



HAL
open science

Préconditionnement de méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques impliquant une cavité profonde

Jennifer Bourguignon Bourguignon-Mirebeau

► To cite this version:

Jennifer Bourguignon Bourguignon-Mirebeau. Préconditionnement de méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques impliquant une cavité profonde. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris Sud - Paris XI, 2011. Français. NNT : 2011PA112303 . tel-00651957

HAL Id: tel-00651957

<https://theses.hal.science/tel-00651957>

Submitted on 14 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre :

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

Spécialité : Mathématiques

par

Jennifer BOURGUIGNON-MIREBEAU

Préconditionnement de méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques impliquant une cavité profonde.

Soutenue le 12 décembre 2011 devant la Commission d'examen :

François ALOUGES	Directeur de thèse
Laurence HALPERN	Rapporteur
Patrick JOLY	Rapporteur
Frédéric LAGOUTIÈRE	Examineur
David LEVADOUX	Directeur de thèse
Sébastien PERNET	Examineur

Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales
Département d'Électromagnétisme et Radars - Signature, Furtivité, Modélisation



Table des matières

Résumé	vii
Abstract	viii
Remerciements	ix
Introduction	1
1 Contexte	1
2 Objectif	7
3 Plan de la thèse	7
Partie I Problème de Maxwell et méthodes d'équations intégrales	17
Chapitre 1 Problème de Maxwell et théorème de représentation	19
1.1 Ondes électromagnétiques : définitions et notations	21
1.1.1 Équations de Maxwell harmoniques	21
1.1.2 Condition de rayonnement à l'infini	23
1.1.3 Espaces d'ondes admissibles	23
1.1.4 Solution élémentaire du problème de Helmholtz	23
1.1.5 Potentiel \mathcal{G}_k	24
1.1.6 Traces électromagnétiques extérieures ou intérieures	25
1.2 Théorème de représentation	25
1.2.1 Définition des potentiels électromagnétiques simple et double couche	26
1.2.2 Représentation intégrale d'un champ électromagnétique	26
1.2.3 Opérateurs simple et double couche	28
1.2.4 Projecteurs de Calderón	30
1.3 Opérateurs de Fredholm	31
1.4 Problèmes de Maxwell	33

1.4.1	Le problème de Maxwell extérieur avec condition métal	33
1.4.2	Le problème de Maxwell intérieur avec condition métal	37
1.4.3	Le problème de Maxwell extérieur métal-impédant	38
1.4.4	Le problème de Maxwell intérieur métal-impédant	39
1.4.5	Caractérisation des traces	40
1.5	Représentation intégrale d'un champ diffracté par un objet parfaitement conducteur	41
Chapitre 2 Résolution par équations intégrales du problème de Maxwell		43
2.1	Zoologie des équations intégrales	45
2.1.1	Les équations en source	45
2.1.2	Les équations en champ	47
2.2	Equations intégrales pour le problème métal, utilisées dans les codes industriels	49
2.2.1	Équation intégrale en champ électrique (EFIE)	49
2.2.2	Équation intégrale en champ magnétique (MFIE)	50
2.2.3	Équation intégrale en champs combinés (CFIE)	51
2.3	Les équations de type GCSIE	53
2.3.1	Un formalisme GCSIE général pour construire une équation de frontière bien conditionnée	53
2.3.2	Opérateur Dirichlet-to-Neumann	55
2.3.3	Le formalisme GCSIE appliqué au cas de l'électromagnétisme	58
2.4	Vitesse de convergence et validation numérique des algorithmes d'équations intégrales	61
2.4.1	Conditionnement des équations intégrales	61
2.4.2	Validation numérique : la SER (Section Efficace Radar)	63
2.5	Le problème posé par les cavités	64
2.5.1	Ralentissement de la convergence pour un objet avec cavité	64
2.5.2	Comparaison de la SER de l'obstacle avec celle de l'obstacle dont la cavité a été obstruée	66
2.5.3	Conclusion : nécessité de l'utilisation d'une DDM	66
2.6	Les équations intégrales comme outil de synthèse de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann	67

Partie II Des préconditionneurs pour les méthodes de décomposition de domaine 73

Chapitre 3 Un préconditionneur analytique pour la DDM basée sur l'opérateur Dirichlet-to-Neumann	75
3.1 Description générale de la DDM	77
3.1.1 Le problème de la diffraction par un objet avec cavité	77
3.1.2 Découpage en deux sous-domaines Ω^+ et Ω^-	78
3.1.3 Continuité des champs totaux électrique et magnétique	80
3.2 Opérateur Dirichlet-to-Neumann	82
3.2.1 Opérateur Dirichlet-to-Neumann classique	82
3.2.2 Opérateur Dirichlet-to-Neumann modifié	83
3.2.3 Retour à la DDM	83
3.2.4 Obtention de l'admittance modifiée par équation intégrale	84
3.3 Un préconditionneur analytique pour la DDM en Y	86
3.3.1 Un lemme préliminaire	86
3.3.2 Un préconditionneur pour la DDM	88
3.4 Résultats numériques pour la DDM en Y	91
3.4.1 Discrétisation	91
3.4.2 Etude de la vitesse de convergence	92
3.4.3 Validation numérique : comparaison des SER	95
3.4.4 Influence de la montée en fréquence	96
3.4.5 Influence de l'augmentation du nombre d'inconnues	98
3.5 Possibilités d'autres DDMs basées sur un DtN	99
3.5.1 Relations vérifiées par les opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann	99
3.5.2 Autres DDMs en Y possibles. Préconditionneurs associés	100
3.5.3 Problèmes rencontrés selon les DDMs	102
3.6 Une formulation à deux inconnues vue comme une application du formalisme GCSIE	103
3.7 Conclusion	106
 Chapitre 4 Un préconditionneur spectral pour la DDM en Y	 107
4.1 Modes guidés pour un cylindre de forme quelconque	109
4.1.1 Le problème aux limites dans chacun des demi-guides d'onde	109
4.1.2 Séparation des variables z et (x, y) pour le champ électrique	110

4.1.3	Condition de rayonnement : le champ se dirige vers l'infini	111
4.1.4	Modes guidés de type gradient	112
4.1.5	Modes guidés de type rotationnel	114
4.1.6	Une base des champs tangents à la section du cylindre	116
4.1.7	Diagonalisation de l'admittance dans la base des traces de modes guidés	118
4.2	Calcul effectif des modes guidés	120
4.2.1	Application à un guide d'onde rectangulaire	120
4.2.2	Application à un guide d'onde de forme quelconque	122
4.3	Un préconditionneur spectral pour la DDM en Y	123
4.4	Résultats numériques pour la DDM en Y	125
4.4.1	Présentation du cas test	125
4.4.2	Validation numérique pour la DDM en Y	125
4.4.3	Influence du nombre de modes guidés	127
4.4.4	Influence de l'angle d'incidence	131
4.4.5	Influence du nombre de modes propagatifs dans la cavité	131
4.5	Comparaison avec le préconditionneur analytique	132
4.6	Conclusion	134
Chapitre 5 Un préconditionneur spectral pour la DDM en S		137
5.1	Description de la DDM en S	139
5.1.1	Opérateur de scattering classique associé à une surface fermée	139
5.1.2	Opérateur de scattering modifié associé à une DDM	140
5.1.3	Retour à la DDM	141
5.2	La DDM en S non préconditionnée	142
5.2.1	Symbole de l'opérateur sous-jacent à la DDM en S	142
5.2.2	Comparaison entre la DDM en Y et la DDM en S	144
5.2.3	Validation numérique de la DDM en S	145
5.3	Un préconditionneur spectral pour la DDM en S	146
5.3.1	Diagonalisation de l'opérateur de scattering dans la base des traces de modes guidés	146
5.3.2	Un préconditionneur fondé sur les modes guidés pour la DDM en S .	147
5.4	Résultats numériques pour la DDM en S préconditionnée à l'aide des modes guidés	149
5.4.1	Validation numérique	149
5.4.2	Vitesse de convergence des algorithmes	149

5.5	Autres préconditionneurs possibles	152
Conclusion		155
ANNEXES		157
Annexe A Approximation des opérateurs régularisants intervenant dans les GCSIE métallique et impédante		159
A.1	Approximations de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann (GCSIE métallique) . .	160
A.1.1	Approximation du Dirichlet-to-Neumann par localisation (Borel et Molko-Daugas)	160
A.1.2	Approximation microlocale du Dirichlet-to-Neumann (Darbas)	161
A.2	Approximations des opérateurs régularisants $R_{\mathbf{E}}$ et $R_{\mathbf{H}}$ (GCSIE impédante, Pernet)	165
A.2.1	Calcul de $(\widetilde{R}_{\mathbf{E}}, \widetilde{R}_{\mathbf{H}})$ dans le cas où $\gamma \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{tan}} + \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{H}$	166
A.2.2	Calcul de $(\widetilde{R}_{\mathbf{E}}, \widetilde{R}_{\mathbf{H}})$ dans le cas où $\gamma \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} - \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}}$	167
Annexe B Approximants de Padé		171
B.1	Développement de Taylor de $\sqrt{1+z}$	172
B.2	Développement de Padé de $\sqrt{1+z}$	173
B.3	Rotation de la coupure	175
B.4	Applications	177
B.4.1	Application à l'expansion de Padé de $(\text{Id}+T)^{+1/2}$ et $(\text{Id}+T)^{-1/2}$. . .	177
B.4.2	Application au calcul de $R_{\mathbf{H}}^{\text{loop}}$ et $R_{\mathbf{H}}^{\text{star}}$	180
Annexe C Synthèse des opérateurs Dirichlet-to-Neumann et de scattering par équations intégrales		183
C.1	Synthèse des opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann	184
C.1.1	Synthèse du Dirichlet-to-Neumann par des équations en champ . . .	184
C.1.2	Synthèse du Dirichlet-to-Neumann par des équations en source	191
C.2	Synthèse de l'opérateur de scattering	193
C.2.1	Synthèse de l'opérateur de scattering par GCSIE impédante	193
Annexe D Problèmes de Maxwell intérieur et extérieur avec condition métal-impédante		195

D.1	Le problème de Maxwell intérieur avec condition métal-impédante	196
D.2	Le problème de Maxwell extérieur avec condition métal-impédante	200
Bibliographie		203
Index		207

Résumé

Cette thèse est dédiée à la résolution numérique tridimensionnelle des équations de Maxwell harmoniques, par des méthodes de décomposition de domaine couplant des résolutions par équations intégrales dans les sous-domaines. Plus spécifiquement, notre objectif est de résoudre le problème de la diffraction d'une onde électromagnétique à haute fréquence par un objet complexe, présentant une ou plusieurs cavités de grande taille (typiquement, un avion complet comportant les cavités que sont les entrées d'air des réacteurs).

Pour traiter les problèmes de diffraction d'ondes, la méthode des équations intégrales est un outil précieux, qui consiste à rechercher la solution en la paramétrant par une source définie uniquement sur la frontière de l'objet diffractant. A haute fréquence, le bord de l'objet doit être discrétisé finement, ce qui conduit à des systèmes linéaires pleins et de grande taille à inverser. On est alors contraint d'utiliser des méthodes itératives. Afin d'accélérer leur résolution, on doit en outre s'assurer du bon conditionnement des systèmes linéaires, ou au moins proposer des préconditionneurs efficaces. Une technique performante, la GCSIE, a récemment été développée à l'Onera. Il s'agit d'une équation intégrale intrinsèquement bien conditionnée et qui fonctionne très bien en pratique pour des objets lisses et en l'absence de cavité. Cependant, l'existence de cavités larges et résonnantes continue à poser problème. Pour s'en défaire, nous proposons une méthode de décomposition de domaine (DDM), permettant de découpler le problème extérieur de celui des cavités.

Nous développons deux méthodes de décomposition de domaine distinctes, en fonction du choix de l'opérateur de couplage entre les sous-domaines. Dans un premier temps, on construit une DDM (dite DDM en Y) basée sur l'opérateur admittance (équivalent au Dirichlet-to-Neumann modulo une rotation), ce qui conduit à l'emploi d'équations intégrales résolvant le problème du parfait conducteur métallique (équivalent à une condition aux limites de Dirichlet). La solution dans les sous-domaines est obtenue par résolution d'équations intégrales. Nous proposons un premier préconditionneur analytique pour cette DDM, basé uniquement sur la connaissance de l'opérateur simple couche de l'interface entre sous-domaines.

Pour cette DDM en Y , nous développons également un préconditionneur spectral, adapté au cas d'un objet diffractant possédant une cavité large et profonde, et tel qu'au voisinage de l'interface entre sous-domaines, on puisse approcher localement la cavité par un guide d'onde infini tangent à la cavité. Ce préconditionneur est fondé sur la connaissance de modes qui sont guidés le long du cylindre artificiel infini. Les opérateurs admittance se diagonalisent dans la base formée par les traces de ces modes guidés sur l'interface, ce qui permet de proposer un préconditionneur naturel. Les résultats numériques illustrent l'efficacité de cette méthode, appliquée à des guides d'onde de forme rectangulaire.

Enfin, pour se débarrasser des phénomènes de résonance dans les cavités, nous faisons ensuite le choix d'une DDM basée sur l'opérateur de scattering (DDM en S). En effet, ceci conduit à la résolution d'un problème mixte de type métal-impédant (équivalent pour le problème de Helmholtz scalaire à une condition aux limites de Dirichlet sur un bord, de Fourier-Robin sur l'autre). Un tel problème ne présente pas de fréquence de résonance dans les sous-domaines intérieurs, contrairement au problème métallique. Un préconditionneur fondé sur les modes guidés est également proposé dans ce cas.

L'efficacité de la méthode est augmentée en choisissant d'une part des équations intégrales bien posées et bien conditionnées, et en adaptant d'autre part la DDM et le préconditionneur en fonction des équations intégrales choisies.

Mots-clés: équations intégrales, méthodes de décomposition de domaine, préconditionnement, électromagnétisme, comportement à haute fréquence, opérateur Dirichlet-to-Neumann, opérateur de scattering, modes guidés.

Abstract

PRECONDITIONING DOMAIN DECOMPOSITION METHODS FOR ELECTROMAGNETIC SCATTERING PROBLEMS INVOLVING A DEEP CAVITY

This work is devoted to the numerical solution of the tridimensional harmonic Maxwell equations, using domain decomposition methods coupling integral equations methods for the solutions in the subdomains. More specifically, we intend to solve the electromagnetic scattering problem at high frequency, by a complex obstacle having one or more big cavities (typically, a complete airplane whose air intakes constitute the cavities).

To deal with scattering problems, integral equations methods are a precious tool, that allow to look for the solution by parameterizing it with a source only defined on the boundary of the scattering object. At high frequency, the boundary of the obstacle has to be finely discretized, implying dense and big linear systems to solve. This forces the use of iterative methods. To accelerate their solution, one moreover has to ensure the good condition number of the linear systems, or to propose well-suited preconditioners. An efficient method, the GCSIE, was developed in Onera. It is an intrinsically well-conditioned integral equation which is very efficient in practice for smooth objects, without cavities. However, the existence of large and resonant cavities is still a problem. To cope with this problem, we propose a domain decomposition method (DDM) allowing to decouple the exterior problem from the problem of the cavities.

We develop two different domain decomposition methods, depending on the choice of the coupling operator between the subdomains. In a first time, we build a DDM (a Y -DDM) based on the admittance operator (equivalent to the Dirichlet-to-Neumann operator modulo a rotation), which leads to the use of integral equations solving the problem of the perfect electric conductor (equivalent to a Dirichlet boundary condition). The solution inside the subdomains is obtained through integral equations. We propose a first analytic preconditioner for this DDM, based only on the knowledge of the single layer operator of the interface between subdomains.

We also develop, for the Y -DDM, a spectral preconditioner, which is adapted to the case of a scattering object having a large and deep cavity, and such that in the neighbourhood of the interface between subdomains, we can locally approach the cavity by an infinite waveguide, tangent to the cavity. This preconditioner is based on the knowledge of modes that are guided along the artificial infinite cylinder. The admittance operators are indeed diagonal in the basis formed by the trace of these guided modes on the interface, which allows to propose a natural preconditioner. The numerical results illustrate the efficiency of this method, applied to waveguides of rectangular section.

Eventually, to get rid of the resonance phenomena inside the cavities, we then make the choice of a DDM based on the scattering operator (a S -DDM). This indeed leads to the solution of a mixt problem of metal-impedant type (equivalent, for the scalar Helmholtz problem, to a Dirichlet boundary condition on one part of the boundary, and a Fourier-Robin boundary condition on the other part). Such a problem does not have resonance frequencies for interior problems, contrary to metallic problems. An adapted preconditioner, based on the guided modes, is also proposed in this case.

The efficiency of the method is enhanced by first choosing well-posed and well-conditioned integral equations, and then adapting the DDM and the preconditioner to the chosen integral equations.

Keywords: integral equations, domain decomposition methods, preconditioning, electromagnetism, high frequency behavior, Dirichlet-to-Neumann operator, scattering operator, guided modes.

Remerciements

Mes premiers remerciements vont naturellement à mes directeurs de thèse, François ALOUGES et David LEVADOUX. Merci à vous deux d'avoir accepté de diriger cette thèse, et de m'avoir proposé ce sujet de recherche. François, merci pour la clarté de tes explications, tes encouragements constants, ton optimisme indéfectible. Je te remercie surtout pour ton soutien, mathématique, numérique comme moral, notamment au cours de cette dernière année de thèse. David, je te remercie pour ton exigence, ton intuition, ton aide précieuse à la programmation et ta présence indispensable pour relever le défi du code Elsem3D. J'ai appris avec toi que la recherche est faite de persévérance autant que d'enthousiasme.

Je suis extrêmement reconnaissante à Laurence HALPERN et Patrick JOLY d'avoir accepté de rapporter cette thèse, d'y avoir consacré une partie de leur temps et de me faire l'honneur de leur présence le jour de la soutenance. Je les remercie en particulier pour leur relecture minutieuse, pour leurs remarques constructives et très détaillées relatives au manuscrit. Je remercie vivement Frédéric LAGOUTIÈRE et Sébastien PERNET de témoigner de l'intérêt qu'ils portent à mon travail en participant à mon jury de thèse.

Je tiens à remercier mes *sœurs de thèse* pour les moments partagés. Merci à Séverine MOLKODUGAS qui a connu grand nombre de déboires comme de victoires avec moi (discussions mariage-enfant-thèse... dans le désordre). Je n'oublierai pas notre petit bureau de l'Onera, bien décoré par nos soins, dont nous avons fini par nous échapper. Je remercie bien sûr Adeline AUGIER, la plus dévouée des doctorantes, toujours disponible pour les autres, qu'il s'agisse d'un dépannage administratif, d'un conseil, ou d'une discussion autour d'un thé pour remonter le moral d'une thésarde en détresse... Merci également à Aude CHUPIN-ROUDNEFF et Ramla ABDELLATIF qui ont partagé, de la rédaction à la soutenance, la dernière ligne droite avec moi. Une mention spéciale à celles et ceux qui m'ont aidée pour la fastidieuse tâche de relecture du manuscrit : Jean-Marie, Adeline et Séverine.

Je n'oublie pas non plus les membres du laboratoire de mathématiques de l'Université Paris-Sud, qui m'ont offert un environnement de travail propice à la conclusion de ma thèse, au cours de cette dernière année : merci à Jean-Baptiste APOUNG KAMGA, Astrid DECOENE, Sylvain FAURE, Loïc GOUARIN, Benjamin GRAILLE, Bernard HÉRON, Françoise ISSARD-ROCH, Hervé LE MEUR, Sébastien MARTIN, Evelyne MIOT, Filippo SANTAMBROGIO, Jean-Claude SAUT, pour leur présence au quotidien¹ ; et bien sûr merci à Frédéric LAGOUTIÈRE, qui m'a donné le goût de l'analyse numérique en M1. Je remercie également Patrick GÉRARD, David HARARI, Bertrand MAURY et Pierre PANSU pour leur aide et leurs conseils avisés. Enfin, je ne voudrais pas terminer sans remercier tous les (ex-)doctorants du bureau 256, y compris les *petits nouveaux*, comme il est coutume de les appeler lorsque l'on passe de l'autre côté du miroir : Benoît, Caroline, Guilhem, Jean, Konstantin, Nina, Nicolas, Tony et bien sûr Aude et Adeline, qui rendent le bureau bien sympathique. J'adresse mes salutations aux *anciens* de Paris-Sud que j'ai le plaisir de croiser de temps en temps, à un congrès CANUM ou SMAI ou encore à Polytechnique : Aline LEFEBVRE-LEPOT, Benoît MERLET et Juliette VENEL.

Je tiens également à saluer les moniteurs et membres de l'École Polytechnique avec lesquels j'ai eu la chance de travailler pour le semestre EV2 : Antoine PERASSO, Nicolas JACQUET, Pascale HARINCK, et Aline LEFEBVRE-LEPOT. C'était ma première expérience d'enseignement, et elle fut vraiment enrichissante.

1. J'espère n'avoir oublié personne. Si *personne* est non vide, je le prie de bien vouloir m'excuser.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance à l'Onera, et notamment à Juan-Carlos CASTELLI qui m'a accueillie au sein du DEMR-SFM pendant la durée de cette thèse. Je remercie également la DGA qui l'a financée. Pour les légendaires et incontournables pauses-café que nous avons partagées, et sans lesquelles nul doctorant ne tiendrait le coup, merci mille fois à Jérôme SIMON, Sophie LANGLET et Béatrice FROMENTIN, toujours au rendez-vous ! Je me souviendrai de nos crises de fou rire à la lecture de nos horoscopes quotidiens. Je remercie en particulier Jérôme pour avoir accepté sans délai d'être mon tuteur de thèse, et pour tout le soutien informatique comme moral qu'il a pu nous prodiguer à Séverine et à moi ; merci à Béatrice - promis, j'utiliserai un jour mon vélo électrique plus assidûment ! - et à Sophie pour leur sympathique présence au quotidien. Merci à Phan HUY-KHANG (Go pour les intimes) pour le délire, entre autres, sur le plan de sauvetage des sushis, qu'heureusement tu n'as pas mis à exécution (je ne t'aurais pas laissé faire). Merci aux autres membres de l'Onera pour les discussions du déjeuner : Gérard BOBILLOT, Fabrice BOUST, Anil CHERALY, Marc LE KHIEM, Jean-Paul MARCELLIN, François TARDIVEL. Merci à Vincent GOBIN, que j'ai pu croiser au détour d'un séminaire ou lorsqu'il venait nous rendre visite depuis Toulouse, d'être aussi optimiste et sympathique. Merci aux anciens doctorants du DEMR, Edouard DEMALDENT et Julien LE KERNEC, et merci à Sophie BOREL d'avoir rédigé sa thèse, point de départ de ce travail.

Je voudrais adresser mes sincères remerciements aux indispensables secrétaires que j'ai eu l'occasion de rencontrer au cours de mon périple entre trois établissements : Catherine POUPON, Valérie LAVIGNE et Christine BAILLEUL pour l'Université Paris-Sud, Nasséra NAAR et Nathalie HUREL pour le CMAP de l'Ecole Polytechnique, Elisabeth BERTHEAU et Françoise RICCI pour l'Onera. Merci à toutes pour votre bonne humeur et votre aide précieuse face aux démarches administratives.

J'aimerais que les mots suffisent à exprimer ma tendre reconnaissance à l'égard de ma famille, à laquelle je dois tant, et notamment à mes parents. Je remercie ma mère pour avoir toujours cru en moi. C'est sa confiance qui fait ma force. Merci à mon père de m'encourager continuellement à chercher la voie qui me correspond, lui qui dans les remerciements de son propre mémoire de thèse espérait que ses enfants trouveraient un métier aussi passionnant que le sien. Je remercie mes trois frères Jonathan, David et Tom, *parce que* (il y aurait trop à dire, mais en bref : pour tout ce que nous avons partagé, et pour les moments où nous sommes seuls à nous comprendre). Merci à ma grand-mère Mamy Colette, avec qui je peux tout exprimer. A ma grand-mère disparue Denise, ainsi qu'à mon grand-père Michel, merci pour votre présence. Je remercie Nelly pour son soutien psychologique dans les moments les plus difficiles, ainsi que Frédérique, Natacha, Pascale, Cédric, François, et Fanny, ma meilleure amie. Mes remerciements vont également à mes beaux-parents Pierre et Isabelle, qui ont toujours témoigné de leur intérêt pour mon travail, à mon beau-frère Gabriel, ainsi qu'à mes beaux-grands-parents, Jeanne, Jean et Colette, pour m'avoir acceptée dans leur famille.

Merci à mon fils Nathanaël, *allegria*, qui est encore si petit mais qui me donne tant de joie.

Last but not least, je remercie mon époux Jean-Marie pour sa main dans la mienne, jour après jour. Avec toi à mes côtés, j'ai affronté bien des épreuves, mais de ces années de thèse je me souviendrai surtout de nos moments de bonheur.

*À Jean-Marie
et Nathanaël*

Introduction

It would appear that we have reached the limits of what it is possible to achieve with computer technology, although one should be careful with such statements, as they tend to sound pretty silly in 5 years. (John Von Neumann, 1949)

1 Contexte

Cette thèse est consacrée à la résolution itérative des équations de Maxwell tridimensionnelles, en régime harmonique et à haute fréquence. La résolution numérique du problème aux limites du parfait conducteur électrique (PEC pour *Perfect Electric Conductor*, problème de type Dirichlet) est une étape préliminaire cruciale pour de nombreuses applications, telles que l'évaluation de la furtivité d'un avion ou la simulation d'antennes. Simuler numériquement la réponse radar d'un avion (SER pour *Section Efficace Radar*) permet notamment de prévoir à l'avance, à partir de la taille d'un avion, de sa forme et des matériaux qui le constituent, s'il sera furtif ou non, sans avoir à construire l'objet en premier lieu pour effectuer des tests physiques. Nous nous attelons plus spécifiquement au problème de la diffraction d'une onde par un objet parfaitement conducteur comportant une cavité profonde. Ce contexte, connu pour poser de grandes difficultés numériques, est inévitable en pratique. Il s'applique en particulier aux cavités moteur et cockpit d'un avion. Nous abordons ce problème en nous appuyant sur des méthodes d'équations intégrales, couplées entre elles par des méthodes de décomposition de domaine.

Méthodes d'équations intégrales

Les méthodes de résolution par équations intégrales consistent à transformer un problème posé dans un domaine délimité par la frontière d'un objet d'intérêt, en un problème posé sur la surface de l'objet. Les utiliser permet donc de gagner une dimension d'espace. Par ailleurs ces méthodes permettent de contourner les difficultés liées aux problèmes extérieurs, tels que les problèmes de diffraction d'onde, puisque d'un problème en domaine non borné (le domaine extérieur à l'objet diffractant), on se ramène à un problème posé sur un domaine borné (la surface de l'objet).

La résolution numérique des équations intégrales a débuté dans les années 1960, dès que les calculateurs ont permis leur développement. Il existe deux types d'équations intégrales : les équations *en champ* et les équations *en source*. Les équations en champ ont longtemps été préférées, car l'inconnue y est de nature physique : il s'agit d'une trace d'onde électromagnétique.

A l'inverse, l'inconnue d'une équation en source ne possède pas de signification physique : elle n'est qu'un intermédiaire de calcul. Les premières équations intégrales historiquement employées sont l'équation intégrale en champ électrique (EFIE pour *Electric Field Integral Equation*) qui est construite à partir du potentiel simple couche, et l'équation intégrale en champ magnétique (MFIE pour *Magnetic Field Integral Equation*) qui est construite à partir du potentiel double couche. Il s'agit d'équations en champ possédant l'avantage d'être simples à construire. Cependant, l'unicité de la solution aux équations EFIE et MFIE n'est pas assurée à certaines fréquences, qu'il s'agisse d'un problème intérieur ou extérieur, que l'on nomme pour cette raison fréquences de résonance. De plus, à proximité de ces fréquences, on observe des imprécisions dans la résolution numérique de l'EFIE et de la MFIE.

Une réponse au problème des résonances est apportée en observant que la combinaison linéaire de deux équations intégrales ne possédant pas de fréquence de résonance commune peut conduire à une équation bien posée à toute fréquence. Brakhage et Werner [15] et Panich [47] mettent cette technique en pratique pour le problème de Helmholtz, en acoustique. L'idée est ensuite généralisée au problème de Maxwell : d'une part, Burton et Miller [17] construisent l'équation intégrale en champs combinés (CFIE pour *Combined Field Integral Equation*) ; d'autre part, Mautz et Harrington [44] proposent l'équation intégrale en sources combinées (CSIE pour *Combined Source Integral Equation*). L'équation CFIE est encore utilisée dans la plupart des codes industriels pour l'électromagnétisme.

Traiter des applications électromagnétiques à des fréquences de plus en plus élevées impose de mailler l'objet diffractant de plus en plus finement. En particulier, les systèmes linéaires obtenus sont de très grande taille. Par ailleurs, l'une des caractéristiques des méthodes intégrales est que les opérateurs mis en jeu ne sont pas locaux (contrairement aux méthodes par éléments finis), et donc qu'elles conduisent à des systèmes pleins. A très haute fréquence, le nombre d'inconnues est très élevé et peut facilement atteindre des ordres de grandeur du million voire au-delà. Il devient alors impossible de stocker les systèmes complets, *a fortiori* de les résoudre de manière directe. Pour cette raison, il est crucial de se tourner vers des solveurs itératifs pour résoudre les systèmes linéaires associés aux équations intégrales. L'enjeu est ensuite de parvenir à construire des équations intégrales bien conditionnées, afin que le nombre d'itérations avant convergence de l'algorithme soit réduit. Pour résoudre le problème du stockage des matrices et accélérer les produits matrice-vecteur utilisés dans le solveur itératif, on couple en général les équations intégrales avec des méthodes multipôles rapides (FMM pour *Fast Multipole Method*, [50]).

Les qualités recherchées pour une équation intégrale sont l'absence de fréquence de résonance, la précision de la solution et la vitesse de convergence de l'algorithme itératif obtenu, qui est liée au conditionnement du système linéaire associé. Pour un maillage donné de l'objet d'intérêt, la CFIE et la CSIE sont généralement plus rapides que l'EFIE et la MFIE qui de plus résonnent à certaines fréquences, cependant l'EFIE possède tout de même l'avantage d'être plus précise que les trois autres. La CFIE a longtemps eu la prérogative sur la CSIE, probablement parce qu'il s'agit d'une équation en champ, et qu'elle possède donc une signification physique claire.

Pour étendre le champ d'application des méthodes d'équations intégrales, une première possibilité est de chercher de bons préconditionneurs afin de stabiliser les méthodes intégrales avec la montée en fréquence, c'est-à-dire de faire en sorte que le nombre d'itérations pour atteindre la convergence n'augmente pas lorsque la fréquence (et donc le nombre d'inconnues) augmente. Une manière naturelle de préconditionner un système $Au = b$ est de chercher une matrice M de telle sorte que MA soit proche de l'identité, puis de résoudre le système $MAu = Mb$. Puisque MA est un système bien conditionné, la résolution itérative de cette nouvelle équation converge généralement en un petit nombre d'itérations. De nombreux travaux en ce sens ont été proposés, parmi lesquels on peut citer McLean et Tran [53], Steinbach et Weinland [52], Christiansen et Nédélec [19], Levadoux [37], [39].

Au lieu de chercher des préconditionneurs analytiques ou algébriques pour une équation déjà existante, une approche alternative consiste à écrire directement une équation intrinsèquement bien conditionnée. Cette idée est développée par Levadoux [38] qui propose pour le problème de Helmholtz bidimensionnel l'équation intégrale en sources combinées généralisée (GCSIE pour *Generalized Combined Source Integral Equation*). Alouges, Borel et Levadoux [3] généralisent ensuite cette idée au cadre électromagnétique. La construction de la GCSIE repose sur le couplage des opérateurs simple et double couche, à l'aide d'un opérateur de couplage, et non plus simplement d'un coefficient de couplage comme c'est le cas, par exemple, pour la CSIE ou la CFIE. Plus l'opérateur de couplage est proche de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann, mieux la GCSIE est conditionnée. En fait, si l'on connaissait et utilisait dans la GCSIE une expression exacte de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann, il en résulterait un système linéaire exactement égal à l'identité.

Ainsi, la construction et l'efficacité de la GCSIE reposent sur une approximation \tilde{Y}^+ suffisamment fidèle de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann extérieur Y^+ . L'approximation proposée par Alouges, Borel et Levadoux [3] consiste à utiliser l'admittance explicite de surfaces canoniques. Ils découpent la frontière Γ en sous-domaines U_i , chacun assimilable en première approximation à une variété canonique d'admittance connue Y_i^+ . Dans la GCSIE originale, la seule variété canonique utilisée était le plan tangent à U_i , mais l'on peut envisager d'autres types de variétés canoniques, pourvu que l'on connaisse leur admittance exacte. Cela leur permet de construire une approximation telle que sur U_i , \tilde{Y}^+ soit proche de Y_i^+ . Antoine et Darbas [26] proposent une autre équation de type GCSIE pour problème métal. Celle-ci se fonde sur un opérateur de couplage différent, basé sur une approximation microlocale du Dirichlet-to-Neumann. Sur un maillage donné, la GCSIE avec ces deux types d'opérateurs Dirichlet-to-Neumann converge deux fois plus vite que la CFIE en termes de nombre d'itérations, et sa précision est comparable à celle de l'équation EFIE, réputée imbattable dans ce domaine ; elle est également très stable avec la montée en fréquence. On remarque cependant qu'en présence de singularités géométriques (telles que les arêtes des ailes d'un avion, par exemple), la vitesse de convergence et la précision de la solution se dégradent. Pour remédier à ce problème, Molko-Daugas [45] propose, dans le cadre du problème de Helmholtz bidimensionnel, de calculer explicitement le Dirichlet-to-Neumann pour des objets caconiques singuliers, ici des cônes infinis. Elle remplace ensuite dans l'approximation \tilde{Y}^+ l'admittance de la surface contenant un cône par celle du cône infini, et obtient ainsi une amélioration de 50% pour la vitesse de convergence, et de 75% pour la précision de la solution par rapport à la GCSIE classique pour

le problème de Helmholtz. La généralisation au cas électromagnétique de cette GCSIE pour des problèmes à pointes n'est cependant pas évidente.

Alouges et Levadoux [4] montrent également que la construction de la GCSIE peut s'inscrire dans un cadre très général, que nous appellerons le formalisme GCSIE. Toutes les équations présentées à ce stade sont destinées à la résolution du problème aux limites avec condition métal (en électromagnétisme) ou condition de Dirichlet (en acoustique). Le formalisme GCSIE est ensuite appliqué par Levadoux, Millot et Pernet [43], [48] au cas du problème aux limites impédant.

Nous décrivons de manière succincte le formalisme GCSIE pour le cas particulier du problème de Maxwell, dans un domaine extérieur à l'objet diffractant de frontière Γ , de normale extérieure \mathbf{n} . On se place en régime harmonique, à une fréquence correspondant à un nombre d'onde k fixé. Les équations intégrales en électromagnétisme sont fondées sur les potentiels électromagnétiques simple couche \mathcal{T} et double couche \mathcal{K} , définis par

$$\mathcal{T} = \frac{1}{ik} \nabla \times (\nabla \times \mathcal{G}_k), \quad \mathcal{K} = \nabla \times \mathcal{G}_k,$$

où \mathcal{G}_k est le potentiel vecteur classique $\mathcal{G}_k \mathbf{u}(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{ik\|x-y\|}}{\|x-y\|} \mathbf{u}(y) dy$. Ces potentiels possèdent l'avantage de conduire à des champs vérifiant automatiquement les équations de Maxwell et la condition de rayonnement à l'infini, lorsqu'ils sont appliqués à une source sur Γ . Le théorème de représentation de Stratton-Chu constitue la base du formalisme GCSIE. Il stipule que

$$\mathbf{E} = \mathcal{T} \sigma_1^+ \mathbf{E} - \mathcal{K} \sigma_0^+ \mathbf{E}, \quad (1)$$

où $\sigma_0^+ \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$ et $\sigma_1^+ \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$ désignent les traces électromagnétiques extérieures du champ électrique \mathbf{E} , étant entendu que $\mathbf{H} = (1/ik) \nabla \times \mathbf{E}$ désigne le champ magnétique associé à \mathbf{E} .

On se donne une trace γ sur la frontière Γ ; il peut s'agir d'une trace de champ électrique (trace métallique), d'une trace de champ magnétique, ou d'une trace mixte de type trace impédante. On suppose que l'on souhaite trouver le champ électrique \mathbf{E} solution de la condition aux limites $\gamma \mathbf{E} = \mathbf{u}_0$. On remarque que si l'on définit les opérateurs

$$\begin{cases} R_{\mathbf{E}}^+ : \gamma \mathbf{E} \mapsto \sigma_0^+ \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \\ R_{\mathbf{H}}^+ : \gamma \mathbf{E} \mapsto \sigma_1^+ \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \end{cases}$$

le théorème de représentation (1) conduit directement à

$$\mathbf{E} = (\mathcal{T} R_{\mathbf{H}}^+ - \mathcal{K} R_{\mathbf{E}}^+) (\gamma \mathbf{E}).$$

Cette écriture rend donc équivalente la résolution du problème (la détermination du champ \mathbf{E} à partir de sa trace $\gamma \mathbf{E}$ donnée) et la connaissance des opérateurs $R_{\mathbf{E}}^+$ et $R_{\mathbf{H}}^+$. Par exemple, pour le problème métallique où $\gamma = \sigma_0^+$, les opérateurs de couplage valent respectivement $R_{\mathbf{E}}^+ = \text{Id}$ et $R_{\mathbf{H}}^+ = Y^+$. Si l'on connaissait l'opérateur Dirichlet-to-Neumann Y^+ de la surface, le problème serait résolu.

Choisissant à présent des approximations $\widetilde{R}_{\mathbf{E}}^+$ de $R_{\mathbf{E}}^+$, et $\widetilde{R}_{\mathbf{H}}^+$ de $R_{\mathbf{H}}^+$, dont le calcul numérique doit être d'un coût raisonnable, on paramètre le champ \mathbf{E} à l'aide d'une source \mathbf{u} sous la forme

$$\mathbf{E} = \left(\mathcal{T}\widetilde{R}_{\mathbf{H}}^+ - \mathcal{K}\widetilde{R}_{\mathbf{E}}^+ \right) \mathbf{u}.$$

L'équation intégrale qui découle de cette paramétrisation est la suivante :

$$\left((\gamma\mathcal{T})\widetilde{R}_{\mathbf{H}}^+ - (\gamma\mathcal{K})\widetilde{R}_{\mathbf{E}}^+ \right) \mathbf{u} = \mathbf{u}_0.$$

On cherche donc à choisir les opérateurs de couplage $\widetilde{R}_{\mathbf{E}}^+$ et $\widetilde{R}_{\mathbf{H}}^+$ de sorte que l'opérateur $(\gamma\mathcal{T})\widetilde{R}_{\mathbf{H}}^+ - (\gamma\mathcal{K})\widetilde{R}_{\mathbf{E}}^+$ soit proche de l'identité. On remarque que si l'on prend $\widetilde{R}_{\mathbf{E}}^+ = R_{\mathbf{E}}^+$ et $\widetilde{R}_{\mathbf{H}}^+ = R_{\mathbf{H}}^+$, alors l'opérateur vaut exactement l'identité. En trouvant des approximations suffisamment fidèles en un certain sens de ces opérateurs, on espère obtenir un opérateur proche de l'identité, qui conduise après discrétisation sur une base d'éléments finis à un système linéaire bien posé et bien conditionné.

Méthodes de décomposition de domaine pour l'électromagnétisme

La GCSIE est donc une équation intégrale menant à des algorithmes itératifs très performants, pour traiter une large variété de problèmes électromagnétiques. Cependant, Borel [13] remarque que pour un objet contenant une cavité, le conditionnement du système linéaire associé se détériore. La résolution itérative de la GCSIE se fait alors beaucoup plus lentement. Pour pallier à ce défaut, nous proposons d'utiliser une méthode de décomposition de domaine (DDM pour *Domain Decomposition Method*). Cette DDM permettrait de décomposer le problème initial en un problème en domaine borné, celui de la cavité, et un problème en domaine non borné, celui dans le domaine extérieur à la cavité. Le but de la manœuvre est d'avoir à traiter indépendamment le sous-domaine extérieur ne contenant pas de cavité et le sous-domaine intérieur, au lieu du couplage initial domaine extérieur et cavité. Résoudre les deux sous-problèmes locaux de manière itérative par équations intégrales se révèle alors moins coûteux en termes d'itérations que de résoudre le problème initial, les équations intégrales étant mieux conditionnées dans le premier cas de figure. Naturellement, une telle technique transforme le problème en une condition de raccord, à l'interface entre les deux sous-domaines, de la solution.

En vue de résoudre une équation aux dérivées partielles, les méthodes de décomposition de domaine sont utilisées à de nombreuses fins. D'une part, les DDMs permettent de traiter des domaines de grande taille, en transformant un système linéaire avec un grand nombre d'inconnues en plusieurs sous-systèmes de tailles respectives plus petites. D'autre part, grâce à ces DDMs, on peut paralléliser les calculs numériques à effectuer en les répartissant sur les processeurs disponibles. Un dernier avantage est de permettre une mise à l'écart de problèmes gênants : présence de défauts dans un problème par ailleurs axisymétrique, présence de cavités ralentissant la convergence - ce dernier point étant l'objet de cette thèse. Une DDM permet alors d'employer, dans chaque sous-domaine, la méthode de résolution la plus performante en fonction de la nature de la difficulté rencontrée. Enfin, hors du contexte de la recherche de performances, les DDMs permettent de faire des calculs en boîte noire : pour protéger le secret industriel, les industriels s'échangent non pas les maillages exacts des parties de l'avion

qu'ils construisent, mais des matrices contenant des informations sur l'interface entre les sous-domaines. Chaque partie du domaine n'est connue que d'un groupe de personnes ; l'antenniste maille les sous-domaines entourant les antennes, le motoriste maille la cavité moteur, un autre maille le reste de l'avion. Il faut ensuite être capable d'utiliser à bon escient ces données, afin de recoller les morceaux. Cependant la DDM développée dans cette thèse n'a pas pour objet de coupler des maillages en boîte noire, mais de résoudre plus efficacement le problème de Maxwell en présence de cavités.

Historiquement, les premières méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes de Helmholtz ou de Maxwell utilisent, d'une part une méthode éléments finis (FEM pour *Finite Element Method*) dans les sous-domaines intérieurs bornés, et d'autre part une méthode d'équations intégrales, dite aussi méthode d'éléments de frontière (BEM pour *Boundary Element Method*) dans le sous-domaine extérieur non borné. Il s'agit typiquement d'une DDM destinée à utiliser une méthode différente selon le sous-domaine : on combine une méthode intégrale dans le sous-domaine extérieur infini (que l'on ne pourrait de toute manière pas maille par éléments finis), avec une méthode éléments finis classique dans le sous-domaine intérieur borné. Hiptmair, par exemple, s'intéresse aux méthodes de type FEM-BEM, d'abord pour l'acoustique [34], puis pour l'électromagnétisme [35]. Pour les problèmes de transmission de Helmholtz, des méthodes de décomposition de domaine ont été utilisées par Balin, Bendali et Collino [7] pour traiter spécifiquement le cas d'une cavité électrique profonde, et un préconditionneur intégral utilisant les formules de Calderón a été développé par Antoine et Boubendir [5]. Pour les problèmes de transmission de Maxwell, Balin, Bendali et Millot [8] d'une part, et Collino et Millot [21] d'autre part, donnent des préconditionneurs algébriques qui utilisent des méthodes de décomposition avec recouvrement (*overlapping DDM*) ou sans recouvrement (*nonoverlapping DDM*). Une présentation générale des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement pour les problèmes de propagation d'ondes acoustiques, électromagnétiques ou élastiques, en régime harmonique, est effectuée par Collino, Ghanemi et Joly [20].

Les méthodes de décomposition de domaine itératives se partagent en effet en deux grands groupes : les méthodes avec recouvrement et sans recouvrement. A chaque itération, on calcule la solution dans un sous-domaine, puis on utilise la trace de cette solution sur une interface jouxtant les deux sous-domaines pour l'utiliser dans le deuxième sous-problème que l'on résout. Beaucoup de possibilités ont été explorées quant aux traces que l'on peut transmettre d'un sous-domaine à l'autre : les deux sous-domaines peuvent s'échanger leur trace de Dirichlet, ou leur trace de Neumann, ou encore ils peuvent s'échanger, l'un la trace de Dirichlet, et l'autre la trace de Neumann. Une amélioration significative est apportée en utilisant à la place des conditions aux limites absorbantes. En effet, les méthodes initiales couplent les sous-domaines à l'aide d'opérateurs Dirichlet-to-Neumann ou Neumann-to-Dirichlet, qui sont mal posés aux fréquences de résonance des sous-problèmes bornés. En utilisant des conditions aux limites absorbantes, les opérateurs de couplage sous-jacents à la DDM sont bien posés à toute fréquence. Il s'agit d'une avancée majeure effectuée par Després [27], [28]. Notons que la deuxième DDM que nous présentons au cours de cette thèse (Chapitre 5) est fondée sur la même idée de couplage entre sous-domaines à l'aide d'un opérateur autre que le Dirichlet-to-Neumann et ne possédant pas de fréquence de résonance.

La méthode dite de Schwarz est originalement utilisée avec des conditions de Dirichlet ou de Neumann. La convergence de cette méthode est due au fait qu'il y a recouvrement entre les sous-domaines. Gander, Halpern et Nataf [32] proposent une méthode de Schwarz sans recouvrement conduisant à un algorithme convergeant très rapidement, en utilisant des conditions aux limites plus générales, de type conditions de Robin, pour l'équation des ondes en dimension 1. Gander, Halpern et Magoulès [31] optimisent encore la méthode en s'autorisant à utiliser des conditions de Robin différentes selon les sous-domaines, pour le problème de Helmholtz en dimension 2. Enfin, Dolean, Gander et Gerardo-Giorda proposent une méthode de Schwarz optimisée pour le problème de Maxwell en dimension 3 en régime harmonique [29].

Au sein des DDMs coexiste donc une très grande variété de méthodes. Dans le cadre de cette thèse, nous présentons une DDM sans recouvrement et nous privilégions l'approche d'un couplage BEM-BEM, moins fréquente que l'approche FEM-FEM ou FEM-BEM. En particulier, le problème intérieur est traité par équations intégrales, au lieu d'une méthode éléments finis classique. L'originalité de notre méthode est de transformer la question de savoir quelles conditions imposer dans les sous-domaines, en un problème de couplage sur l'interface. A notre connaissance, nul n'a encore testé l'efficacité d'une DDM couplant des équations intégrales entre elles, combinée avec le bon conditionnement de l'équation GCSIE comme équation intégrale dans les sous-domaines, et avec le bon conditionnement de l'algorithme global par l'intermédiaire de préconditionneurs. C'est l'objectif de ce travail.

2 Objectif

Nous développons au cours de cette thèse des outils de construction d'une méthode de décomposition de domaine efficace pour résoudre le problème du parfait conducteur. Par efficace, nous entendons d'une part que la méthode globale de DDM est bien conditionnée, et d'autre part que les équations intégrales utilisées dans les sous-domaines sont intrinsèquement bien conditionnées. Nous tentons d'atteindre cet objectif en proposant des préconditionneurs performants pour chaque DDM considérée.

3 Plan de la thèse

Cette thèse est composée de deux parties. La première partie consiste en une introduction aux différents problèmes de Maxwell, suivie d'une description des équations intégrales dont nous disposons pour les résoudre. La seconde partie est consacrée aux méthodes de décomposition de domaine (fondées sur les équations intégrales de la première partie), permettant de résoudre le problème du parfait conducteur électrique, pour un obstacle diffractant contenant une cavité profonde. Chaque algorithme de DDM donne lieu à un système linéaire, *a priori* mal conditionné, pour lequel nous proposons plusieurs préconditionneurs permettant d'accélérer sa résolution. Les méthodes de décomposition de domaine expérimentées dans ce travail sont toutes basées sur des équations intégrales, c'est pourquoi la première partie est indispensable à la seconde. Le lecteur familier avec les notions d'onde électromagnétique et d'équation intégrale pour l'électromagnétisme pourra se concentrer sur la deuxième partie, qui constitue le cœur de

notre travail.

Ces méthodes de résolution (équations intégrales et décomposition de domaine) ont été implémentées et testées au sein des codes industriels *Elsem3D* et *ElsemDDM*, développés au département DEMR de l’Onera (Palaiseau) et écrits en Fortran90. Le code *Elsem3D* permet de traiter les problèmes de Maxwell par des méthodes d’équations intégrales. Le code *ElsemDDM* est un code général de décomposition de domaine qui permet de coupler différentes méthodes de résolution dans les sous-domaines (pas nécessairement des méthodes d’équations intégrales). Les deux codes *Elsem3D* et *ElsemDDM* sont basés sur une librairie éléments finis nommée *libAme*, sur laquelle nous nous sommes appuyés pour construire nos développements.

Partie I : Problème de Maxwell et méthodes d’équations intégrales

Notre objectif est de résoudre de manière efficace le problème du parfait conducteur électrique pour un obstacle diffractant contenant une cavité profonde (FIG. 1). Dans cette première partie, formée des Chapitres 1 et 2, nous présentons le problème à résoudre et les méthodes d’équations intégrales déjà existantes. Nous expliquons en quoi les méthodes d’équations intégrales prises isolément sont insuffisantes pour traiter les problèmes de cavité de grande taille. Ceci nous conduit à les combiner avec des méthodes de décomposition de domaine.

Chapitre 1 : Problème de Maxwell et théorème de représentation

Nous décrivons dans le premier chapitre les problèmes aux limites de Maxwell considérés. Nous rappelons la définition des équations de Maxwell harmoniques et de la condition de rayonnement de Silver-Müller. On introduit les potentiels électromagnétiques simple et double couche, ainsi que les opérateurs du même nom. Nous donnons le théorème fondamental de représentation de Stratton-Chu, permettant d’exprimer un champ électromagnétique en fonction de ses traces à l’aide des potentiels électromagnétiques. Les potentiels électromagnétiques et le théorème de représentation sont les constituants clefs des méthodes d’équations intégrales décrites au Chapitre 2. L’opérateur simple couche, quant à lui, nous sera utile au cours du Chapitre 3 pour proposer un préconditionneur pour la première DDM rencontrée.

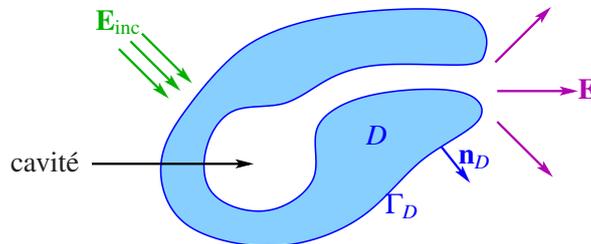


FIGURE 1 – Objet diffractant comportant une cavité.

Enfin, nous donnons les résultats classiques d’existence et d’unicité pour quatre types de problèmes de Maxwell : le problème de Maxwell extérieur ou intérieur, avec condition de type métal (analogue à une condition de Dirichlet pour un problème de Helmholtz scalaire), ou avec

condition de type mixte métal-impédant (une condition de type impédant est analogue à une condition de Fourier-Robin pour le problème de Helmholtz scalaire). Nous rappelons que tous ces problèmes sont bien posés, à l'exception du problème de Maxwell intérieur métal, qui est mal posé à des fréquences dites de résonance. En particulier, le problème intérieur mixte métal-impédant est toujours bien posé, contrairement au problème intérieur métal, dès lors que le bord de surface où l'on impose la condition impédante est non vide. Cette remarque justifie par anticipation l'utilisation au Chapitre 5 de résolution de sous-problèmes de type métal-impédant.

Chapitre 2 : Résolution par équations intégrales du problème de Maxwell

Le deuxième chapitre est consacré à la description des équations intégrales qui sont utilisées dans la DDM pour la résolution des sous-problèmes locaux. Nous décrivons des équations intégrales simples, en source ou en champ, pour la résolution du problème de Maxwell métallique. Nous donnons également les équations intégrales en champ classiques : l'équation intégrale en champ électrique (EFIE), l'équation intégrale en champ magnétique (MFIE), l'équation intégrale en champs combinés (CFIE). Plus récente est la théorie de construction des équations intégrales en sources combinées généralisées (GCSIE), qui sont intrinsèquement bien conditionnées. Nous décrivons le principe de construction d'équations intégrales de type GCSIE pour les problèmes métal et impédant. L'implantation au sein du code *Elsem3D* des méthodes d'équations intégrales de type GCSIE, pour le problème métal comme pour le problème impédant ou mixte métal-impédant, a constitué une partie importante de notre travail de programmation. On définit ensuite la courbe de SER d'un objet diffractant éclairé par une onde incidente, qui constitue la signature radar de l'objet (typiquement, ce que l'on cherche à calculer). D'autre part, le calcul de cette SER sur une série de cas simples permet également de valider les algorithmes testés en comparant ces courbes de SER à des résultats de référence. Nous montrons finalement que les équations intégrales prises isolément, même aussi performantes que la GCSIE, ne suffisent pas à traiter certains problèmes, et notamment le problème des cavités. En effet, les équations intégrales donnent lieu à des systèmes linéaires très mal conditionnés, et donc à une résolution extrêmement lente, pour des objets diffractants comportant une cavité. Il est possible d'améliorer le conditionnement en obstruant artificiellement la cavité de l'objet, mais cela détériore fortement le calcul de la SER. Pour garder un bon conditionnement tout en prenant en compte la cavité, il est nécessaire de traiter séparément grâce à une DDM, l'intérieur de la cavité et le domaine extérieur : c'est l'objectif de la prochaine partie. Nous concluons ce chapitre en expliquant comment les équations intégrales permettent de synthétiser en pratique l'un des opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann, qui nous servent d'opérateurs de couplage dans la première DDM que nous allons présenter.

Partie II : Des préconditionneurs pour les méthodes de décomposition de domaine

Dans cette seconde partie, nous utilisons des méthodes de décomposition de domaine pour découpler le problème de la cavité du problème non borné. Nous introduisons pour cela une interface artificielle à l'entrée de la cavité, définissant ainsi deux sous-domaines extérieur Ω^+ et intérieur Ω^- (FIG. 2). L'algorithme de décomposition de domaine couple les sous-problèmes locaux à résoudre dans les deux sous-domaines, en permettant une transmission de l'informa-

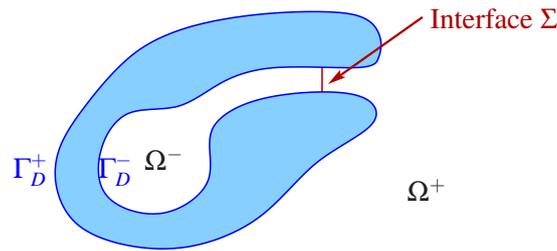
tion sur le champ par l'intermédiaire de ses traces électromagnétiques sur l'interface entre sous-domaines. Les méthodes d'équations intégrales appliquées aux sous-problèmes locaux sont alors mieux conditionnées que celles appliquées au domaine initial global, et sont résolues en un petit nombre d'itérations. Notons que les DDMs utilisées sont uniquement basées sur une résolution par équations intégrales dans les sous-domaines. La DDM prend la forme d'un système linéaire à résoudre, qui s'interprète physiquement par la continuité du champ à l'interface, et qui n'est en général pas bien conditionné. La DDM étant elle-même résolue à l'aide d'un solveur itératif, il est important de disposer d'un bon préconditionneur. C'est ce qui motive notre deuxième partie : la recherche de préconditionneurs adaptés à chaque méthode de décomposition de domaine.

La pertinence des préconditionneurs associés à chaque DDM pour des applications concrètes est validée numériquement sur différents maillages d'objets comportant une cavité. Remarquons que comme dans le cas du conditionnement de la GCSIE métallique de Borel [13] ou Molko-Daugas [45], les préconditionneurs proposés dans les Chapitres 4 et 5 sont fondés sur la connaissance de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann (ou de l'opérateur de scattering) associé à une surface canonique, qui est en l'occurrence un demi-guide d'onde infini (au lieu d'un plan infini tangent ou d'un cône infini dans le cas de la GCSIE). Ces préconditionneurs sont alors d'autant plus efficace que l'approximation employée est proche du véritable opérateur de couplage.

Chapitre 3 : Un préconditionneur analytique pour la DDM basée sur l'opérateur Dirichlet-to-Neumann

Dans le troisième chapitre, nous détaillons la première méthode de décomposition de domaine testée. On décompose le problème initial en un problème intérieur (celui de la cavité de grande taille) et un problème extérieur (celui du domaine extérieur), afin de pouvoir appliquer un traitement spécial à la cavité (FIG. 2). On choisit de paramétrer le couplage entre sous-domaines à l'aide d'opérateurs Dirichlet-to-Neumann, relatifs à l'interface entre sous-domaines et désignés de manière générale par Y . Dans ce cas, on parle de DDM en Y . On verra au Chapitre 5 qu'un autre choix de DDM est possible (DDM basée sur des opérateurs de scattering S_α , ou DDM en S , avec coefficient d'impédance α). Rappelons que pour un problème aux limites scalaire donné, et pour un objet délimité par une interface Σ , on désigne par Dirichlet-to-Neumann l'opérateur qui à une trace de Dirichlet $u|_\Sigma$ renvoie la trace de Neumann de la solution $\frac{\partial u}{\partial n}|_\Sigma$ du problème avec la condition de Dirichlet imposée sur l'interface. Dans le cas étudié de l'électromagnétisme, il existe quatre opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann : à une trace du champ électrique (soit $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$, soit $\mathbf{E}_{\text{tan}} = (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n}$), ils associent une trace du champ magnétique relatif (soit $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$, soit $\mathbf{H}_{\text{tan}} = (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{n}$). Le champ magnétique, qui est le rotationnel du champ électrique modulo une constante, joue ainsi le rôle de sa dérivée. D'un point de vue théorique, ces quatre opérateurs sont extrêmement similaires, car $(\mathbf{n} \times)^2 = -\text{Id}$. Cependant, dans le cadre d'une implémentation fondée sur les éléments finis de Raviart-Thomas, l'opérateur numérique $\mathbf{n} \times$ n'est pas inversible et le calcul de chaque opérateur de type Dirichlet-to-Neumann doit se faire par une méthode appropriée.

Après avoir défini ces opérateurs, nous introduisons des opérateurs Dirichlet-to-Neumann liés à l'interface entre sous-domaines, pour chacun des sous-domaines. On choisit de synthétiser ces opérateurs par équations intégrales (ce qui revient à dire que l'on résout les sous-problèmes

FIGURE 2 – Découpage du domaine Ω en deux sous-domaines Ω^+ et Ω^- .

locaux par équations intégrales). Chaque opérateur de Dirichlet-to-Neumann peut être synthétisé par un certain nombre d'équations intégrales différentes, comme nous l'avons montré à la fin du Chapitre 2. Nous donnons l'exemple précis de l'opérateur de type Dirichlet-to-Neumann communément appelé admittance par les physiciens, $\mathbb{A} : \mathbf{E}_{\text{tan}} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{H}$. On montre en particulier comment l'admittance liée à l'interface entre sous-domaines est calculée numériquement à partir de l'équation EFIE.

Enfin, nous proposons comme premier préconditionneur, pour cette DDM en Y , un préconditionneur analytique construit à l'aide de l'opérateur simple couche T de l'interface fictive. Du point de vue numérique, il s'agit d'opérer une multiplication par la matrice de Galerkin pour le produit L^2 de l'opérateur simple couche restreint à l'interface, suivie d'une inversion par la matrice masse sur l'interface. Remarquons que ce préconditionneur est très simple et peut s'appliquer à n'importe quel type de géométrie. On observe sur les applications numériques, que l'algorithme de DDM initial converge très lentement, et que ce premier préconditionneur conduit à une réduction très significative du nombre d'itérations avant convergence. En particulier, nous avons montré l'efficacité de ce préconditionneur analytique sur un maillage sphérique comportant 5000 degrés de liberté.

Notons que l'équation intégrale choisie dans les sous-domaines a également son importance : si la DDM est très bien conditionnée mais que les problèmes dans les sous-domaines convergent lentement, l'algorithme final ne sera pas particulièrement performant. Intégrer différentes formulations d'équations intégrales a nécessité, pour chacune d'entre elles, un traitement spécifique dans la DDM. Ce type de préconditionnement est incompatible avec certaines équations intégrales, de nouveau à cause de la mauvaise discrétisation de l'opérateur $\mathbf{n} \times$ précédemment évoquée. Ces difficultés, et les solutions choisies, sont discutées de manière extensive dans le Chapitre 3. Le choix des équations intégrales dans les sous-domaines ne peut donc pas se faire librement.

Chapitre 4 : Un préconditionneur spectral pour la DDM en Y .

Le quatrième chapitre traite également du préconditionnement de la DDM en Y . Le second préconditionneur envisagé est un préconditionneur modal qui nécessite une forme particulière de cavité. Celle-ci doit en effet posséder localement, au voisinage de l'interface, une forme de cylindre dont la section est la frontière entre les deux sous-domaines (FIG. 3). Cette modélisation est appropriée pour le cas d'une cavité moteur d'avion. La cavité Channel, un benchmark

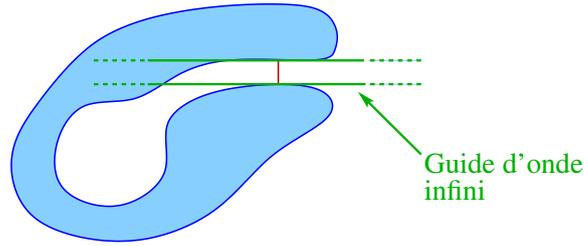


FIGURE 3 – Approximation locale de la cavité par un guide d’onde tangent infini.

industriel pour l’électromagnétisme, rentre par exemple dans ce cadre. Le préconditionneur modal est fondé sur la connaissance exacte de l’admittance \mathbb{A} dans la base des traces des modes guidés du cylindre approchant la géométrie au voisinage de l’interface. On sait en effet que l’opérateur \mathbb{A} se diagonalise dans cette base. On extrait alors de cette base un ensemble \mathcal{B} de modes, tels que leur valeur propre associée est inférieure à une certaine valeur. A chaque itération, on projette le vecteur inconnu sur l’ensemble \mathcal{B} ; on multiplie le vecteur obtenu par la matrice diagonale contenant l’inverse des valeurs propres de l’admittance correspondant aux modes de \mathcal{B} ; puis on projette à nouveau le vecteur sur l’espace éléments finis initial. Nous testons finalement la méthode sur des maillages dont la cavité a la forme d’un guide d’onde de section rectangulaire. Nous comparons les performances de ce préconditionneur spectral avec le préconditionneur analytique du Chapitre 3 (FIG. 4 et FIG. 6).

DDM en Y	Type de préconditionneur	Nombre d’itérations pour $f = 3200$ MHz	Nombre d’itérations pour $f = 6500$ MHz
DDM Y_0	absent	48	53
DDM Y_1	analytique	19	22
DDM Y_2	analytique	13	17
DDM Y_3	analytique	14	17
1 mode guidé	spectral	1	1
2 modes guidés	spectral	2	2
5 modes guidés	spectral	3	5
8 modes guidés	spectral	3	7
18 modes guidés	spectral	4	8
26 modes guidés	spectral	5	9
49 modes guidés	spectral	8	12
69 modes guidés	spectral	17	18
100 modes guidés	spectral	24	43

FIGURE 4 – Nombre d’itérations pour le maillage smallBox, à une fréquence de **3200 MHz** et **6500 MHz**, pour atteindre un résidu de 10^{-6} , pour les DDMs suivantes : DDM Y_0 (la DDM en Y non préconditionnée); la DDM en Y préconditionnée respectivement avec 1, 2, 5, 8, 18, 26, 49, 69 et 100 modes guidés; la DDM en Y avec préconditionneurs analytiques basés sur l’opérateur simple couche DDM Y_1 , DDM Y_2 et DDM Y_3 .

Nombre de modes utilisés	DDM projetée sur les modes guidés sans préconditionneur	DDM avec préconditionneur diagonal
1 mode guidé	1	1
2 modes guidés	2	2
5 modes guidés	5	5
8 modes guidés	8	7
18 modes guidés	18	8
26 modes guidés	23	9
49 modes guidés	32	12
69 modes guidés	45	18
100 modes guidés	87	43
DDM Y0	53	53

FIGURE 5 – Nombre d’itérations pour le maillage smallBox, à une fréquence de **6500 MHz**, pour atteindre un résidu d’ordre 10^{-6} , en utilisant 1, 2, 5, 8, 18, 26, 49, 69 et 100 modes guidés, respectivement pour la DDM en Y avec préconditionneur, i.e. avec inversion par la matrice diagonale, et pour la DDM en Y contenant simplement une projection sur les modes guidés. On a rappelé sous le tableau le nombre d’itérations pour DDM Y0.

L’opération de projection remplace le problème par un problème de nombre de degrés de liberté égal au cardinal de \mathcal{B} , noté $\#\mathcal{B}$. La résolution du système linéaire est faite par un algorithme itératif de Krylov (GMRES), en ce sens qu’il converge nécessairement en un nombre d’itérations plus petit que $\#\mathcal{B}$. Dans les exemples étudiés numériquement, nous avons remarqué deux phénomènes intéressants. D’une part, lorsque l’ensemble \mathcal{B} contient très peu de modes, non seulement la méthode converge rapidement, mais de plus la SER de l’objet est toujours correcte. Cela signifie que la solution de la DDM, qui est localisée sur l’interface, est bien représentée sur la base des premiers modes guidés. D’autre part, pour un grand nombre de modes, l’algorithme converge en beaucoup moins d’itérations que $\#\mathcal{B}$; en revanche, si l’on se contente de projeter le vecteur inconnu sur l’ensemble \mathcal{B} , l’algorithme converge beaucoup moins bien (FIG. 5). Cette deuxième observation confirme l’efficacité du préconditionneur diagonal utilisé, et donc de la modélisation de l’entrée de la cavité par un guide d’onde infini. Enfin, on remarque que le préconditionneur modal est plus performant que le préconditionneur analytique du Chapitre 3, basé sur l’opérateur simple couche.

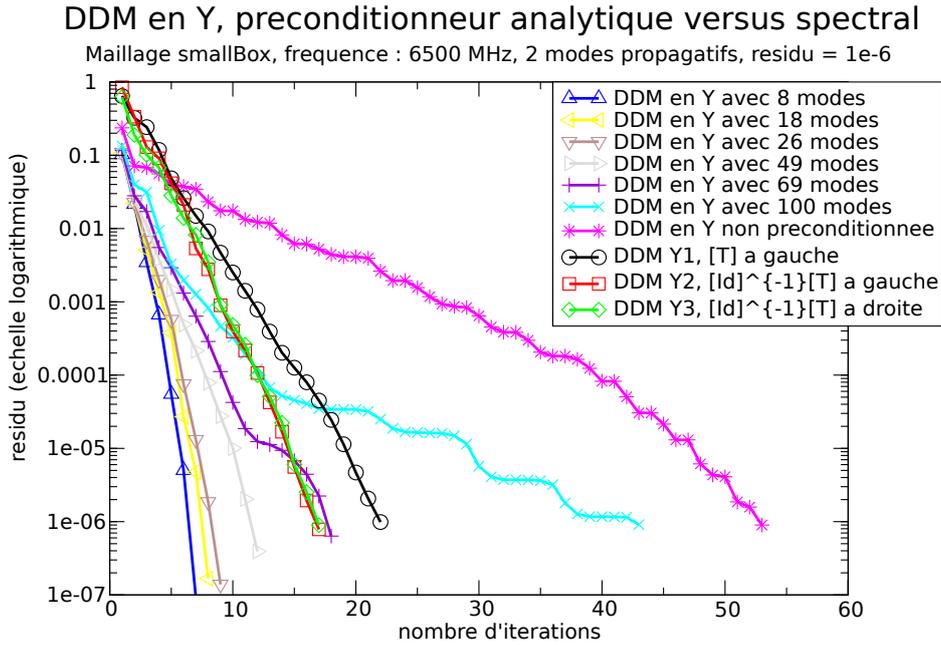


FIGURE 6 – Courbes de convergence pour atteindre un résidu d’ordre 10^{-6} , pour le maillage smallBox à **6500 MHz**, pour la DDM en Y non préconditionnée, la DDM en Y avec preconditionneurs spectraux et la DDM en Y avec preconditionneurs analytiques.

Chapitre 5 : Un preconditionneur spectral pour la DDM en S

Le cinquième et dernier chapitre propose un autre type de méthode de décomposition de domaine. Celle-ci permet de paramétrer le couplage entre sous-domaines à l’aide d’opérateurs de scattering S_α , où α est un coefficient réel, c’est pourquoi on la nomme DDM en S . L’opérateur de Scattering S_α envoie une trace impédante mélangeant les traces électrique et magnétique, $\mathbf{E}_{\text{tan}} + \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{H}$ (analogue à une trace de Fourier-Robin en scalaire), sur sa trace duale, qui est une autre trace impédante : $\mathbf{E}_{\text{tan}} - \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{H}$. On présente également comment synthétiser les opérateurs de scattering en résolvant des équations intégrales pour problèmes mixtes de type métal-impédant (FIG. 7).

L’avantage de la DDM en S est justement qu’elle est basée sur une résolution de problèmes métal-impédant, qui sont toujours bien posés, contrairement à la DDM en Y qui utilise des problèmes métal possédant des fréquences de résonance, ce qui peut conduire à un mauvais conditionnement du sous-problème intérieur de la DDM.

D’autre part, du point de vue symbolique, l’opérateur de scattering S est un opérateur d’ordre 0, tandis que l’opérateur Dirichlet-to-Neumann Y est d’ordre 1. Par suite, on s’attend à ce que la DDM en S soit automatiquement mieux conditionnée que la DDM en Y . En réalité, il n’en est rien : l’opérateur sous-jacent à la DDM en S fait intervenir la différence des opérateurs de scattering relatifs aux deux sous-domaines, et les parties d’ordre 0 se compensent. La DDM en S est basée sur un opérateur d’ordre -1 , et non 0. Il est donc nécessaire de la preconditionner. On propose également un preconditionneur modal pour cette nouvelle DDM. Il se fonde sur la même idée que celle du preconditionneur modal du Chapitre 4. En effet, l’opérateur de scat-

tering est lui aussi un opérateur diagonal dans la base des traces de modes guidés. On présente des applications numériques qui attestent également de l'efficacité du preconditionneur employé.

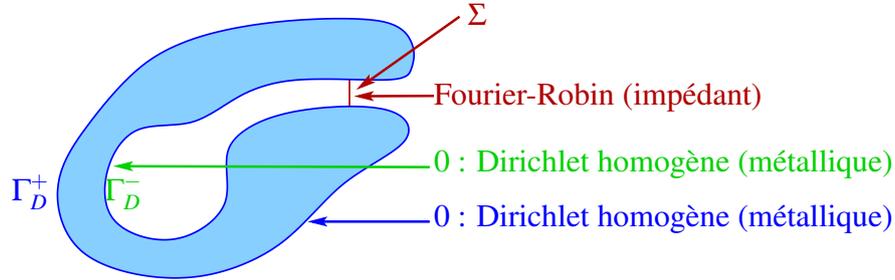


FIGURE 7 – DDM en S : résolution de sous-problèmes mixtes de type métal-impédant.

Au final, nous avons choisi d'utiliser pour la résolution des sous-problèmes aux limites, dans la DDM en S , l'équation GCSIE métal-impédante pour que le calcul soit plus rapide à chaque itération de l'algorithme global. En effet chaque itération se déroule alors par résolution de sous-problèmes locaux résolus par l'équation intégrale *a priori* la plus performante.

Première partie

Problème de Maxwell et méthodes d'équations intégrales

Chapitre 1

Problème de Maxwell et théorème de représentation

Sommaire

1.1 Ondes électromagnétiques : définitions et notations	21
1.1.1 Équations de Maxwell harmoniques	21
1.1.2 Condition de rayonnement à l'infini	23
1.1.3 Espaces d'ondes admissibles	23
1.1.4 Solution élémentaire du problème de Helmholtz	23
1.1.5 Potentiel \mathcal{G}_k	24
1.1.6 Traces électromagnétiques extérieures ou intérieures	25
1.2 Théorème de représentation	25
1.2.1 Définition des potentiels électromagnétiques simple et double couche	26
1.2.2 Représentation intégrale d'un champ électromagnétique	26
1.2.3 Opérateurs simple et double couche	28
1.2.4 Projecteurs de Calderón	30
1.3 Opérateurs de Fredholm	31
1.4 Problèmes de Maxwell	33
1.4.1 Le problème de Maxwell extérieur avec condition métal	33
1.4.2 Le problème de Maxwell intérieur avec condition métal	37
1.4.3 Le problème de Maxwell extérieur métal-impédant	38
1.4.4 Le problème de Maxwell intérieur métal-impédant	39
1.4.5 Caractérisation des traces	40
1.5 Représentation intégrale d'un champ diffracté par un objet parfaitement conducteur	41

Nous présentons dans ce chapitre le problème aux limites que nous voulons résoudre : le problème de Maxwell extérieur avec conditions aux limites du parfait conducteur métallique (ou encore problème métal). Nous introduisons aussi une série d'outils qui nous seront utiles pour développer des équations intégrales. Il s'agit d'un chapitre de rappels d'électromagnétisme. On pourra trouver la plupart des résultats dans le livre de Nédélec [46].

Dans un premier paragraphe, nous rappelons les caractéristiques des ondes électromagnétiques en régime harmonique : les équations de Maxwell et la condition de rayonnement à l'infini qu'elles vérifient. Nous associons deux domaines à un obstacle borné : son intérieur et son extérieur. Les espaces d'ondes admissibles dans ces domaines sont constitués des ondes vérifiant les équations de Maxwell harmoniques dans chaque domaine, et la condition de rayonnement dans le domaine non borné.

Nous introduisons dans le deuxième paragraphe les potentiels électromagnétiques simple couche et double couche, ainsi que les opérateurs découlant de leurs traces sur la frontière de l'objet, appelés opérateurs simple couche et double couche. L'opérateur simple couche nous permet de décrire au Chapitre 3 un premier préconditionneur pour l'une de nos méthodes de décomposition de domaine. Nous donnons ensuite le théorème fondamental de représentation de Stratton-Chu, selon lequel les ondes des espaces admissibles peuvent être paramétrées à l'aide des potentiels électromagnétiques et en fonction de leurs seules traces électromagnétiques (équivalentes en scalaire et pour le problème de Helmholtz à des traces de Dirichlet et de Neumann).

Nous rappelons dans un troisième et bref paragraphe les principaux résultats de la théorie de Fredholm qui nous seront utiles par la suite. En effet, on utilisera à plusieurs reprises le fait qu'un opérateur soit de Fredholm, d'une part pour montrer l'existence d'une solution au problème extérieur de Maxwell, et d'autre part pour montrer l'existence d'une solution à certaines équations intégrales (dans le chapitre suivant).

