Autour des représentations modulo p des groupes réductifs p-adiques de rang 1

Ramla Abdellatif

N$^{\text{o}}$ d'ordre: 10455

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES DE
L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

Spécialité: Mathématiques

par

Ramla Abdellatif

Autour des représentations modulo p des groupes réductifs p-adiques de rang 1

Soutenue le 02 Décembre 2011 devant la Commission d'examen :

M.	Christophe Breuil	
M.	Laurent Clozel	
M.	Jean-François Dat	(Rapporteur)
M.	Guy Henniart	(Directeur de thèse)
Mme	Ariane Mézard	(Rapporteur)
Mme	Marie-France Vignéras	(Président du Jury)

Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91 405 Orsay CEDEX

Résumé

Soit p un entier premier. Cette thèse est une contribution à l'étude des représentations modulo p de groupes réductifs p-adiques qui fut initiée par Barthel et Livné dès le milieu des années 90. Les résultats démontrés depuis concernent essentiellement les représentations modulo p du groupe des points rationnels du groupe linéaire général GL_n défini sur un corps local non archimédien F complet pour une valuation discrète, de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel fini, avec un attachement particulier au cas $n = 2$ qui est déjà extrêmement riche en enseignements. L'originalité de nos travaux réside notamment dans le fait qu'ils portent sur des groupes différents de $GL_n(F)$: nous nous intéressons en effet dans cette thèse à la description des classes d'isomorphisme des représentations modulo p de groupes réductifs connexes définis, quasi-déployés et de rang 1 sur F. Une place particulière est accordée au groupe spécial linéaire $SL_2(F)$ et au groupe unitaire quasi-déployé non ramifié en trois variables $U(2,1)(E/F)$ puisque ce sont deux cas dans lesquels nous obtenons des résultats plus poussés.

Nous commençons par traiter le cas du groupe $SL_2(F)$, pour lequel nous obtenons une classification complète des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles (avec ajout d'une hypothèse d'admissibilité lorsque F est de caractéristique 2) à coefficients dans une clôture algébrique fixée $\overline{\mathbb{F}}_p$ du corps résiduel de F. Elle fait apparaître deux types de représentations : les représentations *supersingulières* et les représentations non supersingulières. Nous montrons que les représentations non supersingulières de $SL_2(F)$ correspondent exactement aux représentations non supercuspidales de $SL_2(F)$, ce qui en fournit une description exhaustive sans hypothèse supplémentaire sur F. Nous explicitons ensuite les représentations supersingulières de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, ce qui nous permet de définir dans ce cas une correspondance de Langlands semi-simple modulo p, à savoir une bijection « naturelle » entre les classes d'isomorphisme des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ et certaines classes d'isomorphisme de représentations galoisiennes projectives de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Une propriété importante de nos résultats est qu'ils sont compatibles (via le foncteur de restriction) aux résultats obtenus précédemment par Barthel-Livné et par Breuil pour les représentations modulo p de $GL_2(F)$.

Nous adaptons ensuite les méthodes utilisées dans l'étude des représentations modulo p de $SL_2(F)$ au cas des représentations lisses irréductibles admissibles du groupe unitaire quasi-déployé à trois variables $\mathbb{G} := U(2,1)(E/F)$ avec E/F extension quadratique séparable non ramifiée. Nous démontrons que les classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathbb{G}$ se répartissent de nouveau entre représentations supersingulières et représentations non supersingulières. Nous prouvons en outre que, sous réserve d'une propriété d'injectivité, la notion de supersingularité est équivalente à la notion de supercuspidalité qui apparaît dans la théorie complexe.

Les résultats prouvés jusqu'ici et les méthodes permettant de les démontrer laissent à penser que leur cadre naturel d'obtention est celui des représentations modulo p d'un groupe réductif connexe (quasi-déployé) G défini et de rang 1 sur F. Ce manuscrit contient une généralisation partielle des énoncés sus-mentionnés, à savoir la description explicite des représentations lisses irréductibles non supercuspidales de G à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$, ainsi que la détermination presque complète de leurs classes d'isomorphisme. Plus précisément, nous démontrons que ces représentations se partitionnent en trois familles : les caractères de G, les représentations *de la série principale* et les représentations *de la série spéciale*. Nous prouvons ensuite qu'il n'existe pas d'entrelacements entre deux représentations distinctes appartenant à l'une des deux premières familles, et nous donnons une condition nécessaire à l'existence d'un entrelacement entre deux représentations de la série spéciale.

La dernière partie de cette thèse revient sur la théorie des représentations modulo p de $SL_2(F)$ puisque nous y déterminons un système de représentants des classes d'isomorphisme des modules simples à droite sur la pro-p-algèbre de Hecke-Iwahori de $SL_2(F)$. Cette algèbre apparaît naturellement lorsque l'on s'intéresse aux représentations lisses de $SL_2(F)$: en effet, l'espace des vecteurs invariants sous l'action du pro-p-Iwahori standard de $SL_2(F)$ d'une telle représentation est canoniquement muni d'une structure de module à droite sur cette algèbre, et la compréhension de ce module permet d'obtenir des informations sur la représentation dont il provient. Nos résultats forment le premier pas dans l'élaboration d'une équivalence de catégories mimant celle construite par Ollivier pour les représentations modulo p de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et permettent d'être optimistes quant à son existence : en effet, ils assurent en particulier l'existence d'une bijection entre les classes d'isomorphisme des modules à droite simples sur la pro-p-algèbre de Hecke-Iwahori de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ et les classes d'isomorphisme des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Mots-clefs : groupes réductifs p-adiques de rang 1, correspondance de Langlands modulo p, arbres de Bruhat-Tits, algèbres de Hecke-Iwahori.

Mod p representations of p-adic reductive groups of rank 1

Abstract

Let p be a prime number. This thesis is a contribution to the study of mod p representations of p-adic reductive groups, launched by Barthel and Livné in the middle of the 90's. Most of the results that have been proved so far are about mod p representations of the group of rational points of the general linear group GL_n defined over a non-archimedean local field F complete with respect to a discrete valuation and with finite residue class field of characteristic p, with a special focus on the already very interesting case $n = 2$. Our work is original as it deals with other groups : we indeed look for a classification of isomorphism classes of modulo p representations of connected reductive groups that are defined, quasi-split and of rank 1 over F. The main place is devoted to the special linear group $SL_2(F)$ and to the unramified quasi-split unitary group in three variables $U(2,1)(E/F)$ as they lead to more detailed statements.

We first study the case of $SL_2(F)$, where we obtain a complete classification (up to isomorphism) of the irreducible smooth representations (with an extra-assumption of admissibility when F is of charateristic 2) with coefficients in a fixed algebraic closure $\overline{\mathbb{F}}_p$ of the residue class field of F. It splits into two kinds of representations : the *supersingular* representations and the non-supersingular ones. We prove that supersingularity is equivalent to supercuspidality, what leads to an explicit description of the non-supersingular representations for any F. When $F = \mathbb{Q}_p$, we manage to compute the supersingular representations. It allows us to define a modulo p semi-simple Langlands correspondence for $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, i.e. a "natural" bijection between isomorphism classes of irreducible smooth representations of $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ over $\overline{\mathbb{F}}_p$ and some isomorphism classes of projective 2-dimensional Galois representations over $\overline{\mathbb{F}}_p$. An important property of our results is that they are compatible (through the restriction functors) with Barthel-Livné and Breuil's statements on modulo p representations of $GL_2(F)$.

We then adapt the methods that have been used in the study of the $SL_2(F)$ case to try to understand the irreducible admissible smooth representations over $\overline{\mathbb{F}}_p$ of the quasi-split unitary group in three variables $\mathbb{G} := U(2,1)(E/F)$, where E is an unramified separable quadratic field extension of F. We prove that we can list these representations in four families (up to isomorphism) and that, up to an injectivity property which is assumed to be true, an irreducible admissible smooth representation is supersingular if, and only if, it is supercuspidal (with the meaning given in the complex theory).

What we did since then suggests that a natural framework to get the kind of results we explained above is the setting of mod p representations of a connected reductive group G defined, quasi-split and of rank 1 over F. This thesis contains a partial generalization of the statements we proved for $SL_2(F)$ and $U(2,1)(E/F)$, namely the exhaustive description of non-supercuspidal irreducible smooth representations of G over $\overline{\mathbb{F}}_p$, and the almost complete computation of their isomorphism classes. More precisely, we prove that these representations split into three families : characters, representations of the *principal series* and representations of the *special series*. We also prove that there's no intertwinning between two distinct representations that belong to the same family among characters or representations of the principal series, and we give a necessary condition to the existence of an intertwinning between two distinct representations of the special series.

We finally come back to the mod p representation theory for $SL_2(F)$ in the last part of this thesis as we compute the isomorphism classes of finite-dimensional simple right modules on the Hecke-Iwahori pro-p-algebra. This algebra naturally appears when one is interested in the smooth $\overline{\mathbb{F}}_p$-representations of $SL_2(F)$, as the subspace of invariants vectors under the action of the standard pro-p-Iwahori subgroup $I_S(1)$ of $SL_2(F)$ in such a representation is canonically endowed with a structure of right module over this algebra, and the understanding of this module leads to interesting informations about the representation it comes from. The results we get are the first step in the search for an equivalence of categories similar to the one built by Ollivier for mod p representations of $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, and they prove in particular that the $I_S(1)$-invariants functor provides a bijection between (isomorphism classes of) finite-dimensional simple right modules over the Hecke-Iwahori pro-p-algebra and (isomorphism classes of) irreductible smooth representations of $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ over $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Keywords : p-adic reductive groups of rank 1, mod p Langlands correspondence, Bruhat-Tits trees, Hecke-Iwahori algebras.

A Ayoub et Brahim Abdellatif

Remerciements

Je souhaite avant tout adresser à Guy Henniart mes remerciements les plus chaleureux pour avoir accepté de diriger mon mémoire de Master 2, puis cette thèse de doctorat. Je lui suis profondément reconnaissante de m'avoir proposé un sujet de recherche aussi passionnant, puis d'avoir partagé avec moi une partie de ses connaissances encyclopédiques et de son temps précieux pour répondre inlassablement à mes innombrables questions par des réponses d'une précision et d'une richesse impressionnantes. Sa vision élégante et sa compréhension profonde des mathématiques, la manière dont il aborde une question nouvelle et relie des objets venant d'univers totalement différents pour obtenir de nouveaux résultats, ainsi que ses méthodes de travail resteront pour moi des sources inépuisables d'inspiration. C'est une chance unique de travailler avec un directeur de thèse qui dispose non seulement de talents mathématiques et d'une puissance de travail immenses, mais qui est de plus d'une gentillesse, d'une disponibilité et d'une humilité extraordinaires, et je lui sais gré de me l'avoir accordée.

Je tiens ensuite à remercier Jean-François Dat et Ariane Mézard pour avoir accepté la tâche hautement chronophage de rapporter cette thèse et pour leurs remarques fort constructives qui ont permis l'amélioration de ce manuscrit. J'aimerais en même temps exprimer ma gratitude envers Ariane, qui ne mesure peut-être pas tout ce que cette thèse lui doit : lors de ma première année de magistère, j'ai eu la chance d'effectuer mon projet bibliographique sous sa direction. Ce fut ma première rencontre avec le monde p-adique, ainsi qu'avec une personne formidable dont les explications furent toujours très claires (quoi qu'elle en dise) et avec qui ce fut un vrai plaisir de travailler. Les nombreuses discussions que nous avons eues depuis furent toujours très intéressantes et riches en enseignements, tant professionnellement que personnellement, et je la remercie aussi pour cela.

C'est un grand honneur que me font Christophe Breuil, Laurent Clozel et Marie-France Vignéras en acceptant d'être membres de mon jury de soutenance, et je les en remercie vivement. J'aimerais plus particulièrement remercier Laurent Clozel car il m'a plus ou moins volontairement beaucoup appris : tout d'abord par la qualité de ses cours, auxquels j'ai eu l'occasion de participer durant plusieurs années et qui constituent à présent une part non négligeable de mon bagage mathématique, mais aussi lors de ces trois dernières années où j'ai assuré les travaux dirigés de son cours d'introduction à l'arithmétique et à la théorie des groupes à destination des étudiants de licence. Ce fut extrêmement agréable et enrichissant de travailler en sa compagnie et de bénéficier de son expérience.

Paul Broussous et Vincent Sécherre furent parmi les premiers à montrer un intérêt pour mon travail et à m'encourager dans sa poursuite. Les discussions que j'ai pu avoir avec eux m'ont toujours beaucoup apporté, et je les remercie très vivement d'avoir accompagné de la sorte mes premiers pas dans le monde de la recherche. J'adresse aussi un grand merci à Rachel Ollivier et à Shaun Stevens pour leur enthousiasme communicatif et pour plusieurs discussions très stimulantes sur certains points de cette thèse. Je remercie enfin Laure Blasco et Alberto Minguez pour m'avoir gentiment expliqué un certain nombre de choses sur les groupes unitaires à l'époque où ces objets ne m'étaient absolument pas familiers [1].

Depuis mon arrivée à Orsay en Septembre 2004, j'ai eu la chance de rencontrer un nombre incalculable de personnes venant d'horizons mathématiques et géographiques très divers. Chacune de ces rencontres fut importante, mais certaines eurent une saveur plus particulière et ont donné lieu à bien plus qu'un simple échange professionnel. Agnès, Benjamin, Camille, Chloé, Cyril, Eugen, Gabriel, Guillaume, Inder, Isabelle, Ke, Lola, Miaofen, Oana, Peter, Paul-James, Richard, Stefano, Timo, Tony, Vladimir, Yong Qi et Yongquan, c'est à vous que je pense en écrivant ces mots. Je vous remercie pour toutes les discussions que nous avons pu avoir, ma-

1. Mais je n'oserais tout de même pas prétendre qu'ils le sont désormais...

thématiques ou non, en français, anglais, allemand ou japonais, et pour votre amitié et votre présence dans les bons comme dans les mauvais moments.

Lors de mes études supérieures, j'ai eu la chance d'avoir eu plusieurs excellents professeurs de mathématiques. Les remercier personnellement serait bien trop long, mais il en est tout de même trois que je n'ai pas encore mentionnés et que j'aimerais distinguer, car autant que leur enseignement, ce sont leurs conseils et leur exemple qui m'ont en partie permis d'arriver à ce niveau. Je pense tout d'abord à mes deux professeurs de mathématiques spéciales, Catherine Lepez et Jean Voedts, dont les cours de mathématiques furent un délice, bien que dispensés dans un contexte qui privilégiait par essence l'assimilation plutôt que la compréhension profonde des énoncés et des théories. Ils m'ont tous deux vivement conseillé de poursuivre des études de mathématiques en allant à Orsay, ce qui est l'une des meilleures recommandations que l'on m'ait faite à ce jour, et c'est toujours un grand plaisir de rentrer leur rendre une petite visite.

Je pense ensuite à Pierre Lorenzon, pour qui j'ai une grande admiration et qui fut l'un des premiers à m'encourager à poursuivre dans la voie mathématique qui me plaisait le plus. L'avoir eu comme enseignant durant plusieurs années est l'une des meilleures choses qui me soit arrivée jusqu'alors dans ma formation mathématique, et je le remercie vivement pour tout le temps qu'il a bien voulu consacrer à me fournir moult explications dans bien des domaines, ainsi que pour son humanité hors du commun.

Plus généralement, je souhaite remercier le laboratoire de mathématiques d'Orsay pour m'avoir permis de bénéficier de conditions de travail idéales depuis mon arrivée en magistère, tant par la qualité des cours qui y sont dispensés par des professeurs de premier ordre, que par les conditions matérielles dont j'ai pu profiter durant ma thèse. Disposer d'une bibliothèque de recherche aussi fournie et aussi calme, d'un bureau où ranger ses affaires, et d'un financement pour partir en conférences rencontrer d'autres chercheurs de premier plan sont des atouts considérables. Je remercie notamment le personnel de la bibliothèque Jacques Hadamard pour son extrême disponibilité et pour sa gentillesse, ainsi que Pascal Ferrier pour les mêmes raisons.

Je terminerai ces remerciements en rendant hommage à six personnes sans qui la vie au département de mathématiques d'Orsay ne serait ni aussi simple ni aussi agréable. Par leur efficacité redoutable, leur générosité sans limite et leur extrême gentillesse, elles m'ont plus d'une fois évité de perdre du temps et du calme face aux méandres de l'administration, et ont ensoleillé ces années passées à naviguer entre les bâtiments 336, 425, 430 et 450. Christine, Denise, Francine, Françoise, Marie-Christine et Valérie, c'est de vous dont il est ici question : ce fut un immense plaisir de vous côtoyer et d'apprendre à vous connaître, et pour tout ce que vous avez bien voulu faire pour moi, je vous adresse du fond du coeur un immense MERCI.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Quelques motivations historiques

En Juin 1993, Andrew Wiles met la communauté mathématique internationale en émoi lorsqu'il annonce avoir démontré le cas semi-stable de la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil [1], qui permet en particulier de prouver le grand théorème de Fermat : « Il n'existe pas de solution non triviale à l'équation $x^n + y^n = z^n$ lorsque n est un entier strictement supérieur à 2.» L'idée qui sous-tend sa démonstration consiste à étudier une courbe elliptique $\mathcal{E}$ via les représentations galoisiennes qui lui sont associées : pour chaque entier premier ℓ, on dispose d'une représentation du groupe de Galois absolu $G_{\mathbb{Q}} := Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ à coefficients dans l'ensemble des points de ℓ-torsion de $\mathcal{E}$.

Pour comprendre la représentation modulo ℓ de $G_{\mathbb{Q}}$ ainsi obtenue, on peut tout d'abord essayer de comprendre les représentations qu'elle définit par restriction aux groupes de décomposition de $G_{\mathbb{Q}}$ en chaque place non archimédienne. On obtient ainsi, pour chaque entier premier p, une représentation modulo ℓ du groupe de Galois absolu $Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_p)$ d'un corps local F_p non archimédien ayant pour caractéristique résiduelle p. Autrement dit, nous aimerions pouvoir décrire les représentations modulo ℓ et, par un argument issu de la théorie des déformations, ℓ-adiques du groupe de Galois absolu d'un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p. Notons que disposer de ce type de résultats permet de résoudre d'autres questions tout aussi importantes en arithmétique, telles les conjectures de Serre concernant les représentations galoisiennes de dimension 2 sur des corps finis de caractéristique positive.

Rappelons maintenant qu'à la fin des années 1960, Robert Langlands a proposé un ensemble de conjectures, connues sous le nom de Conjectures de Langlands locales, qui généralisent la théorie du corps de classes local en établissant une correspondance entre les représentations complexes du groupe de Weil d'un corps local et les représentations lisses irréductibles de certains groupes algébriques définis sur ledit corps local. Elles ont par la suite inspiré des conjectures analogues pour des représentations à coefficients dans des extensions de corps de nombres ℓ-adiques (« conjectures de Langlands ℓ-adiques ») ou dans des corps finis de caractéristique ℓ (« conjectures de Langlands modulo ℓ »).

