas dans le tableau ci-dessous, mais aussi à se décaler d'une colonne vers la droite au niveau du nombre de termes à prendre en compte. Pour la recherche de la limite, le même genre de phénomènes se produit puisque le travail porte aussi sur le variable *m*.

$v_{1,1}$	*	*	*	*	*	*	*

[102] A ce propos une « coquille » s'est glissée dans la preuve distribuée aux étudiants au niveau des lettres d'indice entre les deux premières lignes de la preuve (un *k* devient un *n* sans raisons particulières).

$v_{1,2}$	$v_{2,2}$	*	*	*	*	*	*
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$v_{1,m}$	$v_{2,m}$	$\dots$	$v_{n,m}$	$\dots$	$\dots$	$v_{m,m}$	*
$v_{1,m+1}$	$v_{2,m+1}$	$\dots$	$v_{n,m+1}$	$v_{n+1,m+1}$	$\dots$	$v_{m,m+1}$	$v_{m+1,m+1}$

L'usage de lettres d'indice est susceptible de contribuer à faire émerger de nouvelles questions sur la dépendance de la lettre d'indice *n* par rapport à la variable *m*. Sur le plan logique, ces questions ne se posent pas dans la mesure où précisément la lettre *n* n'est pas une lettre de variable lorsqu'elle est utilisée dans la notation des sommes. Elle n'est donc susceptible de « dépendance » au sens des contraintes imposées sur le choix des lettres pour le proposant. D'autre part, lorsque la lettre *n* est utilisée avec un statut de variable, comme par exemple dans l'égalité $\frac{1}{n!}\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{m^n}=\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)...\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$ où elle est implicitement universellement quantifiée, le responsable du choix de cette lettre dans le jeu dialogique associé est l'opposant. En conclusion de cette analyse, et en regard de mon objectif de recueil d'un corpus de dialogue sur la quantification, deux éléments de cette preuve sont particulièrement intéressants : il s'agit des questions de « dépendance » qui concernent la quantification de l'énoncé de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in IN}$ et des effets potentiels de l'usage pragmatique de lettres d'indice dans les notations pour les sommes. Le premier élément est assez directement issu du texte de Cauchy lui-même. Le second est issu de mes choix de présentation de la preuve aux étudiants.

<u>Analyse de la validité</u> :

Au niveau de la validité de la preuve, je me concentre sur l'énoncé de la croissance de la suite $(u_n)_{n\in IN}$ et sur l'énoncé (3). L'argument concernant la croissance semble reposer sur la prémisse selon laquelle, pour tout *n* la suite $(v_{n,m})_{m\in IN}$ est croissante. Cette remarque est implicitement utilisée dans le calcul terme à terme de la différence $u_{m+1}-u_m$. Cependant, une difficulté du raisonnement est de savoir quel terme de la somme $u_{m+1}=\sum_{k=0}^{m+1}v_{k,m+1}$ qui en comporte m+1 est à comparer avec quel terme de la somme $u_m = \sum_{k=0}^{m} v_{k,m}$ qui en comporte m. Dans tous les cas, il restera un terme qui n'aura pas été comparé à un autre dans la somme $u_{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} v_{k,m+1}$ et la preuve ne dit rien sur ce terme. Pour que la déduction soit valide, il faut donc rajouter une prémisse implicite à la prémisse concernant la croissance terme à terme des sommes. Cette prémisse peut être la positivité des termes de la somme. Par ailleurs, on peut remarquer que l'assertion étudiée, comme celle concluant à la majoration, est inutile dans la perspective générale de la preuve. Plus précisément, il est possible de se dispenser d'établir ces assertions dans le sens où il n'est pas mathématiquement nécessaire de s'assurer que la suite converge pour montrer qu'elle converge vers e.

Ensuite, la dernière assertion semble reposer sur une déduction comportant en prémisse la convergence individuelle des termes $(v_{k,m})_{m\in IN}$ de la somme $u_m = \sum_{k=0}^{m} v_{k,m}$. La validité de la déduction conduisant à l'assertion $\forall \alpha > 0 \exists M \in IN \forall m \geq M, \left| \sum_{k=0}^{m} v_{k,m} - \sum_{k=0}^{\infty} (\lim_{m\to\infty} v_{k,m}) \right| < \alpha$ dépend de la nature de la suite $(v_{k,m})_{m\in IN}$ et des hypothèses implicites qui peuvent y être associée. Dans la suite, je suppose que pour tous les entiers naturels k, la suite $(v_{k,m})_{m\in IN}$ converge et que la série $\sum_{k=0}^{n} (\lim_{m\to\infty} v_{k,m})$ converge. Plusieurs cas de figure se présentent. D'abord, on peut supposer seulement que la suite $(v_{k,m})_{m\in IN}$ converge et que la série $\sum_{k=0}^{n} (\lim_{m\to\infty} v_{k,m})$ converge. La déduction est alors invalide comme le montre le contre-exemple suivant : avec $v_{k,m} = \frac{1}{m+k}$, on a $\sum_{k=0}^{n} (\lim_{m\to\infty} v_{k,m}) = 0$ et $\lim_{m\to\infty} u_m = \ln(2)$. Si l'on ajoute aux prémisses la positivité des nombres $(v_{k,m})_{k,m\in IN}$ et la croissance des suites $(v_{k,m})_{m\in IN}$, la déduction est valide. De même, si l'on ajoute aux prémisses l'existence d'une suite $(v_k)_{k\in IN}$ telle que $\forall m \in IN, |v_{k,m}| \leq v_k$ et que $\sum v_k$ converge alors la déduction est valide. Du point de vue de ces deux dernières remarques, le contenu de la preuve de la convergence de la suite u_m est susceptible de jouer un rôle heuristique important. Ces cas particuliers font l'objet de théorèmes spécifiques dans l'enseignement supérieur en France, le théorème de convergence monotone et le théorème de convergence dominée. Enfin, la prise en compte de la spécificité des $(v_{k,m})_{k,m\in IN}$ dans cette preuve au niveau des prémisses, c'est-à-dire la prise en compte de l'égalité $v_{k,m} = C_m^k \frac{1}{m^k}$, conduit également à une déduction valide. Du point de vue de la validité, il y a une différence importante avec la preuve concernant les fonctions dérivables de dérivées nulles. Le fait que l'argumentation se construise sur une suite donnée permet de maîtriser des questions qui ne l'étaient pas dans la preuve précédente et qui nécessitait l'intervention d'hypothèses comme par exemple la continuité de la dérivée de la fonction considérée. La prise en compte de la spécificité de la somme étudiée dans les prémisses de la déduction permet ici de travailler sur un nombre fini de termes de cette somme. Cette possibilité repose néanmoins sur les axiomes de construction des nombres réels puisqu'il est nécessaire de s'assurer de la convergence de la série $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ ou alors sur le théorème selon lequel une suite majorée et croissante converge.

Synthèse :

Comme dans la preuve précédente, la syntaxe de la quantification est très peu utilisée dans la rédaction de la preuve. Pourtant, celle-ci fait intervenir de manière implicite un usage assez fin de la quantification, en particulier au niveau de la dernière déduction et de la dernière assertion dont la structure logique est assez proche de l'assertion que j'ai analysée dans le détail dans la preuve précédente. Cette preuve fait également usage de lettre d'indice sans pour autant distinguer clairement l'usage de ces lettres d'indice de l'usage des lettres de variables ou d'objets. Les deux usages ne relèvent pourtant pas du même langage. Ces deux points constituent un aspect important de mon choix de cette preuve dans la perspective de provoquer des débats autour de la quantification dans un contexte déductif. D'autre part les questions sur les relations entre les jeux de description et la prise en compte de la quantification continuent de se poser, cette fois dans le contexte des suites et des séries plutôt que dans celui des fonctions.

3.2.3 Les preuves de recours

L'analyse des preuves de Liouville et de Cauchy a mis en exergue deux pas d'inférence. Concernant la preuve de Liouville, il s'agit de la déduction concluant à la convergence vers 0 d'un maximum ε de certaines quantités ε_i à partir de l'hypothèse de la convergence individuelle vers 0 de ces ε_i. Concernant la preuve de Cauchy, il s'agit de l'usage du principe de substitution dans le contexte d'une preuve de convergence d'une suite vers le nombre e défini comme limite de la série $\sum 1/k!$. Pour des raisons précisées lors des analyses épistémologique et a priori, un des enjeux de l'expérimentation est que les étudiants débattent de ces inférences. Dans cette perspective, il m'a paru souhaitable que les expérimentateurs disposent d'éléments pour orienter les débats des étudiants vers la question de la validité de ces inférences spécifiques dans le cas où cette question n'émergerait pas de la seule lecture des preuves. Pour cette raison, la forme des deux inférences a été réinvestie dans le contexte de deux autres preuves. Plus précisément, leur structure logique[103] a été réutilisée sur un autre domaine d'interprétation, c'est-à-dire dans un contexte où l'interprétation « naturelle » des lettres en jeu dans la déduction conduit à mobiliser des objets différents.

Au niveau de la preuve adaptée du texte de Liouville, la structure de l'inférence consistait en une déduction de (2) à (1) :

$$\forall \alpha > 0 \forall k \in IN \exists M \in IN \forall m \geq M |\varepsilon_1(m)| < \alpha \wedge |\varepsilon_2(m)| < \alpha \wedge ... \wedge |\varepsilon_k(m)| < \alpha \quad (2)$$

$$\forall \alpha > 0 \exists M \in IN \forall m \geq M |\varepsilon_1(m)| < \alpha \wedge |\varepsilon_2(m)| < \alpha \wedge ... \wedge |\varepsilon_m(m)| < \alpha \quad (1)$$

Dans le contexte original, les lettres ε dénotaient des fonctions correspondant à certains taux de variation pour une fonction continue donnée. L'analyse de la validité de la preuve a montré que la recherche d'un contre-exemple pour la déduction de (2) à (1) nécessitait une bonne familiarité avec les fonctions dérivables dont la dérivée n'est pas continue. Ce point est susceptible de provoquer des difficultés pour les étudiants de première année. Pour contourner ces difficultés, la preuve de recours associée à cette déduction s'appuie sur le contexte des suites. Voici l'énoncé et la preuve qui ont été mis à la disposition des expérimentateurs :

---

[103] Ou plutôt une interprétation de cette structure logique, l'analyse de la validité des preuves ayant mis en évidence la difficulté de faire des hypothèses sur la structure des déductions qui sont effectivement réalisées.

Nous nous inspirons d'une partie de la preuve précédente pour donner une preuve de l'énoncé suivant :

Enoncé 2

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs. Pour tout $m \geq 1$ notons

$$S_m = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_m .$$

Alors $\frac{S_m}{m^2}$ tend vers 0 quand tend m vers l'infini.

Preuve : *Notons* $\varepsilon_k = \frac{u_k}{m}$. *Remarquons que pour chaque k,* ε_k *tend vers zéro quand m tend vers l'infini. On a :*

$$\frac{S_m}{m^2} = \frac{1}{m}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + ... + \varepsilon_m).$$

Soit ε *le maximum de* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m$. *On a :*

$\frac{S_m}{m^2} \leq \frac{1}{m}(m\varepsilon)$ *ou encore* $\frac{S_m}{m^2} \leq \varepsilon$.

Mais ε *tend vers 0 quand m tend vers l'infini. Donc* $\frac{S_m}{m^2}$ *tend vers 0 quand m tend vers l'infini.*

L'inférence qui a la forme de la déduction de (2) à (1) est celle qui intervient lors de l'affirmation « ε *tend vers 0 quand m tend vers l'infini* ». L'énoncé proposé est manifestement faux. Un contre-exemple est donné par la suite $u_k = k^2$. La preuve de recours rompt avec l'interprétation « naturelle » des lettres ε comme dénotant des fonctions et invite à faire des interprétations en termes de suites. Il est assez probable que les étudiants parviennent à trouver un contre-exemple pour ce nouvel énoncé et qu'ils soient amenés à interroger la validité des arguments proposés. L'utilisation d'une notation proche de celle utilisée dans la preuve inspirée par le texte de Liouville a pour objectif de renforcer la similarité entre les deux preuves. Mon hypothèse est que l'usage de cette preuve est susceptible de relancer les débats autour de la validité des inférences contenu dans la preuve adaptée du texte de Liouville.

Au niveau de la preuve inspirée par le cours de Cauchy, la forme logique de l'inférence sur laquelle j'ai insisté lors de l'analyse a priori est celle du principe de substitution. Je ne la détaille pas. Cette fois, le domaine d'interprétation naturel pour le langage de la preuve est déjà celui des suites. Comme je l'ai souligné plus haut dans l'analyse a priori, une difficulté importante de l'analyse de la validité de cette preuve est celle de la sélection des prémisses de l'inférence dont la conclusion est la convergence vers *e* de la série. L'idée principale de la preuve de recours est de proposer une argumentation qui utilise le principe de substitution dans un contexte où les conditions des théorèmes de convergence dominée ou de convergence monotone ne soient pas vérifiées.

Enoncé 2 :

On considère la suite définie par, pour entier naturel non nul *n*, $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$.

On a alors : $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$

Preuve de l'énoncé 2 :

Regardons ce qu'il se passe quand *n* vaut 10 :

$$\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{10+k} = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{20}$$

Regardons maintenant ce qu'il se passe si *n* vaut 100 :

$$\sum_{k=0}^{100} \frac{1}{100+k} = \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + ... + \frac{1}{200}$$

Si *n* vaut 1000 :

$$\sum_{k=0}^{1000} \frac{1}{1000+k} = \frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + ... + \frac{1}{2000}$$

On voit que chacun des termes de la somme tend vers 0 lorsque *n* augmente. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$ a donc pour limite 0 quand *n* tend vers l'infini.

Le principe de substitution intervient lors des deux dernières assertions de la preuve. Il s'agit d'ailleurs de l'essentiel de son contenu déductif. Comme pour la preuve de recours précédente, l'énoncé est faux et les étudiants sont en position de le relever. La suite w_n converge vers ln(2) mais on peut se rendre compte assez facilement que pour tout *n*, $w_n \geq 1/2$. Le calcul de la somme correspond par ailleurs à un calcul « classique » de limite à l'aide des sommes de Riemann[104]. Comme pour la preuve de recours précédente, mon hypothèse est que l'utilisation de cette preuve est susceptible de nourrir ou de préciser les débats autour de l'usage du principe de substitution en mettant en évidence le fait que son usage peut conduire à des preuves d'énoncés faux.

3.2.4 Présentation du déroulement de l'expérimentation

Avant d'expliciter les questions qui vont servir de guide à l'analyse a posteriori du corpus, je commence par décrire comment s'est déroulée l'expérimentation. Pour chaque groupe d'étudiants, une des deux preuves précédemment présentées et analysées leur été distribuée, accompagnée de la consigne suivante :

Première activité (10 à 20 min)

[104] En l'occurrence, le choix de cette preuve provient d'une expérience d'enseignement dans laquelle un de mes étudiants est intervenu pour exprimer son doute à propos de la possibilité qu'une somme de Riemann puisse converger vers autre chose que 0.

1. Situer historiquement le mathématicien dont il est question.

2. L'énoncé 1 vous paraît-il vrai ?

Deuxième activité (30 à 40 min)

1. Déterminer et mettre en évidence chacune des étapes de la preuve.

2. Analyser chacune des étapes de la preuve en cherchant si possible à les compléter et/ou les reformuler. Sont-elles complètes, rigoureuses, valides ?

3. La preuve est-elle valide ?

Troisième activité

1. Préparation de l'exposé (20 à 30 min): vous devez faire un compte rendu d'une dizaine de minutes. Vous veillerez à bien séparer dans votre exposé la présentation de la preuve, de votre analyse de celle-ci. Vous pouvez utiliser les support que vous souhaitez (transparents, posters, craies, etc.) et vous répartir les tâches comme vous l'entendez, dans la mesure où chacun participe à l'exposé.

2. Chaque groupe présente alternativement son travail (2 fois 15 min). L'autre groupe pose toutes les questions qu'il souhaite, pendant ou en fin d'exposé, afin de contrôler l'analyse qui a été faite par l'autre groupe.

L'objectif de la première activité est de favoriser la dévolution du problème. Il s'agit de susciter la curiosité des étudiants et leur prise de responsabilité en montrant à la fois le caractère historique (à travers la première question) et accessible (à travers la seconde question) des preuves qui sont présentées. Il est d'ailleurs assez probable qu'ils aient déjà entendu parler de Cauchy (notamment à travers les suites de Cauchy qui sont définies et utilisées dès la première année universitaire en mathématiques) et, peut-être, de Liouville. Une rapide biographie polycopiée ainsi que les ouvrages d'histoire des mathématiques Dugac

(2003) et de Hauchecorne & Surreau (1996) leur sont fournis à cette occasion. Les groupes d'étudiants de l'INSA (cf. ci-dessous pour une présentation des étudiants) ont également à leur disposition des ordinateurs avec un accès à Internet sur leurs bureaux. La deuxième activité est l'activité d'évaluation de la validité de la preuve. J'ai choisi de proposer trois questions pour favoriser une approche locale et précise de la preuve et des énoncés. La troisième activité consiste en la préparation d'un exposé et sa présentation à un groupe ayant travaillé sur l'autre preuve. L'impératif de communication permet d'abord d'augmenter l'enjeu social de l'analyse de la validité de la preuve puisque cette analyse va être soumise à l'appréciation des autres étudiants. Le moment de préparation de l'exposé peut également permettre de revigorer certains débats ou désaccords concernant les analyses réalisées lors de la deuxième activité. Ensuite, la communication peut aussi permettre d'enrichir le milieu par les questions des autres étudiants. Dans ce document, le minutage proposé l'est à titre indicatif. Dans les faits, les expérimentateurs ne l'ont pas respecté. Enfin, les expérimentateurs ont la possibilité, s'ils en perçoivent une potentielle utilité, de proposer aux étudiants de travailler sur les preuves de recours (cf. paragraphe précédent). Cette possibilité n'est pas annoncée aux étudiants lors de la présentation des activités.

Cette expérimentation a été proposée à deux groupes d'étudiants de Licence première année Math-Info (L1) de l'Université Claude Bernard - Lyon 1, à deux groupes d'étudiants de première année de Master mathématiques (M1) de cette même université et à quatre groupes d'étudiants de l'INSA de Lyon, également en première année, à la fin de l'année universitaire 2007/2008. Elles se sont déroulées en trois temps, un premier avec les étudiants de L1, un second avec ceux de M1 et un troisième avec les étudiants de l'INSA. Toutes les séances se sont déroulées se la base du volontariat. Les étudiants qui ont participé ont été sollicités par Thomas Blossier (pour ceux de l'université) ou par moi-même (pour ceux de l'INSA). Les étudiants de L1 ont formé un groupe de deux qui a travaillé sur la preuve inspirée par le texte Liouville (*N* et *M*) et un groupe de trois qui a travaillé sur l'autre preuve (*A1*, *A2* et *Y*). Pour cette session avec les étudiants de L1, les expérimentateurs sont Thomas Blossier (*T1*) et moi-même (*T2*)[105]. Les étudiants de M1 ont formé deux groupes de trois. *A*, *B* et *C* ont travaillé sur la preuve inspirée par le cours de Cauchy ; *E*, *F* et *G* ont travaillé sur celle issue du texte de Liouville. Ces étudiants ont de bons résultats en mathématiques, au moins cinq d'entre eux s'apprêtent à préparer l'agrégation, trois d'entre eux sont des étudiants de l'Ecole Normale

[105] Deux polices d'écriture différentes sont utilisées pour marquer la distinction entre les expérimentateurs et les étudiants.

Supérieure de Lyon. Les expérimentateurs sont les mêmes. Pour ce qui est des groupes de l'INSA de Lyon, les étudiants sont des étudiants de la filière FAS. Ils sont en première année du premier cycle. La filière FAS est une filière pratiquant une pédagogie active (pour plus de précisions voir Ney, Barrier, Freud & Hillion (2008)). Ces étudiants sont issus de lycées techniques ; ils sont assez peu habitués à l'usage du formalisme. Deux groupes de trois étudiants, (*L*, *J*, *Y*) et (*L*, *T*, *R*), ont travaillé sur le texte concernant la convergence de la suite, un groupe de trois (*C*, *M* et *Be*) et un groupe de quatre (*B*, *V*, *Bj* et *Ni*) sur l'autre preuve. Deux nouveaux expérimentateurs ($\mathbb{P}$ et $\mathbb{N}$) ont participé à cette nouvelle session de l'expérimentation afin qu'il y ait toujours un expérimentateur référent par groupe. Pour la préparation et la présentation des exposés, les groupes travaillant sur le même texte ont fusionné. Pour chaque session, les dialogues ont été enregistrés et transcrits. Ils figurent en annexe (annexes 17 à 30). Les exposés ont également été filmés. Cette expérimentation a permis un recueil d'un corpus de dialogues quantitativement important.

Le rôle des expérimentateurs est essentiellement un rôle de tuteur. Leur principale tâche est de s'assurer de la bonne compréhension des consignes et de la répartition de la parole. Ils posent éventuellement des questions s'ils estiment nécessaire de relancer les débats. Les expérimentateurs sont également susceptibles d'intervenir sur les questions mathématiques techniques concernant les calculs. Un texte comprenant une rapide description de leurs tâches leur a été présenté :

> « Première activité : Position de tuteur. Il ne donne pas de solutions, ni d'indices, mais précise si nécessaire ce qui est attendu, le sens des questions etc. Pour la preuve de type Cauchy, suggérer le passage à l'exponentielle si il y a un blocage avec la validité de l'énoncé. »

> « Deuxième activité : Position de tuteur. Il assure le bon déroulement du dialogue : aspects techniques (micro branché…), relance les discussions et essaye de faire en sorte que chacun s'exprime (pour un corpus le plus riche possible), répond aux questions qui concernent la nature de la tâche demandée et les aspects techniques. »

> « Troisième activité : Pendant la préparation, il s'assure de la lisibilité de la future présentation, propose des supports de communication sans intervenir sur le contenu. Pendant l'exposé, un observateur filme tandis que les autres assurent l'organisation des questions du groupe qui écoute (notamment en privilégiant les questions sur les aspects de quantifications et les difficultés associées). Quand il n'y a plus de questions, il pose des questions susceptibles de nourrir l'objectif de recueil sans porter de jugement sur les interventions des élèves. »

Formulation définitives des questions émergeant de l’analyse a priori

Dans cette analyse a priori, je ne décris pas de comportements attendus de la part des étudiants que ce soit au niveau de leur activité mathématique ou au niveau des réponses aux questions que je viens de formuler. Ce type d’analyse ne m’a pas paru nécessaire puisque le travail expérimental de la thèse n’a pas pour ambition de contribuer à la mise en place d’une situation d’enseignement ni de proposer une ingénierie didactique. Il s’agit plutôt d’une recherche exploratoire sur les pratiques des étudiants liées à la quantification dans l’enseignement supérieur. Les analyses a priori des deux preuves proposées aux étudiants m’ont permis de faire émerger plusieurs questions dont je fais une synthèse ci-dessous. Ces questions sont également motivées par les analyses épistémologiques effectuées lors des deux premiers chapitres de cette troisième partie. Elles me serviront de guide pour conduire l’analyse a posteriori du corpus. Leur formulation clôt l’analyse a priori.

