



HAL
open science

Séismes : rupture et onde

Jean Virieux

► **To cite this version:**

Jean Virieux. Séismes : rupture et onde. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 1986. Français. NNT: . tel-00653208

HAL Id: tel-00653208

<https://theses.hal.science/tel-00653208>

Submitted on 19 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE de DOCTORAT D'ETAT

ès Sciences Physiques

présentée

à l'Université Paris VII

Par Monsieur Jean VIRIEUX

pour obtenir le grade de DOCTEUR ès SCIENCES

Sujet de la thèse : **SEISMES : RUPTURE ET ONDE.**

soutenue le 20 juin 1986

devant le Jury composé de :

M. R. MADARIAGA	Président et Directeur
M. A. BAMBERGER	Examineur
M. M. BOUCHON	Rapporteur
M. P. LAILLY	Examineur
M. A. TARANTOLA	Rapporteur

volume I

DEDICACEE A

SYLVIANE,

AURELIEN, IMPERATORI CAESARI LUCIO DOMITIO AURELIANO PIO FELICI AUGUSTO,

ET HELOISE.

GRATIARUM ACTIO

Raùl MADARIAGA primo et ante omnes gratulationem meam exprimere volo, qui constantia praeclara attentioneque maxima laboris huius progressionem secutus est. Nam sine illius egregiis consiliis et patientia singulari thesis mea lucem numquam vidisset.

Xavier LE PICHON merito postea gratias ago pro pretioso auxilio quod mihi ad universitariorum honorum cursum suscipiendum dedit.

Michel BOUCHON et Albert TARANTOLA, huius thesis relatores, infinite revereor, qui scripta mea quamquam indigesta attentissime legerunt emendaveruntque.

Alain BAMBERGER naturaliter quinta persona est quam nominabo, in quem pro summa attentione labori meo dedita gratissimus sum : eum non separare possum a fructuosis colloquiis quae in SAD* obii, ubi nonnullos doctissimos viros conveni.

Inter quos Laurence NICOLETIS et Patrick LAILLY numerabo : maximo enim beneficio mihi semper fuerunt sermones quamquam breves cum eis habiti.

In fine ad SOS** redeo, omnibus gratias referens qui immenso auxilio mihi fuerunt, praecipue Veronique FARRA quae dum maximo studio thesin meam legit, nonnullos errores extirpavit.

* Sedes Applicatorum Mathematicorum

** Scientifica Officina Seismologiae

AVANT-PROPOS

Replacer mon travail dans son contexte me paraît être la tâche d'un avant-propos. Il serait illusoire de considérer que les différents aspects de cette thèse ont été menés simultanément à terme. La rédaction de cette thèse fut l'occasion de réexaminer des thèmes abordés avec un certain recul.

Mon travail sur la rupture est le plus ancien et correspond à un prolongement naturel de ma thèse de 3ème cycle. J'ai abordé l'étude tridimensionnelle lors de mon séjour au Lamont en 1979 et durant l'année 1981. Ce travail, sous forme d'un article, a été publié en 1982 dans la revue Bull. Seism. Soc. Am.

Une application immédiate consiste en l'estimation de la radiation en champ lointain. Ce fut ma contribution à un groupe de travail intitulé "The dynamic characteristics of faulting inferred from recordings of strong ground motion" organisé par Boatwright dans le cadre de l'USGS à l'automne 1981.

Après une pause en 1982 où je me suis consacré à d'autres domaines de la géophysique comme le comportement mécanique et thermique de la lithosphère, je suis revenu en 1983 à la sismologie pour l'étude de la propagation en milieu hétérogène. La première approche fut la modélisation du mouvement SH dans un milieu vertical. Ce travail fut concrétisé par un article dans la revue Geophysics en 1984.

Les années 1984 et 1985 furent consacrées au mouvement P-SV dans un milieu vertical. La tâche était plus ardue. Les résultats obtenus paraîtront dans un article de la revue *Geophysics* en 1986.

Simultanément, l'outil créé pour la modélisation du mouvement SH servit de support au travail de Gauthier sur l'inversion. Ses résultats, reproduits dans ma thèse, vont être publiés dans un article de la revue *Geophysics* en 1986.

De même, une comparaison pour le mouvement SH entre la méthode de différences finies et la sommation des faisceaux gaussiens fut réalisée par George, pour des interfaces complexes. Un article exposant ses résultats, reproduits dans ma thèse, est soumis pour publication à la revue *Geophysics*.

Telle fut la progression de mon travail durant ces années, avec une évolution naturelle des problèmes de source vers des problèmes de propagation.

CHAPITRE 1

"Ce tremblement de terre n'est pas une chose nouvelle, répondit Pangloss ; la ville de Lima éprouva les mêmes secousses en Amérique l'année passée ; mêmes causes, mêmes effets : il y a certainement une traînée de soufre sous terre depuis Lima jusqu'à Lisbonne. - Rien n'est plus probable, dit Candide."

Voltaire, *Candide ou l'optimisme*.

INTRODUCTION GENERALE

L'avènement de la tectonique des plaques, dans les années 60-70, a éclairé d'un jour nouveau le phénomène naturel des tremblements de terre : la carte de la ceinture de feu autour du Pacifique avait une explication bien moins romantique que celle fournie par les contes et légendes chinois : la Terre a la forme d'un disque posé en équilibre sur le dos du grand dragon céleste. Lorsque celui-ci éternue ou se gratte, il provoque un séisme : il ne faut donc pas le mécontenter... Que les petits enfants soient bien sages !

Les séismes, engendrés par une accumulation des contraintes dans la partie froide (croûte) de la lithosphère, peuvent signifier une "fragilisation" d'une plaque. Ce sont les séismes intra-plaques, les plus difficiles à expliquer : proviennent-ils d'un début de rupture scindant une plaque actuelle en deux nouvelles, sont-ils dûs à un collage faible entre deux anciens morceaux ? Telles sont les questions que l'on peut se poser sur leurs origines. Par contre, les séismes inter-plaques, qui se passent au contact entre deux plaques, sont les plus nombreux et les mieux expliqués.

En effet, le sismologue s'attache à répondre à trois questions fondamentales concernant les séismes. La première est de savoir pourquoi les séismes arrivent. Cette question de la prédiction ou (et) de la prévision des séismes est l'une des plus fondamentales et des plus difficiles. Bien qu'il soit encore utopique d'envisager une réponse indiquant la date et le lieu, certaines réponses partielles ont été formulées le jour depuis une dizaine d'années, concernant les séismes inter-plaques. L'approche principale consiste en une démarche historique, qui permet de définir suivant des critères empiriques fondés sur la

sismicité historique d'une région des zones à différents niveaux de risques : c'est la notion de "gap" développée par Fedotov (1965), Mogi (1968), Sykes (1971) et bien d'autres depuis. Des critères sismo-historiques permettent de définir des zones pour lesquelles existe une certaine probabilité de récurrence des tremblements de terre, comme l'on fait Kelleher et al (1973) ou McCann et al (1980). Il ne se passe pas de séismes sans que cette technique soit améliorée, les critères affinés et des prédictions faites.

Je laisserai cette difficile question de côté dans cet exposé pour me concentrer sur les deux questions suivantes : quel est le mécanisme de la rupture lorsque celle-ci est déclenchée et comment se propagent les ondes émises par la source. Ces deux questions en forme de comment et non de pourquoi, comme la question précédente, nous informent sur la source sismique et sur le milieu parcouru. La sismologie a été l'outil géophysique pionnier permettant d'accéder à la connaissance de la structure interne de la Terre par l'analyse des temps d'arrivée des différentes ondes sismiques. Le livre de référence de Richter (1958) en fait une présentation avec d'abondantes références aux articles de Gutenberg et Richter des années 30-40.

Un séisme développe une énergie considérable dont on peut évaluer l'importance par les traces en surface sur les lieux du séisme. Toutefois, cette énergie n'est qu'une faible partie des énergies dissipées par la machine thermique qu'est la Terre. Les modèles de la source sismique ont été et sont encore ponctuels, pour de nombreuses études : localisation à échelle globale et même locale, modélisation des amplitudes pour des enregistrements WWSSN longue période. Les études des mécanismes au foyer

ont permis de conforter le modèle du double couple vis-à-vis du modèle du couple (Toksoz et al, 1980). Ce modèle du double couple est le seul valable comme perturbation d'un système isolé. La démonstration se trouve dans les livres de référence tel celui d'Aki & Richards (1980). L'amélioration des instruments - une réponse plus stable et à plus haute fréquence (> 1 Hz), une densité plus grande de stations - a réclamé la modification de notre vision ponctuelle des séismes en des mécanismes complexes dans l'espace et dans le temps au foyer du séisme.

Une description plus fine de la fonction excitation temporelle peut être une réponse (Nakanishi et Kanamori, 1982). Cet axe de recherche a pris une tournure de routine applicable très rapidement à l'étude d'un tremblement de terre. On peut considérer, par contre, des sources simples à excitation trapézoïdale réparties sur une zone de faiblesse (Kanamori et Stewart, 1978). Leur déclenchement successif, lors d'une propagation de la rupture, induit un signal très compliqué aux stations. En fait, la rupture provient du comportement mécanique d'une zone fracturée soumise aux contraintes tectoniques. Deux modèles ont été introduits avec toutes les nuances possibles entre eux pour modéliser une source réelle. Le modèle de la barrière (Das et Aki, 1977) considère que la résistance du matériau est inégale suivant les endroits, mais que la contrainte appliquée à la zone fracturée est à peu près uniforme. Le modèle des aspérités (Kanamori, 1981) considère, au contraire, que la résistance est plus ou moins uniforme, mais que la contrainte appliquée subit de très fortes variations, notamment en des zones verrouillées qui n'ont pas lâché lors du séisme précédent. Ce sont ces zones qui vont se casser lors du séisme considéré.

Je n'entrerai pas dans le débat sur le choix entre ces deux modèles, trouvant naturel que la contrainte appliquée (tectonique et résiduelle des autres séismes antérieurs) et la résistance du matériau soient des fonctions variables dans l'espace. Le degré de singularité d'une des fonctions par rapport à l'autre sera le trait caractéristique d'un séisme. Après un violent séisme ayant induit une grande zone de rupture dans une région, les conditions pour un modèle de barrière sont présentes à l'intérieur de cette zone pour de nouveaux séismes d'importance plus faible, tandis que, lors d'un séisme de moyenne importance, certaines régions ont pu résister, et le prochain séisme de caractère violent se comportera probablement suivant le modèle des aspérités. Un grand séisme sera probablement de comportement type aspérité tandis que des séismes de moyenne importance pourront être de type barrière.

Par contre, je restreindrai la géométrie considérée : la zone fracturée sera suivant un plan, dit plan de fracturation à l'intérieur duquel on aura la faille proprement dite. Je prendrai également un modèle de comportement mécanique simple : un coefficient de frottement constant sur cette faille. Je m'attacherai à définir les grandeurs importantes lors de la rupture, à rechercher les solutions pour des géométries de faille simples, en montrant la complexité déjà atteinte pour ces modèles. Ceci représente le contenu du deuxième chapitre, avec un calcul en champ lointain du rayonnement de failles. Ce calcul montrera l'impact de la géométrie des sources sur les sismogrammes.

La détermination de ces modèles pourra se faire à partir des sismogrammes prédits pour chacun. Cette approche n'a pas encore été entreprise pour les modèles dynamiques étudiés dans ce travail : seuls les modèles cinématiques ont été utilisés jusqu'à maintenant, bien que des

estimations de paramètres dynamiques soient parfois données, comme la chute de contrainte.

Le troisième chapitre concerne les ondes qui transportent une partie de l'énergie émise par la source jusqu'à l'observateur. Ces ondes qui traversent la Terre furent et sont un instrument très puissant pour la connaissance de sa structure interne. À partir des temps d'arrivée, des modèles très précis de vitesses sismiques ont pu être ainsi construits en fonction de la profondeur, des tables réalisées (Jeffreys et Bullen, 1948), et les nouveaux séismes localisés grâce à elles. J'entreprendrai une étude complète de la propagation des ondes, tant pour le temps de propagation que pour la forme de l'amplitude, en milieu hétérogène. Les sources seront considérées comme ponctuelles et d'excitation simple : ce qui correspond assez bien aux conditions de l'exploration sismique. Plusieurs géométries de milieu seront analysées montrant les différentes ondes que l'on peut enregistrer sur des profils à la surface de la Terre.

Le chapitre quatre sera consacré à des illustrations ou des applications de la propagation des ondes. Une tentative d'approche inverse pour retrouver le milieu propagé à partir des enregistrements aux points d'observation montrera une voie à suivre. Une étude comparative entre la méthode développée dans ce travail et la théorie des faisceaux gaussiens montrera la complémentarité de ces deux méthodes. Et, enfin, l'analyse d'un dôme complexe tiré de l'expérience de la cuve de Houston illustrera la puissance des outils de modélisation mis au point.

Ce qui nous amènera à la conclusion où je résumerai les possibilités des techniques numériques de différences finies, trait d'union de cet

exposé. Je rappellerai les principaux résultats obtenus pour la rupture et pour les ondes au cours de ce travail.

CHAPITRE 2

" Puis l'Ange saisit la pelle et l'emplit du feu de l'autel qu'il jeta sur la terre. Ce furent alors des tonnerres, des voix et des éclairs, et tout trembla."

Apocalypse selon Saint Jean, 8,5

INTRODUCTION RUPTURE.

La rupture au foyer d'un séisme superficiel est un processus mécanique complexe survenant dans la partie froide, et plus ou moins cassante, de la Terre. Dans les zones de subduction où des séismes sont observés, les mécanismes sembleraient d'origine plus variée.

Si le modèle simple du double couple ponctuel s'avère satisfaisant pour des interprétations tectoniques - zone frontière, sens actuel du mouvement respectif de deux plaques -, il est insuffisant pour approcher le problème du cycle sismique dans une région. Quelle est la relation entre l'énergie libérée lors d'un séisme et le taux de convergence de deux plaques ? Y-a-t-il une forme de déformation asismique ? Telles sont les questions que l'on peut se poser sur l'occurrence de séismes dans une région.

Ce modèle est également insuffisant pour l'étude du mouvement du sol au voisinage de la rupture : accélération maximum, accélération moyenne, contenu spectral.. Ces quantités sont très importantes pour le génie parasismique. Deux exemples récents (Mexico, 1985 ; Valparaiso, 1985) nous le montrent. Plus proches de nous géographiquement, les séismes de Corinthe (1981), Naples (1980) et d' El Asnam (1980) mettent en cause les règles de construction en vigueur. Des réseaux de sismogrammes de plus en plus denses et de plus en plus performants apportent des données remarquables qu'il faut exploiter. Il n'est que de voir les tentatives de reconstruction de l'histoire de la rupture lors du séisme d'Imperial Valley, pour comprendre l'importance de ce problème (Archuleta et al, 1979 ; Hartzell et Helmberger, 1982 ; Archuleta, 1982 ; Hartzell et Heaton, 1983 ;

Olson et Apsel, 1982 ; Archuleta, 1983...).

A l'échelle mondiale, l'amélioration des instruments dans leur contenu fréquentiel et dans la fidélité de leur réponse permet maintenant de mieux observer des effets de source déconvolués du milieu, même à grande distance, effets associés à une complexité du mécanisme à la source dans le temps ou dans l'espace - Kanamori et Stewart, 1978 ; Nakanishi et Kanamori, 1982 ; Frankel et Kanamori, 1983 - pour ne citer que quelques travaux d'une seule équipe américaine.

Ces modélisations font intervenir des descriptions cinématiques des ruptures à la source - histoire du glissement, temps de propagation de la rupture... -. Comment relier ces grandeurs cinématiques à des grandeurs dynamiques qui nous permettraient de comprendre le processus mécanique à la source sismique. Doit-on interpréter les grandeurs cinématiques en fonction du modèle de barrières ou du modèle d'aspérités ? Mais quels sont ces modèles ?

C'est la description des modèles dynamiques et leur résolution qui sera le propos de ce chapitre 2. J'essaierai de formuler le problème géophysique du mécanisme à la rupture en y associant un problème simple physique que j'entreprendrai de résoudre par une méthode numérique. La description de la résolution numérique fera l'objet du paragraphe suivant. Ensuite viendront les paragraphes présentant les résultats sur la rupture. Les failles antiplanes et planes illustreront la géométrie bidimensionnelle, tandis que des failles initialement circulaires décriront la géométrie tridimensionnelle. Une analyse des différentes longueurs intervenant dans le problème physique montrera la difficulté de résolution

des modèles dynamiques par des méthodes discrètes. Enfin, j'illustrerai la modélisation que je fais des failles dynamiques tridimensionnelles sans symétrie cylindrique par un calcul du rayonnement en champ lointain.

FORMULATION DU PROBLEME DE LA RUPTURE.

2.2.1 : Introduction.

Comment définir le processus à la source d'un séisme ? On admet généralement le concept d'un rebondissement élastique associé à un relâchement des contraintes comme le mécanisme des tremblements de Terre superficiels et tectoniques. La contrainte tectonique est libérée dans une région située le long d'une fracture (discontinuité dans la Terre), qui s'étend sur une certaine zone (souvent assimilée à un plan). Si cette description qualitative rencontre l'assentiment de tous, la description des différents détails est encore sujet à controverses.

Les premiers modèles de fracture décrits dans la littérature (Haskell, 1964, 1966, 1969) sont des modèles cinématiques simples où les dimensions de la zone fracturée sont spécifiées dans le temps, ainsi que le glissement ayant lieu sur cette zone (on parle parfois de dislocations). Ces modèles fournissent les grandeurs nécessaires pour le calcul des sismogrammes en champ proche (Bouchon et Aki, 1977 ; Bouchon, 1979) et en champ lointain (Savage, 1966 ; Sato et Hirasawa, 1973 ; Dahlen, 1974...), mais n'apportent pas d'indications sur le processus physique à la source. La discussion des sismogrammes a permis d'élaborer des modèles cinématiques de plus en plus réalistes - initiation ponctuelle au lieu d'une longueur instantanée dans les modèles d'Haskell, phase d'arrêt causale sur la faille... -. Le choix de cinq paramètres (la longueur de la faille L , la largeur de la faille W , la vitesse de rupture v , le glissement total D et le

temps de montée T) suffit à décrire les différentes valeurs des grandeurs observées en champ lointain (fréquence coin, chute en fréquence, rapport des fréquences coin des ondes P et des ondes S) et les sismogrammes en champ proche.

Si cette approche intuitive, où le glissement est spécifié sur la zone fracturée avec le minimum de paramètres, reste abordable, elle présente pourtant certaines conséquences physiques inacceptables - énergie non conservée en pointe de faille, non-causalité du démarrage... -. C'est pour cela que l'on a introduit les modèles dynamiques où la contrainte tectonique initiale et les propriétés des roches déterminent le glissement entre les deux lèvres de la discontinuité que forme la zone fracturée et la progression du front de rupture définissant cette zone. Une faille de cisaillement dans un milieu en précontrainte crée une chute de contrainte, et un critère de rupture contrôle la propagation de la rupture. Parfois on utilise un modèle simplifié, appelé modèle quasi-dynamique, où le glissement est calculé d'après la chute de contrainte, mais où on décrit le front de rupture en fonction du temps. Je serai ici intéressé par les modèles complètement dynamiques.

Résoudre analytiquement les problèmes de failles, spécialement les failles dynamiques, est très difficile. Pour cette raison, seulement quelques cas de géométries simples ont trouvé des solutions analytiques, comme la faille self-similaire elliptique étudiée par Kostrov (1964), Burridge et Willis (1969), Richards (1973, 1976). Kostrov (1966) trouva une solution analytique à la propagation spontanée d'une faille antiplane semi-infinie. Pratiquement toutes les autres solutions ont été obtenues par des méthodes numériques. Burridge (1969) et Das et Aki (1977), ainsi que plus

récemment Andrews (1985), ont utilisé la technique d'équations intégrales pour résoudre le problème bidimensionnel : les différences tiennent dans la manière de discrétiser les intégrales et, surtout, dans la manière de tenir compte des singularités au bord de la faille. Burridge (1969) avait fait une étude poussée de ces singularités. Shmuely et Alterman (1973), Andrews (1976), Stöckl (1977) parmi beaucoup d'autres ont utilisé des méthodes de différences finies. Les failles tridimensionnelles ont été abordées par les mêmes techniques numériques en géométrie axisymétrique (Madariaga, 1976) ou, pour une géométrie quelconque, dès que la puissance de calcul des ordinateurs le permet (Das, 1980; Miyatake, 1980; Virieux et Madariaga, 1982; Day, 1982a et 1982b).

2.2.2 : Formulation du problème.

Un modèle possible pour le processus de rupture d'un tremblement de terre superficiel est le relâchement de contrainte sur un plan, appelé plan de faille. En dehors de ce plan de fracture existant préalablement, le milieu se comporte comme un milieu élastique linéaire isotrope. Ses propriétés élastiques peuvent être modélisées par la masse volumique et les coefficients de Lamé. Dans le cas tridimensionnel, qui sera celui traité dans ce paragraphe (je renvoie le lecteur à ma thèse de 3ème cycle pour une présentation spécifique des géométries bidimensionnelles), deux modes de propagation existent : les ondes de compression, dites ondes P, et les ondes de cisaillement, dites ondes S.

Toute la complexité de la rupture se trouve concentrée sur le plan de faille. Le relâchement de contrainte s'effectue principalement suivant une faille de cisaillement apparaissant initialement ou préexistante. Suivant l'hypothèse choisie, le champ de contrainte tectonique cisailante, champ statique initial, aura une structure plus ou moins compliquée, que je note de façon générale :

$$\tau_{xz} = \sigma_0(x,y,z) \quad (2.2.1)$$

Que σ_0 soit uniforme dans le plan de fracture est le premier trait du modèle de barrière (Das et Aki, 1977 ; Aki et Papageorgiou, 1983), tandis que le modèle d'aspérité (Kanamori et Stewart, 1978) se caractérise par une concentration de la contrainte σ_0 sur des zones qui n'ont pas été fracturées lors d'un séisme précédent.

A l'instant $t = 0$, une faille apparaît, ou commence à se propager suivant le cas, dans le plan xOy de telle sorte que, sur la zone nouvellement fracturée, la contrainte cisailante de composante (τ_{xz} , τ_{yz}) chute à la contrainte de friction dynamique σ_f . Simultanément, une discontinuité en déplacement, ou glissement, se crée sur la faille. La connaissance du glissement Δu (ou mieux de la vitesse du glissement $\Delta \dot{u}$) nécessaire à l'obtention de sismogrammes suivant le théorème de représentation, est le but de toute modélisation, mais son évaluation correcte passe par une bonne estimation du champ des contraintes qui contrôle le front de rupture. J'opte pour une loi de frottement en vitesse avec un coefficient de frottement indépendant de la contrainte normale : la contrainte de frottement devra être de même direction et de sens opposé à la vitesse de glissement. La figure 2.2.a schématise le mécanisme de rupture pour deux cas différents de frottement.

La chute de contrainte caractérise le relâchement de la contrainte lors de la fracture, saut qui dépendra du coefficient de frottement et de la vitesse de glissement en un point de la faille et qui ne saurait être uniforme dans le cas général. Cette chute de contrainte dépend de la précontrainte σ_0 , orientée suivant l'axe x et de la contrainte de frottement dynamique donnant une traction opposée à la vitesse de glissement. Pour des géométries bidimensionnelles, ces deux paramètres se réduisent à la contrainte effective σ_e , égale à $\sigma_0 - \sigma_f$. Cette définition de la contrainte effective est conservée dans le cas tridimensionnel, mais nous voyons que, du fait de la rotation possible de la vitesse de glissement dans le plan de faille, il n'est pas possible d'identifier la contrainte effective et la chute de contrainte. Il se trouve que l'on interdit souvent au glissement de tourner, ce qui correspond à une bonne

Formulation du problème

Tractions

Contraintes

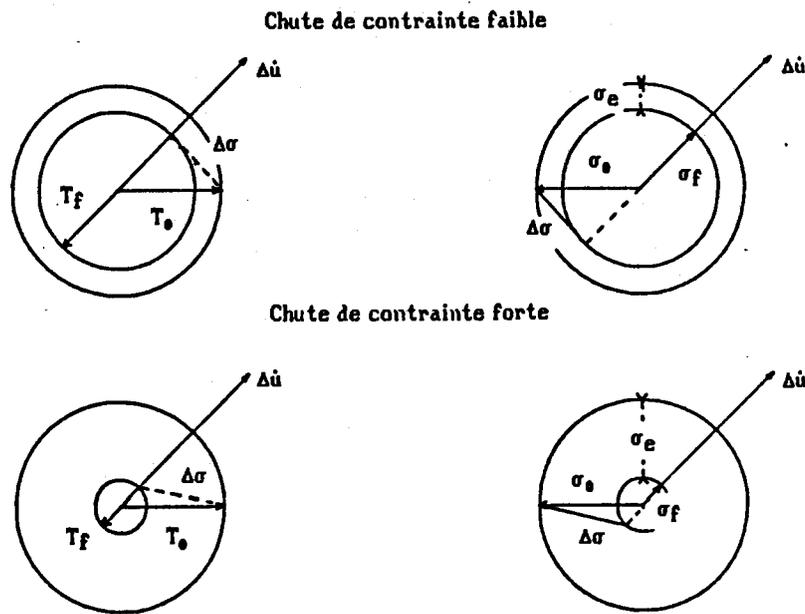


Figure 2.2.a : Description du processus de rupture en un point du plan de faille en terme de traction à gauche ou de contrainte à droite. On distingue en haut le cas d'une chute de contrainte faible, et en bas le cas d'une chute de contrainte importante. Le cercle extérieur représente le module de la traction/contrainte tectonique, tandis que le cercle intérieur représente le module de la traction/contrainte de frottement. L'écart entre les deux cercles représente la contrainte effective différente dans cette configuration tridimensionnelle de la chute de contrainte. La contrainte de frottement est dans la direction de la vitesse de glissement

approximation sauf durant les phases d'arrêt. Cette approximation de failles "rayées" permet d'ignorer le rapport en σ_θ et σ_f , et de ne considérer que la contrainte effective σ_e .

Avant de passer à la description du problème mathématique, il me reste à parler du choix du critère de rupture. Dans l'hypothèse d'un milieu parfaitement élastique ou, ce qui est équivalent, pour des failles parfaitement cassantes, le critère énergétique (critère de Griffith) et le critère de facteur d'intensité seuil (critère d'Irwin) sont les deux possibilités. On démontre que ces deux critères sont équivalents pour la propagation de failles quasi-statiques, résultat classique que l'on peut trouver, par exemple, dans l'article de synthèse de Dwonska et Rice (1983). Dans le cas de failles dynamiques, la relation entre les deux critères est plus compliquée (Kostrov et Nikitin, 1970), mais permet de prédire des vitesses limites de propagation qui sont la vitesse de Rayleigh pour le mode plan et la vitesse de cisaillement pour le mode antiplan pour ces deux critères. Numériquement, Yoshida (1985) a constaté que les vitesses de propagation n'étaient pas trop différentes pour ces deux critères dans le cas de failles dynamiques.

Le premier consiste en un bilan énergétique autour du front de rupture, de manière à voir s'il se dégage une énergie suffisante pouvant être utilisée pour casser le matériau élastique : une énergie seuil de surface sera le paramètre de rupture du matériau. Le deuxième n'est applicable qu'aux failles cassantes. Ces failles cassantes présentent une singularité de contrainte sur le front de rupture, résultat non-physique de l'hypothèse de faille cassante. Le coefficient de cette singularité s'appelle le facteur d'intensité de contrainte. Le critère d'Irwin indique

que, si la singularité est trop forte - le facteur d'intensité de contrainte dépasse une valeur seuil -, la faille se propage. Le paramètre qui décrit la rupture sera le facteur d'intensité de contrainte seuil k_t . J'ai étudié les deux critères dans ma thèse de 3ème cycle où j'ai constaté qu'il était difficile de définir la zone concernée par le bilan énergétique. Ma préférence ira donc au critère d'Irwin dont nous verrons la traduction numérique dans le paragraphe suivant.

La structure de ce paramètre seuil est très différente suivant que l'on considère le modèle de barrière ou le modèle d'aspérité. Dans le modèle de barrière, la résistance du matériau sera hétérogène dans le plan de faille, si bien que les différentes régions casseront plus ou moins facilement, ou ne casseront pas. Le modèle d'aspérité considère une résistance plutôt homogène en dehors de fortes hétérogénéités qui casseront lors de l'initiation du tremblement de terre. Il est probable qu'un séisme réel sera entre ces deux extrêmes avec un penchant pour l'un ou l'autre des modèles suivant l'histoire de la sismicité dans la zone tectonique. Un très grand séisme éliminera tous les verrous, créant des conditions pour un nouveau séisme type modèle de barrière, tandis qu'un séisme de moindre importance laissant des zones bloquées engendrera des séismes de type modèle d'aspérité. On a souvent dit que le modèle de barrière engendrait le modèle d'aspérité. La réciproque me semble également vraie.

Dans un milieu infini, élastique, linéaire, homogène et isotrope, le mouvement d'un élément de matière est régi par les équations élastodynamiques suivantes :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \tau_{ij,j}$$

et

$$\tau_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}),$$

où ρ est la masse volumique, λ et μ les coefficients de Lamé. u_i est le déplacement suivant la direction i et τ_{ij} la composante ij du tenseur de contrainte évaluée à partir de la configuration de précontrainte initiale. δ_{ij} est l'indice de Kröneckner, tandis que les virgules notent les dérivations spatiales par rapport à l'index qui les suit.

Comme tout au long de ce travail, ce système hyperbolique du second ordre est transformé en un système hyperbolique du premier ordre pour lequel les conditions aux limites sur le plan de faille s'appliquent d'une manière beaucoup plus simple (Madariaga, 1976). Ce système utilise la vitesse v et le tenseur de contrainte τ comme variables. On trouve :

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \tau_{ij,j}$$

et

(2.2.2)

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \lambda v_{k,k} \delta_{ij} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i})$$

La formulation du problème de faille dynamique est celle d'un problème aux conditions aux limites mixtes - dites aussi conditions de Cauchy -, puisque des conditions sur les contraintes sont spécifiées à l'intérieur de la faille et des conditions sur la vitesse à l'extérieur de cette faille. Ces

Formulation du problème page 2.2.9

conditions aux limites utilisent les propriétés de symétrie du problème de fracture dans un plan. Soit S_1 la faille à l'instant t et S_2 le reste du plan de fracture en dehors de la faille. Les conditions aux limites pour une faille plane cisailante s'écrivent :

$$\begin{aligned}v_x &= v_y = 0 \text{ sur } S_2 \\ \text{et} & \\ \tau_{xz} &= -\sigma_0 + \sigma_f \cos(\psi) \\ \tau_{yz} &= \sigma_f \sin(\psi)\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

où ψ est l'angle que fait le glissement par rapport à l'axe x . La traction de frottement est opposée à la vitesse de glissement et, comme la normale sur le plan de faille est orientée vers l'intérieur du milieu, la contrainte de frottement a le même sens que la vitesse de glissement (figure 2.2.a). Les conditions de symétrie imposent en outre :

$$\begin{aligned}v_z &= 0 \text{ sur } S_1 \cup S_2 \\ \text{et} & \\ \tau_{zz} &= 0 \text{ sur } S_1 \cup S_2\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Cette dernière équation montre que, si le frottement sur le plan de faille est une fonction de la pression de confinement, il ne dépendra que de la précontrainte σ_{zz0} , si elle existe. Dans le cas où ψ est imposé nul (cas des failles rayées), seule intervient la contrainte effective $\sigma_e = \sigma_0 - \sigma_f$, puisque l'on trouve :

$$\tau_{xz} = -\sigma_e \text{ et } \tau_{yz} = 0 \tag{2.2.5}$$

et je prendrai σ_e constante et uniforme au cours de cette étude. Cette hypothèse peut être vérifiée de plusieurs manières, dont la plus simple est de supposer que σ_e et σ_f sont indépendamment uniformes et que σ_f ne varie pas au cours du temps. Le cas très particulier où σ_f est nul correspond au relâchement total de contrainte, qui nous libère de l'hypothèse $\psi = 0$. Cette hypothèse ne permet pas de comprendre ce qui empêche la faille de glisser durant la phase d'arrêt. De plus elle ne corrobore pas les expériences de laboratoire où 10% de chute de contrainte semble un maximum (Dieterich et al, 1978). Nous voyons que les équations 2.2.5 permettent de choisir σ_e comme facteur d'échelle pour l'étude de la rupture et de la radiation qui s'ensuit.

De manière à faire apparaître les autres échelles du problème de la rupture, j'introduis les variables adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \sigma_e T_{ij} \\ (x, y, z) &= L(X, Y, Z) \\ t &= \frac{L}{c} t \text{ (même notation du temps) } \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

$$v_i = \frac{c \sigma_e}{m} U_i$$

$$u_i = \frac{L \sigma_e}{m} U_i.$$

L est une longueur caractéristique du problème - le pas spatial de la grille pour le cas de failles self-similaires ou de failles semi-infinies ou la longueur de la faille initiale ou finale dans les autres cas -. c est soit la vitesse des ondes P pour les failles 3-D et les failles planes, soit la

vitesse des ondes S pour les failles antiplanes, de même m est soit $\lambda+2\mu$ pour les failles 3-D et planes, soit μ pour les failles antiplanes. Dans tous les calculs sur la rupture, je prendrai $\lambda = \mu$.

J'en déduis le système normalisé suivant :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = T_{ij} j + C \nabla^2 U_i$$

et

(2.2.7)

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial t} = \frac{\lambda}{m} U_{k'k} \delta_{ij} + \frac{\mu}{m} (U_{i'j} + U_{j'i}) \quad i \geq j$$

où j'ai ajouté une dissipation visqueuse au principe fondamental de la dynamique. C est un coefficient d'amortissement visqueux sans dimension utilisé pour dissiper les oscillations parasites haute fréquence de la solution numérique. Celles-ci sont générées par le saut brutal en contrainte sur la faille.

2.2.3 : Résolution numérique : différences finies.

Les traits essentiels de la méthode numérique sont ceux exposés par Madariaga (1976) : on essaie de construire une grille pour résoudre le système 2.2.7 avec des différences finies centrées pour respecter la précision d'ordre deux. Parmi les multiples moyens de réaliser cette grille, je choisis celui qui conduit aux expressions les plus simples de différences finies. Il en résulte également que la grille a un nombre de noeuds minimum par cellules, cellules dont la répétition assure l'extension du milieu.

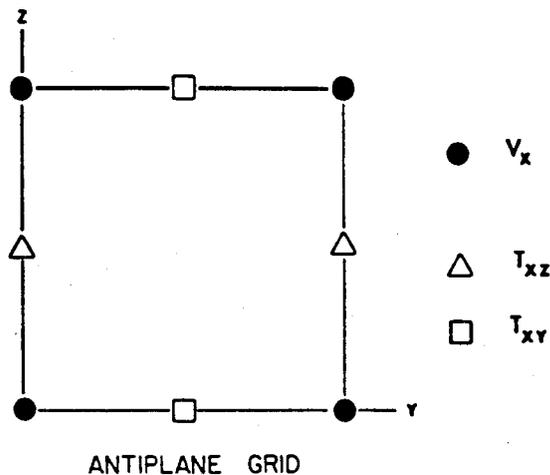


Figure 2.2.b : La grille numérique en quinconce pour le problème élastodynamique de la faille antiplane. Deux instants différents sont représentés sur la même grille spatiale : les symboles pleins sont associés à l'instant $k\Delta t$ et les symboles ouverts à l'instant $(k+1/2)\Delta t$.

Considérons la grille antiplane de la figure 2.2.b, et notons les champs sous la forme suivante :

Formulation du problème page 2.2.13

$$F(i\Delta y, j\Delta z, k\Delta t) = F(i, j, k), \quad (2.2.8)$$

où $y = i\Delta y$, $z = j\Delta z$, $t = k\Delta t$ et F est une des variables du problème. On peut écrire le système en différences finies équivalent au système 2.2.7 :

$$U_x(i, j, k+1) = U_x(i, j, k) + \frac{\Delta t}{\Delta y} [T_{xy}(i+1/2, j, k+1/2) - T_{xy}(i-1/2, j, k+1/2)] \\ + \frac{\Delta t}{\Delta z} [T_{xz}(i, j+1/2, k+1/2) - T_{xy}(i, j-1/2, k+1/2)],$$

et (2.2.9)

$$T_{xy}(i+1/2, j, k+1/2) = T_{xy}(i+1/2, j, k-1/2) + \frac{\Delta t}{\Delta y} [U_x(i+1, j, k) - U_x(i, j, k)],$$

$$T_{xz}(i, j+1/2, k+1/2) = T_{xz}(i, j+1/2, k-1/2) + \frac{\Delta t}{\Delta z} [U_x(i, j+1, k) - U_x(i, j, k)].$$

Le terme d'amortissement a été éliminé pour faire ressortir la simplicité du système. La méthode est explicite puisque la vitesse U_x à l'instant $(k+1)\Delta t$ est calculée à partir de la vitesse à l'instant $k\Delta t$ et des contraintes à l'instant $(k+1/2)\Delta t$. De même, les contraintes à l'instant $(k+1/2)\Delta t$ sont calculées à partir des contraintes à l'instant $(k-1/2)\Delta t$ et de la vitesse à l'instant $k\Delta t$. On peut montrer que, pour la propagation, il est impossible d'avoir la vitesse et les contraintes connues au même noeud spatio-temporel. Imposer les différentes grandeurs au même noeud conduit à l'existence de plusieurs grilles numériques complètement découplées l'une de l'autre pour la propagation. Dans le cas antiplan, il y en a trois. Des conditions aux limites simples comme des conditions de Neumann ou Dirichlet laissent également découplées les variables des trois grilles. Par contre, on peut remarquer que des conditions d'absorption sur un bord couplent

les variables des différentes grilles sur ce bord. Des conditions aux limites mixtes couplent d'une manière évidente les variables au même noeud, par exemple lors de la propagation de la rupture. Le prix à payer pour cela est la propagation indépendante dans trois grilles avec un couplage uniquement sur le plan de faille. J'ai fait un choix pour la grille employée en fonction du problème que je voulais résoudre. Un plan (ou ligne) fantôme permettra d'approximer les conditions mixtes.

On peut procéder de la même manière pour obtenir les grilles les plus simples dans le cas plan et le cas 3-D, comme le montrent les figures 2.2.c et 2.2.d. Elles ont les mêmes propriétés que la grille antiplane. Toutefois, la condition d'imposer toutes les variables en chaque noeud aurait été encore plus lourde : 5 grilles dans le cas plan et 9 grilles dans le cas 3-D.

Avant d'aborder la manière d'introduire les conditions aux limites, j'aimerais rappeler la condition de stabilité du schéma numérique nécessaire et suffisante telle qu'on peut la trouver dans l'article d'Alford et al (1974) pour le cas antiplan ou dans le rapport de Bamberger et al (1980) dans le cas plan. Je développerai plus particulièrement cette étude lors de la propagation des ondes 2-D P-SV en milieu hétérogène, en raison de certains résultats originaux. On trouve le résultat simple suivant :

$$H + C < n^{-1/2} \quad (2.2.10)$$

où $n = 2$ ou $n = 3$ pour des géométries 2-D ou 3-D respectivement. $H = \Delta t / \Delta x = \Delta t / \Delta y = \Delta t / \Delta z$ est le rapport du pas en temps sur le pas en espace et C le coefficient d'amortissement numérique. Dans la plupart des cas, j'ai choisi un rapport de 0.5 pour les calculs bidimensionnels et un

Formulation du problème

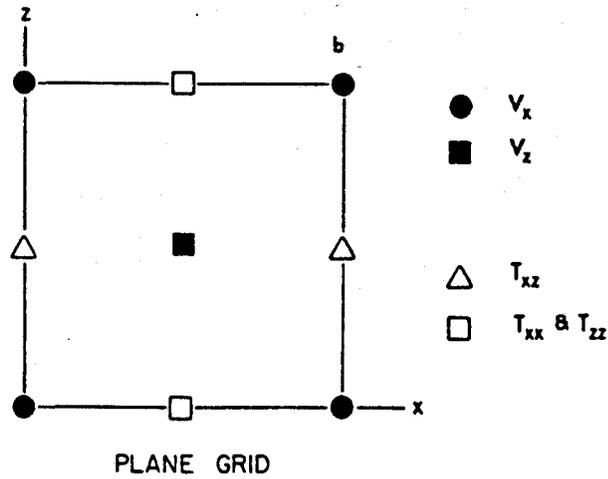


Figure 2.2.c : La grille numérique en quinconce pour le problème élastodynamique de la faille plane. Deux instants différents sont représentés sur la même grille spatiale : les symboles pleins sont associés à l'instant $k\Delta t$ et les symboles ouverts à l'instant $(k+1/2)\Delta t$.

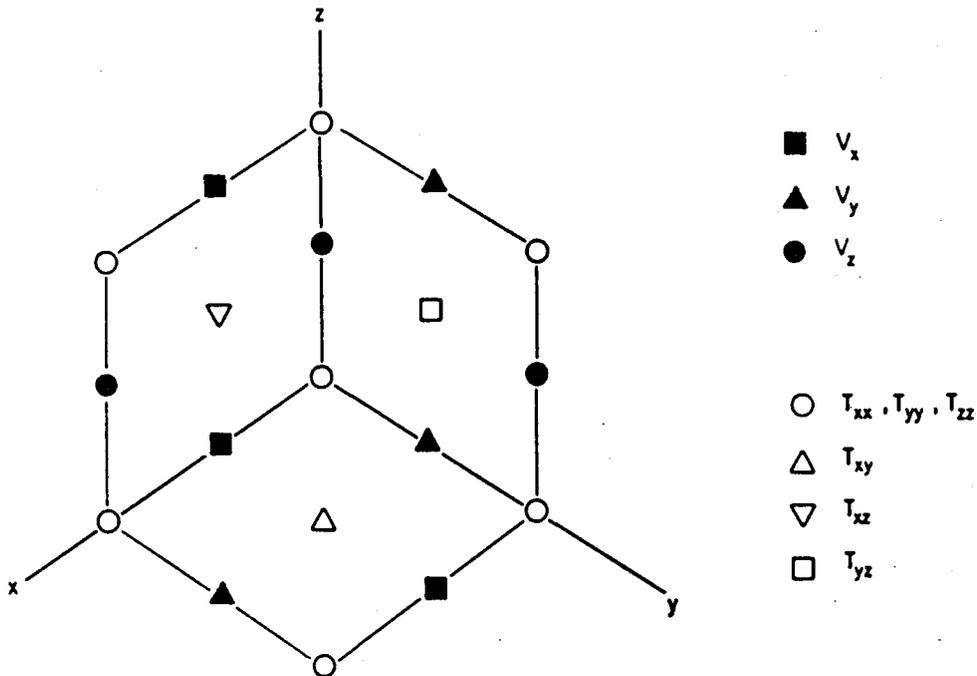


Figure 2.2.d : La grille numérique en quinconce pour le problème élastodynamique de la faille tridimensionnelle. Deux instants différents sont représentés sur la même grille spatiale : les symboles pleins sont associés à l'instant $k\Delta t$ et les symboles ouverts à l'instant $(k+1/2)\Delta t$.

rapport de 0.25 pour les calculs tridimensionnels. Un rapport de 0.5 signifie que l'information numérique se propage à une vitesse $\Delta x/\Delta t$, qui est 2 fois supérieure à la vitesse de propagation de l'onde P. H est relié étroitement à la dispersion numérique provenant de la discrétisation.

La précision, au contraire, est contrôlée par le nombre de points choisis pour modéliser une faille d'une certaine longueur. A l'initiation de la rupture, la faille n'aura qu'un petit nombre de points et la précision de la solution numérique sera faible. Au fur et à mesure que la faille va grandir, le nombre de points dans la faille va augmenter, ainsi que la précision. Les problèmes de modélisation les plus graves viennent de la discrétisation du front de rupture. Le terme d'amortissement C réduit efficacement les oscillations provenant de la chute de contrainte initiale, mais les oscillations générées par la chute de contrainte due à la propagation de la faille sont moins amorties, car elles sont continuellement émises chaque fois que le front de rupture avance d'un pas.

Comme pour la sélection de la grille, j'ai plusieurs manières de vérifier les conditions aux limites 2.2.3. Puisque les conditions sont mixtes, il n'est pas possible de spécifier U_x , U_y sur S_2 et T_{xz} , T_{zy} sur S_1 sur le même plan numérique pour une grille donnée : c'est une propriété intrinsèque des différences finies qui réclame la création d'un plan fantôme. Dans Madariaga (1976), les contraintes étaient spécifiées sur un plan fantôme et les déplacements sur le plan de fracture. Cette option conduisait à une estimation de la vitesse de glissement tout à fait remarquable et était bien adaptée au calcul de la radiation sismique d'une faille par le théorème de représentation. Par contre, la contrainte était

estimée d'une manière moins précise : le lissage ainsi introduit empêchait toute utilisation de la contrainte de cisaillement pour un critère de rupture dans le problème de la propagation spontanée de la faille.

Dans ma thèse de 3ème cycle, j'ai proposé de faire le choix contraire : les contraintes de cisaillement sont calculées exactement sur le plan de faille. Les vitesses se trouvent alors décalées sur un plan fantôme et seront moins bien calculées que dans Madariaga (1976), mais d'une manière satisfaisante pour un calcul de radiation. Les conditions de symétrie et d'antisymétrie sont utilisées pour évaluer les grandeurs sur le plan fantôme. Je fais passer le plan de faille $z = 0$ par le milieu de la cellule représentée dans la figure 2.2.d, i.e. le plan où sont spécifiés T_{xz} , T_{yz} et U_z . Avec ce choix, les vitesses des particules U_x et U_y seront sur un plan décalé de $\Delta z/2$, et seront moins bien estimées. D'un autre côté, les singularités de T_{xz} et T_{yz} seront mieux modélisées et pourront être utilisées dans la propagation spontanée de la rupture.

Cette impossibilité d'obtenir avec précision à la fois les contraintes et le glissement sur le plan de faille est une caractéristique de la discrétisation associée aux différences finies pour une grille donnée. Bien sûr, il aurait été possible de coupler les grilles de propagation par le plan de faille : la deuxième approche servirait à calculer l'évolution dans le temps de la faille, tandis que la première évaluerait avec précision le glissement sur la faille ainsi obtenue. Le prix à payer est l'utilisation de plusieurs grilles imbriquées les unes dans les autres et totalement découplées pour la propagation : le plan de faille interconnecte les différentes grandeurs par ses conditions aux limites. Sans doute des expériences futures, aux différents paramètres parfaitement contrôlés,

Formulation du problème page 2.2.17

pourront-elles seules justifier une telle précision et un tel coût.

2.2.4 : Conclusion.

La présentation du problème géophysique du mécanisme à la source d'un séisme superficiel est terminée. J'ai associé à ce problème très difficile un problème physique simplifié qui reste encore ardu à résoudre, si bien qu'une méthode numérique est nécessaire en dépit de la géométrie relativement simple du problème.

J'ai ensuite décrit cette technique qui est une méthode par différences finies centrées proposée initialement par Madariaga (1976), mais avec un autre choix de modélisation des conditions aux limites sur le plan de faille.

Il nous faut voir les résultats pour des modèles simples dans des milieux bidimensionnels et tridimensionnels, pour prendre conscience des différents paramètres qui gouvernent la rupture lors d'un séisme. Tel est le but des deux prochaines sections.

La collection d'enregistrements de grande qualité obtenue sur des réseaux très denses lors d'un séisme permettra peut-être de distinguer les différentes possibilités jaillissant de ces modèles simples et faire pencher la balance en faveur d'un modèle par barrières ou d'un modèle par aspérités suivant l'histoire du séisme considéré.

MODELISATION 2-D : FAILLE ANTIPLANE ET PLANE

2.3.1 : Introduction.

La méthode de résolution numérique de la section 2.2 a été celle proposée dans ma thèse de 3ème cycle sur la propagation des failles bidimensionnelles. Cette section me servira à rappeler les résultats obtenus dans le cas antiplan, à mieux discuter les solutions du cas plan grâce au calcul de solutions dans le cas self-similaire et à montrer de nouveaux résultats pour des failles initiales en équilibre statique. Mais rappelons un peu les résultats pour le cas des géométries bidimensionnelles obtenus dans la littérature.

Résoudre les problèmes de failles, spécialement les failles dynamiques, est très difficile. Seule la propagation spontanée d'une faille antiplane semi-infinie a une expression analytique (Kostrov, 1966). Pratiquement toutes les autres solutions ont été obtenues par des méthodes numériques. La méthode des équations intégrales largement utilisée (Burridge, 1969; Das et Aki, 1977; Andrews, 1985) a l'avantage de discrétiser seulement le plan de faille: la propagation dans le milieu homogène se fait à l'aide de fonctions de Green explicites. Mais aucune extension vers des structures locales du milieu plus compliquées n'est possible. Les méthodes de différences finies (Shmueli et Alterman, 1973; Andrews, 1976; Stöckl, 1977...), au contraire, permettent cette extension, bien qu'elle n'ait pas été utilisée jusqu'à maintenant dans des études relativement simples de la rupture. Le revers de la médaille est une

discrétisation de tout le milieu, et non seulement du plan de faille. Toutefois seule la manière de discrétiser le plan de faille qu'effectuent les deux approches semble déterminante pour une modélisation correcte des ruptures spontanées. Les failles tridimensionnelles ont été abordées par les mêmes techniques comme nous le verrons à la section 2.4.

Mon effort a porté sur la bonne modélisation des contraintes de cisaillement sur lesquelles repose la propagation spontanée des failles dynamiques, tandis que le glissement dont dépend le calcul des sismogrammes en champ proche et lointain sera bien moins modélisé par la technique de différences finies, mais avec une précision suffisante pour des calculs de rayonnement (section 2.6). Il est toutefois rare de voir publier les champs de contrainte sur lesquels repose la propagation spontanée.

Je commencerai par la faille antiplane en rappelant les résultats que j'ai obtenus pour la faille semi-infinie dans ma thèse de 3ème cycle, et en introduisant de nouveaux résultats pour les failles finies se propageant dans un champ de contrainte statique ou uniforme. J'aborderai ensuite le cas de la faille plane, en commençant par la faille self-similaire. La propagation d'une faille semi-infinie sera l'objet d'une discussion sur la transition à une vitesse de rupture transsonique. Je présenterai enfin les calculs pour une faille initiale de dimension finie dans un champ de contrainte initial statique.

2.3.2 : Faille antiplane.

Faille antiplane avec une vitesse de rupture fixée.

Le premier problème que j'aborde est celui d'une faille antiplane semi-infinie qui apparaît soudainement le long d'un axe y négatif à l'instant $t = 0$, et qui se propage à une vitesse de rupture constante. Ce problème, qui admet une solution exacte (Kostrov, 1966), a été utilisé par Das et Aki (1977) comme un test de leur méthode d'équations intégrales. Faisons de même.

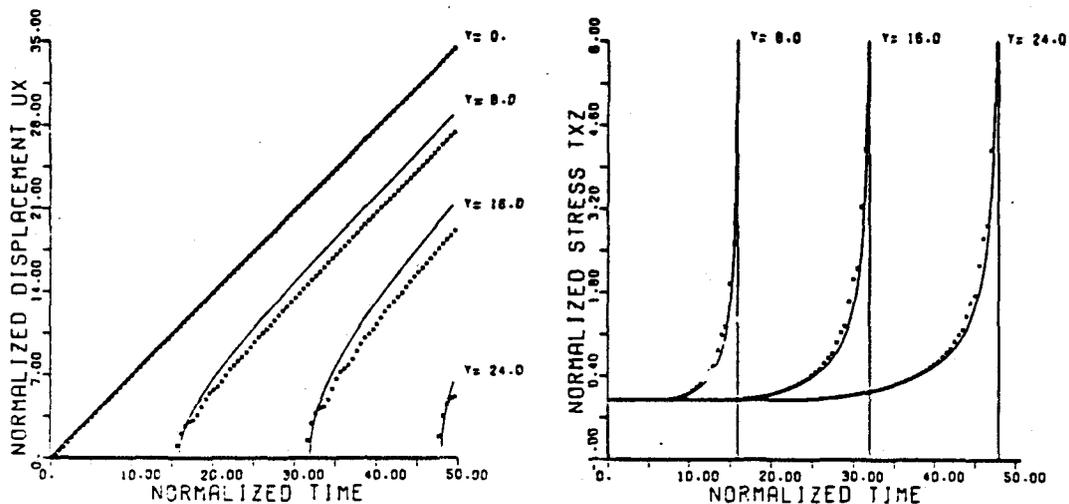


Figure 2.3.a : Glissement et contrainte de cisaillement au cours du temps pour une faille antiplane semi-infinie se propageant à vitesse constante $v = 0.5 \beta$. Les lignes continues représentent les solutions analytiques, et les croix les solutions numériques. Une très bonne résolution de la singularité de contrainte apparaît, alors que le glissement est visiblement décalé. Toutes les variables sont normalisées par $L = d$, le pas de la grille.

La figure 2.3.a montre le glissement (a) et la contrainte de cisaillement (b) le long de l'axe de la faille. Nous voyons que la contrainte présente la singularité habituelle en inverse de la racine carrée de la distance au bord de la faille en dehors de celle-ci, puisqu'elle chute brutalement dès que le front de rupture passe par le point : ce sont les modèles de faille cassante qui supposent un comportement élastique jusqu'à la pointe de la faille. Ce fait difficile à admettre physiquement provoque l'aspect singulier de la solution. Le glissement apparaît immédiatement après le passage du front de rupture et a une forme hyperbolique typique. La solution exacte est en trait continu, tandis que la solution numérique est représentée par des croix. Le glissement est systématiquement sous-estimé à cause de la discrétisation en grille en quinconce par la méthode en différences finies : le glissement n'est pas connu exactement sur le plan de faille, mais sur un plan décalé d'un demi-pas de grille par rapport au plan de faille. Avec la méthode proposée (section 2.2), ce problème ne peut pas être éliminé puisqu'il n'est pas possible de calculer les vitesses et les contraintes au même point de la grille. Ce constat va ressortir tout au long de cette étude, que ce soit pour la rupture ou pour les ondes.

Faille antiplane dynamique semi-infinie.

Une des raisons du développement des méthodes numériques pour résoudre les problèmes de fracture dynamique tient dans le fait qu'elles offrent la possibilité d'étudier la propagation spontanée pour laquelle l'histoire de la rupture n'est pas spécifiée cinématiquement, mais est déterminée à partir des propriétés du matériau. De manière à tester les capacités de la méthode numérique, je modélise le seul cas de rupture

spontanée qui admet une solution exacte (Kostrov, 1966). Ce même problème a été aussi étudié numériquement par Das et Aki (1977).

Le champ de contrainte calculé dans l'exemple précédent est suffisamment stable et précis pour essayer une propagation spontanée. Je ne présente que les résultats du critère de contrainte maximum, traduction numérique du critère de facteur d'intensité maximum dans le continuum, et je renvoie le lecteur à ma thèse de 3ème cycle pour une approche suivant le critère d'énergie seuil (Virieux, 1979).

La faille s'étend initialement entre $-\infty < y < 0$ et, à l'instant $t = 0$, elle est instantanément chargée avec une contrainte de cisaillement uniforme $\tau_{xz} = -\sigma_e = \sigma_f - \sigma_0$, où σ_e est la contrainte effective et $\Delta\sigma = \sigma_0 - \sigma_f$ est la chute de contrainte, égales dans les failles bidimensionnelles. Après un certain temps t_c , la charge sur la pointe de la faille est suffisante pour démarrer la rupture, qui accélère éventuellement à la vitesse de cisaillement. La solution donnée par Kostrov (1966) s'écrit :

$$\begin{aligned} y_c &= 0 \text{ si } t \leq t_c \\ &\text{et} \\ y_c &= \beta (t - t_c) - \beta t_c \text{Log}\left(\frac{t}{t_c}\right) \text{ si } t > t_c, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

où le temps de démarrage de la rupture, défini par :

$$t_c = \pi^2 k_f^2 / 4\beta\sigma_e^2, \tag{2.3.2}$$

dépend du facteur d'intensité de contrainte maximum k_t .

Das et Aki (1977) ont proposé comme traduction numérique du critère de facteur d'intensité de contrainte le critère de contrainte maximum. Soit σ_u la contrainte maximum acceptable et σ_f la friction dynamique sur la faille. En supposant la pointe de la faille au milieu entre deux noeuds du maillage, on trouve :

$$\sigma_u - \sigma_f = 2 k_t d^{-1/2} \quad (2.3.3)$$

où d est le pas de la grille. Puisque σ_f et d sont donnés, il y a une relation linéaire entre σ_u et k_t , grandeurs associées aux deux critères. Remarquons que k_t est normalisé par $\sigma_e L^{1/2}$, ce qui nous donne en variables normalisées :

$$1 + T_u = 2 K_t \sqrt{\frac{L}{d}}, \quad (2.3.4)$$

avec T_u comme valeur maximum sans dimension représentant l'augmentation de contrainte à partir de la contrainte initiale σ_0 :

$$T_u = \frac{\sigma_u - \sigma_0}{\sigma_e}. \quad (2.3.5)$$

De manière à interpréter les résultats numériques en termes de quantités physiques, il nous faut choisir une longueur de référence. Pour le cas de la faille semi-infinie, cas qui n'a pas de longueur intrinsèque autorisant

justement l'obtention d'une solution analytique, je prends $L = d$, le pas de la grille. Dans ce cas, je retrouve le paramètre S de Das et Aki (1977) :

$$1 + S = 2 K_t \text{ avec } K_t = k_t / \sigma_e d^{1/2}. \quad (2.3.6)$$

Un autre choix de longueur intrinsèque aurait pu être la longueur associée au temps de démarrage de la faille $L = \beta t_c$. La figure 2.3.b montre la position de la pointe de la faille semi-infinie au cours du temps, pour différentes valeurs du critère de rupture associé au coefficient K_t . J'ai recalculé la valeur du coefficient K_t ajustant au mieux la solution numérique au sens des moindres carrés. J'ai ainsi obtenu une valeur K_c portée également dans la figure 2.3.b. Les traits continus représentent les solutions analytiques et les croix les solutions numériques. J'ai refait les calculs avec un autre rapport de grille $H = 0.25$, et j'ai trouvé des résultats à peu près identiques : la dispersion numérique n'intervient pratiquement pas dans cet intervalle d'étude.

De ces résultats numériques, je déduis un bon accord entre le critère de facteur d'intensité de contrainte maximum et sa traduction en contrainte maximum pour :

$$2 < K_t < 4 \text{ ou } 3 < S < 7. \quad (2.3.7)$$

La limite inférieure vient de la faible résolution de la concentration de contrainte au voisinage de la pointe de la faille : le facteur d'intensité de contrainte maximum est trop bas, alors que la contrainte calculée numériquement est trop forte. La faille numérique accélère plus vite que la faille analytique. Remarquons que cette limite $S = 3$ est plus importante que

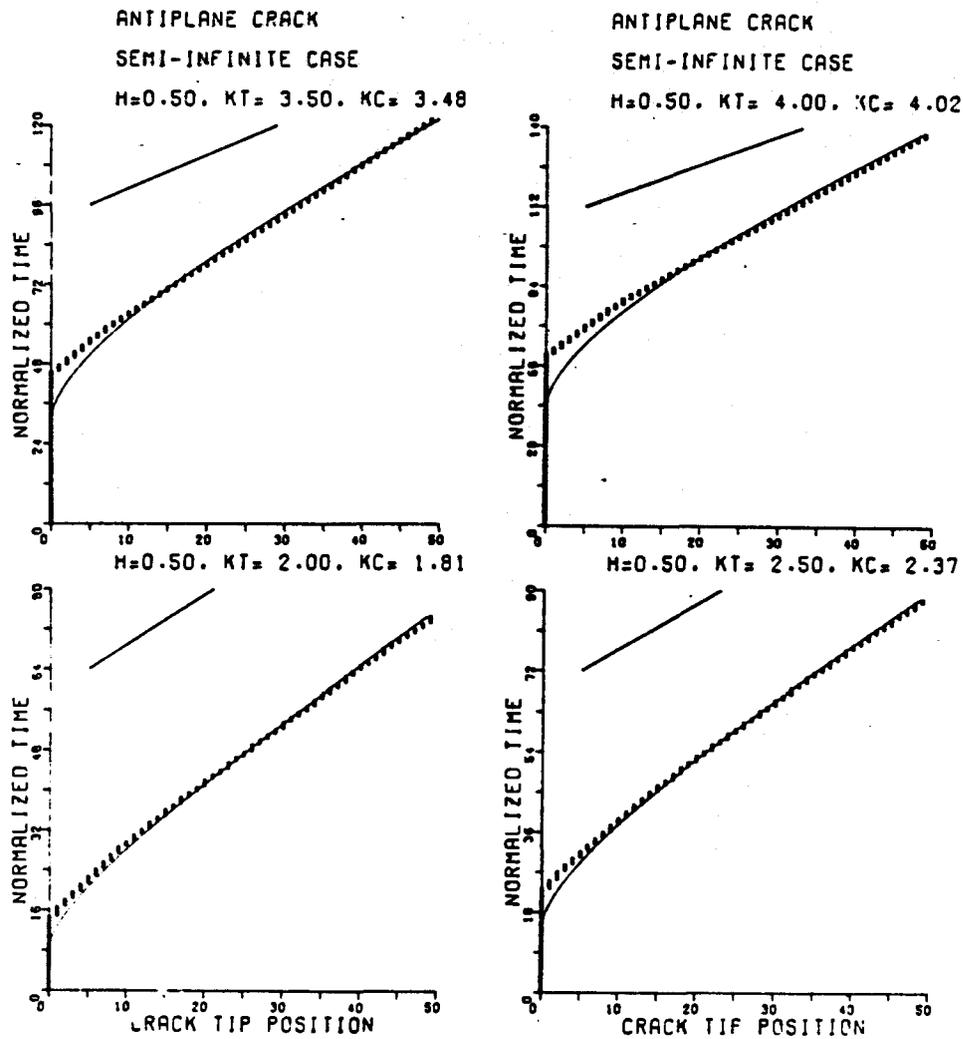


Figure 2.3.b : Le déplacement de la pointe de la faille au cours de la rupture spontanée d'une faille antiplane semi-infinie. Les croix décrivent la solution numérique pour différentes valeurs de K_t . les lignes continues sont des solutions analytiques ajustées par moindres carrés avec un facteur d'intensité de contrainte K_c . Une rupture à la vitesse β est montrée pour comparaison.

celles habituellement autorisées dans la plupart des simulations numériques de la littérature (Das et Aki, 1977 ; Day, 1979 ; Miyatake, 1980 ; Das, 1981 ; Day, 1982b). La limite supérieure correspond à une haute résistance à la rupture. Au delà, la solution numérique semble avoir quelques difficultés à construire la concentration de contrainte. Elle doit faire appel à des points de la faille de plus en plus éloignés : on ne peut alors négliger les effets de dispersion numérique.

Puisque la propagation de la rupture est un phénomène local contrôlé par la contrainte sur le front de rupture, on peut considérer que les limites trouvées pour K_t dans le cas de la faille semi-infinie s'appliquent aussi aux failles de taille finie, à condition de respecter le choix des longueurs caractéristiques ; ce qui nous donne :

$$2 \sqrt{\frac{d}{L}} < K_t < 4 \sqrt{\frac{d}{L}}, \quad (2.3.8)$$

où, comme avant, K_t est défini par $k_t/\sigma_e L^{1/2}$. Ces limites d'application du critère de rupture correspondent à des traits caractéristiques de la méthode numérique utilisée. D'autres méthodes, proposées dans la littérature, peuvent avoir des limites d'application différentes.

Propagation spontanée d'une faille finie initiale.

Le problème de la nucléation de la faille est très important pour la simulation des séismes. Le cas de la faille semi-infinie n'a pas d'équivalent à trois dimensions. Pour cette raison, je considère la rupture à partir d'une faille initiale finie. On peut considérer deux modèles suivant les

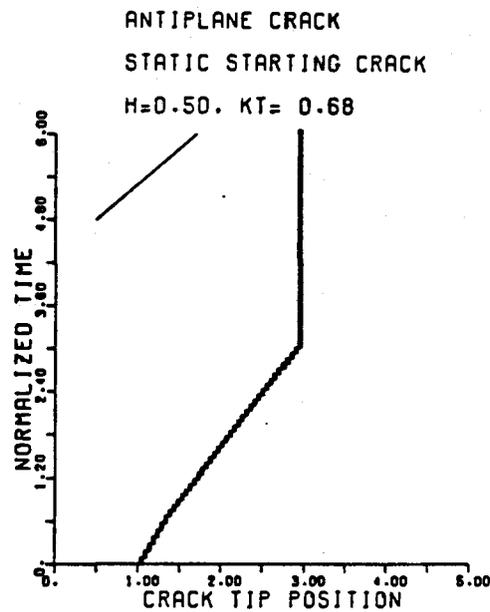


Figure 2.3.c : Rupture spontanée d'une faille antiplane finie préexistante. La position de la pointe de la faille est représentée en fonction du temps. La faille est chargée sous une contrainte statique initiale la rendant instable à $t = 0$. K_t est le facteur statique d'intensité de contrainte. La faille s'arrête quand elle a triplé sa longueur initiale. La longueur caractéristique est la longueur initiale.

conditions initiales : dans le premier cas, la faille est chargée par une précontrainte statique et a atteint un équilibre instable au temps $t = 0$; dans le deuxième cas, la faille finie est chargée instantanément au temps $t = 0$ par une précontrainte uniforme initiale. Il faut attendre un certain temps que la faille atteigne un état instable déclenchant la rupture. Ce deuxième modèle est moins satisfaisant physiquement que le premier, mais moins cher à résoudre : il a souvent été utilisé pour démarrer les ruptures tridimensionnelles (Miyatake, 1980 ; Das, 1981 ; Day, 1982b). Le premier modèle est plus coûteux mais plus réaliste, car il faut calculer le champ de contrainte initial. Cette précontrainte statique est obtenue grâce au terme visqueux introduit dans la résolution numérique pour amortir les oscillations numériques provoquées par la chute de contrainte brutale. Une fois que le champ de vitesse est négligeable, on a atteint la limite statique, qui fournit une valeur de l'intensité de contrainte. Cette valeur sera utilisée comme celle du critère de rupture.

La faille initiale a 40 noeuds, ce qui signifie que la longueur caractéristique, prise comme la demi-longueur initiale, a 20 noeuds : $L = 20 d$. L'intensité de contrainte déduite de la solution statique est :

$$K_t = 0.686, \quad (2.3.9)$$

qui se trouve bien entre les limites, 0.447 et 0.894 données par l'équation 2.3.8 puisque $(d/L)^{1/2} = 20^{-1/2}$. Un état d'équilibre métastable décrit la faille préexistante. De manière à démarrer la rupture, j'applique la contrainte de frottement aux points de la grille juste devant les pointes de la faille : la faille devient instable et se propage symétriquement jusqu'au triple de sa longueur initiale. Je l'arrête brutalement dès que

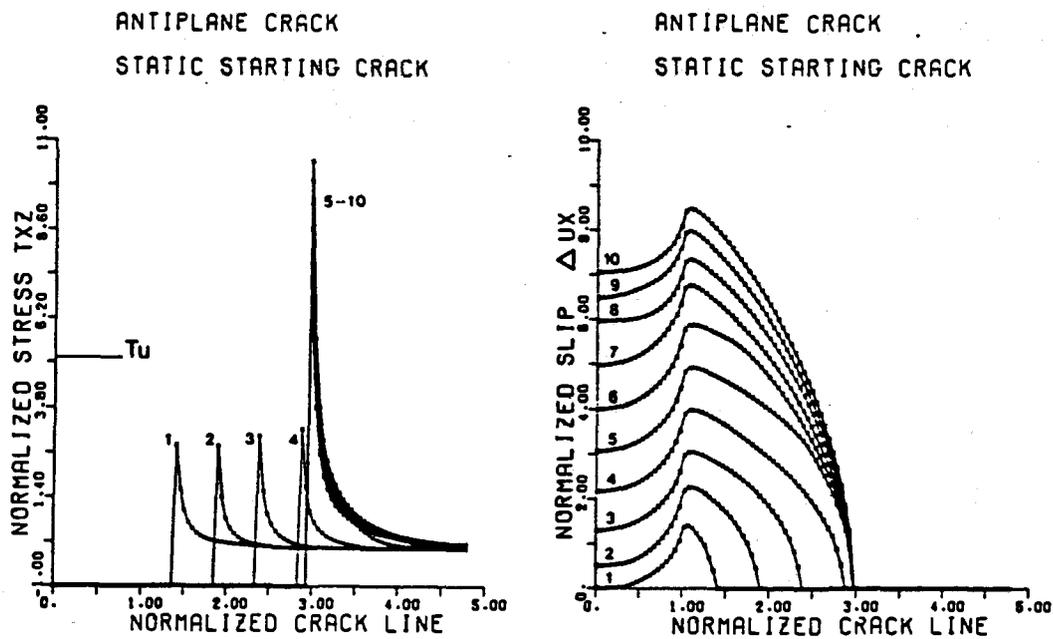


Figure 2.3.d : Solution numérique pour la faille antiplane de la figure 2.3.c. On représente la contrainte de cisaillement et le glissement sur la ligne de faille pour 10 temps commençant à 0.75 avec un pas de 0.75. T_u est la contrainte maximum associée à l'intensité de contrainte statique K_t . La longueur caractéristique est la longueur initiale de la faille.

cette condition est vérifiée. L'intérieur de la faille préexistante n'est pas verrouillé, et on constate qu'une quantité importante du glissement intervient dans cette partie. La figure 2.3.c montre la propagation de la pointe de la faille en fonction du temps. La rupture démarre immédiatement à $t = 0$, et, après une période d'accélération plus rapide que dans le cas de la faille semi-infinie, la faille atteint une vitesse de rupture de 0.66β , juste avant l'arrêt de la rupture.

La figure 2.3.d représente le champ de contrainte normalisé T_{xz} et le glissement normalisé ΔU_x à des intervalles de temps égaux le long de la ligne de faille. La contrainte maximum T_u associée à K_t est 5.136. Durant la propagation T_{xz} est toujours plus faible que cette valeur. Comme la faille atteint très rapidement une vitesse de rupture constante, l'état de contrainte observé se trouve toujours au même instant après une avancée de la pointe de la faille : on observe donc la même concentration de contrainte. Il aurait fallu prendre des intervalles de temps irréguliers pour observer différentes concentrations. Quand la faille s'arrête de grandir, une concentration de contrainte supérieure à la valeur T_u se développe devant la pointe de la faille.

Dans la figure 2.3.d, on compte le glissement à partir de l'état initial $t = 0$ et non pas à partir de l'état uniforme avant l'introduction de la faille préexistante. Le glissement présente deux traits distincts : un glissement important elliptique sur la nouvelle rupture et un déficit de glissement sur la partie déjà existante de la faille. Si on avait ajouté le glissement préexistant, on aurait trouvé une forme elliptique complète. Dans ce cas, on aurait mesuré le glissement depuis l'état initial uniforme avant l'apparition de la faille. Remarquons que ce glissement initial (ou

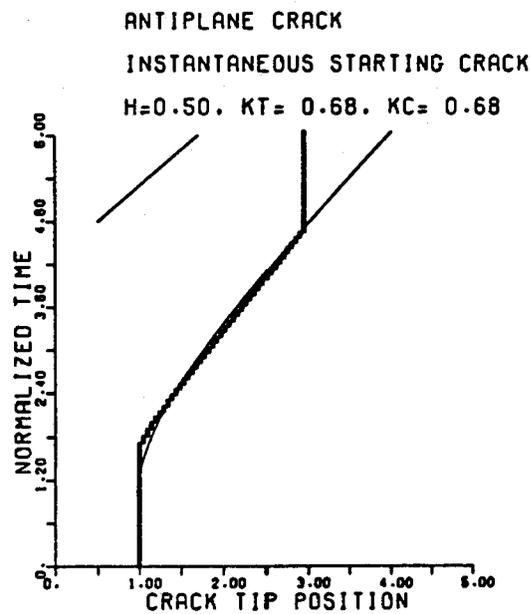


Figure 2.3.e : Rupture spontanée d'une faille antiplane finie instantanée. La position de la pointe de la faille est représentée en fonction du temps. La faille est chargée à $t = 0$. Il faut attendre un temps t_c pour dépasser le facteur d'intensité K_t rendant la faille instable. K_t est pris égal au facteur statique d'intensité de contrainte calculé pour la faille de la figure 2.3.c. La faille s'arrête quand elle a triplé sa longueur initiale. La ligne continue est la solution analytique d'une faille semi-infinie pour un facteur recalculé K_c identique à K_t . La longueur caractéristique est la longueur initiale.

anti-dislocation suivant les termes d'Andrews, 1974) ne peut être détecté par des mesures purement sismologiques. Au fur et à mesure que la nouvelle faille augmente, le glissement initial devient plus petit par rapport au glissement total.

Dans le second modèle, une faille de demi-longueur $L = 20 d$ apparaît instantanément à l'instant $t = 0$ et se propage spontanément avec un critère de rupture trouvé pour la faille statique $K_t = 0.686$. Avant l'interaction entre les deux pointes de la faille, ce modèle ressemble fortement à celui de la faille semi-infinie. La figure 2.3.e montre la position de la pointe de la faille au cours du temps. Comme dans le cas de la faille semi-infinie, un certain temps proche de t_c (équation 2.3.2) s'écoule avant le démarrage de la rupture. Durant ce temps, la concentration de contrainte se construit devant la faille jusqu'à atteindre la valeur $K_t = 0.686$. Il est tout à fait remarquable de constater que la faille démarre avec cette valeur de K_t qui est celle de la faille statique. Ce qui montre que l'intensité de contrainte dynamique d'un chargement instantané dépasse l'intensité de contrainte statique. Après une accélération initiale, la vitesse de rupture atteint 0.86β . La faille s'arrête brutalement quand elle a triplé sa longueur initiale.

Le champ de contrainte T_{xz} , montré dans la figure 2.3.f, est très similaire à celui de la faille préexistante de la figure 2.3.d. Remarquons la construction initiale (instants 1 et 2) de la concentration de contrainte avant le démarrage de la rupture. Cette concentration est supérieure à celle observée pendant la propagation qui, elle, se situe toujours au même niveau dans la figure 2.3.f. En effet elle correspond à un même moment après une avancée de la pointe, car la vitesse de rupture atteint

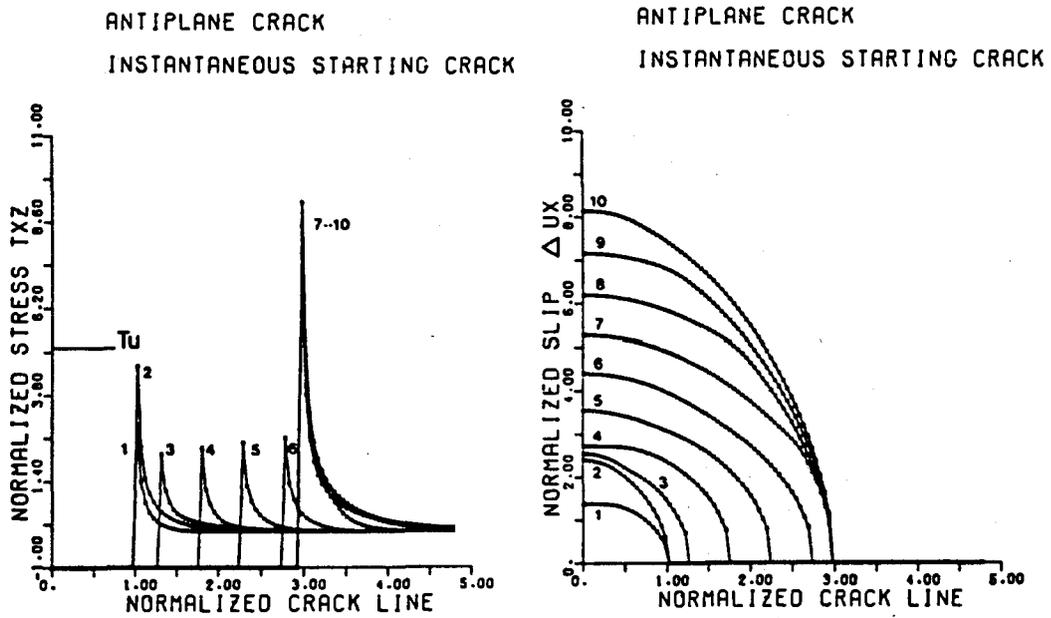


Figure 2.3.f : Solution numérique pour la faille antiplane de la figure 2.3.e. On représente la contrainte de cisaillement et le glissement sur la ligne de faille pour 10 temps commençant à 0.75 avec un pas de 0.75. T_u est la contrainte maximum associée à l'intensité de contrainte statique K_t . La longueur caractéristique est la longueur initiale de la faille.

immédiatement sa valeur limite.

Par contre, le glissement montré dans la même figure 2.3.f est très différent de celui de la figure 2.3.d, car le déficit de glissement associé à la faille préexistante a disparu. Après le démarrage de la rupture, le glissement est semblable à celui, de forme elliptique, de la faille self-similaire (Kostrov, 1964). Une fois que la faille s'est arrêtée, le glissement continue pendant un temps jusqu'à l'arrivée des phases d'arrêt. Simultanément la concentration de contrainte se construit en dehors de la faille et, comme prévu, atteint une valeur similaire à celle du cas de la figure 2.3.d.

Revenant au cas de la faille préexistante, nous voyons que la concentration de contrainte finale est bien plus grande que la concentration de contrainte initiale au début de la rupture. Ceci montre qu'à chute de contrainte constante l'intensité de contrainte dépend de la racine carrée de la longueur de la faille, i.e. :

$$k_t = 0.686 \sigma_e L^{1/2} \quad (2.3.10)$$

dans les deux cas étudiés. Initialement $L = L_0 = 20 d$, alors qu'à la fin $L = L_f = 60 d$. En normalisant par la longueur L_0 , l'intensité de contrainte finale est $3^{1/2}$ fois supérieure à celle du début. Si on normalise par la longueur finale L_f , on aurait obtenu le même résultat que celui de la faille préexistante. Le processus entier de propagation de la rupture peut être réitéré, avec une meilleure résolution puisque la grille est plus dense. Ceci montre clairement que le critère numérique dépend du nombre de noeuds à l'intérieur de la faille : si on accroît le nombre de noeuds de L_0 à L_f , le

critère de contrainte maximum doit être augmenté d'une quantité $(L_f/L_0)^{1/2}$. C'est cette normalisation que j'utiliserai dans la section 2.5, pour discuter les différentes longueurs en jeu dans les modèles de faille, normalisation qui n'a jamais été clairement soulignée dans le travail de Das et Aki (1977) ou celui d'Andrews (1976).

