Problèmes d'Interpolation dans les Espaces de Paley-Wiener et Applications en Théorie du Contrôle

Gaunard Frédéric

N° d'ordre : 4371

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Frédéric GAUNARD**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : **Mathématiques Pures**

****

PROBLÈMES D'INTERPOLATION DANS LES ESPACES DE PALEY-WIENER ET APPLICATIONS EN THÉORIE DU CONTRÔLE

****

Soutenue le 2 décembre 2011 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux, après avis de :

J. ORTEGA-CERDÀ	Professeur, Universitat de Barcelona	**Rapporteur**
J. PARTINGTON	Professeur, University of Leeds	**Rapporteur**

et devant la commission d'examen composée de :

E. AMAR	Professeur, Université Bordeaux I	**Président**
A. HARTMANN	Professeur, Université Bordeaux I	**Directeur**
S. KUPIN	Professeur, Université Bordeaux I	
J. ORTEGA-CERDÀ	Professeur, Universitat de Barcelona	**Rapporteur**
J. PARTINGTON	Professeur, University of Leeds	**Rapporteur**
P. THOMAS	Professeur, Université Toulouse III	

- 2011 -

Problèmes d'Interpolation dans les Espaces de Paley-Wiener et Applications en Théorie du Contrôle

Frédéric Gaunard

A mes parents,

Remerciements

"*Tout a une fin, sauf le saucisson qui en a deux*"

Proverbe Allemand

Je tiens à remercier en tout premier lieu Andreas Hartmann pour la patience, la sympathie et la compétence avec lesquelles il a su m'encadrer au cours de ces dernières années, regroupant cette thèse mais aussi le mémoire de Master qui a précédé. J'ai apprécié pouvoir me fier à son excellente intuition mathématique et je lui suis extrêmement reconnaissant de m'avoir guidé jusqu'au bout du parcours (non sans embûches), dans des domaines de recherche extrêmement riches pour lesquels mon intérêt n'est que grandissant. Je lui souhaite beaucoup de futurs étudiants qu'il saura sans aucun doute former avec brio.

C'est un grand honneur que m'ont fait Jonathan Partington et Joaquim Ortega-Cerdà d'accepter d'examiner le manuscrit de ma thèse. Je les remercie chaleureusement de s'être acquitté de cette tâche (ingrate) avec sérieux et sympathie.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Pascal Thomas d'avoir accepté de participer à ce jury mais aussi pour l'intérêt qu'il a pu manifester pour mes travaux et pour son soutien.

Je suis heureux qu'Eric Amar et Stanislas Kupin aient accepté de se joindre à mon jury. Ce fut un plaisir de travailler avec eux au sein de l'équipe d'analyse lors de ces dernières années.

Cette thèse n'a duré que trois ans, mais termine un parcours à l'Université Bordeaux 1 de dix années au cours desquelles j'ai eu la chance de cotoyer un grand nombre d'excellents mathématiciens dont les conseils avisés, les réponses claires, la disponibilité et la sympathie m'ont encouragé à toujours poursuivre dans cette voie.

Je pense notamment à Frédéric Bayart et Etienne Matheron qui m'ont (en plus de m'avoir vu dans un nombre conséquent de cours et de travaux dirigés années après années) encadrés pour des mémoires de maîtrise et de Master.

La liste n'est pas exhaustive mais que soient ici également chaleureusement remerciés Christophe Bavard, Pierrette et Philippe Cassou-Noguès (même s'ils ne font pas vraiment de maths sérieuses...), Philippe Charpentier, Robert Deville, Jean Esterle, Jean Fresnel, Michel Matignon et Elizabeth Strouse.

L'aide apportée ces derniers mois par les (plus ou moins) nouveaux bordelais Karim Kellay et Jean Roydor fut précieuse et je leur en suis très reconnaissant.

J'ai eu l'occasion de rencontrer dans des séminaires, au gré des vents, des gens sympathiques et dont l'accueil fut amical. Je remercie en particulier Nicolas Chevrot, Dan Popovici et Bill Ross.

Certains étudiants ayant usé avec moi les bancs des amphis sont devenus de bons amis. J'ai donc une pensée affectueuse pour Claire et Sofiane (comme d'hab, je passe après vous !), Guigui (ta tisane et le plaid t'attendent, mon melon), Vincent (alors sous prétexte...), Camille (j'espère que tu ne te ronges plus les ongles), Jean-Matthieu et Jean-Mathieu (les deux surfers), Nicolas, le roi Arthur et Louis Merlin l'enchanteur, ainsi que toute la mafia italienne...

Merci aussi à Cédric, éternel absent, de nous avoir prêté son nom en de multiples occasions.

Je n'ai finalement jamais suivi de cours avec eux mais c'est grâce aux maths que je les ai rencontrés (et qu'ils ne me lâchent plus !), merci à Frédéric numéro 1 (pour son soutien permanent et tout le reste, je te vole ton numéro pour cette journée), David et Charlotte (pour leur agréable compagnie aux terrasses des bars des quatre coins du monde), Gwendal et CamCam (ça pour bronzer au Togo, y'a du monde !).

Il est inconcevable de ne pas remercier la bande des Wackies (surtout le jaune, c'est mon préféré) pour des concerts grandioses, mais plus particulièrement Anna et Nico pour les meilleures grillades au feu de cheminée, Gabs (et son pont suspendu) pour ses alertes avisées et les quiz au Dickens (on est là pour qui ?), Simon (pour la blague du chevreuil, les FNM et finalement beaucoup de choses pendant ces dix ans), Seb (pour sa barbe et la transmission de son goût pour la cuisine).

Merci aux chéries qui m'ont accompagné pendant ces années. Je n'aurais pas persévéré sans les encouragements de Marjorie, et je n'aurais sans doute pas bien terminé sans la patience de Marion. Qu'elles trouvent toutes deux ici une preuve de ma profonde affection.

Enfin, merci à toute ma famille. A tous mes cousins et à ma tante (canadienne) pour les nombreuses parfilées ferret-capiennes arrosées, à mon frère Mathias pour son sens pointu de l'optimisation. J'ai une pensée pour ma grand-mère Christiane qui, de là où elle est, a toujours veillé sur moi.

Cette thèse est dédiée à mes parents qui m'ont témoigné depuis toujours la confiance la plus totale et un amour sans faille. Ils ont reçu l'aptitude divine d'arriver à me supporter. Je ne saurais jamais assez les remercier.

Table des matières

Introduction

La motivation initiale des résultats obtenus dans cette thèse, et finalement le réel leitmotiv, fut l'étude de la contrôlabilité des systèmes différentiels linéaires abstraits. Comme on le verra dans le chapitre consacré à la théorie du contrôle, une certaine approche, appelée *méthode des moments*, permet de lier les problèmes de contrôlabilité aux propriétés géométriques de certaines familles d'exponentielles dans des espaces de fonctions, à valeurs vectorielles, dans des espaces L^2.

Concernant les familles d'exponentielles, il est bien connu que la famille $\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$ forme une *base orthonormale* de $L^2(0, 2\pi)$. Une première question initiée par Paley et Wiener visait à savoir si ce résultat pouvait être perturbé ; une famille $\left\{e^{i\lambda_n t} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ pourrait-elle être une base quasi-orthonormale (ce qu'on dénommera par *base de Riesz* et définira dans un premier chapitre consacré aux notions et outils utilisés dans cette thèse) si λ_n reste assez proche de n. La réponse est donnée par le fameux théorème dit d'Ingham-Kadets qui établit que, lorsque $|\lambda_n - n| \leq \delta$, $n \in \mathbb{Z}$, la famille précédente est une base de Riesz de $L^2(0, 2\pi)$ si et seulement si $\delta < 1/4$.

Si le caractère suffisant de ce résultat fut prouvé par Ingham en 1936, la nécessité de $\delta < 1/4$ ne fut montré par Kadets qu'en 1964. Le contre-exemple explicité sert aussi dans une généralisation de ce résultat à la perturbation des suites d'interpolation complète dans les espaces de Paley-Wiener PW^p_τ (Lyubarskii et Seip, 1997) et pour montrer qu'il existe des suites d'interpolation faible dans PW^p_τ qui ne sont pas d'interpolation “forte” dans ce même espace (Schuster et Seip, 2000).

Les problèmes d'interpolation dans les espaces de Hardy ou de Paley-Wiener, où l'on cherche à savoir pour quelles suites $(a_n)_n$ on peut trouver une fonction f dans l'un des deux espaces susnommés vérifiant

$$f(\lambda_n) = a_n,$$

sont étroitement liés avec les propriétés des familles d'exponentielles. En effet, étant bien connu que, via transformée de Fourier, les espaces de Hardy ou de Paley-Wiener sont isomorphes à des espaces L^2 et que la transformée de Fourier envoie les exponentielles sur les noyaux reproduisants k_λ, il devient intéressant d'étudier l'image (et l'éventuelle injectivité) de l'opérateur de restriction

$$R_\Lambda : f \mapsto \left(\langle f, k_{\lambda_n}\rangle\right)_n = \left(f(\lambda_n)\right)_n .$$

Toutes ces notions seront (ré-)introduites et précisées dans un premier chapitre de préliminaires. Dans le cas de l'espace de Hardy, la réponse, donnée par Shapiro et Shields qui se sont basés sur un résultat de 1958 obtenu par Carleson, est connue depuis 1961. Le théorème affirme alors que si $\Lambda = \{\lambda_n : n \geq 1\}$ est une suite de points du demi-plan supérieur $\mathbb{C}^+$, il y a équivalence entre le fait que la famille $\left\{e^{-i\overline{\lambda}_n t}\,:\, n \geq 1\right\}$ soit une suite de Riesz (ou base de Riesz de son enveloppe linéaire) dans $L^2(0,\infty)$, que la famille $\{k_{\lambda_n}\,:\, n \geq 1\}$ soit une suite de Riesz dans l'espace de Hardy H^2_+, que la suite Λ soit d'*interpolation* dans H^2_+, c'est à dire que l'image de l'opérateur de restriction soit

$$H^2_+|\,\Lambda := R_\Lambda H^2_+ = l^2\left(\mathrm{Im}\left(\lambda_n\right)\right),$$

ou encore que Λ vérifie une certaine condition de séparation, appelée *condition de Carleson.* Cette condition jouera un rôle primordial dans toute cette thèse.

Connaissant alors les familles d'exponentielles dans $L^2(0,\infty)$, l'approche utilisée par Hrushev, Nikolskii et Pavlov dans un célèbre article de 1981 fut de s'intéresser aux propriétés de l'*opérateur de projection* $P_\tau : L^2(0,\infty) \to L^2(0,\tau)$ ou, avec un point de vue analytique et les outils de l'analyse harmonique et de la théorie des opérateurs, l'opérateur de projection de H^2_+ sur un sous-espace auquel sont isomorphes PW^2_τ et $L^2(0,2\tau)$. Les résultats obtenus font intervenir la condition de Muckenhoupt, liée à l'inversibilité des opérateurs de Toeplitz. Cependant, les résultats doivent être restreints au cas où la suite Λ vit dans un demi-plan inclus strictement dans le demi-plan supérieur, et en particulier loin de l'axe réel.

L'espace PW^2_τ pouvant être défini pour $p \neq 2$, les questions d'interpolation se posent encore dans le cas non-hilbertien, où les techniques d'analyse complexe peuvent être utilisées (contrairement à l'analyse de Fourier). Ainsi, avec un point de vue géométrique, Lyubarskii et Seip donnent, en 1997, une caractérisation des suites d'interpolation complète dans PW^p_τ, où la condition de Muckenhoupt apparaît toujours, étant liée à la bornitude de la transformée de Hilbert. Ce résultat généralise ceux de Hrushev, Nikolskii et Pavlov à $p \neq 2$ mais aussi permet de s'affranchir de la restriction sur la localisation des points de Λ. Minkin, en 1992, avait déjà réussi à s'affranchir de cette condition, mais à l'aide d'une méthode beaucoup plus laborieuse.

Le premier travail de cette thèse fut de chercher à établir une généralisation du résultat de Lyubarskii et Seip, pour des réunions finies de suites vérifiant la condition de Carleson. Plus précisément, Hartmann, en 1996, donne une description de l'*espace des trace*s $H^p|\Lambda$, c'est à dire l'espace des suites pour lesquelles le problème d'interpolation précédent a des solutions dans H^p, lorsque Λ est une réunion finie de suites de Carleson, résultat obtenu parallèlement par Bruna, Nicolau et Oyma la même année. Cette description fait intervenir des *différences divisées*. La question fut donc posée de savoir si de la même manière que le résultat de Carleson se généralise au résultat de Hartmann, on pouvait utiliser le résultat de Lyubarskii et Seip pour obtenir des conditions nécessaires et suffisantes à la description de l'espace des traces $PW^p_\tau|\Lambda$ pour Λ une réunion finie de suites de Carleson. Le résultat est le théorème principal du Chapitre 3 et généralise un résultat d'Avdonin et Ivanov de 2001 sur les différences divisées d'exponentielles dans $L^2(0,a)$.

On a mentioné ci-dessus comment le contre-exemple de Kadets fut généralisé pour montrer que dans les espaces de Paley-Wiener l'interpolation faible (qui sera naturellement définie dans au moment adéquat) n'entraînait pas l'interpolation "forte". Le second résultat majeur de cette thèse, énoncé et prouvé au Chapitre 2, concerne les liens entre minimalité dans PW_τ^p et interpolation dans $PW_{\tau+\epsilon}^p$. Il entraîne en particulier qu'une suite Λ d'interpolation faible dans PW_τ^p est d'interpolation "forte" dans $PW_{\tau+\epsilon}^p$, pour tout $\epsilon > 0$, et précise un résultat très récent (et un peu plus général) d'Amar et Hartmann. Il se généralise à l'interpolation pondérée et s'applique au contrôle (de rang 1) des systèmes différentiels linéaires.

La théorie du contrôle, à laquelle on consacre le dernier chapitre de cette thèse en fut donc le fil conducteur. C'est l'article d'Avdonin et Ivanov précédemment cité qui a conduit à s'intéresser à la généralisation du théorème de Lyubarskii et Seip avec des différences divisées. Ce fut aussi une sorte de conclusion des travaux accomplis, en étant le champs d'application des derniers résultats obtenus.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Propriétés géométriques des familles de vecteurs dans les espaces de Banach

Au cours de l'étude des différents problèmes qui nous intéresseront (interpolation, contrôle, ...), différentes notions et propriétés géométriques de certaines familles de vecteurs apparaissent. Les définitions figurant dans cette section, ainsi que les propriétés énoncées se trouvent dans les livres de Nikolskii ([Ni86, Lecture VI] ou [Ni02b, Section C, Chapter 3]) ou encore de Singer ([Si70]). Les notions qui vont suivre seront par ailleurs, exprimées ultérieurement en termes d'interpolation. Soient X un espace de Banach et $\mathcal{X} = (x_n)_{n\geq 1}$ une famille de vecteurs de X. On dit que $\mathcal{X}$ est *complète* (ou *totale*) dans X si

$$\bigvee_{n\geq 1} x_n := \overline{\operatorname{span}\{x_n :\ n \geq 1\}}^X = X.$$

On dit qu'elle est *minimale* dans X si, pour tout $n \geq 1$,

$$x_n \notin \bigvee_{k\neq n} x_k$$

et *uniformément minimale* dans X si

$$\inf_{n\geq 1} d\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}, \bigvee_{k\neq n} x_k\right) > 0,$$

où d désigne la distance euclidienne. Le théorème de Hahn-Banach permet de voir que la minimalité de $\mathcal{X}$ dans X est équivalente à l'existence d'une *famille biorthogonale* $\mathcal{X}' := (y_n)_{n\geq 1} \subset X^\star$ telle que

$$\langle x_n, y_k\rangle = \delta_{n,k}, \quad n, k \geq 1$$

et l'uniforme minimalité est également équivalente à la même propriété combinée avec

$$\sup_{n\geq 1} \|x_n\| \cdot \|y_n\| < \infty.$$

La famille $\mathcal{X}$ est dite *base inconditionnelle* de X si pour tout $x \in X$, il existe $(\alpha_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ tel que $\sum_n \alpha_n x_n$ converge dans X vers x et si, pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geq 1} \subset \{\pm 1\}$, $\sum_n \varepsilon_n \alpha_n x_n$

converge dans X vers x_ε avec $\|x_\varepsilon\| \asymp \|x\|$. Si $\mathcal{X}$ est une base inconditionnelle, il en est de même pour sa famille biorthogonale.

Dans le cas où X est un *espace de Hilbert,* on introduit la notion suivante de base quasi-orthonormale. On dit que $\mathcal{X}$ est une *suite de Riesz* s'il existe deux constantes $c, C > 0$ telles que, pour toute suite $(a_n)_{n\geq 1}$, à support fini, on ait

$$c\left(\sum_{n\geq 1}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\sum_{n\geq 1}a_nx_n\right\| \leq C\left(\sum_{n\geq 1}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si de plus $\bigvee_{n\geq 1} x_n = X$, on dit que $\mathcal{X}$ est une *base de Riesz* de X. Il n'est pas difficile de voir que si $\mathcal{X}$ est une suite de Riesz, alors $\mathcal{X}$ est nécessairement uniformément minimale. Le résultat suivant, dû à Bari, donne une caractérisation de ces bases.

Théorème 1.1.1. *(Bari, [Ni86, p.132]) Soient $\mathcal{X}$ une famille de vecteurs d'un espace de Hilbert X supposée minimale et $\mathcal{X}'$ sa famille biorthogonale. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{X}$ est une base de Riesz de X ;
(ii) $\mathcal{X}'$ est une base de Riesz de X ;
(iii) Il existe un isomorphisme U envoyant $\mathcal{X}$ sur une base orthonormale ;
(iv) L'application $\mathcal{J}_{\mathcal{X}} : X \to l^2$, $x \mapsto \left(\left\langle x, \frac{y_n}{\|y_n\|}\right\rangle\right)_{n\geq 1}$, est un isomorphisme.

Remarque 1.1.2. En remarquant que $\|x_n\| \asymp \|y_n\|^{-1}$, l'assertion (iv) du théorème précédent permet d'écrire que si $\mathcal{X}$ base de Riesz de X, alors

$$\begin{aligned} X &= \left\{x = \sum_{n\geq 1}a_nx_n : \ \|x\|^2 = \sum_{n\geq 1}|a_n|^2\|x_n\|^2 < \infty\right\} \\ &= \left\{x = \sum_{n\geq 1}\langle x, y_n\rangle x_n : \ \|x\|^2 = \sum_{n\geq 1}|\langle x, y_n\rangle|^2\|y_n\|^{-2} < \infty\right\}. \end{aligned}$$

Le résultat suivant affirme que dans un espace de Hilbert, les bases de Riesz sont exactement les bases inconditionnelles.

Théorème 1.1.3. *(Köthe-Toeplitz, [Ni86, p.136]) Soit $\mathcal{X}$ une famille de vecteurs normalisés d'un espace de Hilbert X, supposée totale. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{X}$ est une base de Riesz de X ;
(ii) $\mathcal{X}$ est une base inconditionnelle de X.

1.1.1 Bases de sous-espaces

On considère maintenant $\mathcal{X} = \{X_n\}_{n\geq 1}$ une famille de sous-espaces d'un espace de Banach X pour laquelle on généralise les notions déjà introduites. Plus précisément, on dira que $\mathcal{X}$ est *minimale* (dans X) si il existe une suite d'opérateurs continus $(\mathcal{P}_n)_{n\geq 1}$ tels que $\mathcal{P}_n|X_k = \delta_{nk}I$, où I est l'application identité sur X. Si de plus $\sup_{n\geq 1}\|\mathcal{P}_n\| < \infty$, on dira que $\mathcal{X}$ est *uniformément minimale.* La famille $\mathcal{X}' := \{\mathcal{P}_n^\star X^\star\}_{n\geq 1}$ définit alors une *famille biorthogonale* à $\mathcal{X}$. La famille $\mathcal{X}$ sera appelée base inconditionnelle (de sous-espaces) de X si tout élément $x \in X$ admet une unique décomposition $x = \sum_n x_n$, $x_n \in X_n$ où la convergence dans

X est inconditionnelle. Une base inconditionnelle de sous-espaces est encore nécessairement uniformément minimale.

Dans le cas où X est un espace de Hilbert, on dira que $\mathcal{X}$ est une base de Riesz (de sous-espaces) de X s'il existe deux constantes $c, C > 0$ telles que, pour toute famille finie $x_n \in X_n$, on ait

$$c \left(\sum_{n \geq 1} \|x_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_{n \geq 1} x_n \right\| \leq C \left(\sum_{n \geq 1} \|x_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et que $\bigvee_n X_n = X$. On définit l'espace

$$l^2(\mathcal{X}) := \left\{ (x_n)_{n \geq 1} : \ x_n \in X_n, \ \sum_{n \geq 1} \|x_n\|^2 < \infty \right\}.$$

Le résultat suivant est un analogue des théorèmes de Bari et Köthe-Toeplitz.

Théorème 1.1.4. *([Ni02b, p. 157]) Soit $\mathcal{X}$ une famille de sous-espaces d'un espace de Hilbert X, supposée minimale. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{X}$ est une base inconditionnelle (de sous-espaces) de X ;

(ii) $\mathcal{X}$ est une base de Riesz de (sous-espaces) de X ;

(iii) $\mathcal{X}'$ est une base de Riesz de (sous-espaces) de X ;

(iv) L'application $\mathcal{J}_{\mathcal{X}} : \ X \to l^2(\mathcal{X})$, $x \mapsto (\mathcal{P}_n x)_{n \geq 1}$, est un isomorphisme ;

(v) $\mathcal{J}_{\mathcal{X}}(X) \subset l^2(\mathcal{X})$ et $\mathcal{J}_{\mathcal{X}'}(X) \subset l^2(\mathcal{X}')$.

Comme précédemment, si $\mathcal{X}$ est une base de Riesz (de sous-espaces) de X, alors

$$X = \left\{ x = \sum_{n \geq 1} \mathcal{P}_n x : \quad \|x\|^2 \asymp \sum_{n \geq 1} \|\mathcal{P}_n x\|^2 < \infty \right\}.$$

Dans le cas ou $\dim(X_n) = 1$, $n \geq 1$, $\mathcal{P}_n = \langle \cdot, y_n \rangle x_n$ et on retrouve les résultats précédents.

1.2 Espaces de fonctions analytiques

1.2.1 Espaces de Hardy $H^p(\mathbb{C}_a^\pm)$

Les espaces de Hardy ont été introduits par Frigyes Riesz en 1923, qui les as nommés en l'honneur de G.H. Hardy suite à un article de ce dernier paru en 1915, et bien étudiés depuis. On rappelle ici des faits bien connus, pour lesquels on renvoie aux ouvrages de références, comme les livres de Garnett ([Ga81]), Koosis ([Ko80]) ou Nikolskii ([Ni02a]). Nous suivons ici majoritairement le point de vue du livre de Levin ([Le96, Lecture 19]). Ces espaces peuvent être définis dans le cadre du disque unité $\mathbb{D}$, mais nous préférons nous en tenir ici à celui d'un demi-plan $\mathbb{C}_a^\pm := \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}(z) \gtrless a\}$.

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'*espace de Hardy* $H^p(\mathbb{C}_a^\pm)$ comme l'ensemble des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}_a^\pm$ et qui vérifient

$$\|f\|^p_{H^p(\mathbb{C}_a^\pm)} := \sup_{y \gtrless a} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p \, dx < \infty.$$

Lorsque $a = 0$, on note

$$H^p\left(\mathbb{C}_0^\pm\right) = H^p_\pm.$$

L'espace de Hardy muni de la norme précédente est un espace de Banach.

1.2.1.1 $H^p(\mathbb{C}_a^\pm)$ comme sous-espace de $L^p(\mathbb{R}+ia)$

Le théorème de Fatou (1906) affirme que si $f \in H^p(\mathbb{C}_a^\pm)$, alors pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}+ia$, $\lim_{y\to 0^\pm} f(\xi+iy) = f(\xi)$ existe (et même plus généralement les limites non tangentielles), $x \mapsto f(x+ia) \in L^p$ et $f(x+iy+ia) = f(\cdot+ia) \star P_y(x)$, où

$$P_y(t) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{t^2+y^2}$$

est le *noyau de Poisson*. On peut alors identifier $H^p(\mathbb{C}_a^\pm)$ à un sous-espace de $L^p(\mathbb{R}+ia)$. En particulier, $\|f\|_{H^p\left(\mathbb{C}_a^\pm\right)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}+ia)}$. La projection de $L^p(\mathbb{R}+ia)$ sur $H^p(\mathbb{C}_a^\pm)$ s'appelle la *projection de Riesz* et se note $P_\pm$. Par ailleurs, la très utile *formule de Cauchy* établit que pour $1 \leq p < \infty$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}+ia}\frac{f(t)}{t-z}dt, \quad z \in \mathbb{C}_a^\pm, \quad f \in H^p\left(\mathbb{C}_a^\pm\right), \tag{1.1}$$

$$\int_{\mathbb{R}+ia}\frac{f(t)}{t-z} = 0, \quad z \in \mathbb{C}_a^\mp, \quad f \in H^p\left(\mathbb{C}_a^\pm\right).$$

Ceci permet en particulier de voir que

$$H^p\left(\mathbb{C}_a^\pm\right) \cap H^p\left(\mathbb{C}_a^\mp\right) = \{0\}.$$

Soit $u \in L^p(\mathbb{R}+ia)$. La fonction $x+iy \mapsto u \star P_y(x)$ est harmonique dans $\mathbb{C}_a^\pm$ et vérifie

$$\int |u(x+ih)|^p\,dx \lesssim \int |u(x)|^p\,dx, \quad h \gtrless a.$$

On introduit alors le *conjugué harmonique* de u,

$$\tilde{u}(x+iy) := u \star Q_y(x),$$

où

$$Q_y(t) := \frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+y^2},$$

de sorte que $x+iy \mapsto u+i\tilde{u}$ soit analytique dans $\mathbb{C}_a^\pm$. Le résultat suivant nous permettra plusieurs corollaires importants.

Théorème 1.2.1. *(M. Riesz) Soit $u \in L^p(\mathbb{R}+ia)$, $p > 1$. Alors,*

$$\sup_{y \gtrless a}\int |\tilde{u}(x+iy)|^p\,dx \lesssim \int |u(x)|^p\,dx.$$

En particulier, $\tilde{u}$ admet des valeurs au bord $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}+ia)$ vérifiant

$$\|\tilde{u}\|_p \lesssim \|u\|_p.$$

En constatant que

$$\frac{1}{i\pi}\frac{1}{t-z} = P_y(t-x) + iQ_y(t-x), \quad z = x+iy,$$

on déduit du théorème précédent le résultat suivant.

Corollaire 1.2.2. *Soit $u \in L^p(\mathbb{R}+ia)$, $1<p<\infty$. Les fonctions définies par*

$$u_\pm(z) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}+ia}\frac{u(t)}{z-t}dt, \qquad z\in\mathbb{C}_a^\pm,$$

appartiennent à $H^p(\mathbb{C}_a^\pm)$ et vérifient

$$\|u_\pm\|_{H^p(\mathbb{C}_a^\pm)} \lesssim \|u\|_p. \tag{1.2}$$

Corollaire 1.2.3. *De plus, toute fonction $u \in L^p(\mathbb{R}+ia)$, $1<p<\infty$, se décompose de manière unique*

$$u = u_+ - u_-,$$

où $u_\pm$ sont les valeurs au bord de fonctions de $H^p(\mathbb{C}_a^\pm)$ vérifiant l'inégalité (1.2).

Preuve. On pose

$$u_\pm = \pm\frac{1}{2}(u\pm i\tilde{u}),$$

et on applique le théorème de M. Riesz. L'unicité provient du fait que $H^p(\mathbb{C}_a^\pm)\cap H^p(\mathbb{C}_a^\mp) = \{0\}$. □

1.2.1.2 Dualité dans $H^p(\mathbb{C}_a^\pm)$

Pour $1<p<\infty$, les propriétés énoncées précédemment permettent de voir que si l'on considère la dualité induite par

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}+ia} f(t)\overline{g}(t)dt,$$

alors on peut identifier

$$\left(H^p\left(\mathbb{C}_a^\pm\right)\right)^\star \simeq H^q\left(\mathbb{C}_a^\pm\right), \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

De plus, on peut interpréter la formule de Cauchy comme le fait que

$$k_\lambda(z) := \frac{i}{2\pi}\frac{1}{z-\overline{\lambda}}, \quad z,\lambda\in\mathbb{C}_a^\pm,$$

est le *noyau reproduisant* de $H^q(\mathbb{C}_a^\pm)$ associé à λ, c'est à dire que pour tout $\lambda\in\mathbb{C}_a^\pm$ et toute fonction $f\in H^p(\mathbb{C}_a^\pm)$, on a $\langle f,k_\lambda\rangle = f(\lambda)$. Ces derniers vérifient

$$\|k_\lambda\|_{H^q(\mathbb{C}_a^\pm)} \asymp |\mathrm{Im}(\lambda)-a|^{-\frac{1}{p}}, \qquad \lambda\in\mathbb{C}_a^\pm.$$

De plus, si $f\in H^p(\mathbb{C}_a^\pm)$, $1<p<\infty$, alors

$$\int_{\mathbb{R}+ia} f(t)g(t)dt = 0, \quad g\in H^q\left(\mathbb{C}_a^\pm\right).$$

Cette dernière égalité joue un rôle important dans les estimations des solutions des problèmes d'interpolation (voir Annexe A.3). De plus, il est possible de montrer l'inégalité suivante permettant une estimation ponctuelle fort pratique,

$$|f(z)| \lesssim \frac{\|f\|}{|\mathrm{Im}(z)-a|^{\frac{1}{p}}}, \qquad z\in\mathbb{C}_a^\pm, \quad f\in H^p\left(\mathbb{C}_a^\pm\right).$$

1.2.1.3 Factorisation dans $H^p(\mathbb{C}_a^{\pm})$

On appelle *fonction intérieure* de $\mathbb{C}_a^{\pm}$ toute fonction I de $H^\infty(\mathbb{C}_a^{\pm})$ telle que

$$|I(x+ia)| = 1 \text{ presque partout } x \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.2.4. Soit $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}_a^{\pm}$ satisfaisant la condition suivante, appelée *condition de Blaschke*,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{|\mathrm{Im}(\lambda_n) - a|}{1+|\lambda_n|^2} < \infty. \tag{1.3}$$

Alors, la fonction

$$b_{\lambda_n}(z) := \frac{z-\lambda_n}{z-\overline{\lambda}_n - 2ia}$$

s'appelle facteur de Blaschke et le produit

$$B(z) := \prod_{n\geq 1} c_{\lambda_n} b_{\lambda_n}$$

(où les c_{λ_n} sont des coefficients unimodulaires bien choisis) définit une fonction intérieure de $\mathbb{C}_a^{\pm}$ appelé *produit de Blaschke* associé à Λ. Dans le cas où le produit est fini (la condition de Blaschke est trivialement vérifiée), on appelle *degré* du produit le nombre de zéros, comptés avec les mutiplicités, de ce produit.

Exemple 1.2.5. Pour $\tau > 0$, la fonction $I^\tau(z) := \exp(2i\tau z)$ est une fonction intérieure de $\mathbb{C}_a^{+}$.

Théorème 1.2.6. *Soit $f \in H^p(\mathbb{C}_a^{\pm})$ une fonction non nulle. Alors, on a la factorisation suivante dans $\mathbb{C}_a^{\pm}$.*

$$f = BSG,$$

où

(i) B est le produit de Blaschke associé aux zéros de f (en particulier les zéros de f vérifient la condition de Blaschke) ;

(ii) S est le facteur singulier de f,

$$S(z) = ce^{i\alpha z}\exp\left(\int_{\mathbb{R}+ia}\left(\frac{i}{z-t}+\frac{it}{t^2+1}\right)d\sigma(t)\right)$$

avec $\alpha \geq 0$ et σ mesure singulière sur $\mathbb{R}+ia$;

(iii) G est le facteur extérieur de f,

$$G(z) = \exp\left(\frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}+ia}\left(\frac{i}{z-t}+\frac{it}{t^2+1}\right)\log|f(t)|dt\right).$$

Remarque 1.2.7. Si $p=2$, $H^p(\mathbb{C}_a^{\pm})$ est un espace de Hilbert et un célèbre théorème dû à Paley-Wiener affirme que

$$H_+^2 = \mathcal{F}^{-1}L^2(0,\infty),$$

où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier et donc, toute fonction $f \in H_+^2$ peut s'écrire

$$f(z) = \int_0^\infty \phi(t)\, e^{itz}dt$$

pour une certaine fonction $\phi \in L^2(0,\infty)$, avec $\|f\| = \|\phi\|$.

1.2.1.4 Espaces modèles K_I^p

Soit I une fonction intérieure de $\mathbb{C}_a^{\pm}$. On appelle *espace modèle* associé à I l'espace

$$K_I^p := H^p\left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right) \cap I H^p\left(\mathbb{C}_a^{\mp}\right).$$

La terminologie d'espace modèle est *stricto sensu* plutôt réservée à $p=2$. Néanmoins, nous l'utilisons pour $p \neq 2$. En écrivant

$$f = IP_{\mp}\overline{I}f + IP_{\pm}\overline{I}f, \qquad f \in H^p\left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right),$$

on voit qu'on a

$$H^p\left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right) = K_I^p + I H^p\left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right).$$

Dans le cas où $p=2$, alors la somme est directe et orthogonale, et on a en fait

$$K_I^2 = H^2\left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right) \ominus I H^2\left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right).$$

Exemple 1.2.8. En reprenant l'Exemple 1.2.4 où $I = B$ est le produit de Blaschke, dont les zeros, notés Λ, sont simples, on peut voir que

$$K_B^p = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} k_\lambda.$$

1.2.2 Fonctions entières de type exponentiel

Dans cette section, on réintroduit différents résultats sur les fonctions de type exponentiel et les distributions de leurs zéros. Le lecteur trouvera davantage de précisions dans les deux livres de B. Levin ([Le64] et [Le96]). Une fonction entière f est dite de *type exponentiel* si il existe $A \geq 0$ tel que

$$|f(z)| \lesssim e^{A|z|}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{1.4}$$

et le type de f, noté σ_f, est la borne inférieure de l'ensemble des réels positifs $A \geq 0$ tels que (1.4) est vraie. La *fonction indicatrice* de f est définie par

$$h_f(\theta) := \limsup_{r \to \infty} \frac{\log\left|f(re^{i\theta})\right|}{r}, \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

On remarque en particulier que $h_f(\theta) \leq \sigma_f$. Le *diagramme indicateur* de f est le plus petit ensemble compact convexe I_f tel que

$$h_f(\theta) = \sup_{z \in I_f} \operatorname{Re}\left(ze^{-i\theta}\right), \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

La *largeur* du diagramme indicateur est la quantité

$$d_f := h_f\left(-\frac{\pi}{2}\right) + h_f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

qui vérifie entre autres $d_f \leq 2\sigma_f$. Si $0 < \alpha < \pi$, on désigne par $n^+(r,\alpha)$ et $n^-(r,\alpha)$ le nombre de zéros de f dans les secteurs $\{z : \ |z| \leq r, \ |\arg(z)| \leq \alpha\}$ et $\{z : \ |z| \leq r, \ |\pi - \arg(z)| \leq \alpha\}$ respectivement et on s'intéresse aux densités des zéros de f définies par

$$\mathcal{D}_f^{\pm}(\alpha) := \lim_{r \to \infty} \frac{n^{\pm}(r,\alpha)}{r}.$$

Une fonction de type exponentiel F est dite dans la classe Cartwright $\mathcal{C}$ si elle vérifie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |F(t)|}{1+t^2} dt < \infty. \tag{1.5}$$

La classe de Cartwright est une classe de fonction particulièrement régulières. En particulier, on a le résultat suivant.

Théorème 1.2.9. *([Le64, Theorem 11 p.251] - [Le96, p. 127])*
Soit f une fonction de la classe de Cartwright $\mathcal{C}$ dont d_f dénote la largeur du diagramme indicateur et l'ensemble des zéros est noté $\mathcal{A} = \{a_k\}_{k\geq 1}$. Alors,
(i) le diagramme indicateur de f est un intervalle de l'axe imaginaire $[-ia, ib]$ (avec $a, b \geq 0$) ;
(ii) les zéros $\mathcal{A}$ vérifient $\sum_k \left|\mathrm{Im}\left(\frac{1}{a_k}\right)\right| < \infty$ et

$$\mathcal{D}_F^+(\alpha) = \mathcal{D}_F^-(\alpha) = \frac{d_F}{2\pi}, \qquad 0 < \alpha < \pi.$$

De plus, la limite $\delta := \lim_{R\to\infty} \delta(R)$ existe, où

$$\delta(R) := \sum_{|a_k|<R} a_k^{-1};$$

(iii) la fonction $f(z)$ peut être représentée sous la forme

$$f(z) = cz^m e^{ikz} \lim_{R\to\infty} \prod_{|a_k|<R} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right),$$

où $k \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$ est la multiplicité de 0.

1.2.3 Espaces de Paley-Wiener PW_τ^p

Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $\tau > 0$. On définit l'*espace de Paley-Wiener PW_τ^p* comme l'ensemble des fonctions f de type exponentiel au plus τ, et dont la restriction à l'axe réel définit une fonction de $L^p(\mathbb{R})$. En particulier, on constate tout de suite l'inclusion dans la classe de Cartwright

$$PW_\tau^p \subset \mathcal{C}.$$

L'espace PW_τ^p, muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach. On peut voir que si $\phi \in (PW_\tau^p)^\star$, alors il existe une unique fonctions $g \in PW_\tau^q$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, telle que

$$\phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \overline{g}(t)\, dt =: \langle f, g\rangle, \qquad f \in PW_\tau^p,$$

ce qui permet d'identifier

$$(PW_\tau^p)^\star \simeq PW_\tau^q.$$

Un outil très utile dans ces espaces est *l'inégalité de Plancherel-Pòlya*, qui s'obtient à partir d'un principe de Phragmen-Lindelöf (voir par exemple [Se04, p. 95] ou [Le96, Lecture 20]) et qui affirme que si $f \in PW_\tau^p$ alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+ia)|^p \, dx \leq e^{p\tau|a|} \|f\|_p^p . \tag{1.6}$$

Il découle en particulier que si $f \in PW_\tau^p$, alors les fonctions

$$z \mapsto e^{\pm i\tau z} f(z)$$

sont des éléments de $H^p(\mathbb{C}_a^\pm)$ $(a \in \mathbb{R})$ de normes égales à celle de f. En considérant la fonction intérieure dans $\mathbb{C}^+$ définie par

$$I^\tau(z) := \exp(2i\tau z), \qquad z \in \mathbb{C}^+,$$

on peut montrer que l'application $f \mapsto e^{i\tau\cdot} f$ réalise un isomorphisme entre PW_τ^p et

$$K_{I^\tau}^p = H_+^p \cap \overline{I^\tau} H_-^p.$$

De plus, l'inégalité de Plancherel-Pòlya implique également que la translation est un isomorphisme de PW_τ^p dans lui-même. En particulier, on peut estimer la norme d'un élément de PW_τ^p sur **n'importe quel axe** parallèle à l'axe réel.