Le quatrième paragraphe est consacré au problème de Maxwell extérieur et intérieur, avec condition métal, puis avec condition mixte métal-impédante. Une condition aux limites de type métal est équivalente, en scalaire et pour le problème de Helmholtz, à une condition de type Dirichlet ; une condition aux limites de type impédant est équivalente à une condition de type Fourier-Robin. Nous donnons les résultats d'existence et d'unicité rattachés à ces problèmes. C'est l'occasion de rappeler que le problème intérieur métallique est mal posé à certaines fréquences, dites fréquences de résonance, tandis que le problème intérieur mixte métal-impédant, où la portion de surface correspondant à la condition impédante est non vide, est toujours bien posé. Ce point justifiera dans le Chapitre 5 l'utilisation d'une méthode de décomposition de domaine basée sur des résolutions de problèmes de type métal-impédant dans les sous-domaines.

Enfin, le cinquième paragraphe traite de la représentation intégrale d'un champ diffracté par un objet parfaitement conducteur. Cette représentation nous sera utile pour la construction d'équations intégrales en champ, au Chapitre 2 suivant.

1.1 Ondes électromagnétiques : définitions et notations

1.1.1 Équations de Maxwell harmoniques

Un couple de champs vectoriels $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}})$ vérifie les *équations de Maxwell* si :

$$\begin{cases} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} + \mu \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial t} = 0, \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} - \varepsilon \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} = 0, \end{cases}$$

où ε et μ représentent respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du milieu. On suppose que le milieu est homogène et possède les caractéristiques du vide, c'est-à-dire que sa permittivité ε est constante et égale à la permittivité ε_0 du vide, et que sa perméabilité μ est constante et égale à la perméabilité μ_0 du vide. Les ondes électromagnétiques $(\tilde{\mathbf{E}}(t, x), \tilde{\mathbf{H}}(t, x))$ se propagent dans un tel milieu à la vitesse de la lumière $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

Nous considérons les solutions *harmoniques* renormalisées de ces équations, nous cherchons donc un couple solution de la forme

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(t, x) &= \Re \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \mathbf{E}(x) e^{-i\omega t} \right), \\ \tilde{\mathbf{H}}(t, x) &= \Re \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \mathbf{H}(x) e^{-i\omega t} \right), \end{aligned}$$

où l'on a noté ω la pulsation, et où $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z . On associe à ω une fréquence $f = \omega/2\pi$, une longueur d'onde $\lambda = c/f$ et un nombre d'onde $k = \omega/c = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

Le fait de s'intéresser exclusivement aux ondes harmoniques permet d'éliminer la dépendance en temps ; la renormalisation des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} sert quant à elle à exprimer les équations (désormais spatiales) en fonction du seul nombre d'onde k . Le comportement des ondes $\mathbf{E}(x)$ et $\mathbf{H}(x)$, dites *stationnaires*, est alors régi par les *équations de Maxwell harmoniques* :

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} + ik\mathbf{E} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Les composantes électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{H} sont reliées par la relation :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{E}, \quad (1.2)$$

ce qui permet de réécrire les équations de Maxwell harmoniques en fonction du seul champ \mathbf{E} :

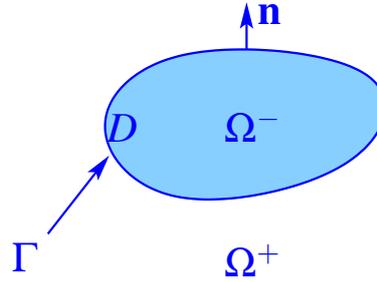
$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Le couple d'équations (1.1) est équivalent au couple d'équations (1.3) (où \mathbf{H} est lié à \mathbf{E} par (1.2)), comme le montre le Théorème 6.4 de [23].

Remarquons que chaque composante du champ électrique vérifie alors l'équation de Helmholtz scalaire

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

Soit $D = \overline{\Omega^-}$ un compact de \mathbb{R}^3 , de frontière Γ supposée lisse, de complémentaire Ω^+ connexe. On notera \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à Γ , dirigé vers l'extérieur de D . On considère le problème de Maxwell à l'extérieur (respectivement à l'intérieur) de la surface Γ , c'est-à-dire défini dans Ω^+ (respectivement dans Ω^-).



Définition 1.

On suppose la surface Γ de régularité infinie. On adopte les notations suivantes :

- On pose $\mathbf{n}^\pm = \pm \mathbf{n}$. Ainsi \mathbf{n}^+ est la normale intérieure à Ω^+ , \mathbf{n}^- est la normale intérieure à Ω^- .
- On dit qu'un champ de vecteurs \mathbf{u} sur Γ est tangentiel s'il satisfait

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

- On note γ_T^\pm la trace tangentielle sur Γ , extérieure ou intérieure. Il s'agit de la projection sur le plan tangent à Γ d'une distribution vectorielle définie dans Ω^\pm .
- Etant donné une distribution vectorielle \mathbf{F} admettant une trace tangentielle sur Γ , on désignera par \mathbf{F}_{tan} la quantité

$$\mathbf{F}_{\text{tan}} = \gamma_T \mathbf{F} = (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) \times \mathbf{n}.$$

Notation. On suppose toujours la surface Γ de régularité infinie. Nous noterons

- $\mathbf{H}^s(\Gamma)$ l'espace de Sobolev usuel des fonctions de régularité d'ordre s ,
- $\mathbf{H}_T^s(\Gamma)$ l'espace de Sobolev des champs tangentiels régularité d'ordre s ,
- $\mathcal{D}(\Gamma)$ l'espace des fonctions scalaires définies sur Γ de régularité \mathcal{C}^∞ ,
- $\mathcal{D}'(\Gamma)$ l'espace des distributions scalaires, dual de $\mathcal{D}(\Gamma)$,
- $\mathcal{D}_T(\Gamma)$ l'espace des champs vectoriels tangents définis sur Γ de régularité \mathcal{C}^∞ ,

- $\mathcal{D}'_T(\Gamma)$ l'espace des distributions vectorielles tangentes, dual de $\mathcal{D}_T(\Gamma)$,
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans $H^0_T(\Gamma)$.

1.1.2 Condition de rayonnement à l'infini

Pour définir le problème extérieur, nous devons imposer la condition supplémentaire suivante, dite condition de rayonnement à l'infini de Silver-Müller

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \left(\mathbf{x} \times \mathbf{H} + |\mathbf{x}| \mathbf{E} \right) = 0,$$

sans laquelle il n'y aurait pas unicité des solutions. On dit alors que le champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est *rayonnant*. Tout comme dans le cas du problème de Helmholtz extérieur, cette condition permet de sélectionner, parmi les deux choix mathématiquement possibles, celui de l'onde *sortante*, seul choix physiquement admissible. Puisque $\mathbf{H} = \frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{E}$, nous pouvons écrire cette condition sous la forme :

Définition 2 (condition de Silver-Müller).

On dit que le champ \mathbf{E} vérifie la *condition de rayonnement de Silver-Müller* si

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} \left(\mathbf{x} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + ik|\mathbf{x}| \mathbf{E} \right) = 0. \quad (1.4)$$

Remarque. Soit \mathbf{E} une solution au problème de Maxwell extérieur, alors la condition de rayonnement de Silver-Müller pour \mathbf{E} est équivalente à la condition de rayonnement de Sommerfeld pour chacune des composantes cartésiennes de \mathbf{E} . On pourra en trouver la preuve au Théorème 6.7 de [23].

1.1.3 Espaces d'ondes admissibles

On notera W^+ l'espace des champs électriques \mathbf{E} vérifiant l'équation de Maxwell harmonique dans Ω^+ (le domaine extérieur) et la condition de Silver-Müller à l'infini, et possédant une trace tangentielle sur Γ .

On notera W^- l'espace des champs électriques \mathbf{E} vérifiant l'équation de Maxwell harmonique dans Ω^- (le domaine intérieur), et possédant une trace tangentielle sur Γ .

1.1.4 Solution élémentaire du problème de Helmholtz

En dimension 3, une solution élémentaire du problème scalaire de Helmholtz, appelée *noyau de Green*, est donnée par

$$g_k(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x|}}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

c'est-à-dire que g_k vérifie au sens des distributions

$$\Delta g_k + k^2 g_k = \delta_0,$$

où δ_0 désigne la masse de Dirac centrée en 0.

On pose également

$$g_0(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Remarque. Le choix de g_k au lieu de $\overline{g_k}$, qui est aussi une solution élémentaire du problème scalaire de Helmholtz, tient au fait que g_k vérifie la condition de rayonnement (g_k est une onde sortante), contrairement à $\overline{g_k}$ (qui est une onde rentrante).

1.1.5 Potentiel \mathcal{G}_k

On définit le potentiel scalaire \mathcal{S}_k comme la convolution avec le noyau de Green g_k , qui transforme un champ scalaire u défini sur Γ en un champ scalaire $\mathcal{S}_k u$ défini sur $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$, par :

$$\mathcal{S}_k u(x) = \int_{\Gamma} g_k(x-y)u(y)ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma.$$

De la même manière, on définit le *potentiel vectoriel de Green* \mathcal{G}_k , convolution avec le noyau de Green g_k , qui transforme un champ de vecteurs tangents \mathbf{u} sur Γ en un champ vectoriel $\mathcal{G}_k \mathbf{u}$ défini sur $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$, par :

$$\mathcal{G}_k \mathbf{u}(x) = \int_{\Gamma} g_k(x-y)\mathbf{u}(y)ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma. \quad (1.5)$$

La quantité $\mathcal{G}_k \mathbf{u}$ est donc le vecteur constitué du potentiel \mathcal{S}_k appliqué aux trois composantes cartésiennes du vecteur \mathbf{u} .

Remarque. En acoustique, l'opérateur \mathcal{S}_k est appelé *opérateur simple couche* pour le problème de Helmholtz en dimension 3. Le potentiel \mathcal{S}_k est donc associé à la résolution de l'équation de Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

En électromagnétisme, où l'équation à résoudre est vectorielle et non plus scalaire, le potentiel \mathcal{G}_k permet de définir les *opérateurs simple couche* et *double couche* pour le problème de Maxwell, que nous introduisons plus loin.

On pose également

$$\mathcal{G}_0 \mathbf{u}(x) = \int_{\Gamma} g_0(x-y)\mathbf{u}(y)ds(y).$$

On note respectivement $G_k = \gamma_T \mathcal{G}_k$ et $G_0 = \gamma_T \mathcal{G}_0$ les traces tangentielles des opérateurs \mathcal{G}_k et \mathcal{G}_0 .

L'opérateur G_0 est coercif dans $H_T^{-1/2}(\Gamma)$, comme le montre la proposition suivante, qui est notamment utilisée dans la preuve d'existence d'une solution au problème de Maxwell extérieur métal.

Proposition 3 (Inégalité de Nédélec-Planchard).

Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \mathbf{u} \in H_T^{-1/2}(\Gamma), \quad \langle G_0 \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq \alpha \|\mathbf{u}\|_{-1/2}^2.$$

On pourra trouver la preuve dans [36].

1.1.6 Traces électromagnétiques extérieures ou intérieures

Définition 4 (Traces électromagnétiques).

Les opérateurs traces électromagnétiques sont définis par :

$$\sigma_0^\pm \mathbf{E} = \mathbf{n}^\pm \times \gamma_T^\pm \mathbf{E}, \quad \sigma_1^\pm \mathbf{E} = \frac{1}{ik} \mathbf{n}^\pm \times \gamma_T^\pm (\nabla \times \mathbf{E}).$$

Le signe + ou – indique s’il s’agit d’une trace extérieure ou intérieure.

On omettra parfois γ_T^\pm en écrivant simplement $\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}$. On rappelle que l’on a donné γ_T^\pm à la Définition 1.

Notons que la trace σ_0^\pm représente l’analogie de la trace de Dirichlet γ_0^\pm en scalaire, et que la trace σ_1^\pm représente l’analogie de la trace de Neumann γ_1^\pm en scalaire. Par abus de langage, on parlera quelquefois des traces de Dirichlet et de Neumann d’un champ \mathbf{E} pour désigner respectivement $\sigma_0^\pm \mathbf{E}$ et $\sigma_1^\pm \mathbf{E}$.

Si le couple (\mathbf{E}, \mathbf{H}) vérifie les équations de Maxwell harmoniques dans le domaine extérieur (respectivement intérieur), l’équation $\mathbf{H} = \frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{E}$ entraîne

$$\sigma_1^\pm \mathbf{E} = \mathbf{n}^\pm \times \mathbf{H}, \quad \sigma_1^\pm \mathbf{H} = \left(\frac{1}{ik} \mathbf{n}^\pm \times \nabla \right) \left(\frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{E} \right) = -\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E},$$

d’où les relations

$$\sigma_1^\pm \mathbf{E} = \sigma_0^\pm \mathbf{H}, \quad \sigma_1^\pm \mathbf{H} = -\sigma_0^\pm \mathbf{E}.$$

1.2 Théorème de représentation

L’objet de cette section est de paramétrer les espaces d’ondes admissibles W^+ et W^- à l’aide de potentiels.

1.2.1 Définition des potentiels électromagnétiques simple et double couche

On rappelle que \mathcal{G}_k est l'opérateur de convolution avec g_k , solution élémentaire de l'équation de Helmholtz en dimension 3. Soit \mathbf{u} un courant vectoriel sur Γ . Notons

$$\mathcal{T}\mathbf{u}(x) = \frac{1}{ik} \nabla \times (\nabla \times (\mathcal{G}_k \mathbf{u}))(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \quad (1.6)$$

le potentiel simple couche et

$$\mathcal{K}\mathbf{u}(x) = \nabla \times (\mathcal{G}_k \mathbf{u})(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \quad (1.7)$$

le potentiel double couche. Le potentiel \mathcal{T} est continu à travers l'interface Γ , c'est pourquoi on le nomme simple couche. À l'inverse, le potentiel \mathcal{K} est discontinu à travers Γ , d'où le nom de double couche.

Les champs $\mathcal{T}\mathbf{u}$ et $\mathcal{K}\mathbf{u}$ vérifient l'équation de Maxwell harmonique en-dehors de Γ , et la condition de Silver-Müller à l'infini, ce qui permet de définir les potentiels \mathcal{C}^+ et \mathcal{C}^- par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^+ : \mathcal{D}'_T(\Gamma) \times \mathcal{D}'_T(\Gamma) &\rightarrow W^+ & \mathcal{C}^- : \mathcal{D}'_T(\Gamma) \times \mathcal{D}'_T(\Gamma) &\rightarrow W^- \\ (\mathbf{f}, \mathbf{g}) &\mapsto \mathcal{T}\mathbf{g} - \mathcal{K}\mathbf{f} & (\mathbf{f}, \mathbf{g}) &\mapsto -\mathcal{T}\mathbf{g} + \mathcal{K}\mathbf{f}. \end{aligned}$$

1.2.2 Représentation intégrale d'un champ électromagnétique

Les potentiels \mathcal{T} et \mathcal{K} permettent de paramétrer un champ électromagnétique \mathbf{E} par ses données de Cauchy $(\sigma_0^\pm \mathbf{E}, \sigma_1^\pm \mathbf{E})$:

Théorème 5 (de représentation de Stratton-Chu, pour le champ électrique).

Nous avons les formules de représentation suivantes :

- Tout champ $\mathbf{E} \in W^+$ vérifie

$$\mathcal{C}^+(\sigma_0^+ \mathbf{E}, \sigma_1^+ \mathbf{E}) = \begin{cases} \mathbf{E} & \text{dans } \Omega^+, \\ 0 & \text{dans } \Omega^-. \end{cases}$$

- Tout champ $\mathbf{E} \in W^-$ vérifie

$$\mathcal{C}^-(\sigma_0^- \mathbf{E}, \sigma_1^- \mathbf{E}) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \mathbf{E} & \text{dans } \Omega^-. \end{cases}$$

Démonstration La preuve du premier point se trouve au Théorème 6.6 de [23], le second point au Théorème 6.2. La démonstration est directe et fait intervenir des intégrations par parties, comme dans le cas de la démonstration du problème de Helmholtz. \square

Définition 6 (Sauts du champ électrique).

Si $\mathbf{E} \in W^+ \cap W^-$, on note $[\sigma_0 \mathbf{E}]$, et on appelle saut de Dirichlet de \mathbf{E} , la quantité

$$[\sigma_0 \mathbf{E}] = \sigma_0^+ \mathbf{E} - \sigma_0^- \mathbf{E}.$$

De même, on note $[\sigma_1 \mathbf{E}]$, et on appelle saut de Neumann de \mathbf{E} , la quantité

$$[\sigma_1 \mathbf{E}] = \sigma_1^+ \mathbf{E} - \sigma_1^- \mathbf{E}.$$

Le Théorème 5 peut s'écrire sous la forme équivalente :

Théorème 7.

Tout champ \mathbf{E} de $W^+ \cap W^-$ peut s'exprimer en fonction de ses sauts de Dirichlet et de Neumann à l'aide des potentiels simple et double couche :

$$\mathbf{E} = \mathcal{T}[\sigma_1 \mathbf{E}] - \mathcal{K}[\sigma_0 \mathbf{E}], \quad \text{dans } \Omega^+ \text{ et dans } \Omega^-.$$

Démonstration Mise à part la preuve [23] évoquée précédemment, basée sur le théorème de représentation de Helmholtz en dimension 3, une seconde preuve se trouve au Théorème 5.5.1 de [46]. Nous en donnons brièvement ses grandes lignes.

On pose $\mathbf{a} = [\sigma_0 \mathbf{E}]$, $\mathbf{b} = [\sigma_1 \mathbf{E}]$, et on cherche (\mathbf{E}, \mathbf{H}) solution de

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = \mathbf{a} \delta_\Gamma, \\ \nabla \times \mathbf{H} + ik\mathbf{E} = \mathbf{b} \delta_\Gamma. \end{cases} \quad (1.8)$$

Dans un premier temps, on veut résoudre (1.8) avec $\mathbf{a} = 0$ pour trouver la contribution de \mathbf{b} dans \mathbf{E} . On cherche la solution sous la forme $\mathbf{E} = A + \nabla V$, avec A et V continus à travers Γ et vérifiant la condition de Jauge $\nabla \cdot A - k^2 V = 0$. En notant div_Γ la divergence surfacique sur la frontière Γ (définie page 73 dans [46]), nous avons $ik \nabla \cdot \mathbf{E} = (\text{div}_\Gamma \mathbf{b}) \delta_\Gamma$. Alors cette dernière relation, associée à la condition de jauge nous donne $\Delta V + k^2 V = \frac{1}{ik} (\text{div}_\Gamma \mathbf{b}) \delta_\Gamma$, d'où l'on déduit que V est solution du problème de Helmholtz en dimension 3 avec saut de Dirichlet nul à travers Γ et saut de Neumann valant $\frac{1}{ik} \text{div}_\Gamma \mathbf{b}$. Par suite, le théorème de représentation pour le problème de *Helmholtz* nous donne, sachant que \mathcal{G}_k coïncide avec le potentiel simple couche pour Helmholtz en dimension 3 :

$$V = \frac{1}{ik} \mathcal{G}_k(\text{div}_\Gamma \mathbf{b}).$$

De plus, les équations (1.8) mènent directement à $\Delta A + k^2 A = -ik \mathbf{b} \delta_\Gamma$. Les composantes cartésiennes de A vérifient donc le problème de Helmholtz avec saut de Dirichlet nul et saut de Neumann valant $-ik \mathbf{b}$, d'où l'on déduit, toujours par le théorème de représentation pour Helmholtz :

$$A = -ik \mathcal{G}_k(\mathbf{b}).$$

On obtient la contribution de \mathbf{b} dans \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = A + \nabla V = -ik \mathcal{G}_k(\mathbf{b}) + \frac{1}{ik} \nabla \mathcal{G}_k(\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{b}),$$

ainsi que la contribution de \mathbf{b} dans \mathbf{H} : $H = -\nabla \times \mathcal{G}_k(\mathbf{b})$. Par symétrie, la contribution de \mathbf{a} dans \mathbf{E} est donc

$$\mathbf{E} = -\nabla \times \mathcal{G}_k(\mathbf{a}).$$

En recollant les morceaux, en utilisant une intégration par parties et le fait que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -ik \mathcal{G}_k(\mathbf{b}) + \frac{1}{ik} \nabla \mathcal{G}_k(\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{b}) - \nabla \times \mathcal{G}_k(\mathbf{a}) \\ &= \frac{1}{ik} \nabla \times (\nabla \times \mathcal{G}_k \mathbf{b}) - \nabla \times \mathcal{G}_k \mathbf{a} \\ &= \mathcal{T}[\sigma_1 \mathbf{E}] - \mathcal{K}[\sigma_0 \mathbf{E}]. \end{aligned}$$

□

Le champ magnétique \mathbf{H} vérifie bien évidemment les mêmes formules. En tenant compte de l'expression des traces de \mathbf{H} en fonction de celles de \mathbf{E} , on en déduit :

Théorème 8 (de représentation pour le champ magnétique).

- Tout champ électromagnétique $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in (W^+)^2$ vérifie

$$\mathcal{C}^+(\sigma_0^+ \mathbf{H}, \sigma_1^+ \mathbf{H}) = \mathcal{C}^+(\sigma_1^+ \mathbf{E}, -\sigma_0^+ \mathbf{E}) = \begin{cases} \mathbf{H} & \text{dans } \Omega^+, \\ 0 & \text{dans } \Omega^-. \end{cases}$$

- Tout champ électromagnétique $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in (W^-)^2$ vérifie

$$\mathcal{C}^-(\sigma_0^- \mathbf{H}, \sigma_1^- \mathbf{H}) = \mathcal{C}^-(\sigma_1^- \mathbf{E}, -\sigma_0^- \mathbf{E}) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \mathbf{H} & \text{dans } \Omega^-. \end{cases}$$

- Tout champ magnétique \mathbf{H} de $W^+ \cap W^-$ vérifie :

$$\mathbf{H} = \mathcal{T}[\sigma_1 \mathbf{H}] - \mathcal{K}[\sigma_0 \mathbf{H}] = -\mathcal{T}[\sigma_0 \mathbf{E}] - \mathcal{K}[\sigma_1 \mathbf{E}] \quad \text{dans } \Omega^+ \text{ et dans } \Omega^-.$$

1.2.3 Opérateurs simple et double couche

A l'interface Γ , les potentiels simple et double couche \mathcal{T} et \mathcal{K} vérifient les formules de saut suivantes :

Proposition 9 (Formules de saut).

Soit $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{D}_T(\Gamma)^2$, alors $\mathcal{T}\mathbf{u}$ et $\mathcal{K}\mathbf{v}$ sont dans W^\pm , et :

$$\sigma_0^+ \mathcal{T}\mathbf{u} - \sigma_0^- \mathcal{T}\mathbf{u} = 0, \quad \sigma_1^+ \mathcal{T}\mathbf{u} - \sigma_1^- \mathcal{T}\mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad (1.9)$$

$$\sigma_0^+ \mathcal{K}\mathbf{v} - \sigma_0^- \mathcal{K}\mathbf{v} = -\mathbf{v}, \quad \sigma_1^+ \mathcal{K}\mathbf{v} - \sigma_1^- \mathcal{K}\mathbf{v} = 0. \quad (1.10)$$

Démonstration La démonstration se trouve au Théorème 5.5.1 de [46]. \square

On dit que le potentiel simple couche n'a pas de saut de Dirichlet à l'interface, tandis que le potentiel double couche n'a pas de saut de Neumann à l'interface.

La Proposition 9 nous autorise donc à définir sur la frontière Γ les opérateurs suivants :

$$\mathbf{n} \times \mathbb{T} = \sigma_0^+ \mathcal{T} = \sigma_0^- \mathcal{T}, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbb{K} = \sigma_0^+ \mathcal{K} + \frac{1}{2} \text{Id} = \sigma_0^- \mathcal{K} - \frac{1}{2} \text{Id}, \quad (1.12)$$

où pour $\mathbf{u} \in \mathcal{D}_T(\Gamma)$, les quantités $\mathbb{T}\mathbf{u}$ et $\mathbb{K}\mathbf{u}$ sont dans le plan tangent à Γ . On appelle \mathbb{T} l'opérateur simple couche et \mathbb{K} l'opérateur double couche.

Les traces extérieures et intérieures des potentiels électromagnétiques \mathcal{T} et \mathcal{K} peuvent s'exprimer de la sorte :

$$\begin{cases} \sigma_1^\pm \mathcal{T} = -\sigma_0^\pm \mathcal{K}, \\ \sigma_1^\pm \mathcal{K} = \sigma_0^\pm \mathcal{T}, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_0^\pm \mathcal{T} = \mathbf{n} \times T, \\ \sigma_0^\pm \mathcal{K} = \mathbf{n} \times K \mp \frac{1}{2} \text{Id}. \end{cases}$$

Le deuxième ensemble de résultats découle des définitions et propriétés données précédemment, la deuxième propriété est immédiate par définition de σ_1^\pm . Il reste à montrer la première. Elle provient de la définition des traces électromagnétiques et de ce que \mathcal{K} vérifie les équations de Maxwell harmoniques :

$$\sigma_1^+ \mathcal{T} = \mathbf{n} \times \left(\frac{1}{ik} \nabla \times \left(\frac{1}{ik} \nabla \times (\nabla \times \mathcal{G}_k) \right) \right) = -\frac{1}{k^2} \mathbf{n} \times (\nabla \times (\nabla \times \mathcal{K})) = -\sigma_0^+ \mathcal{K}.$$

Lorsque la surface Γ est lisse, les opérateurs \mathbb{T} et \mathbb{K} sont des opérateurs pseudo-différentiels. On rappelle que la notion d'opérateur pseudo-différentiel est une extension de celle d'opérateur différentiel. Plaçons-nous en dimension 1 et notons $D := -i\partial_x$. Cette extension est basée sur l'utilisation de la transformée de Fourier \mathcal{F} . On remarque en effet qu'un opérateur différentiel $P = \sum_{k=0}^m a_k D^k$ s'exprime simplement dans le domaine de Fourier en fonction d'un polynôme $a(\xi)$ (son symbole) :

$$\mathcal{F}(Pu)(\xi) = a(\xi)\mathcal{F}(u)(\xi), \quad \text{avec} \quad a(\xi) = \sum_{k=0}^m a_k \xi^k.$$

Par extension, on définit, pour un symbole quelconque (non nécessairement polynômial, ni indépendant de ξ) $a(x, \xi)$, et en se servant de la transformée de Fourier inverse, l'opérateur pseudo-différentiel $op(a)$ associé à $a(x, \xi)$ par :

$$op(a)u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} a(x, \xi) \mathcal{F}(u)(\xi) d\xi.$$

Pour plus de détails, on pourra se référer à [1].

Proposition 10 (ordre des opérateurs simple et double couche).

- L'opérateur $\mathbf{n} \times \mathbf{T}$ est d'ordre $+1$.
- L'opérateur $\mathbf{n} \times \mathbf{K}$ est d'ordre -1 .
- L'opérateur G_0 est d'ordre -1 .

Démonstration . On trouvera une preuve pages 241-242 de [46]. □

1.2.4 Projecteurs de Calderón

On note $X = \mathcal{D}_T(\Gamma)^2$ l'espace des traces, et

$$\begin{aligned} X^+ &= \{(\sigma_0^+ \mathbf{E}, \sigma_1^+ \mathbf{E}), \mathbf{E} \in W^+\} \subset X, \\ X^- &= \{(\sigma_0^- \mathbf{E}, \sigma_1^- \mathbf{E}), \mathbf{E} \in W^-\} \subset X. \end{aligned}$$

Théorème 11 (Projecteurs de Calderón).

Les opérateurs

$$C^\pm = (\sigma_0^\pm \oplus \sigma_1^\pm) (C^\pm),$$

sont respectivement des projecteurs sur X^+ et X^- . Ils sont appelés *projecteurs de Calderón*. Ils décomposent l'espace X en la somme directe $X = X^+ \oplus X^-$.

Ces projecteurs admettent la représentation matricielle suivante :

$$C^+ = \begin{pmatrix} -\sigma_0^+ \mathcal{K} & \sigma_0^+ \mathcal{T} \\ -\sigma_1^+ \mathcal{K} & \sigma_1^+ \mathcal{T} \end{pmatrix}, \quad C^- = \begin{pmatrix} \sigma_0^- \mathcal{K} & -\sigma_0^- \mathcal{T} \\ \sigma_1^- \mathcal{K} & -\sigma_1^- \mathcal{T} \end{pmatrix},$$

soit encore

$$C^+ = \begin{pmatrix} -\mathbf{n} \times K + \frac{1}{2} \text{Id} & \mathbf{n} \times T \\ -\mathbf{n} \times T & -\mathbf{n} \times K + \frac{1}{2} \text{Id} \end{pmatrix}, \quad C^- = \begin{pmatrix} \mathbf{n} \times K + \frac{1}{2} \text{Id} & -\mathbf{n} \times T \\ \mathbf{n} \times T & \mathbf{n} \times K + \frac{1}{2} \text{Id} \end{pmatrix}.$$

Démonstration . On montre que C^+ est un projecteur sur X^+ , la démonstration étant similaire pour C^- . Soit $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in X^+$. Soit le champ \mathbf{E} défini par $\mathbf{E} = \mathcal{T}\mathbf{b} - \mathcal{K}\mathbf{a}$. D'après les formules de

saut, on a

$$\begin{aligned}\sigma_0^+ \mathbf{E} &= (\mathbf{n} \times \mathbf{T})\mathbf{b} - \left(\mathbf{n} \times \mathbf{K} - \frac{1}{2} \text{Id} \right) \mathbf{a}, \\ \sigma_1^+ \mathbf{E} &= \left(-\mathbf{n} \times \mathbf{K} + \frac{1}{2} \text{Id} \right) \mathbf{b} - (\mathbf{n} \times \mathbf{T})\mathbf{a},\end{aligned}$$

d'où la représentation matricielle ci-dessus. Soit alors \mathbf{F} le champ défini par :

$$\mathbf{F} = \mathcal{T}\sigma_1^+ \mathbf{E} - \mathcal{K}\sigma_0^+ \mathbf{E}.$$

D'après le théorème de représentation, $\mathbf{F} = 0$ dans Ω^- et $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ dans Ω^+ . Par conséquent, $\sigma_0^+ \mathbf{F} = \sigma_0^+ \mathbf{E}$ et $\sigma_1^+ \mathbf{F} = \sigma_1^+ \mathbf{E}$, ce qui prouve que C^+ est bien un projecteur sur X^+ . \square

Les opérateurs C^+ et C^- étant des projecteurs sur X^+ et X^- respectivement, leur composition C^+C^- est nulle. Or

$$C^+C^- = \begin{pmatrix} (\mathbf{n} \times \mathbf{T})^2 - (\mathbf{n} \times \mathbf{K})^2 + \frac{1}{4} \text{Id} & (\mathbf{n} \times \mathbf{T})(\mathbf{n} \times \mathbf{K}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{K})(\mathbf{n} \times \mathbf{T}) \\ -(\mathbf{n} \times \mathbf{T})(\mathbf{n} \times \mathbf{K}) - (\mathbf{n} \times \mathbf{K})(\mathbf{n} \times \mathbf{T}) & (\mathbf{n} \times \mathbf{T})^2 - (\mathbf{n} \times \mathbf{K})^2 + \frac{1}{4} \text{Id} \end{pmatrix} = 0,$$

d'où l'on déduit :

Proposition 12 (Formule de Calderón).

Pour une surface Γ fermée,

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{T})^2 = (\mathbf{n} \times \mathbf{K})^2 - \frac{1}{4} \text{Id}. \quad (1.13)$$

Remarquons que l'on a également

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{T})(\mathbf{n} \times \mathbf{K}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{K})(\mathbf{n} \times \mathbf{T}) = 0,$$

c'est-à-dire que les opérateurs $\mathbf{n} \times \mathbf{T}$ et $\mathbf{n} \times \mathbf{K}$ anticommulent.

Remarque. Puisque $\mathbf{n} \times \mathbf{K}$ est d'ordre -1 , c'est un opérateur compact dans $H_T^s(\Gamma)$. La formule de Calderón montre donc en particulier que l'opérateur $(\mathbf{n} \times \mathbf{T})^2$ est une perturbation compacte de $-\frac{1}{4} \text{Id}$ dans $H_T^s(\Gamma)$.

1.3 Opérateurs de Fredholm

Nous introduisons dans cette section la Théorie de Fredholm [30].

Nous allons considérer le problème de Maxwell à l'intérieur ou à l'extérieur de la surface Γ , avec condition dite métal ou métallique. Pour la démonstration de l'existence d'une solution au problème extérieur de Maxwell, nous utilisons la théorie de Fredholm. Cette théorie nous sera également utile pour démontrer l'existence d'une solution à certaines équations intégrales, dans le Chapitre 2.

Définition 13 (opérateur de Fredholm).

Soient E et F deux espaces de Banach. On dit que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est un *opérateur de Fredholm* s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

1. Le noyau $\text{Ker } T$ est de dimension finie dans E .
2. L'image $\text{Im } T$ est fermée et de codimension finie dans F .

On définit alors l'indice de T noté $\text{Ind}(T)$ par

$$\text{Ind}(T) = \dim \text{Ker } T - \text{codim } \text{Im } T.$$

Théorème 14 (Alternative de Fredholm).

Soient E et F deux espaces de Banach. Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est un opérateur de Fredholm d'indice $\text{Ind}(T)$, et si $C \in \mathcal{L}(E, F)$ est un opérateur compact, alors $T + C$ est encore un opérateur de Fredholm, d'indice $\text{Ind}(T)$.

Ce n'est pas ce théorème lui-même que nous allons utiliser, mais le corollaire suivant :

Corollaire 15.

Soit A un opérateur injectif tel qu'il existe deux opérateurs B et C tels que

$$A = B + C,$$

où B est un isomorphisme et C est compact. Alors l'opérateur A est lui aussi un isomorphisme.

Démonstration

- L'opérateur B est un isomorphisme donc $\dim \text{Ker } B = \text{codim } \text{Im } B = 0$ et $\text{Im } B$ est fermée dans F . Par suite, B est un opérateur de Fredholm d'indice 0.
- Comme C est compact, le théorème de l'alternative de Fredholm montre que A est un opérateur de Fredholm d'indice 0.
- Puisque A est injectif, $\dim \text{Ker } A = 0$, d'où A est surjectif, donc A est un isomorphisme.

□

Remarque. Ce dernier corollaire nous sera utile pour montrer l'existence de solutions à certaines équations intégrales. Soit A l'opérateur sous-jacent à l'une des équations intégrales que nous allons présenter. Supposons que l'on puisse écrire cet opérateur sous la forme $A = B + C$, avec B coercif donc bijectif, et C compact. Alors A est un opérateur de Fredholm d'indice 0. Il suffit donc de montrer que A est injectif (i.e. de prouver que la solution est unique), pour montrer qu'il est surjectif (i.e. pour prouver que la solution existe).

1.4 Problèmes de Maxwell

Nous donnons ci-dessous la définition, pour un objet borné donné, du problème de Maxwell, extérieur ou intérieur, avec condition métal, condition impédante, ou condition mixte métal-impédante. Nous rappelons que notre objectif est de résoudre le problème de Maxwell extérieur de type métal. Cependant, nous utiliserons à cette fin des méthodes de décomposition de domaine qui font intervenir, dans les sous-domaines bornés, des problèmes intérieurs. De plus, sur l'interface introduite artificiellement pour les besoins de la décomposition de domaine, il sera utile d'imposer au choix une condition aux limites de type métal ou impédante. C'est pourquoi nous sommes intéressés par les résultats d'existence et d'unicité de ces divers problèmes de Maxwell.

1.4.1 Le problème de Maxwell extérieur avec condition métal

Un champ est solution du problème de Maxwell extérieur s'il vérifie les équations de Maxwell harmoniques dans Ω^+ , conjuguées à la condition de rayonnement de Silver-Müller.

Définition 16 (Problème de Maxwell extérieur).

Soit $\mathbf{e}_0 \in H_T^{-1/2}(\Gamma)$. Le problème consiste à trouver le champ électrique diffracté \mathbf{E} vérifiant le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = 0 \quad \text{dans } \Omega^+ , \\ \sigma_0^+ \mathbf{E} = \mathbf{e}_0 \quad \text{sur } \Gamma , \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} \left(\mathbf{x} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + ik|\mathbf{x}|\mathbf{E} \right) = 0 \quad (\text{condition de Silver-Müller}). \end{array} \right.$$

Pour démontrer un résultat d'existence et d'unicité pour le problème extérieur de Maxwell, nous aurons besoin du lemme de Rellich en dimension 3. Nous donnons également les deux théorèmes vectoriels de Green qui nous seront utiles par la suite.

Lemme 17 (de Rellich en dimension 3).

Soit D un ouvert de \mathbb{R}^3 , borné, complémentaire d'un domaine non borné. Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})$ une solution de l'équation de Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$, satisfaisant :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{|\mathbf{x}|=r} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = 0.$$

Alors $u = 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$.

La preuve de ce lemme se trouve dans [22], Lemme 3.11. Les deux lemmes suivants sont classiques et admis.

Lemme 18 (Premier théorème vectoriel de Green).

Soit D un domaine borné de \mathbb{R}^3 , de classe \mathcal{C}^1 , de frontière Γ_D . On note \mathbf{n} la normale à Γ_D dirigée vers l'extérieur de D . Soit $(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \in \left((\mathcal{C}^1(\overline{D}))^3 \times (\mathcal{C}^2(\overline{D}))^3 \right)$, alors

$$\begin{aligned} \int_D \left(\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{F} + (\nabla \cdot \mathbf{E})(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \right) \\ = \int_{\Gamma_D} \left((\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})(\nabla \cdot \mathbf{F}) \right). \end{aligned}$$

Démonstration Sachant que

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{F}) = (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{F} - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}),$$

on obtient

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{F})) = (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})),$$

d'où il vient

$$\begin{aligned} \int_D \nabla \cdot (\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{F})) &= \int_D \left[(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})) \right] \\ &= \int_{\Gamma_D} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{F})) = \int_{\Gamma_D} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}). \end{aligned}$$

Par suite, en utilisant la formule vectorielle

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F},$$

nous avons

$$\begin{aligned} \int_D \left(\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{F} + (\nabla \cdot \mathbf{E})(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \right) &= \int_{\Gamma_D} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \\ &\quad + \int_D \mathbf{E} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \int_D (\nabla \cdot \mathbf{E})(\nabla \cdot \mathbf{F}). \end{aligned}$$

Or on a également

$$\begin{aligned} \int_D \nabla \cdot (\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{F})) &= \int_D \mathbf{E} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \int_D (\nabla \cdot \mathbf{E})(\nabla \cdot \mathbf{F}) \\ &= \int_{\Gamma_D} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})(\nabla \cdot \mathbf{F}), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. \square

Si maintenant $(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \in \left((\mathcal{C}^2(\overline{D}))^3 \right)^2$, on applique le Lemme 18 au couple (\mathbf{E}, \mathbf{F}) puis au couple (\mathbf{F}, \mathbf{E}) et l'on obtient par élimination des termes symétriques :

Lemme 19 (Deuxième théorème vectoriel de Green).

Soit D un domaine borné de \mathbb{R}^3 , de classe \mathcal{C}^1 , de frontière Γ_D . On note \mathbf{n} la normale à Γ_D dirigée vers l'extérieur de D . Soit $(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \in \left((\mathcal{C}^2(\overline{D}))^3\right)^2$, alors

$$\begin{aligned} & \int_D (\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{E}) \\ &= \int_{\Gamma_D} \left((\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})(\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F})(\nabla \cdot \mathbf{E}) \right). \end{aligned}$$

Théorème 20 (Problème de Maxwell extérieur homogène).

Soit $\mathbf{E} \in W^+$ une solution du problème de Maxwell extérieur homogène :

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \sigma_0^+ \mathbf{E} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} \left(\mathbf{x} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + ik|\mathbf{x}|\mathbf{E} \right) = 0 & \text{(condition de Silver-Müller),} \end{cases}$$

avec k réel.

Alors $\mathbf{E} = 0$ dans Ω^+ .

Démonstration Soit B_R la boule ouverte centrée en 0 et de rayon R , et S_R la sphère centrée en 0 et de rayon R . On suppose R suffisamment grand pour que $\overline{\Omega^-}$ soit contenu dans S_R .

On note $\mathbf{H} = \frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{E}$. La condition de Silver-Müller s'écrit encore

$$|\mathbf{n} \times \mathbf{H} + \mathbf{E}| = \left| \frac{1}{ik} \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{E} \right| = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad \text{quand } R \text{ tend vers l'infini,} \quad (1.14)$$

d'où l'on déduit que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} |\mathbf{n} \times \mathbf{H} + \mathbf{E}|^2 = 0.$$

En appliquant le Lemme 18 au couple $(\overline{\mathbf{E}}, \mathbf{E})$, et en tenant compte de $\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$ et $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, on obtient

$$\int_{\Omega^+ \cap B_R} \left(-k^2 |\mathbf{E}|^2 + |\nabla \times \mathbf{E}|^2 \right) = \int_{S_R - \Gamma} \left((\mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \right) = ik \int_{S_R - \Gamma} (\mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{H},$$

où par convention $\int_{S_R - \Gamma} u = \int_{S_R} u - \int_{\Gamma} u$. En prenant la partie imaginaire de cette expression, il vient

$$\Re \left(\int_{S_R - \Gamma} (\mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{H} \right) = 0,$$

où $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z . Puisque $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ sur Γ , nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 = \Re \left(\int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{H} \right) &= \Re \left(\int_{S_R} (\mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{H} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{S_R} |\mathbf{n} \times \mathbf{H} + \mathbf{E}|^2 - \int_{S_R} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{n} \times \mathbf{H}|^2). \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{n} \times \mathbf{H}|^2) = \lim_{R \rightarrow +\infty} |\mathbf{n} \times \mathbf{H} + \mathbf{E}|^2 = 0,$$

d'après (1.14). Donc $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} |\mathbf{E}|^2 = 0$, d'où l'on déduit d'après le lemme de Rellich que $\mathbf{E} = 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$. \square

Ce théorème nous conduit directement au résultat suivant, en utilisant les potentiels électromagnétiques et la théorie de Fredholm.

Théorème 21 (Existence et unicité d'une solution au problème de Maxwell extérieur).

Soit Ω^- un ouvert borné de \mathbb{R}^3 , de classe \mathcal{C}^1 , de frontière Γ , et Ω^+ le complémentaire de $\overline{\Omega^-}$ dans \mathbb{R}^3 . Alors le problème de Maxwell extérieur possède une unique solution.

Démonstration Il reste simplement à montrer l'existence, l'unicité étant assurée grâce au Théorème 20. La preuve suivante de l'existence est fondée sur le théorème de représentation des champs à l'aide de potentiels électromagnétiques. Une preuve alternative se trouve au Théorème 6.19 de [23].

Cherchons la solution dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ sous la forme :

$$\mathbf{E} = \mathcal{T} (\mathbf{n} \times G_0^2) \mathbf{u} - \mathcal{K} \mathbf{u},$$

On applique la trace σ_0^+ au champ électrique \mathbf{E} :

$$\sigma_0^+ \mathbf{E} = (\mathbf{n} \times \mathcal{T}) (\mathbf{n} \times G_0^2) \mathbf{u} - \left(\mathbf{n} \times \mathcal{K} - \frac{1}{2} \text{Id} \right) \mathbf{u} = \mathbf{e}_0. \quad (1.15)$$

Notons A l'opérateur apparaissant dans l'équation précédente.

$$A := (\mathbf{n} \times \mathcal{T}) (\mathbf{n} \times G_0^2) - \mathbf{n} \times \mathcal{K} + \frac{1}{2} \text{Id}.$$

- Les opérateurs G_0 , $\mathbf{n} \times \mathcal{K}$ et $\mathbf{n} \times \mathcal{T}$ sont respectivement d'ordre -1 , -1 et $+1$. On en déduit que l'opérateur A sous-jacent à cette équation est une perturbation compacte de $\frac{1}{2} \text{Id}$ dans $H_T^s(\Gamma)$ (en effet, un opérateur d'ordre -1 dans $H_T^s(\Gamma)$ est compact). Cet opérateur est donc un opérateur de Fredholm d'indice 0. D'après le Corollaire 15 de l'alternative de Fredholm, si A est injectif, alors l'équation (1.15) admet une solution.

- Montrons que A est injectif. Soit $\mathbf{u} \in H_T^s(\Gamma)$ tel que $A\mathbf{u} = 0$. Alors le champ \mathbf{E} défini par

$$\mathbf{E} = \mathcal{T}(\mathbf{n} \times G_0^2) \mathbf{u} - \mathcal{K}\mathbf{u}$$

vérifie $\sigma_0^+ \mathbf{E} = A\mathbf{u} = 0$, donc est solution du problème de Maxwell extérieur homogène. Par suite \mathbf{E} est nul dans Ω^+ .

- Les formules de saut sur les potentiels \mathcal{T} et \mathcal{K} nous conduisent aux relations :

$$\sigma_0^- \mathbf{E} = (\mathbf{n} \times \mathcal{T})(\mathbf{n} \times G_0^2) \mathbf{u} - \mathbf{n} \times \mathcal{K}\mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{u} = A\mathbf{u} - \mathbf{u} = -\mathbf{u},$$

$$\sigma_1^- \mathbf{E} = \sigma_1^+ \mathcal{T}(\mathbf{n} \times G_0^2) \mathbf{u} - \sigma_1^+ \mathcal{K}\mathbf{u} - (\mathbf{n} \times G_0^2) \mathbf{u} = \sigma_1^+ \mathbf{E} - (\mathbf{n} \times G_0^2) \mathbf{u} = -(\mathbf{n} \times G_0^2) \mathbf{u}.$$

En utilisant le premier théorème vectoriel de Green (Lemme 18) dans le domaine $\overline{\Omega^-}$, nous obtenons comme dans la démonstration de l'unicité :

$$\text{Im} \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}}) \cdot \nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

où les traces de \mathbf{E} et $\overline{\mathbf{E}}$ sont prises du côté de Ω^- , et où $\text{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire de z . Or

$$\begin{aligned} \text{Im} \left(\int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}}) \cdot \nabla \times \mathbf{E} \right) &= -\text{Im} \left(ik \int_{\Gamma} \sigma_0^- \mathbf{E} \cdot (\mathbf{n} \times \sigma_1^- \mathbf{E}) \right) \\ &= -k \Re \left(\int_{\Gamma} \overline{\mathbf{a}} \cdot G_0^2 \mathbf{a} \right) \\ &= -k \int_{\Gamma} |G_0 \mathbf{a}|^2. \end{aligned}$$

Donc $G_0 \mathbf{a} = 0$, et comme $\mathbf{a} \in H_T^{-1/2}(\Gamma)$, l'inégalité de Nédélec-Planchard (Proposition 3, page 25) donne $\mathbf{a} = 0$.

L'opérateur A est donc injectif et l'équation de frontière ci-dessus admet une solution. \square

1.4.2 Le problème de Maxwell intérieur avec condition métal

Nous considérons le problème :

Définition 22 (Problème de Maxwell intérieur).

Soit $\mathbf{e}_0 \in H_T^{-1/2}(\Gamma)$. Le problème consiste à trouver le champ électrique diffracté \mathbf{E} vérifiant le système :

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \sigma_0^- \mathbf{E} = \mathbf{e}_0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Définition 23 (Problème de Maxwell intérieur homogène).

Le problème consiste à trouver le champ électrique \mathbf{E} vérifiant le système :

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \sigma_0^- \mathbf{E} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.16)$$

On dira que k^2 est une *valeur propre pour le problème de Maxwell intérieur* si le problème (1.16) admet des solutions non triviales.

Remarque (Non-unicité au problème de Maxwell intérieur). *Il existe une infinité dénombrable de nombres d'onde k , correspondants à des fréquences dites de résonance, pour lesquels le problème de Maxwell intérieur homogène (1.16) admet des solutions non nulles.*

1.4.3 Le problème de Maxwell extérieur métal-impédant

Pour les problèmes de type métal-impédant, on suppose que la frontière Γ de l'obstacle diffractant D est une surface fermée lipschitzienne. On découpe Γ en deux portions de surface disjointes : $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_I$, une portion de surface Γ_D sur laquelle on impose une condition de type métal (Dirichlet), et une surface Γ_I sur laquelle on impose une condition de type impédant (Fourier-Robin). On introduit une boule B_R de rayon R tel que l'objet D soit inclus dans B_R . Nous définissons les espaces suivants, où par convention on note $\mathbf{H}^0(\Gamma) = \mathbf{L}^2(\Gamma)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{rot}, D) &= \left\{ \mathbf{u} \in (L^2(D))^3, \nabla \times \mathbf{u} \in (L^2(D))^3 \right\}, \\ \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, B_R) &= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, B_R), \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial B_R \right\}, \\ \mathbf{H}_T^s(\Gamma) &= \left\{ \mathbf{u} \in (H^s(\Gamma))^3, \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}, \\ \mathbf{H}_T^s(\Gamma_0) &= \left\{ \mathbf{u}|_{\Gamma_0}, \mathbf{u} \in \mathbf{H}_T^s(\Gamma) \right\}, \text{ si } \Gamma_0 \subset \Gamma, \\ Y(\Gamma_D) &= \left\{ f \in (H^{-1/2}(\Gamma_D))^3, \exists \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, B_R), \mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\Gamma_I} \in \mathbf{L}_T^2(\Gamma_I) \text{ et } f = \mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\Gamma_D} \right\}, \\ X(D, \Gamma_I) &= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, D), \mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\Gamma_I} \in \mathbf{L}_T^2(\Gamma_I) \right\}, \\ X_{\text{loc}}(D_e, \Gamma_I) &= X(D_e \cap B_R, \Gamma_I). \end{aligned}$$

On rappelle que l'on a défini \mathbf{E}_{tan} à la Définition 1. Avec ces notations, le problème extérieur mixte métal-impédant est défini par :

Définition 24 (Problème de Maxwell extérieur de type métal-impédant).

Etant donnés λ réel, $f \in Y(\Gamma_D)$ et $h \in \mathbf{L}_T^2(\Gamma_I)$, le problème consiste à trouver un champ $\mathbf{E} \in X_{\text{loc}}(\Omega^+, \Gamma_I)$ vérifiant

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} = f & \text{sur } \Gamma_D, \\ \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - i\lambda \mathbf{E}_{\text{tan}} = h & \text{sur } \Gamma_I, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} \left(\mathbf{x} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + ik|\mathbf{x}|\mathbf{E} \right) = 0 & \text{(condition de Silver-Müller)}. \end{cases} \quad (1.17)$$

Théorème 25.

Si $\lambda \geq 0$, alors le problème de Maxwell extérieur de type métal-impédant (1.17) admet une unique solution.

Démonstration On pourra se référer à l'annexe D pour la démonstration, qui provient de [18].
□

Remarque. Une condition impédante doit normalement faire intervenir l'impédance du vide

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \mu_0 c_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c_0}$$

de la manière suivante :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}} + \alpha Z_0 \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{e},$$

avec α réel et où $\tilde{\mathbf{E}}$ et $\tilde{\mathbf{H}}$ désignent les champs physiques spatio-temporels. Cependant, en raison de la renormalisation du champ électromagnétique, cette constante n'apparaît pas dans nos équations :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{\text{tan}} + \alpha Z_0 \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}} &= \Re \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \mathbf{E}_{\text{tan}} e^{-i\omega t} \right) + \alpha Z_0 \mathbf{n} \times \Re \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \mathbf{H} e^{-i\omega t} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \Re \left(\left(\mathbf{E}_{\text{tan}} + \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} Z_0 \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{H} \right) e^{-i\omega t} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \Re \left((\mathbf{E}_{\text{tan}} + \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{H}) e^{-i\omega t} \right). \end{aligned}$$

1.4.4 Le problème de Maxwell intérieur métal-impédant

Le problème intérieur mixte métal-impédant est défini par :

Définition 26 (Problème de Maxwell intérieur de type métal-impédant).

Etant donnés λ réel, $f \in Y(\Gamma_D)$ et $h \in \mathbf{L}_T^2(\Gamma_I)$, trouver un champ $\mathbf{E} \in X(D, \Gamma_I)$ vérifiant

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} = f & \text{sur } \Gamma_D, \\ \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - i\lambda \mathbf{E}_{\text{tan}} = h & \text{sur } \Gamma_I. \end{cases} \quad (1.18)$$

Théorème 27.

Si $\Gamma_I \neq \emptyset$ et si $\lambda \neq 0$, alors le problème de Maxwell intérieur de type métal-impédant (1.18) admet une unique solution.

Démonstration On pourra également se référer à l'annexe D pour la démonstration, effectuée dans [18].
□

1.4.5 Caractérisation des traces

Pouvoir caractériser les espaces de traces est utile pour démontrer l'unicité de la solution à certaines équations intégrales (notamment pour la GCSIE métallique).

Proposition 28.

Les traces extérieures et intérieures vérifient les propriétés

- Si $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in X^+ \setminus \{0, 0\}$, alors $\Re(\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \times \overline{\mathbf{u}} \rangle) > 0$.
- Si $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in X^-$, alors $\Re(\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \times \overline{\mathbf{u}} \rangle) = 0$.

Cette proposition s'écrit aussi en termes de traces de champs électriques :

Proposition 29.

- **(Propriété P^+).**
Si $\mathbf{E} \in W^+ \setminus \{0\}$ vérifie $(\sigma_0^+ \mathbf{E}, \sigma_1^+ \mathbf{E}) \in X^+$, alors $\Re(\langle \sigma_1^+ \mathbf{E}, \mathbf{n} \times \overline{\sigma_0^+ \mathbf{E}} \rangle) > 0$.
- **(Propriété P^-).**
Si $\mathbf{E} \in W^-$ vérifie $(\sigma_0^- \mathbf{E}, \sigma_1^- \mathbf{E}) \in X^-$, alors $\Re(\langle \sigma_1^- \mathbf{E}, \mathbf{n} \times \overline{\sigma_0^- \mathbf{E}} \rangle) = 0$.

Démonstration

- **(Propriété P^+).** Soit $\mathbf{E} \in W^+ \setminus \{0\}$ tel que $(\sigma_0^+ \mathbf{E}, \sigma_1^+ \mathbf{E}) \in X^+$. D'après le premier théorème vectoriel de Green (Lemme 18), appliqué à $(\overline{\mathbf{E}}, \mathbf{E})$ dans $\Omega^+ \cap B_R$, et en tenant compte de $\Delta \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}$, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, on a :

$$\int_{\Omega^+ \cap B_R} (|\nabla \times \mathbf{E}|^2 - k^2 |\mathbf{E}|^2) = - \int_{S_R} \overline{\mathbf{E}} \cdot (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E})) + \int_{\Gamma} \overline{\mathbf{E}} \cdot (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E})).$$

Cela s'exprime en fonction de $\mathbf{H} = \frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{E}$:

$$\int_{\Gamma} \overline{\mathbf{E}} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) = \int_{S_R} \overline{\mathbf{E}} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + ik \int_{\Omega^+ \cap B_R} (|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{H}|^2).$$

En prenant la partie réelle, on obtient :

$$\Re(\langle \sigma_1^+ \mathbf{E}, \mathbf{n} \times \overline{\sigma_0^+ \mathbf{E}} \rangle) = -\Re\left(\int_{\Gamma} \overline{\mathbf{E}} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H})\right) = -\Re\left(\int_{S_R} \overline{\mathbf{E}} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H})\right).$$

Or d'après la condition de Silver-Müller, on a :

$$-2\Re\left(\int_{S_R} \overline{\mathbf{E}} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H})\right) = - \underbrace{\int_{S_R} |\mathbf{n} \times \mathbf{H} + \mathbf{E}|^2}_{\lim_{R \rightarrow +\infty} = 0} + \underbrace{\int_{S_R} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2)}_{\geq 0}.$$

On en déduit que $\Re(\langle \sigma_1^+ \mathbf{E}, \mathbf{n} \times \overline{\sigma_0^+ \mathbf{E}} \rangle) \geq 0$. Si de plus cette quantité est nulle, alors

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} |\mathbf{E}|^2 = 0,$$

et le lemme de Rellich (Lemme 17) nous assure que $\mathbf{E} = 0$ dans Ω^+ . La propriété P^+ est donc démontrée.

- **(Propriété P^-).** Soit $\mathbf{E} \in W^-$ tel que $(\sigma_0^- \mathbf{E}, \sigma_1^- \mathbf{E}) \in X^-$. D'après le deuxième théorème vectoriel de Green (Lemme 19), appliqué à $(\overline{\mathbf{E}}, \mathbf{E})$ dans $\Omega^+ \cap B_R$, et en tenant compte de $\Delta \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}$, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, on a :

$$\int_{\Gamma} \left[\overline{\mathbf{E}} \cdot (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E})) - \mathbf{E} \cdot (\mathbf{n} \times (\nabla \times \overline{\mathbf{E}})) \right] = 0.$$

En prenant la partie imaginaire de cette relation, on obtient :

$$\Re(\langle \sigma_1^- \mathbf{E}, \mathbf{n} \times \overline{\sigma_0^- \mathbf{E}} \rangle) = \Re\left(\frac{1}{ik} \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E})) \cdot \overline{\mathbf{E}}\right) = \frac{1}{k} \operatorname{Im}\left(\int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E})) \cdot \overline{\mathbf{E}}\right) = 0,$$

ce qui conclut la preuve. □

1.5 Représentation intégrale d'un champ diffracté par un objet parfaitement conducteur

Soit \mathbf{E}_{inc} un champ incident, c'est-à-dire une onde plane, solution de l'équation de Maxwell harmonique dans tout l'espace \mathbb{R}^3 :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_{\text{inc}}) - k^2 \mathbf{E}_{\text{inc}} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3,$$

continue dans \mathbb{R}^3 et ne vérifiant aucune condition particulière à l'infini. On s'intéresse au problème de la diffraction de ce champ incident par l'obstacle $\overline{\Omega^-}$.

Nous supposons l'obstacle parfaitement conducteur. Le problème est alors de trouver un champ diffracté \mathbf{E} , solution du problème de Maxwell dans Ω^+ , tel que le champ total $\mathbf{E}^{\text{tot}} = \mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}$ vérifie la condition aux limites :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{tot}} = 0.$$

On appelle cette condition aux limites *condition au bord du parfait conducteur*, ou encore *condition métal*. On suppose donc que la condition de Dirichlet possède la forme particulière suivante :

$$\mathbf{e}_0 = -\sigma_0^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \quad \text{sur } \Gamma.$$

Définition 30 (Problème du parfait conducteur (Maxwell extérieur)).

Etant donné un champ électrique incident \mathbf{E}_{inc} solution de l'équation harmonique dans \mathbb{R}^3 , vérifiant $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{inc}} \in H_T^{-1/2}(\Gamma)$, le problème consiste à trouver le champ électrique diffracté \mathbf{E} vérifiant le système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \sigma_0^+ \mathbf{E} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{inc}} & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} \left(\mathbf{x} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + ik|\mathbf{x}|\mathbf{E} \right) = 0 & \text{(condition de Silver-Müller).} \end{array} \right.$$

Le Théorème de représentation 5 nous donne alors :

$$\mathbf{E} = \mathcal{C}^+(\sigma_0^+ \mathbf{E}, \sigma_1^+ \mathbf{E}) \quad \text{dans } \Omega^+. \quad (1.19)$$

Puisque \mathbf{E}_{inc} est solution du problème de Maxwell intérieur, \mathbf{E}_{inc} est une onde de W^- qui par suite vérifie

$$\mathcal{C}^-(\sigma_0^- \mathbf{E}_{\text{inc}}, \sigma_1^- \mathbf{E}_{\text{inc}}) = 0 \quad \text{dans } \Omega^+.$$

Or \mathbf{E}_{inc} étant continue dans tout \mathbb{R}^3 , ses traces de Dirichlet et de Neumann sont continues au passage de l'interface, donc

$$0 = \mathcal{C}^+(\sigma_0^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}, \sigma_1^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}) \quad \text{dans } \Omega^+. \quad (1.20)$$

En sommant (1.19) et (1.20), on obtient :

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathcal{C}^+(0, \sigma_1^+ \mathbf{E}^{\text{tot}})} \quad \text{dans } \Omega^+. \quad (1.21)$$

Remarque. Le champ incident \mathbf{E}_{inc} ne vérifie pas la condition de Silver-Müller puisque

$$\mathcal{C}^+(\sigma_0^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}, \sigma_1^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}) = 0 \neq \mathbf{E}_{\text{inc}} \quad \text{dans } \Omega^+.$$

Ainsi les champs incident et total appartiennent à l'espace W^- , mais pas à l'espace W^+ . Seul le champ diffracté est rayonnant, en ce sens qu'il vérifie la condition de Silver-Müller à l'infini.

De même, le champ magnétique diffracté vérifie :

$$\boxed{\mathbf{H} = \mathcal{C}^+(\sigma_1^+ \mathbf{E}^{\text{tot}}, 0)} \quad \text{dans } \Omega^+. \quad (1.22)$$

Chapitre 2

Résolution par équations intégrales du problème de Maxwell

Sommaire

2.1	Zoologie des équations intégrales	45
2.1.1	Les équations en source	45
2.1.2	Les équations en champ	47
2.2	Equations intégrales pour le problème métal, utilisées dans les codes industriels	49
2.2.1	Équation intégrale en champ électrique (EFIE)	49
2.2.2	Équation intégrale en champ magnétique (MFIE)	50
2.2.3	Équation intégrale en champs combinés (CFIE)	51
2.3	Les équations de type GCSIE	53
2.3.1	Un formalisme GCSIE général pour construire une équation de frontière bien conditionnée	53
2.3.2	Opérateur Dirichlet-to-Neumann	55
2.3.3	Le formalisme GCSIE appliqué au cas de l'électromagnétisme	58
2.4	Vitesse de convergence et validation numérique des algorithmes d'équations intégrales	61
2.4.1	Conditionnement des équations intégrales	61
2.4.2	Validation numérique : la SER (Section Efficace Radar)	63
2.5	Le problème posé par les cavités	64
2.5.1	Ralentissement de la convergence pour un objet avec cavité	64
2.5.2	Comparaison de la SER de l'obstacle avec celle de l'obstacle dont la cavité a été obstruée	66
2.5.3	Conclusion : nécessité de l'utilisation d'une DDM	66
2.6	Les équations intégrales comme outil de synthèse de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann	67

Les méthodes de décomposition de domaine étudiées au cours de cette thèse sont toutes fondées sur une résolution par équations intégrales dans les sous-domaines. Aussi, avant d'aborder les méthodes de résolution par DDM, devons nous présenter en premier lieu une description et une classification des équations intégrales dédiées à l'électromagnétisme.

Nous distinguons dans le premier paragraphe deux catégories d'équations intégrales : en source ou en champ. Nous décrivons le principe général de construction d'une équation en source puis donnons les équations en source les plus simples. Nous présentons ensuite le mode de construction des équations en champ.

Dans le deuxième paragraphe, nous faisons le lien entre ces équations en champ et les équations intégrales en champ classiques pour résoudre le problème du parfait conducteur métallique. Il s'agit des équations EFIE, MFIE et CFIE, dont nous verrons les avantages et inconvénients respectifs.

Nous décrivons au troisième paragraphe le formalisme général à l'œuvre dans la construction d'équations intégrales intrinsèquement bien conditionnées, les équations de type GCSIE, qui sont des équations en source. Nous appliquons ensuite ce formalisme pour la construction de la GCSIE dédiée au problème métal, puis de la GCSIE dédiée au problème impédant. Nous décrivons finalement les approximations des opérateurs intervenant dans les GCSIE métallique et impédante. On s'intéresse notamment à l'opérateur Dirichlet-to-Neumann et aux différentes manières possibles de l'approcher.

Le quatrième paragraphe est consacré à l'illustration numérique de la convergence des algorithmes d'équations intégrales présentées. Sur un cas très simple, le cas d'une sphère maillée plus ou moins finement, à différentes fréquences, on observe les courbes de convergence, témoins du conditionnement des systèmes linéaires résolus, et les courbes de SER, témoins de la précision de ces équations intégrales.

Le cinquième paragraphe aborde le problème spécifique des cavités. On y observe que la présence de cavités détériore le conditionnement des systèmes linéaires sous-jacents aux équations intégrales, même pour la GCSIE, et que la cavité joue sur la forme de la SER (on ne peut donc pas la supprimer). Une méthode de décomposition de domaine est donc nécessaire, ce qui nous amène à notre seconde partie.

En vue d'utiliser des équations intégrales dans les sous-domaines intervenant dans la DDM décrite au chapitre suivant, nous expliquons dans un sixième paragraphe comment synthétiser un opérateur de type Dirichlet-to-Neumann à l'aide d'équations intégrales.

2.1 Zoologie des équations intégrales

On classe généralement les équations intégrales en deux grandes catégories : les équations en source (dites *indirectes*) et les équations en champ (dites *directes*).

Les équations en source sont basées sur la paramétrisation du champ recherché, grâce à un potentiel construit à l'aide de la fonction de Green, vérifiant nativement les équations de Maxwell et la condition de rayonnement de Silver-Müller dans le domaine non borné. Pour qu'un champ paramétré à l'aide d'un tel potentiel soit solution du problème aux limites, il lui suffit de vérifier la bonne condition aux limites. On obtient ainsi une équation posée sur la source en fonction de laquelle s'exprime le champ recherché : c'est l'équation intégrale. Après résolution de cette équation intégrale, on obtient le champ solution du problème à l'aide de la formule de reconstruction donnée par la paramétrisation initiale. A ce titre, le mode de construction des équations en source est générique et facile à décrire.

Les équations en champ, quant à elles, se fondent sur le théorème de représentation de Stratton-Chu, selon lequel un champ défini dans tout l'espace exceptée la frontière de l'objet diffractant, s'exprime en fonction de ses sauts de Dirichlet et de Neumann sur la frontière, en fonction des potentiels électromagnétiques. En prolongeant le champ à tout l'espace par un choix judicieux, et en prenant la trace de Dirichlet ou de Neumann du théorème de représentation, on obtient l'équation intégrale à résoudre. Il s'agit donc d'un procédé de construction spécifique à chaque équation intégrale.

Les inconnues des équations en champ ont toujours une interprétation physique, puisqu'il s'agit de traces de Dirichlet ou de Neumann du champ électromagnétique. C'est pourquoi on dit que les équations en champ sont des méthodes directes. A l'inverse, les inconnues des équations en source n'ont pas nécessairement de signification physique, d'où le nom de méthodes indirectes. C'est aussi l'un des avantages des équations en source, que de permettre une plus grande liberté sur le choix de l'inconnue.

Les équations intégrales présentées ci-dessous sont destinées à la résolution du problème métal extérieur :

$$\sigma_0^+ \mathbf{E} = \mathbf{e}_0,$$

où \mathbf{e}_0 désigne la condition aux limites de type métal (Dirichlet). Le principe étant le même pour le problème métal intérieur, nous ne détaillerons pas les équations intégrales correspondantes.

2.1.1 Les équations en source

Construction d'une équation en source

Le principe générique de construction d'une équation intégrale en source est le suivant. On considère un objet borné simplement connexe de \mathbb{R}^3 , de frontière Γ , définissant un domaine extérieur et un domaine intérieur. On souhaite trouver le champ électromagnétique \mathbf{E} solution des équations de Maxwell harmoniques, soit dans le domaine extérieur, soit dans le domaine intérieur, satisfaisant éventuellement la condition de rayonnement à l'infini (si le problème est

extérieur), et vérifiant de plus la condition aux limites

$$\gamma \mathbf{E} = \mathbf{u}_0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (2.1)$$

où γ est une trace (extérieure ou intérieure) sur Γ et \mathbf{u}_0 le second membre. On suppose que l'on dispose d'un potentiel \mathcal{V} . Nous donnerons au paragraphe suivant les choix naturels de \mathcal{V} pour le cas de l'électromagnétisme. Un potentiel est un opérateur qui fait rayonner un champ de vecteurs \mathbf{u} défini sur la surface Γ , tangents à Γ en chacun de ses points, en un champ électromagnétique défini dans tout l'espace excepté sur Γ . A l'aide du potentiel \mathcal{V} , on choisit de paramétrer le champ électromagnétique \mathbf{E} solution du problème aux limites, par une source \mathbf{u} donnée sur la frontière de l'objet, sous la forme $\mathbf{E} = \mathcal{V}\mathbf{u}$ (*formule de reconstruction*). Trouver le champ \mathbf{E} revient alors à résoudre l'équation intégrale $\gamma\mathcal{V}\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ posée sur la source \mathbf{u} , puis à reconstruire \mathbf{E} à partir de \mathbf{u} grâce à la formule de reconstruction.

La théorie des équations intégrales pour le problème de Maxwell repose sur les deux potentiels électromagnétiques introduits au Chapitre 1 : le potentiel simple couche \mathcal{T} et le potentiel double couche \mathcal{K} . Les potentiels \mathcal{T} et \mathcal{K} sont privilégiés car appliqués à une source \mathbf{u} sur Γ , ils vérifient automatiquement les équations de Maxwell et la condition de rayonnement à l'infini. Pour paramétrer le champ électromagnétique \mathbf{E} recherché, on utilise les potentiels \mathcal{T} et \mathcal{K} , et éventuellement des opérateurs intermédiaires R_1 et R_2 agissant de la surface Γ vers elle-même. La paramétrisation de \mathbf{E} par \mathbf{u} , qui est aussi la *formule de reconstruction*, s'écrit :

$$\mathbf{E} = (\mathcal{T}R_1 - \mathcal{K}R_2)\mathbf{u}, \quad (2.2)$$

de sorte que $\mathcal{V} = \mathcal{T}R_1 - \mathcal{K}R_2$, avec les notations du paragraphe précédent. Mis sous cette forme, le champ \mathbf{E} est nécessairement un champ électromagnétique, i.e. vérifie l'équation de Maxwell harmonique et la condition de rayonnement à l'infini, ceci étant dû aux propriétés particulières de \mathcal{T} et \mathcal{K} . Pour que le champ \mathbf{E} écrit sous la forme (2.2) soit solution de notre problème, il suffit donc qu'il satisfasse la condition aux limites (2.1). Ceci impose la condition suivante sur \mathbf{u} :

$$(\gamma\mathcal{T}R_1 - \gamma\mathcal{K}R_2)\mathbf{u} = \mathbf{u}_0. \quad (2.3)$$

Cette dernière équation (2.3) est l'équation intégrale $\gamma\mathcal{V}\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$. Ce terme vient de ce que les opérateurs $\gamma\mathcal{T}$ et $\gamma\mathcal{K}$ sur Γ sont des opérateurs intégraux : des opérateurs de convolution avec des fonctions faisant intervenir le noyau de Green. Si l'on trouve \mathbf{u} solution de (2.3), on obtient un champ \mathbf{E} solution du problème grâce à la formule de reconstruction (2.2).

Une remarque importante s'impose : on a toute liberté de choix pour les opérateurs de couplage R_1 et R_2 définissant l'équation intégrale (2.3), pourvu que l'on utilise *exactement* les mêmes opérateurs dans la formule de reconstruction (2.2). Par ailleurs, on rappelle que l'un des objectifs majeurs est d'obtenir une équation intégrale bien conditionnée. Pour ce faire, on utilise donc la liberté de choix sur les opérateurs R_1 et R_2 . Ceci nous sera utile au §2.3 lors de la construction d'équations de type GCSIE. Pour l'instant, nous nous contentons de donner les équations intégrales simple couche et double couche en source, pour le problème métal extérieur.

Equation simple couche en source

On choisit de paramétrer le champ \mathbf{E} par la source \mathbf{u} à l'aide du potentiel simple couche :

$$\mathbf{E} = \mathcal{T}\mathbf{u}.$$

En prenant la trace de Dirichlet extérieure σ_0^+ de cette équation, dite formule de reconstruction, il vient l'équation intégrale :

$$\boxed{\mathbf{T}\mathbf{u} = -\mathbf{n} \times \mathbf{e}_0.}$$

Nous verrons plus loin que l'opérateur sous-jacent est celui de l'EFIE, équation en champ qui peut aussi être considérée comme une équation en source.

Equation double couche en source

On choisit de paramétrer le champ \mathbf{E} par la source \mathbf{u} à l'aide du potentiel double couche :

$$\mathbf{E} = -\mathcal{K}\mathbf{u}.$$

En prenant la trace de Dirichlet extérieure σ_0^+ de cette équation, dite formule de reconstruction, il vient l'équation intégrale :

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\text{Id} - \mathbf{n} \times \mathcal{K}\right)\mathbf{u} = \mathbf{e}_0.}$$

2.1.2 Les équations en champ

Les équations en champ se fondent sur le théorème de représentation dont nous rappelons le résultat :

$$\mathbf{E} = \mathcal{T}[\sigma_1\mathbf{E}] - \mathcal{K}[\sigma_0\mathbf{E}]. \quad (2.4)$$

Pour pouvoir utiliser ce théorème, on cherche à prolonger \mathbf{E} dans le domaine intérieur Ω^- .