2.3.3 : Faille plane.

Faille plane self-similaire.

Le couplage des ondes P et SV rend le problème des failles planes plus difficile à résoudre que celui des failles antiplanes. Le seul problème pour lequel une solution analytique complète existe est le cas de la faille plane self-similaire. Dans ce modèle, la faille apparaît à l'instant $t = 0$ à l'origine des coordonnées et se propage bilatéralement avec une vitesse de rupture constante le long de l'axe x . Le plan de faille coïncide avec le plan $x-y$, et la faille s'étend indéfiniment suivant y . Un champ de contrainte uniforme σ_0 existe avant la rupture. Une fois que la rupture a démarré, la contrainte à l'intérieur de la faille chute à sa valeur de friction σ_f . Kostrov (1964) a donné une solution à ce problème pour des vitesses subsoniques. Le glissement s'écrit à l'intérieur de la faille :

$$\Delta u_x(x,y) = C \frac{\sigma_e}{\mu} \sqrt{v_r^2 t^2 - x^2} \text{ pour } v_r t > |x| \quad (2.3.11)$$

où C est une constante numérique, appelée parfois constante de Kostrov. En utilisant cette équation comme une distribution de dislocations, on peut calculer la contrainte sur le plan de faille par la méthode de Cagniard-de Hoop.

Ce problème n'a pas de longueur intrinsèque, comme le montre l'équation 2.3.11 : on prend d comme longueur caractéristique pour la normalisation de la solution.

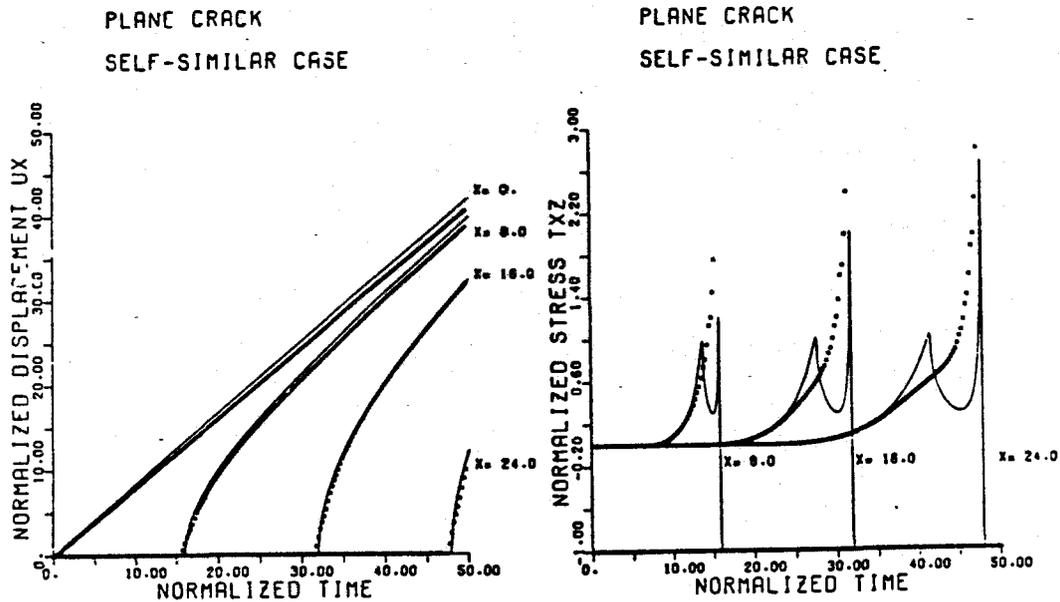


Figure 2.3.g : Le déplacement et la contrainte de cisaillement sont représentés en fonction du temps pour une faille plane self-similaire se propageant à vitesse constante 0.5α . les croix indiquent les solutions numériques, tandis que les lignes continues donnent les solutions analytiques. La singularité de contrainte moyenne le pic associé au front d'onde S et la singularité sur le front de rupture. Le déplacement est clairement décalé comme pour la faille antiplane. La longueur caractéristique est le pas de la grille d .

Je choisis une vitesse de rupture v_r égale à 0.5α , i.e. 0.86β . La figure 2.3.g représente la composante U_x du déplacement, ainsi que la contrainte T_{xz} en différents points du plan de faille en fonction du temps. La ligne continue donne la solution analytique, tandis que les croix représentent la solution numérique. Le déplacement numérique suit fidèlement la solution analytique : il est nul avant l'arrivée du front de rupture et présente ensuite la forme hyperbolique prédite par l'équation 2.3.11. On constate toujours une sous-estimation du déplacement par la méthode numérique, venant du choix de la discrétisation. Le glissement ΔU_x

déduit est toutefois parfaitement satisfaisant pour des calculs de sismogrammes.

Le champ de contrainte n'est pas aussi bien modélisé par la méthode numérique (figure 2.3.g). En particulier il manque la concentration associée au passage de l'onde S. En effet le passage de l'onde S autorise un deuxième degré de liberté au problème qui est le cisaillement. Celui-ci provoque le relâchement momentané de la contrainte avant la construction de la concentration devant le front de rupture. Seul un léger rebondissement se dessine à la dernière position $X = 24$. Je pense que ce problème provient d'un lissage numérique des conditions aux limites sur le plan de faille. Les champs sont moyennés autour de la pointe de la faille, spécialement le champ T_{zz} : une émission faible d'ondes S en résulte. Andrews (1985) a obtenu une meilleure modélisation de cette concentration par une méthode d'équation intégrale, bien qu'il n'ait pas insisté sur l'effet self-similaire de la solution. La solution en $X = 24$ se déduit de celle en $X = 8$ par un facteur d'échelle. Ce qui n'enlève rien à son résultat remarquable. Dans la modélisation faite, la solution numérique manque de résolution et, comme le montre la figure 2.3.g, le champ de contrainte devant la faille n'est qu'une approximation du champ exact: il y a coalescence des deux concentrations. La concentration numérique est plus large et moins importante que celle de la solution analytique. Je reviendrai dans la section 2.5 sur ce problème qui n'a pas pour l'instant trouvé de solutions dans la littérature, bien que de nombreuses équipes y travaillent en recourant à des maillages de plus en plus sophistiqués autour de la pointe de la faille: maillage qui doit se déplacer avec la pointe ?

Propagation spontanée d'une faille plane.

En dépit de la mauvaise modélisation de la concentration de contrainte - dont on sent qu'elle va réduire le domaine d'équivalence entre un critère de facteur d'intensité de contrainte maximum et sa traduction numérique en termes d'un contrainte maximum - étudions la propagation spontanée d'une faille plane avec le même critère de propagation que le cas antiplan.

Considérons d'abord une faille semi-infinie qui apparaît instantanément à l'instant $t = 0$ le long de l'axe x négatif. Le matériau est sous l'effet d'une contrainte initiale uniforme σ_0 . A l'intérieur de la faille, la contrainte chute instantanément à sa valeur de friction dynamique σ_f . Comme dans le cas antiplan, le facteur d'intensité de contrainte devant la pointe de la faille augmentera jusqu'à atteindre une valeur critique k_t . A cet instant t_c , la faille commencera à se propager, accélérant jusqu'à une vitesse limite qui dépendra de la valeur de k_t , et du pas de la grille choisi à travers l'expression de l'intensité de contrainte normalisée $K_t = k_t/(\sigma_0 d^{1/2})$.

Aucune solution analytique n'existe pour cette géométrie simple. Je discuterai les solutions numériques en fonction des valeurs de la vitesse de rupture atteintes. La figure 2.3.h montre les positions de la pointe de la faille en fonction du temps pour quatre valeurs de K_t , prises dans l'intervalle de valeurs définies par le cas antiplan. Pour $K_t < 2.5$, la vitesse de rupture devient transsonique et tend vers la vitesse des ondes P : par exemple, pour $K_t = 2$, on trouve une vitesse de 0.86α . Pour $K_t = 2.5$, on observe une zone de transition particulièrement marquée où la vitesse de rupture dépasse la vitesse des ondes de Rayleigh pour devenir

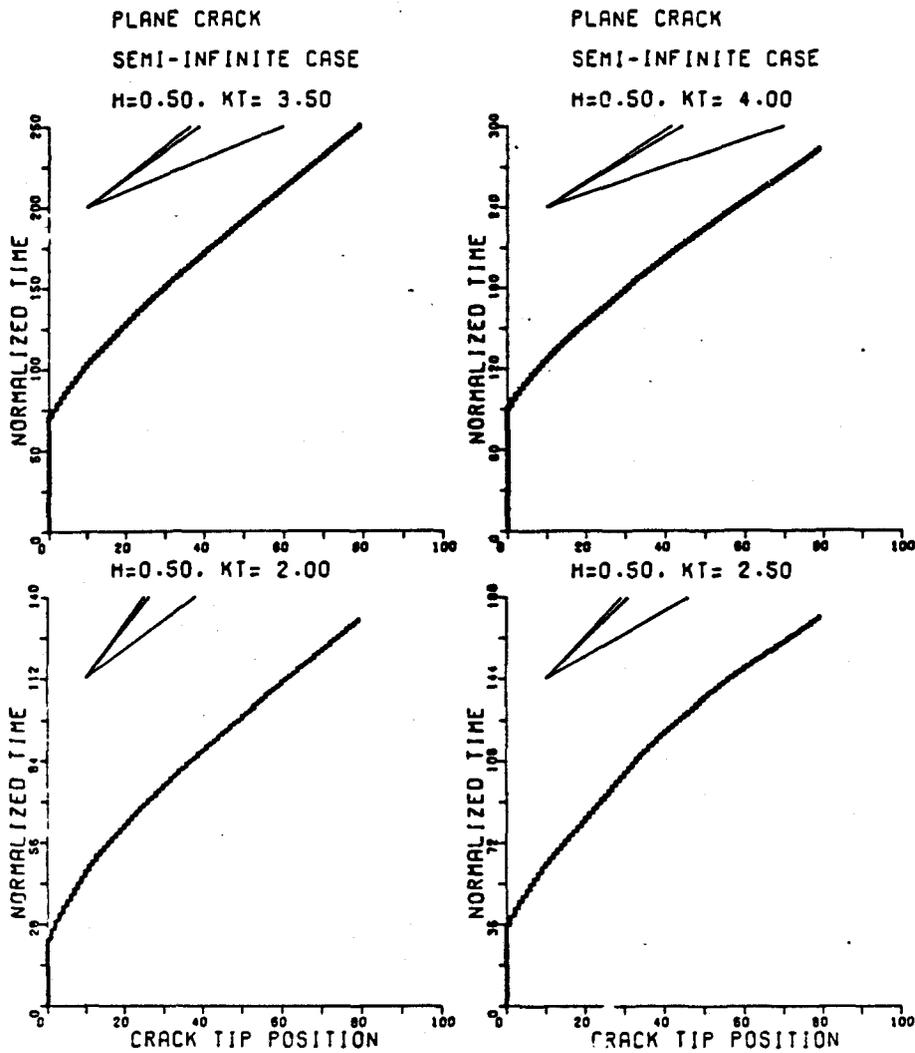


Figure 2.3.h : Déplacement de la pointe de la faille au cours de la rupture spontanée d'une faille semi-infinie plane. Les croix indiquent les solutions numériques pour différentes valeurs du facteur d'intensité de contrainte K_t . Les vitesses de rupture α , β , c_r servent de référence. La longueur caractéristique est le pas de la grille d .

transsonique. Pour des valeurs $K_t > 2.5$, la vitesse de rupture limite est toujours inférieure à la vitesse de Rayleigh, qui ne doit pas être dépassée pour les critères de facteur d'intensité de contrainte sous peine de ne plus vérifier la conservation d'énergie à la pointe de la faille. Une limite supérieure doit exister, comme dans le cas antiplan, et on supposera une limite identique, puisque le processus de dispersion est le même. Donc, tant que $2.5 < K_t < 4$, la vitesse de rupture maximum est inférieure à celle de Rayleigh. Pour une faille finie, cette condition devient :

$$2.5 \sqrt{\frac{d}{L}} < K_t < 4 \sqrt{\frac{d}{L}}, \quad (2.3.12)$$

où d est le pas de la grille et K_t est normalisé par $\sigma_e L^{1/2}$.

Pour des valeurs de $K_t < 2.5 (d/L)^{1/2}$, le front de rupture devient transsonique et approche la vitesse des ondes P. Cette transition provient de l'interprétation numérique du critère de facteur d'intensité de contrainte en termes de critère de contrainte maximum. Si le facteur d'intensité de contrainte est faible, la contrainte maximum obtenue peut être assez faible pour être atteinte par la concentration associée à l'onde S, comme l'a remarqué Andrews (1976). Une rupture apparaît devant la pointe de la faille. On peut pourtant ignorer la possibilité de cette rupture en ne considérant que le critère s'appliquant sur la singularité : on s'intéresse localement à la pointe de la faille. Pour cela, il faut avoir une bonne résolution des différentes concentrations. Malheureusement, dans mon cas et, peut-être, dans toutes les méthodes conduisant à une discrétisation, il n'est pas possible de séparer les deux concentrations du fait de la coalescence entre le front S et le front de rupture. On ne peut

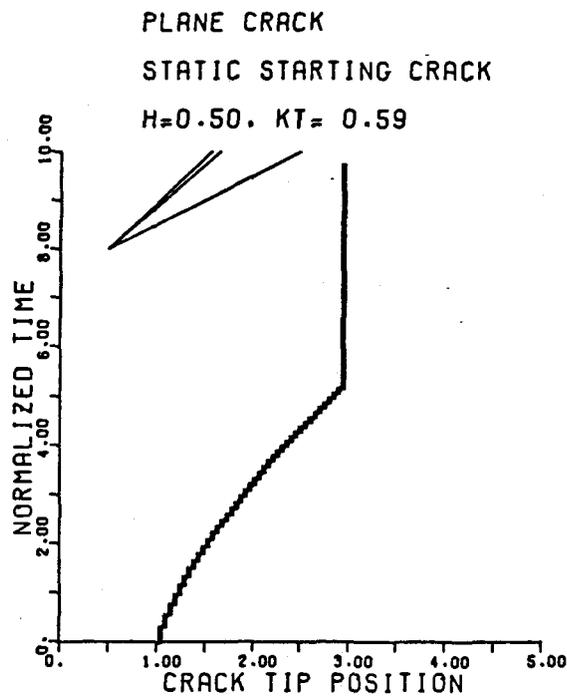


Figure 2.3.i : Rupture spontanée d'une faille plane finie préexistante. La position de la pointe de la faille est représentée en fonction du temps. La faille est chargée sous une contrainte statique initiale la rendant instable à $t = 0$. K_I est le facteur statique d'intensité de contrainte. La faille s'arrête quand elle a triplé sa longueur initiale. La longueur caractéristique est la longueur initiale. Les vitesses de rupture α , β , c_r servent de référence

donc pas distinguer une rupture de la concentration du front d'onde S et celle de la pointe de la faille.

Dans une autre alternative, on peut interpréter, comme l'ont fait Das et Aki (1977), le résultat numérique comme dû à la présence d'une zone de cohésion devant la pointe. Cette zone de cohésion élimine les singularités de la contrainte, mais introduit une nouvelle longueur dans le problème physique. La discussion des critères de rupture peut paraître plus simple (Day, 1982b), puisque le critère de contrainte maximum est également le critère physique. Mais, comme la taille de la zone de cohésion dépend de la vitesse de rupture (Andrews, 1985), la validité de la simulation numérique est beaucoup plus délicate à analyser.

Considérons maintenant une faille finie de demi-longueur initiale $L = 20 d$ sous un chargement statique. A l'instant $t = 0$, la faille commence à se propager, puisque l'intensité de contrainte statique est prise comme intensité maximum : $K_t = 0.59$. J'arrête la faille brutalement quand elle a triplé sa longueur initiale. La figure 2.3.i montre la position de la pointe de la faille en fonction du temps. On remarque que la vitesse de rupture est inférieure à celle de Rayleigh, comme l'indiquait la valeur de K_t supérieure à 0.55, valeur limite de validité.

La figure 2.3.j représente les champs ΔU_x et T_{xz} qui possèdent les mêmes traits caractéristiques que dans le cas antiplan. Une forte onde S, caractérisée par une concentration de contrainte, est émise lors de l'arrêt brutal de la faille.

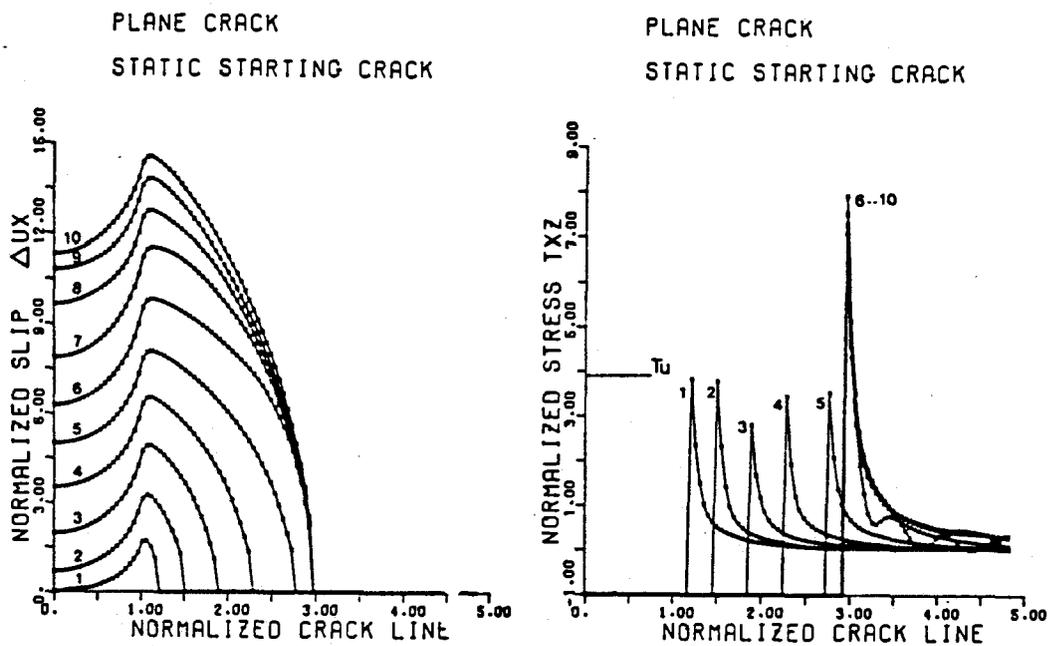


Figure 2.3.j : Solution numérique pour la faille plane de la figure 2.3.i. On représente la contrainte de cisaillement et le glissement sur la ligne de faille pour 10 temps commençant à 1 avec un pas de 1. T_U est la contrainte maximum associée à l'intensité de contrainte statique K_f . La longueur caractéristique est la longueur initiale de la faille.

2.3.4 : Conclusion.

L'étude des failles dynamiques bidimensionnelles à propagation spontanée est une étape indispensable avant l'étude tridimensionnelle. Elle nous a permis de discuter de la validité des solutions numériques obtenues et du domaine d'applicabilité des critères numériques de rupture pour simuler le comportement physique de failles cassantes dans le continuum.

J'ai trouvé un comportement très stable de la singularité de contrainte devant le front de rupture, même quand celui-ci se propage. Le schéma numérique a été construit pour cela. Il en découle une sous-estimation systématique du glissement sur la faille qui provient de la discrétisation numérique choisie. Elle ne sera toutefois pas critique pour le calcul de sismogrammes.

La propagation spontanée est contrôlée par le choix d'un critère numérique de propagation qui approxime - du moins qualitativement - l'absorption de l'énergie sur le front de rupture dont dépend la vitesse de rupture. Après différents essais effectués dans ma thèse de 3ème cycle (Virieux, 1979), le critère de contrainte maximum de Shmueli et Perets (1976) et Das et Aki (1977) semble le plus satisfaisant. La valeur de la contrainte au noeud devant le front de rupture est comparée à une valeur maximum : si elle la dépasse, le front avance en écrasant cette valeur. Tout autre critère de rupture devra évaluer les champs autour du front de rupture : ce qui introduit des phénomènes numériques transitoires associés au temps de parcours des ondes dans cette zone d'évaluation. C'est pourquoi les critères de rupture sont plus difficiles à définir que

dans les cas de failles statiques, et c'est pourquoi le critère de contrainte maximum est le plus proche d'un critère instantané. Ce critère de contrainte maximum a aussi été utilisé par Mikumo et Miyatake (1979), Day (1979, 1982b), Miyatake (1980) et Das (1981).

Ce fut un des buts de cette section que d'analyser correctement ce critère pour le traduire en termes physiques et le comparer aux critères de rupture pour le continuum. Das et Aki (1977) ont souligné que le critère de facteur d'intensité de contrainte maximum (critère d'Irwin) était équivalent numériquement au critère de contrainte maximum à travers la relation :

$$\sigma_u = \sigma_f + 2 k_t d^{-1/2}. \quad (2.3.13)$$

Une longueur caractéristique apparaît dans cette équivalence, qui est le pas de la grille numérique d . Avec une analyse aux dimensions pour une faille finie, j'ai trouvé que la relation pour la contrainte maximum devait s'écrire :

$$\sigma_u = \sigma_f + 2 K_t \sqrt{L/d}. \quad (2.3.14)$$

où on rendait compte du rôle de la longueur de la faille dans le critère de rupture, résultat bien connu de la mécanique de la fracture. L'équation 2.3.14 montre que le critère de contrainte maximum dépend du nombre de noeuds à l'intérieur de la faille. Plus fine est la discrétisation, plus haute sera la valeur de σ_u pour une même valeur maximum du facteur d'intensité k_t . Cette propriété des solutions numériques n'a pas été suffisamment

soulignée dans les travaux antérieurs sur la propagation spontanée. L'initiation par une faille finie apparaissant dans le milieu cache la longueur intrinsèque du problème sous le temps t_c mis par la faille pour devenir instable. Ce temps est nécessaire pour la construction de la concentration de contrainte au bord de la faille. On risque même de ne pas atteindre la valeur maximum, si le nombre de noeuds est insuffisant à l'intérieur de la faille.

Dans le cas plan, le champ de contrainte numérique ne sait pas distinguer la concentration de contrainte associée au front de rupture de la concentration de contrainte associée au passage du front d'onde S. La faille peut atteindre des vitesses de rupture supérieures à la vitesse de Rayleigh, caractéristiques dans le cadre des failles cassantes d'un phénomène numérique. Une alternative consiste à introduire une zone de cohésion devant la pointe de la faille, traduction du comportement non-élastique du milieu devant le front. Néanmoins j'ai évité cette approche, plus satisfaisante physiquement, mais qui augmente la difficulté de la discussion : une nouvelle longueur physique, la taille de la zone de cohésion qui dépendra de la vitesse de rupture (Andrews, 1985), est introduite, dont il faut vérifier la simulation numérique. On a remplacé le problème de la coalescence des concentrations de contrainte par un problème au moins aussi difficile. J'aborderai , dans la section 2.5, les moyens à mettre en oeuvre pour le résoudre.

La longueur de la faille est intimement liée au critère de rupture, un résultat très satisfaisant car tous les critères de rupture en mécanique de la fracture font intervenir à la fois l'état des contraintes et la taille de la faille. C'est un trait fondamental des théories de fracture de Griffith et d'Irwin.

MODELISATION 3-D : FAILLE INITIALE CIRCULAIRE.

2.4.1 : Introduction.

Après avoir étudié la propagation de la rupture dans des géométries bidimensionnelles, abordons le cas de la rupture spontanée d'une faille de cisaillement plane dans un milieu tridimensionnel, précontraint suivant une contrainte initiale tectonique homogène ou une contrainte statique due à la présence d'une faille avant la propagation de la rupture.

La faille self-similaire est le seul cas pour lequel des solutions analytiques ont été construites (Kostrov, 1964 ; Burridge et Willis, 1969 ; Richards, 1973 et 1976). Madariaga (1976) a analysé le cas de la faille circulaire en géométrie axisymétrique pour une vitesse de rupture imposée par la même méthode que celle que j'utilise. Pour des ruptures spontanées, cette symétrie particulière n'est plus respectée comme nous allons le voir : il faut donc considérer le cas 3-D sous une forme générale. Nous aborderons, d'autre part, une étude du rayonnement en champ lointain comme illustration de géométries qui ne sont pas axisymétriques (section 2.6).

Dans la présentation des résultats, je me restreindrai à des failles que je qualifierai de rayées, i.e. où la totalité du glissement s'effectue suivant la direction de la contrainte de cisaillement initiale. Cette direction sera donc aussi celle du frottement. Cette restriction a l'avantage de ne faire intervenir que la contrainte effective σ_e qui se

trouve alors égale à la chute de contrainte dynamique $\Delta\sigma$ dans le critère de rupture sur le front de la faille et de simplifier ce critère de rupture qui ne concerne plus qu'une composante de la contrainte de cisaillement.

En effet, un critère de rupture tridimensionnel pose une série de problèmes puisque nous sommes en présence d'un mélange de modes de rupture : concentrations de contrainte en mode II (faille plane) et mode III (faille antiplane). De manière à traduire un critère de rupture fondé sur les facteurs d'intensité de contrainte K_{II} et K_{III} en un critère de contrainte maximum, seul applicable au problème numérique, il est nécessaire de moyenniser le champ de contrainte sur les éléments de maillage $d * d$ qui contiennent le front de rupture. Alors qu'à deux dimensions, le front de rupture se réduisait à un point fixé au centre d'un intervalle de la grille, dans le cas à trois dimensions, on doit connaître la forme du front de rupture.

Pour les failles rayées, seule la contrainte normalisée T_{xz} sur le plan de faille repéré par xOy présente une concentration de contrainte importante. T_{yz} doit être faible : une hypothèse que j'ai vérifiée pour les valeurs numériques que j'ai utilisées. Si cette hypothèse n'était pas vérifiée, on aurait dû décomposer le champ de contrainte près de la rupture en une composante plane et antiplane et appliquer un critère de rupture à chaque composante. En fait, le critère de rupture à trois dimensions est fondé sur des considérations de flux d'énergie, et il ne semble pas qu'il y ait de moyens simples d'exprimer ce critère en termes de facteurs d'intensité de contrainte. En conséquence, j'utiliserai le critère d'intensité maximum de contrainte sur la composante T_{xz} exclusivement. Je supposerai que l'intervalle de validité du critère numérique est le même

que celui déterminé pour la propagation plane qui se trouve être le plus restrictif :

$$2.5 \sqrt{\frac{d}{L}} < K_t < 4 \sqrt{\frac{d}{L}}, \quad (2.4.1)$$

où K_t est l'intensité maximum et L une longueur caractéristique du problème, qui sera par la suite le rayon de la faille initiale.

2.4.2 : Faille 3-D statique.

Considérons une faille préexistante circulaire dans le plan xOy de rayon égal à 10 pas de grille ($L = 10d$). La faille a glissé sous l'effet d'une contrainte tectonique T_{xz} appliquée à l'infini. Le glissement à l'intérieur de la faille a une forme ellipsoïdale typique des failles cassantes. Le champ de contrainte présente une concentration suivant une racine inverse de la distance aux lèvres de la faille : l'intensité de contrainte maximum normalisée est $K_t = 0.42$ sur l'axe x . L'intensité de contrainte est plus faible dans la direction y , direction antiplane, faiblesse prédite par des considérations théoriques. J'utilise donc $K_t = 0.42$ comme l'intensité maximum admissible.

Le problème est maintenant similaire à celui de la propagation spontanée de failles antiplanes ou planes. La faille à l'instant $t = 0$ est en équilibre métastable, prête à se propager. Dans le cas bidimensionnel, la rupture démarrerait après avoir relâché un noeud du maillage devant la faille : la faille était plus longue et devenait instable. Dans le cas d'une faille circulaire, la faille est localement métastable suivant l'axe x , i.e. dans la direction plane seulement. Elle est stable suivant la direction y , qui est une direction antiplane. Dans un sens strict, la rupture devrait se propager d'abord dans la direction plane, provoquant une rupture hautement asymétrique. Au lieu de cela, j'augmente le rayon d'un pas de la grille, écrasant ainsi la concentration de contrainte sur tout le pourtour de la faille, et je laisse la faille évoluer spontanément.

La faille, après un bref arrêt dans cette nouvelle position, commence à se propager plus rapidement suivant la direction x que suivant la direction y comme le montre la figure 2.4.a. J'arrête la rupture brutalement quand la demi-longueur le long de l'axe x est deux fois le rayon initial de la faille circulaire (figure 2.4.a). Juste avant l'arrêt de la faille, la vitesse de rupture est $v_x = 0.45 \alpha$ dans la direction x et $v_y = 0.31 \alpha$ dans la direction y . Je n'ai pas vérifié si la faille devenait transsonique dans la direction x puisque je ne l'ai pas laissé se propager assez longtemps. Pour étudier la vitesse asymptotique, il aurait fallu une grille beaucoup plus importante, et donc un calcul beaucoup plus coûteux.

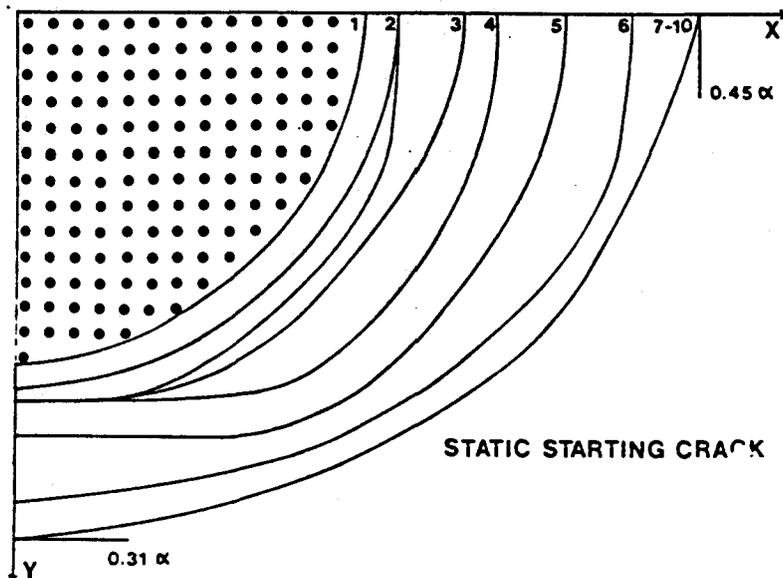


Figure 2.4.a : Propagation du front de rupture pour une faille spontanée initialement circulaire sous une pré-contrainte de cisaillement statique. Les points indiquent la faille pré-existante, tandis que les lignes montrent le front de rupture à 10 instants différents commençant à 0.4 avec un pas de 0.4. On indique les vitesses de rupture dans les directions x et y au moment de l'arrêt, i.e. quand la faille a doublé sa longueur dans la direction x .

La figure 2.4.b montre à la fois le glissement ΔU_x normalisé à l'intérieur de la faille et la contrainte T_{xz} dans le plan de faille à différents instants. On représente ces grandeurs dans les directions $\phi = 0^\circ$ (axe x), $\phi = 45^\circ$, et $\phi = 90^\circ$ (axe y), de manière à marquer la non-symétrie des solutions obtenues. Les aspects globaux du glissement et de la contrainte sont les mêmes que ceux obtenus dans le cas antiplan et plan : il y a un déficit de glissement dans la région de la faille ayant déjà glissé et une singularité en inverse de la racine carrée de la distance à la frontière en dehors de la faille. Ce modèle correspond à une aspérité en forme de faille circulaire ayant déjà glissé. La zone bloquée, servant de déclencheur de la rupture, est alors constituée par toute la frontière de la faille circulaire. Au lieu de déclencher la rupture sur tout le pourtour, on aurait pu utiliser un déclenchement localisé dans la zone plane (axe x), comme l'ont effectué ultérieurement Das et Kostrov (1983), avec une propagation de la rupture courant le long de la frontière circulaire.

Ce modèle est un modèle assez coûteux à résoudre car il faut calculer la solution statique initiale avant le démarrage de la rupture. Tournons-nous maintenant vers un modèle qui nous semble moins réaliste mais plus simple à calculer, et qui a reçu, par conséquent, une plus grande attention dans la littérature (Miyatake, 1980 ; Das, 1981 ; Day, 1982a, 1982b).

STATIC STARTING CRACK

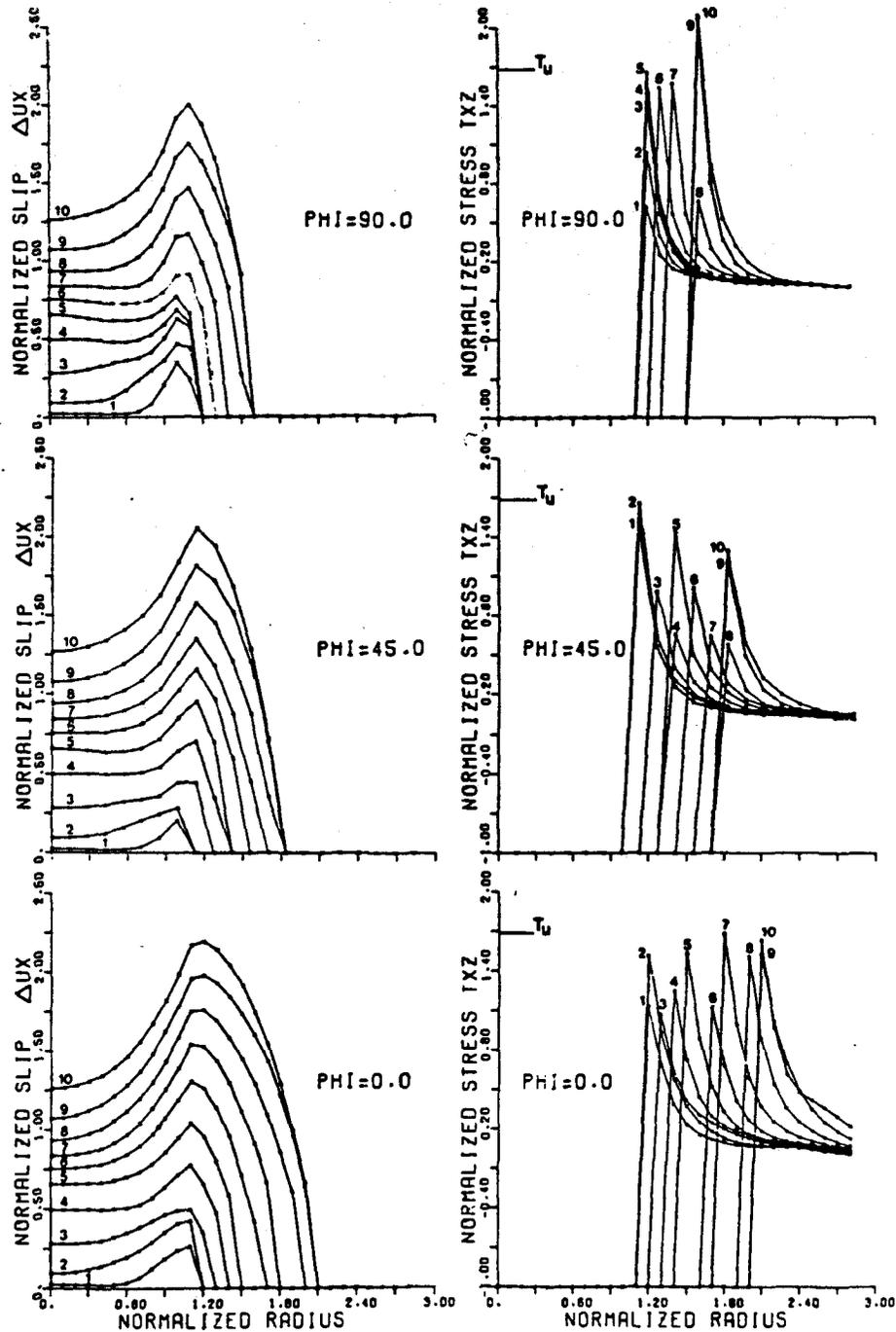


Figure 2.4.b : Glissement et contrainte le long d'une ligne sur le plan de faille définie par son angle ϕ par rapport à l'axe x pour la rupture spontanée de la figure 2.4.a. On montre les champs aux instants commençant à 0.4 avec un pas de 0.4. T_u est la contrainte maximum associée à l'intensité de contrainte statique K_t . Le rayon de la faille initiale est la longueur de référence.

2.4.3 : Faille 3-D instantanée.

Un modèle fort étudié dans la littérature est celui d'une faille apparaissant d'une manière instantanée et, donc, non-causale dans un milieu où une précontrainte T_{xz} uniforme existe. A l'instant $t = 0$, une faille circulaire de dimension finie se crée avec un rayon de dimension $L = 10 d$. On observe une situation transitoire pendant laquelle la faille émet des ondes élastiques informant le milieu qu'une rupture est apparue. Celui-ci réagit en créant une concentration de contrainte sur les bords de la faille pour la confiner dans ses dimensions initiales. Cette concentration se construit de plus en plus en chaque point de la frontière, en faisant appel à l'énergie émise par des points de la faille de plus en plus éloignés de ce point de la frontière. Si cette réaction en contrainte est insuffisante pour atteindre le seuil de rupture (faille trop petite), on atteint une nouvelle situation stable où le milieu a réussi à confiner la faille circulaire.

Pour éviter cette nouvelle situation stable, je prends bien soin de spécifier un critère de rupture, i.e. une intensité de contrainte K_t , qui entraînera la propagation de la rupture. Il me suffit de prendre le même critère que celui de la faille statique, i.e. $K_t = 0.42$. La rupture commence à se propager à l'instant $t_c = 0.12$ et s'étend préférentiellement dans la direction x . Ceci est également la conséquence d'une concentration de contrainte plus importante dans le mode plan. La figure 2.4.c montre la forme du front de rupture en fonction du temps. La rupture s'arrête brutalement quand la faille a doublé sa longueur dans la direction x . On observe alors une faille de forme elliptique allongée dans la direction x .

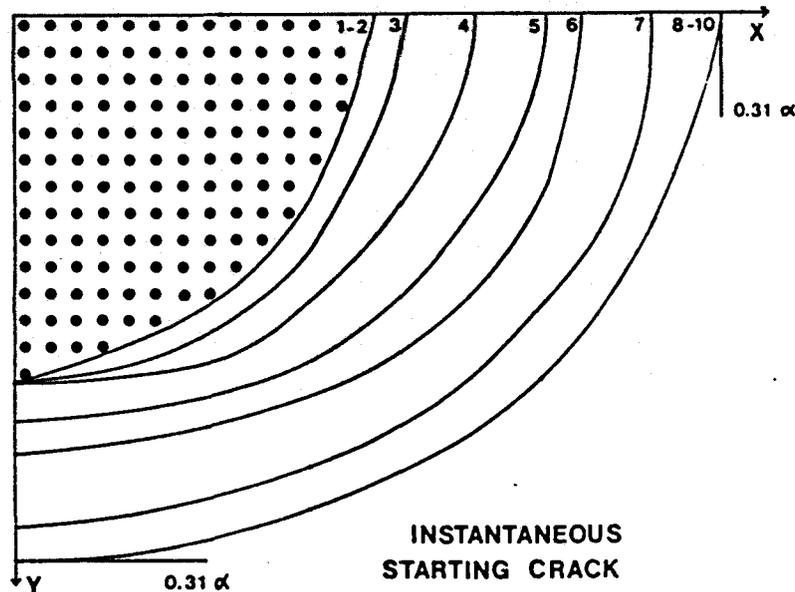


Figure 2.4.c : Propagation du front de rupture pour une faille spontanée initialement circulaire sous une précontrainte de cisaillement homogène. Les points indiquent la faille préexistante, tandis que les lignes montrent le front de rupture à 10 instants différents commençant à 0.5 avec un pas de 0.5. On indique les vitesses de rupture dans les directions x et y au moment de l'arrêt, i.e. quand la faille a doublé sa longueur dans la direction x.

La figure 2.4.d montre le glissement ΔU_x et la contrainte T_{xz} à différents instants, suivant des sections à azimuths constants : $\phi = 0^\circ$ (axe x), $\phi = 45^\circ$, $\phi = 90^\circ$ (axe z). Je ne reviendrai pas sur les traits généraux qui ont été décrits en détail dans des exemples précédents. Mais il est intéressant de noter que le glissement semble presque s'arrêter au centre de la faille, juste avant le départ de la rupture. Ceci provient du choix de l'intensité de contrainte, égale à celle de la faille statique. La faille instantanée circulaire voit son glissement s'arrêter en un point

quand les ondes P générées par les bords à l'instant $t = 0$ arrivent en ce point. C'est ce qui se passe pour une faille statique : le glissement redémarre quand les ondes P générées par la propagation de la rupture arrive au point de la faille considéré. Entre l'arrivée de ces deux ondes P, le glissement décroît pratiquement jusqu'à l'arrêt.

A la fin de la rupture, le glissement est arrêté par la friction, et montre la forme elliptique classique des failles statiques en cisaillement.

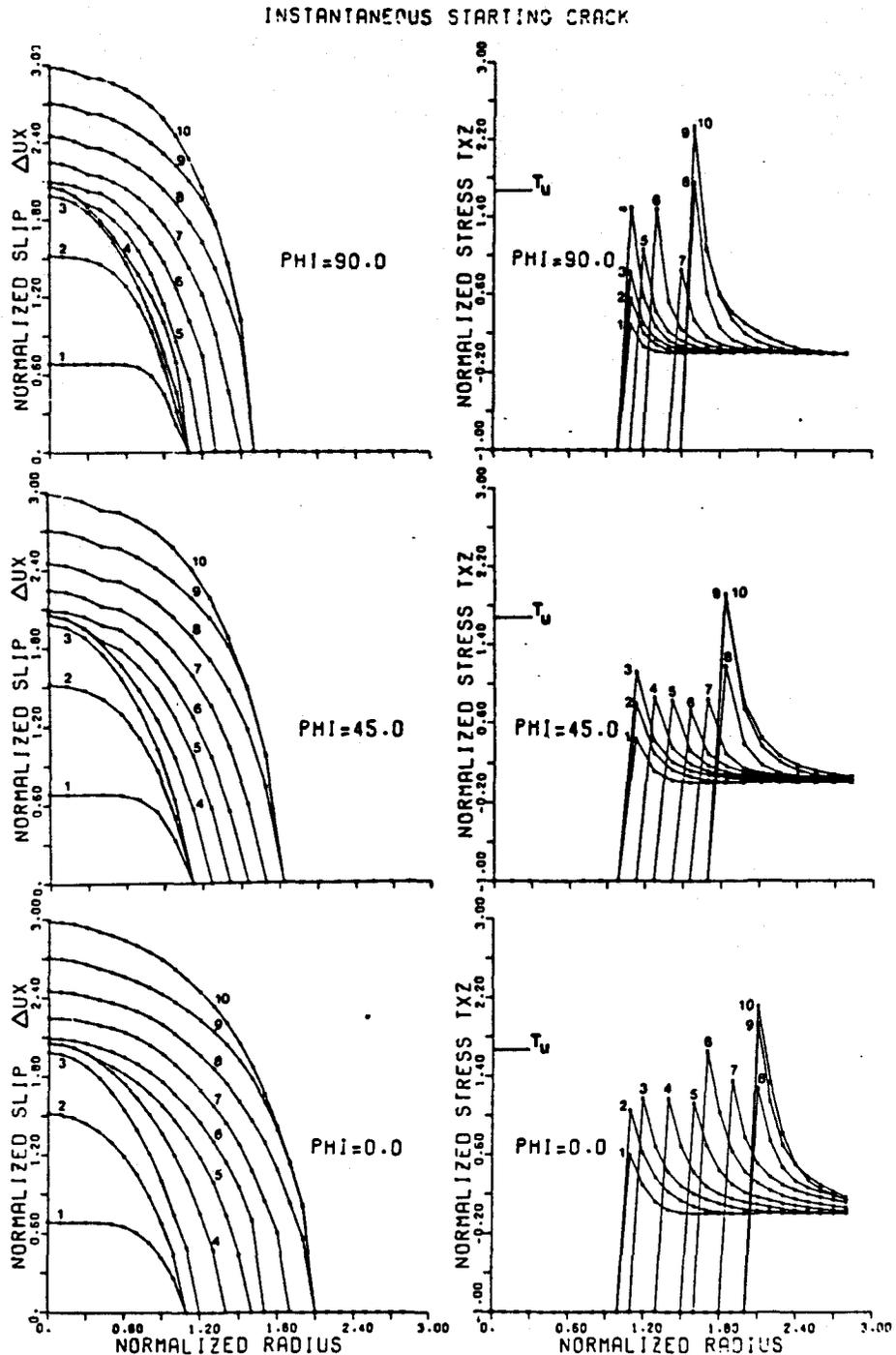


Figure 2.4.d : Glissement et contrainte le long d'une ligne sur le plan de faille définie par son angle ϕ par rapport à l'axe x pour la rupture spontanée de la figure 2.4.c. On montre les champs aux instants commençant à 0.4 avec un pas de 0.4. T_u est la contrainte maximum associée à l'intensité de contrainte statique K_t . Le rayon de la faille initiale est la longueur de référence.

2.4.4 : Conclusion.

L'étude tridimensionnelle de la rupture est plus complexe que celle du cas bidimensionnel en raison de la géométrie possible du front de rupture et de la traduction numérique délicate d'un critère de rupture. Les failles rayées, en réduisant la difficulté du problème, sont une étape nécessaire vers des modèles plus généraux. J'ai constaté qu'en dehors de la phase d'arrêt du glissement sur la faille qui induit une certaine rotation de ce vecteur de glissement, l'hypothèse d'aligner le glissement, et donc le frottement, dans le sens de la contrainte initiale semblait bien vérifiée. Cette hypothèse serait parfaitement vérifiée dans le cas d'une faille aux lèvres libres sans frottement.

En effet, comme je l'ai discuté à la section 2.2, la géométrie tridimensionnelle réclame non seulement la connaissance de la contrainte de cisaillement initiale, mais aussi celle de la contrainte de frottement dynamique, et non pas seulement de leur différence : la contrainte de frottement dynamique peut tourner dans le plan de faille, entraînant une plus ou moins grande chute de contrainte effective par rapport à la chute de contrainte dynamique. Ce n'est pas le cas des failles rayées.

Archuleta et Day (1980) ont présenté une méthode permettant d'analyser d'une manière générale un critère de rupture de contrainte maximum pour des failles tridimensionnelles. C'est ce critère que j'ai utilisé pour vérifier la validité de l'hypothèse de faille rayée. Day (1982b) a précisé ces résultats à l'aide du rapport de la contrainte de frottement dynamique ou de la chute de contrainte dynamique à la contrainte de

cisaillement initiale à partir d'expériences de laboratoire (Dieterich et al, 1978) : le frottement est important puisque il semble que la chute de contrainte n'est qu'un faible pourcentage de la contrainte initiale. Le relâchement des contraintes est loin d'être total dans les expériences de laboratoire. Bien sûr, il existe toujours le problème d'extrapolation à l'échelle des séismes. L'approximation des failles rayées toujours valable dans le cas d'un frottement nul pourra être plus ou moins bien vérifiée lors des phases d'arrêt de la rupture.

Un autre trait introduit par Day (1982b) suivant pour cela des travaux antérieurs (Ida, 1972) concerne la zone de cohésion. Il a l'avantage de supprimer la singularité de contrainte au bord de la faille, en la remplaçant par une zone où un comportement phénoménologique du milieu est fixé, traduction macroscopique de modèles à l'échelle atomique (Barenblatt, 1959 : voir Landau et Lifchitz, 1967). La loi la plus simple est une relation linéaire entre le glissement et la contrainte de cisaillement jusqu'à un glissement limite d_0 .

Si cette zone de cohésion, que je n'ai pas introduite au cours de ce travail, facilite l'argumentation de la rupture car elle donne au paramètre S de Das et Aki (1977) (voir section 2.2) une interprétation physique, elle masque néanmoins la difficulté majeure liée aux différentes longueurs introduites dans le problème de la rupture. La simulation numérique doit être valable à ces différentes longueurs. C'est ce problème que je vais discuter dans la prochaine section, laissant mes conclusions sur les échelles du problème en suspens.

L'estimation du glissement semble dépendre d'une manière beaucoup moins critique de la simulation des conditions aux limites mixtes sur le plan de faille. Si l'histoire de la rupture est connue d'une manière ou d'une autre, toutes les méthodes se valent pour le calcul dynamique du glissement servant à l'évaluation des sismogrammes par le théorème de représentation. J'ai pu introduire le cas plus satisfaisant physiquement d'une faille préexistante qui devient instable à l'instant $t = 0$, et en estimer le glissement qui présente un déficit sur la zone préexistante : je montrerai des applications au rayonnement en champ lointain (section 2.6) pour des conditions initiales beaucoup plus satisfaisantes que celles d'une faille initiale instantanée.

ANALYSE DES DIFFERENTES ECHELLES

2.5.1 : Introduction.

Dans l'étude de la fracturation spontanée à l'aide de critères de contrainte maximum, qui sont finalement ceux que l'on utilise numériquement, un résultat a beaucoup intrigué les chercheurs : le front de rupture pouvait avoir une vitesse de rupture transsonique. Dans les critères d'Irwin (facteur d'intensité de contrainte maximum valable pour les failles cassantes) et de Griffith (bilan énergétique pour créer un élément de surface sur le plan de faille), on ne pouvait dépasser la vitesse des ondes de Rayleigh sans violer la règle de la conservation de l'énergie à la frontière de la faille. Burridge (1973) a discuté les différentes vitesses de rupture, montrant notamment qu'une faille pouvait se propager à vitesse transsonique à condition qu'elle ait déjà cette vitesse, ou qu'elle puisse y sauter par un mécanisme donné.

Andrews (1976) a proposé que, pour des failles à zone de cohésion et pour un critère de contrainte maximum, la valeur maximum associée au passage de l'onde S en un point du plan de faille (avant celle, beaucoup plus importante, du front de rupture) pouvait être suffisante pour casser le matériau : dans ce cas, des vitesses transsoniques pouvaient être observées. Le critère physique de rupture dans ce cas n'est plus celui d'Irwin : le résultat n'est donc pas en contradiction avec la théorie de rupture des failles cassantes. Par une méthode de différences finies Andrews a déterminé la valeur critique de la contrainte seuil déclenchant la rupture sur le front d'onde S. Plus récemment, Andrews (1985) a repris

Analyse des différentes échelles page 2.5.2

ce problème par une méthode intégrale et trouvé des résultats en accord (25 %) avec ceux qu'il avait obtenu en 1976 par une méthode de différences finies. Cet accord suggère que la discrétisation qui est importante est celle qui porte sur le plan de faille et nullement celle associée à la propagation, car telle est la différence entre les techniques de différences finies et les techniques d'équations intégrales mises en jeu dans ces deux modélisations. Dans ce deuxième article, il a discuté avec de grands détails (1) les effets de la zone de cohésion, (2) les effets de la discrétisation et (3) l'interaction entre les deux.

Cette interprétation physique n'est plus valable si l'on ne considère que des failles cassantes. Elle devient une interprétation numérique pour décrire le mécanisme numérique associé au passage à une vitesse transsonique. Il faudra éliminer les effets de la zone de cohésion numérique sur le critère numérique de contrainte maximum associé au critère d'Irwin en choisissant un pas de grille assez fin. Dans la section 2.3, j'ai proposé un intervalle de valeurs seuil où la méthode numérique présentée dans ce travail se comporte correctement.

Je me propose dans cette section d'une part d'analyser plus en détail les différentes longueurs en jeu dans le problème de la fracture, en montrant certains résultats numériques sur l'effet de la discrétisation, et d'autre part de proposer une méthode inspirée des techniques de renormalisation pour tenter de m'affranchir localement près du front de rupture des effets perturbateurs de cette discrétisation grâce à l'utilisation des éléments hiérarchiques introduits par Zienkiewicz et son équipe dans une série d'articles en 1983 et 1984.

2.5.2 : Présentation du problème.

Que ce soit pour les failles cassantes ou les failles avec une zone de cohésion devant le front de rupture, il semble important d'évaluer l'effet de la discrétisation sur la rupture spontanée de la faille. Une règle comme celle obtenue pour la propagation, où 10 noeuds sont nécessaires pour modéliser une longueur d'onde sans dispersion numérique notable, serait la bienvenue. En l'absence de toute étude théorique sur les schémas numériques avec des conditions de Cauchy évoluant dans le temps, on peut tenter une étude dimensionnelle numérique. La contrainte maximum T_u associée au facteur d'intensité de contrainte maximum K_t s'écrit :

$$1 + T_u = 2 K_t \sqrt{\frac{L}{d}}, \quad (2.5.1)$$

comme je l'ai discuté dans la section 2.3. Pour une longueur de faille L fixée, la contrainte maximum augmente par :

$$2 K_t \sqrt{\frac{L}{d}} \left[\sqrt{2} - 1 \right], \quad (2.5.2)$$

quand on divise le pas de la grille par 2. Je peux donc procéder à deux simulations numériques du même problème physique avec deux maillages différents. La figure 2.5.a montre la propagation du front de rupture pour une faille tridimensionnelle dans la direction plane et la direction antiplane, pour une valeur du facteur d'intensité maximum K_t de 0.34. On

Analyse des différentes échelles

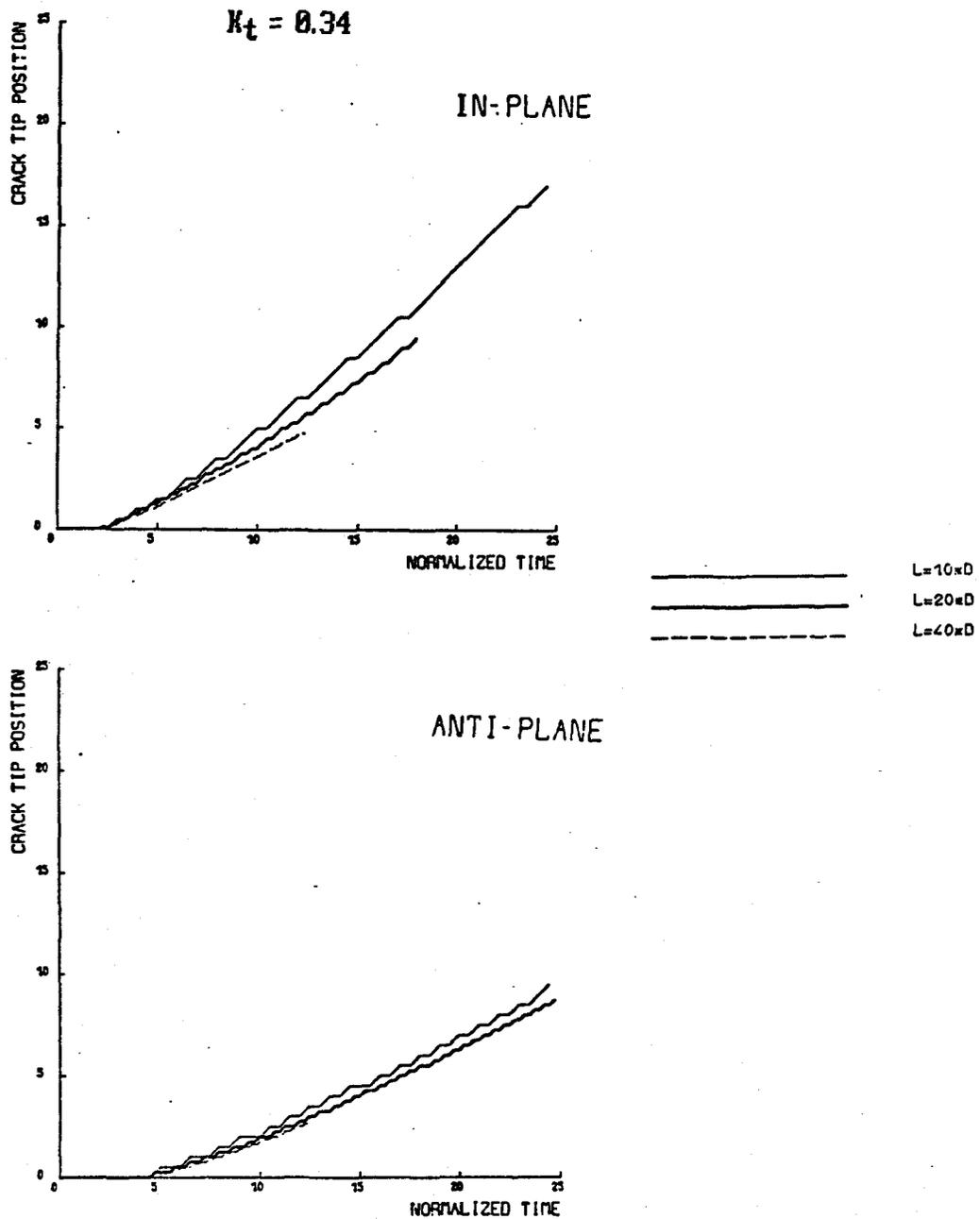


Figure 2.5.a : Propagation spontanée d'une faille tridimensionnelle : la position du front de rupture est reportée pour les directions plane et antiplane. La longueur initiale de la faille est discrétisée suivant trois choix de grille.

peut constater des différences dans la propagation du front de rupture pour les trois grilles utilisées. Dans la direction antiplane, les propagations, bien que légèrement différentes, ne présentent pas de variation brutale du comportement : la pente est sensiblement la même et égale à 0.86β . Par contre, dans la direction plane, la première solution, où la longueur initiale de la faille comporte 10 noeuds, a une vitesse qui devient de l'ordre de la vitesse α des ondes P. En augmentant le nombre de points dans la longueur de la faille initiale à 20 noeuds, on modifie complètement cette vitesse de rupture dont la limite ne semble pas encore atteinte puisque, pour 40 noeuds dans la longueur initiale, on observe encore des différences avec la solution précédente.

Cette simulation suggère que le nombre de points nécessaires dans la longueur initiale pour obtenir une bonne modélisation de la rupture est trop important pour toute tentative tridimensionnelle de modélisation. Soulignons que la règle numérique recherchée pour modéliser correctement la rupture peut ne rien avoir de commun avec la règle pour la propagation, puisque le phénomène est un effet local associé au front de rupture ou, autrement dit, à l'application des conditions mixtes.

L'introduction d'une zone de cohésion physique peut-elle réduire ce nombre de points nécessaires à une bonne modélisation de la rupture ? On peut espérer que le lissage introduit par la zone de cohésion va masquer le lissage numérique : lissage que l'on essaie de réduire par un nombre important de noeuds. Malheureusement la taille de la zone de cohésion tend vers zéro quand on approche de la vitesse de Rayleigh : la zone de cohésion numérique reprend alors tous ses droits et marque la solution de son empreinte numérique. C'est ce qu'a constaté numériquement Andrews (1985).

Il semble donc nécessaire de se débarrasser de la discrétisation. Pour ce faire, il faut exploiter à notre profit la difficulté précédente venant de la localisation du front de rupture. Pour les failles cassantes, le problème de la rupture n'a pas d'échelle locale. Nous pouvons donc nous livrer à l'estimation d'une solution meilleure dans cette zone locale, sans avoir à en subir les conséquences ailleurs, par simple changement d'échelle. Nous voyons que le problème est beaucoup plus délicat pour les failles à zone de cohésion où il y a une échelle locale qui varie avec la vitesse de propagation. Cette stratégie est apparentée aux techniques de renormalisation dans les formulations en coordonnées contractées et dans les formulations multi-échelles (Nayfey, 1973 ; Van dyke, 1975).

2.5.3 : Mise en oeuvre.

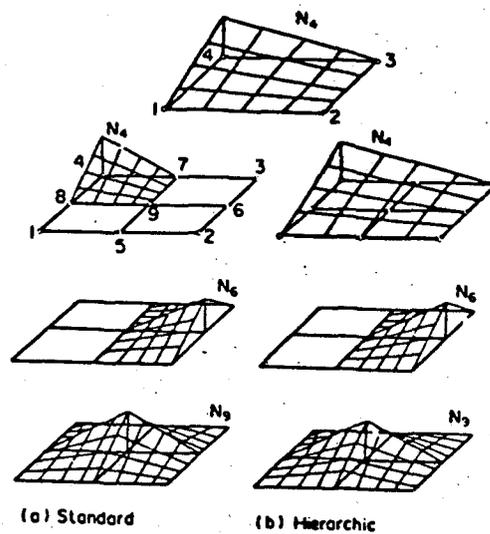
Il faut donc affiner à chaque instant la solution numérique près du front de rupture, sans perturber la solution dans le restant du maillage. Le problème est beaucoup plus délicat que celui d'un maillage spécial sur une zone délicate à modéliser connecté à un maillage plus simple loin de cette zone, car le front de rupture se propage.

Cette technique sophistiquée de maillage est largement employée dans les calculs statiques d'équilibre de structures. Si un problème apparaît lors de la simulation, il faut reprendre tout à zéro : trouver un nouveau maillage en tenant compte du problème rencontré et refaire tout le calcul, même là où la solution antérieure n'avait pas besoin d'être améliorée.

C'est pourquoi Zienkiewicz a proposé une méthode d'interpolation locale de la solution ne perturbant pas cette solution en dehors de l'élément considéré : il a appelé ces éléments particuliers des éléments hiérarchiques (Zienkiewicz et al, 1983). Il faut que les fonctions d'interpolation sur les bords de cet élément "amélioré" soient les mêmes que celles de l'élément original, comme l'explique la figure 2.5.b. Les calculs statiques de l'équilibre de structures devenaient adaptatifs, en améliorant localement la solution.

Il est vite apparu que cette technique pouvait s'appliquer à des problèmes de propagation, comme la propagation d'ondes de choc où une grande précision dans le maillage est nécessaire localement.

Analyse des différentes échelles



(d'après Zienkiewicz et al, 1983)

Figure 2.5.b : Comparaison de deux raffinements du maillage d'un élément : à gauche la procédure classique qui modifie la fonction de forme N_4 , à droite la procédure hierarchique qui respecte la fonction de forme N_4 de l'élément ancien.

Analyse des différentes échelles page 2.5.7

Cette technique peut s'appliquer au problème de la rupture et améliorera la solution autour de la zone de rupture sans modifier la solution au loin. Puisque le problème n'a pas d'échelle, nous pouvons réitérer et insérer un nouvel élément hiérarchique dans le précédent jusqu'à l'obtention d'une solution stable. Le critère de rupture serait alors appliqué à cette solution locale. L'effet de la discrétisation du front de rupture aurait ainsi disparu et l'économie dans la finesse du maillage s'avérerait substantielle.

2.5.4 : Conclusion.

J'ai présenté les moyens susceptibles d'être mis en oeuvre pour éliminer l'effet d'une discrétisation dans le problème de la propagation de la rupture : cette discrétisation introduit un lissage des solutions. La technique utilisée pour gommer toute discrétisation spécialement autour du front de rupture est la méthode de renormalisation. De manière à pouvoir changer d'échelle, on peut utiliser les éléments hiérarchiques introduits par Zienkiewicz et al (1983, 1984) dans les méthodes d'éléments finis, qui ne perturbent pas la solution numérique en dehors de la zone remaillée. Cette technique de remaillage, parue bien après mon travail sur la modélisation de la rupture, mériterait l'attention d'un jeune chercheur qui analyserait avec soin le phénomène de vitesses transsonique et supersonique associées à la rupture de failles planes ou tridimensionnelles, que ce soit avec une zone de cohésion ou que ce soit sans zone de cohésion.

Tel est l'état de mes réflexions en 1986, sur une difficulté que j'avais rencontrée au cours de mon travail en 1981 et que je n'avais pas pu résoudre. Andrews (1985) a également cerné cette question, mais y a répondu d'une manière partielle en montrant que la zone de cohésion se réduisait quand la vitesse de rupture approchait de la vitesse de Rayleigh, vitesse limite admissible dans les critères énergétiques pour la propagation de la rupture. Ce résultat m'a renforcé dans l'idée de la nécessité d'une solution indépendante de la discrétisation. Il faut en faire la preuve numérique. Voilà un joli problème à résoudre !

RAYONNEMENT EN CHAMP LOINTAIN.

2.6.1 : Introduction.

Les modèles de failles dynamiques ont permis de mieux comprendre les mécanismes des tremblements de terre superficiels. Durant les 10 dernières années, les méthodes numériques ont pu résoudre des modèles de plus en plus compliqués. Depuis la modélisation pour une faille dynamique circulaire de Madariaga (1976), certains aspects des modèles dynamiques ont été incorporés dans les modèles cinématiques par Boatwright (1980). D'autres auteurs ont étudié la rupture spontanée, comme Das et Aki, 1977 ; Day, 1979 ; Miyatake, 1980 ; Das, 1981 ; Day, 1982a et 1982b). On a tenu compte des effets de la surface libre (Archuleta et Frazier, 1978 ; Miyatake, 1980), ou encore des comportements hétérogènes (Das et Aki, 1977 ; Miyatake, 1980 ; Day, 1982b).

D'autres domaines ont également été explorés par des études théoriques de sources complexes : Chouet et Julian (1985) et Chouet (1985) étudient des fractures en ouverture interagissant avec le fluide qui les remplit, comme des modèles possibles pour certains tremblements de terre volcaniques. L'espoir d'analyser les sources sismiques volcaniques et de vérifier la validité de leur modélisation réside dans un réseau dense de stations, réseau de surveillance.

On peut constater une pause après l'année 1982 dans la course à des modèles de plus en plus sophistiqués pour les failles en cisaillement. Cette pause fut associée à une réflexion et une analyse plus serrées des différents paramètres définissant les failles dynamiques que l'on pouvait appréhender dans l'étude d'un tremblement de terre (Aki et Papageorgiou, 1983a, 1983b), ainsi qu'aux mécanismes les plus probables pour un séisme : barrière ou aspérité ? Pour cela, il fallait propager la rupture vers les sites d'enregistrement dans des structures parfois assez compliquées : ce fut l'effort entrepris avec des modèles cinématiques de source (Archuleta et Day, 1980 ; Olson et Apsel, 1982 ; Anderson et Luco, 1983a et 1983b ; Archuleta, 1984), bien que les traits caractéristiques - essentiellement haute fréquence - de la rupture semblaient peu déformés par la propagation dans le milieu (Bernard et Madariaga, 1984a, 1984b ; Spudis et Frazer, 1984). Ces enregistrements peuvent se calculer en champ proche ou en champ lointain, sachant que le champ lointain est pratiquement le terme dominant dès que l'on s'éloigne de quelques longueurs d'onde (Farra, 1984 ; Farra et al, 1986).

Je m'intéresserai aux enregistrements obtenus en champ lointain, sous la forme du rayonnement en champ lointain ; associé au diagramme de rayonnement de la source, ce signal redonne le champ observé. Après avoir présenté la manière de calculer le rayonnement en champ lointain que l'on peut trouver dans des livres de référence (Aki et Richards, 1980) et rappelé, par conséquent, les différents traits de failles dynamiques, je me pencherai sur des géométries particulières et discuterai les résultats obtenus en relation avec des modèles simples (Brune, 1970).

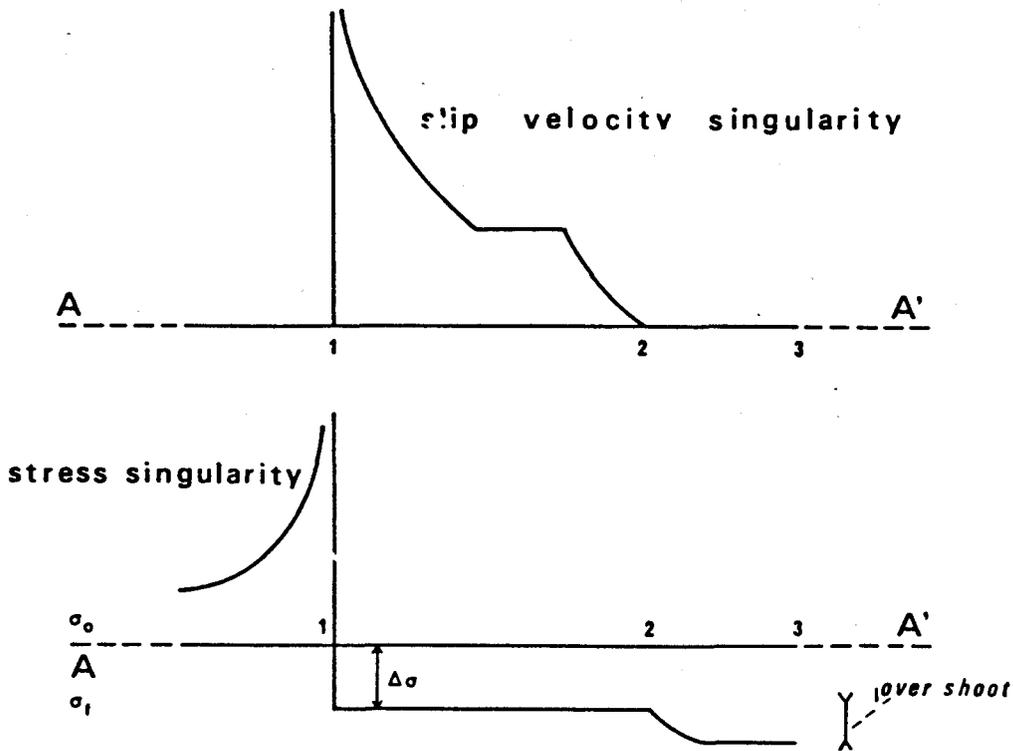
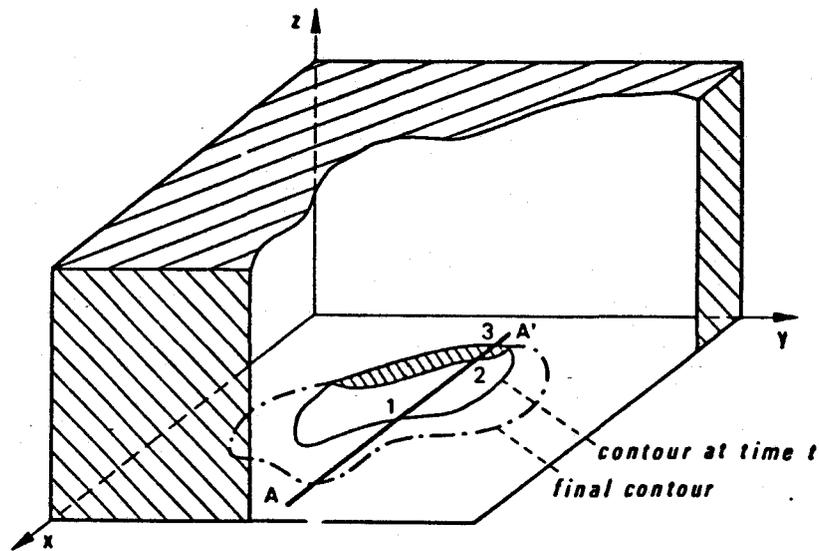


Figure 2.6.a : Comportement de la vitesse de glissement, ainsi que de la contrainte de cisaillement le long d'une coupe AA', pour un modèle de faille 3-D cassante et dynamique.

2.6.2 : Calcul en champ lointain.

Le calcul en champ lointain réclame la connaissance de la vitesse de glissement en tout point de la faille. Rappelons succinctement les étapes de la rupture lors des propagations que j'utiliserai ici. Pour la présentation du problème physique, je renvoie le lecteur au chapitre 2.

Le milieu est initialement en équilibre avant la rupture sous l'effet d'une précontrainte de cisaillement $\tau_{xz} = \sigma_0(x, y, z=0)$, avec une vitesse nulle partout. Une première manière d'initier la rupture est de considérer une nucléation self-similaire. A l'instant $t = 0$, la faille part d'un point et se propage. La contrainte initiale σ_0 est donc uniforme, facilitant les calculs. Une autre nucléation est la propagation instantanée. A l'instant $t = 0$, une faille de dimension finie apparaît et commence à se propager. De même, la contrainte initiale est uniforme, mais le modèle n'est pas causal. Enfin, le troisième type de nucléation, physiquement la plus acceptable, est la nucléation statique : une faille préexistante de dimension finie devient instable à l'instant $t = 0$, et commence à se propager. La contrainte initiale est la contrainte statique non-uniforme de la faille préexistante.

Dans cette étude sur le champ lointain, je considérerai des propagations à des vitesses de rupture constantes. La faille se propage de sa forme initiale à sa forme finale prescrite suivant une vitesse v_p (figure 2.6.a). C'est une description partiellement cinématique où l'on suppose l'accélération instantanée. Le travail théorique de Eshelby (1969)

et une modélisation numérique par Das et Aki (1977), par exemple, indiquent une accélération rapide à une vitesse finale, et suggèrent donc qu'une accélération instantanée est une hypothèse raisonnable pour l'initiation et la propagation. La décélération associée à l'arrêt de la rupture est moins bien connue : on se sait pas quels sont les paramètres qui la contrôlent. Les phases d'arrêt engendrées par l'interruption brutale de propagation pourront être plus importantes dans les modèles présentés.

Enfin, je supposerai que le glissement a lieu principalement suivant la contrainte de cisaillement initiale, orientée sur l'axe x . Cette hypothèse semble être bien vérifiée par les travaux de Miyatake (1980) et Virieux et Madariaga (1982). Durant le processus d'arrêt, une légère composante suivant la direction perpendiculaire suivant l'axe y provient des phases d'arrêt. Je la néglige et ne considère que la composante Δu_x du glissement que je noterai Δu . Quand la vitesse de glissement $\dot{\Delta u}$ change de signe en un point, je la mets égale à zéro, bloquant la faille à cet endroit. La forme complète de la vitesse de glissement et de la contrainte de cisaillement est également dessinée dans la figure 2.6.a.

Les calculs se feront en coordonnées normalisées pour faire ressortir les différents paramètres du problème : je les ai présentés au chapitre 2.

Depuis le papier fondamental de Burridge et Knopoff (1964), les calculs en champ lointain pour les ondes de volume P et S ont été largement publiés (Aki et Richards, 1980; Madariaga, 1981) et se fondent sur le

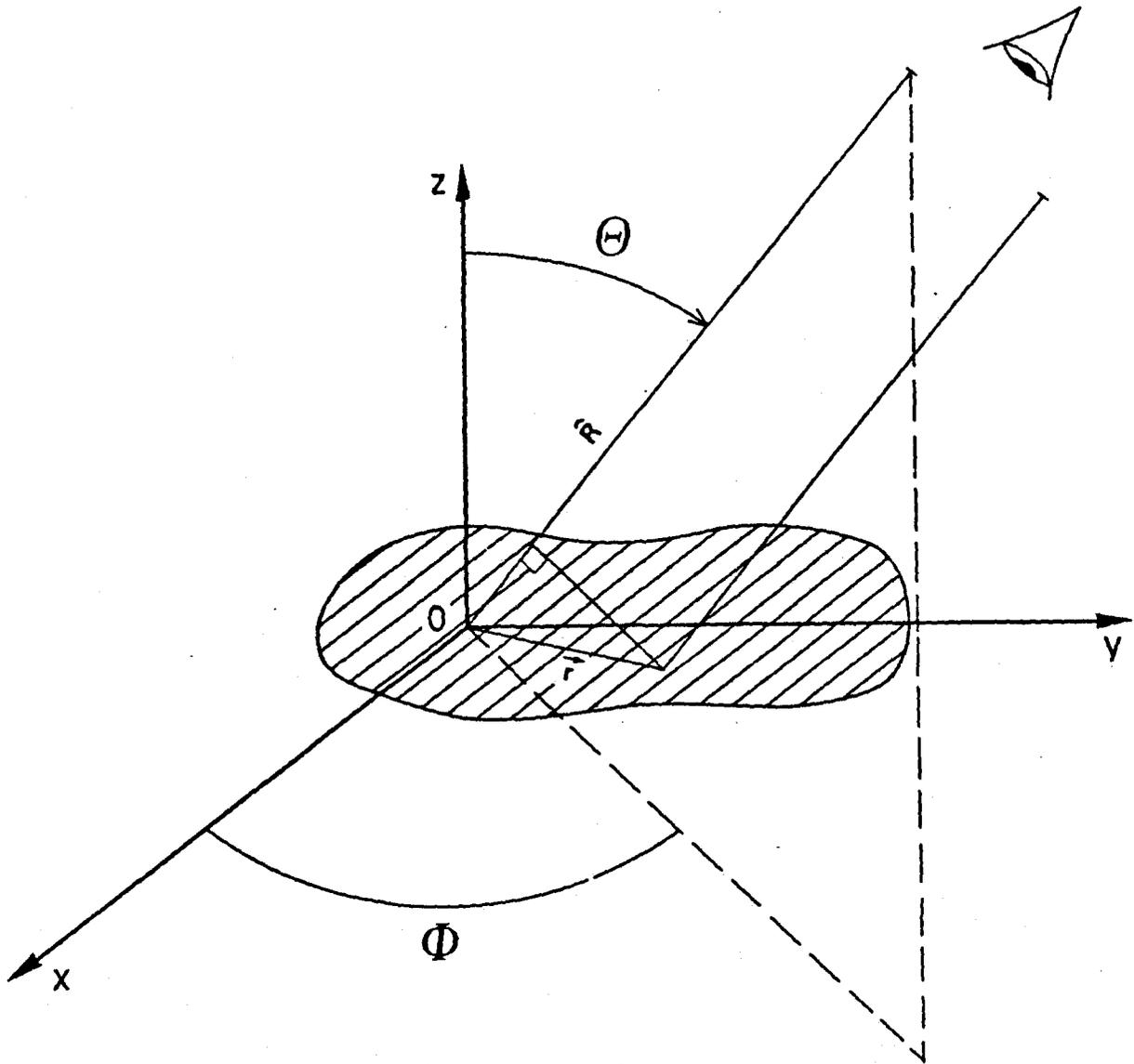


Figure 2.6.b : Repère pour le calcul du rayonnement en champ lointain.

théorème de représentation. L'information sur la structure de la vitesse de glissement se retrouve dans le rayonnement défini par :

$$\Omega(\mathbf{R}, t) = \mu \int_{\Sigma} \Delta u(\mathbf{r}, t + \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{R}}{c}) dS, \quad (2.6.1)$$

où Δu est la vitesse de glissement dans la direction x , \mathbf{r} est le vecteur unitaire dirigé vers l'observateur (figure 2.6.b) et c est la vitesse des ondes P et S, suivant le rayonnement cherché. Le spectre en fréquence peut s'exprimer comme :

$$\Omega(\mathbf{R}, \nu) = \mu \int_{\Sigma} \Delta u(\mathbf{r}, \nu) e^{\frac{2\pi i \nu}{c} \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}} dS. \quad (2.6.2)$$

Connaissant $\Delta u(\mathbf{r}, t)$ sur la surface de la faille discrétisée en fonction du temps, je calcule la transformée de Fourier temporelle pour chaque point sans tenir compte d'aucune symétrie autour d'un axe. Je déduis le spectre en fréquence dans la direction de l'observateur comme une somme pondérée de Δu sur toute la surface de la faille. Un filtre en cosinus permet d'éliminer les effets de la discrétisation spatiale. Pour les ondes P, une fréquence de coupure correcte est $\nu_c^P = \alpha/4\Delta x$, où Δx est le pas de la grille spatiale : en effet, il n'y a pas de fréquences plus hautes. Mais appliquer le même filtre aux ondes S avec une fréquence de coupure $\nu_c^S = \beta/6.93\Delta x$ donne

quelques oscillations. Au lieu d'appliquer un filtre plus fort pour éliminer ces oscillations, je préfère retenir un contenu maximum en fréquence avec des filtres comparables pour les ondes P et S. Le retour dans le temps se fait par une transformée de Fourier inverse : le rayonnement est ainsi obtenu.