Q1. Les étudiants repèrent-ils les imprécisions de raisonnement décrites de manière anachronique dans l’analyse a priori ?

Q2. Comment les étudiants comprennent-ils l’usage des lettres dans la preuve ? Repèrent-ils la structure logique des jeux d’intérieur d’arrière plan qui lui donne sens ? Quel usage font-ils du vocabulaire de la variation ?

Q3. Dans quelle mesure les contrôles sémantiques de la validité font-ils usage de la quantification ? Quelle est l’influence des jeux de description au cours de ces processus de contrôle ?

3.3 Analyse a posteriori

L’analyse a posteriori a été conduite en deux temps. D’abord, j’ai réalisé une lecture d’ensemble des transcriptions. Cette lecture m’a permis d’avoir une vue d’ensemble des productions des étudiants. J'ai réalisé des résumés rapides de chacun des travaux de groupes et de leurs exposés. Ces résumés tiennent compte de la problématique de cette partie et des questions énoncées ci-dessus. Pour autant, les réponses explicites aux questions de recherche qui ont été produites dans l'analyse a priori viendront plus tard. La fonction de ces résumés est de donner au lecteur un aperçu global du corpus. Evidemment, beaucoup de choses n'y apparaissent pas dans la mesure où je me suis restreint à n'utiliser qu'une douzaine de lignes pour des transcriptions qui font souvent plusieurs dizaines de pages. Dans un deuxième temps, j'ai entrepris une relecture des transcriptions dans l'intention plus précise de construire une réponse aux questions de recherche rappelées ci-dessus. Etant donné l'importance quantitative du corpus, la production de réponses systématiques à ces questions, pour chaque moment du corpus, ne m'a paru souhaitable. L'alternative choisie a été de sélectionner, pour chacune des trois questions ci-dessus et pour chaque session de l'expérimentation, quelques extraits de corpus et de m'en servir pour illustrer mes réponses.

3.3.1 Résumé des travaux des étudiants

- Groupe d'étudiants de L1 travaillant sur la preuve adaptée du texte de Liouville

Le travail d'analyse de la preuve (G-L1-L)[106] *:*

Un consensus assez rapide se fait autour du fait que l'énoncé est vrai. Plusieurs raisons sont évoquées : il a été vu en cours, il intervient implicitement dans certaines preuves, il est géométriquement intuitif. Puis, sous l'impulsion de $\mathbb{T}1$, les étudiants en construisent une preuve à partir du théorème des accroissements finis. L'analyse de l'équation générale suscite quelques discussions. Plus Précisément, la notation ε, pour une fonction de *h* pose problème (les étudiants n'explicitent pas la dépendance en *x*). Les étudiants démontrent finalement l'équivalence entre l'équation générale et le développement limité d'ordre un. Le « fait » que les ε_i convergent vers zéro est naturalisé ; il n'est jamais discuté. La technique consistant à introduire le maximum des ε_i est identifiée comme d'usage courant. Les étudiants identifient

[106] Voir l'annexe 17.

successivement la double dépendance en *m* de la somme des ε_i et *N* doute que l'on puisse conclure que la somme des ε_i converge vers zéro. Cette réticence est levée par l'intervention du maximum des ε_i dont la dépendance au nombre de termes de la somme n'est pas perçue. Enfin, les étudiants modifient la preuve en faisant intervenir la valeur absolue.

L'Exposé du groupe (E-L1-L)[107] *:*

M ayant été contraint de partir, *N* est seul pour présenter l'exposé. *N* commence par donner les étapes qui ont été utilisées dans leur analyse puis explique l'aménagement de la preuve qui a été fait en intégrant la valeur absolue. A plusieurs reprises, *N* se réfère au ε de l'équation générale pour argumenter le fait que le ε de la fin de la preuve converge vers 0. Un nouvel énoncé est alors introduit dans le milieu par les expérimentateurs (l'énoncé de recours). *A1*, *A2*, *Y* et *N* travaillent ensemble sur cet énoncé et sa preuve. Ils essaient de produire un contre-exemple. Pour cela, ils s'appuient d'abord sur une suite définie par $u_k = m$ où la lettre *m*, considérée ici comme une lettre de constante, est utilisée ailleurs comme une lettre de variable. Ils parviennent ensuite à construire un contre-exemple. *T1* et *T2* se servent de ce contre-exemple pour susciter un débat autour de la déduction conduisant à l'assertion de la convergence vers 0 du maximum ε de la preuve initiale. L'identité de notation entre le ε de l'équation générale et celui défini comme un maximum continue à influencer *N*.

- Groupe d'étudiant de M1 travaillant sur la preuve adaptée du texte de Liouville

Le travail d'analyse de la preuve (G-M1-L)[108] *:*

Pour ces étudiants, l'énoncé est vrai et ne fait pas question. L'équation générale ne pose pas non plus de problème. Le fait que les ε_i convergent individuellement vers zéro n'est pas discuté, cette propriété structure néanmoins les jeux de langage autour de la convergence de

---

[107] Voir l'annexe 18.

[108] Voir l'annexe 19.

ε. Une question émerge très vite : est-il possible de raisonner sur un nombre fini de ε_i puis de faire tendre *m* vers l'infini ? Une réponse résistante à cette question sera de considérer que le raisonnement est acceptable dans la mesure où le *h* de l'expression *f(b) – f(a)* = *h(*$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + ... + \varepsilon_m$*)* permet d'absorber le passage à l'infini par la relation *hm* = *b – a*. Les étudiants remarquent assez vite la double dépendance en *m* de $\max_{1 \le i \le m}\{|\varepsilon_i(m)|\}$. De nombreux échanges sont consacrés au débat autour de la validité de l'inférence de la convergence individuelle des ε_i vers 0 à celle de leur maximum. A un moment donné, *D*, *E* et *F* affirment leur accord avec ce raisonnement mais les positions des uns et des autres ne sont pas fermes. Les étudiants s'appuient alors sur plusieurs exemples. Pour les premiers, le maximum des ε_i se comporte effectivement comme les ε_i. Finalement *F* propose un contre-exemple. La mise en rapport du contre-exemple avec de l'énoncé fait alors débat.

L'Exposé du groupe (E-M1-L)[109] *:*

Les étudiants présentent la preuve et relèvent le problème au niveau de la conclusion concernant la convergence du maximum des ε_i. Par contre, la convergence individuelle des ε_i n'est pas discutée. Un contre-exemple est présenté. L'exposé est assez court. Les débats se poursuivent autour de questions épistémologiques.

- <u>Groupes d'étudiants de l'INSA travaillant sur la preuve adaptée du texte de Liouville</u>

Le travail d'analyse de la preuve du 1er *groupe (G1-INSA-L)*[110] *:*

Pour les quatre étudiants, l'énoncé ne fait pas de doute. Il est géométriquement intuitif. Par contre, ils ne se souviennent pas, ou de manière très confuse, l'avoir rencontré auparavant. L'équation générale est associée aux notions de dérivée et de tangente. Cette comparaison

---

109 Voir l'annexe 20.

110 Voir l'annexe 21.

occupe une place importante de leur travail. $\mathbb{T}2$ intervient pour rappeler la définition formelle de la dérivée et clore la discussion. Les étudiants parviennent à identifier cinq étapes mais rencontrent des difficultés pour comprendre la démarche générale de la preuve. Ils semblent par exemple considérer que la preuve montre que chaque différence $f(a+ih)-f(a+(i-1)h)$ est nulle. Ils discutent également de la validité de l'inférence de $\forall\varepsilon, f(b)-f(a)\leq\varepsilon$ à $f(b)-f(a)=0$. $\mathbb{P}$ recentre l'attention des étudiants sur la question de la convergence du maximum des ε_i à travers l'usage d'une métaphore (une échelle). *V* ne comprend pas l'insistance de $\mathbb{P}$. Finalement, les étudiants semblent parvenir à appréhender la double dépendance de ε. Ils ne remettent pas pour autant en cause la validité de la dernière inférence.

Le travail d'analyse de la preuve du 2ième Groupe (G2-INSA-L)[111] :

Le consensus sur la vérité de l'énoncé s'établit à partir de la référence au fait qu'une primitive de la fonction nulle est une constante. Il y a ensuite un long débat autour de la présence de la lettre ε dans l'équation générale. $\mathbb{T}2$, $\mathbb{T}1$ et $\mathbb{N}$ interviennent à ce sujet dans trois perspectives différentes (le lien entre taux d'accroissement et dérivée, les développements limités et la définition en ε,η de la dérivée). L'absence de valeur absolue (il s'agit de ma formulation) dans la preuve suscite également des réserves. La convergence des ε_i et de leur maximum est évoquée sans être remise en cause. Malgré les précisions de $\mathbb{N}$, La démarche générale de la preuve n'est pas perçue. Pour les étudiants, la preuve montre seulement que *f*(*a*) = *f*(*b*) ; elle ne montre pas que la fonction est constante sur *IR* (au plus ils considèrent qu'elle montre que la fonction est constante sur [a ;b]). Dans ces interventions, $\mathbb{N}$ utilise parfois explicitement la quantification. Ceci n'est pas pour l'essentiel pas repris par les étudiants, ou alors avec beaucoup de difficultés.

L'exposé commun des deux groupes (E-INSA-L)[112] :

---

[111] Voir l'annexe 22.

[112] Voir l'annexe 23.

Les étudiants commencent par présenter la manière dont ils ont décomposé la preuve en étapes. Ils pointent ensuite les difficultés que la preuve leur a posées. La première difficulté réside dans le passage d'une inégalité à une égalité en fin de preuve (les étudiants sont habitués à utiliser les valeurs absolues pour ce genre de pratiques). Ensuite, il vient la question du statut de chacune des instances de la lettre ε dans la preuve et de leur rapport. Par exemple, *B* et *C* considèrent qu'un maximum est un nombre donné qui ne varie pas contrairement à la fonction ε introduite par l'équation générale. Cette position s'oppose à l'identification également envisagée entre les deux usages de la lettre. Ensuite, *V* dessine une courbe au tableau puis $\mathbb{P}$ explicite la trame de la preuve pour provoquer une discussion autour de la déduction qui conclut à la convergence du maximum des ε_i. Cette discussion a lieu et reste ouverte. Par contre, la question de la convergence individuelle des ε_i n'est pas abordée. $\mathbb{P}$ conclut le débat en proposant un point de vue historique sur ces difficultés.

- <u>Groupe d'étudiants de L1 travaillant sur la preuve inspirée par le texte de Cauchy</u>

Le travail d'analyse de la preuve (G-L1-C)[113] *:*

Les étudiants semblent convaincus (notamment suite à un essai numérique) que l'énoncé est vrai. Ils repèrent la structure générale de la preuve mais ne perçoivent pas le caractère redondant de la preuve d'existence pour la limite de la suite. La question de la nature de la dépendance entre la lettre d'indice *n* et la lettre de variable *m* est posée. *Y* remarque que l'argument utilisé pour montrer la croissance peut-être complété en explicitant la présence d'un terme supplémentaire dans la somme entre deux valeurs consécutives. Les étudiants débattent ensuite du caractère rigoureux de la dernière déduction de la preuve. Le vocabulaire de la temporalité est utilisé. Pour *Y* et *A2*, l'argument n'est pas rigoureux car « en même temps » que les premier termes convergent, d'autres se « rajoutent ». Pour *A1*, ce phénomène ne pose pas problème. Il s'appuie parfois sur la forme particulière de la suite considérée pour défendre sa position.

---

[113] Voir l'annexe 24.

L'Exposé du groupe (E-L1-C)[114] *:*

Les étudiants présentent la preuve et explicitent les deux analyses contradictoires de la dernière inférence. Pour *Y* et *A2*, l'inférence n'est pas rigoureuse. Selon eux, l'argument sur la convergence des premiers termes de la somme ne permet pas de conclure sur les termes « qui se rajoutent après avoir fait tendre les premiers vers zéro » (je réinvestis leur vocabulaire). De manière générale, les étudiants utilisent une forme de temporalité dans la preuve. Pour *A1*, la preuve est satisfaisante. Il défend son point de vue en s'appuyant sur la nature de la suite considérée. Selon lui, les arguments de *Y* et *A2* ne sont pas pertinents puisque les termes qui se « rajoutent » peuvent être négligés. La preuve de recours est introduite dans le milieu par les expérimentateurs. L'ensemble des étudiants perçoit que l'énoncé est faux et que le principe de substitution ne peut pas s'appliquer pour cette preuve. Cependant, selon *A1*, la situation n'est pas la même que pour la première preuve. Finalement, la critique de *Y* est formalisée au tableau et le contre-exemple construit pour la preuve de recours est précisé.

- <u>Groupe d'étudiants de M1 travaillant sur la preuve inspirée par le texte de Cauchy</u>

Le travail d'analyse de la preuve (G-M1-C)[115] *:*

Les étudiants connaissent une preuve de l'énoncé reposant sur l'usage de la fonction exponentielle. Ils sont donc convaincus de sa vérité. Ils repèrent différentes étapes dans la preuve et expriment rapidement leur scepticisme au sujet de la dernière déduction. Ensuite, les étudiants contrôlent les arguments utilisés pour la preuve de la croissance (ils la complètent) et pour la majoration. Sous l'impulsion de *T2*, l'attention du groupe se porte alors sur la preuve du théorème « toute suite de réels croissante et majorée converge » qui nécessite une construction des nombres réels. La discussion se poursuit autour de la formalisation du concept de limite et par une approche plus historique de la preuve et de sa validité (les étudiants considèrent que la preuve est de Cauchy). Ils cherchent ensuite, et trouvent, un contre-exemple pour la dernière déduction. Ils travaillent enfin à des corrections de la preuve

[114] Voir l'annexe 25.

[115] Voir l'annexe 26.

reposant sur le formalisme en ε,η ou sur des théorèmes de convergence (monotone ou dominée). Pour conclure, T2 pose la question du rapport entre les lettres *n* et *m*. Cette question perturbe *A* et *B*.

L'exposé du groupe (E-M1-C)[116] *:*

Les étudiants présentent la preuve de manière assez précise. Ils relèvent trois « points négatifs » (il s'agit de leur vocabulaire). Le premier concerne le fait que Cauchy ne disposait pas d'une construction théorique suffisante pour justifier l'usage du théorème affirmant qu'une suite de réels croissante et majorée converge. Le second, en rapport étroit avec le premier, concerne l'absence de définition formelle pour la notion de limite (et a fortiori de borne supérieure). Enfin, les étudiants présentent leur contre-exemple concernant leur lecture de la dernière déduction de la preuve. La discussion se porte ensuite sur la possibilité d'une autre interprétation de la preuve, incorporant les étapes de majoration et de croissance, qui permette d'envisager l'usage d'un théorème de convergence du type du théorème de convergence dominée. Enfin, les étudiants discutent de la pertinence de s'appuyer sur des données intuitives mais dont les fondements sont incertains dans le cadre d'un enseignement.

- <u>Groupes d'étudiants de l'INSA travaillant sur la preuve inspirée par le texte de Cauchy</u>

Le travail d'analyse de la preuve du 1^er^ groupe (G1-INSA-C)[117] *:*

Les étudiants utilisent plusieurs moyens de décisions pour se positionner sur la valeur de vérité de l'énoncé (Maple, Calculatrice…). Ces moyens s'accordent, l'énoncé est vrai. T2 anime ensuite l'analyse du rappel, il explique notamment que *e* est un nom donné pour la limite de la suite. Au niveau de l'analyse de la preuve principale, les étudiants sont troublés par la lettre d'indice *n*. En particulier, la question du rapport de cette lettre avec la lettre de

[116] Voir l'annexe 27.

[117] Voir l'annexe 28.

variable m émerge. Leur investissement dans le travail est variable, ils font beaucoup de digressions (mathématiques ou non). Ils ne relèvent pas la redondance de la partie de la preuve concernant l'existence de la limite. Par contre, accompagnés par $\mathbb{T}1$, ils repèrent le fait que le nombre de termes de la somme dépend de la variable m, comme chacun des termes de la suite. Cependant, et malgré les invitations de $\mathbb{T}1$, la dernière inférence de la preuve leur paraît convaincante et ils ne la discutent qu'assez peu.

Le travail d'analyse de la preuve du 2ième groupe (G2-INSA-C)[118] *:*

Dans un premier temps, les étudiants pensent que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 1. Ils changent d'avis sous l'impulsion d'un calcul formel réalisé avec Maple et d'essais numériques. $\mathbb{T}1$ les accompagnent ensuite dans l'écriture d'une preuve alternative (qui utilise l'écriture exponentielle). Au cours de l'analyse, une forte attention est portée sur le contrôle des calculs. Les étudiants ne repèrent ni la redondance de la partie concernant l'existence de la limite ni le fait que l'argument sur la croissance de $(u_n)_{n\geq 1}$ est incomplet. Suite à une intervention de $\mathbb{T}2$, les questions de dépendance sont explicitées. Les étudiants parviennent à une expression informelle relativement précise des questions concernant la convergence de la suite. Ces questions font l'objet d'un bref débat sans que les étudiants ne parviennent réellement à se positionner. Au niveau de la quantification, les étudiants confondent parfois les dépendances en n et m dans l'expression $v_{n,m} = C_m^n \dfrac{1}{m^n}$.

L'Exposé commun des deux groupes (E-INSA-C)[119] *:*

Les étudiants présentent brièvement la preuve. Il y a un consensus parmi eux (ils sont six) pour dire que la preuve est valide. Ils relèvent l'insistance des expérimentateurs à propos de la validité mais ne parviennent pas à identifier de difficultés particulières. Un étudiant remarque que la preuve n'utilise pas la syntaxe usuelle de la quantification. Il y a ensuite quelques échanges sur le comportement de la lettre d'indice n dans la preuve. Les expérimentateurs

[118] Voir l'annexe 29.

[119] Voir l'annexe 30.

introduisent dans le milieu la preuve de recours. Les étudiants perçoivent le fait que l'énoncé est faux. Encouragés par $\mathbb{T}2$ et $\mathbb{P}$, ils parviennent à identifier le pas de déduction qui est commun avec la preuve inspirée par le texte de Cauchy. Ce pas de déduction est discuté. Il est notamment comparé à l'habitude acquise de calculer terme à terme les limites des sommes finies.

3.3.2 Analyse détaillée du corpus

Je commence maintenant la deuxième phase de l'analyse a posteriori dans laquelle j'essaye de répondre à chacune des questions Q1, Q2 et Q3 qui ont été formulées à l'issue de l'analyse a priori. Les questions sont abordées individuellement et successivement. L'analyse porte d'abord sur la partie du corpus qui concerne les dialogues des étudiants confrontés à la preuve adaptée du texte de Liouville. Elle se concentre ensuite sur les dialogues concernant la preuve inspirée du texte de Cauchy. Afin de faciliter la lecture, chaque phénomène repéré fait l'objet d'une rapide synthèse.

Concernant la preuve adaptée du texte de Liouville

- Q1 : les étudiants repèrent-ils les imprécisions de raisonnement décrites de manière anachronique dans l'analyse a priori ?

Je commence par la première question concernant le repérage par les étudiants des pas de déduction qui ont été identifiés comme imprécis (d'un point de vue anachronique) au cours de l'analyse a priori. Au niveau du texte adapté de la preuve de Liouville, cette question concerne particulièrement deux énoncés. Le premier est un énoncé implicite. Il s'agit de celui qui affirme la convergence individuelle des ε_i vers 0. Cet énoncé n'est pas formulé dans la preuve proposée aux étudiants mais peut-être vu comme un élément important de la preuve. Il n'est repéré comme problématique par aucun des groupes. Cependant, l'objectif de cette expérimentation n'était pas spécifiquement d'observer les pratiques des étudiants par rapport à cette déduction. Je m'intéresse plutôt à la déduction impliquant le maximum d'un ensemble de suites convergeant vers 0 pour des raisons que j'ai explicitées au cours de l'analyse a priori. Les expérimentateurs n'ont donc pas cherché à recentrer l'attention des étudiants sur le problème de la convergence individuelle des ε_i si bien que la question n'est pas abordée par les groupes. La validité de cet énoncé ne fait l'objet d'aucun de jeu de langage spécifique. Pour autant, l'énoncé de la convergence individuelle des ε_i structure plusieurs jeux de langage, en particulier les jeux de langage qui se préoccupent de la convergence du maximum des ε_i. Voici deux exemples :

> C : Elle est vachement amplifiée la majoration en fait, celle-là. Elle est vachement imprécise.
>
> Be : Pas forcément.
>
> C : Ben si tes ε, ils sont tout petits. On prend quand même le plus grand de tous et on multiplie *m* fois.
>
> Be : Ouais mais si le plus grand de tous c'est zéro euh… Ca fera quand même zéro. Le plus grand, c'est pas ce qui me dérange le plus.
>
> (*G2-INSA-L*, 500-503, annexe 22)

> T1 : Est-ce qu'ils sont vraiment bien définis ces ε_i quand…
>
> D : Quand il y en a une infinité ?
>
> T1 : Quand *h* tend vers zéro justement.
>
> D : Ah.
>
> E : Oui, ils tendent vers zéro.
>
> D : Oui, quand *h* tend vers zéro parce que c'est la dérivée quoi.
>
> (*G-M1-L*, 166-171, annexe 19)

Synthèse 1. Les étudiants utilisent le fait, tacite dans la preuve distribuée, que les ε_i convergent individuellement vers zéro. Cette assertion n'est pas discutée, elle est considérée comme évidente.