Jusqu'à présent, les groupes qui ont suscité le plus d'intérêt sont les groupes linéaires généraux GL_n, $n \geq 2$, définis sur un corps local non archimédien F complet pour une valuation discrète, de caractéristique résiduelle $p > 0$ et de corps résiduel fini. Dans ce cas, les conjectures de Langlands ℓ-adiques ont été démontrées par Laumon-Rapoport-Stuhler [LRS] lorsque F est de caractéristique positive $p \neq \ell$, puis par Harris-Taylor [HT] et Henniart [He] lorsque F est

1. Que l'on peut énoncer de manière condensée sous la forme suivante : *Toute courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ est modulaire.*

de caractéristique nulle. Vignéras [V0] a ensuite prouvé l'existence de correspondances de Langlands modulo ℓ compatibles (via « réduction modulo ℓ ») aux correspondances de Langlands ℓ-adiques sus-citées (toujours sous l'hypothèse $\ell \neq p$).

Les choses se gâtent lorsque l'on considère le cas où $\ell = p$, car apparaissent alors de véritables obstructions à l'application des méthodes classiques (comme l'absence d'une mesure de Haar, ou encore le comportement très particulier des pro-p-groupes lorsque l'on travaille en caractéristique p). A l'heure actuelle, le seul cas à peu près compris est celui de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$: les travaux de Barthel-Livné [BL94, BL95] et de Breuil [Br] ont mené à la définition d'une correspondance de Langlands semi-simple modulo p, tandis que l'œuvre de Berger-Breuil [BB] et de Colmez [Co] a permis d'établir une correspondance de Langlands p-adique. Si l'on s'intéresse à $GL_2(F)$ avec F une extension non triviale de $\mathbb{Q}_p$ ou, pire, à $GL_n(F)$ avec $n \geq 3$, on dispose de bien peu de résultats, même dans le cas modulo p qui semble a priori plus accessible que le cas p-adique. La faute en est à une famille très mystérieuse de représentations détectées par Barthel-Livné [BL94] pour GL_2, puis généralisées par Herzig [Her2] pour GL_n et Abe [Abe] pour les groupes réductifs connexes définis et déployés sur F, appelées représentations *supersingulières* et sur lesquelles on ne sait essentiellement rien dire, en dehors du cas de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ où elles sont complètement décrites grâce aux travaux de Breuil [Br]. Depuis les travaux de Paškūnas [Pas], Breuil-Paškūnas [BP] et Hu [Hu], on sait seulement que la situation pour GL_2 semble être profondément différente lorsque $F = \mathbb{Q}_p$ et lorsque $F \neq \mathbb{Q}_p$.

Cette thèse est une contribution à l'étude des représentations modulo p des groupes réductifs connexes p-adiques quasi-déployés de rang 1 sur leur corps de définition. Son point de départ réside dans l'envie de comprendre les représentations irréductibles modulo p de $SL_2(F)$, pour lesquelles n'étaient a priori pas attendues de grosses différences comparativement au cas des représentations modulo p de $GL_2(F)$. Ce fut donc une petite surprise de voir apparaître de nouveaux phénomènes (notamment de réductibilité) y compris dans le cas où $F = \mathbb{Q}_p$. Ces nouveautés proviennent majoritairement de la perte d'un élément phare de la théorie des représentations modulo p et p-adiques de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, à savoir l'élément antidiagonal $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$.

1.2 Présentation des résultats obtenus

Les résultats présentés dans cette thèse s'articulent autour de deux axes :

- un axe en profondeur, qui consiste à comprendre le mieux possible la théorie modulo p et p-adique pour $SL_2(F)$, et à la relier aux théories déjà existantes pour $GL_2(F)$ en utilisant notamment l'opérateur de restriction des représentations de $GL_2(F)$ à $SL_2(F)$;
- un axe en hauteur, dont la philosophie consiste à aller chercher les structures générales qui sous-tendent les arguments développés dans les preuves de nos résultats sur $SL_2(F)$ afin de les généraliser à de plus grandes familles de groupes algébriques. Le cas du groupe unitaire quasi-déployé $U(2,1)(E/F)$ avec E/F extension quadratique séparable non ramifiée est intéressant car c'est le premier cas de groupe quasi-déployé mais non déployé qui est traité dans cette théorie, et c'est son étude qui nous a permis de comprendre qu'une grande partie de nos arguments ne reposent que sur des propriétés communes aux groupes réductifs connexes (quasi-déployés) de rang 1 sur leur corps de définition.

Dans la suite de cette section, on fixe un entier premier p et l'on désigne par F un corps local non archimédien complet pour une valuation discrète, de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel fini. On note $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F, $\mathfrak{p}_F$ son idéal maximal et k_F son corps résiduel, dont on note $q = p^f$ le cardinal et dont on fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_p$. On choisit une fois pour toutes une uniformisante ϖ_F de F et un plongement $\iota : k_F \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$. Pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, on désigne par $\mu_\lambda : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ le caractère lisse non ramifié [2] qui envoie ϖ_F sur λ.

Sauf mention contraire explicite, toutes les représentations considérées seront lisses [3] et à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$.

1.2.1 Les fondations : le groupe déployé $SL_2(F)$

L'origine de cette thèse réside dans la volonté de comprendre les représentations lisses irréductibles de $SL_2(F)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ et les différences éventuelles qui apparaissent avec la théorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles de $GL_2(F)$, ce qui explique pourquoi les résultats à ce sujet tiennent une place prépondérante dans ce manuscrit. Nous avons travaillé dans deux directions complémentaires : nous avons tout d'abord tenté d'obtenir une classification « à la Barthel-Livné » des représentations lisses irréductibles de $SL_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et de préciser les énoncés obtenus dans le cas $F = \mathbb{Q}_p$ à la manière de ce qui a été effectué par Breuil pour les représentations lisses irréductibles de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. Ceci est l'objet du Chapitre 3, dont les résultats principaux sont énoncés dans le premier paragraphe de cette sous-section. Nous nous sommes alors intéressée à l'existence éventuelle d'une équivalence de catégories à partir du « foncteur des invariants sous le pro-p-Iwahori de $SL_2(F)$ », dans l'espoir d'obtenir des résultats analogues à ceux qui ont été démontrés par Ollivier pour les représentations modulo p de $GL_2(F)$. Pour cela, il nous a fallu commencer par comprendre les modules (à droite) simples sur la pro-p-algèbre de Hecke-Iwahori de $SL_2(F)$, ce qui est la raison d'être du Chapitre 6 dont les résultats principaux sont rappelés dans le second paragraphe de cette sous-section.

Avant d'aller plus loin, nous introduisons quelques notations. Nous posons $G_S := SL_2(F)$, dont $K_0 := SL_2(\mathcal{O}_F)$ est un sous-groupe ouvert compact maximal, et dont le groupe B_S des matrices triangulaires supérieures est un sous-groupe de Borel de radical unipotent noté U. On désigne par T_S le tore déployé des matrices diagonales de G_S, de sorte que l'on a $B_S = T_S U = U T_S$. On note I_S le sous-groupe d'Iwahori standard de G_S et $I_S(1)$ son pro-p-radical, appelé pro-p-sous-groupe d'Iwahori standard de G_S. L'application de réduction modulo ϖ_F définit alors un isomorphisme du groupe quotient $I_S/I_S(1)$ sur le groupe $T_S(k_F) \simeq k_F^\times$ des matrices diagonales du groupe fini $SL_2(k_F)$.
De même, on pose $G := GL_2(F)$, dont K est (à conjugaison près) l'unique sous-groupe ouvert compact maximal, et dont le groupe B des matrices triangulaires supérieures est un sous-groupe de Borel de radical unipotent U. On désigne par T le tore déployé des matrices diagonales de G, de sorte que l'on a aussi $B = TU = UT$. On note I le sous-groupe d'Iwahori standard de G et $I(1)$ son pro-p-radical, aussi appelé pro-p-sous-groupe d'Iwahori de G. L'application de réduction modulo ϖ_F définit alors un isomorphisme du groupe quotient $I/I(1)$ sur le groupe $T(k_F) \simeq k_F^\times \times k_F^\times$ des matrices diagonales du groupe fini $GL_2(k_F)$.

On introduit enfin les éléments suivants de G et de G_S :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_F \end{pmatrix} \ , \ w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ t := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi_F & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} \varpi_F^{-1} & 0 \\ 0 & \varpi_F \end{pmatrix} \ , \ w_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

2. i.e. dont la restriction à $\mathcal{O}_F^\times$ est triviale.
3. Ce qui signifie que le stabilisateur de chaque vecteur est un sous-groupe ouvert.

Classification des représentations modulo p de $SL_2(F)$

Pour obtenir une classification des représentations lisses irréductibles de $SL_2(F)$, nous avons travaillé en deux étapes : nous avons tout d'abord décortiqué les représentations obtenues comme sous-quotients d'induites paraboliques de $SL_2(F)$, puis nous avons essayé de décrire les représentations manquantes en utilisant les propriétés de la restriction de $GL_2(F)$ à $SL_2(F)$ et la description des représentations lisses irréductibles de $GL_2(F)$ donnée dans [BL94, BL95] ainsi que le complément substantiel apporté par [Br] lorsque $F = \mathbb{Q}_p$.
Commençons par la première étape, qui consiste à comprendre les sous-quotients irréductibles des représentations de la forme $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi)$ avec χ un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de B_S. Pour ce faire, nous avons repris la méthode classique qui consiste à étudier la restriction au sous-groupe de Borel B_S de la représentation $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi)$. Nous avons ainsi directement obtenu la classification recherchée, avec un petit supplément concernant la structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi)$.

Théorème 1.2.1. *Soit $\chi : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ un caractère lisse.*

1. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi)$ est de longueur 2 et possède le caractère χ comme unique sous-quotient de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Il est indécomposable si et seulement si χ n'est pas le caractère trivial. Dans le cas contraire, il est totalement décomposé.*
2. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi)$ est irréductible si et seulement si χ n'est pas le caractère trivial $\mathbf{1}$.*
3. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ est indécomposable de longueur 2, avec le caractère trivial comme sous-objet et la représentation de Steinberg $St_S := \dfrac{\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$ comme quotient.*
4. *Il n'existe pas d'isomorphisme entre sous-quotients d'induites paraboliques à partir de $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses distincts de B_S.*

Les représentations $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi)$ avec $\chi \neq \mathbf{1}$ sont alors appelées représentations *de la série principale* tandis que la représentation de Steinberg est appelée représentation *de la série spéciale*. En rappelant qu'une représentation lisse irréductible de G_S est dite *supercuspidale* lorsqu'elle n'est isomorphe à aucun sous-quotient d'une représentation de la forme $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi)$ avec $\chi : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ caractère lisse, on peut résumer les trois derniers points du Théorème 1.2.1 par la formule suivante : *les $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles non supercuspidales de G_S se partitionnent en trois familles : le caractère trivial, les représentations de la série principale et la représentation de la série spéciale. En outre, il n'existe pas d'entrelacement entre deux objets distincts d'une même famille.*

On détermine ensuite les espaces de vecteurs $I_S(1)$-invariants de ces représentations et l'on démontre que la restriction de G à G_S établit une relation forte entre représentations lisses non supercuspidales de G_S et représentations lisses non supercuspidales de G puisqu'elle permet de déduire du Théorème 1.2.1 qu'une représentation lisse non supercuspidale de G est entièrement déterminée (à torsion par un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de G près) par sa restriction à G_S. Plus précisément, on prouve le résultat suivant.

Théorème 1.2.2. *Soit V une représentation lisse irréductible non supercuspidale de G_S.*

1. *L'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de V est de dimension 2 si V est une représentation de la série principale, et de dimension 1 sinon.*
2. *A torsion par un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de G près, il existe une et une seule représentation lisse irréductible non supercuspidale de G dont la restriction à G_S est isomorphe à V.*

Signalons que l'on démontre dans le même temps que le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module réductible $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ est engendré par l'espace de ses vecteurs $I_S(1)$-invariants, qui est de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, et que l'on calcule les composantes (I_S, χ)-isotypiques [4] de chacun des sous-quotients de nos induites paraboliques (Théorème 3.4.13). On obtient notamment ainsi une condition nécessaire et suffisante pour qu'une représentation lisse de la forme $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi)$ admette des vecteurs I_S-invariants non nuls.

Pour attraper les autres représentations lisses irréductibles de $SL_2(F)$, nous avons suivi les idées développées par Barthel-Livné [BL94] et commencé par étudier les algèbres de Hecke sphériques relatives aux sous-groupes ouverts compacts maximaux de G_S. Il faut cependant faire un peu attention car, à la différence des sous-groupes ouverts compacts maximaux de G qui sont tous conjugués sous l'action de G, les sous-groupes ouverts compacts maximaux de G_S se répartissent en deux orbites sous l'action par conjugaison de G_S : celle de K_0 et celle de $K_1 := \alpha K_0 \alpha^{-1}$. Néanmoins, nous démontrons par la suite que le choix de l'un ou l'autre de ces sous-groupes compacts maximaux n'a pas de répercussion sur les résultats obtenus, ce qui explique pourquoi l'on peut se limiter à l'étude des objets attachés à K_0.
On rappelle que si σ est une représentation lisse irréductible d'un sous-groupe ouvert $\mathcal{K}$ de G_S et que si $(g, v) \in G_S \times \sigma$, on désigne par $[g, v]$ l'élément de $\mathrm{ind}_{\mathcal{K}}^{G_S}(\sigma)$ ayant pour support $\mathcal{K}g^{-1}$ et pour valeur v en g^{-1}. On sait par ailleurs décrire explicitement les classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles de K_0 et de K_1, qui sont dans chaque cas paramétrées par les f-uplets $\vec{r} \in \{0, \ldots, p-1\}^f$. En particulier, un système de représentants des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles de K_0 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est donné par la famille $\{\sigma_{\vec{r}},\ \vec{r} \in \{0, \ldots, p-1\}^f\}$ où $\sigma_{\vec{r}}$ désigne la représentation lisse irréductible de K_0 obtenue par inflation de la représentation $\mathrm{Sym}^{\vec{r}}(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ du groupe fini $SL_2(k_F)$, dont la définition est rappelée dans la Section 3.5.1.

On dispose alors de l'énoncé suivant, qui affirme que les algèbres de Hecke sphériques attachées aux sous-groupes compacts maximaux de G_S sont des algèbres de polynômes à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ en un opérateur de Hecke explicite (et sont donc en particulier commutatives).

Théorème 1.2.3. *Soient $\mathcal{K}$ un sous-groupe ouvert compact maximal de G_S et σ une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathcal{K}$.*

1. *L'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}(G_S, \mathcal{K}, \sigma) := \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{\mathcal{K}}^{G_S}(\sigma))$ est une algèbre de polynômes à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ en un opérateur de Hecke τ_σ explicitement déterminé.*
2. *Supposons que $\mathcal{K} = K_0$ et que $\sigma = \sigma_{\vec{r}}$. Par abus de notation, on note encore $\sigma_{\vec{r}}$ la représentation lisse irréducible de K sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ obtenue par inflation de la représentation $\mathrm{Sym}^{\vec{r}}(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ du groupe fini $GL_2(k_F)$. Notons $T_{\vec{r}} \in \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G]}(\mathrm{ind}_K^G(\sigma_{\vec{r}}))$ l'opérateur de Hecke isolé par Barthel-Livné dans [BL94, Proposition 8]. Le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_r)$ est alors muni d'une action de $T_{\vec{r}}^2$ qui vérifie :*

$$\forall\ g \in G_S,\ \forall\ v \in \sigma_r,\ T_{\vec{r}}^2([g, v]) = \tau_\sigma([g, v])\ .$$

En notant $\tau_{i,\vec{r}}$ l'opérateur de Hecke introduit dans le Théorème 1.2.3 pour $\mathcal{K} = K_i$ et σ qui correspond au paramètre $\vec{r}$, on peut définir des représentations conoyaux $\pi_i(\vec{r}, \lambda)$ indexées par les paires $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \ldots, p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$ en posant :

$$\forall\ (\vec{r}, \lambda) \in \{0, \ldots, p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p, \pi_i(\vec{r}, \lambda) := \mathrm{Coker}(\tau_{i,\vec{r}} - \lambda)\ .$$

On rappelle [5] que si $g \in G$ et si π est une représentation lisse de G_S, on désigne par π^g la représentation g-conjuguée de π. On démontre alors le résultat suivant, qui permet de comprendre la plupart de ces représentations conoyaux.

4. On rappelle que la composante (I_S, χ)-isotypique d'une représentation π est l'ensemble des vecteurs de π sur lesquels I_S agit à travers le caractère χ.
5. Et l'on renvoie à la Section 2.1.3 du Chapitre 2 pour plus de détails.

Théorème 1.2.4. *Soit* $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \dots p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$ *une paire de paramètres.*

1. *La conjugaison par* α *induit un isomorphisme de* $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$*-modules :*
$$\pi_1(\vec{r}, \lambda) \simeq (\pi_0(\vec{r}, \lambda))^\alpha \ .$$
2. *Si* λ *est non nul et si* $(\vec{r}, \lambda) \neq (\vec{0}, 1)$*, le* $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$*-module* $\pi_0(\vec{r}, \lambda)$ *est isomorphe à* $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_{\lambda^{-1}} \iota^{\overrightarrow{p-1-r}})$*. En particulier,* $\pi_0(\vec{r}, \lambda)$ *est une représentation irréductible de* G_S *lorsque* $(\vec{r}, \lambda) \notin \{(\vec{0}, 1), (\overrightarrow{p-1}, 1)\}$*.*
3. *Le* $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$*-module* $\pi_0(\vec{0}, 1)$ *est une extension non scindée du caractère trivial* $\mathbf{1}$ *par la représentation de Steinberg* St_S*.*

Cet énoncé nous permet de prouver que toute représentation lisse irréductible supersingulière relativement à K_i, i.e. quotient d'une représentation conoyau de la forme $\pi_i(\vec{r}, 0)$, est nécessairement supercuspidale (Corollaire 3.1.5). Pour démontrer l'implication réciproque, nous devons nous limiter à travailler avec les représentations lisses de G_S satisfaisant à l'hypothèse suivante.
Hypothèse A : La représentation considérée admet une paramétrisation possible par rapport à K_0.
Nous montrons que cette hypothèse est raisonnable et peu contraignante, puisqu'elle est satisfaite par toute représentation lisse irréductible de G_S lorsque F n'est pas de caractéristique 2, et par toute représentation lisse irréductible admissible de G_S quelle que soit la valeur de la caractéristique de F. L'intérêt de cette hypothèse est qu'elle nous permet de démontrer l'équivalence entre les notions de supersingularité relativement à K_i et de supercuspidalité, ce qui prouve notamment que la notion de supersingularité est indépendante du choix du sous-groupe ouvert compact maximal K_i.

Théorème 1.2.5. *Soit* $i \in \{0, 1\}$ *et soit* π *une représentation lisse irréductible de* G_S *satisfaisant à l'Hypothèse A. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) π *est supercuspidale ;*

ii) π *est supersingulière relativement à* K_i*.*

On peut donc parler de représentation supersingulière sans préciser de choix de sous-groupe ouvert compact maximal, ce qui permet finalement d'obtenir l'énoncé de classification suivant des représentations lisses irréductibles (admissibles) de G_S.