Sur cette base de calcul des spectres et rayonnements, discutons quelques traits fondamentaux des spectres. Puisque la vitesse de glissement Δu ne change pas de signe sur la faille, le spectre a un maximum à la fréquence zéro, qui est le moment sismique M_0 . En fait M_0 est la composante M_{xz} seule d'après les hypothèses du début de ce paragraphe. A hautes fréquences, une asymptote de la forme ν^{-Y} peut être tracée à partir d'une fréquence coin ν_0 qui est l'intersection de cette asymptote avec le niveau basse fréquence. Cette décroissance haute fréquence est contrôlée par les phases d'arrêt. Pour une décroissance de la forme ν^{-2} , les phases d'arrêt correspondent à des discontinuités de pente dans le rayonnement en vitesse (Madariaga, 1981). Le rayonnement en vitesse, et le spectre associé, sont plus sensibles aux phases d'arrêt. Je considérerai dans aussi ces quantités, en remarquant que le spectre en vitesse présente un maximum à une fréquence que j'identifie comme la fréquence ν_0 . Tracer une asymptote haute fréquence pour le premier modèle correspondant à celui de Madariaga (1976) est possible : un bon accord est obtenu entre la fréquence coin ainsi déterminée et le maximum du spectre des vitesses. Parce que chercher un maximum est plus facile, j'utiliserai cette méthode pour les autres modèles où tracer une asymptote haute fréquence est plus difficile.

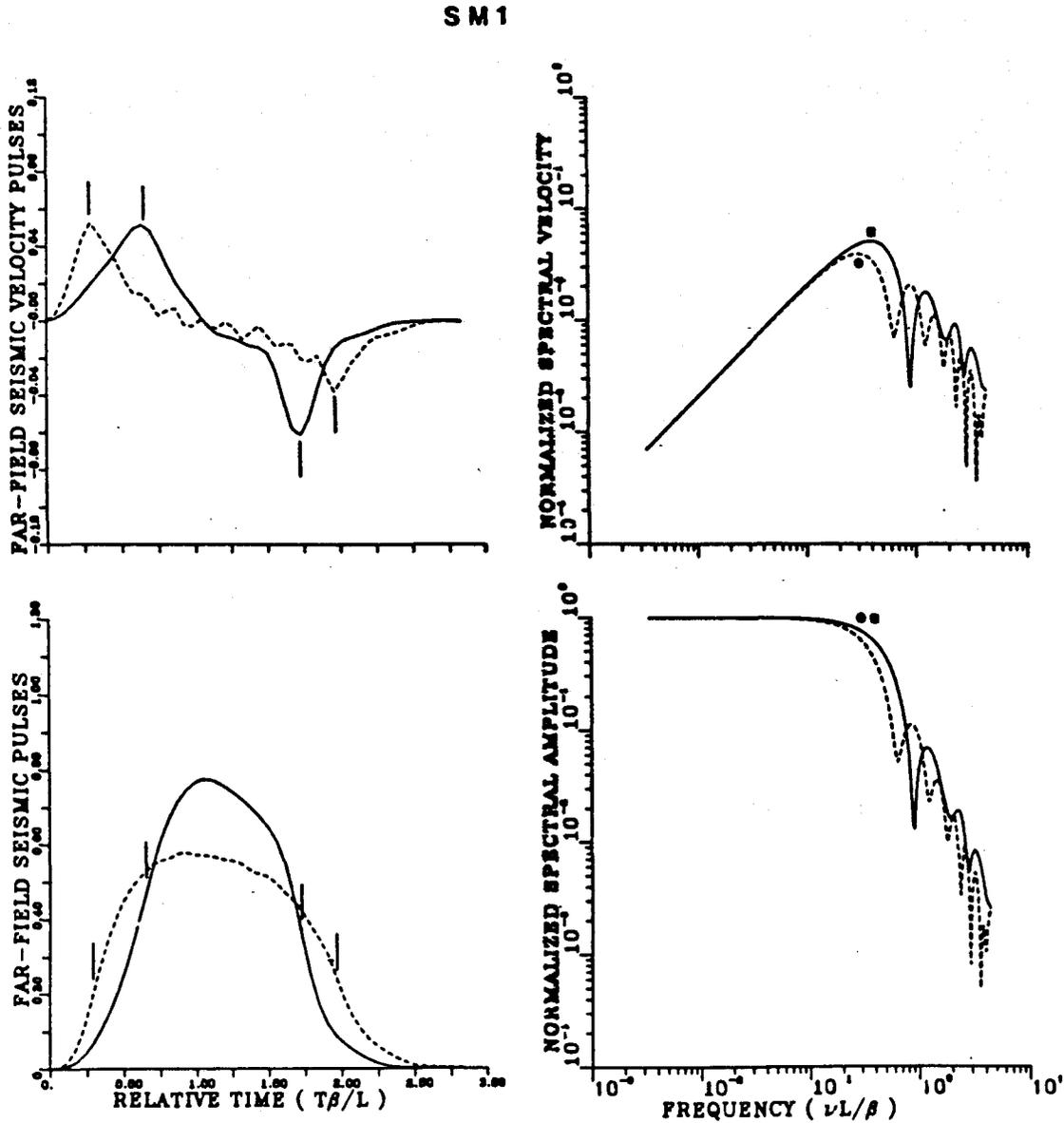


Figure 2.6.c : Calculs en champ lointain pour le modèle SM1 à $\theta = 60^\circ$ et $\phi = 0^\circ$. Les lignes continues définissent les résultats des ondes P, et les lignes en pointillé les résultats des ondes S. Les spectres sont normalisés au moment sismique, ou à la vitesse du moment. Les signaux le sont par une intégrale en temps constante. La fréquence coin de l'onde P est indiquée par un carré plein, tandis que celle de l'onde S l'est par un cercle plein. Les temps d'arrivée des phases d'arrêt sont indiqués par de petits traits verticaux.

2.6.3 : Modèles symétriques 3-D.

Considérons d'abord des modèles symétriques. Dans le plan de faille, les formes initiales et finales de la faille sont des disques concentriques. Comme la vitesse de rupture ($v_t = 0.86\beta$) est la même dans toutes les directions, la frontière finale est atteinte en même temps en tout point : c'est pourquoi j'appelle ces modèles symétriques. Je considérerai un observateur avec des angles $\phi = 0^\circ$ et $\theta = 60^\circ$.

1 - La nucléation self-similaire - modèle SM1 : La faille initiale a un rayon nul à l'instant $t = 0$. Madariaga (1976) a déjà étudié ce modèle. Les résultats de la figure 2.6.c sont légèrement différents de ceux de Madariaga pour deux raisons, qui sont, pour une part, la conséquence de la faible densité de points sur la grille numérique. La première est la difficulté numérique à modéliser un comportement self-similaire quand le rayon de la faille est de l'ordre du pas de la grille. Comme le problème n'a pas d'échelle, il ne sert à rien d'augmenter la densité des points. Au début, la forme du signal est plus lisse que le comportement usuel en t^2 ou, d'une manière équivalente, le signal en vitesse montre une tendance linéaire seulement après un moment. La seconde difficulté est la modélisation des phases d'arrêt, notées par des petits traits verticaux dans les figures. Le saut dans le signal en vitesse ou, en d'autres termes, la discontinuité en pente dans le signal en déplacement sont lissés, provoquant une augmentation de la durée du signal par rapport aux durées obtenues par Madariaga (1976). En effet, ce lissage provient de la limite en fréquence de

SM 2

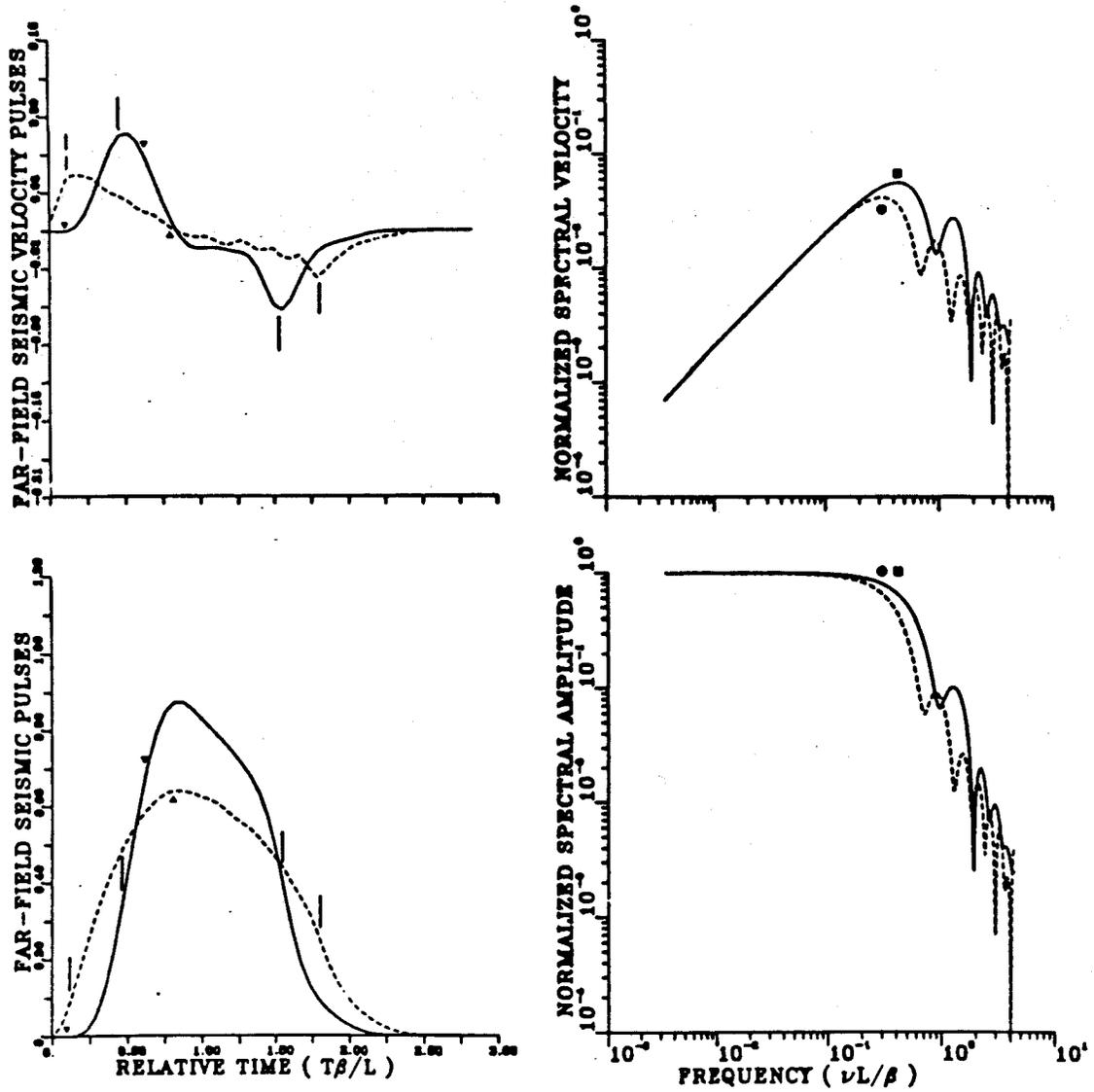


Figure 2.6.d : Calculs en champ lointain pour le modèle SM2 à $\theta = 60^\circ$ et $\phi = 0^\circ$. Les petits triangles pleins représentent les phases initiales. Les autres notations sont celles de la figure 2.6.c.

la modélisation de la vitesse de glissement sur la faille, ainsi que de la discrétisation de la faille sur une grille spatiale.

L'asymptote haute fréquence est tracée en suivant la technique de Brune et al (1979). Mais, pour les ondes S, la fréquence coin ν_0^S , relevée soit sur le spectre en déplacement soit sur le spectre en vitesse, est plus basse que celle de Brune (1970). La fréquence coin ν_0^P des ondes P est toujours plus haute que la fréquence coin ν_0^S des ondes S, puisque le signal des ondes P est plus étroit que celui des ondes S. Je trouve que :

$$\nu_0^P = \frac{0.40 \beta}{L} = \frac{0.23 \alpha}{L} \quad (2.6.3)$$

et

$$\nu_0^S = 0.32 \frac{\beta}{L}. \quad (2.6.4)$$

Le rapport des deux fréquences de 1.25 est plus bas que la valeur moyenne trouvée par Madariaga (1976) mais encore dans l'intervalle [1.2, 1.7] de Hanks (1981). L'asymptote haute fréquence a une pente de -2.3, qui s'explique par le lissage des phases d'arrêt.

2 - La nucléation instantanée - modèle SM2 : Ce modèle présente des résultats similaires au modèle SM1, exception faite des phases initiales plus brutales provenant de la longueur finie de la faille. Je note par de petits triangles les phases initiales provenant de points extrêmes. Des

SM 3

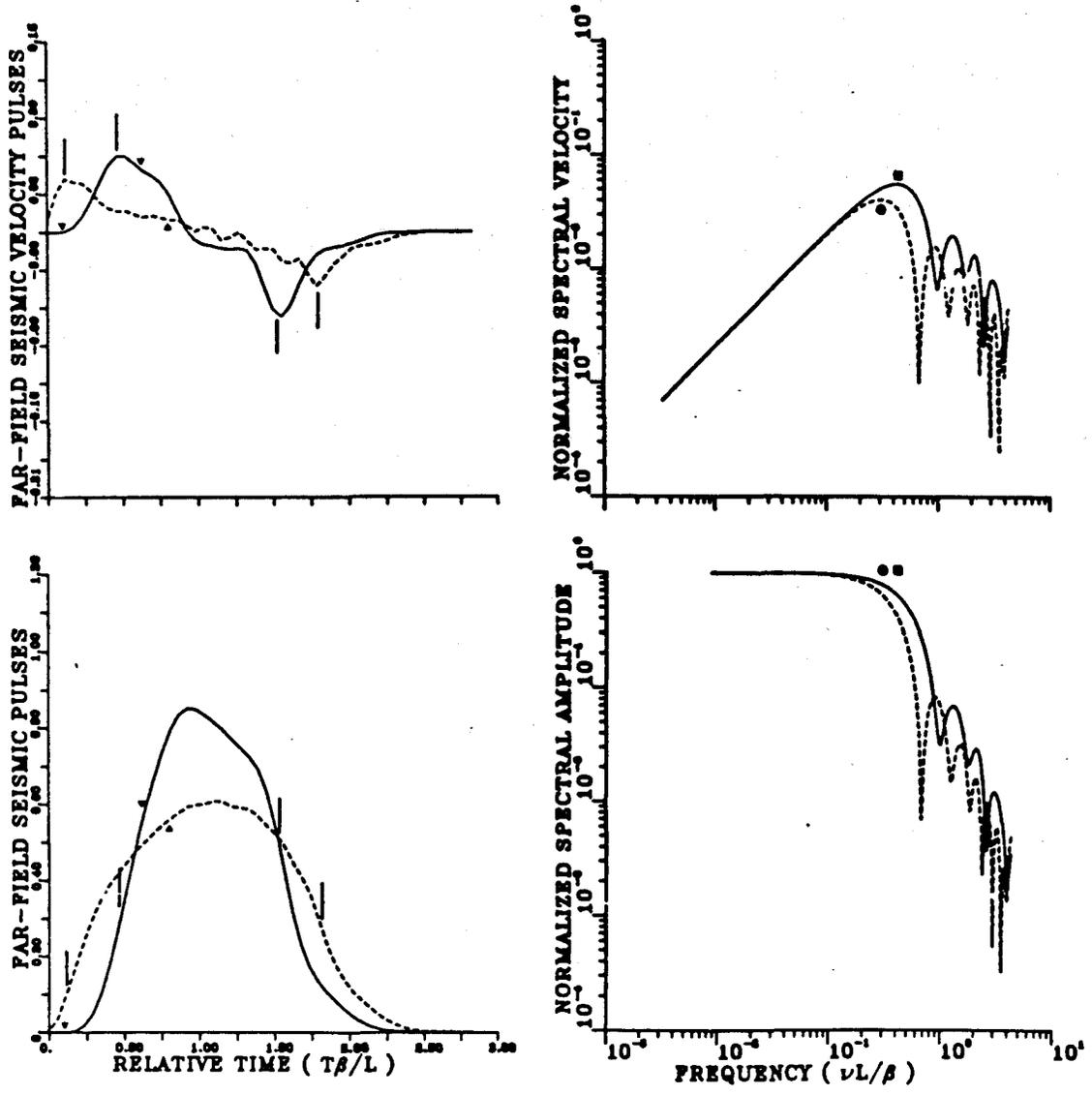


Figure 2.6.e : Calculs en champ lointain pour le modèle SM3 à $\theta = 60^\circ$ et $\phi = 0^\circ$. Même notation que la figure 2.6.d.

phases d'arrêt parviennent à l'observateur, alors que des phases initiales de différents points de la faille ne sont pas encore arrivées (figure 2.6.d). Cette enchevêtrement provient du rapport des rayons initial et final. J'ai choisi un rapport de 0.5 pour souligner ce point. Les phases initiales remplissent la zone intermédiaire du spectre, mais n'affectent pas significativement les fréquences coin et la décroissance haute fréquence.

3 - La nucléation statique - modèle SM3 : La géométrie est la même que celle du modèle SM2 pour rendre possibles des comparaisons. L'état initial de contrainte est le champ statique de contrainte de la faille préexistante. Ce modèle ne diffère que par une importance plus grande des phases initiales. On peut observer une arrivée pour la dernière phase initiale (figure 2.6.e), ainsi qu'un léger décalage des fréquences coin. Mais la décroissance est encore de la forme $\nu^{-2.3}$.

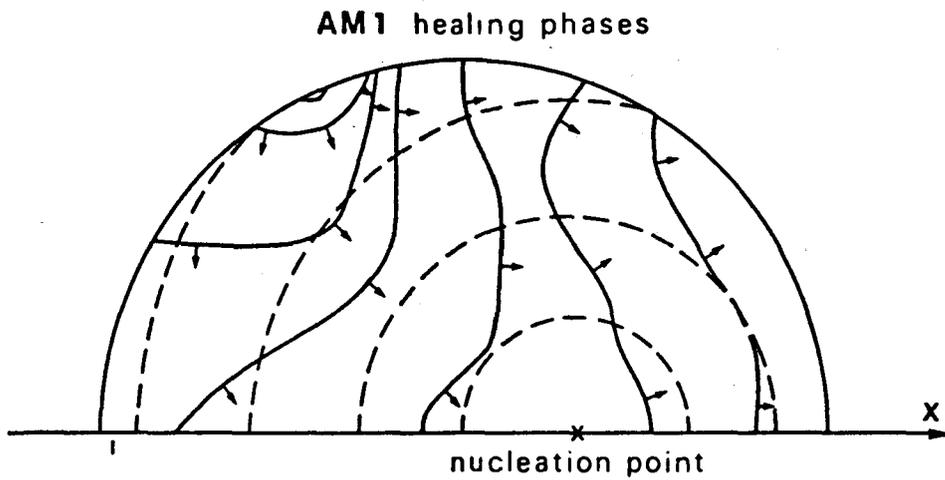


Figure 2.6.f : Phases d'arrêt pour le modèle AM1. Les lignes en pointillé sont le front de rupture à différents instants, tandis que les lignes continues sont les phases d'arrêt avec de petites flèches pour indiquer le sens d'évolution de ces lignes au cours du temps.

2.6.4 : Modèles asymétriques 3-D.

Les formes initiale et finale sont des disques décentrés, qui détruisent la symétrie. Pour ce faire, j'ai déplacé le centre de nucléation vers la partie positive de l'axe x , avec les proportions de la figure 2.6.f. A cause de la dissymétrie, je présente les résultats pour $(\theta, \varphi) = (60^\circ, 0^\circ)$ et $(\theta, \varphi) = (60^\circ, 180^\circ)$, correspondant à $(\theta, \varphi) = (60^\circ, 0^\circ)$ pour les modèles symétriques. La vitesse de rupture est encore de 0.86β , et l'arrêt de la rupture met un certain temps à s'étendre sur tout le pourtour de la frontière finale.

1 - La nucléation self-similaire - modèle AM1 : Ce modèle, qui se compare au modèle SM1, montre un important effet de directivité. Cet effet provient du déphasage dans les arrivées des différentes phases d'arrêt pour des directions angulaires différents (figure 2.6.g et figure 2.6.h). La forme du signal évolue d'une forme en rectangle ($\varphi = 0^\circ$) vers une forme étroite triangulaire ($\varphi = 180^\circ$). Le décalage en fréquence coin est important de $0.30 \beta/L$ à $0.50 \beta/L$, pour les ondes S et de $0.40 \beta/L$ à $0.75 \beta/L$ pour les ondes P.

2 - La nucléation statique - modèle AM2 : Comme pour les modèles SM2 et SM3, la longueur initiale de la faille implique des phases initiales plus brutales qui augmentent l'effet de directivité (figure 2.6.i et figure 2.6.j). Le décalage des fréquences coin va de $0.32 \beta/L$ à $0.60 \beta/L$ pour les ondes S et de $0.45 \beta/L$ à $0.90 \beta/L$ pour les ondes P. La décroissance a une

AM 1

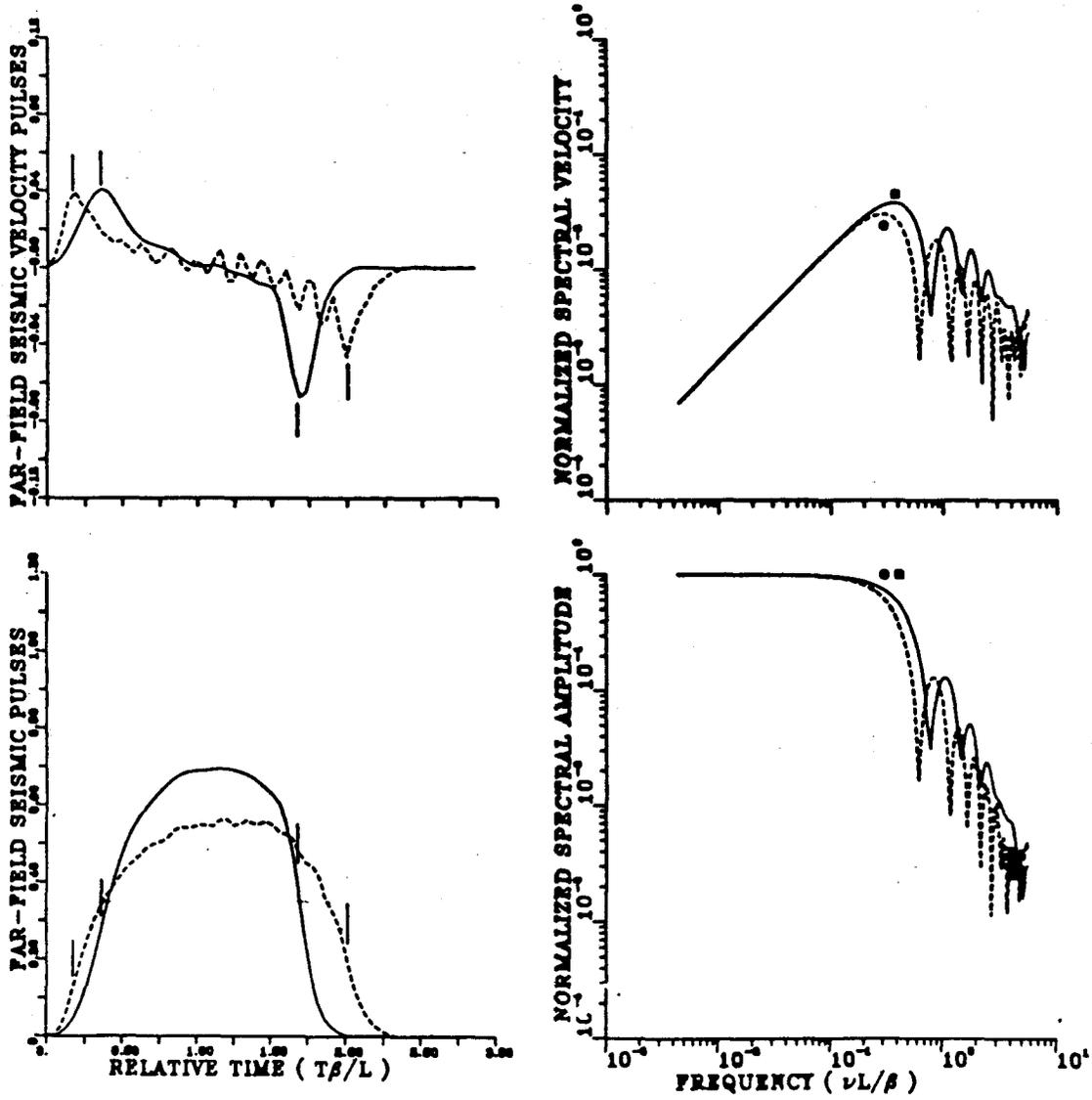


Figure 2.6.g : Calculs en champ lointain pour le modèle AM1 à $\theta = 60^\circ$ et $\phi = 0^\circ$. Même notation que la figure 2.6.d.

AM1

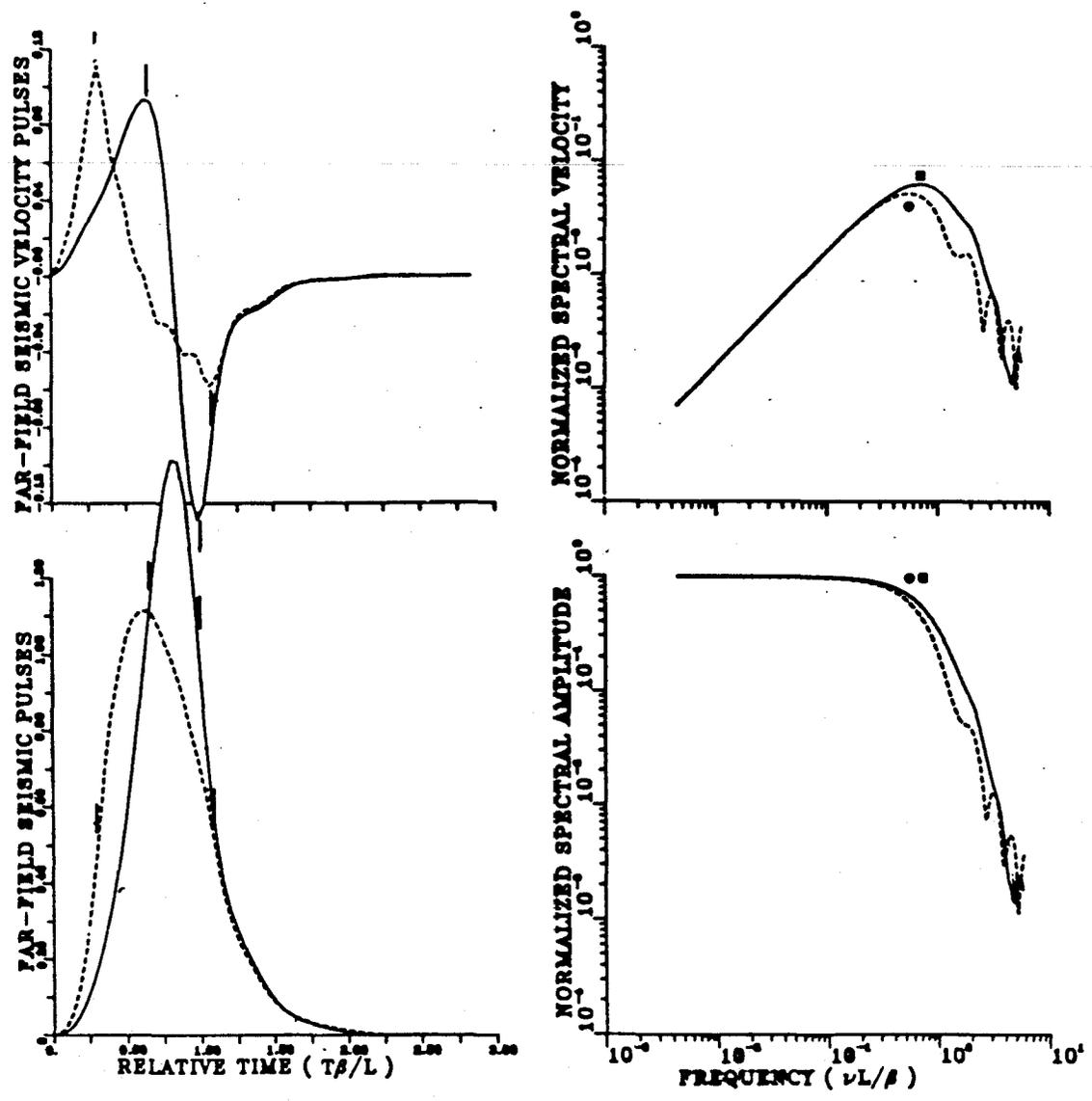


Figure 2.6.h : Calculs en champ lointain pour le modèle AM1 à $\theta = 60^\circ$ et $\phi = 180^\circ$. Même notation que la figure 2.6.d.

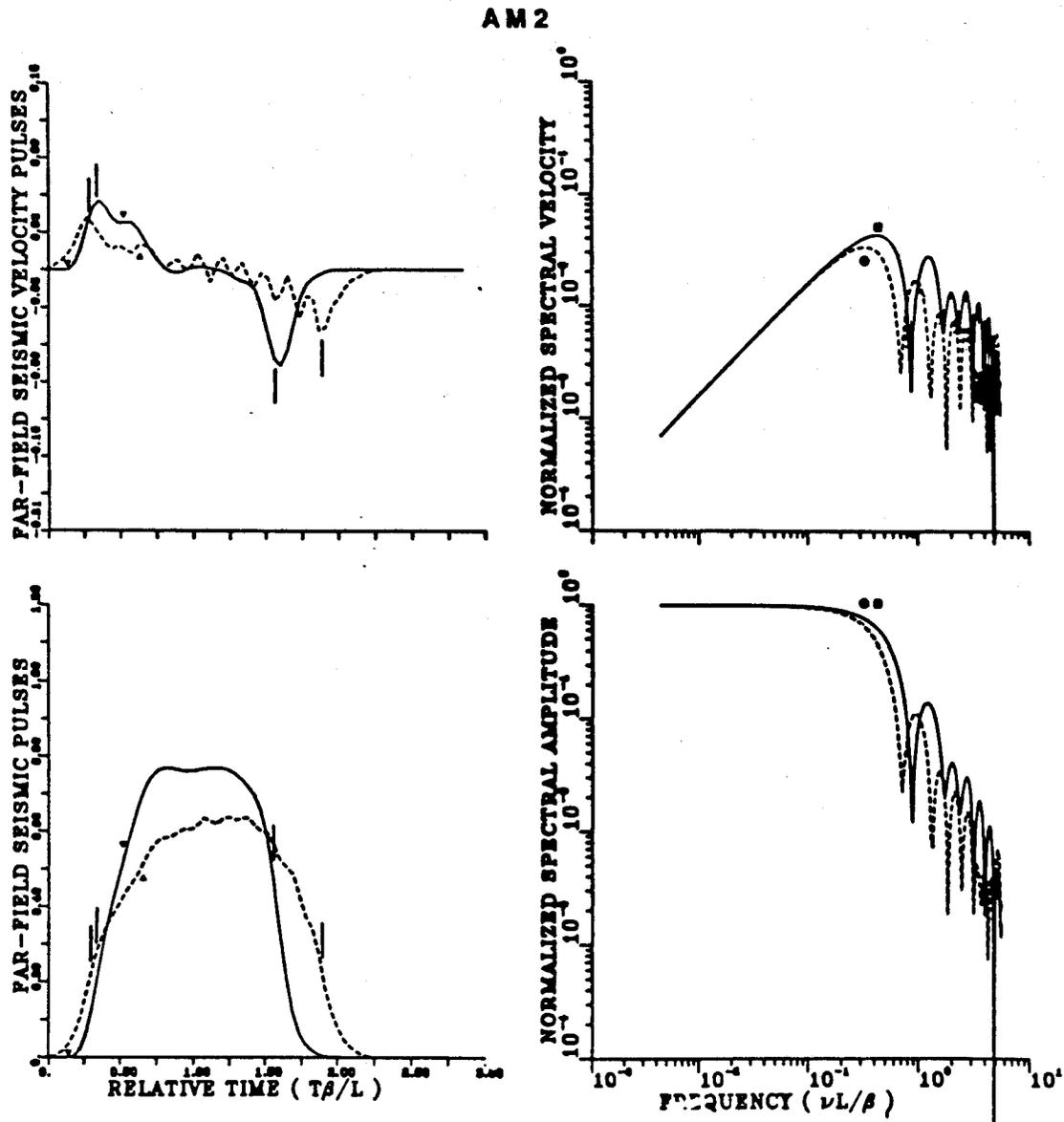


Figure 2.6.i : Calculs en champ lointain pour le modèle AM2 à $\theta = 60^\circ$ et $\phi = 0^\circ$. Même notation que la figure 2.6.d.

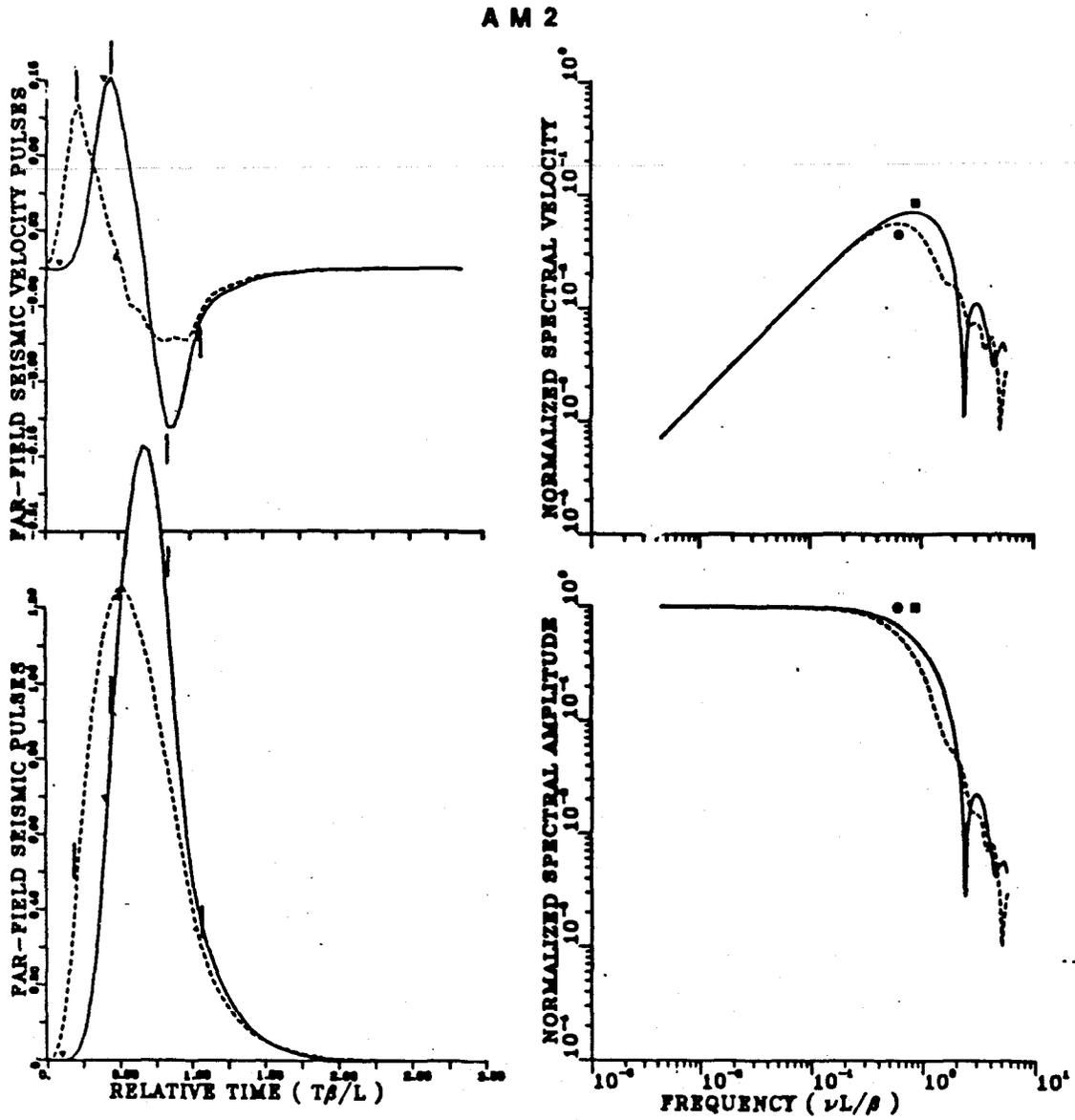


Figure 2.6.j : Calculs en champ lointain pour le modèle AM2 à $\theta = 60^\circ$ et $\phi = 180^\circ$. Même notation que la figure 2.6.d.

pente proche de -3.

2.6.5 : Conclusion.

Dans cette section, j'ai montré cinq modèles de failles dynamiques et de leur rayonnement en champ lointain. J'ai constaté que les signaux et les spectres sont contrôlés par les phases d'arrêt, alors que l'effet des phases initiales est faible, même pour le cas académique où la taille de la faille finale est seulement deux fois la taille de la faille initiale.

Ces résultats relativement simples suggèrent qu'il doit exister une procédure, ou des approximations, rendant compte de ces résultats à moindre coût. Ce fut le travail de Bernard et Madariaga (1984a, 1984b) pour des vitesses de rupture constantes, et celui de Farra (1984) et Farra et al (1986) pour des vitesses de rupture quelconques.

La dépendance azimutal permet des relations moyennes entre la géométrie de la source et les paramètres physiques que l'on mesure en champ lointain. La relation entre la longueur finale de la faille et la fréquence coin est en accord avec la formule de Brune (1970), pour les modèles symétriques. Par contre, pour les modèles asymétriques, un fort effet radial détruit cette relation : un effet de directivité non négligeable fait passer le signal d'une forme rectangulaire vers une forme triangulaire, phénomène qui double la fréquence coin. Il s'ensuit que la fréquence coin doit être interprétée avec grand soin : la relation avec la longueur de la faille est encore valable, mais on utilisera avec plus de précautions les déterminations de la chute de contrainte, qui dépend

suivant une puissance cubique de la fréquence coin. Ainsi, les relations habituelles donnent seulement un ordre de magnitude relatif.

CONCLUSION RUPTURE

Nous voilà arrivés à la fin de mon étude de la rupture, premier thème de ce travail sur les séismes. Quel en est le bilan, bien que les questions soulevées soient certainement plus nombreuses que les réponses que j'ai pu apporter ?

Force nous est de constater que les modèles dynamiques réduisent les paramètres définissant la source par rapport aux modèles cinématiques. Ils sont *malheureusement difficiles à simuler, mais tiennent compte des aspects physiques de la rupture - causalité, bilan fini d'énergie -*. La précontrainte, la contrainte de frottement (ou le coefficient de frottement) et la cohésion définie par différents paramètres suivant les critères de rupture sont les paramètres du problème. Ces paramètres peuvent varier dans l'espace et aussi dans le temps, montrant que la rupture est un phénomène complexe.

Les modèles proposés jusqu'à ce jour simplifient encore ces paramètres, comme le modèle de barrière qui suppose une précontrainte uniforme et une cohésion hétérogène, ou comme le modèle d'aspérité qui suppose une précontrainte hétérogène avec une cohésion du matériau uniforme. Seule l'analyse historique d'une zone sismique permettra de discriminer ces deux processus de relâchement de la contrainte lors de mouvement de plaques tectoniques : la radiation ne le permet pas.

Je me suis attaché à modéliser le processus de rupture dynamique pour des modèles encore plus simples où la précontrainte est uniforme ou statique et la cohésion homogène avec une variation brutale empêchant la

faille de tripler sa taille initiale. Mes résultats sont en accord avec les modélisations analytiques ou numériques de la littérature. Une seule difficulté n'a pu être résolue : la propagation spontanée dans le mode plan, pour des cohésions faibles du matériau. La discrétisation numérique rend inacceptable la solution : il faudrait se débarrasser de cette discrétisation, problème rencontré souvent en physique et que l'on peut résoudre par des techniques de renormalisation.

Cette difficulté m'a empêché de considérer des cohésions inhomogènes dans l'espace, qui auraient permis de varier à l'infini les modèles de rupture. Comme toutes les méthodes numériques procèdent par discrétisation du plan de faille, il me semble probable que cette difficulté se retrouvera dans les autres travaux concernant la rupture, même si la faille a une zone de cohésion sur son front de rupture.

L'impact en champ lointain de la structure de la source me permet de recommander une certaine prudence dans l'utilisation des relations usuelles pour les paramètres de la source déduites des mesures en champ lointain.

Quand cette difficulté sera résolue, il n'y aura de limites à la modélisation que notre connaissance des paramètres sur le terrain. C'est pourquoi l'installation, la maintenance de réseaux denses d'accélérogrammes est l'étape indispensable à notre compréhension du mécanisme de la rupture.

Les limites de calcul des machines électroniques ont été repoussées au-delà des besoins actuels pour ce genre de modélisation numérique, même

pour des failles tridimensionnelles. J'en veux pour preuve un calcul de faille 3-D sur un cray-1S de 1 heure qu'une machine japonaise a mis moins d'un quart d'heure à effectuer.

Nous quittons le problème de la rupture. Je vais aborder, dans le chapitre 3 et la chapitre 4, le deuxième thème de ce travail qui est la propagation des ondes élastiques dans des milieux hétérogènes.

CHAPITRE 3

"Chaque vague semblait s'obstiner à creuser encore l'absence de toute trace, dans le geste toujours inachevé de l'effacement pur."

Julien Gracq, *Le Rivage des Syrtes*.

INTRODUCTION ONDE

Dans l'étude de la rupture, nous avons résolu les équations d'élastodynamique en milieu homogène. Les différents champs étudiés : champs de vitesse, champs de contrainte et de déplacement, sont contrôlés essentiellement par les conditions mixtes (conditions de Cauchy) sur le plan de faille. Je me suis peu intéressé à la propagation de l'information sous la forme d'ondes, bien qu'implicitement ce problème soit abordé pour modéliser le comportement de la faille. Le but du chapitre que nous abordons est de cerner le problème de la propagation des ondes, qui devient difficile quand nous considérons des milieux hétérogènes. La source sera prise comme ponctuelle : je déplace ainsi le centre de mon étude de la source vers le milieu.

La propagation dans des milieux hétérogènes a toujours intéressé les sismologues pour leur étude de la Terre. Les diffractions de l'interface Noyau-Manteau en sont un bel exemple (voir Bolt, 1982). A une échelle plus petite, la prospection sismique étudie la structure locale pour en découvrir les propriétés, et donc les matériaux sous-jacents : un tir en surface est enregistré par différents géophones aussi bien à la surface qu'au fond de l'océan. Ces enregistrements au-dessus de structures complexes en profondeur mais aussi latéralement, il faut pouvoir les synthétiser. Dans la majorité des cas, un profil fait quelques kilomètres de long et la durée d'enregistrement permet d'atteindre quelques kilomètres de profondeur.

De nombreuses méthodes ont été proposées, dans la littérature sismologique et sismique, pour résoudre ce problème. On peut considérer

deux grandes classes de méthodes.

La première classe concerne les méthodes dans l'espace et dans le temps : les méthodes numériques de différences finies (Alterman et Karal, 1968 ; Boore, 1972 ; Alford et al, 1974 ; Kelly et al, 1976) et d'éléments finis (Smith, 1975).

La deuxième classe concerne les méthodes spectrales s'appliquant à l'espace des phases et des fréquences. La manière et l'ordre dans lesquels on effectue les transformations inverses conduisent à différentes techniques. La méthode de réflectivité (Fuchs et Müller, 1971), qui intègre la réponse sur le vecteur réel lenteur, est utilisé quotidiennement pour des milieux verticaux.

Une intégration numérique sur le nombre d'onde conduit à la méthode des nombres d'onde discrets (DWN), présentée par Aki et Larner (1970) pour des milieux latéralement hétérogènes. Une étude systématique du principe de Rayleigh (sources diffractantes de même phase et même amplitude que l'onde incidente) pour l'extension à des milieux latéralement hétérogènes a été effectuée par Bard et Bouchon (1980a, 1980b), dans le cadre de cette théorie des nombres d'onde discrets. Par une équation intégrale, une représentation plus précise du champ diffracté peut être obtenue le long des frontières. Les coefficients sont déterminés par une méthode de moindres carrés. C'est l'approche suivie par Sanchez-Sesma et Esquivel (1979), pour des problèmes à géométrie particulière où on peut décrire parfaitement le champ diffracté sur la base de fonctions associées à la géométrie, ou par Campillo et Bouchon (1985) où la description n'est valable que dans la plage des nombres d'onde discrets considérés. Dans le même

temps, Alekseev et Mikhailenko (1980) et Mikhailenko et Korneev (1984) ont proposé des méthodes effectuant l'intégration sur les nombres d'onde pour n'importe quel interface.

Passer à une intégration dans le plan complexe de la lenteur permet une inversion par inspection et aboutit à la théorie des rais généralisés (Helmberger, 1968). La "Glorified optics" (Hong et Helmberger, 1978) introduit une courbure pour le calcul des coefficients de réflexion et de réfraction, tandis que Lee et Langston (1983) ont proposé, dans le cas 3-D, de tenir compte de deux courbures, appelant leur méthode "Principal curvatures".

Pour des milieux variant verticalement, Chapman (1978) a proposé de calculer d'abord l'intégrale en fréquence avant l'intégrale sur la lenteur réelle. Abandonnant les théories complètes, il a pu simplifier son résultat dans le cadre des méthodes asymptotiques, donnant le séismogramme WKBJ, qui est régulier aux caustiques. En utilisant la théorie de Maslov (1972), Chapman et Drummond (1982), Thomson et Chapman (1985) et Chapman (1985) ont pu étendre le séismogramme WKBJ à des milieux latéralement inhomogènes. Cet axe de recherche est en plein développement en sismologie.

Une autre méthode asymptotique, appelée faisceau gaussien introduite en sismologie par Červený et al (1982), peut être considérée comme une perturbation de la décomposition spectrale (Madariaga et Papadimitriou, 1985). Les relations entre la théorie de Maslov et des faisceaux gaussiens ont été étudiées par Madariaga (1984) dans un milieu vertical et par Klimeš (1984) plus généralement. On constate actuellement

une multiplication des méthodes utilisées en optique, par le biais des faisceaux gaussiens, fondées sur les représentations en rais complexes (Felsen, 1976 ; Wu, 1985). Leur application à la sismologie n'est pas encore faite, alors que les séismogrammes WKBJ commencent à être utilisés systématiquement (Chapman et Orcutt, 1985a ; Shaw et Orcutt, 1985) et que les faisceaux gaussiens suscitent un large intérêt dans les applications (Madariaga et Papadimitriou, 1985 ; George et al, 1986).

Toutes les méthodes asymptotiques ont des critères de validité (approximation haute fréquence qui veut que le milieu ait des variations lisses comparées à la longueur d'onde propagée), qui peuvent poser des problèmes d'application dans des cas réels. On trouve une étude de ces critères de validité dans Ben Menahem et Beydoun (1985), Beydoun et Ben menahem (1985). Par opposition, l'avantage et l'inconvénient des méthodes numériques est leur capacité à modéliser n'importe quelles ondes dans un milieu complexe : la résolution en fréquence est le principal facteur limitant. Toutefois, l'interprétation en est difficile, car les différents fronts ne sont pas considérés séparément, comme dans le cas des méthodes asymptotiques. Nous en verrons des exemples, puis nous verrons comment pallier à ces défauts dûs à l'extrême généralité de telles méthodes numériques.

J'aborderai le cas unidimensionnel suivant la même méthode empirique qui nous a conduit aux schémas de différences finies centrées - vitesse, contrainte -, dans notre étude des sources. L'accent sera mis sur la modélisation des hétérogénéités à laquelle le cas 1-D sert d'introduction. Je l'étendrai au cas du cisaillement horizontal pour un milieu vertical. Je soulignerai les nouvelles difficultés lors du passage à des géométries

bidimensionnelles. Puis le cas unidimensionnel sera reformulé suivant un principe variationnel (conservation de l'énergie totale) et sera inséré dans le cadre général des méthodes numériques (théorie des éléments finis). Je concentrerai ensuite mes efforts sur le mouvement de pression et de cisaillement vertical dans un milieu vertical avec une discussion approfondie de la méthode numérique, pour en montrer les aspects originaux. Je finirai sur une conclusion quant à la propagation des ondes en milieu hétérogène.

PROBLEME 1-D : ETUDE NUMERIQUE SIMPLE

3.2.1 : Introduction.

Pour modéliser la propagation des ondes en milieu élastique hétérogène, il est normal de commencer par le milieu unidimensionnel, avant d'aborder les géométries bidimensionnelles. Bien que des traits particuliers à la propagation dans un milieu 1-D facilitent grandement la modélisation, on en retirera un enseignement profitable tant sur l'aspect physique que sur l'aspect numérique.

C'est pourquoi, après la présentation du problème et sa simulation numérique, j'aborderai quelques exemples. La propagation en milieu homogène illustrera la non-dispersion des ondes numériques et la presque parfaite absorption des ondes sur les bords du milieu. La propagation dans un bassin à bords abruptes précèdera la propagation dans un bassin à bords plus lisses.

Je reprendrai cette étude du cas 1-D, dans la section 3.4, pour une intégration dans le cadre des méthodes numériques. C'est pourquoi cette section est prise comme une première illustration, sans considération théorique.

3.2.2 : Formulation du problème.

Equations.

Considérons un milieu suivant un axe x . Loin de toutes sources, la propagation d'une onde élastique, caractérisée par un déplacement u suivant cet axe x , est modélisée par l'équation :

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (3.2.1)$$

où $\rho(x)$ est la masse volumique, $E(x)$ le module de Young. Cette équation se réduit, dans le cas homogène, à l'équation bien connue :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial u^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.2.2)$$

où la vitesse de propagation des ondes est définie par :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.2.3).$$

Au lieu de discrétiser l'équation (3.2.1) hyperbolique du second ordre, je retourne aux équations élastodynamiques qui sont :

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad (\text{principe fondamental de la dynamique})$$

et (3.2.4)

$$\tau = E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{loi de Hooke}).$$

Prenons comme quantités inconnues du problème la vitesse $v = \partial u / \partial t$ et la contrainte τ . Définissons les paramètres du milieu par la légèreté $l(x) = 1/\rho(x)$ et le module de Young $E(x)$. On déduit le système hyperbolique du premier ordre suivant :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = l(x) \frac{\partial \tau}{\partial x},$$

et (3.2.5)

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = E(x) \frac{\partial v}{\partial x}.$$

La réintroduction de la contrainte τ a réduit le degré de dérivation au prix d'une augmentation de variables : on passe de 3 à 4 variables dans la formulation toute hétérogène présentée ici. Pour un milieu homogène où la seule variable est v , on double le nombre de variables : un prix un peu cher dans cette configuration particulière. La réduction du degré de dérivation est une technique mathématique appliquée aux systèmes différentiels qui a souvent un sens physique - propagation des ondes, diffusion de la chaleur... -. Nous la reverrons tout au long de ce chapitre.

Conditions initiales.

Le milieu est au repos à l'instant $t = 0$, i.e. la vitesse v et la contrainte τ sont mises à zéro partout dans le milieu. Grâce à ces conditions initiales, propager la vitesse et la contrainte est équivalent à propager la primitive de la contrainte et le déplacement.

Conditions aux limites.

Les interfaces, réduites à des points, ne sont pas traités explicitement. Elles apparaissent selon les variations des paramètres physiques du milieu : la masse volumique et le module de Young. Il reste trois conditions à satisfaire : deux sur les bords et une à la source. Nous pourrions utiliser sur les deux bords des conditions de contrainte nulle (bord libre), des conditions de vitesse nulle (bord fixe) ou des conditions de radiation pour simuler un milieu infini.

La solution se propageant suivant les x positifs s'écrira localement près du bord :

$$u(x) = f(x - c_l t) \quad (3.2.6)$$

où l'indice l indique que l'on prend des valeurs locales de la vitesse. On peut déduire la vitesse et la contrainte d'après leurs relations en fonction du déplacement :

$$v(x) = -c_l f'(x - c_l t) \text{ et } \tau(x) = E_l f'(x - c_l t) \quad (3.2.7)$$

et, donc, une relation entre ces deux variables :

$$v(x) = - \frac{c_1}{E_1} \tau(x) = - \sqrt{\frac{I_1}{E_1}} \tau(x) \quad (3.2.8)$$

en fonction des paramètres locaux du milieu sur le bord positif. Dans le cas du bord négatif, le signe - disparaît. Si cette relation (3.2.8) est appliquée au bord, aucune réflexion n'apparaîtra, sauf venant de la discrétisation spatio-temporelle. Ce sont les conditions de radiation des ondes planes, que j'utiliserai dans tout ce travail. Nous verrons que ce sont des conditions approximatives dans les géométries 2-D.

La source peut être introduite de différentes manières, suivant le problème physique posé. Je prendrai une source simple, i.e. une source où la vitesse est imposée à la source (on pince la corde). D'autres sources, comme les sources impulsives (on frappe la corde), seront utilisées dans les géométries 2-D. Bien que tout aussi faciles à simuler numériquement comme nous le verrons dans les géométries 2-D, ces sources impulsives n'apportent rien à cette première illustration de propagation en milieu hétérogène et ne seront donc pas développées. La fonction source temporelle sera de la forme :

$$f(t) = t e^{-\alpha(t-t_0)^2} \quad (3.2.9)$$

Le paramètre α contrôle le contenu fréquentiel de la source, de manière qu'il y ait au moins 10 points de la grille pour la demi-longueur de la source. Comme indiqué par Stephen (1983), la fréquence maximum du spectre

de la source est $v_p = 0.390 \alpha^{1/2}$ et la fréquence de coupure correspondant à la demi-largeur du spectre est $v_c = 0.528 \alpha^{1/2}$. Pour $\alpha = 1\ 000$, on trouve $v_p = 12$ Hz et $v_c = 16$ Hz. Retenons que, pour un milieu homogène de vitesse $8\ 000$ m/s, la demi-longueur de la source est d'environ 800 m (Alford et al, 1974). Dans le cas très particulier d'un milieu 1-D homogène, où la condition de stabilité numérique peut être exactement vérifiée (voir paragraphe suivant), il n'existe pas de dispersion numérique : on pourra ainsi prendre n'importe quel contenu fréquentiel, i.e. n'importe quel α .

3.2.3 : Simulation numérique.

Je vérifie les équations aux noeuds d'une maille spatio-temporelle, en approximant les dérivées par des différences finies centrées ; ce qui nous donne la figure 3.2.a, où la vitesse est connue au temps $(k-1/2)dt$ et la contrainte au temps kdt . Le schéma équivalent au système (3.2.5) s'écrit :

$$V_i^{k+1/2} = V_i^{k-1/2} + \frac{dt}{dx} L_i \left[T_{i+1/2}^k - T_{i-1/2}^k \right] \tag{3.2.9}$$

$$T_{i+1/2}^{k+1} = T_{i+1/2}^k + \frac{dt}{dx} E_{i+1/2} \left[V_{i+1}^{k+1/2} - V_i^{k+1/2} \right]$$

où k est l'indice en temps, i l'indice suivant l'axe x . dt est le pas de discrétisation en temps, dx suivant l'axe x .

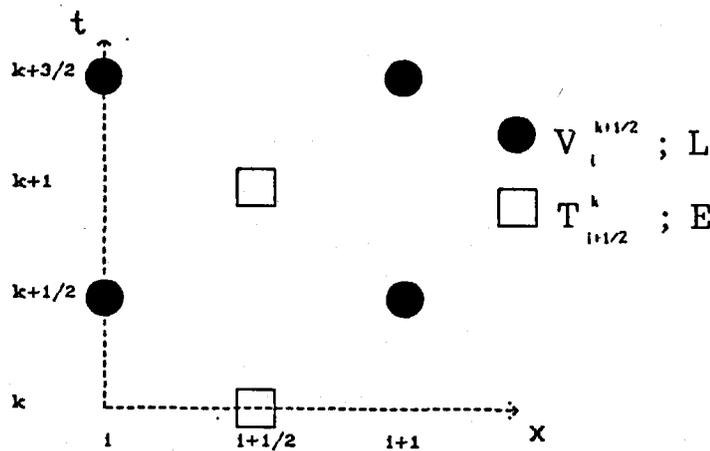


Figure 3.2.a : Discrétisation du milieu suivant une grille alternée. Le temps est la coordonnée verticale et la position x la coordonnée horizontale.

La vitesse numérique V au temps $(k+1/2)\Delta t$ et la contrainte numérique T au temps $(k+1)\Delta t$ sont calculées explicitement à partir des vitesses au temps $(k-1/2)\Delta t$ et des contraintes au temps $k\Delta t$. L représente la discrétisation numérique de la légèreté dans le milieu et M représente la discrétisation numérique du module de Young. Rappelons la condition de stabilité, condition nécessaire et suffisante dans le cas d'un milieu homogène :

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.2.10)$$

où c sera la vitesse maximum prise dans le milieu. Dans le cas d'un milieu homogène, cette condition de stabilité pourra être exactement vérifiée : le schéma numérique ne sera pas dispersif. Cet avantage se perd dès que le milieu est hétérogène.

Je vais illustrer dans le prochain paragraphe cette propriété remarquable des milieux 1-D homogènes, ainsi que les conditions d'absorption.

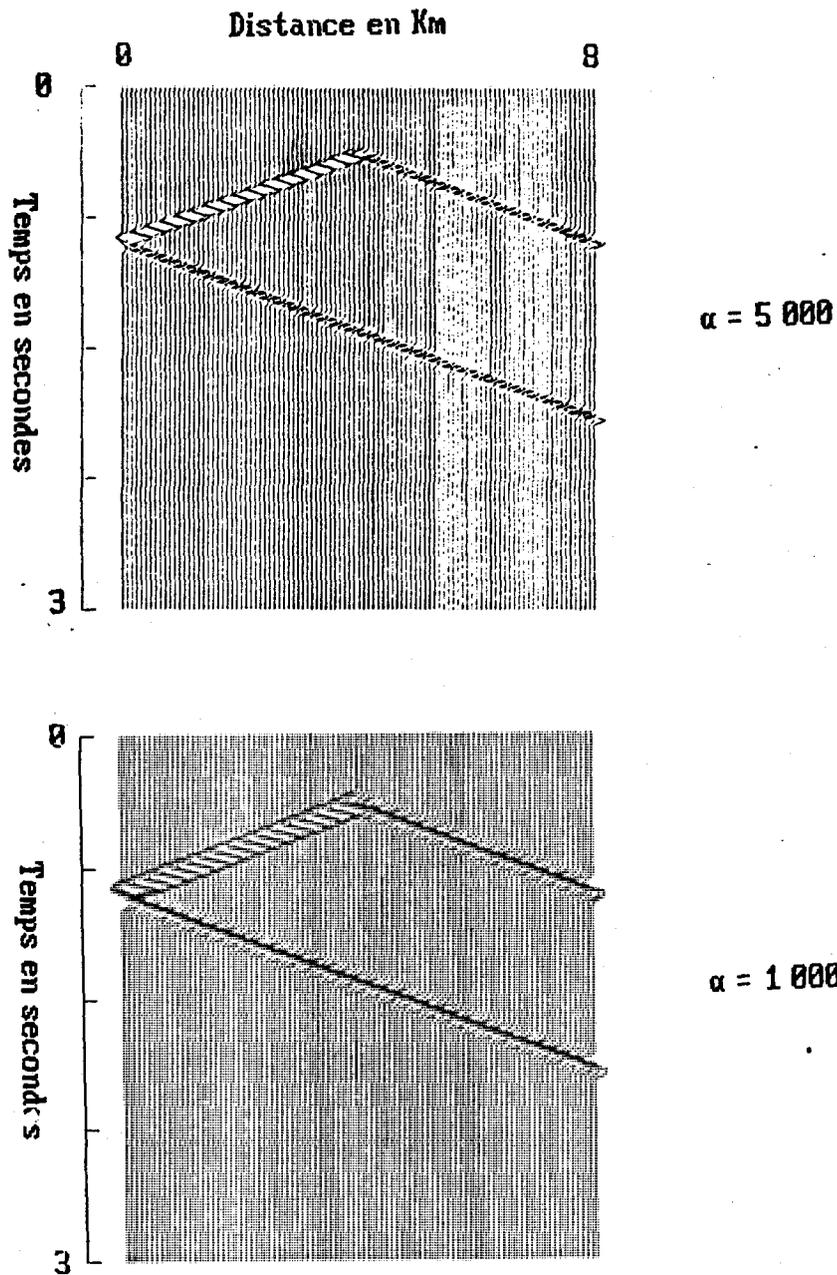


Figure 3.2.b : Sismogrammes aux différents points du milieu pour un pas non-dispersif. Le bord droit est un bord transparent, tandis que le bord gauche est un bord libre. Nous voyons l'efficacité de la relation d'absorption.

3.2.4 : Milieu homogène.

Considérons un milieu de 10 km de long, où la vitesse des ondes est de 8 000 km/s et la densité est de 2 500 kg/m³. Soit un pas en espace de $\Delta x = 80$ m. Le pas en temps, qui ne donne pas de dispersion, est $\Delta t = 10^{-2}$ s. La figure 3.2.b montre les sismogrammes aux différents points du milieu pour ce pas non-dispersif, dans le cas d'une source au contenu spectral défini par $\alpha = 5\,000$, tandis que la figure 3.2.c montre le même résultat obtenu avec un pas en temps de moitié. La dispersion numérique devient alors apparente, puisque le contenu spectral de la source est tel que la règle d'or de 10 points par longueur d'onde n'est pas respectée. Revenons avec un paramètre $\alpha = 1\,000$: la dispersion numérique est alors moins importante, comme le montrent encore les figures 3.2.b et 3.2.c. La possibilité d'un schéma numérique non-dispersif est particulière au cas 1-D homogène : elle ne pourra pas être utilisée par la suite, dans des milieux hétérogènes ou de dimensions supérieures. Il faudra que la source reste basse fréquence. Nous voyons apparaître ici la première limitation des méthodes numériques.

Comme le milieu numérique est borné, des réflexions sur les bords viendront perturber le signal dans le milieu. De manière à simuler un milieu infini, j'applique la relation (3.2.8) sur le bord droit. Pour comparer les réflexions, je définis le bord gauche comme un bord libre. Les figures 3.2.b et 3.2.c montrent les résultats de l'absorption sur les sismogrammes synthétiques pour le bord droit. L'absorption est presque parfaite quand il n'y a pas de dispersion numérique. Initialement, nous constatons que la vitesse et la contrainte sont en opposition de phase dans le sens positif et en phase dans le sens négatif. La relation (3.2.8) est la traduction de ce

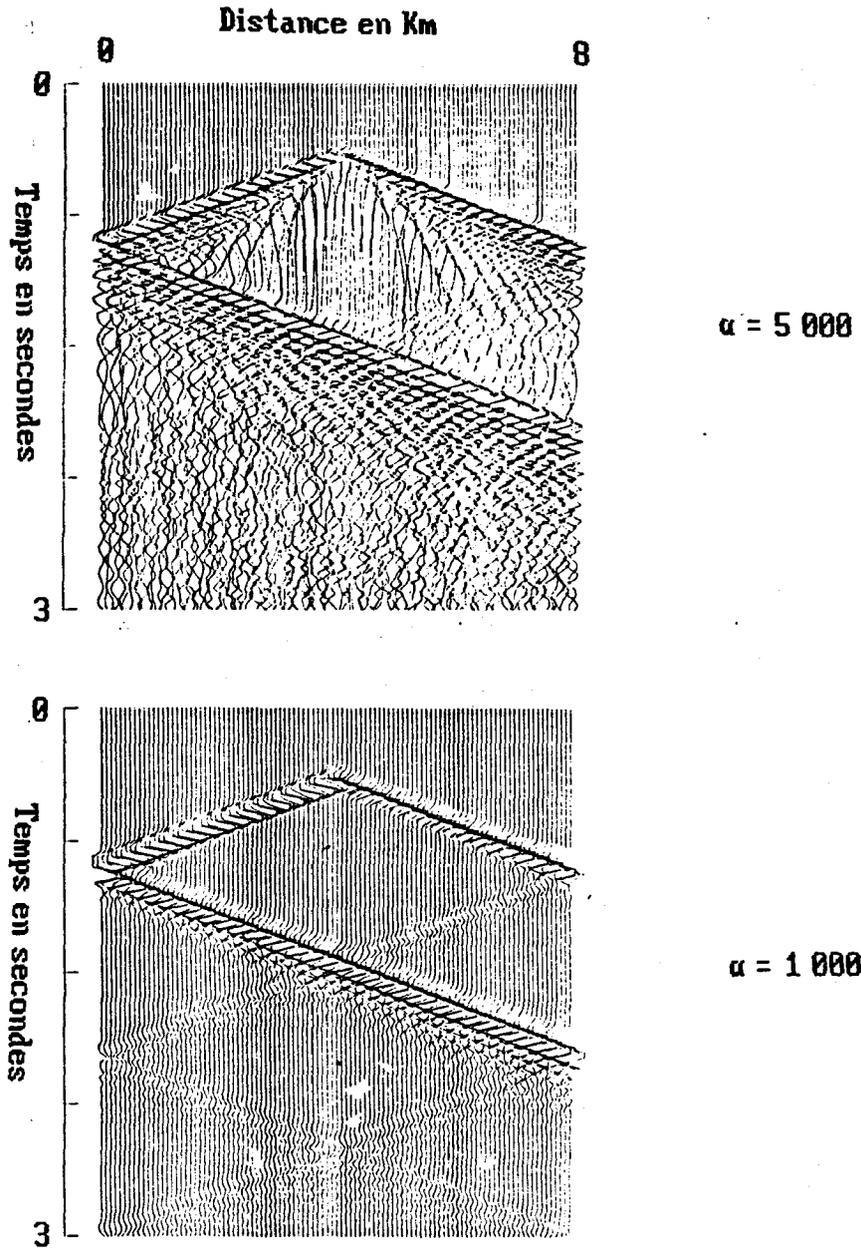


Figure 3.2.c : Sismogrammes aux différents points du milieu pour un pas dispersif. Le bord droit est un bord transparent, tandis que le bord gauche est un bord libre. Nous voyons que l'efficacité de la relation d'absorption est réduite à cause de la dispersion.

résultat de propagation dans un milieu homogène. La réflexion parasite sur le bord droit, que l'on peut observer en cas de dispersion et que l'on pourrait observer par amplification dans l'autre cas, provient uniquement de la discrétisation spatio-temporelle, qui empêche de connaître la vitesse et la contrainte au même noeud. Les figures montrent que la perturbation venant du bord gauche gênerait l'analyse du sismogramme si celui-ci était plus complexe.

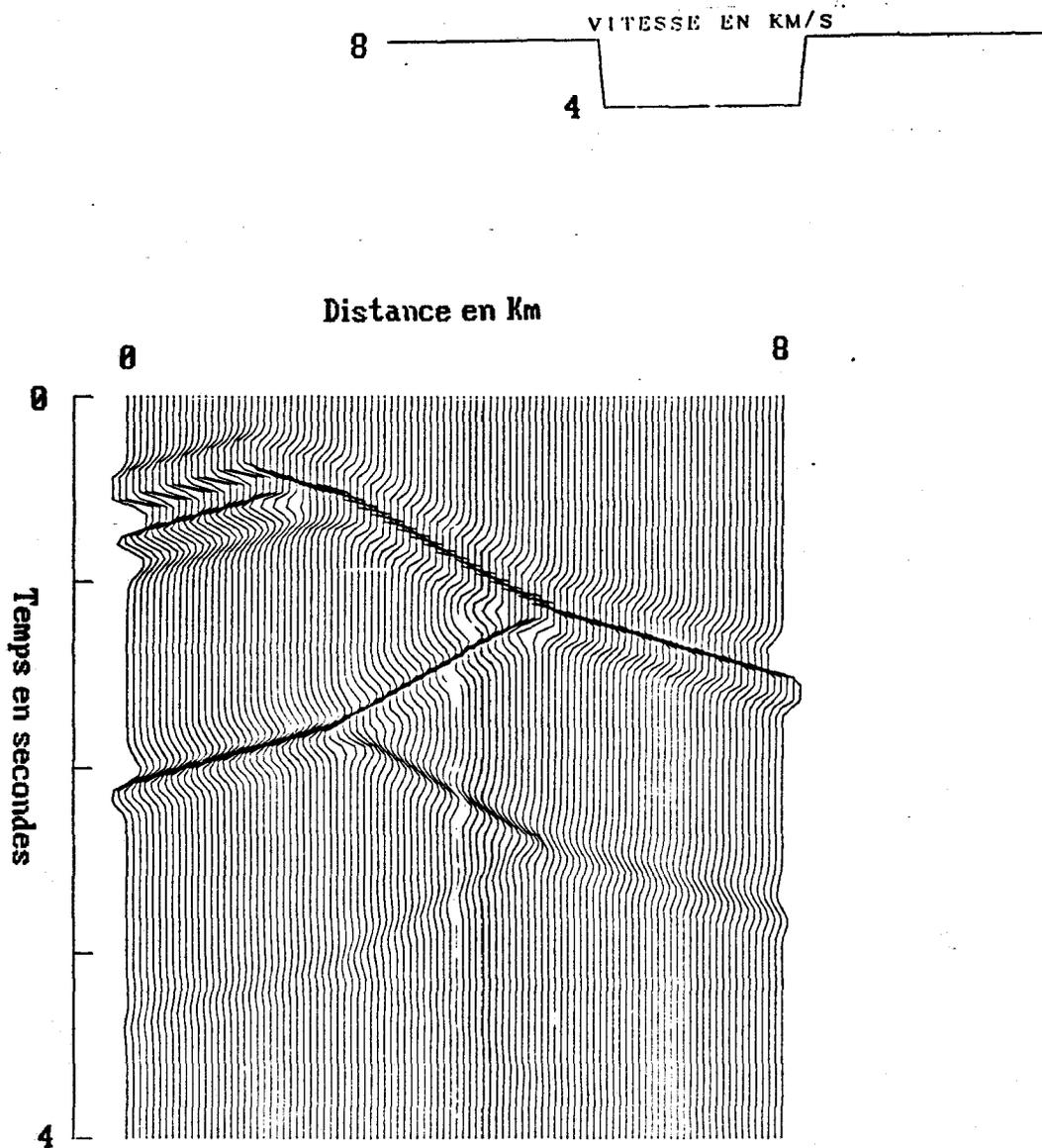


Figure 3.2.d : Sismogrammes pour une couche à frontières brutales. La variation de vitesse est indiquée en haut de la figure, tandis que la masse volumique est uniforme. Noter les oscillations à l'intérieur de la couche et la disparition des ondes aux bords du modèle numérique. Sans cette disparition, les sismogrammes auraient pu être difficiles à interpréter.

3.2.5 : Milieux complexes.

Le schéma développé n'est pas restreint aux milieux homogènes. Pour illustrer des milieux hétérogènes, je vais prendre deux exemples à couche à faible vitesse. Le premier par ses transitions brusques illustrera l'effet d'une interface, tandis que le deuxième par des transitions sans discontinuité de vitesse, mais avec une rupture du gradient de la vitesse montrera les effets de variations de seconde espèce. La source se trouve au-dessus de cette zone à faible vitesse.

Couche à frontières brutales

La source est située à l'extérieur de la couche dans un milieu de vitesse 8 000 m/s et de densité 2 500 kg/m³. La couche, elle-même, a une vitesse de 4 000 m/s et une densité identique à l'encaissant. La figure 3.2.d présente des sismogrammes qui font apparaître le transfert d'énergie dans la couche et la propagation oscillante à l'intérieur de la couche, avec une perte d'énergie à chaque réflexion sur une frontière. Notons encore l'absorption sur les bords du modèle numérique.

Couche à frontières de seconde espèce

Je reprends la même géométrie de la couche, avec une variation linéaire de la vitesse à l'intérieur - 8 000 m/s sur les frontières à 4 000 m/s au centre -. La figure 3.2.e montre les sismogrammes dans le milieu. Du fait de de la structure continue en vitesse des bords, l'onde transmise dans la couche ne fait pratiquement qu'un aller-retour avant de

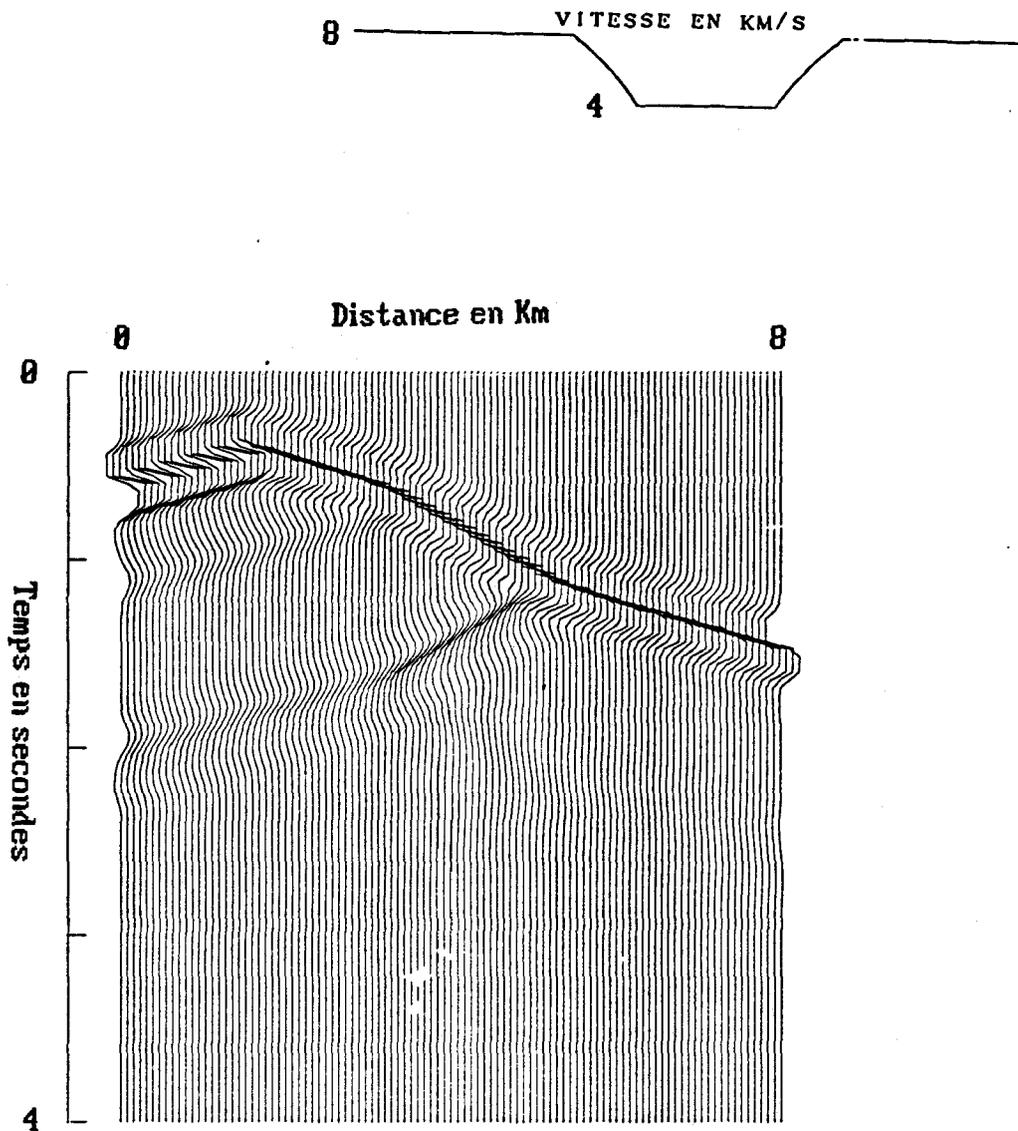


Figure 3.2e : Sismogrammes pour une couche à frontières de seconde espèce. La variation de vitesse est indiquée en haut de la figure, tandis que la masse volumique est uniforme. Remarquer l'unique oscillation à l'intérieur de la couche et la disparition des ondes aux bords du modèle numérique.

devenir négligeable. Notons le contenu basse fréquence de la réflexion sur la frontière lisse, contenu qui ne serait pas modélisé par la théorie des rais.

On peut varier à l'infini les géométries. Mon but n'est pas de fournir un catalogue de résultats pour différents types de contraste entre deux milieux, mais d'illustrer dans une géométrie simple qu'est la géométrie 1-D la propagation en milieu hétérogène, pour familiariser le lecteur avec elle avant de passer à des géométries 2-D.

3.2.6 : Conclusion.

La résolution de la propagation d'ondes élastiques en milieu 1-D hétérogène m'a permis d'introduire le système élastodynamique comportant comme variables la vitesse et la contrainte discrétisées en des points différents de la grille. Associé à chaque variable, un paramètre physique définit une propriété du milieu : la densité (ou la légèreté) pour la vitesse et le module de Young pour la contrainte. Il existe quatre grandeurs dans le milieu. Par rapport à des problèmes où la contrainte est éliminée et où la densité est supposée constante, le prix à payer est celui d'un stockage deux fois plus important. Le nombre d'opérations arithmétiques sera le même avec une structure plus ou moins favorable à la vectorisation et au parallélisme suivant les types de machines à calculer.

Cette présentation de la propagation en milieu 1-D a été pour moi l'occasion d'illustrer les deux phénomènes qui vont se retrouver tout au long de ce chapitre 3 et qui représentent deux difficultés majeures des méthodes numériques : limitation basse fréquence et limitation spatiale du milieu. Le choix d'une source basse fréquence résoudra la première, tandis que des conditions d'absorption sur les bords résoudront la deuxième, d'une manière presque parfaite dans le cas 1-D et d'une manière approximative dans les cas 2-D et 3-D. L'amélioration des conditions d'absorption n'a pas été abordée dans ce travail centré sur l'hétérogénéité. Je me suis contenté d'appliquer les conditions d'absorption décrites dans ce paragraphe, pour toutes les autres géométries. Il y a là un champ de recherche passionnant, si l'on en juge par toute la littérature à ce sujet.