Concernant l'énoncé de la convergence vers 0 du maximum des ε_i, la situation est plus variée. Au niveau des groupes de l'INSA, Les étudiants ne l'identifient pas comme méritant une attention particulière. Pour le deuxième groupe, la question de sa validité est simplement évoquée à deux reprises sans être réellement discutée. Elle ne fait pas débat (voir par exemple le passage cité ci-dessus, *G2-INSA-L*, 500-503 ou alors *G2-INSA-L*, 229-233[120]). Au niveau du premier groupe, la situation est différente dans la mesure où l'expérimentateur $\mathbb{P}$ fait en sorte que la question arrive au centre des débats en suggérant son caractère problématique[121] :

> $\mathbb{P}$: Hein, mais y a pas quelque chose qui, comment dire qui n'est pas totalement, totalement clair ?
>
> V : Là, ce que vous voulez dire c'est qu'il y a quelque chose qui manque dans sa démonstration ? C'est ça ?
>
> $\mathbb{P}$: C'est la question que je pose.
>
> (*G1-INSA-L*, 1089-1091, annexe 21)

Suite à ces interventions, deux attitudes opposées émergent, celle de *Bj* d'un côté et celle de *V* et *B* de l'autre. Selon *Bj*, il est bizarre que la somme de « plein de trucs tout petit » puisse tendre vers zéro (*G1-INSA-L*, 1150, annexe 21). Par contre, *Bj* ne discute pas spécifiquement de l'argument de Liouville lequel utilise dans sa preuve le fait qu'il y a un facteur *h* devant la somme des ε_i (ce qui lui permet l'usage de l'astuce qui consiste à utiliser l'égalité $hm = b - a$ et le passage au maximum pour faire disparaître la somme).

> Bj : Mais ce qu'il fait c'est la somme d'une infinité de ε doit tendre vers zéro. C'est un peu contradictoire quoi. La somme d'une « infinité » doit tendre vers zéro.
>
> (*G1-INSA-L*, 1277, annexe 21)

Pour les deux autres étudiants, le passage sur lequel $\mathbb{P}$ insiste est non problématique. Par exemple, *V* dit ne pas comprendre l'« entêtement » de $\mathbb{P}$ à ce propos :

> V : Moi ça me paraît fort logique, mais je comprends pas pourquoi on s'entête sur un point sur lequel moi, je me serais pas entêté. Enfin, qui m'aurait pas posé de problème.
>
> (*G1-INSA-L*, 1252, annexe 21)

La question de la convergence du maximum des ε_i n'est pas non plus centrale dans le travail du groupe d'étudiants de L1. A la manière de *Bj*, les étudiants de ce groupe relève néanmoins le fait que le nombre de termes de $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_m$ augmente avec *m* et que ce phénomène rend discutable la convergence vers 0 de cette somme. Par contre, les étudiants ne semblent plus percevoir cette dépendance après l'introduction du maximum ε des fonctions ε_i. Comme je l'ai fait remarqué dans l'analyse a priori, le *m* disparaît de la syntaxe de la

---

[120] Annexe 22.

[121] Voir aussi (*G1-INSA-L*, 1021; 1049).

preuve lorsque le produit *hm* est remplacé par *b* - *a* puisque la notation choisie pour le maximum des ε_i ne fait pas apparaître de dépendance particulière :

> M : Parce que je dis par exemple ici, comme il y a une, une somme de valeurs qui tend vers zéro si *m* tend vers l'infini on… C'est pas sûr que ça tend vers zéro, si ?
>
> (*G-L1-L*, 533, annexe 17)
>
> T1 : Le bémol que vous aviez, c'est de dire que la somme… C'est ça ? Ici, c'est pas parce que vous avez ε_1, ε_2, … Chaque ε_i qui tend vers zéro c'est ça, que *m* fois ces ε, non que comme il y en a *m*, que la somme tende vers zéro. C'est ça que vous aviez souligné tout à l'heure.
>
> N : Oui... Mais oui, je suis convaincu maintenant parce que là, en fait, il utilise ça et ça c'est vrai pour tout *m* même si *m* tend vers l'infini, *hm* ça fait bien ça.
>
> (*G-L1-L*, 560-561, annexe 17)

Synthèse 2. Pour les étudiants de première année (L1 et INSA), la question de la convergence vers 0 du maximum des ε_i ne fait pas débat. Au plus, les étudiants émettent des doutes sur la convergence de la somme des ε_i mais l'astuce de Liouville qui consiste à utiliser le passage au maximum et l'égalité *hm* = (*b* - *a*) parvient à les convaincre.

Je termine ce paragraphe concernant Q1 par le travail des étudiants de M1. Leur prise en compte de la difficulté est rapide. Pour autant leur position relative à la validité de la déduction va évoluer au cours du travail. Dans un premier temps, l'argument de Liouville qui conduit à éliminer la dépendance en *m* de la syntaxe leur paraît convaincant :

> E : Le seul endroit où ça pourrait euh…
>
> D : Merder c'est quand ça passe à l'infini.
>
> E : C'est ça, c'est quand… Mais même pas parce que *hm* c'est toujours égal à (*b* - *a*) donc euh, ça pose pas de problème.
>
> D : Non.
>
> E : De passer à la limite, on pourrait avoir une forme indéterminée ou quoi…
>
> D : Mais là, là regarde, on prend la plus grande de toutes ces quantités, c'est ça qui est marrant, c'est la plus grande, mais c'est cool parce que c'est un max, mais si ça tend vers l'infini…
>
> E : Mais ils tendent tous vers zéro.
>
> D : Ouais.
>
> E : Donc la plus grande tend forcément vers zéro.
>
> D : Ouais, ouais je suis d'accord. Enfin, la somme tend vers zéro, ouais.
>
> (*G-M1-L*, 40-49, annexe 19)

L'arrivée d'un étudiant en retard, *F*, remet en cause le consensus qui commençait à s'établir (*G-M1-L*, 107, annexe 19) entre *D* et *E* (même si *D* continuait à exprimer quelques doutes). *F* considère que la dépendance par rapport au nombre de termes persiste après l'introduction du maximum (*G-M1-L*, 113, annexe 19). A partir de ce moment-là, la double dépendance en *m* de $\varepsilon = \max_{1 \le i \le m}\{|\varepsilon_i(m)|\}$ est clairement perçue par chacun. D'ailleurs, les étudiants choisissent de marquer la dépendance de ε par rapport au nombre de termes de la somme en utilisant une notation du type $\varepsilon(m)$. Après un premier temps de discussion, les trois étudiants semblent plutôt convaincus de la validité de la déduction (*G-M1-L*, 277-280, annexe 19). La validité de l'inférence est ensuite évaluée à partir de l'utilisation de plusieurs exemples. Pour les premières suites choisies, $\varepsilon(m)$ converge effectivement vers zéro. Finalement *F* parvient à trouver un contre-exemple. Le consensus autour du contre-exemple, et par extension autour de l'invalidité de l'inférence analysée par les étudiants, est assez long à se mettre en place.

Synthèse 3. Les étudiants de M1 repèrent rapidement le caractère problématique de la déduction concernant la convergence du maximum des ε_i. Ils ont des débats autour de la question de sa validité. Ils finissent par produire un contre-exemple.

- Q2. Comment les étudiants comprennent-ils l'usage des lettres dans la preuve ? Repèrent-ils la structure logique des jeux d'intérieur d'arrière plan qui lui donne sens ? Quels usages font-ils du vocabulaire de la variation ?

Je poursuis l'analyse a posteriori par l'étude de l'interprétation que font les étudiants de l'usage des lettres dans la preuve. Je commence ce travail par l'analyse de la manière dont les étudiants perçoivent le premier usage de la lettre ε, lorsque celle-ci intervient dans l'équation générale « *f(x+h) - f(x) = h(f'(x) +* ε *) avec* ε *qui tend vers 0 quand h tend vers 0* ». Dans l'enseignement supérieur contemporain, l'utilisation de la lettre ε pour dénoter une fonction est plutôt inhabituelle. Le plus souvent, cette lettre intervient pour dénoter des nombres réels. Un exemple, bien connu des étudiants, est l'usage de la lettre ε dans les démonstrations concernant les limites de suites ou de fonctions. En ce qui concerne la notation des fonctions en Analyse réelle, l'usage est plutôt de faire apparaître l'argument entre parenthèse après la lettre de fonction (on notera par exemple $\varepsilon(h)$ une fonction qui converge vers 0 quand h tend vers 0). Comme je le montre dans le travail épistémologique de cette partie, ce type de distinction entre les fonctions et leurs arguments ne fait pas partie des éléments fondamentaux de la plupart des travaux en Analyse au XIXième siècle. Ceci contribue à expliquer les choix de notation de Liouville. Après un moment de réflexion, les étudiants de L1 parviennent à réinterpréter l'équation générale dans un langage qui leur est familier. Ils identifient la lettre ε comme une lettre de fonction :

> M : Parce qu'en fait, c'est une fonction. Elle est pas fixée, c'est ça qui est un peu… Enfin, quand il écrit, tu vois il écrit ε, en fait c'est une fonction.
>
> (*G-L1-L*, 302, annexe 17)
>
> N : En fait, t'as vu c'est un peu… Parce que eux, ils écrivent ça avec ε alors que c'est une fonction.
>
> (*G-L1-L*, 345, annexe 17)

La proposition « *avec ε qui tend vers 0 quand h tend vers 0* » va alors structurer leur usage de la lettre ε dans le reste de la preuve (y compris leurs usages des lettres ε_i) si bien que *M* et *N* considéreront comme acquis la convergence vers 0 des ε_i (*G-L1-L*, 419) mais aussi celle de leur maximum ε :

> T1 : Du coup, le ε il tend bien vers zéro ? [*T1* parle du maximum des ε_i]
>
> M : Ouais, ouais. C'est ça, parce que c'est, si on le réécrit, en fait, si on le réécrit avec nos connaissances ça fait euh [*M* fait référence à leur interprétation de l'équation générale comme un développement limité d'ordre 1] …
>
> N : Oui, il tend vers zéro si on suppose que ça, c'est vrai là… L'équation générale.
>
> M : Si y a o(*h*)/*h*… Enfin pour nous, d'après ce qu'on a vu, c'est o(*h*)/*h* et donc par définition, ça tend vers zéro.
>
> (*G-L1-L*, 565-568, annexe 17)

Dans le passage précédent, *N* et *M* font référence aux propriétés de l'équation générale pour traiter une question de l'expérimentateur concernant la convergence de la fonction $\varepsilon(m,m) = \max_{1\le i\le m}\{|\varepsilon_i(m)|\}$. Autrement dit, la spécificité des différents usages de la lettre ε n'est pas prise en compte dans leur analyse de la preuve. Plus précisément, la référence à l'assertion « *avec ε qui tend vers 0 quand h tend vers 0* » prime sur la prise en compte de la spécificité des ces différents usages. Ce phénomène a été très résistant, aussi bien dans le travail des étudiants de L1 que dans celui des étudiants de l'INSA. Je donne ici un exemple issu de chacun des exposés des étudiants en première année :

T2 : En tout cas, est-ce que, pour qu'on passe peut-être, est-ce que c'est clair que a priori dans la preuve de Liouville, le maximum là, il faudrait un argument pour dire que le maximum, il tend vers zéro ?

A1 : Hum, hum.

Y : Ouais, ouais, faudrait ouais…

A1 : Ouais donc euh…

N : Ben non parce que le maximum, il est défini comme euh, il est défini euh… Comme tendant vers zéro quel que soit, si on l'écrit ε c'est o(h)/h, par définition il va tendre vers zéro.

(*E-L1-L*, 356-360, annexe 18)

T1 : Le ε en bas, c'est le même ε que celui d'en haut ?

C : Parce qu'ils mettent que ε tend vers zéro quand *h* tend vers zéro.

B : Ben oui.

C : Donc si on fait tendre *h* vers zéro, ε va tendre vers zéro quoi.

T1 : ε dans l'inéquation du bas là $f(b)$ - $f(a)$ inférieur ou égal $(b-a)\varepsilon$. Quel est le rapport entre ce ε et celui du haut ?

B : Ben on se sert. Ah non, euh non.

C : Celui-là, là ?

B : Ouais ben si, c'est celui-là quoi. C'est le même.

(*E-INSA-L*, 54-61, annexe 23)

Pour leur part, les étudiants de M1 n'ont pas perçu les spécificités de la quantification implicite lors de l'usage des lettres ε_i par rapport à celles concernant le ε de l'équation générale. Ceux-ci ont néanmoins clairement distingué les deux usages de la lettre ε (sans qu'une discussion à ce sujet ne soit nécessaire).

Synthèse 4. Les étudiants de première année se sont servis de l'assertion associée à l'équation générale « *avec* ε *qui tend vers 0 quand h tend vers 0* » comme d'une assertion valable pour chaque occurrence de la lettre ε. Ce phénomène a primé sur la prise en compte de la spécificité de la quantification sous-jacente aux différents usages. Ce phénomène a été résistant et commun aux trois groupes d'étudiants de première année.

Pour analyser plus finement ce phénomène, je vais essayer de décrire un peu plus dans le détail les difficultés d'interprétation de l'équation générale chez les étudiants de l'INSA. Les interrogations sur la nature de cette lettre ont occupé une place quantitativement très importante dans le travail du deuxième groupe des étudiants de l'INSA. Elles commencent de la manière suivante :

C : Le ε, il vient d'où, en fait, dans l'équation générale dont il parle ? Enfin moi je sais pas, je connaissais, j'aurais dit que ça faisait *h* fois f'(x)…

M : ε c'est une petite valeur, je pense. Non ?

Be : Ouais, ben oui.

(*G2-INSA-L*, 137-139, annexe 22)

La question de la nature de ce ε sera au centre des débats de ce groupe jusqu'au alentour de l'assertion 570. Au cours de ces débats, les étudiants ne semblent pas percevoir de distinction de nature entre la fonction $h \to (f(x+h) - f(x))/h$ et le nombre dérivé $f'(x)$:

Be : En fait, le truc que nous on a appris, c'est euh… La même sans le ε.

C : Oui.

(*G2-INSA-L*, 222-223, annexe 22)

N : Sans ε tu dis, c'était quoi la formule ? Justement c'est quoi, celle que vous connaissez vous ?

C : Ben c'est *f*(*x*+*h*) - *f*(*x*) sur *x* + *h* - *x* égal à *f'*(*x*). C'est ça, la formule.

(*G2-INSA-L*, 299-300, annexe 22)

Dans ces conditions, l'explication de la lettre ε comme une notation pour une fonction représentant la différence entre le taux d'accroissement en un point de *f* et la limite de ce taux d'accroissement au même point est difficile à comprendre. Des interprétations alternatives sont présentées par les étudiants. Par exemple, *C* fait référence à plusieurs reprises à un coefficient de précision (ou d'imprécision) du calcul (*G2-INSA-L*, 217, 405 ou 469). A d'autres moments du débat, *C* mobilise la définition en $\varepsilon - \delta$ de la dérivée (*G2-INSA-L*, 199 ou 337). Au niveau des expérimentateurs, *T1* et *T2* sont intervenus dans le sens d'une interprétation fonctionnelle de ε. De son côté, *N* a explicité la définition en $\varepsilon - \delta$ de la dérivée. Cependant, la situation restera confuse jusqu'à la fin des discussions et les interventions des étudiants à ce propos se concluent par :

C : En fait, c'est ça quoi, on prend un ε qui permet l'égalité, qui est suffisamment petit pour permettre l'égalité… Enfin suffisamment proche de…

(*G2-INSA-L*, 570, annexe 22)

Le statut de la lettre ε reste donc très instable, les étudiants ne parviennent pas à situer les aspects de quantification qui sont associés à la manipulation de cette lettre. Pour l'autre groupe d'étudiants de l'INSA, la situation est également confuse :

T2 : C’est l’équation générale de quoi ça ?

V : Justement, on sait pas.

Bj : On essaye de trouver, de savoir ce que c’est.

T2 : D’accord.

B : On se demande si c’est pas la dérivée, mais c’est pas sûr.

Ni : Ca ressemble un peu à la dérivée, puis avec le ε, ça ressemble un peu à la limite.

Bj : Ouais, ça ressemble un peu à tout.

Ni : On est un peu paumé du coup.

(*G1-INSA-L*, 438-445, annexe 21)

Dans ce contexte, l’utilisation systématique de la propriété « *ε tend vers 0 quand h tend vers 0* » comme élément structurant de tous les jeux de langage faisant intervenir la lettre ε (« B : si ils ont le même nom », *E-INSA-L*, 66, annexe 23) est un moyen de répondre à leurs difficultés sans pour autant recourir aux outils de la quantification qu’ils ne maitrisent pas. Pour conclure au sujet de l’interprétation des usages de la lettre ε, les étudiants de première année (de l’INSA et de L1) ne sont globalement pas parvenus à situer les jeux d’arrière plan donnant leur signification aux usages de cette lettre (par ailleurs plutôt complexes). Plus précisément, les aspects délicats de quantification, en particulier les aspects qui concernent la question de la convergence du maximum ε des fonctions ε_i ont été masqués par la référence à l’assertion « *ε tend vers 0 quand h tend vers 0* » considérée comme structurante pour les jeux de langage, indépendamment du statut logique de la lettre ε.

Synthèse 5. Les étudiants de l’INSA ont des difficultés importantes pour repérer le statut logique de la lettre ε dans l’équation générale. Ce contexte contribue à expliquer le recours systématique à l’assertion « *ε tend vers 0 quand h tend vers 0* ». Il s’agit d’un moyen de contournement de cette difficulté logique.

Je propose maintenant d’étudier un passage concernant l’activité des étudiants de L1. Il s’agit des débats qui font suite à l’introduction par les expérimentateurs d’un énoncé et de sa preuve, qualifiée dans l’analyse a priori de preuve de recours. L’extrait de transcription étudié correspond aux assertions (*E-L1-L*, 76-214, annexe 18). L’énoncé introduit affirme que pour toutes les suites de réels positifs $(u_n)_{n\geq 1}$, $S_m/m^2 = (u_1+u_2+...+u_m)/m^2 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. La preuve repose sur l’introduction de suites $\varepsilon_k = u_k/m$ et de leur maximum ε. On peut alors montrer que $S_m / m^2 \leq \varepsilon$. La preuve utilise l'assertion « ε *tend vers 0 quand m tend vers l'infini* » pour conclure. Comme évoqué dans l'analyse a priori, cet énoncé et sa preuve avaient été préparés pour susciter une éventuelle relance des débats autour de la question sur la convergence du maximum des ε_i. Les expérimentateurs ont décidé de l'introduire dans le milieu puisque la complexité du problème a été masquée dans le travail préalable des étudiants de L1 par l'identification des deux instances de la lettre ε. Les deux groupes d'étudiants sont invités à prendre part à la lecture et à l'évaluation de cette nouvelle preuve. La consigne donnée est de s'intéresser à la vérité de l'énoncé puis à la validité de sa preuve. Au cours de ce travail, *N* repère très vite que l'énoncé est faux. Je m'intéresse maintenant au processus de construction d'un contre-exemple par les étudiants et aux questions de quantification afférentes. Voici la manière dont *N* s'exprime pour expliquer la raison pour laquelle il considère que l'énoncé de la preuve de recours est faux :

> N : Parce que… ben je suis pas sûr, par exemple, si tu prends, mettons, tu remplaces u_m par euh, m^2 mettons, enfin tu sais $1^2 + 2^2 + 3^2$, tu vois ce que je veux dire ?
>
> Y : Hum, hum.
>
> N : Le plus grand des u_m ça va être m^2, le plus grand ça va être… Si tu prends ε… Le plus grand des ε ça va être *m*.
>
> (*E-L1-L*, 88-90, annexe 18)

Dans sa première intervention, *N* propose de remplacer u_m par m^2. Son idée est vraisemblablement de parvenir à une somme S_m, telle que pour tout *m*, $S_m \geq m^2$. Un moyen pour parvenir à une telle somme est de se servir de la suite définie par, pour tout *k*, $u_k = k^2$. L'expression de *N* « enfin tu sais $1^2 + 2^2 + 3^2$, tu vois ce que je veux dire ? » donne l'impression qu'il s'agit de le la construction mathématique qu'il envisage. Cependant, il y a ici quelque chose de l'ordre du paradoxe de l'ostension (cf. partie 2, fin du chapitre 3) dans la mesure où la stabilisation collective de l'objet auquel *N* semble se référer nécessitera un long débat. Cette situation est liée à une difficulté autour de la manipulation des lettres et des processus de quantification associé. On peut la voir émerger dès l'affirmation suivante de *N*, selon qui « le plus grand des u_m, ça va être m^2 ». Dans cette phrase, *N* utilise une même lettre pour jouer deux rôles distincts (la variable *m* universellement quantifiée et une lettre d'indice *k* dans l'assertion $\forall m, \max_{1 \leq k \leq m} u_k = m^2$). Par la suite, *A1* propose à son tour une méthode pour la construction d'un contre-exemple :

A1 : Ben tu prends, tu prends le contre-exemple, tu prends une suite ou le terme ça fait *m*, tu fais *m*, *m*, *m*, *m*, … Ça fait…

(*E-L1-L*, 98, annexe 18)

Y : [à *A1*] Tu prends S_m égal quoi ?

A1 : Quoi ?

Y : Tu pose S_m … Oui, oui… C'est bon, t'as raison.

A1 : Je pose S_m égal la somme de 1 euh… de 1 à *m* de *m*.

Y : Hum, hum.

A1 : Donc ça fait m^2.

N : Ouais si, ça fait m^2.