En utilisant la formule et le théorème de Cauchy de manière appropriée, on obtient que le noyau reproduisant de PW_τ^p associé à $\lambda \in \mathbb{C}$ (c'est à dire la fonction k_λ telle que $\langle f, k_\lambda \rangle = f(\lambda)$ pour toute $f \in PW_\tau^p$) a la forme

$$k_\lambda(z) = \frac{\sin \tau \left(z - \overline{\lambda}\right)}{\tau \left(z - \overline{\lambda}\right)} \tag{1.7}$$

dont on déduit une estimation de la norme

$$\|k_\lambda\|_{PW_\tau^q} \asymp (1 + |\mathrm{Im}(\lambda)|)^{-\frac{1}{p}} e^{\tau|\mathrm{Im}(\lambda)|}.$$

Ceci nous permet d'obtenir une *estimation ponctuelle* très utile. En effet, il existe une constante C ne dépendant que de p telle que, pour toute fonction $f \in PW_\tau^p$,

$$|f(z)| \leq C \|f\|_p (1 + |\mathrm{Im}(z)|)^{-\frac{1}{p}} e^{\tau|\mathrm{Im}(z)|}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{1.8}$$

Fait 1.2.10. *Dans le cas particulier où $p = 2$, le* théorème de Paley-Wiener (voir [Le96, p. 69]) *établit que*

$$L^2(0, 2\tau) \simeq \mathcal{F}L^2(-\tau, \tau) = PW_\tau^2,$$

où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}f(z) = \int_{-\tau}^{\tau} f(t) e^{-itz} dt.$$

1.3 Résultats d'interpolation

Dans toute la suite de la thèse, si X est un espace de fonctions analytiques sur un domaine Ω et $\Lambda = \{\lambda_n : n \geq 1\}$ une suite de points de Ω, on désignera par R_Λ l'*opérateur de restriction*, dont l'image sera appelée *espace des traces*, et notée $X|\Lambda$:

$$R_\Lambda : \begin{array}{ccc} X & \to & X|\Lambda \\ f & \mapsto & (f(\lambda_n))_{n\geq 1} \end{array}.$$

Les propriétés géométriques introduites dans la première section de ce chapitre peuvent, lorsque l'espace X est un espace de Banach réflexif de fonctions analytiques sur un domaine Ω, et que la famille de vecteurs considérée est une famille de noyaux reproduisants associés à une suite de points $\Lambda = \{\lambda_n : n \geq 1\} \subset \Omega$, se reformuler en termes d'interpolation. Par abus de langage, on gardera certaines fois la même terminologie que celle déjà introduite. On dira donc qu'une suite Λ est *minimale* dans X si il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de X telle que

$$f_n(\lambda_k) = \delta_{nk}, \quad n, k \geq 1, \tag{1.9}$$

ce qui est équivalent à ce que $\mathcal{K}(\Lambda) := \{k_{\lambda_n} : n \geq 1\}$ soit minimale dans $X^\star$. La suite sera naturellement dite *uniformément minimale* dans X si il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de X vérifiant (1.9) et

$$\|f_n\|_X \lesssim \|k_{\lambda_n}\|_{X^\star}^{-1}, \tag{1.10}$$

ce qui correspond naturellement à la même propriété pour $\mathcal{K}(\Lambda)$ dans $X^\star$. On préferera cependant utiliser la terminologie existante (voir par exemple [ScS00]) de *suite d'interpolation faible* dans X, ce qu'on notera $\Lambda \in \mathrm{Int}_w(X)$. Enfin, on dit que la suite Λ est *d'unicité* dans X si l'unique fonction $f \in X$ qui s'annule sur Λ est la fonction nulle.

La notion de *suite d'interpolation* n'est quant à elle **pas universelle**, elle est *liée* à l'espace X considéré. En effet, la recherche de l'espace des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ pour lequel le problème d'interpolation

$$f(\lambda_n) = a_n, \quad n \geq 1 \tag{1.11}$$

a des solutions dans X dépend fortement de celui-ci. Par exemple, on dira qu'une suite $\Lambda \subset \mathbb{C}_a^\pm$ est *d'interpolation* pour $H^\infty(\mathbb{C}_a^\pm)$ si, pour toute suite $(a_n)_{n\geq 1} \in l^\infty$ le problème (1.11) admet une solution dans $H^\infty(\mathbb{C}_a^\pm)$.

Remarque 1.3.1. On vient d'expliquer que la notion d'interpolation était propre à l'espace. Plus précisément, les suites que l'on veut interpoler sont définies à partir des valeurs de certaines fonctions de l'espace aux points de Λ. On peut cependant introduire une notion d'interpolation plus "libre" et qui sera davantage connectée à la distribution des points de Λ qu'à la géométrie de l'espace.

Si X est un espace de fonctions analytiques sur un domaine Ω, on dira que la suite $\Lambda \subset \Omega$ est d'*interpolation libre* dans X si l'espace des traces $X|\Lambda$ est un *espace idéal*, c'est à dire est tel que si $a = (a_n)_{n\geq 1} \in X|\Lambda$, alors toute suite $b = (b_n)_{n\geq 1}$ telle que $|b_n| \leq |a_n|$, $n \geq 1$ est encore dans $X|\Lambda$.

Pour plus d'informations, on renvoie par exemple au livre de Nikolskii ([Ni86]) ou aux travaux de Hartmann ([Ha96b, Ha99]).

Lorsque la suite Λ est d'interpolation dans l'espace X, on dit que l'interpolation est *complète*, ce qu'on note $\Lambda \in \mathrm{Int}_c(X)$, si la suite Λ est en plus une suite d'unicité.

1.3.1 Interpolation dans H^p : la condition de Carleson

Considérons l'espace de Hardy $X = H^p\left(\mathbb{C}_a^\pm\right)$, pour $1 \leq p \leq \infty$. On rappelle que, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\left(H^p\left(\mathbb{C}_a^\pm\right)\right)^\star \simeq H^q\left(\mathbb{C}_a^\pm\right)$ et que les noyaux reproduisants $k_\lambda(z) = \left(z - \overline{\lambda}\right)^{-1}$ vérifient

$$\|k_\lambda\|_{H^q\left(\mathbb{C}_a^\pm\right)} \asymp |\mathrm{Im}(\lambda) - a|^{-\frac{1}{p}}.$$

Proposition 1.3.2. *Une suite $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}_a^\pm$ est uniformément minimale dans $H^p\left(\mathbb{C}_a^\pm\right)$ si et seulement si elle vérifie la condition suivante, appelée condition de Carleson*[1]

$$\inf_{n\geq 1} \prod_{k\neq n} \left| \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_n - \overline{\lambda}_k - 2ia} \right| = \delta > 0. \tag{1.12}$$

Preuve. Par hypothèse, il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de $H^p\left(\mathbb{C}_a^\pm\right)$ vérifiant (1.9) et $\|f_n\| \lesssim |\mathrm{Im}\,(\lambda_n) - a|^{\frac{1}{p}}$. Soit $n \geq 1$ fixé. La factorisation dans les espaces de Hardy permet d'écrire $f_n = B_n G_n$, où

$$B_n(z) = \prod_{k\neq n} c_{\lambda_k} \frac{z - \lambda_k}{z - \overline{\lambda}_k - 2ia}$$

est le produit de Blaschke associé à $\Lambda \setminus \{\lambda_n\}$ (qui est un sous-ensemble des zéros de f_n) et G_n est une fonction de $H^p\left(\mathbb{C}_a^\pm\right)$, ne s'annulant pas en λ_n et telle que

$$\|G_n\|_p = \|f_n\|_p \lesssim |\mathrm{Im}\,(\lambda_n) - a|^{\frac{1}{p}}.$$

En particulier, la majoration ponctuelle des fonctions de $H^p\left(\mathbb{C}_a^\pm\right)$ donne

$$|G\,(\lambda_n)| \lesssim \frac{\|k_{\lambda_n}\|_q \|G_n\|_p}{|\mathrm{Im}\,(\lambda_n) - a|^{\frac{1}{p}}} \lesssim 1.$$

On obtient alors que

$$\prod_{k\neq n} \left| \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_n - \overline{\lambda}_k - 2ia} \right| = |B_n\,(\lambda_n)| = \left| \frac{f_n\,(\lambda_n)}{G_n\,(\lambda_n)} \right| \gtrsim 1.$$

Réciproquement, en considérant

$$f_n := \left(\frac{B}{b_{\lambda_n}}\,(\lambda_n)\right)^{-1} \left(\frac{\|k_{\lambda_n}\|_q}{k_{\lambda_n}\,(\lambda_n)}\right) \left(\frac{B}{b_{\lambda_n}}\right) k_{\lambda_n} \in H^q\left(\mathbb{C}_a^\pm\right), \quad n \geq 1,$$

on définit bien une suite vérifiant (1.9) et (1.10). □

Lorsque Λ vérifie la condition de Carleson précédente et que le contexte est clair, on notera $\Lambda \in (C)$. Dans les autres cas, on précisera le demi-plan dans lequel la suite vérifie la condition de Carleson. De plus, on constate aisément que comme les facteurs de Blaschke sont bornés par 1, la condition de Carleson sur Λ entraîne immédiatement la condition de *$\rho-$séparation uniforme*

$$\inf_{n\neq k} \rho\,(\lambda_n, \lambda_k) = \inf_{n\neq k} \left| \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_n - \overline{\lambda}_k - 2ia} \right| \geq \delta > 0, \tag{1.13}$$

[1] En l'honneur de L. Carleson qui a obtenu cette condition pour caractériser les suites d'interpolation pour l'espace de Hardy $H^\infty(\mathbb{D})$ dans un célèbre article ([Ca58]).

qui est elle-même équivalente au fait ques les disques pseudo-hyperboliques

$$\Omega\left(\lambda_n, \frac{\delta}{2}\right) := \left\{z \in \mathbb{C}_a^{\pm} :\ \rho\left(\lambda_n, z\right) < \frac{\delta}{2}\right\}$$

soient deux à deux disjoints.

Remarque 1.3.3. Dans le cas où $\Lambda \subset \mathbb{C}_a^{\pm}$ est incluse dans une bande horizontale de largeur finie loin de l'axe réel, les conditions de Carleson et de $\rho-$séparation uniforme sont toutes deux équivalents à la condition de séparation uniforme

$$\inf_{n \neq k} |\lambda_n - \lambda_k| > 0. \tag{1.14}$$

On renvoie à l'Annexe A.1 pour le détail.

Soit $h > 0$. On considère l'intervalle I de longueur h de la forme $I = (x_0, x_0 + h)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la *fenêtre de Carleson* (contruite sur I) d'un demi-plan $\mathbb{C}_a^{\pm}$ comme étant le carré

$$Q_I^{+,a} := \left\{z \in \mathbb{C}_a^{+} :\ \mathrm{Re}(z) \in I,\ a < \mathrm{Im}(z) < h\right\}$$

ou

$$Q_I^{-,a} := \left\{z \in \mathbb{C}_a^{-} :\ \mathrm{Re}(z) \in I,\ -h < \mathrm{Im}(z) < a\right\}.$$

On dit qu'une mesure μ sur $\mathbb{C}_a^{\pm}$ est une mesure de Carleson si

$$\sup \frac{\mu\left(Q_I^{\pm,a}\right)}{h} < \infty, \tag{1.15}$$

où I parcourt l'ensemble des intervalles du type précédent. Les mesures de Carleson sont liées aux fonctions des espaces de Hardy par le résultat suivant.

Théorème 1.3.4. *(Carleson, voir [Ga81, p. 61]) Soit μ une mesure positive dans $\mathbb{C}_a^{\pm}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) μ est une mesure de Carleson ;

(ii) Pour tout $1 \leq p < \infty$, il existe $A = A(p)$ tel que

$$\int |f|^p d\mu \leq A \left\|f\right\|^p_{H^p\left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right)}, \qquad f \in H^p\left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right).$$

Le théorème suivant, historiquement montré par Carleson dans le disque, apparaît, dans le cas du demi-plan supérieur, dans le livre de Garnett ([Ga81, p. 278]) et établit des équivalences entre les notions précédemment introduites dans cette sous-section.

Théorème 1.3.5. *Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}_a^{\pm}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) La suite Λ est d'interpolation pour $H^{\infty}\left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right)$;

(ii) La suite Λ vérifie la condition de Carleson (1.12) ;

(iii) La suite Λ est uniformément $\rho-$séparée et la mesure

$$\mu_\Lambda := \sum_{\lambda \in \Lambda} |\mathrm{Im}(\lambda) - a|\, \delta_\lambda$$

est une mesure de Carleson dans $\mathbb{C}_a^{\pm}$.

Soit maintenant $1 \leq p < \infty$. On voit, par la condition (iii) du théorème précédent, que si Λ vérifie la condition de Carleson dans $\mathbb{C}_a^{\pm}$, alors $R_\Lambda \left(H^p \left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right)\right) \subset l^p \left(|\mathrm{Im}(\lambda) - a|\right)$. Cette remarque nous permet de justifier la définition suivante.

Définition 1.3.6. On dit que Λ est d'interpolation dans $H^p \left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right)$ si pour toute suite $(a_n)_{n\geq 1} \in l^p \left(|\mathrm{Im}(\lambda) - a|\right)$, il existe $f \in H^p \left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right)$ résolvant le problème d'interpolation (1.11).

La généralisation du Théorème 1.3.5 est dûe à Shapiro et Shields ([SS61]). Le lecteur pourra trouver un énoncé similaire à celui-ci dans le livre de Koosis ([Ko80, p. 207]).

Théorème 1.3.7. *Soient $\Lambda \subset \mathbb{C}_a^{\pm}$ et $1 \leq p < \infty$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) La suite Λ est d'interpolation pour $H^p \left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right)$;
(ii) La suite Λ vérifie la condition de Carleson (1.12) ;
(iii) La suite Λ est uniformément $\rho-$séparée et la mesure

$$\mu_\Lambda := \sum_{\lambda\in\Lambda} |\mathrm{Im}(\lambda) - a|\, \delta_\lambda$$

est une mesure de Carleson dans $\mathbb{C}_a^{\pm}$.

Remarque 1.3.8. Le lecteur aura remarqué que si la définition de l'interpolation dans $H^p \left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right)$ s'écrit $l^p \left(|\mathrm{Im}\,(\lambda_n) - a|\right) \subset R_\Lambda \left(H^p \left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right)\right)$, le fait que la mesure précédente soit de Carleson implique en fait que

$$\left(\Lambda \in \mathrm{Int}\left(H^p\left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right)\right)\right) \Longleftrightarrow \left(l^p\left(|\mathrm{Im}\,(\lambda_n) - a|\right) = R_\Lambda\left(H^p\left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right)\right)\right).$$

Remarque 1.3.9. L'interpolation ne saurait être complète dans les espace de Hardy, car si $f \in H^p$ est telle que $f|\Lambda = a$, alors en définissant B comme le produit de Blaschke associé à Λ (qui existe car la condition de Carleson entraîne la condition de Blaschke), on voit que $f + Bh$ a encore les mêmes propriétés, quelque soit $h \in H^p$. En revanche, si K_B^p désigne l'espace modèle associé à B, on sait que $H^p = K_B^p + BH^p$ et que $K_B^p = \bigvee_\lambda k_\lambda$ (la multiplicité de chaque $\lambda \in \Lambda$ étant supposée égale à 1), ce qui nous permet de voir que $\Lambda \in \mathrm{Int}\,(H^p)$ si et seulement si $\Lambda \in \mathrm{Int}_c\,(K_B^p)$. Dans ce cas, comme

$$\|f\|_p^p \asymp \sum_{\lambda\in\Lambda} |\mathrm{Im}(\lambda) - a|\, |f(\lambda)|^p\,, \qquad f \in K_B^p,$$

l'interpolation est encore équivalente au fait que la suite $(\phi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, où

$$\phi_\lambda := \left(\frac{B}{b_\lambda}(\lambda)\right)^{-1}\left(\frac{\|k_\lambda\|}{k_\lambda(\lambda)}\right)\left(\frac{B}{b_\lambda}\right)k_\lambda,$$

soit une base inconditionnelle de K_B^p. En effet, remarquons que

$$\left\langle \phi_\lambda, \frac{k_\mu}{\|k_\mu\|}\right\rangle = \delta_{\lambda\mu}, \qquad \lambda, \mu \in \Lambda$$

et que la suite $(\phi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est complète dans K_B^p. Pour tout choix de signes $(\varepsilon_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et toute suite $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ à support fini, on a

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{\lambda\in\Lambda}\varepsilon_\lambda\alpha_\lambda\phi_\lambda\right\|_p^p &\asymp \sum_{\lambda\in\Lambda}|\mathrm{Im}(\lambda)-a|\,|\varepsilon_\lambda\alpha_\lambda|^p\\ &\asymp \sum_{\lambda\in\Lambda}|\mathrm{Im}(\lambda)-a|\,|\alpha_\lambda|^p\\ &\asymp \left\|\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda\phi_\lambda\right\|_p^p\end{aligned}$$

et donc $(\phi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, et par conséquent sa famille biorthogonale $\left(\|k_\lambda\|^{-1}k_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda}$, est une base inconditionnelle de K_B^p. Cette constatation pourrait donc permettre de reformuler le théorème de Shapiro-Shields en termes de propriétés géométriques des noyaux reproduisants.

Remarque 1.3.10. Dans le cas où $p=2$, on sait que $\mathcal{F}^{-1}L^2(0,\infty)=H_+^2$. On constate alors que, pour $\mathrm{Im}(\lambda)>0$,

$$\mathcal{F}^{-1}(\exp(i\lambda\cdot))=k_{-\bar\lambda}.$$

Par conséquent, une suite $\Lambda\subset\mathbb{C}^+$ est d'interpolation dans H_+^2 si et seulement si la famille d'exponentielles $\mathcal{E}(\Lambda):=\left\{e^{-i\bar\lambda t}:\ \lambda\in\Lambda\right\}$ est une suite de Riesz dans $L^2(0,\infty)$.

1.3.2 Interpolation complète dans PW_τ^p : le théorème de Lyubarski-Seip

On peut définir l'interpolation (resp. interpolation complète) dans les espaces de Paley-Wiener de manière analogue à celle dans les espaces de Hardy.

Définition 1.3.11. On dira qu'une suite $\Lambda\subset\mathbb{C}$ est d'*interpolation* (resp. d'*interpolation complète*) dans PW_τ^p si pour toute suite $(a_n)_{n\geq1}\in l^p$, il existe (resp. il existe une unique) $f\in PW_\tau^p$ telle que

$$f(\lambda_n)\left(1+|\mathrm{Im}(\lambda_n)|\right)^{\frac{1}{p}}e^{-\tau|\mathrm{Im}(\lambda_n)|}=a_n,\quad n\geq1.$$

L'inégalité de Plancherel-Pòlya entraîne alors que si $\Lambda\in\mathrm{Int}\left(PW_\tau^p\right)$, alors pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\Lambda\cap\mathbb{C}_a^\pm\in\mathrm{Int}\left(H^p\left(\mathbb{C}_a^\pm\right)\right)$ (on montre en fait un résultat plus général avec la Proposition 2.0.1).

Comme on l'a déjà signalé, dans le cas où $p=2$, l'espace PW_τ^2 est isomorphe à $L^2(-\tau,\tau)$, via transformée de Fourier. On constate, de manière analogue à ce qui se passe dans les espaces de Hardy (voir Remarque 1.3.10), que

$$\mathcal{F}^{-1}(\exp(i\lambda\cdot))=\frac{\sin\tau(\cdot+\lambda)}{\tau(\cdot+\lambda)}=k_{-\bar\lambda},$$

et donc l'interpolation dans PW_τ^2 est un autre point de vue du problème sur l'étude des propriétés géométriques des familles d'exponentielles dans $L^2(-\tau,\tau)$. Plus précisément,

Proposition 1.3.12. *Soit Λ une suite de nombres complexes. La famille d'exponentielles $\mathcal{E}(\Lambda):=\left\{e^{-i\bar\lambda t}:\ \lambda\in\Lambda\right\}$ est une suite (resp. base) de Riesz dans $L^2(-\tau,\tau)$ si et seulement si Λ est d'interpolation (resp. d'interpolation complète) dans PW_τ^2.*

Par ailleurs, PW_τ^2 peut être identifié à un sous-espace de H_+^p(plus précisément à l'espace modèle $K_{I^\tau}^p$, où $I^\tau(z) = \exp(2i\tau z)$). C'est dans cette optique que Hrushev, Nikolski et Pavlov ([HNP81]) étudient les familles d'exponentielles $\mathcal{E}(\Lambda)$, sous la condition $\Lambda \subset \mathbb{C}_\eta^+$, $\eta > 0$. Les techniques de ces auteurs sont basées sur la connaissance des suites d'interpolation dans H_+^p, via la condition de Carleson, et sur l'étude de l'opérateur de projection

$$P_{I^\tau}|K_B^p : \; K_B^p \to K_{I^\tau}^p.$$

Les propriétés de ce projecteur sont liées avec l'inversibilité d'un certain opérateur de Toeplitz $T_{\overline{B}I^\tau}$, classe d'opérateurs pour lesquels un critère d'inversibilité est connu. Il s'agit du théorème de Devinatz-Widom pour $p = 2$ (voir [Ni02a, B.4.3.1]) et du théorème de Rochberg ([Ro77]) pour $1 < p < \infty$ faisant intervenir la condition de Muckenhoupt (A_p) (ou dans le cas $p = 2$, la condition équivalente de Helson-Szegö).

Minkin ([Mi92]) réussit à se débarasser de la restriction $\Lambda \subset \mathbb{C}_\eta^+$. On en profite alors pour mentionner qu'il existe bien des suites dont les parties imaginaires sont non bornées et qui sont d'interpolation complète dans PW_τ^p. Un exemple plus général est montré dans la Sous-section 3.6.1.

Avec une méthode différente, Lyubarskii et Seip ([LS97]) donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite Λ soit d'interpolation complète dans PW_τ^p. Leur preuve repose sur la bornitude de la transformée de Hilbert dans un certain espace de Hardy pondéré. La *transformée de Hilbert* $\mathcal{H}$ est définie par

$$\mathcal{H}f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt,$$

où l'intégrale doit être comprise comme valeur principale dans le cas d'arguments réels. Il est bien connu (voir [HMW73] ou [Ga81, Chapter VI, Section 6]) que, si $w > 0$, $\mathcal{H}$ est bornée de

$$L^p(w) := \left\{ f \text{ mesurable sur } \mathbb{R} : \; \int_{\mathbb{R}} |f|^p \, w dm < \infty \right\}$$

dans lui-même si et seulement si w satisfait la *condition (continue) de Muckenhoupt* (A_p)

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I w \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} < \infty, \tag{1.16}$$

où I parcourt l'ensemble des intervalles de longueur finie. Dans l'article de Lyubarskii et Seip, les deux auteurs introduisent aussi la *transformée de Hilbert discrète* comme suit. Pour $\epsilon > 0$ fixé et $\Gamma := \{\gamma_n\}_{n\geq 1}$ et $\Sigma := \{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ deux suites vérifiant $|\gamma_n - \sigma_n| = \epsilon$, $n \geq 1$, on définit la transformée de Hilbert discrète d'une suite $a = (a_n)_{n\geq 1}$ par

$$\left(\mathcal{H}_{\Gamma,\Sigma}(a)\right)_n := \left(\sum_{j\geq 1} \frac{a_j}{\gamma_j - \sigma_n} \right)_n .$$

Le lemme suivant est une version discrète du résultat déjà connu dans le cas continu.

Lemme 1.3.13. *([LS97, Lemma 1]) Soient $\epsilon > 0$, Γ, Σ deux suites vérifiant la propriété précédente et $w = (w_n)_{n\geq 1}$ un poids positif. Alors, $\mathcal{H}_{\Gamma,\Sigma}$ est continue de $l^p(w_n)$ dans lui-même si et seulement si w satisfait la condition (discrète) de Muckenhoupt $(\mathfrak{A}_p)$*

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^\star} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^{k+n} w_j \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^{k+n} w_j^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} < \infty. \tag{1.17}$$

Afin de pouvoir énoncer la caractérisation de Lyubarskii-Seip, on introduit la notation suivante. On dit qu'une suite Λ vérifie les conditions (LS) dans PW_τ^p si les quatre assertions suivantes sont satisfaites.

- (i) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\Lambda \cap \mathbb{C}_a^{\pm}$ satisfait la condition de Carleson (1.12) ;
- (ii) La suite Λ est *relativement dense :* il existe $r > 0$, $d(x, \Lambda) < r$, $x \in \mathbb{R}$;
- (iii) La limite
$$S(z) = \lim_{R \to \infty} \prod_{|\lambda| < R} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)$$
existe et définit une fonction entière de type τ ;
- (iv) La fonction
$$x \mapsto \left(\frac{|S(x)|}{d(x, \Lambda)}\right)^p$$
satisfait la condition (continue) de Muckenhoupt (A_p).

On peut remplacer la condition (iv) par la condition équivalente $(iv)'$ suivante.

- $(iv)'$ Il existe une sous-suite $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n \geq 1} \subset \Lambda$, relativement dense, telle que le poids $(|S'(\gamma_n)|^p)_{n \geq 1}$ satisfait la condition (discrète) de Muckenhoupt $(\mathfrak{A}_p)$.

Le lecteur remarquera que si $0 \in \Lambda$, alors le facteur correspondant dans (iii) est juste z. Dans le but de ne pas compliquer la notation, on peut supposer sans perte de généralité (quitte à décaler la suite) que $0 \notin \Lambda$. Le théorème de Lyubarskii et Seip s'énonce comme suit.

Théorème 1.3.14. *Soit Λ une suite de nombres complexes. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Λ est d'interpolation complète dans PW_τ^p ;*

(ii) *Λ vérifie les conditions (LS).*

Ce résultat sera généralisé, après avoir introduit la notion de suite $N-$Carleson, dans le Chapitre 3.

1.3.3 Interpolation pondérée

Dans cette section on s'intéresse à des problèmes d'*interpolation pondérée*. Plus précisément, désignons par X l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{C}_a^{\pm})$ ou l'espace de Paley-Wiener PW_τ^p. Soient $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ une suite de points du domaine correspondant et $\omega = (\omega_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres positifs. On dit que Λ est $\omega-$*interpolante* dans X si pour toute suite $(a_n)_{n \geq 1} \in l^p$, il existe $f \in X$ telle que
$$\omega_n f(\lambda_n) = a_n, \quad n \geq 1. \tag{1.18}$$

L'interpolation "classique" introduite précédemment est alors équivalente à l'interpolation pondérée avec
$$\omega_n = \|k_{\lambda_n}\|_{X^\star}^{-1}, \qquad n \geq 1.$$

Ici, nous n'imposerons pas la condition de Carleson sur la suite Λ, néanmoins on supposera que la condition de Blaschke (1.3) est vérifiée. On notera alors
$$\vartheta_n := \prod_{k \neq n} \left|\frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_n - \overline{\lambda}_k - 2ia}\right|, \quad n \geq 1, \tag{1.19}$$

et on dira que le couple (Λ, ω) vérifie la c*ondition de McPhail* (M_q) si la mesure

$$\nu_{\Lambda,\omega} := \sum_{n\geq 1} \frac{|\mathrm{Im}\,(\lambda_n) - a|^q}{\vartheta_n^q \omega_n^q} \delta_{\lambda_n}$$

est une mesure de Carleson dans $\mathbb{C}_a^{\pm}$. Le résultat suivant, dû à McPhail ([MP90]) mais énoncé tel quel dans un article de Jacob et Partington ([JP06]), permet de caractériser l'interpolation pondérée dans les espaces de Hardy.

Théorème 1.3.15. *(McPhail)*
Soient $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}_a^{\pm}$ et $\omega = (\omega_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres positifs. Les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) La suite Λ est $\omega-$interpolante dans $H^p\left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right)$;
(ii) Le couple (Λ, ω) vérifie la condition de McPhail (M_q), $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Remarque 1.3.16. On observe immédiatement que, si $\Lambda \subset \mathbb{C}$ et ω sont tels que Λ est $\omega-$interpolante dans PW_τ^p, alors l'inégalité de Plancherel-Pòlya et le Théorème de McPhail entraînent que nécessairement, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\left(\left(\Lambda \cap \mathbb{C}_a^{\pm}\right), \left(e^{\pm\tau|\mathrm{Im}(\lambda_n)|}\omega_n\right)_n\right)$$

vérifie la condition de McPhail (M_q).

Le lemme suivant permettra de donner un critère de vérification à la condition de McPhail.

Lemme 1.3.17. *(Garnett, [Ga77]) Soient A une fonction positive et décroissante définie sur $(0,\infty)$ et $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ une suite de points de $\mathbb{C}_a^{\pm}$ vérifiant la condition de Blaschke (1.3). Soit $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ définie par (1.19).*
(1) Si $\int_0^\infty A(t)dt < \infty$, alors la mesure ν_Λ définie par

$$\nu_\Lambda := \sum_{n\geq 1} |\mathrm{Im}\,(\lambda_n) - a|\, A\left(1 + \log\left(\frac{1}{\vartheta_n}\right)\right)\delta_{\lambda_n}$$

est une mesure de Carleson dans $\mathbb{C}_a^{\pm}$;
(2) Si au contraire $\int_0^\infty A(t)dt = \infty$, il est possible de construire une suite $\Lambda \subset \mathbb{C}_a^{\pm}$ pour laquelle la mesure ν_Λ n'est pas une mesure de Carleson dans $\mathbb{C}_a^{\pm}$.

Proposition 1.3.18. *On se place dans les conditions du Lemme 1.3.17. On suppose que $A\left(1 + \log\left(\frac{1}{\vartheta_n}\right)\right) > 0$, $n \geq 1$ et on pose*

$$\omega_n := \frac{|\mathrm{Im}\,(\lambda_n) - a|^{\frac{1}{p}}}{\vartheta_n A\left(1 + \log\left(\frac{1}{\vartheta_n}\right)\right)}, \qquad n \geq 1.$$

(1) Si $\int_0^\infty A^q(t)dt < \infty$, alors Λ est $\omega-$interpolante dans $H^p\left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right)$. De plus, la solution f du problème d'interpolation pondérée (1.18) peut être choisi comme

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\omega_n} \frac{B(z)}{B'\left(\lambda_n\right)\left(z - \lambda_n\right)};$$

(2) Si $\int_0^\infty A^q(t)dt = \infty$, il existe une suite $\Lambda \subset \mathbb{C}_a^{\pm}$ qui n'est pas $\omega-$interpolante dans $H^p\left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right)$.

La preuve de cette proposition, notamment du (1), utilise un argument de dualité, l'inégalité de Hölder et un résultat sur les mesures de Carleson. Ces méthodes seront employées à plusieurs reprises, comme par exemple dans la preuve des Théorèmes 2.2.1, 2.3.1 ou dans la preuve de la surjectivité pour le Théorème 3.4.2. Le lecteur observera alors qu'une dénomstration analogue à celles juste mentionnées permet d'obtenir la proposition précédente.

1.4 Suites $N-$Carleson et condition de Carleson généralisée

On a vu précédemment que si une suite Λ vérifie la condition de Carleson (1.12) dans un certain demi-plan $\mathbb{C}_a^{\pm}$, alors la mesure

$$\sigma_\Lambda = \sum_{n\geq 1} |\mathrm{Im}\,(\lambda_n) - a|\,\delta_{\lambda_n}$$

est une mesure de Carleson dans le demi-plan correspondant. La réciproque est fausse. En effet, on a besoin d'une séparation uniforme (relativement à la distance pseudo-hyperbolique) pour avoir l'implication inverse. Ainsi, des points pourraient être arbitrairement prêts (toujours relativement à la métrique pseudo-hyperbolique) en gardant le caractère Carleson pour la mesure σ_Λ. Le résultat suivant, dû à Newman (mais énoncé tel quel dans un livre de Nikolskii [Ni86, p. 158]) permet de caractériser les suites pour lesquelles la mesure σ_Λ est une mesure de Carleson.

Théorème 1.4.1. *(Newman) Soit $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ une suite de points de $\mathbb{C}_a^{\pm}$ et σ_Λ la mesure correspondante. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) La mesure σ_Λ est une mesure de Carleson dans $\mathbb{C}_a^{\pm}$;

(ii) La suite Λ est une réunion finie de suites vérifiant la condition de Carleson (1.12) dans $\mathbb{C}_a^{\pm}$.

On considère donc dans cette section, ainsi que dans le Chapitre 3 des réunions finies de suites de Carleson. On dira alors qu'une suite Λ est $N-$*Carleson* dans $\mathbb{C}_a^{\pm}$, pour $N \geq 1$ entier, si on peut écrire

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda^i,$$

où chaque Λ^i vérifie la condition de Carleson (1.12). Observons que si une suite est $N-$Carleson, alors elle est $(N+1)-$Carleson. Le résultat suivant permet de caractériser ces réunions finies. Le lecteur trouvera des preuves du théorème dans [Ni86, Lecture IX], [Ha96a, Chapitre 3] ou [Ha96b, Proposition 3.1]. On précisera que dans ces références, le contexte est celui du disque unité, mais les résultats sont toujours valides dans un demi-plan car les applications conformes qui envoient $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{C}_a^{\pm}$ conservent la métrique pseudo-hyperbolique.

Théorème 1.4.2. *Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}_a^{\pm}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) Λ est $N-$Carleson dans $\mathbb{C}_a^{\pm}$;

(ii) Il existe $\delta > 0$ et une suite de produits de Blaschke $(B_n)_{n\geq 1}$ telle que $\sup_n deg\,(B_n) \leq N$, $\Lambda = \biguplus_n \sigma_n$ avec $\sigma_n := \{\lambda \in \mathbb{C}_a^{\pm} :\ B_n(\lambda) = 0\}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ vérifie la condition suivante, dite condition de Carleson généralisée,

$$|B(z)| \geq \delta \inf_{n\geq 1} |B_n(z)|, \qquad z \in \mathbb{C}_a^{\pm}, \tag{1.20}$$

où B désigne le produit de Blaschke associé à la suite Λ.

Le lecteur remarquera aisément que si Λ vérifie (ii) et si $\lambda \in \sigma_n$ et $\mu \in \sigma_m$ avec $n \neq m$, alors $\rho(\lambda, \mu) \geq \delta$ et donc

$$\inf_{n\neq m} \rho(\sigma_n, \sigma_m) \geq \delta > 0.$$

Remarque 1.4.3. En étudiant la preuve de ce résultat, on voit que les ensembles σ_n sont choisis comme étant les intersections $\tau_n^\epsilon \cap \Lambda$ pour ϵ assez petit, où les τ_n^ϵ sont les composantes connexe de l'*ensemble de niveau*

$$L(B, \epsilon) := \left\{ z \in \mathbb{C}_a^\pm : \ |B(z)| < \epsilon \right\}.$$

En choisissant donc ϵ judicieusement, on peut supposer que le diamètre pseudo-hyperbolique de σ_n est arbitrairement petit. On peut également montrer la proposition suivante dont la remarque qui suit est une version que l'on utilisera ultérieurement.

Proposition 1.4.4. *Soit $\Lambda = \{\lambda_n : \ n \geq 1\}$ une suite $N-$Carleson. Alors, il existe $\epsilon > 0$ tel que toute composante connexe de $\bigcup_{n\geq 1} D_{psh}(\lambda_n, \epsilon)$ possède au plus N éléments.*

Remarque 1.4.5. On peut alors déduire de la proposition précédente, que si Λ vérifie (i) ou de manière équivalente (ii), il est possible de construire une suite $(R_n)_{n\geq 1}$ de rectangles de $\mathbb{C}_a^\pm$ définis par

$$R_n = \operatorname{Rect}(z_n, L_n, l_n) = \left\{ x + iy \in \mathbb{C}_a^\pm : \ |x - x_n| \leq \frac{L_n}{2}, \ |y - y_n| \leq \frac{l_n}{2} \right\}$$

avec $L_n, l_n > 0$ et $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}_a^\pm$. Ces rectangles vérifient les quatre propriétés suivantes.

$$\sigma_n \subset R_n, \qquad n \geq 1; \tag{1.21}$$

$$L_n \asymp l_n \asymp |y_n - a| \asymp d(\partial R_n, \mathbb{R} + ia), \qquad n \geq 1; \tag{1.22}$$

$$0 < \inf_{n\geq 1} \rho(\sigma_n, \partial R_n) \leq \sup_{\substack{n\geq 1 \\ \lambda\in\sigma_n}} \rho(\lambda, \partial R_n) < \infty; \tag{1.23}$$

et enfin, comme le diamètre pseudo-hyperbolique des ensembles σ_n peut être choisi arbitrairement petit,

$$\inf_{n\neq m} d(R_n, R_m) > 0. \tag{1.24}$$

Par ailleurs, on peut également énoncer une résultat analogue à celui du cas $N = 1$, permettant de lier les propriétés géométriques des noyaux reproduisants à la condition de Carleson, sauf que dans ce cas on considèrera des familles de sous-espaces dont les différents types de propriétés ont été introduits dans la Sous-Section 1.1.1. Plus précisément, si $\{B_n\}_{n\geq 1}$ est une familles de produits de Blaschke et $B = \prod_n B_n$, on rappelle que l'espace modèle est défini par

$$K^p_{B_n,\pm} = H^p_\pm \cap B_n H^p_\mp.$$

On a le résultat suivant pour lequel on renvoie à [Ni86, p. 217].

Théorème 1.4.6. *(Vasyunin)*

Soit $1 < p < \infty$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) La famille de sous-espaces $\left\{K^p_{B_n,\pm}\right\}_{n\geq 1}$ est uniformément minimale dans $K^p_{B,\pm}$;

(ii) La famille de sous-espaces $\left\{K^p_{B_n,\pm}\right\}_{n\geq 1}$ est une base inconditionnelle de $K^p_{B,\pm}$;

(iii) La suite des produits de Blaschke $\{B_n\}_{n\geq 1}$ vérifie la condition de Carleson généralisée (1.20).