PROBLEME 2-D SH : MODELISATION ET INTERPRETATION

3.3.1 : Introduction

Après avoir étudié quelques exemples à une dimension, nous nous tournons vers des exemples à deux dimensions pour lesquels nous considérerons dans un premier temps un mouvement horizontal dans un plan vertical. Il n'existe qu'une seule vitesse de propagation pour ce type de mouvement de cisaillement horizontal - nommée SH pour Secondaire Horizontal -. Auparavant, essayons de voir un peu plus clair dans les méthodes numériques par différences finies, en décrivant les grandes classes qui les caractérisent.

Les méthodes de différences finies (DF) revêtent différentes formes dont le nombre va croissant. L'évolution de l'analyse numérique et des ordinateurs utilisés ne permet pas de faire des choix exclusifs, rejetant telle ou telle formulation. Mon travail concerne une époque autour de 1980 où la puissance des machines a permis d'envisager de nouvelles formulations. Toutefois, je suis conscient que d'autres choix seront possibles dans l'avenir.

La première distinction que je voudrais introduire est celle concernant la formulation explicite et implicite. La formulation explicite donne une valeur d'un champ à l'instant t' en fonction de valeurs des champs connues à des instants inférieurs à t' . La valeur est donc obtenue explicitement. Par contre la formulation implicite fournit une relation entre plusieurs valeurs à l'instant t' en fonction de valeurs aux instants

précédents. Il faut alors résoudre un système linéaire, possédant une structure matricielle par bandes. Il est possible, dans ce cas, d'employer les techniques sur les matrices creuses de l'analyse numérique. Une telle méthode peut être intéressante car la formulation implicite conduit souvent à des schémas absolument stables (Marchouk, 1975), si bien que la propagation peut se faire à grands pas dans les régions de peu d'intérêt. Toutefois, les chercheurs considèrent généralement que le gain en stabilité ne contrebalance pas l'effort numérique de la résolution du système linéaire (Bamberger et al, 1980 ou Emerman et al, 1982). Cette opinion est en train d'évoluer sous l'impulsion de chercheurs comme Mufti (1985), qui parvient à réduire le coût de résolution du système linéaire. Il faudra attendre pour voir l'impact de ces nouvelles méthodes sur les ordinateurs vectoriels et parallèles avant de se prononcer. Quant à moi, j'ai opté pour la formulation explicite dans ce travail comme on l'a déjà vu lors de mon étude sur la rupture et les ondes dans le cas 1-D.

La deuxième distinction importante concerne la propagation dans des milieux hétérogènes. Ce sont les formulations homogène et hétérogène, comme les a décrites Kelly et al (1976). La formulation homogène propage les ondes dans des régions homogènes, en vérifiant explicitement les conditions aux limites. La formulation hétérogène, par contre, propage les ondes dans un milieu hétérogène où les paramètres physiques varient spatialement : les conditions aux limites sont alors traitées implicitement, sauf sur les bords du modèle et à la source.

La formulation homogène a beaucoup retenu l'attention des chercheurs pour l'étude des milieux stratifiés. Elle présente deux avantages : puisque les paramètres physiques sont définis par région, le

stockage en mémoire centrale de l'ordinateur est réduit au minimum ; de plus, dans chaque région, le meilleur schéma peut être utilisé suivant les caractéristiques du milieu, ce qui assure à l'ensemble une grande souplesse. De même, aux frontières, la précision des conditions aux limites peut être améliorée, en développant les dérivées spatiales à des ordres supérieurs à celui utilisé pour la propagation. En effet, il faut vérifier explicitement ces conditions. Ce qu'ont souligné, entre autres, les travaux de Ilan et de ses co-auteurs (1975, 1976, 1977) et ceux de Nicoletis (1981), faisant suite au travail fondamental d'Alterman et Karal (1968). Dans le cadre de la formulation homogène, Kummer et Behle (1982) ont exploité systématiquement les avantages associés au développement de Taylor pour des frontières en lignes brisées dans le cas SH, cas qui nous préoccupe dans ce chapitre. Notons que leur méthode n'a pas encore été appliquée au cas P-SV étudié plus loin.

Le prix payé pour améliorer la précision des solutions est peut-être trop cher : mieux vaudrait répéter des opérations simples sur un maillage fin plutôt que d'effectuer des opérations plus élaborées sur un maillage grossier. Les choix, qui semblent se dessiner actuellement (Edwards et al, 1985 et Tarnowski, 1986), dépendront des machines de calcul et de leurs structures.

Ces deux avantages de la formulation homogène - meilleur schéma possible dans chaque région, contrôle de la précision des conditions aux limites - sont contrebalancés par l'inconvénient de traiter les interfaces explicitement. Dans le cas où celles-ci sont complexes, le travail à effectuer peut être insurmontable. De plus, sa mise en oeuvre numérique est une source d'erreurs très difficiles à découvrir. Ce qui a conduit

naturellement aux méthodes hétérogènes avec le travail pionnier de Boore (1972), où celui-ci procède à une extension grossière de la formulation homogène vers la formulation hétérogène. Cette méthode avait l'avantage de rester relativement légère : la vitesse y est simplement considérée comme dépendant de l'espace dans l'équation des ondes scalaires. L'équation n'est donc qu'une approximation dans les régions où la vitesse varie très vite, c'est-à-dire là où il faut tenir compte de son gradient.

Cette étape intermédiaire nous conduit à la formulation hétérogène. Une définition, que j'emprunterai à Kelly et al (1976), est la suivante :

La formulation hétérogène résout directement l'équation des ondes en milieu hétérogène où les propriétés physiques varient spatialement. Les conditions aux interfaces sont alors vérifiées implicitement. La formulation homogène, au contraire, résout l'équation des ondes dans chaque milieu homogène. Les conditions aux interfaces sont alors vérifiées explicitement.

Il existe d'autres méthodes numériques s'apparentant aux méthodes de différences finies. Pour ne citer qu'un exemple, Kosloff et al (1984) ont proposé de vérifier les équations aux noeuds d'un maillage, comme le font toutes les méthodes spatio-temporelles, mais au lieu d'évaluer les dérivées par différences finies, elles sont calculées en passant par le domaine associé des fréquences spatiales ou temporelles. Cet aller-retour dans le domaine fréquentiel n'est possible que par les techniques de transformée de Fourier rapide. Un meilleur contrôle du contenu fréquentiel dans les dérivées permet de réduire le nombre de points par longueur d'onde modélisée, mais le nombre d'opérations est un peu plus important.

C'est donc une méthode qui s'adapte bien à des machines ayant une "petite" mémoire mais une grande capacité de calcul, comme les "array-processors". Je passerai sous silence les méthodes de factorisation (Claerbout, 1976 ; Yanenko, 1968 ; etc.), et bien d'autres méthodes encore.

J'introduirai le problème physique, puis sa formulation numérique. Le cas simple du quart-plan homogène permettra des comparaisons avec des solutions analytiques. Puis le cas canonique du bassin sédimentaire m'autorisera à comparer différentes méthodes pour une interface complexe. Enfin un cas complexe dans ses résultats, mais encore relativement simple dans sa géométrie, d'un dôme de sel montrera les capacités de modélisation des différences finies, leur puissance pour l'interprétation, mais aussi les difficultés rencontrées. Je concluerai sur cette méthode en géométrie 2-D SH, avant de revenir sur le cas 1-D pour une analyse plus fine des hypothèses (qui transparaissent déjà dans cette section) faites dans les méthodes de différences finies.

3.3.2 : Formulation du problème physique

Equations

Dans un milieu vertical hétérogène associé à un repère (Oxz) où l'axe x est horizontal et l'axe z est vertical, la propagation des ondes SH peut être représentée par l'équation scalaire :

$$\rho(x,z) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu(x,z) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu(x,z) \frac{\partial v}{\partial z} \right], \quad (3.3.1)$$

où le déplacement horizontal est noté v , la densité est $\rho(x,z)$ et $\mu(x,z)$ représente le module de cisaillement en un point $M(x,z)$ du milieu. Au lieu d'utiliser cette équation hyperbolique du second ordre, retournons aux équations élastodynamiques initiales, en réintroduisant les contraintes de cisaillement σ_{xy} et σ_{zy} . Nous avons :

$$\rho(x,z) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zy}),$$

qui est le principe fondamental de la dynamique, puis : (3.3.2)

$$\sigma_{xy} = \mu(x,z) \frac{\partial v}{\partial x} \text{ et } \sigma_{zy} = \mu(x,z) \frac{\partial v}{\partial z},$$

représentant la loi élastique linéaire de Hooke. Ce système est transformé en un système hyperbolique du premier ordre lorsqu'on choisit les quantités - vitesse et contraintes - comme les inconnues du problème. En

effet, ce sont les quantités qui interviennent dans l'énergie totale. Ce sont de plus des quantités conjuguées. On obtient :

$$\frac{\partial \dot{v}}{\partial t} = l(x,z) \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zy}) \right],$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = \mu(x,z) \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \text{ et} \quad (3.3.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial t} = \mu(x,z) \frac{\partial \dot{v}}{\partial z},$$

où on a introduit l'inverse de la densité, i.e. la légèreté $l(x,z)$, pour des raisons de symétrie avec le module de cisaillement. Le point note la dérivation dans le temps. C'est ce système que nous allons résoudre par différences finies dans tout le milieu.

La réintroduction des contraintes a réduit le degré de dérivation, mais augmenté le nombre de variables. C'est une technique mathématique qu'ont utilisée Tikhonov et Samarskii (Mitchell 1969, p23), technique reprise par Kummer et Behle (1982). Un lissage du module de cisaillement sur un pas de grille est alors nécessaire. En conséquence la discrétisation de la densité sur un noeud et celle du module de cisaillement moyenné entre deux noeuds sont très différentes. En fait cette technique mathématique est sous-tendue par la formulation physique que sont les équations élastodynamiques. Nous verrons que les noeuds où est discrétisé le module de cisaillement existent : c'est là où sont discrétisées les contraintes. Ainsi les équations proposées plus haut conservent une certaine symétrie entre vitesse et contrainte, si bien que la densité (ou la légèreté) et le

module de cisaillement sont concentrés aux noeuds de la maille numérique comme c'est habituel en différences finies.

Cette technique se généralise aux systèmes d'ordre n . En définissant $(n-1)$ variables auxiliaires, on se ramène à un système (hyperbolique ou non) polydimensionnel du premier ordre (Zienkiewicz et Morgan, 1982).

Conditions initiales

Le milieu est au repos à l'instant initial $t=0$, i.e. les vitesses et les contraintes sont mises à zéro partout dans le milieu. Grâce à ces conditions initiales, propager les vitesses et les contraintes est équivalent à propager les primitives des contraintes et les déplacements.

Conditions aux limites

Les interfaces ne sont pas traitées explicitement. Elles apparaissent selon les variations des paramètres physiques du milieu : la masse volumique et/ou les coefficients de Lamé. C'est ce que nous supposons quand nous tracerons les interfaces dans nos modèles. En toute rigueur, cette représentation est trompeuse car elle suppose le milieu continu avec un changement brutal aux interfaces, alors que le milieu est discrétisé et que l'interface correspond à une variation des paramètres. Nous voyons qu'il est vain de chercher à connaître l'interface avec une précision inférieure au pas de la grille. Il reste cinq conditions à satisfaire : sur les quatre bords du modèle numérique de dimensions finies et à la source. Nous pourrions utiliser sur les bords des conditions de radiation approximatives (pour simuler un milieu infini), des conditions de

contrainte libre (condition de Neumann ou condition de surface libre) ou des conditions de vitesse nulle équivalentes à des conditions de déplacement nul (condition de Dirichlet ou condition de surface rigide). Les conditions de radiation sont celles introduites dans le cas 1-D, i.e. celles obtenues pour une onde plane perpendiculaire au bord considéré. Elles ne sont qu'approximatives et correspondent à la condition B-1 de Clayton et Engquist (1980). Les autres conditions de Clayton et Engquist ou celles décrites par Halpern (1980) peuvent être implémentées : c'est un problème d'écriture informatique et non une difficulté de formulation.

La source peut être introduite de plusieurs façons, en suivant l'approche d'Alterman et Karal (1968) ou en optant pour une solution complètement numérique beaucoup plus rapide.

La technique d'Alterman et Karal peut se formaliser mathématiquement ou s'expliquer numériquement, comme cela a été fait dans la littérature (Alterman et Karal, 1968). J'en présente les grandes lignes, car l'idée est simple mais les détails compliqués. On considère que la source se trouve dans une région homogène de rayon d . Dans cette région, les ondes émises par la source ne sont pas modélisées, car singulières. A la frontière de la dite région, on applique l'onde incidente obtenue analytiquement comme une condition limite. La solution obtenue à l'extérieur de cette région interdite est identique à celle que l'on aurait trouvée à partir de la source (principe de Huygens). Une petite complication vient du fait que les ondes autres que l'onde incidente doivent pouvoir se propager dans la région interdite, qui ne doit pas faire écran. Seule l'onde "perturbée" traverse la région interdite. Comme la solution incidente est toujours connue sur la frontière, le découplage

entre l'onde incidente et l'onde "perturbée" est toujours possible, bien que ce soit laborieux techniquement. L'énorme avantage de cette méthode est d'éliminer la singularité de l'onde incidente à la source.

Une autre technique consiste à incrémenter la valeur de la vitesse à la source, comme avec un second membre dans l'équation du principe fondamental de la dynamique. La singularité de l'onde incidente ne peut être représentée : on a un lissage qui n'influe pas sur la solution en dehors du point source pour les pas de discrétisation usuellement choisis. Lors d'une réduction de ces pas, il faudra peut-être revenir à la solution d'Alterman et Karal. Nous avons, dans ce qui suit, utilisé la première technique qui est un peu lourde numériquement. La deuxième plus simple numériquement est celle qui sera utilisée pour les inversions du chapitre 4 où les sources sont en nombre très important : sources réelles et sources résiduelles aux points d'observation.

Dans mes exemples, deux types de source ont été utilisés : la source impulsive ponctuelle et l'onde plane incidente. Pour la source impulsive, la vitesse incidente est obtenue par convolution de la fonction de Green du milieu homogène entourant la source avec l'excitation de la source, comme l'a proposé Alford et al (1974). Cette convolution, qui sera précisée dans le paragraphe 3.3.4, s'effectue dans le domaine temporel, puisque le calcul par différences finies se fait dans ce domaine. On peut évaluer cette convolution dans le domaine fréquentiel, mais cela est moins pratique (il faut connaître le temps final du calcul) quoique plus rapide. L'excitation sera de la forme :

$$f(t) = -2 \alpha (t-t_0) e^{-\alpha (t-t_0)^2}, \quad (3.3.4)$$

où α contrôle le contenu fréquentiel de la source. α sera égal à 1 000, dans les applications. Ce qui donne une longueur d'onde de 4 000 m, dans un milieu de vitesse 4 000 m/s, et donc une fréquence de 1 Hz. Le décalage t_0 sera de 0.2 s, pour garantir la causalité du signal numérique: $f(t) = 0$ pour $t < 0$. Pour l'onde incidente plane, la vitesse incidente sera donnée par la formule de Ricker:

$$f(t) = \frac{\pi}{2(\alpha - 0.5)} e^{-a}, \quad (3.3.5)$$

où $a = \pi \left(\frac{t - t_0}{t_1} \right)^2$. Dans les calculs, on prendra $t_0 = 20$ s et $t_1 = 18.3$ s.

3.3.3 : Simulation numérique

La méthode numérique employée doit vérifier les équations aux noeuds d'une maille alternée, en approximant les dérivées par des différences finies centrées. Une telle approximation équivaut à considérer des fonctions d'interpolation linéaires dans notre maillage. La vérification exacte (et non en moyenne) des équations en des noeuds du maillage conduit à des fonctions tests (ou poids) sous la forme de diracs qui ne sont pas à la même place suivant l'équation considérée. C'est ce que l'on appelle la méthode de différences finies par opposition à la méthode des éléments finis. Nous verrons lors de la description formelle du problème discrétisé à une dimension la définition précise de ces notions.

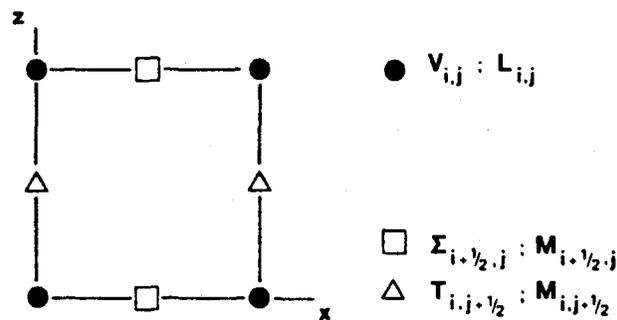


Figure 3.3.a : Discrétisation du milieu suivant une grille alternée. Les symboles noirs représentent les vitesses et les légèretés au temps $k\Delta t$, tandis que les symboles ouverts désignent les contraintes et les modules de cisaillement associés au temps $(k+1/2)\Delta t$.

La grille est représentée sur la figure 3.3.a, où les vitesses sont connues à l'instant kdt , et les contraintes à l'instant $(k+1/2)dt$. Le schéma, équivalent au système 3.3.3, s'écrit :

$$\begin{aligned}
 V_{i,j}^{k+1/2} = & V_{i,j}^{k-1/2} + \frac{dt}{dx} L_{i,j} \left[\Sigma_{i+1/2,j}^k - \Sigma_{i-1/2,j}^k \right] \\
 & + \frac{dt}{dz} L_{i,j} \left[T_{i,j+1/2}^k - T_{i,j-1/2}^k \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.3.6}$$

$$\Sigma_{i+1/2,j}^{k+1} = \Sigma_{i+1/2,j}^k + \frac{dt}{dx} M_{i+1/2,j} \left[V_{i+1,j}^{k+1/2} - V_{i,j}^{k+1/2} \right]$$

$$T_{i,j+1/2}^{k+1} = T_{i,j+1/2}^k + \frac{dt}{dz} M_{i,j+1/2} \left[V_{i,j+1}^{k+1/2} - V_{i,j}^{k+1/2} \right]$$

où k est l'indice en temps, i l'indice suivant l'axe x et j l'indice suivant l'axe z . dt est le pas de discrétisation en temps, dx suivant l'axe x et dz suivant l'axe z . dx et dz seront égaux dans les applications. La vitesse numérique V au temps $(k+1/2)dt$ et la contrainte (Σ , T) au temps $(k+1)dt$ sont calculées explicitement à partir des vitesses au temps $(k-1/2)dt$ et des contraintes au temps kdt . L représente la discrétisation numérique de la légèreté dans le milieu et M la discrétisation numérique du module de cisaillement. Il faut souligner qu'à chaque composante de la contrainte correspond une valeur du module de cisaillement, permettant une extension possible vers le milieu anisotrope.

L'étude numérique de ce schéma est compliquée. Dans le cas où le milieu est un milieu homogène, cette étude constitue un chapitre classique des livres sur les méthodes numériques, qui abordent d'une manière ou d'une autre l'équation d'onde scalaire, comme on le voit chez Marchouk (1975), Alford et al (1974) ou Joly et Lailly (1985). Une étude numérique plus complète sera effectuée sur le cas 2-D P-SV, car elle présentera des résultats nouveaux par rapport aux résultats classiques de l'analyse numérique. Rappelons toutefois la condition nécessaire et suffisante de stabilité numérique dans un milieu homogène :

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3.3.7)$$

où c est la vitesse dans le milieu. Pour un milieu hétérogène, cette condition se généralise pour donner une condition suffisante. On considère que la vitesse c est la vitesse maximum rencontrée dans le milieu. L'hétérogénéité empêche l'étude en transformée de Fourier qui montre que la condition 3.3.7 est également une condition nécessaire.

3.3.4 : Problème du quart-plan

Le problème du quart-plan constitue un cas particulier du problème du coin où l'angle entre les deux bords est de 90° . Ce problème dans le cas du cisaillement horizontal, qui correspond à un champ scalaire, a reçu l'attention de différents auteurs. Plusieurs méthodes ont été développées pour le résoudre analytiquement. Le changement en coordonnées polaires avec un développement du champ sur les fonctions propres associées (Tolstoy, 1973, p 339), la technique de Wiener-Hopf (Achenbach, 1975, p 365) et la théorie des images (Wait, 1959, p 13) sont les méthodes possibles pour mettre en évidence les composantes incidentes, réfléchies et diffractées du champ. Une contribution récente a été faite par Sanchez-Sesma (1985), pour appréhender une source impulsive en la développant sur les fonctions propres de la géométrie considérée. Comme nous nous intéressons au cas du quart-plan, la méthode la plus élégante et la plus rapide me paraît être la théorie des images.

En effet, une source à l'intérieur du milieu a trois images virtuelles, comme le montre la figure 3.3.b. Deux images S_x et S_z sont symétriques par rapport aux bords. La troisième image S_c est le symétrique de la source par rapport au coin. Les images sont introduites pour vérifier les conditions aux limites. Ainsi l'image S_x est là pour assurer la condition sur le bord suivant l'axe x , mais cette image perturbe la condition sur le bord suivant l'axe z : il faut alors introduire l'image S_c supplémentaire pour vérifier la condition sur le bord suivant l'axe z , pour l'image S_x . L'image S_z assure la condition sur le bord suivant l'axe z de la source réelle S . Par chance, l'image S_c sert aussi à assurer la condition sur le bord suivant l'axe x de l'image S_z . Nous voyons ainsi que trois images et seulement trois

sont générées, pour un angle de 90° . Comme l'a indiqué Wait, seuls les multiples de 30° fournissent un nombre fini d'images.

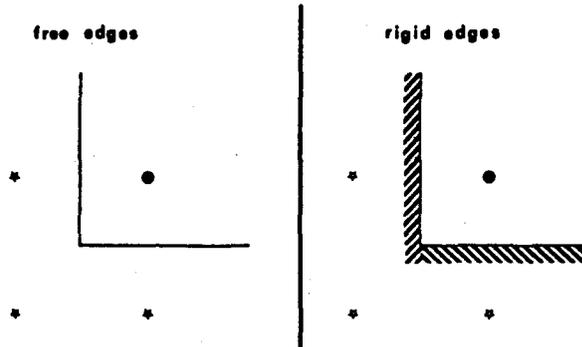


Figure 3.3.b : La géométrie du quart-plan avec une interprétation en termes d'images pour les bords libres (à gauche) et pour les bords rigides (à droite).

Pour deux bords libres, les trois images sont en phase avec la source réelle (figure 3.3.b). Pour deux bords fixes, les deux images S_x et S_z sont en opposition de phase avec la source, tandis que l'image S_c est en phase (figure 3.3.b). Pour des conditions mixtes, les déphasages seront différents. Retenons que, dans les deux cas envisagés, l'image S_c est toujours en phase.

Pour une source ponctuelle au point $S(x_S, z_S)$ avec une fonction temporelle $f(t_S)$, la solution au point $M(x, z)$ s'écrit comme la somme de quatre termes :

$$\begin{array}{ll}
 G(x, z, t ; x_S, z_S, t_S) * f(t_S) & \text{onde incidente} \\
 \pm G(x, z, t ; -x_S, z_S, t_S) * f(t_S) & \text{onde réfléchie sur bord } x \\
 \pm G(x, z, t ; x_S, -z_S, t_S) * f(t_S) & \text{onde réfléchie sur bord } z \\
 + G(x, z, t ; -x_S, -z_S, t_S) * f(t_S) & \text{onde réfléchie sur le coin}
 \end{array}$$

où $G(x, z, t ; x_S, z_S, t_S)$ est la fonction de Green pour un milieu infini que l'on peut trouver dans Morse et Feshbach (1953, p 842) :

$$\frac{H(t - t_S - \frac{r}{c})}{\sqrt{(t - t_S)^2 - \frac{r^2}{c^2}}}, \quad (3.3.8)$$

avec $r^2 = (x - x_S)^2 + (z - z_S)^2$ et c comme vitesse.

Pour deux bords libres, le signe est +, puisque toutes les images sont en phase. Pour les bords fixes, le signe est -, puisque les images des bords sont en opposition de phase (figure 3.3.b).

La convolution R avec une fonction source temporelle $f(t)$ causale s'écrit pour l'onde incidente :

$$t \leq t_s + \frac{r}{c} \quad R(x,z,t; x_s, z_s) = 0$$

et

(3.3.9)

$$t \geq t_s + \frac{r}{c} \quad R(x,z,t; x_s, z_s) = \int_0^{t - \frac{r}{c}} f(t_s) \frac{dt_s}{\sqrt{(t-t_s)^2 - \frac{r^2}{c^2}}}$$

Par un changement de variable, on peut éliminer la singularité intégrable de la fonction sous le signe somme. On obtient avec la nouvelle variable u définie par :

$$t - t_s = \frac{r}{c} \operatorname{ch}(u) \quad (3.3.10)$$

l'intégrale suivante :

$$t \geq t_s + \frac{r}{c} \quad R(x,z,t; x_s, z_s, t_s) = \int_0^{\operatorname{argch}\left(\frac{ct}{r}\right)} f\left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch}(u)\right) du. \quad (3.3.11)$$

La méthode de Romberg peut calculer cette intégrale en spécifiant l'erreur cherchée. On évalue donc de façon analytique la solution dans un espace

homogène pour une ligne source : elle sera utilisée dans la simulation d'Alterman et Karal de la source.

Physical parameters	
Velocity	Source
3 000 m/s	$t_0 = 0.20$ s $\alpha = 1\ 000$ (half-wavelength = 300 m)
Source position	Observer position
615×615 m ²	255×615 m ²
Numerical parameters	
$dx = 30$ m, $dt = 1.25E-3$ s, grid of 60×60 points	

Tableau 3.3.c : Divers paramètres pour le modèle du quart-plan.

La propagation est modélisée suivant la méthode numérique décrite précédemment. Le tableau 3.3.c donne les valeurs des paramètres physiques et numériques employés. Nous voyons que la règle d'or de 10 points par longueur d'onde est respectée comme cela doit être le cas pour tous les schémas d'ordre deux (Alford et al, 1974). La dimension finie de la grille introduit deux frontières supplémentaires où des conditions d'absorption pour une onde plane sont appliquées.

Les résultats sont représentés sous deux formes. Des bloc-diagrammes montrent le milieu à différents instants : la figure 3.3.d concerne les bords libres et la figure 3.3.e les bords rigides. Le premier instantané montre l'onde incidente. Le deuxième les ondes réfléchies sur les bords avec leurs phases typiques suivant le cas considéré. Sur le troisième, on voit apparaître l'onde venant du coin qui est en phase avec

l'onde incidente dans les deux cas.

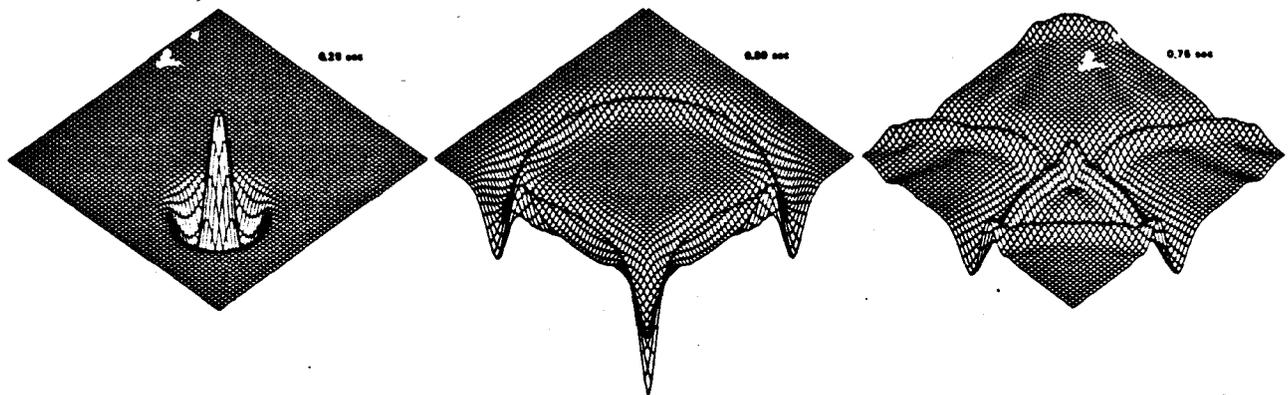


Figure 3.3.d : Représentation en bloc-diagramme du milieu à différents temps pour des bords libres.

Notons les réflexions parasites sur les deux bords supplémentaires introduits par notre grille numérique finie. La deuxième forme de représentation sont les sismogrammes. Ceux-ci permettent une comparaison plus quantitative avec la solution analytique présentée plus haut. La figure 3.3.f montre les trois réflexions en phase suivant l'onde incidente. Ce qui correspond au cas des bords libres. La figure 3.3.g montre deux réflexions en opposition de phase et la dernière en phase avec l'onde incidente que l'on voit au début du sismogramme. Ce qui correspond au cas des bords rigides.

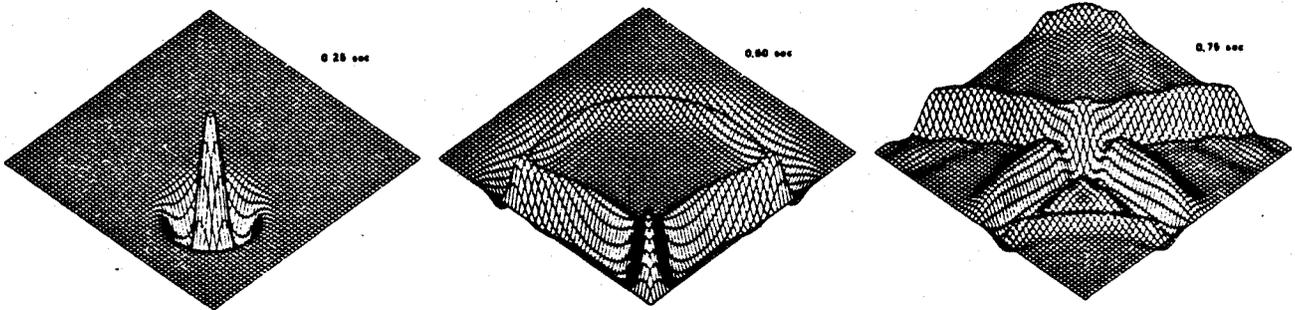


Figure 3.3.e : Représentation en bloc-diagramme du milieu à différents temps pour des bords rigides.

Comme l'a proposé Smith (1974), nous pouvons éliminer les réflexions parasites, en nous servant des déphasages des réflexions réelles sur les bords libres et rigides. Du fait de l'opposition de phase entre les réflexions sur ces deux types d'interface, la sommation des résultats pour deux modèles, où le bord considéré est libre puis rigide, éliminera la réflexion venant de ce bord. Pour notre géométrie du quart-plan, il faudra résoudre quatre problèmes avec différentes combinaisons de conditions aux limites sur les deux bords supplémentaires. D'autres conditions, moins précises mais moins coûteuses, sont souvent suffisantes, comme les conditions B2 et B3 de Clayton et Engquist (1980) ou toutes autres conditions décrites par Halpern (1980) ou d'autres.

Avant de passer à un exemple plus compliqué, je tiens à souligner qu'à partir des bloc-diagrammes une première animation a été effectuée illustrant les différents traits de la propagation au sein d'un milieu : la décroissance géométrique de la solution dans un milieu infini à partir d'une

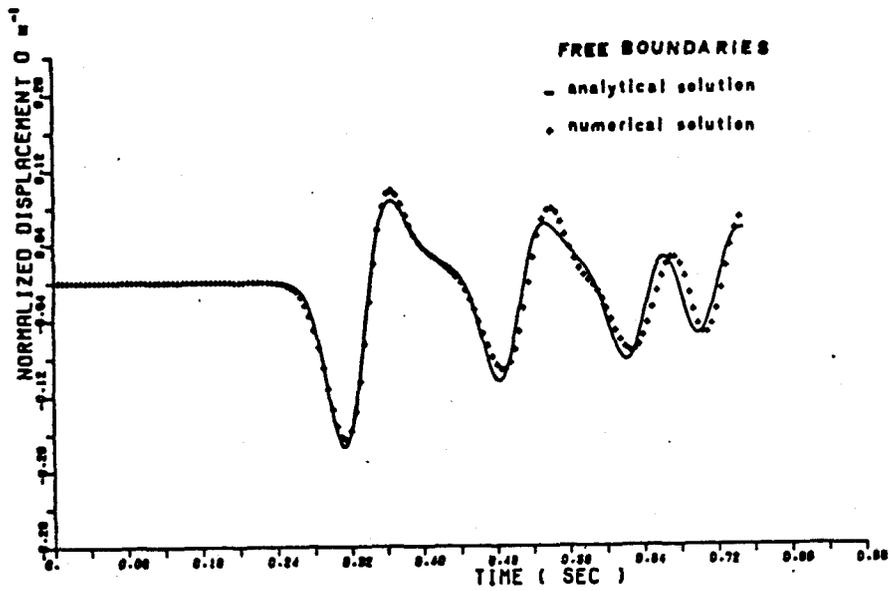


Figure 3.3.f : Un sismogramme à une station (voir tableau 3.3.c), pour des bords libres. Remarquer les trois réflexions en phase.

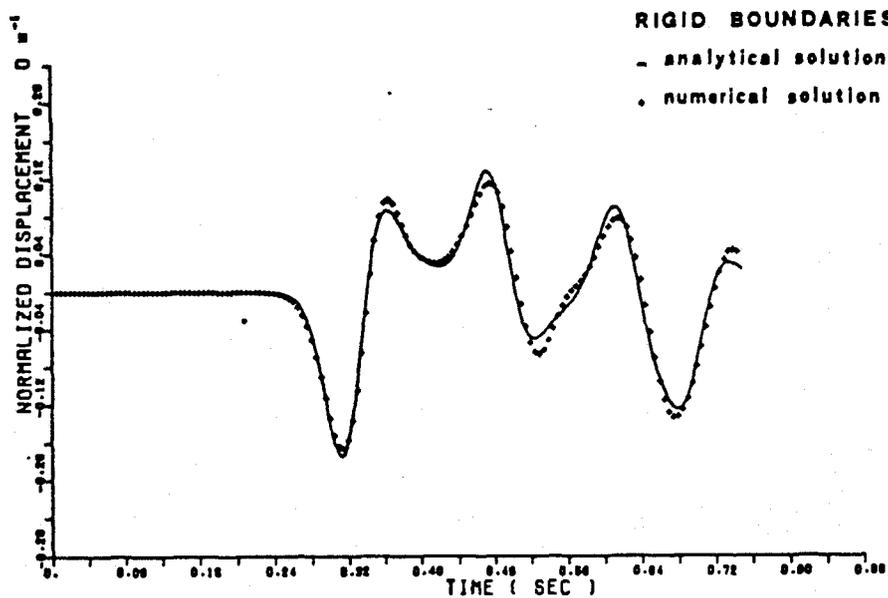


Figure 3.3.g : Un sismogramme à une station (voir tableau 3.3.c), pour des bords fixes. Remarquer les deux réflexions en opposition de phase et la réflexion du coin en phase.

source ponctuelle, le principe de superposition des solutions provenant de deux sources, les trois images d'une source sur un coin et, enfin, les oscillations dans un milieu fini non-dispersif. Pour ce dernier cas, une différence fondamentale existe entre le continuum et sa forme discrétisée. Pour le continuum, la théorie des images nous garantit qu'il n'y aura pas de périodicité dans ces oscillations, alors que sa forme discrétisée, du fait du nombre fini de points, a un nombre fini d'états propres, entraînant une périodicité dans la solution. Cette transition viendrait de la dégénérescence des images dès que leur écart devient inférieur au pas de la grille. Cette animation sur un film 35mm s'est effectuée à EDF - études et recherche -, département de mécanique sous la direction de Yves Bamberger. La réalisation a été faite par Alain Longuet du centre audiovisuel de l'Ecole Polytechnique, et sa diffusion assurée par Imagiciel, sous la forme de cassette vidéo et d'une brochure associée. Sans l'aide d'Alain Bamberger, ce document pédagogique n'aurait pas vu le jour.

3.3.5 : Problème du bassin sédimentaire.

Parmi les nombreux modèles hétérogènes que nous pouvons construire, un modèle est apparu comme un cas test, un cas canonique comme on aimerait en avoir plus, modélisé par différentes méthodes numériques ou asymptotiques. Ce modèle est celui d'un bassin sédimentaire faiblement consolidé au-dessus d'un demi-espace, proposé par Aki et Larner (1978) comme une application de la méthode DWN décrite dans l'introduction. On ne s'étonnera pas que la géométrie soit parfaitement adaptée à cette méthode dont les résultats obtenus par Bard et Bouchon (1980a) serviront de référence. L'interface est définie par les équations suivantes :

$$z(x) = D + \frac{C}{2} \left[1 - \cos \frac{2\pi(x-0.5 w)}{w} \right], \text{ pour } -\frac{w}{2} < x < \frac{w}{2},$$

et (3.3.12)

$z(x) = D$ partout ailleurs.

Ce qui donne la figure 3.3.h. Les trois paramètres sont $w = 50$ km, $D = 1$ km et $C = 5$ km. Les sédiments ont une masse volumique $\rho_s = 2.0$ g/cm³ et une vitesse $v_s = 0.7$ km/s. Le demi-espace a une densité $\rho = 3.3$ g/cm³ et une vitesse $v = 3.5$ km/s.

Une onde plane incidente de cisaillement se propage verticalement vers le haut à partir du demi-espace. Sa fonction source a la forme d'un "Ricker" défini dans un paragraphe précédent avec $t_s = 20$ s et $t_p = 18.3$ s. Nous voyons que c'est une source basse fréquence, limite pour les méthodes asymptotiques comme la théorie des rais. Toutefois la

comparaison sera possible entre les méthodes asymptotiques haute fréquence et les méthodes DF et EF basse fréquence avec la méthode DWN à des fréquences intermédiaires. Pour simuler cette onde plane incidente, nous utilisons des conditions de symétrie pour les jeux bords verticaux, ce qui équivaut à des conditions de contrainte nulle. Nous appliquons la condition radiative d'une onde plane au bord du fond. L'onde plane incidente sera complètement absorbée sur ce bord, nous permettant de l'introduire juste en-dessous du bassin, comme le montre la figure 3.3.h.

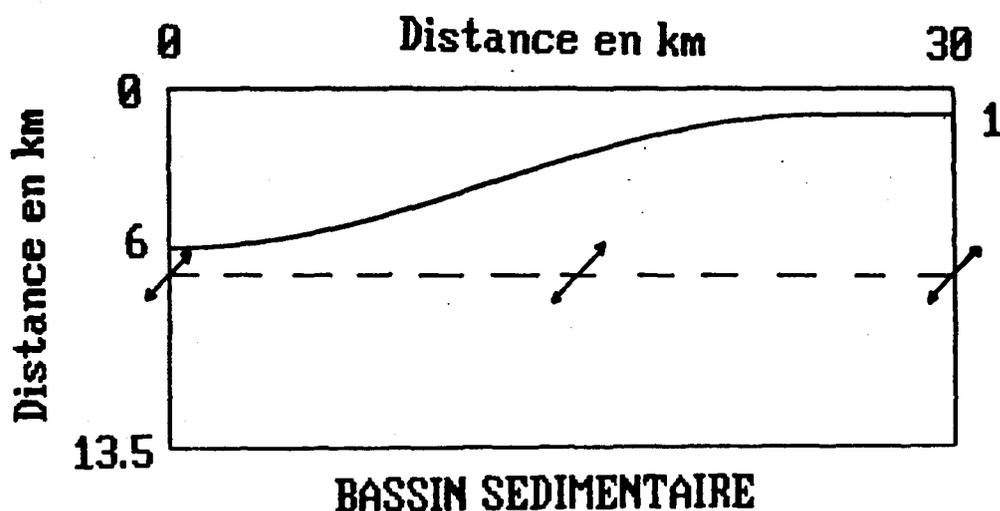


Figure 3.3.h : La géométrie du bassin sédimentaire, avec la ligne des sources l'attaquant à sa base.

Comme les réflexions sur le fond du bassin sont presque verticales, les réflexions parasites de ces réflexions provenant des bords latéraux non-absorbants sont peu réfléchies par le bord du fond. De plus une partie très faible de ces résidus repassera dans le bassin après cet aller-retour. Nous pouvons donc négliger complètement les propagations dans le demi-espace, une fois que le bassin a été excité. Ce qui nous permet de calculer des sismogrammes sur une période de temps plus longue que tous les calculs

précédemment effectués en DF et EF, en dépit du fort contraste de vitesse entre le bassin et le demi-espace. Bien sûr, de l'énergie sera constamment réémise dans le demi-espace et causera la diminution progressive de l'amplitude du signal au cours du temps.

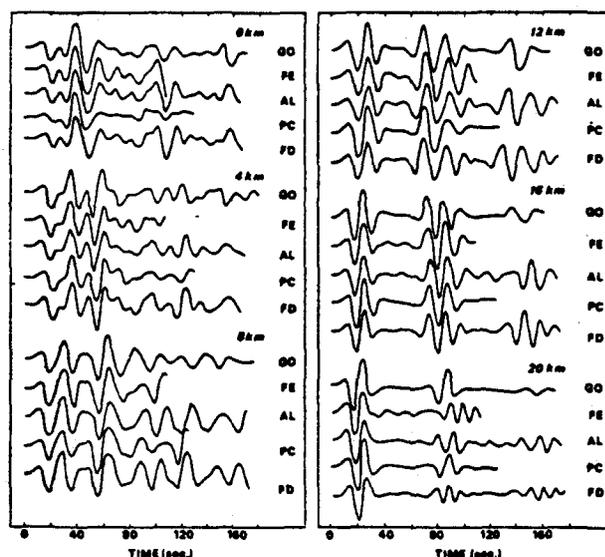


Figure 3.3.i : Sismogrammes en six stations différentes au-dessus du bassin sédimentaire. Les cinq traces viennent de méthodes différentes.

La figure 3.3.i montre les sismogrammes en six stations, partant du centre du bassin avec un pas de 4 km. Pour chaque station, cinq traces sont calculées. La première trace est calculée par la "Glorified Optics" (GO) de Hong et HelMBERGER (1978). La seconde est le résultat d'un calcul par éléments finis (voir Hong et HelMBERGER, 1978). La troisième trace est celle de la théorie DWN, parfois appelée AL comme sur la figure 3.3.i du nom des premiers auteurs l'ayant introduite en sismologie. Le calcul a été effectué par Bard et Bouchon (1980a), qui ont développé fortement cette technique à Grenoble, ainsi que Campillo et Bouchon (1985). La quatrième

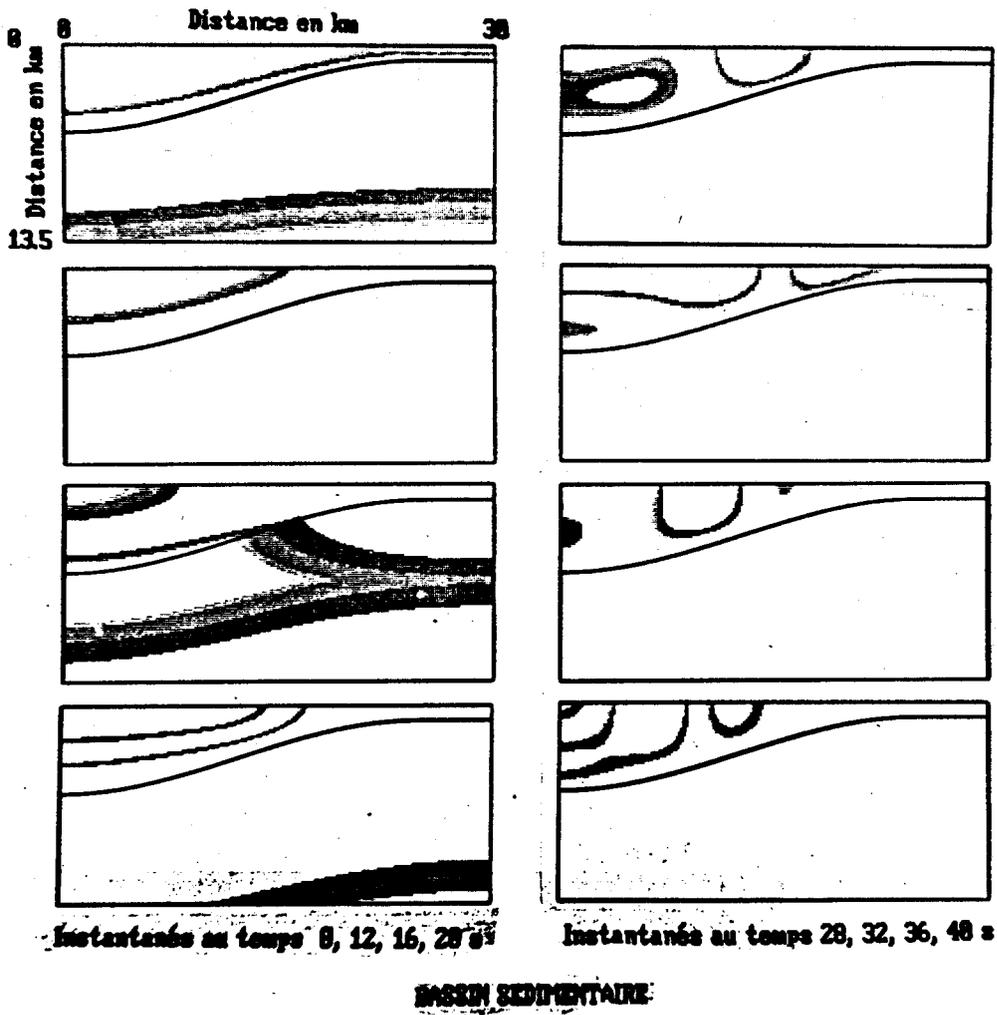


Figure 3.3.j : Différents instantanés pour le bassin sédimentaire, montrant les oscillations latérales et verticales.

trace est calculée par une méthode asymptotique appelée "Principal curvature" (PC) par ses auteurs, Lee et Langston (1983). La cinquième trace est le résultat du calcul par différences finies, qui vient tout naturellement en dernier. La figure montre un accord global entre toutes ces méthodes. Ce qui est déjà un résultat logique et encourageant. Nous pouvons souligner l'accord plus fin entre les méthodes DWN et DF. Pour la méthode DF, le troisième train d'énergie arrive un peu en avance par rapport à celui obtenu par la méthode DWN. Ce léger décalage vient de notre délocalisation de l'interface à un pas de grille près, qui est de 150 m. Un accord meilleur aurait été obtenu avec une grille plus fine.

Un aspect positif des méthodes spatio-temporelles est de pouvoir suivre les fronts d'onde lors de leur propagation dans le milieu. Ainsi les différents clichés, obtenus à des différents temps dans la figure 3.3.j, montrent l'onde plane incidente émise du demi-espace, réfractée dans le bassin. L'énergie transmise fait osciller le bassin suivant les deux longueurs caractéristiques que sont la longueur et la profondeur. Des "battements" interviennent entre les grandes oscillations horizontales et les oscillations verticales plus rapides, mais plus molles. Ces battements, d'une description plus compliquée à cause de la forme en cosinus de l'interface, expliquent pourquoi le troisième train d'onde (figure 3.3.i), important en surface aux stations 12 km, 16 km et 20 km, disparaît à la station 4 km, car l'énergie se trouve être précisément distribuée en profondeur : l'onde racle le fond du bassin, si bien que son amplitude est faible à la surface libre (figure 3.3.j).

Cette comparaison entre des techniques de résolution totalement différentes nous donne confiance dans les résultats de la formulation

implicite des interfaces, à basse fréquence. A haute fréquence, les détails de la discrétisation de l'interface seront observés sur les enregistrements et les méthodes numériques non valables : la sommation des diffractions des noeuds du maillage ne reformerait ni les fronts d'onde incidente, réfléchi et réfracté que nous attendons. C'est un problème inhérent à la discrétisation numérique.

Fort de cette comparaison, abordons le cas d'un milieu plus complexe de par la structure des fronts d'onde qu'il engendre mais dont la géométrie encore simple permettra une interprétation des dits fronts d'onde.

3.3.6 : Problème du dôme de sel à parois verticales.

Grâce à leur résolution dans l'espace et dans le temps, les méthodes de différences finies semblent bien appropriées pour résoudre des problèmes de propagation dans des milieux hétérogènes où des changements abrupts apparaissent comme des failles. Le coin étudié par Alford et al (1974) est un cas très simple de ce changement brutal. De manière à approcher une structure plus réaliste, je considère un dôme de sel simplifié à parois verticales. Des profils sismiques pourront être ainsi synthétisés et interprétés, notamment les phases de réflexion et de diffraction arrivant à la surface, dans un intervalle d'offsets caractéristiques de la sismique-réflexion.

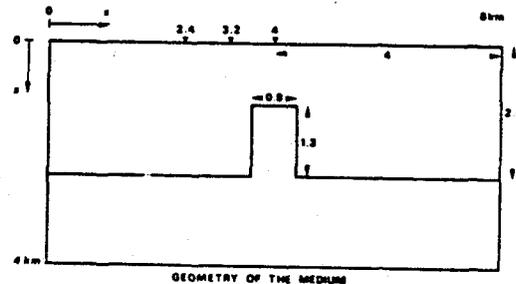


Figure 3.3.k : La géométrie du dôme de sel à parois verticales, modélisé par différences finies.

Le milieu se compose de deux couches. Une intrusion du milieu inférieur dans le milieu supérieur s'effectue sous la forme d'un dôme rectangulaire. Les vitesses sont de 2 500 m/s pour le milieu supérieur et de 4 500 m/s pour le milieu inférieur. Les densités sont prises sensiblement égales. La géométrie précise est décrite dans la figure 3.3.k. La distance entre le haut du dôme et la surface de la Terre est légèrement supérieure à la moitié de la distance entre la surface de la Terre et l'interface horizontale. Deux ondes de type différent arriveront presque en même temps à la surface, avec toutefois des différences dans la forme des hyperboles de réflexion.

Cette géométrie simplifiée est faite de la superposition de deux coins à 90° et de deux coins à 270° . La première structure n'entraîne que des réflexions, tandis que la deuxième fait naître des diffractions. Tolstoy (1973, chap 8) décompose, pour un angle quelconque θ , la partie perturbée du champ en une partie réfléchie pouvant s'expliquer par la théorie des images et une partie diffractée qui semble émise par le coin. Cette interprétation servira de base à la construction de différents fronts pour les instants considérés dans nos différentes configurations.

La source impulsive choisie d'une longueur d'onde de 400 m est celle d'Alford et al (1974), qui est la dérivée d'une gaussienne comme indiqué plus haut. Son principal avantage est un signal impulsif de durée assez courte avec une partie positive et une partie négative, parfaitement adapté au suivi des fronts d'onde visualisés comme la frontière entre les parties positives et négatives du signal. Je considère trois positions de tir, illuminant plus ou moins les parois verticales et entraînant une propagation latérale plus ou moins forte qui nous intéresse ici particulièrement. A partir du bord gauche pris comme origine, les positions

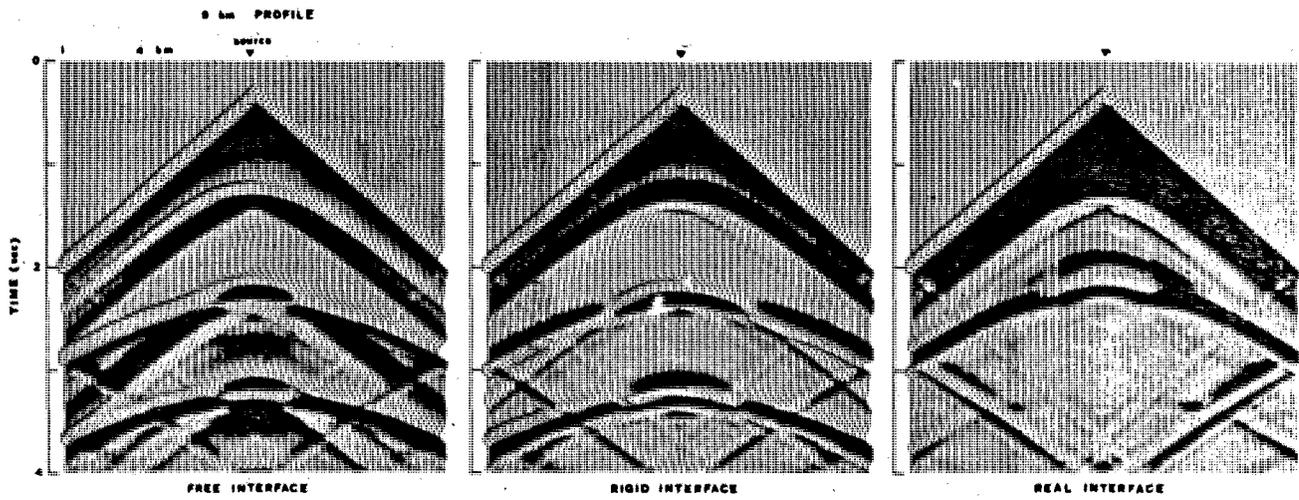


Figure 3.3.l : Profils sismiques pour une source au-dessus d'un dôme avec un offset de 4 km.

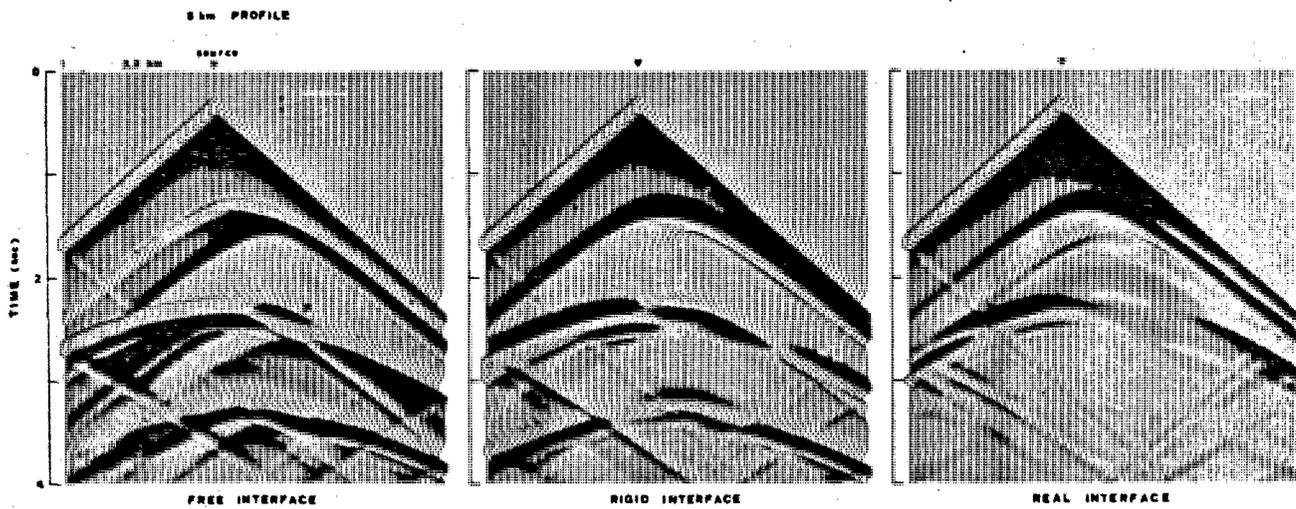


Figure 3.3.m : Profils sismiques pour une source au-dessus d'un dôme avec un offset de 3.2 km.

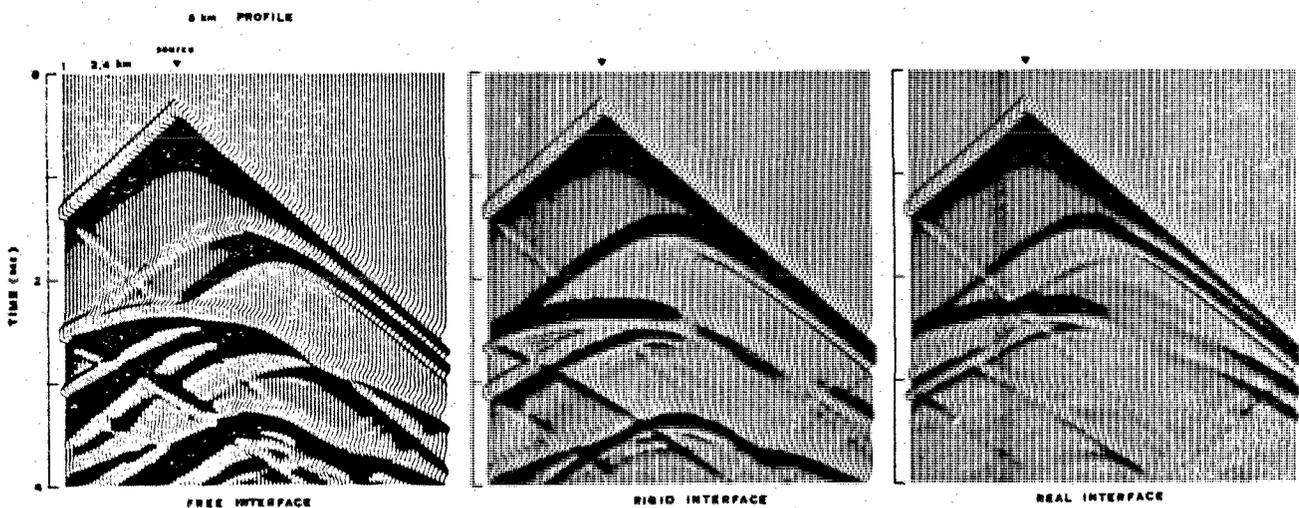


Figure 3.3.n : Profils sismiques pour une source au-dessus d'un dôme avec un offset de 2.4 km.

presentation en mode raster.

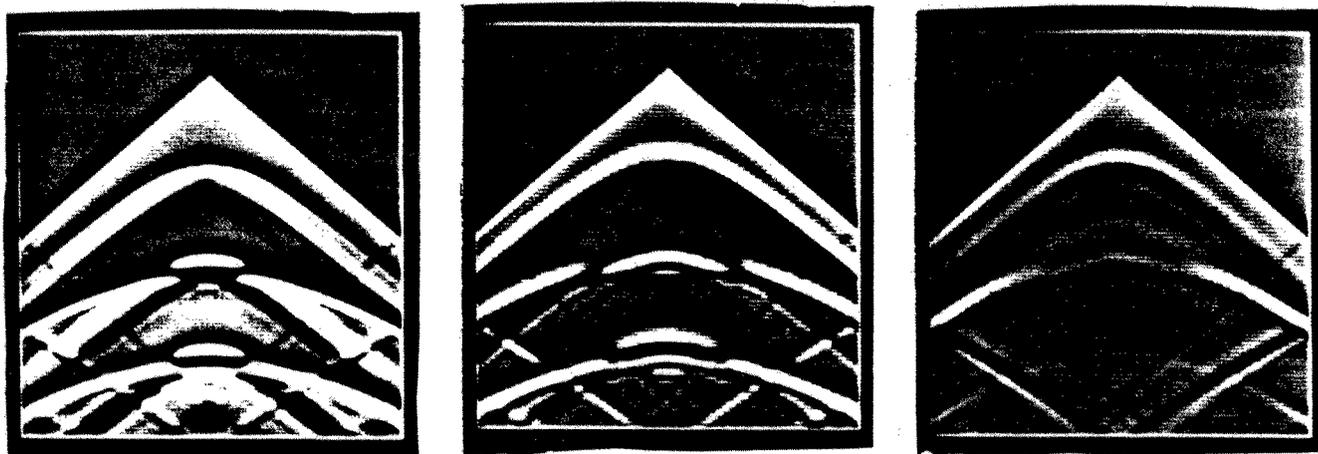


Figure 3.3.l : Profils sismiques pour une source au-dessus d'un dôme avec un offset de 4 km.



Figure 3.3.m : Profils sismiques pour une source au-dessus d'un dôme avec un offset de 3.2 km.



Figure 3.3.n : Profils sismiques pour une source au-dessus d'un dôme avec un offset de 2.4 km.

de tir sont respectivement 4 km, 3.3 km, 2.4 km. J'applique aux bords verticaux et au bord du fond les conditions d'absorption, i.e. les conditions radiatives pour une onde plane.

En faisant varier les paramètres physiques du milieu inférieur, je définis trois types d'interfaces : l'interface libre, en égalant à zéro le module de cisaillement ; l'interface rigide, en égalant à zéro la légèreté (ce qui montre l'intérêt de cette grandeur par rapport à la masse volumique qui aurait été infinie) ; et, enfin, l'interface réel. Les deux interfaces fictives - libre et rigide - sont caractérisées par une vitesse nulle du milieu inférieur, interdisant toute pénétration de ce milieu par des ondes. Sur les figures 3.3.l, 3.3.m et 3.3.n, les profils sismiques sont représentés avec une saturation de $1/20$ pour une longueur de 8 km et une durée de 4 secondes. Cette saturation signifie que l'on a divisé la valeur absolue maximum rencontrée par 20 avant de dessiner. L'amplitude de la trace débordera sur le nombre de traces spécifié quand on atteindra $1/20$ des valeurs extrêmes réelles. Les phases de faible énergie pourront ainsi être observées. On obtient ainsi l'ensemble des profils de la planche des figures 3.3.l, 3.3.m et 3.3.n.

Je tiens à mettre l'accent sur la représentation des résultats des simulations. La propagation globale des ondes dans des milieux complexes nécessitent l'utilisation d'outils graphiques élaborés. Pour ma part, j'en ai utilisé trois. Le premier outil est la représentation classique déjà citée. La deuxième est la représentation raster (ou point) sur 512 fois 512 avec une table de gris de 256 niveaux. L'avantage évident est de symétriser la partie positive du signal par rapport à la partie négative : ce qui n'est pas le cas de la représentation classique, qui souligne les parties

positives, comme le montre la comparaison des deux planches des figures 3.3.l, 3.3.m et 3.3.n. De plus l'utilisation d'écrans graphiques sophistiqués permet de localiser un niveau de gris particulier et de le faire ressortir du fond, ainsi que d'autres transformations associées aux traitements des images.

Le troisième outil utilisé est l'ajout de la dimension temporelle par un film comportant plusieurs séquences de 1 000 images pour une durée de simulation de 2 secondes : ce qui permet de suivre les fronts d'onde et de se rendre compte comment apparaissent et quand arrivent les phases énergétiques à la surface de la Terre. Ce film a été réalisé avec des moyens amateurs (et donc peu coûteux) du cinéma : caméra Super8, projecteur Super8. De plus, comme aucune information n'est stockée, cette technique n'entraîne qu'un très faible encombrement sur les supports de mémoire extérieure : l'économie ainsi réalisée est tout à fait primordiale du point de vue informatique, étant donné que l'information animée, quant à elle, exige énormément de place en mémoire (1 Gmots nécessaire pour l'animation réalisée). L'avènement des vidéo-disques est un moyen de résoudre cette difficulté. Dans mon cas, le seul facteur limitant est le temps que l'on met à créer une image, au cours de la simulation. Si, pour une raison ou une autre, l'animation est ratée, il faut tout recommencer, car aucun résultat n'a été stocké sur mémoire extérieure : c'est le revers de la médaille pour cette méthode d'animation très peu chère, qui ne peut donc pas être élevée au niveau professionnel.

Après cette digression sur les moyens nécessaires à l'interprétation des profils sismiques synthétiques, je vais m'attacher, sur l'exemple simple traité, à souligner les arrivées d'énergie forte et celles qui sont

typiques d'une propagation latérale, pour la géométrie concernée.

4 km source : cas symétrique.

La figure 3.3.1 décrit le cas d'une source émettant juste au-dessus du dôme, ce qui correspond à un offset de 4 km : les profils sismiques sont donc symétriques. Après l'onde incidente, qui a la forme d'un U renversé, trois groupes d'arrivée sont aisément reconnaissables. Dans l'interprétation des profils, j'ignorerai les réflexions parasites que l'on peut observer sur les bords latéraux du modèle. Désignons par une lettre les fronts d'onde susceptibles d'être enregistrés à la surface de la Terre. Considérons les trois types d'interface et interprétons les profils associés.

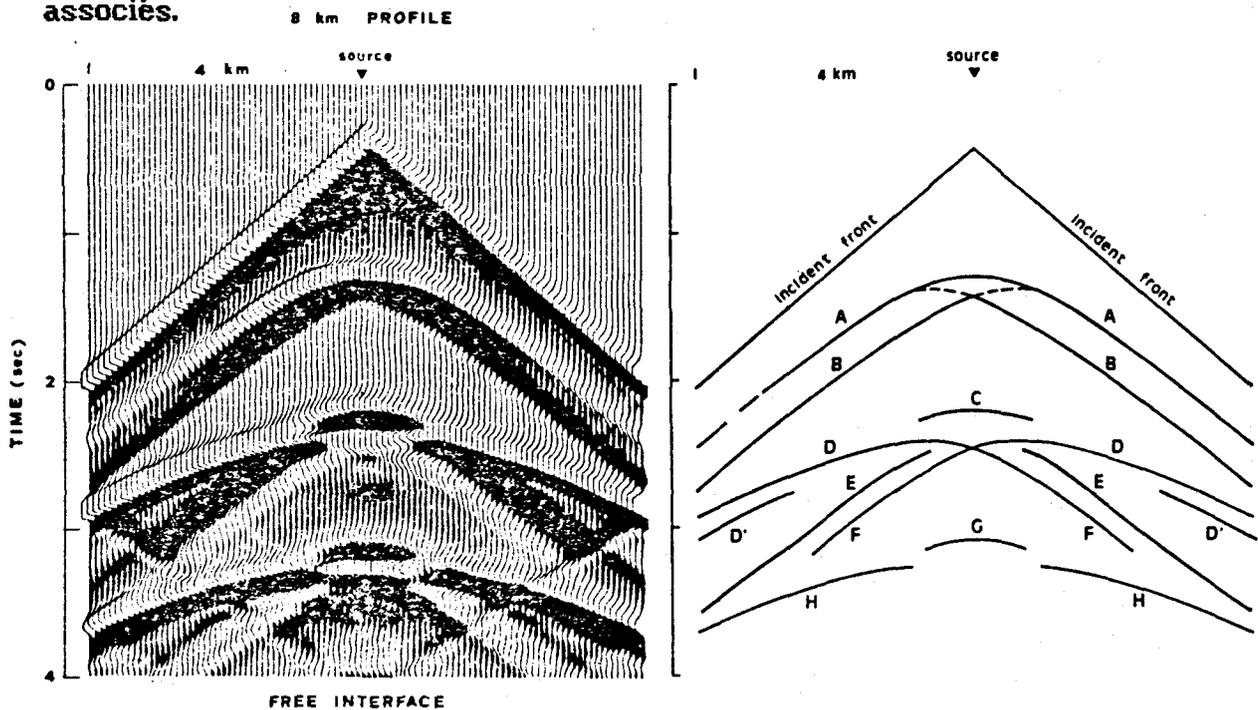


Figure 3.3.0 : Analyse du profil à interface libre en fonction des phases A, B, C, D, D', E et F.

Interface libre - Le premier profil est caractérisé par des réflexions en phase avec l'onde incidente. Le premier profil de la figure 3.3.l est interprété dans la figure 3.3.o en fonction des phases arrivant à la surface de la Terre. La figure 3.3.p schématise les fronts d'onde à un instant donné dans le milieu supérieur, sans tenir compte de la surface libre.

Le premier groupe d'arrivée est formé de la réflexion de l'onde incidente sur le toit du dôme et des ses diffractions par les coins supérieurs du dôme. Dans la direction de propagation des fronts par rapport aux coins, la diffraction, appelée phase A, est en phase avec l'onde incidente, tandis que, dans la direction rétrograde, la diffraction, appelée phase B, est en opposition de phase par rapport à l'onde incidente.

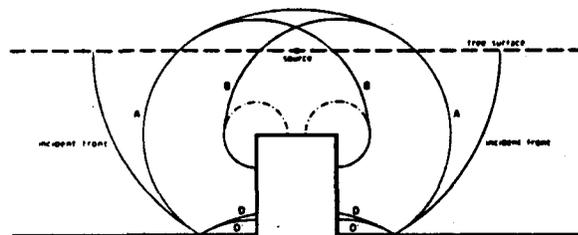


Figure 3.3.p : Interprétation schématique des réflexions primaires et des fronts diffractés. La surface libre, en ligne discontinue, est ignorée dans cette étape.

Ce déphasage a été expliqué par Tolstoy (1973, chap 8). La figure 3.3.p

montre ces deux phases A et B. J'ai rajouté, en pointillé, les deux diffractions des diffractions B sur l'autre coin respectif. En effet, ces phases sont à peine visibles sur les sismogrammes et ne seront donc pas étudiées plus à fond. Nous verrons que, pour une dôme trapézoïdal, leur amplitude sera plus importante.

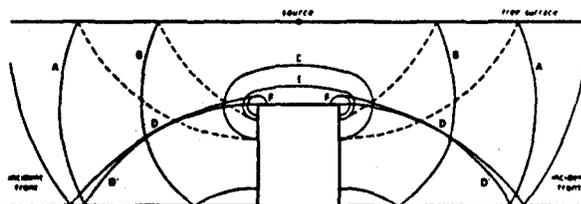


Figure 3.3.q : Interprétation schématique des fronts multi-réfléchis et diffractés.

Le deuxième groupe contient un ensemble de premières arrivées, mais aussi des arrivées secondaires des fronts du premier groupe. Son analyse est donc plus délicate comme le montre la figure 3.3.1. J'en donne une interprétation schématique en ce qui concerne les fronts d'onde dans la figure 3.3.q. La phase A est de nouveau réfléchié par le haut du dôme, donnant la phase C forte au-dessus du dôme. Derrière cette phase arrive la réflexion, nommée phase D, sur l'interface horizontale de l'onde incidente. Masquée par cette phase, la phase D', réflexion de la phase A, manque sur les profils, excepté, peut-être, sur les bords. La phase B est aussi réfléchié sur l'interface horizontale, donnant la phase E avec sa signature

noire dûe au changement de phase. La diffraction, appelée phase F, de la phase D suit immédiatement derrière.

Enfin, le troisième groupe contient essentiellement la réflexion de la phase C, - qui est la double réflexion de la phase A sur le toit du dôme -, et la réflexion de la phase B sur l'interface horizontale, après qu'elle a été réfléchi à la surface libre. Ceci termine ma description du profil symétrique à interface libre, qui me servira de base pour l'explication des autres profils.

Interface rigide - Le deuxième profil est caractérisé par des réflexions en opposition de phase par rapport à l'onde incidente (figure 3.3.1). L'interprétation est analogue à celle donnée pour un interface libre, en tenant compte de ce décalage de phase. Bien sûr, les doubles réflexions se retrouveront en phase avec l'onde incidente, permettant de mieux comprendre le troisième groupe d'arrivées du profil avec une interface libre. La seule différence est une phase B relativement faible, en raison du déphasage. Son interprétation est laissée à un paragraphe suivant.

Interface réelle - Le troisième profil (figure 3.3.1) est caractérisé par des réflexions plus faibles, car une partie de l'énergie est transportée au loin par les ondes réfractées. Ces réflexions peuvent toutefois être observées en surface. Aucune interprétation précise n'est donnée dans ce cas symétrique, car les aspects intéressants de la propagation latérale ne s'y trouvent pas développés.

3.3 km source : cas intermédiaire.

La figure 3.3.m montre les trois profils obtenus quand la source est légèrement décalée par rapport au dôme. Son offset est alors de 3.3 km. Un des murs verticaux commence à être éclairé. Cette figure sert de transition vers un cas plus asymétrique où les caractères de propagation latérale sont bien développés.

2.4 km source : cas asymétrique.

La figure 3.3.n met en valeur les profils obtenus quand un mur vertical est bien éclairé par la source dont l'offset est 2.4 km. La propagation latérale pourra être observée d'une manière ou d'une autre à la surface de la Terre. Trois groupes d'arrivées peuvent encore être observés. Toutefois, l'interprétation dépendra de quel côté du dôme on se trouve.

Interface libre - Ce profil met fortement en lumière les aspects de propagation latérale. Le premier groupe contient toujours les phases A et B, avec leur signature typique. Les offsets horizontaux sont dus à la position relative de la source et du toit du dôme.

Dans le deuxième groupe, la phase C est observée avec un offset horizontal croissant, diminuant fortement l'énergie deux fois réfléchi sur le toit du dôme. La phase D, la réflexion de l'onde incidente sur l'interface horizontale, apparaît principalement sur le côté du dôme où se trouve la source, masquant encore la phase D'. La phase B du premier groupe perturbe légèrement cette phase D. L'interférence constructive entre les

phases A et D donne l'onde de coin, arrivant juste derrière la phase D avec une pente très prononcée. Cette onde de coin, déjà mentionnée dans le problème du quart-plan, est un aspect typique de la propagation latérale, que l'on observe du côté illuminé du dôme. La phase E arrive juste derrière avec sa signature caractéristique, deux fois présente selon le coin d'où elle provient. La phase F est trop faible pour être discernée.

Pour finir, la réflexion de la phase C, qui aurait dû appartenir au troisième groupe, est absente du profil, car son offset est trop grand. La première réflexion est simplement la réflexion de la phase D sur le toit du dôme.

Interface rigide - Je dois souligner deux traits importants dans ce profil (figure 3.3.n).

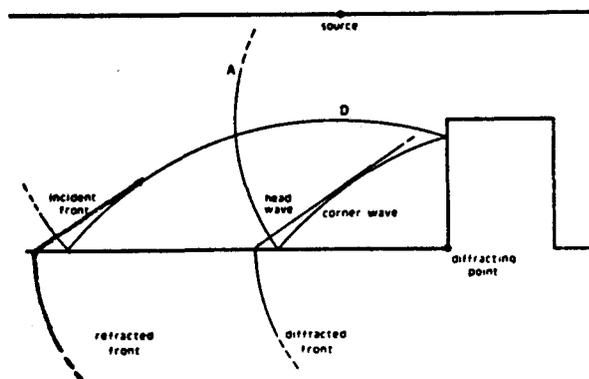


Figure 3.3.r : L'interférence constructive des phases A et D forme l'onde de coin. Pour un milieu réel, le point diffractant inférieur développe une onde cônica devant l'onde de coin.

Dans le premier groupe, la faiblesse de la phase B est expliquée de la façon suivante : la source et le coin supérieur diffractant le plus proche jouent des rôles opposés, puisqu'ils diffractent avec un déphasage par rapport à l'autre coin. Pour l'interface libre, les deux effets s'ajoutent.

Le deuxième groupe montre que l'onde coin est en phase avec l'onde incidente, alors que les phases A et D sont en opposition de phase : l'interprétation de l'interface libre est donc renforcée.

Interface réelle - Ce profil (figure 3.3.n) présente des traits analogues à ceux de l'interface rigide, mais avec une différence remarquable. Une onde de forte amplitude arrive juste avant l'onde de coin. Cette onde n'est pas observée dans les deux cas précédents où le milieu inférieur est interdit à la propagation. Cette onde est une onde cônica pour le front diffracté venant du coin inférieur du dôme, et se trouve en phase avec l'onde incidente. Elle recouvre partiellement l'onde de coin. La figure 3.3.r décrit cette onde cônica à un instant donné dans le milieu.

Pour finir ce long paragraphe, remarquons que la propagation latérale due à la géométrie du milieu entraîne deux types d'ondes : une onde de coin et une onde cônica, toutes deux pouvant apparaître pour des distances de sismique-réflexion. Toutefois, pour une géométrie complexe, ces ondes pourraient avoir été moins bien dessinées.

3.3.7 : Conclusion.

Dans cette section, nous avons montré qu'une méthode numérique en différences finies, selon une formulation hétérogène avec des différences finies centrées, permet de modéliser les ondes élastiques en cisaillement horizontal au sein d'un milieu vertical hétérogène.

Les quantités utilisées dans la discrétisation sont le vecteur vitesse et le tenseur de contrainte, associés respectivement à la légèreté, inverse de la masse volumique, et au module de cisaillement. La résolution numérique du système hyperbolique de premier ordre régissant la propagation montre un rôle symétrique pour la légèreté et le module de cisaillement : ce qui entraîne un lissage identique venant des fonctions d'interpolation de ces deux paramètres physiques. Un éclairage physique a été donné, dans ce cas particulier, à une technique de réduction du degré de dérivation par accroissement des inconnues, technique bien connue en analyse numérique.

Les contraintes peuvent être éliminées du schéma, comme le montrent Aki & Richards (1980) dans leur chapitre 14. Mais les paramètres physiques doivent être discrétisés comme indiqué par la méthode présentée. Cette élimination empêche toute extension vers d'autres rhéologies, et ne sera utile que dans des applications routinières. Elle pourra donc être réalisée à ce moment-là.

L'analyse des résultats numériques n'a été possible que grâce à l'utilisation d'outils graphiques puissants. Les méthodes numériques, dans

l'espace et dans le temps, modélisent toutes les ondes, mais comme un tout. Aucune différenciation n'est possible pendant la modélisation. Il faut donc comprendre les sismogrammes ou les profils dans leur ensemble : ce qui pourrait être aussi difficile que des données réelles, sauf que l'on connaît le milieu et que l'on a accès à des instantanés au cours du temps de propagation. Deux modes de représentation nous ont été particulièrement utiles : la représentation en mode raster rendant les profils plus symétriques que la représentation classique appliquée en sismique, et l'animation permettant de suivre les fronts d'onde et de les voir arriver à la surface de la Terre.

Interpréter des profils sismiques devient de plus en plus difficile au fur et à mesure que la propagation latérale intervient. Deux sortes d'onde, onde de coin et onde cônica, apparaissent, qu'il aurait été très difficile d'interpréter en terme de stratifications horizontales. Ce sera ma conclusion sur la modélisation 2-D SH et l'interprétation des résultats. Nous passons à la formulation variationnelle du problème 1-D, illustrant les différentes hypothèses sous-jacentes dans les méthodes de différences finies.

FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME 1-D.

3.4.1 : Introduction.

J'ai présenté dans les deux sections précédentes de ce chapitre la résolution des équations de l'élastodynamique dans les cas 1-D et 2-D SH avec des propriétés hétérogènes du milieu élastique. La résolution s'est effectuée avec une méthode de différences finies centrées. Le succès de cette technique tient à sa simplicité quant à la construction de la grille discrétisant le milieu et quant à la vérification des équations différentielles aux noeuds de la grille.