Théorème 1.2.6.
1. *Les classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles admissibles de* $SL_2(F)$ *à coefficients dans* $\overline{\mathbb{F}}_p$ *se partitionnent en quatre familles :*
   (a) le caractère trivial $\mathbf{1}$ *;*
   (b) la représentation de Steinberg St_S *;*
   (c) les représentations de la forme $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi)$ *avec* $\chi : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ *caractère lisse non trivial ;*
   (d) les représentations supersingulières.
2. *Cette classification est compatible (après restriction de* G *à* G_S*) avec la classification établie par Barthel-Livné pour les représentations lisses irréductibles à caractère central de* G *sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$*.*
3. *On peut supprimer l'hypothèse d'admissibilité lorsque* F *n'est pas de caractéristique* 2*.*

En particulier, cet énoncé fournit la classification des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$. Dans ce cas très particulier, on sait décrire complètement nos représentations supersingulières grâce aux résultats de Breuil concernant les représentations supersingulières de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et aux propriétés de la restriction de G à G_S.

Théorème 1.2.7. *1. A isomorphisme près, il existe p représentations supersingulières de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ notées $\pi_0, \ldots, \pi_{p-1}$.*

2. Le $\overline{\mathbb{F}}_p[SL_2(\mathbb{Q}_p)]$-module porté par une représentation supersingulière de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ est totalement décomposé de longueur 2. Plus précisément, on a (avec les notations de [Br]) :

$$\forall\ r \in \{0, \ldots, p-1\},\ \pi(r, 0, \mathbf{1})|_{SL_2(\mathbb{Q}_p)} \simeq \pi_r \oplus \pi_{p-1-r}\ .$$

3. Pour tout $r \in \{0, \ldots, p-1\}$, l'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de π_r est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et l'on a $\pi_r^\alpha \simeq \pi_{p-1-r}$.

Une conséquence importante de ce théorème est qu'il nous permet de définir un analogue pour $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ de la correspondance de Langlands locale modulo p définie par Breuil pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ [Br, Section 4.2] qui lui est compatible par restriction à $SL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Définition 1.2.8. On appelle *correspondance de Langlands locale semi-simple modulo p pour* $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ la bijection entre les classes d'isomorphisme des représentations projectives de dimension 2 de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et certains paquets de classes d'isomorphisme de représentations lisses semi-simples de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ définie par les flèches suivantes :

– pour tout entier $r \in \{0, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$, on pose

$$proj \circ \mathrm{Ind}(\omega_2^{r+1}) \longleftrightarrow \{\pi_r\ ;\ \pi_{p-1-r}\}\ ;$$

– pour toute paire de paramètres $(r, \lambda) \in \{0, \ldots, r-1\} \times \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, on pose

$$proj \circ \begin{pmatrix} \varepsilon^{r+1}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \leftrightarrow \pi_0(r, \lambda)^{ss} \oplus \pi_0([p-3-r], \lambda^{-1})^{ss}\ .$$

Il est intéressant de remarquer que notre correspondance fait apparaître des paquets de représentations supersingulières qui sont le plus souvent de taille 2 là où la correspondance qui existe pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ fait apparaître des singletons.

Classification des modules simples de dimension finie sur la pro-p-algèbre de Hecke-Iwahori

Une propriété fondamentale de la théorie des représentations lisses modulo p est la suivante : toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse non nulle d'un pro-p-groupe admet des vecteurs invariants non nuls. Ceci assure en particulier que toute représentation lisse non nulle de G_S admet des vecteurs invariants non nuls sous l'action du pro-p-Iwahori standard $I_S(1)$ de G_S. Par ailleurs, si π est une représentation lisse non nulle de G_S, la réciprocité de Frobenius compacte permet de munir l'espace $\pi^{I_S(1)}$ d'une structure naturelle de module à droite sur la pro-p-algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_S^1 := \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S(1)}^{G_S}(\mathbf{1}))$. Un autre angle d'approche dans l'étude des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses de G_S consiste donc à étudier la structure des $\mathcal{H}_S^1$-modules à droite puis à repérer ceux d'entre eux qui correspondent à des espaces de vecteurs $I_S(1)$-invariants de représentations lisses de G_S.
L'utilisation de ce point de vue s'est révélée être très fructueuse dans le cadre de la théorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses de G puisqu'il a permis à Ollivier [O3] de démontrer que l'application envoyant une représentation lisse de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur le sous-espace de ses vecteurs $I(1)$-invariants provient d'un foncteur (dit « des $I(1)$-invariants ») qui établit une équivalence de catégories entre la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ engendrées par leurs vecteurs $I(1)$-invariants et la catégorie des modules à droite sur la pro-p-algèbre de Hecke-Iwahori $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[GL_2(\mathbb{Q}_p)]}(\mathrm{ind}_{I(1)}^{GL_2(\mathbb{Q}_p)}(\mathbf{1}))$ associée à $GL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Pour comprendre la structure des $\mathcal{H}_S^1$-modules à droite simples et de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, il faut d'abord comprendre la structure de la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\mathcal{H}_S^1$. Nous montrons (Corollaire 6.3.47) que $\mathcal{H}_S^1$ se décompose en une somme directe de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres définies ci-après :

$$\mathcal{H}_S^1 \simeq \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_S^\star \oplus \bigoplus_{1<r<\frac{q-1}{2}} \widetilde{\mathcal{H}}_S(r) \ . \tag{1.1}$$

L'étude des $\mathcal{H}_S^1$-modules simples à droite se réduit donc à l'étude des modules simples à droite sur $\mathcal{H}_S$, $\mathcal{H}_S^\star$ et $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$. On commence par étudier la structure des modules à droite sur l'algèbre de Hecke-Iwahori standard $\mathcal{H}_S := \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\mathbf{1}))$. Ces modules possèdent un intérêt propre puisque l'espace des vecteurs I_S-invariants d'une représentation lisse arbitraire de G_S est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{H}_S$-module à droite. Le souci est que ce module peut être nul même lorsque la représentation ne l'est pas, ce qui explique pourquoi nous ne pouvons nous contenter de l'étude de ces modules.
Pour pouvoir déterminer les modules simples sur une algèbre, il est nécessaire de comprendre suffisamment la structure de l'algèbre en question. Dans cette optique, ainsi que dans celle d'une recherche future des liens existants entre les représentations modulo p de $SL_n(F)$ et de $GL_n(F)$ avec $n \geq 2$, nous avons tout d'abord étudié les relations qui existent entre les groupes de Weyl[6] attachés à GL_n et à SL_n. On rappelle qu'ils sont définis comme le quotient du normalisateur du tore diagonal dans $GL_n(F)$ (resp. dans $SL_n(F)$) par le groupe des éléments du tore diagonal à coefficients entiers. Si l'on note $W := N_G(T)/T(\mathcal{O}_F)$ le groupe de Weyl de $GL_n(F)$ et $W_S := N_G(T_S)/T_S(\mathcal{O}_F)$ celui de $SL_n(F)$, on peut vérifier que W fournit un système de représentants des doubles classes de $GL_n(F)$ modulo son sous-groupe d'Iwahori standard tandis que W_S fournit un système de représentants des doubles classes de $SL_n(F)$ modulo son sous-groupe d'Iwahori standard. Ceci nous permet de définir un morphisme de groupes injectif de W_S dans W dont l'image est décrite par le prochain énoncé, dans lequel on désigne par s_i la matrice de permutation associée à la transposition $(i, i+1)$ lorsque $i \in \{1, \ldots, n\}$, et par s_0 l'élément $t^{-1}s_1t$.

Lemme 1.2.9. *Soit $n \geq 2$.*
Notons W_{aff} le groupe de Weyl affine de W, défini comme le sous-groupe de W engendré par l'ensemble $\{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$, et I, I_S les sous-groupes d'Iwahori standard respectifs de $GL_n(F)$ et de $SL_n(F)$.

L'application qui envoie la double classe I_SgI_S sur la double classe IgI (avec $g \in SL_n(F)$) induit un morphisme de groupes injectif de W_S dans W dont l'image est égale au groupe de Weyl affine W_{aff}.

Rappelons maintenant que l'on définit la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke-Iwahori de $GL_n(F)$ comme l'algèbre $\mathcal{H}(G, I)$ engendrée par la famille $(T_w)_{w\in W}$ satisfaisant aux relations suivantes[7] :

– relations de tresse : si $w_1, w_2 \in W$ vérifient $\ell(w_1w_2) = \ell(w_1) + \ell(w_2)$, alors

$$T_{w_1w_2} = T_{w_1}T_{w_2} \ ;$$

– relations quadratiques : pour tout élément $s \in \{s_0, \ldots, s_n\}$, $T_s^2 = -T_s$.

On peut alors montrer [V2, Example 1] que la famille $(T_w)_{w\in W}$ est une base du $\overline{\mathbb{F}}_p$-module $\mathcal{H}(G, I)$. De la même manière, on définit respectivement l'algèbre de Hecke-Iwahori affine $\mathcal{H}_{aff}$ de $GL_n(F)$ et l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}(G_S, I_S)$ de $SL_n(F)$ en remplaçant W par W_{aff}

6. Nous attirons l'attention du lecteur sur le point de vocabulaire suivant : ce que nous appelons *groupe de Weyl* correspond à ce qui est appelé groupe d'Iwahori-Weyl par d'autres auteurs, tels Pappas et Rapoport [PR]. Ce n'est donc pas du *groupe de Weyl fini* isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ dont il est ici question.

7. On note ℓ l'application longueur usuelle sur le groupe de Weyl. Pour plus de détails concernant sa définition, nous invitons le lecteur à consulter la Section 6.2.1 du Chapitre 6.

et par W_S dans la définition de $\mathcal{H}(G, I)$. Les mêmes arguments que ceux de [V2] permettent cette fois de prouver que les familles $(T_w)_{w \in W_{aff}}$ et $(T_w)_{w \in W_S}$ sont des bases respectives des $\overline{\mathbb{F}}_p$-modules $\mathcal{H}_{aff}$ et $\mathcal{H}(G_S, I_S)$. Le Lemme 1.2.9 permet alors de relier les algèbres $\mathcal{H}_{aff}$ et $\mathcal{H}(G_S, I_S)$ comme suit.

Corollaire 1.2.10. *L'isomorphisme du Lemme 1.2.9 induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres de l'algèbre de Hecke-Iwahori de $SL_n(F)$ sur l'algèbre de Hecke-Iwahori affine de $GL_n(F)$.*

Remarquons ici que les calculs développés dans [V1, Appendix A.3] permettent de montrer que l'algèbre de Hecke-Iwahori standard $\mathcal{H}_S$ est isomorphe à l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}(G_S, I_S)$, ce qui justifie l'intérêt des résultats présentés ci-dessus dans le cadre de notre étude.

Nous supposons désormais, et jusqu'à la fin de cette sous-section, que $n = 2$ et nous reprenons en particulier les notations introduites dans la première partie de cette sous-section. Nous commençons par donner une description explicite très simple de l'algèbre de Hecke-Iwahori de $G_S = SL_2(F)$ ainsi que de son centre.

Théorème 1.2.11. *1. L'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}(G_S, I_S)$ est la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre engendrée par les opérateurs $\mathcal{T}_0 := T_{s_0}$ et $\mathcal{T}_1 := T_{s_1}$.*

2. Le centre de $\mathcal{H}(G_S, I_S)$ est égal à la sous-$\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre engendrée par l'opérateur $(\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1)^2$.

Nous possèdons ainsi tous les outils nécessaires au calcul des $\mathcal{H}(G_S, I_S)$-modules à droite simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, ce qui mène à la classification suivante.

Théorème 1.2.12. *Tout $\mathcal{H}(G_S, I_S)$-module (à droite) simple de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est isomorphe à un et un seul des $\mathcal{H}_S$-modules suivants :*

1. *un caractère $M_1^S(\epsilon_0, \epsilon_1)$ pour une unique paire $(\epsilon_0, \epsilon_1) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}$;*
2. *un module standard $M_2^S(\lambda)$ pour un unique scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ vérifiant $\lambda \neq 1$.*

On rappelle que le caractère $M_1^S(\epsilon_0, \epsilon_1)$ envoie l'opérateur $\mathcal{T}_i$ sur le scalaire ϵ_i, que l'on pose $M_1^S(\epsilon) := M_1^S(\epsilon, \epsilon)$ pour $\epsilon \in \{0, 1\}$, et que le module standard $M_2^S(\lambda)$ est défini comme le $\mathcal{H}(G_S, I_S)$-module $\overline{\mathbb{F}}_p x \oplus \overline{\mathbb{F}}_p y$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ où les actions des opérateurs $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_1$ dans la base $\{x, y\}$ sont respectivement données par les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons maintenant que l'on sait décrire les polynômes en les générateurs T, S de la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\mathcal{H}(G, I)$ exhibés dans [V1, Section 1.1] qui définissent, sous l'isomorphisme $\mathcal{H}(G_S, I_S) \simeq \mathcal{H}_{aff}$, les opérateurs $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_1$: ils sont respectivement égaux à $T^{-1}ST = TST^{-1}$ et à S. On peut donc déterminer facilement la structure de $\mathcal{H}(G_S, I_S)$-module des $\mathcal{H}(G, I)$-modules simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ dont la classification est donnée dans [V1, Theorem 1.2] [8] et obtenir ainsi l'énoncé suivant.

Théorème 1.2.13. *1. Pour toute paire de paramètres $(\tau, \epsilon) \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\times} \times \{0, 1\}$, le $\mathcal{H}(G_S, I_S)$-module porté par le caractère $M_1(\tau, \epsilon)$ de $\mathcal{H}(G, I)$ est isomorphe au caractère $M_1^S(\epsilon)$.*

2. Pour toute paire de paramètres $(a, z) \in \overline{\mathbb{F}}_p \times \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$, le $\mathcal{H}(G_S, I_S)$-module porté par le $\mathcal{H}(G, I)$-module standard $M_2(a, z)$ est isomorphe au module standard $M_2^S(a^2 z^{-1})$.

3. Pour tout paramètre $z \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$, le $\mathcal{H}(G_S, I_S)$-module porté par le $\mathcal{H}(G, I)$-module standard $M_2(0, z)$ est somme directe des deux caractères $M_1^S(-1, 0)$ et $M_1^S(0, -1)$.

8. Dont on reprend les notations dans le prochain énoncé.

Les résultats énoncés ci-avant nous permettent alors de déduire directement des travaux de Vignéras [V1, Section 6.5] la structure de $\mathcal{H}_S$-module portée par les espaces de vecteurs I_S-invariants des représentations lisses irréductibles non supercuspidales de G_S ayant des vecteurs I_S-invariants non nuls et, lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, d'avoir le même résultat pour les représentations supersingulières admettant des vecteurs I_S-invariants non nuls.

Théorème 1.2.14. *1. Le $\mathcal{H}_S$-module $\mathbf{1}^{I_S}$ est isomorphe au caractère $M_1^S(0)$.*

2. Le $\mathcal{H}_S$-module $(St_S)^{I_S}$ est isomorphe au caractère $M_1^S(-1)$.

3. Pour tout scalaire non nul $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\mathcal{H}_S$-module $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda)\right)^{I_S}$ est isomorphe au module standard $M_2^S(\lambda^{-1})$.

4. Supposons que $F = \mathbb{Q}_p$.

i) Le $\mathcal{H}_S$-module $\pi_0^{I_S}$ est isomorphe au caractère $M_1^S(-1, 0)$.

ii) Le $\mathcal{H}_S$-module $\pi_{p-1}^{I_S}$ est isomorphe au caractère $M_1^S(0, -1)$.

Par analogie avec la terminologie introduite pour les représentations modulo p de G_S, nous dirons qu'un $\mathcal{H}_S$-module simple est *supersingulier* s'il n'est pas isomorphe à un quotient d'un $\mathcal{H}_S$-module de la forme $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi)\right)^{I_S}$ avec $\chi : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse. Les résultats que nous avons démontrés jusqu'alors permettent d'obtenir l'énoncé suivant, qui est de bon augure dans notre quête d'une équivalence de catégories.

Théorème 1.2.15. *L'application qui envoie une représentation lisse non nulle de $SL_2(F)$ sur l'espace de ses vecteurs I_S-invariants établit une bijection entre :*

i) l'ensemble des classes d'isomorphisme des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ engendrées par leurs vecteurs I_S-invariants et l'ensemble des classes d'isomorphisme des modules simples sur l'algèbre de Hecke-Iwahori standard qui sont de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$;

ii) l'ensemble des classes d'isomorphisme des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles non supercuspidales *de $SL_2(F)$ engendrées par leurs vecteurs I_S-invariants et l'ensemble des classes d'isomorphisme des modules simples* non supersinguliers *sur l'algèbre de Hecke-Iwahori standard qui sont de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

On dispose en outre d'un résultat complémentaire qui affirme essentiellement que l'étude des modules portés par les espaces de vecteurs invariants sous le sous-groupe d'Iwahori standard ne voit pas les foncteurs de restriction (de G à G_S d'une part, et de $\mathcal{H}$ à $\mathcal{H}_S$ d'autre part).

Corollaire 1.2.16. *1. Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. Le $\mathcal{H}_S$-module obtenu par restriction du $\mathcal{H}$-module π^I est isomorphe au $\mathcal{H}_S$-module $(\pi|_{SL_2(\mathbb{Q}_p)})^{I_S}$.*

2. Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible non supersingulière de $GL_2(F)$. Le $\mathcal{H}_S$-module obtenu par restriction du $\mathcal{H}$-module π^I est isomorphe au $\mathcal{H}_S$-module $(\pi|_{SL_2(F)})^{I_S}$.

Nous passons maintenant à l'étude de la seconde algèbre de Hecke-Iwahori. Pour pouvoir la définir, nous devons supposer que q est différent de 2 et nous fixons un entier $r \in \{0, \dots [\frac{q-1}{2}]\}$ distinct de $\dfrac{q-1}{2}$ lorsque p est impair. L'algèbre $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$ des endormorphismes du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{ind}_{\mathrm{I_S}}^{\mathrm{G_S}}(\omega^{\mathrm{r}} \oplus \omega^{\mathrm{q-1-r}})$ est alors égale à $\begin{pmatrix} A_r & B_r \\ B_{q-1-r} & A_{q-1-r} \end{pmatrix}$ avec $A_r := \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r))$, $A_{q-1-r} := \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}[G_S](\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^{q-1-r}))$, $B_r := \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r), \mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^{q-1-r}))$ et $B_{q-1-r} := \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^{q-1-r}), \mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r))$.

Les $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres A_r et A_{q-1-r} sont toutes deux isomorphes à la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre commutative $\overline{\mathbb{F}}_p[X, Y]/(XY, YX)$, dont les $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères sont donnés par les deux familles suivantes, chacune étant paramétrée par $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$:

– les caractères $\mu_1(\lambda)$ qui envoient X sur λ et Y sur 0 ;
– les caractères $\mu_2(\lambda)$ qui envoient X sur 0 et Y sur λ.

Le caractère $\mu_1(0) = \mu_2(0)$ sera plus simplement noté $\mu(0)$. Pour k valant r ou $q-1-r$, on désignera par $\mu_j^k(\lambda)$ le caractère de A_k défini par le caractère $\mu_j(\lambda)$ de A. On notera aussi $\mu^k(0)$ le caractère de A_k défini par le caractère $\mu(0)$ de A. Signalons par ailleurs que l'action par conjugaison de t sur les $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de $T_S(k_F)$ induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres entre A_r et A_{q-1-r}. Cet isomorphisme correspond à l'automorphisme de la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\overline{\mathbb{F}}_p[X,Y]/(XY,YX)$ envoyant X sur Y et Y sur X.