1.5 Notations générales

On rappelle quelques notations qui ont déjà été et seront frequemment utilisées dans toute la thèse, sans être nécessairement rappelées à chaque fois. Si X est un espace de Banach et si E est un sous-ensemble de X, on dénotera par

$$\mathrm{span}_X E := \overline{\mathrm{vect}\ E}^X$$

l'adhérence de l'enveloppe linéaire de E dans X. Soient f et g deux quantités, dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{Z}$ ou $x \in \mathbb{R}$. Si il existe une constante indépendante de n ou de x telle que $f \leq Cg$, on écrira

$$f \lesssim g.$$

Si $f \lesssim g$ et $g \lesssim f$, alors on écrira

$$f \asymp g.$$

Si $a \in \mathbb{R}$, on s'intéressera aux deux demi-plans (supérieurs et inférieurs)

$$\mathbb{C}^{\pm}_a := \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\,(z) \gtrless a\}\,.$$

Relativement à ce demi-plan, le facteur de Blaschke associé à $\lambda \in \mathbb{C}^{\pm}_a$ sera noté

$$b^{\pm,a}_\lambda(z) = \epsilon_\lambda \frac{z-\lambda}{z-\overline{\lambda}-2ia}, \quad z \in \mathbb{C}^{\pm}_a,$$

où ϵ_λ est un certain coefficient unimodulaire dont nous n'aurons jamais besoin de la valeur explicite. Cependant, on précise que $\epsilon_\lambda = \frac{\left|(\lambda-ia)^2+1\right|}{(\lambda-ia)^2+1}$. La distance pseudo-hyperbolique correspondante sera notée

$$\rho_{\pm,a}\,(z,\xi) = \left|b^{\pm,a}_\xi\,(z)\right|.$$

Par ailleurs, si δ est une distance sur un espace métrique E et que A est une partie de E, on introduit le *diamètre* de A relativement à δ par

$$\mathrm{diam}_\delta\,(A) = \sup_{x,y\in A} \delta(x,y).$$

Dans le cas de la distance euclidienne, on omettra d'écrire l'indice. De plus, si σ et γ sont deux ensemble *disjoints*, leur réunion s'écrira

$$\sigma \uplus \gamma.$$

Si T est un opérateur entre deux espaces de Banach X et Y, on désignera l'image de T par

$$\mathrm{Im}T := TX.$$

Enfin, si $\omega = (\omega_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres strictement positifs et si $1 \leq p < \infty$, on désigne par $l^p(\omega)$ ou $l^p(\omega_n)$ l'espace de suites

$$l^p(\omega_n) := \left\{ a = (a_n)_{n\geq 1} : \sum_{n\geq 1} |a_n|^p \, \omega_n < \infty \right\}.$$

Chapitre 2

Minimalité et Interpolation (pondérée) dans $PW^p_{\tau+\epsilon}$

Cette section établit des liens entre minimalité et interpolation (pondérée) dans les espaces de Paley-Wiener. Les notions suivantes ont été introduites dans le chapitre précédent, mais on les précise ici. On rappelle qu'une suite de nombre complexes $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ est dite

- *d'unicité* dans PW^p_τ si la seule fonction $f \in PW^p_\tau$ s'annulant sur Λ est la fonction nulle ;
- *minimale* dans PW^p_τ si il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de PW^p_τ telles que

$$f_n(\lambda_k) = \delta_{n,k}, \quad n, k \geq 1; \tag{2.1}$$

- d'*interpolation faible* (ou encore *uniformément minimale*), et notée $\Lambda \in \mathrm{Int}_w(PW^p_\tau)$, si il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de PW^p_τ vérifiant (2.1) et

$$\|f_n\|_p \lesssim (1 + |\mathrm{Im}(\lambda_n)|)^{\frac{1}{p}} e^{-\tau|\mathrm{Im}(\lambda_n)|}; \tag{2.2}$$

- d'interpolation dans PW^p_τ , ce qu'on note $\Lambda \in \mathrm{Int}(PW^p_\tau)$, si pour toute suite $(a_n)_{n\geq 1} \in l^p$, il existe $f \in PW^p_\tau$ telle que

$$f(\lambda_n)(1 + |\mathrm{Im}(\lambda_n)|)^{\frac{1}{p}} e^{-\tau|\mathrm{Im}(\lambda_n)|} = a_n, \quad n \geq 1;$$

- d'*interpolation complète* dans PW^p_τ si elle est à la fois d'unicité et d'interpolation dans PW^p_τ, et on note $\Lambda \in \mathrm{Int}_c(PW^p_\tau)$;
- $\omega-$*interpolante* dans PW^p_τ , pour une certaine suite $\omega = (\omega_n)_{n\geq 1}$ de nombres strictement positifs, si pour toute suite $(a_n)_{n\geq 1} \in l^p$, il existe $f \in PW^p_\tau$ telle que

$$f(\lambda_n)\,\omega_n = a_n, \quad n \geq 1.$$

Ces définitions se reformulent à la fois en termes de propriétés géométriques des noyaux reproduisants (ou des familles d'exponentielles si $p = 2$) mais aussi en fonctions des propriétés de l'*opérateur de restriction*

$$R_\Lambda : PW^p_\tau \to l^p\left((1 + |\mathrm{Im}(\lambda_n)|)\, e^{-p\tau|\mathrm{Im}(\lambda_n)|}\right).$$

On rappelle que si $\rho = (\rho_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres strictement positifs,

$$l^p(\rho_n) = \left\{ a = (a_n)_{n\geq 1} : \; \|a\|^p_{p,\rho} := \sum_{n\geq 1} |a_n|^p \rho_n < \infty \right\}.$$

L'opérateur R_Λ est injectif (resp. surjectif, resp. bijectif) si et seulement si Λ est d'unicité (resp. d'interpolation, resp. d'interpolation complète) dans PW^p_τ. On rappelle aussi que le théorème de Lyubarskii et Seip (Théorème 1.3.14) permet de caractériser les suites d'interpolation complète dans PW^p_τ.

Par ailleurs, on a déjà mentionné (voir le Théorème 1.3.7 de Shapiro et Shields énoncé dans le chapitre précédent) le fait que dans l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{C}^\pm_a)$, les suites d'interpolation sont exactement les suites d'interpolation faible et sont les suites vérifiant la condition de Carleson

$$\inf_{n\geq 1} \prod_{k\neq n} \left| \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_n - \overline{\lambda}_k - 2ia} \right| \tag{2.3}$$

qui apparaît également nécessaire à l'interpolation faible dans PW^p_τ. En effet, il découle de l'inégalité de Plancherel-Pòlya le fait suivant.

Proposition 2.0.1. *Si $\Lambda \in Int_w(PW^p_\tau)$, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la suite $\Lambda \cap \mathbb{C}^\pm_a$ vérifie la condition de Carleson (2.3).*

Preuve. Il suffit de montrer la proposition pour $\Lambda^+_\alpha := \Lambda \cap \mathbb{C}^+_\alpha$, $\alpha > 0$, la méthode étant la même pour les intersections avec les autres demi-plans. Comme par hypothèse $\Lambda \in \mathrm{Int}_w(PW^p_\tau)$, il est clair que la suite Λ^+_α est encore d'interpolation faible dans PW^p_τ.

En premier lieu, cela implique que Λ^+_α est d'interpolation (faible) dans H^p_+. En effet, si $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda^+_\alpha} \subset PW^p_\tau$ est telle que $f_\lambda(\mu) = \delta_{\mu\lambda}$, $\mu \in \Lambda^+_\alpha$, et $\|f_\lambda\| \lesssim (1 + \mathrm{Im}(\lambda))^{\frac{1}{p}} e^{-\tau \mathrm{Im}(\lambda)}$, alors l'inégalité (1.6) implique que $\left(\tilde{f}_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda^+}$, où $\tilde{f}_\lambda := e^{i\tau(\cdot-\lambda)} f_\lambda$, est une suite de fonctions de H^p_+ satisfaisant $\tilde{f}_\lambda(\mu) = \delta_{\mu\lambda}$ et

$$\left\|\tilde{f}_\lambda\right\|_{H^p_+} = \left|e^{-i\tau\lambda}\right| \|f_\lambda\|_p \lesssim e^{\tau \mathrm{Im}(\lambda)} (1 + \mathrm{Im}(\lambda))^{\frac{1}{p}} e^{-\tau \mathrm{Im}(\lambda)} \lesssim \mathrm{Im}(\lambda)^{\frac{1}{p}},$$

car $\mathrm{Im}(\lambda) \gtrsim 1$, $\lambda \in \Lambda^+_\alpha$. Ainsi, $\Lambda^+_\alpha \in \mathrm{Int}_w(H^p_+) = \mathrm{Int}(H^p_+)$, ce qui est équivalent, par le Théorème 1.3.7, au fait que Λ^+_α vérifie la condition de Carleson dans $\mathbb{C}^+$. Ceci implique facilement que Λ^+_α vérifie la condition de Carleson dans $\mathbb{C}^+_\alpha$. □

Si comme dans l'espace de Hardy la condition de Carleson est bien nécessaire à l'interpolation faible, les suites d'interpolation faible dans PW^p_τ ne sont pas forcément des suites d'interpolation dans le même espace. En effet, comme dans [ScS00], considèrons la suite $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $\lambda_0 = 0$ et

$$\lambda_n := n + \frac{\mathrm{sign}(n)}{2\max(p,q)}, \; n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

On constate que

$$S(z) := z \prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)\left(1 - \frac{z}{\lambda_{-n}}\right)$$

converge localement uniformément vers une fonction entière de type exponentiel π et de plus, on a l'estimation

$$|S(x)| \asymp d(x,\Lambda)\,(1+|x|)^{-\frac{1}{\max(p,q)}},$$

ce qui implique que $x \mapsto |S(x)|/d(x,\Lambda)$ ne vérifie pas la condition de Muckenhoupt (A_p). Par le Théorème 1.3.14, ceci entraîne que Λ n'est pas d'interpolation complète dans PW_π^p. Or, comme Λ est d'unicité dans PW_π^p, Λ n'est pas d'interpolation dans PW_π^p. En revanche, en posant

$$f_n(z) := \frac{S(z)}{S'(\lambda_n)(z-\lambda_n)}, \qquad z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z},$$

on définit une suite de fonctions de PW_τ^p telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^p\,dx \asymp 1$$

et $f_n(\lambda_k) = \delta_{nk}$, ou encore $\Lambda \in \mathrm{Int}_w(PW_\pi^p)$.

Par ailleurs, en raisonnant sur la densité de la suite (qui sera définie ci-après), on se rend compte que cette suite est d'interpolation dans un espace où on autorise un type plus grand, c'est à dire $PW_{\pi+\epsilon}^p$. Ceci sera détaillé dans la section suivante et généralisé dans celle d'après.

Ce genre de résultats avaient déjà été obtenus par E. Amar et A. Hartmann ([AH10]). Ces deux auteurs considèrent, dans le cas du disque unité, les espaces modèles K_I^p (pour lesquels l'espace de Paley-Wiener est un cas particulier) et montrent que les suites uniformément minimales dans K_I^p sont des suites inconditionnelles dans des espaces plus grands $K_{I'}^s$, où $s<p$ et I' est un multiple de I. L'agrandissement de l'espace se fait donc dans deux directions, alors qu'ici, nous gardons le même exposant p.

2.1 Densité et Interpolation

Dans cette section, on supposera que la suite Λ vérifie

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} |\mathrm{Im}(\lambda)| < \infty, \tag{2.4}$$

c'est à dire que la suite vit dans une bande de largeur finie, parallèle à l'axe réel. On définit alors la *densité supérieure uniforme*

$$\mathcal{D}^+(\Lambda) := \lim_{r\to\infty} \frac{n_\Lambda^+(r)}{r},$$

où

$$n_\Lambda^+(r) := \sup_x |\Lambda \cap [x, x+r]|,$$

est le nombre maximal de points de Λ dans un intervalle de longueur r. Par sous-additivité de cette dernière quantité, la limite définissant $\mathcal{D}^+(\Lambda)$ existe bien. Le résultat suivant est énoncé tel quel dans un article de K. Seip ([Se95, Theorem 2.2]) mais la preuve repose sur un résultat plus général dû à A. Beurling ([Be89]).

Théorème 2.1.1. *Soit Λ une suite vérifiant (2.4). Si Λ est uniformément séparée et que $\mathcal{D}^+(\Lambda) < \frac{\tau}{\pi}$, alors $\Lambda \in Int(PW_\tau^p)$. Réciproquement, si $\Lambda \in Int(PW_\tau^p)$, alors nécessairement la suite est uniformément séparée et $\mathcal{D}^+(\Lambda) \le \frac{\tau}{\pi}$.*

Ce résultat permet de voir immédiatement que la suite précédente Λ est d'interpolation dans tout espace $PW^p_{\pi+\epsilon}$, $\epsilon > 0$, car elle est bien évidemment uniformément séparée et sa densité supérieure uniforme vaut 1. On se demande alors si l'on ne peut pas généraliser cette observation à toutes les suites minimales qui auraient en plus une condition de séparation, et pas uniquement dans le cas de l'inclusion dans une bande de largeur finie. La réponse est affirmative, fait l'objet d'un article soumis à publication ([Gau11b]) et est développée dans la section suivante.

2.2 Minimalité et Interpolation dans $PW^p_{\tau+\epsilon}$

Théorème 2.2.1. *Soit Λ une suite de nombres complexes dont l'intersection avec chaque demi-plan $\mathbb{C}^{\pm}_a$ vérifie la condition de Carleson. On suppose que Λ est minimale dans un certain espace PW^p_τ, pour $\tau > 0$ et $1 < p < \infty$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, la suite Λ est d'interpolation dans $PW^p_{\tau+\epsilon}$.*

On insiste sur le fait que, de manière surpenante, la minimalité n'a pas besoin d'être uniforme ici. Dans un certain sens, la condition de Carleson permet de compenser ce manque d'uniformité.

Avant de faire la preuve de ce résultat, on peut d'ores et déjà énoncer deux corollaires immédiats. Le premier est un lien entre interpolation faible et interpolation "forte".

Corollaire 2.2.2. *Soit Λ une suite d'interpolation faible dans PW^p_τ. Alors, Λ est d'interpolation dans $PW^p_{\tau+\epsilon}$, $\epsilon > 0$.*

Le second permet d'obtenir, dans le cas de l'inclusion dans une bande de largeur finie, un lien entre minimalité et densité qui ne semblait pas évident à démontrer directement.

Corollaire 2.2.3. *Soit Λ une suite vérifiant (2.4), minimale dans PW^p_τ et uniformément séparée. Alors,*

$$\mathcal{D}^+(\Lambda) \leq \frac{\tau}{\pi}.$$

Preuve. Le Théorème 2.2.1 impliquant que $\Lambda \in \mathrm{Int}(PW^p_{\tau+\epsilon})$, pour tout $\epsilon > 0$, la partie nécessaire du Théorème 2.1.1 entraîne alors que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathcal{D}^+(\Lambda) \leq \frac{\tau+\epsilon}{\pi},$$

ce qui donne le résultat voulu. □

2.2.1 Preuve du Théorème 2.2.1

En reprenant une idée de Beurling, soient $\epsilon > 0$ fixé et $\phi_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty$, dont le support est compact et contenu $\left(-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right)$, soit telle que $H_\epsilon := c\mathcal{F}\phi_\epsilon$ vérifie $H_\epsilon(0) = 1$. En particulier, le théorème de Paley-Wiener affirme que H_ϵ est une fonction entière de type exponentiel ϵ. De plus, comme ϕ_ϵ appartient à la classe de Schwarz (et en particulier est $\mathcal{C}^1$), on a que

$$|H_\epsilon(x)| \lesssim \frac{1}{1+|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, à l'aide d'un principe de Phragmen-Lindelöf (voir [Le96, p.39]), on peut déduire que

$$|H_\epsilon(z)| \lesssim \frac{e^{\epsilon|\mathrm{Im}(z)|}}{1+|z|}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.5}$$

D'autre part, comme Λ est minimale dans PW^p_τ, il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1} \subset PW^p_\tau$ telles que $f_n(\lambda_k) = \delta_{nk}$. Soient alors $a = (a_n)_{n\geq 1}$ une suite à support fini et f une solution du problème d'interpolation

$$f(\lambda_n) = a_n, \quad n \geq 1,$$

definie par

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n f_n(z) H_\epsilon(z-\lambda_n).$$

(Le lecteur remarquera que f est bien définie comme somme finie de fonctions appartenant à $PW^p_{\tau+\epsilon}$). Par définition de l'interpolation dans $PW^p_{\tau+\epsilon}$, il suffit de borner la quantité

$$\inf\left\{\|f-g\|_p : \ g \in PW^p_{\tau+\epsilon},\ g(\lambda)=0,\ \lambda\in\Lambda\right\}$$

par une constante fois la norme suivante de a

$$\|a\| := \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda|^p (1+|\mathrm{Im}(\lambda)|)\, e^{-p(\tau+\epsilon)|\mathrm{Im}(\lambda)|}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soit $\eta > 0$ tel quet $\{\mathrm{Im}(z) = -\eta\} \cap \Lambda = \emptyset$. L'inégalité de Plancherel-Pòlya nous autorise à estimer la norme précédente sur l'axe $\{\mathrm{Im}(z) = -\eta\}$. Considérons le produit de Blaschke associé à $\Lambda \cap \mathbb{C}^+_{-\eta}$ dans le demi-plan correspondant

$$B_{-\eta}(z) = \prod_{\lambda_n\in\Lambda^+_{-\eta}} c_{\lambda_n} \frac{z-\lambda_n}{z-\overline{\lambda}_n+2i\eta}, \quad z \in \mathbb{C}^+_{-\eta},$$

où les coefficients c_{λ_n} sont choisis de sorte à faire converger le produit, mais ne necessitent pas d'être explicités ici. Pour $\lambda_n \in \Lambda^+_0$, on considère la fonction

$$G_{\lambda_n,\epsilon} : z \mapsto (z-\lambda_n) H_\epsilon(z-\lambda_n) f_n(z) e^{i(\tau+\epsilon)z}$$

qui appartient à $H^\infty\left(\mathbb{C}^+_{-\eta}\right)$ (ceci découle de l'inégalité de Plancherel-Pòlya combinée avec (1.8) et (2.5)) et s'annule en particulier sur $\Lambda^+_{-\eta}$ (en fait sur Λ tout entier). On rappelle que, par hypothèse, $\Lambda^+_{-\eta}$ vérifie la condition de Carleson dans $\mathbb{C}^+_{-\eta}$. Clairement, la fonction $G^0_{\lambda_n,\epsilon} := G_{\lambda_n,\epsilon}/B_{-\eta}$ appartient encore à $H^\infty\left(\mathbb{C}^+_{-\eta}\right)$. Par un argument de dualité détaillé en Annexe A.3, il suffit de majorer la quantité

$$\sup\left\{N(h) : \ h \in H^q\left(\mathbb{C}^+_{-\eta}\right), \|h\| = 1\right\},$$

où

$$N(h) := \left|\sum_{\lambda_n\in\Lambda^+_0} a_n \int_{\mathbb{R}} \frac{G^0_{\lambda_n,\epsilon}(x-i\eta)\, h(x-i\eta)}{x-(\lambda_n+i\eta)} dx\right|.$$

Mais alors, $z \mapsto G^0_{\lambda_n,\epsilon}(z - i\eta)\, h(z - i\eta)$ est une fonction H^q_+ et par conséquent la formule de Cauchy donne

$$N(h) = \left| \sum_{\lambda_n \in \Lambda_0^+} a_n G^0_{\lambda_n,\epsilon}(\lambda_n + i\eta - i\eta)\, h(\lambda_n + i\eta - i\eta) \right| .$$

De plus, le fait que Λ_0^+ satisfasse la condition de Carleson dans $\mathbb{C}^+_{-\eta}$ implique que $\left| \frac{B_{-\eta}}{b_{\lambda_n}}(\lambda_n) \right| \asymp 1$. Comme $f_{\lambda_n}(\lambda_n)\, H_\epsilon(0) = 1$, il suit que

$$\left| G^0_{\lambda_n,\epsilon}(\lambda_n) \right| \asymp (\mathrm{Im}(\lambda_n) + \eta)\, e^{-(\tau+\epsilon)\mathrm{Im}(\lambda_n)}, \quad \lambda_n \in \Lambda_0^+.$$

Il découle maintenant de l'inégalité triangulaire et de l'inégalité de Hölder que

$$\begin{aligned} N(h) \ &\lesssim \left(\sum_{\lambda_n \in \Lambda_0^+} |a_n|^p (1 + \mathrm{Im}(\lambda_n))\, e^{-p(\tau+\epsilon)\mathrm{Im}(\lambda_n)} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left(\sum_{\lambda_n \in \Lambda_0^+} \mathrm{Im}(\lambda_n + i\eta) \left| \tilde{h}(\lambda_n + i\eta) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

où $\tilde{h} = h(\cdot - i\eta) \in H^q_+$. Maintenant, la condition de Carleson vérifiée par $\Lambda_0^+ + i\eta$ dans $\mathbb{C}^+$ assure que

$$\left(\sum_{\lambda_n \in \Lambda_0^+} \mathrm{Im}(\lambda_n + i\eta) \left| \tilde{h}(\lambda_n + i\eta) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \|h\| = 1$$

(voir Théorèmes 1.3.4 et 1.3.7). Finalement, on obtient

$$\inf \left\{ \left\| f^+ - g \right\|_p : \ g \in PW^p_{\tau+\epsilon},\ g(\lambda) = 0,\ \lambda \in \Lambda \right\} \lesssim \left(\sum_{\lambda_n \in \Lambda_0^+} |a_n|^p (1 + \mathrm{Im}(\lambda_n))\, e^{-p(\tau+\epsilon)\mathrm{Im}(\lambda_n)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

qui est l'inégalité demandée. Le théorème est bien démontré.

2.3 Minimalité et interpolation pondérée

La méthode utilisée pour la preuve du Théorème 2.2.1 peut être utilisée presque telle quelle pour montrer un résultat plus général. On a vu que la condition de McPhail était en quelque sorte nécessaire à l'interpolation pondérée dans PW^p_τ (voir Remarque 1.3.16). Le résultat est alors le suivant.

Théorème 2.3.1. *Soient $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes et $\omega = (\omega_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres positifs. On suppose que Λ est minimale dans PW^p_τ (pour $\tau > 0$ et $1 < p < \infty$) et que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, le couple*

$$\left(\left(\Lambda \cap \mathbb{C}^\pm_a \right), \left(e^{\pm\tau|\mathrm{Im}(\lambda_n)|}\omega_n \right)_n \right)$$

vérifie la condition (M_q) de McPhail, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dans le demi-plan correspondant. Alors, Λ est $\omega-$interpolante dans $PW^p_{\tau+\epsilon}$, quelque soit $\epsilon > 0$.

Preuve. Exactement comme précédemment, on fixe $\epsilon > 0$ et on prend une suite à support fini $(a_n)_{n\geq 1}$. On considère la solution du problème d'interpolation (1.18) donnée par

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\omega_n} f_n(z) H_\epsilon (z - \lambda_n) .$$

On pourrait, comme on l'a fait pour la preuve du Théorème 2.2.1, découper cette somme en deux parties, puis estimer les normes (séparément) sur un axe qui ne rencontre pas Λ. Au lieu de ça, on préfère supposer que $\Lambda \subset \mathbb{C}_1^+$, ce qui allège considérablement la démonstration. Posons encore

$$G_{\lambda_n,\epsilon}(z) = e^{i(\tau+\epsilon)z} (z - \lambda_n) f_n(z) H_\epsilon (z - \lambda_n) \in H_+^\infty .$$

Si B désigne le produit de Blaschke associé à Λ, on écrit

$$G_{\lambda_n,\epsilon} = BG^0_{\lambda_n,\epsilon}$$

avec $G^0_{\lambda_n,\epsilon}$ toujours dans H_+^∞. Pour les mêmes raisons de dualité (on renvoie encore à l'Annexe A.3) il nous suffit d'estimer $\sup \left\{ N(h) : \ h \in H_+^q, \ \|h\|_q = 1 \right\}$, où

$$N(h) := \left| \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\omega_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G^0_{\lambda_n,\epsilon}(x)\, h(x)}{x - \lambda_n} dx \right| .$$

La formule de Cauchy donne alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G^0_{\lambda_n,\epsilon}(x)\, h(x)}{x - \lambda_n} dx \right| &= \left| G^0_{\lambda_n,\epsilon}(\lambda_n)\, h(\lambda_n) \right| \\ &= \frac{|2\mathrm{Im}(\lambda_n)|}{\vartheta_n} e^{-(\tau+\epsilon)|\mathrm{Im}(\lambda_n)|} \left| h(\lambda_n) \right| , \end{aligned}$$

et, en appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$N(h) \lesssim \left(\sum_{n\geq 1} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n\geq 1} \frac{|\mathrm{Im}(\lambda_n)|^q}{\vartheta_n^q \omega_n^q} e^{-q(\tau+\epsilon)|\mathrm{Im}(\lambda_n)|} \left| h(\lambda_n) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Par hypothèse, la condition de McPhail est satisfaite dans $\mathbb{C}^+$, et donc $\nu_{\Lambda,\omega}$ est une mesure de Carleson dans $\mathbb{C}^+$. Par conséquent,

$$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{|\mathrm{Im}(\lambda_n)|^q}{\vartheta_n^q \omega_n^q e^{q\tau|\mathrm{Im}(\lambda_n)|}} \left| h(\lambda_n) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \|h\|_q = 1.$$

Mais, comme

$$e^{-q\epsilon|\mathrm{Im}(\lambda_n)|} \leq 1,$$

on obtient

$$\sup \left\{ N(h) : \ h \in H_+^q, \ \|h\|_q = 1 \right\} \lesssim \|a\|_{l^p} ,$$

ce qui termine la preuve. □

Ce résultat nous permettra une application en théorie du contrôle (voir Section 4.3.2).

Remarque 2.3.2. On pourrait également définir la notion de faible $\omega-$interpolation et se demander si elle entraînerait, comme dans le cas général (avec $\omega_n = \|k_{\lambda_n}\|^{-1}$), la $\omega-$interpolation "forte" dans un espace plus grand. Plus généralement, on pourrait définir une notion de $\omega-$minimalité uniforme (dans l'espace de Hardy) et essayer de voir si cela impliquerait nécessairement la condition de Mc Phail sur le couple (Λ, ω), comme c'est le cas, par le théorème de Shapiro-Shields, quand $\omega_n = \|k_{\lambda_n}\|^{-1}$. Néanmoins, ceci ne semble pas aisé à démontrer et la question reste donc ouverte à ma connaissance.

Chapitre 3

Différences Divisées et Opérateur de Restriction dans les espaces de Paley-Wiener

Le but de ce chapitre est de généraliser le résultat de Lyubarskii-Seip ([LS97]) à des réunions finies de suites de Carleson. Pour cela, nous avons besoin d'introduire des *différences divisées*. Les différences divisées apparaissent dans plusieurs résultats liés à l'interpolation ou aux propriétés géométriques des familles d'exponentielles (voir par exemple [Va84], [Ha96b], [BNO96] or [AI01]). Le point de vue adopté dans ce chapitre est celui du demi-plan supérieur, ou éventuellement d'un demi-plan du type

$$\mathbb{C}_a^{\pm} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \lesseqgtr a\}.$$

On remarque qu'on trouve différentes définitions de ces différences divisées, qui dépendent en réalité de la *métrique* utilisée. On commence donc par donner la définition dans le cas de la métrique pseudo-hyperbolique, puis on introduit les différences divisées dites euclidiennes. Enfin, on fera un lien entre ces deux définitions et on verra que dans le cas particulier où les points sont dans une même bande horizontale (parrallèle à l'axe réel), les deux définitions sont équivalentes.

Les différences divisées nous permettront de définir l'*espace des traces* $PW_\tau^p|\Lambda$, c'est à dire un espace de suites qui sera l'image de l'opérateur de restriction $R_\Lambda :\ f \in PW_\tau^p \mapsto (f(\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ pour une suite de nombres complexes Λ supposée $N-$Carleson et vérifiant différentes propriétés qui seront spécifiées dans une prochaine section de ce chapitre.

3.1 Différences Divisées Pseudo-Hyperboliques

On commence par rappeler la définition du facteur de Blaschke dans le demi-plan $\mathbb{C}_a^{\pm}$ que l'on note

$$b_\mu^{\pm,a}(z) = \frac{z-\mu}{z-\overline{\mu}-2ia}.$$

(On remarque en particulier que ce facteur est le même dans le demi-plan inférieur ou supérieur). La distance pseudo-hyperbolique associée sera notée

$$\rho_{\pm,a}(z,\mu) := \left|b_\mu^{\pm,a}(z)\right|.$$

En particulier, afin d'alléger les notations, dans $\mathbb{C}^+$, on écrira simplement $b_\mu = b_\mu^{+,0}$ et on utilisera ρ pour $\rho_{+,0}$ et $\rho_{-,0}$.

Les définitions et propriétés qui vont suivre sont établies dans $\mathbb{C}^+$ mais naturellement les résultats restent vrais dans les autres demi-plans, avec les notations adaptées.

Définition 3.1.1. Soit $\Gamma := \{\mu_i : 1 \leq i \leq |\Gamma|\} \subset \mathbb{C}^+$ un ensemble fini. Soit également $a = \{a_i\}_{1\leq i\leq|\Gamma|}$ un autre ensemble fini. On définit la suite des *différences divisées (pseudo-hyperboliques)* de a relativement à Γ par

$$\Delta_\Gamma^0(a_i) := a_i, \qquad \Delta_\Gamma^1(a_i, a_j) := \frac{a_j - a_i}{b_{\mu_i}(\mu_j)},$$

et

$$\Delta_\Gamma^k(a_{i_1}, ..., a_{i_{k+1}}) := \frac{\Delta_\Gamma^{k-1}(a_{i_1}, ..., a_{i_{k-1}}, a_{i_{k+1}}) - \Delta_\Gamma^{k-1}(a_{i_1}, ..., a_{i_k})}{b_{\mu_{i_k}}(\mu_{i_{k+1}})}.$$

Toujours dans le but de simplifier les notations, on introduit une notation vectorielle, qu'on utilisera par la suite. En effet, on notera

$$a_i^{(k+1)} := \left(a_{i_1}, ..., a_{i_{k+1}}\right) \text{ et donc } \Delta_\Gamma^k\left(a_i^{(k+1)}\right) = \Delta_\Gamma^k(a_{i_1}, ..., a_{i_{k+1}}).$$

Le premier lemme nous permet d'obtenir les différences divisées d'un produit en fonction des produits des différences divisées d'ordres inférieurs.

Lemme 3.1.2. *On a l'égalité suivante*

$$\Delta_\Gamma^{j-1}\left(a_{i_1}b_{i_1}, ..., a_{i_j}b_{i_j}\right) = \sum_{l=0}^{j-1} \Delta_\Gamma^l\left(a_{i_1}, .., a_{i_{l+1}}\right) \Delta_\Gamma^{j-l-1}\left(b_{i_{l+1}}, ..., b_{i_j}\right).$$

Pour la preuve, on renvoit à [BNO96] où le calcul est fait dans $\mathbb{D}$, mais le résultat reste vrai dans $\mathbb{C}^+$.

Si Γ est à l'intérieur d'un compact K et que $a = \{f(\mu) : \mu \in \Gamma\}$ pour une fonction f, analytique et bornée and K. Ici K est supposé être l'adhérence d'un ouvert connexe non vide. On rappelle qu'on dit que $f \in H^\infty(K)$ si f est holomorphe dans l'intérieur de K et que

$$\|f\|_{\infty,K} := \sup_{z\in K} |f(z)| < \infty.$$

Pour une telle fonction, on notera naturellement

$$f\left(\mu^{(j+1)}\right) = (f(\mu_1), ..., f(\mu_{j+1})).$$

On montre le résultat suivant.

Lemme 3.1.3. *On suppose que $\Gamma \subset K$, où est un compact possédant les propriétés précédentes, et qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\rho(\Gamma, \partial K) \geq \eta$. Alors, pour chaque fonction $f \in H^\infty(K)$, on a, en notant $N = |\Gamma|$,*

$$\left|\Delta_\Gamma^j\left(f(\mu^{(j+1)})\right)\right| \leq \left(\frac{2}{\eta}\right)^j \prod_{k=0}^{j}\left(\frac{1}{1-\frac{k}{2N}}\right)\|f\|_{\infty,K}.$$

Preuve. Introduisons, pour $0 \leq j \leq N-1$, les sous-ensembles de K définis par

$$A_j := \left\{ z \in K : \ \rho(z, \partial K) \geq \frac{j}{2N}\eta \right\}.$$

On montre par récurrence sur j que pour tout $z \in A_j$,

$$\left| \Delta_\Gamma^j \left(f(\mu^{(j)}, z) \right) \right| \leq c_j \left\| f \right\|_{\infty, K}$$

avec le coefficient c_j qui convient. Comme $\Gamma \subset A_{N-1} \subset \ldots \subset A_1 \subset A_0$, cela implique le résultat. Ceci est clairement vrai pour $j = 0$ du fait que $A_0 = K$ et que $f \in H^\infty(K)$. De plus, la fonction

$$z \mapsto \Delta_\Gamma^{j+1} \left(f \left(\mu^{(j)}, z \right) \right)$$

est holomorphe dans A_{j+1} et, par le principe du maximum et la définition des différences divisées, on a, pour $z \in A_{j+1}$,

$$\left| \Delta_\Gamma^{j+1} \left(f \left(\mu^{(j+1)}, z \right) \right) \right| \leq \sup_{\xi \in \partial A_{j+1}} \left| \frac{\Delta_\Gamma^j \left(f \left(\mu^{(j)}, \xi \right) \right) - \Delta_\Gamma^j \left(f(\mu^{(j+1)}) \right)}{\rho(\xi, \mu_{j+1})} \right|. \tag{3.1}$$

Soit alors $\xi \in \partial A_{j+1}$. Il est possible de trouver un point$\zeta \in \partial K$ tel que

$$\rho(\zeta, \xi) = \left(\frac{j+1}{2N} \right) \eta$$

et donc, comme $\mu_{j+1} \in \Gamma$ et que $\rho(\Gamma, \partial K) \geq \eta$, l'inégalité triangulaire nous donne

$$\rho(\xi, \mu_{j+1}) \geq \rho(\zeta, \mu_{j+1}) - \rho(\xi, \zeta) \geq \eta \left(1 - \frac{j+1}{2N} \right). \tag{3.2}$$

Des relations (3.1), (3.2) et de l'hypothèse de réccurence, on déduit finalement que

$$\left| \Delta_\Gamma^{j+1} \left(f(\mu^{(j+1)}, \xi) \right) \right| \leq \frac{2}{\eta} \left(\frac{1}{1 - \frac{j+1}{2N}} \right) c_j \left\| f \right\|_{\infty, K}$$

ce qui nous donne l'inégalité recherchée. □

Le prochain lemme s'avèrera très utile ; on peut définit une fonction rationnelle, de type interpolation de Newton, qui interpole les valeurs $\{a(\mu) : \ \mu \in \Gamma\}$ sur Γ.

Lemme 3.1.4. *La fonction holomorphe*

$$P_{\Gamma,a}(z) := \sum_{k=1}^{|\Gamma|} \Delta_\Gamma^{k-1} \left(a(\mu^{(k)}) \right) \prod_{l=1}^{k-1} b_{\mu_l}(z)$$

satisfait

$$P_{\Gamma,a}(\mu) = a(\mu), \qquad \mu \in \Gamma.$$

La preuve est un peu laborieuse et on renvoit donc à [Ha96a, p.80].

3.2 Différences Divisées Euclidiennes

Comme on l'a signalé précédemment, les différences divisées dites pseudo-hyperboliques apparaissent entre autres dans [BNO96, Ha96b, Va84] mais il est possible d'en construire d'autres, à l'aide de la distance euclidienne. C'est ce qui est fait en particulier dans [AI01].

Définition 3.2.1. On définit la suite des *différences divisées (euclidiennes)* de a relativement à Γ par

$$\square_\Gamma^0 := a_i, \qquad \square_\Gamma^1 (a_i, a_j) := \frac{a_j - a_i}{\mu_j - \mu_i},$$

et

$$\square_\Gamma^k \left(a_{i_1}, .., a_{i_{k+1}}\right) := \frac{\square_\Gamma^{k-1} \left(a_{i_1}, .., a_{i_{k-1}}, a_{i_{k+1}}\right) - \square_\Gamma^{k-1} \left(a_{i_1}, .., a_{i_k}\right)}{\mu_{k+1} - \mu_k}.$$

Remarque 3.2.2. On voit aisément, en remplaçant la métrique pseudo-hyperbolique par la métrique euclidienne que les lemmes 3.1.2 et 3.1.3 restent vrais pour les différences divisées euclidiennes. De plus, on a l'analogue du Lemme 3.1.4 en considérant la fonction holomorphe

$$Q_{\Gamma,a}(z) := \sum_{k=1}^{|\Gamma|} \square_\Gamma^{k-1} \left(a(\mu^{(k)})\right) \prod_{l=1}^{k-1} (z - \mu_l)\,,$$

qui n'est rien d'autre que le polynôme d'interpolation de Newton.