Dans de nombreux cas où les variations des propriétés du milieu, ainsi que celles des solutions, sont suffisamment lisses, on a cherché à améliorer la précision des solutions numériques non pas en jouant sur la taille (nombre de grandeurs sur cette grille) et la finesse (ou pas) de la grille utilisée, mais en cherchant à incorporer a priori les comportements lisses dans les approximations numériques du problème à résoudre. Cette approche très fructueuse a conduit aux formulations variationnelles de Rayleigh-Ritz et de Galerkin et à la méthode des moindres carrés. La littérature sur ces sujets où l'école française d'analyse numérique a joué un grand rôle est très abondante. Divers choix de lecture sont possibles suivant que l'on est plus intéressé par l'aspect mathématique ou par l'aspect physique. Le livre de Zienkiewicz et Morgan (1982) développe le côté pratique de ces formulations, qui m'a suffi dans mon utilisation des méthodes numériques, tandis que le livre de Marchouk (1975) aborde déjà la question sous un angle plus mathématique. Le rapport de Bamberger et al

(1980) fournit ensuite un cadre très complet pour l'application des méthodes de calcul numérique à la propagation des ondes dans des milieux hétérogènes.

Dans cette section , je me propose de suivre la même démarche que Zienkiewicz et Morgan. Pour un milieu 1-D homogène, je formulerai le problème numérique de la propagation des ondes dans le cadre de la méthode des résidus pondérés. Je procéderai de même pour les équations élastodynamiques. Je discuterai, ensuite, les différents principes variationnels conduisant à des formulations numériques possibles du problème. Je concluerai sur l'intérêt d'une telle approche pour des milieux hétérogènes.

3.4.2 : Méthode des résidus pondérés.

Dans toute résolution numérique, il faut trouver une solution approchée du problème sur une grille discrète, qu'on restreindra, pour la simplicité de l'exposé, à une dimension spatiale. Dans la méthode de différences finies au sens usuel, la solution est supposée exactement connue aux noeuds de la grille. Tous ceux qui ont effectué des interpolations d'une fonction à partir d'un nombre discret de valeurs savent qu'il existe beaucoup de manières d'estimer la fonction : choix de la base de fonctions - fonctions en puissance, fonctions en cosinus et sinus, fonctions lisses que sont les splines - et estimation des coefficients dans cette base - moindre carrés par exemple -.

Considérons la fonction recherchée ϕ sur un domaine Ω , telle qu'il existe une fonction connue ψ ayant les mêmes valeurs que ϕ sur la frontière Γ . Si des fonctions N_m , appelées souvent fonctions de forme ou fonctions d'interpolation, sont contruites de manière que N_m s'annule sur la frontière Γ , la fonction ϕ peut s'écrire :

$$\phi \approx \hat{\phi} = \psi + \sum_{1}^{M} a_m N_m. \quad (3.4.1)$$

Ces fonctions N_m forment une base (on dit parfois une base complète) si toute fonction ϕ est correctement représentée et d'une manière unique quand M tend vers ∞ . Quand on prend M fini, une erreur apparaît que l'on cherche à réduire. On cherchera à annuler les expressions :

$$\int_{\Omega} W_l (\phi - \hat{\phi}) \, d\omega \equiv - \sum_m \int_{\Omega} W_l a_m N_m \, d\omega + \int_{\Omega} W_l (\phi - \psi) \, d\omega = 0, \quad (3.4.2)$$

pour un ensemble de fonctions W_l indépendantes, appelées fonctions de poids. Leur nombre est souvent pris égal à M . Le choix de ces fonctions poids est tel que $\hat{\phi}$ doit tendre vers ϕ , quand M tend vers ∞ . On est conduit à résoudre un système linéaire, qui peut s'écrire :

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (3.4.3)$$

avec

$$\mathbf{a}^t = (a_1, a_2, \dots, a_m),$$

$$K_{lm} = \int_{\Omega} W_l N_m \, d\omega, \quad 1 \leq l, m \leq M \quad (3.4.4)$$

$$f_l = \int_{\Omega} W_l (\phi - \psi) \, d\omega. \quad 1 \leq l \leq M.$$

Nous voyons donc que le choix des fonctions de forme et des fonctions de poids va conduire à différentes approximations de la fonction ϕ . Deux choix m'intéressent particulièrement pour les fonctions poids, à savoir la collocation par point et la méthode de Galerkin. Plus généralement, dans le cas où les fonctions poids ne sont pas au nombre de M , mais en nombre inférieur, on parlera de système sous-déterminé, et, dans le cas contraire, de système sur-déterminé.

Dans la collocation par point, on choisit les fonctions poids suivantes :

$$w_j = \delta(x-x_j) \quad (3.4.5)$$

où δ désigne la fonction généralisée de dirac définie par :

$$\int_{\Omega} \varphi(x) \delta(x-x_j) dw = \varphi(x_j), \quad (3.4.6)$$

ce qui signifie que l'erreur est nulle au point x_j . Quand ces points sont ceux de la grille, on retrouve une des hypothèses des différences finies, selon laquelle les fonctions (et leurs dérivées comme nous le verrons plus loin) sont parfaitement connues aux points de la grille.

Dans la méthode de Galerkin, les fonctions poids sont les fonctions de forme : ce choix a rendu cette méthode très populaire. En effet, cela correspond à la méthode des moindres carrés (Zienkiewicz et Morgan, 1982) où on cherche à minimiser l'intégrale suivante :

$$\int_{\Omega} (\varphi - \hat{\varphi})^2 dw. \quad (3.4.7)$$

Il est temps de faire intervenir les équations différentielles que vérifie la fonction φ et qui définissent l'opération sur la fonction et donc des valeurs à partir desquelles on cherche à reconstruire cette fonction.

Considérons le cas homogène : la fonction ϕ vérifie l'équation d'onde :

$$A(\phi) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \quad (3.4.8)$$

sur un domaine Ω , en dehors de la source. Le domaine Ω sera une ligne définie par l_0, l_1 . Le milieu sera au repos initialement, i.e. $\phi(x,0) = 0$ et $\partial\phi/\partial t(x,0) = 0$. Les conditions aux limites sur le bord $x = 0$ pourront être du type $\phi(0,t) = 0$ (frontière rigide), du type $\partial\phi/\partial x(0,t) = 0$ (frontière libre) ou du type $\partial\phi/\partial t - a\partial\phi/\partial x(0,t) = 0$ (frontière absorbante suivant la valeur de a). On spécifiera des conditions analogues sur le bord L . Ces conditions sur la frontière Γ peuvent s'écrire d'une manière formelle sous la forme d'un opérateur B : $B(\phi) = 0$. Considérons une fonction ψ telle que $B(\psi) = 0$ sur Γ , et des fonctions de forme telle que $B(N_m) = 0$. On trouve les expressions approximatives des dérivées :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \sum_m \frac{d^2 a_m}{dt^2} N_m$$

et

(3.4.9)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \sum_m a_m \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2},$$

où nous voyons que les fonctions de forme doivent être deux fois différentiables en x . En fait il suffira que la dérivée première soit continue. Appliquer l'opérateur A à la fonction approchée $\hat{\phi}$ conduit à une erreur. La méthode des résidus pondérés indique qu'il faut annuler cette

erreur suivant l'expression :

$$\int_{\Omega} w_1 A(\hat{\phi}) d\omega = 0 \quad (3.4.10)$$

ou

$$\int_{\Omega} w_1 [A(\psi) + \sum_m a_m A(N_m)] d\omega = 0 \quad (3.4.11)$$

conduisant au système linéaire :

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{a}}{dt^2} + \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (3.4.12)$$

avec

$$M_{lm} = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} w_1 N_m d\omega, K_{lm} = - \int_{\Omega} w_1 \frac{d^2 N_m}{dx^2} d\omega \text{ et } f_l = - \int_{\Omega} w_1 A(\psi) d\omega. \quad (3.4.13)$$

Les fonctions de poids, qui entrent simplement sous l'intégrale, pourront donc être discontinues : il faudra simplement éviter des valeurs infinies. Le cas de la fonction de dirac est un cas spécial où la valeur de l'intégrale reste finie : c'est une "fonction" de valeur infinie, mais à support nul.

Rien n'est dit à propos de la dépendance en temps : l'approche est semi-discrète. Si une discrétisation est faite suivant le temps, nous

aurons alors une approximation totalement discrète. Quelle que soit l'approche dans le domaine Ω , on prend souvent une approximation en différences finies suivant le temps, bien qu'il existe d'autres approximations (Tal Ezer et al, 1986).

La recherche d'une fonction ψ qui vérifie exactement les conditions aux limites peut se révéler difficile, spécialement pour les conditions de radiation. Pour éviter cette difficulté, on généralise la méthode des résidus pondérés à la frontière. On écrira la solution approchée sous la forme :

$$\phi = \hat{\phi} = \sum_m a_m N_m \quad (3.4.14)$$

et on essaiera de réduire l'erreur sur le domaine Ω pour l'opérateur A et sur la frontière Γ pour l'opérateur B avec :

$$\int_{\Omega} w_1 A(\hat{\phi}) dw + \int_{\Gamma} \bar{w}_1 B(\hat{\phi}) d\gamma \quad (3.4.15)$$

conduisant à un système linéaire de la forme :

$$M \frac{d^2 \mathbf{a}}{dt^2} + C \frac{d\mathbf{a}}{dt} + K \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (3.4.16)$$

suivant les conditions aux limites imposées. Nous voyons une deuxième

manière d'approcher le problème exact : l'équation différentielle est vérifiée de manière approchée, ainsi que les conditions aux limites - qui étaient vérifiées d'une manière exacte dans la première approche -. De façon à être complet, une troisième alternative s'offre à nous, à savoir : vérifier exactement l'équation différentielle et résoudre les conditions aux limites d'une manière approchée. Pour ce faire, il faudra trouver des fonctions de forme qui vérifient exactement l'équation différentielle et chercher les composantes de la solution sur ces fonctions de forme pour vérifier au sens des résidus pondérés les conditions aux limites.

La méthode des résidus pondérés s'exprime de la même manière pour le système différentiel de premier ordre correspondant aux équations elastodynamiques : l'expression ϕ représentera la vitesse v et la contrainte τ , tandis que l'opérateur A sera défini par :

$$A(\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial t} - \begin{bmatrix} \theta & 1 \\ E & \theta \end{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \theta \quad (3.4.17)$$

avec $\phi^t = [v \ \tau]$ et $l=1/\rho$. Les fonctions de formes, qui interpolent le déplacement ou la contrainte, sont deux fois plus nombreuses. On peut choisir des interpolations très différentes de la vitesse ou de la contrainte suivant les nécessités du problème posé. De plus, il faut noter que nous n'avons besoin que des dérivées premières de ces fonctions de forme, qui devront donc simplement être continues. Les fonctions de poids pourront être discontinues, comme dans le cas précédent. On peut se demander si cette liberté supplémentaire (et donc le prix à payer) n'est pas inutile, et s'il ne vaut pas mieux se ramener à des systèmes irréductibles, dans tous les cas.

Je n'ai pas encore introduit le nom de méthode d'éléments finis que le lecteur sent en filigrane à la lecture de cette section. L'idée est fondée sur le choix de fonctions d'interpolation particulières : elles seront à support local, i.e. elles seront nulles partout sauf sur un support appelé élément. Pour l'équation des ondes, un élément comporte trois points de la grille ou noeuds, minimum nécessaire pour évaluer une dérivée seconde. On utilise souvent des fonctions de forme qui sont constantes par morceaux, c'est-à-dire qui valent 1 sur un élément et zéro partout ailleurs. Ces fonctions seront discontinues aux bornes de l'élément. Deux éléments auront en commun un noeud. On pourra utiliser des fonctions linéaires par morceaux, c'est-à-dire qui valent 1 sur le noeud central et zéro sur les deux noeuds bornant l'élément. Deux éléments auront alors deux noeuds communs. Nous voyons apparaître la difficulté essentielle de la méthode des éléments finis, à savoir la numérotation des noeuds dans un élément et des éléments entre eux : on parle de numérotation locale et de numérotation globale. Si on ne fait pas attention à ces deux numérotations, l'allure des matrices M , C et K pourra être très variable, conduisant à des coûts de calcul fort différents.

Puisque, dans l'équation des ondes, des dérivées secondes existent, il faudra assurer la continuité des dérivées premières : ce qui montre que les fonctions précédentes ne peuvent être utilisées. Des fonctions paraboliques seront plus adaptées. Par contre, les fonctions d'interpolation pour le système élastodynamique pourront être linéaires, comme le laissait présager le degré de dérivation.

Heureusement, dans le cas général et plus particulièrement dans la méthode de Galerkin, on peut relâcher ces conditions, car il est possible

par des manipulations d'intégrale de réduire le degré de dérivation des fonctions d'interpolation au détriment du degré de dérivation des fonctions de poids. C'est ce que l'on appelle la formulation faible utilisée par Bamberger et al (1980) pour les éléments P_1 et qui a fait la puissance de la méthode de Galerkin : il est très simple dans ce cas d'imposer des conditions sur le gradient aux frontières. On désire souvent des fonctions encore plus discontinues que les éléments P_1 qui sont linéaires par morceau : on veut pouvoir utiliser des fonctions d'interpolation qui sont constantes par morceau, appelées éléments Q_1 également décrits par Bamberger et al (1980). Pour ce faire, on calcule les dérivées de ces fonctions discontinues par une approximation discrète, qui est le saut de discontinuité divisé par le pas de la grille : une valeur finie pour la dérivée est ainsi trouvée.

Comme je vais m'intéresser exclusivement à la méthode de collocation par point, il n'est pas possible de procéder ainsi puisque les fonctions de poids sont des diracs et que l'on ne peut procéder à aucune dérivation sur ces fonctions. Dans le cas de la collocation par point, Zienkiewicz et Morgan (1982) ont montré que le choix de fonctions paraboliques par morceau comme fonctions de forme donnait la méthode de différences finies, pour l'équation des ondes. De même, on peut montrer que le choix de fonctions linéaires par morceau conduit à la méthode de différences finies, pour le système élastodynamique. Telles sont les fonctions d'interpolation des grandeurs dans un milieu discret, qui montrent la différence entre l'équation des ondes et le système élastodynamique.

Pourtant, Aki et Richards (1980) ont constaté que, dans le cas d'un milieu homogène, le schéma discrétisé du système élastodynamique

conduisait par élimination des contraintes à celui de l'équation des ondes. Il semblerait qu'aucun avantage concret n'apparaisse dans la réintroduction de la contrainte pour le problème à résoudre, quand le milieu est homogène. Qu'en est-il dans le cas hétérogène ? Il est nécessaire d'examiner les principes variationnels avant de donner une réponse à cette question.

3.4.3 : Principes variationnels.

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu qu'il est possible de formuler numériquement une approximation variationnelle d'un problème posé sous forme d'équations différentielles. Au lieu de rechercher une solution à un système différentiel, on recherche une solution rendant extrémale une intégrale: c'est le cas de la méthode de Galerkin équivalente à des moindres carrés. Cette approche numérique variationnelle du problème peut s'exprimer dans certains cas suivant une approche physique variationnelle. On dira que le principe utilisé est un principe variationnel naturel. Mais on peut construire une approche numérique variationnelle à tout problème posé sous forme d'équations différentielles (en fait une infinité grâce aux multiplicateurs de Lagrange).

Considérons les équations élastodynamiques suivantes :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = E \frac{\partial v}{\partial x},$$

qui peuvent s'écrire sous forme matricielle, en posant $\phi^t = [v \ \tau]$:

$$\begin{bmatrix} \rho \\ 1/E \end{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial t} - A(\phi) = \theta, \text{ avec } A = \begin{bmatrix} \theta \partial/\partial x \\ \partial/\partial x \theta \end{bmatrix} \quad (3.4.18)$$

avec les conditions aux limites s'écrivant :

$$B(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \varphi - \begin{bmatrix} \bar{\tau} \\ \bar{v} \end{bmatrix} \text{ sur } \Gamma. \quad (3.4.19)$$

Introduisons un autre vecteur φ' quelconque de façon à écrire le principe variationnel suivant :

$$\chi = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \rho \\ 1 \\ E \end{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \varphi' d\omega - \int_{\Omega} A(\varphi) \varphi' d\omega + \int_{\Gamma} B(\varphi) \varphi' d\gamma = 0 \quad (3.4.20)$$

ou

$$\chi = \int_{\Omega} \nu' \left(\rho \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) + \tau' \left(1/E \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\omega + \int_{\Gamma} \nu' (\tau - \bar{\tau}) + \tau' (v - \bar{v}) d\gamma. \quad (3.4.21)$$

Si nous prenons $\varphi' = \varphi$ et si nous supposons que ν vérifie exactement les conditions aux bords $\nu = \bar{v}$ (champ de vitesse ν cinématiquement admissible), on trouve :

$$\chi = \int_{\Omega} \left(\rho \nu \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{E} \tau \frac{\partial \tau}{\partial t} - \nu \frac{\partial \tau}{\partial x} - \tau \frac{\partial \nu}{\partial x} \right) d\omega + \int_{\Gamma} \nu (\tau - \bar{\tau}) d\gamma = 0, \quad (3.4.22)$$

c'est-à-dire

$$\chi = \int_{\Omega} \frac{\partial H}{\partial t} + \int_{\Gamma} P d\gamma = 0, \quad (3.4.23)$$

avec $H = 1/2 \rho v^2 + 1/2 \tau^2/E$, qui est l'énergie, et $P = -\bar{\tau}v$, qui est la puissance. La variation d'énergie dans le domaine Ω est égale au flux de la puissance appliquée à travers la frontière Γ , en l'absence de toute force extérieure. L'énergie comporte un terme d'énergie cinétique et un terme d'énergie potentielle élastique qui peut s'écrire $1/2 \epsilon \tau$. Nous voyons ainsi que le principe variationnel introduit correspond à la conservation de l'énergie dans le domaine Ω . Inversement puisque χ doit être nul pour toute variation de ϕ' , on doit vérifier les équations différentielles initiales (Achenbach, 1975, p 62). C'est ce principe qu'exploite la méthode de Rayleigh-Ritz.

Qu'en est-il pour la méthode des résidus pondérés ? Reprenons l'expression à annuler :

$$\int_{\Omega} W \left(\rho \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) d\omega + [\bar{W} (\tau - \bar{\tau})]_{\theta}^L$$

et

(3.4.24)

$$\int_{\Omega} W' \left(\frac{1}{E} \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\omega + [\bar{W}' (v - \bar{v})]_{\theta}^L$$

Quand on prend $W = \bar{W}$ et $W' = \bar{W}'$, on obtient les conditions naturelles, car une intégration par partie élimine τ sur les bords pour la première équation et v sur les bords pour la deuxième équation. On trouve :

$$\int_{\Omega} \left(W \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} \tau \right) d\omega - [W \bar{\tau}]_{\theta}^L$$

et

(3.4.25)

$$\int_{\Omega} \left(W' \frac{1}{E} \frac{\partial \tau}{\partial t} + v \frac{\partial W'}{\partial x} \right) d\omega - [W' \bar{v}]_{\theta}^L$$

Si, de plus, on prend les fonctions test suivantes $W = \delta v$ et $W' = \delta \tau$, on peut écrire, en notant ϵ le champ de déformation :

$$\int_{\Omega} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial t} \delta v + \tau \frac{\partial \delta \epsilon}{\partial t} \right) d\omega - [\delta v \bar{\tau}]_{\theta}^L$$

et

(3.4.26)

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \delta \epsilon + \rho v \frac{\partial \delta v}{\partial t} \right) d\omega - [\delta \tau \bar{v}]_{\theta}^L$$

où la première équation représente le principe du déplacement virtuel - le champ de contrainte τ peut être quelconque à condition qu'il vérifie le principe fondamental et les conditions aux limites -, tandis que la deuxième équation représente le principe des forces virtuelles - le champ de vitesse peut être quelconque à condition de vérifier les relations de comportement et les conditions aux limites -. Nous voyons apparaître deux principes variationnels dans le système élastodynamique, alors que seul le principe du déplacement virtuel existe pour l'équation d'onde. Kosloff et al (1984) ont choisi d'utiliser le deuxième principe en éliminant la vitesse v

qui permet de mieux modéliser différents types de source.

La formulation décrite ici est une formulation semi-discrète sans variation dans le temps : le principe variationnel n'est donc pas celui d'Hamilton formulé à partir d'une densité lagrangienne dans le milieu dont les perturbations intégrées dans l'espace et dans le temps sont nulles. Je me suis contenté de l'équation variationnelle du mouvement dans l'espace.

Bien que, pour la théorie de l'élasticité linéaire dans le continuum, il n'y ait pas de différences entre les deux principes dits du travail virtuel du fait des relations linéaires entre contraintes et déformations, il en est autrement pour les approximations numériques des différents champs déduites de ces deux principes séparément ou simultanément.

Dans les simulations numériques des études statiques de structures où ces deux principes sont intensivement employés, le principe du déplacement virtuel consiste à minimiser l'énergie élastique (l'énergie cinétique est nulle). On démontre que la solution numérique a comme borne inférieure la solution exacte. Le principe des forces virtuelles consiste à maximiser l'énergie élastique complémentaire, reliée à l'énergie élastique par une transformée de Legendre. On démontre que la solution numérique a comme borne supérieure la solution exacte. Nous voyons que les deux solutions numériques ainsi obtenues encadrent la solution exacte, encadrement que Bui (1978) a utilisé pour une estimation de l'intégrale J contrôlant la propagation en mode statique d'une rupture fragile.

Pour le système élastodynamique, les deux principes doivent être alternativement vérifiés aux noeuds de la grille numérique. L'extension du

champ de déplacement vers le champ de vitesse plus le champ de contrainte est analogue à l'extension de l'espace de configuration de dimension 1 vers l'espace de phase de dimension 2 auquel procède la formulation hamiltonienne de la mécanique. La variable conjuguée de la vitesse est la contrainte. Dans un milieu homogène, peu importent les contraintes dans l'évolution des fronts d'onde, i.e. du déplacement, pourvu qu'elles soient compatibles. Ce n'est plus le cas à une interface où nous devons procéder à une répartition d'énergie, et donc faire intervenir les contraintes ; ce raisonnement est valable a fortiori pour un milieu hétérogène. C'est pourquoi, si on peut déduire mathématiquement plusieurs systèmes hyperboliques du premier ordre à partir de l'équation des ondes, un seul pourtant nous satisfera physiquement en présence d'hétérogénéités. Ces variables - déplacement, contrainte - ne peuvent pas être calculées (mesurées) aux mêmes noeuds, comme le montrent les deux sections précédentes : on dit qu'elles ne sont pas commutables.

Grâce au cadre de la formulation variationnelle, nous voyons apparaître la raison pour laquelle le système élastodynamique devrait conduire à des solutions numériques plus stables et, donc, plus précises que celle obtenues par l'équation de propagation des ondes, comme l'ont souligné Zienkiewicz et Morgan (1982, p 80). Mais le prix à payer n'a pas toujours permis d'exploiter cet avantage. Ce prix, qui peut être notable pour la méthode de Galerkin, devient plus faible pour les méthodes de différences finies, et peut-être compétitif avec celui de l'équation des ondes dans le cas d'un milieu hétérogène. L'avènement de calculateurs vectorisables (et parallélisables) est, de plus, un argument en faveur des systèmes du premier ordre.

3.4.4 : Conclusion.

Comment se fait-il que, dans le cas d'un milieu homogène, il y ait équivalence entre l'approche par l'équation des ondes et l'approche par le système élastodynamique ? Ce résultat obtenu par Aki et Richards (1980), valable pour les méthodes de différences finies, nous semble maintenant étrange. Rappelons que le champ de vitesse n'a pas besoin de vérifier le principe fondamental aux noeuds où la contrainte est spécifiée, et que la contrainte n'a pas besoin de vérifier la loi de comportement aux noeuds où la vitesse est spécifiée. Dans la simulation du cas homogène par différences finies, du fait des fonctions de forme linéaires par morceau, le principe fondamental est automatiquement vérifié aux noeuds des contraintes par interpolation, ainsi que la loi de comportement aux noeuds des vitesses. Nous voyons donc que le principe du travail virtuel s'applique sous ses deux formes d'une manière équivalente. On a le choix entre le principe du déplacement virtuel et le principe des forces virtuelles. Dans le cas du milieu hétérogène, cette vérification automatique n'existe pas forcément, du fait des variations des paramètres physiques du milieu.

Toutefois, il est possible, dans le cas des différences finies, d'essayer de vérifier implicitement l'équation différentielle aux noeuds des contraintes sans avoir explicitement besoin de conserver les contraintes (on sauve ainsi une matrice sur quatre dans le cas unidimensionnel) : Le module de Young E sera alors discrétisé sur des noeuds fictifs, et non sur les noeuds où est discrétisé le champ de vitesse ou de déplacement. Cette possibilité semble exclusive des différences

finies (vérification exacte aux noeuds) et ne pourrait être exploitée pour des fonctions de poids plus générales, comme la méthode de Galerkin par exemple. Cette "simplification" sera à éviter sur des ordinateurs vectoriels afin de respecter des architectures facilement vectorisables. Elle sera peut-être utile sur des machines classiques où la taille des tableaux est critique.

Nous voyons donc qu'il y a avantage à utiliser le système élastodynamique pour résoudre la propagation des ondes en milieu hétérogène, dans le cas général. On lui appliquera la formulation variationnelle et on déduira les différents schémas possibles d'après les hypothèses faites sur les fonctions poids et les fonctions de forme. Certains schémas numériques ainsi construits pourront être améliorés dans un souci d'efficacité, comme le cas homogène et le cas hétérogène en différences finies, par élimination des contraintes. Les extensions à des milieux à rhéologie complexe seront alors exclues. Cette approche par le système élastodynamique nous apportera d'autres enseignements, dans le cas 2-D P-SV (voir section suivante), qu'il aurait été difficile, bien que possible, de trouver avec le principe variationnel sur l'équation des ondes.

Telle est ma conclusion sur l'utilisation du système élastodynamique au lieu de l'équation des ondes, comme cadre de formulation discrète de la propagation des ondes.

PROBLEME 2-D P-SV : MODELISATION ET INTERPRETATION

3.5.1 : Introduction

La troisième modélisation que j'aborde dans ce chapitre est celle des ondes de cisaillement vertical dans un milieu vertical hétérogène : on parlera d'ondes P-SV - pour Primaire et Secondaire Verticale -. Pour cela, j'appliquerai à un milieu quelconque le schéma numérique utilisé dans le chapitre 2 pour le modèle de faille plane. Les deux types d'onde se propagent avec des vitesses différentes dans le milieu, impliquant une plus grande complexité que dans le cas 2-D SH. Deux nouveaux phénomènes physiques se contruisent, dont il faudra s'assurer que la modélisation numérique est correcte : les différentes sources, avec leur diagramme de rayonnement et l'apparition des ondes de surface. Aucune autre notion de modélisation numérique n'a besoin d'être introduite, par rapport au cas 2-D SH.

J'aborderai la formulation du problème de la même manière que pour le cas 2-D SH. La simulation numérique sera amplifiée par une étude théorique de la stabilité, de la convergence et de la dispersion plus poussée à cause des aspects originaux développés par ce schéma. Les cas de la source explosive et des ondes de surface seront testés d'après des solutions analytiques. Un milieu à couche sera mon premier exemple. Il a été étudié par Kelly et al (1976) auparavant, et permettra des comparaisons numériques qui ne pourront être que qualitatives en raison de la méconnaissance de la source utilisée par Kelly et al. Un modèle analogue à celui de Stephen (1983) montrera le comportement du schéma numérique

pour une couche d'eau au dessus d'un demi-espace élastique. Malheureusement la géométrie 2-D utilisée empêche une comparaison quantitative puisque le modèle simulé par Stephen est axisymétrique. Ensuite, je passerai à des géométries plus complexes avec le modèle du coin dont aucune solution n'existe en dehors de celle développée par des méthodes numériques. Je discuterai à cette occasion un problème soulevé par Kelly et al (1976) au sujet d'un désaccord entre des résultats obtenus par une formulation homogène et par une formulation hétérogène pour un même coin. Enfin le cas du coin sera l'illustration d'une géométrie complexe d'une interface liquide/solide.

3.5.2 : Formulation du problème physique

Considérons un milieu vertical dont l'axe horizontal est l'axe x et l'axe vertical, dirigé vers le bas, est l'axe z . Etudions le mouvement de compression (P) et de cisaillement vertical (SU) dans ce milieu. Nous définissons ainsi deux vitesses de propagation, associées aux deux types de mouvement.

Equations.

Au lieu d'utiliser les équations d'onde vectorielle, qui forment un système hyperbolique du second ordre, j'utilise les équations élastodynamiques, procédure maintenant toute naturelle. Ces équations forment le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \\
 \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}, \\
 \tau_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
 \tau_{zz} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} \text{ et} \\
 \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right).
 \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Le déplacement est noté (u_x, u_z) , alors que le tenseur de contrainte est $(\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz})$. Les paramètres physiques sont $\rho(x, z)$, la masse volumique, et $\lambda(x, z)$, puis $\mu(x, z)$, les coefficients de Lamé. On reconnaît le principe

fondamental de la dynamique dans les deux premières équations, et la loi de Hooke dans les trois dernières. Il serait possible d'étendre cette étude à des comportements rhéologiques plus complexes que la loi élastique linéaire, sans grand bouleversement de la formulation, la discrétisation seule entraînant certaines restrictions. Ce système est transformé en un système hyperbolique du premier ordre, lorsque l'on prend comme variables les vitesses (v_x, v_z) et les contraintes. Ces variables sont conjuguées et sont celles intervenant dans l'expression de la densité d'énergie. Après avoir pris la dérivée temporelle de la loi de Hooke, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_x}{\partial t} &= b \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right), \\
 \frac{\partial v_z}{\partial t} &= b \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right), \\
 \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\
 \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} \text{ et} \\
 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right).
 \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

Pour des raisons de symétrie, la masse volumique est changée en son inverse, appelée légèreté et notée $b(x, z)$.

Conditions initiales.

Le milieu est au repos à l'instant initial $t=0$, i.e. les vitesses et les contraintes sont mises à zéro partout dans le milieu. Grâce à ces conditions initiales, propager les vitesses et les contraintes est équivalent à propager les primitives des contraintes et les déplacements.

Conditions aux limites.

Les interfaces ne sont pas traitées explicitement. Elles apparaissent selon les variations des paramètres physiques du milieu : la masse volumique ou les coefficients de Lamé. C'est ce que je supposerai quand je les tracerai sur les modèles. En toute rigueur, cette représentation est trompeuse, car elle gomme la discrétisation.

Il reste cinq conditions à satisfaire : sur les quatre bords du modèle numérique de dimensions finies et à la source. On peut utiliser sur les bords des conditions de radiation approximatives (pour simuler un milieu infini), des conditions de contrainte libre (condition de Neumann ou condition de surface libre) ou des conditions de vitesse nulle équivalentes à des conditions de déplacement nul (condition de Dirichlet ou condition de surface rigide). Les conditions de radiation sont celles introduites dans le cas 1-D, i.e. pour une onde plane perpendiculaire au bord considéré. On considérera, suivant la frontière, des ondes planes de compression ou des ondes planes de cisaillement. Ces conditions ne sont qu'approximatives et correspondent à la condition B-1 de Clayton et Engquist (1980). Les autres conditions de Clayton et Engquist peuvent être appliquées, c'est un problème d'écriture informatique et non une difficulté de formulation.

La source est plus difficile à définir que dans le cas 2-D SH. En effet, on peut n'avoir qu'une source émettant des ondes de compression (source explosive) ou qu'une source émettant des ondes de cisaillement vertical (source sismique habituelle) ou encore une combinaison des deux. En toute généralité, on pourrait choisir le tenseur de moment sismique, et en

déduire la source, comme l'ont fait, par différences finies, Vidale et al (1985). Je préfère une approche plus simple et ne considérerai que des sources explosives : mon intérêt présent se porte plutôt sur la propagation dans des milieux complexes. Des sources plus élaborées pourront être envisagées dans le futur. Comme je le montrerai plus loin, les contraintes τ_{xx} and τ_{zz} sont définies au même noeud de la maille numérique. Il est donc suffisant, pour simuler une source explosive, d'ajouter une amplitude incrémentale à chaque composante τ_{xx} et τ_{zz} en ce noeud. Comme v_x et v_z ne sont pas calculées à la source, les amplitudes resteront finies dans le maillage. Je suis ainsi la procédure de Gauthier (1984), qui a montré que cette formulation était équivalente à celle d'Alterman et Karal (1968) et qu'elle était beaucoup plus rapide. Deux types d'excitation seront appliqués à la source. Le pulse gaussien donné par :

$$f(t) = e^{-\alpha(t-t_0)^2} \quad (3.5.3)$$

sera utilisé pour le problème de Lamb, dont le paramètre α contrôle le contenu fréquentiel de la source. Pour cette application, on prendra $\alpha = 200$. Sinon, on considérera la dérivée d'un pulse gaussien pour la plupart des modèles :

$$g(t) = -2\alpha(t-t_0) e^{-\alpha(t-t_0)^2} \quad (3.5.4)$$

où le paramètre α est égal à 40. Ce qui signifie que, pour une vitesse des ondes P de 6 000 m/s, la demi-longueur d'onde de ces ondes P est 1 800 m et que la demi-longueur d'onde des ondes S est 1 000 m pour un coefficient de Poisson $\nu=0.25$. Ce qui donnera un choix du pas de la grille autour de 100 m, afin de respecter la règle d'or de 10 points par longueur d'onde. t_0 est

pris de manière à avoir un signal causal, i.e. approximativement nul pour un temps négatif. On notera $f(t)$ le pulse gaussien et $g(t)$ sa dérivée au cours de l'exposé de cette section du chapitre 3.

3.5.3 : Simulation numérique

Les dérivées sont discrétisées suivant des différences finies centrées. Comme le système (3.5.2) est un système hyperbolique du premier ordre, les fonctions d'interpolation, aussi appelées fonctions de forme, sont des fonctions linéaires (Zienkiewicz et Morgan, 1982, p 154), comme je l'ai discuté dans la section précédente. En supposant que les équations sont vérifiées exactement en certains noeuds, ce qui correspond à des fonctions test suivant des diracs (voir section précédente), la discrétisation conduit à une grille numérique en quinconce unique, comme le montre la figure 3.5.a.

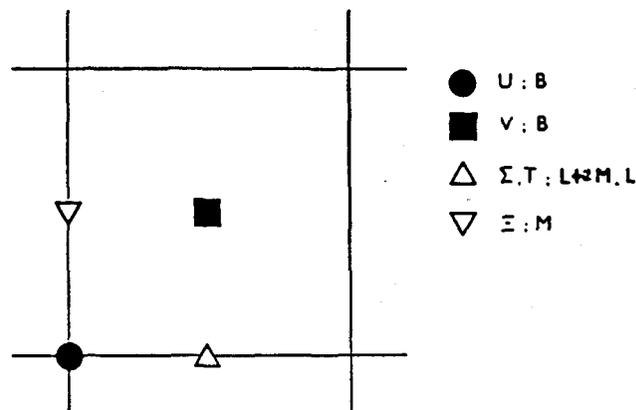


Figure 3.5.a : Discrétisation du milieu sur une grille en quinconce. Les symboles noirs représentent les vitesses et les légèretés associées à l'instant $k\Delta t$, les symboles blancs les contraintes et les coefficients de Lamé associés à l'instant $(k+1/2)\Delta t$.

Cette discrétisation du milieu, et donc la définition des noeuds, vient en

dernier, et montre que les deux composantes de la vitesse (et par conséquent du déplacement) ne peuvent être connues au même point de la grille : c'est en cela que ce schéma diffère d'autres schémas classiques (Bamberger et al, 1980).

Le schéma numérique explicite, équivalent au système 3.5.2, s'écrit :

$$\begin{aligned}
 U_{i,j}^{k+1/2} &= U_{i,j}^{k-1/2} + B_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Sigma_{i+1/2,j}^k - \Sigma_{i-1/2,j}^k) \\
 &\quad + B_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta z} (\Xi_{i,j+1/2}^k - \Xi_{i,j-1/2}^k), \\
 U_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} &= U_{i+1/2,j+1/2}^{k-1/2} + B_{i+1/2,j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Xi_{i+1,j+1/2}^k - \Xi_{i,j+1/2}^k) \\
 &\quad + B_{i+1/2,j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta z} (T_{i+1/2,j+1}^k - T_{i+1/2,j}^k), \\
 \Sigma_{i+1/2,j}^{k+1} &= \Sigma_{i+1/2,j}^k + (L+2M)_{i+1/2,j} \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{i+1,j}^{k+1/2} - U_{i,j}^{k+1/2}) \\
 &\quad + L_{i+1/2,j} \frac{\Delta t}{\Delta z} (U_{i,j+1}^{k+1/2} - U_{i,j}^{k+1/2}), \\
 T_{i+1/2,j}^{k+1} &= T_{i+1/2,j}^k + (L+2M)_{i+1/2,j} \frac{\Delta t}{\Delta z} (U_{i,j+1}^{k+1/2} - U_{i,j}^{k+1/2}) \\
 &\quad + L_{i+1/2,j} \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{i+1,j}^{k+1/2} - U_{i,j}^{k+1/2}), \\
 \text{et} \\
 \Xi_{i,j+1/2}^{k+1} &= \Xi_{i,j+1/2}^k + M_{i,j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta z} (U_{i,j+1}^{k+1/2} - U_{i,j}^{k+1/2}) \\
 &\quad + M_{i,j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{i+1,j}^{k+1/2} - U_{i,j}^{k+1/2}).
 \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

où k est l'indice des temps, i celui suivant l'axe x et j suivant l'axe z . Δt est le pas de la grille dans le temps, Δx suivant l'axe x et Δz suivant l'axe z . On prendra Δx et Δz égaux dans les applications qui suivront, bien qu'on puisse les prendre différents dans le programme informatique. La vitesse numérique, notée en majuscules $(U, V) = (v_x, v_z)$, au temps $(k+1/2)\Delta t$, et la contrainte numérique $(\Sigma, \Xi, T) = (\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz})$ au temps $(k+1)\Delta t$ peuvent se calculer à partir de la vitesse numérique au temps $(k-1/2)\Delta t$, et la contrainte numérique au temps $k\Delta t$. B représente la discrétisation de la légèreté dans le milieu, tandis que (L, M) représente les coefficients de Lamé (λ, μ) , comme le montre la figure 3.5.a.

Je me suis penché, dans le cas d'un milieu 1-D, sur l'étude théorique des schémas numériques développés jusqu'à maintenant. Cette étude a concerné les deux étapes fondamentales associées à toute résolution numérique : la vérification des équations grâce à des fonctions test et la connaissance des champs par des fonctions d'interpolation. C'est la discrétisation. Un deuxième aspect de l'étude théorique concerne les problèmes de stabilité, de convergence et donc de dispersion numérique. Des résultats remarquables pour le cas 2-D P-SV nous amènent à présenter cette étude. Nous suivons pour cela le rapport de Bamberger et al (1980) publié par l'INRIA à ce sujet, car il fournit le cadre nécessaire à cette étude.

Considérons la résolution des équations de l'élastodynamique linéaire loin des frontières et des sources. Pour cela, le milieu est discrétisé suivant le schéma de différences finies centrées du système 3.5.2. La discrétisation de ces équations nous a obligé à considérer u_x et u_z en des points différents, décalés d'une demi-maille, afin de respecter le centrage des différences finies assurant une précision d'ordre deux dans

l'approximation de la dérivée. Une autre manière de voir ce point important apparaît avec la transformation du système 3.5.2 en équations de propagation vectorielle. Il faut discrétiser correctement et d'une manière symétrique les dérivées croisées $\partial^2/\partial x \partial z$ et $\partial^2/\partial z \partial x$. Bien que cela soit moins évident pour les équations de propagation vectorielle, il faut décentrer les deux composantes du déplacement, pour assurer la symétrie des approximations des deux dérivées croisées, un problème qu'avait souligné le rapport de l'INRIA.

Pour une étude théorique, on peut éliminer les contraintes du schéma puisque l'on suppose que les équations sont parfaitement vérifiées aux noeuds (les fonctions test sont des diracs, c'est une méthode de collocation). Les équations de comportement (loi de Hooke) sont parfaitement vérifiées, et donc peuvent être éliminées. La discrétisation des coefficients de Lamé devra rester celle présentée ici.

Toutefois, dans le schéma numérique, on conservera les contraintes pour deux raisons :

-Propagation des erreurs. Que se passe-t-il quand la loi de comportement n'est pas parfaitement vérifiée ? Ce qui peut arriver quand les paramètres du milieu varient brutalement.

-Extension vers des milieux à rhéologie plus complexe, comme des types d'anisotropie, pourvu que ceux-ci respectent certaines qualités du schéma en quinconce - impossibilité de calculer une quantité et ses dérivées au même point spatio-temporel.

On considère la solution approchée numérique (u_x, u_z) et on lui associe le vecteur (u'_x, u'_z) défini par l'expression numérique approchée

de :

$$u'_x = - \frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda+2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial u_x}{\partial z} + \mu \frac{\partial u_z}{\partial x} \right] \quad (3.5.6)$$

$$u'_z = - \frac{\partial}{\partial z} \left[(\lambda+2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial u_x}{\partial z} + \mu \frac{\partial u_z}{\partial x} \right].$$

Par exemple, le premier terme approché de u'_x est :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda+2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] \approx (\lambda+2\mu)_{i+1/2,j} \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x^2} - (\lambda+2\mu)_{i-1/2,j} \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x^2}.$$

On appelle B l'opérateur qui associe (u'_x, u'_z) à (u_x, u_z) pour tout couple (i,j) , ou bien son extension à un continuum où le couple est réel :

B

$$\{ (x,z,t) \rightarrow (u_x, u_z) \} \in [L^2(\mathbb{R}^2)]^2 \longrightarrow \{ (x,z,t) \rightarrow (u'_x, u'_z) \} \in [L^2(\mathbb{R}^2)]^2$$

Les propriétés de l'opérateur B s'analysent par une étude harmonique dans l'espace. On considèrera le cas homogène à partir de maintenant et on note la transformée de Fourier du vecteur u au point (x,z) par \hat{u} au point (k_1, k_2) . On appelle également B l'opérateur qui, à \hat{u} , associe \hat{u}' . On a :

$$\hat{u}'_x = -(\lambda+2\mu) \frac{e^{ik_1 \Delta x} + e^{-ik_1 \Delta x} - 2}{\Delta x^2} \hat{u}_x - (\lambda+\mu) \frac{e^{ik_1 \Delta x/2} e^{ik_2 \Delta z/2} - e^{ik_1 \Delta x/2} e^{-ik_2 \Delta z/2}}{\Delta x \Delta z} \hat{u}_z \quad (3.5.7)$$

$$-(\lambda+\mu) \frac{e^{-ik_1\Delta x/2} e^{ik_2\Delta z/2} - e^{-ik_1\Delta x/2} e^{-ik_2\Delta z/2}}{\Delta x \Delta z} \hat{u}_z - \mu \frac{e^{ik_2\Delta z} + e^{-ik_2\Delta z} - 2}{\Delta z^2} \hat{u}_x,$$

c'est-à-dire

$$\hat{u}'_x = \left[(\lambda+2\mu) \frac{\sin^2(\frac{k_1\Delta x}{2})}{(\frac{\Delta x}{2})^2} + \mu \frac{\sin^2(\frac{k_2\Delta z}{2})}{(\frac{\Delta z}{2})^2} \right] \hat{u}_x + (\lambda+\mu) \frac{\sin(\frac{k_1\Delta x}{2}) \sin(\frac{k_2\Delta z}{2})}{\frac{\Delta x \Delta z}{4}} \hat{u}_z \quad (3.5.8)$$

La matrice de l'opérateur B définie par :

$$\begin{bmatrix} \hat{u}'_x \\ \hat{u}'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_z \end{bmatrix} \quad (3.5.9)$$

s'écrit donc, après avoir développé \hat{u}'_z de la même manière que \hat{u}'_x ,

$$\begin{aligned} B_{11} &= (\lambda+2\mu) S^2(k_1\Delta x) + \mu S^2(k_2\Delta z) \\ B_{22} &= (\lambda+2\mu) S^2(k_2\Delta z) + \mu S^2(k_1\Delta x) \\ B_{12} &= B_{21} = (\lambda+\mu) S(k_1\Delta x) S(k_2\Delta z) \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

où $S(k\epsilon) = \sin(k\epsilon/2)/(\epsilon/2)$. La matrice B est donc symétrique. L'application, qui, à $\mathbf{k}=(k_1, k_2)$, associe $B(\mathbf{k})$, est périodique de période $[2\pi/\Delta x, 2\pi/\Delta z]$. En tenant compte de la symétrie, le domaine de définition peut se ramener au carré $]0, \pi/\Delta x[\times]0, \pi/\Delta z[$ dans le plan \mathbf{k} .

Calculons les valeurs propres de la matrice B, pour connaître les propriétés de B. L'équation caractéristique s'écrit :

$$s^2 - (B_{11} + B_{22}) s + (B_{11}B_{22} - B_{12}^2) = 0. \quad (3.5.11)$$

On trouve deux solutions réelles positives :

$$s_1 = (\lambda + 2\mu) [S^2(k_1 \Delta x) + S^2(k_2 \Delta z)] \text{ et } s_2 = \mu [S^2(k_1 \Delta x) + S^2(k_2 \Delta z)]. \quad (3.5.12)$$

On déduit de la stricte positivité de s_1 et de s_2 que l'opérateur B est défini positif.

Calculons les vecteurs propres associés. Les composantes u_x^1 et u_z^1 du vecteur propre \mathbf{d}_1 associé à s_1 sont reliées par la relation :

$$B_{11} u_x^1 + B_{12} u_z^1 = s_1 u_x^1 \text{ ou } S(k_1 \Delta x) u_z^1 = S(k_2 \Delta z) u_x^1. \quad (3.5.13)$$

Le vecteur propre associé à s_1 est colinéaire à $(S(k_1 \Delta x), S(k_2 \Delta z))$, indépendant de λ et μ , dans le cas général $\Delta x \neq \Delta z$. On trouve de même que le vecteur propre \mathbf{d}_2 associé à s_2 est colinéaire à $(S(k_2 \Delta x), -S(k_1 \Delta z))$, indépendant de λ et μ et perpendiculaire à \mathbf{d}_1 . On notera \mathbf{d}_2 sous la forme \mathbf{d}_1^\perp marquant l'orthogonalité. La norme de l'opérateur B , définie comme la valeur absolue maximum des valeurs propres, est donc s_1 ($s_1 > s_2$), ce qui implique que :

$$\max |B| = (\lambda + 2\mu) \left[\frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{\Delta z}{2}\right)^2} \right]. \quad (3.5.14)$$

Etendons l'étude harmonique au temps. Nous obtenons, pour des ondes planes $\mathbf{u} = \mathbf{d} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$:

$$\frac{\rho(e^{i\omega\Delta t} + e^{-i\omega\Delta t} - 2)}{\Delta t} \mathbf{d} = -B \mathbf{d} \text{ ou } \rho S^2(\omega\Delta t) \mathbf{d} = B \mathbf{d}. \quad (3.5.15)$$

Nous voyons donc que $\rho S^2(\omega\Delta t)$ est une valeur propre de B et \mathbf{d} un vecteur propre. Deux pulsations ω_1 et ω_2 sont ainsi définies, associées respectivement à s_1 et s_2 , qui sont solutions de :

$$\begin{aligned} \rho S^2(\omega_1\Delta t) &= (\lambda + 2\mu) [S^2(k_1\Delta x) + S^2(k_2\Delta z)] \\ &\text{et} \\ \rho S^2(\omega_2\Delta t) &= \mu [S^2(k_1\Delta x) + S^2(k_2\Delta z)]. \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

Du fait de la périodicité, on a $-\pi < \omega\Delta t/2 < \pi$. Mais on peut prendre ω positif, si bien que le domaine d'étude de ω est défini par les inégalités suivantes $0 < \omega\Delta t/2 < \pi$. Ce qui donne $\Delta t < T = 2\pi/\omega$. Une condition nécessaire de stabilité est que ω soit réel, de manière à éviter les ondes planes inhomogènes, conduisant à des instabilités numériques. Sachant que $\sin^2(\omega\Delta t/2) < 1$, l'équation de dispersion vérifiée par ω_1 donne :

$$\frac{|B|^2}{\rho} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 < 1 \text{ ou } \Delta t < \frac{2\sqrt{\rho}}{\max|B|} \quad (3.5.17)$$

ou

$$\Delta t < \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}.$$

Introduisant la vitesse des ondes P, notée v_p , et définissant la quantité

suivante :

$$\Delta t^* = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}, \quad (3.5.18)$$

on trouve $\Delta t < \Delta t^*$. Le rapport $\gamma = \Delta t / \Delta t^*$ est donc inférieur à 1. Dans le cas particulier où $\Delta x = \Delta z$, la condition de stabilité s'écrit d'une manière plus compacte, qui est celle que l'on utilise fréquemment :

$$v_p \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.5.19)$$

Cette condition de stabilité est aussi une condition suffisante. On ne peut résister à présenter la généralisation au cas n-D, qui s'obtient de façon immédiate :

$$\Delta t v_p \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\Delta x_i}\right)^2} < 1, \quad (3.5.20)$$

et, dans le cas où $\Delta x_i = \Delta x$, on trouve :

$$v_p \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (3.5.21)$$

Cette condition de stabilité a été vérifiée dans le chapitre 2 sur l'étude des failles tridimensionnelles. Rappelons les stabilités des schémas étudiés par l'INRIA obtenues seulement dans le cas $\Delta x = \Delta z$. Pour cela, il nous faut introduire la vitesse des ondes S, notée v_S . On trouve alors :

$$\sqrt{v_S^2 + v_P^2} \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad \text{schéma 1 : différence finie}$$

$$\sqrt{v_S^2 + v_P^2} \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{schéma 2 : élément } Q_1$$

$$v_P \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad \text{schéma 3 : élément } Q_1 + \text{condensation de masse}$$

$$v_P \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{schéma 4 : élément } P_1$$

$$v_P \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \text{schéma 5 : élément } P_1 + \text{condensation de masse}$$

$$v_P \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{schéma utilisé ici}$$

Si $\Delta x \neq \Delta z$, toutes les conditions de stabilité des 5 premiers schémas introduiraient la vitesse des ondes S ou le coefficient de Poisson ν . Je noterai que le schéma décrit ici a une condition de stabilité sans le coefficient de Poisson ν , dans le cas le plus général $\Delta x \neq \Delta z$. Dans le cas $\Delta x = \Delta z$, le schéma 3 est celui qui a la condition de stabilité la plus intéressante, également par rapport au schéma proposé ici. Mais son

mauvais comportement pour la dispersion des ondes P lui a fait préférer le schéma 1 par l'INRIA. Le schéma 4 est un schéma implicite différent de celui utilisé ici qui est explicite.

L'étude de la convergence du schéma numérique nécessite des développements limités des différentes grandeurs pour Δx , Δz petits à k fixé. On notera O l'expression $O(\Delta x^2, \Delta z^2, \Delta x \Delta z)$. On trouve :

$$\begin{aligned} B_{11} &= (\lambda + 2\mu) k_1^2 + \mu k_2^2 + O \\ B_{22} &= (\lambda + 2\mu) k_2^2 + \mu k_1^2 + O \\ B_{12} &= (\lambda + \mu) k_1 k_2 + O, \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

dont on déduit les développements des différentes grandeurs physiques suivantes :

Valeurs propres

$$s_1 = (\lambda + 2\mu) (k_1^2 + k_2^2) + O \text{ et } s_2 = \mu (k_1^2 + k_2^2) + O$$

Vecteurs propres

$$d_1 = k_1 + O \text{ et } d_1^+ = k_1^+ + O$$

Equations de dispersion

$$\rho \omega_1^2 = (\lambda + 2\mu) (k_1^2 + k_2^2) + O \text{ et } \rho \omega_2^2 = \mu (k_1^2 + k_2^2) + O$$

Vitesses de phase

$$\frac{\omega_1}{k} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} + O \quad \frac{\omega_2}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} + O.$$

Les vitesses de groupe sont un peu plus difficiles à obtenir. Reprenons l'équation de dispersion donnant ω_1 et dérivons par rapport à k_1 et k_2 :

$$\rho \sin(\omega_1 \Delta t) \frac{2}{\Delta t} \frac{\partial \omega_1}{\partial k_1} = (\lambda + 2\mu) \sin(k_1 \Delta x) \frac{2}{\Delta x} \text{ et}$$

$$\rho \sin(\omega_1 \Delta t) \frac{2}{\Delta t} \frac{\partial \omega_1}{\partial k_2} = (\lambda + 2\mu) \sin(k_2 \Delta z) \frac{2}{\Delta z},$$

d'où la relation :

$$\rho^2 \frac{\sin^2 \omega_1 \Delta t}{\Delta t^2} \left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial k_1^2} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial k_2^2} \right) = (\lambda + 2\mu)^2 \left[\frac{\sin^2 k_1 \Delta x}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2 k_2 \Delta z}{\Delta z^2} \right],$$

mais, en utilisant la relation de dispersion, le début du membre de gauche peut se transformer en

$$\rho^2 \frac{\sin^2 \omega_1 \Delta t}{\Delta t^2} = \left[1 - \left(\frac{\Delta t}{Z} \right)^2 \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} A \right] (\lambda + 2\mu) A,$$

avec $A = S^2(k_1 \Delta x) + S^2(k_2 \Delta z)$. Le rapport Γ_1 défini par :

$$\Gamma_1 = \frac{1}{v_p^2} \left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial k_1^2} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial k_2^2} \right) \quad (3.5.23)$$

s'écrit :

$$\Gamma_1 = \frac{\left[1 - \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 S^2(k_1 \Delta x)\right] S^2(k_1 \Delta x) + \left[1 - \left(\frac{\Delta z}{2}\right)^2 S^2(k_2 \Delta z)\right] S^2(k_2 \Delta z)}{\left[1 - \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 v_p^2 A\right] A}$$

En utilisant le développement limité de $S^2(k_1 \Delta x)$ et de $S^2(k_2 \Delta z)$ et le comportement $\Delta t \sim \Delta x$ obtenu d'après la condition de stabilité $\Delta t = \gamma \Delta t^*$, on trouve que :

$$\Gamma_1 = \frac{k_1^2 + k_2^2 - \frac{1}{3} k_1^2 k_2^2 (k_1^2 \Delta x^2 + k_2^2 \Delta z^2)}{k_1^2 + k_2^2 + a \Delta x^2 + b \Delta z^2} = 1 + 0,$$

donc $\left| \text{grad } w_1 \right| / v_p = 1 + 0$ quand la discrétisation tend vers zéro. Il faut toutefois noter que Γ_1 présente une forme indéterminée pour $\mathbf{k} = (0, 0)$, qui est levée par le développement précédent, ainsi que pour $\mathbf{k} = (\pi/\Delta x, \pi/\Delta z)$ dans le cas où la condition de stabilité est vérifiée avec $\gamma = 1$. Un développement autour de ce point particulier pour cette valeur de γ particulière permet de montrer que Γ_1 tend toujours vers 1. De la même manière, pour w_2 , on a $\left| \text{grad } w_2 \right| / v_s = 1 + 0$. L'indétermination aux points \mathbf{k} précédents est également levée. La même limite est alors trouvée. Il faut noter que, pour le schéma 1 de l'INRIA, le développement limité autour du point $\mathbf{k} = (\pi/\Delta x, \pi/\Delta z)$ conduit aux équivalences suivantes :

$$\frac{\left| \text{grad } w_1 \right|}{v_p} \sim \frac{v_s}{v_p} < 1 \text{ et } \frac{\left| \text{grad } w_2 \right|}{v_s} \sim \frac{v_p}{v_s} > 1$$

Nous voyons donc en ce point particulier que le module de la vitesse de

groupe des ondes P est approché par défaut et le module de la vitesse de groupe des ondes S est approché par excès, alors que le schéma proposé ici ne présente rien de tel. Ce fait est mineur pour la convergence, car, quand le pas de discrétisation devient faible, ce point particulier k concerne des fréquences de plus en plus grandes. Il ne perturbera la solution numérique qu'à haute fréquence, n'influençant pas la convergence vers la solution vraie, quand le pas tend vers zéro. Il deviendra important quand j'étudierai l'effet de la dispersion numérique pour un faible nombre de noeuds à l'intérieur d'une longueur d'onde.

J'obtiens donc un comportement satisfaisant pour la convergence du schéma proposé quand le pas de discrétisation tend vers zéro. C'est une vérification rassurante, mais que l'on attendait.

Toutefois il nous faut voir le comportement de ce schéma dans une grille discrétisée, à savoir, comment s'effectue la dispersion des ondes dans une grille d'un pas fini. Nous nous intéresserons uniquement aux vitesses de phase ou plutôt aux valeurs adimensionnelles de la vitesse numérique sur la vitesse théorique. Pour cela, plaçons-nous dans le cas particulier $\Delta x = \Delta z$ et introduisons les quantités adimensionnelles suivantes :

$$\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t^*}, k_1 = k \cos \theta, k_2 = k \sin \theta \text{ et } H = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{\Delta x k}{2\pi}. \quad (3.5.24)$$

L'angle θ est l'angle que fait l'onde plane avec l'axe x . Le paramètre H est le paramètre de dispersion et indique combien de longueurs d'onde il y a dans un pas de grille pour l'onde plane considérée.

La vitesse de phase adimensionnelle q_1 des ondes P s'obtient à partir de l'équation de dispersion de ω_1 (3.5.16) :

$$\rho S^2(\omega_1 \Delta t) = (\lambda + 2\mu) [S^2(k_1 \Delta x) + S^2(k_2 \Delta z)] .$$

Le paramètre H concerne une onde plane compressive. On trouve alors :

$$q_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi \gamma H} \operatorname{Arcsin} \left[\frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin^2(\pi H \cos \theta) + \sin^2(\pi H \sin \theta)} \right], \quad (3.5.25)$$

où l'on peut remarquer que q_1 est une fonction de γ , θ , H et ne dépend pas de ν .

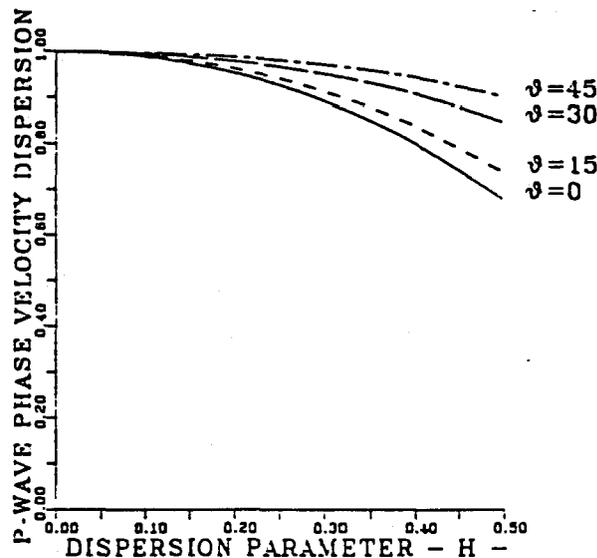


Figure 3.5.b: Courbes de dispersion pour la vitesse de phase adimensionnelle des ondes P avec un paramètre de dispersion $\gamma = 0.8$. Les résultats pour différents angles θ de l'onde plane par rapport à l'axe x sont montrés. Ils sont indépendants du coefficient de Poisson ν .

Ce qui est un résultat nouveau à mettre au crédit de ce schéma et plus particulièrement du décalage des composantes horizontale et verticale. La variable de l'INRIA, définie par :

$$\xi = \frac{v_p^2}{v_p^2 + v_s^2}, \quad (3.5.26)$$

a disparu. La figure 3.5.b montre qu'en dessous de $H=0.1$, l'approximation des vitesses numériques est satisfaisante. C'est la règle d'or selon laquelle il faut au moins dix points par longueur d'onde à propager.

La vitesse de phase adimensionnelle q_2 des ondes S s'obtient à partir de l'équation de dispersion de ω_2 (3.5.16) :

$$\rho S^2(\omega_2 \Delta t) = \mu [S^2(k_1 \Delta x) + S^2(k_2 \Delta z)].$$

On trouve :

$$q_2 = \frac{\sqrt{2}}{\pi \gamma H} \frac{v_p}{v_s} \operatorname{Arcsin} \left[\frac{v_s}{v_p} \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin^2(\pi H \cos \theta) + \sin^2(\pi H \sin \theta)} \right], \quad (3.5.27)$$

où l'on remarque que q_2 est une fonction de γ , θ , H mais aussi de v . Toutefois, dès que l'argument de l'arcsinus est faible - pour diverses raisons, comme γ faible ou v_s faible (i.e. v voisin de 0.5) -, la quantité q_2 devient indépendante de v . L'expression de q_2 pour les schémas de l'INRIA fait intervenir la quantité $1/(1-\xi^2)^{1/2}$ qui a un comportement singulier

quand ν_s tend vers zéro ou ν tend vers 0.5. Cela laisse présager un meilleur comportement du schéma en quinconce quand les coefficients de Poisson sont dans un voisinage de 0.5. Le paramètre H utilisé est différent du H pour l'onde P puisque nous avons maintenant une onde plane se propageant avec la vitesse des ondes S. La règle d'or de 10 points par longueur d'onde doit être respectée comme le montre la figure 3.5.c.

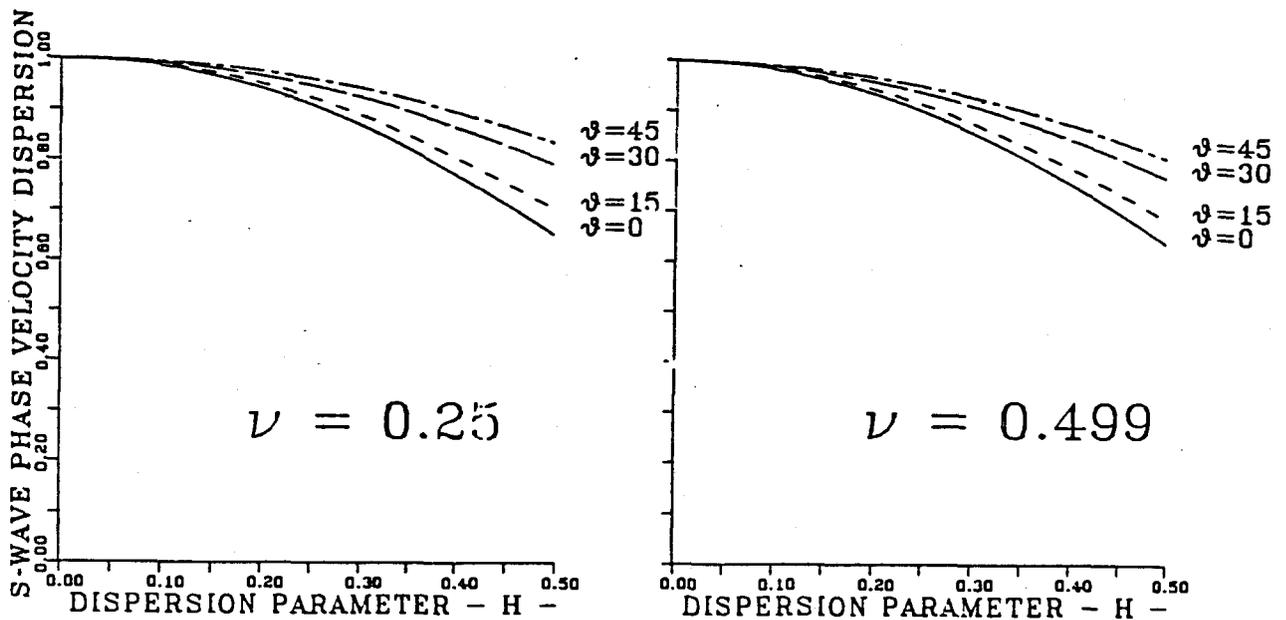


Figure 3.5.c: Courbes de dispersion pour la vitesse de phase adimensionnelle des ondes S avec un paramètre de dispersion $\gamma = 0.8$. Les résultats pour différents angles θ de l'onde plane par rapport à l'axe x sont montrés. Ils sont peu dépendants du coefficient de Poisson ν .

Il s'ensuit que, lorsque la vitesse des ondes S décroît, il devient de plus en plus difficile de modéliser les ondes S à cause de la limitation en fréquence des différences finies. Mais l'énergie est de plus en plus faiblement portée par ces ondes de cisaillement. Elles ne viennent donc perturber les ondes P dominantes que faiblement. C'est ce que nous

observerons dans les exemples présentés. Remarquons que la vitesse numérique des ondes S est toujours inférieure à la vitesse vraie, puisque q_2 est toujours inférieur à 1. Il n'existe plus d'onde évanescente uniquement numérique associée à une surestimation de la vitesse numérique, comme on peut l'observer pour beaucoup de schémas classiques. Un angle de réflexion est numériquement critique alors qu'il ne devrait pas l'être physiquement. Le fait que la vitesse numérique est toujours inférieure à la vitesse vraie n'est vérifié que par le schéma 3 de l'INRIA pour $\Delta x = \Delta z$, qui présente un comportement dispersif pour les ondes P trop important pour permettre une utilisation pratique.

L'étude des vitesses de groupe Γ_1 et Γ_2 - direction du vecteur de Poynting et module de la vitesse de groupe - a été ramenée au produit scalaire du gradient de w avec \mathbf{k} , pour des questions de volume de calcul dans le rapport de l'INRIA. Je renvoie le lecteur à cette étude pour le comportement des vitesses de groupes des solutions numériques de l'INRIA.

Finalement, pour terminer cette étude numérique, j'indique le volume des calculs sur un Cray 1-S. Pour une grille de $400 * 200$, la taille du programme est de 850 kmots, ce qui est la taille maximum permise sur une mémoire totale de 1 000 kmots. Pour 1 200 coups en temps, le temps CPU est de 100 secondes. De plus, le programme a sa propre gestion de mémoire virtuelle, ce qui permet de modéliser un milieu de grande taille ($1\ 000 * 1\ 000$), à condition de payer le prix du transfert sur disques extérieurs en plus de l'accroissement du temps de calcul proprement dit. Pour cette raison, cette option a été testée sur un modèle réduit.

3.5.4 : Milieu infini : source explosive.

Le premier problème, qui n'est pas une extension naturelle du cas 2-D SH, est la modélisation numérique de la source. Une comparaison simple avec une solution analytique dans un espace homogène nous rassurera sur la modélisation numérique.

Bien que toutes sortes de source puissent être simulées, la source explosive est la plus simple à générer, en ajoutant une valeur connue à la contrainte (τ_{xx}, τ_{zz}) au point source (voir paragraphe 3.5.2). Un point source à la surface libre d'un demi-espace sera modélisé en incrémentant seulement τ_{zz} .

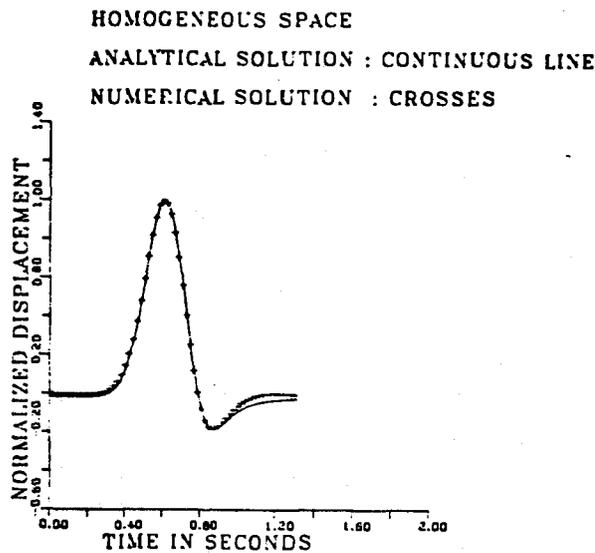


Figure 3.5.d : Comparaison entre la solution numérique et analytique pour une source explosive dans un milieu infini.

Pour une excitation de la forme $g(t)$ (équation 3.5.4) avec un paramètre $\alpha = 40$, je compare le déplacement numérique radial et la solution

analytique dans un milieu infini pour une vitesse des ondes P de 4 000 m/s. La figure 3.5.d montre le sismogramme obtenu en une station située à 400 m de la source.

Le déplacement tangentiel, différent de zéro à cause de la dispersion numérique, reste négligeable. Son amplitude décroît, lorsque le paramètre γ diminue ou quand le contenu spectral de la source se décale vers les basses fréquences.

3.5.5 : Problème de Lamb.

Les ondes de Rayleigh sont fortement excitées par une source se trouvant à la surface libre d'un demi-espace. Depuis le travail de Lamb (1904), des solutions analytiques ont été présentées dans plusieurs livres de référence (Ewing et al, 1957, Aki & Richards, 1980...). La méthode de Cagniard-De Hoop est un moyen élégant et puissant (full-wave theory) de calculer des sismogrammes d'ondes de volume (Achenbach, 1975, p 303). Reprenons succinctement la démarche suivie par Achenbach.

Solution analytique par Cagniard-De Hoop.

Considérons une excitation verticale appliquée à la surface libre de notre milieu de la forme suivante :

$$\tau_{zz} = Q \delta(x) s(t) \text{ et } \tau_{xz} = 0. \quad (3.5.28)$$

Sachant que le milieu était initialement au repos, il est possible d'introduire la transformation de Laplace dans le temps, ainsi que la transformation de Fourier suivant x ou, ce qui est équivalent, la transformation de Laplace double définie par :

$$f^*(p\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\eta x} f(x) dx \quad (3.5.29)$$

et son inverse :

$$f(x) = \int_{\eta_1 - i\infty}^{\eta_1 + i\infty} e^{p\eta x} f^*(p\eta) d\eta \quad (3.5.30)$$

L'introduction de la variable η , à la place de la variable $\zeta = p\eta$ où p est le paramètre de Laplace en temps, simplifie les calculs ultérieurs. Les transformées des potentiels dont découlent les différentes grandeurs, déplacement et contrainte, s'écrivent dans le demi-plan $z \geq 0$ sous la forme :

$$\bar{\phi}^* = \bar{\Phi}(p, \eta) e^{-p\gamma_1 z} \quad \text{et} \quad (3.5.31)$$

$$\bar{\psi}^* = \bar{\Psi}(p, \eta) e^{-p\gamma_t z},$$

avec les quantités habituelles :

$$\gamma_1 = (s_1^2 - \eta^2)^{1/2} \text{ et } \gamma_t = (s_t^2 - \eta^2)^{1/2}. \quad (3.5.32)$$

Le déplacement horizontal, qui est la quantité que j'ai choisi d'illustrer dans cette comparaison, est défini par sa transformée :

$$\bar{u}^* = p\eta \bar{\phi}^* - p\gamma_t \bar{\psi}^*. \quad (3.5.33)$$

Les conditions aux limites sur la surface libre donnent les expressions des transformées des potentiels suivantes :

$$\Phi(p, \eta) = - \frac{Q}{\mu} \frac{\bar{s}(p)}{p^2} \frac{s_1^2 - 2\eta^2}{R(\eta)}$$

et

(3.5.34)

$$\Psi(p, \eta) = - \frac{Q}{\mu} \frac{\bar{s}(p)}{p^2} \frac{2\eta\gamma_1}{R(\eta)},$$

avec

$$R(\eta) = (s_1^2 - 2\eta^2)^2 + 4\eta^2\gamma_1\gamma_t. \quad (3.5.35)$$

J'écris l'expression de \bar{u}^* , en me démarquant en cela d'Achenbach, qui s'était intéressé surtout à τ_{zz} . On trouve :

$$\bar{u}^* = - \frac{Q}{\mu} \frac{\bar{s}(p)}{p} \frac{1}{R(\eta)} \left[(s_1^2 - 2\eta^2)\eta - 2\eta\gamma_1\gamma_t \right]. \quad (3.5.36)$$

Nous reconnaissons une singularité de l'expression pour $R(\eta) = 0$, i.e. pour $\eta_r = 1/c_r$, l'inverse de la vitesse des ondes de Rayleigh. Inversons suivant la variable η et cherchons à identifier la fonction sous le signe de l'intégrale comme une transformée de Laplace simple. On a :

$$\bar{u} = - \frac{Q}{\mu} \bar{s}(p) (\bar{I}_1 + \bar{I}_t), \quad (3.5.37)$$

avec les intégrales suivantes :

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta_1 - \infty}^{\eta_1 + \infty} \frac{(s_1^2 - 2\eta^2)\eta}{R(\eta)} e^{p(\eta x - \gamma_1 z)} d\eta$$

et

(3.5.38)

$$\bar{I}_t = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\eta_1 - \infty}^{\eta_1 + \infty} \frac{2\eta\gamma_1\gamma_1}{R(\eta)} e^{p(\eta x - \gamma_1 z)} d\eta.$$

Mais l'expression sous le signe intégrale se transforme :

$$\bar{I}_1 = \int_{s_1 r}^{+\infty} G_1(x, z, t) e^{-pt} dt \quad (3.5.39)$$

avec

$$\eta = -\frac{tx}{r^2} + i \sqrt{t^2 - s_1^2 r^2} \frac{z}{r^2},$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{x}{r^2} + i \frac{t}{\sqrt{t^2 - s_1^2 r^2}} \frac{z}{r^2}$$

$$G_1(x, z, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{im} \left[\left[\frac{(s_1^2 - 2\eta^2)\eta}{R(\eta)} \right] \eta \frac{d\eta}{dt} \right],$$

et

$$\bar{I}_t = - \int_{t_r}^{s_1 r} G_r(x, z, t) e^{-pt} dt - \int_{s_1 r}^{+\infty} G_t(x, z, t) e^{-pt} dt \quad (3.5.40)$$

avec

$$t_r = s|x + \sqrt{s^2 - s_t^2} ,$$

$$\eta_r = -\frac{tx}{r^2} + \sqrt{s^2|r^2 - t^2} \frac{z}{r^2},$$

$$\frac{\partial \eta_r}{\partial t} = -\frac{x}{r^2} + \frac{t}{\sqrt{s^2|r^2 - t^2}} \frac{z}{r^2}$$

$$G_r(x, z, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\left[\frac{2\eta_r |Y| t}{R(\eta)} \right] \eta_r \frac{\partial \eta_r}{\partial t} \right],$$

pour la première intégrale et

$$\eta_t = -\frac{tx}{r^2} + i \sqrt{t^2 - s_t^2 r^2} \frac{z}{r^2},$$

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial t} = -\frac{x}{r^2} + i \frac{t}{\sqrt{t^2 - s_t^2 r^2}} \frac{z}{r^2}$$

$$G_t(x, z, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\left[\frac{2\eta_t |Y| t}{R(\eta)} \right] \eta_t \frac{\partial \eta_t}{\partial t} \right],$$

pour la deuxième intégrale. Par identification, on trouve :

$$u = -\frac{Q}{\mu} s(t) * (G_l + G_r + G_t). \quad (3.5.41)$$

Les trois contributions peuvent être séparées dans le calcul, et montrent que l'onde cônica provient de la partie G_r , lorsque le chemin de Cagniard définissant la quantité η_r en fonction du temps doit décoller de l'axe réel

au passage de la branche créée par s_1 . Si $z = 0$, les chemins de Cagniard se replient sur l'axe réel autour des branches et du pôle de Rayleigh. Ce pôle crée une singularité qui se propage le long de la surface libre (et seulement le long de cette surface) avec la vitesse des ondes de Rayleigh. La contribution de ce pôle peut être évaluée par la méthode des résidus (Ben Menahem et Singh, 1981 ,p 557). Cette évaluation peut aussi se faire à partir des expressions données par Achenbach (1975, p 294) pour une charge harmonique dans le temps. En effet, comme l'onde de Rayleigh n'est pas dispersive, on peut retrouver l'amplitude pour une fonction dirac à partir d'une expression harmonique :

$$u_r = - \frac{Q}{\mu} H e^{i\omega(t - \frac{x}{c_r})} \quad (3.5.42)$$

devient

$$u_r = - \frac{Q}{\mu} H \delta(t - \frac{x}{c_r}), \quad (3.5.43)$$

où c_r est la vitesse des ondes de Rayleigh et H l'expression donnée par Achenbach exprimée en fonction de η :

$$H(\eta) = \frac{\eta_r (2\eta^2 - s_t^2 - 2\sqrt{\eta_r - s_t^2} \sqrt{\eta^2 - s_1^2})}{8\eta_r(2\eta_r^2 - s_t^2) - 8\eta_r \sqrt{\eta^2 - s_1^2} \sqrt{\eta^2 - s_t^2} - 4\eta_r^3 \left(\frac{\sqrt{\eta^2 - s_t^2}}{\sqrt{\eta^2 - s_1^2}} + \frac{\sqrt{\eta^2 - s_1^2}}{\sqrt{\eta^2 - s_t^2}} \right)}. \quad (3.5.44)$$

On arrête le calcul sur le chemin de Cagniard avant le pôle, et on introduit,

HALF-SPACE VELOCITY $V_p = 4\ 000\ \text{M/S}$
CAGNIARD-DE HOOP CONTINUOUS LINE
FINITE-DIFFERENCE METHOD CROSSES

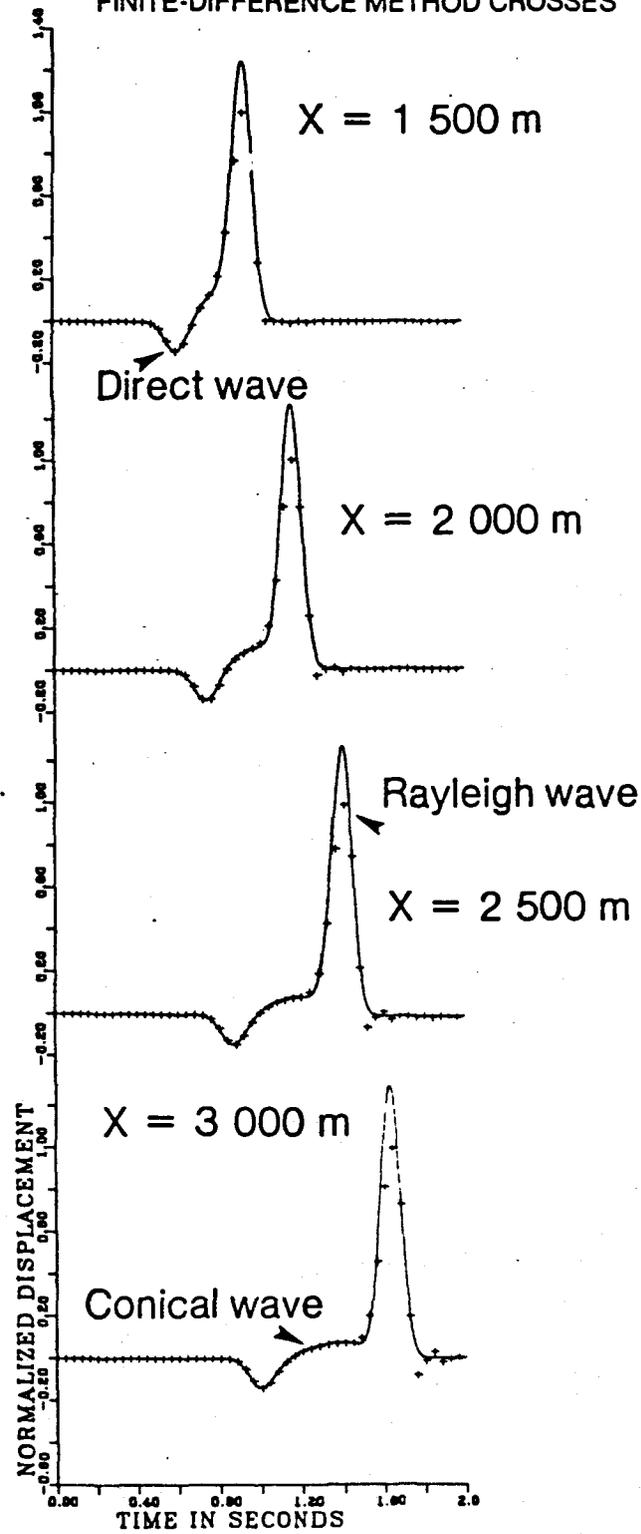


Figure 3.5.e : Comparaison entre les solutions numérique et analytique de la composante horizontale pour le problème de Lamb en différentes stations.

sous la forme de l'équation 3.5.43, la contribution de l'onde de Rayleigh. La convolution avec la fonction source $s(t)$ s'effectue en passant dans le domaine fréquentiel par une transformée de Fourier rapide.