A1 : Donc ça fait 1, donc c'est faux…

(*E-L1-L*, 111-118, annexe 18)

Dans cette approche, l'idée est d'utiliser le fait que, pour tout *m*, $\frac{m+m+...+m}{m^2}=\frac{m^2}{m^2}=1$. *A1* souhaite définir une suite $(u_k)_{k\geq 1}$, qui soit constante et dont tous les termes soient *m* (*E-L1-L*, 149). Ceci correspond à la formalisation, pour tout *k*, $u_k = m$ dans laquelle *m* est une lettre de constante et *k* une lettre de variable universellement quantifiée (*E-L1-L*, 128; 180, annexe 18). Cette suite ne fournit pas de contre-exemple dans la mesure où dans l'énoncé « pour tout *m*, $\frac{m+m+...+m}{m^2}=\frac{m^2}{m^2}=1$ », la lettre *m* possède le statut de variable universellement quantifiée pour chacune de ses occurrences. Bien que cela soit mathématiquement très clair (pour quelqu'un de suffisamment familier avec ce contenu mathématique), il me semble intéressant de préciser l'argument en explicitant le jeu dialogique correspondant. Dans le tableau ci-dessous, le proposant entreprend de nier l'assertion $S_m / m^2 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ en montrant que l'on peut trouver des entiers naturels *m* aussi grand que l'on veut pour lesquels $S_m / m^2 = 1$.

Axiomes : $\forall k, u_k = m$ (Ax1), $\forall m, \frac{m+m+...+m}{m^2}=1$ (Ax2)

	Opposant	Proposant

A		$\forall n \exists m, m \geq n \wedge \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_m}{m^2} = 1$
B	? L’opposant attaque l’universel de *A* et choisit la lettre *n*	
C		? Le proposant attaque l’universel de (Ax2) et reprend la lettre *n* introduite en *B*.
D	$\frac{n + n + \ldots + n}{n^2} = 1$	
E		? Le proposant attaque *n* fois l’universel de (Ax1) avec *k*=1 ; *k*=2 ; … ; *k*=*n*
F	$u_1 = m$; $u_2 = m$; … ; $u_n = m$	

Pour pouvoir montrer l’existence d’une stratégie gagnante à partir de ce tableau, il faudrait que le proposant puisse réutiliser, à travers les propriétés de l’égalité et des opérations sur un corps, les assertions que fait l’opposant en *F* et en *D*. Pour que cela soit possible, il est nécessaire que la lettre choisie par l’opposant en *B* coïncide avec la lettre de constante donnée par l’axiome (Ax1). Or, le choix de la lettre *n* en *B* est de la responsabilité de l’opposant et celui-ci n’a pas intérêt d’utiliser la lettre introduite par l’axiome (Ax1). D’autre part, le choix de la lettre *m* qui intervient en *F* structure le jeu étudié (elle est donnée par un axiome). Il n’est donc pas envisageable de le modifier en cours de jeu pour le faire correspondre au choix de l’opposant en *B*. Ce changement entraînerait une modification des règles du jeu en cours de partie. Le proposant n’a donc pas de stratégie gagnante.

Synthèse 6. Dans le processus de construction d’un contre-exemple qui fait suite à l’usage de la preuve de recours par les expérimentateurs, les étudiants de L1 utilisent à plusieurs reprises une même lettre dans des situations où les règles des jeux logiques d’arrière plan ne le permettent pas.

Pour poursuivre cette analyse, voici deux extraits issus des débats des étudiants à propos de la proposition de contre-exemple de *A1* :

Y : Non, non, parce que ça va pas marcher ça… *m*, *m*, *m*, *m*, … Ca va pas marcher, ça fait m/m^2. Puis, t'as pas de suite, tu peux pas créer une suite qui change au fur et à mesure.

(*E-L1-L*, 99, annexe 18)

Y : Non, non, parce que tu peux pas prendre ta suite qui fait *m*, *m*, *m*…

A1 : Pourquoi pas ?

Y : Parce que, parce que la suite elle peut pas changer au fur et à mesure du temps…

A1 : Oui, mais…

Y : La suite ben… Posons $m = 1000$. Et ben, m^2 il va tendre vers plus l'infini mais la suite, elle va pas pouvoir faire plus l'infini plus plus l'infini parce qu'elle est posée la suite.

(*E-L1-L*, 103-107, annexe 18)

Dans cet extrait, et plus largement dans les interactions qui suivent, les étudiants font usage du vocabulaire du temps et du changement. De manière générale, ce type de vocabulaire a été relativement peu utilisé dans cette partie de l'expérimentation concernant la preuve adaptée à partir du cours de Liouville. Mis à part quelques usages ponctuels du verbe « varier » et du verbe « fixer », l'essentiel de cette pratique se trouve autour du problème présenté ci-dessus. Concernant les extraits choisis, il me semble que le choix de ce lexique permet à *Y* d'exprimer un point de vue que j'ai exprimé ci-dessus à travers le vocabulaire de l'approche dialogique. Par exemple, on peut comprendre les arguments « elle est posée la suite » ou « elle peut pas changer au fur et à mesure du temps » comme des arguments indiquant que l'on ne peut pas changer la structure des jeux de preuves en cours de partie, au sens où la constante *m* doit être une donnée a priori de la preuve. Cependant, *Y* finit par être convaincu par *A1* (voir l'extrait déjà cité ci-dessus, *E-L1-L*, 111-118, annexe 18). Ce changement de position peut s'interpréter au regard de la discussion suivante entre *N* et *Y* :

N : Ouais mais là, là, là, le truc c'est qu'ils disent regardent quand ils disent : « notons ε_k … », là, ε_k, il ne bouge pas.

Y : Hum ?

N : Alors que là, il peut, quand tu vas prendre le, quand il va prendre ε tend vers zéro, il va bouger en fait.

Y : Ouais, c'est ce que… Ouais mais normalement, il n'est pas censé bouger parce que la suite euh… Tu, ils ne sont pas censés changer, en fait.

N : Ouais mais, ouais mais regarde, quand tu prends, quand tu prends, il va changer là, quand tu vas faire tendre…

Y : Ouais, ouais,… Ouais mais nous, sur le contre-exemple, il changerait et…

N : Mais ε il va tendre vers zéro, ε_k il va changer tout le long…

Y : Oui. Et il tendra pas vers zéro.
(*E-L1-L*, 119-126, annexe 18)

Dans cet extrait, *N* et *Y* prennent en compte le fait, exprimé dans la preuve, que les ε_k et leur maximum sont des fonctions de *m*. Au niveau de leurs expressions, ce fait se traduit par la considération selon laquelle les ε_k et leur maximum « bougent ». Ici, l'usage de ce vocabulaire ne permet pas la distinction entre chacune des variables de la suite ε_k, dont la dépendance en *m* n'est d'ailleurs pas explicitée dans l'énoncé (pour rester au plus près de l'écriture de la preuve de Liouville). Il peut alors paraître contradictoire de considérer que la suite définie par $u_k = m$ ne peut pas changer « au fur et à mesure du temps » alors que dans le même temps l'écriture de la preuve suggère que $\varepsilon_k = u_k / m$ change « tout le long ». A l'image du dernier extrait analysé au cours de la pré-expérimentation, les étudiants ne parviennent pas à exprimer leurs positions, en particulier leurs désaccords, en faisant usage des outils syntaxiques de la quantification. Ils s'appuient sur un vocabulaire moins précis qui dans certains cas comme celui-ci ne permet pas de lever les ambiguïtés mathématiques et logiques.

Synthèse 7. Les débats des étudiants de L1 que l'on peut interpréter comme des débats sur le statut logique des lettres (lettres de variable, de constante, d'indice) s'expriment principalement à travers le vocabulaire de la variation dans le temps. La syntaxe de la quantification ne fait pas partie des outils mobilisés par ces étudiants.

Pour terminer cette étude de l'usage des lettres et des structures logiques d'arrière plan associés, j'analyse un dernier extrait issu du travail du premier groupe d'étudiants de l'INSA (*G1-INSA-L*, 732-814, annexe 21). Dans cet extrait, $\mathbb{P}$ invite les étudiants à réfléchir à la méthode de preuve pour établir l'égalité de deux nombres réels qui est employée dans la preuve qu'ils sont en train d'analyser :

$\mathbb{P}$: Donc ça c'est un truc qui est vachement courant dans les démonstrations, pour démontrer que *f*(*b*) - *f*(*a*) égal zéro, il démontre que *f*(*b*) - *f*(*a*) est plus petit que n'importe quel nombre fixé à l'avance.

V : Ouais, ouais, c'est ce qu'il fait là alors.

$\mathbb{P}$: Est-ce que ça vous convainc ça comme méthode ?

Ni : Non.

B : Moi non.

(G1-INSA-L, 738-742, annexe 21)

Cette technique de preuve est étroitement liée à la nature des nombres réels et à leur mode de construction. L'usage de la quantification universelle dans cette méthode rend compte du caractère « infini » de la construction des nombres réels au sens où cette construction mobilise pour chaque nombre réel une infinité de nombres rationnels. Montrer que deux coupures de Dedekind sont égales en tant qu'ensemble nécessite la considération d'un nombre infini de rationnels (une quantification sur un domaine infini). Montrer que deux suites de Cauchy de nombres rationnels sont équivalentes nécessite de montrer que leur différence tend vers zéro, ce qui repose sur une quantification sur un domaine infini. Les réponses des étudiants à la sollicitation de $\mathbb{P}$ me paraissent révélatrices d'une certaine difficulté épistémologique de la construction des nombres réels. Comme la construction des nombres réels elle-même, cette difficulté est liée à la conceptualisation de la distinction entre fonction et argument et à son corollaire l'usage d'une théorie de la quantification. J'ai déjà abordé cette question lors de l'étude historique de cette partie à travers les preuves de Bolzano, Lacroix et Duhamel. Un peu plus loin, les étudiants précisent la raison pour laquelle ils sont méfiants par rapport à cette technique de preuve :

$\mathbb{P}$: Si $f(b)$ - $f(a)$ plus petit que 1/1000, 1/1000000, 1/000000000, n'importe quoi, aussi petit qu'on veut, qu'on peut l'imaginer, est-ce que ça te démontre que/

B : Tend vers zéro.

$\mathbb{P}$: Que $f(b)$ - $f(a)$ est égal à zéro.

B : Ben non.

$\mathbb{P}$: Pourquoi ?

B : Parce qu'il peut être toujours sans être égal à zéro.

Ni : Il peut tendre vers zéro.

B : Il peut aussi tendre vers zéro.

(G1-INSA-L, 758-765, annexe 21)

Ce passage montre que les étudiants regardent le nombre $f(b)$ - $f(a)$ comme quelque chose susceptible de variation. Leur argumentation est probablement issue du fait, connu à ce niveau, qu'une suite qui possède une limite ne l'atteint pas nécessairement. $\mathbb{P}$ parviendra ensuite à les convaincre en insistant sur le fait que les nombres a et b sont fixés au départ, qu'ils sont « donnés » à travers un processus de quantification. Ceci dit, l'étude de l'interprétation de l'usage des lettres dans cette preuve montre bien que ce type de distinctions échappe en grande partie à l'analyse des étudiants de première année, qu'ils soient en L1 ou à l'INSA. Ceci s'explique peut-être par le caractère particulièrement complexe des aspects de quantification de cette preuve pour des étudiants à ce moment de l'enseignement supérieur. Il me semble néanmoins qu'un certain nombre de preuves qui leur sont présentées en analyse relèvent aussi d'une pratique complexe de la quantification (par exemple les preuves mobilisant le concept de borne supérieure, Chellougui (2004)).

Synthèse 8. L'usage de la caractérisation $\forall a \forall b (a = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 |b - a| \leq \varepsilon)$ pour montrer une égalité entre deux nombres réels n'est pas perçu comme pertinent par les étudiants du premier groupe de l'INSA. La principale difficulté semble résider dans le fait que le jeu de quantification selon lequel les lettres a et b sont des données n'est pas interprété comme tel.

- Q3. Dans quelle mesure les contrôles sémantiques de la validité font-ils usage de la quantification ? Quelle est l'influence des jeux de description au cours de ces processus de contrôle ?

J'aborde maintenant la troisième question de cette analyse a posteriori, c'est-à-dire la question des contrôles sémantiques de la validité des énoncés. Plus précisément, je souhaite évaluer la prise en compte de la syntaxe de la quantification par les étudiants lors de la confrontation des énoncés avec un domaine d'objet. Je me concentre dans un premier temps sur les pratiques du groupe d'étudiants de M1. Ceux-ci, et en particulier *F*, se sont appuyés sur plusieurs interprétations sémantiques pour les fonctions ε_i dans des jeux de décision[122] associés à l'assertion de la convergence de leur maximum. J'ai proposé une modélisation explicite en termes de jeux sémantiques pour l'évaluation d'une assertion similaire au cours de l'analyse de la preuve du principe de substitution par Duhamel (partie 3, chapitre 2). Le gain (ou la perte) des parties de ces jeux sémantiques de décision dépend de la nature du choix des fonctions (ou des suites) ε_i. En particulier, si les ε_i choisis sont suffisamment « homogènes » (dans un sens précisé lors de la modélisation explicite) alors il existe une stratégie de victoire pour le proposant dans le jeu sémantique de décision. *F* a proposé

[122] Voir la deuxième partie (chapitre 2) pour des précisions sur les jeux de décision.

plusieurs choix pour les ε_i dans la perspective de prendre une décision sur la validité de la déduction. Je les récapitule ci-dessous :

1er choix (*G-M1-L*, 295, annexe 19) : $\varepsilon_i(h) = \sum_{k=0}^{i} \frac{h^k}{k!}$; $\max_{1\le i\le m}\{|\varepsilon_i(m)|\} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(b-a/m)^k}{k!}$

2ième choix (*G-M1-L*, 317, annexe 19) : $\varepsilon_i(h) = h\sum_{k=0}^{i} \frac{1}{k}$; $\max_{1\le i\le m}\{|\varepsilon_i(m)|\} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k}$

3ième choix (*G-M1-L*, 393, annexe 19) : $\varepsilon_i(m) = \frac{1}{2^{m-i}}$; $\max_{1\le i\le m}\{|\varepsilon_i(m)|\} = 1$

Le premier choix d'interprétation pour les ε_i conduit le proposant à gagner le jeu de décision. En effet, les ε_i choisis ne convergent pas vers zéro avec *h*, le proposant peut donc forcer l'opposant à faire une assertion fausse (et donc à perdre le jeu). D'autre part, les ε_i choisis et leur maximum ont la même limite si bien qu'une modification de l'interprétation des ε_i par $\varepsilon_i(h) = \sum_{k=1}^{i} \frac{h^k}{k!}$ mettrait à nouveau le proposant en situation de gagner systématiquement les parties du jeu sémantique associé à cette nouvelle interprétation. Ces fonctions font en effet partie de ce que j'ai qualifié de la classe « étendue » des fonctions « homogènes » au cours de l'analyse historique[123]. Le deuxième choix met à nouveau une stratégie gagnante à disposition du proposant pour la même raison d'homogénéité des fonctions ε_i. Le troisième choix est impulsé par *T1*. Cette fois, il offre des possibilités irréductibles de victoire à l'opposant. Ceci montre que la déduction est invalide. L'extrait ci-dessous relate les réactions de *D* et *E* à la proposition de contre-exemple de *F* :

F : Le max de ce truc là égal 1. C'est ce qui nous intéresse quoi parce qu'on a un [Inaudible].
E : Mais là, le max il tend vers 0.
D : Mais je sais pas, pour moi le max il tend vers 0 aussi, enfin…
E : Oui, oui le max, il tend vers 0.
F : Ben non justement.
D : Et la somme tend vers 0 ?
E : Oui mais ça, ils tendent pas tous vers 0 les ε donc forcément.

[123] Il s'agit des suites de fonctions pour lesquelles il est possible de se concentrer sur un nombre fini d'entre elles moyennant une approximation aussi précise que souhaitée (cf. l'analyse de la preuve du Duhamel du principe de substitution).

F : Si…

E : Non, le dernier, il tend pas vers 0.

(G-M1-L, 404-412, annexe 19)

Il y a donc dans un premier temps un désaccord entre les étudiants à propos du statut de contre-exemple pour le choix sémantique effectué par *F*. La critique est de deux types. D'un côté *D* et *E* semblent considérer que « le max tend vers 0 », ce qui correspond à la catégorisation du choix de *F* parmi les fonctions « homogènes ». D'un autre côté, *E* met également en doute le fait que le dernier des ε_i tende vers 0. Ces désaccords proviennent de la manière dont les étudiants interprètent la quantification des énoncés. Il est également envisageable que ces désaccords soient renforcés par une avancé dans le processus de décision vers la valeur de vérité « vrai »[124]. Les deux premiers choix pour les interprétations des ε_i ont effectivement été faits dans une restriction du domaine d'interprétation sur laquelle l'énoncé est vrai et la première impression de *D* et *E* a été que cette déduction était valide. Cette hypothèse au sujet de l'influence de l'avancée du processus de décision sur la manière d'aborder les nouveaux jeux de décision est néanmoins à confirmer. La suite de la discussion montre un désaccord persistant sur la manière d'attribuer une valeur de vérité à l'assertion « pour tout *i*, ε_i tend vers 0 » bien qu'il y ait un accord sur les valeurs de vérité des énoncés atomiques en jeu :

F : Donc par exemple euh… $\varepsilon_1(m)$, dire que *h* tend vers 0, ça veut dire que *m* tend vers plus l'infini, donc $\varepsilon_1(m)$ par exemple, il tend bien vers 0.

D : Ouais mais $\varepsilon_m(m)$?

F : $\varepsilon_m(m)$… Le problème, c'est pas de savoir si $\varepsilon_m(m)$ tend vers 0, le problème c'est de savoir si $\varepsilon_k(m)$, à *k* fixé, tend vers 0.

E : Oui donc *k* = *m* ça ne marche pas.

D : Et euh…

(*G-M1-L*, 419-423, annexe 19)

Le rôle d'une théorie sémantique de la vérité est explicitement d'étendre l'attribution des valeurs de vérité pour les énoncés atomiques aux énoncés complexes incluant la quantification sur les variables dans le cas des théories du premier ordre (Hintikka, 2007, p. 55). Sans entrer dans une analyse détaillée de la quantification, cet exemple montre comment un même point de vue sur les valeurs de vérité des énoncés atomiques peut conduire à des évaluations différentes sur des énoncés quantifiés élaborés à partir de ces énoncés atomiques.

[124] « E : Y a pas de contre-exemple parce que c'est vrai » (*G-M1-L*, 308, annexe 19)

Le désaccord entre les étudiants est ici un désaccord sur la manière de prendre en compte la quantification dans les contrôles sémantiques. J'ai déjà discuté dans cette partie de la prise en compte de la syntaxe de la quantification dans le travail sémantique lors de l'analyse historique. Ces réflexions concernant la diversité des approches m'avait conduit à introduire le concept de jeux de description pour rendre compte des pratiques qui se structurent en dehors du cadre offert par la sémantique GTS.

Synthèse 9. Au niveau du groupe de M1, l'étude des processus sémantiques de décision met en évidence une prise en compte diverse de la quantification. Une hypothèse qui peut être formulée est celle de l'influence des conclusions des précédents jeux de décision sur les méthodes de décision des étudiants concernant de nouvelles interprétations.

Afin d'étudier plus spécifiquement l'influence des jeux de description dans les processus de contrôle de la validité de la preuve, j'analyse maintenant les transcriptions des travaux du deuxième groupe d'étudiants de l'INSA. Les extraits sélectionnés proviennent de discussions autour du projet général de la preuve (*G2-INSA-L*, 587-751). Pour montrer que la fonction f est constante, il faut montrer que tous les arguments envisageables ont une même image par la fonction. Une interprétation dialogique de la preuve de Liouville peut être la suivante : l'opposant fait un certain nombre de concessions initiales (les prémisses) puis choisit des lettres a et b, suite à quoi le proposant attaque ces concessions pour établir l'égalité $f(a) = f(b)$. Les extraits qui viennent montrent que la structure de ce projet général pose plusieurs problèmes aux étudiants. Les étudiants semblent considérer soit que la preuve de Liouville montre que la fonction est constante sur l'intervalle $[a, b]$, et dans ce cas qu'il faut compléter l'argument pour montrer que la fonction est constante sur *IR*, soit que la preuve de Liouville montre seulement que $f(a) = f(b)$ et qu'elle est insuffisante pour conclure. La première position est par défendue par *C* et *Be* dans l'extrait suivant[125] :

> C : Je sais pas. Déjà, je dis que sa preuve, elle reste sur une intervalle alors que son énoncé il en parle pas quoi.

[125] Cette position sera aussi discutée dans l'autre groupe d'étudiants de l'INSA. Par exemple :

« Bj : Parce que si jamais la courbe elle est constante sur euh, de a à b et qu'après elle part en live c'est-à-dire que $[a, b]$ elle sera constante mais elle est pas constante tout le temps. »

(*G1-INSA-L*, 892, annexe 21)

ℕ : Justement, c'est vrai qu'on en a pas, on en a pas parlé. Ce qu'il montre pour vous est-ce que c'est l'énoncé ou c'est pas l'énoncé ?

[…]

Be : Ben pas entièrement, parce que déjà l'intervalle de départ c'est pas le même. Puisque, au départ on a… Enfin l'énoncé c'est sur *IR* alors que sa démonstration c'est sur un intervalle.

(*G2-INSA-L*, 587 ; 590-591, annexe 22)

Au final, la position qui semble faire consensus (au moins entre *C* et *Be* puisque *M* s'exprime peu dans ce passage) est la suivante : la conclusion de Liouville selon laquelle $f(a) = f(b)$ est insuffisante mais l'analyse de sa preuve permet de voir qu'il montre aussi que f est constante sur l'intervalle $[a, b]$:

ℕ : Donc là, là, il a montré que ça. Si on regarde littéralement ce qu'il se passe, il part de a, b deux réels au hasard, donc c'est toujours quels que soient, avec a plus petit que b et il démontre, il arrive à $f(a) = f(b)$. Donc là, est-ce que vous pensez que c'est complet, enfin que cette preuve elle permet de conclure sur le fait que c'est constant, ou pas ?

Be : Mais le truc c'est que, euh… La conclusion non, mais la façon dont il est arrivé à, à la conclusion euh…

C : Ouais, limite son raisonnement est plus explicite que sa conclusion.