Comme $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$ n'est pas une algèbre de matrices à coefficients dans un anneau, on ne peut pas utiliser d'argument de type Morita pour obtenir directement la structure des $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Il nous faut donc étudier plus en détail l'algèbre $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$, puis décrire à la main ses modules simples. Si l'on considère, pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, les $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules à droite $M_{12}(\lambda) = \mu_1^r(\lambda) \oplus \mu_2^{q-1-r}(\lambda)$ et $M_{21}(\lambda) = \mu_2^r(\lambda) \oplus \mu_1^{q-1-r}(\lambda)$, qui sont tous deux de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, et que l'on note $M_1(0) = \mu^r(0) \oplus \{0\}$ et $M_2(0) = \{0\} \oplus \mu^{q-1-r}(0)$ les deux caractères de $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$, on obtient alors le résultat suivant.

Théorème 1.2.17. *La liste suivante fournit un système de représentants des $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules à droite simples :*
– *les caractères $M_i(0)$ avec $i \in \{1,2\}$;*
– *les $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules simples standard $M_{ij}(\lambda)$ avec $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et $(i,j) \in \{(1,2),(2,1)\}$.*

En particulier, tout $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module à droite simple est de dimension 1 *ou* 2 *sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

On s'intéresse enfin aux modules à droite simples sur la troisième algèbre de Hecke-Iwahori, qui n'intervient que lorsque p est impair et ne possède pas d'analogue dans la théorie des modules sur l'algèbre du pro-p-Iwahori de $GL_2(F)$, ce qui explique pourquoi nous l'avons nommée algèbre de Hecke-Iwahori exceptionnelle. La structure de $\mathcal{H}_S^\star$ ressemble très fortement à celle de l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_S$, à la différence majeure près que les éléments $\mathcal{T}_0^\star$ et $\mathcal{T}_1^\star$ qui jouent pour $\mathcal{H}_S^\star$ le rôle tenu par $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_1$ pour $\mathcal{H}_S$ sont tous deux de carré nul, limitant ainsi encore un peu plus le nombre de $\mathcal{H}_S^\star$-modules simples possibles. Afin de pouvoir exprimer notre énoncé de classification des $\mathcal{H}_S^\star$-modules simples, nous introduisons les notations suivantes : on désigne par $M_1^\star(0)$ l'unique $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{H}_S^\star$, qui envoie $\mathcal{T}_0^\star$ et $\mathcal{T}_1^\star$ sur 0. Pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, on note $M_2^\star(\lambda)$ le $\mathcal{H}_S^\star$-module $\overline{\mathbb{F}}_p x \oplus \overline{\mathbb{F}}_p y$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour lequel les actions de $\mathcal{T}_0^\star$ et de $\mathcal{T}_1^\star$ dans la base $\{x,y\}$ sont respectivement données par les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.2.18. *Le caractère $M_1^\star(0)$ et les $\mathcal{H}_S^\star$-modules standard $M_2^\star(\lambda)$ avec $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ forment un système de représentants des classes d'isomorphisme des $\mathcal{H}_S^\star$-modules à droite simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

Comme nous l'avons déjà expliqué, les énoncés des Théorèmes 1.2.12, 1.2.17 et 1.2.18 suffisent à obtenir la description exhaustive des $\mathcal{H}_S^1$-modules à droite simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On introduit pour cela la terminologie suivante, qui va nous permettre d'énoncer clairement la structure de $\mathcal{H}_S^1$-module à droite des représentations lisses irréductibles de $SL_2(F)$ exhibées dans le Chapitre 3. Un $\mathcal{H}_S^1$-module à droite simple est dit :
– *posé sur la composante* $k = 0$ s'il est donné par un $\mathcal{H}_S$-module (à droite) simple dans la factorisation (1.1) ;
– *posé sur la composante* $k = \dfrac{q-1}{2}$ s'il est donné par un $\mathcal{H}_S^\star$-module (à droite) simple dans la factorisation (1.1) ;

– *posé sur la composante $k = r$* s'il est donné par un $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module (à droite) simple dans la factorisation (1.1).

On dispose alors du résultat suivant, qui explicite la structure de $\mathcal{H}_S^1$-module des représentations lisses de $SL_2(F)$ rencontrées jusqu'alors, et de son corollaire qui nous permet d'être optimiste quant à l'existence d'une équivalence de catégories analogue à celle construite par Ollivier [O3] dans le cadre des représentations modulo p de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Théorème 1.2.19. *1. Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\mathbf{1}^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère $M_1^S(0)$ posé sur la composante $k = 0$.*

2. Le $\mathcal{H}_S^1$-module $St_S^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère $M_1^S(-1)$ posé sur la composante $k = 0$.

3. Pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\mathcal{H}_S^1$-module $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda)\right)^{I_S(1)}$ est isomorphe au $\mathcal{H}_S$-module $M_2^S(\lambda^{-1})$ posé sur la composante $k = 0$. Il est simple lorsque $\lambda \neq 1$, et indécomposable de longueur 2 lorsque $\lambda = 1$.

4. Supposons que p soit impair. Pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\mathcal{H}_S^1$-module $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda \omega^{\frac{q-1}{2}})\right)^{I_S(1)}$ est isomorphe au $\mathcal{H}_S^\star$-module $M_2^\star(\lambda^{-1})$.

5. Supposons que $q \neq 2$ et fixons un scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$.

i) Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda \omega^r)\right)^{I_S(1)}$ est isomorphe au $\mathcal{H}_S(r)$-module $M_{12}(\lambda^{-1})$ posé sur la composante $k = r$.

ii) Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda \omega^{q-1-r})\right)^{I_S(1)}$ est isomorphe au $\mathcal{H}_S(r)$-module $M_{21}(\lambda^{-1})$ posé sur la composante $k = r$.

6. On suppose désormais que $F = \mathbb{Q}_p$. On dispose alors des résultats supplémentaires suivants, où $r \in \{0, \ldots, [\frac{p-1}{2}]\}$ est un paramètre supposé distinct de $\frac{p-1}{2}$ lorsque p est impair.

(a) Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\pi_0^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère supersingulier $M_1^S(-1, 0)$ posé sur la composante $k = 0$.

(b) Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\pi_{p-1}^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère supersingulier $M_1^S(0, -1)$ posé sur la composante $k = 0$.

(c) Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\pi_{\frac{p-1}{2}}^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère supersingulier $M_1^\star(0)$ posé sur la composante $k = \dfrac{p-1}{2}$.

(d) Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\pi_r^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère supersingulier $M_1(0)$ posé sur la composante $k = r$.

(e) Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\pi_{p-1-r}^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère supersingulier $M_2(0)$ posé sur la composante $k = r$.

Corollaire 1.2.20. *L'application qui envoie une représentation lisse irréductible de $SL_2(F)$ sur l'espace de ses vecteurs $I_S(1)$-invariants établit une bijection entre :*

i) l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles non supercuspidales *de $SL_2(F)$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme des $\mathcal{H}_S^1$-modules à droite simples* non supersinguliers *de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$;*

ii) l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme des $\mathcal{H}_S^1$-modules à droite simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

1.2.2 Au premier étage : le groupe unitaire quasi-déployé non ramifié $U(2,1)$

Dans [BL94], Barthel et Livné évoquent la possibilité d'étendre leurs travaux sur les représentations lisses irréductibles modulo p de $GL_2(F)$ à d'autres groupes. Le groupe $SL_2(F)$ fait l'objet du Chapitre 3, dont nous avons rappelé les principaux résultats dans la sous-section précédente, et de nombreux auteurs se sont penchés sur le cas des groupes formés par les F-points de groupes réductifs connexes définis et déployés sur F. Le Chapitre 4 de cette thèse fournit un premier exemple d'étude des représentations modulo p d'un groupe réductif connexe défini et quasi-déployé sur F mais non déployé sur F : nous y traitons en effet le cas du groupe unitaire quasi-déployé en trois variables $\mathbb{G} := U(2,1)(E/F)$, où E/F désigne une extension quadratique séparable non ramifiée. Tout comme SL_2, le groupe $U(2,1)$ est de rang 1 sur F, ce qui laisse espérer le même type de résultats. Nous allons voir que c'est effectivement le cas, modulo une conjecture portant sur certaines familles de morphismes de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules que nous pensons être toujours vérifiée mais pour laquelle nous n'avons pas encore de démonstration complète.

Avant d'énoncer nos résultats, nous introduisons quelques notations supplémentaires : on note $\mathcal{O}_E$ l'anneau des entiers de E, k_E son corps résiduel, et l'on fixe une uniformisante ϖ_E de E au-dessus de ϖ_F. Remarquons que nous pourrions prendre $\varpi_E = \varpi_F$ puisque nous avons supposé l'extension E/F non ramifiée, mais nous préférons ne pas imposer un tel choix car certains de nos résultats (tels ceux sur les représentations non supercuspidales de $\mathbb{G}$) sont encore valables lorsque l'extension E/F n'est plus supposée non ramifiée. On note $\overline{x}$ l'image d'un élément $x \in E$ par l'unique F-automorphisme non trivial de E et $N : E \to F$ l'application norme attachée à l'extension E/F. On pose $E^{(1)} := \ker N$ et l'on désigne par $\mathbb{B}$ le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures de $\mathbb{G}$.

Tout comme dans le cas déployé, nous commençons par l'étude des représentations lisses irréductibles non supercuspidales de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et obtenons ainsi le résultat suivant, qui donne une description exhaustive des classes d'isomorphisme de ces représentations.

Théorème 1.2.21. *Soit* $\chi : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ *un caractère lisse.*

1. *Le* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$*-module* $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ *est de longueur* 2*. Il est indécomposable si et seulement si* χ *ne se factorise pas à travers l'application déterminant.*
2. *Le* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$*-module* $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ *est irréductible si et seulement si* χ *ne se factorise pas à travers l'application déterminant. Dans le cas contraire, il est indécomposable de longueur* 2 *avec le caractère* χ *comme sous-objet et la représentation de la série spéciale* $St_{\mathbb{G}} \otimes \chi$ *comme quotient, où* $St_{\mathbb{G}} := \dfrac{\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$ *est la représentation de Steinberg.*
3. *Les classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles non supercuspidales de* $\mathbb{G}$ *sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$ *se partitionnent en trois familles : les caractères, les représentations de la série principale et les représentations de la série spéciale. De plus, il n'existe pas d'entrelacement entre deux représentations distinctes issues d'une même famille, et toute représentation lisse irréductible non supercuspidale de* $\mathbb{G}$ *sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$ *est admissible.*

Pour comprendre les autres représentations lisses irréductibles de $\mathbb{G}$, nous suivons les idées introduites dans [BL94] en nous penchant sur la structure des algèbres de Hecke sphériques $\mathcal{H}(\mathbb{G},\mathbb{K},V) := \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]}(\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V))$ avec $\mathbb{K}$ sous-groupe ouvert compact maximal de $\mathbb{G}$ et V représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Une telle algèbre est naturellement isomorphe [9] à la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de convolution $\mathbb{H}(\mathbb{G},\mathbb{K},V)$ des fonctions $f : \mathbb{G} \to \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(V)$ lisses à support compact telles que :

$$\forall\ k_1, k_2 \in \mathbb{K},\ \forall\ g \in \mathbb{G},\ \ f(k_1 g k_2) = k_1 f(g) k_2\ .$$

9. Nous renvoyons le lecteur souhaitant plus de détails à ce sujet vers la Section 2.3 du Chapitre 2 de cette thèse.

Si l'on désigne alors par $\mathbb{U}$ le radical unipotent de $\mathbb{B}$ et par $\mathbb{T}$ le tore des matrices diagonales de $\mathbb{G}$, on sait que l'espace des vecteurs $(\mathbb{K} \cap \mathbb{U})$-invariants de V définit un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{T} \cap \mathbb{K} = \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$, où $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$ est le sous-groupe des éléments de $\mathbb{T}$ à coefficients dans $\mathcal{O}_E$. L'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times), V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$ est donc quant à elle isomorphe à la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de convolution $\mathbb{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times), V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$ des fonctions $\psi : \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ lisses à support compact telles que :

$$\forall\, t \in \mathbb{T},\ \forall\, \tau \in \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times),\ \psi(\tau t) = \tau\psi(t)\ .$$

On démontre alors le théorème suivant, qui est un cas particulier de [Her2, Theorem 1.2] lorsque l'on suppose F de caractéristique nulle et $\mathbb{K} = \mathbb{G} \cap GL_3(\mathcal{O}_E)$.

Théorème 1.2.22. *Soit $\mathbb{K}$ un sous-groupe ouvert compact maximal de $\mathbb{G}$ et soit V une représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Posons* $t_0 := \begin{pmatrix} \overline{\varpi_E}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varpi_E \end{pmatrix}$.
L'application $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V : \mathbb{H}(\mathbb{G}, \mathbb{K}, V) \to \mathbb{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times), V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$ définie par :

$$\forall\, f \in \mathbb{H}(\mathbb{G}, \mathbb{K}, V),\ \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f) := \left[t \mapsto \sum_{u \in \mathbb{U}/\mathbb{U}\cap\mathbb{K}} f(tu)|_{V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}} \right]$$

est un homomorphisme injectif de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres dont l'image est égale à l'ensemble des éléments de $\mathbb{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times), V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$ de support contenu dans $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)t_0^{\mathbb{N}}$.
En particulier, l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}(\mathbb{G}, \mathbb{K}, V)$ est une algèbre de polynômes à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ en un opérateur de Hecke T_V explicitement déterminé.

Ce résultat nous permet donc de considérer, pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, la représentation conoyau $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda) := \dfrac{\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V)}{(T_V - \lambda)(\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V))}$. Connaître en détail ces représentations nous permettrait de décrire toutes les représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ grâce à l'énoncé suivant.

Théorème 1.2.23. *Pour toute représentation lisse irréductible admissible π de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, il existe une paire (V, λ) avec V représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ telle que π soit un quotient du $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda)$.*

Nous pouvons alors introduire les deux notions suivantes : une représentation lisse irréductible est dite *supersingulière* (relativement à $\mathbb{K}$) lorsqu'elle est isomorphe à un quotient d'une représentation conoyau de la forme $\pi_{\mathbb{K}}(V, 0)$. Plus généralement, on dira que (V, λ) est une *paramétrisation possible* (relativement à $\mathbb{K}$) de la représentation lisse irréductible π lorsque π est un quotient du $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda)$.

Tout le reste du chapitre vise à caractériser le mieux possible les représentations supersingulières de $\mathbb{G}$, et se place dans le cas où l'extension E/F est non ramifiée avec le même choix d'uniformisante pour E et F. Une première idée serait de décrire complètement les représentations lisses irréductibles non supersingulières de $\mathbb{G}$, ce qui revient à comprendre la structure des représentations conoyaux de la forme $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda)$ avec $\lambda \neq 0$. Nous commençons par démontrer le résultat suivant, qui donne des conditions assez restrictives sur les paramétrisations possibles des représentations obtenues par induction parabolique et sur la structure possible d'une grande famille de représentations conoyaux.

Proposition 1.2.24. *1. Soit $\eta : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse. Si (V, λ) est une paramétrisation possible de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ relativement à $\mathbb{K}$, alors $\lambda = \eta(t_0)$.*

2. *Soient V une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$* ***qui ne s'étend pas en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de*** $\mathbb{G}$[10] *et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ un scalaire non nul. Notons $\eta : \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ le caractère lisse dont la restriction à $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$ est donnée par le caractère porté par $(V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}})^\phi$ et qui envoie t_0 sur λ, ainsi que le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{B}$ obtenu par inflation.*
L'isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)]$-modules $V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}} \to \eta^\phi$ défini par l'identité induit alors un homomorphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules $\pi_{\mathbb{K}}(V,\lambda) \twoheadrightarrow \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$.

Nous calculons ensuite toutes les paramétrisations possibles des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de $\mathbb{G}$ et des représentations de la série spéciale de $\mathbb{G}$. Rappelons que l'on désigne par V_0 l'unique $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ contenue dans la représentation de Steinberg $St_{\mathbb{G}}$.

Théorème 1.2.25. 1. *Pour tout caractère lisse $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\eta \circ \det$ admet une et une seule paramétrisation possible, à savoir la paire $(\eta \circ \det, 1)$.*

2. *Pour tout caractère lisse $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, la représentation $St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det)$ de la série spéciale admet une unique paramétrisation possible, à savoir la paire $(V_0 \otimes (\eta \circ \det), 1)$.*

Pour compléter notre étude, il nous faudrait pouvoir déterminer toutes les paramétrisations possibles des représentations de la forme $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ avec $\eta : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse. Pour l'instant, les résultats que nous avons prouvés à ce sujet peuvent être formulés de la manière suivante.

Proposition 1.2.26. *Soit $\eta : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse.*

1. *Si η ne s'étend pas en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$, alors le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ admet exactement une paramétrisation possible.*
2. *Si η s'étend en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$, alors le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ admet au plus une paramétrisation possible, à savoir la paire $(V_0 \otimes \eta, 1)$, où V_0 est l'unique $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ contenue dans la représentation de Steinberg $St_{\mathbb{G}}$ de $\mathbb{G}$.*

Signalons tout de suite que le Théorème 1.2.23 ne permet pas de conclure à l'unicité de la paramétrisation dans le second cas de la Proposition 1.2.26 car nous avons démontré auparavant que si η est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$, la représentation $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ n'est pas irréductible.

En comparant les résultats obtenus jusqu'ici pour $\mathbb{G}$ avec ceux qui existent pour $GL_2(F)$ [BL94, Theorem 25], pour $SL_2(F)$ et, plus généralement, pour $GL_n(F)$ [Her2, Theorem 3.1], il est naturel de se demander si le morphisme surjectif introduit dans la Proposition 1.2.24 n'est pas carrément un isomorphisme, puisqu'il l'est lorsque l'on travaille avec les groupes susmentionnés. En outre, disposer d'un tel isomorphisme permet d'obtenir une classification des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathbb{G}$, et nous n'avons à l'heure actuelle aucun argument qui pourrait mettre cette propriété d'injectivité en défaut.

Une autre question qui surgit naturellement lors de la comparaison avec les théories existant pour d'autres groupes porte sur la structure des représentations conoyaux $\pi_{\mathbb{K}}(\eta \circ \det, \lambda)$ avec $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ scalaire non nul et $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse. Nous savons démontrer[11] par un argument utilisant la structure de l'arbre de Bruhat-Tits que la représentation $\pi(\mathbf{1}, 1)$ est une extension non scindée du caractère $\mathbf{1}$ par $St_{\mathbb{G}}$. Ceci implique en particulier que toute représentation conoyau de la forme $\pi_{\mathbb{K}}(\eta \circ \det, 1)$ est une extension non scindée du caractère $\eta \circ \det$ par la représentation de la série spéciale $St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det)$. Par ailleurs, si l'on s'intéresse à $\pi_{\mathbb{K}}(\eta \circ \det, \lambda)$ avec $\lambda \neq 1$, nous savons en construire un quotient de la forme $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$, qui doit alors être irréductible à cause du Théorème 1.2.25 (qui impose que le caractère χ ne peut

10. Ce qui signifie que V est soit de dimension strictement supérieure à 1, soit un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{K}$ qui ne s'étend pas en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$.

11. Mais n'avons pas eu le temps d'inclure cette preuve dans ce manuscrit.

pas être étendu en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$). De nouveau par analogie avec les théories de référence, nous pensons que la surjection ainsi définie est en fait un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules, et que la démonstration de cette affirmation doit être identique à celle qui devrait donner l'injectivité du morphisme de la Proposition 1.2.24.