Solution numérique.

À la surface libre, on n'incrémente que la composante τ_{zz} , pour créer une source point verticale. La composante horizontale est obtenue pour une excitation gaussienne $f(t)$ (équation 3.5.3) avec un paramètre $\alpha = 200$. Le résultat se rapproche d'une manière satisfaisante de la solution analytique dans la figure 3.5.e. On peut remarquer la propagation sans dispersion de l'onde de surface et la construction de l'onde cônica. Une interprétation avec des fronts d'onde permet de comprendre d'où provient cette onde cônica un peu spéciale (figure 3.5.f).

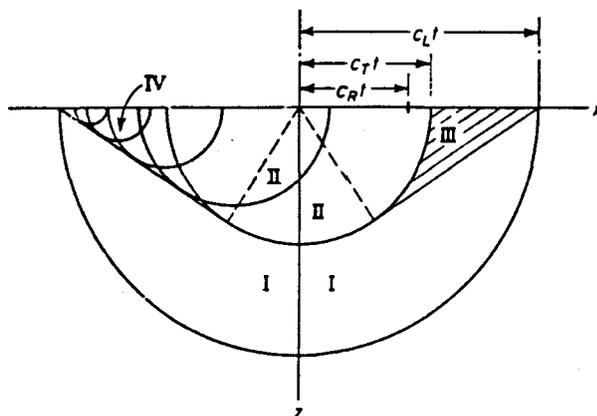


Figure 3.5.f : Schéma des fronts d'onde pour le problème de Lamb. Noter la zone des ondes cônica. (d'après Achenbach, 1975, p 307)

On constate un léger désaccord d'amplitude pour l'onde de Rayleigh.

L'amplitude numérique plus faible est la même pour les stations à 1 500 m ou 3 000 m : le décalage ne dépend donc pas de la propagation, mais de l'excitation numérique de l'onde de surface par la source. Au début, le nombre de noeuds impliqués dans la propagation est trop faible pour une excitation correcte. Une discrétisation plus fine ne serait pas suffisante car, comme la source se trouve à la surface libre, le problème n'a pas de longueur intrinsèque. On trouve un cas semblable dans le chapitre 2 pour le démarrage de la rupture self-similaire. Cependant, dans les cas usuels, la source sera en profondeur qui sera une longueur du problème. Nous voyons qu'un soin particulier doit être apporté à la discrétisation entre la source et la surface libre pour une excitation correcte des ondes de surface. Soulignons que l'accord est parfait pour l'onde cônica et, que, d'une manière générale, la comparaison est satisfaisante.

3.5.6 : Modèle de la couche altérée.

Avec un simple modèle à une couche, la comparaison des résultats se fera avec ceux obtenus par d'autres méthodes numériques, bien qu'il soit possible d'utiliser la méthode de Cagniard-de Hoop, à condition de résoudre numériquement la forme du chemin de Cagniard. L'exemple d'une couche altérée au-dessus d'un demi-espace a déjà été étudié par Kelly et al (1976), mais la source utilisée (non précisée) ainsi que leur représentation des résultats empêchent toute comparaison quantitative. Malgré tout, une comparaison qualitative sera possible, car j'ai choisi une source qui ne doit pas être loin de celle utilisée par Kelly et al.

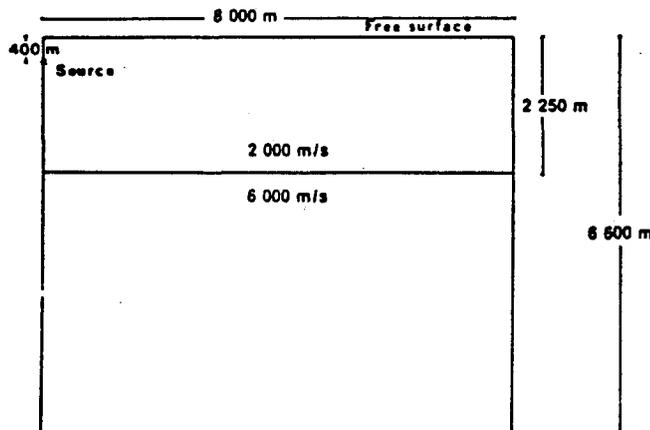


Figure 3.5.g : Géométrie du milieu à couche altérée.

La figure 3.5.g montre la géométrie du milieu. La couche supérieure a une vitesse de compression de 2 000 m/s, vitesse très faible comparée à celle du demi-espace qui est de 6 000 m/s. La densité est prise constante et égale à 2 500 kg/m³. La source dérivée de gaussienne $g(t)$, avec un

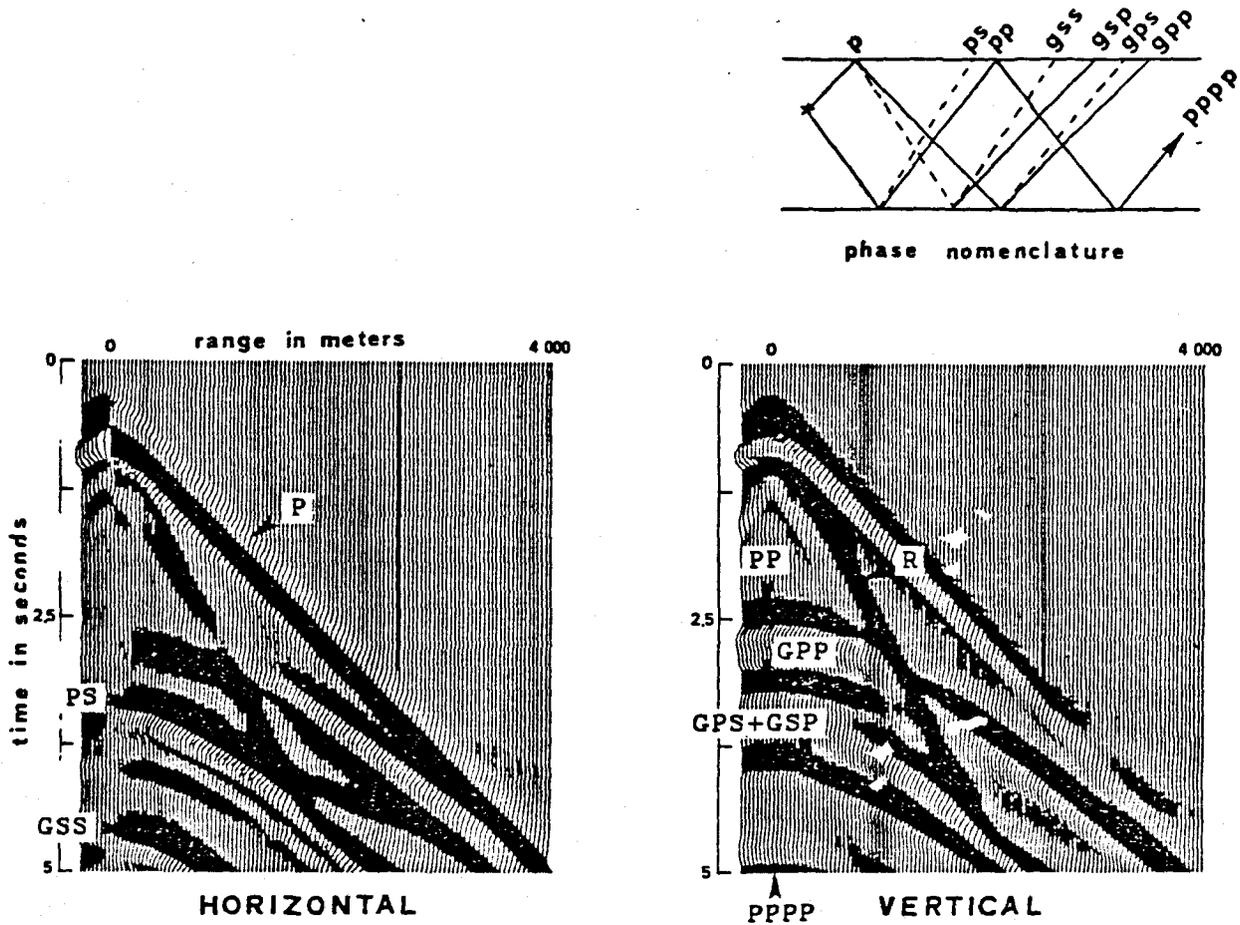


Figure 3.5.h : Sismogrammes numériques à la surface libre pour le modèle de la couche altérée. Le sismogramme horizontal est sur la gauche, tandis que le sismogramme vertical est sur la droite. Les phases sont indiquées par des flèches en accord avec la nomenclature des rais indiquée en haut à droite.

contenu spectral défini par $\alpha = 40$, est localisée près de la surface libre afin d'exciter d'une manière notable les ondes de Rayleigh.

Les profils de la figure 3.5.h durant 5 secondes mettent en lumière les traits déjà étudiés par Kelly et al (1976). L'onde directe P et l'onde de Rayleigh dominant dans les sismogrammes. Les réflexions PP et PS montrent clairement un changement de phase après l'angle critique. Les réflexions à la surface, qui semblent venir d'une image fantôme de la source au-dessus de la surface libre, s'appellent GP pour la réflexion P et GS pour la réflexion S. Ces phases sont nommées habituellement pP et pS en sismologie, mais je suivrai ici la nomenclature de Kelly et al. La phase GP est de nouveau réfléchi sur l'interface, créant une phase GPP entre les réflexions PP et PS. L'onde cônica peut être devinée, quand elle arrive avant l'onde directe P. Avec un autre choix de saturation, on l'aurait vue très clairement. La réflexion S de la phase Gp, appelée GPS, et la réflexion P de la phase GS, appelée GSP, arrivent avant la phase s'appelant GSS. La phase PPPP, qui est l'onde incidente P, deux fois réfléchi sur l'interface et une fois à la surface libre, peut être aperçue à la base du sismogramme. Suivant le type de l'onde, le maximum d'amplitude sera porté par la composante horizontale ou verticale, comme on peut s'en rendre compte sur la figure 3.5.h.

Au lieu de représenter les profils suivant la forme conventionnelle de la figure 3.5.h, j'utiliserai des images rasterisées qui conservent une plus grande symétrie entre les parties positives et négatives. Les phases de très faible énergie, qui m'intéressent, pourront alors être mieux visualisées sur ces images. Nous nous en sommes déjà rendu compte sur le cas SH.

3.5.7 : Modèle de Stephen.

Les explorations de sismique et sismologie marines ont suscité un intérêt croissant pour les interfaces liquide/solide. Que ce soit pour l'exploration pétrolière sur les plateaux continentaux, l'analyse locale dans un puits ou pour la connaissance géophysique des dorsales et zones en extension, la nécessité de modéliser correctement la pénétration des ondes sismiques sur des fonds océaniques irréguliers ou le long d'une interface liquide/solide s'est fait sentir. Est-ce que ce problème nécessite une nouvelle formulation ?

Avant de répondre à cette question pour une interface irrégulière, intéressons-nous à un fond océanique horizontal comme l'a fait Stephen (1983) auparavant. Celui-ci a comparé des résultats obtenus par la méthode de réflectivité valable pour un milieu stratifié verticalement et les méthodes de différences finies en formulations homogène et hétérogène. Il a montré qu'en utilisant les formulations hétérogènes des méthodes de différences finies standards, on obtenait des instabilités pour des sauts de vitesse et des résultats imprécis pour des discontinuités de pente. Il fallait donc utiliser la formulation homogène qui explicitait les conditions de continuité sur le fond. La propagation dans l'eau était modélisée par l'équation acoustique, tandis que la propagation dans le milieu élastique était résolue par les équations de l'élastodynamique. Modéliser un fond océanique irrégulier est une tâche informatique difficile, mais possible théoriquement, avec la formulation homogène. Les algorithmes correspondants n'ont pas été encore réalisés à ma connaissance.

Réexaminons ce problème à l'aide de la formulation hétérogène présentée ici. La géométrie est décrite dans la figure 3.5.i. Stephen a utilisé une géométrie axisymétrique avec un point source. Il a trouvé des solutions instables pour une discontinuité des vitesses et des densités. Or cette instabilité n'a rien à voir avec la géométrie cylindrique, mais provient des aspects numériques de la méthode numérique qu'il utilisait. La figure 3.5.i montre que les résultats de la formulation hétérogène développée ici sont stables. Malheureusement une comparaison directe avec les résultats de Stephen n'est pas possible, en raison de la géométrie 2-D utilisée dans cette étude. Mais les résultats montrent des amplitudes raisonnables pour tout offset et une bonne modélisation des ondes côniques à des offsets supercritiques, comme le montre le sismogramme amplifié de l'offset 4 000 m.

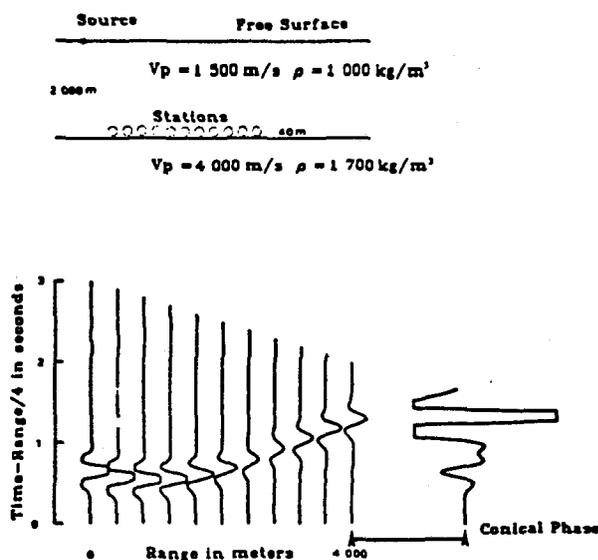


Figure 3.5.i: Sismogrammes synthétiques verticaux au-dessus d'une interface entre liquide et solide, comme le montre la géométrie dans le cas en haut à gauche. Le sismogramme à l'offset 4 000 m est amplifié pour rendre visible l'onde cônique se propageant à 4 000 m/s.

Des résultats stables avaient été obtenus auparavant par Nicoletis (1981) à une interface liquide/solide, ainsi que peut-être par Bhasavanija (1983) dans leurs thèses respectives, avec des formulations hétérogènes de schémas standards où les composantes verticales et horizontales étaient connues au même noeud. Ces résultats étaient stables car un gradient de vitesse intervenait numériquement, mais ils restaient imprécis comme ceux de Stephen. Pour améliorer la précision, Nicoletis a proposé un schéma numérique de formulation homogène en utilisant les techniques variationnelles et fit une étude très fine de la précision obtenue. Elle avait donc des résultats analogues à ceux de Stephen, et elle se trouvait de facto limitée à des structures planes.

Dans la technique décrite ici, il n'est pas nécessaire d'utiliser les conditions aux limites explicites entre le liquide et le solide. Le saut pour les vitesses (en fait les coefficients de Lamé) et les densités (en fait la légèreté) est donné au pas de discrétisation près, qui correspond à la résolution spatiale du schéma. J'ai vérifié qu'une grille deux fois plus fine n'apportait aucune modification dans la précision des calculs pour la fréquence de source choisie. Je reviendrai plus en détail sur cette notion de zone de transition pour le modèle du coin, notion qui n'est pas typique des interfaces liquide/solide, sujet de ce paragraphe. N'importe quelle géométrie d'interface peut être modélisée avec le même schéma numérique pour les liquides et les solides, sans faire intervenir les équations acoustiques dans le liquide et les équations élastodynamiques dans le solide. Cet avantage énorme est contrebalancé par l'impossibilité d'améliorer les conditions aux limites, comme on peut potentiellement le faire en formulation homogène (Kummer et Behle, 1982).

3.5.8 : Modèle du coin.

Ce modèle est un test très sévère pour la qualité des méthodes de différences finies. C'est un cas extrême de variation spatiale d'une interface, représentant une faille. Kelly et al (1976) ont montré des désaccords inacceptables entre des solutions obtenues par une formulation homogène et par une formulation hétérogène.

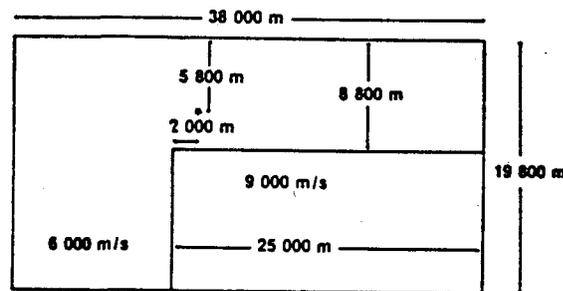
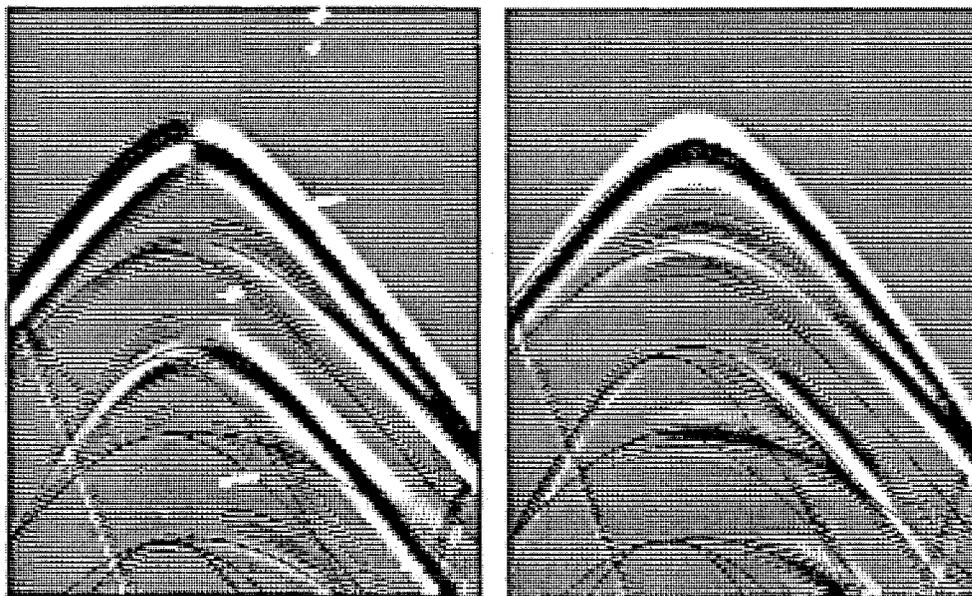
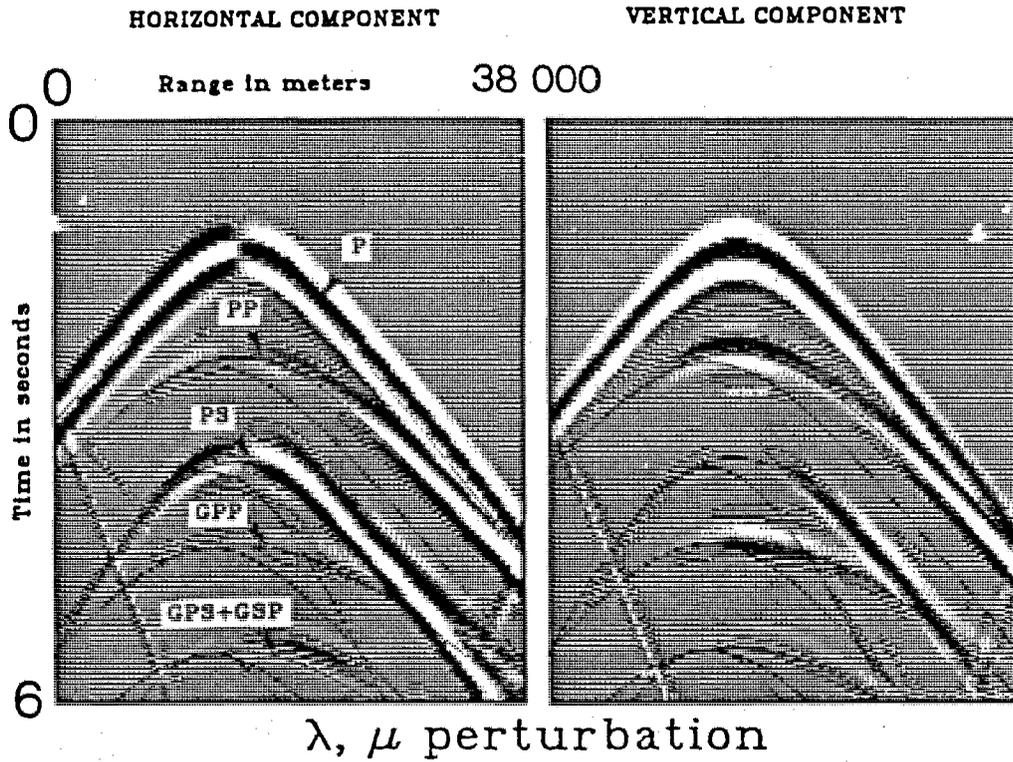


Figure 3.5.j : Géométrie du modèle du coin. Notons que la source se trouve presque à l'aplomb du mur vertical du coin

La figure 3.5.j montre la géométrie du milieu. La vitesse du milieu supérieur est de 6 000 m/s, tandis que le milieu inférieur a une vitesse de 9 000 m/s. La masse volumique du milieu inférieur est 2 500 kg/m³. La source $g(t)$ a un contenu spectral défini par $\alpha = 40$ (voir équation 3.5.4). La figure 3.5.k présente les sismogrammes durant 6 secondes à la surface libre pour $\Delta x = \Delta z = 100$ m. Les trois autres frontières ont les conditions approximatives d'absorption déjà mentionnées. Deux modèles sont



ρ perturbation

Figure 3.5.k : Sismogrammes numériques à la surface libre du modèle du coin. Le sismogramme horizontal est sur la gauche, tandis que le sismogramme vertical est sur la droite. Les deux types de perturbation engendrent des déphasages opposés. Les lignes continues sont les temps d'arrivée pour les différentes phases avec un tracé de rais.

envisagés : (1) une masse volumique homogène, où les deux régions ont la même masse volumique, et (2) des coefficients de Lamé homogènes, où les deux régions ont les mêmes λ et μ . Ces deux types extrêmes de variations mettent en relief les changements de phases pour les différentes ondes au niveau de l'interface. Les temps d'arrivée des ondes numériques sont comparés à ceux obtenus par tracés de rais. J'utiliserai la même nomenclature que pour le cas de la couche altérée, qui est toujours celle de Kelly et al. Après l'onde P directe, la réflexion PP_{refl} est associée à la diffraction PP_{diff} . La phase PS_{refl} est nettement portée sur la composante horizontale, mais interfère plus tard avec la réflexion GPP_{refl} et la diffraction GPP_{diff} , qui sont fortes près de la source et au-dessus du coin. Un autre groupe d'ondes énergétiques sont les phases GSP et GPS, qui sont les réflexions et diffractions en S de l'onde GP sur l'interface, ou les réflexions et diffractions en P de l'onde GS. Celles-ci ne sont pas occultées par la réflexion résiduelle venant de fond. Kelly et al (1976) n'observaient que cette seule réflexion, parce qu'ils n'avaient pas appliqué des conditions de radiation.

Ces différentes phases peuvent être suivies sur des instantanés du milieu à des temps successifs. La figure 3.5.1 montre la composante horizontale et verticale. Les fronts d'onde sont pointés par des flèches. J'apporterai une attention toute particulière aux fronts diffractés, fronts côniques et fronts de coin. Ce front de coin est créé par l'interférence constructive sur les deux interfaces du coin, et est typique d'une propagation latérale. Ce front, appelé phase C dans la figure 3.5.1, correspond à l'onde réfractée P sur l'interface horizontale, qui se trouve ensuite réfléchi comme une onde S sur le mur vertical.

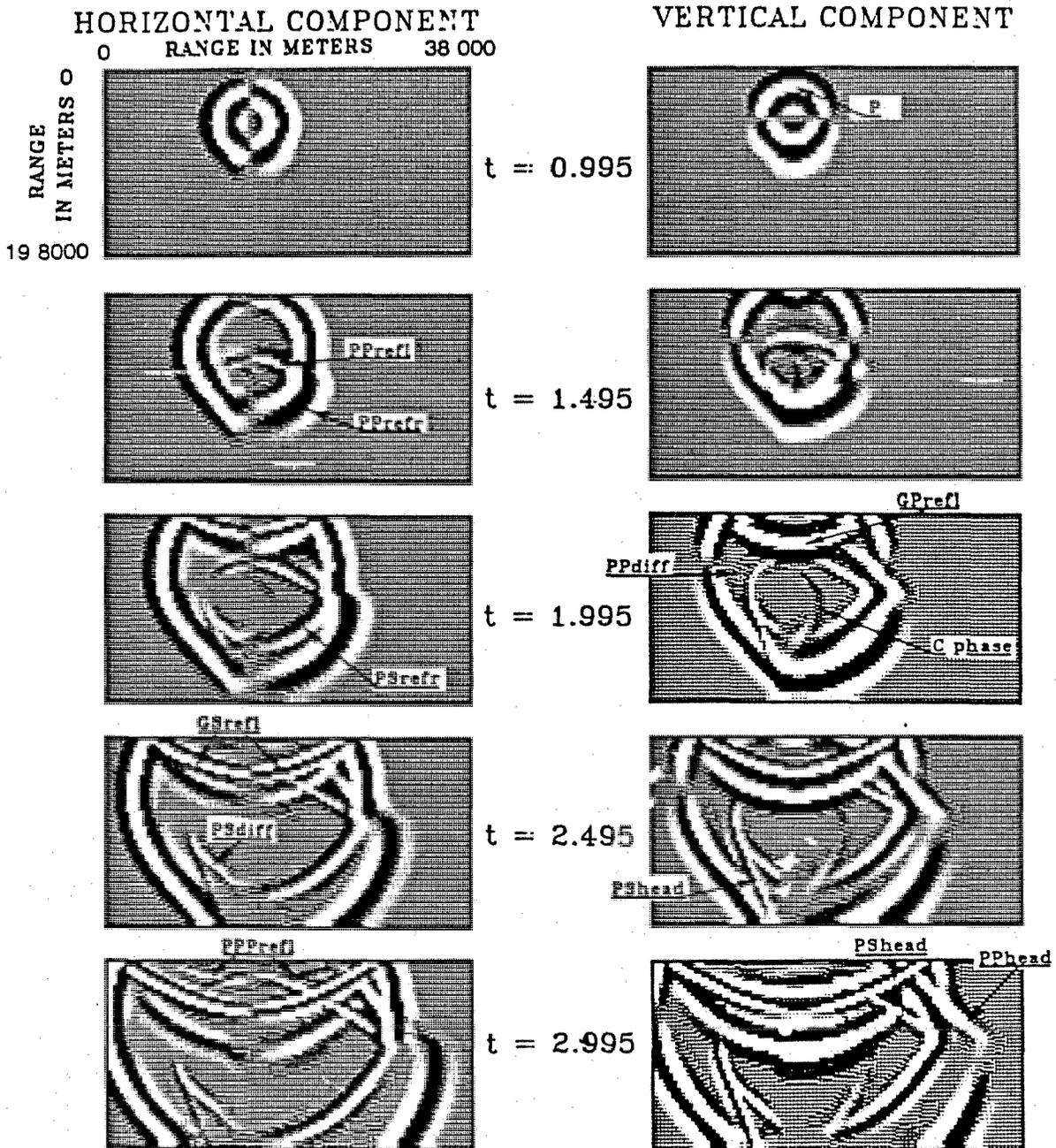


Figure 3.5.1 : Instantanés du modèle du coin à différents instants. La composante horizontale est sur la gauche, tandis que la composante verticale est sur la droite. Les fronts d'onde sont désignés par des flèches.

Revenons au désaccord entre les deux formulations hétérogène et homogène. Kelly et al présentent comme une explication possible que le lissage numérique des coefficients de Lamé dans la formulation hétérogène introduit une zone de transition supérieure au pas de la grille, zone qui n'existe pas dans la formulation homogène en raison des conditions aux limites explicites. Avec la puissance croissante des ordinateurs, on peut réexaminer cette question avec des arguments d'échelle. En divisant le pas de la grille, la zone de transition se réduit. Par conséquent, son effet devrait diminuer. Ce n'est pas le cas ! En prenant $\Delta x = 200$ m, $\Delta x = 100$ m et $\Delta x = 50$ m, les résultats sont remarquablement stables et montre un signal PS_{diff} très faible dans la direction s'éloignant de la source, comparé à celui obtenu dans l'autre direction. Ce signal PS_{diff} n'est pas aussi fort que celui obtenu par la formulation homogène de Kelly et al (1976), résultat confirmant numériquement les résultats de Gupta (1966) sur des zones de transition modélisées analytiquement. Une source avec une longueur d'onde principale de 10 ou 20 noeuds ne permettra pas de distinguer une zone de transition de 1, 2 ou 3 noeuds d'un changement soudain des paramètres physiques. La source n'a pas assez de résolution pour cela.

Il faut donc chercher une autre explication à ce désaccord que le lissage numérique. Je donnerai deux raisons en faveur d'un signal PS_{diff} faible, qui montrent ma préférence pour le résultat de la formulation hétérogène. Il faudrait revoir le résultat de la formulation homogène à l'aide du programme informatique utilisé avec des arguments numériques d'échelle.

L'énergie de l'onde incidente est divisée en deux parties à une interface plane : la partie réfléchie remontant vers le haut, et la partie réfractée allant vers le bas. La phase de diffraction, qui provient de

l'arrêt brutal de l'interface, relie la phase réfléchie montante et la phase incidente descendante, si bien qu'une petite partie de l'énergie est susceptible de remonter avec le front diffracté, alors que l'onde incidente emporte la plus grande part de l'énergie vers le bas.

Une étude analytique est possible, grâce aux solutions asymptotiques à hautes fréquences. On pourrait comparer les solutions numériques pour une source à haute fréquence avec celles obtenues par la théorie géométrique de la diffraction (Keller, 1962) appliquée aux ondes élastiques. Au lieu de procéder ainsi, je vais argumenter qualitativement d'après des résultats obtenus par Achenbach et al (1982). Le modèle du coin n'est pas très différent de ce point de vue du modèle d'une faille semi-infinie. La contribution du mur vertical du coin manque, mais la contribution du mur horizontal est là, principalement son interruption brutale au coin. En illuminant cette frontière horizontale par une onde compressive faisant un angle θ_1 avec l'axe x , Achenbach et al (1982, p 126-148) ont obtenu les coefficients de réflexion-diffraction PS. Pour tous les angles θ_1 entre δ et $\pi/2$ de cette onde plane, l'amplitude est d'un ordre de grandeur inférieur dans la direction s'éloignant de la source que dans l'autre direction.

Comme conclusion temporaire à cette longue discussion, je dirai que la formulation hétérogène de Kelly et al (1976) et celle présentée ici montrent des résultats raisonnables tandis que la formulation homogène de Kelly et al (1976) exhibe des traits difficiles à interpréter. Ma préférence va donc aux premiers. Une analyse plus précise nécessiterait le programme informatique de la formulation homogène.

VERTICAL COMPONENT

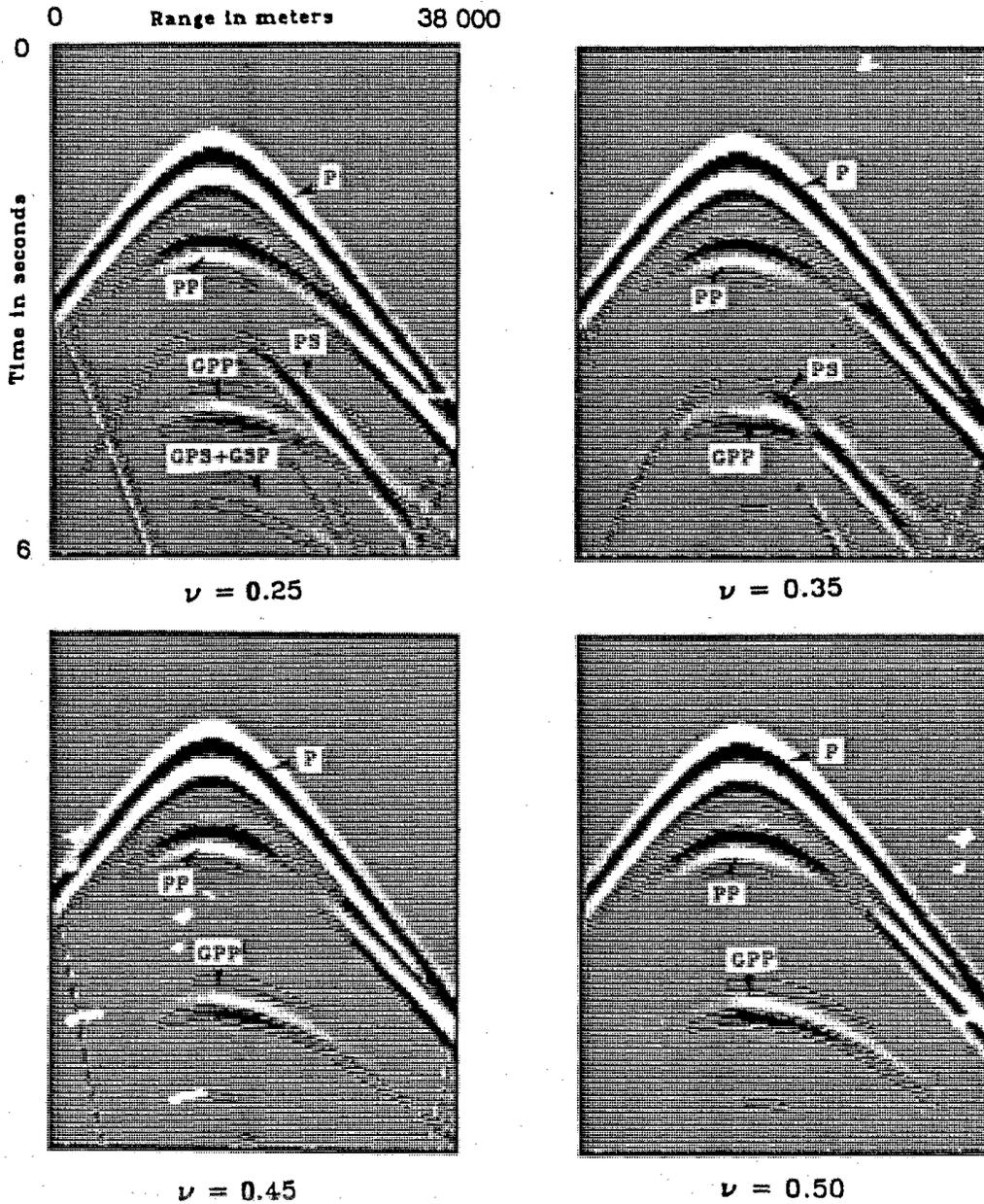


Figure 3.5.m : Evolution des sismogrammes verticaux quand le milieu supérieur du modèle du coin passe d'un état solide à un état liquide. Le coefficient de Poisson ν va de 0.25 à 0.5.

3.5.9 : Modèle du coin liquide.

Pour illustrer une frontière irrégulière entre un milieu liquide et un milieu solide, quoi de plus naturel que de prendre le cas du coin avec un milieu supérieur liquide. C'est ce que je vais faire dans ce paragraphe, en faisant tendre progressivement le milieu supérieur d'un état élastique vers un état liquide.

La figure 3.5.m montre des sismogrammes pour une même configuration que la figure 3.5.k, mais avec des coefficients de Poisson ν variant de 0.25 à 0.5. On remarque que la signature de l'onde directe P et des réflexions-diffractions PP reste la même pour les différents coefficients de Poisson, pendant que l'onde PS se déplace vers le bas de la fenêtre où l'on regarde puisque la vitesse des ondes S décroît progressivement et disparaît complètement pour $\nu = 0.5$. Des petites oscillations venant de l'onde S générée par la surface libre peuvent être observées quand le nombre de noeuds à l'intérieur de la longueur d'onde S est trop petit. Pour tout schéma, ce nombre tend vers zéro quand ν tend vers 0.5 !

Une meilleure compréhension de ces sismogrammes découle naturellement des instantanés du milieu pour différents coefficients de Poisson ν . La figure 3.5.n montre la composante verticale au temps 2.995 s à l'intérieur du milieu. Considérons d'abord l'onde GS suivant la GP et précédant légèrement la PPP dans le cas élastique. Pour $\nu = 0.45$, la GS se trouve maintenant derrière la PPP, tandis qu'elle disparaît pour toute autre valeur supérieure de ν . De même, les réflexions-diffractions sur les interfaces liquide/solide sont de plus en plus confinées avec les ondes

VERTICAL COMPONENT

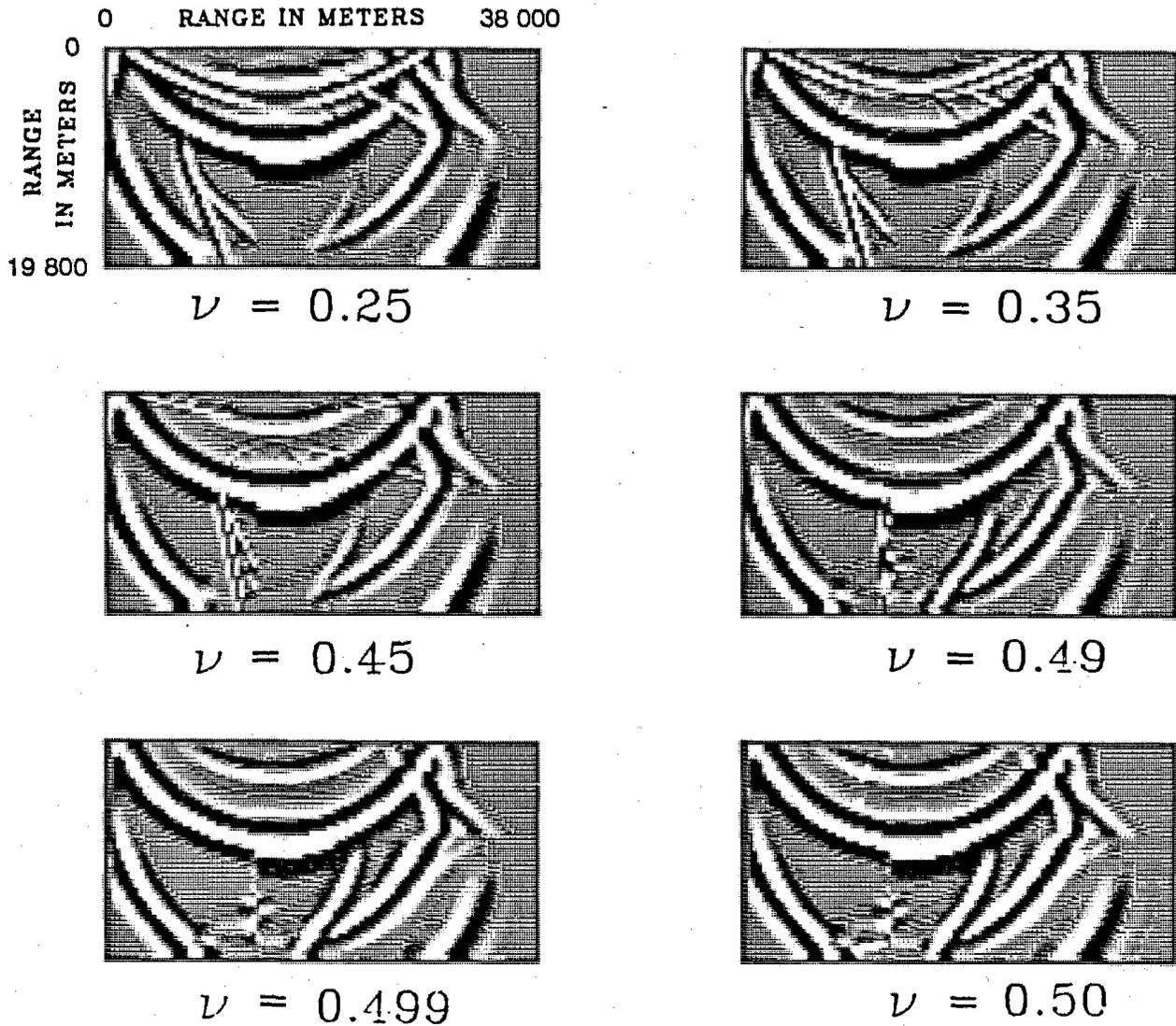


Figure 3.5.n : Instantanés du modèle du coin pour différents coefficient de Poisson au même instant $t=2.995$ s. La figure 3.5.l aide à repérer les différents fronts

côniques correspondantes le long de ces interfaces. A l'intérieur du milieu inférieur élastique, l'onde réfractée PS est toujours visible et légèrement renforcée, mais moins que l'onde de coin C qui subit une métamorphose entre le cas élastique et le cas liquide. Si celle-ci pouvait être vue ensuite en surface pour une raison ou une autre ! La source étant sub-verticale par rapport à l'interface verticale, les conditions d'excitation des ondes de Stoneley sont vérifiées pour des coefficients de Poisson supérieurs à $\nu = 0.499$. Une étape transitoire est observée pour un $\nu = 0.49$.

Ce dernier résultat remarquable, où l'on peut suivre les transformations des ondes dans les sismogrammes et les instantanés, associées aux évolutions du comportement d'un milieu, m'autorise à clore cette section en passant à une conclusion partielle sur la modélisation par différences finies dans un milieu 2-D des ondes P-SU.

3.5.10 : Conclusion.

J'ai montré que les équations élastodynamiques peuvent être résolues par la méthode de différences finies déjà utilisée dans les modèles de faille plane (chapitre 2). Le respect de la symétrie des différences finies centrées implique que les différentes grandeurs ne sont pas connues aux mêmes points de la grille numérique. Cette notion nous est assez familière maintenant. Les vitesses et les contraintes, quantités conjuguées, sont réparties sur une grille en quinconce, comme dans le cas SH. De plus, les deux composantes de la vitesse ne peuvent pas être connues au même noeud. Ce point implique un comportement original de ce schéma que j'ai analysé par les méthodes spectrales usuelles en analyse numérique et que j'ai illustré par divers exemples

Retenons que le schéma est valable pour tout coefficient de Poisson, et nous permet donc d'introduire des milieux liquides de forme quelconque. Quand les vitesses des ondes S sont faibles, il est très difficile de respecter la règle d'or de 10 noeuds par longueur d'onde à modéliser pour les ondes S et de conserver en même temps une distance de propagation suffisante. Mais cette condition concerne des ondes de peu d'énergie : plus cette condition est difficile à respecter, plus faible est l'onde. Le cas extrême est celui du liquide où aucun problème ne subsiste car il n'y a plus d'onde ! Autrement dit, il est vain de chercher à modéliser une onde se propageant à quelques mètres par seconde sur plusieurs kilomètres par des méthodes de différences finies, mais, dans des conditions pratiques, cette onde sera très faible par rapport aux ondes P dominantes.

Les seules limitations de ce schéma numérique sont celles venant de la dispersion numérique (source basse fréquence comparée à la longueur de propagation) et de la dimension finie de la grille (conditions d'absorption approximatives).

A côté de ces restrictions, il peut être très difficile d'interpréter les sismogrammes pour des milieux complexes. On peut s'aider des instantanés comme au cours de cette section. Mais cela peut s'avérer insuffisant. D'autres moyens sont possibles, par exemple en construisant des sismogrammes et des instantanés par soustraction entre le milieu étudié et un milieu hypothétique ne différant du premier que sur le point que l'on veut étudier. Dans le sens d'une meilleure compréhension des sismogrammes, la théorie des rais et ses extensions peuvent être très utiles pour l'interprétation comme nous l'avons déjà remarqué pour le cas SH.

Enfin, une autre alternative à ces méthodes d'essai-erreur réside dans les méthodes d'inversion qui ne nécessitent pas la compréhension humaine des différentes phases. Nous verrons au chapitre 4 un premier effort dans un cas acoustique d'une inversion non-linéaire.

CONCLUSION ONDE

Nous voici arrivés à la fin du deuxième thème de mon étude : la propagation des ondes élastiques dans les milieux hétérogènes. J'ai abordé la géométrie 1-D et les géométries 2-D pour les ondes SH et pour les ondes P-SV. Quel enseignement peut-on déduire de ce travail ?

Les méthodes numériques par discrétisation dans le domaine espace-temps sont un outil puissant pour le calcul et l'analyse des ondes dans des milieux hétérogènes. Au sein de ce groupe, le schéma hétérogène par différences finies centrées du système élastodynamique donne des résultats remarquables quant à la stabilité.

La variation des paramètres du milieu est prise en compte dans les équations différentielles : les interfaces ne sont donc pas traitées explicitement, mais implicitement. Ce peut être un inconvénient, si la précision du schéma est insuffisante sur l'interface considérée, mais c'est surtout un avantage pour les interfaces à géométries complexes. Les paramètres, qui dépendent de la géométrie étudiée, peuvent être quelconques : une interface liquide/solide ne posera pas de problèmes de stabilité, ni de résolution à la précision du schéma considéré.

La simplification est importante, car point n'est besoin de faire appel à tel ou tel schéma plus ou moins adapté à tel ou tel milieu. Le schéma déduit du système élastodynamique permet de tout modéliser. Toutefois, il ne permet pas d'améliorer la précision des conditions aux limites par rapport à la précision sur la propagation et n'est donc pas toujours le plus efficace.

Les limitations à la modélisation par cette approche numérique sont (1) la taille du milieu numérique qui sera toujours finie, et (2) la fréquence limite que l'on peut modéliser suivant la discrétisation du milieu. Pour s'affranchir de la première limitation, on peut augmenter la taille du modèle, mais les machines électroniques sont limitées dans leur mémoires. Par un algorithme numérique, j'ai pu m'affranchir de ce problème associé à la taille de la mémoire centrale de l'ordinateur, au détriment des entrées-sorties sur disque. Potentiellement des milieux de grande taille peuvent être modélisés, qui permettent de supprimer toute réflexion parasite. D'une manière plus réaliste, on peut réduire ces réflexions parasites par une amélioration des conditions d'absorption sur les bords numériques. Ici s'ouvre un vaste champ de recherche qu'il serait bon d'aborder dans le futur avec le schéma construit dans ce travail. La deuxième limitation est une caractéristique intrinsèque des méthodes numériques qui procèdent par discrétisation. On ne pourra pas propager le signal sur de grandes distances sans une dispersion importante détruisant la solution. On ne pourra s'en affranchir que difficilement, pour ne pas dire pas du tout.

Après l'étape de la modélisation, il faut interpréter les résultats numériques, interprétation qui peut s'avérer presque aussi difficile que celle de données réelles. Un avantage considérable par rapport aux expériences réelles est la connaissance du milieu et l'obtention d'instantanés du milieu. L'analyse des instantanés permettra de mieux cerner les arrivées d'énergie aux sismogrammes. J'ai déjà insisté sur cet aspect important qui nécessite des moyens graphiques sophistiqués pour des applications routinières. On peut alors interpréter les résultats en surface obtenus pour des milieux compliqués.

On peut exploiter plus finement la connaissance du milieu, en créant des milieux hypothétiques où certaines couches ont été éliminées. On obtient des sismogrammes et des instantanés différentiels - par différence entre le sismogramme complet et les sismogrammes hypothétiques, de même pour les instantanés - qui peuvent servir à cerner la contribution de la couche manquante. Cette étape, qui n'a pas été nécessaire pour la présentation des résultats dans des milieux simples : une interface, le deviendra pour des milieux plus compliqués comme nous le verrons dans des applications au chapitre 4.

Je pense donc que ce travail apporte une méthode numérique simple pour la modélisation de la propagation des ondes élastiques en milieu hétérogène, y compris en présence de liquides. La preuve la plus probante, loin de toute considération théorique, en est les exemples déjà donnés dans ce chapitre 3 et ceux qui vont suivre dans le chapitre 4.

CHAPITRE 4

"Sapiens nihil affirmat quod non probet."

La sagesse populaire.

INVERSION NON-LINEAIRE : PREMIERS RESULTATS.

4.1.1 : Introduction.

On distingue habituellement deux grandes classes d'inversion de données sismiques : l'inversion des temps de parcours pour les ondes de volume (Aki et al, 1976) ou pour les ondes de surface (Montagnet et Nataf, 1986) et l'inversion de la forme des signaux sismiques (Clayton et Stolt, 1981; Woodhouse, 1983; Tanimoto, 1984..). L'inversion proprement dite peut être linéaire (ou linéarisée) ou non-linéaire.

Si le modèle "initial" n'est pas trop différent du modèle réel que l'on cherche, l'inversion linéarisée construira un modèle final proche du modèle réel : malheureusement, il n'y a pas de moyens pratiques pour savoir si la linéarisation est une hypothèse correcte ou non pour un problème donné. Il faut s'adresser aux techniques inverses non-linéaires. On peut distinguer deux choix de base : une exploration la plus complète possible de l'espace des paramètres (par un balayage systématique ou par des procédures aléatoire - méthode de Monte-Carlo -), ou une méthode locale d'approche. La première option a l'avantage d'éviter des minimums secondaires locaux qui ne correspondent pas à la solution cherchée, mais elle s'avère trop lourde pour les ordinateurs actuels. La deuxième option obtient la solution correcte quand le modèle initial est à l'intérieur de la vallée centrale où se trouve le minimum global, solution du problème, quel que soit le choix du

modèle initial. Par rapport aux théories linéaires, le modèle de départ joue un rôle moins déterminant dans la recherche de la solution.

Tarantola (1984) a proposé une approche du problème général non-linéaire pour l'interprétation des données acoustiques. Il fallait mettre en oeuvre numériquement une telle approche. Tel fut le travail entrepris par Gauthier (1984) qui a abouti à des résultats sur des données synthétiques (Gauthier et al, 1986). Je me propose de les présenter succinctement comme une application de la méthode de différences finies développée dans ce travail pour le cas 2-D SH, puisque celle-ci est utilisée pour effectuer le problème direct.

D'autres équipes ont abordé des problèmes analogues d'inversion non-linéaire, comme Kolb et al (1986) dans le cas de milieux stratifiés. Par un choix judicieux des données (durée totale et contenu fréquentiel du signal) lors d'inversions répétées, ils furent capables de retrouver la structure du milieu tant dans ses discontinuités que dans les vitesses des différentes couches.

Après avoir rappelé les principales étapes de l'inversion non-linéaire, je discuterai le problème direct acoustique pour le mettre sous une forme équivalente au cas 2-D SH, ainsi que les extensions nécessaires pour aborder l'inversion. Un point diffractant sera le premier exemple qui éclaircira les traits essentiels de la procédure d'inversion. Différentes géométries suivront, qui permettront de cerner les différents cas où l'algorithme numérique est capable de retrouver les paramètres du milieu.

Inversion page 4.1.3

Je renvoie le lecteur à l'article de Gauthier et al (1986) pour trouver les détails mathématiques de l'inversion considérée dans cette section.

4.1.2 : Le problème inverse.

Deux paramètres physiques décrivent un milieu acoustique : la masse volumique $\rho(\mathbf{x})$ et le module d'incompressibilité $K(\mathbf{x})$. Nous supposons que la masse volumique est uniforme dans le milieu, ce qui est une bonne approximation pour les roches terrestres. Le problème est de trouver $K(\mathbf{x})$, fonction qui sera discrétisée sur une grille de 200×200 points pour les simulations numériques.

Pour un ensemble de sources \mathbf{x}_s avec s variant de 1 à n_s , on enregistre la pression $p(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)$ en des géophones définis par \mathbf{x}_r avec r variant de 1 à n_r pour un temps allant de θ à T . $p(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)_{obs}$ indique les valeurs mesurées et $p(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)_{cal}$ les valeurs prédites par le problème direct pour un milieu donné. La manière la plus simple de formuler le problème inverse est la suivante : quel est le modèle $K(\mathbf{x})$ qui permet de synthétiser des sismogrammes $p(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)_{cal}$ qui soient les plus proches des sismogrammes $p(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)_{obs}$? Un critère de proximité peut être la norme des moindres carrés. Le problème sera de trouver $K(\mathbf{x})$ qui minimise la fonction S suivante :

$$S = \sum_{s=1}^{n_s} \int_{\theta}^T dt \sum_{r=1}^{n_r} \left[p(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)_{obs} - p(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)_{cal} \right]^2, \quad (4.1.1)$$

Ce critère peut s'améliorer grâce à la prise en compte des erreurs sur les données et de l'information a-priori sur le modèle.

Il existe des méthodes variées pour trouver le minimum d'une fonction qui n'est pas forcément quadratique : les méthodes de gradient ou les méthodes de Monte-Carlo. Les méthodes de gradient ont le désavantage de converger vers les minimums locaux, au lieu de trouver le minimum global, mais elles ont l'avantage d'être très efficaces (Bevington, 1969).

La méthode de gradient la plus simple est la méthode de plus grande pente. Elle permet d'évaluer un nouveau modèle $K(\mathbf{x})_{n+1}$ à partir d'un modèle $K(\mathbf{x})_n$ suivant la formule :

$$K(\mathbf{x})_{n+1} = K(\mathbf{x})_n + \alpha_n \gamma(\mathbf{x})_n, \quad (4.1.2)$$

où $\gamma(\mathbf{x})_n$ correspond à la direction de plus grande pente pour la fonction S et α_n est un facteur constant de proportionnalité qui peut être estimé analytiquement ou choisi plus ou moins empiriquement. La philosophie de la méthode est simple : puisque $\gamma(\mathbf{x})_n$ est un gradient pour S , la valeur de S pour $K(\mathbf{x}) + \alpha_n \gamma(\mathbf{x})_n$ doit être plus faible que celle pour $K(\mathbf{x})$ pour un α_n suffisamment petit. En répétant l'opération plusieurs fois, on doit pouvoir obtenir une valeur de S assez faible pour conclure que les sismogrammes calculés s'ajustent correctement aux sismogrammes observés. La vitesse de convergence et l'existence de minima secondaires sont les questions posées pour les configurations d'expériences rencontrées en sismologie et en sismique.

La tâche principale consiste en l'évaluation de $\gamma(\mathbf{x})_n$ à chaque itération, calcul qu'il nous faut examiner en détail. Si $K(\mathbf{x})_n$ indique le modèle courant, $p(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)$ la pression prédite par ce modèle et $\delta p(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)$ les résidus aux géophones - différences entre la pression observée et la pression estimée -, on définit un nouveau champ $\psi(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s)$ en propageant à l'envers du temps les résidus évalués aux géophones. Ces résidus agissent comme des sources secondaires qui renvoient dans le milieu l'information ψ qui manque aux géophones pour un ajustement correct des données observées et des données estimées. On peut alors estimer ce qui manque en chaque point (voir Gauthier et al (1986) pour des références) par :

$$\gamma(\mathbf{x})_n = \frac{1}{K(\mathbf{x})_n^2} \sum_{s=1}^{ns} \int_{\theta}^T dt \dot{p}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s)_n \dot{\psi}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s)_n \quad (4.1.3)$$

Cette équation signifie que la valeur qu'aura un diffractant au point \mathbf{x} pour expliquer le champ manquant est la corrélation dans le temps des dérivées temporelles du champ calculé p et du champ manquant ψ . La corrélation pour l'ensemble des sources est simplement la somme des corrélations pour chaque source.

La deuxième tâche est une estimation approximative de α_n . Pour cela, la résolution d'un problème direct pour une perturbation infinitésimale de $K(\mathbf{x})_n$ par $\epsilon \gamma(\mathbf{x})_n$ permet de connaître la courbure locale de la fonction S et

de choisir le α_n qui donne le minimum associé à cette courbure. D'autres procédures peuvent être mises en oeuvre, mais celle que nous avons choisie est relativement stable et peu coûteuse si le problème direct se résout rapidement.

On arrête le processus d'itération quand les sismogrammes observés et prédits sont proches les uns des autres ou quand la fonction S ne décroît plus d'une façon notable. Telles sont les principales étapes du problème inverse dont une présentation plus détaillée se trouve dans Gauthier et al (1986) et les références associées.

4.1.3 : Les extensions du problème direct.

Les performances de la procédure d'inversion dépendent du choix de la méthode employée pour modéliser le problème direct. La théorie des rais, ainsi que ses extensions, est employée dans les formulations inverses linéarisées (Chapman et Orcutt, 1985a) ou dans les formulations inverses non-linéaires (Mora, 1985), car c'est une méthode de faible coût. Sa limitation principale vient de l'approximation haute fréquence : les paramètres physiques du milieu doivent varier lentement sur plusieurs longueurs d'onde. Même ainsi, un gradient très faible de vitesse créera une réflexion basse fréquence qui ne sera pas calculée par la théorie des rais concernée seulement par les signaux haute fréquence (Chapman et Orcutt, 1985b). De plus, les discontinuités de premier ordre, que sont les interfaces, sont prises en compte explicitement par les coefficients de réflexion/transmission : un ensemble d'ondes converties ne sera pas alors modélisé - ondes guidées -, ou seulement approximativement - ondes diffractées -, à moins qu'une théorie asymptotique spécifique soit utilisée (Keller, 1962).

D'un autre côté, les méthodes numériques fondées sur la discrétisation spatio-temporelle de l'équation des ondes ou des systèmes équivalents synthétisent toutes les ondes arrivant en un géophone comme un tout. Cette modélisation globale rend l'interprétation difficile, mais n'empêche pas l'application de procédures d'inversion. Les limitations sont le contenu basse fréquence de l'onde propagée par rapport au pas de la

grille numérique et le coût de calcul qui peut s'avérer prohibitif pour la mise en oeuvre de l'inversion.

Parmi les différentes manières de discrétiser l'équation des ondes ou ses équivalents, la formulation hétérogène en différences finies du système élastodynamique simplifie le processus d'inversion, car les interfaces sont traitées implicitement comme des variations des paramètres du milieu. Seules des perturbations volumiques interviennent.

Le système élastodynamique est le suivant :

$$\frac{\partial p(\mathbf{x},t)}{\partial t} = K(\mathbf{x}) \operatorname{div}(\mathbf{w}(\mathbf{x},t)) + \tilde{S}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_S),$$

et

(4.1.4)

$$\frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = L(\mathbf{x}) \operatorname{grad}(p(\mathbf{x},t)),$$

où $p(\mathbf{x},t)$ est la pression dans le milieu et $\mathbf{w}(\mathbf{x},t)$ la vitesse de la particule. K est le module d'incompressibilité, tandis que L est l'inverse de la masse volumique. La première équation est la loi de Hooke, et la deuxième est le principe fondamental de la dynamique. La fonction source \tilde{S} est une source localisée à $\mathbf{x} = \mathbf{x}_S$ si $\tilde{S}(\mathbf{x},t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) \tilde{S}(t)$. Cette source est introduite dans la loi de Hooke. Dériver la première équation par rapport au temps et l'introduire dans la deuxième équation conduit à l'équation d'onde vérifiée par la pression :

$$\frac{1}{K(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_S) - \operatorname{div} \left[\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \operatorname{grad} p(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_S) \right] = S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_S), \quad (4.1.5)$$

où la fonction source S se déduit de \tilde{S} par :

$$S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_S) = \frac{1}{K(\mathbf{x})} \frac{\partial \tilde{S}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_S)}{\partial t}. \quad (4.1.6)$$

Si $S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_S) = 0$ pour $t \leq 0$, la solution en pression du système élastodynamique est identique à celle de l'équation d'onde pour les mêmes conditions initiales et les mêmes conditions aux limites. Le problème acoustique se trouve converti en un problème SH. Aucun avantage pour le problème inverse n'a été acquis par ces manipulations. Nous nous sommes ramenés à un problème étudié dans le chapitre 3.

Toutefois, il nous faut développer une extension de cette modélisation pour rendre possible la procédure d'inversion. Pour effectuer la corrélation temporelle des deux champs p et ψ au sein du milieu, il est nécessaire de posséder ces deux champs au même instant. Pour éviter de stocker le champ p aux différents temps de calcul et de rappeler ensuite celui-ci à chaque instant pour la corrélation, il est préférable de propager aussi à l'envers le champ p à partir du champ final p à l'instant T . A condition de faire attention aux conditions aux bords du milieu, le champ obtenu par propagation à l'envers est le même que celui de la propagation à l'endroit à la précision numérique près.

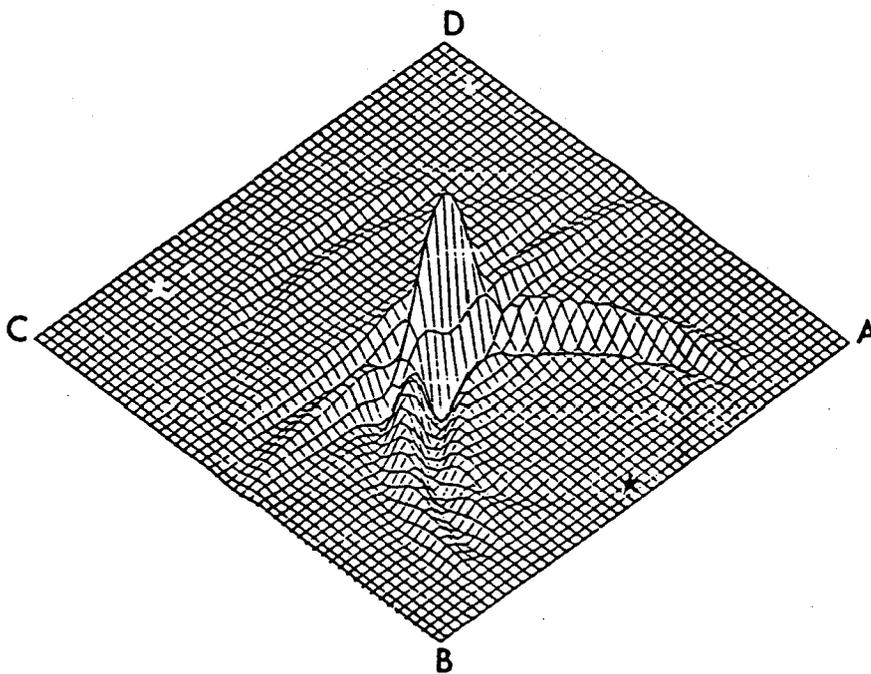


Figure 4.1.a : Le milieu est défini sur une grille de 50 x 50 points avec une valeur homogène de K , sauf en un point diffractant. Les quatre frontières sont absorbantes et une seule source a été utilisée. Les capteurs sont mis sur la ligne A-B. Le gradient obtenu pour la première itération est représenté avec un pic à la bonne position du diffractant, mais avec un étalement et des parasites ("sourire").

4.1.4 : Les exemples numériques.

Diffacteur point

Considérons un milieu homogène défini par un module d'incompressibilité K_0 et introduisons un point diffractant δK . Les quatre bords du milieu numérique de 50×50 points sont partiellement absorbants. Pour une seule source sur un bord, les sismogrammes sont enregistrés sur une ligne située légèrement en dessous de cette source. A partir du milieu homogène qui sert de milieu initial, on procède à une première itération qui donne la figure 4.1.a. Cette figure montre le gradient $\gamma(x)$, dont la valeur maximum se trouve à l'emplacement du diffracteur, mais dont on constate un étalement sur plusieurs noeuds du maillage. Le "sourire" provient de la géométrie particulière de la source et de la ligne de récepteurs.

La répartition régulière des récepteurs sur une ligne est très importante pour que les ondes générées par les résidus soient cohérentes. Si quelques récepteurs manquent, les résidus peuvent interférer destructivement et produire des pics bizarres dans le gradient.

Recommençons l'expérience avec 9 sources. La valeur maximum domine clairement les effets de bruit, spécialement les "sourires", comme le montre la figure 4.1.b. Le diffracteur se trouve ainsi localisé avec une résolution spatiale correspondant à la longueur d'onde principale de la source.

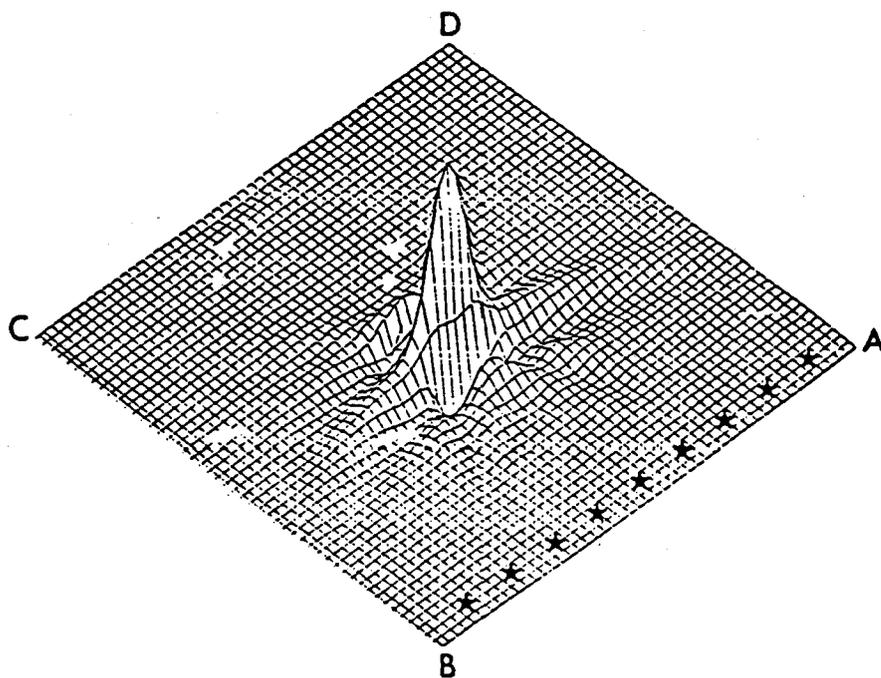


Figure 4.1.b : Le gradient se trouve dans le même milieu que dans la figure 4.1.a, mais avec 9 sources. Le "sourire" a disparu.

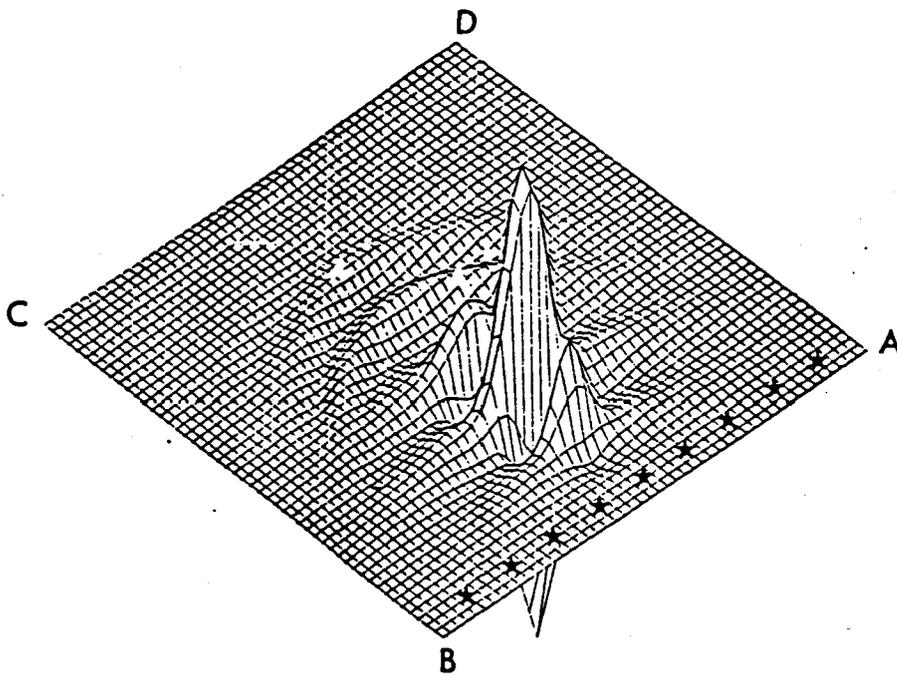


Figure 4.1.c : Le gradient avec la même configuration que la figure 4.1.b, mais une surface libre est placée juste au-dessus des sources et récepteurs. Les images des sources introduisent des parasites.

Introduisons une surface libre au lieu d'une surface absorbante, pour nous rapprocher de conditions plus réalistes. La source et les récepteurs se trouvent légèrement au-dessous de cette surface. La figure 4.1.c montre le gradient correspondant, avec les mêmes traits que la figure 4.1.b. Toutefois, l'amplitude des lobes secondaires est plus importante pour deux raisons. La source possède une image par rapport à la surface libre qui complique le signal temporel. De même, l'existence d'ondes réfléchies et diffractées entre la surface libre et le point diffractant perturbe aussi le signal temporel. L'amplitude des parasites est grossièrement inversement proportionnelle aux nombres de sources. Les réduire pourra s'effectuer en augmentant ce nombre de sources.

Que se passe-t-il dans le cas de deux diffracteurs ? La figure 4.1.d illustre le cas de deux points diffractants de perturbation égale ($\delta k_1 = \delta k_2$), mais situés à des profondeurs différentes par rapport à la surface libre. Les valeurs maximales du gradient sont pourtant très différentes avec une prédominance du diffracteur le plus proche de la surface libre, i.e. des sources et des récepteurs. Dans cette configuration rappelant les géométries de sismique réflexion, l'amplitude du gradient décroît proportionnellement à la racine de la distance à la surface. Nous voyons apparaître l'importance de l'évaluation du pas, à faire dans la direction de la plus grande pente pour une convergence raisonnable. Un "préconditionnement" du gradient pourra, dans les algorithmes pratiques, accélérer la convergence. Le résultat de la figure 4.1.d suggère de remplacer l'équation 4.1.3 par :

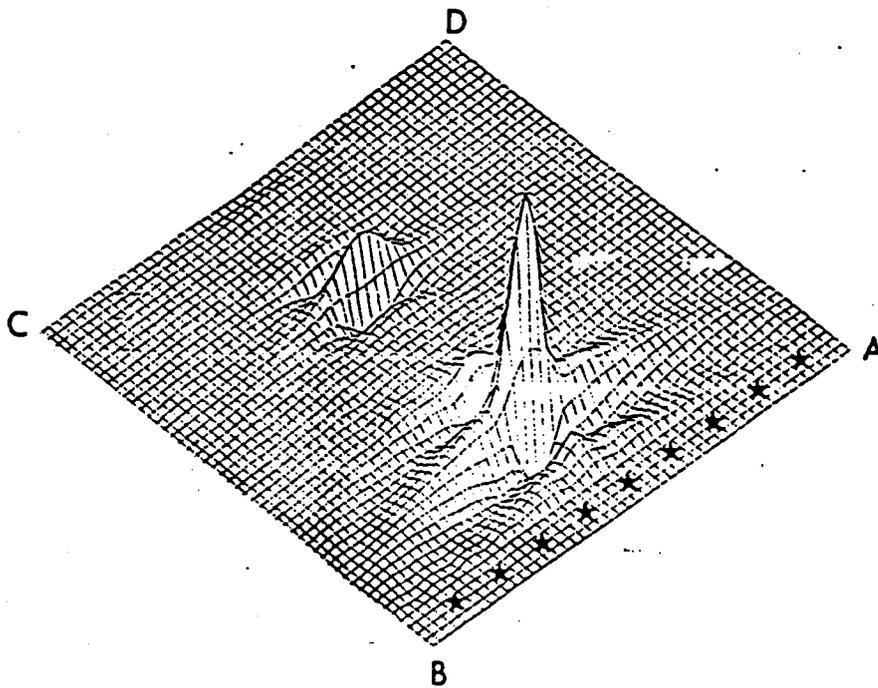


Figure 4.1.d : Le gradient avec deux diffractants au lieu d'un dans la même configuration que la figure 4.1.b. La différence d'amplitude du gradient incite à opérer un préconditionnement amplifiant les diffractants lointains.

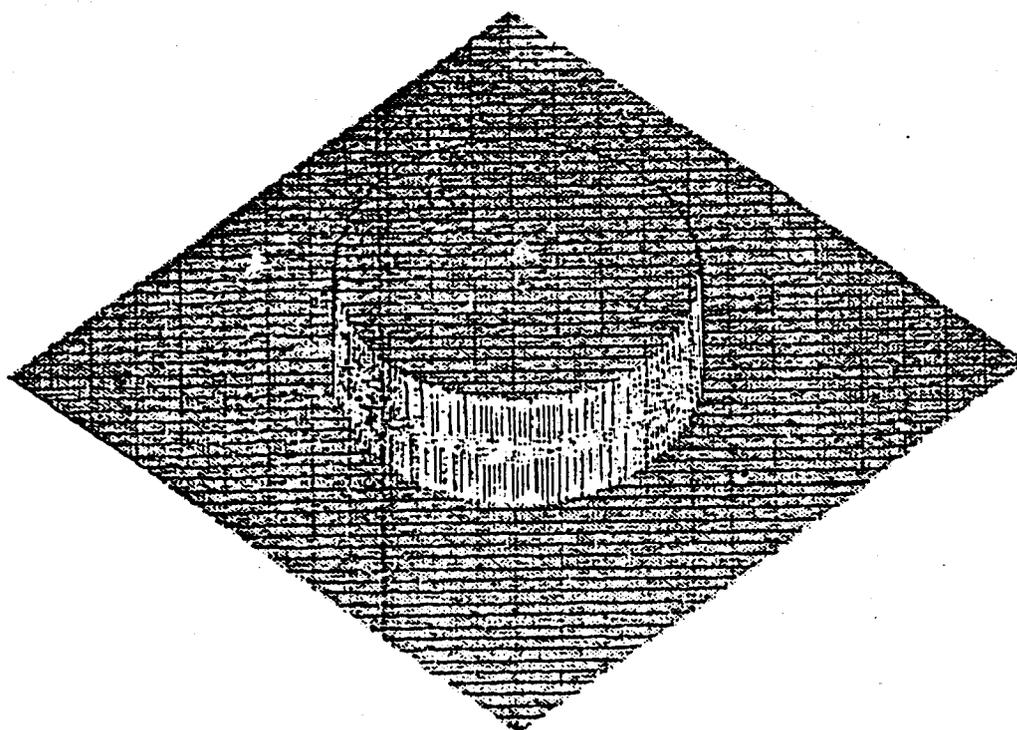


Figure 4.1.e : La représentation du milieu "camembert" d'une dizaine de longueurs d'onde dans un milieu homogène sur une grille de 200 x 200 points.

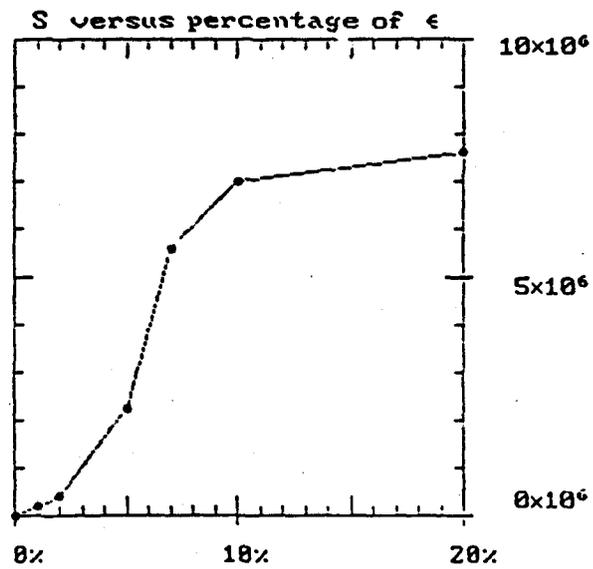


Figure 4.1.f : En utilisant des sources et géophones tout autour du disque, la fonction S a été évaluée pour différentes perturbations relatives ϵ . Pour $\epsilon > 10\%$, le problème est fortement non-linéaire.

$$\gamma(\mathbf{x})_n = \frac{1}{K(\mathbf{x})_n^2} \sum_{s=1}^{ns} \frac{U(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|^{1/2}}, \quad (4.1.7)$$

où $U(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)$ est la corrélation des champs p et ψ . Ce préconditionnement a été effectué pour les configurations de sismique réflexion qui vont suivre.

Modèle du canembert

De manière à évaluer l'effet d'une perturbation de taille plus importante que la longueur d'onde principale de la source, considérons un milieu homogène avec une perturbation également homogène circulaire dont le diamètre couvre environ 10 longueurs d'onde. Une grille de 200×200 points définit 40 000 valeurs de $K(\mathbf{x})$, comme le montre la figure 4.1.e. La perturbation relative du paramètre K dans le disque par rapport au milieu homogène sera notée $\epsilon = \delta K/K$.

Avant toute tentative d'inversion, essayons de voir quelle est l'allure de la fonction S et de cerner les valeurs de ϵ pour lesquelles le problème inverse est linéarisable. En plaçant des sources et des récepteurs tout autour du disque, le calcul de $S(K)$ conduit à la figure 4.1.f. Aussitôt qu' ϵ atteint la valeur de 10 %, la fonction S diverge nettement d'une forme quadratique et sature: ce qui correspond au déphasage des sismogrammes atteignant la période moyenne du signal.