(*G2-INSA-L*, 712-714, annexe 22)

Cette position se construit malgré une discussion assez précise sur la quantification de l'énoncé affirmant qu'une fonction n'est pas constante (*G2-INSA-L*, 670-675 ; 695-699, annexe 22). Mon analyse de ce phénomène est en lien avec ce que j'ai décrit lors de la pré-expérimentation, à savoir le fait que les étudiants privilégient parfois les jeux de description aux jeux sémantiques réglés. Dans ces jeux de description, la quantification est prise en compte par une approche pragmatique qui ne s'accorde pas nécessairement avec les critères mathématiques (il s'agit par exemple de préserver la vérité des énoncés ou de les rendre plus informatifs). La preuve analysée fait intervenir un nombre infini de points de subdivision de l'intervalle $[a, b]$. Les étudiants savent que toutes les images de ces points de subdivision sont les mêmes (le théorème étudié ne fait pour eux aucun doute). Or la conclusion de Liouville ne porte que sur deux d'entre eux, les extrémités a et b. De leur point de vue (qui a déjà intégré au niveau sémantique les résultats du théorème dont la preuve est en train d'être analysée), il s'agit d'une conclusion qui ignore une partie de ce qui pourrait être dit au sujet des points de subdivisions qui interviennent dans la démonstration. J'ai déjà évoqué dans la pré-expérimentation une forme de bienveillance de la communication qui, au fondement de certains jeux de description, conduit parfois les interlocuteurs à aller au-delà de la syntaxe explicite dans leur compréhension des énoncés afin de « maximiser » les informations reçues.

Il me semble que le comportement des étudiants de ce groupe peut être interprété selon ce schéma de communication. Ce phénomène est d'ailleurs plutôt solide comme en atteste cette discussion entre *T2, N*, *C* et *Be* dans laquelle les questions de quantification et leur rapport avec la définition des fonctions constantes sont mises en avant :

> T2 : Oui, mais en termes de valeurs de la fonction, ça veut dire quoi qu'une fonction est n'est pas constante.
>
> C : Ben ça veut dire que il existe un, un je sais pas un *y*, tel que *f*(*x*) différent de *f*(*y*)… Par exemple.
>
> T2 : Donc là, tu as dit « il existe un *y* » et ce *x* ?
>
> C : Ben je sais pas, « il existe » euh… Et pour tout *x*. Non par exemple, enfin…
>
> T2 : Pour tout *x*.
>
> C : Je sais pas, en gros, on peut prendre deux abscisses différentes/
>
> (*G2-INSA-L1*, 670-675, annexe 22)
>
> C : Alors… Ah c'est vrai que là, on les a pris au hasard quoi, enfin… On les a pas placés, on a pas de conditions sur la relation entre *a* et *b* à part que *a* est plus petit que *b* quoi. Y a pas de symétrie par rapport à zéro ni rien.
>
> N : Et donc, ça clarifie le fait que, l'énoncé ou pas ?
>
> C : Ben, pour moi, ça le clarifie mais sur l'intervalle [*a*, *b*] quoi.
>
> Be : Oui, c'est sur [*a*, *b*], c'est pas sur *IR*.
>
> (*G2-INSA-L1*, 696-699, annexe 22)

Synthèse 10. Les étudiants du deuxième groupe de l'INSA considèrent que la conclusion de Liouville qui porte sur les lettres *a* et *b* est insuffisante pour montrer que la fonction *f* est constante mais que l'analyse de la preuve montre que *f* est effectivement constante sur l'intervalle [*a*, *b*]. J'interprète ce phénomène comme le produit d'une volonté de maximiser l'information au sein d'un jeu de description.

Ces extraits closent l'analyse a posteriori de la partie de l'expérimentation concernant la preuve adaptée du texte de Liouville. Je proposerai plus tard une synthèse de ces résultats et de ceux qui viennent concernant l'analyse des transcriptions des dialogues des étudiants ayant travaillé sur la preuve inspirée par le cours de Cauchy.

Analyse du corpus concernant la preuve inspirée par le texte de Cauchy[126]

- Q1 : les étudiants repèrent-ils les imprécisions de raisonnement décrites de manière anachronique dans l'analyse a priori ?

Au niveau des pas de déduction, l'analyse de la validité de la preuve a permis de repérer deux inférences. La première concerne la preuve de la croissance de la suite $(u_m)_{m\geq 1}$ et l'absence de référence à l'augmentation du nombre de termes avec *m* lorsque cette suite est exprimée par une somme. Les groupes ont traité de manière assez différente cette difficulté. Par exemple, les deux groupes d'étudiants de l'INSA ne l'ont pas relevé par eux-mêmes alors que le groupe d'étudiants de M1 l'a relevé dès les premières minutes de l'expérimentation. Je propose maintenant quelques exemples qui me paraissent intéressants dans la perspective de l'analyse de la quantification. La problématique de la prise en compte du fait que la somme $u_m = \sum_{k=0}^{m} C_k^m \frac{1}{m^k}$ gagne un terme entre le rang *m* et le rang *m* + 1 dans le contexte de la preuve de croissance est étroitement liée à celle de l'analyse de la quantification dans la recherche de la limite de cette somme. Prendre en compte l'ajout de termes dans la somme en même temps que l'évolution individuelle de ses termes nécessite une certaine clarification sur la double dépendance en *m* de la suite $u_m = s(m,m)$ (selon les notations introduites dans l'analyse a priori, $s(n,m) = \sum_{k=0}^{n} C_m^k \frac{1}{m^k}$). En ce qui concerne le premier groupe des étudiants de l'INSA, l'analyse de la croissance a occupé un temps important du travail (*G1-INSA-C*, 434-623, annexe 28). *Y* a rapidement remarqué que le (*n* + 1)ième terme de la somme augmentait avec *m* (*G1-INSA-C*, 444, annexe 28). Il l'exprime de manière assez claire ici :

> Y : Parce que, parce que *m* c'est… Plus *m* est grand et plus ça, c'est petit, donc là, 1 moins quelque chose petit… Plus, plus c'est petit et plus ça tend vers 1 donc forcément, ça va augmenter. Ok. Ensuite « en effet… », donc là, c'est ce que, enfin, il explique pourquoi ça augmente.
>
> (*G1-INSA-C*, 504, annexe 28)

[126] Comme précédemment, j'aborde les questions de recherche Q1, Q2 et Q3 les unes à la suite des autres.

Pour autant, certaines questions sur la quantification demeurent. En particulier, le fait que l'écriture en forme de somme de u_m fasse intervenir deux lettres (*n* et *m*) conduit les étudiants à envisager la possibilité d'une variation de la lettre *n* qui sert de lettre d'indice pour la somme. Je reviendrai plus précisément sur l'usage de cette lettre d'indice plus tard. De manière générale, les étudiants s'engagent dans des débats au cours desquels le recours aux outils de la quantification est très vague. Ceci s'accorde avec les constats de Dubinsky et Yiparaki (2000) présentés plus haut à propos de la faible prise en compte de la syntaxe des énoncés quantifiés dans leur évaluation par les étudiants :

> T1 : Qu'est-ce qui va augmenter ? En fait.
>
> L : Le… Au final, ça diminue parce que c'est 1 sur quelque chose de plus en plus grand.
>
> T1 : C'est quoi qui augmente, c'est quoi qui diminue ?
>
> J : Ben, en fait, le *m* augmente et le 1/*n*! diminue
>
> L : Ouais. 1/*n*! ça va se rapprocher de 0 et euh… 1 - 1/*m* ça va se rapprocher de 1. Quand on va augmenter.
>
> (*G1-INSA-C*, 548-552, annexe 28)
>
> L : Donc à chaque fois, on va rajouter un terme et un terme qui sera inférieur à 1. On va multiplier le reste par ce terme qui sera inférieur à 1. Quand on multiplie par un truc inférieur à 1, on diminue.
>
> T1 : Ça, c'est un peu contradictoire avec le fait d'être croissant.
>
> L : Oui, c'est pour ça que ça me semble bizarre… Un petit peu. Mais en même temps, on voit que le numérateur, il change aussi. A mais, oui, comme le numérateur change, si c'est bon, moi je suis d'accord. Pour un numérateur constant, j'aurais pas été d'accord mais le numérateur il change aussi. (*G1-INSA-C*, 577-579, annexe 28)

Dans ces deux extraits, il est difficile de savoir quelle est la suite dont *L* et *J* étudient la croissance et quelles sont les variables qui sont utilisées[127]. Dans ce contexte, *T1* est à l'initiative de la réflexion concernant le nombre de termes dans la somme $\sum_{k=0}^{m} C_k^m \frac{1}{m^k}$ et son évolution lorsque *m* augmente (*G1-INSA-C*, 557; 559, annexe 28). Les étudiants s'accordent finalement sur l'augmentation du nombre de termes de la somme lorsque la variable *m* augmente. Au niveau du deuxième groupe de l'INSA, les étudiants ne semblent pas se poser de question particulière sur le nombre de termes de la somme qui est utilisée dans la preuve de la croissance de la suite. L'essentiel de l'activité de ce groupe consiste en un effort de compréhension des calculs et de reformulation de l'expression u_m. La croissance de la suite

[127] Ceci vaut si l'on fait l'hypothèse que les étudiants s'appuient sur des lettres de variable pour traiter des questions de croissance.

est acceptée de manière tacite. Elle ne fait l'objet d'aucune discussion particulière. Le thème du nombre de termes de la somme définissant u_m est à nouveau introduit dans le débat par l'expérimentateur (cette fois-ci, il s'agit de $\mathbb{T}2$). *L* ne voit pas pourquoi *T* et *R* affirment qu'il y a *m* + 1 termes dans cette somme (*G2-INSA-C*, 646; 658, annexe 29). $\mathbb{T}2$ est également à l'origine de la formulation des interrogations à propos de la deuxième dépendance en *m* de $u_m = s(m,m)$ (c'est-à-dire la dépendance en *m* de chacun des termes de la somme) :

> $\mathbb{T}2$: Dans le même temps ici, est-ce qu'ils changent ces termes-là ? Quand *m* grandit ? Les premiers ?
>
> L : Les premiers, ben non.
>
> T : Non, je crois pas.
>
> L : Euh, si.
>
> T : Si ?
>
> (G2-INSA-C, 683-685, annexe 29)

Comme pour le premier groupe, l'expérimentateur prend la responsabilité d'introduire les questions de quantification. Elles n'interviennent pas de manière spontanée dans l'évaluation de la preuve par les étudiants. Leurs analyses sont soit centrées sur des questions très locales de correction du calcul, soit d'un niveau trop général pour prendre en compte les spécificités logiques d'un usage réglé de la quantification. Pour ce qui est des étudiants de L1, ceux-ci s'accordent sur la croissance individuelle des termes de la somme, quoique *Y* soit parfois perturbé par une possible variation de la lettre d'indice *n* (par exemple, *G-L1-C*, 414, annexe 24) au sens où le *n*ième terme évoluerait en *n* avec l'augmentation de *m* (au sens où son rang dans la suite changerait). Par ailleurs, *Y* remarque que le nombre de termes de la somme à laquelle le *n*ième terme appartient augmente avec l'augmentation de *m*. *A1* s'oppose à *Y* sur ce dernier constat de l'augmentation du nombre de termes de la somme :

> A1 : Ben le truc, c'est que *m* augmente.
>
> Y : C'est quoi le terme qui s'ajoute quand *m* augmente ?
>
> A1 : Non, non il s'ajoute pas, tu regardes que ce terme-là.
>
> (*G-L1-C*, 407-409, annexe 24)
>
> Y : Oui c'est parce que quand *m* augmente, il y a aussi un terme qui se rajoute.
>
> A1 : Non.
>
> Y : Non ?
>
> $\mathbb{T}2$: Hum, hum.
>
> A1 : Bon oui.
>
> Y : Oui, y a un terme qui se rajoute.
>
> A2 : Attend, j'ai pas compris ce que tu veux dire là, en fait.

(*G-L1-C*, 495-501, annexe 24)

Au final, ces étudiants prendront en compte pour l'analyse de la preuve de croissance la double dépendance en *m* de $u_m = s(m,m)$. Ils exposeront assez clairement ce point au cours de leur exposé. Pour eux, l'absence de référence à l'augmentation du nombre de termes dans cette partie de la preuve n'en altère pas la rigueur (*E-L1-C*, 37-38, annexe 25). La position des étudiants de M1 est assez proche de cette conclusion. Leur appréhension des deux types de dépendance en *m* de u_m intervient néanmoins beaucoup plus rapidement dans leurs débats (*G-M1-C*, 95, annexe 26).

Synthèse 11. Plusieurs positions se dégagent à propos de la preuve de croissance de la suite u_m. Dans les deux groupes de l'INSA, les étudiants ne remarquent pas d'eux-mêmes qu'il y a un terme de plus dans la somme associée à u_{m+1} que dans celle associée à u_m ; leur attention reste concentrée sur l'analyse des étapes du calcul. Le phénomène est relevé par les étudiants de L1. Il fait débat puis est finalement regardé comme secondaire. La question ne pose pas de problème aux étudiants de M1.

Je poursuis par l'étude du positionnement des différents groupes par rapport à la validité de la dernière inférence de la preuve de Cauchy, c'est-à-dire l'inférence qui utilise le principe de substitution et conclut à la convergence de la suite u_m vers *e*. De manière générale, ce positionnement va s'accorder avec le niveau d'analyse de la dépendance de la suite u_m par rapport au nombre de termes de son expression sous forme de somme. Les deux groupes d'étudiants de l'INSA, pour qui les questions liées à la quantification ont surtout été portées par les expérimentateurs, n'ont pas particulièrement remis en cause cette dernière inférence. Pour le premier groupe, sa validité ne fait pas de doute (*G1-INSA-C*, 848-999, annexe 28). Pour le second, les étudiants expriment une certaine difficulté au niveau du passage à la limite. Ils paraissent néanmoins pencher pour la validité de la déduction (*G2-INSA-C*, 777-936, annexe 29). Dans les deux cas, ce sont à nouveau les expérimentateurs qui ont été amenés à orienter l'attention des étudiants sur la déduction. Les deux groupes, réunis en un seul pour les besoins de l'exposé, exprimeront clairement leur position sur ce sujet (*E-INSA-C*, 21; 33-39, annexe 30). Pourtant, les étudiants affirment aussi avoir conscience « sur le plan social », c'est-à-dire du fait de l'attitude des expérimentateurs, qu'il y a quelque chose dans la preuve qui est susceptible de ne pas être rigoureux. Malgré cela, ils ne parviennent pas à en repérer précisément le lieu. Au niveau de l'analyse de cette inférence dans le travail des étudiants de l'INSA, je me concentre sur des extraits issus de la transcription du deuxième groupe. Mon intention est d'illustrer les pratiques des étudiants en rapport avec la quantification afin de montrer les raisons pour lesquelles ils n'ont pas pu se positionner précisément vis-à-vis de l'inférence en jeu. Si l'on note $v_{n,m}$ le *n*ième terme de la somme u_m (cf. les notations introduites dans l'analyse a priori), le principal constat que l'on peut faire est celui d'une confusion importante entre les limites de ce terme par rapport à chacune des variables *n* et *m*. Plus précisément, il y a souvent des imprécisions sur les variables en jeu dans les recherches de limite. Dans le cas présent, ceci est d'autant plus délicat que la situation met en jeu une double dépendance par rapport à une seule et même variable (au sens de l'écriture $u_m = s(m,m)$) :

> T : Et vu que là, on avait, on a *m* + 1 termes, donc c'est fini là, ici… On a *m* qui tend vers plus l'infini donc on a une infinité de termes… Ouais et chaque terme, à l'infini, les termes tendent pas vers 0 mais les termes, les termes sont quand même de plus en plus petits. Donc ça veut dire, il faut…
>
> (*G2-INSA-C*, 912, annexe 29)
>
> R : C'est la somme d'une infinité de termes tendant vers 0 mais ils l'atteignent jamais.
>
> L : Somme d'une infinité de termes qui tendent vers 0 ?
>
> T : Non c'est le terme l'infini-ième…
>
> L : Non, parce que le premier terme il tend vers 1…
>
> R : Non [Inaudible].
>
> T : C'est pas ça, c'est l'infini-ième qui tend vers 0.
>
> R : Oui voilà, une somme de termes qui se rapprochent de zéro. Là, on a 1/2 et après on a 1/6 et ainsi de suite et on se rapproche de 0.
>
> (*G2-INSA-C*, 915-921, annexe 29)

Dans ces extraits, plusieurs types de dépendance se mêlent. D'abord, il y a la référence au nombre de termes, c'est-à-dire une dépendance par rapport à la première instance de la variable *m* pour la suite $u_m = s(m,m)$. Il y a également certaines références à la limite des termes que l'on peut interpréter à partir de la dépendance par rapport à la deuxième instance de la variable *m* pour la suite $u_m = s(m,m)$ ou de manière équivalente par rapport à la variable *m* pour chacun des termes $v_{n,m}$ de la somme. Enfin, il est question que les termes soient « quand même de plus en plus petits ». Cette fois, il faut donc envisager un calcul de limite pour les termes $v_{n,m}$ de la somme (ou pour leur limite $v_n = \lim_{m\to\infty} v_{n,m}$) par rapport à la variable *n*. On peut également observer un peu plus loin dans la transcription une recherche de la limite pour la suite $1/m^m$ qui correspond dans les notations précédentes au *m*-ième terme $v_{m,m}$ de la somme. Chacune de ces questions est pertinente du point de vue de la compréhension globale du problème. Pour autant, les étudiants ne parviennent pas à dégager les spécificités propres de chaque questionnement. Leur pratiques langagières sont également insuffisantes pour expliciter les conditions de convergence pour la suite u_m.

Synthèse 12. Les étudiants de l'INSA estiment que le principe de substitution est valide. Son usage n'est d'ailleurs pas distingué des autres inférences de la preuve, ou alors sous une impulsion particulière d'un des expérimentateurs. Leurs pratiques langagières ne leur permettent pas de repérer les difficultés mathématiques de la preuve.

Après en avoir débattu, les étudiants de *L1* avaient finalement dégagé la double dépendance en *m* de $u_m = s(m,m)$. Le débat préalable avait opposé *A1* à *Y* au sujet de la pertinence de considérer l'augmentation avec *m* du nombre de termes de la somme dans l'analyse des arguments concernant la croissance de la suite. A nouveau, la question de la validité de la dernière inférence de la preuve opposera *A1* à *Y* (et *A2*). Cette fois-ci, une position commune ne parvient pas à s'établir. Voici comment les étudiants de ce groupe présentent leur position respective lors de leur exposé :

> Y : En fait, il a une suite et donc il y a plein, plein de termes. Et il se dit, ben tiens, ce terme-là, ça comme on le disait, ça va tendre vers 1 quand *m* tend vers plus l'infini. Donc ce terme-là va tendre vers, le (*n* + 1)ième terme, va tendre vers 1/*n*!. Du coup, tous les termes de la suite quand *m* tend vers plus l'infini, il vont tendre vers, vers 1/*n*! et ça c'est la définition de *e*. Et donc là, il y a son point de vue maintenant… Enfin son point de vue, là, j'ai pas dit mon point de vue j'ai juste expliqué…
>
> (*E-L1-C*, 65, annexe 25)
>
> A1 : Alors, mon point de vue, c'est que oui, le passage de là à là, il… Et même la limite, c'est complètement clair puisque euh… Là, on s'intéresse au (*n* + 1)ième terme, on voit qu'il tend vers 1… 1/*n*!. Donc on sait que quand euh, quand *m* va commencer à devenir grand le *n*!, le 1/*n*!, il va commencer à devenir très petit. Donc euh, leur point de vue à eux, c'était que au fur et à mesure que *m* augmente, on ajoute des termes au bout…
>
> (*E-L1-C*, 68, annexe 25)
>
> Y : On voit pas, on pourrait pas le contredire parce que ça semble tellement bien marcher. Mais on se dit, il s'intéresse à un terme et hop, il fait tendre vers plus l'infini, donc ce terme il tend bien vers ça, mais pendant qu'il fait tendre vers plus l'infini, il y a des milliers de termes

qui se rajoutent puisque, plus *m* augmente, à chaque fois qu'on augmente *m* de 1, il y a un terme qui se rajoute. Du coup, il peut se ré-intéresser à ces termes et faire tendre vers plus l'infini pour que ces termes-là tendent bien vers $1/n!$ et ainsi de suite… Mais à chaque fois qu'il fait tendre de plus en plus, enfin, vers l'infini euh… Enfin bon, c'est un point de vue.

(*E-L1-C*, 77, annexe 25)

L'opposition entre les deux positions se situe sur la correction de l'argumentation plutôt que sur le fait que les énoncés de la preuve soient effectivement tous vrais. Selon *A2* et *Y*, la preuve n'en dit pas assez, elle n'est pas rigoureuse. Selon *A1*, ce qui est dit suffit à rendre le raisonnement clair et accessible. Ces étudiants ont donc repéré ce pas de déduction comme méritant une attention particulière. Je reviendrai sur les pratiques de *A1* et *Y*, qui me paraissent relever chacune de deux approches de l'activité mathématique assez différentes, dans mes réponses aux deuxième et troisième questions de recherche. De manière très brève, il me semble que la position de *A1* est plus pragmatique, au sens de la pragmatique de la communication des jeux de description, alors que *Y* attache une importance plus grande à l'analyse de la syntaxe des énoncés dans l'évaluation de la validité.

Quant aux étudiants de M1, ils repèrent très rapidement la nécessité de s'arrêter particulièrement sur la dernière inférence de la preuve (*G-M1-C*, 115-118, annexe 26). Au cours de leur travail, ils proposeront un contre-exemple et des corrections construites d'une part sur une utilisation précise de la quantification en $\varepsilon - \eta$ et d'autre part sur des usages de théorèmes de convergence (monotone et dominée).

Synthèse 13. La question de la validité de la dernière inférence émerge de la lecture du groupe d'étudiants de L1. Un long débat contradictoire a lieu. Il débouche sur le constat d'un désaccord. Les étudiants de M1 éprouvent aussi la nécessité de s'arrêter sur ce point. Ils proposent alors un contre-exemple et des corrections.