Toutes ces considérations nous mènent à introduire l'hypothèse suivante, qui va nous permettre d'énoncer ensuite une conjecture regroupant deux assertions de nature différente : la première est une supposition que nous faisons et que nous n'avons pas encore complètement démontrée (pour des raisons essentiellement techniques et temporelles) ; la seconde est un fait que nous savons démontrer, mais dont la preuve n'est pas encore rédigée.

Hypothèse A : *La paire (V, λ) avec V une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ vérifie l'une des deux assertions suivantes :*
- *V ne s'étend pas en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$;*
- *V s'étend en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse η de $\mathbb{G}$ et $\lambda \neq \eta(t_0)$.*

Conjecture B :
1. *Pour toute paire (V, λ) satisfaisant à l'Hypothèse A, la représentation conoyau $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda)$ est isomorphe au $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$, où $\eta : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ est le caractère lisse dont la restriction à $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$ vaut $(V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}})^\phi$ et qui envoie t_0 sur λ.*
2. *Notons V_0 l'unique $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ contenue dans la représentation de Steinberg $St_{\mathbb{G}}$. Pour tout caractère lisse $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\pi_{\mathbb{K}}(V_0 \otimes (\eta \circ \det), 1)$ est une extension non scindée du caractère $\eta \circ \det$ par la représentation de la série spéciale $St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det)$.*

Sous cette conjecture, nous pouvons tout d'abord compléter l'énoncé de la Proposition 1.2.26, ce qui mène à l'unicité du quotient lisse irréductible de n'importe quelle représentation conoyau.

Proposition 1.2.27. *Supposons que la Conjecture B soit vérifiée. Pour tout caractère lisse $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta \circ \det)$ admet une et une seule paramétrisation possible, à savoir la paire $(V_0 \otimes (\eta \circ \det), 1)$ où V_0 désigne l'unique $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ contenue dans $St_{\mathbb{G}}$.*

Corollaire 1.2.28. *Supposons que la Conjecture B soit vraie. Pour toute paire (V, λ) avec V une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module porté par la représentation conoyau $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda)$ admet (à isomorphisme près) un unique quotient irréductible. De plus, ce quotient n'est pas supercuspidal.*

Nous déduisons de ces énoncés que la notion de supersingularité relativement à $\mathbb{K}$ introduite précédemment est bien définie, puis qu'elle est équivalente à la notion de supercuspidalité.

Lemme 1.2.29. *Supposons que la Conjecture B soit vérifiée. La notion de supersingularité par rapport à $\mathbb{K}$ est alors bien définie : si π est une représentation lisse irréductible de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui admet une paramétrisation possible de la forme $(V, 0)$ avec V une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$, alors toute paramétrisation possible de π est de la forme $(W, 0)$ avec W représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

Théorème 1.2.30. *Supposons que la Conjecture B soit vérifiée. Pour toute représentation lisse irréductible admissible π de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, on a équivalence entre les assertions suivantes :*

i) *π est supersingulière relativement à $\mathbb{K}$;*

ii) *π est supercuspidale.*

Ce dernier résultat prouve en particulier que la notion de supersingularité ne dépend pas, pour les représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathbb{G}$, du choix de $\mathbb{K}$ puisqu'elle est équivalente à la notion de supercuspidalité qui n'a absolument rien à voir avec les sous-groupes compacts maximaux de $\mathbb{G}$. Nous pouvons alors conclure ce chapitre par l'énoncé de classification suivant des représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, qui est démontré sous réserve de disposer de la Conjecture B.

Théorème 1.2.31. *Supposons que la Conjecture B soit vérifiée.*
A isomorphisme près, toute représentation lisse irréductible admissible de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ appartient à l'une et et une seule des quatre familles suivantes :

i) *les caractères de $\mathbb{G}$, de la forme $\eta \circ \det$ avec $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse ;*

ii) *les représentations de la série principale, de la forme $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ avec $\eta : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse qui ne s'étend pas en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$.*

iii) *les représentations de la série spéciale, de la forme $St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det)$ avec $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse et $St_{\mathbb{G}} := \dfrac{\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$ représentation de Steinberg ;*

iv) *les représentations supersingulières.*

1.2.3 Au second étage : les groupes réductifs quasi-déployés de rang 1

Une grande partie des arguments qui nous ont permis d'obtenir une classification (partielle) des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles admissibles de $U(2,1)(E/F)$ sont directement adaptés des méthodes que nous avons utilisées pour étudier les représentations modulo p de $SL_2(F)$. Il est donc naturel de se demander si lesdites méthodes ne peuvent être formalisées de manière à obtenir des énoncés de classification pour les représentations lisses irréductibles modulo p de groupes plus généraux. A l'heure actuelle, nous possédons une réponse positive partielle, qui fait l'objet du Chapitre 5 de cette thèse : les arguments utilisés dans l'étude des représentations modulo p de $SL_2(F)$ nous permettent de donner une description complète des représentations lisses irréductibles non supersuspidales à coefficients dans un corps C algébriquement clos de caractéristique p du groupe des F-points d'un groupe réductif connexe défini, quasi-déployé et de rang 1 sur F.

Dans cette sous-section, G désigne le groupe des F-points d'un groupe réductif connexe $\mathcal{G}$ que l'on suppose défini, quasi-déployé et de rang 1 sur F. On fixe un sommet spécial v_0 de l'arbre de Bruhat-Tits $\mathcal{X}$ du groupe adjoint de G : le stabilisateur de ce sommet sous l'action de G sur $\mathcal{X}$ est un sous-groupe parahorique spécial K qui est canoniquement égal au groupe des $\mathcal{O}_F$-points d'un schéma en groupes lisse affine connexe $\mathcal{G}_K$ défini sur $\mathcal{O}_F$ et de fibre générique égale à $\mathcal{G}$. On fixe ensuite un tore déployé maximal $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$ tel que v_0 appartienne à l'appartement défini par $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{X}$ et l'on note $\mathcal{T}$ le centralisateur de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{G}$. Comme $\mathcal{G}$ est supposé quasi-déployé sur F, on sait que $\mathcal{T}$ est un tore de $\mathcal{G}$ et est donc en particulier abélien. On choisit un sous-groupe de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathcal{G}$ qui contient $\mathcal{T}$, on note $\mathcal{U}$ le radical unipotent de $\mathcal{B}$ et l'on désigne respectivement par B, T et U les groupes formés des F-points de $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$. On fixe enfin une arête de l'appartement de $\mathcal{S}$ qui contient le sommet v_0 et l'on note I son stabilisateur sous l'action de G : c'est un sous-groupe d'Iwahori dont le pro-p-radical est noté $I(1)$ et appelé pro-p-sous-groupe d'Iwahori.

Le premier résultat important que nous obtenons dans ce contexte consiste en une description exhaustive des sous-quotients irréductibles des représentations de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\eta)$, où η désigne un C-caractère lisse de B obtenu par inflation d'un C-caractère lisse de T. Son énoncé possède la même structure que ceux des Théorèmes 1.2.1 et 1.2.21, ce qui n'a rien de surprenant puisqu'il en fournit une généralisation directe.

Théorème 1.2.32. *Soit η un C-caractère lisse de B obtenu par inflation d'un C-caractère lisse de T.*

1. *Le $C[B]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\eta)$ est un objet de longueur 2 dont l'unique sous-quotient de dimension finie est donné par le caractère η.*
2. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
   (a) *le $C[B]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\eta)$ est décomposable ;*
   (b) *le $C[G]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\eta)$ est réductible ;*
   (c) *le caractère η se prolonge en un C-caractère lisse de G.*
3. *Si η se prolonge en un C-caractère lisse de G, le $C[G]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\eta)$ est indécomposable de longueur 2. Ses sous-quotients irréductibles sont donnés (à isomorphisme près) par le caractère η (qui est un sous-objet) et la représentation $St_G \otimes \eta$ (qui est un quotient), où $St_G := \dfrac{\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})}{1}$ désigne la représentation de Steinberg.*

Nous pouvons donc classer les sous-quotients irréductibles des représentations qui nous intéressent en trois familles :
- les C-caractères lisses de G ;
- les représentations *de la série principale* : ce sont les représentations de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\eta)$ avec η un C-caractère lisse de B obtenu par inflation d'un C-caractère lisse de T et qui ne s'étend pas en un C-caractère lisse de G ;
- les représentations *de la série spéciale* : ce sont les représentations de la forme $St_G \otimes \chi$ avec $\chi : G \to C^\times$ caractère lisse.

Le prochain énoncé affirme que cette liste fournit en fait une partition des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles non supercuspidales de G sur C.

Théorème 1.2.33. *Il n'existe pas d'isomorphisme entre représentations lisses irréductibles non supercuspidales provenant de deux familles distinctes.*

Nous nous intéressons ensuite à l'existence éventuelle d'isomorphismes entre deux représentations distinctes qui proviendraient d'une même famille. Le cas des représentations de la série principale se traite rapidement grâce aux résultats que nous avons démontrés auparavant à propos de leur structure de $C[B]$-module.

Lemme 1.2.34. *Il n'existe pas d'entrelacement entre représentations de la série principale induites par des caractères distincts.*

Pour étudier les entrelacements pouvant exister entre représentations de la série spéciale, nous avons besoin d'informations supplémentaires qui portent notamment sur la structure de leurs espaces de vecteurs $I(1)$-invariants. Nous démontrons tout d'abord le résultat suivant, qui décrit l'espace des vecteurs $I(1)$-invariants des représentations de G sur C obtenues par induction parabolique.

Théorème 1.2.35. *Soit $\eta : B \to C^\times$ un caractère lisse obtenu par inflation d'un C-caractère lisse de T. Notons η^+ le C-caractère lisse de I obtenu par inflation du caractère de $T(\mathcal{O}_F)$ défini par restriction de η. De même, notons η^- le C-caractère lisse de I obtenu par inflation du caractère de $T(\mathcal{O}_F)$ défini par restriction du caractère conjugué η^{w_0}, où w_0 désigne l'unique élément non trivial du groupe de Weyl fini de G relatif à T.*

1. *L'espace des vecteurs $I(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_B^G(\eta)$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur C.*

2. *Le* $C[G]$*-module* $\mathrm{Ind}_B^G(\eta)$ *admet au plus deux composantes* I*-isotypiques non nulles, à savoir celles associées à* η^+ *et à* η^-*. Plus précisément, il admet exactement une seule composante* I*-isotypique si et seulement si* $\eta^+ = \eta^-$*, et en admet deux sinon.*
   En particulier, $\mathrm{Ind}_B^G(\eta)$ *admet des vecteurs* I*-invariants non nuls si et seulement si la restriction à* $T(\mathcal{O}_F)$ *du caractère* η *est triviale (auquel cas le caractère* η *est dit* non ramifié*).*
3. *Le* $C[G]$*-module* $\mathrm{Ind}_B^G(\eta)$ *est engendré par l'espace de ses vecteurs* $I(1)$*-invariants.*

On démontre alors le théorème suivant, qui décrit l'espace des vecteurs $I(1)$-invariants des représentations de la série spéciale et donne une condition nécessaire à l'existence d'un isomorphisme entre deux telles représentations.

Théorème 1.2.36. 1. *On dispose de la suite exacte courte suivante d'espaces vectoriels :*

$$1 \longrightarrow C \longrightarrow \left(\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})\right)^{I(1)} \longrightarrow St_G^{I(1)} \longrightarrow 1 \ .$$

En particulier, l'espace des vecteurs $I(1)$*-invariants d'une représentation de la série spéciale est un espace vectoriel de dimension* 1 *sur* C

2. *Soit* $\eta : G \to C^\times$ *un caractère lisse. Si* St_G *et* $St_G \otimes \eta$ *définissent des* $C[G]$*-modules isomorphes, alors le caractère* η *doit être non ramifié (i.e. de restriction triviale au sous-groupe* $T(\mathcal{O}_F)$*).*

Terminons cette section par la remarque suivante : si l'on fait partie, comme c'est notre cas, des personnes qui croient en une généralisation possible des résultats de classification obtenus dans les Chapitres 3 et 4 au cadre des groupes réductifs connexes définis, quasi-déployés et de rang 1 sur F, il semble raisonnable de penser que pour les représentations de la série spéciale sont deux à deux non isomorphes.

1.3 Plan du manuscrit

Le Chapitre 2 est un récapitulatif des résultats de théorie des représentations que nous utilisons dans cette thèse. On y met notamment l'accent sur les représentations obtenues par induction lisse ou compacte et sur leurs liens avec la théorie des modules sur les algèbres de Hecke.
Le Chapitre 3, qui constitue une partie conséquente de cette thèse, traite de la théorie des représentations modulo p de $SL_2(F)$. Nous y démontrons les résultats de classification énoncés dans la section précédente et nous y définissons une correspondance de Langlands semi-simple modulo p pour $SL_2(\mathbb{Q}_p)$.
Nous grimpons ensuite un premier étage pour atteindre le Chapitre 4, qui regroupe nos résultats relatifs à la théorie des représentations modulo p du groupe unitaire p-adique quasi-déployé non ramifié à trois variables $U(2,1)(E/F)$. Monter d'un étage supplémentaire nous permet d'arriver au Chapitre 5, qui contient nos résultats concernant la classification des représentations lisses non supercuspidales à coefficients dans un corps algébriquement clos de caractéristique p d'un groupe réductif connexe défini, quasi-déployé et de rang 1 sur un corps local non archimédien complet pour une valuation discrète, de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel fini.
Nous revenons alors au groupe $SL_2(F)$ avec le Chapitre 6 en prenant cette fois le point de vue des modules sur les algèbres de Hecke-Iwahori. Nous établissons une classification des modules simples sur la pro-p-algèbre de Hecke-Iwahori de $SL_2(F)$ sans hypothèse supplémentaire sur le corps F, et identifions ceux d'entre eux qui apparaissent comme espaces de vecteurs invariants sous l'action du pro-p-Iwahori standard de $SL_2(F)$ des représentations lisses (irréductibles) modulo p de $SL_2(F)$.

Le dernier chapitre regroupe quant à lui divers appendices. Ils peuvent être classés en deux familles : ceux qui présentent d'autres preuves de certains résultats démontrés par ailleurs dans cette thèse (ce qui est par exemple le cas de la Section 7.1) et ceux qui donnent des preuves de résultats techniques que l'on a repoussées ici pour ne pas perturber le bon déroulement des chapitres (ce qui concerne en fait essentiellement le Chapitre 4).

1.4 Perspectives de recherche

Les résultats démontrés dans ce manuscrit suggèrent qu'il peut être intéressant de travailler en particulier selon les trois axes suivants :

- approfondir les résultats obtenus à propos des représentations modulo p de $SL_2(F)$ et de $U(2,1)(E/F)$, et déterminer leur comportement vis-à-vis d'une éventuelle correspondance de Langlands semi-simple modulo p ;
- étendre les résultats que nous avons obtenus pour $SL_2(F)$ et $U(2,1)(E/F)$ au cadre des groupes réductifs connexes (quasi-déployés) définis et de rang 1 sur un corps p-adique F ;
- déterminer les représentations p-adiques de $SL_2(F)$ et de $U(2,1)(E/F)$ qui correspondent (par un procédé de «réduction modulo p») aux représentations modulo p que nous avons obtenues, et comprendre les objets galoisiens auxquels elles pourraient être reliées dans l'optique d'une correspondance de Langlands semi-simple p-adique.

1.4.1 A propos de la théorie modulo p pour $SL_2(F)$ et pour $U(2,1)(E/F)$

Nous aimerions tout d'abord terminer l'étude du cas $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ en regardant si l'on dispose d'un analogue de l'équivalence de catégories obtenue par Ollivier pour les représentations lisses modulo p de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ engendrées par leurs espaces de vecteurs invariants sous le pro-p-Iwahori standard [O3, Théorème 1.1], et en étudiant sa compatibilité aux foncteurs de restriction.

Pour essayer de comprendre les représentations supersingulières de $SL_2(F)$, on peut commencer par déterminer les informations pouvant être déduites des résultats de Breuil-Paškūnas et Hu sur les représentations supersingulières de $GL_2(F)$. Nous nous intéressons en particulier à la notion de diagramme canonique définie par Hu [Hu, Section 3] et à la possibilité d'obtenir des renseignements sur un tel diagramme à partir d'un analogue pour les représentations de $SL_2(F)$. En effet, on dispose d'une application naturelle de restriction qui permet de définir un diagramme (resp. un système de coefficients) pour $SL_2(F)$ à partir d'un diagramme (resp. un système de coefficients) pour $GL_2(F)$. Au début de notre thèse, nous nous étions interrogée sur l'existence d'un procédé réciproque, qui correspondrait idéalement à un procédé d'induction au niveau des représentations et permettrait de construire de manière fonctorielle un diagramme (resp. un système de coefficients) pour $GL_2(F)$ à partir d'un objet de même nature pour $SL_2(F)$. Nous pensons qu'il pourrait être intéressant d'aller jusqu'au bout de cette idée si l'on veut vraiment comprendre les analogies et les différences qui existent entre les comportements des représentations supersingulières de $GL_2(F)$ et de $SL_2(F)$.

Un objectif à plus long terme consiste à donner une description complète des représentations supersingulières de $SL_2(F)$ dans d'autres cas que $F = \mathbb{Q}_p$ (qui est quant à lui traité dans la Section 3.6 du Chapitre 3 de cette thèse). Nous avons déjà prouvé que les représentations conoyaux $\pi_i(r,0)$ ne sont jamais irréductibles [12], mais nous ne savons en général quasiment rien sur leurs constituants de Jordan-Hölder. Obtenir ce type de résultats permettrait certainement de progresser dans la compréhension des représentations supersingulières de $GL_2(F)$ grâce aux résultats que nous avons démontrés dans la Section 3.6 sus-citée.

12. Nous renvoyons le lecteur au Corollaire 3.5.26 du Chapitre 3 pour une preuve de cet énoncé.

Concernant les représentations modulo p de $U(2,1)(E/F)$, nous pourrions résumer notre but par la formule suivante : tenter d'obtenir des résultats aussi poussés que ceux que nous avons démontrés pour les représentations modulo p de $SL_2(F)$ tout en essayant d'abstraire les arguments utilisés en vue d'une généralisation éventuelle (cf. Section 1.4.2). Ceci passe tout d'abord par la preuve de la Conjecture B sur laquelle reposent nos résultats de classification. Comme nous l'avons déjà expliqué, nous n'avons pas rencontré pour l'instant de difficulté conceptuelle dans sa démonstration, ce qui nous laisse espérer une résolution à (très) court terme de ce problème.
Une question naturelle qui apparaît alors est la recherche d'une description explicite des représentations supersingulières de $U(2,1)(E/F)$, au moins lorsque $F = \mathbb{Q}_p$. Son évidence fait qu'elle est déjà l'objet des recherches de plusieurs collègues, ce qui explique pourquoi nous nous intéressons plutôt à une autre approche qui n'a, à notre connaissance, pas encore été abordée : nous aimerions comprendre quels sont les paramètres qui apparaîtraient dans une éventuelle correspondance de Langlands semi-simple modulo p pour $U(2,1)(E/F)$. Une manière conjecturale d'y parvenir consiste à comprendre les morphismes de groupes allant du groupe de Galois absolu de F vers le L-groupe de $U(2,1)$: en cas de succès, cela pourrait fournir des pistes à suivre pour trouver la forme des représentations supersingulières de $U(2,1)(E/F)$.