Prolongement par continuité de la trace de Dirichlet (et résolution du problème de Dirichlet intérieur)

On prolonge \mathbf{E} dans Ω^- par continuité de sa trace de Dirichlet. En d'autres termes, on suppose que le champ est solution du problème de Dirichlet intérieur avec condition aux limites égale à la trace de Dirichlet extérieure :

$$\sigma_0^-\mathbf{E} = \sigma_0^+\mathbf{E}.$$

On a donc $[\sigma_0\mathbf{E}] = 0$. Le Théorème (2.4) donne alors la formule de reconstruction :

$$\mathbf{E} = \mathcal{T}[\sigma_1\mathbf{E}].$$

En prenant la trace σ_0^+ de cette équation, il vient

$$\mathbf{e}_0 = \sigma_0^+\mathbf{E} = \sigma_0^+\mathcal{T}[\sigma_1\mathbf{E}] = \mathbf{n} \times \mathbf{T}[\sigma_1\mathbf{E}],$$

d'où l'équation intégrale

$$\boxed{\mathbf{T}[\sigma_1\mathbf{E}] = -\mathbf{n} \times \mathbf{e}_0.}$$

Prolongement par continuité de la trace de Neumann (et résolution du problème de Neumann intérieur)

On prolonge \mathbf{E} dans Ω^- par continuité de sa trace de Neumann. En d'autres termes, on suppose que le champ est solution du problème de Neumann intérieur avec condition aux limites égale à la trace de Neumann extérieure :

$$\sigma_1^- \mathbf{E} = \sigma_1^+ \mathbf{E}.$$

On a donc $[\sigma_1 \mathbf{E}] = 0$. Le Théorème (2.4) donne alors la formule de reconstruction :

$$\mathbf{E} = -\mathcal{K}[\sigma_0 \mathbf{E}].$$

En prenant la trace σ_0^+ de cette équation, il vient

$$\mathbf{e}_0 = \sigma_0^+ \mathbf{E} = -\sigma_0^+ \mathcal{K}[\sigma_0 \mathbf{E}] = -\left(\mathbf{n} \times \mathbf{K} - \frac{1}{2} \text{Id}\right) [\sigma_0 \mathbf{E}],$$

d'où l'équation intégrale

$$\boxed{\left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right) [\sigma_0 \mathbf{E}] = \mathbf{e}_0.}$$

Prolongement par 0 et prise de la trace de Dirichlet

On prolonge \mathbf{E} par 0 dans Ω^- . On a donc $\sigma_0^- \mathbf{E} = 0$ et $\sigma_1^- \mathbf{E} = 0$. Le Théorème (2.4) donne alors :

$$\mathbf{E} = \mathcal{T}\sigma_1^+ \mathbf{E} - \mathcal{K}\sigma_0^+ \mathbf{E} = \mathcal{T}\sigma_1^+ \mathbf{E} - \mathcal{K}\mathbf{e}_0.$$

En prenant la trace de Dirichlet σ_0^+ de cette équation, il vient la formule de reconstruction

$$\mathbf{e}_0 = \sigma_0^+ \mathbf{E} = (\sigma_0^+ \mathcal{T})\sigma_1^+ \mathbf{E} - (\sigma_0^+ \mathcal{K})\mathbf{e}_0 = (\mathbf{n} \times \mathbf{T})\sigma_1^+ \mathbf{E} - \left(\mathbf{n} \times \mathbf{K} - \frac{1}{2} \text{Id}\right) \mathbf{e}_0,$$

d'où l'équation intégrale

$$\boxed{\mathbf{T}\sigma_1^+ \mathbf{E} = \left(-\frac{1}{2} \mathbf{n} \times +\mathbf{K}\right) \mathbf{e}_0.}$$

Prolongement par 0 et prise de la trace de Neumann

On prolonge encore \mathbf{E} par 0 dans Ω^- . Le Théorème (2.4) donne de même :

$$\mathbf{E} = \mathcal{T}\sigma_1^+ \mathbf{E} - \mathcal{K}\sigma_0^+ \mathbf{E} = \mathcal{T}\sigma_1^+ \mathbf{E} - \mathcal{K}\mathbf{e}_0.$$

En prenant cette fois la trace de Neumann σ_1^+ de cette équation, il vient la formule de reconstruction

$$\sigma_1^+ \mathbf{E} = (\sigma_1^+ \mathcal{T})\sigma_1^+ \mathbf{E} - (\sigma_1^+ \mathcal{K})\mathbf{e}_0 = -\left(\mathbf{n} \times \mathbf{K} - \frac{1}{2} \text{Id}\right) \sigma_1^+ \mathbf{E} - (\mathbf{n} \times \mathbf{T})\mathbf{e}_0,$$

d'où l'équation intégrale

$$\boxed{\left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right) \sigma_1^+ \mathbf{E} = (-\mathbf{n} \times \mathbf{T})\mathbf{e}_0.}$$

2.2 Equations intégrales pour le problème métal, utilisées dans les codes industriels

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la résolution du problème de Maxwell extérieur avec condition métal, par des équations en champ, lorsque le second membre est la trace d'une onde incidente. Nous donnons ci-dessous la construction des équations intégrales classiques : équation en champ électrique (EFIE), équation en champ magnétique (MFIE) ou équation en champs combinés (CFIE). Nous rappelons brièvement les preuves d'existence et d'unicité pour ces équations. Ces preuves sont fondées sur l'existence d'une solution au problème de Maxwell extérieur donnée au Théorème 21. Le lien entre ces équations classiques et les équations en champ présentées ci-dessus est que le second membre a une forme particulière (trace d'une onde incidente), et que par conséquent, on dispose d'une nouvelle paramétrisation : le champ diffracté s'exprime en fonction d'une trace du champ total (somme du champ incident et du champ diffracté). On utilise les résultats de la section §1.5.

2.2.1 Équation intégrale en champ électrique (EFIE)

- **Construction en champ de l'EFIE.**

On suppose que l'on veut résoudre $\sigma_0^+ \mathbf{E} = \mathbf{e}_0$, où le second membre est la trace d'une onde incidente \mathbf{E}^{inc} : $\mathbf{e}_0 = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}$. Dans le §1.5, nous avons obtenu l'équation (1.21) :

$$\mathbf{E} = \mathcal{C}^+(0, \sigma_1^+ \mathbf{E}^{\text{tot}}) = \mathcal{T} \sigma_1^+ \mathbf{E}^{\text{tot}} \quad \text{dans } \Omega^+.$$

Posons $\mathbf{u} = \sigma_1^+ \mathbf{E}^{\text{tot}}$, alors \mathbf{E} vérifie $\mathbf{E} = \mathcal{T} \mathbf{u}$, d'où en appliquant la trace : $\sigma_0^+ \mathbf{E} = (\mathbf{n} \times \mathcal{T}) \mathbf{u}$ et

$$\mathcal{T} \mathbf{u} = -\mathbf{n} \times (\sigma_0^+ \mathbf{E}) = \mathbf{n} \times (\sigma_0^+ \mathbf{E}^{\text{inc}}) = -\mathbf{E}_{\text{tan}}^{\text{inc}},$$

où l'on a noté $\mathbf{E}_{\text{tan}}^{\text{inc}} = \gamma_T \mathbf{E}^{\text{inc}}$ la trace tangentielle du champ incident. Le champ électrique $\mathbf{E} = \mathcal{C}^+(0, \mathbf{u})$ est solution du problème de Maxwell extérieur si le courant $\mathbf{u} = \sigma_1^+ \mathbf{E}^{\text{tot}}$ est solution de l'équation EFIE (Electric Field Integral Equation) :

$$\boxed{\text{EFIE : } \mathcal{T} \mathbf{u} = -\mathbf{E}_{\text{tan}}^{\text{inc}}.} \quad (2.5)$$

La variable \mathbf{u} représente une grandeur physique : c'est la *trace de Neumann du champ total*.

- **Construction en source de l'EFIE.**

On remarque qu'il s'agit également de l'équation simple couche en source, en prenant $\mathbf{e}_0 = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}$. On peut donc aussi considérer l'EFIE comme une équation en source.

Etude de l'équation intégrale EFIE en champ

Proposition 31.

L'opérateur \mathcal{T} est injectif si et seulement si k^2 n'est pas valeur propre du problème de Maxwell intérieur homogène (1.16).

Démonstration Soit \mathbf{u} tel que $T\mathbf{u} = 0$. Posons $\mathbf{E} = \mathcal{T}\mathbf{u}$ dans Ω^+ et dans Ω^- . Nous avons $\sigma_0^+\mathbf{E} = \sigma_0^-\mathbf{E} = T\mathbf{u} = 0$. Donc \mathbf{E} est solution des problèmes de Maxwell homogènes extérieur et intérieur. Par unicité de la solution au problème de Maxwell extérieur, \mathbf{E} est nul dans Ω^+ . De même, si le problème de Maxwell intérieur homogène est bien posé, alors \mathbf{E} est nul dans Ω^- . Ainsi $\mathcal{T}\mathbf{u}$ est nul dans Ω^+ et dans Ω^- . Alors la formule de saut pour le simple couche nous donne

$$\mathbf{u} = \sigma_1^+\mathcal{T}\mathbf{u} - \sigma_1^-\mathcal{T}\mathbf{u} = 0,$$

d'où l'injectivité de T . □

Proposition 32.

L'équation EFIE en champ (2.5) est bien posée si et seulement si k^2 n'est pas valeur propre du problème de Maxwell intérieur homogène (1.16).

Démonstration D'après la Proposition 31, il reste simplement à démontrer l'existence.

Soit \mathbf{E} solution du problème de Maxwell extérieur avec condition aux limites $\sigma_0^+\mathbf{E} = -\sigma_0^+\mathbf{E}^{\text{inc}}$. Posons $\mathbf{u} = \sigma_1^+\mathbf{E}^{\text{tot}} = \sigma_1^+\mathbf{E} + \sigma_1^+\mathbf{E}^{\text{inc}}$. Par construction de l'EFIE, on sait alors que $\mathbf{E} = \mathcal{C}^+(0, \mathbf{u})$ dans Ω^+ , et donc que $T\mathbf{u} = -\mathbf{E}_{\text{tan}}^{\text{inc}}$. □

2.2.2 Équation intégrale en champ magnétique (MFIE)

- **Construction en champ de la MFIE.**

On suppose à nouveau que l'on veut résoudre $\sigma_0^+\mathbf{E} = \mathbf{e}_0$, où $\mathbf{e}_0 = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}$. Nous avons obtenu l'équation (1.22) :

$$\mathbf{H} = \mathcal{C}^+(\sigma_1^+\mathbf{E}^{\text{tot}}, 0) = -\mathcal{K}(\sigma_1^+\mathbf{E}^{\text{tot}}) \quad \text{dans } \Omega^+.$$

Posons $\mathbf{u} = \sigma_1^+\mathbf{E}^{\text{tot}}$, alors \mathbf{H} vérifie $\mathbf{H} = -\mathcal{K}\mathbf{u}$, d'où en appliquant la trace : $\sigma_0^+\mathbf{H} = \left(\frac{1}{2}\text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right)\mathbf{u}$. En remarquant que $\sigma_0^+\mathbf{H} = \sigma_1^+\mathbf{E}^{\text{tot}} - \sigma_0^+\mathbf{H}^{\text{inc}} = \mathbf{u} - \sigma_0^+\mathbf{H}^{\text{inc}}$, on obtient

$$\mathbf{u} - \sigma_0^+\mathbf{H}^{\text{inc}} = \left(\frac{1}{2}\text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right)\mathbf{u}.$$

Le champ électrique $\mathbf{E} = \mathcal{C}^+(0, \mathbf{u})$ est solution du problème de Maxwell extérieur si le courant $\mathbf{u} = \sigma_1^+\mathbf{E}^{\text{tot}}$ est solution de l'équation intégrale MFIE (Magnetic Field Integral Equation)

$$\boxed{\text{MFIE : } \left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right)\mathbf{u} = \sigma_0^+\mathbf{H}^{\text{inc}}.} \quad (2.6)$$

La variable \mathbf{u} représente à nouveau une grandeur physique : c'est la *trace de Neumann du champ total*.

- **Impossibilité d'une construction en source de la MFIE.**

On ne peut pas construire la MFIE comme équation en source. En effet, supposons que l'on paramètre le champ \mathbf{H} par une source \mathbf{u} en utilisant le potentiel double couche :

$$\mathbf{H} = -\mathcal{K}\mathbf{u},$$

alors la trace de Dirichlet $\sigma_0^+(-\mathcal{K}) = \left(\frac{1}{2}\text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right)$ est différente de l'opérateur $\left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right)$ intervenant dans la MFIE.

Etude de l'équation intégrale MFIE en champ

Proposition 33.

L'opérateur $\frac{1}{2}\text{Id} + \mathbf{n} \times \mathbf{K}$ est injectif si et seulement si k^2 n'est pas valeur propre du problème de Maxwell intérieur homogène (1.16).

Démonstration Soit \mathbf{u} tel que $\left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right)\mathbf{u} = 0$. Posons $\mathbf{E} = \mathcal{K}\mathbf{u}$ dans Ω^- . Nous avons $\sigma_0^- \mathbf{E} = \left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right)\mathbf{u} = 0$. Donc \mathbf{E} est solution du problème de Maxwell homogène intérieur. Si le problème de Maxwell intérieur homogène est bien posé, alors $\mathbf{E} = \mathcal{K}\mathbf{u}$ est nul dans Ω^- . En particulier, $\sigma_1^- \mathcal{K}\mathbf{u} = 0$. Par continuité de la trace de Neumann du double couche, on obtient

$$0 = \sigma_1^- \mathcal{K}\mathbf{u} = \sigma_1^+ \mathcal{K}\mathbf{u} = (\mathbf{n} \times \mathbf{T})\mathbf{u},$$

d'où $\mathbf{T}\mathbf{u} = 0$. La Proposition 31 permet alors de conclure que $\mathbf{u} = 0$. □

Proposition 34.

L'équation MFIE (2.6) est bien posée si et seulement si k^2 n'est pas valeur propre du problème de Maxwell intérieur homogène (1.16).

Démonstration D'après la Proposition 33, il reste simplement à démontrer l'existence.

Soit \mathbf{E} solution du problème de Maxwell extérieur avec condition aux limites $\sigma_0^+ \mathbf{E} = -\sigma_0^+ \mathbf{E}^{\text{inc}}$. Posons $\mathbf{u} = \sigma_1^+ \mathbf{E}^{\text{tot}} = \sigma_1^+ \mathbf{E} + \sigma_1^+ \mathbf{E}^{\text{inc}}$. Par construction de la MFIE, on sait alors que $\mathbf{H} = \mathcal{C}^+(\mathbf{u}, 0)$ dans Ω^+ , et donc que $\left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right)\mathbf{u} = \sigma_0^+ \mathbf{H}^{\text{inc}}$. □

2.2.3 Équation intégrale en champs combinés (CFIE)

Les équations EFIE et MFIE ne sont pas bien posées à toute fréquence. Pour pallier à ce défaut, on combine ces deux équations à l'aide d'un coefficient $\alpha \in]0, 1[$, en une équation appelée CFIE (Combined Field Integral Equation) :

$$\text{CFIE} = (1 - \alpha)\text{EFIE} + \alpha\text{MFIE}.$$

On obtient

$$\text{CFIE : } (1 - \alpha)\mathcal{T}\mathbf{u} + \alpha \left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{n} \times \mathbf{K} \right) \mathbf{u} = -(1 - \alpha)\mathbf{E}_{\text{tan}}^{\text{inc}} + \alpha\sigma_0^+\mathbf{H}^{\text{inc}}.$$

Théorème 35.

Soit $\alpha \in]0, 1[$. Pour tout nombre d'onde k réel, l'équation CFIE est bien posée.

Démonstration

- **Unicité :** Soit \mathbf{u} tel que

$$(1 - \alpha)\mathcal{T}\mathbf{u} + \alpha \left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{n} \times \mathbf{K} \right) \mathbf{u} = 0.$$

Posons $\mathbf{E} = \mathcal{T}\mathbf{u}$ dans Ω^+ et Ω^- . Alors \mathbf{E} vérifie

$$\sigma_1^-\mathbf{E} = - \left(\mathbf{n} \times \mathbf{K} + \frac{1}{2} \text{Id} \right) \mathbf{u} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \mathcal{T}\mathbf{u} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} (-\mathbf{n} \times \sigma_0^-\mathbf{E}). \quad (2.7)$$

En utilisant le premier théorème vectoriel de Green (Théorème 18) dans le domaine $\overline{\Omega^-}$, nous obtenons :

$$\text{Im} \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0,$$

soit encore

$$0 = \Re \left(-k \int_{\Gamma} \overline{\sigma_0^-\mathbf{E}} \cdot (\mathbf{n} \times \sigma_1^-\mathbf{E}) \right) = -k \frac{1 - \alpha}{\alpha} \Re \left(\int_{\Gamma} |\sigma_0^-\mathbf{E}|^2 \right).$$

Par suite, $\sigma_0^-\mathbf{E} = 0$, et comme le potentiel simple couche a un saut de Dirichlet nul et que $\mathbf{E} = \mathcal{T}\mathbf{u}$, on obtient $\sigma_0^+\mathbf{E} = \sigma_0^-\mathbf{E} = 0$. Par unicité de la solution au problème de Maxwell extérieur, $\mathbf{E} = 0$ dans Ω^+ . En particulier, $\sigma_1^+\mathbf{E} = 0$. De plus, la formule (2.7) combinée à $\sigma_0^-\mathbf{E} = 0$ nous donne $\sigma_1^-\mathbf{E} = 0$. Il ne reste plus qu'à appliquer la formule de saut pour le potentiel simple couche :

$$\mathbf{u} = \sigma_1^+\mathcal{T}\mathbf{u} - \sigma_1^-\mathcal{T}\mathbf{u} = \sigma_1^+\mathbf{E} - \sigma_1^-\mathbf{E} = 0.$$

D'où le résultat.

- **Existence :** Les équations EFIE et MFIE admettent à toute fréquence une solution commune, à savoir la trace $\sigma_1^+\mathbf{E}^{\text{tot}}$. Comme l'équation CFIE est une combinaison linéaire des équations EFIE et MFIE, $\sigma_1^+\mathbf{E}^{\text{tot}}$ est également solution de la CFIE. Notons qu'à certaines fréquences, soit pour l'EFIE, soit pour la MFIE, il existe des solutions autres que $\sigma_1^+\mathbf{E}^{\text{tot}}$, mais que ce phénomène ne se produit jamais en même temps pour ces deux équations, compte tenu de l'unicité démontrée pour la CFIE.

□

2.3 Les équations de type GCSIE

Toutes les équations intégrales de type GCSIE (pour *Generalized Combined Field Integral Equation*, soit équation intégrale en sources combinées généralisée) sont fondées sur une approche commune. Celle-ci permet de construire des équations intégrales intrinsèquement bien conditionnées, pour résoudre un problème avec une condition aux limites donnée.

Initialement, ce formalisme est dégagé par Levadoux [42], [38], [41] dans le domaine de l'acoustique. Il réalise une mise en œuvre numérique de l'équation GCSIE pour le problème de Helmholtz bidimensionnel avec condition de Dirichlet, et pose les bases théoriques de la construction de l'équation GCSIE pour le problème de Helmholtz tridimensionnel, également avec condition de Dirichlet. Levadoux propose en outre une approche générale concernant les stratégies de préconditionnement optimales pour les problèmes maxwelliens en dimension 3 [40]. La transposition de la GCSIE de l'acoustique à l'électromagnétisme est ensuite réalisée parallèlement par Borel [13], [14], [2] et Darbas [6], [25], [26] au cours de leur thèse. Pour résoudre le problème de Maxwell métallique (analogue au problème acoustique avec condition de Dirichlet), Borel et Darbas utilisent le même formalisme GCSIE pour la construction de l'équation ; en revanche, elles proposent des approximations numériques différentes pour l'opérateur Dirichlet-to-Neumann, qui joue un rôle fondamental dans la GCSIE métallique. Une autre équation GCSIE est introduite par Molko-Daugas [45] au cours de sa thèse pour répondre au problème spécifique posé par les singularités, pour le problème de Helmholtz en dimension 2 avec condition de Dirichlet. Molko-Daugas utilise une approximation numérique de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann proche de celle de Borel, mais opère une modification cruciale pour prendre en compte dans l'opérateur la présence d'une pointe bidimensionnelle.

Alouges et Levadoux étendent par ailleurs le formalisme GCSIE avec condition métal, à des conditions aux limites imposées par des traces de nature quelconque [4]. Ils montrent également que tout problème aux limites dont la solution peut être paramétrée à l'aide d'un potentiel intégral rentre dans le cadre du formalisme GCSIE, et peut donc donner lieu à la construction d'une équation intégrale bien conditionnée permettant de résoudre ce problème. En particulier, le formalisme GCSIE est ensuite appliqué au cas du problème de Maxwell impédant par Levadoux, Millot et Pernet [48], [43]. Pernet [48] propose une approximation numérique pertinente pour les deux opérateurs permettant de régulariser l'équation GCSIE impédante.

2.3.1 Un formalisme GCSIE général pour construire une équation de frontière bien conditionnée

Levadoux et Alouges [4] ont développé un formalisme permettant de construire des équations intégrales nativement bien conditionnées, pour un problème aux limites quelconque.

On s'intéresse à un problème posé à l'extérieur d'un objet de frontière Γ , avec une condition aux limites posée sur Γ . Le principe serait le même s'il s'agissait d'un problème intérieur. Le problème aux limites peut s'exprimer à l'aide de trois ingrédients, l'espace W des champs admissibles dans lequel on recherche la solution, la trace γ imposée sur la frontière Γ , et le

second membre \mathbf{u}_0 . Il s'exprime sous la forme

$$\text{Trouver } \mathbf{E} \in W, \text{ tel que } \gamma \mathbf{E} = \mathbf{u}_0.$$

On suppose que l'on dispose d'une paramétrisation de l'espace W , à l'aide d'un potentiel \mathcal{V} explicite associé à une trace γ_v (FIG. 2.1) :

$$\forall \mathbf{E} \in W, \quad \mathbf{E} = \mathcal{V}(\gamma_v \mathbf{E}).$$

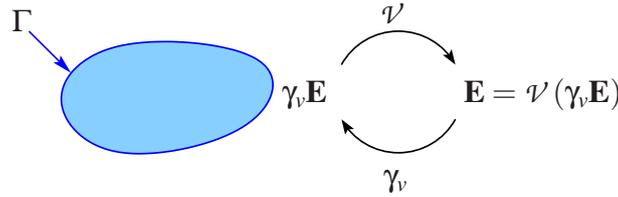


FIGURE 2.1 – Paramétrisation schématique de l'espace W .

En d'autres termes, on a les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}\gamma_v &= \text{Id}_W, \\ \gamma_v \mathcal{V} &= \text{Id}_{\gamma_v(W)}. \end{aligned}$$

Dans le cas de l'électromagnétisme, le potentiel \mathcal{V} est explicite et intégral.

Le principe général de construction de l'équation de frontière bien conditionnée est alors le suivant :

- (a) Tout d'abord, on recherche un opérateur \mathcal{R} vérifiant $\gamma \mathcal{V} \mathcal{R} = \text{Id}$. Remarquons qu'il suffit que \mathcal{R} vérifie :

$$\mathcal{R} : \gamma \mathbf{E} \mapsto \gamma_v \mathbf{E}. \quad (2.8)$$

En effet, on a alors le schéma suivant,

$$\gamma \mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{R}} \gamma_v \mathbf{E} \xrightarrow{\mathcal{V}} \mathbf{E} \xrightarrow{\gamma} \gamma \mathbf{E},$$

qui montre pourquoi l'opérateur $\gamma \mathcal{V} \mathcal{R}$ est l'identité. Une autre manière de voir les choses est de considérer le potentiel \mathcal{R} qui "résout" l'équation, c'est-à-dire tel que $\mathbf{E} = \mathcal{R}(\gamma \mathbf{E}) = \mathcal{R} \mathbf{u}_0$, opérateur dont bien sûr nous ne disposons pas numériquement, sinon le problème serait trivial à résoudre. La trace γ est alors associée au potentiel \mathcal{R} , de la même manière que la trace γ_v est associée au potentiel \mathcal{V} , dans le sens où l'on a les deux paramétrisations suivantes possibles de l'espace W :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{E} \in W, \quad \mathbf{E} &= \mathcal{V}(\gamma_v \mathbf{E}), \\ \forall \mathbf{E} \in W, \quad \mathbf{E} &= \mathcal{R}(\gamma \mathbf{E}). \end{aligned}$$

En posant

$$\mathcal{R} := \gamma_v \mathcal{R}, \quad (2.9)$$

on obtient par simplifications successives

$$\gamma \mathcal{V} \mathcal{R} = \gamma(\mathcal{V} \gamma_v) \mathcal{R} = \gamma \text{Id}_W \mathcal{R} = \gamma \mathcal{R} = \text{Id}_{\gamma(W)}.$$

Les définitions (2.8) et (2.9) de l'opérateur \mathcal{R} sont bien sûr équivalentes.

- (b) En général, l'opérateur \mathcal{R} n'est pas connu explicitement, sinon, encore une fois, le problème serait simplement résolu par

$$\mathbf{E} = \mathcal{V} \mathcal{R} \mathbf{u}_0.$$

On choisit donc une approximation $\tilde{\mathcal{R}}$ de \mathcal{R} , et on paramétrise \mathbf{E} via le potentiel $\mathcal{V} \tilde{\mathcal{R}}$, à l'aide d'une source \mathbf{u} définie sur la surface de l'objet (FIG. 2.2) :

$$\mathbf{E} = \mathcal{V} \tilde{\mathcal{R}} \mathbf{u}. \quad (2.10)$$

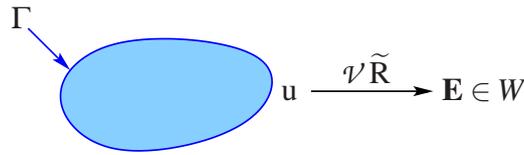


FIGURE 2.2 – Paramétrisation du champ solution \mathbf{E} par une source \mathbf{u} à l'aide du potentiel \mathcal{V} .

- (c) En prenant la trace γ de l'équation (2.10), on obtient l'équation intégrale suivante :

$$\boxed{\gamma \mathcal{V} \tilde{\mathcal{R}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_0.} \quad (2.11)$$

On remarque enfin que si $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}$, alors $\gamma \mathcal{V} \tilde{\mathcal{R}} = \text{Id}$. Si $\tilde{\mathcal{R}}$ est suffisamment proche de \mathcal{R} en un certain sens, l'équation correspondante sera bien conditionnée. L'objectif est de construire un opérateur $\tilde{\mathcal{R}}$, de coût numérique réduit, et tel que le système linéaire sous-jacent à l'équation (2.11) soit une perturbation compacte de l'identité, ou une perturbation compacte d'un opérateur d'ordre 0.

2.3.2 Opérateur Dirichlet-to-Neumann

Nous introduisons ici l'opérateur Dirichlet-to-Neumann. Ceci nous permettra ensuite de présenter la construction de la GCSIE métallique, basée sur la connaissance et l'approximation de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann.

Définition 36 (Opérateur Dirichlet-to-Neumann).

- On appelle Dirichlet-to-Neumann extérieur, et on note Y^+ , l'opérateur qui à une donnée de Dirichlet \mathbf{e}_0 sur Γ , associe la trace de Neumann du champ \mathbf{E} solution du problème de Maxwell extérieur avec condition de Dirichlet \mathbf{e}_0 : si \mathbf{E} est tel que

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \sigma_0^+ \mathbf{E} = \mathbf{e}_0 & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} \left(\mathbf{x} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + ik|\mathbf{x}| \mathbf{E} \right) = 0, \end{cases}$$

alors

$$Y^+ \mathbf{e}_0 = \sigma_1^+ \mathbf{E}.$$

- On appelle Dirichlet-to-Neumann intérieur, et on note Y^- , l'opérateur qui à une donnée de Dirichlet \mathbf{e}_0 sur Γ , associe la trace de Neumann du champ \mathbf{E} solution du problème de Maxwell intérieur avec condition de Dirichlet \mathbf{e}_0 : si \mathbf{E} est tel que

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \sigma_0^- \mathbf{E} = \mathbf{e}_0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

alors

$$Y^- \mathbf{e}_0 = \sigma_1^- \mathbf{E}.$$

Lemme 37.

Le Théorème de représentation conduit à

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{T})Y^+ - \mathbf{n} \times \mathbf{K} + \frac{1}{2} \text{Id} = \text{Id}.$$

De même, on a

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{T})Y^- - \mathbf{n} \times \mathbf{K} - \frac{1}{2} \text{Id} = \text{Id}.$$

Démonstration Soit \mathbf{E} dans W^+ . D'après le théorème de représentation, on a dans Ω^+ :

$$\mathbf{E} = \mathcal{T}(\sigma_1^+ \mathbf{E}) - \mathcal{K}(\sigma_0^+ \mathbf{E}).$$

En utilisant $\sigma_1^+ \mathbf{E} = Y^+ \sigma_0^+ \mathbf{E}$ puis en prenant la trace σ_0^+ de l'équation ci-dessus, nous obtenons :

$$\sigma_0^+ \mathbf{E} = (\sigma_0^+ \mathcal{T})Y^+ \sigma_0^+ \mathbf{E} - (\sigma_0^+ \mathcal{K})\sigma_0^+ \mathbf{E} = \left((\mathbf{n} \times \mathbf{T})Y^+ - \mathbf{n} \times \mathbf{K} + \frac{1}{2} \text{Id} \right) \sigma_0^+ \mathbf{E},$$

d'où le résultat.

L'équation avec le Dirichlet-to-Neumann intérieur se démontre de la même manière. \square

Remarque. C'est ce lemme qui constitue la base de la construction de la GCSIE (nous verrons plus loin qu'elle repose sur l'opérateur $(\mathbf{n} \times T) \tilde{Y}^+ - \mathbf{n} \times K + \frac{1}{2} \text{Id}$, où \tilde{Y}^+ désigne une approximation du Dirichlet-to-Neumann). Il justifie heuristiquement que la GCSIE soit intrinsèquement bien conditionnée.

Lemme 38 (Dirichlet-to-Neumann du plan infini).

Sur un plan infini, l'opérateur Dirichlet-to-Neumann s'exprime en fonction de l'opérateur simple couche :

$$Y^+ = -2(\mathbf{n} \times T).$$

La preuve est basée sur le Lemme suivant :

Lemme 39.

Sur un plan infini dans \mathbb{R}^3 , l'opérateur K est nul.

Démonstration (du Lemme 39). On note Γ le plan d'intérêt. Le potentiel \mathcal{K} s'exprime comme

$$\mathcal{K}\mathbf{u}(x) = \nabla_x \times \left(\int_{\Gamma} g_k(x-y) \mathbf{u}(y) dy \right) = \int_{\Gamma} (\nabla_x g_k(x-y)) \times \mathbf{u}(y) dy.$$

Si $x \in \Gamma$, alors le vecteur $\nabla_x g_k(x-y)$ est tangent à Γ , de même que le vecteur $\mathbf{u}(y)$. Leur produit vectoriel est donc normal à Γ , ce qui montre que la trace tangentielle de \mathcal{K} (l'opérateur K) est de noyau nul pour $x \neq y$. Comme il s'agit d'un opérateur d'ordre -1 , il est nul. \square

Démonstration (du Lemme 38). Notons Γ le plan infini. Soit \mathbf{u}_0 une donnée sur Γ .

Posons $\mathbf{E} = -2\mathcal{K}\mathbf{u}_0$. Alors on remarque que

$$\sigma_0^+ \mathbf{E} = -2\sigma_0^+ \mathcal{K}\mathbf{u}_0 = -2 \left(\mathbf{n} \times K - \frac{1}{2} \text{Id} \right) \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0,$$

car K est nul sur Γ .

On a ainsi $\sigma_0^+ \mathbf{E} = \mathbf{u}_0$, on en déduit

$$Y^+ \mathbf{u}_0 = \sigma_1^+ \mathbf{E} = \sigma_1^+ (-2\mathcal{K}\mathbf{u}_0) = -2(\sigma_1^+ \mathcal{K})\mathbf{u}_0 = -2(\mathbf{n} \times T)\mathbf{u}_0.$$

D'où $Y^+ = -2(\mathbf{n} \times T)$. \square

Puisque le problème de Maxwell intérieur n'est pas bien posé à certaines fréquences, on ne peut pas toujours définir le Dirichlet-to-Neumann intérieur. Cependant lorsque c'est le cas, on a le résultat suivant.

Proposition 40.

L'opérateur Y^- est bien défini si et seulement si $-k^2$ n'est pas une valeur propre du problème de Dirichlet intérieur pour le laplacien, et dans ce cas l'opérateur simple couche $\mathbf{n} \times \mathbf{T}$ est un inverse de $(Y^+ - Y^-)$:

$$(Y^+ - Y^-)(\mathbf{n} \times \mathbf{T}) = \text{Id}. \quad (2.12)$$

Démonstration Dans ce cas, soit $\mathbf{u} \in \mathcal{D}'(\Gamma)$. On pose $\mathbf{E} = \mathcal{T}\mathbf{u}$ dans Ω^+ et dans Ω^- . Alors

$$\sigma_0^+ \mathbf{E} = \sigma_0^- \mathbf{E} = (\mathbf{n} \times \mathbf{T}) \mathbf{u},$$

d'où l'on obtient

$$\sigma_1^+ \mathbf{E} - \sigma_1^- \mathbf{E} = (Y^+ - Y^-)(\mathbf{n} \times \mathbf{T})\mathbf{u} = [\sigma_1 \mathcal{T}]\mathbf{u} = \mathbf{u},$$

puisque le saut de Neumann du simple couche vaut l'identité. \square

L'opérateur \tilde{Y}^+ qui a vocation à approcher le Dirichlet-to-Neumann Y^+ dans l'équation intégrale GCSIE désignera soit une approximation par localisation avec l'aide de fonctions de troncatures, comme dans la thèse de S. Borel [13], soit une approximation microlocale effectuée par M. Darbas [26]. On se référera à l'Annexe A, et plus précisément au §A.1 pour le détail de ces approximations.

2.3.3 Le formalisme GCSIE appliqué au cas de l'électromagnétisme

On rappelle que le théorème de représentation de Stratton-Chu (5) nous donne, pour \mathbf{E} satisfaisant les équations de Maxwell dans Ω^+ et dans Ω^- , ainsi que la condition de Silver-Müller à l'infini :

$$\mathbf{E} = \mathcal{T}[\sigma_1 \mathbf{E}] - \mathcal{K}[\sigma_0 \mathbf{E}].$$

En choisissant de prolonger \mathbf{E} par 0 dans Ω^- , on obtient alors

$$\forall \mathbf{E} \in W, \quad \mathbf{E} = \mathcal{T}(\sigma_1^+ \mathbf{E}) - \mathcal{K}(\sigma_0^+ \mathbf{E}).$$

Ce théorème nous permet d'écrire une paramétrisation de W via un potentiel \mathcal{V} , associé à une trace $\gamma_{\mathcal{V}}$:

$$\forall \mathbf{E} \in W, \quad \mathbf{E} = \mathcal{V}(\gamma_v \mathbf{E}),$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \text{ est le potentiel de Calderón : } & \mathcal{V}(p_1, p_2) = \mathcal{T}p_2 - \mathcal{K}p_1, \\ \gamma_v \text{ est le couple de données de Cauchy : } & \gamma_v \mathbf{E} = (\sigma_0^+ \mathbf{E}, \sigma_1^+ \mathbf{E}). \end{aligned}$$

On se donne une trace γ et on applique le schéma de construction de la section précédente.

- (a) On choisit un couple d'opérateurs $\mathbf{R} = (R_{\mathbf{E}}^\gamma, R_{\mathbf{H}}^\gamma)$ vérifiant $\mathbf{R} : \gamma \mathbf{E} \mapsto \gamma_v \mathbf{E}$, soit encore

$$\boxed{\begin{aligned} R_{\mathbf{E}}^\gamma : \gamma \mathbf{E} & \mapsto \sigma_0^+ \mathbf{E}, \\ R_{\mathbf{H}}^\gamma : \gamma \mathbf{E} & \mapsto \sigma_1^+ \mathbf{E}. \end{aligned}}$$

- (b) On choisit une approximation $\widetilde{R}_{\mathbf{E}}^{\gamma}$ de $R_{\mathbf{E}}^{\gamma}$ et une approximation $\widetilde{R}_{\mathbf{H}}^{\gamma}$ de $R_{\mathbf{H}}^{\gamma}$. On paramètre alors \mathbf{E} par une source $\mathbf{u} : \mathbf{E} = \mathcal{V}\widetilde{R}\mathbf{u}$. Plus précisément, on a

$$\mathbf{E} = \left(\mathcal{T}\widetilde{R}_{\mathbf{H}}^{\gamma} - \mathcal{K}\widetilde{R}_{\mathbf{E}}^{\gamma} \right) \mathbf{u}.$$

- (c) En prenant la trace de cette paramétrisation, on obtient l'équation intégrale GCSIE :

$$\boxed{\left((\gamma\mathcal{T})\widetilde{R}_{\mathbf{H}}^{\gamma} - (\gamma\mathcal{K})\widetilde{R}_{\mathbf{E}}^{\gamma} \right) \mathbf{u} = \mathbf{u}_0.}$$

Une fois l'équation intégrale construite, toute la difficulté repose sur le choix et la construction de l'approximation des opérateurs $R_{\mathbf{E}}^{\gamma}$ et $R_{\mathbf{H}}^{\gamma}$.

Première application du formalisme : la GCSIE métallique.

Dans ce cas, la trace imposée γ est la trace métallique σ_0^+ .

- On prend la trace métallique σ_0^+ des potentiels électromagnétiques :

$$\gamma\mathcal{T} = \sigma_0^+\mathcal{T} = \mathbf{n} \times \mathbf{T}, \quad \gamma\mathcal{K} = \sigma_0^+\mathcal{K} = \frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K}.$$

- On choisit des opérateurs $R_{\mathbf{E}}^{\gamma}$ et $R_{\mathbf{H}}^{\gamma}$, sachant que $\gamma\mathbf{E} = \sigma_0^+\mathbf{E}$:

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{H}}^{\gamma} : \sigma_0^+\mathbf{E} &\mapsto \sigma_1^+\mathbf{E} \Rightarrow R_{\mathbf{H}}^{\gamma} = Y^+, \\ R_{\mathbf{E}}^{\gamma} : \sigma_0^+\mathbf{E} &\mapsto \sigma_0^+\mathbf{E} \Rightarrow R_{\mathbf{E}}^{\gamma} = \text{Id}. \end{aligned}$$

L'équation à résoudre est donc :

$$\boxed{\text{GCSIE métallique : } \left[(\mathbf{n} \times \mathbf{T})\widetilde{Y}^+ - \left(\mathbf{n} \times \mathbf{K} - \frac{1}{2} \text{Id} \right) \right] \mathbf{u} = \mathbf{u}_0,} \quad (2.13)$$

et la paramétrisation choisie permettant de reconstruire le champ \mathbf{E} après résolution de l'équation intégrale (2.13) est

$$\mathbf{E} = \left(\mathcal{T}\widetilde{Y}^+ - \mathcal{K} \right) \mathbf{u}.$$

Nous donnons dans l'Annexe A les différentes approximations \widetilde{Y}^+ proposées respectivement par S. Borel et M. Darbas. En particulier, on peut donner l'exemple de la GCSIE de S. Borel. L'approximation correspondante consiste dans un premier temps à découper la surface en sous-surfaces (FIG. 2.3), à l'aide de fonctions de troncature χ_n formant une partition quadratique de l'unité, puis à approcher le Dirichlet-to-Neumann de chaque sous-surface par celui du plan tangent, $-2\mathbf{n} \times \mathbf{T}$:

$$\widetilde{Y}^+ = \sum_n \chi_n (-2\mathbf{n} \times \mathbf{T}) \chi_n.$$

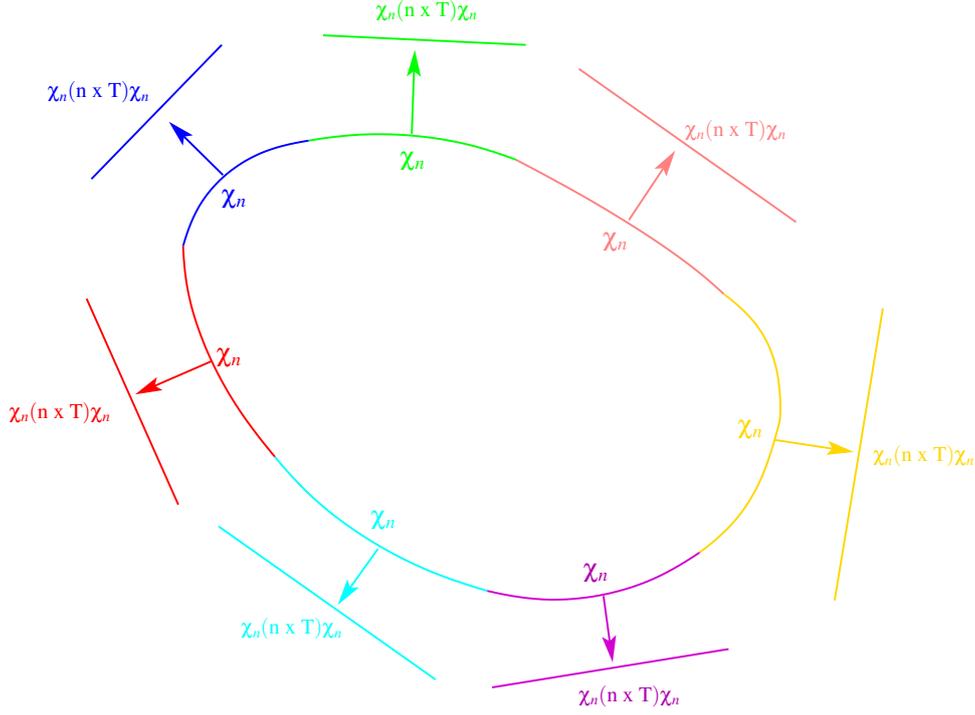


FIGURE 2.3 – Approximation \tilde{Y}^+ du Dirichlet-to-Neumann à l'aide de fonctions de troncature χ_n formant une partition de l'unité de la surface, et approximation du Dirichlet-to-Neumann de chaque sous-surface par celui du plan tangent.

Remarque. *S. Borel [13], [14] a montré qu'avec cette approximation \tilde{Y}^+ de l'opérateur Dirichlet-to-Neuman, sous réserve que le nombre d'onde k soit assez élevé, l'opérateur sous-jacent à la GCSIE métallique est la somme d'un opérateur d'ordre 0 et d'un opérateur compact. Par suite, la discrétisation de l'équation GCSIE conduit à un système linéaire dont le conditionnement n'est pas dégradé par la montée en fréquence.*

Deuxième application du formalisme : la GCSIE impédante.

Dans ce cas, la trace imposée γ est la trace impédante suivante :

$$\gamma \mathbf{E} = (\sigma_0^+ + \alpha \mathbf{n} \times \sigma_1^+) \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} - \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}}.$$

- On applique la trace impédante $\gamma_\alpha^+ \mathbf{E} = (\sigma_0^+ + \alpha \mathbf{n} \times \sigma_1^+) \mathbf{E}$ aux potentiels électromagnétiques :

$$\gamma \mathcal{T} = (\sigma_0^+ + \alpha \mathbf{n} \times \sigma_1^+) \mathcal{T} = \mathbf{n} \times \mathbf{T} + \alpha \left(\mathbf{K} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \right),$$

$$\gamma \mathcal{K} = (\sigma_0^+ + \alpha \mathbf{n} \times \sigma_1^+) \mathcal{K} = \left(\mathbf{n} \times \mathbf{K} - \frac{1}{2} \text{Id} \right) - \alpha \mathbf{T}.$$

- On choisit des opérateurs $R_{\mathbf{E}}^\gamma$ et $R_{\mathbf{H}}^\gamma$, sachant que $\gamma \mathbf{E} = \sigma_0^+ + \alpha \mathbf{n} \times \sigma_1^+$:

$$R_{\mathbf{H}}^\gamma : (\sigma_0^+ + \alpha \mathbf{n} \times \sigma_1^+) \mathbf{E} \mapsto \sigma_1^+ \mathbf{E},$$

$$R_{\mathbf{E}}^\gamma : (\sigma_0^+ + \alpha \mathbf{n} \times \sigma_1^+) \mathbf{E} \mapsto \sigma_0^+ \mathbf{E}.$$

Une approximation de ces opérateurs a été proposée par Pernet [48], nous la décrivons dans l'Annexe A.

L'équation à résoudre est donc :

GCSIE impédante :

$$\left[\left(\mathbf{n} \times \mathbf{T} + \alpha \left(\mathbf{K} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \right) \right) \widetilde{R}_{\mathbf{H}}^{\gamma} - \left(\left(\mathbf{n} \times \mathbf{K} - \frac{1}{2} \text{Id} \right) - \alpha \mathbf{T} \right) \widetilde{R}_{\mathbf{E}}^{\gamma} \right] \mathbf{u} = \mathbf{u}_0. \quad (2.14)$$

et la paramétrisation choisie permettant de reconstruire le champ \mathbf{E} après résolution de l'équation intégrale (2.14) est

$$\mathbf{E} = \left(\mathcal{T} \widetilde{R}_{\mathbf{H}}^{\gamma} - \mathcal{K} \widetilde{R}_{\mathbf{E}}^{\gamma} \right) \mathbf{u}.$$

2.4 Vitesse de convergence et validation numérique des algorithmes d'équations intégrales

2.4.1 Conditionnement des équations intégrales

Nous souhaitons illustrer le bon conditionnement des équations de type GCSIE, et également la stabilité de leur conditionnement lorsque la fréquence augmente. L'algorithme itératif utilisé est dérivé de l'algorithme GMRES [51]. Pour un système linéaire $AX = B$ résolu de manière itérative, en notant X_n la solution à l'itération n , le n -ième résidu est défini par

$$r_n = \frac{\|AX_n - B\|}{\|B\|}.$$

Nous représentons sur les courbes ci-dessous (FIG. 2.4 et FIG. 2.5) le nombre d'itérations requis par chaque équation intégrale, pour atteindre un résidu de 10^{-3} sur une sphère de rayon 1m maillée d'une part avec 792 degrés de liberté pour une fréquence de 200 MHz, et d'autre part avec 5292 degrés de liberté pour une fréquence de 400 MHz.

Nous comparons le nombre d'itérations avant convergence, pour les trois équations en champ classiques EFIE, MFIE et CFIE, et pour trois équations intégrales de type GCSIE : la GCSIE métallique avec approximation du Dirichlet-to-Neumann réalisée par partition de l'unité (S. Borel, [13], notée GCSIE, Y = Partition de l'unité), la GCSIE métallique avec approximation microlocale du Dirichlet-to-Neumann et décomposition de Helmholtz (M. Darbas, [25], notée GCSIE, Y = Helmholtz), et la GCSIE impédante avec approximations microlocales des opérateurs régularisants $R_{\mathbf{E}}^{\gamma}$ et $R_{\mathbf{H}}^{\gamma}$ (S. Pernet [48], cette équation est notée GCSIE, RH = Helmholtz). L'implantation effective de cette dernière équation dans le code *Elsem3D* a fait partie de notre travail de thèse. On observe, d'une part, que les deux équations GCSIE métalliques convergent plus rapidement que les équations en champ classiques, et d'autre part que le nombre d'itérations reste stable avec la montée en fréquence pour les équations GCSIE, tandis que les équations en champ voient leur nombre d'itérations augmenter fortement entre 200 MHz et 400

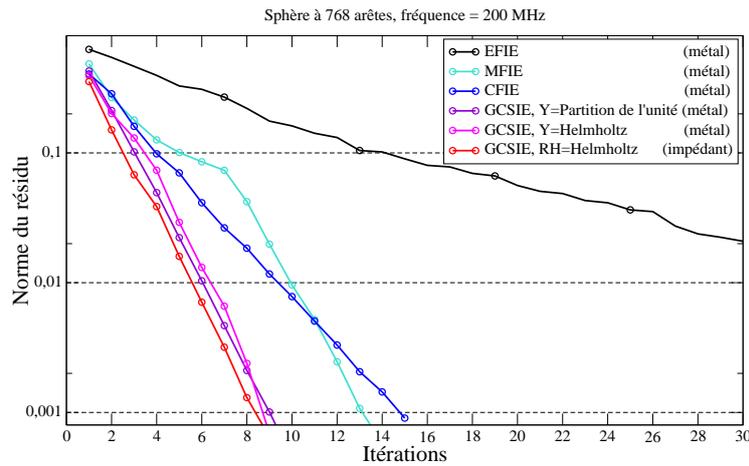


FIGURE 2.4 – Résultats numériques pour une fréquence de 200 MHz, sur une sphère maillée avec 792 arêtes.

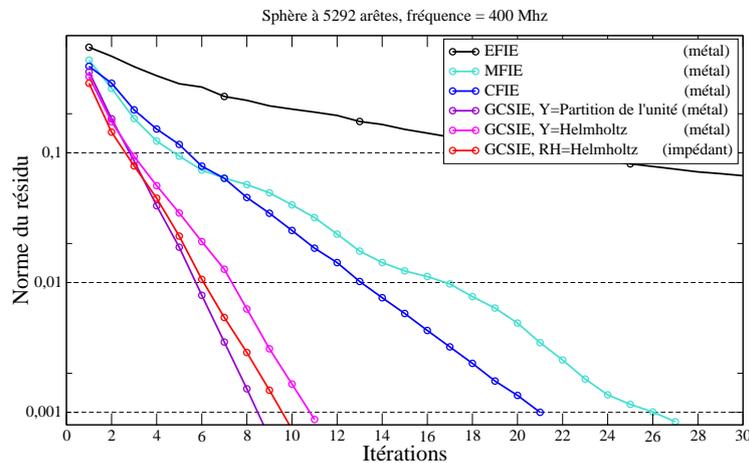


FIGURE 2.5 – Résultats numériques pour une fréquence de 400 MHz, sur une sphère maillée avec 5292 arêtes.

Equation	Nombre d'itérations à 200 MHz	Nombre d'itérations à 400 MHz
EFIE	> 30	> 30
MFIE	14	27
CFIE	15	21
GCSIE métallique (partition de l'unité)	10	9
GCSIE métallique (approximation microlocale)	9	11
GCSIE impédante	9	10

FIGURE 2.6 – Nombre d'itérations, pour atteindre un résidu de 10^{-3} , pour des fréquences respectives de 200 MHz et 400 MHz, sur la sphère maillée respectivement avec 792 et 5292 degrés de liberté, pour les équations intégrales EFIE, MFIE, CFIE, les deux GCSIE métalliques et la GCSIE impédante.

MHz. On représente le nombre d'itérations avant convergence dans le tableau FIG. 2.6.

Notons que la GCSIE impédante ne résout pas le même problème que les autres équations résolvant le problème métal, et donc que la comparaison directe de ces algorithmes est discutable. Nous pouvons néanmoins constater que cette équation possède un conditionnement stable avec la montée en fréquence.

2.4.2 Validation numérique : la SER (Section Efficace Radar)

On ne peut pas comparer directement les résultats des différentes équations intégrales entre eux, puisque les inconnues ne sont pas de même nature. Comparer les résultats obtenus en inversant les systèmes linéaires sous-jacents n'aurait donc pas de sens. Par exemple, la solution calculée par l'équation EFIE ou MFIE est une trace de Neumann du champ total $\sigma_1^+ \mathbf{E}^{\text{tot}}$, tandis que la solution calculée par l'équation GCSIE n'a pas de signification physique.

Il nous faut cependant un critère de comparaison pour évaluer la précision d'une équation par rapport à une autre. Pour éviter d'avoir à calculer le champ diffracté dans toute une région de l'espace extérieur à l'objet, opération qui serait trop coûteuse, on choisit à la place d'utiliser le champ lointain diffracté. En coordonnées sphériques (r, θ, φ) , le champ lointain diffracté \mathbf{E}^∞ s'exprime en fonction du champ diffracté \mathbf{E} par la formule :

$$\mathbf{E}^\infty(\theta, \varphi) = \lim_{r \rightarrow +\infty} 4\pi r^2 \mathbf{E}(r, \theta, \varphi).$$

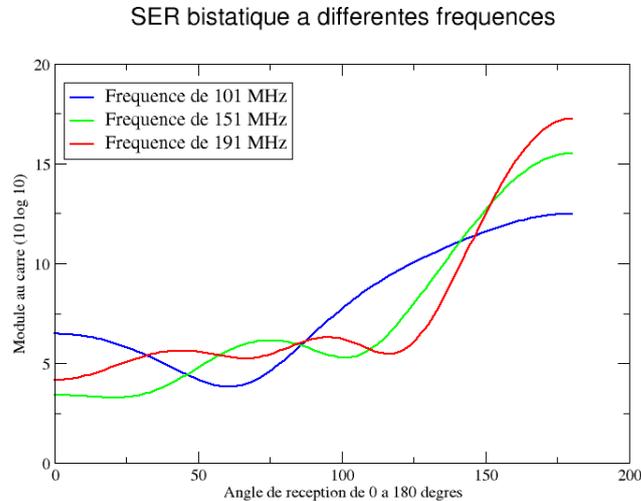


FIGURE 2.7 – SER d'une sphère de rayon 1m pour des fréquences respectives de 101 MHz, 151 MHz et 191 MHz.

On introduit alors la SER, terme qui désigne la Section Efficace Radar ou Surface Equivalente Radar (ou encore RCS pour *Radar Cross Section*). La SER sert à évaluer le rapport entre le module du champ lointain diffracté et celui du champ incident, sur une sphère de rayon infini. Par convention, on exprime la SER sous la forme

$$\text{SER}(\theta, \varphi) = 10 \log_{10} \left(\lim_{r \rightarrow +\infty} (4\pi r^2) \frac{|\mathbf{E}(r, \theta, \varphi)|^2}{|\mathbf{E}_{\text{inc}}(r, \theta, \varphi)|^2} \right).$$

Lorsque l'onde incidente est plane, elle est de module constant. On a donc simplement à évaluer le module du champ lointain diffracté pour calculer le diagramme de SER :

$$\text{SER}(\theta, \varphi) = 10 \log_{10} \left(\frac{|\mathbf{E}^\infty(\theta, \varphi)|^2}{|\mathbf{E}_{\text{inc}}|^2} \right).$$

Dans le régime d'utilisation d'un radar, l'approximation de champ lointain est légitime. La SER permet donc d'exprimer la furtivité d'un aéronef : plus un objet est furtif, plus sa SER est faible. Les angles (θ, φ) désignent les coordonnées sphériques de la direction de réception dans laquelle on observe le champ détecté. Pour simplifier la visualisation, nous ne regardons pas la SER dans toutes les directions sphériques, mais seulement sur un équateur. Sur la FIG. 2.7, on a tracé les courbes de SER obtenues sur une sphère maillée avec 792 arêtes, en utilisant l'équation intégrale EFIE, avec un résidu de 10^{-6} , et pour trois fréquences différentes (101 MHz, 151 MHz et 191 MHz). La précision des algorithmes est souvent évaluée grâce au cas test de la sphère, car le champ diffracté exact y est connu [46].

2.5 Le problème posé par les cavités

Les méthodes d'équations intégrales ci-dessus, et notamment les méthodes de GCSIE, sont très performantes pour de nombreux problèmes. Cependant, nous allons voir qu'elles ne sont pas suffisantes pour certains types de problèmes : en particulier, pour les obstacles diffractants comportant une cavité.

2.5.1 Ralentissement de la convergence pour un objet avec cavité

Nous considérons deux objets comportant des cavités. Le premier objet, nommé `smallBox`, est une boîte parallélépipédique ouverte à l'une de ses extrémités, et comportant donc une cavité parallélépipédique, de section rectangulaire. Le deuxième objet, nommé `bigBox`, est également une boîte parallélépipédique possédant une cavité parallélépipédique, mais celle-ci est de section carrée. On suppose que le maillage de `bigBox` comporte plus d'éléments que le maillage de `smallBox` (on se reportera aux §3.4.2 et §4.4.5 pour le détail des maillages). Nous observons le comportement des équations intégrales, pour résoudre le problème de Maxwell avec condition métal, sur ces maillages lorsqu'on obstrue partiellement leur cavité. On place une interface au milieu de la cavité de `smallBox`, de manière à ce que la cavité soit partiellement bouchée, et on teste l'équation EFIE sur les deux maillages respectifs (avec cavité ou avec cavité bouchée). Nous maillons de la même manière les deux objets (à l'exception de la cavité). On observe (FIG. 2.9) que l'EFIE ne converge pas sur le maillage avec cavité, pour le résidu considéré.

On souhaite également tester si l'équation GCSIE métallique, qui est plus performante que l'EFIE, permet de résoudre des problèmes avec cavité profonde. Nous testons la GCSIE sur le maillage de `bigBox`. On note D la face composant le fond de la cavité de `bigBox`, et on introduit deux faces B et C permettant d'obtenir une cavité plus ou moins profonde. Si l'on ferme l'objet sur la face B , on obtient une cavité peu profonde, tandis que si l'on ferme l'objet sur la face D , on obtient le maillage initial, avec une cavité très profonde (FIG. 2.8). La face C correspond à une cavité de profondeur intermédiaire. On observe (FIG. 2.10) que la GCSIE converge sur les trois maillages, mais qu'elle converge moins bien pour la cavité de profondeur intermédiaire.

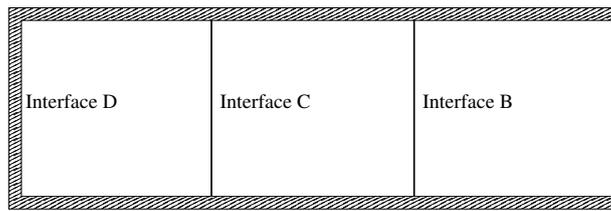


FIGURE 2.8 – Schéma de l'objet bigBox et de ses trois interfaces B, C, D.

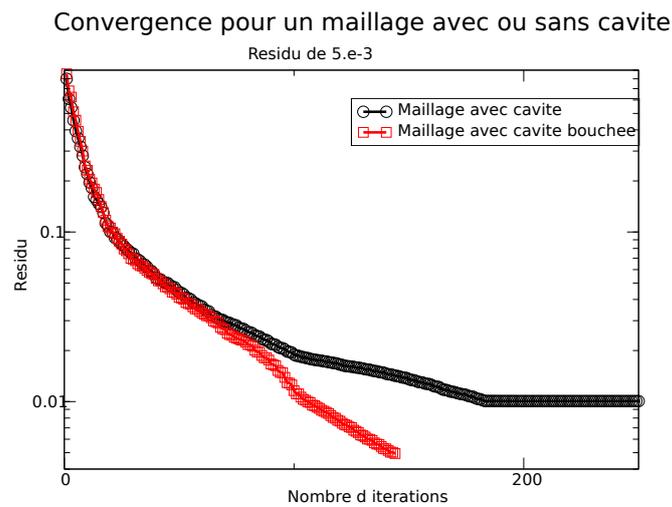


FIGURE 2.9 – Courbes de convergence obtenues avec l'équation intégrale EFIE, pour le maillage smallBox avec cavité, et le même maillage avec cavité en partie bouchée, pour un résidu de $5 \cdot 10^{-3}$.

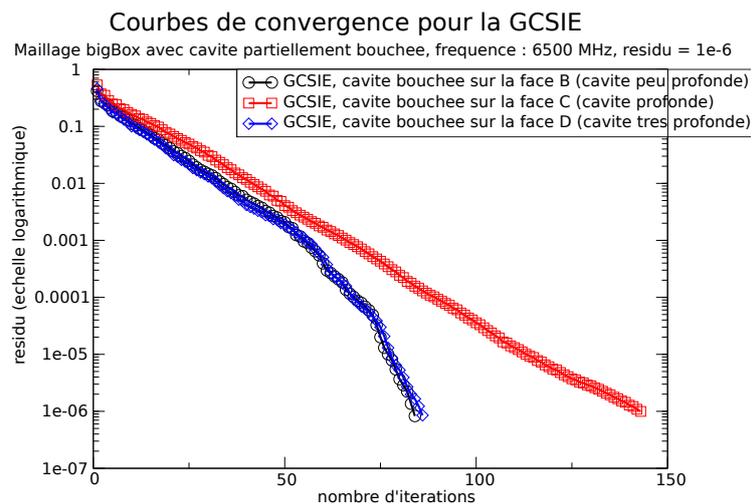


FIGURE 2.10 – Courbes de convergence obtenues avec l'équation intégrale GCSIE, pour le maillage bigBox fermé par la face B, C et D, pour un résidu de 10^{-6} .

2.5.2 Comparaison de la SER de l'obstacle avec celle de l'obstacle dont la cavité a été obstruée

Ainsi, la présence de cavités peut ralentir fortement, voire empêcher, la convergence des méthodes d'équations intégrales. L'une des solutions souvent utilisée par les ingénieurs pour remédier à ce problème, est de supprimer purement et simplement la cavité (on l'obstrue). Les courbes présentées FIG. 2.11 sont celles obtenues par l'EFIE sur le maillage smallBox avec cavité ou cavité bouchée. Celles présentées FIG. 2.12 sont celles obtenues par la GCSIE sur le maillage bigBox avec le fond de la cavité en B, C ou D. Bien évidemment, la SER obtenue ne reste pas fidèle, comme on l'observe sur les courbes ci-dessous : la présence ou l'absence de la cavité joue sur la SER. Pour obtenir une SER fidèle, nous ne pouvons donc pas nous contenter de boucher la cavité.

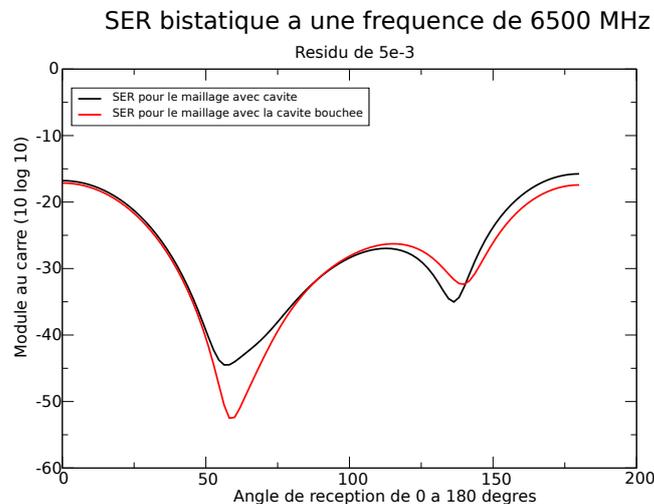


FIGURE 2.11 – Courbes de SER respectives pour le maillage avec cavité, et le même maillage avec la cavité en partie bouchée, pour un résidu de $5 \cdot 10^{-3}$, obtenues avec l'équation intégrale EFIE.

2.5.3 Conclusion : nécessité de l'utilisation d'une DDM

Pour les deux raisons précédentes, il semble indispensable d'utiliser une méthode de décomposition de domaine (DDM). Pour un objet comportant une cavité, on propose de placer à l'entrée de cette cavité une interface artificielle découpant le domaine extérieur initial en un domaine extérieur non borné (sans cavité cette fois) et un domaine intérieur borné (constitué de la cavité elle-même). D'une part, l'utilisation d'une telle DDM permettrait de résoudre le problème exact, et non le problème avec cavité bouchée, et donc d'obtenir une courbe de SER valide. D'autre part, en utilisant pour la résolution dans les sous-domaines des méthodes d'équations intégrales, ces méthodes appliquées notamment au nouveau domaine extérieur convergeraient cette fois beaucoup plus rapidement (car elles ne verraient pas la cavité).

Le couplage entre les sous-domaines ramène le problème à l'interface entre les deux sous-domaines et fait intervenir un système linéaire qui est mal conditionné en général, ceci de ma-

2.6. Les équations intégrales comme outil de synthèse de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann 67

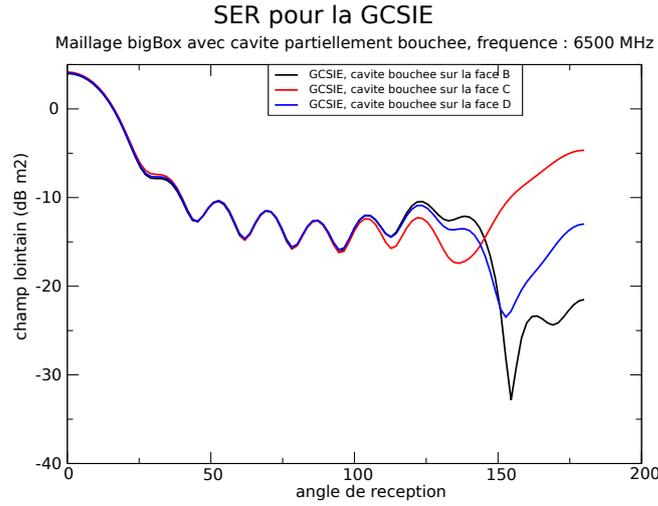


FIGURE 2.12 – Courbes de SER respectives pour le maillage avec cavité, et le même maillage avec la cavité en partie bouchée, pour un résidu de 5.10^{-6} , obtenues avec l'équation intégrale GCSIE.

nière indépendante du conditionnement des systèmes linéaires résolus dans les sous-domaines. C'est pourquoi nous allons proposer, dans la deuxième partie de cette thèse, non seulement des méthodes de décomposition de domaine pertinentes, mais surtout des préconditionneurs adaptés permettant de réduire le nombre d'itérations pour atteindre la convergence de l'algorithme de la DDM.

Nous allons paramétrer les premières équations de DDM à l'aide d'opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann. La synthèse de ces opérateurs est équivalente à la résolution de problèmes métalliques dans les sous-domaines introduits dans la méthode de décomposition de domaine. Pour les résoudre, nous nous appuyons sur les équations intégrales présentées dans ce chapitre. Le dernier paragraphe est donc consacré à l'obtention d'opérateurs Dirichlet-to-Neumann par l'intermédiaire d'équations intégrales.

2.6 Les équations intégrales comme outil de synthèse de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann

Définition 41.

Nous définissons quatre types d'opérateur Dirichlet-to-Neumann, que nous notons Y_a, Y_b, Y_c, Y_d :

$$Y_a : \mathbf{n} \times \mathbf{E} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \quad (2.15)$$

$$Y_b : \mathbf{E}_{\text{tan}} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \quad (2.16)$$

$$Y_c : \mathbf{n} \times \mathbf{E} \mapsto \mathbf{H}_{\text{tan}}, \quad (2.17)$$

$$Y_d : \mathbf{E}_{\text{tan}} \mapsto \mathbf{H}_{\text{tan}}. \quad (2.18)$$

Le premier opérateur $Y_a = Y$ désigne l'opérateur Dirichlet-to-Neumann des mathématiciens, le deuxième $Y_b = \mathbb{A}$ désigne l'opérateur admittance des physiciens. Remarquons que tous ces opérateurs sont reliés par la relation

$$Y_a = -Y_b \mathbf{n} \times = \mathbf{n} \times Y_c = -\mathbf{n} \times Y_d \mathbf{n} \times .$$

L'objet de cette section est d'expliquer comment un opérateur de type Dirichlet-to-Neumann (opérateur Y_a, Y_b, Y_c ou Y_d) peut être synthétisé en utilisant une méthode d'équation intégrale, et en particulier comment utiliser une équation en champ ou en source pour ce faire.

Dans une équation en champ, on s'arrange pour que l'inconnue corresponde à la trace de Neumann recherchée. Par suite, on n'a pas à agir sur la solution de l'équation intégrale obtenue. En revanche, pour construire le second membre de l'équation intégrale, on doit appliquer un opérateur à la donnée initiale, correspondant à une trace de Dirichlet.

A l'inverse, dans une équation en source, l'inconnue n'a pas d'interprétation physique. On doit donc reconstruire la trace physique du champ, i.e. la trace de Neumann recherchée, en appliquant à la solution de l'équation intégrale la trace du potentiel utilisé pour paramétrer le champ. De plus, dans le cas d'une équation en source, on n'a pas, en général, à appliquer un opérateur pour construire le second membre de l'équation intégrale à partir de la trace de Dirichlet.

L'opérateur sous-jacent à chaque équation intégrale sera désigné par **oprLHS**. Nous noterons **oprRHS** (pour opérateur de *Right Hand Side*) l'opérateur à appliquer en entrée à la trace de Dirichlet initiale, servant à construire le second membre de l'équation intégrale. Nous noterons **oprPP** (pour opérateur de *Post Processing*) l'opérateur à appliquer en sortie à la solution de l'équation intégrale, servant à construire la trace de Neumann recherchée.

La notation **Input** désignera le type de trace de Dirichlet en entrée ($\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ ou \mathbf{E}_{tan}), et la notation **Output** désignera le type de trace de Neumann en sortie ($\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ ou \mathbf{H}_{tan}). Remarquons que pour une équation en champ, le choix de l'équation détermine de manière unique l'opérateur utilisé dans le système linéaire à résoudre, et par conséquent également Output. Le choix d'une équation intégrale impose l'opérateur sous-jacent permettant de la résoudre. Par exemple, pour l'EFIE, il s'agit de l'opérateur simple couche $-T$. Ceci impose donc le type de sortie obtenu (\mathbf{H}_{tan} ou $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$). Dans l'exemple de l'EFIE, il s'agit de $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$. Il reste encore une liberté de choix quant au type d'entrée voulu (\mathbf{E}_{tan} ou $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$). En théorie, l'équation intégrale étant fixée, on a donc encore le choix entre deux opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann (ici $Y_a : \mathbf{n} \times \mathbf{E} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{H}$ et $Y_b : \mathbf{E}_{\text{tan}} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{H}$).

Par exemple, nous pouvons représenter la synthèse du Dirichlet-to-Neumann Y_a par le schéma suivant :

$$\begin{aligned} \text{Trace de Dirichlet } \sigma_0^+ \mathbf{E} &\mapsto \text{Second membre de l'équation intégrale : RHS} = \text{oprRHS}(\sigma_0^+ \mathbf{E}) \\ &\mapsto \text{Solution SOL de l'équation intégrale : oprLHS (SOL)} = \text{RHS} \\ &\mapsto \text{Trace de Neumann } \sigma_1^+ \mathbf{E} = \text{oprPP}(\text{SOL}) = Y_a(\sigma_0^+ \mathbf{E}) \end{aligned}$$

Pour chaque équation présentée, nous donnerons :

- le nom de l'équation intégrale (**Equation**),
- la trace de Dirichlet en entrée (**Input**),
- la trace de Neumann en sortie (**Output**),
- l'opérateur de type Dirichlet-to-Neumann synthétisé (**DtN**),
- l'opérateur du système linéaire sous-jacent (**oprLHS**),
- l'opérateur de construction du second membre (**oprRHS**),
- l'opérateur de construction de la trace de Neumann (**oprPP**).

Les opérateurs oprRHS et oprPP seront éventuellement absents.

La synthèse d'un opérateur de type Dirichlet-to-Neumann par une équation en champ se présente sous la forme :

$$\boxed{\text{oprLHS}(\text{SOL}) = \text{oprRHS}(\text{Input}).}$$

L'opérateur oprLHS, qui est inversé, donne son nom à l'équation utilisée. Dans le cas d'une équation en source, une étape de post-processing est ajoutée :

$$\boxed{\text{Output} = \text{oprPP}(\text{SOL}).}$$

Ceci permet d'utiliser une inconnue SOL non physique pour le système à inverser, et donc en particulier d'utiliser les opérateurs GCSIE comme oprLHS. La variété des systèmes est due à la présence des opérateurs $\mathbf{n} \times$, à gauche et à droite, de oprLHS. Comme on l'a déjà souligné, cette différence en apparence anecdotique a de grandes conséquences en termes d'implémentation numérique.

Remarque. Nous présentons les différentes méthodes de synthèse pour le sous-domaine extérieur, mais le principe reste le même pour le sous-domaine intérieur.

Dans la suite, nous présentons deux exemples d'obtention des opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann. Nous donnons l'exemple d'une équation en champ, l'EFIE, et d'une équation en source, la GCSIE métallique. Nous renvoyons à l'Annexe C pour le détail de l'utilisation des autres équations intégrales.

Equation EFIE

On choisit de résoudre une équation EFIE pour synthétiser un opérateur de type Dirichlet-to-Neumann. Cela signifie que l'opérateur sous-jacent est $-\mathbf{T}$. On utilise le théorème de représentation en considérant que le champ intérieur est nul :

$$\mathbf{E} = \mathcal{T}(\sigma_1^+ \mathbf{E}) - \mathcal{K}(\sigma_0^+ \mathbf{E}).$$

En appliquant la trace σ_0^+ à cette équation, on obtient

$$\sigma_0^+ \mathbf{E} = (\mathbf{n} \times \mathbf{T})(\sigma_1^+ \mathbf{E}) - \left(\mathbf{n} \times \mathbf{K} - \frac{1}{2} \text{Id} \right) (\sigma_0^+ \mathbf{E}),$$

soit encore

$$\boxed{(-\mathbf{T})(\sigma_1^+ \mathbf{E}) = \left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times -\mathbf{K}\right) (\sigma_0^+ \mathbf{E}). \quad (\text{EFIE})}$$

On remarque que la sortie (Output), c'est-à-dire la solution de l'équation, est nécessairement $\sigma_1^+ \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$. Nous pouvons choisir en entrée, c'est-à-dire comme second membre (Input) :

- soit $\sigma_0^+ \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$, auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $\left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times -\mathbf{K}\right)$. On veut donc résoudre

$$(-\mathbf{T})\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times -\mathbf{K}\right) (\mathbf{n} \times \mathbf{E}),$$

où la solution \mathbf{u} vaut $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$;

- soit \mathbf{E}_{tan} , auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $-\left(\frac{1}{2} + \mathbf{K}\mathbf{n} \times\right)$.

On veut donc résoudre

$$(-\mathbf{T})\mathbf{u} = -\left(\frac{1}{2} + \mathbf{K}\mathbf{n} \times\right) (\mathbf{E}_{\text{tan}}),$$

où la solution \mathbf{u} vaut $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$.

Nous résumons les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous.

Equation	Input	Output	DtN	oprLHS	oprRHS	oprPP
EFIE	$\mathbf{n} \times \mathbf{E}$	$\mathbf{n} \times \mathbf{H}$	Y_a	$-\mathbf{T}$	$\left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times -\mathbf{K}\right)$	absent
EFIE	\mathbf{E}_{tan}	$\mathbf{n} \times \mathbf{H}$	Y_b	$-\mathbf{T}$	$-\left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{K}\mathbf{n} \times\right)$	absent

Equation GCSIE métallique

Pour l'équation GCSIE métallique, qui est *in fine* l'équation que nous souhaitons utiliser dans les sous-domaines (en raison de son bon conditionnement), nous donnons les quatre types d'opérateurs DtN.

Pour commencer, pour synthétiser l'opérateur Y_a^+ en utilisant une GCSIE métallique, on cherche \mathbf{E} sous la forme $\mathbf{E} = \left(\mathcal{T}\tilde{Y}^+ - \mathcal{K}\right) \mathbf{u}$. On doit alors résoudre la GCSIE avec pour second membre \mathbf{e}_0 ,

$$\boxed{\left(\left(\mathbf{n} \times \mathbf{T}\right)\tilde{Y}^+ + \left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right)\right) \mathbf{u} = \mathbf{e}_0, \quad (\text{GCSIE})}$$

puis on calcule

$$Y_a^+ \mathbf{e}_0 = \sigma_1^+ \mathbf{E} = \sigma_1^+ \left(\mathcal{T}\tilde{Y}^+ - \mathcal{K}\right) \mathbf{u} = \boxed{\left(\left(-\mathbf{n} \times \mathbf{K} + \frac{1}{2} \text{Id}\right) \tilde{Y}^+ + \mathbf{n} \times \mathbf{T}\right) \mathbf{u}.$$

Nous pouvons choisir en entrée, c'est-à-dire comme second membre (Input) :

2.6. Les équations intégrales comme outil de synthèse de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann 71

- soit $\sigma_0^+ \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$, auquel cas il n'y aura pas d'opérateur à appliquer pour l'assemblage du second membre. On veut donc résoudre

$$\left((\mathbf{n} \times \mathbf{T}) \tilde{Y}^+ + \left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K} \right) \right) \mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}.$$

- soit \mathbf{E}_{tan} , auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $\mathbf{n} \times$. On veut donc résoudre

$$\left((\mathbf{n} \times \mathbf{T}) \tilde{Y}^+ + \left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K} \right) \right) \mathbf{u} = (\mathbf{n} \times) \mathbf{E}_{\text{tan}}.$$

On doit faire attention au fait que l'équation GCSIE s'applique pour un second membre représentant un vecteur d'amplitude (les coordonnées sur les fonctions de base), et non un vecteur de couplage. Il n'y a donc pas d'opérateur pour le cas $\text{Input} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$ et par contre pour le cas $\text{Input} = \mathbf{E}_{\text{tan}}$, on doit multiplier en entrée par $[\text{Id}]^{-1}[\mathbf{n} \times]$ en notant $[A]$ la matrice de Galerkin de l'opérateur A .

Cependant, en sortie on veut obtenir $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ ou \mathbf{H}_{tan} . Cela nécessite un traitement particulier de la solution $\text{SOL} = \mathbf{u}$.

Si \mathbf{u} désigne la solution, on a paramétré le champ \mathbf{E} comme

$$\mathbf{E} = (\mathcal{T} \tilde{Y}^+ - \mathcal{K}) \mathbf{u}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{H} &= \left(\sigma_1^+ \mathcal{T} \tilde{Y}^+ - \sigma_1^+ \mathcal{K} \right) \mathbf{u} \\ &= \left(\left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K} \right) \tilde{Y}^+ - \mathbf{n} \times \mathbf{T} \right) \mathbf{u}. \end{aligned}$$

On a également

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{tan}} &= -\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \\ &= \left(\left(-\frac{1}{2} \mathbf{n} \times -\mathbf{K} \right) \tilde{Y}^+ - \mathbf{T} \right) \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Nous résumons dans le tableau suivant les opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann obtenus en utilisant l'équation GCSIE métallique.