- <u>Q2. Comment les étudiants comprennent-ils l'usage des lettres dans la preuve ? Repèrent-ils la structure logique des jeux d'intérieur d'arrière plan qui lui donne sens ? Quels usages font-ils du vocabulaire de la variation ?</u>

Ma deuxième question d'analyse concerne l'usage des lettres par les étudiants et leur prise en compte de la structure des jeux de langage qui leur donnent sens. Comme le fait remarquer un étudiant du premier groupe de l'INSA, les marqueurs syntaxiques de la quantification sont quasiment absents du texte qui leur a été distribué :

> L2 : Mais quand on voit déjà, il utilise aucun signe. Enfin, c'est pas de la mathématique très profonde, il utilise jamais « pour tout », « pour toute valeur », « il existe un »… Il va pas trop dans le détail. Pour moi, il a l'air vachement de passer euh, faire une démonstration plus comme une explication rapide que vraiment comme une explication, vraiment à titre mathématique. […]
>
> (E-INSA-C, 67, annexe 30)

Je m'intéresse à la manière dont les étudiants gèrent les implicites de gestion des lettres qui sont associés à cette absence. Dans un premier temps, je propose une analyse de la manière par laquelle les étudiants ont appréhendé la lettre d'indice *n* dans l'écriture de la suite u_m sous la forme d'une somme. La lettre *n* est utilisée à plusieurs reprises au cours de la preuve. Dans l'égalité ci-dessous, cette lettre est une lettre d'indice. La seule lettre de variable (implicitement universellement quantifiée) est la lettre *m* :

$$u_m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\frac{m(m-1)}{m^2} + \frac{1}{3!}\frac{m(m-1)(m-2)}{m^3} + ... + \frac{1}{n!}\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{m^n} + ... + \frac{1}{m^m} \quad (*)$$

Quelques lignes plus bas, la lettre *n* apparaît à nouveau dans une égalité. Cette fois, son statut logique est celui d'une lettre de variable implicitement universellement quantifiée :

$$v_{n,m} = \frac{1}{n!}\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{m^n} = \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)...\left(1-\frac{n-1}{m}\right) \quad (**)$$

Bien que leur statut logique diffère, ces deux usages de la lettre *n* ne sont pas indépendants sur le plan heuristique. Du point de vue de la dynamique de la preuve, l'expression (**) est issue de (*). Cette relation heuristique entre (*) et (**) intervient notamment dans les preuves de croissance et de convergence de la suite u_m. Plus précisément, l'étude du comportement des suites $(v_{n,m})_{m\geq 0}$ pour un *n* donné est utilisée lors de considérations sur le comportement de la suite u_m. Au niveau du texte de la preuve, l'assertion « on regarde le (*n* + 1)ième terme de la somme » rend compte de ce lien entre les deux usages de la lettre *n*. Cet aspect du processus de preuve a posé beaucoup de difficultés aux étudiants à travers un certain nombre d'interférences incontrôlées entre les usages de la lettre *n* qui relèvent du statut logique de variable (et donc d'une variation au sens des processus de substitution explicités par les théories de la quantification) et ceux qui relèvent du statut d'indice (et donc d'une

« variation » dans un sens extra-logique). J'ai déjà proposé plus haut deux extraits de la transcription des dialogues du premier groupe d'étudiants de l'INSA à ce propos (*G1-INSA-C*, 548-552; 577-579, annexe 28). Dans ces extraits, les assertions sur le comportement de $v_{n,m}$ placent la question de la convergence pour chacune des variable *n* et *m* sur un même plan, c'est-à-dire comme si ces questions portaient sur une variation, un changement pour une « grandeur variable » pour reprendre le vocabulaire décrit dans l'analyse épistémologique, qui ne s'exprime pas nécessairement en termes de dépendance fonctionnelle par rapport à une variable donnée. Voici un nouvel exemple :

> L : Ouais. 1/*n*! ça va se rapprocher de 0 et euh… 1 - 1/*m* ça va se rapprocher de 1. Quand on va augmenter.
> (*G1-INSA-C*, 552, annexe 28)

Dans ces affirmations de *L*, il est difficile d'interpréter l'expression « quand *on* va augmenter » comme référant à une variable en particulier. De manière générale, il me semble que le fait que l'indice *n* « varie » (dans un sens pragmatique, non relié à la quantification) jusqu'à la variable *m* conduit les étudiants à envisager une forme de « dépendance » non fonctionnelle de *n* par rapport à aux variations de *m*. Cette forme de variation semble se confondre dans la pratique des étudiants avec la variation au sens de la quantification telle qu'elle peut être envisagée à travers l'écriture (implicitement) doublement quantifiée de (**). Ces préoccupations ont traversé tous les groupes, avec plus ou moins de consistance. Je viens de donner un exemple pour un groupe de l'INSA. Au niveau du groupe de L1, la question de la « variation » de la lettre *n* s'est posée lorsque les étudiants ont analysé les arguments utilisés pour montrer la croissance de la suite $(u_m)_{m\in IN}$. Le fait que le nombre de termes de la somme décrivant u_m augmente avec *m*, a par exemple conduit *Y* à s'interroger sur la place du (*n* + 1)ième terme de la somme u_m au sein de la somme u_{m+1}. L'interrogation est celle du devenir de ce (*n* + 1)ième terme dans un contexte où la lettre d'indice *n* se met à « varier » entre des bornes plus grandes :

> A1 : Le *m* devient plus grand, donc le terme [Inaudible].
> Y : Oui mais, en même temps, c'est plus le (*n*+1)ième terme après…
> A1 : si ! Bien sûr que si.
> A2 : Ben si.
> Y : Attend.
> A1 : Ben c'est là, c'est là, qu'il augmente.
> (*G-L1-C*, 394-399, annexe 24)

Y : Oui, mais il te demande, oui mais tu comprends c'est… Oui, oui, je suis d'accord qu'il augmente avec *m* mais si le (n + 1)ième terme c'est plus le même, ça fait magouille là, non ?

A1 : Hein ?

Y : Je sais pas.

(*G-L1-C*, 414-17, annexe 24)

Les étudiants de M1 ont également envisagé ce phénomène lors de l'analyse de la convergence individuelle des $(v_{n,m})_{m\geq 0}$ vers $1/n!$ en fin de séance (*G-M1-C*, 1089-1149, annexe 26). Le débat sur ce thème est introduit par une question de l'expérimentateur $\mathbb{T}2$. Il a été relativement fourni et contradictoire, ce qui montre une certaine consistance du phénomène. Voici deux extraits :

B : Si je fais tendre *m* vers l'infini, je fais varier u_m aussi.

C : J'espère.

B : Donc c'est plus le (n+1)ième terme, euh… Non mais.

C : Ou alors, tu sais ce qu'on a fait. On a pas fait gaffe et c'est faux.

A : Bon, c'est quoi le problème ?

(*G-M1-C*, 1124-1134, annexe 26)

A : On sait plus ce que l'on veut là. C'est quoi ? Il faut avoir les idées claires et distinctes.

$\mathbb{T}2$: Euh… Est-ce que ça reste le *n*ième terme quand *m* grandit.

A : Est-ce que le produit…

C : Oui.

B : Non, non. Parce que ça va changer.

(*G-M1-C*, 1136-1340, annexe 26)

Synthèse 14. Dans un contexte de quantification exclusivement implicite, les étudiants rencontrent des difficultés pour comprendre le rôle joué par la lettre *n*. Son statut d'indice dans l'expression de u_m sous forme de somme les incite à envisager une « dépendance » de *n* par rapport aux « variations » de *m*. Le phénomène concerne tous les groupes.

Pour poursuivre l'analyse de l'interprétation par les étudiants de la structure implicite des jeux régulant l'usage des lettres dans la preuve, je m'intéresse maintenant au vocabulaire de la temporalité et de la variation. D'un point de vue d'ensemble, l'usage de ce vocabulaire a été plus fréquent dans les dialogues concernant l'analyse de la preuve inspirée par le texte de Cauchy que dans les dialogues concernant la preuve traitant des fonctions de dérivée nulle. A titre d'exemple, je me concentre sur les pratiques de *Y* au sein du groupe d'étudiants de L1.

Celui-ci utilise de manière très importante le vocabulaire de la temporalité et de l'ordre pour aborder les questions délicates de quantification. Voici un extrait dans lesquels il exprime ses doutes concernant la validité de la dernière déduction de la preuve :

> Y : Mais est-ce que le fait qu'il tende vers plus l'infini, ça rajoute pas plus de termes et euh les termes, ils mettent plus de temps à tendre vers ce que l'on attend… Et en trottant, il y a plus de termes qui se rajoutent. Mais faudrait, enfin, vraiment voir… C'est quoi *m*.
>
> A2 : Tu veux dire quoi, tu veux dire pour arriver enfin, pour converger vers *e* c'est ça ?
>
> Y : Ouais pour conv… En fait, tous les termes, ils convergent à une vitesse…
>
> A2 : Tu veux dire en gros, par exemple, ces trois termes-là, ils convergent à une certaine vitesse.
>
> Y : Et cette vitesse, elle est moins grande que le nombre de termes qui se rajoutent à chaque fois. Du coup, ils convergeront tous au bout d'un moment mais y en a tellement d'autres qui se rajoutent et que eux ont pas encore convergé puisqu'ils vont converger après, tu vois ?
>
> (*G-L1-C*, 762-766, annexe 24)

La position présentée dans l'extrait ci-dessus est à nouveau défendue par *Y*, selon le même registre de vocabulaire, au cours de l'exposé du groupe. Un extrait est déjà proposé plus haut (*E-L1-C*, 77, annexe 25). L'usage de la temporalité permet aux étudiants d'aborder des phénomènes de quantification, dans un contexte où le vocabulaire technique leur fait défaut. Ici, *Y* exprime une difficulté que je mets en avant dans l'analyse a priori de la preuve. Dans le vocabulaire de la logique dialogique, cette difficulté correspond au fait que le choix du proposant d'un rang M pour l'énoncé $\forall\alpha > 0 \exists M \in IN \forall m \geq M, \left| s(m,m) - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \right| < \alpha$ est contraint simultanément par deux exigences. La structure interne du jeu dialogique associé ne permet en effet au proposant de répondre de manière sûre qu'à une seule de ces exigences, en supposant que l'opposant ait d'abord contribué à répondre à l'autre (le choix du nombre de termes de la somme). L'analyse dialogique permet de construire une interprétation des assertions de *Y* et une mise en parallèle explicite des questions de quantification (et donc de choix et de fonction de choix dans des jeux) et l'usage du vocabulaire de la temporalité. J'appelle $\varphi_\alpha : l \in IN \rightarrow M \in IN$ la fonction de choix qui offre au proposant une stratégie gagnante (celle qui choisit les rangs les plus petits) dans le jeu dialogique associé à l'énoncé suivant :

$$\forall\alpha > 0 \forall l \in IN \exists M \in IN \forall m \geq M, \left| s(l,m) - \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} \right| < \alpha \quad (4)$$

Au sens de l'affirmation « ils convergeront tous *au bout d'un moment* mais y en a tellement d'autres qui se rajoutent et qui eux ont pas encore convergé puisqu'ils vont converger après », la fonction φ_α peut s'interpréter comme la fonction qui attribue à l'entier naturel *l* le temps nécessaire de « convergence » pour les *l* premiers termes de la somme. La question de la validité la dernière déduction revient à étudier la validité de l'inégalité $\varphi_\alpha(m) \leq m$ (au moins pour les grandes valeurs de *m*). Le fait de dire que « des éléments vont converger après » peut alors se comprendre dans un sens fort comme le fait que la stratégie de gain φ_α pour l'assertion (4) est strictement croissante au sens usuel de la croissance des fonctions. Dans un sens plus faible, cette phrase peut être comprise comme l'affirmation que cette stratégie de gain n'est pas majorée. L'interprétation forte permet de montrer que pour tout *m*, $\varphi_\alpha(m) \geq m$, ce qui laisse peu de marge pour la validité de $\varphi_\alpha(m) \leq m$. L'interprétation faible laisse ouverte la possibilité que la déduction soit valide. En explicitant ce parallèle, mon objectif est surtout de montrer que les assertions de *Y* ont bien pour fonction de discuter de la quantification des énoncés que les étudiants sont en train d'analyser et que le vocabulaire de la variation dans le temps remplit cette fonction. Dans ce cas particulier, cet usage permet à *Y* de formuler ses doutes. Pour autant, il n'est pas suffisamment précis pour que cela lui permette de construire un contre-exemple à l'interprétation qu'il se fait de la dernière déduction de la preuve ou même d'avancer dans son évaluation.

Synthèse 15. L'usage du vocabulaire de la temporalité est présent dans l'analyse des étudiants. Une interprétation en termes de jeux dialogiques des assertions de *Y*, un étudiant du groupe de L1, montre que cet usage intervient pour discuter de la quantification. Il est néanmoins trop imprécis pour permettre à *Y* d'avancer dans son évaluation de la dernière inférence.

- Q3. Dans quelle mesure les contrôles sémantiques de la validité font-ils usage de la quantification ? Quelle est l'influence des jeux de description au cours de ces processus de contrôle ?

Je termine cette analyse a posteriori par ma troisième question de recherche concernant les contrôles sémantiques de la validité des énoncés et des déductions. La question est plus précisément celle de l'intégration des outils de la quantification dans les contrôles sémantiques. Au niveau du travail sur la preuve inspirée par le texte de Cauchy, les contrôles sémantiques sont délicats dans la mesure où la preuve traite d'une suite particulière. Chacune des assertions de la preuve concernant cette suite est vraie. Les étudiants en sont d'ailleurs tous convaincus. La réalisation d'un contrôle sémantique sur la validité des inférences nécessite donc un détachement vis-à-vis du contexte de la preuve (de l'interprétation « naturelle » pour les symboles) et une centration particulière sur la syntaxe des énoncés, y compris sur la syntaxe de la quantification. Comme je viens de le montrer dans le paragraphe précédent, *Y* a effectué une forme d'analyse de la quantification des énoncés lors de son évaluation de l'inférence concluant à la convergence de la suite u_m reposant sur un usage spécifique du vocabulaire de la variation et du temps. Cette pratique langagière été relativement indépendante des spécificités de la suite étudiée. A l'inverse, la plupart des arguments de l'étudiant *A1* de ce même groupe concernant cette même inférence sont construits sur les spécificités de la suite u_m. L'argumentation de *A1* s'appuie en particulier sur le fait que « le 1/*n*! il va commencer à devenir très petit » (*E-L1-C*, 68, cf. ci-dessus, annexe 25). Selon lui, la dernière déduction est « complètement clair[e] » (*E-L1-C*, 68, annexe 21). Il s'oppose en cela à *Y* et *A2* lesquels émettent des doutes sur la validité de la procédure de preuve. Dans ce dernier paragraphe, je me concentre sur les débats du groupe de L1 (*A1*, *A2* et *Y*) qui ont eu lieu après leur exposé et l'introduction par les expérimentateurs de la preuve dite « de recours » associée à l'inférence impliquant le principe de substitution. Le texte de la preuve de recours est projeté au tableau. L'objectif des expérimentateurs est de relancer le débat contradictoire qui a eu lieu entre *A2*, *Y* et *A1* mais qui s'est terminé sur le constat d'un désaccord. L'énoncé de cette preuve de recours affirme que $\sum_{k=0}^{n} 1/(n+k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. La preuve repose essentiellement sur le principe de substitution. Au cours de leur travail, les étudiants parviennent à se mettre d'accord sur le fait que l'énoncé est faux et que la dernière déduction de la preuve est invalide. Cependant, un désaccord persiste entre *Y* et *A1* à propos de la présence de cette dernière déduction dans la preuve initiale sur laquelle ils ont travaillé :

T2 : Hum, hum. Et dans la preuve du début euh, l'énoncé 1, est-ce qu'on fait ce genre de truc ou pas ?

Y : Ben ouais, moi j'aurais dit ça.

A1 : Mais…

A2 : Ah, ah ben du coup, ben du coup, on revient sur ce qu'on avait fait nous, à la fin.

Y : Ouais, ouais, c'est là quoi… On fait tendre tous les termes vers 1/*n*!, et on en rajoute d'autres et ceux-là, on s'en est pas occupé.

A1 : Ouais, mais notre somme, on essayait pas de la faire tendre vers euh, vers zéro.

(*E-L1-C*, 368-373, annexe 21)

A1 : Si parce que là, là, le premier terme déjà, il… Il donne une espèce de base, je me rappelle plus combien ça fait 1/3!...

A2 : 1/6.

A1 : 1/6, ouais, il donne une espèce de base qui fait que c'est à peu près 2,67 et le reste ajoute des tout petits éléments de… De correction un peu.

(*E-L1-C*, 383-385, annexe 21)

Comme précédemment, *Y* et *A1* n'utilisent pas des arguments de même nature dans leur comparaison entre les deux preuves. *Y* se concentre toujours sur la forme des énoncés (et la lecture qu'il fait de leur quantification). Il considère que la preuve de recours et la preuve initiale utilise le même argument dans leur conclusion. *A1* insiste sur la différence entre les objets en jeu pour les deux preuves. Il semble que cela le conduise à considérer ce que *Y* regarde comme une unique déduction invalide (au sens de la forme logique des énoncés) comme deux déductions autonomes et distinctes qui méritent d'être évaluées séparément. *A1* considère que la première est valide et que la seconde est invalide. Le contexte de chacune des preuves contribue donc de manière prépondérante aux activités d'évaluation des déductions de *A1* :

A1 : Ouais cet argument, il vient quand même d'un, d'une proposition quoi, bien connue.

Y : Cet argument-là ?

A1 : Ouais, que ça tend vers *e*.

Y : Non, non, mais je te parle pas de ça moi. Je te parle de…

A2 : Tout ce qu'il reste…

(*E-L1-C*, 400-404, annexe 21)

A l'inverse, *Y* considère que l'énoncé de la preuve de recours fournit une interprétation sémantique pour la déduction en jeu qui peut être utilisée pour un contrôle sémantique de la déduction évaluée dans l'énoncé 1. Ce type d'activité est rendu possible par le repérage d'une identité de forme entre les deux contextes, incluant une identité au niveau de la quantification. Il paraît assez délicat de faire des hypothèses sur l'appréhension de la quantification des énoncés de la preuve par *A1*. Cependant, on peut remarquer que ces questions n'occupent que très peu de place au niveau de ses arguments explicites. La prise en charge des relations entre les objets qui sont mis en avant dans chacune des deux preuves et la structure syntaxique des énoncés présents dans les déductions reste tacite. Dans le vocabulaire de ce chapitre, le fait de mettre l'accent sur la description des objets au détriment de leur mise en relation avec les énoncés via les règles sémantiques de quantification correspond aux pratiques des jeux de description.

Synthèse 16. L'usage du vocabulaire de la variation permet à *Y*, du groupe d'étudiants de L1, de repérer une identité de forme entre plusieurs usages du principe de substitution dans des contextes différents. Cette prise en compte de la forme des énoncés est nécessaire à la pratique des jeux sémantiques. A l'inverse, *A1* est très attaché à la nature des objets en jeu dans chacune des preuves.

Synthèse de l'analyse du corpus

Je propose ici une synthèse des résultats obtenus lors de l'analyse a posteriori de mon expérimentation principale. Au niveau de la première question d'analyse, i.e. le repérage des points délicats des raisonnements, on peut relever une graduation des résultats. Certains aspects ne sont relevés par aucun groupe. Par exemple, aucun étudiant de mon étude ne s'est rendu compte que la manière dont était quantifiée l'équation générale $f(x + h) - f(x) = h(f'(x) + \varepsilon)$ de la preuve de Liouville ne permettait pas de conclure immédiatement à la convergence vers zéro de la fonction ε_2 caractérisée par l'égalité $f(a+2h) - f(a+h) = h\varepsilon_2$. D'une manière générale, les étudiants de première année ont rencontré des difficultés pour repérer les points méritant une attention particulière. Par exemple, l'intervention des expérimentateurs a été nécessaire pour que les groupes d'étudiants de première année s'intéressent spécifiquement à la convergence du maximum des ε_i dans la preuve inspirée par le cours de Liouville. Dans l'autre preuve, les débats des deux groupes de l'INSA concernant l'application du principe de substitution ont également été impulsés par les expérimentateurs. La situation est différente pour les groupes d'étudiants de M1. Pour autant, les discussions concernant la validité des preuves ont été fournies ce qui montre que cette question leur a demandé un réel travail. Ces résultats montrent que les éléments identifiés comme épistémologiquement consistants lors des deux premiers chapitres de cette partie sont aussi consistants sur un plan didactique. Ensuite, ils mettent en évidence que les difficultés mathématiques sous-jacentes à l'analyse de ces preuves ne seraient le plus souvent pas perçues par les étudiants de première année si personne ne les accompagnait dans leur lecture. Ce phénomène est lié aux difficultés rencontrées par les étudiants pour interpréter l'usage des lettres dans la preuve. Les étudiants de première année ne paraissent pas équipés pour faire face aux nombreux implicites des preuves qui leur ont été proposées.

La deuxième question de mon analyse a posteriori aborde le thème de l'usage des lettres dans les processus déductifs. Je m'intéresse à la compréhension des étudiants des jeux dialogiques d'arrière plan qui confèrent une dimension stratégique à ces usages. Au niveau de la première preuve, mon étude s'est concentrée sur les occurrences de la lettre ε. Le principal résultat est que les étudiants s'appuient sur des éléments de surface pour faire face aux difficultés rencontrées dans l'interprétation de la dimension stratégique des différents usages de cette lettre. Ils utilisent l'assertion « ε tend vers 0 quand *h* tend vers 0 » pour chaque occurrence de la lettre ε, quelque soit leur contexte de quantification. Dans la deuxième preuve, le phénomène qui a fait l'objet de la plupart des analyses est celui de l'interprétation des variations de la lettre *n*. Chacun des groupes d'étudiants a envisagé la possibilité que la lettre *n* « varie » dans des situations où son statut logique est celui d'une lettre d'indice. Plus précisément, ils ont pris en compte l'éventualité d'un changement de rang pour le *n*ième terme de la somme définissant u_m lors de l'augmentation de son nombre de termes avec *m*. J'ai interprété ce phénomène comme un effet des interférences heuristiques entre les deux usages successifs de la lettre *n* pour lesquels elle possède un statut logique différent (celui d'une lettre d'indice et celui d'une lettre de variable universellement quantifiée). Enfin, il arrive que l'identification de la dimension stratégique de la quantification se construise à partir de l'usage du vocabulaire de la variation et de la temporalité. Par exemple, le fait que la lettre *m* apparaisse deux fois dans l'expression $u_m = s(m, m)$ et qu'elle soit quantifiée par un même quantificateur universel conduit certains étudiants à affirmer que la somme définissant u_m grandit en même temps que chacun de ces termes convergent individuellement ou que d'autres termes de la somme se rajoutent après que les premiers termes aient convergé[128]. Cette pratique ne permet pas toujours aux étudiants d'expliciter leurs désaccords.