1.4.2 Le passage aux groupes réductifs p-adiques de F-rang 1

Les Chapitres 4 et 5 donnent un avant-goût de ce à quoi nous aimerions aboutir : une généralisation des résultats de classification démontrés pour $SL_2(F)$ au cas des groupes réductifs connexes p-adiques (quasi-déployés) de rang 1 sur leur corps de définition. En effet, il semblerait que les deux pieds sur lesquels repose l'obtention d'une classification de cette forme soient la structure des algèbres de Hecke sphériques, qui sont des algèbres de polynômes en un seul opérateur, et la compréhension de l'action de cet opérateur sur l'arbre de Bruhat-Tits du groupe considéré [13]. A partir de là, des arguments immobiliers nous permettraient de décrire complètement les représentations conoyaux attachées à des valeurs propres non supersingulières, et fournirait en particulier l'équivalence des notions de supersingularité (au sens de [Her2] ou de [BL94], qui donnent exactement la même définition dans ce cas) et de supercuspidalité (au sens défini dans la Section 2.2.1 du Chapitre 2 de cette thèse). L'intérêt de ces résultats est qu'ils fourniraient un nouvel angle d'approche pour la compréhension des représentations supercuspidales et compenseraient d'une certaine manière la perte de la théorie des types, qui posait déjà quelques problèmes en caractéristique positive $\ell \neq p$ [D99], lorsque l'on étudie les représentations modulo p.
Notons enfin que la question qui sous-tend les calculs des Chapitres 3 et 4 relatifs à la description des représentations conoyaux est la suivante, inspirée par [BL94, Theorem 25] : peut-on décrire la structure du module universel $\mathrm{ind}_K^G(\sigma) \otimes_{\mathcal{H}(G,K,\sigma)} \mathcal{H}(G,K,\sigma)[T^{-1}]$, où l'on désigne par σ une représentation lisse irréductible de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ d'un sous-groupe parahorique spécial K de G, par $\mathcal{H}(G,K,\sigma)$ l'algèbre de Hecke associée au triplet (G,K,σ), et par T une indéterminée [14] ? Cette question recouvre en fait les deux interrogations suivantes :

- si l'on suppose que σ est « suffisamment générique », dispose-t-on d'un isomorphisme entre le module universel qui lui est associé et une induite parabolique universelle ?
- dans les cas où σ n'est pas « suffisamment générique », peut-on tout de même décrire le module universel qui lui est associé ?

Signalons ici que la première question a été traitée par Herzig lorsque G est supposé déployé [15] et que K en est un sous-groupe compact maximal hyperspécial [Her2, Theorem 3.1] à l'aide d'arguments de localisation. Nous pensons qu'il doit en fait être possible de démontrer ces

13. Plus précisément de son groupe adjoint.
14. Dont la spécialisation en un scalaire non nul $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ permet de récupérer nos représentations conoyaux.
15. Mais sans aucune hypothèse sur le F-rang de G.

résultats par des arguments purement immobiliers en exploitant plus profondément la structure de l'arbre de Bruhat-Tits de G (i.e. de son groupe adjoint) et de son bord à l'infini.

1.4.3 De la théorie des représentations p-adiques de $SL_2(F)$ aux représentations galoisiennes

Une fois la structure des représentations modulo p de $SL_2(F)$ comprise, se pose la question d'un éventuel relèvement à des représentations p-adiques de $SL_2(F)$. Autrement dit, on se demande s'il existe des représentations de $SL_2(F)$ ayant de bonnes propriétés (de type continuité, unitarité ou admissibilité) qui fournissent, après application d'un procédé de « réduction modulo p » analogue à celui qui existe pour les représentations p-adiques de $GL_2(F)$, une représentation lisse irréductible arbitrairement fixée de $SL_2(F)$ et, le cas échéant, si l'opération ainsi définie ne proviendrait pas d'un foncteur qui se comporterait comme un foncteur de Colmez pour SL_2.

Dans le même ordre d'idées, nous nous interrogeons quant à l'existence d'une théorie des (φ, Γ)-modules créée à partir de SL_2 qui serait compatible, par un procédé de restriction reflétant la restriction naturelle de GL_2 à SL_2, avec celle qui fut développée par Fontaine puis Colmez à partir de GL_2. L'idée qui motive cette interrogation réside dans la recherche d'une correspondance de Langlands p-adique pour $SL_2(F)$, au moins lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, qui serait compatible à la correspondance de Langlands p-adique pour $GL_2(F)$ issue des travaux de Berger-Breuil et Colmez. En cas de réponse positive, il serait intéressant de se pencher sur les conjectures modulaires « à la Breuil-Mézard » que l'on pourrait y associer et sur leurs liens éventuels avec les conjectures qui existent déjà pour GL_2 [BM02, BM11].

Chapitre 2

Préliminaires généraux

Ce chapitre a pour but d'introduire les notations et résultats généraux que nous utiliserons dans cette thèse. Il est essentiellement constitué de deux parties : la première traite des objets et outils de la théorie classique des représentations qui nous seront nécessaires. Elle s'étend sur deux sections : l'une est plutôt axée sur les fondements de la théorie, tandis que l'autre ne traite que de ce qui se rattache aux foncteurs d'induction. La seconde partie présente quant à elle les notions de la théorie des algèbres de Hecke et de leurs modules à droite dont nous aurons besoin.

Dans un souci de complétude, nous rappelons toutes les définitions et donnons pour chaque résultat énoncé, y compris pour les plus élémentaires, une démonstration ou une référence. Le lecteur familier de la théorie des représentations pourra donc allègrement survoler ce chapitre.

Dans la suite de ce chapitre, C désigne un corps [1] quelconque. On considère un groupe topologique G que l'on suppose localement profini et dont on note 1 l'élément neutre. On rappelle qu'un groupe topologique est :

- un *pro-p-groupe* s'il peut s'écrire comme limite projective de groupes finis (munis de la topologie discrète) dont le cardinal est une puissance de p ;
- un *groupe profini* s'il peut s'écrire comme limite projective de groupes finis (munis de la topologie discrète) ;
- un *groupe localement profini* s'il est séparé et si son élément neutre possède une base de voisinages formée de sous-groupes ouverts compacts.

Notons ici que tout sous-groupe fermé d'un groupe localement profini est lui-même localement profini pour la topologie induite. On désigne par H un sous-groupe de G que l'on munira de la topologie induite et, si nécessaire, de propriétés topologiques supplémentaires. On note Z_G le centre de G, dont on rappelle qu'il est défini par $Z_G := \{g \in G \mid \forall\ x \in G,\ gx = xg\}$.

2.1 Rappels de théorie des représentations

2.1.1 Vocabulaire

Une *représentation de G sur C* est un homomorphisme de groupes $\pi : G \to \mathrm{Aut}_C(V)$, où V désigne un espace vectoriel sur C. On note π ou (π, V) une telle représentation. Lorsque V est de dimension finie sur C, on appelle *dimension de la représentation π sur C* l'entier $\dim_C V$.

Deux représentations $\pi_1 : G \to \mathrm{Aut}_C(V_1)$ et $\pi_2 : G \to \mathrm{Aut}_C(V_2)$ sont dites *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de C-espaces vectoriels $\psi : V_1 \to V_2$ compatible avec l'action de G, i.e.

1. Dans cette thèse, les corps seront toujours (par définition) commutatifs.

tel que

$$\forall\, g \in G,\ \psi \circ \pi_1(g) = \pi_2(g) \circ \psi\ . \tag{2.1}$$

On dispose plus généralement de la notion de morphisme de représentations. Un *morphisme de représentations* $\psi : \pi_1 \to \pi_2$ est une application C-linéaire $\psi : V_1 \to V_2$ qui satisfait à la condition (2.1). L'ensemble de ces morphismes forme un C-espace vectoriel noté $\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2)$. Lorsque $\pi_1 = \pi_2$, on notera $\mathrm{End}_G(\pi_1) := \mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_1)$.

D'après la définition rappelée au début de cette section, une représentation de G sur C peut aussi être considérée comme la donnée d'une action linéaire du groupe G sur un C-espace vectoriel V, ou encore d'une structure de $C[G]$-module sur V. Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion concernant la représentation considérée, on note $g \cdot v$ le vecteur résultant de l'action de $g \in G$ sur $v \in V$. Le stabilisateur d'un vecteur $v \in V$ pour cette action est alors défini par

$$\mathrm{Stab}_G(v) := \{g \in G \mid g \cdot v = v\}\ .$$

Si H est un sous-groupe de G, on note V^H ou π^H l'espace des *vecteurs invariants sous l'action de* H (ou : *vecteurs* H*-invariants*) de la représentation (π, V). C'est le sous-espace vectoriel constitué des vecteurs $v \in V$ fixes sous l'action de tout élément de H :

$$V^H := \{v \in V \mid \forall\, h \in H,\ h \cdot v = v\} = \{v \in V \mid H \subset \mathrm{Stab}_G(v)\}\ .$$

Une représentation $\pi : G \to \mathrm{Aut}_C(V)$ est dite *irréductible* si le $C[G]$-module qu'elle définit sur V est simple, ce qui revient à dire que V n'est pas nul et que les seuls sous-espaces vectoriels de V stables sous l'action de G sont $\{0\}$ et V.

Elle est dite *lisse* si pour tout élément $v \in V$, $\mathrm{Stab}_G(v)$ est un sous-groupe ouvert de G. Dans ce cas, V est réunion de ses espaces de vecteurs invariants sous l'action des sous-groupes ouverts de G :

$$V = \bigcup_{\Omega} V^{\Omega}$$

où Ω parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts de G.

La représentation (π, V) est dite *admissible* si elle est lisse et si, pour tout sous-groupe ouvert Ω de G, l'espace V^{Ω} est de dimension finie sur C.

Si η est un C-caractère de Z_G, on dit que π *admet* η *pour caractère central* si l'action de Z_G sur V est donnée par le caractère η :

$$\forall\, z \in Z_G,\ \forall\, v \in V,\ z \cdot v = \eta(z) v\ .$$

Enfin, si π est une représentation de G sur C et si χ est un caractère de G, on définit la *représentation tordue de* π *par* χ comme la représentation $\pi \otimes \chi$ de G sur C définie par :

$$\forall\, g \in G,\ (\pi \otimes \chi)(g) := \chi(g)\pi(g)\ .$$

Rappelons ici que la torsion par un caractère lisse préserve la lissité et la longueur en tant que $C[G]$-module.

Remarque 2.1.1. Sauf mention contraire explicite, toutes les représentations considérées dans la suite seront supposées lisses.

Remarque 2.1.2. Toute représentation lisse de G de dimension 1 sur C définit, par le choix d'une base du C-espace vectoriel C qui permet d'identifier $\mathrm{Aut}_C(C)$ à $C^{\times}$, un *C-caractère de G*, i.e. un homomorphisme de groupes $G \to C^{\times}$ continu [2]. De plus, deux telles représentations

2. Pour la topologie discrète sur $C^{\times}$, ce qui revient à demander que le noyau de cet homomorphisme soit un sous-groupe ouvert de G.

sont isomorphes si, et seulement si, elles définissent le même C-caractère de G.
On dispose donc d'une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations lisses de G de dimension 1 sur C et celui des C-caractères de G. Dans la suite, on identifiera parfois sans précision supplémentaire une représentation lisse de dimension 1 sur C avec le C-caractère qu'elle définit.

On termine cette première sous-section par un rappel du résultat suivant, connu sous le nom de *Lemme de Schur*, qui permet notamment de prouver que toute représentation lisse irréductible à coefficients dans un corps algébriquement clos d'un groupe abélien doit être de dimension 1.

Lemme 2.1.3 (Lemme de Schur)**.** *On suppose que C est un corps algébriquement clos. Si (π, V) est une représentation lisse irréductible admissible de G sur C, les seuls endomorphismes de V qui commutent à l'action de G sont les homothéties. Autrement dit, on a* $\mathrm{End}_G(V) = C$.

2.1.2 Structure des caractères d'un groupe

Commençons par rappeler que si Γ est un groupe arbitraire, on appelle *groupe dérivé* de Γ le sous-groupe $D(\Gamma)$ engendré par l'ensemble des éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$ avec x, $y \in \Gamma$. Le quotient $\Gamma/D(\Gamma)$ est appelé l'*abélianisé de* Γ : c'est le plus grand quotient abélien de Γ. On dispose alors du résultat suivant, dont l'utilité est inversement proportionnelle à la simplicité de sa démonstration.

Proposition 2.1.4. *Soient Γ un groupe et X un groupe abélien. Tout homomorphisme de groupes $\Gamma \to X$ se factorise à travers l'abélianisé de Γ.*

Démonstration. Notons e l'élément neutre de X. Il nous suffit de montrer que si $\phi : \Gamma \to X$ est un homomorphisme de groupes, son noyau contient nécessairement le groupe dérivé $D(\Gamma)$ de Γ. Comme ϕ est un homomorphisme de groupes, il suffit de vérifier cette propriété sur un système générateur de $D(\Gamma)$, ce qui est immédiat : pour tous éléments x et y de Γ, on a en effet

$$\phi(xyx^{-1}y^{-1}) = \phi(x)\phi(y)\phi(x)^{-1}\phi(y)^{-1} = (\phi(x)\phi(x)^{-1})(\phi(y)\phi(y)^{-1}) = e \ ,$$

la seconde égalité reposant sur la commutativité de X. □

Corollaire 2.1.5. *Tout C-caractère d'un groupe Γ se factorise à travers l'abélianisé de Γ.*

Remarque 2.1.6. Si l'on demande que le C-caractère considéré soit lisse, on obtient alors une factorisation à travers l'abélianisé topologique de Γ, i.e. à travers le quotient de Γ par l'adhérence de son groupe dérivé.

2.1.3 Représentations conjuguées

Soient H un sous-groupe de G et g un élément de G. Si π est une représentation de H sur C, on définit la *représentation g-conjuguée π^g de π* comme la représentation du groupe $H^g := gHg^{-1}$ sur C donnée par la formule suivante :

$$\forall\ x \in gHg^{-1},\ \pi^g(x) := \pi(g^{-1}xg)\ .$$

Les représentations π et π^g sont donc définies sur le même espace vectoriel. Par ailleurs, la définition assure immédiatement que cette construction préserve la lissité, l'admissibilité, l'irréductibilité et l'existence d'un caractère central. Il est tout aussi immédiat de vérifier les propriétés suivantes.

Proposition 2.1.7. *Soient H un sous-groupe de G et π une représentation lisse de H sur C.*

1. *Pour tous éléments g, $h \in G$, on a $(\pi^g)^h = \pi^{gh}$.*
2. *Une représentation σ est une sous-représentation (respectivement : un quotient ; un sous-quotient) de π si et seulement si la représentation σ^g est une sous-représentation (resp. : un quotient ; un sous-quotient) de π^g.*
3. *Si g est un élément du centre de G, alors $\pi^g = \pi$.*

Remarque 2.1.8. Lorsque H est un sous-groupe normal de G, on peut aussi voir la construction précédente comme une action à droite du groupe G sur l'ensemble des C-représentations de H qui se factorise à travers le quotient $G/Z(G)$ et préserve les propriétés d'irréductibilité, de lissité et d'admissibilité.

2.1.4 Existence de vecteurs invariants en caractéristique positive

Supposons un instant que C soit un corps de caractéristique $p > 0$, ce qui sera le cas dans les chapitres suivants puisque nous y considèrerons des représentations à coefficients dans une clôture algébrique fixée $\overline{\mathbb{F}}_p$ du corps premier à p éléments. On dispose alors d'un résultat d'existence systématique de vecteurs invariants non triviaux sous l'action lisse des pro-p-groupes qui s'énonce comme suit.

Lemme 2.1.9. *Soit p un nombre premier.*
Soient P un pro-p-groupe et $\pi : P \to Aut_C(V)$ une représentation lisse non nulle de P sur un corps C de caractéristique p. Il existe alors un vecteur non nul de V qui est fixe sous l'action de P. Autrement dit, l'espace V^P n'est pas réduit au vecteur nul.

Démonstration. Ce résultat est bien connu lorsque P est un groupe fini dont le cardinal est une puissance de p [Ser2, Proposition 26]. On se ramène à ce cas en procédant comme suit : fixons un vecteur non nul v de π et notons ρ le sous-$C[P]$-module de π engendré par v. Par lissité de l'action de P sur v, le sous-groupe $\mathrm{Stab}_P(v)$ est ouvert dans le pro-p-groupe P, donc il y est d'indice fini et la représentation ρ est par suite de dimension finie sur C. On choisit alors une base $(v_1, \cdots, v_d)$ de ρ sur C et l'on pose $S := \bigcap_{i=1}^{d} \mathrm{Stab}_P(v_i)$: c'est de nouveau un sous-groupe d'indice fini dans P, et il agit trivialement sur la représentation ρ, ce qui permet de factoriser l'action de P sur ρ à travers le p-groupe fini P/S et de terminer la démonstration car l'on a alors

$$0 \neq \rho^{P/S} = \rho^P \subset \pi^P \ .$$

□

2.2 Les foncteurs d'induction

Si π est une représentation lisse de G sur C, on peut se limiter à ne considérer que l'action de H sur π. On définit ainsi une représentation lisse de H sur C que l'on note $\pi|_H$, et un foncteur de restriction à H allant de la catégorie des représentations lisses de G sur C vers celle des représentations lisses de H sur C.
Réciproquement, il existe deux constructions fonctorielles standard qui nécessitent chacune une hypothèse topologique sur le sous-groupe H et définissent des foncteurs allant de la catégorie des représentations lisses de H sur C vers celle des représentations lisses de G sur C : l'induction lisse et l'induction compacte.
L'un des principaux intérêts de ces foncteurs est qu'ils fournissent des adjoints du foncteur de

restriction, comme en témoignent les réciprocités de Frobenius qui leur sont attachées (Propositions 2.2.1 et 2.2.3).

2.2.1 Induction lisse

Supposons que H soit un sous-groupe **fermé** de G et que (σ, V) soit une représentation lisse de H sur C. On note $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ la représentation lisse de G sur C dont l'espace vectoriel sous-jacent est l'ensemble des fonctions $f : G \to V$ uniformément localement constantes telles que

$$\forall\ g \in G,\ \forall\ h \in H,\ f(hg) = \sigma(h)f(g)\ ,$$

sur lesquelles G agit par translations à droite :

$$\forall\ (g, x) \in G \times G,\ (g \cdot f)(x) := f(xg)\ .$$

Cette construction définit un foncteur Ind_H^G, dit d'induction lisse, allant de la catégorie des représentations lisses de H sur C vers celle des représentations lisses de G sur C. L'énoncé suivant, connu sous le nom de réciprocité de Frobenius lisse, affirme que le foncteur d'induction lisse est un adjoint à droite du foncteur de restriction.