Equation	Input	Output	DtN	oprRHS	oprPP
GCSIE métallique	$\mathbf{n} \times \mathbf{E}$	$\mathbf{n} \times \mathbf{H}$	Y_a	absent	$[\text{Id}]^{-1} \left[\left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K} \right) \tilde{Y}^+ - \mathbf{n} \times \mathbf{T} \right]$
GCSIE métallique	\mathbf{E}_{tan}	$\mathbf{n} \times \mathbf{H}$	Y_b	$[\text{Id}]^{-1}[\mathbf{n} \times]$	$[\text{Id}]^{-1} \left[\left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K} \right) \tilde{Y}^+ - \mathbf{n} \times \mathbf{T} \right]$
GCSIE métallique	$\mathbf{n} \times \mathbf{E}$	\mathbf{H}_{tan}	Y_c	absent	$[\text{Id}]^{-1} \left[\left(-\frac{1}{2} \mathbf{n} \times -\mathbf{K} \right) \tilde{Y}^+ - \mathbf{T} \right]$
GCSIE métallique	\mathbf{E}_{tan}	\mathbf{H}_{tan}	Y_d	$[\text{Id}]^{-1}[\mathbf{n} \times]$	$[\text{Id}]^{-1} \left[\left(-\frac{1}{2} \mathbf{n} \times -\mathbf{K} \right) \tilde{Y}^+ - \mathbf{T} \right]$

Deuxième partie

Des préconditionneurs pour les méthodes de décomposition de domaine

Chapitre 3

Un préconditionneur analytique pour la DDM basée sur l'opérateur Dirichlet-to-Neumann

Sommaire

3.1	Description générale de la DDM	77
3.1.1	Le problème de la diffraction par un objet avec cavité	77
3.1.2	Découpage en deux sous-domaines Ω^+ et Ω^-	78
3.1.3	Continuité des champs totaux électrique et magnétique	80
3.2	Opérateur Dirichlet-to-Neumann	82
3.2.1	Opérateur Dirichlet-to-Neumann classique	82
3.2.2	Opérateur Dirichlet-to-Neumann modifié	83
3.2.3	Retour à la DDM	83
3.2.4	Obtention de l'admittance modifiée par équation intégrale	84
3.3	Un préconditionneur analytique pour la DDM en Y	86
3.3.1	Un lemme préliminaire	86
3.3.2	Un préconditionneur pour la DDM	88
3.4	Résultats numériques pour la DDM en Y	91
3.4.1	Discrétisation	91
3.4.2	Etude de la vitesse de convergence	92
3.4.3	Validation numérique : comparaison des SER	95
3.4.4	Influence de la montée en fréquence	96
3.4.5	Influence de l'augmentation du nombre d'inconnues	98
3.5	Possibilités d'autres DDMs basées sur un DtN	99
3.5.1	Relations vérifiées par les opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann	99
3.5.2	Autres DDMs en Y possibles. Préconditionneurs associés	100
3.5.3	Problèmes rencontrés selon les DDMs	102
3.6	Une formulation à deux inconnues vue comme une application du formalisme GCSIE	103
3.7	Conclusion	106

Ce chapitre est consacré aux méthodes de décomposition de domaine (DDM pour *Domain Decomposition Methods*) écrites à l'aide d'opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann, et à un premier exemple de préconditionneur pour ces DDMs.

Dans le premier paragraphe, il s'agit de présenter la méthode de décomposition de domaine, sans toutefois préciser quels opérateurs lui sont sous-jacents. Plusieurs choix sont en effet possibles, qui seront discutés par la suite.

Le deuxième paragraphe sert à introduire les opérateurs de couplage intervenant dans la DDM. Ils s'agit dans ce chapitre d'opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann (DtN); dans le Chapitre 5, il s'agira à l'inverse d'opérateurs de type scattering. Une différence essentielle entre ces approches est que les opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann sont d'ordre 1 tandis que les opérateurs de scattering sont d'ordre 0. Dans le cas de l'équation de Helmholtz scalaire, l'opérateur Dirichlet-to-Neumann envoie la trace de Dirichlet de l'onde sur la frontière Σ ($u|_{\Sigma}$) sur la trace de Neumann de l'onde ($\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma}$). En électromagnétisme, un opérateur de type Dirichlet-to-Neumann envoie une trace du champ électrique recherché (\mathbf{E}_{tan} ou $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$) sur une trace du champ magnétique associé (\mathbf{H}_{tan} ou $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$), le champ magnétique jouant le rôle de "dérivée" du champ électrique (puisque'il s'agit de son rotationnel). Il y a donc quatre types d'opérateur Dirichlet-to-Neumann en électromagnétisme. Dans un premier temps, nous utilisons l'opérateur admittance qui envoie \mathbf{E}_{tan} sur $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$. Nous donnons tout d'abord la définition classique de cet opérateur, avant de l'adapter au cas qui nous intéresse (la transmission de l'information sur le champ électrique à travers l'interface entre sous-domaines). On reviendra ensuite à la DDM elle-même pour en donner une expression plus précise. Notons que pour synthétiser ces opérateurs Dirichlet-to-Neumann dans le cadre d'une implémentation numérique, il est nécessaire de résoudre des problèmes aux limites locaux dans les sous-domaines, ce qui est fait grâce aux méthodes d'équations intégrales décrites au Chapitre 2.

Le troisième paragraphe décrit un préconditionneur possible dans le cas où l'on écrit la DDM à l'aide de l'admittance, et où cet opérateur est obtenu grâce à la résolution dans les sous-domaines de l'équation intégrale EFIE. Ce préconditionneur est construit à l'aide de l'opérateur simple couche associé à l'interface entre les deux sous-domaines.

L'efficacité de ce préconditionneur est attestée par les applications numériques présentées au quatrième paragraphe. On y verra en particulier que l'action du préconditionneur est d'autant plus visible que la cavité est profonde.

Le cinquième paragraphe traite des autres possibilités envisagées pour l'opérateur de couplage intervenant dans la DDM, c'est-à-dire les trois opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann que l'on peut utiliser en alternative à l'admittance. On décrit les préconditionneurs naturels (également basés sur l'opérateur simple couche) pour les DDMs associées à ces choix. On a exploré au Chapitre 2 les différentes pistes possibles pour synthétiser les opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann à l'aide d'équations intégrales.

Enfin, on adapte dans le sixième paragraphe le formalisme GCSIE (présenté au Chapitre 2)

pour réinterpréter le préconditionneur proposé au troisième paragraphe.

3.1 Description générale de la DDM

3.1.1 Le problème de la diffraction par un objet avec cavité

On considère un ensemble compact D de \mathbb{R}^3 , de frontière Γ_D supposée lisse, et l'on se fixe pour objectif de résoudre le problème de Maxwell harmonique lorsque D est un objet métallique diffractant (obstacle parfaitement conducteur). L'objet de notre étude est de traiter le cas particulier où le domaine D possède une cavité large et profonde, comme l'illustre le dessin FIG. 3.1. On suppose que le domaine extérieur ouvert $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus D$ est connexe et l'on va s'intéresser à la propagation des ondes dans le milieu Ω .

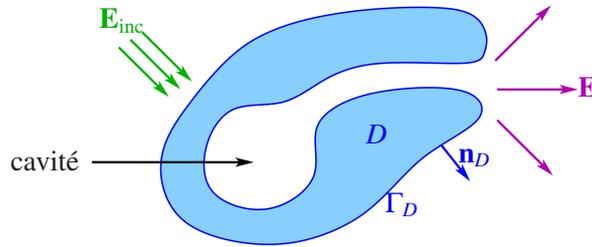


FIGURE 3.1 – Objet diffractant comportant une cavité.

Comme dans le Chapitre 1, on suppose que les ondes électromagnétiques se propagent dans le domaine extérieur non borné Ω avec un nombre d'onde constant k . On appelle champ électrique un champ de vecteurs \mathbf{E} qui vérifie l'équation de Maxwell harmonique $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = 0$ dans Ω . Le champ magnétique associé est donné par $\mathbf{H} = \frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{E}$. On dit qu'un champ électrique est *rayonnant* s'il vérifie la célèbre condition de rayonnement à l'infini de Silver-Müller

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} \left(\mathbf{x} \times \mathbf{H} + |\mathbf{x}| \mathbf{E} \right) = 0.$$

On appelle courants sur Γ_D les fonctions vectorielles tangentielles appartenant aux espaces de Sobolev classiques $H_T^s(\Gamma_D)$. On note \mathbf{n}_D le vecteur unitaire normal à Γ_D et $\gamma_D = \mathbf{n}_D \times$ la trace métallique sur Γ_D .

Soit \mathbf{E}_{inc} un champ électrique incident. Le champ \mathbf{E} diffracté par l'obstacle D est le champ électrique rayonnant vérifiant la condition au bord $\gamma_D \mathbf{E} = -\gamma_D \mathbf{E}_{\text{inc}}$. En d'autres termes, le champ \mathbf{E} recherché est solution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \gamma_D \mathbf{E} = -\gamma_D \mathbf{E}_{\text{inc}} & \text{sur } \Gamma_D, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} \left(\mathbf{x} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + ik|\mathbf{x}| \mathbf{E} \right) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

connu sous le nom de problème du parfait conducteur électrique (PEC pour *perfect electric conductor*).

3.1.2 Découpage en deux sous-domaines Ω^+ et Ω^-

La présence de cavités dans les objets diffractants ralentit fortement la convergence des méthodes d'équations intégrales, et en particulier de la GCSIE, qui est pourtant très performante (voir par exemple [13]). Pour remédier à ce problème, on choisit d'utiliser une méthode de décomposition de domaine, ce qui consiste à découper le domaine extérieur Ω en deux afin de découpler la cavité du reste du domaine.

On introduit à cet effet une frontière artificielle Σ à l'entrée de la cavité. Cette interface permet de découper Ω en un domaine extérieur non borné Ω^+ et un domaine intérieur borné Ω^- , constituant la cavité (voir FIG. 3.2). On définit Γ_D^\pm comme la portion de surface de Γ_D qui est incluse dans la frontière de Ω^\pm . Remarquons que la frontière de Ω^\pm est alors $\Gamma_D^\pm \cup \Sigma$.

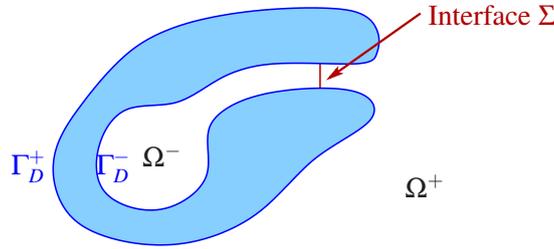


FIGURE 3.2 – Découpage du domaine Ω en deux sous-domaines Ω^+ et Ω^- .

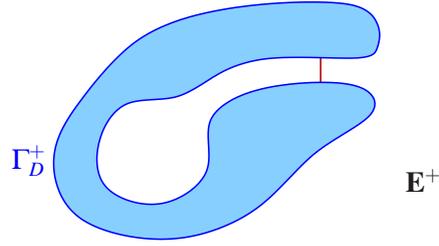
On note \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à Σ , orienté vers Ω^+ . On définit $\mathbf{n}^+ = +\mathbf{n}$ sur Σ et $\mathbf{n}^+ = \mathbf{n}_D$ sur Γ_D^+ ; $\mathbf{n}^- = -\mathbf{n}$ sur Σ et $\mathbf{n}^- = \mathbf{n}_D$ sur Γ_D^- , de sorte que \mathbf{n}^\pm est le vecteur unitaire normal à la frontière de Ω^\pm , dirigé vers l'intérieur de Ω^\pm . Les notations $\sigma_0^\pm = \mathbf{n}^\pm \times$ et $\sigma_1^\pm = \frac{1}{ik} \mathbf{n}^\pm \times \nabla \times$ désignent respectivement les traces classiques électrique et magnétique sur Σ . Rappelons par ailleurs que la trace métallique sur Γ_D est désignée par γ_D .

Nous définissons à présent trois espaces d'ondes admissibles W^+ , W^- et W .

Définition 42 (Espace W^+).

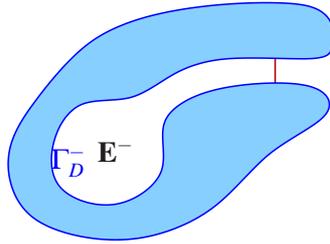
On note W^+ l'ensemble des champs définis dans Ω^+ , possédant une trace tangentielle sur $\Gamma_D^+ \cup \Sigma$, vérifiant le problème de Maxwell dans Ω^+ , ainsi qu'une condition de Dirichlet homogène sur la frontière de l'obstacle diffractant Γ_D^+ (mais pas forcément sur l'interface Σ). Il s'agit donc des champs \mathbf{E}^+ tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}^+) - k^2 \mathbf{E}^+ = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \gamma_D \mathbf{E}^+ = 0 & \text{sur } \Gamma_D^+, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} \left(\mathbf{x} \times (\nabla \times \mathbf{E}^+) + ik|\mathbf{x}| \mathbf{E}^+ \right) = 0. \end{array} \right.$$

FIGURE 3.3 – Champ de l'espace W^+ .**Définition 43** (Espace W^-).

On note W^- l'ensemble des champs définis dans Ω^- , possédant une trace tangentielle sur $\Gamma_D^- \cup \Sigma$, vérifiant le problème de Maxwell dans Ω^- , ainsi qu'une condition de Dirichlet homogène sur la frontière de l'obstacle diffractant Γ_D^- (mais pas forcément sur l'interface Σ). Il s'agit donc des champs \mathbf{E}^- tels que

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}^-) - k^2 \mathbf{E}^- = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \gamma_D \mathbf{E}^- = 0 & \text{sur } \Gamma_D^-. \end{cases}$$

FIGURE 3.4 – Champ de l'espace W^- .

Remarquons que puisque le sous-domaine Ω^- est borné, la condition de rayonnement à l'infini n'est pas requise pour les champs de l'espace W^- . Notons que la trace des champs de W^+ et de W^- est libre sur l'interface Σ .

Enfin, l'espace W est constitué des champs électriques rayonnants \mathbf{E} définis dans Ω , possédant des traces tangentielles sur Γ_D et sur Σ , et vérifiant $\gamma_D \mathbf{E} = 0$ sur Γ_D . L'espace d'ondes admissibles W peut être défini comme suit :

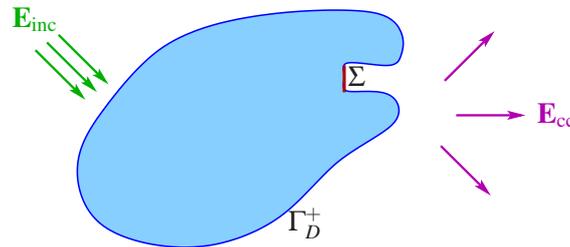
$$W = \left\{ \mathbf{E} \text{ défini dans } \Omega, \quad \mathbf{E}|_{\Omega^+} \in W^+, \quad \mathbf{E}|_{\Omega^-} \in W^-, \right. \\ \left. \text{et } \mathbf{E} \text{ est continu à travers } \Sigma \right\}. \quad (3.2)$$

On aimerait écrire la DDM sous forme d'un système linéaire avec un couple de deux champs solutions, \mathbf{E}^+ dans W^+ et \mathbf{E}^- dans W^- . Cependant, la restriction du champ diffracté au domaine Ω^+ n'appartient pas à l'espace W^+ , car sa trace de Dirichlet n'est pas nulle sur le bord Γ_D^+ de l'obstacle diffractant. Pour résoudre cette difficulté, on introduit un champ dit de court-circuit \mathbf{E}_{cc} (FIG 3.5), qui va permettre de relever cette condition au bord sur Γ_D^+ .

Définition 44 (Champ de court-circuit \mathbf{E}_{cc}).

On appelle *champ de court-circuit* le champ \mathbf{E}_{cc} défini dans Ω^+ , possédant une trace tangentielle sur $\Gamma_D^+ \cup \Sigma$, et vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_{cc}) - k^2 \mathbf{E}_{cc} = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \gamma_D \mathbf{E}_{cc} = -\gamma_D \mathbf{E}_{inc} & \text{sur } \Gamma_D^+, \\ \sigma_0^+ \mathbf{E}_{cc} = -\sigma_0^+ \mathbf{E}_{inc} & \text{sur } \Sigma, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} (\mathbf{x} \times (\nabla \times \mathbf{E}_{cc}) + ik|\mathbf{x}| \mathbf{E}_{cc}) = 0. & \end{array} \right.$$

FIGURE 3.5 – Champ de court-circuit \mathbf{E}_{cc} .

En d'autres termes, \mathbf{E}_{cc} est le champ diffracté par l'objet lorsque l'interface Σ devient métallique (d'où le nom de *court-circuit*).

3.1.3 Continuité des champs totaux électrique et magnétique

On note \mathbf{E}_{inc}^+ la restriction du champ incident \mathbf{E}_{inc} au domaine Ω^+ , et \mathbf{E}_{inc}^- la restriction du champ incident au domaine Ω^- . On recherche le champ solution du problème du parfait conducteur électrique (3.1) sous la forme $\mathbf{E}^+ + \mathbf{E}_{cc}$ dans Ω^+ , et sous la forme $\mathbf{E}^- - \mathbf{E}_{inc}^-$ dans Ω^- , où \mathbf{E}^+ et \mathbf{E}^- appartiennent respectivement aux espaces d'ondes admissibles W^+ et W^- . Le champ \mathbf{E}^- a donc la nature d'un champ total; à l'inverse, le champ \mathbf{E}^+ a la nature d'un champ diffracté (en particulier, il est rayonnant).

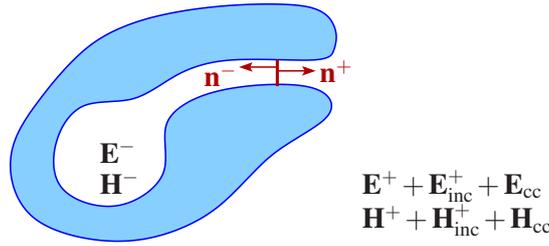
Proposons une interprétation physique pour légitimer le choix des inconnues \mathbf{E}^+ et \mathbf{E}^- . Dans le domaine extérieur, si l'entrée de la cavité est petite, le champ diffracté extérieur peut se voir comme une perturbation du champ de court-circuit. À l'inverse, dans le domaine intérieur, si l'entrée de la cavité est petite, le champ total est faible : c'est l'effet cage de Faraday, le champ diffracté intérieur s'oppose au champ incident.

Le champ total électrique (FIG. 3.6) peut donc s'écrire sous la forme

$$\mathbf{E}^{tot} = \mathbf{E}^- \text{ dans } \Omega^-, \quad \mathbf{E}^{tot} = (\mathbf{E}^+ + \mathbf{E}_{inc}^+ + \mathbf{E}_{cc}) \text{ dans } \Omega^+, \quad (3.3)$$

tandis que le champ total magnétique peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{H}^{tot} = \mathbf{H}^- \text{ dans } \Omega^-, \quad \mathbf{H}^{tot} = (\mathbf{H}^+ + \mathbf{H}_{inc}^+ + \mathbf{H}_{cc}) \text{ dans } \Omega^+. \quad (3.4)$$

FIGURE 3.6 – Champs totaux \mathbf{E}^{tot} et \mathbf{H}^{tot} .

Puisque Σ est une interface artificielle, les champs totaux \mathbf{E}^{tot} et \mathbf{H}^{tot} sont continus à travers Σ . Le problème (3.1) devient le problème de transmission

$$\text{Trouver } \mathbf{E} = (\mathbf{E}^+ \in W^+, \mathbf{E}^- \in W^-), \quad \begin{cases} \mathbf{n}^+ \times \mathbf{E}^- = \mathbf{n}^+ \times (\mathbf{E}^+ + \mathbf{E}_{\text{inc}}^+ + \mathbf{E}_{\text{cc}}), \\ \mathbf{n}^+ \times \mathbf{H}^- = \mathbf{n}^+ \times (\mathbf{H}^+ + \mathbf{H}_{\text{inc}}^+ + \mathbf{H}_{\text{cc}}), \end{cases} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (3.5)$$

Le courant de court-circuit \mathbf{E}_{cc} satisfait par construction $\mathbf{n}^+ \times \mathbf{E}_{\text{inc}}^+ + \mathbf{n}^+ \times \mathbf{E}_{\text{cc}} = 0$. On introduit un courant second membre \mathbf{u}_{rhs} qui nous permet de reformuler les équations (3.5) sous la forme suivante.

Définition 45 (Méthode de décomposition de domaine basée sur le Dirichlet-to-Neumann).

Soit

$$\mathbf{u}_{\text{rhs}} = \mathbf{n}^+ \times \mathbf{H}_{\text{inc}}^+ + \mathbf{n}^+ \times \mathbf{H}_{\text{cc}} \text{ sur } \Sigma, \quad (3.6)$$

alors le couple $(\mathbf{E}^+, \mathbf{E}^-) \in (W^+, W^-)$ recherché est solution du système linéaire

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\text{tan}}^- = \mathbf{E}_{\text{tan}}^+, \\ -\mathbf{n}^- \times \mathbf{H}^- = \mathbf{n}^+ \times \mathbf{H}^+ + \mathbf{u}_{\text{rhs}}, \end{cases} \quad (3.7)$$

Remarquons que pour résoudre le problème initial, une étape préliminaire indispensable consiste à calculer la trace du champ de court-circuit \mathbf{E}_{cc} avant d'utiliser la quantité obtenue \mathbf{u}_{rhs} pour résoudre la DDM.

Il existe plusieurs manières de traiter un tel système. Nous allons dans un premier temps nous intéresser aux *méthodes de décomposition de domaine en Y*, que nous appelons ainsi car elles font intervenir un opérateur Dirichlet-to-Neumann, puis au Chapitre 5, nous nous pencherons sur le cas des *méthodes de décomposition de domaine en S*, basées sur un opérateur de scattering.

Remarque. On peut également écrire le système (3.7) sous les formes suivantes

$$\begin{cases} -\mathbf{n}^+ \times \mathbf{E}^- = \mathbf{n}^+ \times \mathbf{E}^+, \\ -\mathbf{n}^- \times \mathbf{H}^- = \mathbf{n}^+ \times \mathbf{H}^+ + \mathbf{u}_{\text{rhs}}, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \mathbf{E}_{\text{tan}}^- = \mathbf{E}_{\text{tan}}^+, \\ \mathbf{H}_{\text{tan}}^- = \mathbf{H}_{\text{tan}}^+ - \mathbf{n}^+ \times \mathbf{u}_{\text{rhs}}, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -\mathbf{n}^+ \times \mathbf{E}^- = \mathbf{n}^+ \times \mathbf{E}^+, \\ \mathbf{H}_{\text{tan}}^- = \mathbf{H}_{\text{tan}}^+ - \mathbf{n}^+ \times \mathbf{u}_{\text{rhs}}. \end{cases}$$

3.2 Opérateur Dirichlet-to-Neumann

Pour résoudre le problème (3.1), nous nous sommes tournés vers une méthode de décomposition de domaine. La première étape a été d'introduire au §3.1 une interface artificielle entre les deux sous-domaines. Nous allons maintenant écrire explicitement le système linéaire de la DDM, équivalent au problème (3.7), en utilisant des opérateurs de frontière sur l'interface, qui permettent de coupler les traces du champ électromagnétique dans les sous-domaines. Ces opérateurs de couplage sont dans ce chapitre des opérateurs Dirichlet-to-Neumann (ou admittance). Dans le Chapitre 5, il s'agira cette fois d'opérateurs de scattering. Dans cette section, nous nous concentrons sur la définition de ces opérateurs et sur la manière de les obtenir en résolvant des équations intégrales dans les sous-domaines.

3.2.1 Opérateur Dirichlet-to-Neumann classique

Dans une première approche, nous définissons de manière classique l'opérateur Dirichlet-to-Neumann, pour une surface délimitant deux domaines connexes et complémentaires de \mathbb{R}^3 . Ceci nous permettra d'introduire dans un deuxième temps l'opérateur modifié correspondant.

On considère un sous-ensemble compact et connexe D_0 de \mathbb{R}^3 , possédant une frontière Γ_0 de régularité \mathcal{C}^∞ , définissant deux domaines ouverts et connexes : le domaine intérieur borné Ω_0^- et le domaine extérieur non borné Ω_0^+ (FIG. 3.7). On note \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à Γ_0 dirigé vers l'extérieur de Ω_0^- , et γ_T^\pm la trace tangentielle sur Γ_0 prise depuis le domaine Ω_0^\pm . On utilise la notation $\mathbf{n}^\pm = \pm \mathbf{n}$.

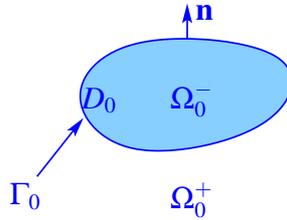


FIGURE 3.7 – Objet diffractant D_0 (sans cavité).

Les mathématiciens appellent opérateur Dirichlet-to-Neumann ou opérateur de Steklov-Poincaré l'opérateur envoyant la donnée de Cauchy $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ sur la donnée de Cauchy $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ (nous avons déjà rencontré cet opérateur au Chapitre 2). Les physiciens, quant à eux, appellent admittance l'opérateur tel que l'image de \mathbf{E}_{tan} par l'admittance est $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$. En premier lieu, c'est l'admittance que nous allons utiliser pour décrire l'opérateur sous-jacent à la DDM. Nous désignons par \mathbb{A}_0^\pm l'opérateur admittance relatif au domaine Ω_0^\pm .

Soit \mathbf{E}^\pm un champ électrique défini dans Ω_0^\pm (où naturellement \mathbf{E}^+ est rayonnant), et soit \mathbf{H}^\pm le champ magnétique associé. L'admittance extérieure ou intérieure \mathbb{A}_0^\pm est définie par

$$\mathbb{A}_0^\pm : \mathbf{E}_{\text{tan}}^\pm \mapsto \mathbf{n}^\pm \times \mathbf{H}^\pm, \quad (3.8)$$

où l'on a noté $\mathbf{E}_{\text{tan}}^\pm = \gamma_T^\pm(\mathbf{E}^\pm)$ et $\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{H}^\pm = \mathbf{n}^\pm \times \gamma_T^\pm(\mathbf{H}^\pm)$.

3.2.2 Opérateur Dirichlet-to-Neumann modifié

Dans notre DDM, l'information sur le champ électrique recherché dans chaque sous-domaine, est transmise grâce aux traces électromagnétiques sur l'interface artificielle. Nous aimerions décrire cette transmission à l'aide des opérateurs Dirichlet-to-Neumann relatifs à chaque sous-domaine. Cependant, cela est impossible avec la définition classique, car l'opérateur \mathbb{A}_0^\pm ne peut pas être appliqué à des fonctions vectorielles définies sur l'interface Σ , qui est une surface ouverte. C'est pourquoi nous définissons de nouveaux opérateurs Dirichlet-to-Neumann pour ce cas précis. Introduisons pour cela des notations supplémentaires.

Définition 46 (Opérateurs de prolongement et de restriction).

On appelle *opérateur de prolongement*, et on note

$$P^\pm : \mathcal{D}'(\Sigma) \rightarrow \mathcal{D}'(\Gamma_D^\pm \cup \Sigma),$$

l'opérateur qui prolonge par 0 sur Γ_D^\pm un courant défini sur Σ .

On appelle *opérateur de restriction*, et on note

$$R^\pm : \mathcal{D}'(\Gamma_D^\pm \cup \Sigma) \rightarrow \mathcal{D}'(\Sigma),$$

l'opérateur qui restreint à Σ un courant défini sur $\Gamma_D^\pm \cup \Sigma$.

Ces prolongements et restrictions nous permettent de définir des opérateurs admittance modifiés, notés \mathbb{A}_Σ^\pm , par

$$\mathbb{A}_\Sigma^\pm = R^\pm \mathbb{A}^\pm P^\pm, \quad (3.9)$$

où \mathbb{A}^\pm est l'opérateur admittance classique relatif à la frontière $\Gamma_D^\pm \cup \Sigma$. En utilisant les notations du §3.2.1, on a donc $\mathbb{A}^+ = \mathbb{A}_0^+$ où Ω_0^+ désigne le domaine extérieur défini par la surface fermée $\Gamma_D^+ \cup \Sigma$, tandis que $\mathbb{A}^- = \mathbb{A}_0^-$ où Ω_0^- désigne le domaine intérieur défini par la surface fermée $\Gamma_D^- \cup \Sigma$.

3.2.3 Retour à la DDM

Le système (3.7) peut s'exprimer à l'aide des opérateurs admittance modifiés, sous la forme de l'équation à résoudre

$$(\mathbb{A}_\Sigma^+ + \mathbb{A}_\Sigma^-) \mathbf{E}_{\text{tan}}^+ = -\mathbf{u}_{\text{rhs}}, \quad (3.10)$$

avec en outre la condition $\mathbf{E}_{\text{tan}}^- = \mathbf{E}_{\text{tan}}^+$.

L'équation (3.10) est au cœur de notre méthode de décomposition de domaine. C'est elle qui permet de coupler les sous-domaines sur l'interface. La section suivante §3.3 est consacrée au preconditionnement de cette équation. L'efficacité du preconditionneur utilisé sera illustrée par les expériences numériques dans la section §3.4. On va maintenant s'intéresser à la manière de synthétiser numériquement l'opérateur admittance (on verra plus loin comment synthétiser les autres opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann).

Remarque. Une fois que l'équation (3.10) est résolue, il reste à résoudre le problème complètement, c'est-à-dire à reconstruire les champs \mathbf{E}^+ et \mathbf{E}^- dans les deux sous-domaines. A la fin, on utilise à nouveau les équations intégrales pour résoudre deux problèmes aux limites :

- l'un dans Ω^+ avec $\mathbf{E}_{\text{tan}}^+$ comme condition aux limites sur Σ ,
- l'autre dans Ω^- avec $\mathbf{E}_{\text{tan}}^-$ comme condition aux limites sur Σ .

3.2.4 Obtention de l'admittance modifiée par équation intégrale

Les opérateurs admittance $\mathbb{A}_{\Sigma}^{\pm}$ peuvent être obtenus directement en résolvant une équation intégrale. Une telle équation intégrale se construit à partir de potentiels électromagnétiques, qui sont décrits ci-dessous. La principale différence entre les potentiels apparaissant dans notre cas particulier et ceux de la théorie classique décrits au Chapitre 1, réside dans le fait que les domaines Ω^+ and Ω^- ne sont *pas complémentaires*. Les frontières de ces domaines sont donc distinctes, bien qu'elles possèdent toutes deux l'interface Σ en commun. Par conséquent, les opérateurs de convolution avec le noyau de Green associés respectivement aux potentiels électromagnétiques extérieurs et intérieurs, que nous allons introduire, ne sont pas définis sur les mêmes surfaces. C'est pourquoi nous aurons affaire à quatre potentiels et quatre opérateurs électromagnétiques, au lieu de deux.

Le but de cette section est de montrer comment l'admittance $\mathbb{A}_{\Sigma}^{\pm}$ peut être obtenue grâce à la résolution de l'équation intégrale EFIE. On a vu à la fin du Chapitre 2 et dans l'Annexe C que d'autres équations intégrales peuvent également être proposées ; nous détaillons cette méthode avec EFIE en raison de sa simplicité.

De manière similaire au Chapitre 1, on définit le potentiel vecteur \mathcal{G}^{\pm} , qui associe à un champ de vecteurs tangents $\mathbf{u}^{\pm} \in \mathcal{D}'_T(\Gamma_D^{\pm} \cup \Sigma)$ le champ de vecteurs défini dans Ω^{\pm} par

$$\mathcal{G}^{\pm} \mathbf{u}^{\pm}(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_D^{\pm} \cup \Sigma} \frac{e^{ik\|x-y\|}}{\|x-y\|} \mathbf{u}^{\pm}(y) dy. \quad (3.11)$$

Le potentiel \mathcal{G}^{\pm} sert à définir les deux potentiels de simple couche \mathcal{T}^{\pm} , ainsi que les deux potentiels de double couche \mathcal{K}^{\pm} , de la manière suivante.

$$\mathcal{T}^{\pm} = \frac{1}{ik} \nabla \times (\nabla \times \mathcal{G}^{\pm}) \quad \text{et} \quad \mathcal{K}^{\pm} = \nabla \times \mathcal{G}^{\pm}. \quad (3.12)$$

On note γ_T^{\pm} les traces tangentielles extérieure et intérieure prises depuis les domaines Ω^+ et Ω^- . Les opérateurs de frontière \mathbb{T}^{\pm} et \mathbb{K}^{\pm} sont obtenus à partir des potentiels électromagnétiques. Ils sont définis par :

$$\mathbf{n}^{\pm} \times \mathbb{T}^{\pm} = \mathbf{n}^{\pm} \times \gamma_T^{\pm}(\mathcal{T}^{\pm}) \quad \text{et} \quad \mathbf{n}^{\pm} \times \mathbb{K}^{\pm} = \mathbf{n}^{\pm} \times \gamma_T^{\pm}(\mathcal{K}^{\pm}) + \text{Id}/2.$$

A condition que la surface $\Gamma_D^{\pm} \cup \Sigma$ soit régulière (de classe \mathcal{C}^{∞}), les opérateurs \mathbb{T}^{\pm} and \mathbb{K}^{\pm} sont pseudo-différentiels d'ordre $+1$ and -1 respectivement. Notez que, malheureusement, la surface $\Gamma_D^{\pm} \cup \Sigma$ n'est généralement pas régulière, même si la surface initiale Γ_D est régulière.

Nous reviendrons plus tard sur ce point.

Etant donné un champ électrique $\mathbf{E}^\pm \in W^\pm$ et son champ magnétique relatif \mathbf{H}^\pm , on note κ_0^\pm et κ_1^\pm ses traces électromagnétiques sur la frontière $\Gamma_D^\pm \cup \Sigma$,

$$\kappa_0^\pm \mathbf{E}^\pm = \mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}^\pm \quad \text{et} \quad \kappa_1^\pm \mathbf{E}^\pm = \mathbf{n}^\pm \times \mathbf{H}^\pm \quad \text{sur } \Gamma_D^\pm \cup \Sigma. \quad (3.13)$$

En utilisant le théorème de représentation (Théorème 7) dans le domaine Ω^\pm , on obtient l'expression d'un champ électrique \mathbf{E}^\pm dans W^\pm en fonction de ses traces sur la frontière $\Gamma_D^\pm \cup \Sigma$.

$$\forall \mathbf{E}^\pm \in W^\pm, \quad \mathbf{E}^\pm = \mathcal{T}^\pm(\kappa_1^\pm \mathbf{E}^\pm) - \mathcal{K}^\pm(\kappa_0^\pm \mathbf{E}^\pm). \quad (3.14)$$

L'image $\mathbb{A}_\Sigma^\pm \mathbf{u}_0^\pm$ d'un courant \mathbf{u}_0^\pm défini sur l'interface Σ par l'opérateur admittance \mathbb{A}_Σ^\pm est définie formellement comme suit : on recherche d'abord le champ \mathbf{E}^\pm de W^\pm solution de $\mathbf{E}_{\text{tan}|\Sigma}^\pm = \mathbf{u}_0^\pm$, et ensuite on applique la trace κ_1^\pm à \mathbf{E}^\pm , ce qui nous donne $\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{H}^\pm$ sur Σ . En pratique, la trace $\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{H}^\pm$ est directement obtenue à partir du courant \mathbf{u}_0^\pm en utilisant une équation intégrale, construite à partir du théorème de représentation (3.14).

Pour simplifier les notations, nous restreignons notre exposé au cas du sous-domaine extérieur. Le cas du sous-domaine intérieur peut être traité de la même manière. On rappelle que l'on a noté $P^+ : \mathcal{D}'(\Sigma) \rightarrow \mathcal{D}'(\Gamma_D^+ \cup \Sigma)$ l'opérateur qui prolonge par 0 à Γ_D^+ un courant défini sur Σ . On a noté $R^+ : \mathcal{D}'(\Gamma_D^+ \cup \Sigma) \rightarrow \mathcal{D}'(\Sigma)$ l'opérateur qui restreint à Σ un courant défini sur $\Gamma_D^+ \cup \Sigma$.

Soit $\mathbf{u}_0^+ \in \mathcal{D}'(\Sigma)$ un courant défini sur l'interface artificielle Σ . Notre premier objectif est de trouver $\mathbf{E}^+ \in W^+$ tel que $\mathbf{E}_{\text{tan}}^+ = P^+ \mathbf{u}_0^+$. En appliquant la trace κ_0^+ à la formule (3.14), on obtient

$$(\mathbf{n}^+ \times \mathbf{T}^+)(\kappa_1^+ \mathbf{E}^+) = \left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{n}^+ \times \mathbf{K}^+ \right) (\kappa_0^+ \mathbf{E}^+).$$

En prenant le produit vectoriel de l'équation précédente avec $-\mathbf{n}^+$, cela nous donne

$$\mathbf{T}^+(\mathbf{n}^+ \times \mathbf{H}^+) = \left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{K}^+ \mathbf{n}^+ \times \right) (\mathbf{E}_{\text{tan}}^+).$$

Cette équation a la forme de l'équation intégrale en champ électrique EFIE :

$$\text{Trouver le courant } \mathbf{u}^+, \text{ tel que } \mathbf{T}^+(\mathbf{u}^+) = \left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{K}^+ \mathbf{n}^+ \times \right) (P^+ \mathbf{u}_0^+).$$

La restriction à Σ de la solution \mathbf{u}^+ de (3.16) est la trace $\mathbf{n}^+ \times \mathbf{H}^+$ que nous recherchons, et nous avons donc

$$\mathbb{A}_\Sigma^+ \mathbf{u}_0^+ = R^+ \mathbf{u}^+.$$

Nous résumons cela ci-dessous.

Définition 47 (Obtention de l'admittance par EFIE).

L'admittance \mathbb{A}_Σ^+ appliquée à un courant \mathbf{u}_0^+ défini sur Σ est donnée par

$$\mathbb{A}_\Sigma^+ \mathbf{u}_0^+ = R^+ \mathbf{u}^+, \quad (3.15)$$

où \mathbf{u}^+ est obtenu en résolvant l'EFIE

$$\text{Trouver le courant } \mathbf{u}^+, \text{ tel que } \mathbb{T}^+(\mathbf{u}^+) = \left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbb{K}^+ \mathbf{n}^+ \times \right) (P^+ \mathbf{u}_0^+). \quad (3.16)$$

Remarque. La même méthode peut être appliquée pour le calcul de l'admittance \mathbb{A}_Σ^- dans le sous-domaine interne, mais avec le bémol suivant : puisque les problèmes métalliques intérieurs possèdent des fréquences de résonance [22], [46], l'utilisation de l'EFIE mène à un algorithme convergeant potentiellement lentement (ou non convergent) à proximité de ces résonances.

L'équation (3.10) conduit malheureusement à des systèmes linéaires mal conditionnés, comme nous le verrons dans la section §3.4 qui concerne les résultats numériques. L'objectif dans le paragraphe suivant est donc de préconditionner ce système, pour obtenir une DDM utilisable en pratique.

3.3 Un préconditionneur analytique pour la DDM en \mathbf{Y}

Comme nous le verrons plus loin, l'équation (3.10) conduit malheureusement, après discrétisation, à un système linéaire mal conditionné. Dans cette section, il s'agit donc de trouver un préconditionneur pour l'opérateur $(\mathbb{A}_\Sigma^+ + \mathbb{A}_\Sigma^-)$. L'approche qui suit est validée, d'un point de vue numérique, par les expériences numériques que nous présentons dans la section suivante. D'un autre côté, le but de cette section est d'introduire un cadre théorique suggérant que l'équation préconditionnée est bien posée. Malheureusement, ces résultats théoriques ne s'appliquent pour l'instant que dans un cas idéal qui n'est pas vérifié dans les situations concrètes. Dans les cas pratiques, on doit donc se contenter de les considérer comme une justification heuristique du comportement de l'équation et, on peut l'espérer, comme la base de résultats futurs plus généraux.

3.3.1 Un lemme préliminaire

Le préconditionneur proposé est fondé sur le lemme suivant.

Lemme 48.

Soit D_0 un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^3 de frontière lisse Γ_0 , définissant deux domaines ouverts : le domaine intérieur Ω_0^- (l'intérieur de D_0) et le domaine extérieur Ω_0^+ (le complémentaire de D_0 dans \mathbb{R}^3). On définit comme au §3.2.1 les opérateurs admittance relatifs à la frontière Γ_0 , \mathbb{A}_0^- pour le domaine intérieur et \mathbb{A}_0^+ pour le domaine extérieur. On définit le potentiel simple couche \mathcal{T} et sa trace tangentielle T respectivement par (1.6) et (1.11) pour la frontière Γ_0 . Si k^2 n'est pas une valeur propre pour le problème intérieur de Maxwell, alors \mathbb{A}_0^- est bien défini et l'on a

$$(\mathbb{A}_0^+ + \mathbb{A}_0^-)T = \text{Id}, \quad (3.17)$$

$$T(\mathbb{A}_0^+ + \mathbb{A}_0^-) = \text{Id}. \quad (3.18)$$

Démonstration Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{D}'_T(\Gamma_0)$ un courant sur Γ_0 , et soit $\mathbf{E} = \mathcal{T}\mathbf{u}$ dans Ω^+ et Ω^- . Par continuité du potentiel \mathcal{T} à travers Γ_0 , il vient

$$\mathbf{E}_{\text{tan}}^+ = \mathbf{E}_{\text{tan}}^- = T\mathbf{u}.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^+ \times \mathbf{H}^+ + \mathbf{n}^- \times \mathbf{H}^- &= \mathbb{A}_0^+ \mathbf{E}_{\text{tan}}^+ + \mathbb{A}_0^- \mathbf{E}_{\text{tan}}^- = (\mathbb{A}_0^+ + \mathbb{A}_0^-)(T\mathbf{u}) \\ &= (\sigma_1^+ \mathcal{T} - \sigma_1^- \mathcal{T})\mathbf{u} = \mathbf{u}, \end{aligned}$$

puisque le saut de Neumann du potentiel simple couche est l'identité [46]. On rappelle que σ_1^\pm désigne la trace électromagnétique de Neumann. On a donc démontré la formule (3.17).

Pour l'équation (3.18), soit $\mathbf{u} \in \mathcal{D}'_T(\Gamma_0)$. Puisque k^2 n'est pas une valeur propre du problème intérieur de Maxwell, l'opérateur T est bijectif et il existe $\mathbf{v} \in \mathcal{D}'_T(\Gamma_0)$ tel que $\mathbf{u} = T\mathbf{v}$. Soit $\mathbf{E} = \mathcal{T}\mathbf{v}$ dans Ω^+ et Ω^- . On a alors

$$\mathbf{E}_{\text{tan}}^+ = \mathbf{E}_{\text{tan}}^- = T\mathbf{v} = \mathbf{u},$$

et par conséquent

$$T(\mathbb{A}_0^+ + \mathbb{A}_0^-)\mathbf{u} = T(\sigma_1^+ - \sigma_1^-)\mathcal{T}\mathbf{v} = T\mathbf{v} = \mathbf{u},$$

puisque le saut de Neumann du potentiel de simple couche est l'identité. \square

Ce lemme suggère de préconditionner l'équation (3.10) par l'opérateur T_Σ , défini à partir de l'opérateur T restreint à l'interface Σ .

Définition 49 (Opérateur T_Σ).

On note F le noyau explicite du potentiel de simple couche \mathcal{T} , qui peut être calculé à partir des formules (1.5) et (1.6). L'opérateur $T_\Sigma : \mathcal{D}'(\Sigma) \rightarrow \mathcal{D}'(\Sigma)$ est défini comme l'opérateur de convolution

$$T_\Sigma \mathbf{u}(x) = \int_\Sigma F(x-y)\mathbf{u}(y) dy.$$

3.3.2 Un préconditionneur pour la DDM

Notre premier objectif était de démontrer que les opérateurs $T_\Sigma(\mathbb{A}_\Sigma^+ + \mathbb{A}_\Sigma^-)$ et $(\mathbb{A}_\Sigma^+ + \mathbb{A}_\Sigma^-)T_\Sigma$ sont des perturbations compactes de l'identité. Malheureusement, nous n'avons pu montrer ce résultat dans le cas où la surface Γ_D de l'objet diffractant est lisse. Ceci implique en effet que les surfaces $\Gamma_D^- \cup \Sigma$ et $\Gamma_D^+ \cup \Sigma$ des sous-domaines ne sont pas régulières (FIG. 3.2), ce qui nous empêche d'utiliser la théorie pseudo-différentielle.

Au lieu de cela, nous considérons un cas simplifié où l'on suppose que la surface Γ_D n'est pas régulière, mais telle que les deux frontières $\Gamma_D^+ \cup \Sigma$ et $\Gamma_D^- \cup \Sigma$ soient de régularité \mathcal{C}^∞ . Par exemple, en dimension 2, cela implique l'existence de deux points de rebroussement (FIG. 3.8, sur la gauche). Nous introduisons également une légère modification (3.19) de l'opérateur T_Σ constituant le préconditionneur, ainsi qu'une restriction sur le support des fonctions auxquelles il est appliqué.

Avec les notations introduites au §3.2.2 pour l'opérateur de restriction R^\pm et l'opérateur de prolongement P^\pm , nous avons

$$\mathbb{A}_\Sigma^\pm = R^\pm \mathbb{A}^\pm P^\pm \quad \text{et} \quad T_\Sigma = R^\pm T^\pm P^\pm.$$

Soit Σ_0 une partie compacte de Σ , et soit $\chi_0 : \Sigma \rightarrow [0, 1]$ une fonction de troncature de régularité \mathcal{C}^∞ , portée par l'intérieur de Σ , et telle que $\chi_0 = 1$ sur Σ_0 . On note \widetilde{T}_Σ l'opérateur

$$\widetilde{T}_\Sigma = \chi_0 T_\Sigma. \quad (3.19)$$

Comme annoncé en début de section, notre première tentative était de montrer que T_Σ constitue un bon préconditionneur à gauche ou à droite pour le système linéaire d'opérateur sous-jacent $(\mathbb{A}_\Sigma^+ + \mathbb{A}_\Sigma^-)$, comme le suggèrent les expériences numériques. Nous n'avons pu le prouver, mais le théorème suivant peut être considéré comme une première étape dans cette direction. Nous y démontrons que \widetilde{T}_Σ est un bon préconditionneur à gauche, lorsqu'il est appliqué à des fonctions à support dans Σ_0 .

Théorème 50 (Un préconditionneur analytique pour la DDM en Y).

Soit $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_T^s(\Sigma)$ telle que $\mathbf{u} = 0$ sur $\Sigma \setminus \Sigma_0$. Alors

$$\widetilde{T}_\Sigma(\mathbb{A}_\Sigma^+ + \mathbb{A}_\Sigma^-)\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad (3.20)$$

avec $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_T^{s+1}(\Sigma)$.

Démonstration Le théorème de représentation, appliqué à la surface lisse $\Gamma_D^+ \cup \Sigma$, nous donne

$$(\mathbf{n}^+ \times T^+)(-\mathbb{A}^+ \mathbf{n}^+ \times) - \left(\mathbf{n}^+ \times K^+ - \frac{1}{2} \text{Id} \right) = \text{Id}.$$

Par suite,

$$T^+ \mathbb{A}^+ = \frac{1}{2} \text{Id} + K^+ \mathbf{n}^+ \times. \quad (3.21)$$

Puisque la frontière $\Gamma_D^+ \cup \Sigma$ est lisse, l'opérateur $K^+ \mathbf{n}^+ \times$ est d'ordre -1 . Notre but est d'étendre ce résultat à l'opérateur $\widetilde{T}_\Sigma \mathbb{A}_\Sigma^+$. Nous avons

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_\Sigma \mathbb{A}_\Sigma^+ &= (\chi_0 R^+ T^+ P^+) (R^+ \mathbb{A}^+ P^+) \\ &= \chi_0 R^+ (T^+ \mathbb{A}^+) P^+ + \chi_0 R^+ T^+ (P^+ R^+ \mathbb{A}^+ - \mathbb{A}^+) P^+. \end{aligned}$$

On voit clairement que pour $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_T^s(\Sigma)$, l'expression $\mathbf{v} := (P^+ R^+ \mathbb{A}^+ - \mathbb{A}^+) P^+ \mathbf{u}$ s'annule sur Σ . Puisque T^+ est un opérateur de convolution avec un noyau $F(x, y)$ qui est de classe \mathcal{C}^∞ pour $x \neq y$, on en déduit que $\chi_0 R^+ T^+ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_T^\infty(\Sigma)$. Ceci montre que l'opérateur

$$\chi_0 R^+ T^+ (P^+ R^+ \mathbb{A}^+ - \mathbb{A}^+) P^+$$

est d'ordre $-\infty$. Notons que nous avons utilisé le fait que le support de χ_0 est inclus dans l'intérieur de Σ .

D'un autre côté, l'équation (3.21) nous donne

$$\chi_0 R^+ (T^+ \mathbb{A}^+) P^+ \mathbf{u} = \chi_0 R^+ \left(\frac{1}{2} \text{Id} + K^+ \mathbf{n}^+ \times \right) P^+ \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}}{2} + \mathbf{w}^+,$$

avec $\mathbf{w}^+ \in \mathbf{H}_T^{s+1}(\Sigma)$. Notons que l'on a utilisé ici le fait que $P^+ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_T^s(\partial\Omega^\pm)$.

On obtient le même type de résultat pour le cas intérieur, d'où l'on déduit

$$\widetilde{T}_\Sigma \mathbb{A}_\Sigma^+ \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}}{2} + \mathbf{v}^+, \quad \widetilde{T}_\Sigma \mathbb{A}_\Sigma^- \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}}{2} + \mathbf{v}^-,$$

avec $\mathbf{v}^\pm \in \mathbf{H}_T^{s+1}(\Sigma)$. On obtient alors directement l'équation (3.20). \square

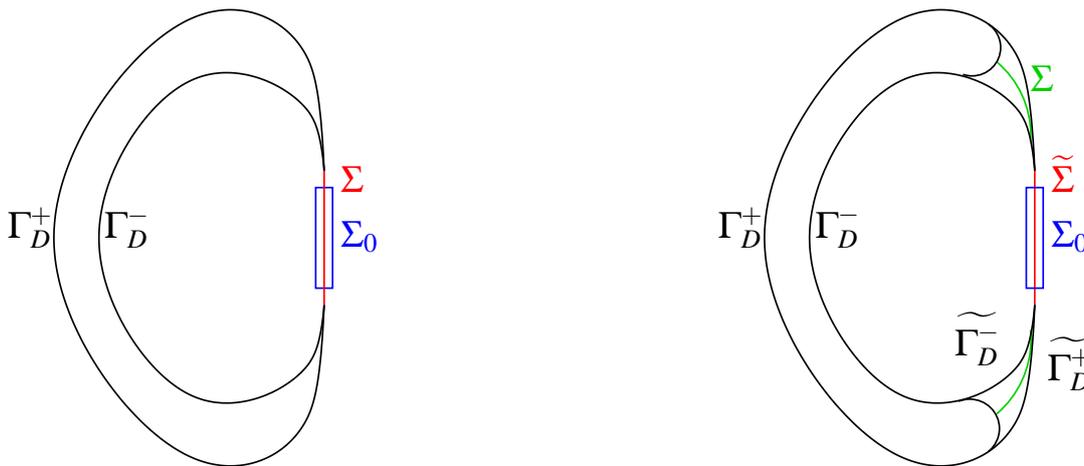


FIGURE 3.8 – Le cas d'application du théorème (à gauche) et le cas réel (à droite).

Dans le cas d'application réel, la frontière Γ_D est lisse, donc les surfaces $\Gamma_D^\pm \cup \Sigma$ sont toutes deux lipschitziennes mais pas de régularité \mathcal{C}^1 . Il est bien connu que dans ce cas, l'opérateur \mathbf{K}^\pm n'est plus un opérateur compact dans $\mathbf{H}_T^s(\Gamma_D^\pm \cup \Sigma)$ (voir par exemple [16]). Pour étudier ce cas, une première possibilité consiste à se ramener au cas du théorème en transformant les frontières $\Gamma_D^\pm \cup \Sigma$ en de nouvelles frontières $\widetilde{\Gamma}_D^\pm \cup \widetilde{\Sigma}$, de sorte que celles-ci soient \mathcal{C}^∞ (FIG. 3.8, à droite), et en introduisant les fonctions de troncature χ_0^\pm . L'analyse théorique de ces deux approximations, le changement de frontières et la multiplication par la fonction régulière χ_0^\pm , n'est cependant pas évidente. Une approche plus directe serait d'étendre la théorie des équations intégrales à des surfaces avec singularités. Une telle théorie a été développée par Molko-Daugas [45] pour les problèmes bi-dimensionnels de Helmholtz, mais son extension au cas du problème de Maxwell tridimensionnel n'est pas immédiate.

3.4 Résultats numériques pour la DDM en Y

3.4.1 Discrétisation

Dans cette section, on décrit la discrétisation numérique du préconditionnement par l'opérateur T_Σ de l'équation (3.10), qui couple les sous-domaines dans notre méthode de décomposition de domaine. On ne décrit pas la discrétisation de l'EFIE, et donc des opérateurs admittance \mathbb{A}_Σ^+ et \mathbb{A}_Σ^- .

Par conséquent, on considère seulement le maillage de l'interface. On note Σ_h une famille de triangulations de Σ . L'espace des éléments finis H_{div} -conformes de Rao-Wilton-Glisson, dits aussi éléments finis de Raviart-Thomas d'ordre 0 [49] est noté X_h . Etant donné un opérateur A , on note $[A]$ la matrice de Galerkin pour le produit L^2 dans les fonctions de base X_h , relative à l'opérateur A . Dans la suite, $[\text{Id}]$ et $[T_\Sigma]$ désignent les matrices de Galerkin respectivement de l'opérateur identité (la matrice masse sur l'interface) et de T_Σ .

Pour préconditionner la DDM, nous avons proposé mathématiquement une multiplication par l'opérateur T_Σ . Du point de vue numérique, l'objectif est d'obtenir un système linéaire proche de l'identité. Si l'on ne faisait que multiplier le vecteur par la matrice $[T_\Sigma]$, on obtiendrait un système linéaire proche de la matrice masse $[\text{Id}]$. C'est pourquoi on doit effectuer numériquement une multiplication par la matrice $[\text{Id}]^{-1}[T_\Sigma]$, pour aboutir à un système linéaire proche de l'identité, donc mieux conditionné. Comme l'illustre bien la suite, le fait de préconditionner la méthode en multipliant par la matrice de Galerkin $[T_\Sigma]$ n'est pas suffisant pour assurer une convergence optimale. On a aussi besoin d'inverser le système par la matrice masse sur l'interface. Cette inversion est réalisée grâce à une résolution itérative, de faible coût numérique, car la matrice de Galerkin $[\text{Id}]$ est creuse. Cette opération permet de convertir un vecteur dont les coefficients sont les produits scalaires L^2 avec les fonctions de base, en un vecteur d'amplitude (un vecteur dont les coefficients sont les coordonnées dans la base de fonctions).

On appelle DDM Y0 l'équation initiale non préconditionnée relative au système linéaire $(\mathbb{A}_\Sigma^+ + \mathbb{A}_\Sigma^-)$,

$$(\mathbb{A}_\Sigma^+ + \mathbb{A}_\Sigma^-)\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{rhs}}. \quad (\text{DDM Y0})$$

DDM Y1 désigne l'équation avec le préconditionneur à gauche constitué de la matrice de Galerkin de l'opérateur simple couche,

$$[T_\Sigma](\mathbb{A}_\Sigma^+ + \mathbb{A}_\Sigma^-)\mathbf{u} = [T_\Sigma]\mathbf{u}_{\text{rhs}}. \quad (\text{DDM Y1})$$

DDM Y2 est l'équation avec préconditionneur à gauche, constitué de la matrice de Galerkin de l'opérateur simple couche, suivie par une inversion par la matrice masse $[\text{Id}]$,

$$[\text{Id}]^{-1}[T_\Sigma](\mathbb{A}_\Sigma^+ + \mathbb{A}_\Sigma^-)\mathbf{u} = [\text{Id}]^{-1}[T_\Sigma]\mathbf{u}_{\text{rhs}}. \quad (\text{DDM Y2})$$

DDM Y3 désigne l'équation avec préconditionneur à droite, constitué de la matrice de Galerkin de l'opérateur simple couche, suivie par une inversion par la matrice masse $[\text{Id}]$,

$$(\mathbb{A}_\Sigma^+ + \mathbb{A}_\Sigma^-)[\text{Id}]^{-1}[T_\Sigma]\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{rhs}}. \quad (\text{DDM Y3})$$

3.4.2 Etude de la vitesse de convergence

Nous étudions la sensibilité de la méthode préconditionnée à différents facteurs, tels que le nombre de degrés de libertés (DoF pour *Degrees Of Freedom*), qui reflète la taille du maillage, la fréquence et la nature de l'obstacle diffractant D .

Nom du maillage	Forme de l'objet	Forme de l'interface	Inconnues sur l'interface			Fréquence	
sp-108	Pas d'objet	Sphère	168			68 MHz	
Résidu		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
Itérations DDM Y0		9	14	21	36	47	56
Itérations DDM Y1		2	4	6	8	10	12
Itérations DDM Y2		1	2	2	3	4	4
Itérations DDM Y3		1	1	2	3	3	4

FIGURE 3.9 – Sphère fictive (maillage sp-108, fréquence de 68 MHz)

Nom du maillage	Forme de l'objet	Forme de l'interface	Interface	Fréquence	Domaine extérieur	Domaine intérieur	
smallBox	Cavité parallélépipédique	Rectangle	102 inconnues	100 MHz	972 inconnues	312 inconnues	
Résidu		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
Itérations DDM Y0		2	15	19	37	47	> 1000
Itérations DDM Y1		2	4	8	11	13	16
Itérations DDM Y2		2	3	5	7	8	10
Itérations DDM Y3		5	7	9	11	12	14

FIGURE 3.10 – Petite boîte parallélépipédique (maillage smallBox, fréquence de 100 MHz)

Nom du maillage	Forme de l'objet	Forme de l'interface	Inconnues sur l'interface	Fréquence			
spHalfSmashed	Demi-sphère enfoncée	Portion de sphère manquante	28	10 GHz			
Résidu		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
Itérations DDM Y0		7	10	15	17	19	19
Itérations DDM Y1		3	6	7	11	13	16
Itérations DDM Y2		2	3	6	8	9	10
Itérations DDM Y3		2	4	6	8	9	10

FIGURE 3.11 – Demi-sphère enfoncée (maillage spHalfSmashed, fréquence de 10 GHz)

Tout d'abord, on considère le cas dégénéré où il n'y a *pas d'objet diffractant*. On note Σ la sphère centrée à l'origine et de diamètre 1m, et on décompose \mathbb{R}^3 en deux sous-domaines :

l'intérieur et l'extérieur de cette sphère. L'intérêt est de vérifier la bonne transmission de l'information sur les champs à l'interface. La même situation dégénérée a été considérée au Lemme 48. Les courbes de convergence sont présentées FIG. 3.12, à la fréquence de 68 MHz, pour la sphère maillée avec 168 DoF, et pour les quatre équations décrites ci-dessus. Notre première observation est que la méthode non préconditionnée DDM Y0 converge beaucoup plus lentement que les trois autres équations préconditionnées DDM Y1, DDM Y2 et DDM Y3. L'équation DDM Y2 converge plus vite que l'équation DDM Y1, qui souffre de l'absence de l'inversion par la matrice masse. Les résultats obtenus avec le préconditionneur à droite (DDM Y3) sont comparables à ceux avec le préconditionneur à gauche (DDM Y2) ; les deux convergent en très peu d'itérations : seulement 4.

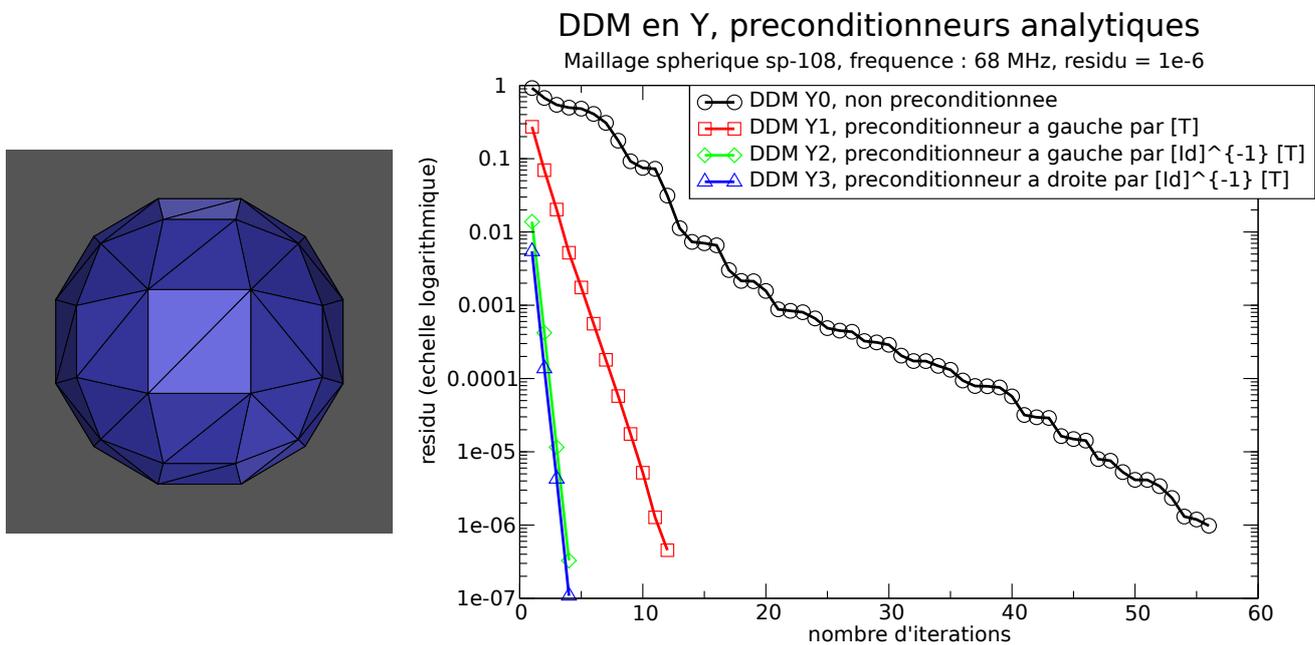


FIGURE 3.12 – Maillage (à gauche) et courbes de convergence (à droite) pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-6} , pour la sphère artificielle à 68 MHz maillée avec 168 DoF.

Dans les expériences numériques suivantes, l'objet diffractant est présent et contient une cavité, ce qui correspond au cas réel que nous désirons traiter. Tout d'abord, nous considérons le cas d'un objet dont la forme est celle d'une boîte parallélépipédique, ouverte à l'une de ses extrémités (FIG. 3.13 et FIG. 3.14), et qui possède une cavité profonde. L'interface Σ de cette boîte parallélépipédique est un rectangle plat et est maillée avec 102 DoF. Pour un résidu d'ordre 10^{-6} , à une fréquence de 100 MHz, les DDMs DDM Y1, DDM Y2 et DDM Y3 convergent respectivement en 16, 14 et 10 itérations tandis que la méthode non préconditionnée DDM Y0 n'a pas atteint la convergence après 1000 itérations.

On s'intéresse ensuite au cas d'une demi-sphère qui est enfoncée (FIG. 3.15), la cavité obtenue étant peu profonde. Dans ce deuxième cas, l'interface Σ est maillée avec 28 DoF. Comme on pouvait s'y attendre, l'amélioration apportée par le préconditionnement dans cet exemple

n'est pas aussi flagrante que dans le cas d'une cavité profonde.

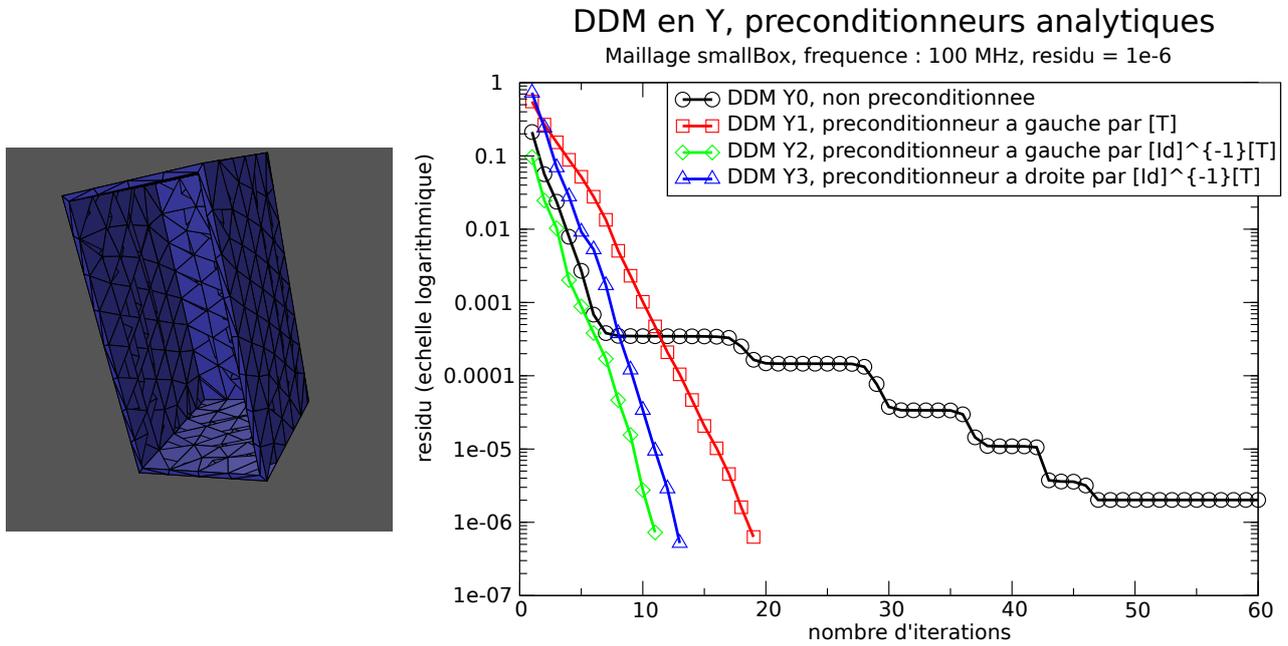


FIGURE 3.13 – Maillage (à gauche) et courbes de convergence (à droite) pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-6} , pour la boîte parallélépipédique smallBox à 100 MHz maillée avec 102 DoF sur Σ .

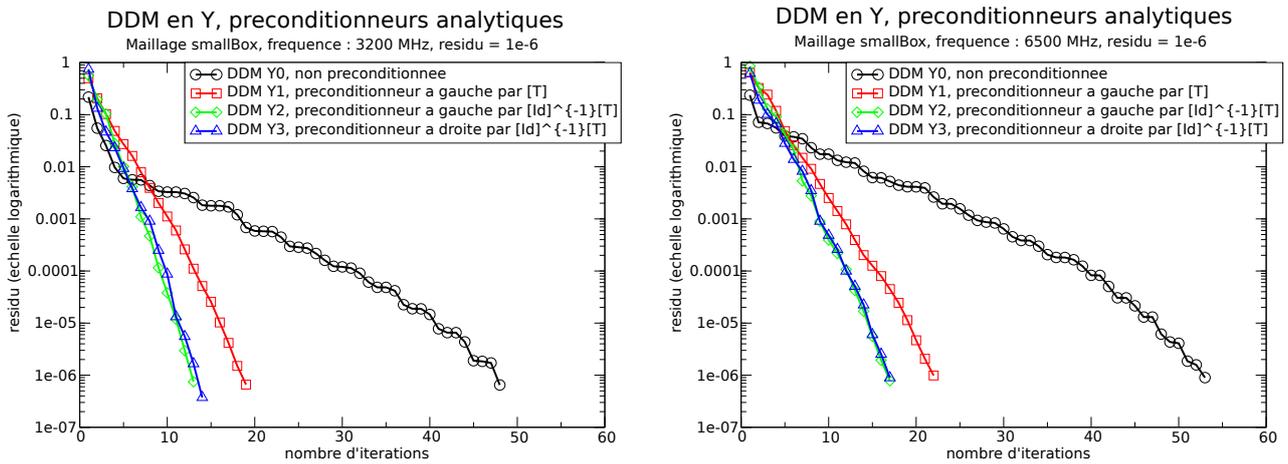


FIGURE 3.14 – Courbes de convergence pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-6} , pour le maillage smallBox maillé avec 102 DoF sur l'interface Σ , à une fréquence de **3200 MHz** (à gauche) et de **6500 MHz** (à droite).

Pour chaque maillage et pour les quatre équations DDM Y0, DDM Y1, DDM Y2 et DDM Y3, le nombre d'itérations pour atteindre un résidu donné est présenté, sur les tableaux suivants : FIG. 3.9, FIG. 3.10 et FIG. 3.11.

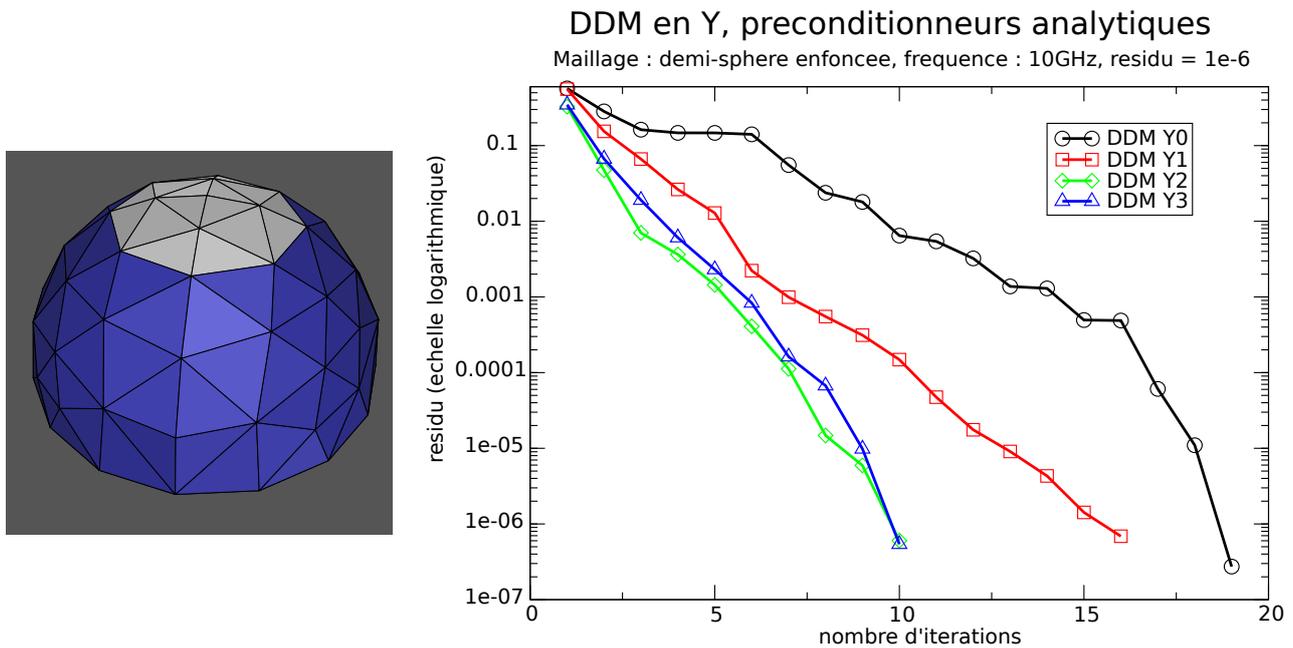


FIGURE 3.15 – Maillage (à gauche) et courbes de convergence (à droite) pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-6} , pour la demi-sphère enfoncée à 10 GHz maillée avec 28 DoF sur Σ .

3.4.3 Validation numérique : comparaison des SER

Nous validons les quatre algorithmes correspondant aux méthodes de décomposition de domaine DDM Y0, DDM Y1, DDM Y2 et DDM Y3 sur le maillage sphérique sp-108, et sur le maillage parallélépipédique smallBox comportant une cavité.

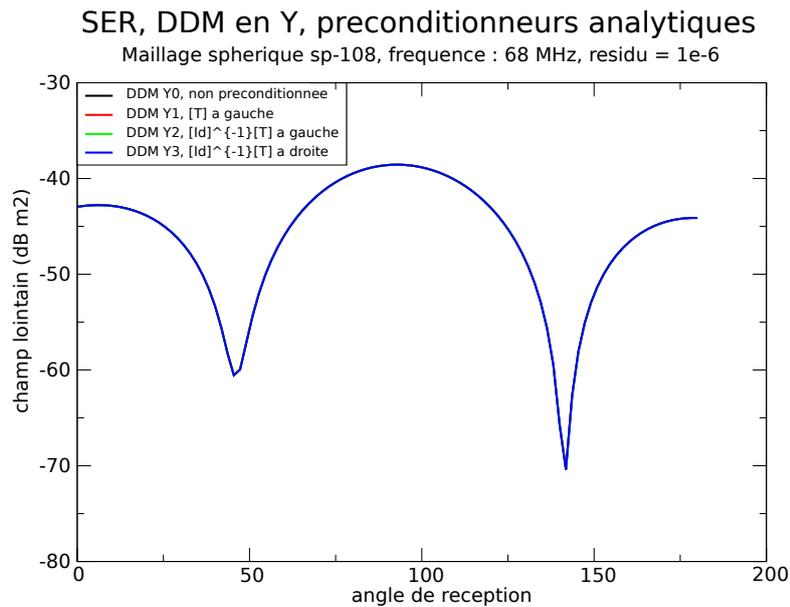


FIGURE 3.16 – Courbes de SER pour la sphère sp-108 à 68 MHz.

Nous présentons la SER des DDM en Y pour le maillage sphérique sp-108 sur la FIG. 3.16. Puisque toute la sphère constitue l'interface fictive, c'est comme s'il n'y avait pas d'objet. On s'attend donc à ce que la SER obtenue soit très faible, puisque le champ diffracté doit être nul. C'est bien ce que l'on observe : le module du champ lointain est inférieur à -40 dB m^2 , soit inférieur à $10^{-4} m^2$.