On constate que dans chacune des définitions (pseudo-hyperbolique et euclidienne), la $k-$ième différence divisée est une **combinaison linéaire** des a_{i_j}, $1 \leq j \leq k$ dont les coefficients dépendent bien sûr des μ_{i_j}, $1 \leq j \leq k$. En particulier, dans le cas des différences divisées euclidiennes, on a l'écriture explicite, parfois très utile, de ces coefficients :

$$\square_\Gamma^k \left(a_i^{(k+1)}\right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_{i_j}}{\prod\limits_{\substack{1 \leq l \leq k \\ k \neq j}} \left(\mu_{i_j} - \mu_{i_l}\right)}. \tag{3.3}$$

De plus, on a aussi la formule suivante, pour $a = \{a_i : 1 \leq i \leq |\Gamma|\}$ et $b = \{b_i : 1 \leq i \leq |\Gamma|\}$,

$$\sum_{i=1}^{|\Gamma|} a_i b_i = \sum_{k=1}^{|\Gamma|} \square_\Gamma^{k-1} \left(a^{(k)}\right) \sum_{j=k}^{|\Gamma|} \left(\prod_{l<k} (\mu_j - \mu_l) \right) b_j.$$

On peut se demander quel est le lien entre ces différentes définitions. C'est l'objet de la proposition suivante. On note

$$\Pi_\Gamma^{(n)}(z) := \prod_{j<n} \left(z - \overline{\mu}_j\right).$$

Proposition 3.2.3. *On a les formules suivantes*

$$\square_\Gamma^{k-1} \left(a^{(k)}\right) = \sum_{j=0}^{k-2} \square_\Gamma^j \left(\frac{1}{\Pi_\Gamma^{(k-j)}(\mu_{k-j})}, .., \frac{1}{\Pi_\Gamma^{(k-j)}(\mu_k)} \right) \Delta_\Gamma^{k-j-1} \left(a^{(k-j)}\right) \tag{3.4}$$

et

$$\Delta_\Gamma^{k-1} \left(a^{(k)}\right) = \sum_{j=0}^{k-2} \Delta_\Gamma^j \left(\Pi_\Gamma^{(k-j)}(\mu_{k-j}), .., \Pi_\Gamma^{(k-j)}(\mu_k)\right) \square_\Gamma^{k-j-1} \left(a^{(k-j)}\right). \tag{3.5}$$

Preuve. On montre ces deux formules par récurrence sur k. Nous nous restreindrons ici à la preuve de (3.4), la démonstration de (3.5) étant tout à fait semblable.

$$\square_\Gamma^1(a_i, a_j) = \frac{a_j - a_i}{\mu_j - \mu_i} = \frac{1}{\mu_j - \overline{\mu}_i} \Delta_\Gamma^1(a_i, a_j).$$

D'après la définition et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}
\square_\Gamma^k\left(a^{(k+1)}\right) &= \frac{\square_\Gamma^{k-1}(a_1, .., a_{k-1}, a_{k+1}) - \square_\Gamma^{k-1}(a_1, .., a_k)}{\mu_{k+1} - \mu_k} \\
&= \frac{1}{\mu_{k+1} - \mu_k}\left(\frac{1}{\Pi_\Gamma^{(k)}(\mu_{k+1})}\Delta_\Gamma^{k-1}(a_1, .., a_{k-1}, a_{k+1})\right. \\
&+ \sum_{j=1}^{k-2} \square_\Gamma^j\left(\frac{1}{\Pi_\Gamma^{(k-j)}(\mu_{k-j})}, .., \frac{1}{\Pi_\Gamma^{(k-j)}(\mu_{k-1})}, \frac{1}{\Pi_\Gamma^{(k-j)}(\mu_{k+1})}\right)\Delta_\Gamma^{k-j-1}\left(a^{(k-j)}\right) \\
&- \frac{1}{\Pi_\Gamma^{(k)}(\mu_k)}\Delta_\Gamma^{k-1}\left(a^{(k)}\right) \\
&- \left.\sum_{j=1}^{k-2} \square_\Gamma^j\left(\frac{1}{\Pi_\Gamma^{(k-j)}(\mu_{k-j})}, .., \frac{1}{\Pi_\Gamma^{(k-j)}(\mu_k)}\right)\Delta_\Gamma^{k-j-1}\left(a^{(k-j)}\right)\right).
\end{aligned}$$

Mais alors,

$$\frac{1}{\mu_{k+1} - \mu_k}\left(\frac{1}{\Pi_\Gamma^{(k)}(\mu_{k+1})}\Delta_\Gamma^{k-1}(a_1, .., a_{k-1}, a_{k+1})\right) = \frac{\Delta_\Gamma^k\left(a^{(k+1)}\right)}{\Pi_\Gamma^{(k+1)}(\mu_{k+1})} + \left(\frac{1}{\mu_{k+1} - \mu_k}\right)\frac{\Delta_\Gamma^{k-1}\left(a^{(k)}\right)}{\Pi_\Gamma^{(k)}(\mu_{k+1})}.$$

En notant $\mu_k^{(2)} = (\mu_k, \mu_{k+1})$, on voit donc que

$$\frac{\Delta_\Gamma^{k-1}(a_1, .., a_{k-1}, a_{k+1})}{(\mu_{k+1} - \mu_k)\Pi_\Gamma^{(k)}(\mu_{k+1})} = \frac{\Delta_\Gamma^k\left(a^{(k+1)}\right)}{\Pi_\Gamma^{(k+1)}(\mu_{k+1})} + \square_\Gamma^1\left(\frac{1}{\Pi_\Gamma^{(k)}}\left(\mu_k^{(2)}\right)\right)\Delta_\Gamma^{k-1}\left(a^{(k)}\right).$$

Enfin, pour $1 \leq j \leq k-2$, le coefficient devant $\Delta_\Gamma^{k-j-1}\left(a^{(k-j)}\right)$ est exactement

$$\square_\Gamma^{j+1}\left(\frac{1}{\Pi_\Gamma^{(k-j)}(\mu_{k-j})}, ..., \frac{1}{\Pi_\Gamma^{(k-j)}(\mu_{k+1})}\right).$$

Une réindexation sur j permet d'obtenir le résultat voulu. $\square$

Cette proposition nous permet d'établir une équivalence entre les deux types de différences divisées dans le cas où Γ est inclus dans une bande parallèle à l'axe réel. Plus précisément, on note

$$S_{\alpha,\beta} := \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \mathrm{Im}(z) < \beta\},$$

et on a les estimations suivantes.

Proposition 3.2.4. *On suppose qu'il existe $0 < \alpha < \beta < \infty$ tels que $\Gamma \subset S_{\alpha,\beta}$. Alors, il existe $c_1, c_2 > 0$ ne dépendant uniquement que de $\alpha, \beta, |\Gamma|$ et $diam(\Gamma)$ tels que on ait*

$$\sup_{j,k}\left|\Delta_\Gamma^j\left(\Pi_\Gamma^{(k-j)}(\mu_{k-j}), ..., \Pi_\Gamma^{(k-j)}(\mu_k)\right)\right| \leq c_1$$

et

$$\sup_{j,k}\left|\square_\Gamma^j\left(\frac{1}{\Pi_\Gamma^{(k-j)}(\mu_{k-j})},...,\frac{1}{\Pi_\Gamma^{(k-j)}(\mu_k)}\right)\right|\leq c_2.$$

On déduit directement des propositions 3.2.3 et 3.2.4 le résultat suivant.

Corollaire 3.2.5. *On suppose qu'il existe* $0<\alpha<\beta<\infty$ *tels que* $\Gamma\subset S_{\alpha,\beta}$. *Alors, il existe deux constantes* c_1 *et* c_2 *ne dépendant de que* $\alpha,\beta,|\Gamma|$ *et diam*(Γ) *telles que pour tout* $a=\{a_i:\ 1\leq i\leq|\Gamma|\}$ *et pour tout* j*, on a*

$$c_1\left|\square_\Gamma^{j-1}\left(a^{(j)}\right)\right|\leq\left|\Delta_\Gamma^{j-1}\left(a^{(j)}\right)\right|\leq c_2\left|\square_\Gamma^{j-1}\left(a^{(j)}\right)\right|.$$

3.3 Différences Divisées et suites $N-$Carleson

Les résultats de cette section ont été établis dans le disque unité $\mathbb{D}$ ([Ha96b]). C'est dans ce contexte que nous les énonçons afin de pouvoir en fin de section les transférer dans le demi-plan. Nous gardons les mêmes notations pour les différences divisées pseudo-hyperboliques du disque en espérant que le lecteur saura faire la distinction.

Les différences divisées permettent de décrire l'espace des traces $H^p|\Lambda$ dans le cas où Λ est une réunion finie de suite de Carleson. Plus précisément, on a vu dans la section 1.4 que si

$$\Lambda=\bigcup_{i=1}^N\Lambda^i,$$

avec chaque Λ^i vérifiant la condition de Carleson, alors on peut en fait écrire

$$\Lambda=\biguplus_{n\geq1}\sigma_n$$

où $|\sigma_n|\leq N$, $n\geq1$ et la suite des produits de Blaschke associée aux σ_n, notée$(B_{\sigma_n})_{n\geq1}$, vérifie la condition de Carleson généralisée (1.20). En particulier, on a aussi

$$\sup_{n\geq1}\operatorname{diam}_\rho(\sigma_n)<\infty.$$

On va donc contruire des différences divisées relativement aux ensembles σ_n. On note

$$\sigma_n=\{\lambda_{n,k}:\ 1\leq k\leq|\sigma_n|\}\ \text{ et }\ \lambda_n^{(k)}=(\lambda_{n,1},...,\lambda_{n,k}).$$

Choisissons $\lambda_{n,0}$ de manière arbitraire dans σ_n, $n\geq1$. On rappelle que $\Lambda\subset\mathbb{D}$. Pour $a=(a(\lambda))_{\lambda\in\Lambda}\in\mathbb{C}^\Lambda$, on introduit

$$\|a\|_{X^p(\Lambda)}^p:=\sum_{n\geq1}\left(1-|\lambda_{n,0}|^2\right)\sum_{k=1}^{|\sigma_n|}\left|\Delta_{\sigma_n}^{k-1}a\left(\lambda_n^{(k)}\right)\right|^p,\qquad 1\leq p<\infty$$

et

$$\|a\|_{X^\infty(\Lambda)}:=\sup_{n\geq1}\sum_{k=1}^{|\sigma_n|}\left|\Delta_{\sigma_n}^{k-1}a\left(\lambda_n^{(k)}\right)\right|,$$

qui permettent de définir les espaces

$$X^p(\Lambda) := \left\{ a \in \mathbb{C}^\Lambda : \ \|a\|_{X^p(\Lambda)} < \infty \right\}.$$

On peut donc énoncer le résultat, dû à A. Hartmann pour $1 \le p < \infty$ et à V. Vasyunin pour $p = \infty$. (Voir aussi [BNO96])

Théorème 3.3.1. *([Va84], [Ha96b]) Soit $\Lambda \subset \mathbb{D}$ une suite $N-$Carleson dont on fait la décomposition précédente. Alors,*

$$H^p|\Lambda = X^p(\Lambda).$$

On va alors énoncer une version de ce théorème dans le cadre qui nous intéresse, c'est à dire celui d'un demi-plan $\mathbb{C}_a^\pm$. Les différences divisées sont donc celles construites avec la métrique pseudo-hyperbolique du demi-plan correspondant. On considère alors une suite $\Lambda \subset \mathbb{C}_a^\pm$ supposée $N-$Carleson, qui peut encore s'écrire comme la réunion (disjointe) des σ_n. Comme précédemment, on choisit $\lambda_{n,0}$ arbitrairement dans σ_n, $n \ge 1$ et on introduit l'espace

$$X_{\pm a}^p(\Lambda) := \left\{ a = (a(\lambda))_{\lambda\in\Lambda} : \ \sum_{n\ge 1} |\mathrm{Im}(\lambda_{n,0}) - a| \sum_{k=1}^{|\sigma_n|} \left|\Delta_{\sigma_n}^{k-1} a\left(\lambda_n^{(k)}\right)\right|^p < \infty \right\}$$

afin de pouvoir établir le corollaire suivant, dont la preuve se trouve en Appendice A.2.

Corollaire 3.3.2. *Soient $1 < p < \infty$ et $\Lambda \subset \mathbb{C}_a^\pm$ une suite $N-$Carleson dont on fait la décomposition précédente. Alors, l'opérateur R_Λ est (continu) et surjectif de $H^p(\mathbb{C}_a^\pm)$ sur $X_\pm^p(\Lambda)$.*

3.4 Opérateur de Restriction sur les espaces PW_τ^p pour des suites $N-$Carleson

Cette section reprend en détail des résultats soumis à la publication ([Gau11a]). On considère une suite Λ dans le plan complexe. Dans toute cette section, on supposera qu'il existe un entier positif $N \ge 1$ tel que pour tout nombre $a \in \mathbb{R}$, la suite $\Lambda_a^\pm := \Lambda \cap \mathbb{C}_a^\pm$ est $N-$Carleson dans le demi-plan correspondant. En particulier, on a vu qu'on peut alors écrire

$$\Lambda_a^\pm = \biguplus_{n\ge 1} \sigma_{n,a}^\pm,$$

où, $B_{\sigma_{n,a}^\pm}^{\pm,a}$ désignant le produit de Blaschke dans $\mathbb{C}_a^\pm$ s'annulant sur $\sigma_{n,a}^\pm$, la suite $\left(B_{\sigma_{n,a}^\pm}^{\pm,a}\right)_{n\ge 1}$ vérifie la condition de Carleson généralisée. Pour alléger les notations, nous omettrons le a si $a = 0$ et on écrira donc

$$\sigma_n := \begin{cases} \sigma_{n+1}^+, & n \ge 0 \\ \sigma_n^-, & n < 0 \end{cases}.$$

Le lecteur remarquera que σ_n^+ et σ_m^- peuvent être extremement proches pour certaines valeurs de m et n. Ce cas sera éclairci ci-dessous. Nous distinguerons les ensembles de points qui sont proches de l'axe réel et ceux qui en sont loin.

Fixons $\epsilon \in (0,1)$ pour ce qui suit.

On peut supposer (voir Remarque 1.4.3) que

$$\rho_0 := \sup_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{diam}_\rho(\sigma_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

(Remarquons que ρ_0 est bien défini grâce à la condition de Carleson généralisée). Introduisons alors

$$M_{\epsilon,\infty} := \{n \in \mathbb{Z} : \ \sigma_n \cap \{|\mathrm{Im}(z)| < \epsilon\} = \emptyset\},$$

$$\Lambda_{\epsilon,\infty} := \biguplus_{n\in M_{\epsilon,\infty}} \sigma_n$$

(correspondant à l'ensemble des points dont les paquets ne rencontrent pas la bande précédente) et

$$\Lambda_\epsilon := \Lambda \setminus \Lambda_{\epsilon,\infty}.$$

Remarquons que Λ_ϵ contient les points de Λ inclus dans l'axe réel, contrairement à $\Lambda^+ \cup \Lambda^-$. Remarquons aussi que

$$\Lambda_\epsilon \subset \{z \in \mathbb{C} : \ |\mathrm{Im}\,(z)| < 3\epsilon\}.$$

En effet, si $\lambda \in \Lambda_\epsilon$ alors ou bien $\lambda \in \mathbb{R}$ ou bien il existe $n_\lambda \in M_{\epsilon,\infty}$ tel que $\lambda \in \sigma_{n_\lambda}$. Par conséquent, il existe $\mu \in \sigma_{n_\lambda}$ tel que $|\mathrm{Im}\,(\mu)| < \epsilon$. Il suit que

$$\begin{aligned} |\lambda-\mu| &= \frac{|\lambda-\mu|}{|\lambda-\overline{\mu}|}\,|\lambda-\overline{\mu}| \\ &\le \rho_0\,(2\,|\mathrm{Im}\,(\mu)| + |\lambda-\mu|) \\ &\le \frac{3}{2}\epsilon^2 < \frac{3}{2}\epsilon, \end{aligned}$$

ce qui implique que $|\mathrm{Im}\,(\lambda)| < \frac{5}{2}\epsilon$. Mais alors, comme Λ_ϵ est $N-$Carleson dans le demi-plan $\mathbb{C}^+_{-3\epsilon}$ (et est contenue dans une bande parallèle à l'axe $\{\mathrm{Im}\,(z) = -3\epsilon\}$ de largueur finie et loin de ce même axe), la condition de Carleson généralisée permet d'écrire

$$\Lambda_\epsilon = \biguplus_{n\ge 1} \sigma_n^{'},$$

avec

$$\rho_0^{'} := \sup_{n\ge 1}\left(\operatorname{diam}\left(\sigma_n^{'}\right)\right) < \frac{\epsilon}{2}$$

et la contrainte supplémentaire que pour un certain $\delta > 0$, les ensembles

$$\Omega_n := \left\{ z \in \mathbb{C} : \ \prod_{\lambda\in\sigma_n'} |z-\lambda| \le \delta \right\}, \quad n \ge 1,$$

vérifient

$$\inf_{n\ne m} d\,(\Omega_n, \Omega_n) > 0. \tag{3.6}$$

Tout ceci est possible au vu des Remarques 1.4.3 et 1.4.5 et tout particulièrement 1.23. Par conséquent,

$$\Lambda = \left(\biguplus_{n\in M_{\epsilon,\infty}} \sigma_n\right) \uplus \left(\biguplus_{n\ge 1} \sigma_n^{'}\right) =: \biguplus_{n\in\mathbb{Z}} \tau_n.$$

Ayant distingué les ensembles de points proches et loin de l'axe réel, on va utiliser les deux types de différences divisées, précédemment définies. On notera

$$\tilde{\Delta}_{\tau_n} := \begin{cases} \Delta_{\tau_n}, & \text{si } \exists k \text{ tel que } \tau_n = \sigma_k \\ \square_{\tau_n}, & \text{si } \exists k \text{ tel que } \tau_n = \sigma_k^{'} \end{cases}.$$

Il nous est maintenant possible d'introduire un espace de suites qui sera, sous certains hypothèses sur la suite Λ qui seront établies ci-après, l'espace des traces $PW_\tau^p|\Lambda$ ou autrement dit l'image de l'opérateur R_Λ. En choisissant arbitrairement $\lambda_{n,0} \in \tau_n$, $n \in \mathbb{Z}$, on définit, pour $1 < p < \infty$ et $\tau > 0$,

$$X_\tau^p(\Lambda) := \left\{ a = (a(\lambda))_{\lambda \in \Lambda} : \; \|a\|_{X_\tau^p(\Lambda)} < \infty \right\},$$

avec

$$\|a\|^p_{X_\tau^p(\Lambda)} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |\mathrm{Im}\,(\lambda_{n,0})|) \sum_{k=1}^{|\tau_n|} \left| \tilde{\Delta}_{\tau_n}^{k-1} \left(a e^{\pm i\tau \cdot} \left(\lambda_n^{(k)} \right) \right) \right|^p,$$

et

$$e^{\pm i\tau\lambda} = \begin{cases} e^{i\tau\lambda}, & \text{si } \lambda \in \tau_n \text{ pour } n \in N_+, \\ e^{-i\tau\lambda}, & \text{si } \lambda \in \tau_n \text{ pour } n \in N_-, \end{cases}$$

où

$$N_+ := \left\{ n \in \mathbb{Z} : \; \tau_n \cap \left(\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R} \right) \neq \emptyset \right\}$$

et

$$N_- := \mathbb{Z} \setminus N_+.$$

Le lecteur aura remarqué que proche de l'axe réel, le facteur $e^{\pm i\tau\lambda}$ n'a pas vraiment d'importance. Toujours relativement au découpage précédent, on introduit, pour $n \in \mathbb{Z}$, les produits $p_n(x) := \prod_{\lambda \in \tau_n} |x - \lambda|$, qui permettent de définir la fonction

$$d_N(x) := \inf_{n \in \mathbb{Z}} p_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

3.4.1 Les hypothèses (H_N) et le théorème principal

Les constructions du paragraphe précédent nous permettent d'introduire des conditions sur Λ qui seront nécessaires et suffisantes pour caractériser l'espace des traces $PW_\tau^p|\Lambda$. On dit que la suite Λ satisfait (H_N) si les trois conditions suivantes sont vérifiées.

- (i) La suite Λ est *relativement dense* : il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $d(x, \Lambda) < \epsilon_0$, $x \in \mathbb{R}$.

Dans toute la suite, on utilisera la décomposition du paragraphe précédent avec $\epsilon < \min{(\epsilon_0, 1)}$:

$$\Lambda = \Lambda_{\epsilon_0} \uplus \Lambda_{\epsilon_0, \infty}.$$

- (ii) La limite

$$S(z) := \lim_{R \to \infty} \prod_{|\lambda| < R} \left(1 - \frac{z}{\lambda} \right)$$

existe et définit une fonction entière de type exponentiel τ.

- (iii) La fonction $x \mapsto \left(\frac{|S(x)|}{d_N(x)} \right)^p$ satisfait la condition de Muckenhoupt continue (A_p).

On verra dans la suite que la condition (iii) peut être remplacée par la condition $(iii)'$ qui se formule comme suit.

- $(iii)'$ Il existe une sous suite $\Gamma = \{\gamma_n : n \geq 1\}$ de Λ, relativement dense, telle que, si σ_{γ_n} désigne le paquet τ_n contenant γ_n, la suite
$$\left(\frac{|S(\gamma_n)|^p}{\prod_{\substack{\lambda \in \sigma_{\gamma_n} \\ \lambda \neq \gamma_n}} |\lambda - \gamma_n|^p} \right)_{n \geq 1}$$
satisfasse la condition de Muckenhoupt discrète $(\mathfrak{A}_p)$ (voir 1.17).

Il est clair que pour $N = 1$, $d_1(x) = d(x, \Lambda)$ et donc l'association de la condition de Carleson et des conditions formant (H_1) correspond exactement aux conditions (LS) du Théorème 1.3.14 de Lyubarskii et Seip.

Remarque 3.4.1. La condition de relative densité $(H_N) - (i)$ implique que
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} d_N(x) < \infty.$$
Il est clair que l'infimum définissant d_N est en fait un minimum. Comme
$$\delta_0' = \inf_{m \neq n} d\left(\sigma_m', \sigma_n'\right) > 0,$$
et que, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, il existe $n_x \geq 1$ tel que $d_N(x) = p_{n_x}(x)$ et on peut alors remarquer que
$$\inf_{x \in \mathbb{R}} \inf_{m \neq n_x} p_m(x) \geq \left(\frac{\delta_0'}{2}\right)^N > 0.$$
En effet, pour $x \in \mathbb{R}$ et $m \neq n_x$, si $p_m(x) < \left(\frac{\delta_0'}{2}\right)^N$, alors il existe $\lambda_1 \in \sigma_m'$ tel que
$$|x - \lambda_1| < \frac{\delta_0'}{2},$$
ce qui implique que, pour $\lambda \in n_x$, on a
$$|x - \lambda| \geq |\lambda - \lambda_1| - |x - \lambda_1| \geq \delta_0' - \frac{\delta_0'}{2} = \frac{\delta_0'}{2}$$
et il suit que
$$p_m(x) \geq p_{n_x}(x) \geq \left(\frac{\delta_0'}{2}\right)^N$$
par définition de l'infimum. Cette contradiction nous donne bien l'inégalité voulue.

Il est maintenant possible d'énoncer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.4.2. *Soient $1 < p < \infty$, $N \geq 1$ et Λ une suite de nombres complexes telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\Lambda_a^{\pm}$ soit $N-$Carleson dans le demi-plan correspondant. Alors, R_Λ est un isomorphisme entre PW_τ^p et $X_\tau^p(\Lambda)$ si et seulement si Λ satisfait (H_N).*

Nous nous intéresserons dans une prochaine section à la nécessité de la condition $N-$Carleson. Cela necessitera une approche différente pour définir l'espace des traces qui ici dépend de la condition $N-$Carleson et de la décomposition en paquets $\Lambda = \biguplus_n \tau_n$.

Plus précisément, l'espace $X_\tau^p(\Lambda)$ dépend *a priori* de la partition précédente. Il est possible de définir un espace qui lui est isomorphe et pour lequel ce n'est plus le cas (voir Remarque 3.5.1). Par ailleurs, la définition de la fonction d_N semble elle aussi dépendre des paquets σ_n'. Un argument similaire à la preuve de la Remarque 3.4.1 permet de voir que pour une autre décomposition, la fonction obtenue est équivalente, ainsi les conditions (H_N) ne dépendent pas de la partition $\Lambda = \biguplus_n \tau_n$.

Nous allons faire la preuve de ce résultat en deux temps. On commencera par montrer la necessité de (H_N), puis on montrera que les conditions sont suffisantes.

La démonstration du Théorème 3.4.2 suit les idées principales de l'article de Lyubarskii et Seip ([LS97]) mais nécessite un travail technique important pour caractériser ce cas plus général.

3.4.2 Conditions nécessaires

3.4.2.1 La condition de relative densité (i)

On procède par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite de réels $\{x_j\}_{j\geq 1}$ et une suite de réels strictement positifs $\{r_j\}_{j\geq 1}$ tels que $r_j \to \infty$, $j\to\infty$ et

$$B(x_j, r_j) \cap \Lambda = \emptyset.$$

Considérons alors la suite de fonctions de PW_τ^p définie par

$$f_j(z) := \frac{\sin \tau\,(z-x_j)}{\tau\,(z-x_j)}, \quad z\in\mathbb{C},\ j\geq 1.$$

Comme R_Λ est un isomorphisme, on obtient donc que

$$1 \asymp \|f_j\|_p^p \asymp \|R_\Lambda f_j\|_{X_\tau^p(\Lambda)}^p .$$

Montrons alors que $\|R_\Lambda f_j\|_{X_\tau^p(\Lambda)}^p \longrightarrow 0$, $j\to\infty$, ce qui nous donnera la contradiction désirée. Par définition,

$$\|R_\Lambda f_j\|_{X_\tau^p(\Lambda)}^p = \sum_{n\geq 1} \left(1+|\mathrm{Im}\,(\lambda_{n,0})|\right) \sum_{k=1}^{|\tau_n|} \left|\tilde{\Delta}_{\tau_n}^{k-1}\left(f_j e^{\pm i\tau\cdot}\left(\lambda_n^{(k)}\right)\right)\right|^p .$$

A l'aide du Lemme 3.1.3, on peut voir que, pour $n\geq 1$ et pour tout $1\leq k\leq |\tau_n|$,

$$\left|\tilde{\Delta}_{\tau_n}^{k-1}\left(f_j e^{\pm i\tau\cdot}\left(\lambda_n^{(k)}\right)\right)\right|^p \lesssim \frac{1}{|\lambda_{n,0}-x_j|^p},$$

ce qui entraîne donc que

$$\|R_\Lambda f_j\|_{X_\tau^p(\Lambda)}^p \lesssim \sum_{n\geq 1} \frac{1+|\mathrm{Im}\,(\lambda_{n,0})|}{|\lambda_{n,0}-x_j|^p}.$$

Or, $p>1$ donc il existe $\alpha>0$ tel que $p-\alpha>1$. Rappelons que $|\lambda_{n,0}-x_j|\geq r_j$ et écrivons

$$\|R_\Lambda f_j\|^p_{X^p_\tau(\Lambda)} \lesssim \frac{1}{r_j^\alpha}\sum_{n\geq 1}\frac{1+|\mathrm{Im}\,(\lambda_{n,0})|}{|\lambda_{n,0}-x_j|^{p-\alpha}}.$$

On découpe alors cette somme en deux parties en écrivant $\{\lambda_{n,0}:\ n\geq 1\}=A^+\uplus A^-$, où

$$A^+\subset\left(\mathbb{C}^+\cup\mathbb{R}\right)\subset\mathbb{C}^+_{-\frac{1}{2}}$$

et

$$A^-\subset\mathbb{C}^-\subset\mathbb{C}^-_{\frac{1}{2}}.$$

Comme $r_j\to\infty$, $j\to\infty$, on a que $|\lambda_{n,0}-x_j|\asymp|\lambda_{n,0}-x_j\pm i|$. Maintenant, les fonctions

$$g^\pm : z\mapsto\frac{1}{z-x_j\pm i}\in H^{p-\alpha}\left(\mathbb{C}^\pm_{\mp\frac{1}{2}}\right).$$

Or, $A^\pm$ est de Carleson dans $\mathbb{C}^\pm_{\mp\frac{1}{2}}$ et donc,

$$\sum_{\lambda\in A^\pm}\frac{1+|\mathrm{Im}\,(\lambda)|}{|\lambda-x_j\pm i|^{p-\alpha}}=\sum_{\lambda\in A^\pm}\frac{1+|\mathrm{Im}\,(\lambda)|}{|g^\pm(\lambda)|^{p-\alpha}}\lesssim\|g\|^{p-\alpha}_{H^{p-\alpha}\left(\mathbb{C}^\pm_{\mp\frac{1}{2}}\right)}\lesssim 1.$$

On obtient bien que

$$\|R_\Lambda f_j\|^p_{X^p_\tau(\Lambda)}\lesssim\frac{1}{r_j^\alpha}\to 0, j\to\infty,$$

qui est la contradiction annoncée, ce qui termine notre démonstration de la relative densité de Λ.

3.4.2.2 Existence et la série génératrice (ii)

Il est possible que $0\in\Lambda$, auquel cas, supposons que $\lambda_{1,1}=0$. Soit F_1 l'unique antécédent par R_Λ de

$$a_1(\lambda)=\begin{cases}1, & \text{si } \lambda=\lambda_{1,1}\\ 0, & \text{si } \lambda\in\Lambda\setminus\{\lambda_{1,1}\}\end{cases}. \tag{3.7}$$

Alors, on constate que F_1 n'a pas d'autres zéros : si $\mu\in\mathbb{C}\setminus\Lambda$ annule F_1 ou si $\mu\in\Lambda$ est un zéro de F_1 de multiplicité supérieure ou égale à 2, alors la fonction

$$z\mapsto\frac{-\mu}{(z-\mu)}F_1(z)$$

est encore un antécédent de a_1 par R_Λ et appartient à PW^p_τ, ce qui contredit l'injectivité de R_Λ. Comme $F_1\in PW^p_\tau\subset\mathcal{C}$, le Théorème 1.2.9 permet d'obtenir la représentation

$$F_1(z)=ce^{ikz}\lim_{R\to\infty}\prod_{\substack{\lambda\in\Lambda\setminus\{\lambda_{1,1}\}\\|\lambda|<R}}\left(1-\frac{z}{\lambda}\right),$$

où $c \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}$. Pour des raisons d'unicité, on a nécessairement $k = 0$. En effet, si $|k| > 0$, alors pour tout $0 < |k'| < |k|$, on pourrait trouver α dépendant de k' tel que la fonction

$$z \mapsto \alpha e^{ik'z} \lim_{R\to\infty} \prod_{\substack{\lambda\in\Lambda\setminus\{\lambda_{1,1}\} \\ |\lambda|<R}} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)$$

soit encore un antécédent par R_Λ de a_1, ce qui est contradictoire à l'injectivité de R_Λ. Ainsi

$$S(z) := (z - \lambda_{1,1}) \lim_{R\to\infty} \prod_{\substack{\lambda\in\Lambda\setminus\{\lambda_{1,1}\} \\ |\lambda|<R}} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)$$

existe et définit bien une fonction entière de type exponentiel τ (si le type était strictement inférieur à τ, on obtiendrait une contradiction avec l'injectivité comme ci-dessus). De plus, on en déduit que, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, l'unique antécédent f_λ par R_Λ de

$$a_\lambda(\mu) := \begin{cases} 1, & \text{si } \mu = \lambda \\ 0, & \text{si } \mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\} \end{cases}$$

s'écrit

$$f_\lambda(z) = \frac{S(z)}{S'(\lambda)\,(z-\lambda)}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3.8}$$

3.4.2.3 Les conditions de Muckenhoupt (iii) et $(iii)'$

On commence par montrer la necessité de la condition discrète de Muckenhoupt $(iii)'$ puis, à l'aide d'un lemme, on verra comment $(iii)'$ implique (iii).

Pour chaque $n \geq 1$, la fonction holomorphe

$$g_n : \ z \mapsto \frac{S(z)}{\prod_{\lambda\in\sigma_n'} (z-\lambda)}$$

ne s'annule pas sur Ω_n (voir 3.6 ci-dessus). De plus, choisissant $\lambda_{n,0}' \in \sigma_n'$,

$$g_n\left(\lambda_{n,0}'\right) = \frac{S'\left(\lambda_{n,0}'\right)}{\prod_{\substack{\lambda\in\sigma_n' \\ \lambda\neq\lambda_{n,0}'}} \left(\lambda_{n,0}' - \lambda\right)}.$$

Par conséquent, il découle du principe du maximum que

$$\inf_{\xi\in\partial\Omega_n} \left| \frac{S(\xi)}{\prod_{\lambda\in\sigma_n'} (\xi-\lambda)} \right| \leq \left| \frac{S'\left(\lambda_{n,0}'\right)}{\prod_{\substack{\lambda\in\sigma_n' \\ \lambda\neq\lambda_{n,0}'}} \left(\lambda_{n,0}' - \lambda\right)} \right| \leq \sup_{\xi\in\partial\Omega_n} \left| \frac{S(\xi)}{\prod_{\lambda\in\sigma_n'} (\xi-\lambda)} \right|.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires implique alors qu'il existe un point $\theta_n \in \partial\Omega_n$ tel que

$$|S(\theta_n)| = \delta \left| \frac{S'\left(\lambda'_{n,0}\right)}{\prod\limits_{\substack{\lambda \in \sigma'_n \\ \lambda \neq \lambda'_{n,0}}} \left(\lambda'_{n,0} - \lambda\right)} \right| =: \delta\omega_n. \tag{3.9}$$

Considérons maintenant $\Gamma := (\gamma_n)_{n\geq 1}$ une sous-suite de $\left\{\lambda'_n : n \geq 1\right\}$ qui soit toujours relativement dense et telle que

$$\inf_{n\geq 1} \mathrm{Re}\,(\gamma_{n+1}) - \mathrm{Re}\,(\gamma_n) > 0.$$

On définit σ_{γ_n} comme étant le paquet σ'_n contenant γ_n. La suite $\Theta = (\theta_n)_{n\geq 1}$ désigne l'ensemble des θ_n précédemment construits correspondant aux γ_n et on pose, pour $n \geq 1$,

$$\omega_n := \left| \frac{S'(\gamma_n)}{\prod\limits_{\substack{\lambda \in \sigma_{\gamma_n} \\ \lambda \neq \gamma_n}} (\gamma_n - \lambda)} \right|$$

de sorte que

$$|S(\theta_n)| = \delta\omega_n.$$

Montrons que la transformée de Hilbert discrète $\mathcal{H}_{\Gamma,\Theta}$ est bornée de $l^p(\omega)$ dans lui-même. En effet, soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de $l^p(\omega)$ à support fini. Alors, la suite

$$a(\lambda) := \begin{cases} a_n S'(\gamma_n) & , \text{ si } \lambda = \gamma_n \\ 0 & , \text{ si } \lambda \in \Lambda \setminus \bigcup\limits_{n\geq 1} \{\gamma_n\} \end{cases}$$

est un élément de $X^p_\tau(\Lambda)$ car, si $\gamma_n = \lambda'_{n,0}$ est choisi comme le "dernier" point de σ'_n, alors

$$\tilde{\Delta}^{k-1}_{\sigma'_n}\left(ae^{i\tau\cdot}\left(\lambda^{(k)}_n\right)\right) = 0, \qquad k < |\sigma'_n|$$

et

$$\left|\tilde{\Delta}^{|\sigma'_n|-1}_{\sigma'_n}\left(ae^{i\tau\cdot}\left(\lambda^{(|\sigma'_n|)}_n\right)\right)\right| = \frac{\left|a_n S'(\lambda'_{n,0})\right| e^{-\tau\left|\mathrm{Im}\left(\lambda'_{n,0}\right)\right|}}{\prod\limits_{\substack{\lambda \in \sigma'_n \\ \lambda \neq \lambda'_{n,0}}} \left|\lambda - \lambda'_{n,0}\right|}.$$

Ainsi, en observant que les deux quantités $1 + \left|\mathrm{Im}\left(\lambda'_{n,0}\right)\right|$ et $\left|e^{i\tau\lambda'_{n,0}}\right|$ sont comparables à des constantes du fait que σ'_n est proche de $\mathbb{R}$, on obtient à l'aide de (3.9) que

$$\begin{aligned} \|a\|^p_{X^p_\tau(\Lambda)} &= \sum_n \left(1 + \left|\mathrm{Im}(\lambda'_{n,0})\right|\right) \left|\tilde{\Delta}^{|\sigma'_n|-1}_{\sigma'_n}\left(ae^{i\tau\cdot}\left(\lambda^{(|\sigma'_n|)}_n\right)\right)\right|^p \\ &\asymp \sum_n \left(\frac{\left|a_n S'(\lambda'_{n,0})\right|}{\prod\limits_{\substack{\lambda \in \sigma'_n \\ \lambda \neq \lambda'_{n,0}}} \left|\lambda'_{n,0} - \lambda\right|} \right)^p = \sum_n \omega^p_n \left|a_n\right|^p. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Soit alors f l'unique fonction de PW_τ^p telle que $f|\Lambda = a$. On remarque que comme R_Λ est un isomorphisme sur $X_\tau^p(\Lambda)$, alors

$$\|f\|_p^p \asymp \|a\|_{X_\tau^p(\Lambda)}^p . \tag{3.11}$$

Cette fonction est de la forme $f(z) = \sum_j a_j \frac{S(z)}{(z-\gamma_j)}$ et donc, avec (3.9) on a

$$\sum_n |f(\theta_n)|^p = \sum_n \left|\sum_j a_j \frac{S(\theta_n)}{\theta_n - \gamma_j}\right| = \sum_n |S(\theta_n)| \left|\sum_j \frac{a_j}{\theta_n - \gamma_j}\right|$$

et par construction de Θ, on obtient donc que

$$\sum_n |f(\theta_n)|^p = \delta^p \sum_n \omega_n^p \left|\left(\mathcal{H}_{\Gamma,\Theta}((a_j)_{j\geq 1})\right)_n\right|^p . \tag{3.12}$$

D'autre part, l'inégalité de Pòlya (voir [Le96, Lecture 20]) combinée avec (3.10) et (3.11) donnent

$$\sum_n |f(\theta_n)|^p \lesssim \|f\|_p^p \lesssim \|a\|_{X_\tau^p(\Lambda)}^p \lesssim \sum_n \omega_n^p |a_n|^p . \tag{3.13}$$

En reprenant (3.12) et (3.13), on peut déduire que $\mathcal{H}_{\Gamma,\Theta}$ est bien bornée de $l^p(\omega)$ dans lui-même. Le Lemme 1.3.13 nous autorise alors à conclure que que le poids $(\omega_n^p)_{n\geq 1}$ satisfait la condition discrète de Muckenhoupt $(\mathfrak{A}_p)$. Le lecteur remarquera cependant qu'ici nous n'avons pas exactement la condition $|\theta_n - \gamma_n| = \delta$ requise pour appliquer le lemme. Néanmoins, comme $\sup_{n\geq 1} \operatorname{diam}\left(\sigma_n'\right) < \infty$ et $\prod |\lambda - \theta_n| = \delta$, il n'est pas difficile de voir que $|\theta_n - \gamma_n| \asymp 1$, ce qui est suffisant pour que le lemme reste valide.

On veut maintenant montrer que $(iii)'$ entraîne (iii). Pour cela, on va utiliser le lemme qui va suivre, adapté à partir de [LS97, Lemma 2].

Remarque 3.4.3. Il découle des conditions de faible densité $(H_N)-(i)$, de Carleson généralisée sur la suite $\left(B_{\sigma_{\gamma_n}}\right)_n$ et de la croissance de la suite $(\mathrm{Re}\,(\gamma_n))_n$ qu'on a $\mathrm{Re}\,(\gamma_{n+1}) - \mathrm{Re}\,(\gamma_n) \leq 4\epsilon_0$. Ceci entraîne que

$$\delta_0' \leq |\gamma_n - \gamma_{n+1}| \leq 5\epsilon_0.$$

Lemme 3.4.4. *Supposons que $x \in \mathbb{R}$ soit tel que $Re\,(\gamma_n) \leq x \leq Re\,(\gamma_{n+1})$. Alors, il existe $\alpha = \alpha(x) \in [0,1]$ tel que*

$$\omega_n^\alpha \omega_{n+1}^{1-\alpha} \asymp \frac{|S(x)|}{d_N(x)}$$

uniformément par rapport à $x \in \mathbb{R}$.