Proposition 2.2.1 (Réciprocité de Frobenius lisse)**.** *Soient π une représentation lisse de G sur C et σ une représentation lisse de H sur C. L'application $[f \mapsto f(\cdot)(1)]$ établit alors un isomorphisme de C-espaces vectoriels :*

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_H^G(\sigma)) = \mathrm{Hom}_H(\pi|_H, \sigma)\ .$$

Démonstration. Nous renvoyons à [Vig96, Section I.5.7.i)] pour une preuve détaillée, qui consiste à vérifier que les deux applications suivantes définissent bien l'isomorphisme annoncé :
- si Φ est un élément de $\mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_H^G(\sigma))$, on lui associe la fonction $\phi : \pi|_H \to \sigma$ définie par $\phi(v) := \Phi(v)(1)$.
- Réciproquement, un élément $\phi \in \mathrm{Hom}_H(\pi|_H, \sigma)$ s'envoie sur la fonction $\Phi : \pi \to \mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ définie par $\Phi(v) := [g \mapsto \phi(gv)]$. □

Un cadre de travail qui nous intéressera particulièrement est le suivant : G est le groupe des points rationnels d'un groupe réductif p-adique connexe défini et quasi-déployé sur un corps local non archimédien F complet pour une valuation discrète, de caractéristique résiduelle $p > 0$ et de corps résiduel fini, $H = LU$ est un sous-groupe parabolique de G de radical unipotent U et admettant L comme sous-groupe de Levi, et σ est une représentation lisse irréductible de H sur C obtenue par inflation d'une représentation lisse irréductible admissible de L sur C. Dans ce cas, la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ est appelée l'*induite parabolique (à partir de H) de σ à G*. Ces représentations permettent d'introduire la terminologie suivante : une représentation lisse **irréductible** de G sur C est dite :
- *supercuspidale* si elle n'est isomorphe à aucun sous-quotient d'une représentation paraboliquement induite à partir d'un sous-groupe parabolique propre de G ;
- *de la série principale de* G si elle est de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\eta)$ avec B sous-groupe de Borel de G et $\eta : B \to C^\times$ caractère lisse de B.

2.2.2 Induction compacte

On suppose maintenant que H est un sous-groupe **ouvert** de G et que (σ, V) est une représentation lisse de H sur C. On note $\mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ la représentation lisse de G sur C dont l'espace vectoriel sous-jacent est l'ensemble des fonctions $f : G \to V$ uniformément localement constantes à support compact modulo H (à gauche) et telles que

$$\forall\, g \in G,\ \forall\, h \in H,\ f(hg) = \sigma(h)f(g)\ ,$$

sur lesquelles G agit par translations à droite :

$$\forall\, (g,x) \in G \times G,\ (g \cdot f)(x) := f(xg)\ .$$

Cette construction définit un foncteur ind_H^G, dit d'induction compacte, allant de la catégorie des représentations lisses de H sur C vers celle des représentations lisses de G sur C. Remarquons que si H est un sous-groupe ouvert de G, il est aussi fermé et l'on peut alors définir les deux induites $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ et $\mathrm{ind}_H^G(\sigma)$. Il est clair que, dans ce cas, $\mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ est une sous-représentation de $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$, et l'on dispose de plus de la propriété suivante [Vig96, I.5.2.a)].

Proposition 2.2.2. *Soit H un sous-groupe ouvert de G tel que le quotient $H\backslash G$ soit compact*[3]*. On a alors, pour toute représentation lisse σ de H sur C,*

$$\mathrm{ind}_H^G(\sigma) = \mathrm{Ind}_H^G(\sigma)\ .$$

Les éléments de $\mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ à support dans une seule classe à droite modulo H sont appelés des fonctions standard. Pour toute paire $(g,v) \in G \times \sigma$, on notera $[g,v]$ la fonction standard définie par l'expression suivante :

$$\forall\, x \in G,\ [g,v](x) := \begin{cases} \sigma(xg)(v) & \text{si } x \in Hg^{-1}\ , \\ 0 & \text{si } x \notin Hg^{-1}\ . \end{cases} \tag{2.2}$$

Autrement dit, la fonction standard $[g,v]$ est l'unique élément de $\mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ dont le support est égal à Hg^{-1} et qui vaut v en g^{-1}. Il est alors facile de voir que si H est un sous-groupe ouvert compact de G, on peut écrire tout élément de $\mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ comme une combinaison linéaire finie de fonctions standard. On dispose en outre des deux propriétés suivantes, qui découlent immédiatement de la définition (2.2) :

i) $\forall\, (g,g_1) \in G \times G,\ \forall\, v \in \sigma,\ g([g_1,v]) = [gg_1,v]$;

ii) $\forall\, g \in G,\ \forall\, h \in H,\ \forall\, v \in \sigma,\ [gh,v] = [g,\sigma(h)(v)]$.

Il existe aussi une réciprocité de Frobenius pour le foncteur d'induction compacte, qui est cette fois un adjoint à gauche du foncteur de restriction.

Proposition 2.2.3 (Réciprocité de Frobenius compacte)**.** *Soient π une C-représentation lisse de G et σ une C-représentation lisse de H. L'application $[f \mapsto f([1,\cdot])]$ établit un isomorphisme de C-espaces vectoriels :*

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_H^G(\sigma),\pi) = \mathrm{Hom}_H(\sigma,\pi|_H)\ .$$

Démonstration. Nous renvoyons à [BL94, Section 2.1] pour le détail de la preuve, qui consiste à vérifier que les deux applications suivantes définissent bien l'isomorphisme annoncé :

– si $\phi \in \mathrm{Hom}_H(\sigma,\pi|_H)$, on lui associe la fonction $\Phi : \mathrm{ind}_H^G(\sigma) \to \pi$ définie par

$$\Phi(f) := \sum_{x \in H\backslash G} \pi(x^{-1})\phi(f(x))\ .$$

– Réciproquement, on associe à $\Phi \in \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_H^G(\sigma),\pi)$ l'application $\phi : \sigma \to \pi|_H$ définie par $\phi(v) := \Phi([1,v])$.

□

Remarque 2.2.4. La représentation $\mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ est isomorphe à la représentation lisse de G portée par le $C[G]$-module $C[G] \otimes_{C[H]} V$. Sous cet isomorphisme, la réciprocité de Frobenius compacte énoncée ci-dessus reflète alors la propriété universelle du produit tensoriel.

3. Ce qui équivaut à demander que ce quotient soit fini puisque $H\backslash G$ est muni de la topologie discète.

2.2.3 Induction et conjugaison

Les représentations de G obtenues par l'un ou l'autre des procédés d'induction décrits dans la section précédente ont un comportement assez plaisant vis-à-vis de la conjugaison, comme en atteste la proposition suivante.

Proposition 2.2.5. *Soient H un sous-groupe ouvert de G, (σ, V) une représentation lisse de H sur C et g un élément de G. La conjugaison par g définit des isomorphismes de $C[G]$-modules de la forme suivante :*

$$\left(\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)\right)^g \simeq \mathrm{Ind}_{H^g}^G(\sigma^g) \ ; \ \left(\mathrm{ind}_H^G(\sigma)\right)^g \simeq \mathrm{ind}_{H^g}^G(\sigma^g) \ .$$

Démonstration. On effectue la démonstration dans le cas de l'induction compacte, le cas de l'induction lisse se traitant par le même argument. Pour tout élément f de $\left(\mathrm{ind}_H^G(\sigma)\right)^g$, on définit la fonction $\Phi(f)$ par la formule suivante :

$$\forall\ x \in G,\ \Phi(f)(x) := f(g^{-1}xg) \ .$$

Cette fonction est définie sur G et elle est bien lisse puisqu'elle est fixe sous l'action du sous-groupe ouvert $g(\mathrm{Stab}_G(f))g^{-1}$. Elle est à support compact modulo $gHg^{-1} = H^g$ et, tout comme f, à valeurs dans l'espace V qui est aussi l'espace vectoriel sous-jacent de la représentation σ^g. Elle satisfait en outre la propriété suivante ($x \in G$ et $h \in H^g$) :

$$\Phi(f)(hx) = f(g^{-1}hxg) = f(g^{-1}hgg^{-1}xg) = \sigma(g^{-1}hg)\Phi(f)(x) = \sigma^g(h)\Phi(f)(x) \ ,$$

la troisième égalité venant de l'appartenance de $g^{-1}hg$ à H.
Tout ce qui précède permet donc d'affirmer que l'opérateur

$$\Phi : \left(\mathrm{ind}_H^G(\sigma)\right)^g \to \mathrm{ind}_{H^g}^G(\sigma^g)$$

est bien défini. Il est clairement C-linéaire et sa G-équivariance est prouvée par le calcul suivant :

$$\begin{array}{rcl} \forall\ x, y \in G, \quad (x \cdot \Phi(f))(y) & = & \Phi(f)(yx) \\ & = & f(g^{-1}yxg) \\ & = & f(g^{-1}ygg^{-1}xg) \\ & = & (x \cdot f)(g^{-1}yg) \\ & = & \Phi(x \cdot f)(y) \ . \end{array}$$

L'injectivité et la surjectivité de Φ sont immédiates puisque l'on a $f(x) = \Phi(f)(gxg^{-1})$ pour tous éléments $x \in G$ et $f \in \left(\mathrm{ind}_H^G(\sigma)\right)^g$. □

Remarque 2.2.6. La démonstration et l'énoncé de la Proposition 2.2.5 sont encore valables dans la situation suivante : G est un sous-groupe fermé d'un groupe topologique $\tilde{G}$, H est un sous-groupe ouvert de G (ou seulement fermé si l'on ne s'intéresse qu'à l'induction lisse) et g est un élément de $\tilde{G}$ tel que $gGg^{-1} = G$. Nous utiliserons ce cadre de travail lorsque nous considérerons $G = SL_2$ comme un sous-groupe de $\tilde{G} = GL_2$ (voir Section 3.5).

Nous terminons par un résultat qui permet, sous certaines hypothèses, de décomposer la restriction à un sous-groupe K de G d'une représentation obtenue par induction compacte en une somme directe de représentations de K obtenues par induction compacte à partir de divers sous-groupes : c'est la décomposition de Mackey, dont une preuve est donnée dans [Vig96, Section I.5.4.v)].

Proposition 2.2.7 (Décomposition de Mackey). *Soient H et K deux sous-groupes fermés de G tels que les doubles classes HgK $(g \in G)$ soient à la fois ouvertes et fermées, ce qui est par exemple le cas lorsque l'un des deux groupes H ou K est ouvert. Pour toute représentation lisse σ de H sur C, la restriction à K induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$-modules :*

$$\mathrm{ind}_H^G(\sigma)|_K \simeq \bigoplus_x \mathrm{ind}_{K\cap H^x}^K(\sigma^x) \ , \tag{2.3}$$

où x parcourt un système de représentants dans G de $H\backslash G/K$.

Il existe aussi une décomposition de Mackey pour les induites lisses, dont nous ne donnons pas d'énoncé général car nous n'en aurons pas l'utilité. Nous mentionnons cependant le cas particulier suivant, qui est notamment vérifié lorsque G admet une décomposition de type Iwasawa.

Lemme 2.2.8. *Supposons que $G = BK$ avec B et K deux sous-groupes fermés de G.*

1. *Si σ est une C-représentation lisse de B, la restriction à K induit un isomorphisme de $C[K]$-modules*
$$\mathrm{Ind}_B^G(\sigma)|_K \simeq \mathrm{Ind}_{B\cap K}^K(\sigma) \ .$$
2. *Si V est une C-représentation lisse de K, la restriction à B induit un isomorphisme de $C[B]$-modules*
$$\mathrm{ind}_K^G(V)|_B \simeq \mathrm{ind}_{K\cap B}^B(V) \ .$$

Nous renvoyons le lecteur intéressé par plus de détails à [Vig96, Section I.5.5].

2.3 Algèbres de Hecke et espaces de vecteurs invariants

On suppose dans cette section que H désigne un sous-groupe ouvert de G.

2.3.1 Rappels sur les algèbres de Hecke

Définition 2.3.1. Soit (σ, V) une représentation lisse de H sur C. L'*algèbre de Hecke associée au triplet* (G, H, σ) est la C-algèbre $\mathcal{H}_C(G, H, \sigma)$ des endomorphismes du $C[G]$-module $\mathrm{ind}_H^G(\sigma)$:

$$\mathcal{H}_C(G, H, \sigma) := \mathrm{End}_{C[G]}(\mathrm{ind}_H^G(\sigma)) \ .$$

Dans le cas particulier où $\sigma = \mathbf{1}$ est la représentation triviale de H, on écrira $\mathcal{H}_C(G, H)$ au lieu de $\mathcal{H}_C(G, H, \mathbf{1})$ pour alléger les notations.

L'énoncé suivant fournit une autre description de l'algèbre $\mathcal{H}_C(G, H, \sigma)$ que l'on utilisera volontiers lorsque l'on devra faire des calculs explicites.

Proposition 2.3.2. *La C-algèbre $\mathcal{H}_C(G, H, \sigma)$ est naturellement isomorphe à l'algèbre de convolution $\mathbb{H}_C(G, H, \sigma)$ des fonctions $f : G \to \mathrm{End}_C(V)$ telles que :*

i) *pour tout $v \in V$, l'application $[g \mapsto f(g)(v)]$ est lisse et à support compact modulo H (à gauche) ;*

ii) $\forall\ h_1, h_2 \in H,\ \forall\ g \in G,\ f(h_1 g h_2) = \sigma(h_1) f(g) \sigma(h_2)$.

La structure d'algèbre de $\mathbb{H}_C(G, H, \sigma)$ est donnée par le produit de convolution défini par la formule suivante :

$$\forall\ f_1, f_2 \in \mathbb{H}_C(G, H, \sigma),\ \forall g \in G,\ (f_1 \star f_2)(g) = \sum_{x \in G/H} f_1(x) f_2(x^{-1}g) \ .$$

Démonstration. Ce résultat est démontré dans [BL94, Proposition 5]. Sa preuve repose essentiellement sur une réécriture convenable de la réciprocité de Frobenius compacte, et consiste à vérifier que l'application envoyant une fonction $f \in \mathbb{H}_C(G,H,\sigma)$ sur l'opérateur $T_f \in \mathcal{H}_C(G,H,\sigma)$ défini par :

$$\forall\ \phi \in \mathrm{ind}_H^G(\sigma),\ T_f(\phi) : g \mapsto \sum_{Hx \in H\backslash G} f(gx^{-1})(\phi(x)) = \sum_{xH \in G/H} f(x)(\phi(x^{-1}g))\ ,$$

est effectivement un isomorphisme de C-algèbres. □

Remarque 2.3.3. Lorsque σ est de dimension finie, l'espace $\mathbb{H}_C(G,H,\sigma)$ est celui des fonctions $f : G \to \mathrm{End}_C(V)$ lisses à support compact modulo H qui satisfont à la condition $ii)$ ci-dessus.

On note $T_f \in \mathcal{H}_C(G,H,\sigma)$ l'opérateur de Hecke associé à $f \in \mathbb{H}_C(G,H,\sigma)$ par l'isomorphisme de la Proposition 2.3.2. Lorsque le support de f est égal à une seule double classe Hg_0H, on dispose d'une formule explicite assez simple permettant de calculer T_f sur les fonctions standard [BL94, Equation (9)] que nous rappelons ici. Si $\{k_i g_0^{-1}\}_{i\in I}$ est un système de représentants des classes à gauche modulo H de $Hg_0^{-1}H$, i.e. si l'on a $Hg_0^{-1}H = \bigsqcup_{i\in I} k_i g_0^{-1}H$, alors :

$$\forall\ g \in G,\ \forall\ v \in V,\ T_f([g,v]) = \sum_{i\in I} [gk_i g_0^{-1}, f(g_0)\sigma(k_i^{-1})v]\ . \tag{2.4}$$

2.3.2 Compatibilité à la conjugaison des induites

On commence par une remarque générale simple mais très importante pour la suite.

Proposition 2.3.4. *Si π est une représentation lisse de G sur C et si α est un élément de G, tout endomorphisme de $C[G]$-modules $T : \pi \to \pi$ est naturellement un endomorphisme de $C[G]$-modules $T : \pi^\alpha \to \pi^\alpha$.*
Autrement dit : l'application identité induit un isomorphisme de C-algèbres

$$\mathrm{End}_{C[G]}(\pi) \simeq \mathrm{End}_{C[G]}(\pi^\alpha)\ .$$

Démonstration. Soit $T : \pi \to \pi$ un endomorphisme de $C[G]$-modules. On peut encore définir $T(f)$ pour tout élément $f \in \pi^\alpha$ puisque π et π^α ont les mêmes espaces vectoriels sous-jacents. Si l'on note $g \cdot f$ l'action de g sur f dans π, et $g \bullet f$ l'action de g sur f dans π^α, on a alors :

$$\begin{aligned} \forall\ g \in G,\quad T(g \bullet f) &= T((\alpha^{-1}g\alpha)\cdot f) \\ &= (\alpha^{-1}g\alpha)\cdot T(f) \quad \text{par } G\text{-équivariance de } T \\ &= g \bullet T(f)\ , \end{aligned}$$

de sorte que T est encore un endomorphisme de $C[G]$-modules pour π^α. L'interprétation en termes d'espaces d'endomorphismes est une conséquence directe de ce qui précède et de l'identité $(\pi^\alpha)^{\alpha^{-1}} = \pi$. □

Remarque 2.3.5. Cet énoncé et cette démonstration restent valables si l'on considère une représentation π d'un sous-groupe normal H de G.

Un cas particulier de la Proposition 2.3.4 concerne les représentations π obtenues par induction compacte : les algèbres d'endomorphismes qui apparaissent alors sont des algèbres de Hecke. Les Propositions 2.2.5 et 2.3.4 permettent donc d'obtenir l'énoncé suivant.

Corollaire 2.3.6. *Soient H un sous-groupe ouvert de G, σ une représentation lisse de H sur C et α un élément de G. L'application identité induit un isomorphisme de C-algèbres :*

$$\mathcal{H}_C(G,H,\sigma) \simeq \mathcal{H}_C(G,H^\alpha,\sigma^\alpha)\ .$$

2.3.3 Structure de module sur les espaces de vecteurs invariants

Si (π, V) est une représentation lisse de G sur C et si H est un sous-groupe ouvert compact de G, l'espace π^H des vecteurs invariants sous l'action de H est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{H}_C(G,H)$-module à droite : en effet, la réciprocité de Frobenius compacte assure que l'on a

$$\pi^H = \mathrm{Hom}_H(\mathbf{1}, \pi) = \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_H^G(\mathbf{1}), \pi) ,$$

et la composition à droite munit $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_H^G(\mathbf{1}), \pi)$ d'une structure naturelle de $\mathrm{End}_G(\mathrm{ind}_H^G(\mathbf{1})) = \mathcal{H}_C(G,H)$-module à droite.
L'expression donnant directement la structure de $\mathcal{H}_C(G,H)$-module à droite de π^H s'obtient comme suit. Soient $v \in \pi^H$, $T \in \mathcal{H}_C(G,H)$ et $v|T \in \pi^H$ le vecteur résultant de l'action de T sur v. Etant donné que le $C[G]$-module universel $C[H\backslash G]$ est engendré par 1_H, il existe un unique morphisme de $C[G]$-modules $\Phi_v : C[H\backslash G] \to V$ envoyant 1_H sur v. L'action de T sur v est alors donnée par la formule suivante :

$$v|T := \Phi_v \circ T(1_H) . \tag{2.5}$$

La connaissance de ces modules permet d'obtenir un critère d'irréductibilité puissant pour les représentations modulo p, pour peu que l'on dispose de bons pro-p-groupes. Il justifie l'étude des modules simples à droite sur certaines algèbres de Hecke, dont celle qui est effectuée dans le Chapitre 6 de cette thèse.