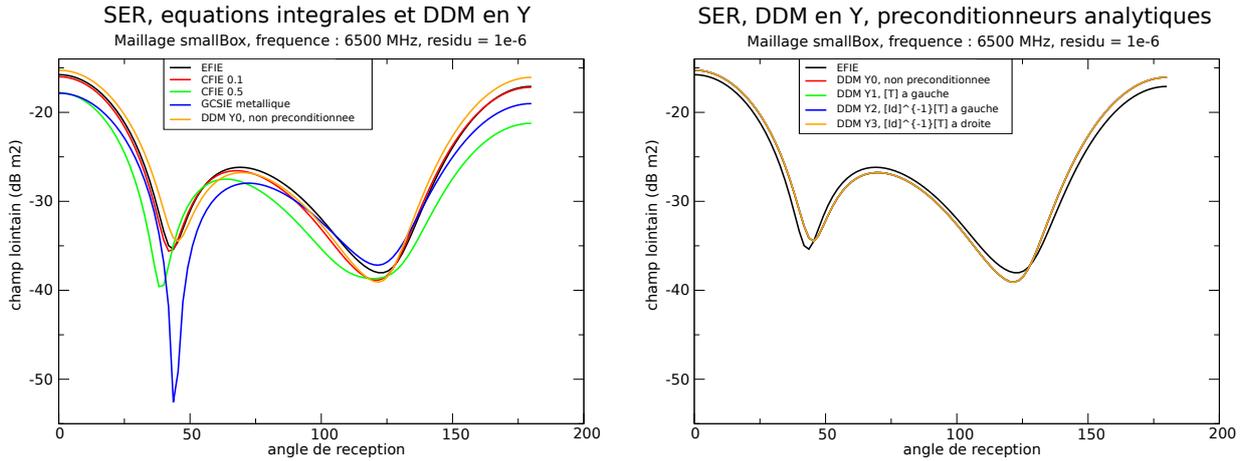


FIGURE 3.17 – Courbes de SER pour le maillage smallBox à 6500 MHz.

Pour valider la SER d'une DDM en Y sur le maillage smallBox, nous la comparons avec la SER obtenue sur le maillage smallBox non découpé par l'interface, à l'aide d'une méthode d'équation intégrale (FIG. 3.17). Nous observons que la courbe de SER de la DDM en Y non préconditionnée, DDM Y_0 , est proche de celle de l'EFIE, tandis que les DDMs en Y préconditionnées DDM Y_1 , DDM Y_2 et DDM Y_3 ont leurs courbes de SER superposées à celle de DDM Y_0 .

3.4.4 Influence de la montée en fréquence

Jusqu'à présent, nous n'avons testé le préconditionneur de la DDM que sur des maillages de très petite taille (bien que les maillages des sous-domaines soient eux de taille plus conséquente). Nous nous intéressons maintenant à des maillages de taille plus grosse.

Fréquence (MHz)	50	68	100	150	200	250	300	360
DDM Y_0 (résidu de 10^{-5})	96	101	104	160	181	189	199	216
DDM Y_2 (résidu de 10^{-5})	4	4	4	4	4	4	4	4
DDM Y_0 (résidu de 10^{-6})	> 300	> 500	183	219	243	247	249	277
DDM Y_2 (résidu de 10^{-6})	4	4	4	4	4	4	4	5

FIGURE 3.18 – Nombre d'itérations pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-5} ou 10^{-6} , en fonction de la fréquence pour la sphère artificielle sp-2048 maillée avec 3072 DoF.

Notre deuxième expérience illustre l'influence de l'augmentation de la fréquence sur la vitesse de convergence, pour le même cas test dégénéré mais avec un maillage plus fin pour l'interface

sphérique Σ , qui comporte 3072 DoF. On choisit de comparer seulement l'équation DDM Y0 (sans préconditionneur) avec l'équation DDM Y2 (avec préconditionneur à gauche). Le nombre d'itérations pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-5} augmente avec la fréquence pour l'équation DDM Y0, tandis qu'il reste stable (toujours 4 itérations) pour l'équation DDM Y2 (FIG. 3.19 et FIG. 3.18). Pour un résidu d'ordre 10^{-6} , à certaines fréquences, DDM Y0 ne converge pas (FIG. 3.19 et FIG. 3.20).

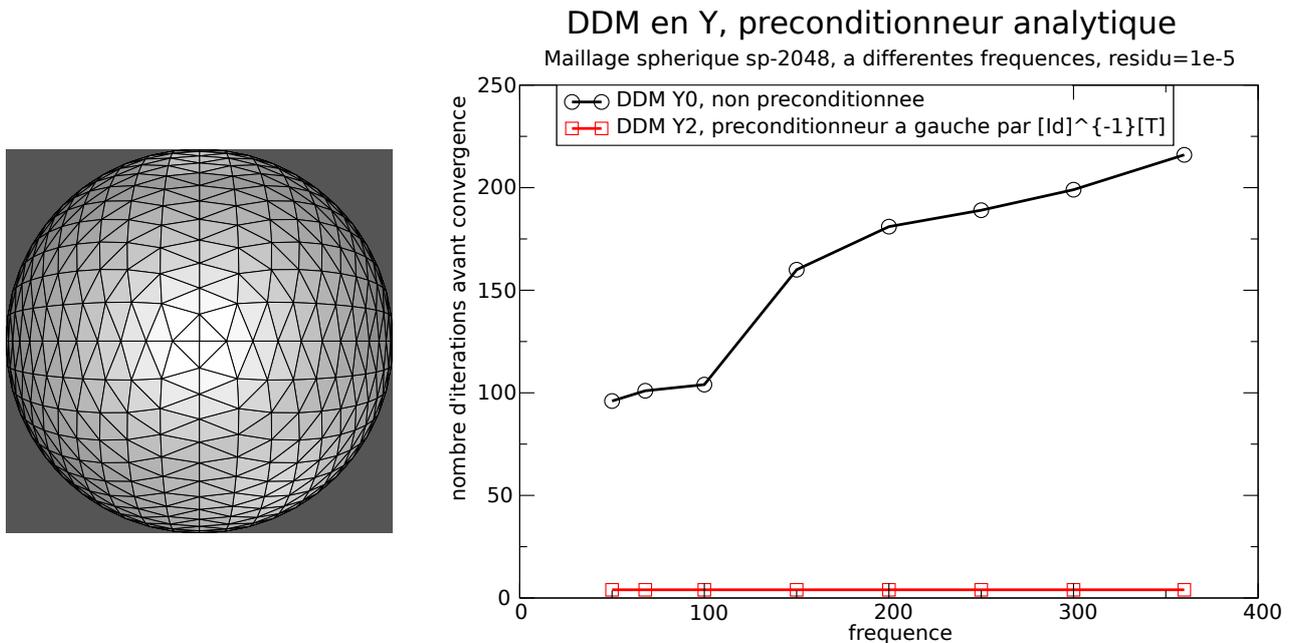


FIGURE 3.19 – Maillage (à gauche) et influence de la fréquence (à droite) sur le nombre d'itérations pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-5} , pour la sphère artificielle sp-2048 maillée avec 3072 DoF.

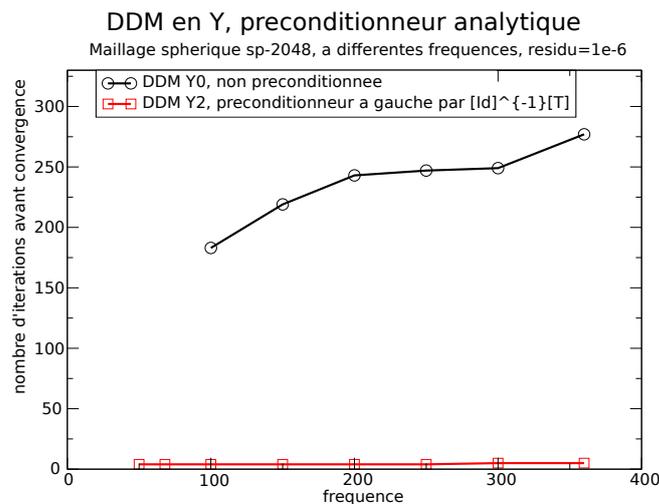


FIGURE 3.20 – Influence de la fréquence sur le nombre d'itérations pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-6} , pour la sphère artificielle sp-2048 maillée avec 3072 DoF.

En conclusion, le préconditionneur proposé conduit à des systèmes linéaires qui sont mieux conditionnés que la DDM initiale, ce qui donne des algorithmes itératifs convergeant plus rapidement. Cet avantage est plus prononcé lorsque la cavité est profonde, comme l'illustrent les expériences présentées sur la figure FIG.3.13. La vitesse de convergence n'est pas altérée par la montée en fréquence, comme on peut le voir sur la figure FIG. 3.19, à droite, et sur la figure FIG. 3.18.

3.4.5 Influence de l'augmentation du nombre d'inconnues

Le plus gros cas testé numériquement jusqu'à présent est le maillage sp-2048 de la sphère de rayon 1m, comportant 2048 éléments et **3072 degrés de liberté**. Nous choisissons maintenant un maillage sp-3528 de la même sphère, comportant cette fois 3528 éléments et **5292 degrés de liberté**. Sur ce maillage sphérique avec 5292 inconnues, en se plaçant à une fréquence de 400 MHz, et pour atteindre un résidu de 10^{-4} , DDM Y2 (la DDM en Y préconditionnée à gauche par $[\text{Id}]^{-1}[\text{T}]$) converge en 28 itérations. Le conditionnement s'est donc dégradé par rapport à celui de l'algorithme testé sur sp-2048 maillé avec 3072 inconnues, à une fréquence de 360 MHz et pour un résidu de 10^{-5} , qui converge en 4 itérations (FIG. 3.22).

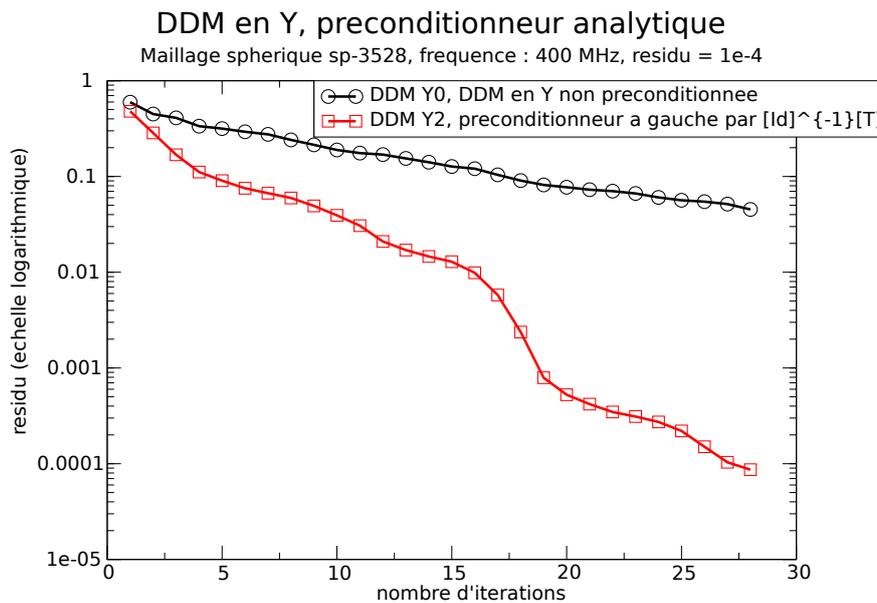


FIGURE 3.21 – Courbes de convergence pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-4} , pour le maillage sphérique sp-3528 avec 5292 DoF, à une fréquence de **400 MHz**, respectivement pour la DDM en Y non préconditionnée et pour DDM Y2, la DDM en Y avec préconditionneur analytique.

Cependant, si l'on observe la courbe de comparaison des résidus en fonction des itérations (FIG. 3.21), on voit immédiatement que la DDM en Y non préconditionnée converge beaucoup moins rapidement que DDM Y2. En particulier, après 28 itérations, DDM Y0 n'a pas atteint un résidu de $5 \cdot 10^{-2}$, tandis que DDM Y2 a atteint un résidu de 10^{-4} . Ce préconditionneur reste donc très compétitif pour des maillages de grande taille.

Equation	Fréquence	Résidu	Maillage	Nombre d'inconnues	Nombre d'itérations
DDM Y2	360 MHz	10^{-5}	sp-2048	3072	4
DDM Y2	400 MHz	10^{-4}	sp-3528	5292	28

FIGURE 3.22 – Comparaison, pour l'algorithme DDM Y2, du nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un résidu donné, à une fréquence donnée, respectivement pour les maillage sp-2048 avec 3072 inconnues, et pour le maillage sp-3528 avec 5292 inconnues.

3.5 Possibilités d'autres DDMs basées sur un DtN

Nous avons observé que l'algorithme préconditionné décrit ci-dessus converge rapidement. Cette efficacité du préconditionneur nous encourage à envisager l'utilisation d'autres équations intégrales dans les sous-domaines, au lieu de l'EFIE. En effet, avoir une DDM bien préconditionnée est une première étape pour pouvoir résoudre des problèmes de diffraction d'ondes. Cependant cette DDM doit dans un deuxième temps être combinée avec des équations intégrales optimales en termes de convergence, pour les solutions locales à l'intérieur des sous-domaines. L'EFIE est bien adaptée au calcul de l'opérateur admittance, mais nous pourrions également exprimer le problème (3.1) en utilisant un autre type d'opérateur, comme par exemple le produit vectoriel de l'admittance avec le vecteur normal unitaire. On pourrait alors résoudre les sous-problèmes en utilisant une GCSIE, qui est bien mieux conditionnée que l'EFIE. Ainsi, le bon comportement de l'équation intégrale dans les sous-domaines viendrait s'ajouter au bon comportement de l'algorithme général de la DDM. Malheureusement, préconditionner la DDM en utilisant dans les sous-domaines ces autres équations intégrales, et donc en utilisant d'autres opérateurs de couplage, s'avère plus compliqué que prévu, comme nous allons le voir dans cette section.

Pour calculer les opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann, on désire utiliser des équations intégrales variées. Ce processus a été décrit au §2.6 du Chapitre 2.

3.5.1 Relations vérifiées par les opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann

On a défini au Chapitre 2 quatre opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann :

$$\begin{aligned}
Y_a &: \mathbf{n} \times \mathbf{E} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \\
Y_b &: \mathbf{E}_{\text{tan}} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \\
Y_c &: \mathbf{n} \times \mathbf{E} \mapsto \mathbf{H}_{\text{tan}}, \\
Y_d &: \mathbf{E}_{\text{tan}} \mapsto \mathbf{H}_{\text{tan}},
\end{aligned}$$

reliés par la relation

$$Y_a = -Y_b \mathbf{n} \times = \mathbf{n} \times Y_c = -\mathbf{n} \times Y_d \mathbf{n} \times .$$

Selon l'opérateur Dirichlet-to-Neumann que l'on souhaite utiliser dans l'équation définissant la méthode de décomposition de domaine, on aura le choix d'utiliser certaines équations intégrales et pas d'autres. Pour plus de détails, on pourra se référer à la section §2.6 du Chapitre 2.

On rappelle que l'on a établi en (2.12), (3.17) et (3.18) les formules suivantes

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{T})(Y_a^+ - Y_a^-) = \text{Id}, \quad (3.22)$$

$$(Y_a^+ - Y_a^-)(\mathbf{n} \times \mathbf{T}) = \text{Id},$$

$$(\mathbf{Tn} \times)(Y_b^+ + Y_b^-) = \text{Id}, \quad (3.23)$$

$$(Y_b^+ + Y_b^-)(\mathbf{Tn} \times) = \text{Id},$$

dans le cas où le problème de Maxwell intérieur métallique est bien posé. On en déduit les relations pour les deux autres opérateurs :

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{Tn} \times)(Y_c^+ + Y_c^-) = \text{Id}, \quad (3.24)$$

$$(Y_c^+ + Y_c^-)(\mathbf{n} \times \mathbf{Tn} \times) = \text{Id},$$

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{T})(Y_d^+ - Y_d^-) = \text{Id}, \quad (3.25)$$

$$(Y_d^+ - Y_d^-)(\mathbf{n} \times \mathbf{T}) = \text{Id}.$$

Selon le type d'opérateur choisi pour écrire la DDM, on est donc enclin à utiliser un certain préconditionneur \mathbf{T} , modulo le produit vectoriel avec la normale \mathbf{n} .

3.5.2 Autres DDMs en Y possibles. Préconditionneurs associés

On rappelle que l'équation à résoudre en toute généralité est le système (3.7) suivant

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\text{tan}}^- = \mathbf{E}_{\text{tan}}^+, \\ -\mathbf{n}^- \times \mathbf{H}^- = \mathbf{n}^+ \times \mathbf{H}^+ + \mathbf{u}_{\text{rhs}}, \end{cases}$$

avec \mathbf{u}_{rhs} défini par la formule (3.6).

En fonction de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann utilisé comme opérateur de couplage entre sous-domaines, on peut réécrire l'équation (3.7) sous quatre formes différentes, DDMa, DDMb, DDMc ou DDMd (on a déjà rencontré DDMb au cours de ce chapitre : DDMb correspond à l'équation (3.10)). Pour une équation intégrale en source, on peut prendre la trace que l'on veut, donc n'importe quel opérateur de type Dirichlet-to-Neumann peut être synthétisé par une équation en source. En revanche, pour une équation en champ, la sortie Output désirée détermine le choix de l'opérateur sous-jacent ; un opérateur de type Dirichlet-to-Neumann ne peut donc pas être synthétisé par n'importe quelle équation en champ. Pour le détail des équations intégrales, nous renvoyons au §2.6 du Chapitre 2.

- (a) Si l'on utilise l'opérateur Y_a défini en (2.15), alors l'équation à résoudre est

$$\boxed{\text{DDMa} : (Y_a^+ - Y_a^-)(\mathbf{n}^+ \times \mathbf{E}^+) = -\mathbf{u}_{\text{rhs}}.}$$

Il est naturel d'après (3.22) de préconditionner l'équation par $\mathbf{n} \times \mathbf{T}$. Puisque l'on a en sortie du $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$, les équations intégrales que l'on peut utiliser pour calculer numériquement Y_a sont :

- * les équations simple couche en champ suivantes : EFIE, $-\mathbf{n} \times \text{EFIE}$.

- ★ les équations double couche en champ suivantes : MFIE, $-\mathbf{n} \times \text{MFIE}$.
- ★ toutes les équations en source, en particulier : GCSIE-metallic, $-\mathbf{n} \times \text{GCSIE} \mathbf{n} \times$ -metallic.
- (b) Si l'on utilise l'opérateur Y_b défini en (2.16), alors l'équation à résoudre est

$$\boxed{\text{DDMb} : (Y_b^+ + Y_b^-)(\mathbf{E}_{\text{tan}}^+) = -\mathbf{u}_{\text{rhs}}.}$$

On a en effet

$$\begin{aligned} (Y_a^+ - Y_a^-) &= -(Y_b^+ + Y_b^-)\mathbf{n} \times, \\ (Y_b^+ + Y_b^-) &= (Y_a^+ - Y_a^-)\mathbf{n} \times. \end{aligned}$$

Il est naturel d'après (3.23) de préconditionner l'équation par \mathbf{T} . Puisque l'on a en sortie du $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$, les équations intégrales que l'on peut utiliser pour calculer numériquement Y_b sont :

- ★ les équations simple couche en champ suivantes : EFIE, $-\mathbf{n} \times \text{EFIE}$.
- ★ les équations double couche en champ suivantes : MFIE, $-\mathbf{n} \times \text{MFIE}$.
- ★ toutes les équations en source, en particulier : GCSIE-metallic, $-\mathbf{n} \times \text{GCSIE} \mathbf{n} \times$ -metallic.
- (c) Si l'on utilise l'opérateur Y_c défini en (2.17), alors l'équation à résoudre est

$$\boxed{\text{DDMc} : (Y_c^+ + Y_c^-)(\mathbf{n}^+ \times \mathbf{E}^+) = -\mathbf{n}^+ \times \mathbf{u}_{\text{rhs}}.}$$

On a en effet

$$\begin{aligned} (Y_a^+ - Y_a^-) &= \mathbf{n} \times (Y_c^+ + Y_c^-), \\ (Y_c^+ + Y_c^-) &= -\mathbf{n} \times (Y_a^+ - Y_a^-). \end{aligned}$$

Il est naturel d'après (3.24) de préconditionner l'équation par $\mathbf{n} \times \mathbf{T} \mathbf{n} \times$. Puisque l'on a en sortie du \mathbf{H}_{tan} , les équations intégrales que l'on peut utiliser pour calculer numériquement Y_c sont :

- ★ les équations simple couche en champ suivantes : $\text{EFIE} \mathbf{n} \times$, $-\mathbf{n} \times \text{EFIE} \mathbf{n} \times$.
- ★ les équations double couche en champ suivantes : $\text{MFIE} \mathbf{n} \times$, $-\mathbf{n} \times \text{MFIE} \mathbf{n} \times$.
- ★ toutes les équations en source, en particulier : GCSIE-metallic, $-\mathbf{n} \times \text{GCSIE} \mathbf{n} \times$ -metallic.
- (d) Si l'on utilise l'opérateur Y_d défini en (2.18), alors l'équation à résoudre est

$$\boxed{\text{DDMd} : (Y_d^+ - Y_d^-)(\mathbf{E}_{\text{tan}}^+) = \mathbf{n}^+ \times \mathbf{u}_{\text{rhs}}.}$$

On a en effet

$$\begin{aligned} (Y_a^+ - Y_a^-) &= -\mathbf{n} \times (Y_d^+ - Y_d^-)\mathbf{n} \times, \\ (Y_d^+ - Y_d^-) &= -\mathbf{n} \times (Y_a^+ - Y_a^-)\mathbf{n} \times. \end{aligned}$$

Il est naturel d'après (3.25) de préconditionner l'équation par $\mathbf{T} \mathbf{n} \times$. Puisque l'on a en sortie du \mathbf{H}_{tan} , les équations intégrales que l'on peut utiliser pour calculer numériquement Y_d sont :

- ★ les équations simple couche en champ suivantes : $\text{EFIE} \mathbf{n} \times$, $-\mathbf{n} \times \text{EFIE} \mathbf{n} \times$.
- ★ les équations double couche en champ suivantes : $\text{MFIE} \mathbf{n} \times$, $-\mathbf{n} \times \text{MFIE} \mathbf{n} \times$.
- ★ toutes les équations en source, en particulier : GCSIE-metallic, $-\mathbf{n} \times \text{GCSIE} \mathbf{n} \times$ -metallic.

Les préconditionneurs possibles sont résumés dans le tableau récapitulatif 3.23.

DtN	$Y : \mathbf{n} \times \mathbf{E} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{H}$	$Y_b : \mathbf{E}_{\text{tan}} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{H}$	$Y_c : \mathbf{n} \times \mathbf{E} \mapsto \mathbf{H}_{\text{tan}}$	$Y_d : \mathbf{E}_{\text{tan}} \mapsto \mathbf{H}_{\text{tan}}$
DDM : Système linéaire Inconnue Second membre	DDMa $(Y_a^+ - Y_a^-)$ $\mathbf{n}^+ \times \mathbf{E}^+$ $-\mathbf{u}_{\text{rhs}}$	DDMb $(Y_b^+ + Y_b^-)$ $\mathbf{E}_{\text{tan}}^+$ $-\mathbf{u}_{\text{rhs}}$	DDMc $(Y_c^+ + Y_c^-)$ $\mathbf{n}^+ \times \mathbf{E}^+$ $-\mathbf{n}^+ \times \mathbf{u}_{\text{rhs}}$	DDMd $(Y_d^+ - Y_d^-)$ $\mathbf{E}_{\text{tan}}^+$ $\mathbf{n}^+ \times \mathbf{u}_{\text{rhs}}$
Préconditionneur	$\boxed{\mathbf{n} \times \mathbf{T}}$	T	$\boxed{\mathbf{n} \times \mathbf{Tn} \times}$	$\boxed{\mathbf{Tn} \times}$
Input	$\mathbf{n} \times \mathbf{E}$	\mathbf{E}_{tan}	$\mathbf{n} \times \mathbf{E}$	\mathbf{E}_{tan}
Output	$\mathbf{n} \times \mathbf{H}$	$\mathbf{n} \times \mathbf{H}$	\mathbf{H}_{tan}	\mathbf{H}_{tan}
Equations possibles	EFIE GCSIE $-\mathbf{n} \times \text{GCSIE} \mathbf{n} \times$	EFIE GCSIE $-\mathbf{n} \times \text{GCSIE} \mathbf{n} \times$	$-\mathbf{n} \times \text{MFI} \mathbf{E} \mathbf{n} \times$ GCSIE $-\mathbf{n} \times \text{GCSIE} \mathbf{n} \times$	$-\mathbf{n} \times \text{MFI} \mathbf{E} \mathbf{n} \times$ GCSIE $-\mathbf{n} \times \text{GCSIE} \mathbf{n} \times$
oprRHS pour les équations en champ	[Id]	[Id]	[Id]	[Id]
oprRHS pour GCSIE	absent	$\boxed{[\text{Id}]^{-1}[\mathbf{n} \times]}$	absent	$\boxed{[\text{Id}]^{-1}[\mathbf{n} \times]}$
oprRHS pour $-\mathbf{n} \times \text{GCSIE} \mathbf{n} \times$	$\boxed{-[\text{Id}]^{-1}[\mathbf{n} \times]}$	absent	$\boxed{-[\text{Id}]^{-1}[\mathbf{n} \times]}$	absent
oprPP pour les équations en champ	absent	absent	absent	absent
oprPP pour GCSIE	$\left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right) \tilde{Y}^+$ $-\mathbf{n} \times \mathbf{T}$	$\left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right) \tilde{Y}^+$ $-\mathbf{n} \times \mathbf{T}$	$\left(-\frac{1}{2} \mathbf{n} \times -\mathbf{K}\right) \tilde{Y}^+$ $+\mathbf{T}$	$\left(-\frac{1}{2} \mathbf{n} \times -\mathbf{K}\right) \tilde{Y}^+$ $+\mathbf{T}$
oprPP pour $-\mathbf{n} \times \text{GCSIE} \mathbf{n} \times$	$\left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right) \tilde{Y}^+ \mathbf{n} \times$ $\boxed{-\mathbf{n} \times \mathbf{Tn} \times}$	$\left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right) \tilde{Y}^+ \mathbf{n} \times$ $\boxed{-\mathbf{n} \times \mathbf{Tn} \times}$	$\left(-\frac{1}{2} \mathbf{n} \times -\mathbf{K}\right) \tilde{Y}^+ \mathbf{n} \times$ $+\mathbf{Tn} \times$	$\left(-\frac{1}{2} \mathbf{n} \times -\mathbf{K}\right) \tilde{Y}^+ \mathbf{n} \times$ $+\mathbf{Tn} \times$

FIGURE 3.23 – Tableau récapitulatif.

3.5.3 Problèmes rencontrés selon les DDMs

Nous énumérons ci-dessous les problèmes rencontrés lorsque l'on veut changer de DDM ou d'équation intégrale sous-jacente. On pourra consulter le tableau 3.23 où l'on a entouré les opérateurs pouvant poser problème.

- **La présence de l'opérateur $\mathbf{n} \times$.** D'une manière générale, l'opérateur $\mathbf{n} \times$ est mal discrétisé sur les éléments finis de Raviart-Thomas. Intuitivement, cela provient du fait que les *loops* (rotationnels surfaciques) et les *stars* (gradients surfaciques) n'y sont pas de même dimension. En particulier, la matrice provenant de la discrétisation de l'opérateur $\mathbf{n} \times$ n'est pas inversible, alors que l'opérateur continu l'est : $(\mathbf{n} \times)^2 = -\text{Id}$. Il est donc souhaitable de ne pas faire apparaître cet opérateur dans la DDM, que ce soit dans oprRHS ou dans oprPP.
- **Le préconditionneur à employer.** Les opérateurs $\mathbf{n} \times \mathbf{T}$, $\mathbf{Tn} \times$ et $\mathbf{n} \times \mathbf{Tn} \times$ sont mal représentés lorsqu'on les programme. Curieusement, lorsque $\mathbf{n} \times \mathbf{T}$ est utilisé dans la GCSIE métallique, cela ne pose pas de problème car le reste des opérateurs intervenant dans l'équation semble compenser, d'une certaine manière, la présence de cet opérateur. Cependant, lorsqu'on veut s'en servir dans une DDM, cela pose problème car on utilise alors l'opérateur seul. En conclusion, le conditionnement des DDMs suivantes : DDMA, DDMc et DDMd, est *a priori* plus difficile à améliorer à l'aide d'un opérateur de type simple couche, que le conditionnement de DDMb. Le mieux serait donc, probablement, de se restreindre à DDMb.

- **Utilisation de l'équation GCSIE métallique dans les sous-domaines.** La GCSIE est naturellement conçue pour prendre en entrée le vecteur d'amplitude (et non de couplage) $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$. C'est pourquoi, dans les DDMs : DDMa et DDMc, pour lesquelles Input = $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$, il n'y a pas d'opérateur oprRHS à appliquer au vecteur d'entrée pour construire le second membre. En revanche, pour les DDMs : DDMb et DDMd, pour lesquelles Input = \mathbf{E}_{tan} , il faut appliquer au vecteur d'entrée l'opérateur oprRHS = $[\text{Id}]^{-1}[\mathbf{n} \times]$ pour construire le second membre. Or nous souhaitons d'une part, éviter d'utiliser l'opérateur $\mathbf{n} \times$, et d'autre part résoudre DDMb pour utiliser le "bon" préconditionneur T. Il semble donc que ce ne soit pas possible en utilisant une GCSIE.
- **Utilisation d'une équation $-\mathbf{n} \times \text{GCSIE} \mathbf{n} \times$ dans les sous-domaines.** Pour pallier à ce problème, on se tourne vers l'équation $-\mathbf{n} \times \text{GCSIE} \mathbf{n} \times$. En effet, puisque l'opérateur sous-jacent à la GCSIE est proche de l'identité, il devrait en être de même pour l'opérateur sous-jacent à $-\mathbf{n} \times \text{GCSIE} \mathbf{n} \times$, puisque

$$-\mathbf{n} \times \text{Id} \mathbf{n} \times = \text{Id}.$$

L'équation $-\mathbf{n} \times \text{GCSIE} \mathbf{n} \times$ devrait donc être intrinsèquement bien conditionnée, tout comme la GCSIE. L'avantage de cette dernière équation est qu'elle prend en entrée \mathbf{E}_{tan} . Utilisée dans DDMb, elle ne nécessiterait donc pas d'opérateur oprRHS. Néanmoins, on s'aperçoit que l'opérateur oprPP, nécessaire pour obtenir $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ en sortie, contient l'opérateur $\mathbf{n} \times \mathbf{T} \mathbf{n} \times$, qui lui est particulièrement difficile à implémenter correctement. Il semble donc que l'on soit dans une impasse.

- **Utilisation d'une équation $-\mathbf{n} \times \text{GCSIE}$ dans les sous-domaines.** Un dernier espoir serait d'utiliser à la place l'équation $-\mathbf{n} \times \text{GCSIE}$, mais dans ce cas le problème est que l'opérateur $\mathbf{n} \times$ n'est pas nécessairement inversible, donc ne conduirait pas nécessairement à une équation bien conditionnée.

3.6 Une formulation à deux inconnues vue comme une application du formalisme GCSIE

On applique ici le formalisme GCSIE (présenté au Chapitre 2) de construction d'une équation bien conditionnée, pour construire une méthode de décomposition de domaine bien conditionnée.

Construction d'une DDM intrinsèquement bien conditionnée

On rappelle que l'équation à résoudre est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_0^+ & \sigma_0^- \\ \sigma_1^+ & \sigma_1^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}^+ \\ \mathbf{E}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{u}_{\text{rhs}} \end{pmatrix}.$$

On pose

$$\gamma := \begin{pmatrix} \sigma_0^+ & \sigma_0^- \\ \sigma_1^+ & \sigma_1^- \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{E} := \begin{pmatrix} \mathbf{E}^+ \\ \mathbf{E}^- \end{pmatrix}.$$

On choisit tout d'abord le potentiel \mathcal{V} permettant de paramétrer l'espace dans lequel on recherche la solution. En notant

$$\mathcal{V}^\pm : \sigma_0^\pm \mathbf{E}^\pm \mapsto \mathbf{E}^\pm \text{ et } \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}^+ & 0 \\ 0 & \mathcal{V}^- \end{pmatrix},$$

le potentiel \mathcal{V} est associé à la trace γ_v suivante

$$\gamma_v := \begin{pmatrix} \sigma_0^+ & 0 \\ 0 & \sigma_0^- \end{pmatrix},$$

au sens où l'on a la formule de paramétrisation $\mathbf{E} = \mathcal{V}(\gamma_v \mathbf{E})$. Si l'on choisit alors

$$\boxed{R : \gamma \mathbf{u} \mapsto \gamma_v \mathbf{u},}$$

il vient naturellement $\gamma \mathcal{V} R = \text{Id}$. La question est maintenant de trouver une bonne approximation \tilde{R} de R .

Posons

$$\begin{cases} x = \sigma_0^+ \mathbf{E} \\ y = \sigma_1^+ \mathbf{E} \end{cases}, \quad \text{alors} \quad R \begin{pmatrix} x + y \\ Y^+ x + Y^- y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En posant

$$\begin{cases} a = x + y \\ b = Y^+ x + Y^- y \end{cases}, \quad \text{il suffit de trouver} \quad \begin{cases} x = Ra, \\ y = Rb. \end{cases}$$

Or on a

$$\begin{cases} (Y^+ - Y^-)x = -Y^- a + b, \\ (Y^+ - Y^-)y = Y^+ a - b, \end{cases}$$

d'où il vient, en utilisant l'égalité $(\mathbf{n} \times \mathbf{T})(Y^+ - Y^-) = \text{Id}$:

$$R \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{n} \times \mathbf{T})(-Y^- a + b) \\ (\mathbf{n} \times \mathbf{T})(Y^+ a - b) \end{pmatrix}.$$

Par analogie avec l'opérateur Dirichlet-to-Neumann d'une surface lisse, on approche Y^\pm par $\tilde{Y}^\pm = \mp 2\mathbf{n} \times \mathbf{T}$. En vertu de la formule de Calderón, on approche de plus $(\mathbf{n} \times \mathbf{T})^2$ par $-(1/4)\text{Id}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \times \mathbf{T})(-\tilde{Y}^- a + b) &= -2(\mathbf{n} \times \mathbf{T})^2 a + (\mathbf{n} \times \mathbf{T})b \approx \frac{1}{2}a + (\mathbf{n} \times \mathbf{T})\mathbf{b}, \\ (\mathbf{n} \times \mathbf{T})(\tilde{Y}^+ a - b) &= -2(\mathbf{n} \times \mathbf{T})^2 a - (\mathbf{n} \times \mathbf{T})b \approx \frac{1}{2}a - (\mathbf{n} \times \mathbf{T})\mathbf{b}. \end{aligned}$$

On choisit donc d'approcher R par

$$\boxed{\tilde{R} = \begin{pmatrix} 1/2 & \mathbf{n} \times \mathbf{T} \\ 1/2 & -\mathbf{n} \times \mathbf{T} \end{pmatrix}.}$$

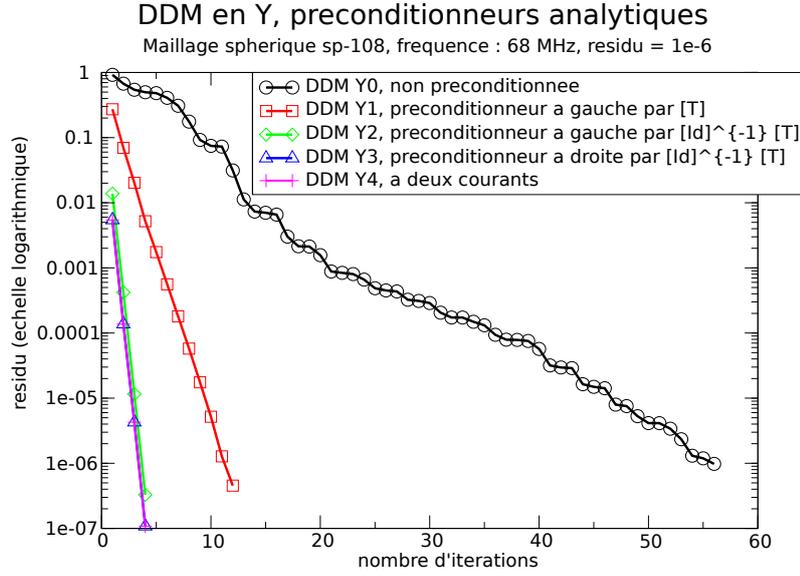


FIGURE 3.24 – Courbes de convergence pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-6} , pour la sphère artificielle à 68 MHz maillée avec 168 DoF.

Equivalence avec la DDM en Y preconditionnée à gauche par l'opérateur simple couche (DDM Y2)

On a choisi

$$\gamma = \begin{pmatrix} \sigma_0^+ & \sigma_0^- \\ \sigma_1^+ & \sigma_1^- \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}^+ & 0 \\ 0 & \mathcal{V}^- \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \text{Id}/2 & \mathbf{n} \times \mathbf{T} \\ \text{Id}/2 & -\mathbf{n} \times \mathbf{T} \end{pmatrix},$$

où le potentiel \mathcal{V}^\pm vérifie

$$\sigma_0^\pm \mathcal{V}^\pm = \text{Id}, \quad \sigma_1^\pm \mathcal{V}^\pm = Y^\pm.$$

On calcule le système linéaire correspondant

$$\begin{aligned} \gamma \mathcal{V} \tilde{\mathbf{R}} &= \begin{pmatrix} \sigma_0^+ & \sigma_0^- \\ \sigma_1^+ & \sigma_1^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{V}^+ & 0 \\ 0 & \mathcal{V}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Id}/2 & \mathbf{n} \times \mathbf{T} \\ \text{Id}/2 & -\mathbf{n} \times \mathbf{T} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{Id} & \text{Id} \\ Y^+ & Y^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Id}/2 & \mathbf{n} \times \mathbf{T} \\ \text{Id}/2 & -\mathbf{n} \times \mathbf{T} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ (Y^+ + Y^-)/2 & (Y^+ - Y^-)(\mathbf{n} \times \mathbf{T}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'équation à résoudre est donc

$$\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ (Y^+ + Y^-)/2 & (Y^+ - Y^-)(\mathbf{n} \times \mathbf{T}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{u}_{\text{rhs}} \end{pmatrix}.$$

Par suite, en utilisant un solveur itératif pour résoudre ce système, \mathbf{u}_1 est nul à chaque itération, et \mathbf{u}_2 est donc solution de

$$(Y^+ - Y^-)(\mathbf{n} \times \mathbf{T}) \mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_{\text{rhs}}. \quad (\text{DDM Y4})$$

On remarque que cette DDM à deux inconnues (notée DDM Y4) est équivalente à la DDM en Y préconditionnée à droite par l'opérateur simple couche T (DDM Y3). Nous présentons les résultats numériques relatifs à cette nouvelle équation, notée DDM Y4, sur la FIG. 3.24. On observe en effet sur les courbes d'itérations que le résidu à chaque itération est exactement le même pour DDM Y3 et DDM Y4.

3.7 Conclusion

Nous avons paramétré le problème découpé (3.7) à l'aide de quatre opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann. En fonction de l'opérateur choisi, une certaine équation intégrale (ou plusieurs) peut être utilisée pour résoudre les sous-problèmes locaux. Un préconditionneur analytique efficace a été proposé dans le cadre de la DDM basée sur les opérateurs admittance.

Pour cette même DDM en Y , nous nous tournons dans le chapitre suivant vers un préconditionneur spectral, fondé sur la recherche de modes dont les traces sur l'interface sont vecteurs propres de l'opérateur admittance. Pour ce faire, on approche localement la cavité par un cylindre infini tangent au voisinage de l'interface, et l'on recherche les modes guidés le long de ce cylindre.

Chapitre 4

Un préconditionneur spectral pour la DDM en Y

Sommaire

4.1	Modes guidés pour un cylindre de forme quelconque	109
4.1.1	Le problème aux limites dans chacun des demi-guides d'onde . . .	109
4.1.2	Séparation des variables z et (x, y) pour le champ électrique . . .	110
4.1.3	Condition de rayonnement : le champ se dirige vers l'infini	111
4.1.4	Modes guidés de type gradient	112
4.1.5	Modes guidés de type rotationnel	114
4.1.6	Une base des champs tangents à la section du cylindre	116
4.1.7	Diagonalisation de l'admittance dans la base des traces de modes guidés	118
4.2	Calcul effectif des modes guidés	120
4.2.1	Application à un guide d'onde rectangulaire	120
4.2.2	Application à un guide d'onde de forme quelconque	122
4.3	Un préconditionneur spectral pour la DDM en Y	123
4.4	Résultats numériques pour la DDM en Y	125
4.4.1	Présentation du cas test	125
4.4.2	Validation numérique pour la DDM en Y	125
4.4.3	Influence du nombre de modes guidés	127
4.4.4	Influence de l'angle d'incidence	131
4.4.5	Influence du nombre de modes propagatifs dans la cavité	131
4.5	Comparaison avec le préconditionneur analytique	132
4.6	Conclusion	134

Dans ce chapitre, on considère un objet diffractant possédant une cavité large et profonde. On suppose de plus qu'au voisinage de l'interface introduite pour les besoins de la décomposition de domaine, on peut approcher localement la cavité par un guide d'onde, i.e. un cylindre infini dont la section est l'interface artificielle (FIG. 4.1). Nous proposons un préconditionneur spectral pour la méthode de décomposition de domaine présentée au Chapitre 3, basée sur les opérateurs admittance. Ce préconditionneur est fondé sur la connaissance de modes qui sont guidés le long du guide d'onde artificiel infini, tangent à la cavité à proximité de l'interface entre les deux sous-domaines. Les résultats numériques illustrent l'efficacité de la méthode, appliquée à des guides d'onde de forme rectangulaire.

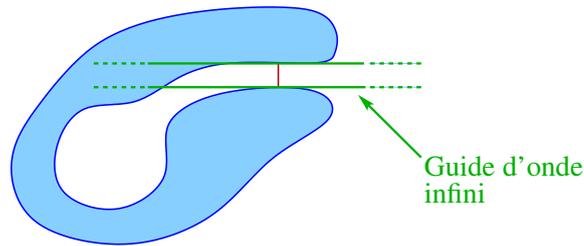


FIGURE 4.1 – Approximation locale de la cavité par un guide d'onde tangent infini.

Dans le premier paragraphe, on définit les modes guidés le long d'un cylindre, et l'on donne le moyen de les obtenir selon la forme de la section du cylindre. Nous effectuons les calculs dans le cadre général d'un cylindre de section arbitraire η . Les modes guidés sont exprimés à l'aide des fonctions propres d'équations aux dérivées partielles posées sur cette section. On montre d'une part que ces modes forment une base orthogonale de $L^2(\eta, \mathbb{R}^2)$, et d'autre part, que les opérateurs admittance se diagonalisent dans cette base. Ce point permet de proposer un préconditionneur à la DDM en Y présentée au chapitre précédent.

Le deuxième paragraphe décrit le calcul effectif des modes guidés. Tout d'abord, on s'intéresse au cas des guides d'onde de section rectangulaire. On obtient dans ce cas une formule analytique explicite de modes guidés. En revanche, pour un guide d'onde de section non rectangulaire, on doit disposer d'un solveur 2D pour résoudre le problème du laplacien avec condition aux limites de Dirichlet ou de Neumann, permettant ainsi de trouver la trace des modes guidés sur l'interface.

Dans le troisième paragraphe, on rappelle l'expression de la méthode de décomposition de domaine basée sur les opérateurs admittance. On utilise ensuite le fait que les deux opérateurs admittance des demi-cylindres infinis se diagonalisent dans la base des traces de modes guidés sur l'interface, pour proposer un préconditionneur naturel à la méthode de décomposition de domaine relative.

Nous donnons au quatrième paragraphe les résultats numériques pour ce préconditionneur, dans le cas d'une DDM basée sur les opérateurs admittance et d'une cavité localement de section rectangulaire. On présente tout d'abord les cas tests et les résultats permettant de valider numériquement l'algorithme. On donne ensuite le gain en itérations apporté par le précondition-

neur fondé sur les modes guidés. On étudie également l'influence du nombre de modes guidés, ainsi que l'influence de l'angle d'incidence sur l'efficacité de la méthode.

Nous comparons finalement, dans le cinquième paragraphe, l'efficacité du préconditionneur fondé sur les modes guidés avec celle du préconditionneur utilisant l'opérateur simple couche présenté dans le Chapitre 3.

4.1 Modes guidés pour un cylindre de forme quelconque

Etant donné un cylindre de section η , supposée suffisamment régulière, le but de cette étude est d'exhiber une base de fonctions vectorielles de $L^2(\eta, \mathbb{R}^2)$ qui soient définies sur la section η du cylindre, tangentes à η , et telles que dans la base obtenue, les opérateurs admittance liés aux deux parties du cylindre soient des opérateurs diagonaux.

L'étude des propriétés d'ondes guidées le long de surfaces ou de cylindres débute avec les travaux de Lord Rayleigh [33] en 1885, qui s'intéresse aux ondes de surfaces élastiques guidées le long d'un demi-espace. Depuis, ce problème a été très étudié. Citons en particulier Bamberger et Bonnet [9], [10] pour leurs travaux sur les ondes électromagnétiques guidées à l'intérieur des fibres optiques, ainsi que Bamberger, Joly et Kern [11] pour leurs travaux sur les ondes élastiques guidées à l'extérieur d'une cavité cylindrique. Bonnet-BenDhia et Joly [12] s'intéressent également à l'approximation numérique des guides d'onde optiques. Les résultats ci-dessous qui concernent les modes guidés sont classiques, nous les rappelons pour que l'exposé soit auto contenu. Le lecteur familier avec la notion de guide d'onde pourra se diriger directement vers la section §4.1.7.

Dans un premier temps, on effectue les calculs dans le cas d'un cylindre de base quelconque pour obtenir des résultats généraux. On s'intéresse ensuite plus spécifiquement au cas d'un cylindre de base rectangulaire, qui sera testé dans les applications numériques. La diagonalisation des opérateurs nous permettra enfin de proposer un préconditionneur adapté pour la DDM en Y décrite au Chapitre 3.

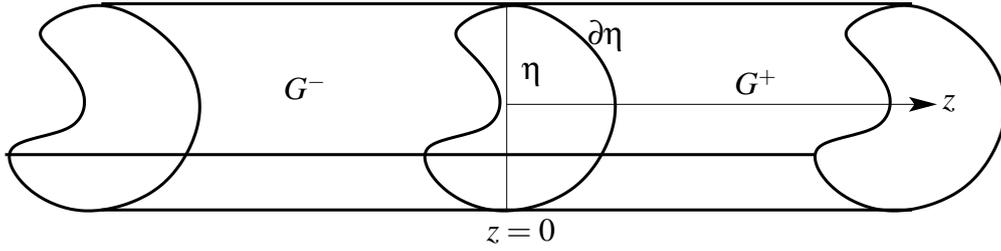
4.1.1 Le problème aux limites dans chacun des demi-guides d'onde

Le cylindre a pour axe (Oz) . La base η du cylindre est définie dans le plan (x, y) et est un domaine fermé simplement connexe. On note $\partial\eta$ le bord de η (FIG. 4.2). L'interface artificielle que nous avons introduite pour décomposer le domaine de calcul est définie par

$$\Sigma = \eta \times \{z = 0\}.$$

On s'intéresse à la propagation de modes guidés le long des deux demi-guides d'onde $G^+ = \eta \times \{z > 0\}$ et $G^- = \eta \times \{z < 0\}$.

Dans toute la suite, on note $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ la normale à l'interface η . On note \mathbf{n}_0 la normale au bord $\partial\eta$ dans le plan (x, y) . On considère un vecteur unitaire τ , tangent au bord $\partial\eta$, et tel

FIGURE 4.2 – Le guide d’onde infini et l’interface artificielle $\Sigma = \eta \times \{z = 0\}$.

que (\mathbf{n}_0, τ) soit une base orthonormée directe. Dans η , on note $\Delta_{x,y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ le laplacien surfacique, $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}$ le gradient surfacique, $\vec{\text{rot}} = \begin{pmatrix} -\partial_y \\ \partial_x \end{pmatrix}$ le rotationnel surfacique vectoriel, $\text{rot} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \partial_x u_y - \partial_y u_x$ le rotationnel surfacique scalaire, et $\text{div} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \partial_x u_x + \partial_y u_y$ la divergence surfacique.

Pour un champ bidimensionnel \mathbf{u} défini sur η , on notera $\mathbf{u}_{\text{tan}} = \tau \cdot \mathbf{u}$ sa composante tangentielle sur $\partial\eta$. Pour un champ tridimensionnel \mathbf{v} défini sur $\eta \times (0z)$, on notera \mathbf{v}_{tan} sa projection sur le plan tangent au cylindre $\partial\eta \times (0z)$.

On recherche les solutions harmoniques de l’équation de Maxwell. On cherche donc $\tilde{\mathbf{E}}$ sous la forme

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \Re(e^{-i\omega t} \mathbf{E}(x, y, z)),$$

avec \mathbf{E} solution de l’équation de Maxwell harmonique $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = 0$ dans G^+ et dans G^- . Avec l’hypothèse $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, l’équation de Maxwell devient $\vec{\Delta} \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$. On cherche donc à résoudre

$$\begin{cases} \vec{\Delta} \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 & \text{dans } G^+ \text{ et dans } G^-, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & \text{dans } G^+ \text{ et dans } G^-. \end{cases} \quad (4.1)$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, le champ électrique est supposé tel que $\mathbf{E}_{\text{tan}} = 0$ sur les bords du guide d’onde :

$$\mathbf{E}_{\text{tan}} = 0 \quad \text{sur } \partial\eta \times (0z). \quad (4.2)$$

Cette condition est l’analogie de l’hypothèse d’appartenance aux espaces d’ondes admissibles W^+ et W^- définis en 42 et 43, à l’exception de la condition de Silver-Müller, dont nous donnerons l’analogie au §4.1.3.

4.1.2 Séparation des variables z et (x, y) pour le champ électrique

Nous recherchons un champ \mathbf{E} solution des équations (4.1) et (4.2) sous la forme particulière suivante :

$$\mathbf{E}(x, y, z) = v(z) \mathbf{F}(x, y), \quad (4.3)$$

où v est scalaire et \mathbf{F} est vectorielle. On notera $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ les composantes cartésiennes de la fonction vectorielle \mathbf{F} .

La première équation du système (4.1) nous donne pour $p = x, y, z$:

$$\frac{v''}{v}(z) + \frac{\Delta_{x,y} F_p}{F_p}(x, y) + k^2 = 0 \quad \text{dans } G^+ \text{ et dans } G^-. \quad (4.4)$$

Nous introduisons la quantité λ suivante :

$$\lambda := \frac{v''}{v}(z) + k^2 = - \frac{\Delta_{x,y} F_p}{F_p}(x, y).$$

C'est une constante car elle est indépendante de (x, y) et de z .

Nous posons aussi

$$\beta := \begin{cases} \sqrt{k^2 - \lambda} & \text{si } \lambda \leq k^2, \\ i\sqrt{\lambda - k^2} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Les fonctions v et F_p pour $p = x, y, z$ vérifient donc respectivement

$$v''(z) + \beta^2 v(z) = 0, \quad (4.6)$$

$$\Delta_{x,y} F_p(x, y) + \lambda F_p(x, y) = 0. \quad (4.7)$$

Les solutions de (4.6) sont de la forme $v(z) = \exp(\epsilon i \beta z)$ avec $\epsilon = \pm 1$.

4.1.3 Condition de rayonnement : le champ se dirige vers l'infini

Pour s'assurer de l'unicité des solutions, une autre hypothèse est nécessaire. Cette condition supplémentaire joue le rôle de condition de rayonnement à l'infini (cf. la condition de Silver-Müller (1.4)). Dans la suite, on suppose que l'on recherche seulement *les modes se propageant vers l'infini*. Dans le demi-guide d'onde G^+ , lorsque t augmente, les solutions se propagent vers les z croissants, tandis que dans le demi-guide d'onde G^- , lorsque t augmente, les solutions se propagent vers les z décroissants.

Au vu de la convention temporelle $e^{-i\omega t}$, on doit choisir respectivement

$$\begin{cases} v^+(z) = e^{+i\beta z} & \text{pour } z > 0, \\ v^-(z) = e^{-i\beta z} & \text{pour } z < 0. \end{cases}$$

On a donc choisi $\epsilon = +1$ dans G^+ et $\epsilon = -1$ dans G^- .

Les modes guidés sont soit propagatifs, soit évanescents. En effet, pour $\lambda > k^2$, $\beta = i\gamma$ où γ est un réel positif, et donc $v^\pm(z) = e^{\mp\gamma z}$ (pour $z \in \mathbb{R}_*^\pm$) correspond à un mode évanescent. Pour $\lambda < k^2$, β est un réel positif, et donc $v^\pm(z) = e^{\pm i\beta z}$ (pour $z \in \mathbb{R}_*^\pm$) correspond à un mode

propagatif. Pour $\lambda = k^2$, on a $\beta = 0$, donc $v^\pm(z) = 1$ et le mode est stationnaire.

Les modes \mathbf{E}^+ et \mathbf{E}^- guidés respectivement dans G^+ et dans G^- , prennent donc la forme

$$\mathbf{E}^\pm(x, y, z) = e^{\pm i\beta z} \begin{pmatrix} F_x^\pm(x, y) \\ F_y^\pm(x, y) \\ F_z^\pm(x, y) \end{pmatrix},$$

où F_x , F_y et F_z vérifient (4.7). Nous déduisons de la propriété de divergence nulle $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ l'équation supplémentaire

$$F_z^\pm = \mp \frac{1}{i\beta} (\partial_x F_x^\pm + \partial_y F_y^\pm) \quad \text{dans } G^\pm. \quad (4.8)$$

Finalement, nous déduisons de la condition au bord métallique, $\mathbf{E}_{\text{tan}}^\pm = 0$ sur $\partial\eta \times (Oz)$, que $F_z^\pm = 0$ sur $\partial\eta$, et $\begin{pmatrix} F_x^\pm \\ F_y^\pm \end{pmatrix}_{\text{tan}} = 0$ sur $\partial\eta$.

Pour des raisons que l'analyse ci-dessous rendra évidentes, nous dirons que le mode guidé est de type rotationnel si sa composante F_z^\pm est identiquement nulle. Nous commençons par la description d'un autre type de modes, dits de type gradient, pour lesquels cette composante n'est pas nulle.

4.1.4 Modes guidés de type gradient

La composante F_z^\pm d'un mode de type gradient n'est pas identiquement nulle et satisfait

$$\begin{cases} -\Delta_{x,y} F_z^\pm = \lambda F_z^\pm & \text{sur } \eta, \\ F_z^\pm = 0 & \text{sur } \partial\eta. \end{cases}$$

Nous en déduisons que F_z^\pm appartient à la famille des fonctions propres du laplacien surfacique avec condition au bord de Dirichlet sur le bord $\partial\eta$, dont nous notons une base $(\varphi_n)_{n \geq 0}$, supposée orthogonale pour les produits scalaires L^2 et H^1 . Par convention, nous supposons dans la suite que les fonctions propres φ_n satisfont la condition de normalisation

$$\int_\eta |\nabla \varphi_n|^2 = 1. \quad (4.9)$$

On note $(\lambda_n^D)_{n \geq 0}$ la suite des valeurs propres associées, supposées rangées par ordre croissant. Nous avons donc

$$\lambda = \lambda_n^D,$$

pour un certain $n \geq 0$. Nous définissons par ailleurs pour chaque $n \geq 0$ un complexe β_n^D à partir de λ_n^D , comme en (4.5). On peut donc supposer que la composante F_z^\pm est de la forme

$$F_z^\pm = \pm \frac{\lambda_n^D}{i\beta_n^D} \varphi_n.$$

La constante $\frac{\lambda_n^D}{i\beta_n^D}$ est choisie pour simplifier la suite des calculs. (Notons que cette constante n'est pas définie dans le cas $\beta_n^D = 0$ d'un mode stationnaire, cas que nous excluons.)

La condition de divergence nulle nous donne

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} F_x^\pm \\ F_y^\pm \end{pmatrix} = \mp i\beta_n^D F_z^\pm = -\lambda_n^D \varphi_n.$$

On choisit de rechercher le vecteur $\begin{pmatrix} F_x^\pm \\ F_y^\pm \end{pmatrix}$ sous la forme d'un gradient. Alors son rotationnel scalaire est nul, d'où l'on obtient :

$$\begin{aligned} 0 = \vec{\operatorname{rot}} \operatorname{rot} \begin{pmatrix} F_x^\pm \\ F_y^\pm \end{pmatrix} &= \nabla \operatorname{div} \begin{pmatrix} F_x^\pm \\ F_y^\pm \end{pmatrix} - \vec{\Delta}_{x,y} \begin{pmatrix} F_x^\pm \\ F_y^\pm \end{pmatrix} \\ &= \nabla(-\lambda_n^D \varphi_n) + \lambda_n^D \begin{pmatrix} F_x^\pm \\ F_y^\pm \end{pmatrix} \\ &= \lambda_n^D \begin{pmatrix} F_x^\pm - \partial_x \varphi_n \\ F_y^\pm - \partial_y \varphi_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On appellera n -ième mode de type gradient le champ

$$\mathbf{E}_{\mathbf{grad}}^{\pm,n}(x, y, z) = e^{\pm i\beta_n^D z} \begin{pmatrix} \partial_x \varphi_n \\ \partial_y \varphi_n \\ \pm \frac{\lambda_n^D}{i\beta_n^D} \varphi_n \end{pmatrix}.$$

On vérifie que si l'on définit $\mathbf{E}_{\mathbf{grad}}^{\pm,n}$ comme ci-dessus, alors :

- (a) On a $\vec{\Delta} \mathbf{E}_{\mathbf{grad}}^{\pm,n} + k^2 \mathbf{E}_{\mathbf{grad}}^{\pm,n} = 0$ dans G^\pm . Cette propriété est vérifiée car on a $\Delta_{x,y} F_p^\pm + \lambda_n^D F_p^\pm = 0$ pour $p = x, y, z$. En effet, elle est vraie pour F_z^\pm par définition, et par ailleurs pour $p = x, y$, par le lemme de Schwarz,

$$\Delta_{x,y}(\partial_p \varphi_n) + \lambda_n^D \partial_p \varphi_n = \partial_p(\Delta_{x,y} \varphi_n + \lambda_n^D \varphi_n) = 0.$$

- (b) On a $\nabla \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{grad}}^{\pm,n} = 0$ dans G^\pm . En effet,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{grad}}^{\pm,n} = \Delta_{x,y} \varphi_n \pm i\beta_n^D \left(\pm \frac{\lambda_n^D}{i\beta_n^D} \right) \varphi_n = \Delta_{x,y} \varphi_n + \lambda_n^D \varphi_n = 0.$$

- (c) On a $\varphi_n^\pm = 0$ sur $\partial\eta$, donc $\tau \cdot \nabla \varphi_n^\pm = 0$ sur $\partial\eta$. D'un autre côté, $(E_{\mathbf{grad}}^{\pm,n})_z = 0$ sur $\partial\eta$ (car $\varphi_n^\pm = 0$ sur $\partial\eta$). Il s'ensuit que $(\mathbf{E}_{\mathbf{grad}}^{\pm,n})_{\tan} = 0$ sur $\partial\eta$.

Définition 51.

Les modes guidés le long des deux demi-cylindres, issus d'un gradient sont définis par

$$\mathbf{E}_{\text{grad}}^{\pm,n}(x, y, z) = e^{\pm i\beta_n^D z} \mathbf{F}_{\text{grad}}^{\pm,n}(x, y),$$

où $\mathbf{F}_{\text{grad}}^{\pm,n}$ est défini par

$$\mathbf{F}_{\text{grad}}^{\pm,n} = \begin{pmatrix} \nabla\varphi_n \\ \pm \frac{\lambda_n^D}{i\beta_n^D} \varphi_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta_{x,y}\varphi_n + \lambda_n^D \varphi_n = 0 & \text{dans } \eta, \\ \varphi_n = 0 & \text{sur } \partial\eta. \end{cases}$$

Compte tenu des hypothèses faites ci-dessus, la différence $\mathbf{E} - \mathbf{E}_{\text{grad}}^{\pm,n}$ entre le champ d'intérêt \mathbf{E} et le n -ième mode guidé de type gradient, a sa troisième composante $(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{\text{grad}}^{\pm,n})_z$ nulle. C'est donc par définition un mode de type rotationnel. Nous abordons maintenant sa description.

4.1.5 Modes guidés de type rotationnel

La composante F_z^{\pm} d'un mode de type rotationnel est nulle par hypothèse. Nous supposons ici que l'une des deux autres composantes n'est pas identiquement nulle. Compte tenu de (4.8), nous en déduisons que

$$\partial_x F_x^{\pm} + \partial_y F_y^{\pm} = 0.$$

Il existe donc une fonction ψ définie sur η , telle que $(F_x^{\pm}, F_y^{\pm}) = \vec{\text{rot}} \psi$, en d'autres termes

$$\begin{aligned} F_x^{\pm} &= -\partial_y \psi, \\ F_y^{\pm} &= \partial_x \psi. \end{aligned}$$

La fonction ψ est unique à une constante additive près. Pour lever cette ambiguïté, nous supposons qu'elle satisfait la condition

$$\int_{\eta} \psi = 0.$$

Par ailleurs, nous obtenons sur $\partial\eta$, en rappelant que l'on note \mathbf{n}_0 la normale extérieure à $\partial\eta$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}_0} = \mathbf{n}_0 \cdot \nabla\psi = \tau \cdot \vec{\text{rot}} \psi = \left(\vec{\text{rot}} \psi \right)_{\text{tan}} = \begin{pmatrix} F_x^{\pm} \\ F_y^{\pm} \end{pmatrix}_{\text{tan}} = 0, \quad (4.10)$$

ce qui montre que ψ satisfait la condition aux limites de Neumann.

En utilisant que

$$\vec{\Delta}_{x,y} \vec{\text{rot}} = \left(\nabla \text{div} - \vec{\text{rot}} \text{rot} \right) \vec{\text{rot}} = \vec{\text{rot}} \left(-\text{rot} \vec{\text{rot}} \right) = \vec{\text{rot}} \Delta_{x,y},$$

on en déduit que

$$\vec{\text{rot}} (\Delta_{x,y}\psi + \lambda\psi) = \vec{\Delta}_{x,y} (\vec{\text{rot}} \psi) + \lambda \vec{\text{rot}} \psi = 0,$$

car les coordonnées F_x et F_y de $\vec{\text{rot}} \psi$ vérifient toutes deux $\Delta_{x,y}F_p + \lambda F_p = 0$. Il s'ensuit que $\Delta_{x,y}\psi + \lambda\psi$ est une fonction constante sur le domaine η , puis que cette constante est nulle car

$$\int_{\eta} (\Delta_{x,y}\psi + \lambda\psi) = \int_{\partial\eta} \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}_0} + \lambda \int_{\eta} \psi = 0.$$

Nous en déduisons que ψ appartient à la famille des fonctions propres du laplacien surfacique avec condition au bord de Neumann sur $\partial\eta$ et contrainte de moyenne nulle sur η , dont nous notons une base $(\psi_n)_{n \geq 0}$, supposée orthogonale pour les produits scalaires L^2 et H^1 . Par convention, nous supposons dans la suite que les fonctions propres ψ_n satisfont la condition de normalisation

$$\int_{\eta} |\nabla\psi_n|^2 = \int_{\eta} |\vec{\text{rot}} \psi_n|^2 = 1. \quad (4.11)$$

On note $(\lambda_n^N)_{n \geq 0}$ la suite des valeurs propres associées, supposées rangées par ordre croissant. Nous avons donc

$$\lambda = \lambda_n^N.$$

Nous définissons par ailleurs pour chaque $n \geq 0$ un complexe β_n^N à partir de λ_n^N , comme en (4.5). On peut donc supposer que

$$\psi = \psi_n.$$

On appellera n -ième mode de type rotationnel le champ

$$\mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n}(x, y, z) = e^{\pm i\beta_n^N z} \begin{pmatrix} -\partial_y\psi_n \\ \partial_x\psi_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, on vérifie que si l'on définit $\mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n}$ comme ci-dessus, alors :

- (a) On a $\vec{\Delta}\mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n} + k^2\mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n} = 0$ dans G^{\pm} . Cette propriété est vérifiée car on a $\Delta_{x,y}F_p^{\pm} + \lambda_n^N F_p^{\pm} = 0$ pour $p = x, y, z$. En effet, elle est trivialement vraie pour $F_z^{\pm} = 0$, et par ailleurs pour $p = x, y$, par le lemme de Schwarz,

$$\Delta_{x,y}(\partial_p\psi_n) + \lambda_n^N \partial_p\psi_n = \partial_p(\Delta_{x,y}\psi_n + \lambda_n^N \psi_n) = 0.$$

- (b) On a $\nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n} = 0$ dans G^{\pm} . En effet, comme F_z^{\pm} est nul,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n} = \text{div} \begin{pmatrix} F_x^{\pm} \\ F_y^{\pm} \end{pmatrix} = \text{div} \vec{\text{rot}} \psi_n = 0.$$

- (c) D'après (4.10), la condition de Neumann homogène implique que $\begin{pmatrix} F_x^{\pm} \\ F_y^{\pm} \end{pmatrix}_{\tan} = 0$ sur $\partial\eta$. D'un autre côté, $(\mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n})_z = 0$. On en déduit que $(\mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n})_{\tan} = 0$ sur $\partial\eta$.

Définition 52.

Les modes guidés le long des deux demi-cylindres, issus d'un rotationnel sont définis par

$$\mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n}(x, y, z) = e^{\pm i\beta_n^N z} \mathbf{F}_{\text{rot}}^{\pm,n}(x, y),$$

où $\mathbf{F}_{\text{rot}}^{\pm,n}$ est défini par

$$\mathbf{F}_{\text{rot}}^{\pm,n} = \begin{pmatrix} \vec{\text{rot}} \psi_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta\psi_n + \lambda_n^N \psi_n = 0 & \text{dans } \eta, \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\eta. \end{cases}$$

4.1.6 Une base des champs tangents à la section du cylindre

Nous établissons que la famille des champs tangents à l'interface η , à savoir les fonctions $(\nabla\varphi_n)_{n \geq 0}$ et $(\vec{\text{rot}} \psi_n)_{n \geq 0}$, forme une base hilbertienne de l'espace $L^2(\eta, \mathbb{R}^2)$.

Pour montrer qu'elles engendrent $L^2(\eta, \mathbb{R}^2)$, nous utilisons la décomposition de Helmholtz.

Proposition 53 (Décomposition de Helmholtz).

On note $H^1(\eta)/\mathbb{R} := \left\{ u \in H^1(\eta); \int_{\eta} u = 0 \right\}$.

Pour toute fonction $F \in L^2(\eta, \mathbb{R}^2)$, il existe $\varphi \in H_0^1(\eta)$, et $\psi \in H^1(\eta)/\mathbb{R}$ vérifiant la condition au bord faible $\partial_n \psi = 0$, uniques, tels que

$$F = \nabla\varphi + \vec{\text{rot}} \psi.$$

Démonstration (Décomposition de Helmholtz).

Pour commencer, nous considérons une fonction F ayant davantage de régularité :

$$F \in H_{\text{tan}}^1(\eta, \mathbb{R}^2) := \left\{ u \in H^1(\eta, \mathbb{R}^2); u_{\text{tan}} = 0 \text{ sur } \partial\eta \right\}.$$

Comme $\text{div} F \in L^2(\eta)$, nous savons qu'il existe une solution unique $\varphi \in H^2 \cap H_0^1(\eta)$ au problème

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \text{div} F & \text{sur } \eta, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\eta. \end{cases} \quad (4.12)$$

Par ailleurs, nous avons $\text{rot} F \in L^2(\eta)$ et

$$\int_{\eta} \text{rot} F = \int_{\partial\eta} F \cdot \tau = 0.$$

Il existe donc une solution unique $\psi \in H^2(\eta)/\mathbb{R} := \left\{ u \in H^2(\eta); \int_{\eta} u = 0 \right\}$ au problème

$$\begin{cases} \Delta\psi = \text{rot} F & \text{sur } \eta, \\ \partial_n \psi = 0 & \text{sur } \partial\eta. \end{cases} \quad (4.13)$$

La fonction $G := F - \nabla\varphi - \text{rot } \vec{\psi} \in H^1(\eta, \mathbb{R}^2)$ satisfait par construction $\text{div } G = 0$ et $\text{rot } G = 0$ sur η , et donc est constante sur η . Pour montrer que cette constante est nulle, nous nous plaçons sur $\partial\eta$ et nous remarquons que

$$\tau \cdot \nabla\varphi = \partial_\tau\varphi = 0,$$

car φ est constante (nulle) sur $\partial\eta$. Par ailleurs ψ est de régularité H^2 et l'égalité $\partial_n\psi = 0$ a lieu au sens fort. Nous en déduisons que

$$\tau \cdot \text{rot } \vec{\psi} = \partial_n\psi = 0.$$

Ceci montre que $\nabla\varphi$ et $\text{rot } \vec{\psi}$ ont, comme F , une composante tangentielle nulle sur $\partial\eta$ (et donc appartiennent à $H_{\text{tan}}^1(\eta, \mathbb{R}^2)$). Il s'ensuit que la fonction $G = F - \nabla\varphi - \text{rot } \vec{\psi}$ est à la fois constante sur η et de composante tangentielle nulle sur $\partial\eta$, donc est nulle.

Par le même calcul que (4.14) ci-dessous, $\nabla\varphi$ et $\text{rot } \vec{\psi}$ sont orthogonaux au sens L^2 , donc nous avons $\|F\|_2^2 = \|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\text{rot } \vec{\psi}\|_2^2$. Comme de plus φ et ψ dépendent linéairement de F , nous pouvons étendre cette décomposition par densité de $H_{\text{tan}}^1(\eta, \mathbb{R}^2)$ à $L^2(\eta, \mathbb{R}^2)$, ce qui conclut la preuve de l'existence.

L'unicité de la décomposition $F = \nabla\varphi + \text{rot } \vec{\psi}$ découle de ce que φ et ψ sont nécessairement solutions respectives des problèmes (4.12) et (4.13). \square

Théorème 54.

La famille des champs tangents à l'interface η formée de la réunion de $(\nabla\varphi_n)_{n \geq 0}$ et de $(\text{rot } \vec{\psi}_n)_{n \geq 0}$, constitue une base hilbertienne de l'espace $L^2(\eta, \mathbb{R}^2)$.

Démonstration Par hypothèse, ces fonctions sont normalisées et orthogonales entre elles au sein d'une même sous-famille $(\nabla\varphi_n)_{n \geq 0}$ ou $(\text{rot } \vec{\psi}_n)_{n \geq 0}$. Pour prouver que les modes guidés sont deux à deux orthogonaux, il nous reste simplement à montrer que le produit L^2 de $\nabla\varphi_n$ et $\text{rot } \vec{\psi}_p$ est nul.

$$\int_\eta (\nabla\varphi_n) \cdot (\text{rot } \vec{\psi}_p) = - \int_\eta \varphi_n \left(\text{div } (\text{rot } \vec{\psi}_p) \right) + \int_{\partial\eta} \varphi_n \left(\mathbf{n}_0 \cdot \text{rot } \vec{\psi}_p \right) = 0, \quad (4.14)$$

car $\text{div } \text{rot } \vec{\psi} = 0$ et $\varphi_n = 0$ sur $\partial\eta$.

Soit $F \in L^2(\eta, \mathbb{R}^2)$. D'après la Proposition 53, il existe $\varphi \in H_0^1(\eta)$ et $\psi \in H^1(\eta)/\mathbb{R}$, tels que $F = \nabla\varphi + \text{rot } \vec{\psi}$. Par construction, les familles $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ et $(\psi_n)_{n \geq 0}$ constituent respectivement des bases hilbertiennes des espaces $H_0^1(\eta)$ et $H^1(\eta)/\mathbb{R}$. On peut donc décomposer φ et ψ sur ces bases et ainsi exprimer F sous la forme

$$F = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \nabla\varphi_k + \sum_{l=0}^{+\infty} b_l \text{rot } \vec{\psi}_l.$$

Ceci établit que les familles $(\nabla\varphi_n)_{n \geq 0}$ et $(\vec{\text{rot}} \psi_n)_{n \geq 0}$ engendrent $L^2(\eta, \mathbb{R}^2)$. \square

4.1.7 Diagonalisation de l'admittance dans la base des traces de modes guidés

On rappelle que par hypothèse, l'interface Σ est une interface contenue dans un plan, et coïncide sur ce plan avec le domaine bidimensionnel η . Par analogie avec la définition des opérateurs admittance \mathbb{A}_Σ^\pm relatifs aux deux sous-domaines donnée en (3.9), on définit les opérateurs admittance $\mathbb{A}_\Sigma^{\pm*}$ relatifs aux deux demi-guides d'onde, de la manière suivante.

Définition 55 (Opérateurs admittance relatifs aux deux demi-guides d'onde).

On désigne par ∂G^\pm le bord du demi-guide d'onde G^\pm , auquel on a retiré l'interface Σ . On note

$$P^{\pm*} : \mathcal{D}'(\Sigma) \rightarrow \mathcal{D}'(\partial G^\pm \cup \Sigma)$$

l'opérateur de prolongement qui prolonge par 0 sur ∂G^\pm un courant défini sur Σ , et

$$R^{\pm*} : \mathcal{D}'(\partial G^\pm \cup \Sigma) \rightarrow \mathcal{D}'(\Sigma)$$

l'opérateur de restriction qui restreint à Σ un courant défini sur $\partial G^\pm \cup \Sigma$. On définit alors les opérateurs admittance $\mathbb{A}_\Sigma^{\pm*}$ relatifs aux demi-guides d'onde, par :

$$\mathbb{A}_\Sigma^{\pm*} = R^{\pm*} \mathbb{A}^\pm P^{\pm*}, \quad (4.15)$$

où \mathbb{A}^\pm est l'opérateur admittance classique relatif à la frontière $\partial G^\pm \cup \Sigma$. En utilisant les notations du §3.2.1, on a donc $\mathbb{A}^+ = \mathbb{A}_0^+$ où Ω_0^+ désigne le domaine G^+ , tandis que $\mathbb{A}^- = \mathbb{A}_0^-$ où Ω_0^- désigne le domaine G^- .

Nous notons σ la trace sur l'interface η . Pour un champ tridimensionnel \mathbf{E} , $\sigma(\mathbf{E})$ désigne donc un champ bidimensionnel. Par abus de notation, le vecteur $\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}$ désigne le vecteur bidimensionnel défini par $\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E} = \sigma(\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E})$.

Proposition 56 (Diagonalisation de l'opérateur admittance).

L'opérateur admittance $\mathbb{A}_\Sigma^{\pm*}$ se diagonalise dans la base des traces de modes guidés sur l'interface Σ , de valeurs propres associées :

- $-\frac{k}{\beta_n^D}$ pour les modes guidés issus d'un gradient $\mathbf{E}_{\text{grad}}^{\pm,n}$,
- $-\frac{\beta_n^N}{k}$ pour les modes guidés issus d'un rotationnel $\mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n}$.