Supposons que ce lemme soit vrai, voyons comment comment il intervient pour montrer que $(iii)'$ implique (iii). Notons $F_N(x) := \frac{|S(x)|}{d_N(x)}$ et $J_n := [\mathrm{Re}\,(\gamma_n)\,, \mathrm{Re}\,(\gamma_{n+1})]$ dont la longueur vérifie $|J_n| \asymp 1$ (voir remarque ci-dessus). On veut montrer que

$$A := \sup_I \left(\frac{1}{|I|}\int_I F_N^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|I|}\int_I F_N^{-q}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

où I parcourt l'ensemble des intervalles de longueur finie de $\mathbb{R}$. Pour I fixé, on considère alors

$$M_I := \{m \in \mathbb{Z} : \ J_m \cap I \neq \emptyset\} .$$

Il existe alors $m_0 \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$M_I = \{m_0, ..., m_0 + n\}$$

Le Lemme 3.4.4 implique alors que, si $m(I) := \left(\frac{1}{|I|}\int_I F_N^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|I|}\int_I F_N^{-q}\right)^{\frac{1}{q}}$, alors

$$m(I) \asymp \left(\frac{1}{|I|}\sum_{m\in M_I}\int_{I\cap J_m}\left(\omega_m^{\alpha}\omega_{m+1}^{1-\alpha}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|I|}\sum_{m\in M_I}\int_{I_k\cap J_m}\left(\omega_m^{-\alpha}\omega_{m+1}^{\alpha-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

En utilisant l'inégalité

$$t^{\alpha}s^{1-\alpha} \leq t+s, \qquad t,s\geq 0,\ \alpha\in[0,1],$$

on obtient

$$m(I) \lesssim \left(\frac{1}{|I|}\sum_{m\in M_I}(\omega_m+\omega_{m+1})^p\,|I\cap J_m|\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|I|}\sum_{m\in M_I}\left(\frac{1}{\omega_m}+\frac{1}{\omega_{m+1}}\right)^q|I_k\cap J_m|\right)^{\frac{1}{q}}.$$

L'inégalité de Minkowski implique alors que

$$\left(\frac{1}{|I|}\sum_{m\in M_I}(\omega_m+\omega_{m+1})^p\,|I\cap J_m|\right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \left(\frac{1}{|I|}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\sum_{m\in M_I}|I\cap J_m|\,\omega_m^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{m\in M_I}|I\cap J_m|\,\omega_{m+1}^p\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Si $n=0$, c'est-à-dire si $M_I=\{m_0\}$, alors $I\cap J_{m_0}=I$ et donc, on trouve

$$\begin{aligned} m(I) &\lesssim \left(\omega_{m_0}^p+\omega_{m_0+1}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{\omega_{m_0}^q}+\frac{1}{\omega_{m_0+1}^q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \sup_{k'\in\mathbb{Z},n'>0}\left(\frac{1}{n'}\sum_{m=k'}^{k'+n'}\omega_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{n'}\sum_{m=k'}^{k'+n'}\left(\frac{1}{\omega_n}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \end{aligned}$$

car $(\omega_n^p)_n$ satisfait la condition discrète de Muckenhoupt $(\mathfrak{A}_p)$.

Si $n>0$, alors comme $|I\cap J_m|\leq|J_m|\lesssim 1$, on trouve

$$\left(\sum_{m\in M_I}|I\cap J_m|\,\omega_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \left(\sum_{k=m_0}^{m_0+n}\omega_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Mais, on a clairement $|I|\gtrsim n$, et donc

$$\begin{aligned} m(I) &\lesssim \left(\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m_0}^{m_0+n}\omega_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m_0+1}^{m_0+1+n}\omega_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\ &\quad\times\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m_0}^{m_0+n}\frac{1}{\omega_k^q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m_0+1}^{m_0+1+n}\frac{1}{\omega_k^q}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\ &\lesssim \sup_{k'\in\mathbb{Z},n'>0}\left(\frac{1}{n'}\sum_{m=k'}^{k'+n'}\omega_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{n'}\sum_{m=k'}^{k'+n'}\left(\frac{1}{\omega_n}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \end{aligned}$$

toujours grâce à la condition discrète de Muckenhoupt vérifiée par $(\omega_n^p)_n$. Ceci termine la démonstration de la nécessité de (iii). Il reste cependant à prouver que le Lemme 3.4.4 est vrai.

Preuve. (du Lemme 3.4.4). Pour $x \in J_n$, on pose $N(x) := \left\{n : \ d(\sigma_n', x) < \epsilon_0\right\}$ et

$$\Lambda(x) := \left(\biguplus_{n\in N(x)} \sigma_n' \right) \cup \sigma_{\gamma_n} \cup \sigma_{\gamma_{n+1}}.$$

On remarque que σ_{γ_n} et $\sigma_{\gamma_{n+1}}$ peuvent être des paquets de $\biguplus_{n\in N(x)} \sigma_n'$. Observons aussi que, comme Λ est une réunion finie de suites de Carleson, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |N(x)| < \infty.$$

Pour $\alpha \in [0,1]$, on veut montrer que $\vartheta \asymp 1$, où

$$\vartheta := \frac{\omega_n^\alpha \omega_{n+1}^{1-\alpha} d_N(x)}{|S(x)|},$$

et $x \notin \Lambda$ (cette hypothèse n'est pas restrictive du fait que l'expression s'étend continûment à Λ). La définition de S permet d'écrire explicitement que

$$S'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \prod_{\substack{\mu\in\Lambda \\ \mu\neq\lambda}} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right), \qquad \lambda \in \Lambda.$$

Afin de ne pas surcharger les notations, tous les produits infinis apparaissant ci-dessous doivent être interprétés comme limites symétriques de produits finis.

Ainsi,

$$\vartheta = \left(\frac{\left| \frac{1}{\gamma_n} \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\{\gamma_n\}} \left(1 - \frac{\gamma_n}{\lambda}\right) \right|^\alpha \left| \frac{1}{\gamma_{n+1}} \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\{\gamma_{n+1}\}} \left(1 - \frac{\gamma_{n+1}}{\lambda}\right) \right|^{1-\alpha} d_N(x)}{\prod_{\lambda\in\Lambda} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) \prod_{\lambda\in\sigma_{\gamma_n}\setminus\{\gamma_n\}} |\lambda - \gamma_n|^\alpha \prod_{\lambda\in\sigma_{\gamma_{n+1}}\setminus\{\gamma_{n+1}\}} |\lambda - \gamma_{n+1}|^{1-\alpha}} \right).$$

Pour $\lambda \in \Lambda \setminus \{\gamma_n, \gamma_{n+1}\}$,

$$\frac{\left|1 - \frac{\gamma_n}{\lambda}\right|^\alpha \left|1 - \frac{\gamma_{n+1}}{\lambda}\right|^{1-\alpha}}{\left|1 - \frac{x}{\lambda}\right|} = \frac{|\lambda - \gamma_n|^\alpha |\lambda - \gamma_{n+1}|^{1-\alpha}}{|x - \lambda|}.$$

Remarquons aussi que pour les deux points restant γ_n, γ_{n+1}, on a :

$$\frac{\left| \frac{1}{\gamma_n} \left(1 - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}\right) \right|^\alpha \left| \frac{1}{\gamma_{n+1}} \left(1 - \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\right) \right|^{1-\alpha}}{\left| \left(1 - \frac{x}{\gamma_n}\right) \left(1 - \frac{x}{\gamma_{n+1}}\right) \right|} = \frac{|\gamma_{n+1} - \gamma_n|^\alpha |\gamma_n - \gamma_{n+1}|^{1-\alpha}}{|\gamma_n - x| \, |\gamma_{n+1} - x|}.$$

Maintenant, on découpe ϑ en deux produits $\vartheta = \Pi_1(x)\cdot\Pi_2(x)$ correspondant essentiellement aux zéros dans $\Lambda(x)$ et aux zeros dans $\Lambda\setminus\Lambda(x)$ ($d_N(x)$ apparaissant dans Π_1) :

$$\begin{aligned}
\Pi_1(x) :&= \frac{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda(x)\setminus\{\gamma_n\}}|\lambda-\gamma_n|^{\alpha}\prod\limits_{\lambda\in\Lambda(x)\setminus\{\gamma_{n+1}\}}|\lambda-\gamma_{n+1}|^{1-\alpha}\,d_N(x)}{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda(x)}|\lambda-x|\prod\limits_{\lambda\in\sigma_{\gamma_n}\setminus\{\gamma_n\}}|\lambda-\gamma_n|^{\alpha}\prod\limits_{\lambda\in\sigma_{\gamma_{n+1}}\setminus\{\gamma_{n+1}\}}|\lambda-\gamma_{n+1}|^{1-\alpha}}\\
&= \frac{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda(x)\setminus\sigma_{\gamma_n}}|\lambda-\gamma_n|^{\alpha}\prod\limits_{\lambda\in\Lambda(x)\setminus\sigma_{\gamma_{n+1}}}|\lambda-\gamma_{n+1}|^{1-\alpha}\,d_N(x)}{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda(x)}|\lambda-x|}
\end{aligned}$$

et

$$\Pi_2(x) := \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda(x)}\left(\frac{|\lambda-\gamma_n|^{\alpha}\,|\lambda-\gamma_{n+1}|^{1-\alpha}}{|\lambda-x|}\right).$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}
\Pi_1(x) = &\left(\frac{\prod\limits_{\lambda\in\sigma_{\gamma_{n+1}}}|\lambda-\gamma_n|^{\alpha}\prod\limits_{\lambda\in\sigma_{\gamma_n}}|\lambda-\gamma_{n+1}|^{1-\alpha}\,d_N(x)}{\prod\limits_{\sigma_{\gamma_n}\cup\sigma_{\gamma_{n+1}}}|x-\lambda|}\right)\\
&\times\left(\prod_{\Lambda(x)\setminus\left(\sigma_{\gamma_n}\cup\sigma_{\gamma_{n+1}}\right)}\frac{|\lambda-\gamma_n|^{\alpha}\,|\lambda-\gamma_{n+1}|^{1-\alpha}}{|x-\lambda|}\right)
\end{aligned}$$

et remarquer que si $\lambda\in\Lambda(x)\setminus\left(\sigma_{\gamma_n}\cup\sigma_{\gamma_{n+1}}\right)$, alors $\lambda\in\sigma_{l'}$ pour un certain $l\in N(x)$, de sorte que

$$1\lesssim d(\sigma_{\gamma_n},\sigma_l^{'})\le|\lambda-\gamma_n|\le 2\rho_0^{'}+2\epsilon_0\lesssim 1$$

et, du fait de la Remarque 3.4.3, pour $\lambda\in\sigma_{\gamma_n}$ et $\mu\in\sigma_{\gamma_{n+1}}$, on a

$$|\lambda-\gamma_{n+1}|\asymp 1 \text{ et } |\mu-\gamma_n|\asymp 1.$$

Ces trois relations impliquent que

$$\Pi_1(x)\asymp\frac{d_N(x)}{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda(x)}|x-\lambda|}.$$

Soit alors n_x l'entier tel que $d_N(x)=p_{n_x}(x)$ (on renvoie à la Remarque 3.4.1). Il est clair que $n_x\in N(x)$. On voit aussi que pour $\lambda\in\sigma_m^{'}$, $m\in N(x)$, on a $|\lambda-x|\le d\left(\sigma_m^{'},x\right)+\text{diam}\left(\sigma_m^{'}\right)\le\epsilon_0+\rho_0^{'}$. Par conséquent,

$$\frac{1}{\left(\epsilon_0+\rho_0^{'}\right)^{|N(x)|-1}}\le\frac{d_N(x)}{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda(x)}|x-\lambda|}=\frac{1}{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda(x)\setminus\sigma_{n_x}}|\lambda-x|}\le\left(\frac{2}{\delta_0^{'}}\right)^{N\cdot(|N(x)|-1)}$$

et, à l'aide de la fin de la Remarque 3.4.1, on obtient que

$$\Pi_1(x)\asymp 1.$$

Afin de montrer la relation

$$\Pi_2(x) \asymp 1,$$

écrivons

$$\gamma_n := x - x_n + iy_n \text{ et } \gamma_{n+1} := x + x_{n+1} + iy_{n+1}.$$

Les valeurs x_n et x_{n+1} dépendent de x et satisfont les inégalités

$$0 \leq x_n, x_{n+1} \leq |J_n| \lesssim 1.$$

Rappelons aussi que $|y_j| \lesssim 1$, pour toutes les valeurs de j (les points γ_j sont proches de l'axe réel). On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
(\Pi_2(x))^2 &= \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda(x)} \left[\frac{\left(((x-\mathrm{Re}\,(\lambda))-x_n)^2 + (y_n - \mathrm{Im}\,(\lambda))^2\right)^\alpha}{(x-\mathrm{Re}\,(\lambda))^2 + (\mathrm{Im}\,(\lambda))^2} \right.\\
&\quad \left. \times \left((x+x_{n+1}-\mathrm{Re}\,(\lambda))^2 + (y_{n+1}-\mathrm{Im}\,(\lambda))^2\right)^{1-\alpha}\right]\\
&= \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda(x)} \left[\left(1 - \frac{2x_n\,(x-\mathrm{Re}\,(\lambda)) + 2y_n \mathrm{Im}\,(\lambda) + O(1)}{(x-\mathrm{Re}\,(\lambda))^2 + (\mathrm{Im}\,(\lambda))^2}\right)^\alpha \right.\\
&\quad \left. \times \left(1 + \frac{2x_{n+1}\,(x-\mathrm{Re}\,(\lambda)) - 2y_{n+1}\mathrm{Im}\,(\lambda) + O(1)}{(x-\mathrm{Re}\,(\lambda))^2 + (\mathrm{Im}\,(\lambda))^2}\right)^{1-\alpha}\right].
\end{aligned}$$

En choisissant $\alpha = \alpha(x)$ de sorte que $\alpha x_n - (1-\alpha)\,x_{n+1} = 0$, c'est à dire

$$\alpha := \frac{x_{n+1}}{x_n + x_{n+1}},$$

on trouve que

$$(\Pi_2\,(x))^2 = \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda(x)} \left(1 - \frac{2\mathrm{Im}\,(\lambda)\,(y_n + y_{n+1}) + O(1)}{(x-\mathrm{Re}\,(\lambda))^2 + (\mathrm{Im}\,(\lambda))^2}\right).$$

Notons aussi que, pour $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda\,(x)$,

$$(x - \mathrm{Re}\,(\lambda))^2 + \mathrm{Im}\,(\lambda)^2 \gtrsim 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
K_1 \exp\left(c_1 \sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda(x)} \frac{|\mathrm{Im}\,(\lambda)|}{(x-\mathrm{Re}\,(\lambda))^2 + (\mathrm{Im}\,(\lambda))^2}\right) &\leq (\Pi_2(x))^2\\
&\leq K_2 \exp\left(c_2 \sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda(x)} \frac{|\mathrm{Im}\,(\lambda)|}{(x-\mathrm{Re}\,(\lambda))^2 + (\mathrm{Im}\,(\lambda))^2}\right)
\end{aligned}$$

pour certains c_1, c_2, K_1, K_2 indépendants de x. La condition $(N-)$ Carleson impliquant (voir par exemple [Ga81, p. 279]) que

$$\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda(x)} \frac{|\mathrm{Im}\,(\lambda)|}{(x-\mathrm{Re}\,(\lambda))^2 + (\mathrm{Im}\,(\lambda))^2} \asymp 1,$$

on a le résultat voulu. □

3.4.3 Conditions suffisantes

On montre maintenant que les conditions (i), (ii) et (iii) de (H_N) sont suffisantes pour avoir à l'injectivité et la surjectivité de l'opérateur de restriction R_Λ entre PW_τ^p et $X_\tau^p(\Lambda)$.

3.4.3.1 Injectivité de R_Λ

Soit $f \in PW_\tau^p$ telle que $f(\lambda) = 0$, $\lambda \in \Lambda$. On veut montrer que f est identiquement nulle. Pour cela, on va suivre l'idée de preuve développée par Lyubarski et Seip ([LS97]). Introduisons $\phi := f/S$, qui est une fonction de type exponentiel zéro (voir Annexe A.5). L'idée est donc de majorer ϕ par une constante sur l'axe imaginaire et d'utiliser un principe de Phragmen-Lindelöf pour en déduire que ϕ est constante. Pour des raisons d'intégrabilité liées à la condition de Muckenhoupt, la seule valeur possible pour cette constante sera zéro, ce qui donnera bien $f \equiv 0$.

Nous allons procéder comme suit : comme ϕ est analytique, elle est bornée sur le compact $[-2i\epsilon_0, 2i\epsilon_0]$. Afin, de la borner sur $i\mathbb{R} \setminus [-2i\epsilon_0, 2i\epsilon_0]$, nous allons utiliser une minoration de S dans une certain région du plan. Introduisons pour cela les ensembles

$$A_n := \{z \in \mathbb{C} : \ |\mathrm{Im}(z)| \geq 2\epsilon_0, \ \rho(\lambda_{n,0}, z) < 2\rho_0 < \epsilon_0\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

On commence par montrer que, pour $z \in \left(\mathbb{C}^+_{2\epsilon_0} \cup \mathbb{C}^-_{-2\epsilon_0}\right) \setminus (\bigcup_n A_n)$,

$$|S(z)| \gtrsim e^{\tau|\mathrm{Im}(z)|} \, |\mathrm{Im}(z)|^{\frac{1}{q}} \, (1+|z|)^{-1}. \tag{3.14}$$

En effet, pour $z \in \mathbb{C}^+$, on définit

$$S_1(z) := \frac{S(z)}{B_{\epsilon_0}(z)},$$

où

$$B_{\epsilon_0}(z) := \prod_{\lambda \in \Lambda_{\epsilon_0}} \left(c_\lambda \frac{z-\lambda}{z-\overline{\lambda}+3i\epsilon_0} \right)$$

est le produit de Blaschke dans $\mathbb{C}^+_{-\frac{3}{2}\epsilon_0}$ associé à Λ_{ϵ_0} et c_λ est le coefficient de normalisation unimodulaires dont nous n'avons pas besoin de l'écriture explicite ici. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Observons que, pour $n \geq 1$ et $\lambda \in \sigma'_{n_x}$, nous avons

$$\left|x-\overline{\lambda}\right| = |x-\lambda| \leq \epsilon_0 + \mathrm{diam}\left(\sigma'_{n_x}\right) \leq \epsilon_0 + \rho'_0 \leq 3\frac{\epsilon_0}{2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{3}{2}\epsilon_0 \leq \left|x-\overline{\lambda}+3i\epsilon_0\right| \leq 5\epsilon_0.$$

Il découle de ces inégalités que

$$\prod_{\lambda \in \sigma'_{n_x}} \left|\frac{x-\lambda}{x-\overline{\lambda}+3i\epsilon_0}\right| \asymp d_N(x).$$

En écrivant

$$|B_{\epsilon_0}(x)| = \left(\prod_{\lambda \in \sigma'_{n_x}} \left|\frac{x-\lambda}{x-\overline{\lambda}+3i\epsilon_0}\right| \right) \left(\prod_{\lambda \in \Lambda_{\epsilon_0} \setminus \sigma'_{n_x}} \left|\frac{x-\lambda}{x-\overline{\lambda}+3i\epsilon_0}\right| \right)$$

et en utilisant le fait que Λ_{ϵ_0} est $N-$Carleson dans $\mathbb{C}^+_{-\frac{3}{2}\epsilon_0}$, on obtient que

$$|B_{\epsilon_0}(x)| \asymp d_N(x), \tag{3.15}$$

et en particulier $x \mapsto |S_1(x)|^p$ satisfait la condition de Muckenhoupt (A_p). On peut alors déduire des propriétés des fonctions vérifiant la condition de Muckenhoup que la fonction

$$z \mapsto e^{i\tau z}\frac{S_1(z)}{z+i} = e^{i\tau z}\frac{S(z)}{B_{\epsilon_0}(z)\,(z+i)}$$

est un élément de H^p_+ et que la fonction $z \mapsto e^{i\tau z}S_1(z)$ est dans la classe de Smirnov $\mathcal{N}^+$ (on renvoie à [Ni02a, Part. A Section 4] pour les définitions et les résultats généraux sur cette classe de fonctions). Il suit qu'on a la décomposition

$$S_1(z) = e^{-i\tau z}B_1(z)G_1(z), \qquad z \in \mathbb{C}^+,$$

où B_1 est le produit de Blaschke associé à $\Lambda^+ \setminus \Lambda_{\epsilon_0}$ et G_1 est une fonction extérieure de $\mathbb{C}^+$. Notons que $e^{i\tau\cdot}S_1$ ne peut contenir de facteur intérieur singulier. Ainsi, $x \mapsto |G_1(x)|^p \in (A_p)$, ou de manière équivalente $x \mapsto |G_1(x)|^{-q} \in (A_q)$. La condition de Muckenhoupt implique encore que

$$\phi_{G_1} : \; z \mapsto \frac{1}{G_1(z)\,(z+i)} \in H^q_+$$

et, par les estimations ponctuelles de fonctions de H^q_+, on a

$$|\phi_{G_1}(z)| \lesssim \frac{1}{(\mathrm{Im}\,(z))^{\frac{1}{q}}},$$

dont on déduit, pour $z \in \mathbb{C}^+$,

$$\left|\frac{1}{G_1(z)}\right| \lesssim (1+|z|)\,\mathrm{Im}\,(z)^{-\frac{1}{q}}.$$

De plus, le caractère $N-$Carleson de la suite $\Lambda^+ \setminus \Lambda_{\epsilon_0}$ implique que

$$|B_1(z)| \gtrsim 1, \qquad z \in \mathbb{C}^+ \setminus \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)$$

ce qui permet d'obtenir la minoration annoncée en (3.14) pour S_1. Mais, on remarque que $|S_1(z)| \asymp |S(z)|$, pour $\mathrm{Im}(z) > 2\epsilon_0$ et donc l'inégalité est encore valide pour S dans $\mathbb{C}^+_{2\epsilon_0}$. Un raisonnement similaire nous donne alors la minoration dans $\mathbb{C}^-_{-2\epsilon_0}$.

On utilise maintenant l'estimation ponctuelle des fonctions de PW_τ^p (1.8) et (3.14) pour obtenir que, pour $z \in \left(\mathbb{C}^+_{2\epsilon_0} \cup \mathbb{C}^-_{-2\epsilon_0}\right) \setminus (\bigcup_n A_n)$,

$$\begin{aligned} |\phi(z)| &= \left|\frac{f(z)}{S(z)}\right| \lesssim \frac{(1+|z|)}{e^{\tau|\mathrm{Im}(z)|}\,|\mathrm{Im}(z)|^{\frac{1}{q}}}\frac{e^{\tau|\mathrm{Im}(z)|}}{(1+|\mathrm{Im}(z)|)^{\frac{1}{p}}} \\ &\asymp \frac{1+|z|}{|\mathrm{Im}(z)|^{\frac{1}{q}}\,(1+|\mathrm{Im}(z)|)^{\frac{1}{p}}} =: \psi(z). \end{aligned}$$

On remarque maintenant que si $A_n \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$, alors

$$A_n \subset S_\pm := \left\{ z \in \mathbb{C}^\pm : \left| \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} \right| < \eta \right\},$$

où η est une certaine constante. Les ensembles $S_\pm$ sont les angles de Stolz dans $\mathbb{C}^\pm$ au point $x = 0$. Comme A_n est loin de l'axe réel et a un diamètre pseudo-hyperbolique uniformément borné, chaque A_n intersectant l'axe imaginaire sera inclus dans l'un des angles de Stoltz S_+ ou S_-. Or, il est clair qu'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}^\pm_{\pm 2\epsilon_0} \cap S_\pm$, on a

$$|\psi(z)| \leq M.$$

En particulier, $|\phi(z)| \leq M$ pour $z \in \partial A_n$, et par le principe du maximum, si $iy \in A_n \cap i\mathbb{R}$, on a encore

$$|\phi(iy)| \leq M.$$

Ceci implique donc que ϕ est uniformément bornée sur $i\mathbb{R}$ et il suit d'un principe de Phragmen-Lindelöf (voir [Le64, p. 51]) que $\phi \equiv K$ et $f = KS$. Il reste donc à montrer que $K = 0$. Du fait que $x \mapsto |S_1(x)|^p \in (A_p)$, on a

$$\int |S_1(x)|^p = \infty$$

et, en appliquant l'inégalité de Plancherel-Pòlya, on a aussi

$$\int |S_1(x + 2i\epsilon_0)|^p = \infty.$$

Mais on a déjà mentionné que $|S_1(x + 2i\epsilon_0)| \asymp |S(x + 2i\epsilon_0)|$, et donc

$$\int |S(x + 2i\epsilon_0)|^p = \infty.$$

On réapplique Plancherel-Pòlya pour obtenir que

$$\int |S(x)|^p = \infty.$$

D'autre part, $f = KS \in PW^p_\tau$ et en particulier $f \in L^p(\mathbb{R})$. Il suit que, nécessairement, $K = 0$, ou encore $f \equiv 0$, ce qui termine la preuve de l'injectivité de R_Λ.

3.4.3.2 Surjectivité de R_Λ

Considérons une suite $a = (a(\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ à support fini et la solution du problème d'interpolation $f(\lambda) = a(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, donnée par

$$f(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) \frac{S(z)}{S'(\lambda)(z - \lambda)}.$$

La somme étant finie, la fonction f est bien définie et est une fonction entière de type exponentiel au plus τ. On veut découper cette somme selon la localisation des points de la suite Λ. Plus précisément, en utilisant la décomposition $\Lambda = \biguplus_n \tau_n$ aini que les ensembles (déjà introduits)

$$N_+ = \left\{n \in \mathbb{Z} : \ \tau_n \cap \left(\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}\right) \neq \emptyset\right\} \text{ et } N_- = \mathbb{Z} \setminus N_+,$$

on pose

$$\Lambda^+ := \biguplus_{n \in N_+} \tau_n \text{ et } \Lambda_- := \biguplus_{n \in N_-} \tau_n = \Lambda \setminus \Lambda^+.$$

On remarquera en particulier que, comme $\operatorname{diam}_\rho(\tau_n) < \frac{\epsilon_0}{2}$, on a $\Lambda^+ \subset \mathbb{C}^+_{-\frac{\epsilon_0}{2}}$. On peut alors écrire $f = f^+ + f^-$, avec

$$f^\pm(z) := \sum_{\lambda \in \Lambda^\pm} a(\lambda) \frac{S(z)}{S'(\lambda)(z-\lambda)} = \sum_{n \in N_\pm} \sum_{\lambda \in \tau_n} a(\lambda) \frac{S(z)}{S'(\lambda)(z-\lambda)}.$$

Comme dans d'autres raisonnements du même type (voir notamment la preuve des Théorèmes 2.2.1 et 2.3.1), on cherche à estimer, séparément,

$$\inf\left\{\left\|f^\pm - g\right\|_p : \ g \in PW_\tau^p, \ g|\Lambda = 0\right\}. \tag{3.16}$$

De la même manière que précedemment, on estimera qu'une seule des deux normes, la seconde s'obtenant exactement de la même manière. On introduit le produit de Blaschke β associé à la suite $\Lambda^+_{-\epsilon_0} = \Lambda \cap \mathbb{C}^+_{-\epsilon_0}$

$$\beta(z) = \prod_{\lambda \in \Lambda^+_{-\epsilon_0}} \left(c_\lambda \frac{z-\lambda}{z-\overline{\lambda}+2i\epsilon_0}\right), \qquad z \in \mathbb{C}^+_{-\epsilon_0},$$

où encore une fois les c_λ sont les coefficients de renormalisation qui conviennent. Pour $z \in \mathbb{C}^+_{-\epsilon_0}$, on écrit $S(z) = e^{-i\tau z}\beta(z)G(z)$, ce qui implique, en utilisant le fait que

$$\beta(0) = \prod_{\lambda \in \Lambda^+_{-\epsilon_0}} c_\lambda \frac{\lambda}{\overline{\lambda} - 2i\epsilon_0}$$

(on rappelle qu'on a supposé $0 \notin \Lambda$) que

$$\begin{aligned} G(z) &= e^{i\tau z} S(z) \beta(z)^{-1} \\ &= e^{i\tau z} \prod_{\lambda \in \Lambda} \left(\frac{\lambda - z}{\lambda}\right) \prod_{\lambda \in \Lambda^+_{-\epsilon_0}} \left(\frac{1}{c_\lambda} \frac{z - \overline{\lambda} + 2i\epsilon_0}{z-\lambda}\right) \\ &= \beta(0) e^{i\tau z} \prod_{\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}} \left(1 - \frac{z}{\tilde{\lambda}}\right), \end{aligned}$$

avec $\tilde{\Lambda} := \left(\Lambda \setminus \Lambda^+_{-\epsilon_0}\right) \cup \left(\overline{\Lambda^+_{-\epsilon_0}} - 2i\epsilon_0\right) \subset \mathbb{C}^-_{-\epsilon_0}$. La fonction G est extérieure dans $\mathbb{C}^+_{-\epsilon_0}$. Avec un raisonnement semblable à celui menant à (3.15), on obtient $|\beta(x)| \asymp d_N(x)$, $x \in \mathbb{R}$. En particulier, la fonction $x \mapsto |G(x)|^p$ vérifie la condition de Muckenhoupt (A_p). Soit alors η tel que $\frac{\epsilon_0}{2} < \eta < \epsilon_0$. Comme $\tilde{\Lambda}$ est une union (non nécessairement disjointe) de deux suites $N-$Carleson dans $\mathbb{C}^-_{-\epsilon_0}$, et qu'en particulier

$$\operatorname{Im}\left(\tilde{\lambda} + i\eta\right) \leq \eta - \epsilon_0 < 0, \qquad \tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda},$$

ce qui implique que tout $x \in \mathbb{R}$ est loin de $\tilde{\Lambda}$, on obtient que

$$|G(x-i\eta)| = e^{\tau\eta}|G(x)|\left(\prod_{\tilde{\lambda}\in\tilde{\Lambda}}\left|\frac{x-\tilde{\lambda}-i\eta}{x-\tilde{\lambda}}\right|\right) \asymp |G(x)|.$$

Par conséquent, la fonction $x \mapsto |G(x-i\eta)|^p$ vérifie encore la condition de Muckenhoupt (A_p). Grâce à l'inégalité de Plancherel-Pòlya (1.6), il suffit d'estimer (3.16) sur l'axe $\{\mathrm{Im}(z) = -\eta\}$ et grâce aux fameux arguments de dualité (voir la preuve du Théorème 2.2.1 et l'Annexe A.3), il est suffisant d'estimer

$$\sup\left\{N(h) : \ h \in H^q\left(\mathbb{C}^+_{-\eta}\right), \ \|h\| = 1\right\},$$

avec

$$\begin{aligned} N(h) : &= \left|\sum_{\lambda\in\Lambda^+}\frac{a(\lambda)}{S'(\lambda)}\int\frac{G(x-i\eta)\,h(x-i\eta)}{x-i\eta-\lambda}dx\right| \\ &= \left|\sum_{\lambda\in\Lambda^+}\frac{a(\lambda)}{S'(\lambda)}\mathcal{H}\left(\tilde{G}\tilde{h}\right)(\lambda+i\eta)\right|, \end{aligned}$$

où $z \mapsto \tilde{G}(z) = G(z-i\eta)$ est une fonction extérieure de $\mathbb{C}^+$ et la fonction $z \mapsto \tilde{h}(z) = h(z-i\eta)$ appartient à H^q_+. Dans le but de calculer $S'(\lambda)$, rappelons que

$$S(z) = e^{-i\tau z}\beta(z)\,G(z), \qquad z \in \mathbb{C}^+_{-\eta} \subset \mathbb{C}^+_{-2\epsilon_0}.$$

Pour $\lambda \in \tau_n$, $n \in N_+$, on a donc

$$S'(\lambda) = c_\lambda\frac{e^{-i\tau\lambda}}{\lambda-\overline{\lambda}+2i\epsilon_0}G(\lambda)\frac{\beta}{b^{\epsilon_0}_\lambda}(\lambda),$$

où $b^{\epsilon_0}_\lambda = c_\lambda(z-\lambda)/\left(z-\overline{\lambda}-2i\epsilon_0\right)$. Utilisant que $G(\lambda) = \tilde{G}(\lambda+i\eta)$ et en posant

$$\psi := \frac{\mathcal{H}\left(\tilde{G}\tilde{h}\right)}{\tilde{G}} \text{ et } \alpha := ae^{i\tau\cdot},$$

l'expression devient

$$N(h) = \left|\sum_{n\in N_+}\sum_{\lambda\in\tau_n}\frac{\alpha(\lambda)\,\psi(\lambda+i\eta)}{\prod\limits_{\substack{\mu\in\Lambda^+_{-\epsilon_0}\\ \mu\neq\lambda}} b^{\epsilon_0}_\mu(\lambda)}\cdot\left(\lambda-\overline{\lambda}+2i\epsilon_0\right)\right|.$$

Ecrivant

$$N_+ = N_{\epsilon_0} \uplus N_\infty, \text{ avec } N_{\epsilon_0} := \{n \in N_+ : \ \tau_n \cap \{|\mathrm{Im}(z)| < \epsilon_0\} \neq \emptyset\},$$

on définit, avec les fonctions du Lemme 3.1.4 et de la Remarque 3.2.2,

$$P_{\tau_n,\alpha}(z) := \begin{cases} \sum_{k=1}^{|\tau_n|}\Delta^{k-1}_{\tau_n}\left(\alpha\left(\lambda^{(k)}_n\right)\right)\prod_{l=1}^{k-1}b_{\lambda_{n,l}}(z), & \text{si } n \in N_\infty \\ \sum_{k=1}^{|\tau_n|}\square^{k-1}_{\tau_n}\left(\alpha\left(\lambda^{(k)}_n\right)\right)\prod_{l=1}^{k-1}(z-\lambda_{n,l}), & \text{si } n \in N_{\epsilon_0} \end{cases}$$

et, en posant $\tilde{\tau}_n = \tau_n + i\eta$

$$Q_{\tilde{\tau}_n,\psi}(z) := \sum_{k=1}^{|\tau_n|} \Delta_{\tilde{\tau}_n}^{k-1}\left(\psi\left(\lambda_{n,1}+i\eta, ..., \lambda_{n,k}+i\eta\right)\right)\prod_{l=1}^{k-1} b_{\lambda_{n,l}+i\eta}(z).$$

On remarque que

$$N(h) = \left|\sum_{n\in N_+}\sum_{\lambda\in\tau_n}\frac{P_{\tau_n,\alpha}(\lambda)\,Q_{\tilde{\tau}_n,\psi}(\lambda+i\eta)}{\prod_{\mu\neq\lambda} b_\mu^{\epsilon_0}(\lambda)}\cdot\left(\lambda-\overline{\lambda}+2i\epsilon_0\right)\right|.$$

Rappelons maintenant qu'il existe une suite de rectangles $(R_n)_{n\geq 1}$ dans le demi-plan $\mathbb{C}_{-\eta}^+$ avec les propriétés (1.21), (1.22), (1.23) et (1.24), notamment $\tau_n \subset R_n$, $n \geq 1$. N'oublions pas que $\Lambda^+ \subset \mathbb{C}^+_{-\frac{\epsilon_0}{2}}$ et donc Λ^+ est loin de $\mathbb{R} - i\eta$. En notant $\Gamma_n := \partial R_n$, la fonction

$$z \mapsto h_n(z) := \frac{P_{\tau_n,\alpha}(z)\,Q_{\tilde{\tau}_n,\psi}(z+i\eta)}{\beta(z)}$$

est méromorphe dans $\mathring{R}_n$ avec des poles simples en $\lambda \in \tau_n$. Par conséquent, le théorème des résidus implique que

$$\int_{\Gamma_n} h_n(z)\,dz = 2i\pi\sum_{\lambda\in\tau_n}\operatorname{Res}(h_n,\lambda).$$

Or,

$$\operatorname{Res}(h_n,\lambda) = P_{\tau_n,\alpha}(\lambda)\,Q_{\tilde{\tau}_n,\psi}(\lambda+i\eta)\left(\frac{\beta}{b_\lambda^{\epsilon_0}}(\lambda)\right)^{-1}\left(\lambda-\overline{\lambda}+2i\epsilon_0\right).$$

Il suit que

$$N(h) = \left|\frac{1}{2i\pi}\sum_{n\in N^+}\int_{\Gamma_n}\frac{P_{\tau_n,\alpha}(z)\,Q_{\tilde{\tau}_n,\psi}(z+i\eta)}{\beta(z)}dz\right|.$$

Il est clair que $\left|b_{\lambda_{n,l}}(z)\right| \lesssim 1$ mais observons également que grâce à la relation (1.23), on a l'existence d'une constante κ telle que, pour tout $z \in \Gamma_n$ et $n \in N_{\epsilon_0}$, $|z-\lambda_{n,l}| \leq \kappa$. Ainsi, pour tout $n \in N_+$,

$$|P_{\tau_n,\alpha}(z)| \lesssim \sum_{k=1}^{|\tau_n|}\left|\tilde{\Delta}_{\tau_n}^{k-1}\left(\alpha\left(\lambda_n^{(k)}\right)\right)\right|, \qquad z\in\Gamma_n.$$

De la même manière,

$$|Q_{\tilde{\tau}_n,\psi}(z)| \lesssim \sum_{k=1}^{|\tau_n|}\left|\Delta_{\tilde{\tau}_n}^{k-1}\left(\psi\left(\lambda_{n,1}+i\eta, ..., \lambda_{n,k}+i\eta\right)\right)\right|,$$

et on obtient que

$$N(h) \lesssim \sum_{n\in N_+}\left[\left(\int_{\Gamma_n}\left|\frac{dz}{\beta(z)}\right|\right)\left(\sum_{k=1}^{|\tau_n|}\left|\tilde{\Delta}_{\tau_n}^{k-1}(\alpha)\right|\right)\left(\sum_{k=1}^{|\tau_n|}\left|\Delta_{\tilde{\tau}_n}^{k-1}(\psi)\right|\right)\right].$$

Pour $z \in \Gamma_n$, on voit que

$$\begin{aligned}|\beta(z)| &= \left(\prod_{\lambda\in\Lambda^+\setminus\tau_n}\left|\frac{z-\lambda}{z-\overline{\lambda}+2i\epsilon_0}\right|\right)\left(\prod_{\lambda\in\tau_n}\left|\frac{z-\lambda}{z-\overline{\lambda}+2i\epsilon_0}\right|\right)\\ &=: \Pi_1(z)\cdot\Pi_2(z).\end{aligned}$$

Comme Λ^+ est $N-$Carleson dans $\mathbb{C}^+_{-\epsilon_0}$, il suit du fait que R_n est loin de chaque τ_k, $k\neq n$, que

$$\Pi_1(z)\asymp 1$$

et du fait que Γ_n est loin de τ_n que

$$\Pi_2(z)\asymp 1.$$

On choisit arbitrairement $\lambda_{n,0}\in\tau_n$ et la construction des R_n donne

$$\int_{\Gamma_n}\left|\frac{dz}{\beta(z)}\right|\lesssim\int_{\Gamma_n}|dz|\lesssim \operatorname{Im}(\lambda_{n,0})+\eta\lesssim 1+|\operatorname{Im}(\lambda_{n,0})|.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}N(h) &\lesssim \left(\sum_{n\in N_+}(1+\operatorname{Im}(\lambda_{n,0}))\sum_{k=1}^{|\tau_n|}\left|\tilde{\Delta}^{k-1}_{\tau_n}\left(e^{i\tau\cdot}\alpha\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\quad\times\left(\sum_{n\in N_+}\operatorname{Im}(\lambda_{n,0}+i\eta)\sum_{k=1}^{|\tau_n|}\left|\Delta^{k-1}_{\tilde{\tau}_n}(\psi)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Maintenant, la condition (A_q) de Muckenhoupt vérifiée par $\left|\tilde{G}\right|^{-q}$ entraîne la bornitude de $\mathcal{H}$ sur

$$H^q_+\left(\left|\frac{1}{\tilde{G}}\right|^q\right):=\left\{f\in\mathcal{N}^+:\ f_{|\mathbb{R}}\in L^q\left(\left|\frac{1}{\tilde{G}}\right|^q\right)\right\},$$

($\mathcal{N}^+$ désigne la classe de Smirnov), ce qui nous permet d'affirmer que $\psi\in H^q_+$ et $\|\psi\|\lesssim\left\|\tilde{h}\right\|=1$. Mais comme

$$\bigcup_{n\in N_+}\tilde{\tau}_n=\Lambda^++i\eta$$

est en fait une suite $N-$Carleson dans $\mathbb{C}^+_{\eta-\frac{\epsilon_0}{2}}\subset\mathbb{C}^+$ et que $\psi\in H^q_+$, le Théorème 3.3.2 implique que

$$\left(\sum_{n\in N_+}\operatorname{Im}(\lambda_{n,0}+i\eta)\sum_{k=1}^{|\tau_n|}\left|\Delta^{k-1}_{\tilde{\tau}_n}(\psi)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\lesssim\|\psi\|\lesssim\|h\|=1.$$

Au final, on obtient

$$N(h)\lesssim\left(\sum_{n\in N_+}(1+\operatorname{Im}(\lambda_{n,0}))\sum_{k=1}^{|\tau_n|}\left|\tilde{\Delta}^{k-1}_{\tau_n}\left(e^{i\tau\cdot}\alpha\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

ce qui termine la démonstration.