Un autre axe d'analyse a été celui de l'examen de la prise en compte des règles associées à la quantification dans les contrôles sémantiques des énoncés et des preuves. Les pratiques des étudiants sont assez variées. Les étudiants de M1 de l'expérimentation principale parviennent relativement bien à identifier la forme des arguments afin de chercher des interprétations

[128] Il s'agit de ma reformulation de leurs expressions.

sémantiques qui montrent que certaines déductions sont invalides. Leurs pratiques sémantiques de mise en relation des objets et des prédicats peuvent souvent être interprétées comme relevant d'un usage réglé selon les critères logico-mathématiques. On peut néanmoins observer des désaccords sur les pratiques sémantiques de quantification dans l'activité des étudiants du groupe de M1 travaillant sur la preuve issue du cours de Liouville. Pour ce qui est des groupes d'étudiants de première année, la prise en compte de la syntaxe de la quantification dans les processus sémantiques est plus aléatoire. Mes analyses ont mis en évidence des pratiques relevant de jeux de description. Un premier exemple est donné par le travail des étudiants du deuxième groupe de l'INSA confrontés à la preuve adaptée du cours de Liouville. Ces étudiants ne perçoivent pas la structure générale de la preuve qui repose sur la caractérisation des fonctions constantes par la formule $\forall a \forall b, f(a) = f(b)$. Pour eux, le fait d'être une fonction constante est un fait qui concerne *tous* les éléments du domaine de définition de la fonction et pas seulement deux éléments donnés en début de preuve. Dans cette dernière phrase leur compréhension du terme « tous » ne repose pas sur une pratique quantifiée (au sens de la quantification explicité dans le premier chapitre de cette partie) mais plutôt sur une description des relations entre les images par la fonction des objets du domaine d'interprétation. Ils considèrent alors que la preuve de Liouville est insuffisante. Pour ce qui concerne la deuxième preuve, j'ai décrit les pratiques de deux étudiants du groupe de L1. Le premier parvient à prendre en compte la syntaxe des énoncés pour effectuer des contrôles sémantiques à travers l'usage du vocabulaire de la variation. Le second pratique des jeux de description, la nature des objets en jeu dans les preuves joue un rôle prépondérant dans l'évaluation des énoncés et des inférences au détriment de la prise en compte de leur structure syntaxique.

CONCLUSION

Cette dernière partie a été consacrée à l'évaluation des pratiques des étudiants concernant la manipulation des objets et des lettres dans l'activité mathématique. Dans le premier chapitre, j'ai commencé par expliciter des explications logiques pour ces manipulations. Les jeux d'extérieur rendent compte de la manipulation des objets, les jeux d'intérieur de la manipulation des lettres. Ce chapitre m'a permis de mettre en évidence la relative complexité ainsi que la pluralité de ses explications. Il m'a également donné des outils importants dans la perspective de la description de l'activité mathématique. Dans le deuxième chapitre, je me suis intéressé aux pratiques de preuve de trois mathématiciens du XIXème siècle. Cette approche historique m'a permis d'identifier certaines difficultés épistémologiques consistantes concernant la quantification dans le contexte mathématique. L'approche expérimentale proprement dite a été l'objet de mon troisième chapitre. Mon analyse s'est construite à partir de transcriptions de dialogues d'étudiants de plusieurs niveaux. Ces dialogues concernent l'évaluation d'énoncés isolés du langage naturel (lors de la pré-expérimentation) ou la lecture et l'évaluation de deux preuves d'Analyse réelle (lors de l'expérimentation principale). Une synthèse des résultats se trouve à la page précédente.

Ce dernier chapitre de la partie a aussi été l'occasion de confronter, sur un corpus original, les outils d'analyse et de modélisation que j'ai présentés dans la deuxième partie de la thèse. Ces outils sont la logique dialogique de Lorenzen au niveau des jeux d'intérieur et la correction de la sémantique GTS par Vernant pour les jeux d'extérieur. Une difficulté, intrinsèque au processus de modélisation, est de parvenir à une explication qui ne soit pas réductrice ou sens où elle identifierait l'activité mathématique analysée à ce que les outils utilisés permettent effectivement de décrire. Cette difficulté est d'autant plus sensible dans ce travail puisqu'il existe un écart conceptuel important entre les théories qui sont à l'origine des outils que j'utilise et les théories qui sont sous-jacentes dans les activités des étudiants de mon expérimentation (et des mathématiciens du XIXème siècle). Cet écart concerne en particulier les explications théoriques de la quantification. De mon point de vue, il est également à la source des possibilités d'analyse que la modélisation est susceptible d'offrir dans la mesure où il offre un espace pour une description et une discussion qui ne soient pas seulement une reformulation utilisant le même langage. Pour donner un exemple, il m'a permis de proposer trois lectures différentes de la preuve de Bolzano dans le premier paragraphe du deuxième chapitre. La pluralité de ces lectures, qui se situent dans un cadre logique différent de celui utilisé par Bolzano, me parait contribuer à une meilleure compréhension de cette preuve. D'un autre côté, il m'a aussi paru nécessaire de compléter ces outils lorsque l'écart de conceptualisation de la quantification était trop important et que les possibilités de description offerte par la logique du premier ordre me semblaient limitées. Dans cette perspective, j'ai introduit une notion de jeux d'intérieur dont les règles de manipulation des lettres sont non standards, au sens où ces règles ne peuvent pas s'interpréter au regard de la distinction fondamentale entre lettres de prédicat et lettres d'objet qui est à la base de la logique moderne. Au niveau des jeux d'extérieur, je me suis servi de la notion de jeux de description pour rendre compte de certaines pratiques pour lesquelles l'extension de la notion de vérité des énoncés atomiques aux énoncés complexes et quantifiés reposait sur une pragmatique de la communication ayant peu de relations avec la pragmatique proposée par la sémantique GTS. Ce choix d'introduire de nouvelles notions est aussi une forme de réponse à la question de recherche formulée dans la deuxième partie de la thèse concernant la possibilité d'intégrer les considérations pragmatiques au sein de l'outil de modélisation (partie deux, chapitre un, deuxième paragraphe). Plus précisément, si la sémantique GTS permet de réduire l'écart entre la sémantique et la pragmatique grâce à son approche dialogique, il me semble que l'ambition d'identifier dans une même théorie la sémantique et la pragmatique est trop ambitieuse dans une perspective didactique. Pour autant, la formalisation du concept de stratégie à travers la notion de jeux sémantiques permet d'expliquer de manière pertinente certains phénomènes de communication. Il s'agit aussi d'un résultat important de la thèse. Par exemple, j'ai pu modéliser un phénomène langagier de ma pré-expérimentation en m'appuyant sur un jeu sémantique pour lequel les règles restreignaient les possibilités de gain pour le proposant en le contraignant à la construction de stratégies injectives. A un autre moment, cette fois dans mon expérimentation principale, j'ai modélisé un discours faisant usage du vocabulaire de la variation dans le temps par un méta-discours sur le fait qu'une stratégie gagnante dans un jeu dialogique donné possède ou non les propriétés de croissance, de majoration etc. Par ailleurs, mes outils d'analyse et de modélisation ont aussi été utiles lorsqu'il m'a semblé nécessaire de préciser des questions de quantification en explicitant la structure logique des jeux (d'intérieur ou d'extérieur) de validation de certains processus de preuve. J'ai proposé des modélisations explicites à plusieurs reprises, aussi bien dans l'analyse historique que dans l'analyse expérimentale. Ces explicitations ont été un élément important de la précision de l'analyse didactique de l'activité mathématique.

CONCLUSION GENERALE

Cette thèse s'est intéressée aux situations de validation en mathématiques, et en particulier aux leurs aspects langagiers. Mon objectif était d'explorer les potentialités d'une approche sémantique et dialogique de ces situations. Ce travail a eu deux principaux moments : un moment plutôt théorique, d'abord conceptuel puis ensuite plus formel et un moment plutôt expérimental. Tout au long de cette recherche j'ai librement croisé plusieurs types d'approches de l'activité mathématiques, relevant parfois de champs disciplinaires distincts comme la didactique, la philosophie ou encore l'histoire des mathématiques. Cette méthodologie de recherche pluridisciplinaire est relativement délicate, à plus forte raison pour un jeune chercheur, dans la mesure où elle demande des investigations de types assez variés. Evidemment, la précision de chacune d'entre elles se trouve réduite par le temps qu'il est envisageable d'y accorder dans le cadre d'un travail de doctorat. Je vais donc essayer d'être aussi précis que possible dans la conclusion de ce travail, en particulier en ce qui concerne le contexte méthodologique de la production des résultats.

1) *Contribution à la conceptualisation didactique des processus de validation.* Cette contribution repose sur la mise en place d'un vocabulaire qui permette à la fois de rendre compte de la distinction entre les dimensions syntaxique et sémantique de l'activité mathématique mais aussi des aspects pragmatique et dialogique de l'usage du langage. Ce vocabulaire est celui des jeux d'intérieur et des jeux d'extérieurs. Il trouve son origine dans le travail de Hintikka, à qui j'emprunte les termes en question, mais aussi plus largement dans les nombreuses références aux jeux de la Théorie des Situations Didactiques Mathématiques de Brousseau. Je me suis appuyé sur cette conceptualisation pour conduire des analyses épistémologiques de plusieurs preuves empruntées à l'Histoire des mathématiques. Je m'en suis également servi au moment d'analyser le corpus recueilli à l'issu de mes expérimentations. L'approche sémantique permet de décrire la manière dont s'articulent les interactions avec le milieu dans les processus de validation. Elle met en évidence les relations dialectiques qui existent entre l'action sur les objets d'un domaine d'interprétation et la mise en place d'une théorie qui serve à conduire les inférences formelles. L'approche dialogique permet d'aborder ces phénomènes dans leur dimension pragmatique. Elle les explique comme un produit d'une activité sociale de recherche concernant la vérité d'un énoncé (une prise de décision) ou sa déductibilité au sein d'une théorie (une validation au sens strict). Ce premier

résultat repose d’une part sur un essai de synthèse théorique entre plusieurs explications, didactiques ou philosophiques, de la validation mathématique mais aussi sur un certain nombre de confrontations expérimentales.

2) *Retour sur les fondements épistémologiques de la Théorie des Situations Didactiques Mathématiques*. Comme je l’ai signalé dans l’introduction de la thèse, l’ambition première de mon travail était de revenir sur les présupposés logiques de TSDM et en particulier d’envisager une alternative à la logique dialogique de Lorenzen dans le contexte de la modélisation des rapports entre le Proposant et l’Opposant dans les situations de validation. Dans cette perspective, j’ai exploré dans la sémantique GTS et en particulier sa correction par Vernant, la logique dialogique de la véridicité. Cette correction inclut dans les règles du jeu la possibilité de réaliser des transactions avec le milieu des joueurs. Elle rompt avec l’objectif initial de la sémantique GTS, qui est de revisiter les fondements des mathématiques, mais me paraît indispensable du point de vue de la modalisation de l’*activité* mathématique. Il me semble que l’intervention d’une modélisation sémantique comme celle-ci, aux côtés de la modélisation de Lorenzen qui s’intéresse exclusivement à la forme des énoncés, permet de décrire comment la manipulation des objets est susceptible de venir enrichir et développer les activités de validation. Elle me semble cohérente du point de vue des ambitions de la Théorie des Situations Didactiques. Ces résultats sont notamment construits sur la lecture de textes de Lorenzen, Hintikka et Vernant. Cette lecture a été orientée par un filtre didactique, si bien que j’ai parfois délaissé certains aspects traitant de logique mathématique ou de linguistique. Je ne prétends pas avoir réalisé une interprétation complètement fidèle de ces auteurs. Ceci n’était pas mon objectif puisque cette thèse s’intéresse à l’activité mathématique de validation d’un point de vue didactique. En ce qui concerne les fondements épistémologiques de la Théorie des Situations, ce travail m’a permis de présenter un argument précis et reposant sur un formalisme explicite pour mettre en évidence l’insuffisance du point de vue syntaxique offert par la logique dialogique de Lorenzen sur l’activité de validation. Par extension, cet argument s’adresse aussi au modèle de Duval que je discute dans le troisième chapitre de la première partie de la thèse.

3) *L’intégration de la dimension pragmatique de l’activité langagière au sein de la modélisation didactique.* Une question de recherche qui était en filigrane de mon travail était celle de la possibilité, revendiquée par Hintikka, de traiter les questions de pragmatique à travers son explication sémantique et dialogique de la vérité. Au niveau didactique, cette question se situe dans le prolongement des travaux de Durand-Guerrier, laquelle utilise le

formalisme de la théorie des modèles pour conduire certaines analyses didactiques mais aborde la pragmatique par des considérations le plus souvent informelles. La thèse montre que la notion de stratégie de la sémantique GTS, qui est la principale notion pragmatique de cette théorie, permet de modéliser certains phénomènes pragmatiques. Par exemple, la notion de stratégie permet de modéliser certains éléments de la notion de contrat didactique. Les attendus d'un élève dans une situation didactique par rapport à son enseignant peuvent être modélisés à travers les concessions potentielles de l'opposant au sein d'un jeu dans lequel la tâche de l'élève est de construire une stratégie gagnante. J'ai envisagé ce cas de figure dans la deuxième partie de la thèse (chapitre 3). Par ailleurs, des analyses de phénomènes de communication de la partie expérimentale se sont aussi appuyées sur cette notion de stratégie. A l'inverse, la thèse montre aussi que certains phénomènes langagiers semblent échapper à une analyse en ces termes. Il s'agit en particulier des situations pour lesquelles j'ai été amené à introduire le concept de jeux de description. Les résultats concernant l'utilisation de la notion logico-mathématique de stratégie pour décrire des phénomènes pragmatiques résultent essentiellement d'un travail expérimental et exploratoire. Ce sont donc des résultats ponctuels, qui sont apparus au cours de mes expérimentations sans qu'une méthodologie ne soit spécifiquement développée dans cette direction.

4) *L'analyse logique et historique de la quantification mathématique*. Au cours de la troisième partie de la thèse, j'ai été amené à présenter certaines explications logiques de la quantification et à analyser certaines pratiques historiques de mathématiciens. L'objectif principal de ce travail épistémologique était de contribuer à l'analyse didactique en proposant divers éclairages sur la notion abordée. Ses résultats sont donc d'ordre didactique plutôt que logique ou historique. L'approche logique a permis la mise en évidence de la diversité conceptuelle des approches logiques existantes de la quantification et leur relative technicité. L'étude de textes de Bolzano, Lacroix et Duhamel a permis d'expliciter plusieurs aspects de l'historicité de l'explication de la quantification à travers des processus de substitution ordonnés. Ces éléments d'analyse épistémologiques ont largement contribué à la mise en place de mon expérimentation. Ils m'ont orienté dans le choix des preuves qui ont été proposées aux étudiants en attirant mon attention sur des difficultés relevées comme consistantes (l'usage du principe de substitution et l'affirmation du caractère infiniment petit du maximum de « quantités » infiniment petites).

5) *La pratique de la quantification chez les étudiants dans le domaine mathématique de l'Analyse*. Enfin, mes expérimentations propres m'ont permis de procéder à des analyses des

pratiques langagières en mathématiques des étudiants dans l'enseignement supérieur. Je me suis intéressé spécifiquement au domaine mathématique de l'Analyse et aux pratiques concernant la quantification. Le principal constat de ce travail est que les étudiants de première année ne sont pas en situation de relever les difficultés mathématiques associées à une pratique fine et implicite de la quantification. En l'absence d'outils adéquats, ceux-ci s'appuient sur des considérations de surface qui ne leur permettent pas de pénétrer la complexité des phénomènes associées au point de vue moderne sur l'Analyse élémentaire. Ils utilisent aussi parfois le vocabulaire de la temporalité mais sont confrontés aux mêmes difficultés. Autrement dit, les étudiants structure leur jeux de langage à partir des éléments qu'ils ont à leur disposition et ces éléments ne leur permettent pas toujours de saisir l'usage stratégique les lettres dans les preuves mathématiques. Par ailleurs, l'étude expérimentale montre aussi qu'au niveau des contrôles sémantiques, les étudiants rencontrent des difficultés à se détacher des objets en jeu pour conduire des jeux sémantiques tenant aussi compte de la structure syntaxique des énoncés ou des inférences évalués. Ces résultats sont issus d'expérimentations essentiellement exploratoires lesquelles ont mobilisé vingt et un étudiants et cinq expérimentateurs. La méthodologie utilisée a été d'enregistrer les dialogues des étudiants afin de les transcrire et de les analyser. Concernant l'expérimentation principale, l'analyse s'est construite comme une réponse à trois questions de recherche dont la formulation définitive est le produit des analyses épistémologiques des deux premiers chapitres et de la pré-expérimentation.

Je termine ce travail par quelques remarques sur le statut de l'analyse logique au sein de l'analyse didactique en mathématique. D'une manière générale, il me semble que la contribution de la logique à la conceptualisation en mathématiques est sous-estimée. Il y a plusieurs raisons à cela. Je pense en particulier à l'identification de la logique avec ses seuls aspects syntaxiques ou encore avec le calcul des propositions. Ces réductions diminuent d'autant les possibilités de ce qui est considéré comme relevant de l'analyse logique. D'autre part, la logique est souvent identifiée avec un ensemble de normes dont le rôle est d'assurer la correction des raisonnements. Dans l'enseignement, ces normes sont par exemple données par la règle de contraposition, la règle du contre-exemple (pour les propositions universelles), la loi de De Morgan, la méthode de preuve par l'absurde ou encore les techniques de négation des énoncés quantifiés. Cette approche met l'accent sur la problématique de la correction des pas d'inférence. Au moment de terminer cette thèse, il me paraît important de souligner que cet aspect n'épuise pas la contribution de la logique à l'activité mathématique. La logique de la quantification est par exemple un élément constitutif de la conceptualisation de l'Analyse réelle. Il ne s'agit pas pour autant d'opposer la question de la validité des raisonnements avec celle du développement des concepts et des objets mathématiques. Au contraire, une partie importante de la thèse entreprend de montrer les relations dialectiques qui existent entre la construction des objets mathématiques et la mise en place d'une théorie (incluant des normes de déduction) dans laquelle les propriétés de ces objets puissent être exprimées. La logique me paraît susceptible de contribuer à la description et à l'analyse de ces interactions. Je m'appuie sur Benbachir & Zaki (2001) afin de préciser cette position. Dans cet article, les auteurs s'intéressent aux processus de production d'exemples et de contre-exemples pour des énoncés d'Analyse concernant des fonctions d'une variable réelle. Une de leurs hypothèses de travail, soutenue par des considérations historiques, est celle de l'importance de l'activité de production d'exemples et de contre-exemples dans le développement de l'Analyse mathématique. L'approche historique du deuxième chapitre de la troisième partie de la thèse a également souligné l'importance de la construction des objets et de la disponibilité des contre-exemples dans le développement de l'Analyse. Elle a aussi mis en évidence, les rapports qu'il y a avait entre l'intégration conceptuelle de la distinction entre *fonction* et *argument* (et de manière plus générale entre *concept* et *objet*) et l'émergence de ces contre-exemples. Ce point de vue semble, au moins en partie, s'accorder avec Benbachir & Zaki (2001) :

> « Ainsi, en 1878, Darboux écrivait à Houël, auteur d'un ouvrage de calcul différentiel et intégral largement diffusé à l'époque, qu'il y avait un certain nombre de théorèmes faux dans son cours et les réfutait en construisant des contre-exemples. Houël récusait ces exemples sous prétexte *qu'il n'avait pas ces fonctions en vue* (cf. Gispert, 1982). On peut affirmer que, pendant toute une période, deux points de vue sur les fonctions ont eu cours: d'une part celui qui relève des fonctions de base et des graphiques, et d'autre part celui qui correspond à une loi qui à chaque valeur x de la variable fait correspondre un $f(x)$. » (Benbachir & Zaki, 2001, p. 274)

Pour autant, certains aspects de leur conclusion divergent sensiblement de la manière dont j'ai envisagé les choses dans cette thèse. A propos du rapport entre les difficultés mathématiques et les difficultés logiques dans le processus de production des exemples et des contre-exemples, les auteurs affirment :

> « L'étude historique avait montré que la difficulté des mathématiciens à accepter des fonctions 'non classiques' comme contre-exemples relevait de leur représentation du concept de fonction et non pas de difficultés logiques. De même, aucune difficulté d'ordre logique, relative par exemple au traitement de la négation, n'est apparue chez les étudiants. » (Benbachir & Zaki, 2001, p. 294)

De mon point de vue, la prise en compte de la distinction entre fonction et argument est bien une difficulté d'ordre logique. Elle s'accompagne du développement d'une théorie de la quantification[129] qui est elle-même un élément fondamental du développement de l'Analyse. L'analyse sémantique et dialogique de la preuve du principe de substitution par Duhamel ou l'analyse de la validité de la preuve étudiée de Liouville ont montré la nécessité d'une pratique relativement fine de la quantification dans la production des contre-exemples pour les arguments évalués. Dans la première citation de Benbachir et Zaki, il est probable que les auteurs utilisent le terme « logique » dans le sens dégagé plus haut d'un ensemble de normes locales de déduction. Les difficultés de construction des contre-exemples en Analyse ne sont effectivement pas des difficultés logiques dans ce sens là, mais plutôt dans le sens de la contribution de la logique à la mise en place d'un langage adéquat pour la description des objets et la réalisation de déductions. Par exemple, il n'est à ma connaissance pas possible de construire un exemple de fonction continue et nulle part dérivable sans recourir à un usage fin et quantifié des notions de fonction, de suite et de limite. Autrement dit, l'élaboration de ce contre-exemple repose aussi sur l'élucidation de la structure logique des principaux concepts d'Analyse.