Démonstration On rappelle que pour $p = x, y, z$, on a $\partial_z E_p^\pm = \pm i \beta_n E_p^\pm$, où β_n vaut β_n^D pour les modes de type gradient et β_n^N pour les modes de type rotationnel. Le champ magnétique

défini par $\mathbf{H}^\pm = \frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{E}^\pm$ vérifie

$$\mathbf{H}^\pm = \frac{1}{ik} \begin{pmatrix} \partial_z E_y^\pm - \partial_y E_z^\pm \\ \partial_x E_z^\pm - \partial_z E_x^\pm \\ \partial_y E_x^\pm - \partial_x E_y^\pm \end{pmatrix} = \frac{1}{ik} \begin{pmatrix} \pm i \beta_n E_y^\pm - \partial_y E_z^\pm \\ \partial_x E_z^\pm \mp i \beta_n E_x^\pm \\ \partial_y E_x^\pm - \partial_x E_y^\pm \end{pmatrix} = \pm \frac{\beta_n}{k} \begin{pmatrix} E_y^\pm \\ -E_x^\pm \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{ik} \begin{pmatrix} -\partial_y E_z^\pm \\ \partial_x E_z^\pm \\ \partial_y E_x^\pm - \partial_x E_y^\pm \end{pmatrix}.$$

En notant $\mathbf{n}^\pm = \mp \mathbf{e}_z$ le vecteur unitaire normal à G^\pm sur η , on en déduit que

$$\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{H}^\pm = -\frac{\beta_n}{k} \begin{pmatrix} E_x^\pm \\ E_y^\pm \\ 0 \end{pmatrix} \pm \frac{1}{ik} \begin{pmatrix} \partial_x E_z^\pm \\ \partial_y E_z^\pm \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Remarquons que dans les deux cas (G^+ et G^-), il y a le même signe moins devant le premier terme.

• D'une part, pour les modes guidés issus d'un gradient ($\sigma(\mathbf{F}_{\text{grad}}^{\pm,n}) = \nabla \varphi_n$), E_z^\pm est non nul, mais l'on sait que

$$\sigma(\mathbf{F}_{\text{grad}}^{\pm,n}) = \nabla \varphi_n \quad \text{et} \quad F_z^\pm = \pm \frac{\lambda_n^D}{i\beta_n^D} \varphi_n.$$

Par suite, le vecteur suivant vaut

$$\begin{pmatrix} \partial_x F_z^\pm \\ \partial_y F_z^\pm \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \frac{\lambda_n^D}{i\beta_n^D} \nabla \varphi_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{H}^\pm = e^{\pm i\beta_n^D z} \left(-\frac{\beta_n^D}{k} \nabla \varphi_n + \frac{1}{ik} \frac{\lambda_n^D}{i\beta_n^D} \nabla \varphi_n \right) = -\frac{1}{k} \left(\beta_n^D + \frac{\lambda_n^D}{\beta_n^D} \right) \sigma(\mathbf{E}^\pm).$$

On simplifie :

$$\beta_n^D + \frac{\lambda_n^D}{\beta_n^D} = \frac{(\beta_n^D)^2 + \lambda_n^D}{\beta_n^D} = \frac{k^2 - \lambda_n^D + \lambda_n^D}{\beta_n^D} = \frac{k^2}{\beta_n^D}.$$

Ceci nous conduit à

$$\boxed{\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{H}_{\text{grad}}^{\pm,n} = -\frac{k}{\beta_n^D} \sigma(\mathbf{E}_{\text{grad}}^{\pm,n})}.$$

La valeur propre de l'admittance associée est d'autant plus grande en module que λ_n^D est proche de k^2 par valeur inférieure :

$$-\frac{k}{\beta_n^D} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_n^D}{k^2}}}.$$

• D'autre part, pour les modes guidés issus d'un rotationnel ($\sigma(\mathbf{F}_{\text{rot}}^\pm) = \vec{\text{rot}} \psi_n$), on a $E_z^\pm = 0$ et donc

$$\boxed{\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\pm,n} = -\frac{\beta_n^N}{k} \sigma(\mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n})}.$$

La valeur propre de l'admittance associée est d'autant plus grande en module que λ_n^N est petite (proche de 0) :

$$-\frac{\beta_n^N}{k} = -\sqrt{1 - \frac{\lambda_n^N}{k^2}}.$$

On a ainsi prouvé que l'opérateur admittance $\mathbb{A}_\Sigma^{\pm*}$, relatif au demi-guide d'onde G^\pm et défini par (5.6), est un opérateur diagonal dans la base des traces de modes guidés sur Σ . \square

Corollaire 57.

L'opérateur $\mathbb{A}_\Sigma^{+*} + \mathbb{A}_\Sigma^{-*}$ se diagonalise de la manière suivante dans la base des traces de modes guidés sur l'interface Σ :

$$\begin{cases} (\mathbb{A}_\Sigma^{+*} + \mathbb{A}_\Sigma^{-*}) \sigma(\mathbf{E}_{\text{grad}}^n) = -\frac{2k}{\beta_n^D} \sigma(\mathbf{E}_{\text{grad}}^n), \\ (\mathbb{A}_\Sigma^{+*} + \mathbb{A}_\Sigma^{-*}) \sigma(\mathbf{E}_{\text{rot}}^n) = -\frac{2\beta_n^N}{k} \sigma(\mathbf{E}_{\text{rot}}^n). \end{cases} \quad (4.17)$$

On remarque que l'on a de même

$$\sigma(\mathbf{H}_{\text{grad}}^{\pm,n}) = \frac{k}{\beta_n^D} \mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}_{\text{grad}}^{\pm,n} \quad \text{et} \quad \sigma(\mathbf{H}_{\text{rot}}^{\pm,n}) = \frac{\beta_n^N}{k} \mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n}.$$

4.2 Calcul effectif des modes guidés

4.2.1 Application à un guide d'onde rectangulaire

Dans cette section, on considère le cas particulier d'un guide d'onde constitué d'un cylindre de base rectangulaire. On suppose que cette base est définie par

$$\eta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}.$$

On recherche les valeurs propres et les vecteurs propres du laplacien dans le rectangle η , respectivement avec condition homogène de Dirichlet et avec condition homogène de Neumann. On obtient ensuite immédiatement les modes guidés correspondants en appliquant les résultats de la section §4.1.

Vecteurs propres du laplacien avec condition de Dirichlet homogène

On veut résoudre

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_n = \lambda_n^D \varphi_n & \text{dans } \eta, \\ \varphi_n = 0 & \text{sur } \partial\eta. \end{cases}$$

En séparant les variables x et y , on obtient

$$\varphi_n(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab} \lambda_n^D} \sin\left(\frac{p\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{q\pi}{b}y\right),$$

avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ vérifiant

$$\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{b}\right)^2 = \lambda_n^D.$$

On introduit la constante $\frac{2}{\sqrt{ab} \lambda_n^D}$ pour satisfaire la normalisation $\int_{\eta} |\nabla \varphi_n|^2 = 1$. Remarquons que si l'on prenait $p = 0$ ou $q = 0$, cela nous conduirait à $\varphi_n = 0$.

En calculant $\nabla \varphi_n$ sur l'interface, et en utilisant la condition de divergence nulle qui nous donne

$$F_z^{\pm} = \pm \frac{\lambda_n^D}{i\beta_n^D} \varphi_n,$$

on obtient les modes guidés associés, qui sont donnés en (4.18).

Vecteurs propres du laplacien avec condition de Neumann homogène

On veut résoudre

$$\begin{cases} -\Delta \psi_n = \lambda_n^N \psi_n & \text{dans } \eta, \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\eta. \end{cases}$$

En séparant les variables x et y , on obtient

$$\psi_n(x, y) = \frac{\mu_{\text{rot}}^n}{\sqrt{ab} \lambda_n^N} \cos\left(\frac{p\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{q\pi}{b}y\right),$$

avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ vérifiant

$$\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{b}\right)^2 = \lambda_n^N,$$

et

$$\mu_{\text{rot}}^n = \begin{cases} 2 & \text{si } p \text{ et } q \text{ sont non nuls,} \\ \sqrt{2} & \text{si } p \text{ ou } q \text{ est nul.} \end{cases}$$

De même, on introduit la constante $\frac{\mu_{\text{rot}}^n}{\sqrt{ab} \lambda_n^N}$ pour satisfaire la normalisation $\int_{\eta} |\nabla \psi_n|^2 = 1$.

Remarquons que si l'on prenait $p = 0$ et $q = 0$, on obtiendrait $\psi_n = 1$, et donc $\text{rot } \psi_n = 0$. Contrairement aux modes de type gradient, un mode de type rotationnel correspondant à $(p = 0, q \neq 0)$ ou $(p \neq 0, q = 0)$ n'est pas nul. Il y a donc en général plus de modes guidés de type rotationnel que de modes guidés de type gradient, satisfaisant respectivement $\lambda_n^N \leq \lambda$ et $\lambda_n^D \leq \lambda$, où λ est un réel positif fixé.

En calculant $\text{rot } \psi_n$ sur l'interface, et en utilisant la condition de divergence nulle nous fournissant $F_z^{\pm} = 0$, on obtient les modes guidés associés, qui sont donnés en (4.19).

Description des modes guidés pour le cylindre de base rectangulaire

En conclusion, les modes guidés dans les deux demi-guides d'onde de base rectangulaire, se propageant dans la bonne direction, et dont les traces sur η forment une base orthonormée de $L^2(\eta, \mathbb{R}^2)$, sont décrits ci-dessous.

Définition 58 (Modes guidés d'un cylindre de section rectangulaire $a \times b$).

D'une part, les modes de type gradient sont donnés par

$$\mathbf{E}_{\text{grad}}^{\pm, n} = \frac{2}{\sqrt{ab} \lambda_n^D} e^{\pm i \beta_n^D z} \begin{pmatrix} \frac{p\pi}{a} \cos\left(\frac{p\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{q\pi}{b}y\right) \\ \frac{q\pi}{b} \sin\left(\frac{p\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{q\pi}{b}y\right) \\ \pm \frac{\lambda_n^D}{i \beta_n^D} \sin\left(\frac{p\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{q\pi}{b}y\right) \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

et d'autre part, les modes de type rotationnel sont donnés par

$$\mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm, n} = \frac{\mu_{\text{rot}}^n}{\sqrt{ab} \lambda_n^N} e^{\pm i \beta_n^N z} \begin{pmatrix} \frac{q\pi}{b} \cos\left(\frac{p\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{q\pi}{b}y\right) \\ -\frac{p\pi}{a} \sin\left(\frac{p\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{q\pi}{b}y\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

avec

$$\lambda_n = \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{b}\right)^2 \quad (4.20)$$

et

$$\beta_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n}. \quad (4.21)$$

Le coefficient μ_{rot}^n est défini par

$$\mu_{\text{rot}}^n = \begin{cases} 2 & \text{si } p \text{ et } q \text{ sont non nuls,} \\ \sqrt{2} & \text{si } p \text{ ou } q \text{ est nul.} \end{cases} \quad (4.22)$$

Les modes $\mathbf{E}_{\text{grad}}^{\pm, n}$ sont définis pour les couples $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, tandis que les modes $\mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm, n}$ sont définis pour les couples $(p, q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

4.2.2 Application à un guide d'onde de forme quelconque

Dans le cas d'un guide d'onde de forme quelconque, il n'y a pas d'obstruction *a priori* à la méthode. Nous aurons besoin de disposer d'un solveur 2D pour résoudre les problèmes de Dirichlet et de Neumann dans l'interface de forme quelconque. Nous n'avons pas encore implémenté

un tel solveur, mais cela s'avérera nécessaire pour un cylindre de section non rectangulaire par exemple.

4.3 Un préconditionneur spectral pour la DDM en Y

Les modes guidés pour un guide d'onde rectangulaire ont été définis au §4.2.1, et une diagonalisation de l'opérateur admittance impliqué dans la DDM a été donnée, avec des valeurs propres explicites pour cette forme particulière de cavité. Nous nous inspirons de cette étude pour proposer la méthode de préconditionnement suivante.

On a montré au §4.1.7 que l'opérateur admittance $\mathbb{A}_\Sigma^{\pm*}$, relatif au demi-guide d'onde G^\pm et défini par (5.6), est un opérateur diagonal dans la base des traces de modes guidés sur l'interface Σ . De plus, on a prouvé au Corollaire 57 que l'on a la formule suivante

$$\begin{cases} (\mathbb{A}_\Sigma^{+*} + \mathbb{A}_\Sigma^{-*}) \sigma(\mathbf{E}_{\mathbf{grad}}^n) = -\frac{2k}{\beta_n^D} \sigma(\mathbf{E}_{\mathbf{grad}}^n), \\ (\mathbb{A}_\Sigma^{+*} + \mathbb{A}_\Sigma^{-*}) \sigma(\mathbf{E}_{\mathbf{rot}}^n) = -\frac{2\beta_n^N}{k} \sigma(\mathbf{E}_{\mathbf{rot}}^n). \end{cases} \quad (4.23)$$

Le but est de préconditionner le système (3.10) que nous rappelons ci-dessous :

$$(\mathbb{A}_\Sigma^+ + \mathbb{A}_\Sigma^-) \mathbf{E}_{\mathbf{tan}}^+ = -\mathbf{u}_{\mathbf{rhs}},$$

en approchant l'opérateur $(\mathbb{A}_\Sigma^+ + \mathbb{A}_\Sigma^-)$ relatif aux deux sous-domaines réels de la DDM, par l'opérateur $(\mathbb{A}_\Sigma^{+*} + \mathbb{A}_\Sigma^{-*})$ relatif aux deux demi-guides d'onde. Remarquons que, comme dans le cas de l'équation intégrale GCSIE métallique, le conditionnement du système linéaire sous-jacent est d'autant meilleur que l'on approche fidèlement l'opérateur Dirichlet-to-Neumann.

Intuitivement, les modes propagatifs doivent avoir une plus grande importance que les modes évanescents pour la propagation de l'information depuis l'interface Σ jusque dans les sous-domaines. Il est donc logique, dans un premier temps, de se limiter aux modes propagatifs, en ne prenant en compte que les valeurs propres λ_n du laplacien sur l'interface vérifiant

$$\lambda_n \leq k^2.$$

On introduit le coefficient réel $c_{\text{evan}} > 0$ et l'on choisit de ne tenir compte que des modes guidés tels que les valeurs propres associées vérifient

$$\lambda_n \leq c_{\text{evan}} k^2.$$

Lorsque $c_{\text{evan}} = 1$, on se restreint aux modes propagatifs (aucun mode évanescent). Lorsque $c_{\text{evan}} < 1$, on se restreint aux modes propagatifs associés aux plus petites valeurs propres (il manque donc *a priori* certains modes propagatifs). Lorsque $c_{\text{evan}} > 1$, on considère tous les modes propagatifs avec également quelques modes évanescents.

Pour chaque calcul, nous allons donner le nombre total de modes guidés considérés. Pour des raisons de cohérence et d'élégance, nous avons choisi de prendre en compte tous les modes guidés de valeur propre λ donnée. Le nombre total de modes guidés n'est donc pas arbitraire.

Définition 59 (Le préconditionneur modal pour la DDM en Y).

On définit de la manière suivante un préconditionneur basé sur la connaissance des modes guidés. On choisit préalablement un coefficient c_{evan} qui fixe le nombre de modes guidés considérés. On notera \mathcal{B} l'ensemble des modes pris en compte. Le vecteur auquel on applique le préconditionneur est une combinaison linéaire d'éléments finis de Raviart-Thomas.

- 1) On projette orthogonalement l'inconnue sur l'ensemble $\sigma(\mathcal{B})$ des traces de modes guidés sur l'interface Σ . Cette étape est réalisée en multipliant le vecteur en question par la matrice du produit scalaire L^2 des traces de modes guidés contre les éléments finis de Raviart-Thomas, étape qui est suivie d'une inversion par la matrice masse des traces de modes guidés. Notez que, aux erreurs de discrétisation près, cette dernière matrice est l'identité. Par mesure de prudence, on réalise quand même cette inversion par la matrice masse.
- 2) On multiplie le vecteur obtenu par l'inverse de la matrice diagonale contenant les valeurs propres de l'opérateur $(\mathbb{A}_{\Sigma}^{+*} + \mathbb{A}_{\Sigma}^{-*})$. Ces valeurs propres sont données par les formules (4.23).
- 3) On retourne dans l'espace des éléments finis de Raviart-Thomas, de nouveau par une projection orthogonale. On multiplie le vecteur par la matrice du produit scalaire L^2 des éléments finis de Raviart-Thomas contre les traces de modes guidés, puis on inverse par la matrice masse des éléments finis de Raviart-Thomas.

Définition 60.

On désigne par :

- [massRT] la matrice masse des éléments finis de Raviart-Thomas ;
- [massModes] la matrice masse des traces de modes guidés sur l'interface Σ ;
- [RTModes] la matrice permettant de passer des éléments finis de Raviart-Thomas aux traces de modes guidés, i.e. la matrice contenant les produits scalaires des traces de modes guidés contre les éléments de Raviart-Thomas (les lignes concernent les modes guidés et les colonnes les Raviart-Thomas) ;
- [ModesRT] la matrice permettant de passer des traces de modes guidés aux éléments finis de Raviart-Thomas, i.e. la matrice contenant les produits scalaires des éléments finis de Raviart-Thomas contre les traces de modes guidés (les lignes concernent les Raviart-Thomas et les colonnes les modes guidés) ;
- [DiagY] la matrice diagonale contenant les valeurs propres de l'opérateur $(\mathbb{A}_{\Sigma}^{+*} + \mathbb{A}_{\Sigma}^{-*})$ associées aux traces des modes guidés considérés.

Pour résumer, avec ces notations, nous préconditionnons la DDM en Y en effectuant l'opération suivante :

$$[\text{massRT}]^{-1}[\text{ModesRT}][\text{DiagY}]^{-1}[\text{massModes}]^{-1}[\text{RTModes}].$$

4.4 Résultats numériques pour la DDM en Y

4.4.1 Présentation du cas test

On considère un maillage test constitué d'une cavité parallélépipédique. Ce maillage est nommé `smallBox`. L'interface du maillage `smallBox` est un rectangle dont les côtés sont de longueur $a = 0.04755\text{m}$ et $b = 0.02225\text{m}$. En fonction de la fréquence et de la longueur des côtés de l'interface, un certain nombre de modes peuvent pénétrer dans la cavité ; on dit alors qu'il s'agit de modes propagatifs. Le nombre de modes propagatifs à fréquence donnée est indiqué dans le tableau ci-dessous.

Fréquence	Nombre de modes propagatifs pour le maillage <code>smallBox</code>
100 MHz	0
3.2 GHz	1
6.5 GHz	2
6.7 GHz	2 *
7 GHz	3 *
9 GHz	5 *
10 GHz	8 *
15 GHz	18 *
20 GHz	26 *
26 GHz	49 *
30 GHz	69 *
37 GHz	100 *
37.1 GHz	102 *

FIGURE 4.3 – Nombre de modes propagatifs correspondant aux guides d'onde infinis engendrés par l'interface du maillage `smallBox`, en fonction de la fréquence. * Le maillage `smallBox` est considéré comme trop grossier pour ces fréquences.

4.4.2 Validation numérique pour la DDM en Y

On applique le préconditionneur décrit dans la section précédente au cas d'un objet diffractant contenant une cavité, dont la forme près de l'interface peut être approchée par un cylindre rectangulaire infini tangent à la cavité. On rappelle que la base des modes guidés d'un tel cylindre a été décrite au paragraphe 4.2.1.

Pour la validation, on considère le maillage `smallBox`. Pour une fréquence de 100 MHz, le maillage `smallBox` est en λ sur 510.80. Pour une fréquence de 3200 MHz, le maillage est en λ sur 15.96. Pour une fréquence de 6500 MHz, le maillage est en λ sur 7.86. Pour ces trois fréquences, on compare les courbes de SER obtenues (FIG. 4.4 , 4.5 et 4.6) : par la DDM en Y non préconditionnée ; par la DDM en Y préconditionnée à l'aide du préconditionneur spectral, avec 8 modes guidés ; et enfin, par résolution des équations intégrales suivantes : l'EFIE, la GCSIE métallique, la CFIE avec coefficient de MFIE 0.5, la CFIE avec coefficient de MFIE 0.1.

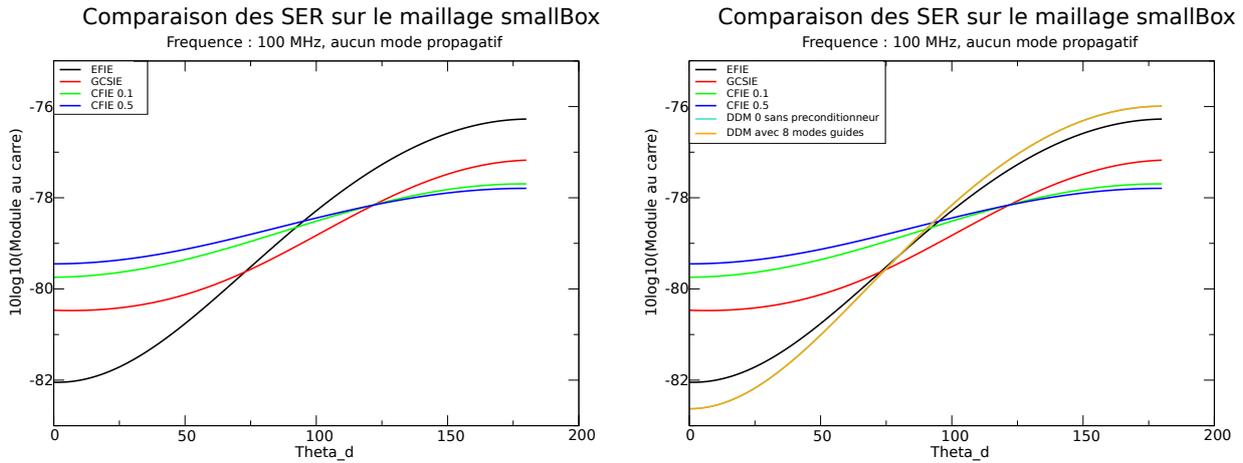


FIGURE 4.4 – Courbes de SER pour le maillage smallBox à 100 MHz.

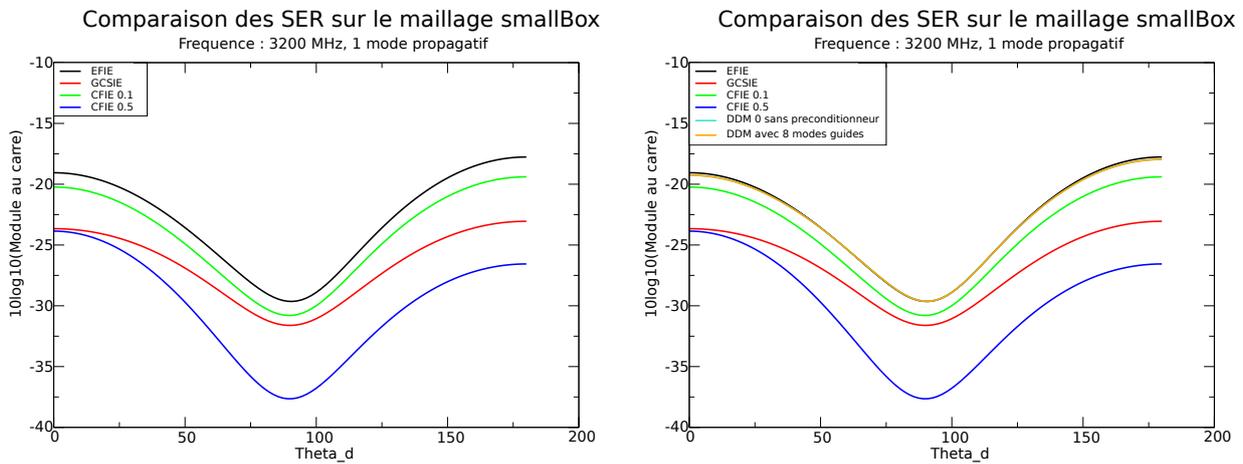


FIGURE 4.5 – Courbes de SER pour le maillage smallBox à 3200 MHz.

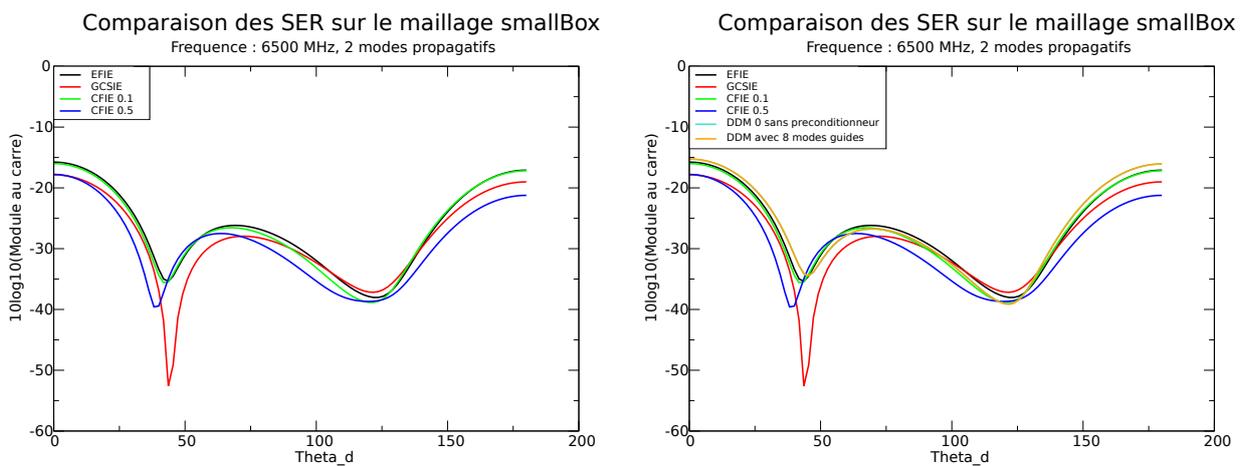


FIGURE 4.6 – Courbes de SER pour le maillage smallBox à 6500 MHz.

Nous constatons une différence importante entre les quatre équations intégrales. Cette différence de SER peut être due au fait que le maillage `smallBox` est maillé trop grossièrement sur l'arête près de l'interface. Nous observons que la DDM en Y préconditionnée spectralement est en tout cas superposée à la DDM en Y non préconditionnée, ce qui montre que le préconditionneur spectral ne perturbe pas la SER. De plus, les courbes de SER des deux DDMs en Y sont très proches de celles de l'EFIE ; cela est probablement normal, car on utilise l'EFIE pour résoudre les sous-problèmes locaux, et en particulier pour reconstruire la SER dans le domaine extérieur lorsque le système linéaire de la DDM est résolu.

4.4.3 Influence du nombre de modes guidés

Le nombre d'itérations pour atteindre la convergence est présenté sur la tableau FIG. 4.7, en fonction du nombre de modes guidés considérés. Nous remarquons immédiatement que ce préconditionneur est particulièrement efficace : avec 8 modes guidés par exemple, à une fréquence de 6500 MHz, il conduit à un algorithme convergeant en 7 itérations, au lieu de 53 itérations pour la DDM en Y non préconditionnée.

DDM en Y	Type de préconditionneur	Nombre d'itérations avant convergence pour $f = 3200$ MHz	Nombre d'itérations avant convergence pour $f = 6500$ MHz
1 mode guidé	spectral	1	1
2 modes guidés	spectral	2	2
5 modes guidés	spectral	3	5
8 modes guidés	spectral	3	7
18 modes guidés	spectral	4	8
26 modes guidés	spectral	5	9
49 modes guidés	spectral	8	12
69 modes guidés	spectral	17	18
100 modes guidés	spectral	24	43
DDM Y_0	absent	48	53

FIGURE 4.7 – Nombre d'itérations pour le maillage `smallBox`, pour atteindre un résidu de 10^{-6} , à une fréquence de **3200 MHz** et **6500 MHz**, pour la DDM en Y préconditionnée respectivement avec 1, 2, 5, 8, 18, 26, 49, 69 et 100 modes guidés, et pour DDM Y_0 , la DDM en Y non préconditionnée.

Faisons plusieurs remarques. Tout d'abord, avec ce type de maillage, on ne peut monter au-delà de 6.7MHz, sinon le maillage est trop grossier par rapport à la longueur d'onde. Seuls deux modes guidés correspondent à une fréquence inférieure à 6.7 MHz. Il est donc impossible avec ce maillage de faire en sorte d'avoir plus de deux modes guidés propagatifs : tous les autres pris en compte seront donc évanescents. On a choisi dans un premier temps de se placer à la fréquence de 100 MHz, à laquelle il n'y a aucun mode propagatif. Dans un deuxième temps, on se place à une fréquence de 3200 MHz, avec un mode propagatif. Enfin, on considère une fréquence de 6500 MHz, avec deux modes propagatifs. Dans la suite, pour la comparaison des vitesses de convergence, on ne présente que les résultats aux fréquences 3200 MHz et 6500 MHz.

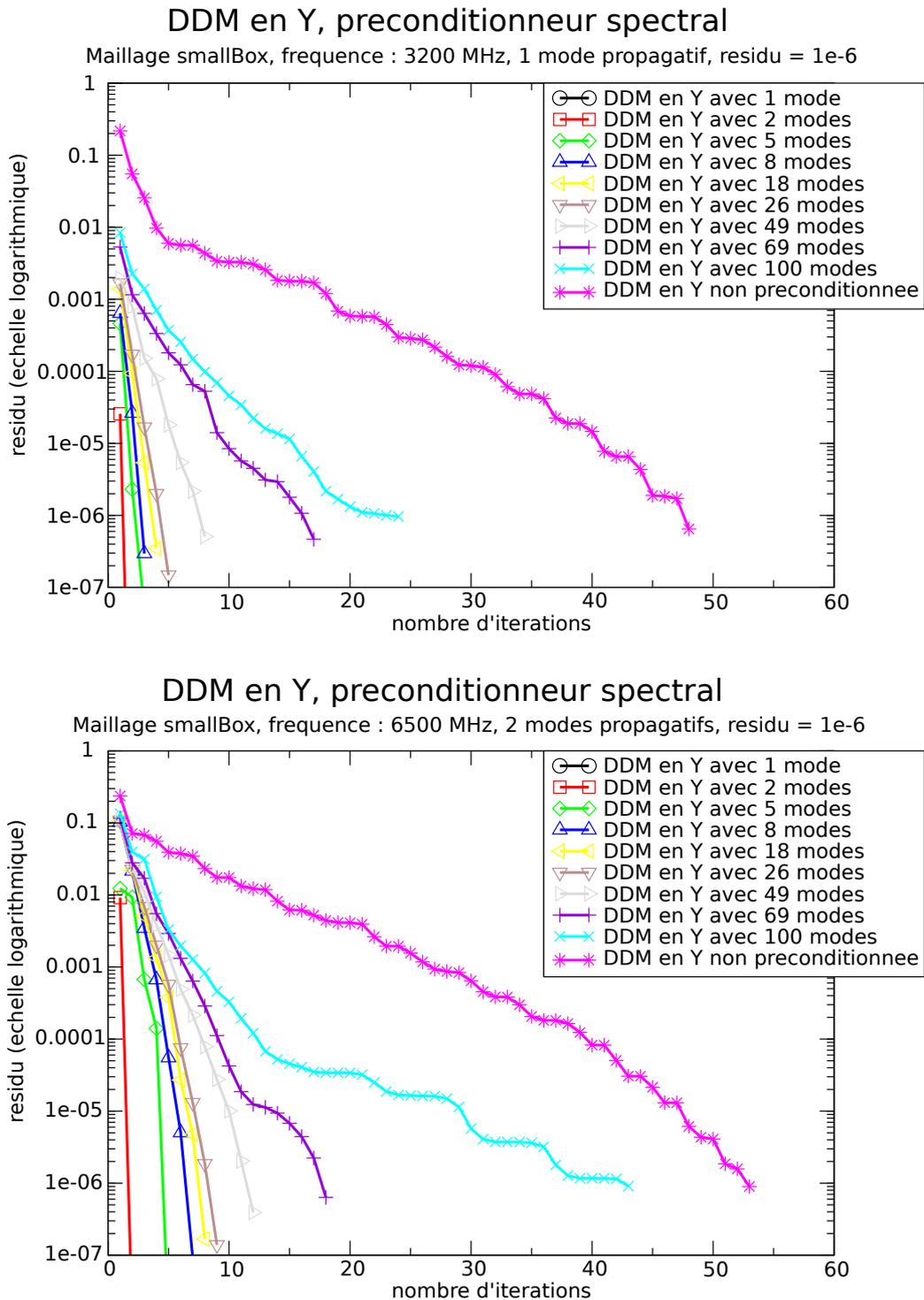


FIGURE 4.8 – Courbes de convergence pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-6} , pour le maillage smallBox à **3200 MHz** (en haut) et **6500 MHz** (en bas), pour la DDM en Y préconditionnée respectivement avec 1, 2, 5, 8, 18, 26, 49, 69 et 100 modes guidés dont 1 ou 2 mode(s) propagatif(s) à chaque fois, et pour DDM Y0, la DDM en Y non préconditionnée.

On remarque dans les trois cas que plus le nombre de modes guidés augmente (on a considéré de 1 à 100 modes), plus le nombre d'itérations augmente. On peut interpréter ce résultat de la manière suivante : plus on augmente le nombre de modes, plus les modes ajoutés correspondent à une fréquence élevée, plus ils oscillent vite, et - à nombre fixé de points de Gauss par élément - moins ils sont bien représentés. Il serait donc intéressant d'observer ce qui se passe si on augmente le nombre de points de Gauss sur l'élément pour mieux approcher les matrices de produit scalaire L^2 .

Interprétation des courbes de convergence

Les courbes de la FIG. 4.8 peuvent être interprétées de la manière suivante. Si l'on considère le préconditionneur avec n modes guidés, la méthode revient à projeter le second membre et la solution dans l'espace des n modes guidés, qui est de dimension n . Il est donc normal que l'algorithme correspondant, qui est un algorithme de type gradient conjugué, converge en n itérations maximum.

Pour les courbes de 1 à 8 modes guidés, on a convergence en moins de 8 itérations, ce qui est normal. En revanche, la solution obtenue est très fidèle à la solution attendue. Cette précision de la solution traduit le fait que la solution est très bien représentée sur les premiers modes. Pour le voir, on enlève le préconditionneur lui-même, c'est-à-dire l'opération de multiplication par la matrice diagonale contenant les valeurs propres de l'opérateur en cause. On vérifie qu'en ne gardant que l'opération de projection sur un petit nombre de modes, l'algorithme converge toujours en un petit nombre d'itérations, et que la solution reste fidèle (FIG. 4.9 et FIG. 4.10, préconditionneur utilisant de 1 à 8 modes). Notons cependant qu'il est sans doute exagéré, dans le cas général, de prendre un nombre de modes inférieur à 4 ; ce préconditionneur marche ici car la solution du problème est simple et déjà très bien représentée par le premier mode.

Un deuxième comportement apparaît pour les courbes de 18 à 100 modes guidés. Cette fois, on a un grand nombre de modes guidés qui interviennent, donc il n'y a pas de raison pour que l'algorithme constitué de la projection sur l'ensemble des modes (en enlevant le préconditionneur) converge rapidement. On le vérifie en enlevant la matrice diagonale contenant les valeurs propres (FIG. 4.9 et FIG. 4.10, préconditionneur utilisant de 18 à 100 modes). Le fait qu'avec la présence de la matrice diagonale, l'algorithme converge si bien, signifie que l'on a affaire à un bon préconditionneur (en particulier, les valeurs propres correspondent bien à celles de l'opérateur en jeu dans la DDM).

Pour résumer les résultats obtenus, le comportement de l'algorithme pour un petit nombre de modes illustre le fait que dans les cas étudiés, les premiers modes guidés constituent une *bonne base* pour représenter la solution, tandis que le comportement pour un grand nombre de modes illustre le *bon conditionnement* du système linéaire.

Nombre de modes utilisés	DDM projetée sur les modes guidés sans préconditionneur	DDM avec préconditionneur diagonal
1 mode guidé	1	1
2 modes guidés	2	2
5 modes guidés	5	5
8 modes guidés	8	7
18 modes guidés	18	8
26 modes guidés	23	9
49 modes guidés	32	12
69 modes guidés	45	18
100 modes guidés	87	43
DDM Y0	53	53

FIGURE 4.9 – Nombre d’itérations pour le maillage smallBox, à une fréquence de **6500 MHz**, pour atteindre un résidu d’ordre 10^{-6} , en utilisant 1, 2, 5, 8, 18, 26, 49, 69 et 100 modes guidés, respectivement pour la DDM en Y avec préconditionneur, i.e. avec inversion par la matrice diagonale, et pour la DDM en Y contenant simplement une projection sur les modes guidés. On a rappelé sous le tableau le nombre d’itérations pour DDM Y0.

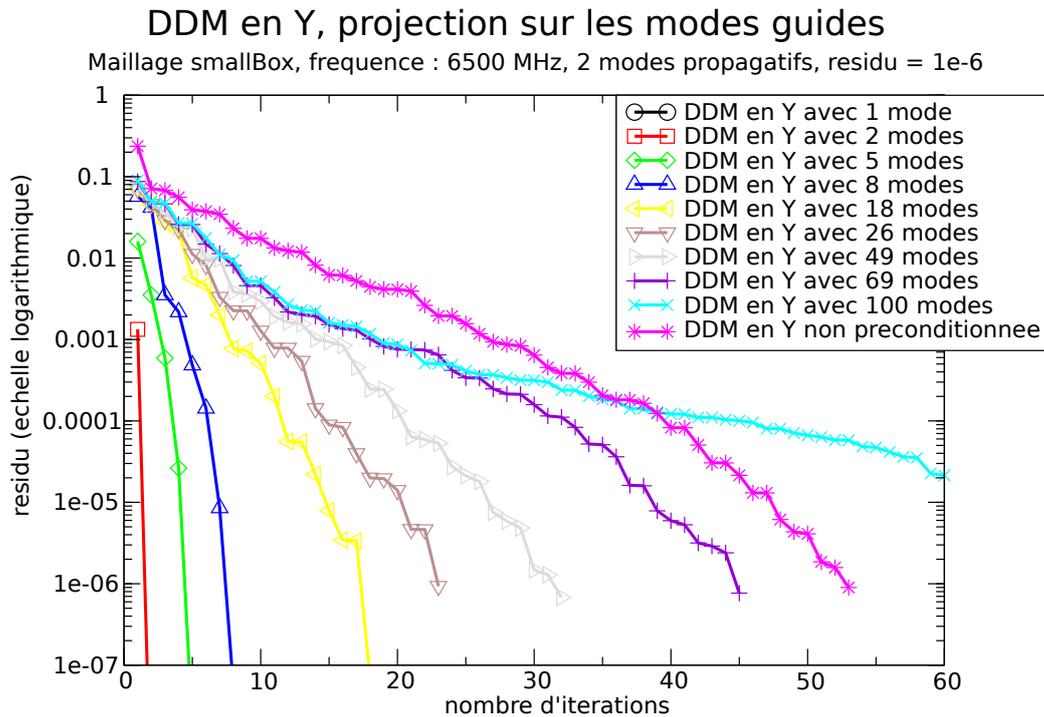


FIGURE 4.10 – Courbes de convergence pour le maillage smallBox, à une fréquence de **6500 MHz**, pour atteindre un résidu d’ordre 10^{-6} , pour la DDM projetée simplement sur les modes guidés (sans préconditionneur), respectivement avec 1, 2, 5, 8, 18, 26, 49, 69 et 100 modes guidés dont 2 modes propagatifs.

4.4.4 Influence de l'angle d'incidence

Nous faisons varier l'angle d'incidence de l'onde plane envoyée sur l'objet (la cavité small-Box), et nous observons l'influence éventuelle sur le nombre d'itérations. Nous avons testé la DDM en Y non préconditionnée et celle préconditionnée à l'aide d'un certain nombre de modes guidés, pour des angles d'incidence respectifs de 0° , 90° , 120° , 150° et 180° , pour atteindre un résidu de 10^{-4} à une fréquence de 6500 MHz. Nous présentons les résultats numériques sur la FIG. 4.11. Nous observons que l'angle d'incidence ne joue pas de manière significative sur le nombre d'itérations.

Angle d'incidence ($^\circ$)	0	90	120	150	180
Nombre de modes					
1 mode guidé	1	1	1	1	1
2 modes guidés	2	2	2	2	2
5 modes guidés	5	5	5	5	5
8 modes guidés	5	6	6	6	5
18 modes guidés	6	7	7	7	6
DDM Y0	42	42	41	40	40

FIGURE 4.11 – Nombre d'itérations pour le maillage smallBox, pour atteindre un résidu de 10^{-4} , à une fréquence de **6500 MHz**, respectivement pour DDM Y0, la DDM en Y non préconditionnée et la DDM préconditionnée respectivement avec 1, 2, 5, 8 et 18 modes guidés.

4.4.5 Influence du nombre de modes propagatifs dans la cavité

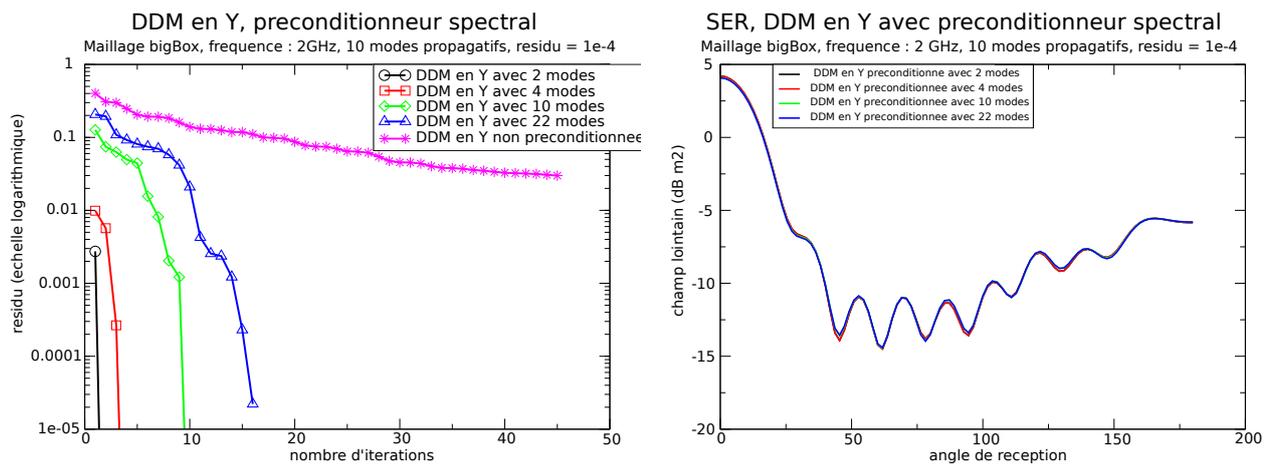


FIGURE 4.12 – Courbes de convergence et courbes de SER pour le maillage bigBox à **2 GHz**.

Dans le cas du maillage smallBox, on n'a considéré que 1 ou 2 modes propagatifs, en fonction de la fréquence. Il est possible que la solution soit fidèlement représentée sur les tout premiers modes, uniquement parce que seuls les modes propagatifs comptent, et qu'ils sont en petit nombre pour le maillage smallBox. Pour éclaircir ce point, on considère un autre maillage

constitué d'une cavité parallélépipédique, que l'on nomme bigBox (FIG. 4.13), en raison de la finesse du maillage : bigBox est plus finement maillé que smallBox. L'interface du maillage bigBox est un carré de côté $c = 0.17\text{m}$. Nous choisissons de nous placer à une fréquence de 2000 MHz, pour laquelle le maillage bigBox comporte 10 modes propagatifs (au lieu des 2 modes propagatifs pour smallBox à 6500 MHz). Nous constatons que la solution est toujours bien représentée sur les premiers modes, en observant que même pour un petit nombre de modes (2 ou 4), la SER reste identique à celle obtenue pour un plus grand nombre de modes (10 ou 22). Les résultats sont présentés sur les courbes de FIG. 4.12 et dans le tableau FIG. 4.14. Par ailleurs, le nombre d'inconnues sur l'interface et dans les sous-domaines est plus grand pour bigBox que pour smallBox, mais le préconditionneur modal reste très efficace.

Nom du maillage	Forme de l'objet	Forme de l'interface	Interface	Fréquence	Domaine extérieur	Domaine intérieur
bigBox	Cavité parallélépipédique	Rectangle	448 inconnues	2 GHz	9624 inconnues	3936 inconnues

FIGURE 4.13 – Grosse boîte parallélépipédique (maillage bigBox, fréquence de 2 GHz)

DDM en Y	Type de préconditionneur	Nombre d'itérations avant convergence pour $f = 2000$ MHz
2 modes guidés	spectral	2
4 modes guidés	spectral	4
10 modes guidés	spectral	10
22 modes guidés	spectral	16
DDM Y_0	absent	> 45

FIGURE 4.14 – Nombre d'itérations pour le maillage bigBox, pour atteindre un résidu de 10^{-4} , à une fréquence de **2000 MHz**, pour la DDM en Y préconditionnée respectivement avec 2, 4, 10 et 22 modes guidés, et pour DDM Y_0 , la DDM en Y non préconditionnée.

4.5 Comparaison avec le préconditionneur analytique

Dans cette section, nous comparons l'efficacité du préconditionneur spectral proposé dans ce chapitre et basé sur les modes guidés, avec celle du préconditionneur analytique présenté dans le Chapitre 3 et fondé sur l'opérateur simple couche. Nous effectuons les comparaisons numériques sur le maillage smallBox.

En termes de nombre d'itérations, nous observons sur les courbes de FIG. 4.15 et FIG. 4.16, et sur le tableau FIG. 4.17, que le préconditionneur analytique est d'une efficacité comparable (légèrement meilleure) à celle du préconditionneur spectral utilisant 69 modes guidés.

Puisqu'un très petit nombre de modes permet d'obtenir une SER fidèle, il vaut donc mieux utiliser le préconditionneur spectral avec peu de modes, avec 8 modes guidés, par exemple, plutôt que d'utiliser l'opérateur simple couche, qui conduit à un algorithme plus lent.

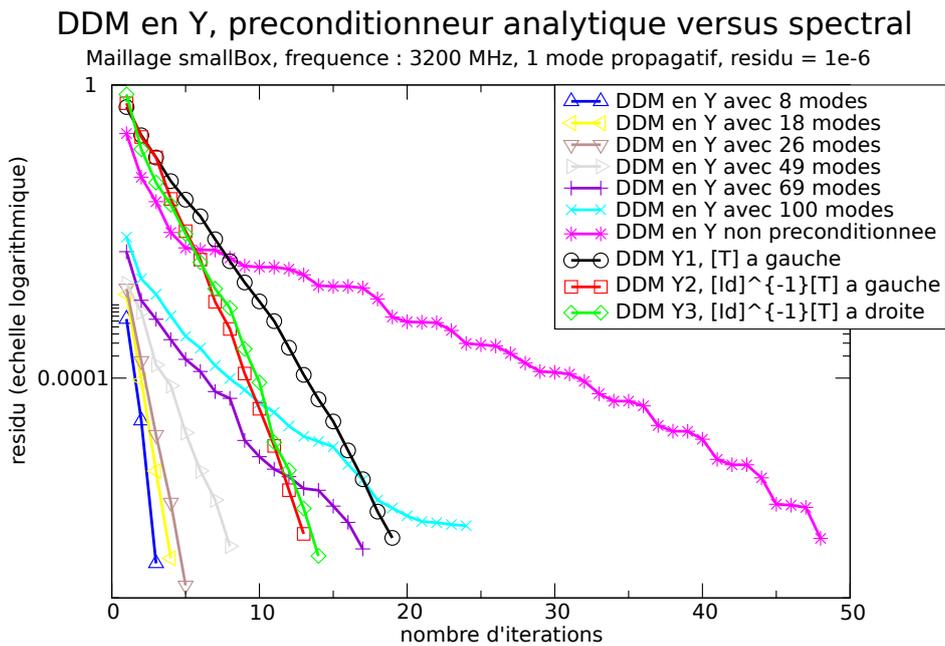


FIGURE 4.15 – Courbes de convergence pour le maillage smallBox, à une fréquence de **3200 MHz**, pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-6} , pour la DDM en Y non préconditionnée, la DDM en Y avec préconditionneurs spectraux et la DDM en Y avec préconditionneurs analytiques.

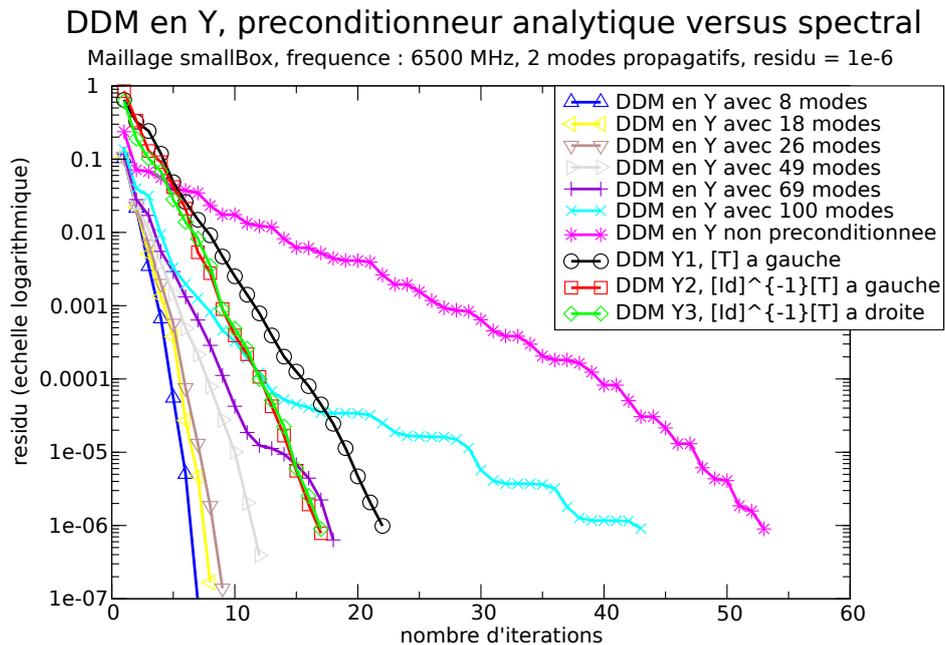


FIGURE 4.16 – Courbes de convergence pour le maillage smallBox, à une fréquence de **6500 MHz**, pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-6} , pour la DDM en Y non préconditionnée, la DDM en Y avec préconditionneurs spectraux et la DDM en Y avec préconditionneurs analytiques.

Le préconditionneur basé sur le simple couche reste malgré tout plus facile à programmer que le préconditionneur spectral. Sa simplicité est son principal atout.

DDM en Y	Type de préconditionneur	Nombre d'itérations pour $f = 3200$ MHz	Nombre d'itérations pour $f = 6500$ MHz
DDM Y0	absent	48	53
DDM Y1	analytique	19	22
DDM Y2	analytique	13	17
DDM Y3	analytique	14	17
1 mode guidé	spectral	1	1
2 modes guidés	spectral	2	2
5 modes guidés	spectral	3	5
8 modes guidés	spectral	3	7
18 modes guidés	spectral	4	8
26 modes guidés	spectral	5	9
49 modes guidés	spectral	8	12
69 modes guidés	spectral	17	18
100 modes guidés	spectral	24	43

FIGURE 4.17 – Nombre d'itérations pour le maillage smallBox, à une fréquence de **3200 MHz** et **6500 MHz**, pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-6} , pour les DDMs suivantes : DDM Y0, la DDM en Y non préconditionnée ; la DDM en Y préconditionnée respectivement avec 1, 2, 5, 8, 18, 26, 49, 69 et 100 modes guidés ; la DDM en Y avec préconditionneurs analytiques basés sur l'opérateur simple couche DDM Y1, DDM Y2 et DDM Y3.

4.6 Conclusion

Nous disposons désormais de deux types de préconditionneurs pour la DDM en Y , un préconditionneur analytique, relativement simple à mettre en œuvre, et un préconditionneur spectral, nécessitant un travail préliminaire de calcul des traces de modes guidés sur l'interface, mais possédant l'avantage de conduire à une DDM mieux conditionnée.

Cependant, il reste encore une difficulté, provenant de ce que les problèmes métalliques intérieurs sont mal posés à certaines fréquences. Ainsi la performance des équations intégrales est freinée au voisinage de ces fréquences de résonance. On pourrait se débarrasser de ces problèmes si l'on avait à résoudre, dans les sous-domaines, un problème de type impédant. En effet, les problèmes intérieurs impédants sont bien posés, de même que les problèmes intérieurs mixtes de type métal-impédant [18]. Un tel choix impose alors de changer l'opérateur de couplage intervenant dans la DDM : il faudrait écrire le problème (3.7) sous forme d'un système d'équations impliquant des traces impédantes du champ électrique. Or le formalisme développé dans le cadre de la GCSIE pour les problèmes de type métal [4] a récemment été étendu au cas des problèmes impédants dans [48] et [43]. On pourra se référer au Chapitre 2 pour la description de cette équation intégrale bien conditionnée dédiée aux problèmes de type impédant et mixtes de type métal-impédant. On dispose donc également d'une équation intégrale performante pour les sous-problèmes impédants.

En combinant les trois idées décrites ci-dessus, le choix d'une formulation impédante pour

contourner le problème des fréquences de résonance dans les sous-domaines internes, l'utilisation d'équations intégrales performantes dans les sous-domaines pour résoudre les problèmes de type métal-impédant, ainsi que la découverte d'un préconditionneur adapté pour la DDM qui en découle, on espère pouvoir résoudre les difficultés posées par la présence de cavités dans les problèmes de diffraction d'ondes.

C'est l'objet du Chapitre 5 suivant : quels préconditionneurs proposer pour une DDM paramétrée par des opérateurs de scattering, et non plus par des opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann ?

Chapitre 5

Un préconditionneur spectral pour la DDM en S

Sommaire

5.1	Description de la DDM en S	139
5.1.1	Opérateur de scattering classique associé à une surface fermée	139
5.1.2	Opérateur de scattering modifié associé à une DDM	140
5.1.3	Retour à la DDM	141
5.2	La DDM en S non préconditionnée	142
5.2.1	Symbole de l'opérateur sous-jacent à la DDM en S .	142
5.2.2	Comparaison entre la DDM en Y et la DDM en S	144
5.2.3	Validation numérique de la DDM en S	145
5.3	Un préconditionneur spectral pour la DDM en S	146
5.3.1	Diagonalisation de l'opérateur de scattering dans la base des traces de modes guidés	146
5.3.2	Un préconditionneur fondé sur les modes guidés pour la DDM en S	147
5.4	Résultats numériques pour la DDM en S préconditionnée à l'aide des modes guidés	149
5.4.1	Validation numérique	149
5.4.2	Vitesse de convergence des algorithmes	149
5.5	Autres préconditionneurs possibles	152

Nous avons présenté dans les Chapitres 3 et 4 une méthode de décomposition de domaine qui fait intervenir l'opérateur Dirichlet-to-Neumann entre ses sous-domaines. Le calcul numérique de cet opérateur est fondé sur la résolution d'équations intégrales qui peuvent être mal posées dans le domaine intérieur Ω^- (dans la cavité). En effet, à cause de l'existence de phénomènes de résonance à certaines fréquences, le problème intérieur métallique n'est pas toujours bien posé. En revanche, on sait que le problème avec conditions aux limites mixtes de type métal-impédant est toujours bien posé, même dans un domaine intérieur (on pourra se reporter pour la preuve à l'Annexe D, ainsi qu'à [18]).

L'idée de la DDM en S est donc de remplacer un opérateur de type Dirichlet-to-Neumann par un opérateur de scattering. On définit l'opérateur de scattering, noté S_α^\pm , qui est associé à une trace $\mathbf{n} \times \mathbf{E}^\pm - \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}}^\pm$. Le coefficient α est une fonction réelle définie sur la surface Σ qui est supposée suffisamment régulière.

$$S_\alpha^\pm : \quad \mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}^\pm - \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}}^\pm \mapsto \mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}^\pm + \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}}^\pm.$$

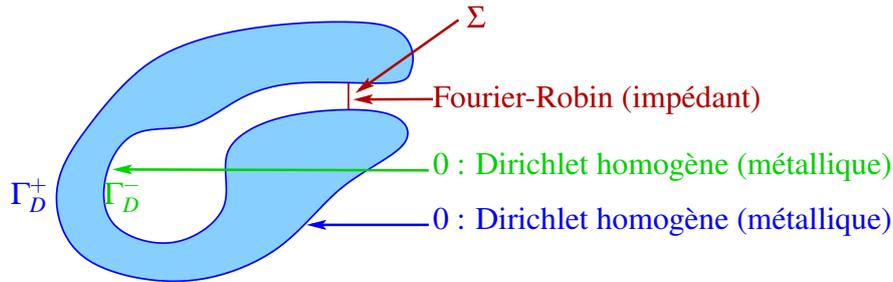


FIGURE 5.1 – Problèmes aux limites de type métal-impédant dans les sous-domaines

Pour synthétiser l'opérateur de scattering extérieur S_α^+ et l'opérateur de scattering intérieur S_β^- , on doit résoudre des problèmes aux limites mixtes dans Ω^+ et Ω^- :

$$\text{Dans } \Omega^+ : \begin{cases} \text{impédant sur } \Sigma, \text{ avec coefficient } \alpha, \\ \text{métallique sur } \Gamma_D^+. \end{cases} \quad \text{Dans } \Omega^- : \begin{cases} \text{impédant sur } \Sigma, \text{ avec coefficient } \beta, \\ \text{métallique sur } \Gamma_D^-. \end{cases}$$

Dans le premier paragraphe, nous décrivons l'opérateur de scattering classique (associé à une surface Γ_0 fermée), puis l'opérateur de scattering modifié (associé à une surface Σ ouverte, l'interface entre sous-domaines) permettant d'écrire une nouvelle DDM, une DDM en S .

Dans le deuxième paragraphe, nous donnons le moyen d'obtenir un opérateur de scattering à l'aide d'une équation intégrale impédante, de la même manière qu'on avait montré comment synthétiser les opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann par équations intégrales métalliques, dans le Chapitre 2.

On expérimente ensuite numériquement, dans le troisième paragraphe, la DDM en S sans préconditionneur. Pour la résolution des problèmes locaux dans les sous-domaines, nous utilisons l'équation intégrale GCSIE impédante (décrite au Chapitre 2). Nous montrons que l'opérateur

sous-jacent à la DDM en S est d'ordre -1 , ce qui conduit à un système linéaire mal conditionné. Nous comparons la vitesse de convergence (en termes de nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un résidu donné) des algorithmes découlant respectivement de la DDM en Y et de la DDM en S .

Dans le quatrième paragraphe, nous préconditionnons la DDM en S , en utilisant l'idée de diagonalisation des opérateurs de scattering dans la base des modes guidés, la même idée utilisée dans le cas de la DDM en Y . Nous présentons des résultats numériques dans le cas, commun au Chapitre 4, d'une cavité de section rectangulaire au voisinage de l'interface. Nous proposons finalement au cinquième paragraphe des préconditionneurs alternatifs pour la DDM en S , qui n'ont pu être testés numériquement.

5.1 Description de la DDM en S

Nous avons décrit au début du Chapitre 3 le principe d'une méthode de décomposition de domaine, et en particulier le système linéaire (3.7) qui couple les sous-domaines. Nous avons ensuite exprimé ce système sous forme d'une équation basée sur des opérateurs de Dirichlet-to-Neumann. Dans cette section, nous montrons que ce couplage entre sous-domaines peut également s'écrire sous la forme d'une équation mettant en jeu des opérateurs de scattering. L'avantage de cette reformulation est que les opérateurs de scattering sont toujours bien posés, indépendamment de la fréquence.

5.1.1 Opérateur de scattering classique associé à une surface fermée

Tout comme au §3.2.1, nous décrivons l'opérateur de scattering de manière classique, pour une surface fermée délimitant deux domaines connexes et complémentaires de \mathbb{R}^3 . Nous introduisons ensuite l'opérateur modifié correspondant à une DDM, associé à une surface ouverte constituée par l'interface entre sous-domaines.

Considérons un sous-ensemble compact et connexe D_0 de \mathbb{R}^3 , possédant une frontière Γ_0 de régularité \mathcal{C}^∞ , définissant deux domaines ouverts et connexes : le domaine intérieur borné Ω_0^- et le domaine extérieur non borné Ω_0^+ (FIG. 5.2). Notons \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à Γ_0 dirigé vers l'extérieur de Ω_0^- , et γ_T^\pm la trace tangentielle sur Γ_0 prise depuis le domaine Ω_0^\pm . On utilise la notation $\mathbf{n}^\pm = \pm\mathbf{n}$.

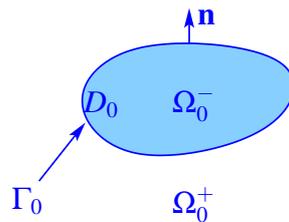


FIGURE 5.2 – Objet diffractant D_0 (sans cavité).

On désigne par α , soit un nombre réel non nul, soit une fonction réelle définie sur l'interface Σ et ne s'annulant pas. Soit \mathbf{E}^\pm un champ électrique défini dans Ω_0^\pm (où naturellement \mathbf{E}^+ est rayonnant), et soit \mathbf{H}^\pm le champ magnétique associé. L'opérateur de scattering extérieur ou intérieur $S_{0,\alpha}^\pm$ est défini par

$$S_{0,\alpha}^\pm : \quad \mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}^\pm - \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}}^\pm \mapsto \mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}^\pm + \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}}^\pm.$$

Notons que l'indice 0 fait référence à la frontière unique Γ_0 délimitant les domaines Ω_0^+ et Ω_0^- , tandis que α est un paramètre réel libre (ou une fonction paramètre réelle).

Plus précisément, nous avons la définition suivante.

Définition 61 (Opérateur de scattering $S_{0,\alpha}^\pm$).

Soit α une fonction réelle sur l'interface Σ , éventuellement constante.

- On appelle opérateur de scattering extérieur, et on note $S_{0,\alpha}^+$, l'opérateur qui à une donnée impédante \mathbf{e} sur Γ , associe la trace impédante duale du champ \mathbf{E} solution du problème de Maxwell extérieur avec condition impédante \mathbf{e} . Si \mathbf{e} est tel que

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \mathbf{n}^+ \times \mathbf{E} - \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}} = \mathbf{e} & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} \left(\mathbf{x} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + ik|\mathbf{x}| \mathbf{E} \right) = 0, \end{cases}$$

alors l'opérateur de scattering appliqué à \mathbf{e} est donné par

$$S_{0,\alpha}^+ \mathbf{e} = \mathbf{n}^+ \times \mathbf{E} + \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}}.$$

- On appelle opérateur de scattering intérieur, et on note $S_{0,\alpha}^-$, l'opérateur qui à une donnée impédante \mathbf{e} sur Γ , associe la trace impédante duale du champ \mathbf{E} solution du problème de Maxwell intérieur avec condition impédante \mathbf{e} . Si \mathbf{e} est tel que

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \mathbf{n}^- \times \mathbf{E} - \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}} = \mathbf{e} & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

alors l'opérateur de scattering appliqué à \mathbf{e} est donné par

$$S_{0,\alpha}^- \mathbf{e} = \mathbf{n}^- \times \mathbf{E} + \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}}.$$

Remarque. En pratique, on choisira α constante. On aurait pu également définir un opérateur de scattering avec α paramètre réel, mais le problème continu impédant associé à la trace impédante $\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}^\pm - \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}}^\pm$ avec α complexe n'est pas toujours bien posé [18].

5.1.2 Opérateur de scattering modifié associé à une DDM

Pour décrire l'opérateur de scattering modifié, qui permet de transmettre la trace impédante d'un sous-domaine à un autre à travers l'interface introduite dans la DDM, on utilise les

opérateurs de prolongement P^\pm et de restriction R^\pm donnés à la Définition 46. On définit les opérateurs de scattering modifiés, relatifs à l'interface Σ et notés $S_{\Sigma,\alpha}^\pm$, par

$$S_{\Sigma,\alpha}^\pm = R^\pm S_\alpha^\pm P^\pm,$$

où S_α^\pm est l'opérateur de scattering classique relatif à la frontière $\Gamma_D^\pm \cup \Sigma$. Avec les notations du §5.1.1, on a donc $S_\alpha^+ = S_{0,\alpha}^+$ où Ω_0^+ désigne le domaine extérieur défini par la surface fermée $\Gamma_D^+ \cup \Sigma$, et $S_\alpha^- = S_{0,\alpha}^-$ où Ω_0^- désigne le domaine intérieur défini par la surface fermée $\Gamma_D^- \cup \Sigma$.

La synthèse de l'opérateur de scattering $S_{0,\alpha}$ à l'aide de l'équation intégrale GCSIE impédante est décrite dans l'Annexe C, §C.2.

5.1.3 Retour à la DDM

On choisit un nouveau champ de court-circuit permettant cette fois d'écrire le couplage entre les deux sous-domaines à l'aide d'opérateurs de scattering relatifs à l'interface. Le nouveau champ \mathbf{E}_{cc} est défini dans Ω^+ , possède une trace tangentielle sur $\Gamma_D^+ \cup \Sigma$, et vérifie

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_{cc}) - k^2 \mathbf{E}_{cc} = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \gamma_D \mathbf{E}_{cc} = -\gamma_D \mathbf{E}_{inc} & \text{sur } \Gamma_D^+, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} \left(\mathbf{x} \times (\nabla \times \mathbf{E}_{cc}) + ik|\mathbf{x}| \mathbf{E}_{cc} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Remarquons que l'on n'a pas encore précisé les conditions vérifiées par le champ de court-circuit sur l'interface Σ .

Comme dans le Chapitre 3, on recherche le champ solution du problème du parfait conducteur électrique (3.1) sous la forme $\mathbf{E}^+ + \mathbf{E}_{cc}$ dans Ω^+ , et sous la forme $\mathbf{E}^- - \mathbf{E}_{inc}^-$ dans Ω^- , où \mathbf{E}^+ et \mathbf{E}^- appartiennent respectivement aux espaces d'ondes admissibles W^+ et W^- . Les champs totaux électrique et magnétique s'écrivent toujours sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\text{tot}} &= \mathbf{E}^- \text{ dans } \Omega^-, & \mathbf{E}^{\text{tot}} &= (\mathbf{E}^+ + \mathbf{E}_{inc}^+ + \mathbf{E}_{cc}) \text{ dans } \Omega^+, \\ \mathbf{H}^{\text{tot}} &= \mathbf{H}^- \text{ dans } \Omega^-, & \mathbf{H}^{\text{tot}} &= (\mathbf{H}^+ + \mathbf{H}_{inc}^+ + \mathbf{H}_{cc}) \text{ dans } \Omega^+. \end{aligned}$$

Puisque Σ est une interface artificielle, les champs totaux \mathbf{E}^{tot} et \mathbf{H}^{tot} sont continus à travers Σ . Le problème (3.1) devient le problème de transmission

$$\text{Trouver } \mathbf{E} = (\mathbf{E}^+ \in W^+, \mathbf{E}^- \in W^-), \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}^+ \times \mathbf{E}^- = \mathbf{n}^+ \times (\mathbf{E}^+ + \mathbf{E}_{inc}^+ + \mathbf{E}_{cc}), \\ \mathbf{n}^+ \times \mathbf{H}^- = \mathbf{n}^+ \times (\mathbf{H}^+ + \mathbf{H}_{inc}^+ + \mathbf{H}_{cc}), \end{array} \right. \quad \text{sur } \Sigma. \quad (5.1)$$

Pour résoudre ce système, nous paramétrons les champs \mathbf{E}^+ et \mathbf{E}^- par leurs traces impédantes sur l'interface Σ , avec un certain coefficient d'impédance α supposé constant. On choisit donc deux inconnues de type traces impédantes respectives des champs \mathbf{E}^+ et \mathbf{E}^- . On note

$$\gamma_{\Sigma,\alpha}^\pm \mathbf{E}^\pm := (\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}^\pm - \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}}^\pm)_{|\Sigma}$$

la trace impédante d'un champ \mathbf{E} . Posons

$$\begin{cases} \mathbf{u}^+ = \mathbf{n}^+ \times \mathbf{E}^+ - \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}}^+ = \gamma_{\Sigma, \alpha}^+ \mathbf{E}^+, \\ \mathbf{u}^- = \mathbf{n}^- \times \mathbf{E}^- + \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}}^- = \gamma_{\Sigma, -\alpha}^- \mathbf{E}^-. \end{cases}$$

Par définition de $S_{\Sigma, \alpha}^{\pm}$, on a alors

$$\begin{cases} S_{\Sigma, \alpha}^+ \mathbf{u}^+ = \mathbf{n}^+ \times \mathbf{E}^+ + \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}}^+, \\ S_{\Sigma, -\alpha}^- \mathbf{u}^- = \mathbf{n}^- \times \mathbf{E}^- - \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}}^-. \end{cases}$$

On réécrit le système (5.1) sous la forme

$$\mathbf{n}^+ \times \mathbf{E}^+ + \mathbf{n}^- \times \mathbf{E}^- = -\mathbf{n}^+ \times (\mathbf{E}_{\text{inc}}^+ + \mathbf{E}_{\text{cc}}), \quad (5.2)$$

$$\mathbf{H}_{\text{tan}}^+ - \mathbf{H}_{\text{tan}}^- = -(\mathbf{H}_{\text{inc}}^+ + \mathbf{H}_{\text{cc}})_{\text{tan}}. \quad (5.3)$$

Pour α non nul, ce système est équivalent au suivant :

$$(5.2) - \alpha(5.3) \Rightarrow \mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^- = -\gamma_{\Sigma, \alpha}^+ (\mathbf{E}_{\text{inc}}^+ + \mathbf{E}_{\text{cc}}),$$

$$(5.2) + \alpha(5.3) \Rightarrow S_{\Sigma, \alpha}^+ \mathbf{u}^+ + S_{\Sigma, -\alpha}^- \mathbf{u}^- = -S_{\Sigma, \alpha}^+ (\mathbf{H}_{\text{inc}}^+ + \mathbf{H}_{\text{cc}}).$$

On choisit alors d'imposer la condition supplémentaire sur le champ de court-circuit \mathbf{E}_{cc} :

$$\gamma_{\Sigma, \alpha}^+ (\mathbf{E}_{\text{inc}}^+ + \mathbf{E}_{\text{cc}}) = 0,$$

de sorte que $\mathbf{u}^- = -\mathbf{u}^+$. Il nous reste alors à résoudre le système linéaire

$$\boxed{(S_{\Sigma, \alpha}^+ - S_{\Sigma, -\alpha}^-) \mathbf{u}^+ = -S_{\Sigma, \alpha}^+ (\mathbf{H}_{\text{inc}}^+ + \mathbf{H}_{\text{cc}})}. \quad (5.4)$$

L'opérateur $(S_{\Sigma, \alpha}^+ - S_{\Sigma, -\alpha}^-)$ est l'opérateur sous-jacent à la DDM en S . On s'intéresse donc à l'ordre de cet opérateur, qui détermine le conditionnement du système linéaire résultant.

5.2 La DDM en S non préconditionnée

Nous montrons dans cette section que l'opérateur de scattering S_{α} intervenant dans la DDM en S est une perturbation compacte d'un opérateur d'ordre 0, mais que néanmoins la différence entre les deux opérateurs $(S_{\Sigma, \alpha}^+ - S_{\Sigma, -\alpha}^-)$ donne un opérateur d'ordre -1 , car les parties d'ordre 0 se compensent. Cette analyse justifie d'un point de vue théorique la nécessité d'un préconditionneur pour la DDM en S .

5.2.1 Symbole de l'opérateur sous-jacent à la DDM en S .

On note $\mathfrak{S}(Q)$ le symbole principal d'un opérateur Q [1]. Nous considérons tout d'abord le symbole de l'opérateur admittance, intervenant dans la DDM en Y .

Proposition 62 (Ordre de l'opérateur admittance).

L'opérateur \mathbb{A}^\pm a le même symbole principal que l'opérateur suivant :

$$\mathfrak{S}(\mathbb{A}^\pm) = \mathfrak{S}(-2\mathbf{n} \times T\mathbf{n} \times).$$

Par suite, \mathbb{A}^\pm est un opérateur d'ordre $+1$.

Démonstration En effet, le théorème de représentation nous donne

$$\mathbf{n} \times T(-\mathbb{A}\mathbf{n} \times) - \left(\mathbf{n} \times \mathbf{K} - \frac{1}{2} \text{Id} \right) = \text{Id},$$

d'où l'on déduit (en appliquant $\mathbf{n} \times$ à gauche et à droite) :

$$T\mathbb{A} = \frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{K}\mathbf{n} \times .$$

L'opérateur admittance \mathbb{A} a donc le même symbole principal que $(2T)^{-1}$. Or la formule de Calderón montre que

$$(\mathbf{n} \times T\mathbf{n} \times)T = -\frac{1}{4} \text{Id} + (\mathbf{n} \times \mathbf{K})^2,$$

ce qui montre, puisque \mathbf{K} est d'ordre -1 sur une surface lisse, que $-2\mathbf{n} \times T\mathbf{n} \times$ est un pseudo-inverse pour $2T$, d'où le résultat. \square

Corollaire 63.

L'opérateur $(\mathbb{A}_\Sigma^+ + \mathbb{A}_\Sigma^-)$ sous-jacent à la DDM en Y est de symbole principal

$$\mathfrak{S}(\mathbb{A}_\Sigma^+ + \mathbb{A}_\Sigma^-) = \mathfrak{S}(-4\mathbf{n} \times T\mathbf{n} \times).$$

En particulier, il s'agit d'un opérateur d'ordre $+1$.

Pour calculer le symbole de l'opérateur de scattering, nous utilisons le fait que l'opérateur de scattering $S_{\Sigma, \alpha}^\pm$ s'exprime en fonction de l'opérateur de type Dirichlet-to-Neumann Y_c^\pm .

$$S_{\Sigma, \alpha}^\pm = (\text{Id} + \alpha Y_c^\pm)(\text{Id} - \alpha Y_c^\pm)^{-1}.$$

Or $Y_c = \mathbf{n} \times \mathbb{A}\mathbf{n} \times$ et l'opérateur \mathbb{A} a le même symbole principal que $-2\mathbf{n} \times T\mathbf{n} \times$. Par suite, Y_c a le même symbole principal que l'opérateur $-2T$:

$$\mathfrak{S}(Y_c^\pm) = \mathfrak{S}(-2T) = \mathfrak{S} \left(2ikD_{\text{loop}}GP_{\text{loop}} - \frac{2}{ik}D_{\text{star}}(\nabla G \text{div})P_{\text{star}} \right).$$

On pourra se référer à l'Annexe A pour l'expression de T en fonction des projecteurs sur l'espace des *loops* et des *stars*. On en déduit le résultat suivant.

Proposition 64 (Ordre de l'opérateur de scattering).

L'opérateur $S_{\Sigma,\alpha}^{\pm}$ a le même symbole principal que l'opérateur suivant :

$$\mathfrak{S}(S_{\Sigma,\alpha}^{\pm}) = \mathfrak{S}\left(D_{\text{loop}}\left(\frac{\text{Id} + \alpha 2ikG}{\text{Id} - \alpha 2ikG}\right)P_{\text{loop}} + D_{\text{star}}\left(\frac{\text{Id} - \alpha \frac{2}{ik}\nabla G \text{div}}{\text{Id} + \alpha \frac{2}{ik}\nabla G \text{div}}\right)P_{\text{star}}\right).$$

Par suite, $S_{\Sigma,\alpha}^{\pm}$ est un opérateur d'ordre 0.