3.5 A propos de la condition $N-$Carleson

Dans l'énoncé du Théorème 3.4.2 et dans toute la section précédente, il est clair que la définition de l'espace $X_\tau^p(\Lambda)$ repose sur le fait que la suite Λ est a priori supposée $N-$Carleson dans tout demi-plan $\mathbb{C}_a^\pm$, et plus précisément cette définition dépend des ensembles σ_n relativement auxquels on construit les différences divisées. Dans cette section, on va montrer que dans un certain sens, la condition $N-$Carleson est nécessaire pour que R_Λ soit un isomorphisme entre PW_τ^p et un certain espace, à définir.

Il sera alors utile d'introduire la distance suivante

$$\delta(z,\xi) := \frac{|z-\xi|}{1+\left|z-\overline{\xi}\right|}, \quad z,\xi \in \mathbb{C},$$

qui permet d'exprimer que, proche de l'axe réel, on peut localement considérer la distance euclidienne, et loin de l'axe c'est la distance pseudo-hyperbolique qui nous intéresse (voir [Se98, p. 715]). Soient alors $\Lambda := \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes, $N \geq 1$ un entier fixé et $\eta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Pour $\lambda \in \Lambda$, on définit

$$D_{\lambda,\eta} := \{z \in \mathbb{C} : \ \delta(\lambda, z) < \eta\}$$

et

$$N_\lambda := \{\mu_{\lambda,i} : \ 1 \leq i \leq N\} \subset \Lambda$$

l'ensemble des N plus proches voisins de λ (incluant en particulier λ), relativement à la distance δ. On pose ensuite

$$\sigma_\lambda := D_{\lambda,\eta} \cap N_\lambda, \qquad n_\lambda := |\sigma_\lambda| \leq N.$$

Le lecteur averti remarquera que l'ensemble N_λ, et par conséquent σ_λ, n'est pas unique. Il parait maintenant naturel d'introduire l'espace suivant (pour $1 < p < \infty$)

$$X_\tau^p(\Lambda, N) := \left\{a = (a(\lambda))_{\lambda\in\Lambda} : \ \|a\|_{X_\tau^p(\Lambda,N)} < \infty\right\},$$

où

$$\|a\|^p_{X_\tau^p(\Lambda,N)} := \sum_{\lambda\in\Lambda} (1+|\mathrm{Im}(\lambda)|) \sum_{k=1}^{n_\lambda} \left|\tilde{\Delta}_{\sigma_\lambda}\left(ae^{\pm i\tau\cdot}\left(\mu^{(k)}\right)\right)\right|^p$$

avec

$$\tilde{\Delta}_{\sigma_\lambda} := \begin{cases} \Delta_{\sigma_\lambda}, & \text{si } \sigma_\lambda \cap \{z \in \mathbb{C} : \ |\mathrm{Im}(z)| < 1\} = \emptyset \\ \square_{\sigma_\lambda}, & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$e^{\pm i\tau\mu} := \begin{cases} e^{i\tau\mu}, & \text{si } \mu \in \sigma_\lambda \text{ et } \sigma_\lambda \cap \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}(z) \geq 0\} \\ e^{-i\tau\mu}, & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Remarque 3.5.1. Il est possible de montrer que si $\Lambda \cap \mathbb{C}_a^\pm$ est $N-$Carleson dans le demi-plan correspondant, pour chaque $a \in \mathbb{R}$, alors cette norme est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{X_\tau^p(\Lambda)}$ définie dans la section précédente. Le lecteur en trouvera la preuve dans [Ha96a, pp. 36-38].

Le résultat est le suivant.

Théorème 3.5.2. *Si R_Λ est un isomorphisme de PW_τ^p sur $X_\tau^p(\Lambda, N)$, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\Lambda \cap \mathbb{C}_a^\pm$ est $N'-$Carleson dans le demi-plan correspondant, avec $N' \leq N$.*

La preuve est en deux parties. On commence par montrer que si R_Λ est un tel isomorphisme, alors $\Lambda_a^\pm := \Lambda \cap \mathbb{C}_a^\pm$ est $N'-$Carleson, pour un certain N'. On montera dans un second temps que $N' \leq N$.

3.5.1 $\Lambda_a^\pm$ est $N'-$Carleson

Cette partie de la preuve ne nécessite que le fait que R_Λ soit borné. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Rappelons que grâce à l'inégalité de Plancherel-Pòlya (1.6), l'application

$$\begin{array}{rccc} \tau_a : & PW_\tau^p & \to & PW_\tau^p \\ & f & \mapsto & f\left(\cdot + i\left(1+|a|\right)\right) \end{array}$$

est un isomorphisme et il en est donc de même pour l'application $\tilde{R}_\Lambda := R_\Lambda \circ \tau_\lambda$. Il est bien évident que $\tilde{R}_\Lambda = R_{\tilde{\Lambda}}$, où

$$\tilde{\Lambda} := \Lambda + i\left(1+|a|\right) =: \left\{\tilde{\lambda}\right\}_{\tilde{\lambda}\in\tilde{\Lambda}}.$$

Remarquons que si $\lambda \in \Lambda_a^+$, alors, en reprenant les notations du Lemme 3.1.4,

$$|a_\lambda|^p e^{-p|\mathrm{Im}(\lambda)|} = \left|P_{\sigma_\lambda, e^{\pm i\tau\cdot}}(\lambda)\right| \le \sum_{k=1}^{n_\lambda} \left|\tilde{\Delta}_{\sigma_\lambda}^{k-1}\left(ae^{\pm i\tau\cdot}\left(\mu^{(k)}\right)\right)\right|^p$$

et par conséquent $X_\tau^p\left(\tilde{\Lambda}, N\right)$ s'injecte dans $l^p\left(\left(1+\left|\mathrm{Im}(\tilde{\lambda})\right|\right) e^{-p\left|\mathrm{Im}(\tilde{\lambda})\right|}\right)$, de sorte que

$$R_{\tilde{\Lambda}} :\ PW_\tau^p \to l^p\left(\left(1+\left|\mathrm{Im}(\tilde{\lambda})\right|\right) e^{-p\left|\mathrm{Im}(\tilde{\lambda})\right|}\right)$$

est borné. Posons alors $\tilde{\Lambda}_a^+ := \Lambda_a^+ + i\left(1+|a|\right)$. On a déjà mentionné (voir Chapitre 1, Section 1.2.3) que PW_τ^p était isomorphe à $K_{I^\tau}^p$, où $I^\tau(z) = \exp\left(2i\tau z\right)$ (plus précisément, on peut identifier $K_{I^\tau}^p$ à $e^{i\tau z} PW_\tau^p$), et donc

$$R_{\tilde{\Lambda}_a^+}^{I^\tau} := R_{\tilde{\Lambda}_a^+} | K_{I^\tau}^p :\ K_{I^\tau}^p \to L^p\left(\mu_{\tilde{\Lambda}_a^+}\right)$$

est borné, où on a posé

$$\mu_{\tilde{\Lambda}_a^+} := \sum_{\tilde{\lambda}\in\tilde{\Lambda}_a^+} \mathrm{Im}\left(\tilde{\lambda}\right)\delta_{\tilde{\lambda}}.$$

Dans le but de montrer le résultat affirmé, à savoir le caractère $N'-$Carleson de $\tilde{\Lambda}_a^+$ dans $\mathbb{C}^+$, il suffit de montrer que $\mu_{\tilde{\Lambda}_a^+}$ est une mesure de Carleson pour H_+^p. Comme $\tilde{\Lambda}_a^+ \subset \mathbb{C}_1^+$, il est possible de trouver $\epsilon \in (0,1)$ tel que

$$\tilde{\Lambda}_a^+ \subset L\left(I^\tau, \epsilon\right) := \left\{z \in \mathbb{C}^+ :\ |I^\tau(z)| < \epsilon\right\}.$$

Ceci étant, un résultat de Treil et Volberg (voir [TV95] ou [Al97]) nous permet d'affirmer que la bornitude de $R_{\tilde{\Lambda}_a^+}^{I^\tau}$ entraîne que

$$\sup_J \frac{\mu_{\tilde{\Lambda}_a^+}\left(\omega_J\right)}{m(J)} < \infty, \tag{3.17}$$

où J parcourt l'ensemble des intervalles de longueur finie pour lesquels la *fenêtre de Carleson* ω_J construite sur J satisfait

$$\omega_J \cap L\left(I^\tau, \epsilon\right) \neq \emptyset.$$

Observons alors que l'ensemble de niveau $L\left(I^\tau, \epsilon\right)$ est inclus dans le demi-plan $\mathbb{C}_b^+$, $b = \log\left(1/\epsilon\right)$, de sorte que si la longueur de la fenêtre de Carleson ω_J est inférieure à b, alors

$\omega_J \cap L(I^\tau, \epsilon) = \emptyset$. Par conséquent, on a dans ce cas $\omega_J \cap \tilde{\Lambda}_a^+ = \emptyset$ et $\mu_{\tilde{\Lambda}_a^+}(\omega_J) = 0$. Il suit que l'inégalité (3.17) est vraie pour *tous* les intervalles de longueur finie, ce qui est équivalent au fait que la mesure $\mu_{\tilde{\Lambda}_a^+}$ est de Carleson, ou encore que la suite $\tilde{\Lambda}_a^+$ est $N'-$Carleson dans $\mathbb{C}^+$. Ceci donne bien que Λ_a^+ est $N'-$Carleson dans le demi-plan correspondant.

En considérant l'application

$$\begin{array}{rccc} s: & PW_\tau^p & \rightarrow & PW_\tau^p \\ & f & \mapsto & f(-\cdot) \end{array}$$

qui est également un isomorphisme, on a le résultat pour Λ_a^-.

3.5.2 $N' \leq N$

Pour pouvoir montrer que $N' \leq N$, on va écrire $N' = N + k$, $k \geq 1$, et voir qu'on peut baisser la valeur de k. On raisonne uniquement sur Λ_a^+ pour ne pas alourdir la preuve, mais la preuve est la même pour Λ_a^-. Dans la suite, si Λ_a^+ est $(N+k)-$Carleson, on écrira

$$\Lambda_a^+ = \biguplus_{n \geq 1} \tau_n^k,$$

où les ensembles τ_n^k proviennent de la condition de Carleson généralisée, et il sera alors possible de supposer que

$$\mathrm{diam}_\delta\left(\tau_n^k\right) < \frac{\eta}{4}$$

(ce qui implique en particulier que $\tau_n^k \subset D_{\lambda,\eta}$) et que

$$\gamma := \inf_{n \neq m} \delta\left(\tau_n^k, \tau_m^k\right) > 0. \tag{3.18}$$

Nous allons avoir besoin du lemme suivant ainsi que de son corollaire. Pour des raisons techniques, on va supposer (sans perte de généralité, comme on a pu le constater à la section précédente) que $\Lambda_a^+ \subset \mathbb{C}_1^+$ de sorte qu'on raisonnera uniquement avec la métrique pseudo-hyperbolique et les différences divisées correspondantes.

Lemme 3.5.3. *Si R_Λ est un isomorphisme entre PW_τ^p et $X_\tau^p(\Lambda, N)$ et que Λ_a^+ est $(N+k+1)-$ Carleson, $k \geq 0$, il est alors possible de trouver $\vartheta > 0$ tel que τ_n^{k+1} avec $\left|\tau_n^{k+1}\right| = N+k+1$, vérifie diam$_\rho\left(\tau_n^{k+1}\right) > \vartheta$.*

Preuve. Sinon, on peut trouver une sous-suite $(\tilde{\tau}_j)_j$ de $\left(\tau_n^{k+1}\right)_n$ telle que $|\tilde{\tau}_j| = N+k+1$ et $\mathrm{diam}_\rho(\tilde{\tau}_j) \to 0$, $j \to \infty$. On note alors $\tilde{\tau}_j = \left\{\lambda_i^j,\ 0 \leq i \leq N+k\right\}$. Considérons alors la suite $a^j = (a^j(\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ judicieusement définie par

$$a^j(\lambda) := 0, \quad \lambda \neq \lambda_{N+k}^j,$$

et

$$a^j\left(\lambda_{N+k}^j\right) := e^{\tau \mathrm{Im}\left(\lambda_{N+k}^j\right)} \mathrm{Im}\left(\lambda_{N+k}^j\right)^{-\frac{1}{p}} \frac{\prod_{i \neq N+k} \left|b_{\lambda_i^j}\left(\lambda_{N+k}^j\right)\right|}{\max_{i \neq N+k} \left|b_{\lambda_i^j}\left(\lambda_{N+k}^j\right)\right|}.$$

Soit

$$M_j := \left\{\lambda \in \Lambda_a^+ :\ \lambda_{N+k}^j \in \sigma_\lambda\right\},$$

l'ensemble des points de la suite Λ_a^+ "proches" de λ_{N+k}^j. Comme $\operatorname{diam}_\rho(\tilde{\tau}_j) < \frac{\eta}{4}$ et que $\lambda_{N+k}^j \in \tilde{\tau}_j$, tout point $\lambda \in \tilde{\tau}_j$ vérifie $\sigma_\lambda \ni \lambda_{N+k}^j$, ou encore $\tilde{\tau}_j \subset M_j$. Soit alors $B_j := M_j \setminus \tilde{\tau}_j$. Le lecteur remarquera que $B_j \neq \emptyset$ lorsque par exemple on peut trouver un paquet $\tilde{\tau}_m$ à une distance de $\tilde{\tau}_j$ inférieure à η. Comme par ailleurs Λ_a^+ est $(N+k+1)-$Carleson,

$$\sup_j \left|\Lambda_a^+ \cap D_{\lambda_{N+k}^j}\right| < \infty,$$

ce qui entraîne que

$$\sup_j |M_j| < \infty.$$

Par construction,

$$\left\|a^j\right\|_{X_\tau^p(\Lambda,N)}^p = \sum_{\lambda\in M_j} (1+\operatorname{Im}(\lambda)) \sum_{l=1}^{n_\lambda} \left|\Delta_{\sigma_\lambda}^{l-1}\left(a^j e^{i\tau\cdot}\left(\mu^{(l)}\right)\right)\right|^p.$$

(Remarquons qu'on ne somme que sur les points qui contiennent λ_{N+k}^j dans leur voisinage.) Il nous faut estimer cette expression. Soit $\lambda \in M_j$. On rappelle que $n_\lambda = |\sigma_\lambda| \leq N+k+1$. Comme $a^j(\mu) = 0$, si $\mu \neq \lambda_{N+k}^j$, on constate que pour chaque $l = 1, ..., n_\lambda$, la différence divisée

$$\left|\Delta_{\sigma_\lambda}^{l-1}\left(a^j e^{i\tau\cdot}\left(\mu^{(l)}\right)\right)\right|$$

sera ou bien égale à 0, ou bien à

$$\frac{\left|a^j\left(\lambda_{N+k}^j\right) e^{i\tau\lambda_{N+k}^j}\right|}{\prod_{m\in\omega_l}\left|b_{\lambda_m^j}\left(\lambda_{N+k}^j\right)\right|},$$

où $\omega_l \subset \sigma_\lambda$ contient exactement $l-1$ points. Décomposons alors $\omega_l = \omega_{l,1} \uplus \omega_{l,2}$, avec $\omega_{l,1} \subset \tilde{\tau}_j$ et $\omega_{l,2} \subset B_j$. Remarquons que ω_l ne peut pas contenir Λ_{N+k}^j. Par définition, (3.18) et le fait que $\omega_{l,2} \cap \tilde{\tau}_j = \emptyset$ impliquent que

$$\left|b_\mu\left(\lambda_{N+k}^j\right)\right| \geq \gamma, \quad \mu \in \omega_{l,2}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n_\lambda} \left|\Delta_{\sigma_\lambda}^{l-1}\left(a^j e^{i\tau\cdot}\left(\mu^{(l)}\right)\right)\right|^p &\leq \sum_{l=1}^{n_\lambda} \operatorname{Im}\left(\lambda_{N+k}^j\right)^{-1} \frac{\prod_{i\neq N+k}\left|b_{\lambda_i^j}\left(\lambda_{N+k}^j\right)\right|^p}{\max_{i\neq N+k}\left|b_{\lambda_i^j}\left(\lambda_{N+k}^j\right)\right|^p} \prod_{m\in\omega_l}\left(\left|b_{\lambda_m^j}\left(\lambda_{N+k}^j\right)\right|^{-p}\right) \\
&\leq \sum_{l=1}^{n_\lambda} \operatorname{Im}\left(\lambda_{N+k}^j\right)^{-1} \frac{\prod_{\xi\in\Omega_l}\left|b_\xi\left(\lambda_{N+k}^j\right)\right|^p}{\max_{i\neq N+k}\left|b_{\lambda_i^j}\left(\lambda_{N+k}^j\right)\right|^p} \cdot \gamma^{-p|\omega_{l,2}|} \\
&\lesssim \frac{N}{\operatorname{Im}\left(\lambda_{N+k}^j\right)},
\end{aligned}$$

où les $\Omega_l := \left\{\lambda_i^j : \ i = 0, ..., N+k-1\right\} \setminus \omega_{l,1}$ sont des sous-ensembles de $\tilde{\tau}_j$. La dernière des inégalités précédentes provient de l'observation que Ω_l contient au moins

$$N+k-|\omega_{l,1}| \geq N+k-(n_\lambda-1) \geq N+k-(N-1) = k+1 \geq 1$$

points. On en déduit que $a^j \in X^p_\tau(\Lambda, N)$ et que sa norme est uniformément bornée. Comme par hypothèse R_Λ est surjectif, il existe $f^j \in PW^p_\tau$ tel que $f^j|\Lambda = a^j$ et

$$\left\|f^j\right\|_{PW^p_\tau} \lesssim \left\|a^j\right\|_{X^p_\tau(\Lambda,N)} \lesssim 1.$$

En posant $\tilde{f}^j := e^{i\tau\cdot} f^j$, on définit une fonction de H^p_+ et comme Λ^+_a est $(N+k+1)$ $-$Carleson dans $\mathbb{C}^+$, le Corollaire 3.3.2 implique en particulier que

$$\operatorname{Im}\left(\lambda^j_{N+k}\right)\left|\Delta^{N+k}_{\tilde{\tau}_j}\left(\tilde{f}^j\left(\lambda^{(N+k+1)}_i\right)\right)\right|^p \lesssim \left\|f^j\right\| \lesssim 1.$$

Cependant, par construction, nous avons

$$\operatorname{Im}\left(\lambda^j_{N+k}\right)\left|\Delta^{N+k}_{\tilde{\tau}_j}\left(\tilde{f}^j\left(\left(\lambda^j\right)^{(N+k+1)}\right)\right)\right|^p = \frac{1}{\max\limits_{i\neq N+k}\rho\left(\lambda^j_{N+k},\lambda^j_i\right)^p}$$

qui tend vers ∞ lorsque $j \to \infty$ car $\operatorname{diam}_\rho(\tilde{\tau}_j) \to 0$, $j \to \infty$. Ceci nous donne la contradiction voulue et termine la démonstration du lemme. □

La preuve du Théorème 3.5.2 découle alors directement du corollaire suivant.

Corollaire 3.5.4. *Si R_Λ est un isomorphisme entre PW^p_τ et $X^p_\tau(\Lambda, N)$ et que Λ^+_a est $(N+k+1)-$Carleson, pour un certain $k \geq 0$, alors Λ^+_a est $(N+k)-$Carleson.*

Preuve. On écrit $\Lambda^+_a = \biguplus_{n\geq 1}\tau^{k+1}_n$, avec $\left|\tau^{k+1}_n\right| \leq N+k+1$. Supposons qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels on a $\left|\tau^{k+1}_n\right| = N+k+1$, et notons Z l'ensemble de ces entiers. Grâce au lemme précédent, on peut trouver $\vartheta > 0$ tel que $\operatorname{diam}_\rho\left(\tau^{k+1}_n\right) > \vartheta$, pour $n \in Z$. Alors, pour tout $n \in Z$, il est possible d'écrire $\tau^{k+1}_n = \{\lambda^n_i :\ 1 \leq i \leq N+k+1\}$ de sorte que

$$\rho\left(\lambda_i, \lambda^n_{N+k+1}\right) \geq \frac{\vartheta}{2(N+k)}, \quad i = 1, ..., N+k.$$

Il suit que

$$\Lambda^+_a = \left(\biguplus_{n\notin Z}\tau^{k+1}_n\right) \uplus \left(\biguplus_{n\in Z}\tau^{k+1}_n \setminus \left\{\lambda^n_{N+k+1}\right\}\right) \uplus \left(\biguplus_{n\in Z}\left\{\lambda^n_{N+k+1}\right\}\right)$$

est l'union disjointe d'ensembles σ_n, avec $|\sigma_n| \leq N+k$ qui sont tels que la suite des produits de Blaschke $\left(B_{\sigma_n}\right)_n$ vérifie la condition de Carleson généralisée. Par conséquent, Λ^+_a est bien $(N+k)$ $-$Carleson. □

3.6 Exemples et Remarques

3.6.1 Parties imaginaires non bornées

Le Théorème 3.4.2 reprend les méthodes de Lyubarskii et Seip ([LS97]) qui se sont affranchis des conditions de bornitude sur les parties imaginaires des éléments de la suite Λ

qui apparaissaient dans les résultats précédents, notamment dans les travaux de Hrushev, Nikolski et Pavlov ([HNP81]) ou même plus récemment dans ceux d'Avdonin et Ivanov ([AI01]). Il est donc légitime de se demander si néanmoins, des suites Λ avec

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}|\mathrm{Im}(\lambda)| = \infty \tag{3.19}$$

peuvent vérifier les conditions (H_N) du Théorème. Nous construisons ici une suite Λ, pour laquelle c'est le cas. L'idée de cette construction est dûe à A. Baranov et utilise des résultats de Y. Belov.

Proposition 3.6.1. *Il existe une suite 2−Carleson (qui n'est pas une suite de Carleson) $\Lambda \subset \mathbb{C}^+$ vérifiant (3.19) et les hypothèses (H_2) du Théorème 3.4.2 pour $p = 2$.*

Preuve. On veut construire une suite Λ qui soit 2−Carleson (mais pas Carleson), dont la série génératrice est bien définie et de type exponentiel strictement positif, dont la fonction $d_2(x)$ est équivalente à une constante sur l'axe réel, qui vérifie la condition de Muckenhoupt (A_2) et satisfait (3.19).

Pour cela, on commence par introduire $\Lambda_0 := \{2^n i\}_{n\geq 0}$ et la fonction de type exponentiel

$$F_0\,(z) := \prod_{n\geq 0}\left(1-\frac{z}{2^n i}\right), \qquad z\in\mathbb{C}.$$

On pose alors $\Omega(x) := \log|F_0(x)|$, $x\in\mathbb{R}$, de sorte que $\omega(x) := e^{-\Omega(x)} = |F_0(x)|^{-1}$. On peut alors montrer que $\omega(x) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\log^2|x|\right)$, en particulier $\omega \in L^2\,(\mathbb{R})$. De plus,

$$\Omega(x) = \sum_{n\geq 0}\left(\log|2^n+ix| - \log|2^n|\right)$$

et comme

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int\frac{\log\left(x^2+4^n\right)}{1+x^2}dx &= \frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int\frac{\log\left(x+2^n i\right)}{1+x^2}\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\left(2i\pi\mathrm{Res}\left(\frac{\log\left(z-2^n i\right)}{1+z^2},i\right)\right)\\ &= 2\mathrm{Re}\left(\log\left(i-2^n i\right)\right)\\ &= \log\left(\left(1+2^n\right)^2\right),\end{aligned}$$

on obtient que

$$\frac{1}{\pi}\int\frac{\Omega(x)}{1+x^2}dx = \sum_{n\geq 0}\log\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < \infty$$

ou encore $\Omega \in L^1\left(\frac{dx}{1+x^2}\right)$. On trouve par ailleurs que

$$\Omega'(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{x}{x^2+4^n} \in L^\infty\,(\mathbb{R})\,.$$

Sachant que, si $\alpha > 0$, la transformée de Hilbert

$$\mathcal{H}\left(\frac{t}{t^2+\alpha}\right) = \frac{\sqrt{\alpha}}{t^2+\alpha},$$

et que, $\Omega' \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^1\left(\frac{dx}{1+x^2}\right)$, on obtient $\widetilde{\Omega}'$ en calculant

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega}' \quad (t) = & \ \mathcal{H}\left(\Omega'\right)(t) + c \\ = & \ -\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{t^2+4^n} + c. \end{aligned}$$

Il suit que $\widetilde{\Omega}' \in L^\infty(\mathbb{R})$ et on peut donc trouver $a > 0$ tel que $\left\|\widetilde{\Omega}'\right\|_\infty \leq \frac{a}{2}$. Nous pouvons alors appliquer un résultat de Y. Belov ([Be09, Theorem 2.6]) affirmant l'existence d'une fonction $F_1 \in PW_a^2$ telle que

$$|F_1(x)| \asymp w(x),$$

ou encore

$$|F_1(x)F_0(x)| \asymp 1.$$

Mais, comme F_1 est en particulier dans la classe de Cartwright, le Théorème 1.2.9 donne la décomposition

$$F_1(z) = ce^{i\sigma z} \prod_{\lambda\in\Lambda_1} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right),$$

et en posant

$$S_1(z) := \prod_{\lambda\in\Lambda_1} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right),$$

on définit bien une fonction entière d'un certain type exponentiel $\sigma \leq a$. Maintenant, la fonction $S := S_1 F_0$ est aussi une fonction entière de type exponentiel τ, pour un certain $\tau > 0$. Si le type était nul, par un principe de Phragmen-Lindelöf, S serait constante (car S est de module comparable à 1 sur l'axe réel), ce qui n'est pas le cas. Soit $\Lambda := \Lambda_0 \cup \Lambda_1$ la suite formée des zéros de S, qui satisfait en particulier (3.19). De plus, $|S|^2 \asymp 1 \in (A_2)$. Il reste à vérifier que Λ est $2-$Carleson, qu'elle est relativement dense et que $d_2(x) \asymp 1$.

Une étude plus précise de la construction de la fonction F_1dans la preuve de Belov (voir [Be06] et [Be09]) permet de voir que ses zéros $\Lambda_1 = \{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{x_n + i\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sont placés de sorte que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x_n \in \mathbb{R}$ est un point bien choisi d'un intervalle J_n. Supposons que les $(x_n)_n$ sont ordonnés de manière croissante. Les intervalles J_n forment une partition de $\mathbb{R}$ et de plus

$$0 < m := \inf_{n\in\mathbb{Z}} |J_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} |J_n| =: M < \infty.$$

Ces dernières inégalités entraînent donc que la suite Λ_1 est relativement dense. De plus, on déduit des mêmes inégalités que

$$\inf_n |z_{2n} - z_{2n+2}| > 0 \text{ et } \inf_{n\neq m} |z_{2n+1} - z_{2m+1}| > 0.$$

Ainsi, la suite est au plus $2-$Carleson. Il y a alors deux alternatives : Λ n'est pas Carleson, et comme il est clair que $d_2(x) \asymp 1$, Λ et τ conviennent ; ou bien Λ est Carleson, et dans ce cas, cela va nécessiter l'ajout d'autres points. Quitte à considérer $\alpha\Lambda$ et $\frac{\tau}{\alpha}$, on peut supposer que $M < \frac{1}{4}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $k(n) \in \mathbb{Z}$ tel que $n \in J_{k(n)}$. Soit alors $\epsilon_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$n + \epsilon_n \in J_{k(n)} \setminus \left\{x_{k(n)}\right\} \text{ et } \left|n + \epsilon_n - x_{k(n)}\right| \longrightarrow 0,\ n \to \infty.$$

Par le théorème de Kadets (qu'on peut appliquer car $\sup_n |\epsilon_n| \leq M < \frac{1}{4}$), la suite $\Lambda_2 := \{n + \epsilon_n + i\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est d'interpolation complète dans PW_π^2. En particulier, le théorème de Lyubarskii-Seip implique que nécessairement

$$S_2(z) := \prod_{n\in\mathbb{Z}} \left(1 - \frac{z}{n + \epsilon_n + i}\right)$$

définit une fonction entière de type π et que $x \mapsto |S_2(x)|^2 \in (A_2)$. On pose alors

$$\tilde{\Lambda} := \Lambda \cup \Lambda_2$$

qui est bien $2-$Carleson (mais pas Carleson, par construction) et dont la série génératrice $\tilde{S} = SS_2$ est une fonction entière de type exponentiel $\tilde{\tau}$, où $0 < \tilde{\tau} \leq \pi + \tau$, avec

$$|\tilde{S}|^2 = |S_2|^2 |S|^2 \asymp |S_2|^2 \in (A_2)$$

et donc $\tilde{\Lambda}$ vérifie les propriétés (H_2) pour $p = 2$ et $\tilde{\tau}$, ce qui termine la démonstration. □

Remarque 3.6.2. La difficulté dans cette construction provient du caractère complet qu'on souhaite obtenir. Si on voulait juste une suite Λ d'interpolation dans PW_τ^p avec des parties imaginaires non bornées, un résultat affirme ([Ni02b, Corollary 4.5.2 p. 314]) qu'il suffit que la suite $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ soit telle que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\,(\lambda_n) = +\infty$ et que Λ vérifie la condition de Carleson dans un demi-plan $\mathbb{C}_a^+$, pour un certain $a \in \mathbb{R}$.

3.6.2 Un résultat d'Avdonin et Ivanov

Dans un article paru en 2001 ([AI01]), Avdonin et Ivanov s'intéressent, dans le but d'une application en théorie du contrôle, aux différences divisées d'exponentielles dans $L^2(0,\tau)$. La suite Λ considérée est supposée dans une bande horizontale de largeur finie, *relativement uniformément séparée* (c'est à dire réunion finie de suites uniformément séparées) et les auteurs considèrent donc les différences divisées euclidiennes des exponentielles $e^{\lambda_n t}$. Comme on a déjà vu, dans le cas de la bande, la séparation uniforme est équivalente à la condition de Carleson, donc la séparation uniforme relative est équivalente au caractère $N-$Carleson, pour un certain $N \geq 1$. On peut alors faire la décomposition par paquets $\Lambda = \biguplus \sigma_n$.

Les auteurs montrent alors que la famille des différences divisées d'exponentielles

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \left\{\square_{\sigma_n}^{k-1}\left(e^{\lambda_{n,1}t}, ..., e^{\lambda_{n,k}t}\right), \quad 1 \leq k \leq |\sigma_n|\right\}$$

est une base de Riesz de $L^2(0,\tau)$ (ce qui est équivalent à ce que l'opérateur de restriction R_Λ soit un isomorphisme de $PW_{\frac{\tau}{2}}^2$ sur $X_{\frac{\tau}{2}}^p(\Lambda)$) si et seulement si la suite Λ possède une série génératrice S qui est une fonction entière dont la largeur du diagramme indicateur est τ et telle qu'il existe $h > 0$ pour lequel

$$x \mapsto |S(x + ih)|^2$$

vérifie la condition de Muckenhoupt (A_2).

Le Théorème 3.4.2 est donc une généralisation du résultat d'Avdonin et Ivanov dans le cas $p \neq 2$ et Λ non nécessairement incluse dans une bande horizontale de largeur finie.

Remarque 3.6.3. Dans un autre article de la même époque, Baiocchi, Komornik et Loreti ([BKL02]), s'intéressent également aux familles de différences divisées d'exponentielles dans $L^2(I)$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et généralisent des résultats liant interpolation (et donc suites de Riesz d'exponentielles) et densité (voir par exemple la Section 2.1 et les théorèmes énoncés dans [Se95]).

Les suites Λ considérées sont des suites croissantes de réels $\{\lambda_n\}_n$ et satisfont une condition de "saut" (*gap condition* en anglais), c'est à dire qu'on suppose qu'il existe $M \in \mathbb{N}^\star$, il existe $\gamma > 0$ tels que pour tout n,

$$\lambda_{n+M} - \lambda_n \geq M\gamma.$$

Alors, si $f(t) = \sum_n a_n e_n(t)$ est une somme finie, où les

$$e_n(t) := \sum_{p=m}^{n} \left[\prod_{\substack{q=m \\ q\neq p}}^{n} (\lambda_p - \lambda_q) \right]^{-1} e^{i\lambda_p t}$$

sont des différences divisées d'exponentielles. L'estimation

$$\int_I |f(t)|^2 \, dt \asymp \sum_n |a_n|^2$$

est alors vraie dès que la longueur de l'intervalle I vérifie

$$|I| > 2\pi\gamma.$$

Chapitre 4

Théorie du contrôle

4.1 Introduction : Contrôlabilité des sytèmes différentiels linéaires

Comme on l'a mentionné à plusieurs reprises, la théorie du contrôle, ou l'étude des états accessibles d'un système différentiel linéaire, fut le leitmotiv de cette thèse. Dans ce dernier chapitre, nous introduisons donc le sujet et faisons les liens avec les résultats énoncés précedemment. Plus précisément, on considère le système suivant

$$\begin{cases} x'(t) & = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) & = x_0 \end{cases}, \qquad t \geq 0, \tag{4.1}$$

où A est le *générateur infinitésimal* d'un c_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert X, dont le domaine de définition est noté $\mathcal{D}(A)$ et B est un opérateur borné d'un certain espace de Hilbert $\mathcal{U}$ dans X, appelé *opérateur de contrôle*. On renvoie au livre de Nikolskii ([Ni02b, Part D]) pour davantage de détails sur tout ce qui va suivre ici mais le lecteur trouvera les définitions et propriétés relatives aux semi-groupes dans le très récent livre de Tucsnak et Weiss ([TW09]). Le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sera supposé *exponentiellement stable,* c'est à dire qu'on supposera l'existence d'un certain $\alpha > 0$ tel qu'on puisse trouver $M \geq 1$ vérifiant

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t}, \qquad t \geq 0. \tag{4.2}$$

Contrôler le système (4.1) signifie agir sur le système en choisissant la *fonction d'entrée* u convenable. Plus précisément, en partant d'un état initial $x_0 \in X$, on veut que le système atteigne en un temps $\tau > 0$ l'état final imposé à l'avance $x_1 = x(\tau)$, où x est la solution de (4.1) qui est donnée par

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-r)Bu(r)dr =: S(t)x_0 + c(t)u. \tag{4.3}$$

L'opérateur $c(\tau)$ est appelé *opérateur de contrôllabilité* (en temps $\tau < \infty$) et on s'intéresse à son image qui représente l'espace des états accessibles depuis 0. On s'intéresse également au contrôle en temps ∞, dans ce cas, on consière l'opérateur de contrôlabilité

$$c(\infty)u := \int_0^\infty S(t)Bu(t)dt, \qquad u \in L^2(0, \infty; \mathcal{U}).$$

On dit que le système est

- *Exactement COntrôlable* en $\tau > 0$ (respectivement en $\tau = \infty$), ou (ECO), si pour tous $x_0, x_1 \in X$, il existe une entrée $u \in L^2(0, \tau; \mathcal{U})$ telle que $x(0) = x_0$ et $x(\tau) = x_1$ (respectivement $u \in L^2(0, \infty; \mathcal{U})$ et $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_1$) ;
- *Contrôlable à l'équilibre* en $\tau > 0$ (respectivement en $\tau = \infty$), ou *Null COntrollable* (NCO) en anglais, si pour tout $x_0 \in X$, il existe une entrée $u \in L^2(0, \tau; \mathcal{U})$ telle que $x(0) = x_0$ et $x(\tau) = 0$ (respectivement $u \in L^2(0, \infty; \mathcal{U})$ et $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_1$) ;
- *Approximativement COntrôlable* en $\tau > 0$, ou (ACO), si pour tous $x_0, x_1 \in X$ et $\epsilon > 0$, il existe une entrée $u \in L^2(0, \tau; \mathcal{U})$ telle que $x(0) = x_0$ et

$$\|x(\tau) - x_1\| < \epsilon.$$

On peut voir que le contrôle exact implique nécessairement des propriétés sur la "taille" du semi-groupe et de l'opérateur de contrôle. Plus précisément, on a les deux résultats suivants.

Théorème 4.1.1. *(voir [Ni02b, Theorem 1.3.7 p. 210]) On considère le système (4.1), où A est le générateur d'un c_0-semi-groupe et $B : \mathcal{U} \to X$ est un opérateur borné.*

(1) *Si le système est (ECO) en temps $\tau > 0$, alors il existe des constantes $\gamma, \epsilon > 0$ telles que*

$$\|S(t)^\star y\| \geq \epsilon e^{-\gamma t} \|y\|$$

pour tous $t > 0$ et $y \in X$;

(2) *Réciproquement, s'il existe $t_0 > 0$ tel que*

$$\inf_{\|y\|=1} \|S(t_0)^\star y\| > 0,$$

alors le système est (ECO) en tout temps $\tau > 0$ à condition que $B\mathcal{U} = X$.

Corollaire 4.1.2. *Si le système (4.1) est (ECO) en temps $\tau > 0$ pour un certain opérateur B, alors le système associé à tout autre opérateur $B' : \mathcal{U} \to X$ est encore (ECO) en tout temps $\tau' > 0$ à condition que $B'\mathcal{U} = X$.*

Remarque 4.1.3. Dans le cas d'un "gros" opérateur de contrôle (en particulier lorsqu'il est surjectif), le contrôle exact ne dépend pas du temps $\tau > 0$. En revanche, la surjectivité de B n'est pas nécessaire pour le caractère (ECO) et si ce n'est pas le cas, le contrôle exact peut dépendre de τ.