[129] Voir l'introduction du deuxième chapitre de la troisième partie.

BILIOGRAPHIE

Alcock, L., & Inglis, M. (2008). Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational studies in mathematics, 69*, 111-129.

Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: inferring and checking warrants. *Journal of mathematical behaviour, 24*, 125-134.

Armatte, M. (2005). La notion de modèle dans les sciences sociales : anciennes et nouvelles significations. *Mathematics and Social Sciences, 172*, 91-123.

Arsac, G., & Durand-Guerrier, V. (2001). Logique et raisonnements mathématiques. Variabilité des exigences de rigueur dans les démonstrations mettant en jeu des énoncés existentiels. In T. Assude & B. Grugeon (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp. 55-83). IREM de Paris VII.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et de validation. *Educational studies in mathematics, 18, 2*, 147-176.

Balacheff, N. (2008). The role of researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *Zentblatt fur didaktik der mathematik, 40, 3*, 501-512.

Barallobres, G. (2004). La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherches en didactique des mathématiques, 24, 2.3*, 285-238.

Barallobres, G. (2007). Introduction à l'algèbre par la généralistaion : problèmes didactiques soulevés. *For the learning of mathematics, 27, 1*, 39-44.

Barrier, T. (2005). *Fondements logiques vs. Fondements cognitifs pour les mathématiques.* Mémoire de DEA, Université Paris 1 - Panthéon - Sorbonne, Paris.

Barrier, T. (2008). Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques. *Education et didactique, 2, 3*, 35-58.

Barrier, T. (à paraître-a). Perspectives pragmatiques sur la dialectique des médias et des milieux. In *Actes du IIième congrès international sur la théorie anthropologique du didactique. Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, Octobre-Novembre 2007, Uzès, France.

Barrier, T. (à paraître-b). Quantification et Variation en Mathématiques : perspectives didactiques issues de la lecture d'un texte de Bolzano. In *Proceedings of the 5th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, 17-19 April 2008, Rethymnon, Crete.

Barrier, T., Durand-Guerrier, V., & Blossier, T. (2009). Semantic and game-theoretical insight into proof and argumentation. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villier (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. ICMI study conference proceedings* (Vol. 1, pp. 77-82). Taipei, Taiwan.

Barrier, T., Mathé, A.-C., & Durand-Guerrier, V. (à paraître). Argumentation and proof: a discussion about Toulmin's and Duval's models. In *Proceedings* of CERME 6*, 28 January- 1 February 2009*. Lyon, France.

Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique pour l'apprentissage du raisonnement mathématiques.* Thèse de doctorat, Université Paris 7, Paris.

Battie, V. (2007). Exploitation d'un outil épistémologique pour l'analyse de raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes en arithmétique. *Recherches en didactique des mathématiques, 27*, 9-44.

Benbachir, A. & Zaki, M. (2001). Production d'exemples et de contre-exemples en analyse : étude de cas en première année d'université. *Educational Studies in Mathematics, 47, 3*, 273-295.

Benmakhlouf, A. (2000). La proto-sémantique de Bolzano. *Les études philosophiques, 4*, 489-504.

Benoist, J. (2004). Le problème de la référence au début du XX° siècle. Essai de philosophie comparée. In F. Worms (Ed.), *Le moment 1900 en philosophie* (pp. 83-100). Lille : Presses universitaires du Septentrion.

Bertrand, J. (1856). *Traité de calcul différentiel et intégral*. Tome 1. Paris : Gauthier-Villard.

Beth, E. W. (1959). *The foundation of Mathematics, a Study*. Amsterdam: North-Holland.

Blossier, T., Barrier, T., & Durand-Guerrier, V. (2009). Proof and quantification. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villier (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. ICMI study conference proceedings* (Vol. 1, pp. 83-88). Tapei, Taiwan.

Bolzano, B. (1810). *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik* (trad. anglaise de S. Russ dans Ewald (ed.), *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*. Oxford, Clarendon Press, 1996, 174-224). Prague: Caspar Widtmann.

Bolzano, B. (1817). *Rein analytischer beweis des lehrsatzes, dass zwischen je zwei werten, die ein entgegengesetztes resultat gewähren, wenigstens eine reelle wurzel der Gleighung liege* (trad. anglaise de S. Russ dans William B. Ewald (ed.), *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*. Oxford, Clarendon Press, 1996, 225-248). Prague: Gottlieb Hasse.

Brousseau, G. (1997). *La théorie des situations didactiques.* Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal (http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf).

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2002). Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques. *Questions éducatives, l'école et ses marges : didactique des mathématiques, 22-23*, 83-155.

Brousseau, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation, XXX*, 241-277.

Chauviré, C. (2005). La quantification chez C. S. Pierce. In P. Joray (Ed.), *La quantification dans la logique moderne* (pp. 73-96). Paris: L'Harmattan.

Chellougui, F. (2004). *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard - Lyon 1, Université de Tunis, Lyon.

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques In S. Maury & M. Caillot (Eds.), *Rapport au savoir et didactique* (pp. 81-104). Paris: Fabert.

Chevallard, Y. (2007a). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Actes du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique. Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico,* Octobre 2005. (pp. 705-746). Baeza, Espagne.

Chevallard, Y. (2007b). Education et Didactique : une mise en tension essentielle. *Education et Didactique, 1/1*, pp. 9-27.

Chihara, C. (1999). Frege's and Bolzano's rationalist conceptions of arithmetic. *Revue d'histoire des sciences, 52, 3-4*(Mathématiques et logique chez Bolzano), 343-361.

Coffa, J. A. (1993). *The semantic tradition from Kant to Carnap : to the Vienna Station*: Cambridge University Press.

Copi, I. M. (1954). *Symbolic Logic*. New York: Hardcover.

Dedekind, R. (2006). *Traités sur la théorie des nombres*. Genève : Editions du Tricorne.

Deloustal-Jorrand, V. (2004). *L'implication mathématique : une étude épistémologique et didactique. Etude sous trois point de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication.* Thèse de doctorat, Universite Joseph Fourier - Grenoble 1, Grenoble.

Dias, T., & Durand-Guerrier, V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM, 60*, 61-78.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational studies in mathematics, 38*, 85-109.

Dubinsky, E. (1997). On learning quantification. *Journal of computer in mathematics and science teaching, 16(2)*, 335-362.

Dubinsky, E., & Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Reasearch in Collegiate Mathematics Education IV - Issues in Mathematics Education (Vol. IV)*: CBMS.

Dubucs, J., & Lapointe, S. (2003). Preuves par excellence. *Philosophiques, 30, 1*(Bernard Bolzano. Philosophie de la logique et théorie de la connaissance.), 219-234.

Dubucs, J. P. (2003). Preuves, Fondements et Certificats. *Philosophia scienciae, 7, 1*, 167-178.

Dugac, P. (2003). *Histoire de l'analyse*. Paris: Vuibert.

Duhamel, J.-M. C. (1856). *Elément de calcul infinitésimal*. Paris: Mallet-Bachelier.

Durand-Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnment mathématique : défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard - Lyon 1, Lyon.

Durand-Guerrier, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique.* Habilitation à Diriger des Recherche, Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon.

Durand-Guerrier, V. (2007). Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques, à la lumière de la théorie des modèles de Tarski. In A. Rouchier (Ed.), *Actes sur CD-Rom du colloque international de l'AFIRST "Didactiques : quelles références épistémologiques ?"*, 25-27 mai 2005, Bordeaux.

Durand-Guerrier, V. (2008). Truth *versus* validity in mathematical proof. *Zentblatt fur didaktik der mathematik*, 373-384.

Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2003). Méthode de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en didactiques des mathématiques, 23, 3*, 295-342.

Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2005). An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. *Educational studies in mathematics, 60, 2*, 149-172.

Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2009). Analysis of mathematical proofs: some questions and first answers. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna & M. d. Villiers (Eds.), *Proof and proving in* *mathematics education. ICMI Study 19 Conference Proceedings* (Vol. 1, pp. 148-153). Taipei, Taiwan.

Durand-Guerrier, V., Héraud, J.-L., & Tisseron, C. (2006). *Jeux et Enjeux de Langage dans l'Elaboration des Savoirs en Classe*. Lyon: Presse Universitaire de Lyon.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration *Educational studies in mathematics, 22*, 233-261.

Duval, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x, 31*, 37-61.

Duval, R. (2002). Proof understanding in mathematics: What ways for students. In F.-L. Lin (Ed.), *Proceedings of 2002 International Conference on Mathematics, "Understanding proving and proving to understand"* (pp. 61-77). Taipei: National Taiwan Normal University.

Epp, S. (2009). Proof issues with existential quantification. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna & M. d. Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. ICMI Study 19 conference proceedings*(Vol. 1, pp. 154-159). Taipei, Taiwan.

Errera, J.-P., & Héraud, J.-L. (2006). Sémantique et Didactique des « Jeux de Langage ». In J.-L. Héraud, V. Durand-Guerrier & C. Tisseron (Eds.), *Jeux et enjeux de langage dans l'élaboration des savoirs* (pp. 15-40). Lyon: PUL.

Frege, G. (1967). *The basic laws of arithmetic*. (trad. anglaise de M. Furth). Berkeley: University of California.

Frege, G. (1971). *Ecrits logiques et philosophiques*. (trad. fançaise de C. Imbert). Paris : Seuil.

Gardies, J.-L. (1994). *Les fondements sémantiques du discours naturel*. Paris : Vrin.

George, R. (2003). Intuitions. *Philosophiques. "Bernard Bolzano. Philosophie de la logique et théorie de la connaissance", 30, 1*, 19-46.

Gödel, K. (1947). What is Cantor's continuum problem ? In P. Benacerraf & H. Putnam (Eds.) *The American Mathematical Monthly, 54*, 515-525. (Version révisée in P. Benacerraf & H. Putnam (Eds.), *Philosophy of Mathematics : Selected Readings*, 1984, 470-485, Cambridge University Press)

Guernier, M.-C., Durand-Guerrier, V., & Sautot, J.-P. (2007). *Interactions Verbales, Didactiques et Apprentissages*: Presse Universitaire de Franche-Comté.

Hauchecorne, B., & Surreau, D. (1996). *Des mathématiciens de A à Z.* Paris: Ellipses.

Heinzmann, G. (2006). Naturalizing Dialogic Pragmatics. In J. v. Benthem, G. Heinzmann, M. Rebuschi & H. Visser (Eds.), *The Age of Alternative Logics : Assessing Philosophy of Logic and Mathematics Today* (pp. 285-297). Dordrecht/Boston/London: Springer.

Hintikka, J. (1994). *Fondements d'une théorie du langage*. Paris: Presses universitaires de France.

Hintikka, J. (1996). *La philosophie des mathématiques chez Kant*. Paris: Presses universitaires de france.

Hintikka, J. (2007). *Les Principes des Mathématiques Revisités* (trad. française de M. Rebuschi, *The principles of mathematics revisited*, 1996, Cambridge University Press). Paris: Vrin.

Hintikka, J., & Kulas, J. (1983). *The game of language. Studies in Game-Theoretical Semantics and its Application.* Dordrecht, Boston, Lancaster: Reidel.

Hintikka, J., & Sandu, G. (1997). Game-Theoretical Semantics. In J. v. Benthem & A. t. Meulen (Eds.), *Handbook of Logic and Language* (pp. 361-410). Amsterdam: Elsevier.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational studies in mathematics, 66, 1*, 3-21.

Jahnke, H. N. (2008). Theorems that admit exceptions, including a remark on Toulmin. *Zentblatt fur didaktik der mathematik, 40, 3*, 363-371.

Joinet, J. B. (à paraître). Nature et Logique de G. Gentzen à J.-Y. Girard (http://www-philo.univ-paris1.fr/Joinet/GentzenGirard.pdf).

Kant, E. (1986). *Prolégomènes à toute métaphysique future qui pourra se présenter comme science*. (trad. française de L. Guillermit). Paris: Vrin.

Kant, E. (1987). *Critique de la Raison Pure*. (trad. française de J. Barni). Paris: GF-Flammarion.

Kouki, R. (2008). *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique.* Thèse de doctorat, Université de Lyon 1, Université de Tunis, Lyon.

Lacroix, S.-F. (1837). *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral*. Paris: Bachelier.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations*. (trad. française de N. Balacheff et J.-M. Laborde, *Proofs and refutations - The logic of mathematical discovery*, 1976, Cambridge University Presse). Paris: Hermann

Laugier, S. (2002). *Mind*, esprit, psychologie, l'esprit. *Methodos N° 2 : L'esprit Mind/Geist*. P.U. du Septentrion.

Laugier, S., & Bonnay, D. (2003). La logique sauvage de Quine à Levi-Strauss. *Archives de philosophie, 66, 1*, 49-72.

Laz, J. (1993). *Bolzano critique de Kant*. Paris: Vrin.

Le Ny, J.-F. (1985). Comment (se) représenter les représentations ? *Psychologie Française, 30 - 3/4*.

Liouville, J. (1840). Sur la limite de $(1 + 1/m)^m$, m étant un entier positif qui croît indéfiniment. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Sér. I, 5*, 208.

Liouville, J. (1995). *Calcul Différentiel*. Paris: Ellipses.

Longo, G. (2009). Theorems as constructive visions. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna & M. d. Villier (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education. Icmi Study 19 Conference Proceedings* (Vol. 1, pp. 13-25). Taipei, Taiwan.

Lorenz, K. (2003). Le dialogue comme sujet et méthode de la philosophie. In F. Armengaud, M.-D. Popelard & D. Vernant (Eds.), *Du Dialogue au Texte : Autour de Francis Jacques* (pp. pp. 49-61). Paris: Kimé.

Lorenzen, P. (1967). *Métamathématiques*. Paris: Gauthier-Villars.

Maddy, P. (1990). *Realism in mathematics*. Oxford University Press.

Majolino, C. (2000). Variation(s) I. Bolzano et l'équivocité de la variation. *Les études philosophiques, 4*, 471-488.

Marion, M. (2006). Hintikka on Wittgenstein : From Language-Games to Game Semantics. *Acta Philosophica Fennica*(Truth and Games : Essays in honour of Gabriel Sandu), pp. 255-274.

Marion, M. (2009). Why Play Logical Games. In O. Majer, A.-V. Pietarinen & T. Tulenheimo (Eds.), *Games: Unifying Logic, Language, and Philosophy* (pp. 3-26). Dordrecht: Springer.

Mathé, A.-C. (2006). *Jeux et enjeux de langage dans la construction d'un vocabulaire de géométrie spécifique et partagé en cycle 3. Analyse de la portée des jeux de langage dans un atelier de géométrie en cycle 3 et modélisation des gestes de l'enseignant en situation.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard - Lyon1, Lyon.

Mathé, A.-C., & Barrier, T. (2009). Jeux et enjeux de langage dans la construction d'un vocabulaire spécifique et de références partagées en géométrie en cycle 3. In I. Bloch & F. Conne (Eds.), *Actes sur CD-Rom de la XIVème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*. Sainte Livrade, France.

Ney, M., Barrier, T., Freud, N., & Hillion, S. (2008). Pédagogie active et évaluation des compétences dans des disciplines fondamentales *actes du cinquième colloque "questions de pédagogie dans l'enseignement supérieur". Enseigner, étudier dans le supérieur : pratiques pédagogiques et finalités éducatives, 1*, 281-288.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed ? *Educational studies in mathematics, 66*, 23-41.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *Zentblatt fur didaktik der mathematik, 40, 3*, 385-400.

Pelletier, F. J. (2000). A history of natural deduction and elementary logic textbooks. In J. Woods & B. Browm (Eds.), *Logical consequence: Rival approaches, Vol. 1* (pp. 105-138). Oxford : Hermes Science Pubs.

Pointille, M.-C., Feurly-Reynaud, J., & Tisseron, C. (1996). Et pourtant, ils trouvent. *Repères-IREM, 24*, 11-34.

Quine, W. V. O. (1975). On empirically equivalent systems of the world. *Erkenntnis, 9, 3*, 313-328.

Quine, W. V. O. (1977). *Le mot et la chose*. (Trad. française de J. Dopp et P. Gochet, Word and Object, 1960, The M.I.T. Press). Paris : Flammarion.

Quine, W. V. O. (2002). L'esprit et les dispositions verbales (Trad. française deM. Montminy et A. P. Bruneau). In *Philosophie de l'esprit* (Vol. tome 1). Paris: Vrin.

Rahman, S., & Tulenheimo, T. (2006). From Games to Dialogues and Back. . In O. Majer, A.-V. Pietarinen & T. Tulenheimo (Eds.), *Games: Unifying Logic, Language, and Philosophy* (pp. 153-208). Dordrecht: Springer.

Rusnock, P. (1999). Philosophy of mathematics : Bolzano's responses to Kant and Lagrange. *Revue d'histoire des sciences, 52, 3.4)*(Mathématique et logique chez Bernard Bolzano), 399-427.

Russell, B. (1953). *Histoire de la philosophie occidentale en relation avec les événements politiques et sociaux de l'Antiquité jusqu'à nos jours*. (trad. française de H. Kern) Paris: Gallimard.

Sarrazy, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue Française de Pédagogie, 112*, 85-118.

Sarrazy, B. (1997). Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques. *Recherches en didactiques des mathématiques, 17, 2*, 136-166.

Sarrazy, B. (2005). La théorie des situations : une théorie anthropologique des mathématiques ? In *Sur de la théorie des situations* (pp. 375-390). Grenoble: La pensée sauvage.

Sarrazy, B. (2007a). Questions à la théorie anthropologique du didactique du point de vue de la théorie des situations et de l'anthropologie wittgensteinienne. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. Garcia (Eds.), *Actes du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique. Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico*, Octobre 2005. (pp. 159-176). Baeza, Espagne.

Sarrazy, B. (2007b). Ostention et dévolution dans l'enseignement des mathématiques. *Education et Didactique, 1/3*, 31-46.

Sebestik, J. (1964). Bernard Bolzano et son mémoire sur le théorème fondamental de l'Analyse. *Revue d'histoire des sciences, XVII*, 129-164.

Sebestik, J. (1992). *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano*. Paris: Vrin.

Sebestik, J. (1999). Forme, variation et déductibilité dans la logique de Bolzano. *Revue d'histoire des sciences, 52, 3.4*(Mathématique et logique chez Bolzano), 479-506.

Sebestik, J. (2003). La dispute de Bolzano avec Kant : Fragment d'un dialogue sur la connaissance mathématique. *Philosophiques 30, 1*(Bernard Bolzano. Philosophie de la logique et théorie de la connaissance), 47-66.

Segal, J. (2000). Learning about mathematical proof: conviction and validity. *Journal of mathematical behaviour, 18, 2*, 191-210.

Selden, J., & Selden, A. (1995). Unpacking the Logic of Mathematical Statements. *Educational studies in mathematics, 29, 2*, 123-151.

Siebel, M. (2003). La notion bolzanienne de déductibilité. *Philosophiques, 30, 1*(Bernard Bolzano. Philosophie de la logique et théorie de la connaissance), 171-189.

Sinaceur, H. (1973). Cauchy et Bolzano. *Revue d'histoire des sciences, 26, 2*, 97-112.

Sinaceur, H. (1974). Les voies de l'analyse classique. *Critique, 327-328*, 697-715.

Sinaceur, H. (1996). Bolzano et les mathématiques. In E. Barbin & M. Cavening (Eds.), *Les Philosophes et les Mathématiques* (pp. 150-173). Paris: Ellipses.

Tanguay, D. (2005). Apprentissage de la démonstration en géométrie et graphes orientés. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 10*, 55-94.

Tarski, A. (1972). Le concept de vérité dans les langages formalisés. In *Logique, sémantique, métamathématiques* (Vol. tome 1). Paris: Armad Colin.

Vernant, D. (1997). *Du discours à l'action*. Paris: Presses universitaires de france.

Vernant, D. (2001). *Introduction à la logique standard*. Paris: Flammarion.

Vernant, D. (2004). Pour une logique dialogique de la véridicité. *Cahier de linguistique française, 26*, 87-11.

Vernant, D. (2005a). Le paradigme actionnel en philosophie du langage. In R. Teulier & P. Lorino (Eds.), *Entre connaissance et organisation : l'activité collective* (pp. p. 25-53). Paris: La Découverte.

Vernant, D. (2005b). The Limits of a Logical Treatment of Assertion. In D. Vanderveken (Ed.), *Logic, Thought and Action* (pp. 267-288). Netherlands: Springer.

Vernant, D. (2007). The dialogical logic of veridicity. In A. Trognon (Ed.), *Logic and Dialogue*: Presses Universitaires de Nancy.

Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for research in mathematics education, 39/4*, p. 431-459.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof production. *Educational studies in mathematics, 56*, 209-234.

Wittgenstein, L. (1976). *De la certitude*. (trad. française de J. Fauve, *Über Gewissheit*, 1969). Paris: Gallimard.

Wittgenstein, L. (1980). *Grammaire philosophique*. (trad. française de M.-A. Lescourret, *Philosophische Grammatik*, 1969). Paris: Gallimard.

Wittgenstein, L. (2004). *Recherches philosophiques*. (trad. française E. Rigal, F. Dastur, J.-L. Gautero & M. Elie, *Philosophische Untersuchungen*, 1953). Paris: Gallimard.

Yildizoglu, M. (2003). *Introduction à la théorie des jeux*. Paris: Dunod.

Zerner, M. (1986). Sur l'analyse des traités d'analyse : les fondements du calcul différentiel dans les traités français, 1870-1914. *Cahier de didactique des mathématiques, Université Paris 7, 30*.

Zerner, M. (1989). La rectifiabilité des courbes dans les traités d'analyse français de la deuxième moitié du XIXème siècle *Cahier du séminaire d'histoire des mathématiques, 10,* 267-281.

Zerner, M. (1994). La transformation des traités français d'analyse (1870-1914) *Publication du Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné CNRS-URA 168, 389*.