Il est donc naturel de s'attendre à ce que la DDM en S , qui fait intervenir des opérateurs de scattering d'ordre 0, conduise à un système linéaire d'ordre 0, donc bien conditionné. Cependant, lorsque l'on effectue le calcul du symbole de l'opérateur $(S_{\Sigma,\alpha}^+ - S_{\Sigma,-\alpha}^-)$, on s'aperçoit que cet opérateur est en réalité d'ordre -1 . Etant donné un opérateur Q , effectuons le calcul suivant :

$$\frac{1 + \alpha Q}{1 - \alpha Q} - \frac{1 - \alpha Q}{1 + \alpha Q} = \frac{4\alpha Q}{1 - \alpha^2 Q^2}.$$

On en déduit immédiatement que $(S_{\Sigma,\alpha}^+ - S_{\Sigma,-\alpha}^-)$ a le même symbole principal que l'opérateur

$$D_{\text{loop}}\left(\frac{\alpha 8ikG}{\text{Id} + \alpha^2 4k^2 G^2}\right)P_{\text{loop}} + D_{\text{star}}\left(\frac{-\alpha \frac{8}{ik}\nabla G \text{div}}{\text{Id} + \alpha^2 \frac{4}{k^2}(\nabla G \text{div})^2}\right)P_{\text{star}},$$

d'où le symbole de l'opérateur sous-jacent à la DDM en S :

Proposition 65 (Symbole principal de $(S_{\Sigma,\alpha}^+ - S_{\Sigma,-\alpha}^-)$).

$$\mathfrak{S}(S_{\Sigma,\alpha}^+ - S_{\Sigma,-\alpha}^-) = \mathfrak{S}\left(D_{\text{loop}}(\alpha 8ikG)P_{\text{loop}} + D_{\text{star}}\left(\frac{2ik}{\alpha} \frac{1}{\nabla G \text{div}}\right)P_{\text{star}}\right).$$

Il s'agit donc d'un opérateur d'ordre -1 , puisque G est d'ordre -1 et que $\nabla G \text{div}$ est d'ordre $+1$. Finalement, on obtient le symbole principal de l'opérateur inverse.

$$\mathfrak{S}\left((S_{\Sigma,\alpha}^+ - S_{\Sigma,-\alpha}^-)^{-1}\right) = \mathfrak{S}\left[D_{\text{loop}}\left(\frac{1}{\alpha 8ik} G^{-1}\right)P_{\text{loop}} + D_{\text{star}}\left(\frac{\alpha}{2ik} \nabla G \text{div}\right)P_{\text{star}}\right]. \quad (5.5)$$

5.2.2 Comparaison entre la DDM en Y et la DDM en S

L'ordre -1 de cet opérateur se traduit numériquement par le comportement suivant. Nous observons sur le maillage smallBox que la DDM en S ne converge pas très bien. En particulier, la DDM en Y converge mieux que la DDM en S (FIG. 5.3). Comme attendu, le système linéaire découlant de la DDM en S est donc mal conditionné.

Nous pourrions utiliser la formule (5.5) pour préconditionner analytiquement la DDM en S , cependant ce préconditionneur semble plus compliqué à appliquer que l'opérateur simple couche utilisé pour la DDM en Y , dans le Chapitre 3. Nous proposons à la place un préconditionneur spectral, plus simple et plus naturel pour cette DDM en S , basé sur les modes guidés introduits au Chapitre 4.

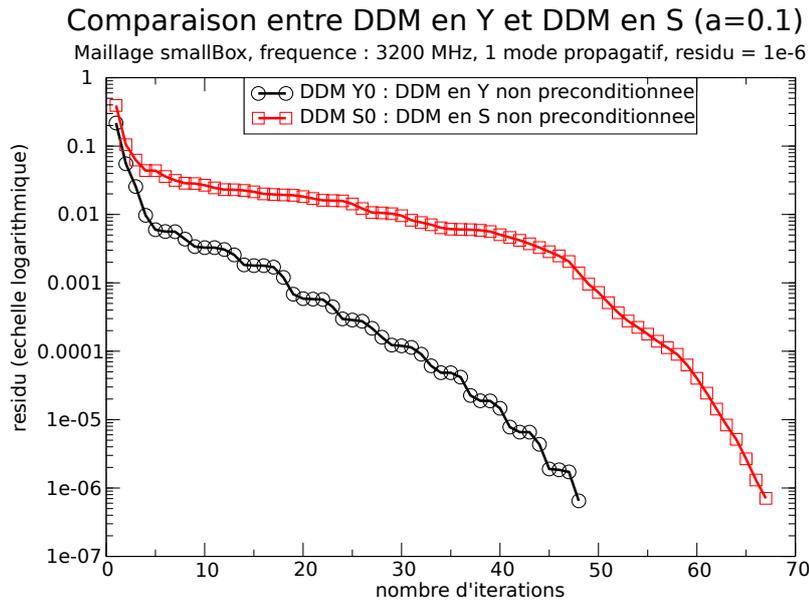


FIGURE 5.3 – Courbes de convergence pour le maillage smallBox, à une fréquence de **3200 MHz**, pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-6} : comparaison entre la DDM en Y non préconditionnée et la DDM en S non préconditionnée.

5.2.3 Validation numérique de la DDM en S

Dans toutes les applications numériques, on choisit α constante, égale à $\alpha = 0.1$. De plus, nous utilisons systématiquement la GCSIE mixte métal-impédante pour résoudre les sous-problèmes locaux. Nous validons la DDM en S sur la sphère fictive, le maillage sp-108. Nous observons que le champ lointain diffracté (FIG. 5.4) est de module inférieur à $-40dBm^2$, donc très faible, ce qui valide l'algorithme de la DDM en S . En effet, la sphère étant fictive, le champ lointain doit être nul, car il n'y a pas d'objet diffractant.

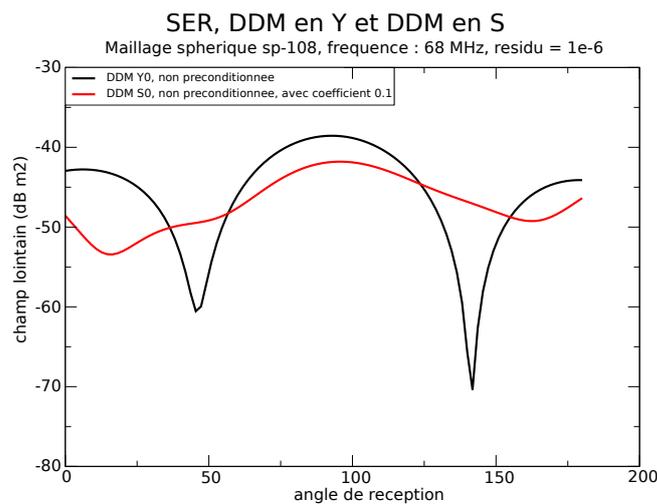


FIGURE 5.4 – Comparaison des courbes de SER pour la DDM en Y et la DDM en S non préconditionnées, pour la sphère sp-108 à une fréquence de **68 MHz**.

5.3 Un préconditionneur spectral pour la DDM en S

Nous montrons que l'opérateur de scattering se diagonalise dans la base des traces de modes guidés, ce qui permet de donner un préconditionneur pour la DDM basée sur l'opérateur de scattering. Ce préconditionneur est fondé sur la même idée que celle du préconditionneur spectral proposé pour la DDM en Y , présenté dans le Chapitre 4.

5.3.1 Diagonalisation de l'opérateur de scattering dans la base des traces de modes guidés

On se reportera au Chapitre 4 pour les notations de ce paragraphe qui concernent les modes guidés. Nous rappelons que l'on se donne un cylindre infini fictif, constitué de deux demi-cylindres G^+ et G^- , et dont la section coïncide avec l'interface Σ entre les sous-domaines introduits pour les besoins de la DDM. Nous définissons en premier lieu les opérateurs de scattering $S_{\Sigma,\alpha}^{\pm*}$ relatifs aux deux demi-guides d'onde G^\pm , de la même manière que nous avons défini les opérateurs admittance $\mathbb{A}_\Sigma^{\pm*}$ relatifs à G^\pm .

Définition 66 (Opérateurs de scattering relatifs aux deux demi-guides d'onde).

On désigne par ∂G^\pm le bord du demi-guide d'onde G^\pm , auquel on a retiré l'interface Σ . On note

$$P^{\pm*} : \mathcal{D}'(\Sigma) \rightarrow \mathcal{D}'(\partial G^\pm \cup \Sigma)$$

l'opérateur de prolongement qui prolonge par 0 sur ∂G^\pm un courant défini sur Σ , et

$$R^{\pm*} : \mathcal{D}'(\partial G^\pm \cup \Sigma) \rightarrow \mathcal{D}'(\Sigma)$$

l'opérateur de restriction qui restreint à Σ un courant défini sur $\partial G^\pm \cup \Sigma$. On définit les opérateurs de scattering $S_{\Sigma,\alpha}^{\pm*}$ relatifs aux demi-guides d'onde, par :

$$S_{\Sigma,\alpha}^{\pm*} = R^{\pm*} S_\alpha^\pm P^{\pm*}, \quad (5.6)$$

où S_α^\pm est l'opérateur de scattering classique relatif à la frontière $\partial G^\pm \cup \Sigma$. En utilisant les notations du §5.1.1, on a donc $S_\alpha^+ = S_{0,\alpha}^+$ où Ω_0^+ désigne le domaine G^+ , tandis que $S_\alpha^- = S_{0,\alpha}^-$ où Ω_0^- désigne le domaine G^- .

On rappelle que l'on a montré au Chapitre 4 que

$$\sigma(\mathbf{H}_{\text{grad}}^{\pm,n}) = \frac{k}{\beta_n^D} \mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}_{\text{grad}}^{\pm,n} \quad \text{et} \quad \sigma(\mathbf{H}_{\text{rot}}^{\pm,n}) = \frac{\beta_n^N}{k} \mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n}. \quad (5.7)$$

Par suite, on observe immédiatement que l'opérateur de type Dirichlet-to-Neumann $Y_c^* = \mathbf{n} \times \mathbb{A}_\Sigma^* \mathbf{n} \times : \mathbf{n} \times \mathbf{E} \mapsto \mathbf{H}_{\text{tan}}$ se diagonalise dans la base des traces de modes guidés, de valeurs propres associées données par (5.7) (ce sont les valeurs propres opposées de celles de \mathbb{A}_Σ^*). Or l'opérateur de scattering $S_{\Sigma,\alpha}^{\pm*}$ s'exprime en fonction de l'opérateur de type Dirichlet-to-Neumann Y_c^\pm :

$$S_{\Sigma,\alpha}^\pm = (\text{Id} + \alpha Y_c^\pm)(\text{Id} - \alpha Y_c^\pm)^{-1}.$$

Les résultats concernant l'opérateur Y_c^\pm montrent directement que l'opérateur de scattering $S_{\Sigma,\alpha}^{\pm*}$ relatif au demi-guide d'onde G^\pm est lui aussi diagonal dans la base des traces de modes guidés. On en déduit le résultat suivant.

Proposition 67 (Diagonalisation de l'opérateur de scattering $S_{\Sigma,\alpha}^{\pm*}$).

L'opérateur de scattering $S_{\Sigma,\alpha}^{\pm*}$ se diagonalise dans la base des traces de modes guidés sur l'interface Σ , de valeurs propres associées données ci-dessous.

- D'une part, pour les modes issus d'un gradient ($(\mathbf{F}_{\text{grad}}^\pm)_{\text{tan}} = \nabla\varphi$), on a

$$S_{\Sigma,\alpha}^{\pm*} (\sigma(\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}_{\text{grad}}^{\pm,n})) = \left(1 + \alpha \frac{k}{\beta_n^D}\right) \left(1 - \alpha \frac{k}{\beta_n^D}\right)^{-1} (\sigma(\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}_{\text{grad}}^{\pm,n})).$$

- D'autre part, pour les modes issus d'un rotationnel ($(\mathbf{F}_{\text{rot}}^\pm)_{\text{tan}} = \nabla \times \psi$), on a

$$S_{\Sigma,\alpha}^{\pm*} (\sigma(\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n})) = \left(1 + \alpha \frac{\beta_n^N}{k}\right) \left(1 - \alpha \frac{\beta_n^N}{k}\right)^{-1} (\sigma(\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n})).$$

5.3.2 Un préconditionneur fondé sur les modes guidés pour la DDM en S

Nous souhaitons trouver un préconditionneur pour l'opérateur $(S_{\Sigma,\alpha}^+ - S_{\Sigma,-\alpha}^-)$. Pour cela, on l'approche par l'opérateur $(S_{\Sigma,\alpha}^{+*} - S_{\Sigma,-\alpha}^{-*})$, qui lui est diagonalisable dans la base des traces de modes guidés sur Σ , de valeurs propres associées :

$$\left\{ \begin{array}{l} (S_{\Sigma,\alpha}^{+*} - S_{\Sigma,-\alpha}^{-*}) \sigma(\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}_{\text{grad}}^{\pm,n}) = \\ \left[\left(1 - \alpha \frac{k}{\beta_n^D}\right)^{-1} \left(1 + \alpha \frac{k}{\beta_n^D}\right) - \left(1 + \alpha \frac{k}{\beta_n^D}\right)^{-1} \left(1 - \alpha \frac{k}{\beta_n^D}\right) \right] \sigma(\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}_{\text{grad}}^{\pm,n}), \\ (S_{\Sigma,\alpha}^{+*} - S_{\Sigma,-\alpha}^{-*}) \sigma(\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n}) = \\ \left[\left(1 - \alpha \frac{\beta_n^N}{k}\right)^{-1} \left(1 + \alpha \frac{\beta_n^N}{k}\right) - \left(1 + \alpha \frac{\beta_n^N}{k}\right)^{-1} \left(1 - \alpha \frac{\beta_n^N}{k}\right) \right] \sigma(\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n}), \end{array} \right.$$

soit encore

$$\left\{ \begin{array}{l} (S_{\Sigma,\alpha}^{+*} - S_{\Sigma,-\alpha}^{-*}) \sigma(\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}_{\text{grad}}^{\pm,n}) = \frac{4\alpha \frac{k}{\beta_n^D}}{\left(1 - \alpha \frac{k}{\beta_n^D}\right) \left(1 + \alpha \frac{k}{\beta_n^D}\right)} \sigma(\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}_{\text{grad}}^{\pm,n}), \\ (S_{\Sigma,\alpha}^{+*} - S_{\Sigma,-\alpha}^{-*}) \sigma(\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n}) = \frac{4\alpha \frac{\beta_n^N}{k}}{\left(1 - \alpha \frac{\beta_n^N}{k}\right) \left(1 + \alpha \frac{\beta_n^N}{k}\right)} \sigma(\mathbf{n}^\pm \times \mathbf{E}_{\text{rot}}^{\pm,n}). \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Définition 68 (Le préconditionneur modal pour la DDM en S).

On définit un préconditionneur basé sur les modes guidés de la manière suivante. Comme au Chapitre 4, on choisit un coefficient c_{evan} qui fixe le nombre de modes guidés considérés. On note \mathcal{B} l'ensemble des modes pris en compte. Le vecteur auquel on applique le préconditionneur est une combinaison linéaire d'éléments finis de Raviart-Thomas.

- 1) On projette l'inconnue sur l'ensemble $\sigma(\mathcal{B})$ des traces de modes guidés sur l'interface Σ . Cette étape est réalisée en multipliant le vecteur en question par la matrice du produit scalaire L^2 des traces de modes guidés contre les éléments finis de Raviart-Thomas, étape qui est suivie d'une inversion par la matrice masse des traces de modes guidés.
- 2) On multiplie le vecteur obtenu par l'inverse de la matrice diagonale contenant les valeurs propres de l'opérateur $(S_{\Sigma,\alpha}^{+,*} - S_{\Sigma,-\alpha}^{-,*})$. Ces valeurs propres sont données par les formules (5.8).
- 3) On retourne dans l'espace des éléments finis de Raviart-Thomas, en multipliant le vecteur par la matrice du produit scalaire L^2 des éléments finis de Raviart-Thomas contre les traces de modes guidés, puis en inversant par la matrice masse de l'espace des éléments finis de Raviart-Thomas.

On désigne par $[\text{DiagS}]$ la matrice diagonale contenant les valeurs propres de l'opérateur $(S_{\Sigma,\alpha}^{+,*} - S_{\Sigma,-\alpha}^{-,*})$ associées aux traces des modes guidés considérés, sur l'interface Σ . Nous utilisons également ci-dessous les notations du Chapitre 4 introduites à la Définition 60. Avec ces notations, nous préconditionnons la DDM en S en effectuant l'opération suivante :

$$[\text{massRT}]^{-1}[\text{ModesRT}][\text{DiagS}]^{-1}[\text{massModes}]^{-1}[\text{RTModes}].$$

Remarque. *Supposons que l'on se place à une certaine fréquence donnée ; le nombre d'onde k est alors fixé. Soit une interface également fixée. Les valeurs de k , des β_n^D et des β_n^N sont alors uniquement déterminées. Pour ces valeurs, si le coefficient d'impédance α est constant et mal choisi, par exemple s'il est proche de $\pm\beta_n^D/k$ ou de $\pm k/\beta_n^N$, alors les dénominateurs des expressions de (5.8) peuvent s'annuler. L'opérateur de la DDM en S est alors très mal conditionné.*

Pour éviter un tel phénomène, il peut être intéressant de calculer ces valeurs préalablement et de choisir α au milieu de deux d'entre elles. Remarquons que ce phénomène ne se produit pas si tous les modes sont évanescent (ce qui entraîne que β_n^D et β_n^N sont imaginaires purs), car α est réel par hypothèse.

Réciproquement, pour les cas où il y a des modes propagatifs, on pourrait penser qu'il est intéressant de choisir α imaginaire pur, et non réel. En réalité, ce n'est pas le cas, car le problème continu impédant avec α imaginaire pur n'est pas nécessairement bien posé [18].

5.4 Résultats numériques pour la DDM en S préconditionnée à l'aide des modes guidés

5.4.1 Validation numérique

Nous validons les méthodes de préconditionneur spectral en comparant les courbes de SER obtenues avec celles de la DDM en S non préconditionnée, sur le maillage smallBox. Contrairement au cas de la DDM en Y , il faut cette fois au moins 5 modes pour que la SER reste fidèle : les courbes de SER pour 1 et 2 modes guidés ne coïncident pas avec celle de la DDM en S non préconditionnée. En revanche, les courbes de SER pour un nombre plus élevé de modes sont superposées.

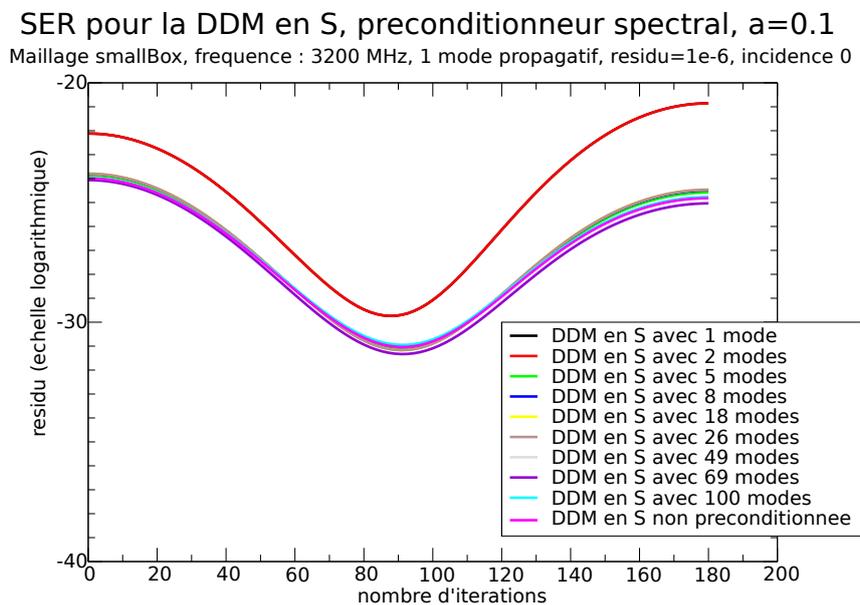


FIGURE 5.5 – Courbes de SER obtenues pour le maillage smallBox, à une fréquence de **3200 MHz**, pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-6} , pour la DDM en S préconditionnée respectivement avec 1, 2, 5, 8, 18, 26, 49, 69 et 100 modes guidés dont 1 mode propagatif à chaque fois, et pour la DDM en S non préconditionnée. Le coefficient d'impédance vaut $\alpha = 0.1$ dans tous les cas.

5.4.2 Vitesse de convergence des algorithmes

Le nombre d'itérations pour atteindre la convergence est présenté sur la tableau FIG. 5.6, et sur les courbes FIG. 5.8 en fonction du nombre de modes guidés considérés. Nous remarquons que le préconditionneur spectral pour la DDM en S est également très efficace : avec 8 modes guidés, à une fréquence de 3200 MHz, il conduit à un algorithme convergeant en 5 itérations, au lieu de 68 itérations pour la DDM en S non préconditionnée.

Nous dressons un tableau comparatif FIG. 5.7 du nombre d'itérations nécessaires pour la DDM en Y et la DDM en S avec ou sans préconditionneur spectral, et nous présentons

Type de DDM en S	Nombre d'itérations
1 mode guidé	1
2 modes guidés	2
5 modes guidés	4
8 modes guidés	5
18 modes guidés	7
26 modes guidés	8
49 modes guidés	13
69 modes guidés	22
100 modes guidés	Non CV en 100 itérations (résidu de 8.04×10^{-6})
DDM en S sans préconditionneur	67

FIGURE 5.6 – Nombre d'itérations pour le maillage smallBox, à une fréquence de **3200 MHz**, pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-6} , pour la DDM en S non préconditionnée et la DDM en S préconditionnée respectivement avec 1, 2, 5, 8, 18, 26, 49, 69 et 100 modes guidés.

également quelques courbes de convergence comparatives sur la FIG. 5.9. En conclusion, à nombre de modes fixé, la DDM en Y préconditionnée spectralement converge plus vite que la DDM en S préconditionnée spectralement. Cependant, la DDM en S possède un avantage certain sur la DDM en Y , puisqu'elle permet de n'avoir à résoudre que des problèmes bien posés dans les sous-domaines.

Préconditionneur spectral, nombre de modes guidés	DDM en Y	DDM en S
1 mode guidé	1	1
2 modes guidés	2	2
5 modes guidés	3	4
8 modes guidés	3	5
18 modes guidés	4	7
26 modes guidés	5	8
49 modes guidés	8	13
69 modes guidés	17	22
100 modes guidés	24	Non CV en 100 itérations (résidu de 8.04×10^{-6})
Absence de préconditionneur	48	67

FIGURE 5.7 – Nombre d'itérations pour le maillage smallBox, à une fréquence de **3200 MHz**, pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-6} , pour la DDM en S non préconditionnée et la DDM en S préconditionnée respectivement avec 1, 2, 5, 8, 18, 26, 49, 69 et 100 modes guidés, pour un résidu de 10^{-6} .

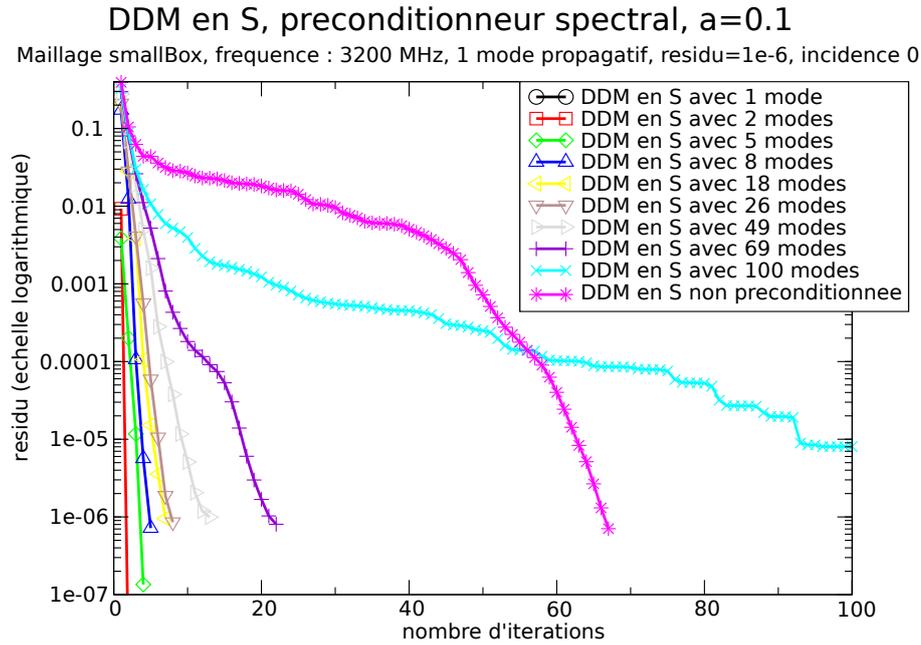


FIGURE 5.8 – Courbes de convergence pour le maillage smallBox, à une fréquence de **3200 MHz**, pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-6} , pour la DDM en S preconditionnée respectivement avec 1, 2, 5, 8, 18, 26, 49, 69 et 100 modes guidés dont 1 mode propagatif à chaque fois, et pour la DDM en S non preconditionnée. Le coefficient d'impédance vaut $\alpha = 0.1$ dans tous les cas.

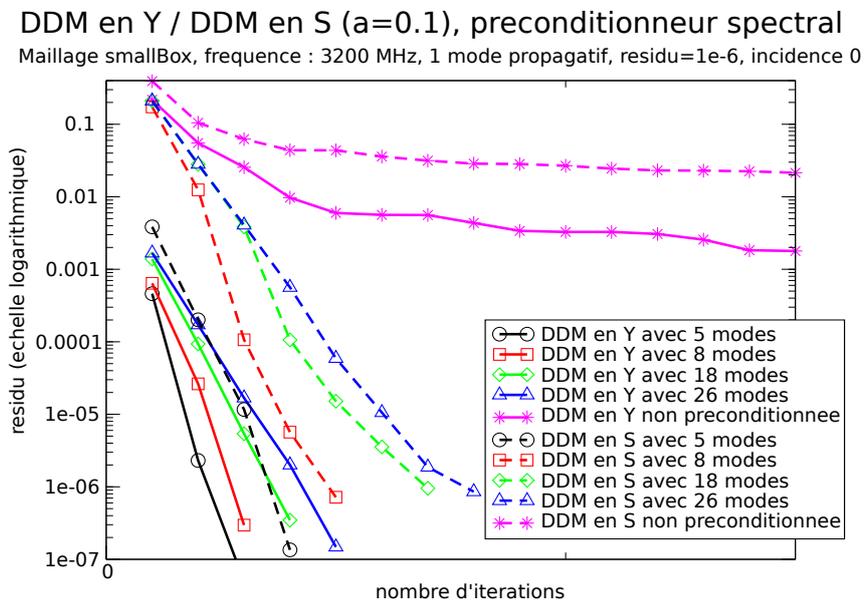


FIGURE 5.9 – Comparaison des courbes de convergence pour le maillage smallBox, à **3200 MHz**, pour atteindre un résidu d'ordre 10^{-6} , pour la DDM en Y (trait continu) et la DDM en S (pointillés) non preconditionnées, puis preconditionnées avec 5, 8, 18 et 26 modes.

5.5 Autres préconditionneurs possibles

Nous proposons ici deux autres préconditionneurs envisagés pour la DDM en S , préconditionneurs que nous n'avons pas testés numériquement.

Une approximation par décomposition de Helmholtz de l'opérateur de scattering

L'opérateur $S_{\Sigma, \alpha}^+$ s'exprime en fonction de l'opérateur de type Dirichlet-to-Neumann $Y_c = -\mathbf{n} \times Y_a$ de la manière suivante :

$$\boxed{S_{\Sigma, \alpha}^+(\text{Id} - \alpha Y_c^+) = (\text{Id} + \alpha Y_c^+).}$$

Si l'on remplace $Y = Y_a$ par l'approximation (A.5) de l'Annexe A, on obtient :

$$\tilde{Y}_c^+ = -\mathbf{n} \times \tilde{Y}^+ = \frac{k}{k_\epsilon} D_{\text{loop}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{-1/2} P_{\text{loop}} + \frac{k_\epsilon}{k} D_{\text{star}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} P_{\text{star}}.$$

Pour alléger les calculs, on note Q l'opérateur

$$Q = \frac{k_\epsilon}{k} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2}. \quad (5.9)$$

L'approximation ci-dessus se réécrit en fonction de l'opérateur Q :

$$\tilde{Y}_c^+ = D_{\text{loop}} (Q^{-1}) P_{\text{loop}} + D_{\text{star}} Q P_{\text{star}}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \text{Id} + \alpha \tilde{Y}_c^+ &= D_{\text{loop}} (\text{Id} + \alpha Q^{-1}) P_{\text{loop}} + D_{\text{star}} (\text{Id} + \alpha Q) P_{\text{star}}, \\ (\text{Id} - \alpha \tilde{Y}_c^+)^{-1} &= D_{\text{loop}} (\text{Id} - \alpha Q^{-1})^{-1} P_{\text{loop}} + D_{\text{star}} (\text{Id} - \alpha Q)^{-1} P_{\text{star}}. \end{aligned}$$

Par suite, on propose l'approximation suivante pour l'opérateur $S_{\Sigma, \alpha}^+$:

$$\widetilde{(S_{\Sigma, \alpha}^+)} = D_{\text{loop}} \left[(\text{Id} + \alpha Q^{-1}) (\text{Id} - \alpha Q^{-1})^{-1} \right] P_{\text{loop}} + D_{\text{star}} \left[(\text{Id} + \alpha Q) (\text{Id} - \alpha Q)^{-1} \right] P_{\text{star}}.$$

De même on peut approcher l'opérateur $S_{\Sigma, -\alpha}^-$ par l'expression suivante.

$$\widetilde{(S_{\Sigma, -\alpha}^-)} = D_{\text{loop}} \left[(\text{Id} - \alpha Q^{-1}) (\text{Id} + \alpha Q^{-1})^{-1} \right] P_{\text{loop}} + D_{\text{star}} \left[(\text{Id} - \alpha Q) (\text{Id} + \alpha Q)^{-1} \right] P_{\text{star}}.$$

Comme les opérateurs Id et Q commutent, un court calcul montre que

$$\boxed{\widetilde{(S_{\Sigma, \alpha}^+)} - \widetilde{(S_{\Sigma, -\alpha}^-)} = D_{\text{loop}} \left(\frac{4\alpha Q^{-1}}{\text{Id} - \alpha^2 Q^{-2}} \right) P_{\text{loop}} + D_{\text{star}} \left(\frac{4\alpha Q}{\text{Id} - \alpha^2 Q^2} \right) P_{\text{star}}.}$$

Pour préconditionner la DDM en S , nous avons besoin de l'opérateur inverse :

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{(S_{\Sigma, \alpha}^+)} - \widetilde{(S_{\Sigma, -\alpha}^-)} \right)^{-1} &= D_{\text{loop}} \left(\frac{\text{Id} - \alpha^2 Q^{-2}}{4\alpha Q^{-1}} \right) P_{\text{loop}} + D_{\text{star}} \left(\frac{\text{Id} - \alpha^2 Q^2}{4\alpha Q} \right) P_{\text{star}} \\ &= D_{\text{loop}} \left(\frac{1}{4\alpha} Q - \frac{\alpha}{4} Q^{-1} \right) P_{\text{loop}} + D_{\text{star}} \left(\frac{1}{4\alpha} Q^{-1} - \frac{\alpha}{4} Q \right) P_{\text{star}}. \end{aligned}$$

Puisque l'opérateur Q est d'ordre $+1$, on choisit de négliger Q^{-1} par rapport à Q . On obtient alors

$$\left(\widetilde{(S_{\Sigma,\alpha}^+)} - \widetilde{(S_{\Sigma,-\alpha}^-)} \right)^{-1} \approx D_{\text{loop}} \left(\frac{1}{4\alpha} Q \right) P_{\text{loop}} + D_{\text{star}} \left(-\frac{\alpha}{4} Q \right) P_{\text{star}},$$

On remplace finalement Q par la formule (5.9). On propose donc de préconditionner la DDM en S à l'aide de l'opérateur

$$\left(\widetilde{(S_{\Sigma,\alpha}^+)} - \widetilde{(S_{\Sigma,-\alpha}^-)} \right)^{-1} \approx D_{\text{loop}} \left(\frac{k_\epsilon}{4\alpha k} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} \right) P_{\text{loop}} - D_{\text{star}} \left(\frac{\alpha k_\epsilon}{4k} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} \right) P_{\text{star}}.$$

Une approximation moins fine : l'opérateur simple couche

La formule (5.5) obtenue pour le symbole de l'inverse de l'opérateur inverse de la DDM en S :

$$\mathfrak{S} \left((S_{\Sigma,\alpha}^+ - S_{\Sigma,-\alpha}^-)^{-1} \right) = \mathfrak{S} \left[D_{\text{loop}} \left(\frac{1}{\alpha 8ik} G^{-1} \right) P_{\text{loop}} + D_{\text{star}} \left(\frac{\alpha}{2ik} \nabla G \text{div} \right) P_{\text{star}} \right],$$

fait intervenir l'opérateur $\nabla G \text{div}$, qui est également présent dans l'opérateur simple couche T. On pourrait donc essayer de préconditionner la DDM en S par l'opérateur simple couche relatif à la surface Σ , i.e. par les mêmes préconditionneurs analytiques que dans la DDM Y2 ou la DDM Y3. En toute logique, un tel préconditionneur devrait permettre une meilleure convergence au moins sur le sous-espace vectoriel des *loops*, à défaut d'une bonne convergence sur le sous-espace vectoriel des *stars*. Naturellement, cette approximation est moins fine que l'opérateur proposé ci-dessus, mais elle est aussi plus facile à mettre en œuvre.

Conclusion

Nous avons développé au cours de cette thèse deux types de méthodes de décomposition de domaine. L'objectif est de contourner le problème posé par les cavités en vue de résoudre le problème de Maxwell avec condition métal sur le bord de l'objet. On découpe donc le domaine de calcul en deux à l'aide d'une interface fictive ; on couple ensuite les sous-domaines entre eux par l'intermédiaire de cette interface. Le couplage entre sous-domaines est réalisé à l'aide d'opérateurs impliquant la résolution de problèmes avec une condition aux limites basée sur une trace librement choisie sur l'interface (en particulier, cette trace n'est pas liée à la trace métallique, qui n'est imposée qu'au bord de l'objet réel).

La DDM en Y paramètre le couplage entre sous-domaines en utilisant des opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann définis par rapport à l'interface. La DDM en S , quant à elle, fait intervenir des opérateurs de type scattering. L'avantage de la seconde sur la première est que l'on est certain que les opérateurs de scattering relatifs aux sous-domaines intérieurs sont bien définis. Ceci provient du fait que le problème intérieur avec condition métal-impédante est toujours bien posé, contrairement au problème intérieur avec condition métal, qui admet des fréquences de résonance pour lesquelles plusieurs solutions distinctes peuvent coexister. En particulier, à certaines fréquences, l'opérateur Dirichlet-to-Neumann est mal défini.

Chacune de ces deux DDMs a été construite en s'appuyant sur des résolutions par équations intégrales dans les sous-domaines, en vue d'obtenir une approximation très fidèle des opérateurs de couplage sous-jacents (Dirichlet-to-Neumann ou scattering). En particulier, une GCSIE a été utilisée dans les sous-domaines, cette équation intégrale étant beaucoup plus performante que les équations classiques en termes de vitesse de convergence.

Nous avons proposé des préconditionneurs pour chaque DDM, et les résultats numériques effectués sur les maillages considérés attestent de leur efficacité. Tout d'abord, nous avons présenté un préconditionneur analytique basé sur l'opérateur simple couche pour la DDM en Y . Ce préconditionneur améliore nettement le conditionnement des systèmes linéaires en jeu, au vu de la réduction observée du nombre d'itérations avant convergence. Cependant, un autre préconditionneur, spectral cette fois, s'est révélé encore plus performant, du moins dans le cas d'une cavité profonde de forme localement cylindrique près de l'interface. Le préconditionneur spectral est fondé sur le calcul de modes guidés le long d'un cylindre infini approchant la cavité au voisinage de l'interface entre sous-domaines. La trace de ces modes guidés sur l'interface constitue une base de vecteurs propres pour l'opérateur admittance ; on connaît ainsi une approximation des valeurs propres des véritables opérateurs admittance sur l'interface, ce qui nous

permet de préconditionner le système linéaire sous-jacent à la DDM en Y de manière efficace. Enfin, nous avons montré que le même type de preconditionneur spectral fonctionne tout aussi bien pour la DDM en S , en remplaçant les valeurs propres de l'admittance par celles de l'opérateur de scattering, qui est également un opérateur diagonal dans la même base des traces de modes guidés.

Il nous reste désormais à tester ces méthodes sur le calcul de la diffraction de champs électromagnétiques par des objets de taille industrielle, comportant des cavités profondes : l'idée des différents preconditionneurs proposés doit être validée sur des maillages comportant un plus grand nombre d'inconnues et notamment sur des cavités plus profondes et de forme plus réaliste que celles présentées dans ce travail.

ANNEXES

Annexe A

Approximation des opérateurs régularisants intervenant dans les GCSIE métallique et impédante

Sommaire

A.1	Approximations de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann (GC-SIE métallique)	160
A.1.1	Approximation du Dirichlet-to-Neumann par localisation (Borel et Molko-Daugas)	160
A.1.2	Approximation microlocale du Dirichlet-to-Neumann (Darbas)	161
A.2	Approximations des opérateurs régularisants R_E et R_H (GC-SIE impédante, Pernet)	165
A.2.1	Calcul de $(\widetilde{R}_E, \widetilde{R}_H)$ dans le cas où $\gamma \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{tan}} + \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{H}$	166
A.2.2	Calcul de $(\widetilde{R}_E, \widetilde{R}_H)$ dans le cas où $\gamma \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} - \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}}$	167

L'objet de cette annexe est d'explicitier les approximations choisies pour les opérateurs régularisants Y , $R_{\mathbf{E}}$ et $R_{\mathbf{H}}$ définis dans le Chapitre 2, qui interviennent dans la GCSIE, qu'il s'agisse de la GCSIE avec condition métal ou de la GCSIE avec condition métal-impédante. Il s'agit donc des opérateurs autres que les traces des potentiels simple couche et double couche.

Les opérateurs Y , $R_{\mathbf{E}}$ et $R_{\mathbf{H}}$ sont respectivement d'ordre $+1$, 0 et 0 . Ce ne sont donc pas des opérateurs régularisants au sens usuel d'opérateurs d'ordre négatif, mais on les appelle ainsi car ils permettent de régulariser respectivement l'équation GCSIE métallique et impédante, dans le sens où l'opérateur à inverser est d'ordre 0 .

A.1 Approximations de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann (GCSIE métallique)

A.1.1 Approximation du Dirichlet-to-Neumann par localisation (Borel et Molko-Daugas)

Cette approximation du Dirichlet-to-Neumann a été construite par Borel au cours de sa thèse. On pourra se référer à [13] pour plus de détails.

Choisissons l'approximation du Dirichlet-to-Neumann suivante ; on découpe la surface Γ en sous-surfaces ouvertes $(\mathcal{U}_n)_{1 \leq n \leq N}$ à l'aide d'une partition quadratique $(\chi_n)_{1 \leq n \leq N}$ associée à ce découpage :

$$\sum_{n=1}^N \chi_n^2 = 1, \quad \text{et} \quad \text{Supp} \chi_n \subset \mathcal{U}_n.$$

Chaque sous-surface \mathcal{U}_n est assimilable à son plan tangent en première approximation. On construit \tilde{Y}^+ de la manière suivante :

$$\tilde{Y}^+ = -2 \sum_{n=1}^N \chi_n (\mathbf{n} \times \mathbf{T}) \chi_n. \quad (\text{A.1})$$

Remarquons que l'on fait ce choix pour \tilde{Y}^+ en raison du Lemme 38 selon lequel le Dirichlet-to-Neumann du plan infini tangent à la sous-surface \mathcal{U}_n vaut $-2(\mathbf{n} \times \mathbf{T})$.

Par ailleurs, cette technique est assez générale, en ce sens qu'on aurait pu remplacer le Dirichlet-to-Neumann du plan infini par celui d'une autre surface que l'on cherche à approcher. Citons notamment la thèse de Molko-Daugas [45], dédiée à la résolution par équations intégrales de l'équation de Helmholtz en dimension 2 sur des courbes présentant des singularités. L'approche consiste à calculer l'opérateur Dirichlet-to-Neumann exact d'un cône bidimensionnel infini, puis à découper la courbe d'intérêt en morceaux, que l'on approche par leur plan tangent pour les morceaux réguliers, et par un cône infini pour les morceaux singuliers présentant un coin.

A.1.2 Approximation microlocale du Dirichlet-to-Neumann (Darbas)

Cette approximation a été proposé par Darbas [6] au cours de sa thèse.

La décomposition de Helmholtz

On appelle projecteurs de la décomposition de Helmholtz, et on note Π_{loop} (projecteurs sur l'espace des *loops*, i.e. les rotationnels surfaciques) et Π_{star} (projecteurs sur l'espace des *stars*, i.e. les gradients surfaciques) les projecteurs suivants :

$$\begin{cases} \Pi_{\text{loop}} = D_{\text{loop}}P_{\text{loop}} = -\mathbf{n} \times \nabla \Delta^{-1} \nabla \cdot \mathbf{n} \times, \\ \Pi_{\text{star}} = D_{\text{star}}P_{\text{star}} = \nabla \Delta^{-1} \nabla \cdot . \end{cases}$$

On a décomposé ces projecteurs à l'aide des opérateurs $D_{\text{loop}}, D_{\text{star}}, P_{\text{loop}}, P_{\text{star}}$ définis sur les espaces :

$$\begin{cases} D_{\text{loop}} : \mathbb{P}^1 \rightarrow RT, & P_{\text{loop}} : RT \rightarrow \mathbb{P}^1, \\ D_{\text{star}} : \mathbb{P}^1 \rightarrow RT, & P_{\text{star}} : RT \rightarrow \mathbb{P}^1, \end{cases}$$

de la manière suivante :

$$\begin{cases} D_{\text{loop}} = -\mathbf{n} \times \nabla, & P_{\text{loop}} = \Delta^{-1} \nabla \cdot \mathbf{n} \times, \\ D_{\text{star}} = \nabla, & P_{\text{star}} = \Delta^{-1} \nabla \cdot . \end{cases}$$

Nous avons les égalités remarquables suivantes :

$$\begin{cases} D_{\text{loop}}P_{\text{loop}} = \Pi_{\text{loop}}, & D_{\text{star}}P_{\text{loop}} = \Pi_{\text{star}}\mathbf{n} \times = \mathbf{n} \times \Pi_{\text{loop}}, \\ D_{\text{star}}P_{\text{star}} = \Pi_{\text{star}}, & D_{\text{loop}}P_{\text{star}} = -\mathbf{n} \times \Pi_{\text{star}} = -\Pi_{\text{loop}}\mathbf{n} \times, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{\text{loop}}D_{\text{loop}} = \text{Id}_{\mathbb{P}^1}, & P_{\text{loop}}D_{\text{star}} = 0_{\mathbb{P}^1}, \\ P_{\text{star}}D_{\text{star}} = \text{Id}_{\mathbb{P}^1}, & P_{\text{star}}D_{\text{loop}} = 0_{\mathbb{P}^1}, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times D_{\text{loop}} = D_{\text{star}}, & P_{\text{loop}}\mathbf{n} \times = -P_{\text{star}}, & \Pi_{\text{star}}\mathbf{n} \times = \mathbf{n} \times \Pi_{\text{loop}}, \\ \mathbf{n} \times D_{\text{star}} = -D_{\text{loop}}, & P_{\text{star}}\mathbf{n} \times = P_{\text{loop}}, & \Pi_{\text{loop}}\mathbf{n} \times = \mathbf{n} \times \Pi_{\text{star}}. \end{cases}$$

On remarque de plus que

$$D_{\text{star}}P_{\text{loop}} - D_{\text{loop}}P_{\text{star}} = \mathbf{n} \times \Pi_{\text{loop}} + \mathbf{n} \times \Pi_{\text{star}} = \mathbf{n} \times,$$

soit

$$\boxed{\mathbf{n} \times = D_{\text{star}}P_{\text{loop}} - D_{\text{loop}}P_{\text{star}}.} \quad (\text{A.3})$$

Approximation du Dirichlet-to-Neumann à l'aide des potentiels de Helmholtz

Sur le plan infini, on a

$$Y^+ = -2\mathbf{n} \times \mathbf{T}.$$

Or l'opérateur $\mathbf{n} \times \mathbf{T}$ s'exprime à l'aide des potentiels de Helmholtz. Pour le montrer, nous allons utiliser l'une ou l'autre des deux expressions suivantes :

$$\mathbf{T} = -ikG + \frac{1}{ik} \nabla G \nabla \cdot = \frac{1}{ik} (\nabla G \nabla \cdot + k^2 G).$$

On utilisera aussi

$$\nabla \cdot (\mathbf{n} \times \nabla) = 0.$$

Expression de $\mathbf{n} \times \mathbf{T}$ en fonction de $\mathbf{D}/\mathbf{P}_{\text{loop/star}}$ On a d'une part,

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \times \mathbf{T})\Pi_{\text{loop}} &= \mathbf{n} \times \left(-ikG + \frac{1}{ik} \nabla G \nabla \cdot \right) (-\mathbf{n} \times \nabla P_{\text{loop}}) \\ &= -ik\mathbf{n} \times (-\mathbf{n} \times \nabla) G P_{\text{loop}} \\ &= -ikD_{\text{star}} G P_{\text{loop}}, \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \times \mathbf{T})\Pi_{\text{star}} &= \frac{1}{ik} \mathbf{n} \times (\nabla G \nabla \cdot + k^2 G) (\nabla P_{\text{star}}) \\ &= \frac{1}{ik} \mathbf{n} \times (\nabla G \Delta + k^2 \nabla G) P_{\text{star}} \\ &= -\frac{1}{ik} D_{\text{loop}} G (\Delta + k^2 \text{Id}) P_{\text{star}}. \end{aligned}$$

Ces calculs nous conduisent à

$$\boxed{\mathbf{n} \times \mathbf{T} = -ik D_{\text{star}} G P_{\text{loop}} - \frac{1}{ik} D_{\text{loop}} G (k^2 \text{Id} + \Delta) P_{\text{star}}.} \quad (\text{A.4})$$

On remarque que l'opérateur G a le même symbole principal de Fourier, $\frac{1}{2i\sqrt{k^2 - \|\xi\|^2}}$, que l'opérateur suivant :

$$\frac{1}{2i\sqrt{k^2 \text{Id} + \Delta}}.$$

On pourrait donc a priori choisir d'approcher G par cet opérateur. Cependant, on préfère choisir une approximation légèrement différente qui va permettre de localiser l'opérateur. Introduisons un paramètre de damping réel ϵ . On définit alors

$$k_\epsilon = k - i\epsilon.$$

Remarque. Attention, ce choix du signe devant $i\epsilon$ dans k_ϵ n'est pas anodin. Il est dû au fait que l'on a pris la convention temporelle en e^{-ikr} dans le code *Elsem3D*. Si la convention temporelle était en e^{+ikr} , il faudrait cette fois choisir $k_\epsilon = k + i\epsilon$.

On décide d'approcher G par \tilde{G} défini comme suit :

$$\tilde{G} = \frac{1}{2i\sqrt{k_\epsilon^2 \text{Id} + \Delta}}.$$

Dans l'expression (A.4), on remplace G par \tilde{G} et $(k^2 \text{Id} + \Delta)$ par $(k_\epsilon^2 \text{Id} + \Delta)$. On obtient l'approximation suivante de $\mathbf{n} \times \mathbf{T}$:

$$\widetilde{\mathbf{n} \times \mathbf{T}} = -\frac{1}{2} k D_{\text{star}} (k_\epsilon^2 \text{Id} + \Delta)^{-1/2} P_{\text{loop}} + \frac{1}{2} \frac{1}{k} D_{\text{loop}} (k_\epsilon^2 \text{Id} + \Delta)^{+1/2} P_{\text{star}}.$$

En divisant par k_ϵ^2 sous les racines carrées, il vient

$$\widetilde{\mathbf{n} \times \mathbf{T}} = -\frac{1}{2} \frac{k}{k_\epsilon} D_{\text{star}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{-1/2} P_{\text{loop}} + \frac{1}{2} \frac{k_\epsilon}{k} D_{\text{loop}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} P_{\text{star}}.$$

L'approximation choisie pour Y^+ est donc

$$\tilde{Y}^+ = -2 \left(-\frac{1}{2} \frac{k}{k_\epsilon} D_{\text{star}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{-1/2} P_{\text{loop}} + \frac{1}{2} \frac{k_\epsilon}{k} D_{\text{loop}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} P_{\text{star}} \right),$$

soit encore

$$\boxed{\tilde{Y}^+ = \frac{k}{k_\epsilon} D_{\text{star}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{-1/2} P_{\text{loop}} - \frac{k_\epsilon}{k} D_{\text{loop}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} P_{\text{star}}.} \quad (\text{A.5})$$

Remarque (Signification du remplacement de k par k_ϵ). *On suppose que l'on se place avec la convention temporelle e^{-ikr} . Heuristiquement, puisque $k_\epsilon = k - i\epsilon$ est tel que $\text{Im}(k_\epsilon) < 0$, l'expression*

$$\frac{e^{-ik_\epsilon r}}{r} = e^{-\epsilon r} \frac{e^{-ik r}}{r}$$

décroît lorsque r s'éloigne de 0, donc a un comportement équivalent à celui de la troncature

$$\chi \frac{e^{-ikr}}{r} \chi,$$

où χ désigne une fonction de troncature autour de 0.

Synthèse de D_{loop} , D_{star} , P_{loop} , P_{star}

On assemble préalablement sur la base des éléments finis P^1 les matrices de Galerkin des opérateurs différentiels suivants :

$$[\mathbf{n} \times \nabla], [\nabla], [\nabla \cdot], [\nabla \cdot \mathbf{n} \times].$$

Les opérateurs D_{loop} et D_{star} sont modélisés par les multiplications de matrices suivantes :

$$\begin{aligned} D_{\text{loop}} : (x) &\mapsto (-1)[\mathbf{n} \times \nabla](x), \\ D_{\text{star}} : (x) &\mapsto [\nabla](x). \end{aligned}$$

Ils envoient donc un vecteur d'amplitude sur un vecteur de couplage.

Les opérateurs P_{loop} et P_{star} sont modélisés par les multiplications et inversions de matrices suivantes :

$$\begin{aligned} P_{\text{loop}} : (x) &\mapsto [\text{Id}]^{-1}[\nabla \cdot \mathbf{n} \times](x), \\ P_{\text{star}} : (x) &\mapsto [\text{Id}]^{-1}[\nabla \cdot](x). \end{aligned}$$

Ils envoient donc un vecteur d'amplitude sur un vecteur d'amplitude.

Synthèse des racines d'opérateurs par expansion de Padé

Nous avons besoin de synthétiser les opérateurs

$$\left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} \quad \text{et} \quad \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{-1/2}.$$

La formule de Padé permet de calculer $(\text{Id} + T)^{1/2}$ où T est un opérateur. On appliquera cette formule avec $T = \frac{\Delta}{k_\epsilon^2}$.

L'expansion de Padé consiste à choisir un entier $p \geq 1$ et un angle θ , et à approcher cet opérateur par la somme finie :

$$(\text{Id} + T)^{1/2} \approx A_0 + \sum_{j=1}^p A_j T (\text{Id} + B_j T)^{-1}, \quad (\text{A.6})$$

où les termes A_0, A_j, B_j sont définis dans l'Annexe B.

Il est connu que cette approximation est imprécise si l'opérateur T a des valeurs propres proches de la demi-droite de coupure D définie par

$$D = \{z = -1 + r e^{i(\pi+\theta)}, r > 0\}.$$

L'article de Pernet [48] montre que si $k_\epsilon = k - i\epsilon$ avec ϵ assez petit, on peut choisir $\theta = -\pi/3$. En effet, le spectre du laplacien $Sp(\Delta)$ est inclus dans \mathbb{R}^- . De plus,

$$\frac{1}{k_\epsilon^2} = \frac{1}{(k - i\epsilon)^2} = \frac{(k + i\epsilon)^2}{(k^2 + \epsilon^2)^2} = \frac{(k^2 - \epsilon^2) + 2ik\epsilon}{(k^2 + \epsilon^2)^2}.$$

Ainsi

$$\begin{cases} \Re \left(\frac{1}{k_\epsilon^2} \right) = \frac{k^2 - \epsilon^2}{(k^2 + \epsilon^2)^2} > 0, \\ \text{Im} \left(\frac{1}{k_\epsilon^2} \right) = \frac{2k\epsilon}{(k^2 + \epsilon^2)^2} > 0, \end{cases}$$

(avec une partie imaginaire plus petite que la partie réelle pour ϵ petit). Donc l'argument de $\frac{1}{k_\epsilon^2}$ appartient à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La demi-droite D d'origine le point $(-1, 0)$ et d'angle

$$\pi + \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

introduite au Lemme 71 de l'annexe B, n'intersectera pas la demi-droite $Sp\left(\frac{\Delta}{k_\epsilon^2}\right)$, qui est d'angle compris entre π et $\frac{3\pi}{4}$. La FIG. A.1 montre les positions respectives de $Sp\left(\frac{\Delta}{k_\epsilon^2}\right)$ et de la demi-droite D .

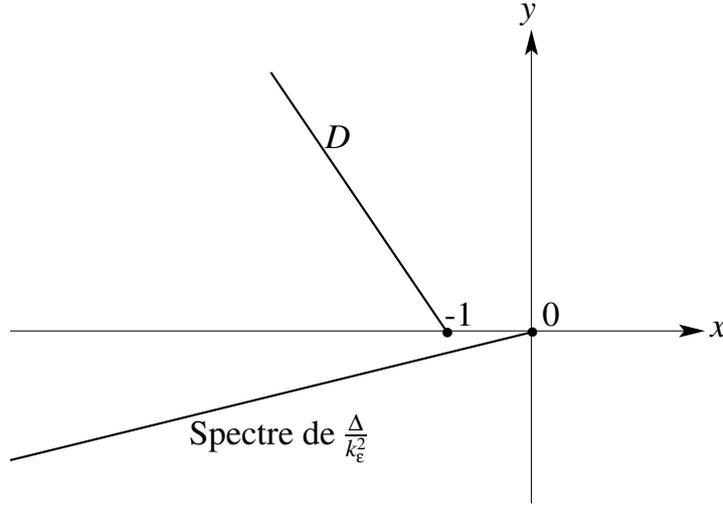


FIGURE A.1 – Positions respectives du spectre de $\frac{\Delta}{k_\epsilon^2}$ et de la demi-droite de coupure D

Par ailleurs, plus p est grand, plus on s'attend à ce que l'approximation soit précise. Cependant Pernet [48] a montré qu'il suffisait en pratique de se restreindre à $p = 2$ (ce qui limite la taille des systèmes linéaires à inverser pour calculer la racine carrée).

Pour le détail de l'assemblage des opérateurs $\left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2}\right)^{+1/2}$ et $\left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2}\right)^{-1/2}$, on pourra se référer à la section B.4.1.

A.2 Approximations des opérateurs régularisants $R_{\mathbf{E}}$ et $R_{\mathbf{H}}$ (GCSIE impédante, Pernet)

On peut écrire deux types d'équation GCSIE impédante, l'une pour résoudre le problème aux limites avec la trace impédante $\mathbf{E}_{\text{tan}} + \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{H}$ imposée sur la surface, l'autre pour résoudre le problème aux limites avec la trace impédante $\mathbf{n} \times \mathbf{E} - \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}}$ imposée. C'est cette deuxième condition aux limites que nous avons utilisée en pratique. Cependant, dans un souci d'exhaustivité, nous présentons les opérateurs régularisants $\widehat{R}_{\mathbf{E}}$ et $\widehat{R}_{\mathbf{H}}$ correspondant à chacune de ces deux équations.

L'approximation ci-dessous a été proposée par Pernet [48].

A.2.1 Calcul de $(\widetilde{R}_{\mathbf{E}}, \widetilde{R}_{\mathbf{H}})$ dans le cas où $\gamma \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{tan}} + \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{H}$

L'approximation que nous allons choisir pour $R_{\mathbf{H}}$ est basée sur celle de \widetilde{Y} :

$$\widetilde{Y} = \frac{k}{k_\epsilon} D_{\text{star}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{-1/2} P_{\text{loop}} - \frac{k_\epsilon}{k} D_{\text{loop}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} P_{\text{star}}.$$

$R_{\mathbf{E}}$ et $R_{\mathbf{H}}$ sont définis par :

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{E}} : \mathbf{E}_{\text{tan}} + \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{H} &\mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \\ R_{\mathbf{H}} : \mathbf{E}_{\text{tan}} + \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{H} &\mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{H}. \end{aligned}$$

- On remarque que

$$-\mathbf{n} \times R_{\mathbf{E}} + \alpha R_{\mathbf{H}} = \text{Id}.$$

Ainsi,

$$\boxed{R_{\mathbf{E}} = \mathbf{n} \times (\text{Id} - \alpha R_{\mathbf{H}})}. \quad (\text{A.7})$$

- Par ailleurs,

$$R_{\mathbf{H}}(-\mathbf{n} \times + \alpha Y)(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = Y(\mathbf{n} \times \mathbf{E}),$$

d'où

$$R_{\mathbf{H}}(\text{Id} + \alpha Y \mathbf{n} \times) = Y \mathbf{n} \times,$$

et sous réserve que $(\text{Id} + \alpha Y \mathbf{n} \times)$ soit inversible, on a

$$R_{\mathbf{H}} = (Y \mathbf{n} \times)(\text{Id} + \alpha Y \mathbf{n} \times)^{-1}.$$

En supposant que $(Y \mathbf{n} \times)$ est inversible,

$$\boxed{R_{\mathbf{H}} = ((Y \mathbf{n} \times)^{-1} + \alpha \text{Id})^{-1}}.$$

On remplace à présent Y par l'approximation trouvée précédemment. En utilisant (A.3), on a donc,

$$\widetilde{Y} \mathbf{n} \times = -\frac{k}{k_\epsilon} D_{\text{star}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{-1/2} P_{\text{star}} - \frac{k_\epsilon}{k} D_{\text{loop}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} P_{\text{loop}},$$

ce qui s'inverse en

$$\left(\widetilde{Y} \mathbf{n} \times \right)^{-1} = -\frac{k_\epsilon}{k} D_{\text{star}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} P_{\text{star}} - \frac{k}{k_\epsilon} D_{\text{loop}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{-1/2} P_{\text{loop}}, \quad (\text{A.8})$$

grâce aux relations (A.2). On souhaite à présent utiliser l'égalité suivante :

$$\text{Id} = D_{\text{loop}} P_{\text{loop}} + D_{\text{star}} P_{\text{star}}.$$

Etant donné un coefficient réel α , nous approchons αId par

$$\alpha \text{Id} \approx D_{\text{loop}} \alpha P_{\text{loop}} + D_{\text{star}} \alpha P_{\text{star}}. \quad (\text{A.9})$$

Si α est constant, cette approximation est une identité. Si α est variable mais régulier, la différence des opérateurs de droite et de gauche est un opérateur d'ordre -1. Nous déduisons de (A.8) et (A.9) que l'on a

$$\begin{aligned} \alpha \text{Id} + \left(\tilde{Y} \mathbf{n} \times\right)^{-1} &= D_{\text{star}} \left(\alpha \text{Id} - \frac{k_\epsilon}{k} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} \right) P_{\text{star}} \\ &\quad + D_{\text{loop}} \left(\alpha \text{Id} - \frac{k}{k_\epsilon} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{-1/2} \right) P_{\text{loop}}, \end{aligned}$$

ce qui conduit directement à

$$\tilde{R}_{\mathbf{H}} = D_{\text{star}} \left(\alpha \text{Id} - \frac{k_\epsilon}{k} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} \right)^{-1} P_{\text{star}} + D_{\text{loop}} \left(\alpha \text{Id} - \frac{k}{k_\epsilon} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{-1/2} \right)^{-1} P_{\text{loop}}.$$

En conclusion, pour la trace $(\mathbf{E}_{\text{tan}} + \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{H})$:

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{R}_{\mathbf{E}} = D_{\text{loop}} (\text{Id} + \alpha R_{\mathbf{H}}^{\text{star}}) P_{\text{loop}} + D_{\text{star}} (\text{Id} - \alpha R_{\mathbf{H}}^{\text{loop}}) P_{\text{star}}, \\ \tilde{R}_{\mathbf{H}} = D_{\text{loop}} R_{\mathbf{H}}^{\text{loop}} P_{\text{star}} + D_{\text{star}} R_{\mathbf{H}}^{\text{star}} P_{\text{loop}}, \end{cases}} \quad (\text{A.10})$$

avec

$$\boxed{\begin{cases} R_{\mathbf{H}}^{\text{loop}} = \left[-\frac{k}{k_\epsilon} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{-1/2} + \alpha \text{Id} \right]^{-1}, \\ R_{\mathbf{H}}^{\text{star}} = \left[\frac{k_\epsilon}{k} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} - \alpha \text{Id} \right]^{-1}. \end{cases}} \quad (\text{A.11})$$

Le calcul de $R_{\mathbf{H}}^{\text{loop}}$ et $R_{\mathbf{H}}^{\text{star}}$ est fait dans l'annexe B, à la section B.4.2.

A.2.2 Calcul de $(\tilde{R}_{\mathbf{E}}, \tilde{R}_{\mathbf{H}})$ dans le cas où $\gamma \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} - \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}}$

L'approximation que nous allons choisir pour $R_{\mathbf{H}}$ est basée sur celle de \tilde{Y} :

$$\tilde{Y} = \frac{k}{k_\epsilon} D_{\text{star}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{-1/2} P_{\text{loop}} - \frac{k_\epsilon}{k} D_{\text{loop}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} P_{\text{star}}. \quad (\text{A.12})$$

$R_{\mathbf{E}}$ et $R_{\mathbf{H}}$ sont définis par :

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{E}} : \mathbf{n} \times \mathbf{E} - \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}} &\mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \\ R_{\mathbf{H}} : \mathbf{n} \times \mathbf{E} - \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}} &\mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{H}. \end{aligned}$$

- On remarque que

$$R_{\mathbf{E}} + \alpha \mathbf{n} \times R_{\mathbf{H}} = \text{Id}.$$

Ainsi,

$$\boxed{R_{\mathbf{E}} = \text{Id} - \alpha \mathbf{n} \times R_{\mathbf{H}}.} \quad (\text{A.13})$$

• Par ailleurs,

$$R_{\mathbf{H}}(\text{Id} + \alpha \mathbf{n} \times Y)(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = Y(\mathbf{n} \times \mathbf{E}),$$

d'où

$$R_{\mathbf{H}}(\text{Id} + \alpha \mathbf{n} \times Y) = Y,$$

et sous réserve que $(\text{Id} + \alpha \mathbf{n} \times Y)$ soit inversible, on a

$$R_{\mathbf{H}} = (Y)(\text{Id} + \alpha \mathbf{n} \times Y)^{-1}.$$

En supposant que Y est inversible, on en déduit :

$$\boxed{R_{\mathbf{H}} = ((Y)^{-1} + \alpha \mathbf{n} \times)^{-1}.} \quad (\text{A.14})$$

On remplace à présent Y par l'approximation (A.12) trouvée précédemment, qui s'inverse en

$$\left(\tilde{Y}\right)^{-1} = \frac{k_{\epsilon}}{k} D_{\text{loop}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_{\epsilon}^2}\right)^{+1/2} P_{\text{star}} - \frac{k}{k_{\epsilon}} D_{\text{star}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_{\epsilon}^2}\right)^{-1/2} P_{\text{loop}}, \quad (\text{A.15})$$

grâce aux relations (A.2). Remarquons que $\left(\tilde{Y}\right)^{-1} = -\tilde{Y}$, ce qui est normal puisque heuristiquement \tilde{Y} est proche de $-2\mathbf{n} \times \mathbf{T}$, opérateur qui mis au carré vaut $-\text{Id}$ plus un opérateur compact (formules de Calderón 1.13).

On souhaite à présent utiliser l'égalité suivante :

$$\mathbf{n} \times = D_{\text{star}} P_{\text{loop}} - D_{\text{loop}} P_{\text{star}}.$$

De même que dans la section précédente, on choisit d'approcher $\alpha \mathbf{n} \times$ par

$$\alpha \mathbf{n} \times \approx D_{\text{star}} \alpha P_{\text{loop}} - D_{\text{loop}} \alpha P_{\text{star}}. \quad (\text{A.16})$$

Si α est constant, cette approximation est une identité. Si α est variable mais régulier, la différence des opérateurs de droite et de gauche est un opérateur d'ordre -1. Nous déduisons de (A.15) et (A.16) que l'on a

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{n} \times + \left(\tilde{Y}\right)^{-1} &= -D_{\text{loop}} \left(\alpha \text{Id} - \frac{k_{\epsilon}}{k} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_{\epsilon}^2}\right)^{+1/2}\right) P_{\text{star}} \\ &\quad + D_{\text{star}} \left(\alpha \text{Id} - \frac{k}{k_{\epsilon}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_{\epsilon}^2}\right)^{-1/2}\right) P_{\text{loop}}, \end{aligned}$$

ce qui conduit directement à

$$\tilde{R}_{\mathbf{H}} = -D_{\text{star}} \left(\alpha \text{Id} - \frac{k_{\epsilon}}{k} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_{\epsilon}^2}\right)^{+1/2}\right)^{-1} P_{\text{loop}} + D_{\text{loop}} \left(\alpha \text{Id} - \frac{k}{k_{\epsilon}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_{\epsilon}^2}\right)^{-1/2}\right)^{-1} P_{\text{star}}.$$

En conclusion, pour la trace $(\mathbf{n} \times \mathbf{E} - \alpha \mathbf{H}_{\tan})$:

$$\boxed{\begin{cases} \widetilde{R}_{\mathbf{E}} = D_{\text{loop}} (\text{Id} + \alpha R_{\mathbf{H}}^{\text{star}}) P_{\text{loop}} + D_{\text{star}} (\text{Id} - \alpha R_{\mathbf{H}}^{\text{loop}}) P_{\text{star}}, \\ \widetilde{R}_{\mathbf{H}} = D_{\text{loop}} R_{\mathbf{H}}^{\text{loop}} P_{\text{star}} + D_{\text{star}} R_{\mathbf{H}}^{\text{star}} P_{\text{loop}}, \end{cases}} \quad (\text{A.17})$$

avec

$$\boxed{\begin{cases} R_{\mathbf{H}}^{\text{loop}} = \left[-\frac{k}{k_{\epsilon}} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_{\epsilon}^2} \right)^{-1/2} + \alpha \text{Id} \right]^{-1}, \\ R_{\mathbf{H}}^{\text{star}} = \left[\frac{k_{\epsilon}}{k} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_{\epsilon}^2} \right)^{+1/2} - \alpha \text{Id} \right]^{-1}. \end{cases}} \quad (\text{A.18})$$

Le calcul de $R_{\mathbf{H}}^{\text{loop}}$ et $R_{\mathbf{H}}^{\text{star}}$ est fait dans l'annexe B, à la section B.4.2.

Annexe B

Approximants de Padé

Sommaire

B.1	Développement de Taylor de $\sqrt{1+z}$	172
B.2	Développement de Padé de $\sqrt{1+z}$	173
B.3	Rotation de la coupure	175
B.4	Applications	177
B.4.1	Application à l'expansion de Padé de $(\text{Id}+T)^{+1/2}$ et $(\text{Id}+T)^{-1/2}$.	177
B.4.2	Application au calcul de $R_{\mathbf{H}}^{\text{loop}}$ et $R_{\mathbf{H}}^{\text{star}}$	180

L'objet de cette annexe est de présenter la méthode des approximants de Padé, en vue de l'appliquer au calcul approché d'opérateurs intervenant dans l'assemblage du système linéaire pour la GCSIE avec condition métal ou la GCSIE avec condition métal-impédante.

B.1 Développement de Taylor de $\sqrt{1+z}$

Lemme 69 (approximant de Padé de $\sqrt{1+z}$).

Le développement limité en 0 de la fonction $\sqrt{1+z}$ est donné par :

$$\sqrt{1+z} = 1 + \sum_{k=1}^n \lambda_k x^k + o(x^{n+1}),$$

avec

$$\begin{cases} \lambda_k = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}} N_{k-1}, \\ N_{k-1} = \frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1}. \end{cases}$$

Démonstration Le développement limité de la fonction $\sqrt{1+z}$ au voisinage de 0 est donné par

$$\sqrt{1+z} = 1 + \sum_{k=1}^n \lambda_k x^k + o(x^{n+1}),$$

où par abus de notation on notera

$$\lambda_k = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - k \right) = C_k^{1/2},$$

par analogie avec les coefficients binomiaux.

Calculons ces coefficients λ_k . On introduit les nombres de Catalan N_k définis par :

$$N_{k-1} = \frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1}.$$

$$\begin{aligned}
C_k^{1/2} &= \frac{(1/2) \times (1/2 - 1) \times \dots \times (1/2 - k + 1)}{k!} \\
&= \frac{1}{2^k k!} [1 \times (1 - 2) \times (1 - 4) \times \dots \times (1 - 2k + 2)] \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} [(2k - 3) \times (2k - 1) \times \dots \times 3 \times 1] \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} \frac{(2k - 2)!}{2^{k-1} (k - 1)!} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}} \frac{1}{k} \frac{(2k - 2)!}{[(k - 1)!]^2} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}} N_{k-1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lambda_k = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}} N_{k-1}.$$

□

B.2 Développement de Padé de $\sqrt{1+z}$

Lemme 70.

(Coupure sur la demi-droite $] -\infty, -1]$). Après décomposition en éléments simples, on obtient pour approximant de Padé de $\sqrt{1+z}$:

$$R_N(z) = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n z}{1 + b_n z},$$

où l'on a

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2N+1} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2N+1} \right), \\
b_n &= \cos^2 \left(\frac{n\pi}{2N+1} \right).
\end{aligned}$$

Démonstration Nous voulons montrer que, après décomposition en éléments simples, on obtient pour approximant de Padé de $\sqrt{1+z}$:

$$R_N(z) = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n z}{1 + b_n z}.$$

Pour cela, il suffit de calculer le développement limité de $R_N(z)$ et de montrer qu'il est égal à celui de $\sqrt{1+z}$ calculé précédemment.

$$\begin{aligned} R_N(z) &= 1 + \sum_{n=1}^N a_n z \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k b_n^k z^k + o(z^{N+1}) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=1}^N a_n (-1)^k b_n^k \right] z^{k+1} + o(z^{N+1}) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{N-1} \mu_{k+1} z^{k+1}, \end{aligned}$$

avec

$$\mu_{k+1} = \sum_{n=1}^N a_n (-1)^k b_n^k.$$

On pose $\alpha = \frac{\pi}{2N+1}$.

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=1}^N (\sin(\alpha n))^2 (\cos(\alpha n))^{2k} &= \sum_{n=0}^{2N} (\sin(\alpha n))^2 (\cos(\alpha n))^{2k} \\ &= \frac{-1}{2^{2k+2}} \sum_{n=0}^{2N} (e^{i\alpha n} - e^{-i\alpha n})^2 (e^{i\alpha n} + e^{-i\alpha n})^{2k} \\ &= \frac{-1}{2^{2k+2}} \sum_{n=0}^{2N} (e^{2i\alpha n} - 2 + e^{-2i\alpha n}) \sum_{r=0}^{2k} C_{2k}^r e^{i\alpha (2r-2k)n} \\ &= \frac{-1}{2^{2k+2}} \sum_{r=0}^{2k} C_{2k}^r \sum_{\lambda \in \{-1,0,1\}} f_\lambda \sum_{n=0}^{2N} e^{i2\alpha (r-k+\lambda)n}. \end{aligned}$$

en appliquant la formule du binôme de Newton, et avec $f_\lambda = 1$ si $\lambda = \pm 1$, $f_\lambda = -2$ si $\lambda = 0$.

La somme de la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{2N} e^{i2\alpha (r-k+\lambda)n}$$

est nulle, sauf si $(2N+1)$ divise $2(r-k+\lambda)$. Puisque $k < 2N$, ceci ne se produit que pour

$$r = k + \lambda,$$

auquel cas la somme de la série vaut $2N+1$. D'où

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=1}^N (\sin(\alpha n))^2 (\cos(\alpha n))^{2k} &= \frac{-1}{2^{2k+2}} (2N+1) (C_{2k}^{k+1} - 2C_{2k}^k + C_{2k}^{k-1}) \\ &= \frac{-1}{2^{2k+2}} (2N+1) C_{2k}^k \left(2 \frac{k}{k+1} - 2 \right) \\ &= \frac{1}{2^{2k+1}} (2N+1) N_k. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mu_{k+1} &= \sum_{n=1}^N a_n (-1)^k b_n^k \\
&= \frac{2}{2N+1} (-1)^k \sum_{n=1}^N (\sin(\alpha n))^2 (\cos(\alpha n))^{2k} \\
&= \frac{1}{2N+1} (-1)^k \frac{1}{2^{2k+1}} (2N+1) N_k \\
&= \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}} N_k.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\mu_k = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}} N_{k-1} = \lambda_k,$$

ce qui achève la preuve. □

B.3 Rotation de la coupure

Dans la suite, nous notons \sqrt{z} la fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, qui coïncide avec la fonction \sqrt{t} sur \mathbb{R}^+ . Il est connu que les approximants de Padé du Lemme 70 précédemment calculés convergent uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$, vers la fonction holomorphe $\sqrt{1+z}$ définie sur cet ensemble. Au voisinage de la demi-droite $] -\infty, -1]$, les approximants de Padé ont en revanche un comportement “violent” car la fonction limite est discontinue sur cet ensemble.

Dans le cadre de notre étude, nous souhaitons utiliser ces développements de Padé pour trouver une racine carrée d’opérateurs pouvant avoir des valeurs propres négatives. Pour cela, nous allons modifier le développement de Padé pour approcher la fonction S_θ définie ci-dessous en (B.1), qui elle est discontinue sur la demi-droite

$$D = \{z = -1 + r e^{i(\pi+\theta)}, r > 0\}.$$

En d’autres termes, nous effectuons une rotation de la demi-droite de coupure.

Lemme 71.

(Coupure sur $D = \{z = -1 + re^{i(\pi+\theta)}, r > 0\}$).