Théorème 4.1.4. *(voir [Ni02b, Theorem 1.3.19 p. 215]) On suppose que* $\dim(X) = \infty$. *On considère le système (4.1), où A est le générateur d'un c_0-semi-groupe et $B : \mathcal{U} \to X$ est un opérateur borné. Si B est compact, le système ne peut être (ECO) à aucun moment.*

Remarque 4.1.5. Le théorème précédent affirme en particulier que dans le cas d'un espace des états de dimension infinie (*i.e.* $\dim(X) = \infty$), le contrôle exact de rang fini n'est pas possible. C'est une des raisons pour lesquelles, dans le cas où $\mathcal{U} = \mathbb{C}^N$, on s'intéressera aux opérateurs B non bornés et donc à un autre type de contrôle.

4.2 Bases de Riesz et Contrôlabilité : la méthode des moments

Cette méthode permet de reformuler le problème initial de description de l'image de l'opérateur de contrôlabilité en un problème autour des propriétés géométriques de certaines familles d'exponentielles. Le lecteur trouvera toutes les précisions dans le livre de Nikolskii ([Ni02b, Part D. Chapters 3-4]) mais aussi dans celui d'Avdonin et Ivanov ([AI95]).

Dans tout ce paragraphe, on supposera que les vecteurs propres du générateur A,

$$A\phi_n = -\lambda_n \phi_n, \qquad n \geq 1,$$

forment une *base de Riesz* de X . Leur famille biorthogonale (formant également une base de Riesz de X) sera notée $\{\psi_n\}_{n\geq 1}$ et vérifie

$$A^\star \psi_n = -\overline{\lambda}_n \psi_n, \qquad n \geq 1.$$

Le caractère exponentiellement stable du semi-groupe implique en particulier que

$$\operatorname{Re}(\lambda_n) \geq -\alpha > 0, \qquad n \geq 1.$$

Comme on l'a mentionné au cours de la Section 1.1, on peut alors représenter l'espace X comme

$$\begin{aligned} X &= \left\{ x = \sum_{n\geq 1} a_n \phi_n : \; \|x\|^2 = \sum_{n\geq 1} |a_n|^2 \|\phi_n\|^2 < \infty \right\} \\ &= \left\{ x = \sum_{n\geq 1} \langle x, \psi_n \rangle \, \phi_n : \; \|x\|^2 = \sum_{n\geq 1} |\langle x, \psi_n \rangle|^2 \|\psi_n\|^{-2} < \infty \right\}. \end{aligned}$$

On calcule alors, pour $u \in L^2(0, \tau; \mathcal{U})$,

$$\begin{aligned} \langle c(\tau)u, \psi_n \rangle_X &= \left\langle \int_0^\tau S(\tau - r)Bu(r)dr, \psi_n \right\rangle_X \\ &= \int_0^\tau \langle Bu(r), S(\tau - r)^\star \psi_n \rangle_X \, dr \\ &= \int_0^\tau \langle -u(r), B^\star S(\tau - r)^\star \psi_n \rangle_{\mathcal{U}} \, dr \\ &= \int_0^\tau \left\langle -u(\tau - r), e^{-\overline{\lambda}_n r} B^\star \psi_n \right\rangle_{\mathcal{U}} dr \\ &= \langle u_1, \mathcal{E}_n \rangle_{L^2(0,\tau;\mathcal{U})}, \end{aligned}$$

où $u_1 := -u(\tau - \cdot) \in L^2(0, \tau; \mathcal{U})$ et

$$\mathcal{E}_n(t) := e^{-\overline{\lambda}_n t} B^\star \psi_n, \qquad n \geq 1.$$

Sous ces hypothèses, on voit donc que

$$c(\tau) L^2(0, \tau; \mathcal{U}) = X$$

si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n\geq 1} \in l^2\left(\|\phi_n\|^2\right)$, il existe $u_1 \in L^2(0, \tau; \mathcal{U})$ telle que

$$\langle u_1, \mathcal{E}_n \rangle = a_n, \qquad n \geq 1. \tag{4.4}$$

Proposition 4.2.1. *(voir [Ni02b, Proposition 3.4.3 p. 373]) On suppose que le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est fortement continu, exponentiellement stable, et qu'il possède un système de vecteurs propres minimal dont la famille biorthogonale est supposée totale. Si le système (4.1) correspondant est exactement contrôlable, alors*

$$\|\psi_n\| \asymp \|\mathcal{E}_n\|, \qquad n \geq 1.$$

Preuve. Si le système est (ECO) alors l'opérateur de contrôlabilité $c(\tau)$ est surjectif, et en particulier, $c(\tau)^\star$ est inversible à gauche. Comme $\mathcal{E}_n = c(\tau)^\star\psi_n$, on obtient

$$\|\psi_n\| \lesssim \|\mathcal{E}_n\|, \qquad n \geq 1.$$

Par ailleurs, le calcul donne

$$\|\mathcal{E}_n\|^2 = \|B^\star\psi_n\|^2 \left(\frac{e^{-2\mathrm{Re}(\lambda_n)} - 1}{-2\mathrm{Re}\,(\lambda_n)\,\tau}\right)\tau.$$

Le semi-groupe étant supposé exponentiellement stable, on a $\mathrm{Re}\,(-\lambda_n) \leq \alpha < 0$, et comme $\frac{e^x-1}{x} \leq$ const. pour $-\infty < x \leq \alpha$, on bien l'inégalité inverse

$$\|\psi_n\| \gtrsim \|\mathcal{E}_n\|, \qquad n \geq 1.$$

□

Cette dernière proposition, combinée à la discussion préalable, nous permet d'établir le résultat suivant.

Théorème 4.2.2. *([Ni02b, Theorem 3.3.2 p. 275])En supposant que le générateur exponentiellement stable A du système (4.1) admet une base de Riesz de vecteurs propres et avec les notations précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) Le système (4.1) est (ECO) en temps $\tau > 0$;

(ii) La famille $\{\mathcal{E}_n\}_{n\geq 1}$ forme une suite de Riesz de $L^2(0,\tau;\mathcal{U})$. De plus

$$\sup_{n\geq 1} |Re\,(\lambda_n)| < \infty$$

et

$$\inf_{n\geq 1} \frac{\|B^\star\psi_n\|}{\|\psi_n\|} > 0.$$

Ce résultat est en fait une conséquence d'un fait plus général, pour l'énoncé duquel nous avons besoin d'introduire de nouvelles définitions. Pour une suite de nombres strictement positifs $(\omega_n)_{n\geq 1}$, on pose

$$X(\omega_n) := \left\{x \in X : \ \exists y \in X \text{ tel que } \langle x, \psi_n\rangle = \frac{1}{\omega_n}\langle y, \psi_n\rangle\,,\ n \geq 1\right\}.$$

Le système (4.1) est alors dit *Généralement Exactement COntrôlable,* ou $(GECO)$, en temps $\tau > 0$, s'il existe une suite de nombres strictement positifs $(\omega_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$c(\tau)L^2(0,\tau;\mathcal{U}) = X(\omega_n).$$

Le résultat est alors le suivant.

Théorème 4.2.3. *([Ni02b, Theorem 3.4.3 p. 278])En supposant que le générateur exponentiellement stable A du système (4.1) admet une base de Riesz de vecteurs propres et avec les notations précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) Le système (4.1) est $(GECO)$ en temps $\tau > 0$;

(ii) La famille $\{\mathcal{E}_n\}_{n\geq 1}$ forme une suite de Riesz de $L^2(0,\tau;\mathcal{U})$.

Remarque 4.2.4. Au vu de la discussion précédente, la "renormalisation" naturelle correspond à

$$\omega_n = \frac{\|\psi_n\|}{\|\mathcal{E}_n\|}, \qquad n \geq 1.$$

4.3 Contrôle de rang fini, Opérateurs non bornés

On s'intéresse maintenant au cas où $\mathcal{U} = \mathbb{C}^N$, avec $N \geq 1$ un entier. Comme déjà vu à la Remarque 4.1.5, les définitions précédentes ne sont pas adaptées à ce cas, puisqu'un contrôle (ECO) n'est pas possible pour les opérateurs de rang fini. On suit le point de vue de B. Jacob et al. ([JP06, JPP10]).

On suppose encore que A est le générateur d'un c_0-semi-groupe exponentiellement stable $(S(t))_{t\geq 0}$, que les vecteurs propres de $-A$ forment une base de Riesz $(\phi_n)_{n\geq 1}$ de X et que les valeur propres associées $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ vérifient la condition de Blaschke (dans le demi-plan ouvert de droite)

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{Re}\,(\lambda_n)}{1+|\lambda_n|^2} < \infty. \tag{4.5}$$

On précise que la suite Λ ne vérifie pas *a piori* la condition de Carleson. On note encore $(\psi_n)_{n\geq 1}$ la famille biorthogonale à $(\phi_n)_{n\geq 1}$et on suppose de plus que l'opérateur de contrôle B peut être représenté sous la forme

$$Bv = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \langle v, b_n\rangle\, \phi_n, \qquad v \in \mathbb{C}^N,$$

pour une certaine suite $(b_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{C}^N$. L'opérateur B n'est **plus supposé borné**. Cependant, B s'injecte continûment dans un certain espace d'extrapolation dans lequel la suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ a une enveloppe linéaire dense : par exemple, dans l'espace

$$H_B := \left\{ \sum_{n\geq 1} x_n\phi_n : \sum_{n\geq 1} \frac{|x_n|^2 \|\phi_n\|^2}{n^2\left(1+\|b_n\|^2\right)} < \infty \right\}.$$

L'analogue de la formule (4.3), solution du système (4.1) correspondant à A et B, est donnée par

$$x(t) = S(t)x_0 + \sum_{n\geq 1} \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-r)} \langle u(r), b_n\rangle_{\mathbb{C}^N}\, dr \right) \phi_n, \tag{4.6}$$

pour $u \in L^2\left(0,\infty;\mathbb{C}^N\right)$. Le système sera encore dit, et on insiste sur l'importance du contexte, *exactement contrôlable en temps infini,* si pour tout $x \in X$, il existe une entrée $u \in L^2\left(0,\infty;\mathbb{C}^N\right)$ telle que

$$x = \sum_{n\geq 1} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda_n t} \langle u(t), b_n\rangle\, dt \right) \phi_n =: \mathcal{B}_\infty u$$

et *exactement contrôlable en temps fini* $\tau > 0$, si pour tout $x \in X$, il existe $u \in L^2\left(0,\infty;\mathbb{C}^N\right)$ telle que

$$x = \sum_{n\geq 1}\left(\int_0^\tau e^{-\lambda_n(\tau-t)}\langle u(t), b_n\rangle\, dt\right)\phi_n =: \mathcal{B}_\tau u.$$

Théorème 4.3.1. *([JPP10, Theorem 2.6, Remark 2.4]) On suppose que les valeurs propres vérifient*

$$c := \inf_{n\geq 1}\mathrm{Re}\,(\lambda_n) > 0$$

et

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}\sum_{n\geq 1}\frac{\mathrm{Re}\,(\lambda_n)}{\left(\mathrm{Re}\,(\lambda_n)\right)^2 + \left(y - \mathrm{Im}\,(\lambda_n)\right)} < \infty,$$

et que tout état $x \in X$ peut être atteint par le système en temps infini (c'est à dire que $\mathcal{B}_\infty L^2\left(0,\tau;\mathbb{C}^N\right) = X$). Alors, tout état $x \in X$ peut être atteint en temps fini τ satisfaisant

$$\tau > \frac{2}{\delta}\log\left(\frac{m}{\sqrt{\pi}}\left(1 + a^{-1}\right)\log\left(N+1\right)\right),$$

où m est une constante ne dépendant que de N et a et δ sont des constantes dépendant de Λ. Par exemple, si $N = 1$, on peut choisir m égal à $4\frac{\sqrt{2e}}{\log 2}$.

On remarque en particulier que plus N est petit, plus le contrôle sera possible "tôt", ce qui motive en particulier l'étude du contrôle de rang 1.

4.3.1 Opérateurs de contrôle de rang 1 et interpolation pondérée

On se place dans le cas où $N = 1$. On suppose qu'on peut représenter l'opérateur de contrôle B sous la forme

$$Bv = v\cdot\left(\sum_{n\geq 1}\overline{b}_n\phi_n\right), \quad v \in \mathbb{C}.$$

Dans le but d'exprimer les deux opérateurs de contrôlabilité $\mathcal{B}_\tau$ et $\mathcal{B}_\infty$, on rappelle que, si $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier, alors $\mathcal{F}^{-1}L^2\left(0,\infty\right) = H^2_+$ et $\mathcal{F}L^2\left(-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right) = PW^2_{\frac{\tau}{2}}$. Ainsi,

$$\mathcal{B}_\infty u = \sum_{n\geq 1}\left(\overline{b}_n f\left(i\lambda_n\right)\right)\phi_n,$$

où

$$f := \mathcal{F}^{-1}u = \int_0^\infty u(t)e^{it\cdot}dt \in H^2_+$$

et un changement de variable dans l'intégrale donne

$$\begin{aligned} B_\tau u &= \sum_{n\geq 1}\left(\overline{b}_n\int_0^\tau u(t)e^{-\lambda_n(\tau-t)}dt\right)\phi_n \\ &= \sum_{n\geq 1}\left(\overline{b}_n e^{-i\frac{\tau}{2}(i\lambda_n)}g\left(i\lambda_n\right)\right)\phi_n, \end{aligned}$$

avec

$$g := \mathcal{F}u\left(\cdot + \frac{\tau}{2}\right) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u\left(t + \frac{\tau}{2}\right)e^{-it\cdot}dt \in PW^2_{\frac{\tau}{2}}.$$

Ayant, par hypothèse, une description de l'espace X comme étant

$$X = \left\{ x = \sum_{n \geq 1} a_n \phi_n : \quad \sum_{n \geq 1} |a_n|^2 \|\phi_n\|^2 < \infty \right\},$$

on peut immédiatement reformuler les problèmes de contrôlabilité précédents comme des problèmes d'interpolation pondérée. Plus précisément, on peut écrire la chose suivante. On pose

$$\omega_n := \frac{|b_n|}{\|\psi_n\|}, \qquad n \geq 1.$$

Théorème 4.3.2. *Sous les hypothèses et notations précédentes, le système (4.1) est*

(1) *exactement contrôlable en temps infini si et seulement si la suite* $i\Lambda$ *est* $\omega-$*interpolante dans* H^2_+ *;*

(2) *exactement contrôlable en temps fini* $\tau > 0$ *si et seulement* $i\Lambda$ *est* $\tilde{\omega}-$*interpolante dans* $PW^2_{\frac{\tau}{2}}$*, où*

$$\tilde{\omega}_n := e^{-\tau|\mathrm{Im}(i\lambda_n)|}\omega_n, \qquad n \geq 1.$$

Cette observation, combinée avec les résultats d'interpolation pondérée dans les espaces de Hardy, permet d'obtenir le théorème suivant.

Théorème 4.3.3. *Soit* A *le générateur d'un* c_0-*semi-groupe exponentiellement stable sur un espace de Hilbert* X*. On suppose que les vecteurs propres* $(\phi_n)_{n\geq 1}$ *de* $-A$ *forment une base de Riesz de* X *et que les valeurs propres correspondantes vérifient la condition de Blaschke (4.5). Alors, il existe un opérateur* $B : \mathbb{C} \to X$ *tel que tout état* $x \in X$ *puisse être atteint en temps infini par la solution (4.6) du système (4.1). De plus,* B *peut être représenté par*

$$Bv = v \cdot \sum_{n \geq 1} \bar{b}_n \phi_n, \qquad v \in \mathbb{C},$$

pour une certaine suite $(b_n)_{n\geq 1}$ *d'éléments de* $\mathbb{C}$*.*

L'observation précédente associée à la Proposition 1.3.18 permet de voir que

$$b_n := \|\phi_n\| \,\mathrm{Re}\,(\lambda_n)\, \vartheta_n^{-1} A^{-1} \left(1 + \log\left(1 + \frac{1}{\vartheta_n}\right)\right), \quad n \geq 1,$$

convient, où

$$\vartheta_n = \prod_{k \neq n} \left| \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_n + \bar{\lambda}_k} \right|, \quad n \geq 1,$$

et A est une fonction positive et décroissante sur $(0, \infty)$ telle que

$$\int_0^\infty A^2(t)dt < \infty.$$

4.3.2 Contrôlabilité faible pour les opérateurs de rang 1

Il est possible que l'opérateur de contrôlabilité $\mathcal{B}_\tau$ ne soit pas surjectif. Néanmoins, on peut définir un type de contrôlablité plus faible si $\phi_n \in \mathcal{B}_\tau L^2(0,\tau)$, pour tout $n \geq 1$. Le contexte est le même que dans la Sous-section 4.3.1, c'est à dire qu'on considère un opérateur de contrôle B (non borné) de rang 1. La terminologie que l'on va employer est empruntée à Nikolskii ([Ni02b, p. 289-290]) où l'on précise que l'auteur considère des opérateurs de contrôle bornés.

Cependant, on dira encore que le système (4.1) est *contrôlable pour les oscillations simples* en temps $\tau > 0$, si il existe une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de $L^2(0,\tau)$ telle que

$$\mathcal{B}_\tau u_n = \phi_n, \qquad n \geq 1. \tag{4.7}$$

On voit alors immédiatement, avec le même raisonnement que celui visant à obtenir le Théorème 4.3.2, que (4.7) est équivalent à la minimalité de la suite $i\Lambda$ dans $PW^p_{\frac{\tau}{2}}$. En utilisant à nouveau ce théorème ainsi que le Théorème 2.3.1, on écrit sans peine le résultat suivant.

Théorème 4.3.4. *On suppose que le système (4.1) est*
(i) contrôlable en temps infini ;
(ii) contrôlable pour les oscillations simples en temps $\tau > 0$.
Alors, le système est exactement contrôlable en temps $\tau + \epsilon$, pour tout $\epsilon > 0$.

Remarque 4.3.5. Dans les hypothèses du théorème précédent, la condition (i) peut être remplacée par la condition équivalente $(i)'$ suivante
$(i)'$ le couple $\left(i\Lambda, \left(\frac{|b_n|}{\|\psi_n\|}\right)_n\right)$ vérifie la condition de McPhail (M_2) dans $\mathbb{C}^+$.

4.4 Bases de sous-espaces et contrôlabilité

On se replace dans le contexte du début du chapitre. L'opérateur de contrôle B est à nouveau supposé **borné** d'un espace de Hilbert $\mathcal{U}$ dans X. On veut généraliser des résultats déjà existant obtenus par la méthode des moments et dans lesquels interviennent des suites de Riesz de vecteurs propres. La généralisation ici étudiée vise à remplacer les suites de Riesz par des suites de Riesz *de sous-espaces* et on supposera les fréquences du générateur A regroupées par paquets. Cette section utilise donc des notions et des résultats présentés en Section 1.1.1.

4.4.1 Vecteurs propres généralisés

Dans toute la suite, nous allons supposer que l'ensemble des valeurs propres du générateur A peut s'écrire $\Lambda = \bigcup_{n\geq 1} \sigma_n$ avec $|\sigma_n| \leq N$, $\sup_n \operatorname{diam}(\sigma_n) =: \delta < \infty$ et $\sigma_n := \{\lambda_{n,k} :\ 1 \leq k \leq |\sigma_n|\}$. En plus d'autoriser les valeurs propres à être proches, on va autoriser les multiplicités.

Plus précisement, suivant [RSR05, RS07], on note $\nu_{n,k}$ la multiplicité de $\lambda_{n,k}$, $p_{n,k}$ son nombre de blocs de Jordan et $\nu^j_{n,k}$ la longueur du $j-$ième bloc. On pose

$$\nu_n := \sum_{k=1}^{K_n} \nu_{n,k}, \qquad n \geq 1.$$

Pour $n \geq 1$, $1 \leq k \leq K_n$, $1 \leq j \leq p_{n,k}$ et $1 \leq s \leq \nu_{n,k}^j$, nous introduisons les *vecteurs propres généralisés* $\phi_{n,k}^{j,s}$:

$$A\phi_{n,k}^{j,1} = \lambda_{n,k}\phi_{n,k}^{j,1} \qquad \text{et} \qquad (A - \lambda_{n,k})\phi_{n,k}^{j,s} = \phi_{n,k}^{j,s-1},\ 1 < s \leq \nu_{n,k}^j.$$

On va alors poser $\mathcal{X} = \{X_n\}_{n\geq 1}$ où naturellement

$$X_n := \text{vect}\left(\phi_{n,k}^{j,s} :\ 1 \leq k \leq K_n, 1 \leq j \leq p_{n,k}, 1 \leq s \leq \nu_{n,k}^j\right).$$

Comme suggéré précédemment, nous désignerons par $\mathcal{P}_n$ les projections obliques de X sur X_n. Si l'on introduit maintenant la famille de vecteurs biorthogonale à $\left(\phi_{n,k}^{j,s}\right)$, que l'on note $\left(\psi_{n,k}^{j,s}\right)$, on voit qu'elle vérifie

$$A^\star\psi_{n,k}^{j,\nu_{n,k}^{j,s}} = \overline{\lambda}_{n,k}\psi_{n,k}^{j,\nu_{n,k}^j} \qquad \text{et} \qquad (A^\star - \overline{\lambda}_{n,k})\psi_{n,k}^{j,s} = \psi_{n,k}^{j,s+1},\ 1 \leq s < \nu_{n,k}^j$$

et

$$Y_n := \mathcal{P}_n^\star X = \text{vect}\left(\psi_{n,k}^{j,s} :\ 1 \leq k \leq K_n, 1 \leq j \leq p_{n,k}, 1 \leq s \leq \nu_{n,k}^j\right).$$

Le calcul donne

$$c(\tau)^\star\psi_{n,k}^{j,s} = B^\star e^{\overline{\lambda}_{n,k}t}\left(\sum_{l=0}^{\nu_{n,k}^j - s}\frac{t^l}{l!}\psi_{n,k}^{j,s+l}\right) =: e^{\overline{\lambda}_{n,k}t}q_{n,k}^{j,s}(t).$$

Bien sûr, nous posons $\mathcal{E} := \{E_n\}_{n\geq 1}$avec

$$E_n := c(\tau)^\star Y_n = \text{vect}\left(e^{\overline{\lambda}_{n,k}t}q_{n,k}^{j,s}(t) :\ 1 \leq k \leq K_n, 1 \leq j \leq p_{n,k}, 1 \leq s \leq \nu_{n,k}^j\right).$$

4.4.2 Le théorème

Soient T un opérateur borné sur un espace de Hilbert H et $\{H_n\}_{n\geq 1}$ une famille de sous-espaces fermés de H. On dit que T est *uniformément inversible à gauche par rapport à la suite* $\{H_n\}_{n\geq 1}$ si il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall n \geq 1, \quad \forall y \in H_n, \qquad \|Ty\| \geq K\,\|y\|.$$

On peut maintenant énoncer notre théorème, qui est une généralisation de 4.2.2.

Théorème 4.4.1. *Avec les notations et hypothèses précédentes sur Λ, en supposant que $\mathcal{X}$ est une base de Riesz de X, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) Le système (4.1) est exactement contrôlable en temps $\tau > 0$;

(ii) La famille $\mathcal{E}$ forme une suite de Riesz de sous-espaces de $L^2(0,\tau;\mathcal{U})$, $B^\star$ est uniformément inversible à gauche par rapport à la famille $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ et

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}|\text{Re}(\lambda)| < \infty.$$

Remarque 4.4.2. On peut par exemple trouver un critère pour que $\mathcal{X}$ soit une base de Riesz dans [XY05].

Le théorème est une conséquence de deux lemmes d'analyse fonctionnelle énoncés ci-après et dont les preuves se trouvent en Annexe.

4.4.3 Les deux lemmes-clé

Soient X, H deux espaces de Hilbert et $T : H \to X$ une application linéaire continue. On considère $\mathcal{X} = \{X_n\}_{n\geq 1}$ une base de Riesz de sous-espaces de X, $\mathcal{Y} = \{Y_n\}_{n\geq 1}$ où $Y_n := \mathcal{P}_n^\star X$ sa famille biorthogonale et $\mathcal{E} := \{E_n\}_{n\geq 1}$ avec $E_n := T^\star Y_n$. Pour $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs, on (ré-)introduit le sous-espace

$$X(\rho_n) := \left\{ x \in X : \exists y \in Y,\ \mathcal{P}_n x = \frac{1}{\rho_n}\mathcal{P}_n y, \quad n \geq 1 \right\}.$$

Lemme 4.4.3. *Avec les notations et hypothèses précédentes sur $\mathcal{X}$, si $\operatorname{Im} T = X(\rho_n)$ pour une certaine suite de nombres strictement positifs $(\rho_n)_{n\geq 1}$, alors $\mathcal{E}$ est une suite de Riesz de sous-espaces de H.*

Pour la réciproque, il faut imposer des conditions supplémentaires sur T, ou plus précisément sur $T^\star$. On va supposer que, en notant

$$\delta_n := \sup_{y \in Y_n,\, y \neq 0} \frac{\|y\|}{\|T^\star y\|},$$

on a

$$\sup_n (\delta_n \cdot \|T^\star \mathcal{P}_n^\star\|) < \infty. \tag{4.8}$$

Lemme 4.4.4. *Si $\mathcal{E}$ est une suite de Riesz dans H et si T vérifie (4.8) alors il existe une suite $(\rho_n)_n \subset \mathbb{R}_+^\star$ telle que $\operatorname{Im} T = X(\rho_n)$.*

4.4.4 Preuve du Théorème 4.4.1

Le sens $(ii) \Longrightarrow (i)$ du Théorème 4.4.1 est essentiellement démontré grâce à la proposition suivante.

Proposition 4.4.5. *Aves les hypothèses précédentes sur Λ, en supposant que $\mathcal{X}$ est une base de Riesz de X, que $\mathcal{E}$ est une suite de Riesz de sous-espaces de $L^2(0,\tau;\mathcal{U})$ et que $B^\star$ est uniformément inversible à gauche par rapport à $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ on a que $\operatorname{Im} c(\tau) = X(\rho_n)$.*

Preuve. Le but est bien sûr d'appliquer le Lemme 4.4.4. Pour cela, on doit vérifier que $c(\tau)^\star$ vérifie bien (4.8). On introduit les quantités

$$a_n := \min_{\lambda \in \sigma_n} |\mathrm{Re}(\lambda)| \qquad \text{et} \qquad A_n := \max_{\lambda \in \sigma_n} |\mathrm{Re}(\lambda)|$$

et les matrices

$$D_n := \operatorname{diag}\left((\lambda_{n,k}, \nu_{n,k}) : 1 \leq k \leq |\sigma_n|\right), \qquad n \geq 1.$$

Pour $n \geq 1$, $1 \leq k \leq |\sigma_n|$ et $1 \leq j \leq p_{n,k}$, nous désignons par $M_{n,k}^j(t)$ le bloc matriciel suivant

$$M_{n,k}^j(t) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & t & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ \frac{t^{\nu_{n,k}^j - 1}}{(\nu_{n,k}^j - 1)!} & \frac{t^{\nu_{n,k}^j - 2}}{(\nu_{n,k}^j - 2)!} & \cdots & t & 1 \end{bmatrix}$$

et on définit la matrice $M_n(t) := \operatorname{diag}\left(M_{n,k}^j(t) : \ 1 \le k \le |\sigma_n| \,,\ 1 \le j \le p_{n,k}\right)$. En particulier, $\det\ M_n(t) = 1 \neq 0$ et $M_n(t)$ est inversible. On remarque que, pour $y_n \in Y_n$, on a

$$c(\tau)^\star y_n = B^\star e^{\overline{D}_n t} M_n(t) y_n. \tag{4.9}$$

De plus, on voit facilement que

$$\left\| e^{t\overline{D}_n} \right\| = e^{A_n t} \quad \text{et} \quad \left\| e^{-t\overline{D}_n} \right\| = e^{-a_n t}.$$

Par conséquent, l'hypothèse faite sur $B^\star$ implique que

$$\begin{aligned} K^2 \left(\int_0^\tau \left\| e^{-t\overline{D}_n} \right\|^{-2} \left\| M_n(t)^{-1} \right\|^{-2} dt \right) \|y_n\|^2 \ &\le\ \|c(\tau)^\star y_n\|^2_{L^2(0,\tau;\mathcal{U})} \\ &\le\ \|B^\star\|^2 \|y_n\|^2 \int_0^\tau \left\| e^{t\overline{D}_n} \right\|^2 \|M_n(t)\|^2 \, dt. \end{aligned}$$

Il suit que

$$\begin{aligned} \left(\delta_n \left\| c(\tau)^\star_{|Y_n} \right\|\right)^2 \ &\le\ \frac{\|B^\star\|^2}{K^2} \left(\int_0^\tau e^{2a_n t} \left\| M_n(t)^{-1} \right\|^{-2} dt \right)^{-1} \\ &\quad \times \left(\int_0^\tau e^{2A_n t} \|M_n(t)\|^2 \, dt \right). \end{aligned}$$

Du fait que $\sup_n \max\left(\|M_n(t)\|, \|M_n(t)^{-1}\|\right) < \infty$, la condition (4.8) dont on a besoin pour appliquer le Lemme 4.4.4 sera vérifiée si la quantité

$$\frac{f\left(A_n\right)}{f\left(a_n\right)}$$

est uniformément bornée, où $f(x) := \frac{e^x - 1}{x}$. Comme $S(\cdot)$ est fortement continu, on a que $\sup_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Re}(\lambda) \le \alpha < \infty$ et l'application $x \mapsto \frac{f(x)}{f(x-\delta)}$ est bornée sur $(-\infty, \alpha]$, ce qui termine la démonstration. □

On voit qu'on a les inégalités

$$\frac{2A_n}{e^{2A_n\tau} - 1} \lesssim \delta_n \lesssim \frac{2a_n}{e^{2a_n\tau} - 1}, \quad n \ge 1.$$

Ainsi, si $\sup_{\lambda \in \Lambda} |\operatorname{Re}(\lambda)| < \infty$ alors $\delta_n \asymp 1$ et donc $X\left(\rho_n\right) = X$ ce qui veut dire que le système est exactement contrôlable. C'est l'implication $(ii) \Longrightarrow (i)$ de notre théorème. Il reste à montrer l'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$. Grâce au Lemme 4.4.3, on sait que $\mathcal{E}$ est une suite de Riesz. Le fait que le système soit exactement contrôlable est équivalent au fait que $c(\tau)$ soit surjectif ou encore que $c(\tau)^\star$ soit un isomorphisme sur son image. En particulier on aura que pour tout $n \ge 1$ et pour tout $y_n \in Y_n$,

$$\|c(\tau)^\star y_n\| \asymp \|y_n\|.$$

Par (4.9), on obtient

$$\|B^\star y_n\| = \left\| B^\star e^{\overline{D}_n t} M_n(t) M_n(t)^{-1} e^{-\overline{D}_n t} y_n \right\| = \left\| c(\tau)^\star M_n(t)^{-1} e^{-\overline{D}_n t} y_n \right\|$$

ce qui entraîne que

$$\|B^\star y_n\|^2 \asymp \left\| M_n(t)^{-1} e^{-\overline{D}_n t} y_n \right\|^2 .$$

Or,

$$\left(\int_0^\tau \left\| e^{\overline{D}_n t} \right\|^{-2} dt \right) \|y_n\| \lesssim \left\| M_n(t)^{-1} e^{-\overline{D}_n t} y_n \right\|^2 \lesssim \left(\int_0^\tau \left\| e^{-\overline{D}_n t} \right\|^2 dt \right) \|y_n\|$$

et donc

$$\left(\frac{1 - e^{-2A_n\tau}}{2A_n\tau} \right) \|y_n\| \lesssim \|B^\star y_n\|^2 \lesssim \left(\frac{1 - e^{-2a_n\tau}}{2a_n\tau} \right) \|y_n\| ,$$

ce qui implique nécessairement les deux dernières conditions de (ii) du Théorème 4.4.1.

Annexe A

Quelques compléments

A.1 .. ad paragraphe 1.3.1

Pour alléger les calculs et faciliter la lecture, on se place dans $\mathbb{C}^+$, les résultats étant bien sûrs toujours valides dans les autres demi-plans, avec des démonstrations similaires. On peut montrer (voir par exemple [Ko80, p. 209-211] ou [Ga81, Chapter VII]) par quelques calculs que la condition de Carleson est équivalente à la condition de $\rho-$séparation uniforme combinée avec la condition

$$\sup_{n\geq 1}\sum_{k\neq n}\frac{\operatorname{Im}(\lambda_n)\operatorname{Im}(\lambda_k)}{\left|\lambda_n-\overline{\lambda}_k\right|^2}<\infty. \tag{A.1}$$

On va alors montrer le lemme suivant. Si $-\infty<\alpha\leq\beta<\infty$, on désigne par la $S_{\alpha,\beta}$ la bande

$$S_{\alpha,\beta}:=\{z\in\mathbb{C}:\ \alpha<\operatorname{Im}(z)<\beta\}.$$

Lemme A.1.1. *S'il existe $M>0$ tel que $\Lambda\subset S_{0,M}$ et si Λ est uniformément séparée alors Λ vérifie la condition de Carleson dans $\mathbb{C}^+$.*

Preuve. Supposons donc que $\inf_{n\neq k}|\lambda_n-\lambda_k|=\delta>0$ et écrivons $m=\left[2\frac{M}{\delta}\right]$ de sorte que, si $\alpha_j:=j\frac{\delta}{2}$, $j=0,...,m$, alors $\Lambda=\biguplus_{j=1}^m\Lambda_\delta^j$, avec

$$\Lambda_\delta^j:=\Lambda\cap S_{\alpha_j,\alpha_{j+1}}.$$

On voit facilement que si $\lambda\neq\mu\in\Lambda_\delta^j$, alors

$$|\operatorname{Re}(\lambda)-\operatorname{Re}(\mu)|\geq\frac{\delta}{\sqrt{2}}.$$

Soit donc $\lambda\in\Lambda$. On cherche à calculer

$$\sum_{\substack{\mu\in\Lambda\\ \mu\neq\lambda}}\frac{\operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(\mu)}{|\lambda-\overline{\mu}|^2}=\sum_{j=0}^m\sum_{\mu\in\Lambda_\delta^j}\frac{\operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(\mu)}{|\lambda-\overline{\mu}|^2}.$$

Il existe j tel que $\lambda\in\Lambda_\delta^j$, supposons, sans perte de généralité que $j=0$. On réordonne les éléments de $\Lambda_\delta^j=\left\{\mu_i^j\right\}_{i\geq 1}$ par parties réelles croissantes. Si $\lambda=\mu_n^0$, alors

$$\sum_{\mu\in\Lambda_\delta^0}\frac{\operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(\mu)}{|\lambda-\overline{\mu}|^2}\lesssim\sum_{k\neq 1}\frac{\delta^2}{4}\frac{2}{(n-k)^2\delta^2}\lesssim 1.$$

Notons alors $Z(\lambda) := \left\{\mu \in \Lambda \setminus \Lambda_\delta^0 : \ |\mathrm{Re}(\lambda) - \mathrm{Re}(\mu)| < \frac{\delta}{2}\right\}$. Comme la suite est séparée et que $\Lambda \subset S_{0,M}$, $|Z(\lambda)| \leq m$. On écrit donc, en utilisant pour la seconde somme un argument similaire à celui utilisé précédemment, que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu\in\Lambda_\delta^j}\frac{\mathrm{Im}\,(\lambda)\,\mathrm{Im}\,(\mu)}{|\lambda-\overline{\mu}|^2} &= \sum_{\mu\in Z(\lambda)}\frac{\mathrm{Im}\,(\lambda)\,\mathrm{Im}\,(\mu)}{|\lambda-\overline{\mu}|^2}+\sum_{\mu\notin Z(\lambda)}\frac{\mathrm{Im}\,(\lambda)\,\mathrm{Im}\,(\mu)}{|\lambda-\overline{\mu}|^2}.\\ &\lesssim \sum_{\mu\in Z(\lambda)}\frac{\mathrm{Im}\,(\lambda)\,\mathrm{Im}\,(\mu)}{(\mathrm{Im}\,(\lambda)+\mathrm{Im}\,(\mu))^2}+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}\\ &\lesssim |Z(\lambda)|+1\\ &\lesssim 1,\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

En observant maitenant que si $\lambda, \mu \in S_{\alpha,\beta}$ avec $\alpha > 0$, on a

$$\left|\frac{\lambda-\mu}{\lambda-\overline{\mu}}\right| \asymp |\lambda-\mu|\,,$$

on déduit que si $\Lambda \subset S_{\alpha,\beta}$, alors

$$\Lambda \in (C) \Longleftrightarrow \Lambda \text{ uniformément } \rho-\text{séparée} \Longleftrightarrow \Lambda \text{ uniformément séparée.}$$

A.2 Preuve du Corollaire 3.3.2

On fait la preuve du Corollaire 3.3.2, affirmant que

$$H^p\left(\mathbb{C}_a^{\pm}\right)|\Lambda = X_{\pm a}^p\,(\Lambda)\,.$$

Pour simplifier, on fait la démonstration pour $\mathbb{C}^+$, la méthode étant la même dans n'importe quel demi-plan. On introduit l'application conforme

$$\begin{array}{rccc}\gamma: & \mathbb{D} & \rightarrow & \mathbb{C}^+\\ & z & \mapsto & i\frac{1+z}{1-z}\end{array}$$

et on pose $\tilde{\Lambda} := \gamma^{-1}(\Lambda)$. Si $b_{\tilde{\lambda}}^{\mathbb{D}}(z) := \frac{z-\lambda}{1-\overline{\lambda}z}$ désigne le facteur de Blaschke associé à $\tilde{\lambda} \in \mathbb{D}$, on constate que

$$\left|b_{\tilde{\lambda}}^{\mathbb{D}}\left(\gamma^{-1}(z)\right)\right| = \left|\frac{\frac{z-i}{z+i}-\frac{\lambda-i}{\lambda+i}}{1-\left(\frac{\overline{\lambda}+i}{\overline{\lambda}-i}\right)\left(\frac{z-i}{z+i}\right)}\right| = 2\left|\frac{z-\lambda}{z-\overline{\lambda}}\right|.$$

En particulier,

$$\left|\Delta_{\tilde{\sigma}_n}^{k-1}\left(a\left(\tilde{\lambda}^{(k)}\right)\right)\right| \asymp \left|\Delta_{\sigma_n}^{k-1}\left(a\left(\lambda^{(k)}\right)\right)\right|$$

et de plus γ conserve la métrique pseudo-hyperbolique et donc la condition de Carleson généralisée (CG) est encore vérifiée ce qui permet d'appliquer le Théorème 3.3.1 et d'écrire que

$$H^p|\tilde{\Lambda} = X^p(\tilde{\Lambda}) = \tilde{X}_+^p\,(\Lambda)\,,$$

où

$$\tilde{X}_+^p(\Lambda) := \left\{ a = (a(\lambda))_{\lambda\in\Lambda} : \sum_{n\geq 1} \frac{|\mathrm{Im}\,(\lambda_{n,0})|}{|\lambda_{n,0}+i|^2} \sum_{k=1}^{|\sigma_n|} \left|\Delta_{\sigma_n}^{k-1} a\left(\lambda_n^{(k)}\right)\right|^p < \infty \right\}.$$