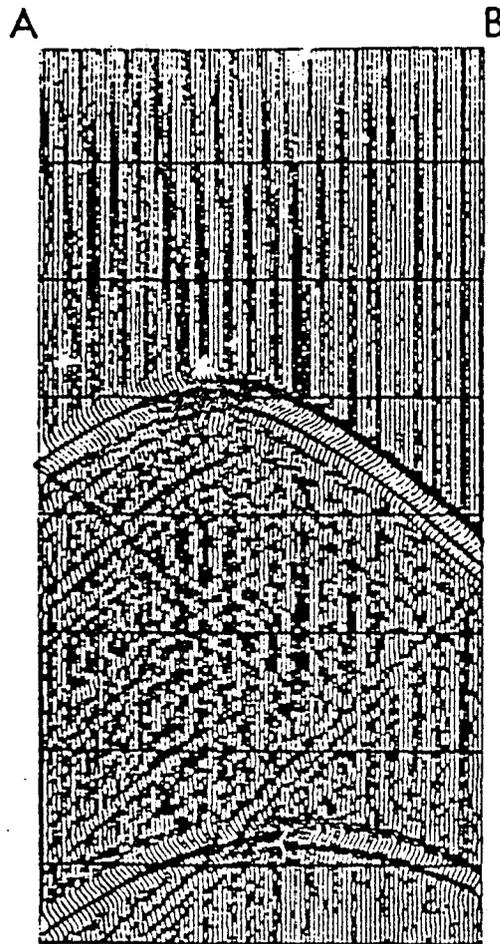


Figure 4.1.g : Les sismogrammes en 100 géophones (un tous les deux noeuds) calculés pour une source située près de cc.in A (voir figure 4.1.h). L'onde directe a été supprimée. Pour cette inversion, 8 sources sont utilisées, réparties sur la même ligne A-B que les géophones. Une valeur $\epsilon = 5 \%$ est prise.

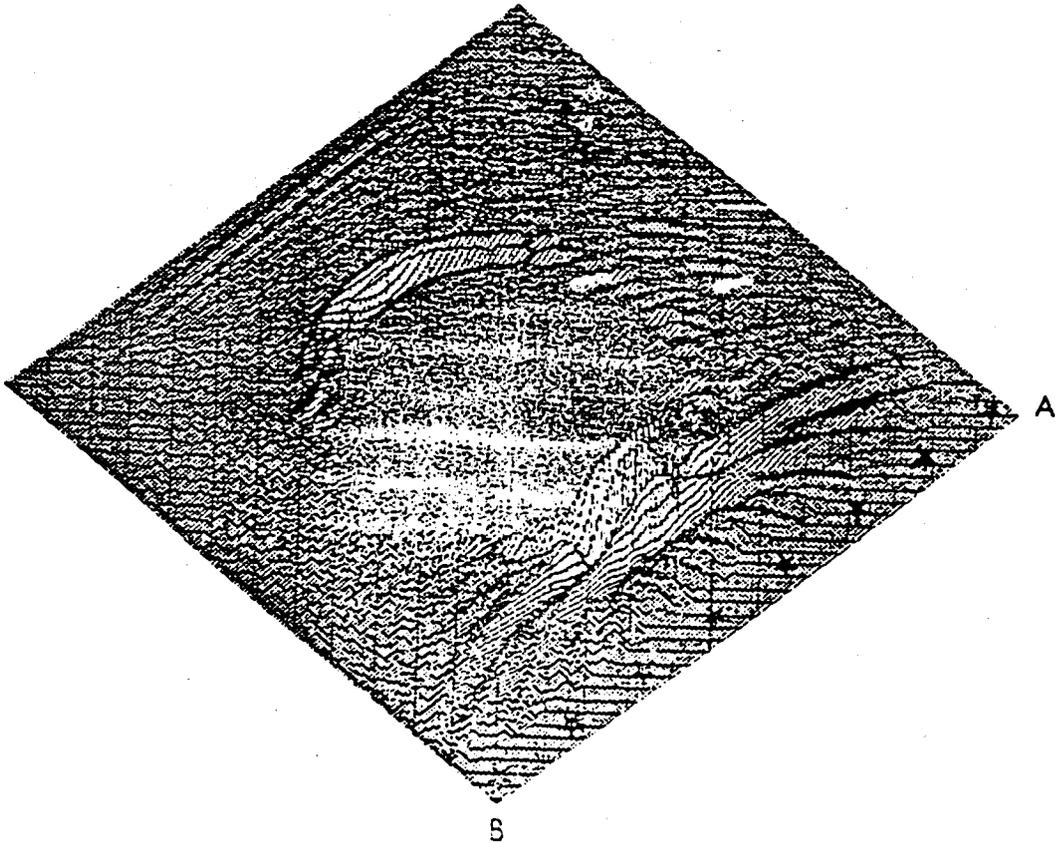


Figure 4.1.h : Le modèle obtenu après une itération. L'échelle est 0.33 fois celle de la figure 4.1.e.

Les valeurs numériques suivantes sont utilisées dans les calculs par différences finies : $\Delta x = \Delta z = 5 \text{ m}$, $\Delta t = 1.15 \text{ ms}$, $f_{\text{source}} = 50 \text{ Hz}$, $K_0 = 0.25 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $L_0 = 0.25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$. Des conditions absorbantes sont prises sur les quatre bords. Un choix de huit sources permet de considérer différentes géométries suivant l'endroit où on les place par rapport aux lignes de récepteurs. Le temps de propagation T est choisi de manière à éviter les réflexions des coins, provenant des conditions imparfaites d'absorption. Le milieu sera considéré comme bien connu dans une bande d'une longueur d'onde autour des sources et des récepteurs.

Les exemples suivants présentent les résultats d'inversion pour différentes configurations source-récepteur et une valeur de ϵ de 5 % si une autre valeur n'est pas spécifiée.

Géométrie de réflexion sismique

8 sources et 100 récepteurs sont situés légèrement au-dessous de la surface. La figure 4.1.g montre les sismogrammes obtenus pour une source (localisée au coin A de la figure 4.1.h). Comme l'onde directe a été supprimée, cette figure donne les résidus initiaux agissant comme les sources du champ manquant ψ . Les réflexions primaires du haut du disque sont suivies par des réflexions du bas du disque. Entre ces deux signatures, des petites ondulations signalent en surface la forme courbe du disque.



Figure 4.1.i : Le modèle obtenu après cinq itérations : la géométrie du disque est bien retrouvée, mais par le contenu basse fréquence du disque.

Une description physique complète est difficile, même pour une géométrie aussi simple. Donnons une interprétation intuitive. Chaque point du bord du disque, agissant comme un diffractant, donne une signature hyperbolique à la surface. La sommation de ces signatures pour le haut et le bas du disque est constructive et donne les fortes réflexions, tandis que, pour les bords verticaux, nous observons les signatures individuelles sous la forme de vaguelettes. Notons que la signature des bords verticaux sera forte en transmission.

L'étude des ondes réfléchies et guidées le long de l'interface courbe mérite une étude complète où différentes méthodes - différences finies, théorie des rais et ses extensions... - sont utilisées pour une interprétation correcte : ce qui a été présenté dans la section précédente pour d'autres géométries (voir George et al, 1986).

La figure 4.1.h montre le milieu à la première itération, tandis que la figure 4.1.i le montre à la cinquième itération. L'enveloppe de la perturbation est bien dessinée, quoique le bas soit mal localisé. En effet la vitesse de l'onde n'a pas changé à l'intérieur du disque. Les bords verticaux ont été reconstruits en partie grâce aux vaguelettes précisées au paragraphe précédent. La cinquième itération n'améliore pas grandement notre image du milieu : le contenu basse-fréquence n'a pas été récupéré. Les différents parasites proviennent du faible nombre de sources et des réflexions parasites sur les bords du modèle. Les résidus finaux présentent le même aspect que les résidus initiaux, avec des amplitudes moindres. La fonction S décroît de $14.2 \cdot 10^3$ à $3.9 \cdot 10^3$.

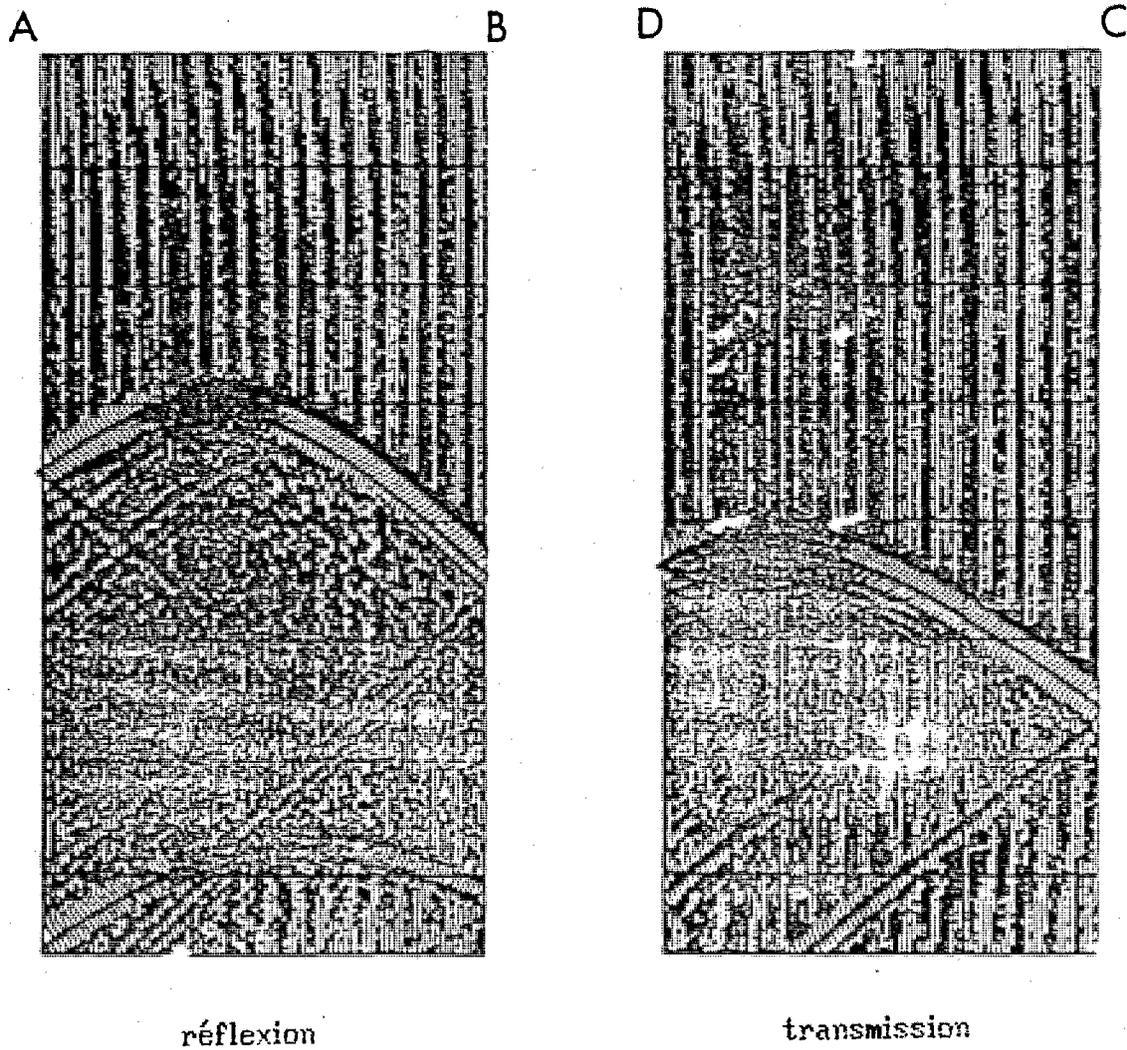


Figure 4.1.j : Les sismogrammes en réflexion et en transmission pour une source située au coin A. Les géophones sont répartis tout autour du disque (400 en tout). 8 sources sont de nouveau utilisées pour cette inversion avec une valeur de la perturbation ϵ de 5 %.

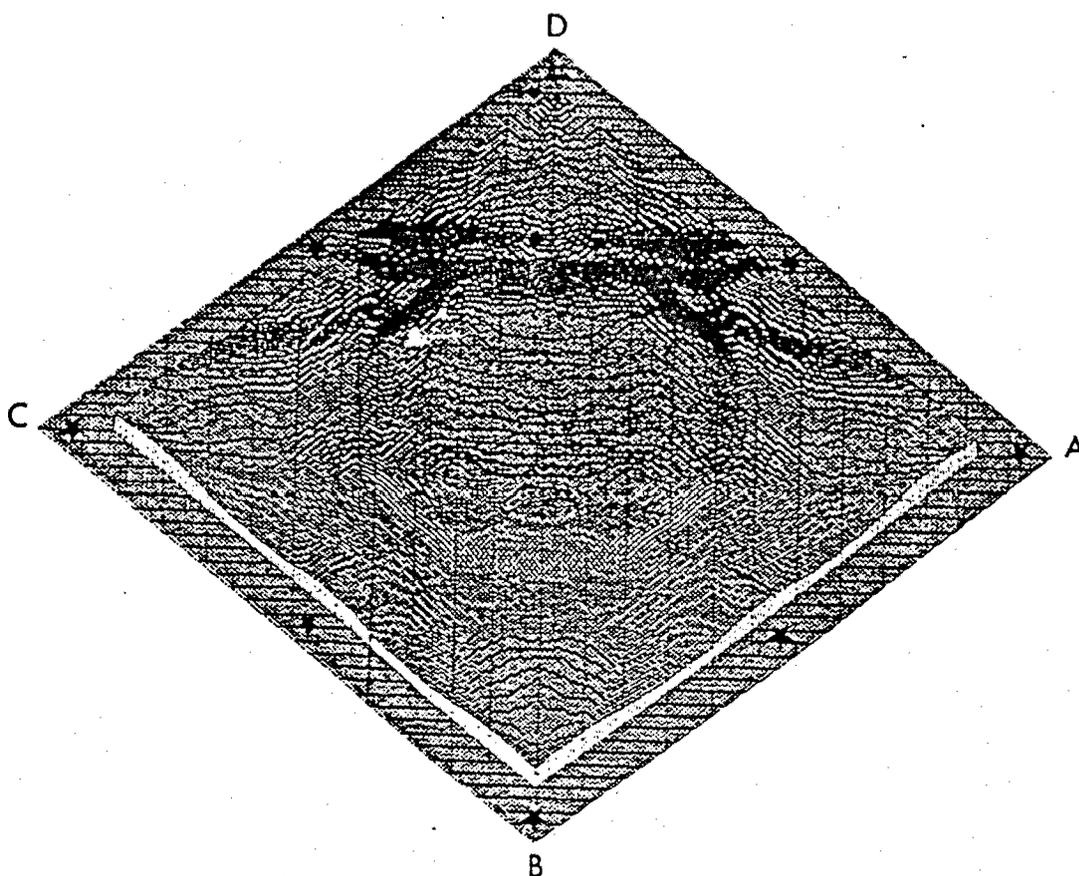


Figure 4.1.k : Le modèle obtenu après la première itération. L'échelle est la même que celle de la figure 4.3.e.

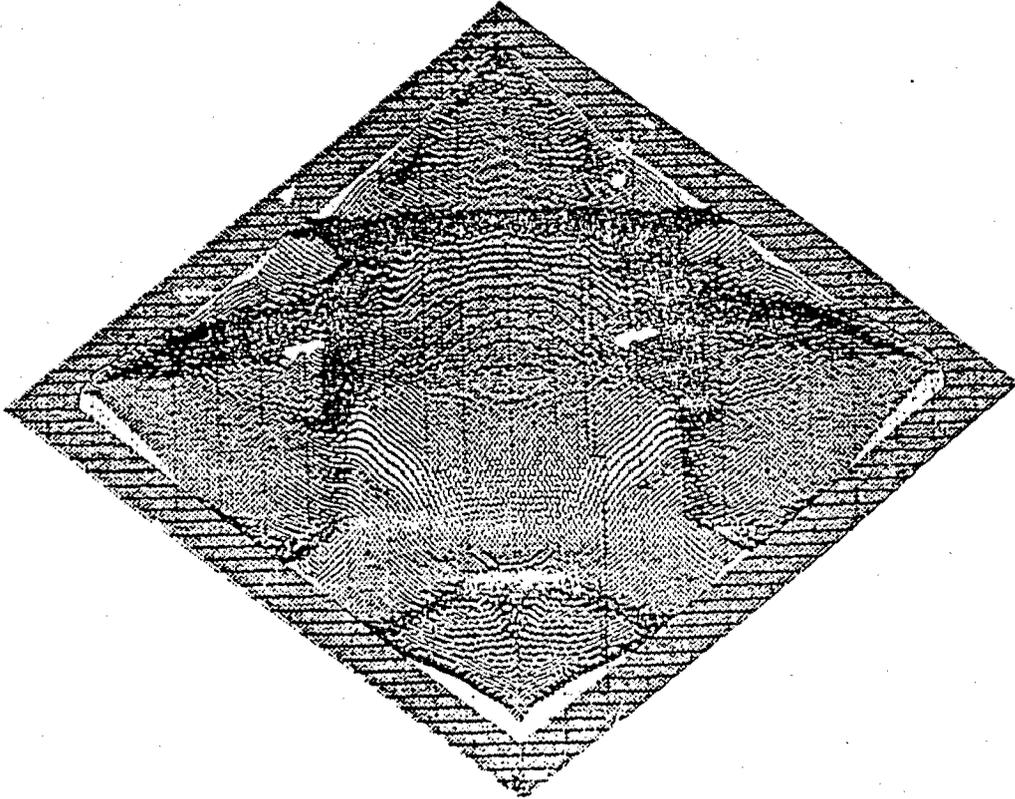


Figure 4.1.1 : Le modèle après trois itérations.

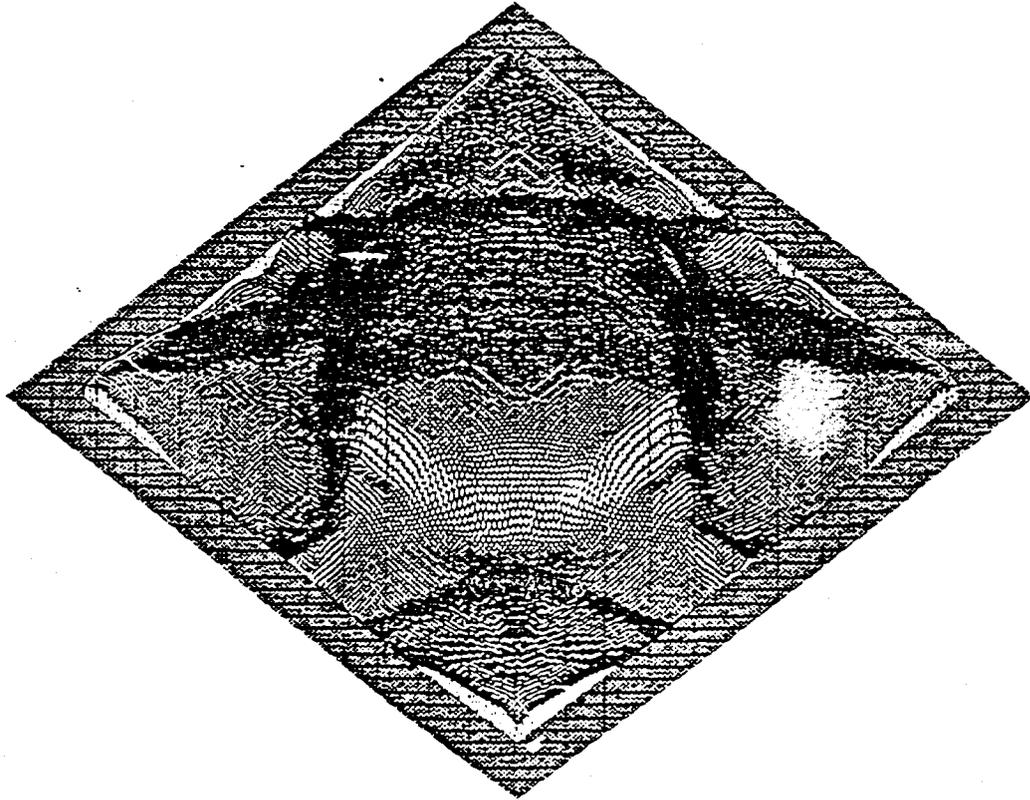


Figure 4.1.m : Le modèle après cinq itérations. Le contour du disque et son intérieur sont simultanément obtenus. Certains parasites subsistent.

Géométrie tomographique

Les sources et les récepteurs sont placés tout autour du disque. La figure 4.1.j présente les résidus pour une seule source et pour des récepteurs placés du même côté ou des récepteurs placés de l'autre côté.

Nous présentons les images du milieu pour la première, troisième et cinquième itération dans les figures 4.1.k, 4.1.l, 4.1.m. Les traits essentiels du modèle sont obtenus par inversion, en particulier la basse fréquence qu'il n'avait pas été possible de retrouver avec les géométries précédentes. Il existe toujours des parasites dans certains endroits du milieu, comme les coins, que les données ne peuvent pas bien résoudre du fait du nombre fini de sources et de leur répartition. L'amplitude moyenne de la perturbation reconstruite est 90 % de la vraie valeur. La fonction S décroît de $38.7 \cdot 10^6$ à $0.5 \cdot 10^6$, ce qui est plus important que dans l'exemple précédent et représente une valeur finale égale à 1 % de la valeur initiale.

Inversion hautement non-linéaire

Considérons la configuration tomographique précédente avec une perturbation $\epsilon = 20 \%$, pour explorer les limites de l'inversion. La figure 4.1.n montre que les résidus initiaux présentent des déphasages de l'ordre de la longueur d'onde de la source. Les figures 4.1.o et 4.1.p montrent la première itération et la cinquième. La fonction S décroît de $12.4 \cdot 10^7$ à $9.4 \cdot 10^7$.

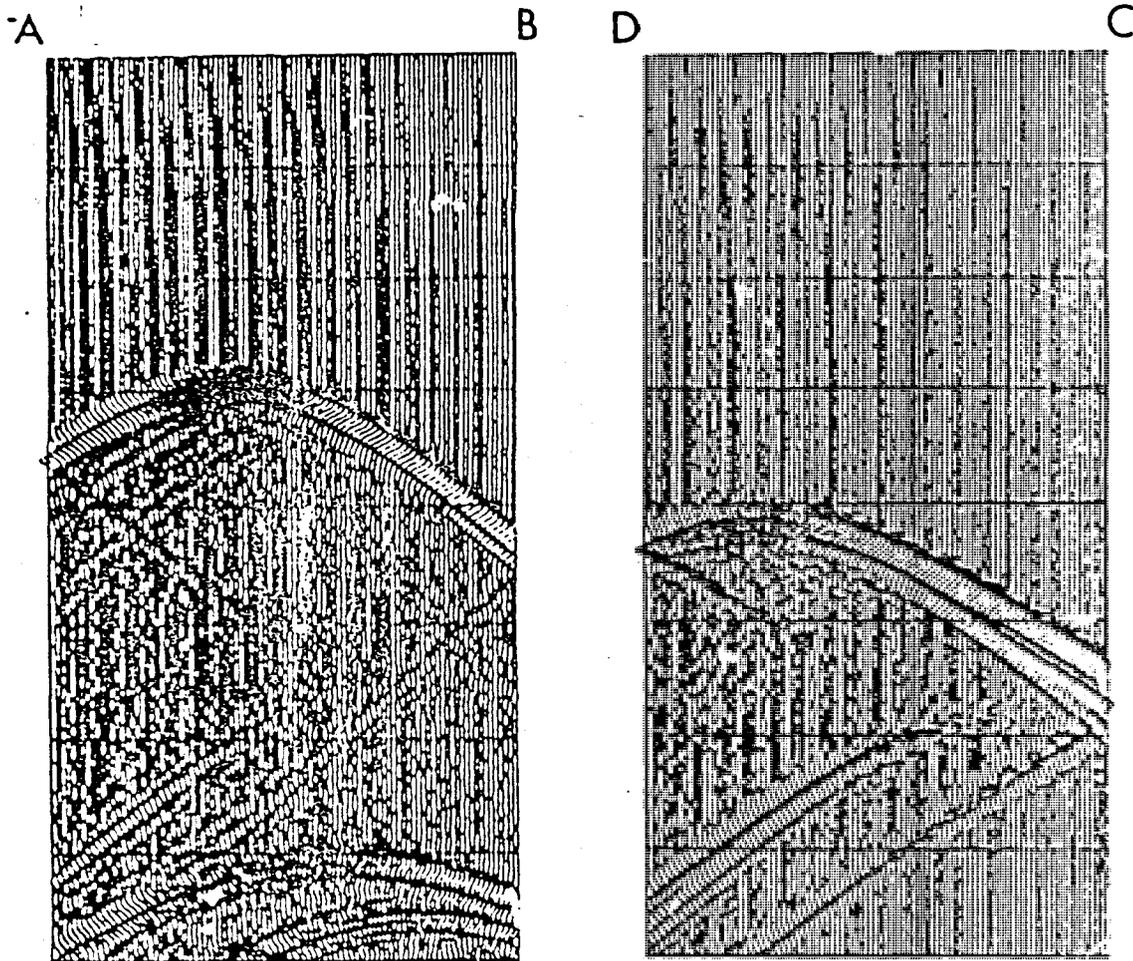


Figure 4.1.n : Les sismogrammes pour le même milieu que la figure 4.3.j, avec une perturbation $\epsilon = 20 \%$.

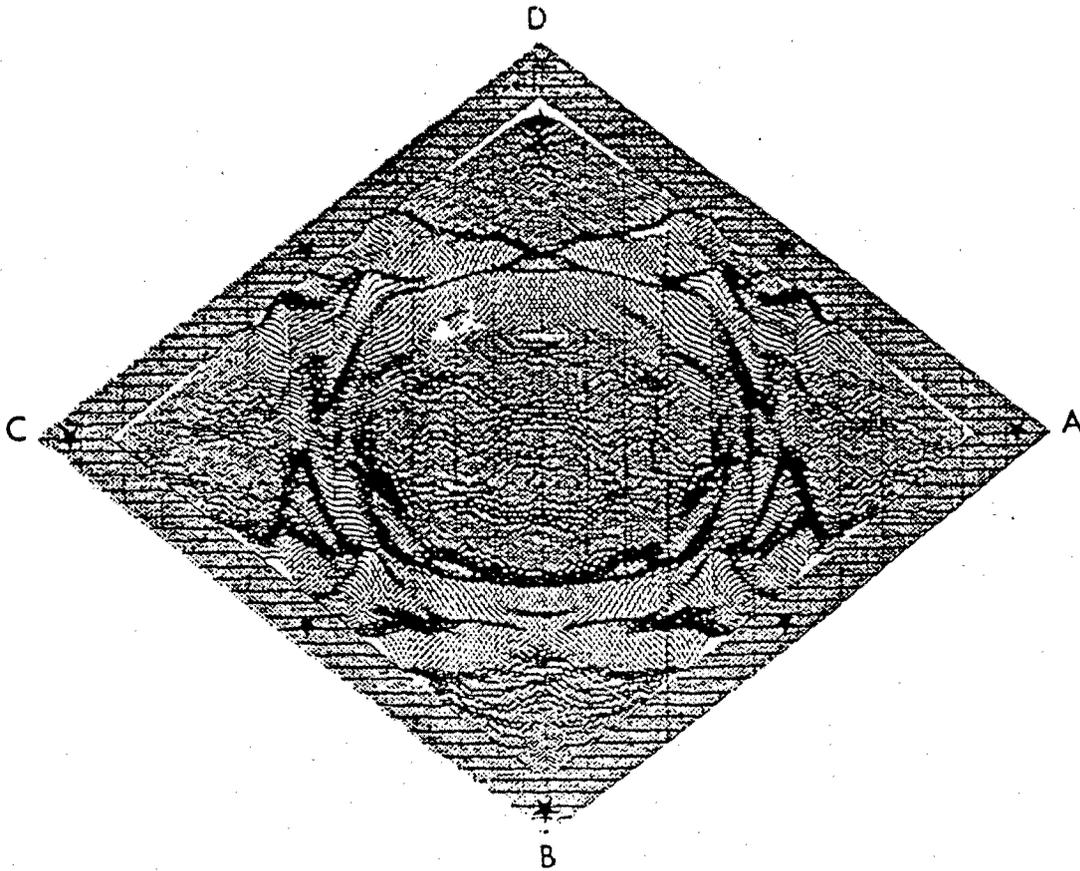


Figure 4.1.o : Le modèle après la première itération. L'échelle est la même que celle de la figure 4.3.e.

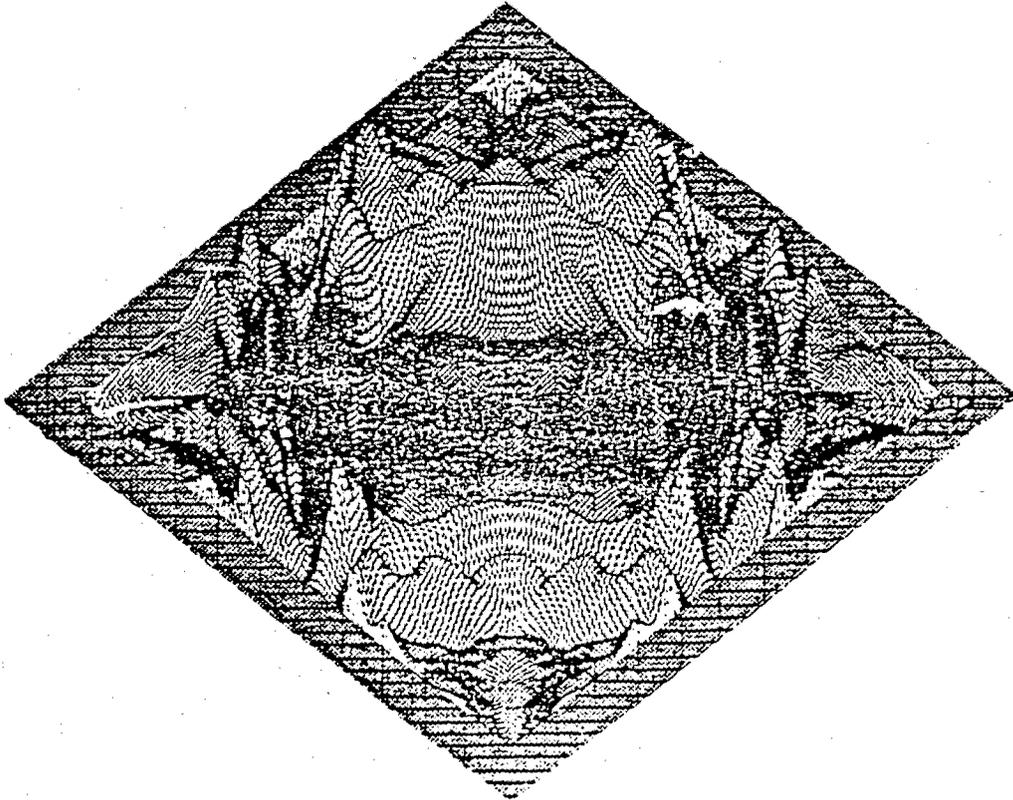


Figure 4.1.p : Le modèle après cinq itérations. L'aspect de ce modèle suggère que l'algorithme a convergé vers un minimum secondaire.

Comme tous les problèmes non-linéaires, celui-ci peut avoir des minima secondaires. Le résultat de la figure 4.1.p semble indiquer que c'est le cas : la corrélation entre le champ p et le champ ψ trouve un signe contraire dans le disque, du fait des déphasages. L'algorithme du gradient est bloqué sur un minimum local. La manière de le résoudre est de balayer grossièrement l'espace des paramètres pour tester l'existence d'un minimum global et de procéder ensuite à l'inversion par la méthode du gradient dans cette vallée principale. Cette simulation n'a pu être entreprise à cause de limitations en coût calcul.

4.1.5 : Conclusion.

Le problème de l'inversion non-linéaire de données sismiques à deux dimensions est faisable, même si le temps de calcul actuel est important (1 heure de Cray1S pour l'exemple académique de géométrie tomographique). Suivant les géométries considérées des sources et récepteurs, l'image obtenue sera plus ou moins bonne.

Pour une configuration de sources et récepteurs en surface, l'algorithme du gradient utilisé ici n'est pas capable de retrouver le contenu des grandes longueurs d'onde du milieu. Seul le contenu associé aux courtes longueurs d'onde est récupéré avec une erreur de localisation associée aux grandes longueurs d'onde manquantes et une incertitude associée à la longueur de l'onde que l'on propage dans le milieu. Toutefois, il ne semble pas qu'on ait atteint un minimum secondaire, mais que la convergence soit simplement très lente. Les simulations numériques de Kolb et al (1986) font la preuve qu'en itérant assez longtemps avec une certaine stratégie sur les données on peut retrouver les grandes variations du milieu. Peut-être d'autres stratégies amélioreront-elles la vitesse de convergence dans le futur.

En utilisant les données réfléchies et transmises, les images du milieu deviennent satisfaisantes et pourront encore être améliorées par un choix plus grand de sources.

Si le milieu de départ est trop loin du vrai milieu, il semble que l'on converge vers des solutions secondaires que leur aspect irréaliste fera éliminer.

DIFFERENCES FINIES ET SOMMATION PAR FAISCEAUX GAUSSIENS.

4.2.1 : Introduction.

Dans cette section, je vais m'attacher à comparer la méthode de différences finies avec la méthode de sommation par faisceaux gaussiens, qui est une extension de la théorie des rais, dans le sens où c'est une technique haute fréquence. L'accent sera mis sur les résultats en faisceaux gaussiens en considérant les résultats en différences finies comme valables d'après mon chapitre 3. Pour une discussion plus ample de la méthode des faisceaux gaussiens, je renvoie le lecteur à un article de George et al (1986) ou à la thèse de George (1986), ainsi qu'à toute la littérature fort nombreuse sur ce sujet.

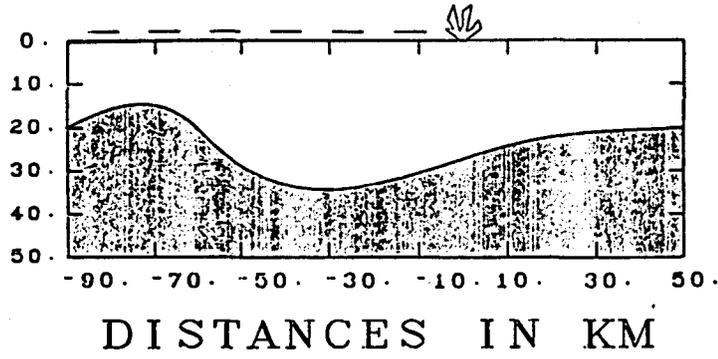
Il est toujours extrêmement rassurant de pouvoir comparer des méthodes aux approches entièrement différentes. L'exemple du bassin sédimentaire traité dans le chapitre précédent en est la preuve, qu'on le traite avec la théorie des nombres d'onde discrets, les méthodes développées à partir de la théorie des rais ou les méthodes de différences finies. Cette dernière est une méthode basse fréquence limitée par sa discrétisation, tandis que la théorie des rais et ses extensions sont des méthodes haute fréquence, i.e. où les paramètres physiques du milieu varient lentement par rapport à la longueur d'onde propagée. La méthode

par nombres d'onde discrets est une technique intermédiaire pour la résolution en fréquence.

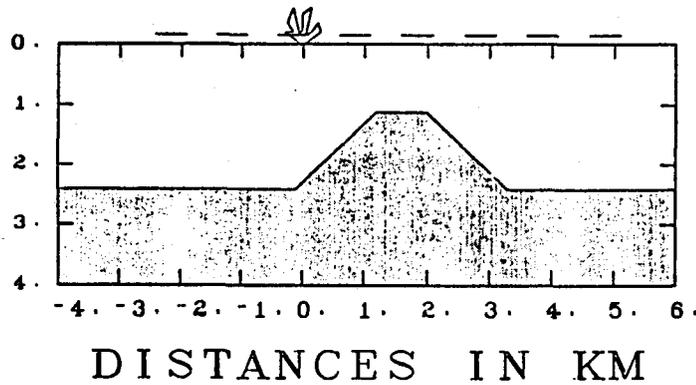
Le choix des géométries pour rendre les comparaisons doit obéir à ces deux critères opposés : une onde basse fréquence pour les différences finies, qui doit être haute fréquence par rapport aux variations du milieu pour les faisceaux gaussiens. Le cas du bassin sédimentaire excité par une onde plane est déjà un cas limite pour la théorie des rais, et correspond d'autre part à une configuration difficile à obtenir en différences finies : un contraste de vitesse trop grand entre le bassin et le demi-espace. Par contre, c'est une géométrie parfaite pour la méthode des nombres d'onde discrets : la source est ponctuelle dans l'espace des nombres d'onde et l'interface est assez lisse pour que son spectre dans l'espace des nombres d'onde ne soit pas à trop haute fréquence. Il faudra prendre un soin particulier au choix des géométries pour assurer au maximum la validité de chaque méthode.

C'est pourquoi, après avoir défini les deux géométries choisies, je comparerai et discuterai les résultats pour les deux méthodes différentes.

Faisceaux gaussiens



CUSP MODEL



CORNER MODEL

Figure 4.2.a : Les géométries des deux modèles : celle du haut représente le modèle de queue d'aronde avec la source en surface et les récepteurs suivant la ligne hachurée, celle du bas représente le modèle du dôme trapézoïdal avec une source à l'aplomb d'une des parois latérales.

4.2.2 : Choix des géométries.

Deux géométries seront envisagées dans cette section. Le modèle de queue d'aronde remplit les conditions de validité des deux approches, tandis que le modèle du dôme trapézoïdal a des variations trop rapides pour la théorie des rais. C'est pourquoi, dans ce dernier cas, les résultats par différences finies seront vraiment considérés comme les résultats de référence. Nous verrons que la méthode par sommation des faisceaux gaussiens donne toutefois des résultats remarquables.

Les deux modèles sont encore relativement simples, pour nous permettre de comparer les résultats obtenus : une structure homogène est séparée par une interface de forme complexe couvrant un demi-espace homogène. Un point source, dans cette géométrie à deux dimensions, se situe à la surface libre. L'axe vertical pointe vers le bas, et la distance horizontale est mesurée à partir de la source. Les sismogrammes sont enregistrés par des géophones à la surface libre.

La forme de l'interface réfléchissante est choisie suffisamment complexe pour engendrer différents phénomènes de propagation à modéliser : des réflexions, des caustiques, des diffractions, des ondes côniques (ou leurs extensions que sont les ondes guidées le long d'interfaces courbes). Deux interfaces types sont choisies : en premier lieu, une interface courbe et lisse produisant une double caustique à la surface libre, et, en second lieu, une interface avec des coins produisant des fortes ondes diffractantes

		CUSP	CORNER
VELOCITY	LAYER	3.46 km/s	2.5 km/s
	HALF-SPACE	-	4 km/s
DENSITY	LAYER	2.5 kg/dm ³	2.6 kg/dm ³
	HALF SPACE	-	3.1 kg/dm ³
SOURCE	α	4 s ⁻²	1000 s ²
CHARACTERISTICS	t_0	1.35 s	.2 s
	f_0	1 hz	12 hz

Table 4.2.b : Les paramètres physiques des deux modèles, ainsi que les caractéristiques des sources. En tenant compte des lois d'échelle, la fréquence de la source n'est pas plus grande pour le dôme trapézoïdal que pour la queue d'aronde.

multiples. Ces deux modèles sont définis par la figure 4.2.a et leurs caractéristiques physiques par la table 4.2.b.

Les ondes sont émises par une source à la surface libre dont le contenu spectral est choisi de manière à respecter au mieux les conditions d'approximation haute fréquence pour les rais et basse fréquence pour les différences finies. Le contrôle de la fréquence s'effectue par la fonction source :

$$s(t) = (t-t_0) e^{-\alpha(t-t_0)^2},$$

où t_0 est le décalage en temps pour obtenir un signal à peu près causal : $s(t) \approx 0$ pour $t < 0$, et α est relié à la fréquence de coupure définie par la demi-largeur du spectre de la source. Ces quantités sont fournies également par la table 4.2.b.

Cette étude se concentrant sur les ondes réfléchies à l'interface, il faut éliminer l'onde incidente obtenue lors du calcul par différences finies. Je procède en retranchant au sismogramme pour le milieu réel un sismogramme pour un demi-espace aux caractéristiques identiques à celles de la première couche. Cette soustraction élimine aussi les ondes parasites sur les deux bords verticaux, mais n'élimine pas les ondes converties de ces réflexions parasites par l'interface.

Pour le cas du modèle de queue d'aronde, la comparaison se fera dans la région du point brillant associé aux deux caustiques. On éliminera les

problèmes d'onde réfléchi à incidence critique en ne considérant qu'une interface libre : le milieu inférieur ne permet aucune propagation. Pour le cas du dôme trapézoïdal, nous considérerons les deux cas, à savoir un milieu inférieur élastique et un milieu inférieur interdit par une interface libre. Nous pourrons ainsi comparer les amplitudes respectives des ondes de diffraction et des ondes guidées. La présence de ces ondes converties - diffraction et guidage - permettra de juger du domaine d'applicabilité de la méthode de sommation de faisceaux gaussiens, bien supérieur au domaine strict de validité de la méthode.

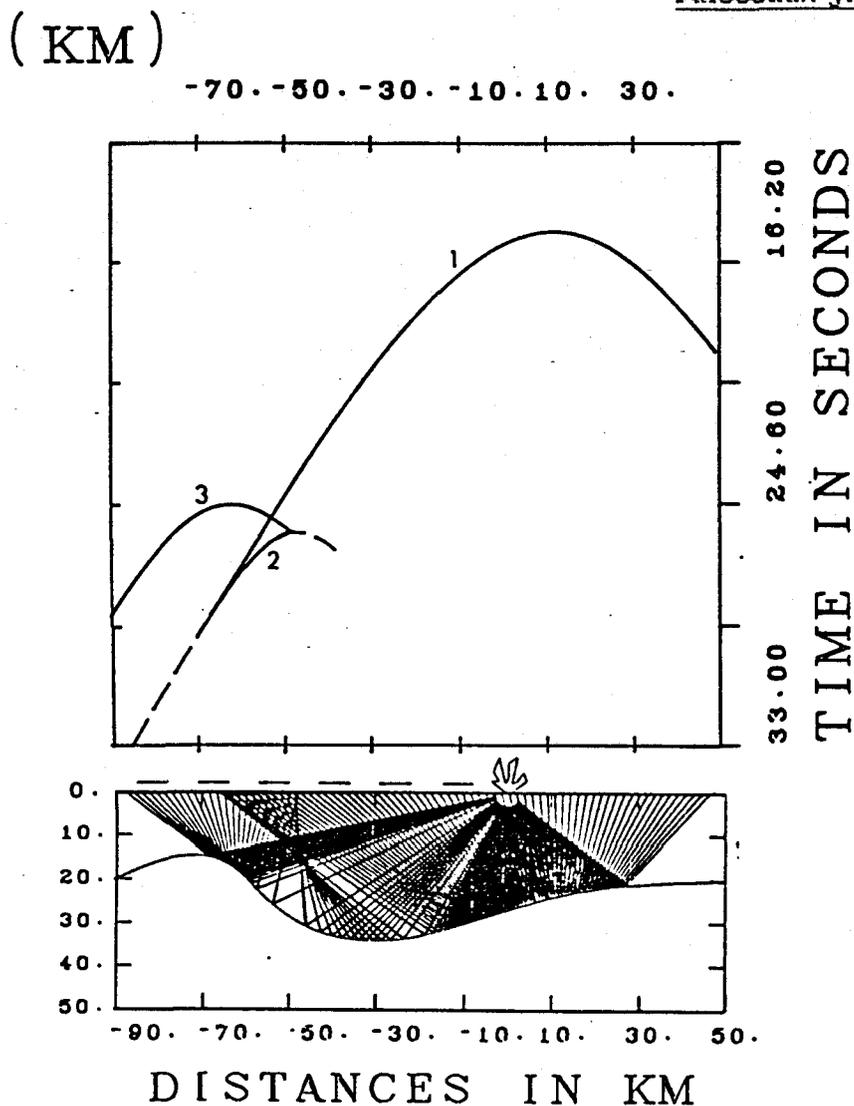


Figure 4.2.c : Exemple d'un tir de rais dans le milieu queue d'aronde. Il faut noter la densité de rais quittant la source et illuminant la partie la plus haute de l'interface. Les deux caustiques, perçant la surface libre à -47 km et -67 km, forment une queue d'aronde, justifiant le nom donné au modèle. Au-dessus du tracé de rais, l'hodochrone montre les trois branches de réflexion en trait plein, ainsi que les diffractions en trait pointillé.

4.2.3 : Modèle de la queue d'aronde à interface libre.

Le premier modèle est relativement simple avec une interface courbe et lisse qui est libre, c'est-à-dire que les contraintes y sont nulles. Nous vérifions cette condition en donnant une valeur zéro au coefficient de cisaillement μ du milieu inférieur pour les calculs en différences finies, et en prenant un coefficient de réflexion -1 pour la technique par sommation de faisceaux gaussiens. Le contenu fréquentiel des synthétiques est assez bas pour la méthode des différences finies et assez haut comparé à la fréquence des variations spatiales de l'interface pour pouvoir utiliser les techniques asymptotiques haute fréquence.

La courbure de l'interface produit une double caustique des ondes réfléchies. Ces deux caustiques se rencontrent en un point focal dégénéré situé à une profondeur de 18 km au-dessous de la surface. En fait, l'intersection ne s'effectue pas strictement en un point, mais sur une zone assez localisée. Ces deux caustiques apparaissent à la surface libre à -47 km et -67 km, comme le montre la figure 4.2.c. La théorie des rais n'est plus valable sur ces deux caustiques où elle prédit des amplitudes infinies. Entre ces caustiques, se trouve une triplification des temps d'arrivée comme le montre la figure 4.2.c. La branche 1 est l'onde réfléchie au-dessous de la source, tandis que la branche 3 est l'onde réfléchie sur la partie la plus superficielle de l'interface. La branche 2 connecte ces deux branches. On s'attend à trouver une forte amplitude sur la branche 2 à cause du voisinage du point brillant. Notons la densité

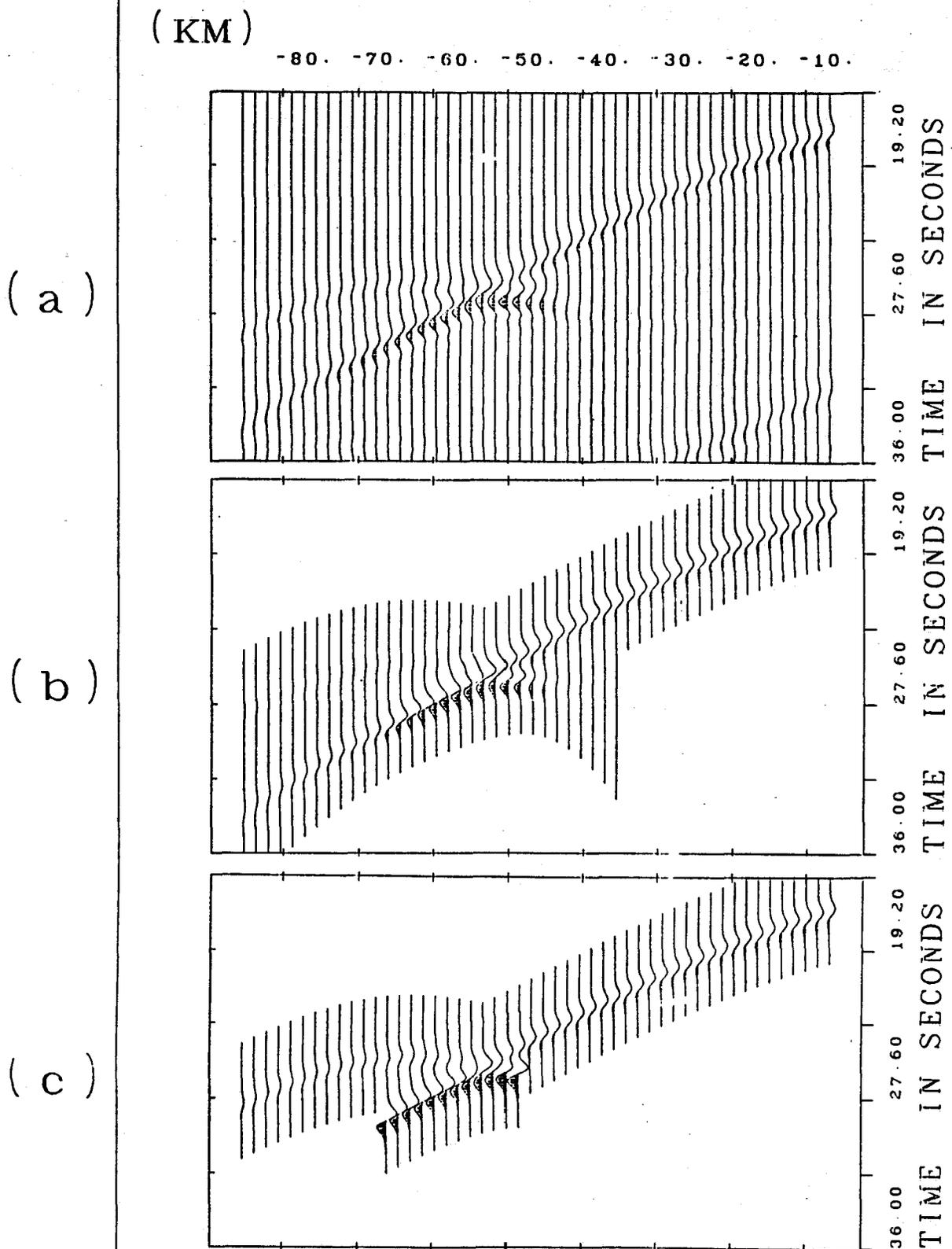


Figure 4.2.4 : Profils sismiques pour le modèle de la queue d'aronde, (a) par différences finies, (b) par faisceaux gaussiens, (c) par théorie des rais. On devine les trois branches, avec les deux diffractions.

particulièrement élevée des rais quittant la source pour la branche 3 , afin d'assurer une densité correcte aux récepteurs, nécessaire lors de la sommation par faisceaux gaussiens.

La figure 4.2.d présente trois profils sismiques pour cette géométrie. Le premier (a) est obtenu par différences finies, le deuxième (b) est celui synthétisé par la sommation des faisceaux gaussiens et le troisième (c) est calculé par la théorie des rais là où elle peut s'appliquer. La basse fréquence des signaux nécessaire pour la méthode par différences finies cache la séparation des trois branches, qui est toutefois très nette sur les sismogrammes impulsifs des méthodes haute fréquence. Nous constatons ici tout l'intérêt qu'il y a à compléter toute étude par différences finies par des études avec des méthodes haute fréquence étant donné l'éclairage nouveau qu'elles jettent sur le problème.

L'accord est bon entre les différences finies et les faisceaux gaussiens, pour cet exemple. Nous apprenons des faisceaux gaussiens que la forte amplitude observée près de la triplication vient de la branche 2. La diffraction près de la caustique, avec sa décroissance rapide en amplitude, est correctement modélisée par les faisceaux gaussiens : le front parabolique des faisceaux gaussiens individuels est une bonne approximation pour ce genre de diffraction. Ceci ne sera pas toujours le cas, comme nous le verrons dans le prochain paragraphe. L'asymétrie dans la diffraction pour les deux caustiques provient des fluctuations des angles de réflexion sur l'interface. Comme le montre la figure 4.2.c, cet angle est presque normal pour la caustique à -47 km et varie peu, créant

une forte amplitude localisée sur un faible intervalle d'offsets. Par contre, la caustique à -67 km provient d'un angle proche de 45° avec une variation rapide, étalant la diffraction sur un intervalle plus grande.

Si nous considérons les résultats en différences finies comme exacts, nous voyons que la sommation des faisceaux gaussiens donne de bons résultats au-delà des diffractions, dans la zone de fresnel. Ceci généralise les résultats obtenus par Cerveny et al (1982), ainsi que Madariaga et Papadimitriou (1985) pour des caustiques simples provoquées par des variations verticales des hétérogénéités - les interfaces sont alors planes -.

(KM)

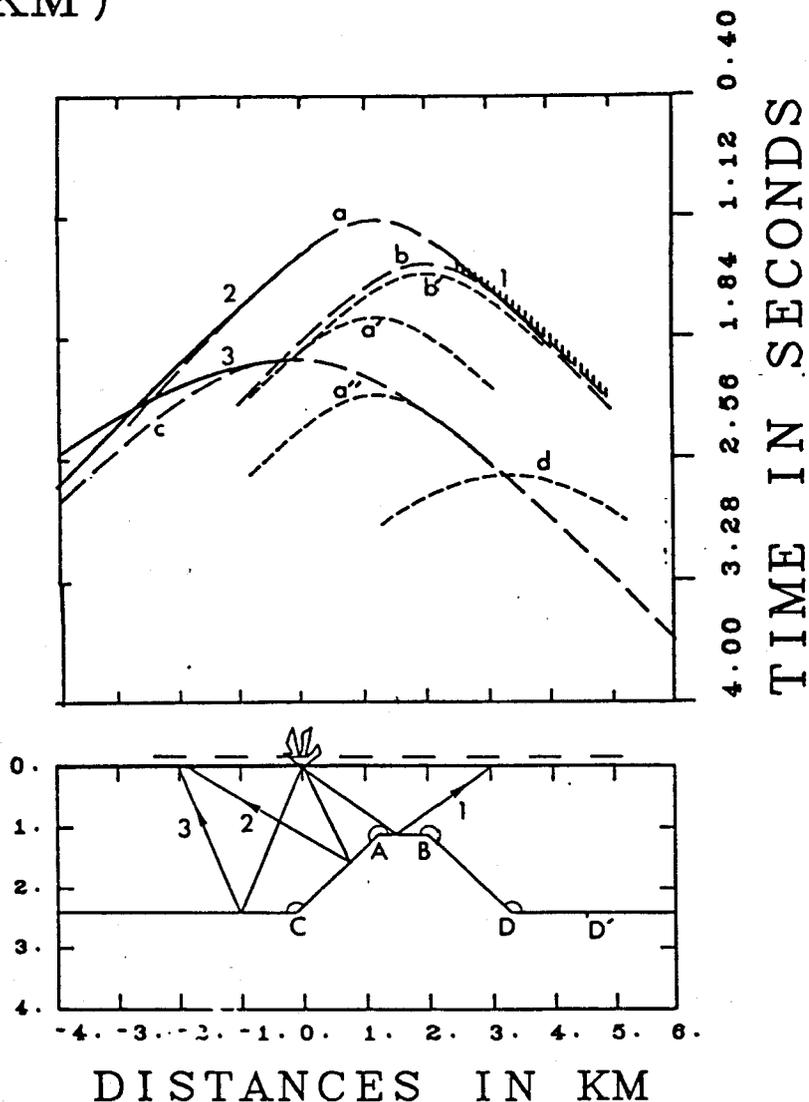


Figure 4.2.e : Exemple de rais dans le milieu dôme trapézoïdal. Les points diffractants sont repérés par des lettres. Le coin D est décalé en D' pour les faisceaux gaussiens. Au-dessus du tracé de rais, l'hodochrone se révèle assez complexe, avec les réflexions (1), (2) et (3), puis les diffractions (a), (b), (c), (d), (a'), (b').

4.2.4 : Modèle du dôme trapézoïdal.

Un modèle plus difficile pour la théorie des rais et ses extensions est le modèle schématique d'un dôme de sel avec des coins. Ce dôme de sel a une géométrie différente de celui traité au paragraphe 3.2. Les parois latérales ont été inclinées pour augmenter leurs réflexions de la source et, donc, leur contribution à la surface de la Terre (figure 4.2.e). Puisque les résultats en différences finies ont été discutés amplement au chapitre 3 dans un cas très proche de celui effectué ici, je les considérerai comme "exacts" et mettrai l'accent sur les résultats obtenus par sommation des faisceaux gaussiens.

Le domaine choisi de fréquences (voir table 4.2.b) indique 6 points de la grille par longueur d'onde caractéristique de la source, qui est de 250 m. Comme la règle d'or de 10 points par longueur d'onde modélisée n'est pas vérifiée, une certaine dispersion numérique apparaîtra dans les sismogrammes par différences finies, qui n'empêchera pas l'interprétation et la comparaison avec ceux obtenus par sommation des faisceaux gaussiens. Cette montée en fréquence est rendue nécessaire si l'on veut assurer des conditions minimales de validité des méthodes haute fréquence. En effet, la longueur d'onde caractéristique de la source n'est que le quart de la longueur du toit du dôme.

Les principales difficultés que va rencontrer la sommation par faisceaux gaussiens sont les diffractions par les coins et la présence

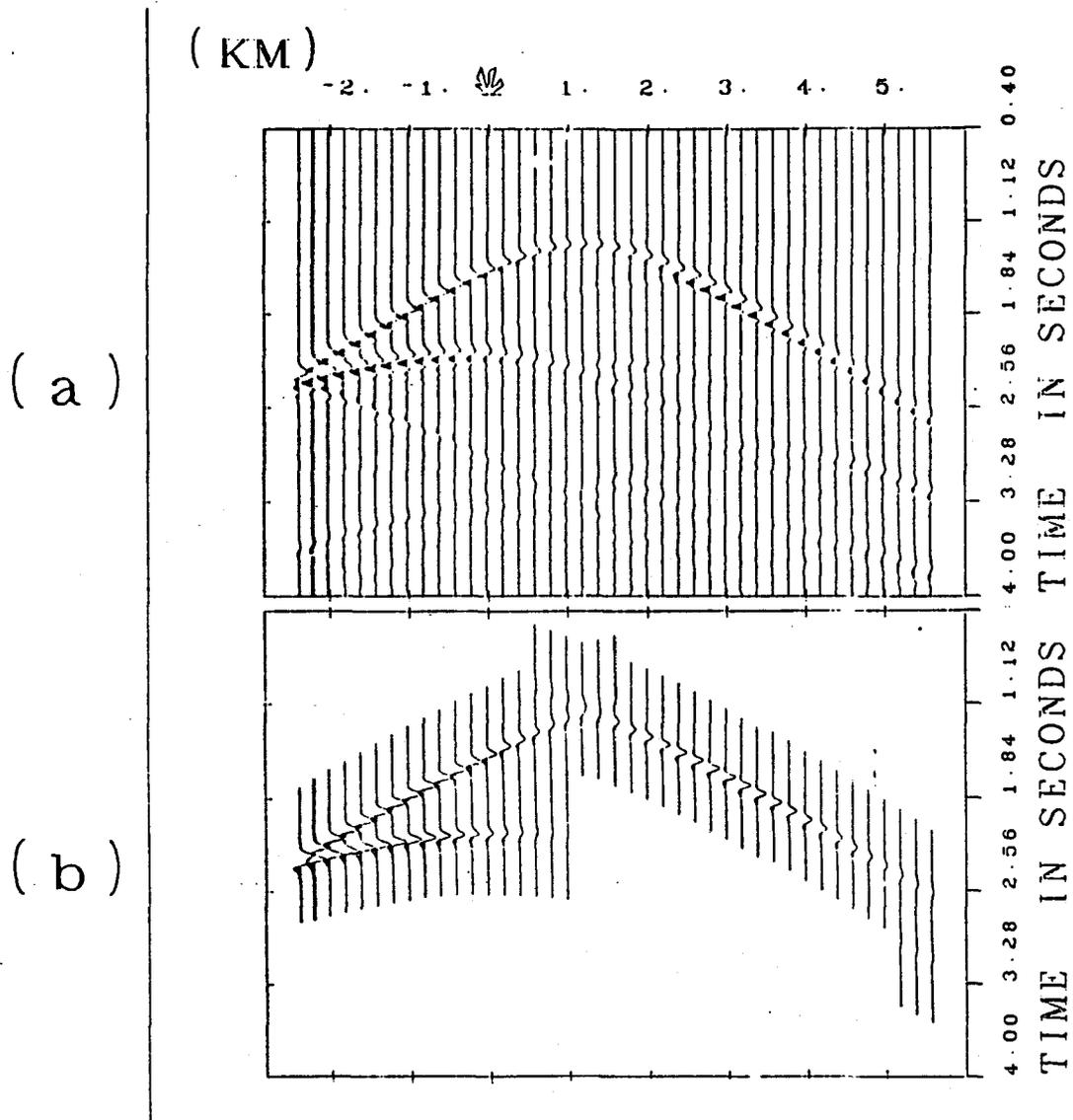


Figure 4.2.f : Profils sismiques pour le modèle dôme trapézoïdal à interface libre, (a) par différences finies, (b) par faisceaux gaussiens. On retrouve les différentes phases de la figure 4.2.e.

d'ondes guidées sur le toit du dôme, se propageant à l'interface entre un milieu supérieur lent et un milieu inférieur rapide. Ces ondes guidées émettent continuellement dans le milieu supérieur avec une brusque amplification lors de l'interruption du dôme.

Une interface libre est suffisant pour étudier les diffractions par les coins. Les ondes guidées n'existent pas dans ce cas, puisque le milieu inférieur est interdit. La figure 4.2.f présente les profils obtenus (a) par la méthode de différences finies et (b) par la méthode de sommation par faisceaux gaussiens. L'interprétation cinématique des différentes arrivées dans ces profils est décrite en haut de la figure 4.2.e. Les faisceaux gaussiens modélisent correctement les réflexions (1) sur le toit du dôme, (2) sur la paroi latérale, et (3) sur l'interface horizontale. Les diffractions (a) et (c) par les coins correspondants sans zone d'ombre sont moins bien modélisés, tandis que la diffraction (b) n'a pas une amplitude correcte. Dans la direction rétrograde par rapport à la source, une extension non-physique de la diffraction (a) arrive avant la vraie diffraction. La diffraction (d) semble émise d'un point D', au lieu du point D, comme le montre le décalage en temps. Les diffractions (a') et (b') ne sont pas modélisées par la sommation de faisceaux gaussiens, car elles sont des diffractions secondaires des fronts diffractés (a) et (b). L'amplitude de ces doubles diffractions sera complètement négligeable dans le cas des interfaces réelles, et ne sera donc plus discutée.

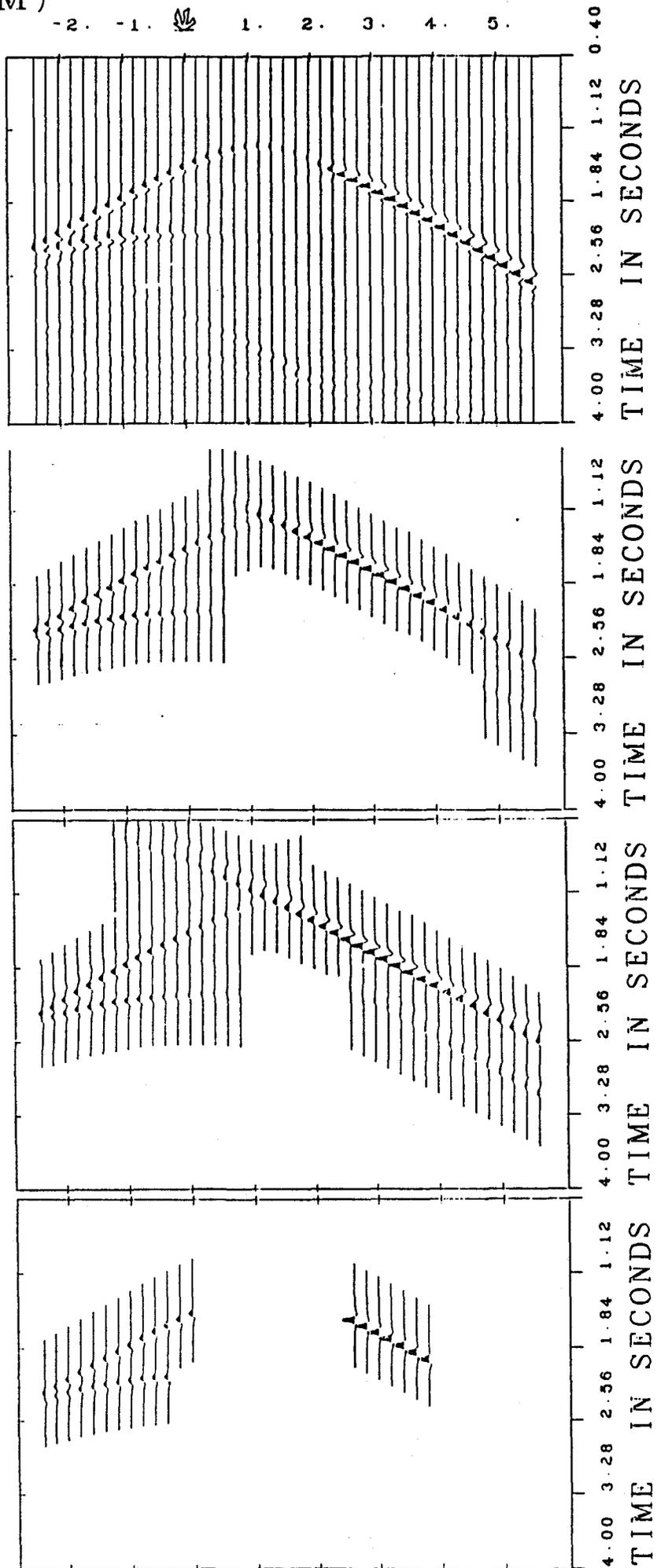
Une interface réelle donne un modèle plus réaliste. La figure 4.2.g montre les profils obtenus (a) par différences finies, (b) par faisceaux

d'ondes guidées sur le toit du dôme, se propageant à l'interface entre un milieu supérieur lent et un milieu inférieur rapide. Ces ondes guidéesradient continuellement dans le milieu supérieur avec un brusque saut lors de l'interruption du dôme.

Un interface libre est suffisant pour étudier les diffractions par les coins. Les ondes guidées n'existent pas dans ce cas, puisque le milieu inférieur est interdit. La figure 4.2.f présente les profils obtenus par les méthodes de différences finies (a) et de sommation par faisceaux gaussiens (b). L'interprétation cinématique des différentes arrivées dans ces profils est décrite en haut de la figure 4.2.e. Les faisceaux gaussiens modélisent correctement les réflexions (1) sur le toit du dôme, (2) sur la paroi latérale, et (3) sur l'interface horizontal. Les diffractions (a) et (c) par les coins correspondants sans zone d'ombre sont moins bien modélisées, tandis que la diffraction (b) n'a pas une amplitude correcte. Dans la direction rétrograde par rapport à la source, une extension non-physique de la diffraction (a) arrive avant la vraie diffraction. La diffraction (d) semble émise d'un point D', au lieu du point D, comme le montre le décalage en temps. Les diffractions (a') et (b') ne sont pas modélisées par la sommation de faisceaux gaussiens, car elles sont des diffractions secondaires des fronts diffractés (a) et (b). L'amplitude de ces doubles diffractions sera complètement négligeable dans le cas des interfaces réels, et ne sera donc plus discutée.

Un interface réel donne un modèle plus réaliste . La figure 4.2.g montre les profils obtenus par différences finies (a), faisceaux gaussiens

KM)



Faisceaux gaussiens

(a)

(b)

(c)

(d)

Figure 4.2.g : Profils sismiques pour le modèle dôme trapézoïdal à interface réel, (a) par différences finies, (b) par faisceaux gaussiens, (c) par théorie de Maslov, (d) par théorie des rais. L'interface réel a affaibli les diffractions. Notons le désaccord flagrant dans la partie droite du profil entre les différences finies et les méthodes haute fréquence.

gaussiens, (c) par Maslov et (d) par théorie des rais. Remarquons tout d'abord que les résultats de la théorie des rais sont corrects là où ils peuvent être calculés, i.e. pour des réflexions séculaires (1), (2) et (3). Deuxièmement, les amplitudes des différences finies et faisceaux gaussiens sont comparables sauf dans la zone en gris sur la figure d'interprétation 4.2.e. Avant de discuter ce désaccord, revenons sur les résultats pour les réflexions et les diffractions.

Les réflexions séculaires et sur-critiques, ainsi que les diffractions, peuvent mieux être observées sur des sismogrammes individuels de la figure 4.2.h. La réflexion (2), et la diffraction (c) présentent un accord parfait pour un observateur à $x = 0.2$ km. A 1.5 km, la diffraction (a) a une phase de coupure devant elle, qui est plus forte dans ce cas que dans le cas de l'interface libre. La diffraction (b) disparaît totalement pour les deux méthodes. Le dernier sismogramme, à une distance de 5.2 km, met en évidence la réflexion (1) et la diffraction (d) avec son décalage dans le temps d'arrivée. Un signal de forte intensité se mêle à la réflexion (1) dans la modélisation par différences finies. Cette forte amplitude n'existait pas pour une interface libre. Je l'attribue à une onde cônica se propageant au sommet du toit du dôme, où la réflexion est sur-critique. Quand le toit du dôme s'arrête, cette onde cônica est complètement ré-émise dans le milieu et contribue à la forte amplitude observée, notée en gris sur la figure 4.2.e. Ces ondes ne sont pas modélisées par la méthode de sommation des faisceaux gaussiens.

Faisceaux gaussiens

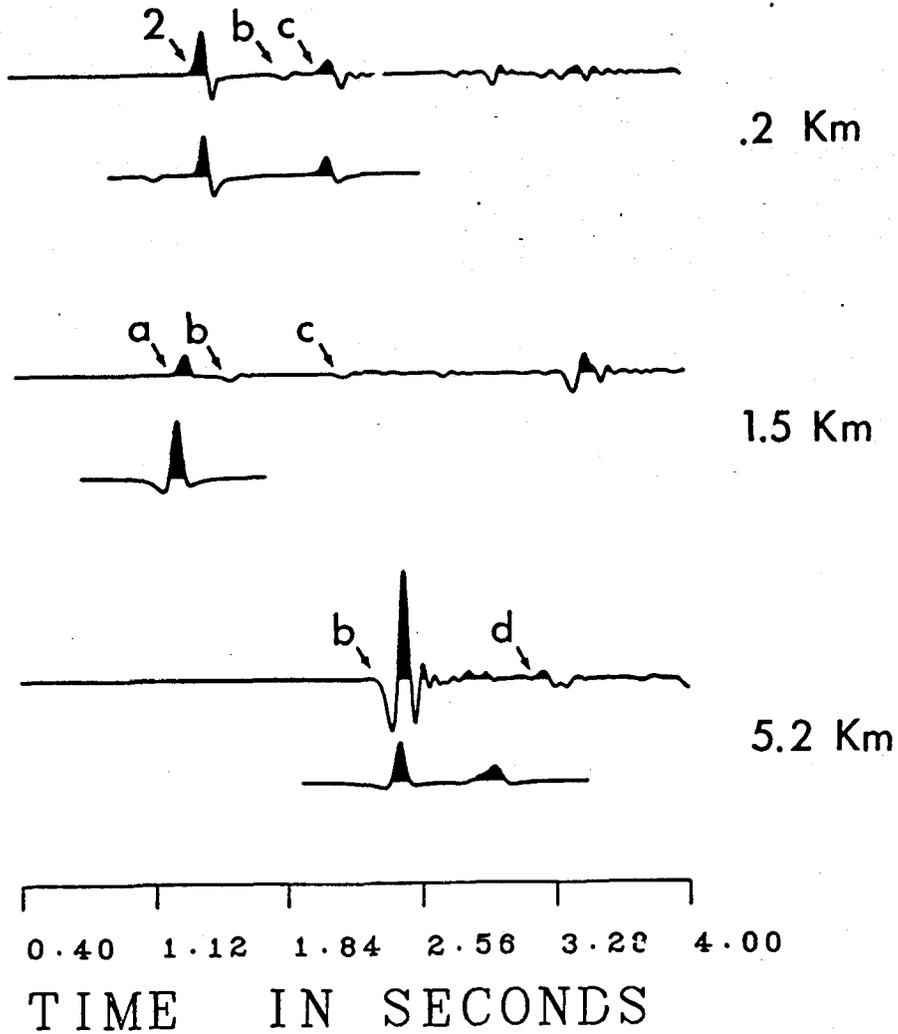


Figure 4.2.h : Quelques sismogrammes en différents récepteurs pour le dôme trapézoïdal à interface réel. Le désaccord de la figure 4.2.g se retrouve sur le sismogramme au kilomètre 5.2.

4.2.5 : Conclusion.

La comparaison entre la méthode de différences finies et la sommation par faisceaux gaussiens montre un remarquable accord là où les deux théories s'appliquent. La première méthode permet de calculer toutes les ondes directes, réfléchies, réfractées et converties, au prix d'un grand effort de calcul qui deviendra prohibitif à haute fréquence, tandis que la deuxième valable à haute fréquence permet de calculer les réflexions et les réfractions à moindre frais. Sa capacité à reconstruire les ondes diffractées et les ondes côniques est une question à laquelle la comparaison précédente apporte une réponse partielle.

Pour des configurations géométriques à la limite des conditions de validité de la sommation par faisceaux gaussiens, les diffractions sont en partie récupérées, tandis que les ondes côniques sont totalement absentes. Dans les méthodes de réflectivité, les ondes côniques sont synthétisées : il se pourrait donc, puisque les faisceaux gaussiens sont des perturbations des ondes planes utilisées dans la réflectivité, que l'on arrive à attraper ces ondes côniques. C'est un travail à l'étude actuellement pour des milieux latéralement hétérogènes.

On constate que la sommation par faisceaux gaussiens fournit des synthétiques dans une plage d'application plus grande que la théorie des rais, pour un prix supplémentaire négligeable. Par rapport à la méthode de différences finies, c'est une méthode complémentaire d'interprétation

s'adressant à des géométries différentes, à des contenus fréquentiels plus élevées et à des traits complémentaires dans les synthétiques. La difficulté sera de savoir pour un problème donné quelle est la meilleure méthode, et si l'investissement des différences finies est justifié.

MODELE COMPLEXE : CAS D'UN MILIEU A PLUSIEURS INTERFACES

4.3.1 : Introduction.

Je me suis intéressé jusqu'à maintenant à des milieux à une seule interface : la complexité du milieu résidait dans la géométrie quelconque de cette interface. Pourtant la méthode numérique des différences finies développée dans ce travail autorise des milieux complètement hétérogènes, i.e. avec plusieurs interfaces de forme aussi compliquée que l'on veut. Connaissant les hypothèses basse fréquence de la méthode de différences finies, peut-on analyser les résultats synthétiques obtenus pour des milieux à plusieurs interfaces ?

En quoi consiste une analyse des résultats ? Peut-on sur des sismogrammes basse fréquence identifier les différentes arrivées d'énergie et les associer avec des réflexions, diffractions ou autres ondes converties sur des interfaces du milieu ? Pour cela, tous les moyens proposés dans le chapitre 3 peuvent être mis en oeuvre, à savoir les instantanés du milieu, les sismogrammes par différence, les instantanés par différence. Je détaillerai lors de la présentation des profils ce que j'entends par ces mots. J'introduirai également les sismogrammes par élimination qui s'obtiennent par suppression d'une couche. D'utilisation plus délicate, nous verrons qu'ils apportent néanmoins quelques informations intéressantes. L'analyse de l'amplitude avec les changements de phase est plus délicate et ne sera pas abordée ici.

Dans un premier temps je définirai la géométrie du milieu. Les différents choix réalisés dans la construction du milieu tendent à rendre possible ma tentative d'analyse des sismogrammes synthétiques. J'éviterai ainsi les ambiguïtés qu'auraient apportées des modèles encore plus complexes, ambiguïtés qu'un nombre de modélisations comparatives, plus grand que celui que j'ai effectué, aurait sans doute levées. J'analyserai le profil obtenu pour ce milieu que je qualifierai de réel au moyen de profils de milieux que je qualifierai de synthétiques. Le nombre de ces milieux synthétiques requis pour aider à l'interprétation est de plus en plus grand au fur et à mesure que le milieu réel devient complexe. J'opterai pour un nombre restreint d'entre eux dans cette illustration, tout en remarquant que des études en configuration réelle en nécessiteraient un plus grand nombre à la discrétion de l'expérimentateur.

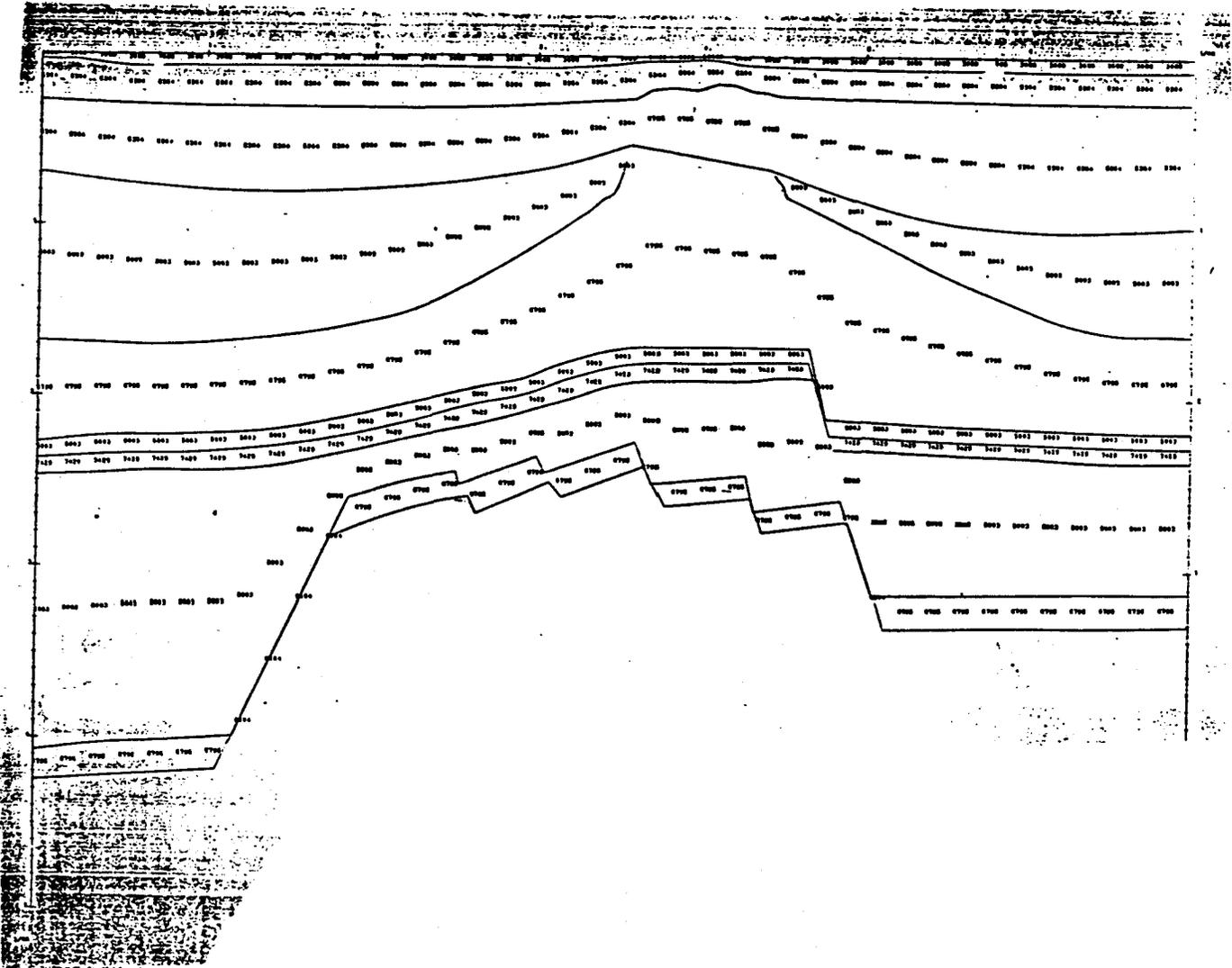


Figure 4.3.a : La géométrie du modèle de la cuve de Houston.