On calcule l'approximant de Padé de $\sqrt{1+z}$ au point $e^{i\theta} - 1$, qui converge vers la fonction $S_\theta(z)$ définie sur $\mathbb{C} \setminus D$ par :

$$S_\theta(z) = e^{i\theta/2} \sqrt{(1+z)e^{-i\theta}}. \quad (\text{B.1})$$

Son approximant de Padé est donné par :

$$R_{\theta,N}(z) = C_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n z}{1 + B_n z},$$

avec

$$\begin{aligned} C_0 &= e^{i\theta/2} \left(1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\theta} - 1)}{1 + b_n(e^{-i\theta} - 1)} \right), \\ A_n &= \frac{a_n e^{-i\theta/2}}{[1 + b_n(e^{-i\theta} - 1)]^2}, \\ B_n &= \frac{b_n e^{-i\theta}}{1 + b_n(e^{-i\theta} - 1)}. \end{aligned}$$

Démonstration On a

$$S_\theta(z) = e^{i\theta/2} \sqrt{1 + ((1+z)e^{-i\theta} - 1)},$$

dont l'approximant de Padé est donc

$$\begin{aligned} R_{\theta,N}(z) &= e^{i\theta/2} R_N((1+z)e^{-i\theta} - 1), \\ \text{soit } R_{\theta,N}(z)e^{-i\theta/2} &= 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n [(1+z)e^{-i\theta} - 1]}{1 + b_n [(1+z)e^{-i\theta} - 1]}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Effectuons quelques calculs :

$$\begin{aligned} \frac{A + Bz}{C + Dz} &= \frac{(A/C)(C + Dz) + (B - AD/C)z}{C + Dz} \\ &= \frac{A}{C} + \frac{(B - AD/C)z}{C + Dz}. \end{aligned}$$

Dans le cas présent (B.2), cela donne :

$$\begin{cases} A = a_n(e^{-i\theta} - 1), \\ B = a_n e^{-i\theta}, \\ C = 1 + b_n(e^{-i\theta} - 1), \\ D = b_n e^{-i\theta}. \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\frac{A}{C} &= \frac{a_n(e^{-i\theta} - 1)}{1 + b_n(e^{-i\theta} - 1)}, \\ B - AD/C &= a_n e^{-i\theta} - \frac{a_n b_n e^{-i\theta} (e^{-i\theta} - 1)}{1 + b_n(e^{-i\theta} - 1)} \\ &= \frac{a_n e^{-i\theta}}{1 + b_n(e^{-i\theta} - 1)},\end{aligned}$$

et ainsi

$$R_{\theta,N}(z)e^{-i\theta/2} = 1 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{a_n(e^{-i\theta} - 1)}{1 + b_n(e^{-i\theta} - 1)} + \frac{a_n e^{-i\theta}}{1 + b_n(e^{-i\theta} - 1)} \frac{z}{1 + b_n[(1+z)e^{-i\theta} - 1]} \right).$$

Or

$$1 + b_n [(1+z)e^{-i\theta} - 1] = 1 + b_n(e^{-i\theta} - 1) + b_n e^{-i\theta} z,$$

d'où en factorisant par $1 + b_n(e^{-i\theta} - 1)$:

$$R_{\theta,N}(z) = C_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n z}{1 + B_n z},$$

avec

$$\begin{aligned}C_0 &= e^{i\theta/2} \left(1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\theta} - 1)}{1 + b_n(e^{-i\theta} - 1)} \right), \\ A_n &= \frac{a_n e^{-i\theta/2}}{[1 + b_n(e^{-i\theta} - 1)]^2}, \\ B_n &= \frac{b_n e^{-i\theta}}{1 + b_n(e^{-i\theta} - 1)}.\end{aligned}$$

□

B.4 Applications

B.4.1 Application à l'expansion de Padé de $(\text{Id} + T)^{+1/2}$ et $(\text{Id} + T)^{-1/2}$

Soit T un opérateur ; comment approcher l'opérateur $(\text{Id} + T)^{1/2}$? L'expansion de Padé est une solution possible.

Définition 72 (Expansion de Padé).

L'expansion de Padé de $(\text{Id}+T)^{1/2}$ consiste à choisir un entier p et un angle θ , et à approcher cet opérateur par la somme finie :

$$(\text{Id}+T)^{1/2} = A_0 + \sum_{j=1}^p A_j T (\text{Id}+B_j T)^{-1}, \quad (\text{B.3})$$

avec par définition, pour $j = 1, p$:

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{2p+1} \sin^2\left(\frac{j\pi}{2p+1}\right), \\ b_j &= \cos^2\left(\frac{j\pi}{2p+1}\right), \\ R_p(z) &= 1 + \sum_{j=1}^p \frac{a_j z}{1 + b_j z} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}, \\ A_0 &= e^{i\theta/2} R_p(e^{-i\theta} - 1), \\ A_j &= e^{-i\theta/2} \frac{a_j}{(1 + b_j(e^{-i\theta} - 1))^2}, \\ A_j &= e^{-i\theta/2} \frac{b_j}{(1 + b_j(e^{-i\theta} - 1))}. \end{aligned}$$

Pour les deux sections suivantes, on notera $[\text{Id}]$ la matrice masse, i.e. la matrice de Galerkin de l'identité dans une base d'éléments finis donnés, et $[T]$ la matrice de Galerkin de T dans cette même base.

Synthèse de la racine carrée $(\text{Id}+T)^{+1/2}$

Soient x l'inconnue du problème et y la donnée. On veut calculer $x = (\text{Id}+T)^{+1/2}y$. Compte tenu de l'approximation de Padé (B.3), il s'agit de résoudre :

$$x = \left(A_0 \text{Id} + \sum_{j=1}^p A_j T (\text{Id}+B_j T)^{-1} \right) y.$$

En introduisant les inconnues auxiliaires $(V_j)_{1 \leq j \leq p}$, on obtient :

$$\begin{cases} x = A_0 y + \sum_{j=1}^p A_j T V_j, \\ V_j = (\text{Id}+B_j T)^{-1} y, \quad \forall j \in [1, p], \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} x - \sum_{j=1}^p A_j T V_j = A_0 y, \\ (\text{Id}+B_j T) V_j = y, \quad \forall j \in [1, p]. \end{cases}$$

Dans la suite, on notera (x) les vecteurs des coefficients de x sur la base des fonctions de base. On dit alors que (x) est un vecteur d'amplitude. Ce n'est donc pas un vecteur de couplage, terme qui désigne les vecteurs dont les coefficients sont le produit scalaire du vecteur avec les fonctions de base.

En intégrant ces relations contre des fonctions de base P^1 , les matrices de Galerkin $[\text{Id}]$ et $[T]$ apparaissent :

$$\begin{cases} [\text{Id}] (x) - \sum_{j=1}^p A_j [T] (V_j) = A_0 [\text{Id}] (y), \\ ([\text{Id}] + B_j [T]) (V_j) = [\text{Id}] (y), \quad \forall j \in [1, p]. \end{cases}$$

On obtient le système matriciel :

$$(\text{Id} + T)^{+1/2} : \begin{pmatrix} [\text{Id}] & -A_1 [T] & \cdots & -A_p [T] \\ 0 & [\text{Id}] + B_1 [T] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [\text{Id}] + B_p [T] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x) \\ (V_1) \\ \vdots \\ (V_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 [\text{Id}] (y) \\ [\text{Id}] (y) \\ \vdots \\ [\text{Id}] (y) \end{pmatrix}.$$

L'opérateur $(\text{Id} + T)^{+1/2}$ ainsi construit envoie un vecteur d'amplitude sur un vecteur d'amplitude.

Synthèse de l'inverse de la racine carée $(\text{Id} + T)^{-1/2}$

Soient x l'inconnue du problème et y la donnée. On veut calculer $x = ([\text{Id}] + [T])^{-1/2} y$. Il s'agit de résoudre $(\text{Id} + T)^{+1/2} x = y$, soit encore :

$$\left(A_0 \text{Id} + \sum_{j=1}^p A_j T (\text{Id} + B_j T)^{-1} \right) x = y.$$

En introduisant les inconnues auxiliaires $(V_j)_{1 \leq j \leq p}$, on obtient :

$$\begin{cases} A_0 x + \sum_{j=1}^p A_j T V_j = y, \\ V_j = (\text{Id} + B_j T)^{-1} x, \quad \forall j \in [1, p], \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} A_0 x + \sum_{j=1}^p A_j T V_j = y, \\ x - (\text{Id} + B_j T) V_j = 0, \quad \forall j \in [1, p]. \end{cases}$$

On intègre contre des fonctions de base P^1 , les matrices de Galerkin $[\text{Id}]$ et $[T]$ apparaissent alors :

$$\begin{cases} A_0 [\text{Id}] (x) + \sum_{j=1}^p A_j [T] (V_j) = [\text{Id}] (y), \\ [\text{Id}] (x) - ([\text{Id}] + B_j [T]) (V_j) = 0, \quad \forall j \in [1, p]. \end{cases}$$

On obtient le système matriciel :

$$(\text{Id} + T)^{-1/2} : \begin{pmatrix} A_0[\text{Id}] & A_1[T] & \cdots & A_p[T] \\ [\text{Id}] & -[\text{Id}] - B_1[T] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\text{Id}] & 0 & \cdots & -[\text{Id}] - B_p[T] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x) \\ (V_1) \\ \vdots \\ (V_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\text{Id}] (y) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'opérateur $(\text{Id} + T)^{-1/2}$ ainsi construit envoie un vecteur d'amplitude sur un vecteur d'amplitude.

B.4.2 Application au calcul de $R_{\mathbf{H}}^{\text{loop}}$ et $R_{\mathbf{H}}^{\text{star}}$

On rappelle que $R_{\mathbf{H}}^{\text{loop}}$ et $R_{\mathbf{H}}^{\text{star}}$ sont définis comme suit :

$$\begin{cases} R_{\mathbf{H}}^{\text{loop}} = \left[-\frac{k}{k_\epsilon} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{-1/2} + P_{\text{star}} \alpha D_{\text{star}} \right]^{-1}, \\ R_{\mathbf{H}}^{\text{star}} = \left[\frac{k_\epsilon}{k} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} - P_{\text{loop}} \alpha D_{\text{loop}} \right]^{-1}. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Calcul de $R_{\mathbf{H}}^{\text{loop}}$

Calculons $\varphi = R_{\mathbf{H}}^{\text{loop}} \Phi$. On a donc :

$$\left(-\frac{k}{k_\epsilon} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{-1/2} + P_{\text{star}} \alpha D_{\text{star}} \right) \varphi = \Phi. \quad (\text{B.5})$$

L'équation (B.5) nous donne, en introduisant l'inconnue auxiliaire U :

$$\begin{cases} -\frac{k}{k_\epsilon} \varphi + \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} U = \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} \Phi, \\ U = P_{\text{star}} \alpha D_{\text{star}} \varphi. \end{cases}$$

En tenant compte de l'expansion de Padé (B.3), on obtient :

$$\begin{cases} -\frac{k}{k_\epsilon} \varphi + \left(A_0 + \sum_{j=1}^p A_j \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \left(\text{Id} + B_j \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} \right) U = \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} \Phi, \\ -P_{\text{star}} \alpha D_{\text{star}} \varphi + U = 0. \end{cases}$$

On introduit alors les inconnues auxiliaires $(V_j)_{1 \leq j \leq p}$, et on obtient le système à $(p+2)$ équations :

$$\begin{cases} -\frac{k}{k_\epsilon} \varphi + A_0 U + \sum_{j=1}^p A_j \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} V_j = \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} \Phi, \\ -\nabla \cdot (\alpha \nabla \varphi) + \Delta U = 0, \\ -U + \left(\text{Id} + B_j \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right) V_j = 0, \quad \forall j \in [1, p]. \end{cases}$$

Ecrivons ce système matriciellement :

$$\begin{pmatrix} -\frac{k}{k_\epsilon} \text{Id} & A_0 \text{Id} & A_1 \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} & \cdots & A_p \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \\ -\nabla \cdot (\alpha \nabla) & \Delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\text{Id} & \text{Id} + B_1 \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & -\text{Id} & & & \text{Id} + B_p \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ U \\ V_1 \\ \vdots \\ V_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Phi.$$

Après discrétisation, et en écrivant sous forme variationnelle la deuxième ligne, on obtient :

$$\boxed{R_{\mathbf{H}}^{\text{loop}} :} \begin{pmatrix} -\frac{k}{k_\epsilon} [\text{Id}] & A_0 [\text{Id}] & A_1 \frac{[\Delta]}{k_\epsilon^2} & \cdots & A_p \frac{[\Delta]}{k_\epsilon^2} \\ -[\Delta_\alpha] & [\Delta] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -[\text{Id}] & [\text{Id}] + B_1 \frac{[\Delta]}{k_\epsilon^2} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & -[\text{Id}] & & & [\text{Id}] + B_p \frac{[\Delta]}{k_\epsilon^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ U \\ V_1 \\ \vdots \\ V_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Phi. \quad (\text{B.6})$$

On a noté $[\Delta_\alpha]$ la matrice du produit scalaire L^2 des $(\alpha \nabla \varphi, \nabla U')$.

Calcul de $R_{\mathbf{H}}^{\text{star}}$

Calculons $\varphi = R_{\mathbf{H}}^{\text{star}} \Phi$. On a donc :

$$\left(\frac{k_\epsilon}{k} \left(\text{Id} + \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{+1/2} - P_{\text{loop}} \alpha D_{\text{loop}} \right) \varphi = \Phi. \quad (\text{B.7})$$

En tenant compte de l'expansion de Padé (B.3), et en utilisant l'inconnue auxiliaire U , l'équation (B.7) nous donne :

$$\begin{cases} \frac{k_\epsilon}{k} \left(A_0 \text{Id} + \sum_{j=1}^p A_j \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \left(\text{Id} + B_j \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} \right) \varphi - U = \Phi, \\ U = P_{\text{loop}} \alpha D_{\text{loop}} \varphi. \end{cases}$$

On introduit alors les inconnues auxiliaires $(V_j)_{1 \leq j \leq p}$; on obtient le système à $(p+2)$ équations :

$$\begin{cases} \frac{k_\epsilon}{k} A_0 \varphi - U + \frac{k_\epsilon}{k} \sum_{j=1}^p A_j \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} V_j = \Phi, \\ \nabla \cdot (\mathbf{n} \times (\alpha \mathbf{n} \times \nabla \varphi)) + \Delta U = 0, \\ -\varphi + \left(\text{Id} + B_j \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \right) V_j = 0, \quad \forall j \in [1, p]. \end{cases}$$

Ecrivons ce système matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \frac{k_\epsilon}{k} A_0 \text{Id} & -\text{Id} & \frac{k_\epsilon}{k} A_1 \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} & \dots & \frac{k_\epsilon}{k} A_p \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \\ \nabla \cdot \mathbf{n} \times (\alpha \mathbf{n} \times \nabla) & \Delta & 0 & \dots & 0 \\ -\text{Id} & 0 & \text{Id} + B_1 \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -\text{Id} & 0 & & & \text{Id} + B_p \frac{\Delta}{k_\epsilon^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ U \\ V_1 \\ \vdots \\ V_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

Après discrétisation, on obtient :

$$\boxed{R_{\mathbf{H}}^{\text{star}} :} \begin{pmatrix} \frac{k_\epsilon}{k} A_0 [\text{Id}] & -[\text{Id}] & \frac{k_\epsilon}{k} A_1 \frac{[\Delta]}{k_\epsilon^2} & \dots & \frac{k_\epsilon}{k} A_p \frac{[\Delta]}{k_\epsilon^2} \\ -[\Delta_\alpha] & [\Delta] & 0 & \dots & 0 \\ -[\text{Id}] & 0 & [\text{Id}] + B_1 \frac{[\Delta]}{k_\epsilon^2} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -[\text{Id}] & 0 & & & [\text{Id}] + B_p \frac{[\Delta]}{k_\epsilon^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ U \\ V_1 \\ \vdots \\ V_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\text{Id}] \Phi \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

On a noté $[\Delta_\alpha]$ la matrice du produit scalaire L^2 des $(\alpha \nabla \varphi, \nabla U')$, qui coïncide avec $(\alpha \mathbf{n} \times \nabla \varphi, \mathbf{n} \times \nabla U')$.

Annexe C

Synthèse des opérateurs Dirichlet-to-Neumann et de scattering par équations intégrales

Sommaire

C.1 Synthèse des opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann	184
C.1.1 Synthèse du Dirichlet-to-Neumann par des équations en champ . .	184
C.1.2 Synthèse du Dirichlet-to-Neumann par des équations en source . .	191
C.2 Synthèse de l'opérateur de scattering	193
C.2.1 Synthèse de l'opérateur de scattering par GCSIE impédante . . .	193

L'objet de cette annexe est de présenter les différentes manières de construire, d'une part, les quatre opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann Y_a, Y_b, Y_c, Y_d , donnés par la Définition 41 du Chapitre 2, et d'autre part l'opérateur de scattering $S_{0,\alpha}$, présenté à la Définition 61 du Chapitre 5. Ces constructions sont faites en utilisant l'outil des équations intégrales.

On rappelle, comme on l'a expliqué au §2.6, que l'on donnera pour chaque équation intégrale présentée :

- le nom de l'équation intégrale (**Equation**),
- la trace de Dirichlet en entrée (**Input**),
- la trace de Neumann en sortie (**Output**),
- l'opérateur de type Dirichlet-to-Neumann synthétisé (**DtN**),
- l'opérateur du système linéaire sous-jacent (**oprLHS**),
- l'opérateur de construction du second membre (**oprRHS**),
- l'opérateur de construction de la trace de Neumann (**oprPP**),

où les opérateurs oprRHS et oprPP seront éventuellement absents. On rappelle également que la synthèse d'un opérateur de type Dirichlet-to-Neumann ou de scattering par une équation intégrale en champ se présente sous la forme :

$$\boxed{\text{oprLHS}(\text{SOL}) = \text{oprRHS}(\text{Input}),}$$

où l'opérateur oprLHS, qui est inversé, donne son nom à l'équation utilisée. Dans le cas d'une équation en source, une étape de post-processing est ajoutée :

$$\boxed{\text{Output} = \text{oprPP}(\text{SOL}).}$$

Remarque. *On s'intéresse aux méthodes de synthèse des opérateurs de coupage relatifs au sous-domaine extérieur, mais cette technique peut aussi bien s'appliquer aux opérateurs de couplage relatifs au sous-domaine intérieur.*

C.1 Synthèse des opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann

C.1.1 Synthèse du Dirichlet-to-Neumann par des équations en champ

On rappelle tout d'abord l'expression des opérateurs correspondant à chacune des équations ci-dessous :

Equation	Type	Opérateur
EFIE	champ	$-\mathbf{T}$
EFIE $\mathbf{n}\times$	champ	$-\mathbf{T}\mathbf{n}\times$
$-\mathbf{n}\times$ EFIE	champ	$\mathbf{n}\times\mathbf{T}$
$-\mathbf{n}\times$ EFIE $\mathbf{n}\times$	champ	$\mathbf{n}\times\mathbf{T}\mathbf{n}\times$
MFIE	champ	$\left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathbf{n}\times\mathbf{K}\right)$
MFIE $\mathbf{n}\times$	champ	$\left(\frac{1}{2}\mathbf{n}\times + \mathbf{n}\times\mathbf{K}\mathbf{n}\times\right)$
$-\mathbf{n}\times$ MFIE	champ	$\left(-\frac{1}{2}\mathbf{n}\times + \mathbf{K}\right)$
$-\mathbf{n}\times$ MFIE $\mathbf{n}\times$	champ	$\left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathbf{K}\mathbf{n}\times\right)$
GCSIE métallique	source	$(\mathbf{n}\times\mathbf{T})\tilde{\mathbf{Y}}^+ + \left(\frac{1}{2}\text{Id} - \mathbf{n}\times\mathbf{K}\right)$
GCSIE impédante	source	$\left[\mathbf{n}\times\mathbf{T} + \alpha\left(\mathbf{K} + \frac{1}{2}\mathbf{n}\times\right)\right] \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{H}}^+ - \left[\left(\mathbf{n}\times\mathbf{K} - \frac{1}{2}\text{Id}\right) - \alpha\mathbf{T}\right] \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{E}}^+$

Principe général pour les équations simple couche en champ

Pour l'équation EFIE et ses variantes, on choisit de paramétrer le champ \mathbf{E} à l'aide du théorème de représentation en considérant que le champ intérieur est nul :

$$\mathbf{E} = \mathcal{T}(\sigma_1^+\mathbf{E}) - \mathcal{K}(\sigma_0^+\mathbf{E}).$$

En appliquant la trace σ_0^+ à cette équation, on obtient

$$\sigma_0^+\mathbf{E} = (\mathbf{n}\times\mathbf{T})(\sigma_1^+\mathbf{E}) - \left(\mathbf{n}\times\mathbf{K} - \frac{1}{2}\text{Id}\right)(\sigma_0^+\mathbf{E}),$$

soit encore

$$\boxed{(\mathbf{n}\times\mathbf{T})(\sigma_1^+\mathbf{E}) = \left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathbf{n}\times\mathbf{K}\right)(\sigma_0^+\mathbf{E}).} \quad (\text{C.1})$$

On choisira de résoudre soit l'équation ci-dessus (C.1), soit l'équation ci-dessous (C.2) obtenue en appliquant $\mathbf{n}\times$:

$$\boxed{(-\mathbf{T})(\sigma_1^+\mathbf{E}) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{n}\times - \mathbf{K}\right)(\sigma_0^+\mathbf{E}).} \quad (\text{C.2})$$

Equation EFIE

On choisit de résoudre l'équation (C.2) avec l'équation EFIE. Cela signifie que l'opérateur sous-jacent est $-T$, donc que la sortie (Output), c'est-à-dire la solution de l'équation, est nécessairement $\sigma_1^+ \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$.

Nous pouvons choisir en entrée, c'est-à-dire comme second membre (Input) :

- soit $\sigma_0^+ \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$, auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $\left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times -K\right)$. On veut donc résoudre

$$(-T)\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times -K\right) (\mathbf{n} \times \mathbf{E}),$$

où la solution \mathbf{u} vaut $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$;

- soit \mathbf{E}_{tan} , auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $-\left(\frac{1}{2} + K\mathbf{n} \times\right)$. On veut donc résoudre

$$(-T)\mathbf{u} = -\left(\frac{1}{2} + K\mathbf{n} \times\right) (\mathbf{E}_{\text{tan}}),$$

où la solution \mathbf{u} vaut $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$.

Equation	Input	Output	DtN	oprLHS	oprRHS	oprPP
EFIE	$\mathbf{n} \times \mathbf{E}$	$\mathbf{n} \times \mathbf{H}$	Y_a	$-T$	$\left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times -K\right)$	absent
EFIE	\mathbf{E}_{tan}	$\mathbf{n} \times \mathbf{H}$	Y_b	$-T$	$-\left(\frac{1}{2} \text{Id} + K\mathbf{n} \times\right)$	absent

Equation EFIE $\mathbf{n} \times$

On choisit de résoudre l'équation (C.2) avec l'équation EFIE $\mathbf{n} \times$. Cela signifie que l'opérateur sous-jacent est $-T\mathbf{n} \times$, donc que la sortie (Output), c'est-à-dire la solution de l'équation, est nécessairement \mathbf{H}_{tan} .

Nous pouvons choisir en entrée, c'est-à-dire comme second membre (Input) :

- soit $\sigma_0^+ \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$, auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $\left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times -K\right)$. On veut donc résoudre

$$(-T\mathbf{n} \times)\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times -K\right) (\mathbf{n} \times \mathbf{E}),$$

où la solution \mathbf{u} vaut \mathbf{H}_{tan} ;

- soit \mathbf{E}_{tan} , auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $-\left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathbf{K}\mathbf{n}\times\right)$.

On veut donc résoudre

$$(-\mathbf{T}\mathbf{n}\times)\mathbf{u} = -\left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathbf{K}\mathbf{n}\times\right)(\mathbf{E}_{\text{tan}}),$$

où la solution \mathbf{u} vaut \mathbf{H}_{tan} .

Equation	Input	Output	DtN	oprLHS	oprRHS	oprPP
EFIE $\mathbf{n}\times$	$\mathbf{n}\times\mathbf{E}$	\mathbf{H}_{tan}	Y_c	$-\mathbf{T}\mathbf{n}\times$	$\left(\frac{1}{2}\mathbf{n}\times -\mathbf{K}\right)$	absent
EFIE $\mathbf{n}\times$	\mathbf{E}_{tan}	\mathbf{H}_{tan}	Y_d	$-\mathbf{T}\mathbf{n}\times$	$-\left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathbf{K}\mathbf{n}\times\right)$	absent

Equation $-\mathbf{n}\times\text{EFIE}$

On choisit de résoudre l'équation (C.1) avec l'équation $-\mathbf{n}\times\text{EFIE}$. Cela signifie que l'opérateur sous-jacent est $\mathbf{n}\times\mathbf{T}$, donc que la sortie (Output), c'est-à-dire la solution de l'équation, est nécessairement $\sigma_1^+\mathbf{E} = \mathbf{n}\times\mathbf{H}$.

Nous pouvons choisir en entrée, c'est-à-dire comme second membre (Input) :

- soit $\sigma_0^+\mathbf{E} = \mathbf{n}\times\mathbf{E}$, auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $\left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathbf{n}\times\mathbf{K}\right)$. On veut donc résoudre

$$(\mathbf{n}\times\mathbf{T})\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathbf{n}\times\mathbf{K}\right)(\sigma_0^+\mathbf{E}),$$

où la solution \mathbf{u} vaut $\mathbf{n}\times\mathbf{H}$;

- soit \mathbf{E}_{tan} , auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $\left(\frac{1}{2}\mathbf{n}\times + \mathbf{n}\times\mathbf{K}\mathbf{n}\times\right)$.

On veut donc résoudre

$$(\mathbf{n}\times\mathbf{T})\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{n}\times + \mathbf{n}\times\mathbf{K}\mathbf{n}\times\right)(\mathbf{E}_{\text{tan}}),$$

où la solution \mathbf{u} vaut $\mathbf{n}\times\mathbf{H}$.

Equation	Input	Output	DtN	oprLHS	oprRHS	oprPP
$-\mathbf{n}\times\text{EFIE}$	$\mathbf{n}\times\mathbf{E}$	$\mathbf{n}\times\mathbf{H}$	Y_a	$\mathbf{n}\times\mathbf{T}$	$\left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathbf{n}\times\mathbf{K}\right)$	absent
$-\mathbf{n}\times\text{EFIE}$	\mathbf{E}_{tan}	$\mathbf{n}\times\mathbf{H}$	Y_b	$\mathbf{n}\times\mathbf{T}$	$\left(\frac{1}{2}\mathbf{n}\times + \mathbf{n}\times\mathbf{K}\mathbf{n}\times\right)$	absent

Equation $-\mathbf{n}\times\text{EFIE } \mathbf{n}\times$

On choisit de résoudre l'équation (C.1) avec l'équation $-\mathbf{n} \times \text{EFIE } \mathbf{n} \times$. Cela signifie que l'opérateur sous-jacent est $\mathbf{n} \times \mathbf{T} \mathbf{n} \times$, donc que la sortie (Output), c'est-à-dire la solution de l'équation, est nécessairement \mathbf{H}_{tan} .

Nous pouvons choisir en entrée, c'est-à-dire comme second membre (Input) :

- soit $\sigma_0^+ \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$, auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $\left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right)$. On veut donc résoudre

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{T} \mathbf{n} \times) \mathbf{u} = \left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right) (\sigma_0^+ \mathbf{E}),$$

où la solution \mathbf{u} vaut \mathbf{H}_{tan} ;

- soit \mathbf{E}_{tan} , auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $\left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times + \mathbf{n} \times \mathbf{K} \mathbf{n} \times\right)$.

On veut donc résoudre

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{T} \mathbf{n} \times) \mathbf{u} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times + \mathbf{n} \times \mathbf{K} \mathbf{n} \times\right) (\mathbf{E}_{\text{tan}}),$$

où la solution \mathbf{u} vaut \mathbf{H}_{tan} .

Equation	Input	Output	DtN	oprLHS	oprRHS	oprPP
$-\mathbf{n} \times \text{EFIE } \mathbf{n} \times$	$\mathbf{n} \times \mathbf{E}$	\mathbf{H}_{tan}	Y_c	$\mathbf{n} \times \mathbf{T} \mathbf{n} \times$	$\left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right)$	absent
$-\mathbf{n} \times \text{EFIE } \mathbf{n} \times$	\mathbf{E}_{tan}	\mathbf{H}_{tan}	Y_d	$\mathbf{n} \times \mathbf{T} \mathbf{n} \times$	$\left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times + \mathbf{n} \times \mathbf{K} \mathbf{n} \times\right)$	absent

Principe général pour les équations double couche en champ

Pour l'équation MFIE et ses variantes, on choisit de paramétrer le champ \mathbf{H} à l'aide du théorème de représentation en considérant que le champ intérieur est nul :

$$\mathbf{H} = -\mathcal{T}(\sigma_0^+ \mathbf{E}) - \mathcal{K}(\sigma_1^+ \mathbf{E}).$$

En appliquant la trace σ_0^+ à cette équation, on obtient

$$\sigma_1^+ \mathbf{E} = -(\mathbf{n} \times \mathbf{T})(\sigma_0^+ \mathbf{E}) - \left(\mathbf{n} \times \mathbf{K} - \frac{1}{2} \text{Id}\right) (\sigma_1^+ \mathbf{E}),$$

soit encore

$$\boxed{\left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right) (\sigma_1^+ \mathbf{E}) = -(\mathbf{n} \times \mathbf{T})(\sigma_0^+ \mathbf{E})}. \quad (\text{C.3})$$

On choisira de résoudre soit l'équation ci-dessus (C.3), soit l'équation ci-dessous (C.4) obtenue en appliquant $\mathbf{n} \times$:

$$\boxed{\left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times - \mathbf{K}\right) (\sigma_1^+ \mathbf{E}) = \mathbf{T}(\sigma_0^+ \mathbf{E})}. \quad (\text{C.4})$$

Equation MFIE

On choisit de résoudre l'équation (C.3) avec l'équation MFIE. Cela signifie que l'opérateur sous-jacent est $\left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right)$, donc que la sortie (Output), c'est-à-dire la solution de l'équation, est nécessairement $\sigma_1^+ \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$.

Nous pouvons choisir en entrée, c'est-à-dire comme second membre (Input) :

- soit $\sigma_0^+ \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$, auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $-\mathbf{n} \times \mathbf{T}$. On veut donc résoudre

$$\left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right) \mathbf{u} = -(\mathbf{n} \times \mathbf{T})(\mathbf{n} \times \mathbf{E}),$$

où la solution \mathbf{u} vaut $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$;

- soit \mathbf{E}_{tan} , auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $-\mathbf{n} \times \mathbf{Tn} \times$. On veut donc résoudre

$$\left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right) \mathbf{u} = -(\mathbf{n} \times \mathbf{Tn} \times)(\mathbf{E}_{\text{tan}}),$$

où la solution \mathbf{u} vaut $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$.

Equation	Input	Output	DtN	oprLHS	oprRHS	oprPP
MFIE	$\mathbf{n} \times \mathbf{E}$	$\mathbf{n} \times \mathbf{H}$	Y_a	$\left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right)$	$-\mathbf{n} \times \mathbf{T}$	absent
MFIE	\mathbf{E}_{tan}	$\mathbf{n} \times \mathbf{H}$	Y_b	$\left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{n} \times \mathbf{K}\right)$	$-\mathbf{n} \times \mathbf{Tn} \times$	absent

Equation MFIE $\mathbf{n} \times$

On choisit de résoudre l'équation (C.3) avec l'équation MFIE $\mathbf{n} \times$. Cela signifie que l'opérateur sous-jacent est $\left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times + \mathbf{n} \times \mathbf{Kn} \times\right)$, donc que la sortie (Output), c'est-à-dire la solution de l'équation, est nécessairement \mathbf{H}_{tan} .

Nous pouvons choisir en entrée, c'est-à-dire comme second membre (Input) :

- soit $\sigma_0^+ \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$, auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $-\mathbf{n} \times \mathbf{T}$. On veut donc résoudre

$$\left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times + \mathbf{n} \times \mathbf{Kn} \times\right) \mathbf{u} = -(\mathbf{n} \times \mathbf{T})(\mathbf{n} \times \mathbf{E}),$$

où la solution \mathbf{u} vaut \mathbf{H}_{tan} ;

- soit \mathbf{E}_{tan} , auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $-\mathbf{n} \times \mathbf{Tn} \times$.
On veut donc résoudre

$$\left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times + \mathbf{n} \times \mathbf{Kn} \times \right) \mathbf{u} = -(\mathbf{n} \times \mathbf{Tn} \times)(\mathbf{E}_{\text{tan}}),$$

où la solution \mathbf{u} vaut \mathbf{H}_{tan} .

Equation	Input	Output	DtN	oprLHS	oprRHS	oprPP
MFIE $\mathbf{n} \times$	$\mathbf{n} \times \mathbf{E}$	\mathbf{H}_{tan}	Y_c	$\left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times + \mathbf{n} \times \mathbf{Kn} \times \right)$	$-\mathbf{n} \times \mathbf{T}$	absent
MFIE $\mathbf{n} \times$	\mathbf{E}_{tan}	\mathbf{H}_{tan}	Y_d	$\left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times + \mathbf{n} \times \mathbf{Kn} \times \right)$	$-\mathbf{n} \times \mathbf{Tn} \times$	absent

Equation $-\mathbf{n} \times \text{MFIE}$

On choisit de résoudre l'équation (C.4) avec l'équation $-\mathbf{n} \times \text{MFIE}$. Cela signifie que l'opérateur sous-jacent est $\left(-\frac{1}{2} \mathbf{n} \times + \mathbf{K} \right)$, donc que la sortie (Output), c'est-à-dire la solution de l'équation, est nécessairement $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$.

Nous pouvons choisir en entrée, c'est-à-dire comme second membre (Input) :

- soit $\sigma_0^+ \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$, auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $-\mathbf{T}$. On veut donc résoudre

$$\left(-\frac{1}{2} \mathbf{n} \times + \mathbf{K} \right) \mathbf{u} = (-\mathbf{T})(\mathbf{n} \times \mathbf{E}).$$

où la solution \mathbf{u} vaut $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$;

- soit \mathbf{E}_{tan} , auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $-\mathbf{Tn} \times$. On veut donc résoudre

$$\left(-\frac{1}{2} \mathbf{n} \times + \mathbf{K} \right) \mathbf{u} = (-\mathbf{Tn} \times) \mathbf{E}_{\text{tan}}.$$

où la solution \mathbf{u} vaut $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$.

Equation	Input	Output	DtN	oprLHS	oprRHS	oprPP
$-\mathbf{n} \times \text{MFIE}$	$\mathbf{n} \times \mathbf{E}$	$\mathbf{n} \times \mathbf{H}$	Y_a	$\left(-\frac{1}{2} \mathbf{n} \times + \mathbf{K} \right)$	$-\mathbf{T}$	absent
$-\mathbf{n} \times \text{MFIE}$	\mathbf{E}_{tan}	$\mathbf{n} \times \mathbf{H}$	Y_b	$\left(-\frac{1}{2} \mathbf{n} \times + \mathbf{K} \right)$	$-\mathbf{Tn} \times$	absent

Equation $-\mathbf{n} \times \text{MFIE} \mathbf{n} \times$

On choisit de résoudre l'équation (C.4) avec l'équation $-\mathbf{n} \times \text{MFIE } \mathbf{n} \times$. Cela signifie que l'opérateur sous-jacent est $\left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{K} \mathbf{n} \times\right)$, donc que la sortie (Output), c'est-à-dire la solution de l'équation, est nécessairement \mathbf{H}_{tan} .

Nous pouvons choisir en entrée, c'est-à-dire comme second membre (Input) :

- soit $\sigma_0^+ \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$, auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $-\mathbf{T}$. On veut donc résoudre

$$\left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{K} \mathbf{n} \times\right) \mathbf{u} = (-\mathbf{T})(\mathbf{n} \times \mathbf{E}).$$

où la solution \mathbf{u} vaut \mathbf{H}_{tan} ;

- soit \mathbf{E}_{tan} , auquel cas l'opérateur nécessaire à l'assemblage du second membre sera $-\mathbf{T} \mathbf{n} \times$. On veut donc résoudre

$$\left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{K} \mathbf{n} \times\right) \mathbf{u} = (-\mathbf{T} \mathbf{n} \times) \mathbf{E}_{\text{tan}}.$$

où la solution \mathbf{u} vaut \mathbf{H}_{tan} .

Equation	Input	Output	DtN	oprLHS	oprRHS	oprPP
$-\mathbf{n} \times \text{MFIE } \mathbf{n} \times$	$\mathbf{n} \times \mathbf{E}$	\mathbf{H}_{tan}	Y_c	$\left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{K} \mathbf{n} \times\right)$	$-\mathbf{T}$	absent
$-\mathbf{n} \times \text{MFIE } \mathbf{n} \times$	\mathbf{E}_{tan}	\mathbf{H}_{tan}	Y_d	$\left(\frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{K} \mathbf{n} \times\right)$	$-\mathbf{T} \mathbf{n} \times$	absent

C.1.2 Synthèse du Dirichlet-to-Neumann par des équations en source

Dans la suite, on notera $\mathbf{e}_0 = \sigma_0^+ \mathbf{E}$ la condition aux limites. Comme pour les équations en champ, on pourrait décrire les quatre types d'opérateurs Dirichlet-to-Neumann, mais on choisit ici de n'explicitier que $Y_a^+ : \sigma_0^+ \mathbf{E} \mapsto \sigma_1^+ \mathbf{E}$, le principe étant le même pour les trois autres.

Le calcul de $Y_a^+ \sigma_0^+ \mathbf{E}$ se fait de la manière suivante : on paramètre \mathbf{E} à l'aide d'une source \mathbf{u} et d'un potentiel \mathcal{V} , on cherche \mathbf{u} vérifiant l'équation intégrale $\sigma_0^+ \mathcal{V} \mathbf{u} = \sigma_0^+ \mathbf{E}$, puis on calcule $\sigma_1^+ \mathbf{E}$ en fonction de \mathbf{u} .

$$\sigma_1^+ \mathbf{E} = (\sigma_1^+ \mathcal{V}) \mathbf{u}.$$

Le choix du potentiel \mathcal{V} dépend bien sûr de l'équation intégrale que l'on utilise.

Equation simple couche en source

On cherche \mathbf{E} sous la forme $\mathbf{E} = \mathcal{T} \mathbf{u}$ et on résout

$$\boxed{(-\mathbf{T}) \mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_0}, \quad (\text{équation simple couche en source})$$

puis on calcule

$$Y_a^+ \mathbf{e}_0 = \sigma_1^+ \mathbf{E} = \sigma_1^+ \mathcal{T} \mathbf{u} = \boxed{\left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K} \right) \mathbf{u}.}$$

Equation	Input	Output	DtN	oprLHS	oprRHS	oprPP
simple couche en source	$\mathbf{n} \times \mathbf{E}$	$\mathbf{n} \times \mathbf{H}$	Y_a	$-\mathbf{T}$	$\mathbf{n} \times$	$\left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K} \right)$

Equation double couche en source

On cherche \mathbf{E} sous la forme $\mathbf{E} = -\mathcal{K} \mathbf{u}$ et on résout

$$\boxed{\left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K} \right) \mathbf{u} = \mathbf{e}_0,} \quad (\text{équation double couche en source})$$

puis on calcule

$$Y_a^+ \mathbf{e}_0 = \sigma_1^+ \mathbf{E} = \sigma_1^+ \mathcal{K} \mathbf{u} = \boxed{(\mathbf{n} \times \mathbf{T}) \mathbf{u}.}$$

Equation	Input	Output	DtN	oprLHS	oprRHS	oprPP
double couche en source	$\mathbf{n} \times \mathbf{E}$	$\mathbf{n} \times \mathbf{H}$	Y_a	$\left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K} \right)$	absent	$\mathbf{n} \times \mathbf{T}$

Equation GCSIE métallique

On a présenté au §2.6 du Chapitre 2 le moyen de synthétiser les quatre opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann grâce à l'équation GCSIE métallique. Nous résumons simplement dans le tableau suivant les résultats obtenus pour cette équation.

Equation	Input	Output	DtN	oprRHS	oprPP
GCSIE métallique	$\mathbf{n} \times \mathbf{E}$	$\mathbf{n} \times \mathbf{H}$	Y_a	absent	$[\text{Id}]^{-1} \left[\left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K} \right) \tilde{Y}^+ - \mathbf{n} \times \mathbf{T} \right]$
GCSIE métallique	\mathbf{E}_{tan}	$\mathbf{n} \times \mathbf{H}$	Y_b	$[\text{Id}]^{-1} [\mathbf{n} \times]$	$[\text{Id}]^{-1} \left[\left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K} \right) \tilde{Y}^+ - \mathbf{n} \times \mathbf{T} \right]$
GCSIE métallique	$\mathbf{n} \times \mathbf{E}$	\mathbf{H}_{tan}	Y_c	absent	$[\text{Id}]^{-1} \left[\left(-\frac{1}{2} \mathbf{n} \times -\mathbf{K} \right) \tilde{Y}^+ - \mathbf{T} \right]$
GCSIE métallique	\mathbf{E}_{tan}	\mathbf{H}_{tan}	Y_d	$[\text{Id}]^{-1} [\mathbf{n} \times]$	$[\text{Id}]^{-1} \left[\left(-\frac{1}{2} \mathbf{n} \times -\mathbf{K} \right) \tilde{Y}^+ - \mathbf{T} \right]$

C.2 Synthèse de l'opérateur de scattering

On rappelle que l'on a défini la trace impédante γ_α^+ par

$$\gamma_\alpha^+ \mathbf{E} = \mathbf{n}^+ \times \mathbf{E} - \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}} = (\sigma_0^+ + \alpha \mathbf{n} \times \sigma_1^+) \mathbf{E}.$$

Pour construire numériquement l'opérateur de scattering $S_{0,\alpha}^+$, nous pouvons comme pour l'opérateur Dirichlet-to-Neumann utiliser des équations en source ou en champ. Cependant, nous avons choisi d'utiliser directement dans les sous-domaines l'équation intégrale la plus performante pour résoudre les problèmes aux limites de type impédant. C'est pourquoi nous ne présentons dans cette partie que la construction de $S_{0,\alpha}^+$ par l'équation intégrale GCSIE impédante. Nous ne nous intéressons pas aux autres équations en source possibles ou aux équations en champ impédantes.

C.2.1 Synthèse de l'opérateur de scattering par GCSIE impédante

Equation GCSIE impédante

On note \mathbf{e} la condition aux limites impédante imposée :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} - \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}} = \mathbf{e}.$$

On recherche le champ \mathbf{E} sous la forme

$$\mathbf{E} = \left(\mathcal{T} \widetilde{R}_{\mathbf{H}}^+ - \mathcal{K} \widetilde{R}_{\mathbf{E}}^+ \right) \mathbf{u},$$

où \mathbf{u} est la source solution de l'équation GCSIE impédante :

$$\left[\left(\mathbf{n} \times \mathcal{T} + \alpha \left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times + \mathcal{K} \right) \right) \widetilde{R}_{\mathbf{H}}^+ + \left(\left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathcal{K} \right) - \alpha \mathcal{T} \right) \widetilde{R}_{\mathbf{E}}^+ \right] \mathbf{u} = \mathbf{e}.$$

Après avoir résolu cette équation, on obtient finalement la trace impédante désirée :

$$\begin{aligned} S_{0,\alpha}^+ \mathbf{e} &= \mathbf{n} \times \mathbf{E} + \alpha \mathbf{H}_{\text{tan}} = (\sigma_0^+ - \alpha \mathbf{n} \times \sigma_1^+) \mathbf{E} \\ &= \left[\left(\mathbf{n} \times \mathcal{T} - \alpha \left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times + \mathcal{K} \right) \right) \widetilde{R}_{\mathbf{H}}^+ + \left(\left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathcal{K} \right) + \alpha \mathcal{T} \right) \widetilde{R}_{\mathbf{E}}^+ \right] \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Nous résumons les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous :

Equation	GCSIE impédante
Input	$\mathbf{n} \times \mathbf{E} - \alpha \mathbf{H}_{\tan}$
Output	$\mathbf{n} \times \mathbf{E} + \alpha \mathbf{H}_{\tan}$
Scattering	$S_{0,\alpha}^+$
oprLHS	$[\text{Id}]^{-1} \left[\left(\mathbf{n} \times \mathbf{T} + \alpha \left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times + \mathbf{K} \right) \right) \widetilde{R}_{\mathbf{H}}^+ + \left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K} + \alpha \mathbf{T} \right) \widetilde{R}_{\mathbf{E}}^+ \right]$
oprRHS	absent
oprPP	$[\text{Id}]^{-1} \left[\left(\mathbf{n} \times \mathbf{T} - \alpha \left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \times + \mathbf{K} \right) \right) \widetilde{R}_{\mathbf{H}}^+ + \left(\frac{1}{2} \text{Id} - \mathbf{n} \times \mathbf{K} - \alpha \mathbf{T} \right) \widetilde{R}_{\mathbf{E}}^+ \right]$

Annexe D

Problèmes de Maxwell intérieur et extérieur avec condition métal-impédante

Sommaire

- D.1 Le problème de Maxwell intérieur avec condition métal-impédante 196
 - D.2 Le problème de Maxwell extérieur avec condition métal-impédante 200
-

Cette annexe a pour but de donner les conditions sous lesquelles les problèmes de Maxwell mixtes de type métal-impédant, intérieur et extérieur, admettent une unique solution. Nous reproduisons ci-dessous les démonstrations effectuées dans [18].

On notera λ l'impédance de surface de l'obstacle diffractant.

D.1 Le problème de Maxwell intérieur avec condition métal-impédante

Soit D un domaine compact et simplement connexe de \mathbb{R}^3 , définissant l'obstacle diffractant. Son complémentaire, noté D_e , est donc un domaine connexe. On suppose que la frontière Γ de l'obstacle D est une surface fermée lipschitzienne. On découpe Γ en deux portions de surface disjointes : $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_I$, une surface Γ_D sur laquelle on impose une condition de type métal, et une surface Γ_I sur laquelle on impose une condition de type impédant. Par convention, on notera $\mathbf{H}^0(\Gamma) = \mathbf{L}^2(\Gamma)$. Soit B_R une boule de rayon R telle que $D \subset B_R$. On définit les espaces

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{rot}, D) &= \left\{ \mathbf{u} \in (L^2(D))^3, \nabla \times \mathbf{u} \in (L^2(D))^3 \right\}, \\
\mathbf{H}_T^s(\Gamma) &= \left\{ \mathbf{u} \in (H^s(\Gamma))^3, \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}, \\
\mathbf{H}_T^s(\Gamma_0) &= \left\{ \mathbf{u}|_{\Gamma_0}, \mathbf{u} \in \mathbf{H}_T^s(\Gamma) \right\}, \text{ si } \Gamma_0 \subset \Gamma, \\
X(D, \Gamma_I) &= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, D), \mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\Gamma_I} \in \mathbf{L}_T^2(\Gamma_I) \right\}, \\
\tilde{X} &= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, D), \mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = 0 \text{ et } \mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\Gamma_I} \in \mathbf{L}_T^2(\Gamma_I) \right\}, \\
\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, B_R) &= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, B_R), \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial B_R \right\}, \\
\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, D_e) &= \mathbf{H}(\mathbf{rot}, D_e \cap B_R), \\
X_{\text{loc}}(D_e, \Gamma_I) &= X(D_e \cap B_R, \Gamma_I), \\
Y(\Gamma_D) &= \left\{ f \in H^{-1/2}(\Gamma_D)^3, \exists \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, B_R), \mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\Gamma_I} \in \mathbf{L}_T^2(\Gamma_I) \text{ et } f = \mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\Gamma_D} \right\}, \\
S &= \left\{ p \in H^1(D), p = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}, \\
X_0 &= \left\{ \mathbf{u} \in \tilde{X}, \forall \xi \in S, \int_D \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\xi} = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

On définit la norme :

$$\|\mathbf{u}\|_{X(D, \Gamma_I)}^2 = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, D)}^2 + \|\mathbf{n} \times \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_T^2(\Gamma_I)}^2.$$

Pour $f \in Y(\Gamma_D)$, soit $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, B_R)$ telle que $\mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\Gamma_I} \in \mathbf{L}_T^2(\Gamma_I)$ et $f = \mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\Gamma_D}$. On

définit alors les normes et produits scalaires suivants.

$$\begin{aligned} \|f\|_{Y(\Gamma_D)}^2 &= \inf \{ \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, D)}^2 + \|\mathbf{n} \times \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_T^2(\Gamma_I)}^2 \}, \\ \langle f, \Phi \rangle_1 &= \int_D (\nabla \times \mathbf{u} \cdot \Phi - \mathbf{u} \cdot \nabla \times \Phi) - \int_{\Gamma_I} (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot \Phi \quad \text{pour } \Phi \in X(D, \Gamma_I), \\ \langle f, \Phi \rangle_2 &= \int_{B_R \setminus D} (\nabla \times \mathbf{u} \cdot \Phi - \mathbf{u} \cdot \nabla \times \Phi) - \int_{\Gamma_I} (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot \Phi \quad \text{pour } \Phi \in X_0(B_R \setminus D, \Gamma_I), \\ \|f\|_1 &= \sup_{\Phi \in X(D, \Gamma_I)} \frac{|\langle f, \Phi \rangle_1|}{\|\Phi\|_{X(D, \Gamma_I)}}, \\ \|f\|_2 &= \sup_{\Phi \in X_0(B_R \setminus D, \Gamma_I)} \frac{|\langle f, \Phi \rangle_2|}{\|\Phi\|_{X(B_R \setminus D, \Gamma_I)}}. \end{aligned}$$

Remarquons que les produits scalaires $\langle f, \Phi \rangle_1$ et $\langle f, \Phi \rangle_2$ dépendent seulement de f (et non de \mathbf{u}) en vertu de la formule de Green.

Les normes $\|f\|_{Y(\Gamma_D)}$, $\|f\|_1$ et $\|f\|_2$ sont toutes trois équivalentes. En particulier, $Y(\Gamma_D)$ est un espace de Hilbert.

On suppose dans la suite que λ est réel et $k > 0$. La normale \mathbf{n} est toujours extérieure au domaine intérieur D (donc intérieure à D_e). Le problème intérieur s'exprime comme suit.

Définition 73 (Le problème intérieur, condition métal-impédante).

Etant donnés $f \in Y(\Gamma_D)$, $h \in \mathbf{L}_T^2(\Gamma_I)$, trouver $\mathbf{E} \in X(D, \Gamma_I)$ vérifiant

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = 0 & \text{dans } D, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} = f & \text{sur } \Gamma_D, \\ \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - i\lambda(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n} = h & \text{sur } \Gamma_I. \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Théorème 74.

Si $\Gamma_I \neq \emptyset$ et si λ est non nul, alors il y a unicité pour le problème intérieur (D.1).

Démonstration On rappelle la formule de Green :

$$\int_{\Omega} (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) + \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_{\text{tan}} \cdot (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u})).$$

Par linéarité, il suffit de montrer que si $f = 0$ et $h = 0$, alors $\mathbf{E} \in X(D, \Gamma_I)$ solution du problème intérieur (D.1) est nul. On note $\mathbf{H} = \frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{E}$ le champ magnétique associé à \mathbf{E} . En appliquant la formule de Green, et en tenant compte de $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \overline{\mathbf{E}_{\text{tan}}} = 0$ sur Γ_D , on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E}) \cdot \overline{\mathbf{E}} = \int_D (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \overline{\mathbf{E}}) + \int_{\Gamma_I} \overline{\mathbf{E}_{\text{tan}}} \cdot (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E})) - k^2 \int_D |\mathbf{E}|^2 \\ &= \int_D |\nabla \times \mathbf{E}|^2 + \int_{\Gamma_I} i\lambda \overline{\mathbf{E}_{\text{tan}}} \cdot ((\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n}) - k^2 \int_D |\mathbf{E}|^2, \end{aligned}$$

d'où l'on obtient

$$\int_D (|\nabla \times \mathbf{E}|^2 - k^2 |\mathbf{E}|^2) + i\lambda \int_{\Gamma_I} |\mathbf{E}_{\text{tan}}|^2 = 0.$$

Puisque λ est réel et non nul, en prenant la partie imaginaire de cette expression on obtient $\mathbf{E}_{\text{tan}} = 0$, donc aussi $\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{E} = 0$ (en vertu de (D.1)), comme fonctions de $\mathbf{L}_T^2(\Gamma_I)$. Pour établir la régularité de \mathbf{E} à travers Γ_I , on utilise les formules de représentation de Stratton-Chu. Ayant montré que \mathbf{E} est régulier à travers Γ_I , par le principe de continuité et puisque $\mathbf{E} = 0$ à l'extérieur de D , \mathbf{E} est aussi nul à l'intérieur. \square

Théorème 75.

Si $\Gamma_I \neq \emptyset$ et si λ est non nul, alors il y a existence pour le problème intérieur (D.1).

Démonstration La formulation variationnelle du problème intérieur s'écrit, par intégration

par parties de $\int_D (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E}) \cdot \bar{\Phi}$:

Trouver $\mathbf{E} \in X(D, \Gamma_I)$, tel que $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = f$ sur Γ_D , avec

$$\forall \Phi \in \tilde{X}, \quad \int_D ((\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \bar{\Phi}) - k^2 \mathbf{E} \cdot \bar{\Phi}) + \int_{\Gamma_D} (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E})) \cdot \bar{\Phi}_{\text{tan}} + \int_{\Gamma_I} (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E})) \cdot \bar{\Phi}_{\text{tan}} = 0.$$

Sur Γ_D , $\mathbf{n} \times \Phi_{\text{tan}} = 0$ donc $\bar{\Phi}_{\text{tan}} = 0$. Sur Γ_I , $\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - i\lambda(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n} = h$, donc

$$\int_{\Gamma_I} (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E})) \cdot \bar{\Phi}_{\text{tan}} = i\lambda \int_{\Gamma_I} \mathbf{E}_{\text{tan}} \cdot \bar{\Phi}_{\text{tan}} + \int_{\Gamma_I} h \cdot \bar{\Phi}_{\text{tan}}.$$

D'où la formulation variationnelle

$$\forall \Phi \in \tilde{X}, \quad \int_D ((\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \bar{\Phi}) - k^2 \mathbf{E} \cdot \bar{\Phi}) + i\lambda \int_{\Gamma_I} \mathbf{E}_{\text{tan}} \cdot \bar{\Phi}_{\text{tan}} = - \int_{\Gamma_I} h \cdot \bar{\Phi}_{\text{tan}}.$$

Comme $f \in Y(\Gamma_D)$, $\exists U \in X(D, \Gamma_I)$, $\mathbf{n} \times U|_{\Gamma_D} = f$. On retire l'expression

$$\int_D ((\nabla \times U) \cdot (\nabla \times \bar{\Phi}) - k^2 U \cdot \bar{\Phi}) + i\lambda \int_{\Gamma_I} U_{\text{tan}} \cdot \bar{\Phi}_{\text{tan}}$$

de chaque côté de l'égalité, et on pose $W = E - U$:

$$\begin{aligned} & \int_D ((\nabla \times W) \cdot (\nabla \times \bar{\Phi}) - k^2 W \cdot \bar{\Phi}) + i\lambda \int_{\Gamma_I} W_{\text{tan}} \cdot \bar{\Phi}_{\text{tan}} \\ &= - \int_D ((\nabla \times U) \cdot (\nabla \times \bar{\Phi}) - k^2 U \cdot \bar{\Phi}) - i\lambda \int_{\Gamma_I} U_{\text{tan}} \cdot \bar{\Phi}_{\text{tan}} - \int_{\Gamma_I} h \cdot \bar{\Phi}_{\text{tan}}. \end{aligned}$$

De plus $\mathbf{n} \times W = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} - U) = f - f = 0$ sur Γ_D .

Notons respectivement (\cdot, \cdot) et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ les produits scalaires sur $\mathbf{L}_T^2(D)$ et $\mathbf{L}_T^2(\Gamma_I)$, et posons

$$a(u, \Psi) := (\nabla \times u, \nabla \times \Psi) - k^2(u, \Psi) + i\lambda \langle u_{\text{tan}}, \Psi_{\text{tan}} \rangle \quad \text{pour } u, \Psi \in \tilde{X}.$$

Alors $a : \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire. Il s'agit de trouver $W \in \tilde{X}$, tel que

$$\forall \Phi \in \tilde{X}, \quad a(W, \Phi) = - \langle h, \Phi \rangle - a(U, \Phi).$$

On rappelle que par hypothèse, D est simplement connexe. Soit $\mathbf{u} \in \tilde{X}$, telle que $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ dans D et $\mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\Gamma_I} = 0$. Alors $\exists p \in S, \mathbf{u} = \nabla p$.

Lemme 76.

$X_0 \rightarrow L^2(D)$ est une injection compacte.

Démonstration Soit $\mathbf{u} \in X_0$. Alors comme $\mathbf{u} \in \tilde{X}$, on a $\mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = 0$ et $\mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\Gamma_I} \in \mathbf{L}_T^2(\Gamma_I)$, donc $\mathbf{n} \times \mathbf{u} \in \mathbf{L}_T^2(\Gamma)$. Alors d'après [24], $\mathbf{u} \in H^{1/2}(D)$. Donc $X_0 \rightarrow L^2(D)$ est une injection compacte. \square

On cherche la solution sous la forme $W = W_0 + \nabla p$, avec $W_0 \in X_0, p \in S$. Puisque pour $p' \in S, \nabla \times (\nabla p') = 0$ dans D et $\mathbf{n} \times \nabla p' = 0$ sur Γ , on a en prenant $\Phi = \nabla \xi, \xi \in S, \mathbf{n} \times \nabla \xi = 0$ sur Γ , et donc

$$\begin{aligned} \langle g, \Phi_{\text{tan}} \rangle &= 0, \text{ pour toute fonction } g \in L^2(\Gamma_I), \\ a(W, \Phi) &= (\nabla \times W, \nabla \times \nabla \xi) - k^2(W, \nabla \xi) \\ &= -k^2(W_0 + \nabla p, \nabla \xi) \\ &= -k^2(\nabla p, \nabla \xi), \\ a(U, \Phi) &= (\nabla \times U, \nabla \times \nabla \xi) - k^2(U, \nabla \xi) \\ &= -k^2(U, \nabla \xi), \end{aligned}$$

d'où finalement

$$(\nabla p, \nabla \xi) = -(U, \nabla \xi).$$

$S \times S \rightarrow \mathbb{C}, (p, \xi) \mapsto (\nabla p, \nabla \xi)$ est une forme sesquilinéaire continue coercive (par Poincaré), donc d'après le Lemme de Lax-Milgram : $\exists ! p_0 \in S, (\nabla p_0, \nabla \xi) = -(U, \nabla \xi)$ et de plus

$$\|\nabla p_0\|_{L^2(D)} \leq \|U\|_{L^2(D)}.$$

Connaissant p_0 il s'agit maintenant de trouver $W_0 \in X_0$ tel que $\forall \Phi \in X_0,$

$$a(W_0 + \nabla p_0, \Phi) = - \langle h, \Phi \rangle - a(U, \Phi),$$

soit

$$a(W_0, \Phi) = - \langle h, \Phi \rangle - a(U, \Phi) + k^2(\nabla p_0, \Phi).$$

Soit la forme sesquilinéaire $b : X_0 \times X_0 \rightarrow \mathbb{C},$

$$b(u, \Phi) := (\nabla \times u, \nabla \times \Phi) + (u, \Phi) + i\lambda \langle u_{\text{tan}}, \Phi_{\text{tan}} \rangle.$$

Alors

$$a(u, \Phi) = (\nabla \times u, \nabla \times \Phi) - k^2(u, \Phi) + i\lambda \langle u_{\text{tan}}, \Phi_{\text{tan}} \rangle = b(u, \Phi) - (1 + k^2)(u, \Phi).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\exists C_1 > 0$,

$$|b(u, \Phi)| \leq C_1 \|u\|_X \|\Phi\|_X.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z \leq |z|$ et $\operatorname{Im} z \leq |z|$, on a donc $|z| \geq \frac{1}{2}(\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z)$, donc $\exists C_2 > 0$,

$$|b(u, \Phi)| \geq \frac{1}{2} \left(\int_D (|\nabla \times u|^2 + |u|^2) + \lambda \int_{\Gamma_I} |u_{\tan}|^2 \right) \geq C_2 \|u\|_X.$$

On vient de montrer que b est continue et coercive. Par le Lemme de Lax-Milgram, $X_0 \rightarrow \mathbb{C}, \Phi \mapsto b(u, \Phi)$ est un opérateur bijectif. Puisque l'injection de X_0 dans $L^2(D)$ est compacte, $X_0 \rightarrow \mathbb{C}, \Phi \mapsto -(1+k^2)(u, \Phi)$ est un opérateur compact. L'alternative de Fredholm nous donne donc, puisque l'opérateur est injectif (d'après le Théorème 74), qu'il existe une unique solution $E = U + W_0 + \nabla p$. \square

D.2 Le problème de Maxwell extérieur avec condition métal-impédante

Définition 77 (Le problème extérieur, condition métal-impédante).

Etant donnés $f \in Y(\Gamma_D)$, $h \in \mathbf{L}_T^2(\Gamma_I)$, trouver $\mathbf{E} \in X_{\text{loc}}(D_e, \Gamma_I)$ vérifiant

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = 0 & \text{dans } D, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} = f & \text{sur } \Gamma_D, \\ \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - i\lambda(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n} = h & \text{sur } \Gamma_I, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} (\mathbf{x} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + ik|\mathbf{x}|\mathbf{E}) = 0 & \text{(condition de Silver-Müller)}. \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

La troisième condition peut se réécrire : $\mathbf{E}_{\tan} - \lambda \mathbf{n} \times \mathbf{H} = \tilde{h}$ sur Γ_I .

Théorème 78.

Si $\lambda \geq 0$, il y a unicité pour le problème extérieur (D.2).

Démonstration On reprend la même démonstration que pour le problème intérieur. Il faut faire attention au fait que la normale dans l'intégration par parties doit être dirigée vers l'extérieur de $D_e \cap B_R$. Dans ce cas la frontière se décompose en Γ_D , sur laquelle $\overline{\mathbf{E}_{\tan}}$ est nul, Γ_I , et la sphère S_R (bord de la boule B_R). L'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} & \int_{D_e \cap B_R} |\nabla \times \mathbf{E}|^2 - k^2 \mathbf{E} + \int_{\Gamma_D} \mathbf{b} \Phi_{\tan} \mathbf{E}_{\tan} \cdot (-\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E})) \\ & + \int_{\Gamma_I} \overline{\mathbf{E}_{\tan}} \cdot (-\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E})) + \int_{S_R} \overline{\mathbf{E}_{\tan}} \cdot (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E})) = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

- Sur Γ_D : $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ donc $\overline{\mathbf{E}_{\tan}} = 0$.

- Sur Γ_I : $\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{E} = i\lambda \mathbf{E}_{\text{tan}}$, d'où :

$$\int_{\Gamma_I} \overline{\mathbf{E}_{\text{tan}}} \cdot \left(-\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \right) = -i\lambda \int_{\Gamma_I} |\mathbf{E}_{\text{tan}}|^2.$$

- Sur S_R : on a $\nabla \times \mathbf{E} = ik\mathbf{H}$ donc

$$\int_{S_R} \overline{\mathbf{E}_{\text{tan}}} \cdot \left(\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \right) = ik \int_{S_R} \overline{\mathbf{E}_{\text{tan}}} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) = -ik \int_{S_R} (\mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{H}.$$

L'équation (D.3) nous donne finalement

$$\int_{D_e \cap B_R} \left(|\nabla \times \mathbf{E}| - k^2 |\mathbf{E}|^2 \right) - i\lambda \int_{\Gamma_I} |\mathbf{E}_{\text{tan}}|^2 - ik \int_{S_R} (\mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{H} = 0.$$

Prenons la partie imaginaire de cette expression :

$$\text{Re} \int_{S_R} (\mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{H} = -\frac{\lambda}{k} \int_{\Gamma_I} |\mathbf{E}_{\text{tan}}|^2 \leq 0.$$

On voit ici que l'hypothèse $\lambda \geq 0$ est nécessaire. Finalement,

$$\text{Re} \int_{S_R} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \overline{\mathbf{H}} = \text{Re} \int_{S_R} (\mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}}) \cdot \mathbf{H} \leq 0.$$

D'après le Théorème 6.10 de [23], et le principe de continuité, on obtient $\mathbf{E} = 0$. □

Théorème 79.

Si $\lambda \geq 0$, il y a existence pour le problème extérieur (D.2).

Démonstration On le démontre de la même manière que pour le problème intérieur. □

Remarque. Pour $\Gamma_I = \emptyset$ ou $\lambda = 0$, on obtient le problème extérieur du parfait conducteur métallique, qui effectivement est bien posé.

Bibliographie

- [1] S. Alinhac and P. Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Savoirs actuels : Interéditions / éditions du CNRS, 1991, Paris.
- [2] F. Alouges, S. Borel, and D. P. Levadoux. A stable well-conditioned integral equation for electromagnetism scattering. *J. Comp. Appl. Math*, 2006, accepted.
- [3] F. Alouges, S. Borel, and D. P. Levadoux. A stable well-conditioned integral equation for electromagnetism scattering. *J. Comp. Appl. Math*, 204 :440–451, July 2007.
- [4] F. Alouges and D. P. Levadoux. Well-conditioned integral equations for high-frequency scattering problems. *8th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves*, pages 47–51, Reading, UK, July 23–27, 2007.
- [5] X. Antoine and Y. Boubendir. *An integral preconditioner for solving the two-dimensional scattering transmission problem using integral equations*. p. 1473–1490, in "International Journal of Computer Mathematics", Vol. 85, Issue 10, 2008.
- [6] X. Antoine and M. Darbas. Alternative integral equations for the iterative solution of acoustic scattering problems. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 58(1) :107–128, 2005.
- [7] N. Balin, A. Bendali, and F. Collino. Domain decomposition and additive Schwarz techniques in the solution of a TE model of the scattering by an electrically deep cavity. *In Selected papers of the 15th International Conference on Domain Decomposition Methods in Science and Engineering, Berlin, Germany, July 21-25 2003 Ed. R. Kornhuber, R. Hoppe, J. Périaux, O. Pironneau and J. Xu, Springer*, pages 149–156, 2005.
- [8] N. Balin, A. Bendali, M. Fares, F. Millot, and N. Zerbib. Some recent applications of substructuring and domain decomposition techniques to radiation and scattering of time-harmonic electromagnetic waves. *CERFACS report TR/EMC/05/80*, 7 :474–485, 2005.
- [9] A. Bamberger and A.S. Bonnet. Calcul des modes guidés d'une fibre optique. Analyse mathématique. *Ecole Polytechnique, CMAP. Rapport interne n° 143*, 1986.
- [10] A. Bamberger, A.S. Bonnet, and R. Djellouli. Calcul des modes guidés d'une fibre optique. Différentes formulations mathématiques du problème. *Ecole Polytechnique, CMAP. Rapport interne n° 142*, 1986.
- [11] A. Bamberger, P. Joly, and M. Kern. Etude mathématique des modes élastiques guidés par l'extérieur d'une cavité cylindrique de section arbitraire. *INRIA, rapport de recherche n° 650*, Mars 1987.
- [12] A.S. Bonnet-BenDhia and P. Joly. Mathematical analysis and numerical approximation of optical waveguides. *Mathematical modeling in optical science, SIAM, Philadelphia, PA*, pages 273–324, 2001.

- [13] S. Borel. *Étude d'une équation intégrale stabilisée pour la résolution itérative de problèmes de diffractions d'ondes harmoniques en électromagnétisme*. PhD thesis, Université Paris XI, 2006.
- [14] S. Borel, D. P. Levadoux, and F. Alouges. A new well-conditioned integral formulation for Maxwell equations in three-dimensions. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 53(9) :2995–3004, September 2005.
- [15] A. Brakhage and P. Werner. Über das dirichletsche aussenraumproblem für die Helmholtzsche schwingungsgleichung. *Archive für Mathematik*, 16 :325–329, 1965.
- [16] A. Buffa and R. Hiptmair. Regularized combined field integral equations. *Numerische Mathematik*, 100(1) :1–19, 2005.
- [17] A. J. Burton and G. F. Miller. The application of integral equation methods to the numerical solution of the exterior boundary-value problems. *Proc. Roy. Soc. Lond. A.*, 323 :201–210, 1971.
- [18] F. Cakoni, D. Colton, and P. Monk. The electromagnetic inverse-scattering problem for partially coated lipschitz domains. *Proc. Royal. Soc. Edinburgh*, 134A :661–682, 2004.
- [19] S. H. Christiansen and J.-C. Nédélec. A preconditioner for the electric field integral equation based on Calderón formulas. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(3) :1100–1135, 2002.
- [20] F. Collino, S. Ghanemi, and P. Joly. Domain decomposition method for harmonic wave propagation : a general presentation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrn.*, 184 :171–211, 2000.
- [21] F. Collino and F. Millot. Mise en place d'un préconditionneur analytique appliqué à un problème d'électromagnétisme. *TR/EMC/02/122*, 2003.
- [22] D. Colton and R. Kress. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. John Wiley & Sons, 1983.
- [23] D. Colton and R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer-Verlag, 1992.
- [24] M. Costabel. A remark on the regularity of solutions of maxwell's equations on lipschitz domains. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 12 :365–368, 1990.
- [25] M. Darbas. *Préconditionneurs analytiques de type Calderón pour les formulations intégrales des problèmes de diffraction d'ondes*. PhD thesis, Université Paul-Sabatier, 2004.
- [26] M. Darbas. Generalized combined field integral equations for the iterative solution of the three-dimensional maxwell equations. *Applied Mathematics Letters*, 19(8) :834–839, August 2006.
- [27] B. Després. Domain decomposition method and the Helmholtz problem. *Mathematical and numerical aspects of wave propagation phenomena*, Philadelphia, PA, SIAM :44–52, 1991.
- [28] B. Després. *Méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes de propagation d'ondes en régime ordinaire*. PhD thesis, Université Paris IX Dauphine, 1991.
- [29] V. Dolean, M.J. Gander, and L. Gerardo-Giorda. Optimized schwarz methods for maxwell's equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(3) :2193–2213, 2009.

- [30] E.I. Fredholm. Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Math.*, 27 :365–390, 1903.
- [31] M.J. Gander, L. Halpern, and F. Magoules. An optimized schwarz method with two-sided robin transmission conditions for the helmholtz equation. *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, 55(2) :163–175, 2007.
- [32] M.J. Gander, L. Halpern, and F. Nataf. Optimal schwarz waveform relaxation for the one dimensional wave equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 41(5) :1643–1681, 2003.
- [33] L. Halpern. On waves propagating along the plane surface of an elastic solid. *Proc. London Math. Soc.*, 17 :4–11, 1885.
- [34] R. Hiptmair and P. Meury. Stabilized FEM-BEM coupling for Helmholtz transmission problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44 :2107–2130, 2006.
- [35] R. Hiptmair and P. Meury. *Stabilized FEM-BEM coupling for Maxwell transmission problems*. p. 1–39, in H. Ammari (eds.), "Modelling and Computations in Electromagnetics", Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 59, Springer, Berlin, 2007.
- [36] J.-C. Nédélec, J. Planchard. Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème extérieur dans \mathbb{R}^3 . *RAIRO Sér. Rouge*, 7(R-3) :105–129, 1973.
- [37] D. P. Levadoux. Some dedicated preconditioners for the CFIE equation of electromagnetism. *Math. Meth. Appl. Sci.*
- [38] D. P. Levadoux. *Étude d'une équation intégrale adaptée à la résolution hautes fréquences de l'équation de Helmholtz*. PhD thesis, Université Paris VI, 2001.
- [39] D. P. Levadoux. Proposition de préconditionneurs pseudo-différentiels pour l'équation CFIE de l'électromagnétisme. *M2AN*, 39(1) :147–155, 2005.
- [40] D. P. Levadoux. Stable integral equations for the iterative solution of electromagnetic scattering problems. *C. R. Physique*, 7(5) :518–532, 2006.
- [41] D. P. Levadoux and B. L. Michielsen. Nouvelles formulations intégrales pour les problèmes de diffraction d'ondes. *M2AN*, 38(1) :157–175, January/February 2004.
- [42] D. P. Levadoux and B. L. Michielsen. Analysis of a boundary integral equation for high frequency Helmholtz problems. *4th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, pages 765–767, Golden, Colorado, 1–5 june 1998.
- [43] D. P. Levadoux, F. Millot, and S. Pernet. New trends in the preconditioning of integral equations of electromagnetism. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Scientific Computing in Electrical Engineering SCEE 2008* by Janne Roos, Luis R. J. Costa(Mathematics in industry 14) :383–394, 2010.
- [44] J. R. Mautz and R. F. Harrington. A combined-source solution for radiation and scattering from a perfectly conducting body. *IEEEtransAntProp*, AP-27(4) :445–454, July 1979.
- [45] S. Molko-Daugas. *Prise en compte des singularités géométriques dans le préconditionnement d'équations intégrales pour le problème de Helmholtz*. PhD thesis, Paris XI, 2010.
- [46] J.-C. Nédélec. *Acoustic and Electromagnetic Equations, integral representations for harmonic problems*. Springer, 2001.
- [47] O. I. Panich. On the question of the solvability of the exterior boundary problem for the wave equation and Maxwell's equation. (in russian). *Uspekhi Mat. Nauk.*, 20(1) :221–226, 1965.

- [48] S. Pernet. A well-conditioned integral equation for iterative solution of scattering problems with a variable Leontovich boundary condition. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 44 :781–801, July 2010.
- [49] P. A. Raviart and J.-M. Thomas. A mixed finite element method for second order elliptic problems. *I. Galligani, E. Magenes (Eds.), Mathematical Aspects of the Finite Element Method, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin*, 606 :292–315, 1975.
- [50] J. Simon. *Extension de méthodes multipôles rapides : résolution pour des seconds membres multiples et application aux objets diélectriques*. PhD thesis, Université de Versaille Saint-Quentin-en-Yvelines, 2003.
- [51] P. Soudais. Iterative solution of a 3-d scattering problem from arbitrary shaped multi-dielectric and multiconducting bodies. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 42(7) :954–959, 1994.
- [52] O. Steinbach and W.L. Wendland.
- [53] W. McLean, T. Tran. A preconditioning strategy for boundary element galerkin methods. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 13 :283–301, 1997.

Index

- Admittance classique, 82
- Admittance modifiée, 83
- Approximations du Dirichlet-to-Neumann, 160
- Champ de court-circuit, 80
- Condition au bord du parfait conducteur, 41
- Condition de rayonnement de Silver-Müller, 23
- Décomposition de Helmholtz, 161
- DDM en S , 142
- DDM en Y , 83
- Diffraction par un objet parfaitement conducteur, 41
- Equation CFIE, 51
- Equation EFIE, 49
- Equation GCSIE pour le problème impédant, 60
- Equation GCSIE pour le problème métallique, 59
- Equation MFIE, 50
- Espaces d'ondes admissibles, 78
- Expansion de Padé, 164, 177
- Inégalité de Nédélec-Planchard, 25
- Modes guidés d'un cylindre rectangulaire, 122
- Modes guidés issus d'un gradient, 113
- Modes guidés issus d'un rotationnel, 116
- Opérateur de Fredholm, 31
- Opérateur de scattering, 140
- Opérateur Dirichlet-to-Neumann, 55
- Opérateur double couche, 29
- Opérateur simple couche, 29
- Potentiel double couche, 26
- Potentiel simple couche, 26
- Préconditionneur analytique pour la DDM en Y , 88
- Préconditionneur spectral pour la DDM en S , 148
- Préconditionneur spectral pour la DDM en Y , 124
- Problème de Maxwell extérieur, condition métal, 33
- Problème de Maxwell extérieur, condition métal-impédante, 38, 200
- Problème de Maxwell intérieur, condition métal, 37
- Problème de Maxwell intérieur, condition métal-impédante, 39, 196
- SER (Section Efficace Radar ou Surface Equivalente Radar), 63
- Synthèse d'opérateurs Dirichlet-to-Neumann par équations intégrales, 67
- Théorème de représentation, 26