Mais alors, comme (voir par exemple [Ko80, p. 118])

$$f \in H^p \Longleftrightarrow \left(z \mapsto \frac{f\circ\gamma^{-1}(z)}{(z+i)^{\frac{2}{p}}} \in H_+^p \right),$$

il suffit que vérifier que

$$\left(a(\lambda)\,(\lambda+i)^{\frac{2}{p}}\right)_{\lambda\in\Lambda} \in \tilde{X}_+^p(\Lambda) \Longleftrightarrow (a(\lambda))_{\lambda\in\Lambda} \in X_+^p(\Lambda).$$

On utilise alors le fait qu'il existe une suite de rectangle $(R_n)_{n\geq 1}$ telle que $\sigma_n \subset R_n$, $\inf_{n\geq 1}\rho(\sigma_n, \partial R_n) = \eta > 0$ et le Lemme 3.1.3 pour écrire que

$$\begin{aligned}
\left|\Delta_{\sigma_n}^j\left(\left((\lambda_n+i)^{\frac{2}{p}}\right)^{(j+1)}\right)\right| &= |\lambda_{n,0}+i|^{\frac{2}{p}}\left|\Delta_{\sigma_n}^j\left(\left(\left(\frac{\lambda_n+i}{\lambda_{n,0}+i}\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{(j+1)}\right)\right| \\
&\leq |\lambda_{n,0}+i|^{\frac{2}{p}}\left(\frac{2}{\eta}\right)^j \prod_{s=0}^{j}\left(\frac{1}{1-\frac{s}{2N}}\right)\left\|\left(\frac{\cdot+i}{\lambda_{n,0}+i}\right)^{\frac{2}{p}}\right\|_{\infty,R_n} \\
&\lesssim |\lambda_{n,0}+i|^{\frac{2}{p}}.
\end{aligned}$$

On écrit maintenant, grâce au Lemme 3.1.2 que

$$\begin{aligned}
\left|\Delta_{\sigma_n}^{k-1}\left(\left(\left((\cdot+i)^{\frac{2}{p}}\right)a\right)\left(\lambda_n^{(k)}\right)\right)\right|^p &= \left|\sum_{j=0}^{k-1}\Delta_{\sigma_n}^j\left(\left((\lambda_n+i)^{\frac{2}{p}}\right)^{(j+1)}\right)\Delta_{\sigma_n}^{k-j-1}\left(a\left(\lambda_n^{(k-j)}\right)\right)\right|^p \\
&\lesssim |\lambda_{n,0}+i|^2\left(\sum_{j=0}^{k-1}\left|\Delta_{\sigma_n}^{k-j-1}\left(a\left(\lambda_n^{(k)}\right)\right)\right|\right)^p \\
&\lesssim |\lambda_{n,0}+i|^2\left(\sum_{j=0}^{k-1}\left|\Delta_{\sigma_n}^{k-j-1}\left(a\left(\lambda_n^{(k)}\right)\right)\right|^p\right),
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité s'obtient par équivalence des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_p$ dans $\mathbb{C}^N$ et donne bien le sens $\Longleftarrow$ de l'équivalence cherchée. Pour l'autre sens, on procède de la même manière, en remarquant que

$$\begin{aligned}
\left|\Delta_{\sigma_n}^k\left(a\left(\lambda_n^{(k+1)}\right)\right)\right| &= \left|\Delta_{\sigma_n}^k\left(\left(\left(\frac{1}{\cdot+i}\right)^{\frac{2}{p}}\left((\cdot+i)^{\frac{2}{p}}\right)a\right)\left(\lambda_n^{(k+1)}\right)\right)\right| \\
&= \left|\sum_{j=0}^{k}\Delta_{\sigma_n}^j\left(\left(\left(\frac{1}{\lambda_n+i}\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{(j+1)}\right)\Delta_{\sigma_n}^{k-j}\left(\left(\left((\cdot+i)^{\frac{2}{p}}\right)a\right)\left(\lambda_n^{(k-j+1)}\right)\right)\right|
\end{aligned}$$

et que

$$\left\|\left(\frac{\lambda_{n,0}+i}{\cdot+i}\right)^{\frac{2}{p}}\right\|_{\infty,R_n} \lesssim 1.$$

A.3 Estimation de l'infimum par dualité

Cette méthode reprend les idées déja présentes dans un article de Shapiro et Shields ([SS61, p. 576]) et dans le livre de Koosis [Ko80, p. 143]). On considère une suite $a = (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ à support fini. Par hypothèse, on a une suite $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'éléments de PW_τ^p telle que

$$f_\lambda(\mu) = \delta_{\mu\lambda}, \qquad \mu \in \Lambda.$$

On considère donc une solution du problème d'interpolation

$$f|\Lambda = a$$

donnée par la somme finie (élément de PW_τ^p)

$$f := \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda f_\lambda$$

et on cherche à majorer la quantité

$$A := \inf\left\{\|f-g\| : \ g \in PW_\tau^p, \ g|\Lambda = 0\right\}.$$

Sans perte de généralité et quitte à estimer les normes sur un axe parallèle à l'axe réel, on peut supposer que $\Lambda \cap \mathbb{R} = \emptyset$. On décompose alors Λ en $\Lambda = \Lambda^+ \cup \Lambda^-$, où $\Lambda_0^+ := \Lambda \cap \mathbb{C}^+$ et $\Lambda^- := \Lambda \cap \mathbb{C}^-$ et on estime séparément, en suivant la même méthode

$$A^\pm := \inf\left\{\left\|f^\pm - g\right\| : \ g \in PW_\tau^p, \ g|\Lambda = 0\right\},$$

où $f^\pm$ correspond à la somme indexée par les éléments de $\Lambda^\pm$. On introduit les produits de Blaschke $B_\pm$ associés aux suites $\Lambda^\pm$, exprimés dans le demi-plan correspondant. Maintenant, on écrit

$$\begin{aligned} A^+ &= \inf\left\{\left\|e^{i\tau\cdot}f^+ - e^{i\tau\cdot}g\right\|_{H_+^p} : \ g \in PW_\tau^p, \ g|\Lambda = 0\right\} \\ &= \inf\left\{\left\|\tilde{f}^+ - \tilde{g}\right\|_{H_+^p} : \ \tilde{g} \in B_+H_+^p \cap K_{I^\tau}^p \cap I^\tau B_- H_-^p\right\} \\ &= \inf\left\{\left\|\tilde{f}_0^+ - \tilde{g}_0\right\|_p : \ \tilde{g}_0 \in H_+^p \cap \left(\overline{B_+}\left(K_{I^\tau}^p \cap I^\tau B_- H_-^p\right)\right)\right\}, \end{aligned}$$

où $\tilde{g} = e^{i\tau\cdot}g$, $\tilde{g}_0 = (\tilde{g}/B_+)$ et $f_0 = (f/B_+)$. On considère la dualité induite par le produit de $L^p(\mathbb{R})$

$$(f,g) := \int_{\mathbb{R}} fg\,dm$$

pour lequel en particulier $(H_\pm^p)^{\perp(\cdot,\cdot)} = H_\pm^q$, ce qui donne

$$(K_{I^\tau}^p)^{\perp(\cdot,\cdot)} = H_+^q + \overline{I^\tau} H_-^q$$

et

$$\begin{aligned} \left(\overline{B_+}\left(K_{I^\tau}^p \cap I^\tau B_- H_-^p\right)\right)^{\perp(\cdot,\cdot)} &= B_+\left(H_+^q + I^{-\tau}H_-^q + I^{-\tau}\overline{B_-}H_-^q\right) \\ &= B_+\left(H_+^q + I^{-\tau}\left(H_-^q + \overline{B_-}H_-^q\right)\right) \end{aligned}$$

d'où
$$\left(H_+^p \cap \left(\overline{B_+}\left(K_{I^\tau}^p \cap I^\tau B_- H_-^p\right)\right)\right)^{\perp(.,.)} = H_+^q + B_+ I^{-\tau}\left(H_-^q + \overline{B_-} H_-^q\right).$$
Soit alors $h = B_+ I^{-\tau}\left(h_1 + \overline{B_-} h_2\right)$, avec $h_i \in H_-^q$, $i = 1, 2$.
$$\begin{aligned} \int \tilde{f}_0^+ h dm &= \int \left(B_+ \tilde{f}_0^+ I^{-\tau}\right)\left(h_1 + \overline{B_-} h_2\right) dm \\ &= \int \left(e^{-i\tau\cdot} f^+\right)\left(h_1 + \overline{B_-} h_2\right) dm. \end{aligned}$$
Or, $z \mapsto e^{-i\tau z} f^+(z)$ est une fonction de H_-^p qui s'annule sur Λ^-, donc
$$\overline{B_-} e^{-i\tau\cdot} f^+ \in H_-^p,$$
ce qui implique, comme $(H_-^p)^{\perp(.,.)} = H_-^q$, que
$$\int \tilde{f}_0^+ h = 0.$$
Finalement, la dualité permet donc d'estimer
$$A^+ = \sup\left\{\int \tilde{f}_0^+ h : \; h \in H_+^q, \; \|h\| = 1\right\}.$$

A.4 .. ad paragraphe 3.4.2.1

Il s'agit de montrer que la suite $(f_j)_{j\geq 1}$ de fonctions de PW_τ^p définie par
$$f_j(z) := \frac{\sin \tau(z - x_j)}{\tau(z - x_j)}, \quad z \in \mathbb{C},$$
satisfait bien, pour j assez grand,
$$\left|\tilde{\Delta}_{\tau_n}^{k-1}\left(f_j e^{\pm i\tau\cdot}\left(\lambda_n^{(k)}\right)\right)\right| \lesssim \frac{1}{|\lambda_{n,0} - x_j|}.$$
Pour cela, on va traiter différemment les deux cas $\tau_n = \sigma_k'$ et $\tau_n = \sigma_k$. Soit alors j tel que
$$\rho_0' = \sup_n \operatorname{diam}\left(\sigma_n'\right) < \frac{1}{2} r_j < \frac{1}{2}|\lambda_{n,0} - x_j|.$$
Alors, si $z \in \partial B\left(\lambda_{n,0}, 2\rho_0'\right)$, on a tout d'abord que $d(z, \sigma_n) > \rho_0'$ et que
$$\begin{aligned} |z - x_j| &\geq |x_j - \lambda_{n,0}| - |z - \lambda_{n,0}| \\ &\geq |x_j - \lambda_{n,0}| - \rho_0' \\ &\geq \frac{|x_j - \lambda_{n,0}|}{2}. \end{aligned}$$
Comme, pour tout z inclus dans la bande horizontale de largeur 6ϵ, on a
$$\left|e^{\pm i\tau z}\right| \asymp 1,$$

la version euclidienne du Lemme 3.1.3 avec le compact $B\left(\lambda_{n,0}, 2\rho_0^{'}\right)$ donne bien que

$$\left|\square_{\sigma_n'}^{k-1}\left(f_j e^{\pm i\tau\cdot}\left(\lambda_n^{(k)}\right)\right)\right| \lesssim \frac{1}{|\lambda_{n,0} - x_j|}.$$

Dans le cas des paquets loin de l'axe réel, on traite de la même manière ceux du demi-plan supérieur ou du demi-plan inférieur. Considérons donc $\sigma_n \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > \epsilon\} \subset \mathbb{C}^+$.

On considère alors le demi-cercle (euclidien) de centre x_j et de rayon $|x_j - \lambda_{n,0}|$ sur lequel se trouve $\lambda_{n,0}$. La boule pseudo-hyperbolique $B_{psh}(\lambda_{n,0}, 2\rho_0)$ est en fait une boucle euclidienne de rayon

$$\delta_n := \left(\frac{4\rho_0}{1 - 4\rho_0^2}\right) \operatorname{Im}(\lambda_{n,0}),$$

(on rappelle que $2\rho_0 < \epsilon < 1$), et de centre

$$\xi_n := \operatorname{Re}(\lambda_{n,0}) + i\left(\frac{1 + 4\rho_0^2}{1 - 4\rho_0^2}\right) \operatorname{Im}(\lambda_{n,0}).$$

On est dans la situation de la Figure A.1. Si $z \in \partial B_{psh}(\lambda_{n,0}, 2\rho_0)$, alors $\rho(z, \sigma_n) > \rho_0$. Comme

$$\left|\sin\tau(z - x_j) e^{i\tau z}\right| \lesssim e^{\tau \operatorname{Im}(z)} e^{-\tau \operatorname{Im}(z)} \lesssim 1,$$

il suffit donc de minorer $|z - x_j|$. Considérons alors la Figure A.2, avec $a = x_j$, $b = \operatorname{Re}(\lambda_n) + i\left(\frac{1-2\rho_0}{1+2\rho_0}\right) \operatorname{Im}(\lambda_{n,0})$ et $c = \xi_n$. Le lecteur remarquera que le point $\lambda_{n,0}$ n'apparait pas sur cette figure, mais est compris dans le segment $[c, e]$ et que les points d et e pourraient être confondus si $\operatorname{Re}(\lambda_{n,0}) = x_j$ mais que cela ne perturberait pas la démonstration. Le théorème de Thalès affirme alors que

$$\frac{|a - d|}{|a - c|} = \frac{|b - e|}{|b - c|} = \frac{(1 - 2\rho_0)^2}{1 + 4\rho_0^2} =: \kappa.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |z - x_j| &= |z - a| \geq |a - d| \\ &\geq \kappa|a - c| \\ &\geq \kappa|x_j - \lambda_{n,0}|. \end{aligned}$$

On applique alors le Lemme 3.1.3 à f_j dans le compact $B_{psh}(\lambda_{n,0}, 2\rho_0)$, ce qui nous permet d'obtenir

$$\left|\Delta_{\sigma_n}^{k-1}\left(e^{i\tau\cdot} f_j\left(\lambda_n^{(k)}\right)\right)\right| \lesssim \frac{1}{|\lambda_{n,0} - x_j|},$$

ce qu'on voulait.

A.5 .. ad paragraphe 3.4.3.1

On justifie ici que la fonction $\phi := f/S$ est bien une fonction entière de type exponentiel $\sigma_\phi = 0$. Pour cela, on montre que le diagramme indicateur de ϕ est nécessairement $\{0\}$, ce qui entraîne que $\sigma_\phi = 0$. On commence par observer que $I_S = [-i\tau, i\tau]$. Comme S est dans

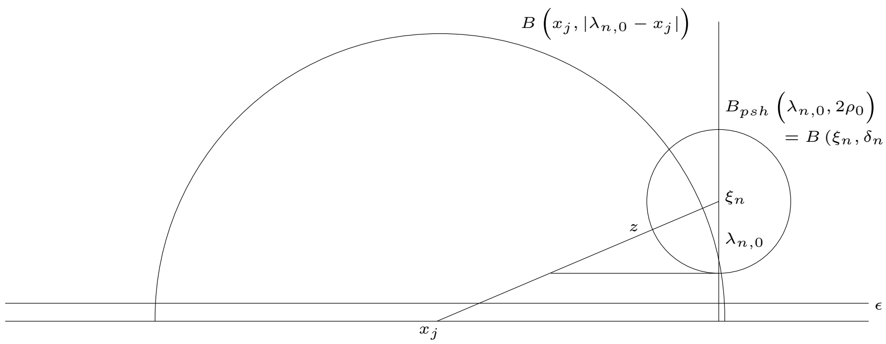

FIG. A.1 – $\lambda_{n,0}$ loin de l'axe réel et loin de x_j

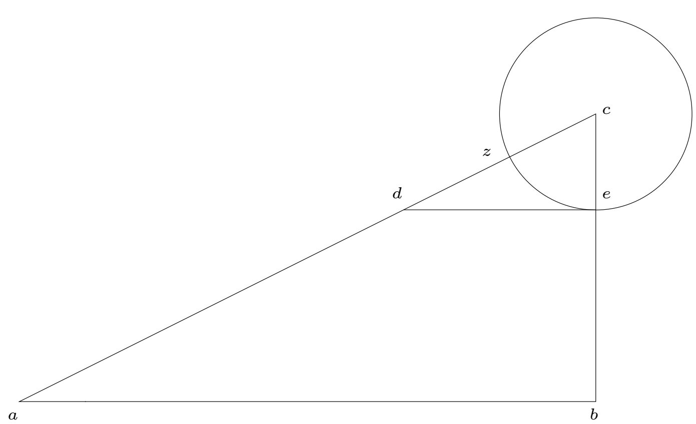

FIG. A.2 – Une configuration du type Thalès la classe de Cartwright et que son type est τ, il suffit de montrer que I_S est symétrique par rapport à l'axe réel, ou encore que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log\left|S\left(re^{i\theta}\right)\right| - \log\left|S\left(re^{-i\theta}\right)\right|}{r} = 0, \quad 0 < \theta < \pi.$$

On peut sans perte de généralité supposer que $\Lambda \cap \mathbb{R} = \emptyset$. On découpe alors S en $S = S^+S^-$ correspondant respectivement aux points de $\Lambda^+ := \Lambda \cap \mathbb{C}^+$ et $\Lambda^- := \Lambda \cap \mathbb{C}^-$. Mais, on remarque que

$$\left|S^{\pm}\left(re^{-i\theta}\right)\right| = \prod_{\lambda\in\Lambda^{\pm}} \left|1 - \frac{re^{-i\theta}}{\lambda}\right| = \prod_{\lambda\in\Lambda^{\pm}} \left|1 - \frac{re^{i\theta}}{\overline{\lambda}}\right|.$$

On introduit donc

$$\chi_{\Lambda^+}(z) := \prod_{\lambda\in\Lambda^+} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{z}{\overline{\lambda}}\right)^{-1}$$

et

$$\chi_{\overline{\Lambda^-}}(z) := \prod_{\lambda\in\Lambda^-} \left(1 - \frac{z}{\overline{\lambda}}\right)\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)^{-1}$$

et on cherche à montrer que

$$\lim_{r\to\infty} \left(\frac{\log\left|\chi_{\Lambda^+}\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r} - \frac{\log\left|\chi_{\overline{\Lambda^-}}\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r}\right) = 0, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Pour cela, on utilise le lemme suivant.

Lemme A.5.1. *[Le64, Lemma 5 p. 237] Si $\mathcal{A} = \{a_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{C}^+$ et que $\sum_{k\geq 1} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{a_k}\right) < \infty$, alors*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log\left|\chi_{\mathcal{A}}\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r} = 0, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Du fait que $S \in \mathcal{C}$, le Théorème 1.2.9 implique qu'on peut appliquer ce lemme à $\mathcal{A} = \Lambda^+$ et $\mathcal{A} = \overline{\Lambda^-}$. Ainsi, le diagramme indicateur de S est bien $[-i\tau, i\tau]$. Comme les trois fonctions S, f et ϕ sont dans $\mathcal{C}$ (et en particulier à croissance complètement régulière, voir [Le64, Chapter III]), on peut en déduire que

$$I_f = I_S + I_\phi.$$

Mais, comme $I_f \subset [-i\tau, i\tau]$ et $I_\phi = [-ia, ib]$, l'égalité précédente implique nécessairement que $I_f = I_S$ et que $I_\phi = \{0\}$, ce qui donne le résultat voulu.

A.6 .. ad paragraphe 4.4.3

On commence par démontrer le Lemme 4.4.3.

Preuve. Quitte à remplacer ρ_n par ρ_n+1, et comme $X(\rho_n) \subset X$, on peut supposer $\inf_n \rho_n > 0$. Ainsi, $U = \left(X(\rho_n), \|\cdot\|_\rho\right)$ est un espace de Hilbert, où on a posé $\|x\|_\rho^2 := \sum_n \rho_n^2 \|x_n\|^2$. On peut identifier $X(\rho_n)$ à

$$l^2(X_n, \rho_n) = \left\{x = (x_n)_n : \ x_n \in X_n, \ \sum_n \rho_n^2 \|x_n\|^2 < \infty\right\}$$

via l'application continue

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & U & \to & l^2\left(X_n, \rho_n\right) \\ & x & \mapsto & \left(\mathcal{P}_n x\right)_n \end{array}$$

ce qui permet également d'identifier $U^\star$ à $l^2\left(Y_n, \frac{1}{\rho_n}\right)$.

On définit maintenant

$$\begin{array}{rccc} T_0 : & H & \to & U \\ & h & \mapsto & Th \end{array}$$

qui, par le théorème du graphe fermé, est une application continue et par hypothèse est surjective. On note alors

$$\tilde{T}_0 := \Phi \circ T_0$$

qui est une application continue et surjective de H dans $l^2\left(X_n, \rho_n\right)$. Ceci implique donc que $\tilde{T}_0^\star$ est à image fermée, que c'est un isomorphisme sur son image et qu'elle possède une estimation inférieure, *i.e* il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $y \in l^2\left(Y_n, \frac{1}{\rho_n}\right)$, on a

$$\left\|\tilde{T}_0^\star y\right\|_H \geq \epsilon \left\|y\right\|_{l^2\left(Y_n, \frac{1}{\rho_n}\right)}.$$

Or, pour $y = \left(y_n\right)_n \in l^2\left(Y_n, \frac{1}{\rho_n}\right)$ et $h \in H$, on voit que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T}_0^\star y, h\rangle_H &= \langle y, \tilde{T}_0 h\rangle_\star \\ &= \sum_n \langle y_n, \mathcal{P}_n T h\rangle_X \\ &= \sum_n \langle T^\star y_n, h\rangle_H \\ &= \langle \sum_n T^\star y_n, h\rangle_H \end{aligned}$$

Ceci étant vrai au moins pour des sommes finies, c'est vrai partout. On en déduit que

$$\tilde{T}_0^\star y = \sum_n T^\star y_n. \tag{A.2}$$

En particulier,

$$\operatorname{Im} \tilde{T}_0^\star \subset \bigvee E_n \tag{A.3}$$

Grâce à l'estimation inférieure précédente, on déduit l'inégalité pour $y_n \in Y_n$

$$\left\|\tilde{T}_0^\star((\delta_{n,j} y_n)_j)\right\|_H^2 \geq \epsilon^2 \left\|(\delta_{n,j} y_n)_j\right\|^2_{l^2\left(Y_n, \frac{1}{\rho_n}\right)} = \frac{\epsilon^2}{\rho_n^2} \left\|y_n\right\|_X^2 \tag{A.4}$$

On explicite maintenant un isomorphisme entre $l^2\left(Y_n, \frac{1}{\rho_n}\right)$ et $l^2\left(E_n\right)$ avec l'application

$$\begin{array}{rccc} \Theta : & l^2(Y_n, \frac{1}{\rho_n}) & \to & l^2(E_n) \\ & y = \left(y_n\right)_n & \mapsto & \left(\tilde{T}_0^\star\left(\left(\delta_{n,j} y_n\right)_j\right)\right)_n \end{array}$$

On voit facilement que Θ est bien définie et continue :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{E}_n\Theta y\|_H^2 &= \left\|\tilde{T}_0^\star((\delta_{n,j}y_n)_j)\right\|_H^2 \\ &\leq \left\|\tilde{T}_0^\star\right\|^2 \|(\delta_{n,j}y_n)_j\|^2_{l^2\left(Y_n,\frac{1}{\rho_n}\right)} \\ &= \frac{\left\|\tilde{T}_0^\star\right\|^2}{\rho_n^2}\|y_n\|_X^2\end{aligned}$$

La surjectivité découle directement de l'inégalité (A.4). Ainsi, Θ est un isomorphisme. Il reste maintenant à montrer que Im $\tilde{T}_0^\star = \bigvee\mathcal{E}$. Mais cela découle de l'égalité (A.3) et du fait que l'image de $\tilde{T}_1^\star$ est fermée.

Finalement, on obtient que $\Theta\circ\tilde{T}^\star_{0|\bigvee\mathcal{E}}$ est un isomorphisme entre $\bigvee\mathcal{E}$ et $l^2(E_n)$ ce qui équivaut au fait que $\mathcal{E}$ est une suite de Riesz et termine la démonstration. □

On montre ensuite le Lemme 4.4.4.

Preuve. Il s'agit de trouver la suite $(\rho_n)_n$ qui convient. Tout d'abord, notons $H_0 := (\bigvee\mathcal{E},\ \|\cdot\|_H)$. C'est un espace de Hilbert et par hypothèse, $\mathcal{E}$ est une base de Riesz de H_0. On note donc les $\mathcal{E}_n$ les projections obliques de H_0 dans E_n, $n\geq 1$, $E_n^{'} := \mathcal{E}_n^\star H_0$ et enfin $\mathcal{E}' = \left\{E_n^{'}\right\}_n$. Il apparaît que $\mathcal{E}'$ est aussi une base de Riesz de H_0. En particulier, $\mathcal{J}_{\mathcal{E}'}H_0\subset l^2(H_0)$, *i.e* pour tout $h\in H_0$, $\sum_n\|\mathcal{E}_n^\star h\|^2<\infty$ (voir [Ni86, p. 138-142]). On définit également la projection orthogonale Q de H dans H_0. On remarque que si $h\in H$, alors $\mathcal{P}_nTh=\mathcal{P}_nTQh=\mathcal{P}_nT\mathcal{E}_n^\star Qh$:

$$\langle\mathcal{P}_nT(1-Q)h,y\rangle = \langle(1-Q)h,T^\star\mathcal{P}_n^\star y\rangle = 0,$$

et pour $h\in H_0$

$$\langle\mathcal{P}_nT\mathcal{E}_n^\star h,y\rangle = \langle h,\mathcal{E}_nT^\star\mathcal{P}_n^\star y\rangle = \langle h,T^\star\mathcal{P}_n^\star y\rangle = \langle\mathcal{P}_nTh,y\rangle.$$

Si $(\rho_n)_n\subset\mathbb{R}_+^\star$, on a vu précédemment qu'on peut identifier $X(\rho_n)$ à $l^2(X_n,\rho_n)$ via l'application Φ, et $X(\rho_n)^\star$ à $l^2\left(Y_n,\frac{1}{\rho_n}\right)$. Trouvons les ρ_n qui permettent d'avoir Im $T\subset X(\rho_n)$. Soit $h\in H$. Grâce à ce qu'on vient de voir, on a

$$\|\mathcal{P}_nTh\|_X^2\leq\|\mathcal{P}_nT\|^2\|\mathcal{E}_n^\star Qh\|_H^2 = \|T^\star\mathcal{P}_n^\star\|^2\|\mathcal{E}_n^\star Qh\|_H^2.$$

Ainsi, si $\rho_n\lesssim\|T^\star\mathcal{P}_n^\star\|^{-1}$, il suit que

$$\rho_n^2\|\mathcal{P}_nTh\|_X^2\lesssim\|\mathcal{E}_n^\star Qh\|_H^2$$

et en particulier, comme

$$\sum_n\|\mathcal{E}_n^\star Qh\|_H^2<\infty,$$

on obtient que $Th\in X(\rho_n)$, ou encore Im$T\subset X(\rho_n)$.

Pour montrer l'inclusion inverse, on garde les notations du lemme précédent et on veut trouver les ρ_n tels que $\tilde{T}_0$ soit surjectif. On voit clairement que si $\rho_n\gtrsim\delta_n$, alors

$$\frac{1}{\rho_n^2}\|y_n\|_X^2\lesssim\frac{1}{\delta_n^2}\|y_n\|_X^2\leq\frac{\|T^\star y_n\|_H^2}{\|y_n\|_X^2}\|y_n\|_X^2 = \|T^\star y_n\|_H^2.$$

Comme

$$\|y\|^2_{l^2\left(Y_n,\frac{1}{\rho_n}\right)} = \sum_n \frac{1}{\rho_n^2}\,\|y_n\|^2_X\,,$$

et que, pour $h \in H_0 = \bigvee \mathcal{E}$,

$$\|h\|^2_H \asymp \sum_n \|\mathcal{E}_n h\|^2_H\,,$$

on va déduire du fait que

$$\tilde{T}_0^\star y = \sum_n T^\star y_n \in H_0, \quad y = (y_n)_n\,,$$

l'inégalité

$$\left\|\tilde{T}_0^\star y\right\|^2_H \gtrsim \sum_n \|T^\star y_n\|^2_H \gtrsim \sum_n \frac{1}{\rho_n^2}\,\|y_n\|^2_X = \|y\|^2_{l^2\left(Y_n,\frac{1}{\rho_n}\right)}\,.$$

Autrement dit, on déduit que $\tilde{T}_0^\star$ est surjective. En combinant les deux inégalités obtenues, on trouve que l'on doit avoir

$$\delta_n \lesssim \rho_n \lesssim \|T^\star \mathcal{P}_n^\star\|^{-1}\,,$$

et par l'hypothèse (4.8), on a $\delta_n \lesssim \|T^\star \mathcal{P}_n^\star\|^{-1}$ donc $\rho_n = \delta_n$ convient. □

Bibliographie

[Al97] A.B. Aleksandrov, *A simple proof of a theorem of Volberg and Treil on the embedding of coinvariant subspaces of the shift operator,* J. Math. Sci. **85**-2 (1997), 1773-1778.

[AH10] E. Amar and A. Hartmann, *Uniform minimality, unconditionality and interpolation in backward shift invariant subspaces*, Ann. Inst. Fourier **60-1** (2010), 1871–1903.

[AI95] S.A. Avdonin and S.A. Ivanov, *Families of Exponentials. The method of moments.* Cambridge University Press (1995).

[AI01] S.A. Avdonin and S.A. Ivanov, *Exponential Riesz bases of subspaces and divided differences,* St. Petersbourg. Math. J. **93**-3 (2001), 339-351.

[BKL02] C. Baiocchi, V. Komornik and P. Loretti, *Ingham-Beurling type theorems with weakened gap conditions*, Acta Math. Hungar. **97-**1-2 (2002), 55-95.

[Be06] Y.S. Belov, *Moduli of functions in model subspaces,* PhD Thesis (2006), Norwegian University os Sciences and Technologies (NTNU).

[Be09] Y.S. Belov, *Model functions with nearly prescribed modulus,* St. Petersbourg Math. J. **20**-2 (2009), 163-174.

[Be89] A. Beurling, *The collected Works of Arne Beurling, volume 2 : Harmonic Analysis,* L. Carleson, P. Malliavin, J. Neuberger and J. Wermer Eds., Birkhäuser (1989), 341-365.

[BNO96] J. Bruna, A. Nicolau and K. Oyma, *A note on interpolation in the Hardy spaces of the unit disc,* Proc. Amer. Math. Soc. **124**-4 (1996), 1197-1204.

[Ca58] L. Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions,* Amer. J. Math. **80** (1958), 921-930.

[Ga77] J.B Garnett, *Two remarks on interpolation by bounded analytic functions,* Lecture Notes in Math. **604** (1977), 32-40.

[Ga81] J.B. Garnett, *Bounded analytic functions (Revised first edition),* Graduate Texts in Math. **236** (2007), Springer-Verlag. First edition in Pure and applied Mathematics **86** (1981), Academic Press.

[Gau11a] F. Gaunard, *Divided differences and restriction operator on Paley-Wiener spaces for $N-$Carleson sequences,* preprint (2011), *submitted, [hal-00585565].*

[Gau11b] F. Gaunard, *Minimality, (Weighted) Interpolation in Paley-Wiener spaces and Control Theory,* preprint (2011), *preprint* .

[Ha96a] A. Hartmann, *Interpolation libre et caractérisation des traces des fonctions holomorphes sur les réunions finies de suites de Carleson,* Thèse de l'Université Bordeaux 1 (1996).

[Ha96b] A. HARTMANN, *Une approche de l'interpolation libre généralisée par la théorie des opérateurs et caractérisations des traces $H^p|\Lambda$,* J. Operator Theory **35**-2 (1996), 281-316.

[Ha99] A. HARTMANN, *Free interpolation in Hardy-Orlicz spaces,* Studia Math. **135**-2 (1999), 179-189.

[HM03] V. HAVIN AND J. MASHREGHI, *Admissible Majorants for Model Subspaces of H^2, Part I : Slow Winding of the Generating Inner Function,* Canad. J. Math **55**-6 (2003), 1231-1263.

[HMW73] R. HUNT, B. MUCKENHOUPT AND R. WHEEDEN, *Weighted norm inequalities for the conjugate Hilbert transform,* Proc. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 227-251.

[HNP81] S.V. HRUSCEV, N.K. NIKOLSKII AND B.S PAVLOV, *Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels* in Complex analysis and spectral theory, Lectures Notes in Math. **864** (1981), 214-335.

[In36] A.E. INGHAM, *Some trigonometrical inequalities with applications in the theory of series,* Math. Z. **41** (1936), 367-379.

[JP06] B. JACOB AND J. PARTINGTON, *On controllability of diagonal systems with one-dimensional input space,* Systems Control Lett. **55**-4 (2006), 321-328.

[JPP10] B. JACOB, J. PARTINGTON AND S. POTT, *Weighted interpolation in Paley-Wiener spaces and finite-time controllability,* J. Funct. Anal. **259** (2010), 2424-2436.

[Ko80] P. KOOSIS, *Introduction to H^p spaces, second edition,* Cambrdige tracts in Math. **115** (1998), First edition published in 1980.

[Le64] B.Y. LEVIN, *Distributions of zeros of entire functions,* Translations of Math. Monographs **5** (1964), Amer. Math. Soc.

[Le96] B.Y. LEVIN, *Lectures on entire functions,* Math. Monographs **150** (1996), Amer. Math. Soc.

[LS97] Y.L. LYUBARSKII AND K. SEIP, *Complete interpolating sequences for Paley-Wiener spaces and Muckenhoupt's (A_p) condition,* Rev. Mat. Iber. **13**-2 (1997), 361-376.

[MP90] J.D. MCPHAIL, *A weighted interpolation problem for analytic functions,* Studia Math. **96** (1990), 105-116.

[Mi92] A.M. MINKIN, *The reflection of indices and unconditionnal bases of exponentials,* St. Petersburg Math. J. **3**-5 (1992), 1043-1064.

[Ni86] N.K. NIKOLSKII, *A treatise on the shift operator,* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **273** (1986), Springer-Verlag.

[Ni02a] N.K. NIKOLSKII, *Operators, functions and systems : An easy reading, volume 1,* Mathematical Surveys and Monographs **92** (2002), Amer. Math. Soc.

[Ni02b] N.K. NIKOLSKII, *Operators, functions and systems : An easy reading, volume 2,* Mathematical Surveys and Monographs **93** (2002), Amer. Math. Soc.

[RSR05] R. RABAH, G.M. SKLYAR AND A.V. REZOUNENKO, *Stability analysis of neutral-type systems in Hilbert space,* J. Differential Equations **214** (2005), 391-428.

[RS07] R.RABAH AND G.M. SKLYAR, *The analysis of exact controllability of neutral-type system by the moment approach,* SIAM J. Control Optim. **46**-6 (2007), 2148-2181.

[Ro77] R. Rochberg, *Toeplitz operators on weighted H^p spaces,* Indiana Univ. Math. J. **26**-2 (1977), 291–298.

[ScS98] A. Schuster and K. Seip, *A Carleson-type condition for interpolation in the Bergmann spaces,* J. Reine Angrew. Math. **497** (1998), 223-233.

[ScS00] A. Schuster and K. Seip, *Weak conditions for interpolation in holomorphic spaces,* Publ. Mat. **44**-1 (2000), 277-293.

[Se95] K. Seip, *On the connection between Exponential Bases and certain related sequences in $L^2(-\pi,\pi)$,* J. Funt. Anal. **130** (1995), 131-160.

[Se98] K. Seip, *Developments from nonharmonic Fourier series*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Doc. Math. Extra **II** (1998), 713-722.

[Se04] K. Seip, *Interpolation and sampling in spaces of analytic functions,* Univ. Lect. Series **33** (2004), Amer. Math. Soc.

[SS61] H.S. Shapiro and A.L. Shields, *On some interpolation problems for analytic functions,* Amer. J. Math. **83** (1961), 513-532.

[Si70] I. Singer, *Bases in Banach Spaces I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **154** (1970), Springer-Verlag.

[TV95] S.R. Treil and A.L. Volberg, *Weighted embeddings and weighted norm inequalities for the Hilbert transform and the maximal operator*, Algebra i Analiz **7**-6 (1995), 205–226 ; translation in St. Petersburg Math. J. **7**-6 (1996), 1017–1032.

[TW09] M. Tucsnak and G. Weiss, *Observation and Control for Operator Semigroups,* Birkhäuser Adv. Texts (2009), Birkhäuser Verlag.

[Va84] V.I. Vasyunin, *Traces of bounded analytic functions on finite unions of Carleson sets*, J. Soviet Math. **27**-1 (1984), 2448-2450.

[XY05] Gen Qi Xu and Siu Pang Yung, *The expansion of a semigroup and a Riesz basis criterion,* J. Differential Equations **210** (2005), 1-24.

Résumé

Nous étudions des problèmes d'interpolation dans des espaces de fonctions analytiques et notamment les espaces de Paley-Wiener PW_τ^p.

Nous démontrons que l'opérateur de restriction R_Λ, associé à une suite de nombres complexes Λ supposée a priori $N-$Carleson dans tout demi-plan, définit un isomorphisme entre l'espace de Paley-Wiener et un certain espace de suites (construit à l'aide de différences divisées) si et seulement si la suite en question vérifie certaines conditions, notamment la condition de Muckenhoupt. Ce résultat généralise un résultat de Lyubarskii et Seip de 1997.

Nous montrons également que toute suite minimale dans l'espace de Paley-Wiener et telle que l'intersection avec tout demi-plan vérifie la condition de Carleson, est une suite d'interpolation dans tout espace de Paley-Wiener "plus grand" $PW_{\tau+\epsilon}^p$, pour tout $\epsilon > 0$. Ce dernier résultat s'étend à l'interpolation pondérée et s'applique à la Théorie du contrôle.

Abstract

We study interpolation problems in spaces of analytic functions and in particular in Paley-Wiener spaces PW_τ^p.

We show that the restriction operator R_Λ associated to some $N-$Carleson sequence Λ is an isomorphism between PW_τ^p and a certain space of sequences (contructed with the help of divided differences) if and only if Λ satisfies some conditions, in particular the Muckenhoupt condition. This result is a generalization of a theorem of Lyubarskii and Seip obtained in 1997.

We also show that every minimal sequence Λ in PW_τ^p such that the intersection with every half-plane satisfies the Carleson condition is actually an interpolating sequence in every "bigger" space $PW_{\tau+\epsilon}^p$, $\epsilon > 0$. This result can be extended to weighted interpolation and has an application in Control Theory.

Mots-clés

Interpolation pondérée, espaces de Paley-Wiener, Théorie du contrôle, Minimalité, condition de Muckenhoupt, différences divisées, opérateur de restriction.