4.3.2 : Choix de la géométrie du milieu : modèle de la cuve de Houston.

Un exemple de milieu où les paramètres subissent des variations complexes tant verticalement qu'horizontalement est le modèle construit pour la Compagnie Française de Pétrole par le Seismic Acoustics Laboratory à l'Université de Houston. Ce modèle sera appelé le modèle de la cuve de Houston.

Ce modèle présenté dans la figure 4.3.a est trop complexe pour être mon premier exemple. En effet des couches très minces modélisent certaines interfaces profondes, comme la série d'interfaces 4,5,6 ou 7,8. On évitera ces interfaces complexes dans une première tentative d'interprétation. Elles pourront être introduites dans un deuxième temps, une fois que les traits essentiels des sismogrammes auront été dessinés. De plus, le milieu élastique est plongé dans de l'eau sous une épaisseur de 5 pouces. Cette présence d'eau ne pose aucun problème de modélisation comme je l'ai vérifié, mais augmente la difficulté d'interprétation pour des capteurs à la surface.

Ces différentes considérations m'ont amené à construire un modèle de 7 km de long sur 6.5 km de profondeur à 4 couches décrit de la figure 4.3.b. Les caractéristiques de chaque région sont définies dans le tableau 4.3.c. Je choisis comme premier milieu un milieu élastique au lieu d'un milieu liquide. Je prends un module de cisaillement μ identique au premier coefficient de Lamé λ , ce qui définit un milieu élastique plus rapide (6 235 m/s) que l'eau qu'il remplace et que le milieu situé en dessous (5 364 m/s). Cette vitesse rapide a l'avantage de diminuer le temps de

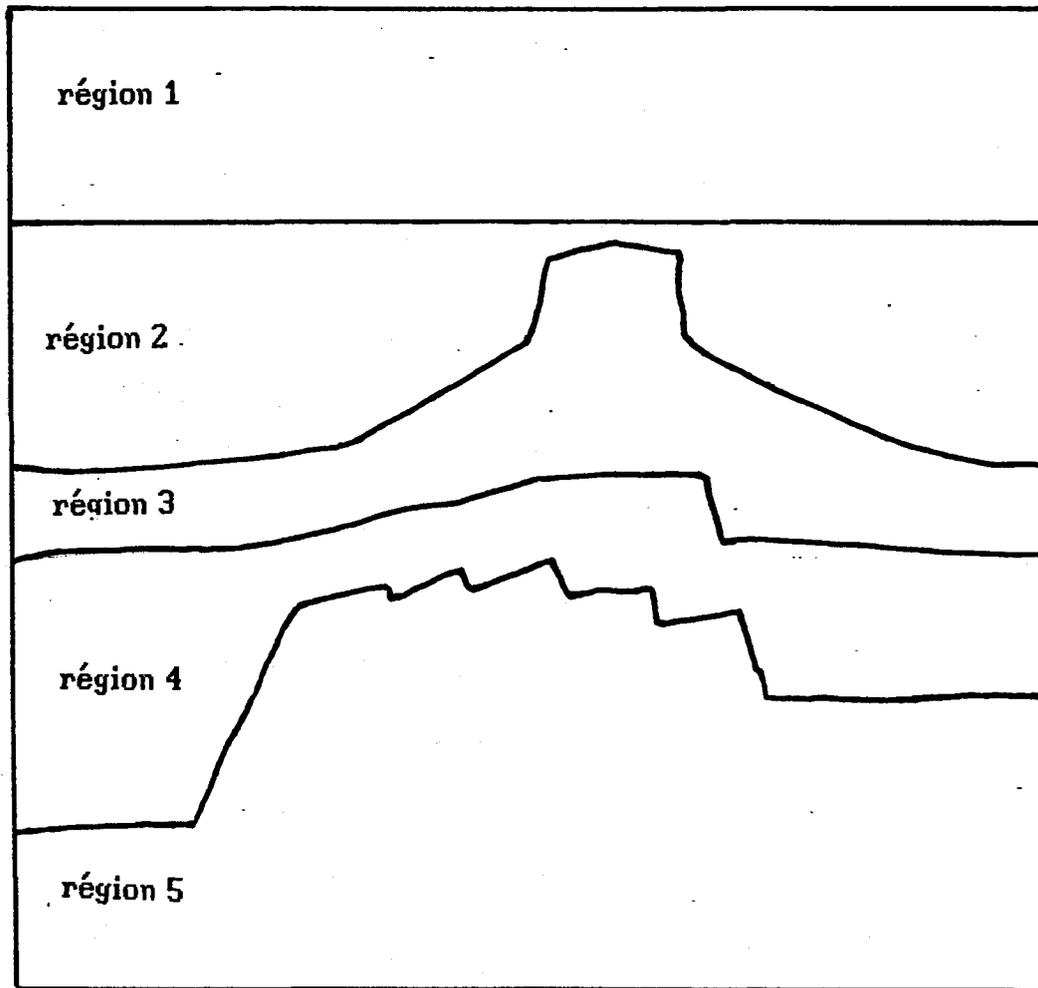


Figure 4.3.b : La géométrie choisie d'un milieu de 7 km sur 6.5 km pour une interprétation du profil enregistré en surface pour une source situé à 3.5 km du bord gauche.

! région 1 !	$v_p = 6\,235$ m/s	!	$\rho = 1\,880$ kg/m ³	!
! région 2 !	$v_p = 5\,364$ m/s	!	$\rho = 2\,770$ kg/m ³	!
! région 3 !	$v_p = 6\,795$ m/s	!	$\rho = 3\,859$ kg/m ³	!
! région 4 !	$v_p = 5\,883$ m/s	!	$\rho = 2\,877$ kg/m ³	!
! région 5 !	$v_p = 6\,795$ m/s	!	$\rho = 3\,859$ kg/m ³	!

$\nu = 0.25$ dans toutes les régions et $\rho = 1.7 + 0.2 v_p$ sauf pour la région 1

Source $f(t) = -2a(t-t_0) e^{-a(t-t_0)^2}$; $\nu_c = 10$ Hz et $x_s = 3.5$ km

Paramètres numériques : $\Delta x = 25$ m ; $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ s ; $n_x = 200$; $n_z = 260$

Tableau 4.3.c : Les paramètres physiques des différentes régions, ainsi que le choix de la fonction temporelle de la source et des paramètres numériques de modélisation.

parcours dans la première couche qui n'offre pas ici d'intérêt particulier. Le deuxième milieu se trouve situé au-dessus d'un milieu plus rapide (6 795 m/s). Nous obtenons ainsi la séquence totale suivante: milieu rapide, milieu lent, milieu rapide, milieu lent, milieu rapide. Cette séquence laisse inchangés les contrastes de vitesses du modèle de la cuve de Houston à partir du deuxième milieu (tableau 4.3.c).

Les différents paramètres physiques de la source, ainsi que les paramètres de discrétisation sont indiqués dans le tableau 4.3.c. La fréquence choisie de la source est de 10 Hz, ce qui donne une longueur d'onde de résolution d'environ 600 m. Cette longueur d'onde est à relier à la longueur du toit du dôme de 1 000 m. Des études plus haute fréquence sont possibles, puisqu'il y a 40 points de maillage par longueur d'onde modélisée, bien au-dessus des 10 points par longueur d'onde nécessaires pour les schémas du second ordre. Cette condition basse fréquence est celle qui aurait été nécessaire pour propager des ondes par différences finies dans le modèle de la cuve de Houston, qui comporte une couche d'eau de vitesse très lente. J'ai donc modifié la vitesse de la première couche pour réduire le coût de la propagation dans cette couche, mais j'ai conservée la fréquence de l'onde qui se serait propagée dans le modèle de la cuve de Houston. En effet, il me semble souhaitable de savoir si un profil synthétique du modèle de la cuve de Houston aide à l'interprétation ou non. Il faut souligner que la fréquence de la source utilisée dans l'expérience est autour de 40 Hz. Modéliser cette fréquence aurait nécessité une grille quatre fois plus fine, ce qui reste envisageable.

4.3.3 : Interprétation des profils.

La figure 4.3.d montre les sismogrammes verticaux enregistrés en surface durant 2 secondes. Pour le milieu réel, un profil sans amplification ne permet de voir que les premières arrivées d'énergie. En multipliant le signal par une puissance du temps - t^2 dans tous les profils ultérieurs -, nous faisons ressortir d'autres niveaux d'énergie. Le profil devient plus riche, mais aussi plus difficile à interpréter. Cette difficulté augmente du fait des réflexions parasites sur les bords du milieu numérique. Nous verrons que les sismogrammes par différence sont un moyen élégant de se débarrasser de ces réflexions parasites.

Je construis quatre milieux synthétiques en rapport avec la présence de quatre interfaces dans le milieu réel, qui vont du demi-espace à un milieu à trois couches. Les profils obtenus (figure 4.3.d) peuvent être comparés à l'oeil avec le profil réel. Bien que le modèle synthétique à une couche présente un profil avec les traits principaux détaillé plus loin du profil réel, il faut au moins le modèle synthétique à deux couches pour expliquer la disymétrie centrale observée dans le profil réel. Comment avancer dans notre analyse ?

Une analyse plus fine s'effectue sur des sismogrammes par différence en soustrayant du profil réel celui obtenu pour un des milieux synthétiques : la contribution pour la première interface non commune aux deux modèles ressort clairement. Sur un profil apparaissent les ondes converties à cette interface et aux interfaces inférieures (et leurs multiples sur les interfaces supérieures et inférieures), ainsi que les multiples sur les

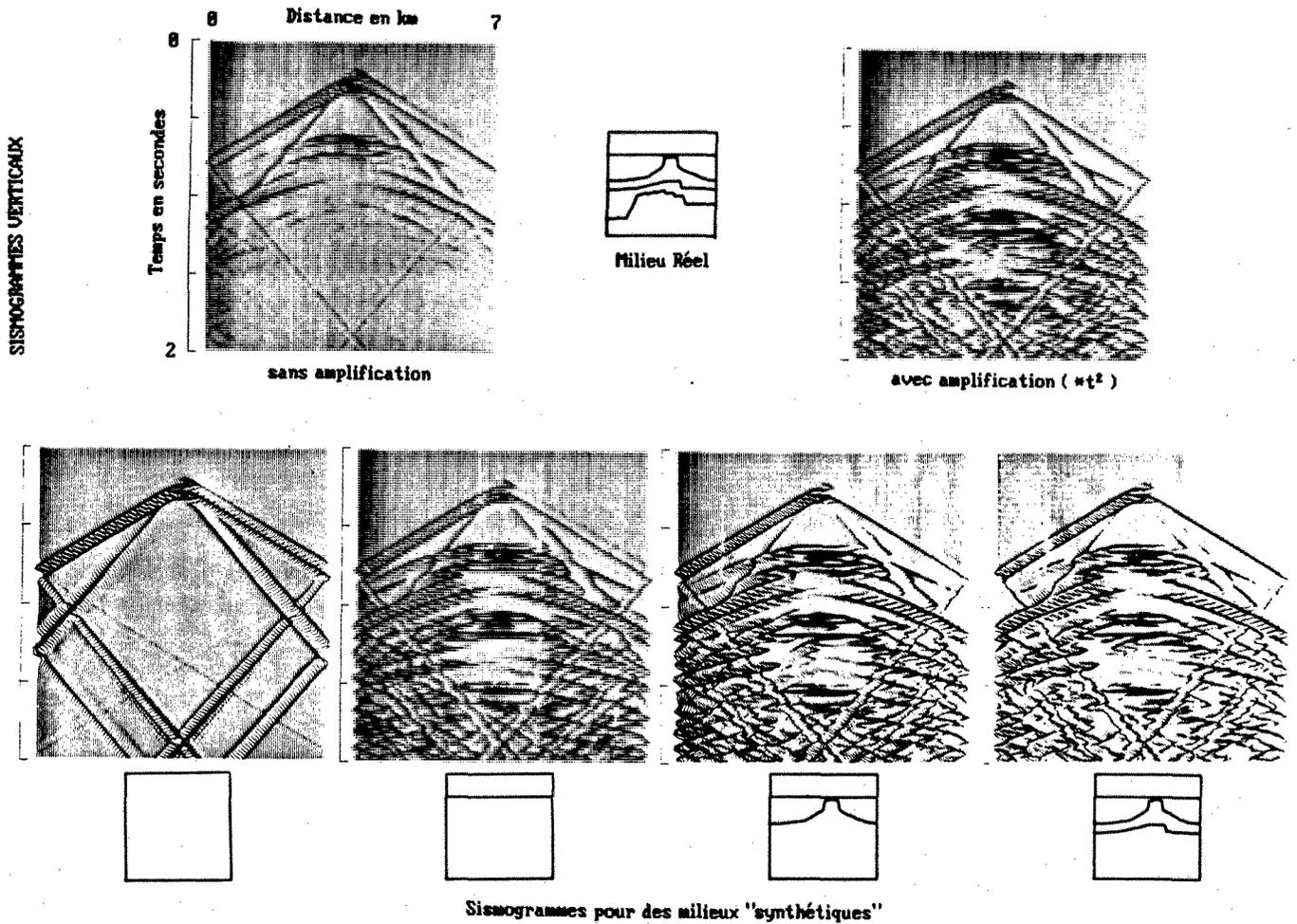
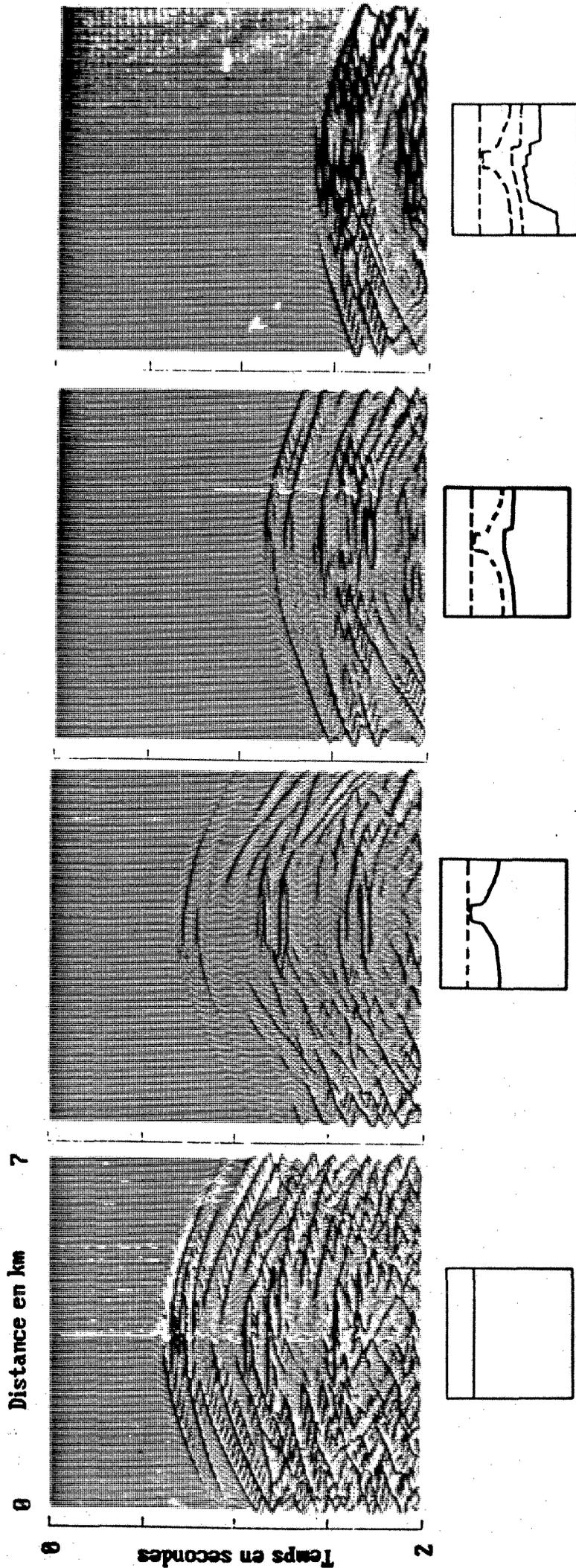


Figure 4.3.d : Les profils en surface pour le milieu réel, ainsi que pour les quatre milieux synthétiques.



SISMOGRAMMES 'PAR DIFFERENCE'

Figure 4.3.e : Les profils par différence pour les quatre milieux.

Figure 4.3.f : Trois séries d'instantanés : la première correspond au milieu réel, la deuxième à la différence entre le milieu réel et le premier milieu synthétique (on élimine l'onde directe et ses réflexions à la surface libre), la troisième à la différence entre le milieu réel et le deuxième milieu synthétique (on élimine les effets de la première couche). La première série est une représentation complète, tandis que les deux suivantes subissent un écrêtement qui fait ressortir les fronts d'onde.

INSTANTANES DU MILIEU REPRESENTATION VECTORIELLE

Temps en secondes

1.60

1.40

1.20

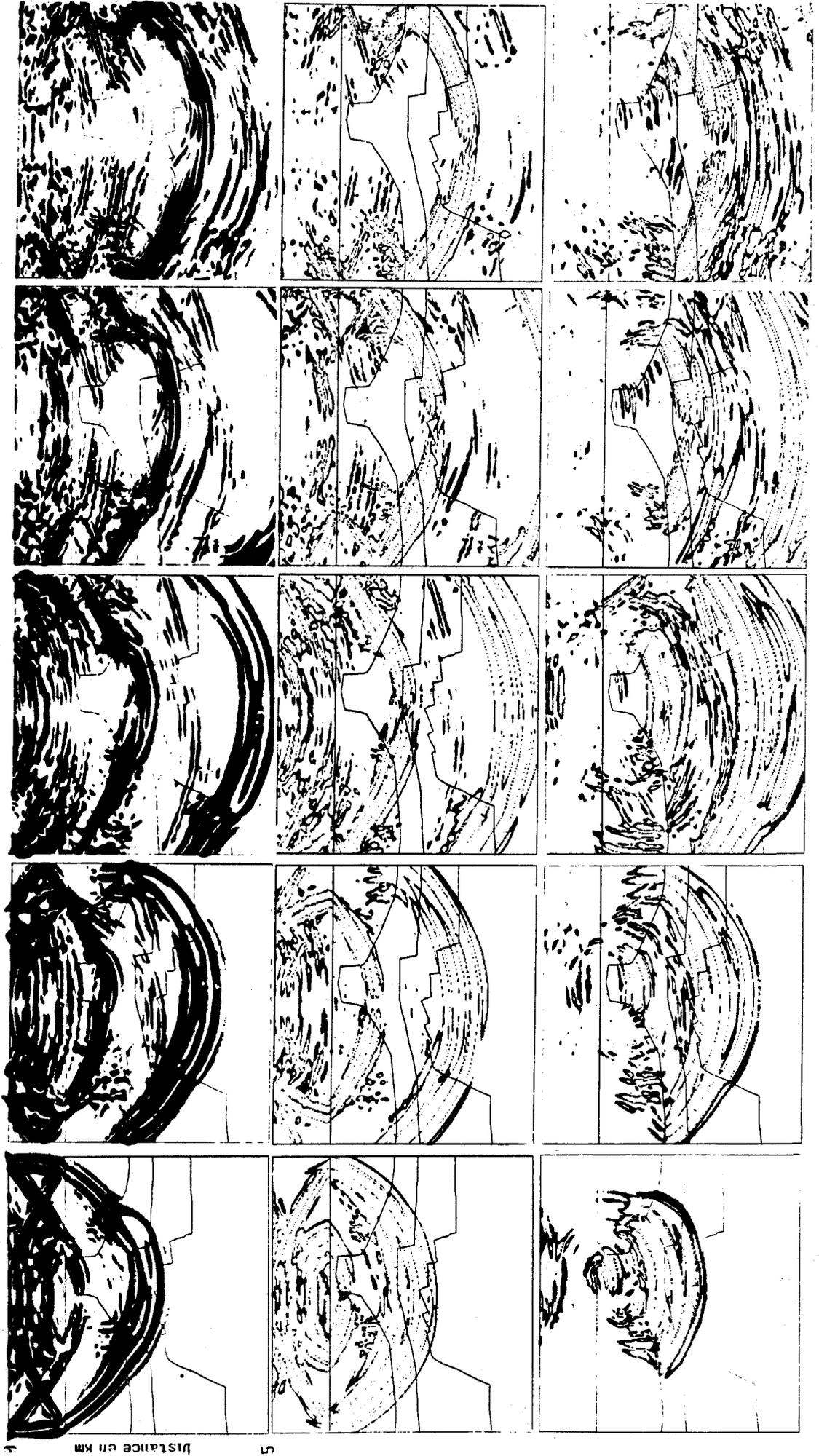
1.00

7

Distance en km

0.80

0



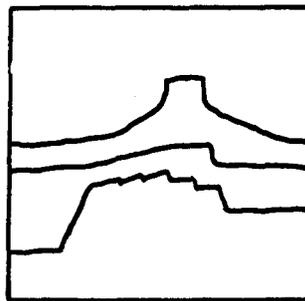
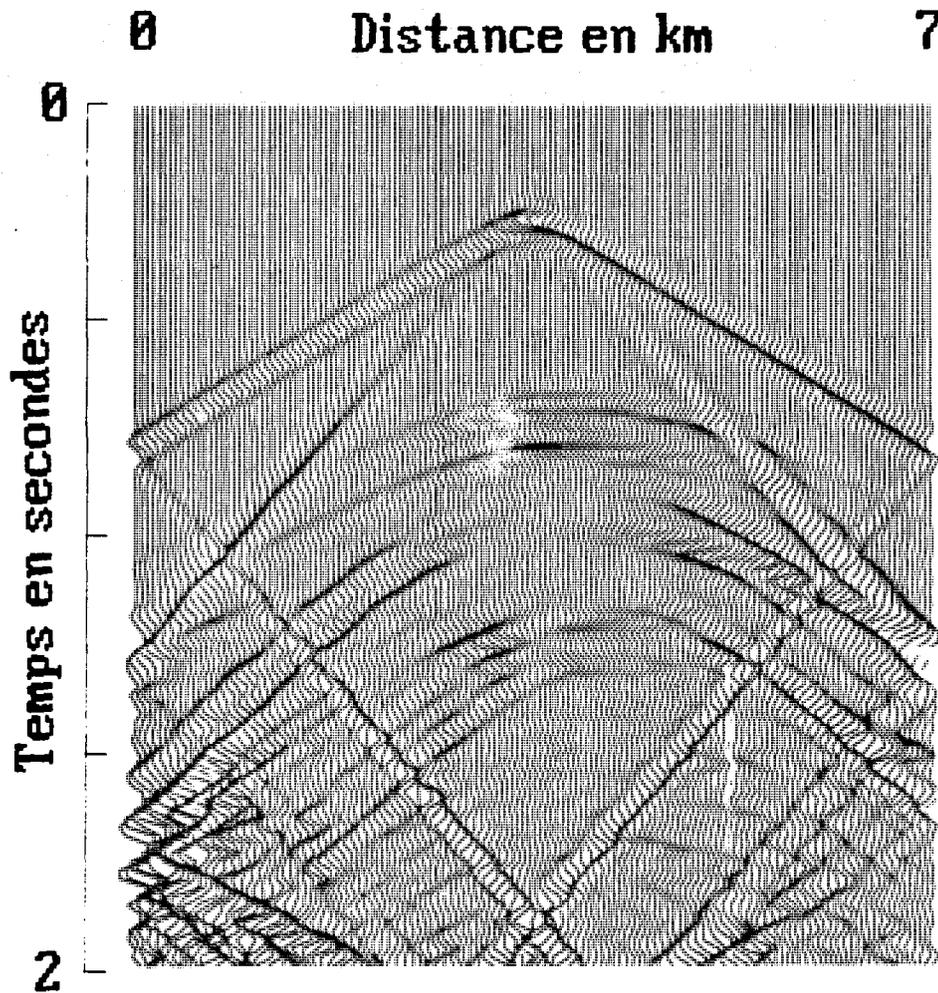
interfaces inférieures des ondes converties sur les interfaces supérieures. Dans la pratique, les premières arrivées correspondant aux ondes réfléchies sur l'interface non commune seront analysables.

Il est possible de construire des instantanés par différence associés aux sismogrammes par différence. Ils nous aideront à interpréter les ondes converties sur la première interface non commune.

Dans la figure 4.3.e, le premier profil par différence nous donne l'interprétation de l'effet de la première couche. Cette interprétation est analogue à celle faite pour le milieu de la couche altérée du chapitre 3, et nous permet de vérifier l'intérêt de la construction de tels profils. On observe d'abord la PP et la GPP. Vient derrière, très près de la GPP, la PS, suivie par le groupe de la GSP et la GPS. Le profil devient ensuite plus complexe avec des doubles réflexions sur la couche horizontale mêlées aux réflexions des autres interfaces.

On peut suivre ces phases sur les instantanés de la figure 4.3.f. La première série représente les instantanés du milieu réel, où le champ vectoriel est dessiné en chaque point suivant une flèche. La deuxième série, qui est associée au premier profil par différence, permet de mieux les suivre encore, puisqu'on a éliminé l'onde incidente et ses fantômes. Un écrêtement a été appliqué à l'image, transformation qui fait ressortir les forts gradients et permet donc d'observer les fronts.

Pour procéder à une analyse de ces doubles réflexions, passons au profil par différence pour le deuxième milieu (figure 4.3.E) : l'interface non commune est la structure typique du dôme. Les doubles réflexions sur



SISMOGRAMMES 'PAR ELIMINATION'

Figure 4.3.g : Un exemple de sismogramme par élimination qui permet d'interpréter l'effet du toit du dôme.

la couche horizontale, comme la PPPP, doivent disparaître de ce profil : c'est ce que nous observons un peu après une seconde de temps d'arrivée. Bien avant ce temps d'arrivée, nous observons la réflexion PFP et la réflexion GPPP sur le toit du dôme, associées aux deux diffractions de part et d'autre (chaque lettre indique une réflexion/transmission sur une interface ou la surface libre). Arrivant en même temps, nous devinons la PSP et la GPSP qui rendent le signal un peu plus complexe. Derrière elles nous voyons principalement la PPS, la GPPS, avec probablement les perturbations associées à la PSS et la GPSS. Ces phases exhibent une signature pentée caractéristique, qui traverse tout le profil. Cette signature est la même que celle observée dans le modèle du coin. On peut les distinguer sur un sismogramme où la couche horizontale a disparu (figure 4.3.g). C'est pourquoi je les appelle sismogramme par élimination, par opposition aux sismogrammes par différence. On ne peut procéder à une soustraction du profil réel, car les temps d'arrivée ne correspondent pas : cette technique, quoique utile, est moins fructueuse que les profils par différence. Nous voyons notamment apparaître nettement les fantômes de ces premières arrivées dans ces sismogrammes par élimination, et nous pouvons les deviner sur le profil par différence.

La troisième série d'instantanés (figure 4.3.f) permet d'évaluer l'effet diffractant du toit du dôme, agissant presque comme un point à la longueur d'onde de propagation considérée. Le diagramme de diffraction circulaire de l'onde de compression s'observe partiellement dans la première image, tandis que le diagramme de diffraction de l'onde cisailante se trouve mieux dessinés dans les images suivantes. Les ondes converties, qui suivent l'interface, plongent dans le milieu inférieur, comme les racines dont ont déjà parlé Stephen et Bolmer (1985). Pour des capteurs placés

près de cette interface, l'énergie enregistrée serait très forte : c'est ce qui se passe sur un fond sous-marin, par exemple.

Le profil suivant nous décrit les effets d'une interface quasi-plane (figure 4.3.e). Le décrochement brutal situé à droite du modèle n'est pas observé à la surface libre. L'horizon plan de cette interface induit les fortes réflexions PPPP et GPPPP à droite du profil. Plus à gauche, pratiquement à l'aplomb de la source, le signal plus faible provient de la traversée à vitesse plus rapide du sommet du dôme. Un décrochement faible traduit la structure quasi-verticale de l'interface du dôme. Nous voyons ainsi apparaître la déformation due aux interfaces supérieures dans le signal enregistré pour une interface relativement simple.

Finalement, le dernier profil montre l'effet de l'interface fortement faillée (figure 4.3.e). Du fait de la longueur d'onde utilisée, cette structure n'est pas analysée, et seules les pentes moyennes peuvent se retrouver dans le signal observé. Autour de la pointe du dôme, nous observons toujours des arrivées complexes qui rendent difficile la localisation du réflecteur associé. L'arrivée énergétique située à l'aplomb de la source correspond probablement à l'onde ayant suivi l'interface du dôme avec la vitesse lente du milieu recouvrant ce dôme : ce qui permettrait de rendre compte du tassement dans le temps d'arrivée au-dessus du dôme.

Ceci termine l'analyse que je voulais faire, analyse qui est devenue de plus en plus incertaine au fur et à mesure que l'on considérait une interface profonde. L'interprétation soignée des instantanés nécessite des écrans graphiques sophistiqués. Les différents traitements de l'image

doivent être interactifs et non pas être effectué à l'aveuglette sur un traceur lent comme ce que j'ai fait. J'ai probablement omis ainsi certains traits qui auraient pu être découvert lors d'une analyse plus poussée.

4.3.4 : Conclusion.

L'aide apportée par l'analyse de profils synthétiques à l'interprétation de profils sismiques réels au-dessus de structures complexes connues est importante, même aux fréquences modélisées par les méthodes de différences finies. Un exemple dérivé du modèle de la cuve de Houston illustre les capacités d'interprétation des méthodes numériques espace-temps.

Afin de mieux analyser le profil synthétique, il est possible d'étudier les instantanés du milieu. Plus ceux-ci sont nombreux, meilleure sera notre compréhension. Rajouter la dimension temporelle par la création d'un film est certainement un énorme avantage. L'analyse des instantanés par les différents traitements d'image sur un écran graphique interactif affine notre interprétation.

Il est possible d'aller plus loin dans cette analyse pour lever les ambiguïtés sur l'origine du réflecteur. Différents milieux synthétiques sont construits, dont les structures à partir de la surface libre ressemblent de plus en plus à celle du milieu réel. Par soustraction, on obtient des profils et des instantanés par différence, qui permettent d'analyser essentiellement la première interface non commune.

On peut aussi construire des profils par élimination, en supprimant une interface du milieu réel. Les phases d'énergie associées à cette interface sont éliminées. Les phases associées aux interfaces localisées en dessous ressortent mieux, mais avec un décalage dans le temps

d'arrivée. Cette information par élimination est donc moins facilement exploitable que celle obtenue par différence, à moins d'ajuster les vitesses dans le milieu.

D'autres modèles synthétiques pourront être utilisés suivant le courage et l'expérience de l'expérimentateur. Le but est de lever les différentes possibilités d'interprétation du profil réel. D'autres méthodes complémentaires, comme la théorie des rais et ses extensions, pourront être jointes afin de faciliter encore l'interprétation

CHAPITRE 5

" Bornons ici cette carrière :
Les longs ouvrages me font peur.
Loin d'épuiser une matière,
On n'en doit prendre que la fleur."

La Fontaine, Epilogue du 1^{er} recueil.

CONCLUSION GENERALE

Ce travail a été consacré à l'étude de la rupture au foyer d'un séisme et de la propagation des ondes dans un milieu élastique complexe, qui peut avoir des propriétés élastiques fort hétérogènes. Le trait d'union de ce travail fut la méthode de résolution employée : méthode de différences finies centrées appliquée au système élastodynamique.

La bonne modélisation des différents champs sur le plan de faille conditionne la qualité des résultats obtenus pour la propagation de la rupture, et donc l'ampleur du séisme.

Si la traduction numérique des conditions de Cauchy sur le plan de faille s'avère excellente pour la singularité de contrainte de cisaillement en mode antiplan, la traduction numérique dans le cas plan est de moins bonne facture et entâche le résultat de phénomènes numériques qu'il n'a pas été possible d'éliminer : j'ai proposé un intervalle d'application où cet effet numérique reste négligeable pour la propagation spontanée des failles cassantes.

Malheureusement cet intervalle dépend de la méthode utilisée. En effet, je reste persuadé que les méthodes actuelles possèdent cet effet numérique, puisqu'elles font toutes intervenir une discrétisation sur le plan de faille. Les arguments pour définir cet intervalle ne peuvent pas être appliqués à des failles à zone de cohésion. Les effets des différentes dimensions sont alors très difficiles à analyser. Les résultats d'Andrews (1985) conduisent à penser qu'il faut s'affranchir par un moyen ou un autre des effets de discrétisation. Ce problème reste actuellement ouvert.

Cette limitation ne m'a pas permis de modifier spatialement le paramètre correspondant à la cohésion du matériau, et donc au critère de rupture. Le processus de rupture modélisé est, par conséquent, simple et consiste en un déclenchement suivi d'une accélération puis d'un arrêt final. Par contre, la méthode de différences finies a assez de souplesse pour permettre de choisir des champs de contrainte initiaux les plus satisfaisants physiquement. Ce qui m'a amené à considérer trois types de nucléations : nucléation self-similaire, nucléation instantanée et nucléation statique, la plus physique.

Une application au calcul du rayonnement lointain montre que l'effet de directivité contrôle le contenu spectral de la source dans une direction et empêche de retrouver les paramètres de la source d'une manière fiable, spécialement la chute de contrainte.

L'application de ces modèles à des événements ayant été enregistrés sur un réseau dense est encore du domaine du futur : les modèles cinématiques, beaucoup plus simples à mettre en oeuvre, ont encore de beaux jours devant eux.

La propagation des ondes en milieu hétérogène correspond à la deuxième phase de ce travail. Que se passe-t-il après l'émission d'ondes par la source sismique ? Afin d'éliminer toutes incertitudes liées à la source, j'ai été amené à considérer des sources simples et connues, comme celles utilisées dans les expériences de sismique.

La modélisation par différentes méthodes numériques - différences finies, éléments finis - de la propagation des ondes est analysée beaucoup

plus en détail que la propagation de la rupture dans la littérature sismologique, sismique et numérique.

Quelle que soit la formulation numérique choisie, il m'a semblé plus intéressant de construire les schémas numériques à partir du système élastodynamique, qui est un système hyperbolique du premier ordre en vitesse et contrainte. La discrétisation des paramètres du milieu découlait de ce choix de variables et les interfaces se traduisaient par une variation des paramètres sur un pas de la grille.

De plus, le choix du système élastodynamique montrait que la composante horizontale du champ de vitesse ne pouvait pas être connue au même noeud que la composante verticale. Cette constatation immédiate sur le système élastodynamique a conduit à des résultats numériques stables pour le cas du mouvement P-SV, quelle que soit la valeur du coefficient de Poisson.

J'ai pu ainsi développer l'analyse de la propagation en milieux complexes avec la présence d'ondes diffractées, de coin, côniques, guidées, de surface - Rayleigh et Stoneley -..., illustrant ainsi la puissance de la méthode utilisée.

J'ai montré aussi du même coup qu'il devenait de plus en plus difficile d'interpréter les sismogrammes synthétiques quand le milieu devenait trop complexe, notamment à cause de l'impossibilité d'utiliser des signaux haute fréquence qui auraient permis de bien séparer les différentes arrivées. Des études critiques des sismogrammes pour un modèle compliqué par comparaison avec des sismogrammes pour des milieux hypothétiques plus

simples permettent de résoudre partiellement cette difficulté. On se trouve dans une configuration meilleure que celle des observations de terrain, car on connaît le milieu de propagation. L'utilisation d'autres méthodes, comme les méthodes haute fréquence, amélioreront ces études critiques, comme j'ai pu le constater sur deux exemples dans ce travail.

Ces difficultés d'interprétation n'empêchent pas l'approche inverse. Toutefois, la tentative présentée dans ce travail reste à l'état d'ébauche : il reste encore beaucoup de travail sur la reformulation du problème inverse, le choix de la méthode utilisée pour le problème direct. Les résultats remarquables obtenus pour la reconstruction des paramètres du milieu dans différentes géométries simples aideront, je l'espère, à faire avancer la réflexion sur l'approche inverse.

Il est toutefois possible, en l'état actuel des méthodes de modélisation, d'utiliser des profils synthétiques pour interpréter des profils réels. Pour cela, il est indispensable d'analyser les profils synthétiques et de pouvoir prédire d'où vient une arrivée énergétique. L'illustration en est faite sur les profils d'un modèle dérivé du modèle de la cuve de Houston : les différentes phases sont analysables, en dépit du contenu basse fréquence des signaux.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Achenbach, J.D.,1975, Wave propagation in elastic solids: North Holland Publishing Co.

Achenbach, J.D., Gautesen, A.K., Mc Maken, H.,1982, Ray methods for waves in elastic solids : Pitman Publishing Inc.

Aki, K., Larner, K.L.,1970, Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves : J.Geophys.Res., 75, 933-954.

Aki, K., Lee, W.H.K.,1976, Determination of three-dimensional velocity anomalies under a seismic array using first P arrival times from local earthquakes. I. A homogeneous initial model : J.Geophys.Res., 81, 4381-4399.

Aki, K., Richards, P.G.,1980, Quantitative seismology : W.H.Freeman and Company.

Alekseev, A.S., Mikhailenko, B.G.,1980, The solution of dynamic problems of elastic wave propagation in inhomogeneous media by a combination of partial separation of variables and finite-differences methods : J.Geophys., 48, 161-172.

Alford, R.M., Kelly, K.R., Boore, D.M.,1974, Accuracy of finite-difference modelling of the acoustic wave equation: Geophysics, 39, 834-842.

Alterman, Z., Karal, F.C.,1968, Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods : Bull.Seis.Soc.Am., 58, 367-398.

Anderson, J.G., Luco, J.E.,1983, Parametric study of near-field ground motion for a strike-slip dislocation model : Bull.Seism.Soc.Am., 73, 23-44.

Anderson, J.G., Luco, J.E.,1983, Parametric study of near-field ground motions for oblique-slip and dip-slip dislocation models : Bull.Seism.Soc.Am., 73, 23-44

Andrews, D.J., 1974, Evaluation of static stress on a fault plane from a Green's function : *Bull.Seism.Soc.Am.*, **64**, 1629-1633.

Andrews, D.J., 1976, Rupture velocity of plane-strain shear cracks : *J.Geophys.Res.*, **81**, 5679-5687.

Andrews, D.J., 1985, Dynamic plane-strain shear rupture with a slip-weakening friction law calculated by a boundary integral method : *Bull.Seism.Soc.Am.*, **75**, 1-21.

Archuleta, R.J., Frazier, G.A., 1978, Three-dimensional numerical simulations of dynamic faulting in a half-space, *Bull.Seism.Soc.Am.*, **68**, 541-572.

Archuleta, R.J., Spudich, P., Olson, A., 1979, Synthetic seismogram studies of an aftershock of the 1979 Imperial Valley, California, earthquake : *Earthquake Notes*, **50**, 50.

Archuleta, R.J., Day, S.M., 1980, Dynamic rupture in a layered medium : the 1966 Parkfield earthquake : *Bull.Seism.Soc.Am.*, **70**, 671-689.

Archuleta, R.J., 1982, Analysis of near-source static and dynamic measurements from the 1979 Imperial Valley earthquake : *Bull.Seism.Soc.Am.*, **72**, 1927-1956.

Archuleta, R.J., 1984, A faulting model for the 1979 Imperial Valley earthquake : *J.Geophys.Res.*, **89**, 4559-4585.

Bamberger, A., Chavent, G., Lailly, P., 1980, Etude de schémas numériques pour les équations de l'élastodynamique linéaire : Rapport n° 41, INRIA.

Bard, P.Y., Bouchon, M., 1980, The seismic response of sediment-filled valleys. Part I : The case of incident SH waves : *Bull.Seism.Soc.Am.*, **70**, 1263-1286.

Bard, P.Y., Bouchon, M., 1980, The seismic response of sediment-filled valleys. Part 2 : The case of incident P and SV waves : *Bull.Seism.Soc.Am.*, **70**, 1921-1941.

Bibliographie

Barenblatt, G.I., 1959, The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses : J.Appl.Math.Mech., 23, 622-636.

Ben-Menahem, A., Singh, S.J., 1981, Seismic waves and sources : Springer-Verlag New York Inc.

Ben-Menahem, A., Beydoun, W.B., 1985, Range of validity of seismic ray and beam methods in general inhomogeneous media - I. General theory : Geophys.J.R.astr.Soc., 82, 207-234

Bernard, P., Madariaga, R., 1984, A new asymptotic method for the modeling of near-field accelerograms : Bull.Seism.Soc.Am., 74, 539-558.

Bernard, P., Madariaga, R., 1984, High-frequency seismic radiation from a buried circular fault : Geophys.J.Roy.astr.Soc., 78, 1-18.

Bevington, P.R., 1969, Data reduction and error analysis for the physical sciences : McGraw-Hill Book company.

Beydoun, W.B., Ben-Menahem, A., 1985, Range of validity of seismic ray and beam methods in general inhomogeneous media - II. A canonical problem : Geophys.J.R.astr.Soc., 82, 235-262

Bhasavanija , 1983, A finite difference model of an acoustic logging tool : the borehole in a horizontally layered geologic medium : Ph.Thesis, Colorado School of Mines.

Boatwright, J., 1980, A Spectral theory for circular seismic sources : simple estimates of source dimensions, dynamic stress drop and radiated energy : Bull.Seism.Soc.Am., 70, 1-27

Bolt, B.A., 1982, Inside the Earth, evidence from earthquakes : W.H. Freeman and Co.

Boore, D.W., 1972, Finite difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials : Methods in computational physics.

Bouchon, M., Aki, K., 1977, Near-field of a seismic source in a layered medium with irregular interfaces : Geophys.J.R.astr.Soc., 50, 669-684.

Bouchon, M., 1979, Predictability of ground displacement and velocity near an earthquake fault : an example : the Parkfield earthquake of 1966 : J.Geophys.Res., **84**, 6149-6156.

Brune, J.N., 1970, Tectonic stress and the spectra of seismic shear waves from earthquakes : J.Geophys.Res, **75**, 4997-5009.

Brune, J.N., Archuleta, R.J., Hartzell, S., 1979, Far-field S-wave spectra, corner frequencies, and pulse shapes : J.Geophys.Res., **84**, 2262-2272.

Bui, H.D., 1978, Mécanique de la rupture fragile : Masson.

Burridge, R., Knopoff, L., 1964, Body force equivalents for seismic dislocations : Bull.Seism.Soc.Am., **64**, 1789-1808.

Burridge, R., 1969, The numerical solution of certain integral equations with non-integrable kernels arising in the theory of crack propagation and elastic wave diffraction : Phil.Trans.Roy.Soc.London, Ser. A **265**, 353.

Burridge, R., Willis, J.R., 1969, The self-similar problem of the expanding elliptical crack in an anisotropic solid : Proc.Camb.Phil.Soc., **66**, 443-468.

Burridge, R., 1973, Admissible speeds for plane-strain self-similar shear cracks with friction but lacking cohesion : Geophys.J.Roy.Astr.Soc., **35**, 439-455.

Campillo, M., Bouchon, M., 1985, Synthetic SH seismograms in a laterally varying medium by the discrete wavenumber method : Geophys.J.R.astr.Soc., **83**, 307-317.

Cerveny, V., Molotkov, I.A., Psencik, I., 1977, Ray method in seismology : Univ.Karlova,Praha.

Cerveny, V., Popov, M.M. et Psencik, I., Computation of wave fields in inhomogeneous media - gaussian beam approach : Geopgys.J.R.astr.Soc., **70**, 109-128.

Chapman, C.H., 1978, A new method for computing synthetic seismograms : *Geophys.J.Roy.Astr.Soc.*, **64**, 321-372

Chapman, C.H., Drummond, R., 1982, Body-wave seismograms in inhomogeneous media using Maslov asymptotic theory, *Bull.Seism.Soc.Am.*, **72**, S277-S917.

Chapman, C.H., 1985, Ray theory and its extensions : WKB and Maslov seismograms : *J. Geophys.*, **58**, 27-43.

Chapman, C.H., Orcutt, J.A., 1985a, Least-squares fitting of marine seismic refraction data : *Geophys.J.R.astr.Soc.*, **82**, 239-374.

Chapman, C.H., Orcutt, J.A., 1985b, The computation of body wave synthetic seismograms in laterally homogeneous media : *Rev. Geophys.*, **23**, 105-163.

Chouet, B., 1985, Dynamics of a fluid driven crack in three dimensions by the finite difference method : *J.Geophys.Res.* (soumis).

Chouet, B., Julian, B.R., 1985, Dynamics of an expanding fluid filled crack : *J.Geophys.Res.*, **90**, 11187-11198.

Claerbout, J.F., 1976, *Fundamentals of geophysical data processing* : McGraw-Hill Inc.

Clayton, R.W., Engquist, B., 1980, Absorbing boundary conditions for wave-equation migration : *Geophysics*, **45**, 895-904.

Clayton, R.W., Stolt, R.H., 1981, A Born-WKB inversion method for acoustic reflection data : *Geophysics*, **46**, 1559-1567.

Dahlen, F.A., 1974, On the ratio of P-wave to S-wave corner frequencies for shallow earthquake sources : *Bull.Seism.Soc.Am.*, **64**, 1159-1180.

Das, S., Aki, K., 1977, A numerical study of two-dimensional spontaneous rupture propagation : *Geophys.J.Roy.Astr.Soc.*, **50**, 643-668.

Das, S., 1981, Three-dimensional spontaneous rupture propagation and implications for the earthquake source mechanism : *Geophys.J.Roy.Astr.Soc.*, **67**, 375-394.

Day, S.M., 1979, Three-dimensional finite difference simulation of fault dynamics : Final Report S3 Project N°12035, Systems, Science and Software, La Jolla, California.

Day, S.M., 1982a, Three dimensional finite difference simulation of fault dynamics : rectangular faults with fixed rupture velocity : *Bull.Seism.Soc.Am.*, **72**, 705-727.

Day, S.M., 1982b, Three-dimensional simulation of spontaneous rupture : the effect of nonuniform prestress, *Bull.Seism.Soc.Am.*, **72**, 1881-1902.

Dieterich, J.H., 1979a, Modeling of rock friction. 1. Experimental results and constitutive equations : *J.Geophys.Res.*, **84**, 2161-2168.

Dieterich, J.H., 1979b, Modeling of rock friction. 2. Simulation of preseismic slip : *J.Geophys.Res.*, **84**, 2169-2175.

Dwonska, R., Rice, J.R., 1983, Fracture theory and its seismological applications : Elsevier Publ. Co.

Edwards, M., Hsuing C., Kosloff D., Reshef M., 1985. Elastic 3-D forward modelling by the Fourier method : expanded abstracts of the 1985 SEG annual meeting, 534-535.

Emerman, S.H., Schmidt, W., Stephen, R.A., 1982. An implicit finite-difference formulation of the elastic wave equation : *Geophysics*, **47**, 1521-1526.

Eshelby, J.D., 1969, The elastic field of a crack extending non-uniformly under general anti-plane loading : *J.Mech.Phys.Solids*, **17**, 177-199.

Ewing, W.M., Jardetzky, W.S., Press, F., 1957, Elastic waves in layered media : McGraw-Hill Book Co.

Bibliographie

Farra, U., 1984, Calcul de sismogrammes synthétiques en champ proche, et application au séisme d'Imperial Valley du 15 octobre 1979 : Rapport de D.E.A, Université de Paris 7, Paris.

Farra, U., Bernard, P., Madariaga, R., 1986, Fast near source evaluation of strong ground motion for complex source models : Proceedings of Ewing Symposium on Source Mechanism.

Fedotov, S.A., 1965, Regularities of the distribution of strong earthquakes in Kamchatka, the Kurile Islands and northeastern Japan : (in Russian) Tr.Inst.Fiz.Zemli Akad. Nauk SSSR, 36, 66-93 (English translation by S.Ward, 1966).

Felsen, L.B., 1984, Geometrical theory of diffraction, evanescent waves, complex rays and gaussian beams : Geophys.J.R.astr.Soc., 79, 77-88.

Frankel, A., Kanamori, H., 1983, Determination of rupture duration and stress drop for earthquakes in Southern California : Bull.Seism.Soc.Am., 73, 1527-1552.

Fuchs, K., Muller, G., 1971, Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations : Geophys.J.R.Astr.Soc., 23, 417-433.

Gauthier, O., 1984, Inversion de donnees de sismique reflexion dans l'approximation acoustique : Rapport de stage de D.E.A., Universite Paris 7, Paris.

Gauthier, O., Virieux, J., Tarantola, A., 1986, Two-dimensional non-linear inversion of seismic waveforms : numerical results : Geophysics (sous presse).

Bibliographie

George, T., Virieux, J., Madariaga, R., 1986, Seismic wave synthesis by gaussian beam summation : a comparison with finite differences : Geophysics (soumis).

George, T., 1986, Titre a définir : Thèse de doctorat, Université Paris 7, Paris.

Gupta, R.N., 1966, Reflection of elastic waves from a linear transition layer : Bull.Seism.Soc.Am., 56, 511-526.

Halpern, L., 1980, Etude de conditions aux limites absorbantes pour des schémas numériques relatifs a des équations hyperboliques linéaires : Thèse de 3ème cycle, Université de Pierre et Marie Curie, Paris.

Hanks, T., 1981, The corner frequency shift, earthquake source models and Q : Bull.Seism.Soc.Am., 71, 597-612.

Hartzell, S.H., Helmberger, D.U., 1982, Strong-motion modeling of the Imperial Valley earthquake of 1979 : Bull.Seism.Soc.Am., 72, 571-596.

Hartzell, S.H., Heaton, T.H., 1983, Inversion of strong-ground motion and teleseismic waveform data for the fault rupture history of the 1979 Imperial Valley, California earthquake : Bull.Seism.Soc.Am., 73, 1553-1583.

Haskell, N.A., 1964, Radiation pattern of surface waves from point sources in a multi-layered medium : Bull.Seism.Soc.Am., 54, 377-394.

Haskell, N.A., 1966, Total energy and energy spectral density of elastic wave radiation from propagating faults II. : Bull.Seism.Soc.Am., 56, 125-140.

Haskell, N.A., 1969, Elastic displacements in the near-field of a propagating fault : Bull.Seism.Soc.Am., 59, 865-908.

Helmberger, D.U., 1968, The Crust-Mantle transition in the Bering Sea : Bull.Seism.Soc.Am., 58, 179-214.

Hong, T., Helmberger, D., 1978, Glorified optics and wave propagation in nonplanar structure : Bull.Seism.Soc.Am., 68, 1313-1330.

Ida, Y., 1972, Cohesive force across the tip of a longitudinal shear crack and Griffith's specific surface energy: *J.Geophys.Res.*, **77**, 3796-3805.

Ilan, A., Ungar, A., Alterman, Z., 1975, An improved representation of boundary conditions in finite difference schemes for seismological problems: *Geophys.J.R.astr.Soc.*, **43**, 727-745.

Ilan, A., Loewenthal, D., 1976, Instability of finite difference schemes due to boundary conditions in elastic media: *Geophys.Prospecting*, **24**, 431-453.

Jeffreys, H., Bullen, K.E., 1948, *Seismological tables*: British Association for the advancement of science, London.

Joly, P., Lailly, P., 1985, *Finite difference solutions of the wave equation with applications to seismic modelling, migration and inversion*: Norwegian Institute of Technology, Norway.

Kanamori, H., Stewart, G.S., 1978, Seismological aspects of the Guatemala Earthquake of February 4, 1976: *J.Geophys.Res.*, **83**, 3427-3434.

Kanamori, H., 1981, The nature of seismicity patterns before large earthquakes, in earthquake prediction, an international review: Maurice Ewing series 4, D. W. Simpson and P.G. Richards (editors), AGU, Washington D.C., 1-19.

Kelleher, J.A., Sykes, L.R., Oliver, J., 1973, Possible criteria for predicting earthquake locations and their application to major plate boundaries of the Pacific and Caribbean: *J.Geophys.Res.*, **78**, 2547-2585.

Keller, J.B., 1962, Geometrical theory of diffraction: *J.Opt.Soc.Am.*, **52**, 116-130

Kelly, K.R., Ward, R.W., Treitel, S., Alford, R.M., 1976, Synthetic seismograms: a finite-difference approach: *Geophysics*, **41**, 2-27.

Klimes, L., 1984, The relation between gaussian beams and maslov asymptotic theory: *Studia geoph. et geod.*, **28**, 237-247.

Bibliographie

Kolb, P., Collino, F., Lailly, P., 1986, Prestack inversion of a 1-D medium : Proceedings of the I.E.E.E., special issue on seismic inversion (soumis).

Kosloff, D., Reshef, M., Loewenthal, D., 1984, Elastic wave calculations by the Fourier method : Bull.seism.Soc.Am., 74, 875-892.

Kostrov, B.U., 1964, Self-similar problems of propagation of shear cracks : J.Appl.Math.Mech., 28, 1077-1087.

Kostrov, B.U., 1966, Unsteady propagation of longitudinal shear cracks : J.Appl.Math.Mech., 30, 1241-1248.

Kostrov, B.U., Nikitin, L.U., 1970, Some general problems of mechanics of brittle fracture : Arch.Mech.Stos., 22, 750.

Kummer, B., Behle, A., 1982, Second-order finite-difference modeling of SH-wave propagation in laterally inhomogeneous media : Bull.Seism.Soc.Am., 72, 793-808.

Lamb, H., 1904, On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid : Phil.Trans.Roy.Soc.London, A203, 1-42.

Landau, L., Lifchitz, E., 1967, Théorie de l'élasticité : Editions MIR.

Lee, J.J., Langston, C.A., 1983, Three-dimensional ray tracing and the method of principal curvature for geometric spreading : Bull.Seism.Soc.Am., 73, 765-780.

Madariaga, R., 1976, Dynamics of an expanding circular fault : Bull.Seism.Soc.Am., 65, 163-182.

Madariaga, R., 1981, Dynamics of seismic sources : Advanced study Institutes series, 71-96.

Madariaga, R., 1984, Gaussian beam synthetic seismograms in a vertically varying medium : Geophys.J.R.astr.Soc., 79, 589-612.

Madariaga, R., Papadimitriou, P., 1985, Gaussian beam modelling of upper mantle phases : Anales Geophysicae, 3, 799-812.

Marchouk, G.I., 1975, Methods of numerical mathematics : Springer-Verlag New York Inc.

Maslov, V.P., 1972, Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques : Dunod, Paris.

McCann, W.R., Nishenko, S.P., Sykes, L.R., Krause, J., 1980, Seismic gaps and plate tectonics : seismic potential for major boundaries : Pure Appl.Geophys., **117**, 1082-1147.

Mikhailenko, B.G., Korneev, V.I., 1984, Calculation of synthetic seismograms for complex subsurfaces geometries by a combination of finite integral Fourier transforms and finite difference techniques : J.Geophys., **54**, 195-206.

Mikumo, T., Miyatake, T., 1979, Dynamical rupture process on a three-dimensional fault with non-uniform friction and near-field seismic waves : Geophys.J.R.astr.Soc., **54**, 417-438.

Mitchell, A.R., 1969, Computational methods in partial differential equations : John Wiley and Sons.

Miyatake, T., 1980, Numerical simulations of earthquake source process by a three-dimensional crack mode. Part I. Rupture process : J.Phys.Earth, **28**, 565-598.

Mogi, K., 1968, Some feature of recent seismic activity in and near Japan, I : Bull.Earthquake Res. Inst. Tokyo Univ., **46**, 1225-1236.

Montagner, J-P., Nataf, H-C., 1986, A simple method for inverting the azimuthal anisotropy of surface waves : J.Geophys.Res., **91**, 511-520.

Mora, P., 1985, Elastic inversion using ray theory : SEP-41.

Morse, P.M., Feshbach, H., 1953, Methods of theoretical physics : McGraw-Hill Book Co., Inc.

Mufti, I.R., 1985, Seismic modeling in the implicit mode : Geophys.Prospecting, **33**, 619-656.

Nakanishi, I., Kanamori, H., 1982, Effects of lateral heterogeneity and source process time on the linear moment tensor inversion of long-period rayleigh waves : Bull.Seism.Soc.Am., 72, 2063-2080.

Nayfeh, A. H., 1973, Perturbation methods : John Wiley & Sons, Inc.

Nicoletis, L., 1981, Simulation numérique de la propagation d'ondes sismiques dans les milieux stratifiés à deux et trois dimensions : contribution à la construction et à l'interprétation des sismogrammes synthétiques : Thèse docteur-ingénieur, Université de Pierre et Marie Curie, Paris, France.

Olson, A. H., Apsel, R.J., 1982, Finite faults and inverse theory with applications to the 1979 Imperial Valley earthquake : Bull.Seism.Soc.Am., 72, 1969-2002.

Papageorgiou, A.S., Aki, K., 1983, A specific barrier model for the quantitative description of inhomogeneous faulting and the prediction of strong ground motion. I. Description of the model : Bull.Seism.Soc.Am., 73, 693-722.

Papageorgiou, A.S., Aki, K., 1983, A specific barrier model fro the quantitative description of inhomogeneous faulting and the prediction of strong ground motion. Part II. Applications of the models : Bull.seism.Soc.Am., 73, 953-978.

Richards, P.G., 1973, The dynamic field of a growing plane elliptical shear crack : Int.J.Solid Structures, 9, 843-861.

Richards, P.G., 1976, Dynamic motions near an earthquake fault : a three-dimensional solution : Bull.Seism.Soc.Am., 66, 1-32.

Richter, C.F., 1958, Elementary Seismology : W.H. Freeman and Co.

Sanchez-Sesma, F., 1985, Diffraction of elastic SH waves by wedges : Bull.Seism.Soc.Am. (sous presse).

Sanchez-Sesma, F.J., Esquivel, I.A., 1979, Ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves : Bull.Seism.Soc.Am., 69, 1107-1120.

Sato, T., Hirasawa, T., 1973, Body wave spectra from propagating shear cracks : *J.Phys.Earth*, **21**, 415-431.

Savage, J.C., 1966, Radiation from a realistic model of faulting : *Bull.Seism.Soc.Am.*, **56**, 577-592.

Shaw, P.R., Orcutt, J.A., 1985, Waveform inversion of seismic refraction data and applications to young Pacific crust : *Geophys.J.R.astr.Soc.*, **82**, 375-414.

Shmueli, M., Alterman, Z.S., 1973, Crack propagation by finite differences : *J.Appl.Mech.*, **40**, 902-908.

Shmueli, M., Peretz, , 1976, Static and dynamic analysis of the DCB problem in fracture mechanics : *Int.J.Solid Structures*, **12**, 67-79.

Smith, W.D., 1974, A nonreflecting plane boundary for wave propagation problems : *J.Comp.Phys.*, **15**, 492-503.

Smith, W.D., 1975, The application of finite element analysis to body wave propagation problems : *Geophys.J.R.astr.Soc.*, **42**, 747-768.

Spudis, P., Frazer, L.N., 1984, Use of ray theory to calculate high-frequency radiation from earthquake sources having spatially variable rupture velocity and stress drop : *Bull.Seism.Soc.Am.*, **74**, 2061-2082.

Stephen, R.A., 1983, A comparison of finite difference and reflectivity seismograms for marine models : *Geophys.J.Roy.Astr.Soc.*, **72**, 39-58.

Stephen, R.A., Bolmer, S.T., 1985, The direct wave root in marine seismology : *Bull.Seism.Soc.Am.*, **75**, 57-68.

Stöckl, H., 1977, Finite difference calculation of stress relaxation earthquake models : *J.Geophys.*, **43**, 311-327.

Sykes, L.R., 1971, Aftershock zones of great earthquakes, seismicity gaps, and earthquake prediction for Alaska and the Aleutians : *J.Geophys.Res.*, **76**, 8021-8041.

Tal Ezer, H., Kosloff, D., Koren, Z., 1985, An accurate scheme for seismic forward modeling : Preprint.

Tanimoto, T., 1984, Waveform inversion of mantle Love waves : the Born seismogram approach : *Geophys.J.R.astr.Soc.*, **78**, 641-660.

Tarantola, A., 1984, Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation : *Geophysics*, **49**, 1259-1266.

Tarnowski, D., 1985, Les supercalculateurs bientôt démodés : *La Recherche n°174*, 272-273.

Thomson, C.J., Chapman, C.H., 1985, An introduction to Maslov's asymptotic method : *Geophys.J.R.astr.Soc.*, **83**, 143-168.

Toksoz, N., Uyeda, S., Francheteau, J., 1980, Oceanic ridges and arcs : geodynamics processes : Elsevier.

Tolstoy, I., 1974, Wave propagation : McGraw-Hill Book Co., Inc.

Ungar, A., Ilan, A., 1977, Propagation of elastic waves in vertically inhomogeneous media : *J.Geophys.*, **43**, 33-40.

Van dyke, M., 1975, Perturbation methods in fluid mechanics : The parabolic Press, Stanford, California.

Vidale, J., HelMBERGER, D.U., Clayton, R.W., 1985, Finite-difference seismograms for SH waves : *Bull.Seism.Soc.Am.*, **75**, 1765-1782.

Virieux, J., 1979, Etude numérique des modèles de failles à deux dimensions et des critères de propagation : Thèse de 3ème Cycle, Université de Pierre et Marie Curie, Paris, France.

Virieux, J., Madariaga, R., 1982, Dynamic faulting studied by a finite difference method : *Bull.Seism.Soc.Am.*, **72**, 345-369.

Virieux, J., 1984, SH-wave propagation in heterogeneous media : velocity-stress finite-difference method : *Geophysics*, **49**, 1933-1957.

Virieux, J., 1986, P-SV wave propagation in heterogeneous media : stress-velocity finite-difference method : *Geophysics* (sous presse).

Wait, J.R., 1959, Electro-magnetic radiation from cylindrical structures : Pergamon Press Inc.

Woodhouse, J.H., 1983, The joint inversion of seismic wave forms for lateral variations in Earth structure and earthquake source parameters : Earthquakes : observations, theory and interpretation, Soc. Italiana di fisica, Bologna, Italy.

Wu, R-S., 1985, Gaussian beams, complex rays, and the analytic extension of the Green's function in smoothly inhomogeneous media : Geophys.J.R.astr.Soc., **83**, 93-110.

Yanenko, N.N., 1968, Méthode à pas fractionnaires : Armand Colin.

Yoshida, S., 1985, Two-dimensional rupture propagation controlled by Irwin's criterion : J.Phys.Earth, **33**, 1-20.

Zienkiewicz, O.C., Morgan, K., 1982, Finite elements and approximation : John Wiley & Sons Inc.

Zienkiewicz, O.C., De S.R.Gago, J. P., Kelly, D.W., 1983, The hierarchical concept in finite element analysis : Computers and Structures, **16**, 53-65.

TABLE DES MATIERES

Volume I	Pagination globale
Dédicace et remerciements	2
Avant-propos	4
CHAPITRE 1 - INTRODUCTION GENERALE.	6
CHAPITRE 2 - RUPTURE.	13
2.1 : INTRODUCTION RUPTURE	14
2.2 : FORMULATION DU PROBLEME	17
2.2.1 : Introduction	17
2.2.2 : Formulation du problème	20
2.2.3 : Résolution numérique	29
2.2.4 : Conclusion	36
2.3 : MODELISATION 2-D : FAILLE ANTIPLANE ET PLANE	37
2.3.1 : Introduction	37
2.3.2 : Faille antiplane	39
2.3.3 : Faille plane	55
2.3.4 : Conclusion	64
2.4 : MODELISATION 3-D : FAILLE CIRCULAIRE INITIALE	68
2.4.1 : Introduction	68
2.4.2 : Faille 3-D statique	71
2.4.3 : Faille 3-D instantanée	75
2.4.4 : Conclusion	79
2.5 : ANALYSE DES DIFFERENTES DIMENSIONS	82
2.5.1 : Introduction	82
2.5.2 : Présentation du problème	84
2.5.3 : Mise en oeuvre	88
2.5.4 : Conclusion	91
2.6 : RAYONNEMENT EN CHAMP LOINTAIN	92
2.6.1 : Introduction	92
2.6.2 : Calcul en champ lointain	95
2.6.3 : Modèles symétriques 3-D	101
2.6.4 : Modèles asymétriques 3-D	107
2.6.5 : Conclusion	113
2.7 : CONCLUSION RUPTURE	115

	Pagination globale
CHAPITRE 3 - ONDE	118
3.1 : INTRODUCTION ONDE ELASTIQUE	119
3.2 : PROBLEME 1-D, ETUDE NUMERIQUE SIMPLE	124
3.2.1 : Introduction	124
3.2.2 : Formulation du problème	125
3.2.3 : Simulation numérique	130
3.2.4 : Milieu homogène : dispersion et absorption	133
3.2.5 : Milieux complexes	137
3.2.6 : Conclusion	140
3.3 : PROBLEME 2-D SH, MODELISATION ET INTERPRETATION	141
3.3.1 : Introduction	141
3.3.2 : Formulation du problème physique	146
3.3.3 : Simulation numérique	152
3.3.4 : Problème du quart-plan	155
3.3.5 : Problème du bassin sédimentaire	164
3.3.6 : Problème du dôme de sel à parois verticales	170
3.3.7 : Conclusion	183
3.4 : FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME 1-D	185
3.4.1 : Introduction	185
3.4.2 : Méthode des résidus pondérés	187
3.4.3 : Principes variationnels	197
3.4.4 : Conclusion	203
3.5 : PROBLEME 2-D P-SV, MODELISATION ET INTERPRETATION	205
3.5.1 : Introduction	205
3.5.2 : Formulation du problème physique	207
3.5.3 : Simulation numérique	212
3.5.4 : Source en milieu infini : source explosive	230
3.5.5 : Problème de Lamb	232
3.5.6 : Modèle de la couche altérée	241
3.5.6 : Modèle de Stephen	244
3.5.7 : Modèle du coin	247
3.5.8 : Modèle du coin liquide	254
3.5.9 : Conclusion	257
3.6 : CONCLUSION ONDE ELASTIQUE	259

	Pagination globale
CHAPITRE 4 - APPLICATIONS	262
4.1 : INVERSION : PREMIERS RESULTATS	263
4.1.1 : Introduction	263
4.1.2 : Le problème inverse	266
4.1.3 : Les extensions du problème direct	270
4.1.4 : Les exemples numériques	274
4.1.5 : Conclusion	296
4.2 : DIFFERENCES FINIES ET SOMMATION PAR FAISCEAUX GAUSSIENS	298
4.2.1 : Introduction	298
4.2.2 : Choix des géométries	301
4.2.2 : Milieu de la queue d'aronde à interface libre	306
4.2.3 : Milieu du dôme trapézoïdal	311
4.2.4 : Conclusion	318
4.3 : MODELE COMPLEXE : CAS D'UN MILIEU A PLUSIEURS INTERFACES	320
4.3.1 : Introduction	320
4.3.2 : Choix de la géométrie : modèle de la cuve de Houston	323
4.3.3 : Interprétation des profils	327
4.3.4 : Conclusion	337
CHAPITRE 5 - CONCLUSION GENERALE	340
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	345
TABLE DES MATIERES	360
VOLUME II	372
APPENDICE A : PROGRAMMES SUR LA RUPTURE 3-D	373
APPENDICE B : PROGRAMME SUR LA PROPAGATION DES ONDES 1-D	448
APPENDICE C : PROGRAMMES SUR LA PROPAGATION DES ONDES SH	457
APPENDICE D : PROGRAMMES SUR LA PROPAGATION DES ONDES PSU ...	495

ILLUSTRATIONS

Figure 2.2.a 22
Description du processus de rupture en un point du plan de faille en terme de traction à gauche ou de contrainte à droite.

Figure 2.2.b 29
La grille numérique en quinconce pour le problème élastodynamique de la faille antiplane.

Figure 2.2.c 32
La grille numérique en quinconce pour le problème élastodynamique de la faille plane.

Figure 2.2.d 32
La grille numérique en quinconce pour le problème élastodynamique de la faille tridimensionnelle.

Figure 2.3.a 39
Le glissement et la contrainte de cisaillement au cours du temps pour une faille antiplane semi-infinie.

Figure 2.3.b 44
Le déplacement de la pointe de la faille au cours de la rupture spontanée d'une faille antiplane semi-infinie.

Figure 2.3.c 46
Rupture spontanée d'une faille antiplane finie préexistante.

Figure 2.3.d 48
Solution numérique pour la faille antiplane de la figure 2.3.c.

Figure 2.3.e 50
Rupture spontanée d'une faille antiplane finie instantanée.

Figure 2.3.f 52
Solution numérique pour la faille antiplane de la figure 2.3.e.

Figure 2.3.g 56
Le déplacement et la contrainte de cisaillement pour une faille plane self-similaire.

Figure 2.3.h	59
Déplacement de la pointe de la faille au cours de la rupture spontanée d'une faille semi-infinie plane.	
Figure 2.3.i	61
Rupture spontanée d'une faille plane finie préexistante.	
Figure 2.3.j	63
Solution numérique pour la faille plane de la figure 2.3.i.	
Figure 2.4.a	72
Propagation du front de rupture pour une faille spontanée initialement circulaire sous une pré-contrainte de cisaillement statique.	
Figure 2.4.b	74
Glissement et contrainte le long d'une ligne sur le plan de faille définie par son angle ϕ par rapport à l'axe x pour la rupture spontanée de la figure 2.4.a.	
Figure 2.4.c	76
Propagation du front de rupture pour une faille spontanée initialement circulaire sous une précontrainte de cisaillement homogène.	
Figure 2.4.d	78
Glissement et contrainte le long d'une ligne sur le plan de faille définie par son angle ϕ par rapport à l'axe x pour la rupture spontanée de la figure 2.4.c.	
Figure 2.5.a	85
Propagation spontanée d'une faille tridimensionnelle.	
Figure 2.5.b	89
Comparaison de deux raffinements du maillage d'un élément.	
Figure 2.6.a	94
Comportement de la vitesse de glissement, ainsi que de la contrainte de cisaillement le long d'une coupe AA', pour un modèle de faille 3-D cassante et dynamique.	
Figure 2.6.b	97
Repère pour le calcul du rayonnement en champ lointain.	

Figure 2.6.c	100
Calculs en champ lointain pour le modèle SM1 à $\theta = 60^\circ$ et $\phi = 0^\circ$.	
Figure 2.6.d	102
Calculs en champ lointain pour le modèle SM2 à $\theta = 60^\circ$ et $\phi = 0^\circ$.	
Figure 2.6.e	104
Calculs en champ lointain pour le modèle SM3 à $\theta = 60^\circ$ et $\phi = 0^\circ$.	
Figure 2.6.f	106
Phases d'arrêt pour le modèle AM1.	
Figure 2.6.g	108
Calculs en champ lointain pour le modèle AM1 à $\theta = 60^\circ$ et $\phi = 0^\circ$.	
Figure 2.6.h	109
Calculs en champ lointain pour le modèle AM1 à $\theta = 60^\circ$ et $\phi = 180^\circ$.	
Figure 2.6.i	110
Calculs en champ lointain pour le modèle AM2 à $\theta = 60^\circ$ et $\phi = 0^\circ$.	
Figure 2.6.j	111
Calculs en champ lointain pour le modèle AM2 à $\theta = 60^\circ$ et $\phi = 180^\circ$.	
Figure 3.2.a	130
Discrétisation du milieu suivant une grille alternée. Le temps est la coordonnée verticale et la position x la coordonnée horizontale.	
Figure 3.2.b	132
Sismogrammes aux différents points du milieu pour un pas non-dispersif.	
Figure 3.2.c	134
Sismogrammes aux différents points du milieu pour un pas dispersif.	
Figure 3.2.d	136
Sismogrammes pour une couche à frontières brutales.	
Figure 3.2.e	138
Sismogrammes pour une couche à frontières de seconde espèce.	
Figure 3.3.a	152
Discrétisation du milieu suivant une grille alternée.	

Figure 3.3.b	156
La géométrie du quart-plan avec une interprétation en termes d'images.	
Tableau 3.3.c	159
Divers paramètres pour le modèle du quart-plan.	
Figure 3.3.d	160
Représentation en bloc-diagramme du milieu à différents temps pour des bords libres.	
Figure 3.3.e	161
Représentation en bloc-diagramme du milieu à différents temps pour des bords rigides.	
Figure 3.3.f	162
Sismogramme à une station pour des bords libres.	
Figure 3.3.g	162
Sismogramme à une station pour des bords fixes.	
Figure 3.3.h	165
La géométrie du bassin sédimentaire, avec la ligne des sources l'attaquant à sa base.	
Figure 3.3.i	166
Sismogrammes en six stations différentes au-dessus du bassin sédimentaire.	
Figure 3.3.j	167
Différents instantanés pour le bassin sédimentaire.	
Figure 3.3.k	170
La géométrie du dôme de sel à parois verticales.	
Figure 3.3.l	172-173
Profils sismiques pour une source au-dessus d'un dôme avec un offset de 4 km.	
Figure 3.3.m	172-173
Profils sismiques pour une source au-dessus d'un dôme avec un offset de 3.2 km.	

Figure 3.3.n	172-173
Profils sismiques pour une source au-dessus d'un dôme avec un offset de 2.4 km.	
Figure 3.3.o	176
Analyse du profil à interface libre en fonction des phases A, B, C, D, D', E et F.	
Figure 3.3.p	177
Interprétation schématique des réflexions primaires et des fronts diffractés.	
Figure 3.3.q	178
Interprétation schématique des fronts multi-réfléchis et diffractés.	
Figure 3.3.r	181
L'interférence constructive des phases A et D forme l'onde de coin.	
Figure 3.5.a	212
Discrétisation du milieu sur une grille en quinconce.	
Figure 3.5.b	226
Courbes de dispersion pour la vitesse de phase a-dimensionnelle des ondes P avec un paramètre de dispersion $\gamma = 0.8$.	
Figure 3.5.c	228
Courbes de dispersion pour la vitesse de phase a-dimensionnelle des ondes S avec un paramètre de dispersion $\gamma = 0.8$.	
Figure 3.5.d	230
Comparaison entre la solution numérique et analytique pour une source explosive dans un milieu infini.	
Figure 3.5.e	238
Comparaison entre les solutions numérique et analytique de la composante horizontale pour le problème de Lamb en différentes stations.	
Figure 3.5.f	239
Schéma des fronts d'onde pour le problème de Lamb.	
Figure 3.5.g	241
Géométrie du milieu à couche altérée.	

Figure 3.5.h	242
Sismogrammes numériques à la surface libre pour le modèle de la couche altérée.	
Figure 3.5.i	245
Sismogrammes synthétiques verticaux au-dessus d'une interface entre liquide et solide.	
Figure 3.5.j	247
Géométrie du modèle du coin. Notons que la source se	
Figure 3.5.k	248
Sismogrammes numériques à la surface libre du modèle du coin.	
Figure 3.5.l	250
Instantanés du modèle du coin à différents instants.	
Figure 3.5.m	253
Evolution des sismogrammes verticaux quand le milieu supérieur du modèle du coin passe d'un état solide à un état liquide.	
Figure 3.5.n	255
Instantanés du modèle du coin pour différents coefficient de Poisson au même instant $t=2.995$ s.	
Figure 4.1.a	273
Le milieu est défini sur une grille de 50×50 points avec une valeur homogène de K , sauf en un point diffractant.	
Figure 4.1.b	275
Le gradient se trouve dans le même milieu que dans la figure 4.1.a, mais avec 9 sources.	
Figure 4.1.c	276
Le gradient avec la même configuration que la figure 4.1.b, mais une surface libre est placée juste au-dessus des sources et récepteurs.	
Figure 4.1.d	278
Le gradient avec deux diffractants au lieu d'un dans la même configuration que la figure 4.1.b.	

Figure 4.1.e	279
La représentation du milieu "camembert" d'une dizaine de longueurs d'onde dans un milieu homogène sur une grille de 200 x 200 points.	
Figure 4.1.f	280
En utilisant des sources et géophones tout autour du disque, la fonction S a été évaluée pour différentes perturbations relatives ϵ .	
Figure 4.1.g	282
Les sismogrammes en 100 géophones (un tous les deux noeuds) calculés pour une source située près de coin A (voir figure 4.1.h).	
Figure 4.1.h	283
Le modèle obtenu après une itération.	
Figure 4.1.i	285
Le modèle obtenu après cinq itérations.	
Figure 4.1.j	287
Les sismogrammes en réflexion et en transmission pour une source située au coin A.	
Figure 4.1.k	288
Le modèle obtenu après la première itération.	
Figure 4.1.l	289
Le modèle après trois itérations.	
Figure 4.1.m	290
Le modèle après cinq itérations.	
Figure 4.1.n	292
Les sismogrammes pour le même milieu que la figure 4.1.j, avec une perturbation $\epsilon = 20\%$.	
Figure 4.1.o	293
Le modèle après la première itération.	
Figure 4.1.p	294
Le modèle après cinq itérations.	

Figure 4.2.a	300
Les géométries des deux modèles : le modèle de queue d'aronde et le modèle du dôme trapézoïdal.	
Tableau 4.2.b	302
Les paramètres physiques des deux modèles, ainsi que les caractéristiques des sources.	
Figure 4.2.c	305
Exemple d'un tir de rais dans le milieu queue d'aronde.	
Figure 4.2.d	307
Profils sismiques pour le modèle de la queue d'aronde, (a) par différences finies, (b) par faisceaux gaussiens, (c) par théorie des rais.	
Figure 4.2.e	310
Exemple de rais dans le milieu dôme trapézoïdal.	
Figure 4.2.f	312
Profils sismiques pour le modèle dôme trapézoïdal à interface libre, (a) par différences finies, (b) par faisceaux gaussiens.	
Figure 4.2.g	315
Profils sismiques pour le modèle dôme trapézoïdal à interface réelle, (a) par différences finies, (b) par faisceaux gaussiens, (c) par théorie de Maslov et (d) par théorie des rais.	
Figure 4.2.h	317
Quelques sismogrammes en différents récepteurs pour le dôme trapézoïdal à interface réelle.	
Figure 4.3.a	322
La géométrie du modèle de la cuve de Houston.	
Figure 4.3.b	324
La géométrie choisie d'un milieu de 7 km sur 6.5 km pour une interprétation du profil enregistré en surface.	
Tableau 4.3.c	325
Les paramètres physiques des différentes régions, ainsi que le choix de la fonction temporelle de la source et des paramètres numériques de modélisation.	

Table des matières

Figure 4.3.d	328
Les profils en surface pour le milieu réel, ainsi que pour les quatre milieux synthétiques.	
Figure 4.3.e	329
Les profils par différence pour les quatre milieux.	
Figure 4.3.f	330-331
Trois séries d'instantanés.	
Figure 4.3.g	333
Un exemple de sismogramme par élimination qui permet d'interpréter l'effet du toit du dôme.	