Proposition 2.3.7. *On suppose que C est de caractéristique p et que P est un pro-p-sous-groupe ouvert de G.*
Soit π une représentation lisse de G sur C engendrée comme $C[G]$-module par l'espace π^P de ses vecteurs P-invariants. Si π^P est un $\mathcal{H}_C(G,P)$-module (à droite) simple, alors π est une représentation irréductible de G.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la simplicité du $\mathcal{H}_C(G,P)$-module simple π^P assure sa non-nullité, et donc aussi celle de π. Supposons maintenant que σ soit une sous-représentation non nulle de π. D'après le Lemme 2.1.9, l'espace σ^P des vecteurs P-invariants est non nul. Il définit alors un sous-$\mathcal{H}_C(G,P)$-module non nul de π^P, qui doit être égal à π^P par hypothèse de simplicité. Comme nous avons supposé que π^P engendre la représentation π, on obtient que σ^P engendre le $C[G]$-module π, ce qui montre que $\sigma = \pi$ et prouve l'irréductibilité de π. □

Chapitre 3

Représentations modulo p de $SL_2(F)$

3.1 Introduction

Soient p un nombre premier et F un corps local non archimédien complet pour une valuation discrète, de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel fini k_F. Au milieu des années 90, Barthel et Livné [BL94, BL95] ont donné une classification des représentations modulo p de $GL_2(F)$ faisant apparaître une famille mystérieuse de représentations qu'ils ont appelées représentations *supersingulières* et qui sont en général incomprises. Le seul cas bien compris est celui où $F = \mathbb{Q}_p$, dans lequel les travaux de Breuil fournissent une description explicite des représentations supersingulières de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ [Br, Théorème 1.1] qui permet de définir une « correspondance de Langlands locale semi-simple modulo p » [Br, Définition 4.2.4]. De plus, les travaux d'Ollivier [O3] montrent que dans ce cas, le foncteur qui associe à une représentation modulo p de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ son espace de vecteurs invariants sous l'action du pro-p-Iwahori standard $I(1)$ établit une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations lisses admissibles à caractère central fixé de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ engendrées par leurs $I(1)$-invariants et la catégorie des modules à droite sur la pro-p-algèbre de Hecke-Iwahori de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. Ils prouvent aussi que cette équivalence de catégories est mise en défaut lorsque k_F est de cardinal strictement supérieur à p ou lorsque F est le corps des séries de Laurent à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ avec p impair [O3, Théorème 1.3].

L'objectif de ce chapitre est de donner un premier panorama de la théorie des représentations modulo p de $SL_2(F)$. Une motivation possible réside dans le fait que le groupe $SL_2(F)$ est de structure suffisamment proche de celle du groupe $GL_2(F)$ pour espérer obtenir des résultats de classification semblables à ceux obtenus par Barthel-Livné et Breuil, voire une équivalence de catégories analogue à celle d'Ollivier [1]. Nous verrons qu'il est cependant déjà suffisamment différent pour que l'on voie apparaître quelques divergences significatives au niveau de la structure des représentations supersingulières, divergences qui pourraient peut-être aider à comprendre pourquoi le cas de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ est si particulier vis-à-vis de la théorie relative à $GL_2(F)$ lorsque $F \neq \mathbb{Q}_p$, voire plus généralement vis-à-vis de la théorie des représentations modulo p de $GL_n(F)$ pour $n \geq 2$.

Présentation des principaux résultats

Le premier résultat important de ce chapitre concerne les représentations non supercuspidales de $G_S := SL_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On rappelle qu'une représentation lisse irréductible est dite

1. Ce dernier point est plutôt traité dans le Chapitre 6.

supercuspidale si elle n'est pas isomorphe à un sous-quotient d'une représentation de la forme $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$, où l'on note B_S le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures de G_S et où $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ désigne un caractère lisse. L'étude de la structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module portée par la représentation $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ permet en particulier d'obtenir la description de toutes les représentations lisses irréductibles non supercuspidales de G_S (Théorème 3.4.1).

Théorème 3.1.1. *Soit $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse.*

1. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est de longueur 2. Il est indécomposable si et seulement si η n'est pas le caractère trivial. Dans le cas contraire, il est totalement décomposé.*
2. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est irréductible si et seulement si η n'est pas le caractère trivial. Dans le cas contraire, c'est un $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module indécomposable de longueur 2 admettant le caractère trivial $\mathbf{1}$ comme sous-objet et la représentation de Steinberg St_S comme quotient.*
3. *Il n'existe pas d'isomorphisme entre sous-quotients d'induites paraboliques provenant de caractères distincts.*

Une preuve rapide du troisième point de ce théorème utilise la connaissance que nous avons de la dimension sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ des espaces de vecteurs invariants sous l'action du pro-p-sous-groupe d'Iwahori $I_S(1)$ des représentations non supercuspidales, dont on rappelle les valeurs possibles ci-dessous (Propositions 3.4.11, 3.4.15 et Corollaire 3.4.16). On démontre aussi une relation forte entre les représentations non supercuspidales de $G := GL_2(F)$ et de G_S (Théorème 3.4.20), qui utilise la seconde assertion du Théorème 3.1.1 pour assurer que l'on a bien un isomorphisme mais ne nécessite aucune connaissance sur les espaces de vecteurs invariants sus-mentionnés. Mentionnons que nous disposons du même type de résultats pour les représentations lisses non irréductibles définies par induction parabolique à partir d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de B_S.

Théorème 3.1.2. *Soit V une représentation lisse irréductible non supercuspidale de $SL_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

1. *L'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de V est de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ si V est une induite parabolique d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de B_S, et de dimension 1 sinon.*
2. *A torsion par un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de G près, il existe une unique $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible non supercuspidale de $GL_2(F)$ dont la restriction à G_S est isomorphe à V.*

Pour attraper les autres représentations possibles de G_S, nous suivons les idées développées par Barthel-Livné [BL94], ce qui nécessite en premier lieu d'étudier les algèbres de Hecke sphériques attachées à G_S. Il ne faut pas oublier de tenir compte du fait que, contrairement à ce qui a lieu pour G, l'action par conjugaison de G_S sur l'ensemble de ses sous-groupes compacts maximaux n'est pas transitive. Elle possède deux orbites : l'une est représentée par le sous-groupe compact maximal $K_0 := SL_2(\mathcal{O}_F)$ formé des points $\mathcal{O}_F$-rationnels de SL_2, et l'autre est représentée par le sous-groupe compact maximal $K_1 := \alpha K_0 \alpha^{-1}$ où $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_F \end{pmatrix}$ est un élément de G n'appartenant pas à G_S. Cependant, comme cela est expliqué à partir de la Section 3.5.5, le choix de l'un ou de l'autre de ces compacts ne modifie pas les résultats obtenus, ce qui explique que l'on puisse se limiter à l'étude des objets associés à K_0.
On dispose alors de l'énoncé suivant, obtenu par concaténation du Corollaire 3.5.8 et des Propositions 3.5.13 et 3.5.22, qui affirme que les algèbres de Hecke sphériques attachées à G_S sont de nouveau des algèbres de polynômes sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ à une indéterminée (donc sont en particulier des algèbres commutatives) et que leur action est compatible avec celle des algèbres de Hecke sphériques attachées à G, sous réserve de donner un sens à cette assertion, comme nous le faisons dans la Section 3.5.3. Rappelons que si $\mathcal{K}$ est un sous-groupe compact maximal de G_S, on sait

déterminer facilement un système « naturel » de représentants des classes d'isomorphisme de ses représentations lisses irréductibles sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, ce système dépendant du choix du plongement $\iota : k_F \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$. Nous renvoyons à la Section 3.5.1 pour plus de détails à leur sujet, et notamment pour la définition des représentations $\sigma_{\vec{r}}$ qui apparaissent dans le prochain énoncé.

Théorème 3.1.3. *Soient $\mathcal{K}$ un sous-groupe compact maximal de $SL_2(F)$ et σ une représentation lisse irréductible de $\mathcal{K}$.*

1. *L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(SL_2(F), \mathcal{K}, \sigma)$ est une algèbre de polynômes en un opérateur de Hecke $\tau \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(SL_2(F), \mathcal{K}, \sigma)$ explicitement déterminé.*
2. *Supposons que $\mathcal{K} = K_0$ et que $\sigma = \sigma_{\vec{r}}$, avec $\vec{r} \in \{0, \ldots, p-1\}^f$, est la $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de K_0 obtenue par inflation de la représentation $\mathrm{Sym}^{\vec{r}}(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ du groupe fini $SL_2(k_F)$. Notons[2] $T_{\vec{r}} \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(GL_2(F), GL_2(\mathcal{O}_F)Z, \sigma_{\vec{r}})$ l'opérateur de Hecke isolé par Barthel-Livné dans [BL94, Proposition 8]. L'action de l'opérateur τ introduit ci-dessus est alors donnée par le carré de l'opérateur T :*

$$\forall\ g \in G_S,\ \forall\ v \in \sigma_{\vec{r}},\ \tau([g, v]) = T_{\vec{r}}^2([g, v])\ .$$

Associé à la paramétrisation des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles de K_0 et K_1 donnée dans la Section 3.5.1, cet énoncé nous permet de définir des représentations conoyaux $\pi_0(\vec{r}, \lambda)$ et $\pi_1(\vec{r}, \lambda)$ indexées par les paires de paramètres $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \ldots, p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$ en posant :

$$\forall\ i \in \{0, 1\},\ \pi_i(\vec{r}, \lambda) := \mathrm{Coker}(\tau_{\vec{r}}^i - \lambda)\ ,$$

où $\tau_{\vec{r}}^i$ est l'opérateur de Hecke τ qui apparaît dans le Théorème 3.1.3 lorsque l'on prend $\mathcal{K} = K_i$ et $\sigma = \sigma_{\vec{r}}^{\alpha^i}$. La conjugaison par α fournit alors de bons isomorphismes entre représentations conoyaux attachées à des sous-groupes compacts distincts (Proposition 3.5.23), ce qui justifie qu'une fois encore, on ne se préoccupe que du comportement des objets attachés à K_0. Ces représentations conoyaux permettent par ailleurs de donner une nouvelle description des représentations non supercuspidales de G_S (Théorème 3.5.18) compatible avec celle qui existe déjà pour les représentations non supercuspidales de G [BL94, Theorems 30 & 33] après application du foncteur de restriction à G_S (Corollaire 3.5.19). Signalons que l'on note encore ι le morphisme de groupes $\mathcal{O}_F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ obtenu par composition de ι avec la projection $\mathcal{O}_F^\times \twoheadrightarrow k_F^\times$ définie par la réduction modulo ϖ_F, et que si $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ est un scalaire non nul, on désigne par $\mu_\lambda : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ le caractère non ramifié envoyant ϖ_F sur λ.

Théorème 3.1.4. *Soit $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \ldots p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$ une paire de paramètres.*

1. *La conjugaison par α induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules :*

$$\pi_1(\vec{r}, \lambda) \simeq (\pi_0(\vec{r}, \lambda))^\alpha\ .$$

2. *Si λ est non nul et si $(\vec{r}, \lambda) \neq (\vec{0}, 1)$, les $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $\pi_0(\vec{r}, \lambda)$ et $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_{\lambda^{-1}}\iota^{\overrightarrow{p-1-r}})$ sont isomorphes. En particulier, $\pi_0(\vec{r}, \lambda)$ est une représentation irréductible de G_S lorsque $(\vec{r}, \lambda) \notin \{(\vec{0}, 1), (\overrightarrow{p-1}, 1)\}$.*
3. *La représentation $\pi_0(\vec{0}, 1)$ est une extension non triviale du caractère trivial $\mathbf{1}$ par la représentation de Steinberg St_S.*

Cet énoncé permet alors de prouver que toute représentation lisse irréductible qui est supersingulière relativement à K_i, i.e. qui est quotient d'une représentation de la forme $\pi_i(\vec{r}, 0)$, est nécessairement supercuspidale.

2. Par abus de notation, on note aussi $\sigma_{\vec{r}}$ la $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $GL_2(\mathcal{O}_F)$ obtenue par inflation de la représentation $\mathrm{Sym}^{\vec{r}}(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ du groupe fini $GL_2(k_F)$.

Corollaire 3.1.5. *Soit $i \in \{0,1\}$.*

1. *Toute représentation lisse irréductible non supercuspidale de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est quotient d'une unique représentation de G_S de la forme $\pi_i(\vec{r},\lambda)$, et ce quotient est de multiplicité 1. De plus, la paire $(\vec{r},\lambda)$ satisfait alors $\lambda \neq 0$ et ne dépend pas du choix de i.*
2. *Toute représentation supersingulière par rapport à K_i est supercuspidale.*

Pour aller plus loin dans l'étude des représentations lisses de G_S et de leurs relations avec les représentations lisses de G, nous avons besoin de faire l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1. La représentation considérée admet une paramétrisation possible par rapport à K_0.

C'est une hypothèse raisonnable et peu contraignante : si l'on suppose que F n'est pas de caractéristique 2, elle est vérifiée par toutes les représentations lisses irréductibles de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (Théorème 3.5.36). Elle est aussi vérifiée, sans condition sur F, par toute représentation lisse irréductible admissible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (Théorème 3.5.35). Son intérêt réside uniquement dans le fait qu'elle nous permet de montrer le résultat suivant.

Théorème 3.1.6. *Soit $i \in \{0,1\}$ et soit π une représentation lisse irréductible de G_S satisfaisant l'Hypothèse 1. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *π est supercuspidale ;*

ii) *π est supersingulière relativement à K_i.*

On peut donc parler de représentation supersingulière sans préciser de choix de sous-groupe compact maximal, et obtenir la classification suivante (Théorème 3.5.42) qui partitionne l'ensemble des représentations lisses irréductibles de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ en quatre familles qui correspondent, via le foncteur de restriction à G_S, aux familles apparaissant dans la classification établie par Barthel-Livné pour $GL_2(F)$ [BL94, Theorem 33 & Corollary 36].

Théorème 3.1.7.
1. *Les classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles admissibles de $SL_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ se partitionnent en quatre familles :*
   - *(a) le caractère trivial $\mathbf{1}$;*
   - *(b) la représentation de Steinberg St_S ;*
   - *(c) les représentations paraboliquement induites $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ avec η un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse non trivial de B_S ;*
   - *(d) les représentations supersingulières.*
2. *Cette classification est compatible avec la classification de Barthel-Livné pour les représentations lisses irréductibles à caractère central de $GL_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*
3. *On peut supprimer l'hypothèse d'admissibilité lorsque F n'est pas de caractéristique* 2.

Intéressons-nous maintenant au cas $F = \mathbb{Q}_p$, dans lequel l'Hypothèse 1 est vérifiée par n'importe quelle représentation lisse irréductible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On peut obtenir une description plus explicite des représentations supersingulières de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, de leurs liens avec les représentations supersingulières de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ (qui sont l'objet de [Br], dont on reprend les notations dans le prochain énoncé) et démontrer en particulier le résultat suivant (Théorème 3.6.13).

Théorème 3.1.8.
1. *A isomorphisme près, il existe p représentations supersingulières de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ notées $\pi_0, \ldots, \pi_{p-1}$.*
2. *La restriction à G_S d'une représentation supersingulière de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module de longueur 2 totalement décomposé. Plus précisément, on a :*

$$\forall\, r \in \{0,\ldots,p-1\},\ \pi(r,0,\mathbf{1})|_{G_S} \simeq \pi_r \oplus \pi_{p-1-r}\ .$$

3. *Pour tout paramètre $r \in \{0, \ldots, p-1\}$, l'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de π_r est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et l'on a $\pi_r^\alpha \simeq \pi_{p-1-r}$.*

Par conséquent, si l'on souhaite obtenir un analogue pour $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ de la correspondance de Langlands locale modulo p définie par Breuil pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ qui lui soit compatible par restriction à $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, il nous faut nécessairement poser la définition suivante.

Définition 3.1.9. On appelle *correspondance de Langlands locale semi-simple modulo p pour* $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ la bijection entre les classes d'isomorphisme des représentations projectives de dimension 2 de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et certains paquets de classes d'isomorphisme de représentations lisses semi-simples de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ définie par les flèches suivantes :
– pour tout entier $r \in \{0, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$, on pose [3]

$$proj \circ \mathrm{Ind}(\omega_2^{r+1}) \longleftrightarrow \{\pi_r \ ; \ \pi_{p-1-r}\} \ ;$$

– pour toute paire de paramètres $(r, \lambda) \in \{0, \ldots, r-1\} \times \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, on pose

$$proj \circ \begin{pmatrix} \varepsilon^{r+1}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \leftrightarrow \pi_0(r, \lambda)^{ss} \oplus \pi_0([p-3-r], \lambda^{-1})^{ss} \ .$$

Plan du chapitre

Après une section de préliminaires techniques, nous consacrons la Section 3.3 à l'étude des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de $SL_2(F)$ et de son sous-groupe de Borel B_S des matrices triangulaires supérieures. La Section 3.4 est quant à elle dévolue à l'étude des représentations non supercuspidales de $SL_2(F)$. Elle repose sur la compréhension de la structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module des représentations paraboliquement induites, décrite dans le premier point du Théorème 3.1.1, et contient toutes les preuves des résultats formant les Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2. Signalons que la Section 7.1 contiendra une autre démonstration de certains résultats contenus dans la Section 3.4, reposant sur des méthodes plus proches de celles utilisées par Barthel-Livné [BL94] mais moins susceptibles de généralisation à d'autres groupes.

L'objectif de la Section 3.5, qui est au cœur de ce chapitre, est d'utiliser ce qui précède pour fournir une classification des représentations lisses irréductibles de $SL_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et approfondir les liens existants entre ces représentations et les représentations lisses irréductibles à caractère central de $GL_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, afin de prouver notamment le Théorème 3.1.7. Cette section est organisée de la manière suivante : nous décrivons tout d'abord les $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles des sous-groupes compacts maximaux de $SL_2(F)$ et la structure des algèbres de Hecke sphériques qui leur sont associées. On explique ensuite comment certaines sous-algèbres des algèbres de Hecke sphériques attachées à $GL_2(F)$ peuvent être considérées comme sous-algèbres des algèbres de Hecke sphériques correspondantes attachées à $SL_2(F)$, ce qui permet de donner un sens à la seconde affirmation du Théorème 3.1.3 et de terminer la preuve dudit théorème. On démontre ensuite le Théorème 3.1.4, qui fournit notamment une autre description des représentations non supercuspidales de $SL_2(F)$ et mène à la définition des notions de paramétrisation admissible et de représentation supersingulière par rapport à un sous-groupe compact maximal donné. Comme affirmé dans le Corollaire 3.1.5, les représentations supersingulières sont alors nécessairement supercuspidales.

Remarquons qu'aucun des résultats vus jusqu'ici ne nécessite de se placer sous l'Hypothèse 1. Nous expliquons dans la Section 3.5.6 en quoi elle nous est nécessaire pour achever la preuve

3. Très précisément, l'ensemble qui apparaît dans le membre de droite lorsque $r = \dfrac{p-1}{2}$ est réduit à l'élément $\{\pi_{\frac{p-1}{2}}\}$. C'est le seul cas où l'on obtient un singleton, les autres paquets étant tous de taille 2.

du Théorème 3.1.7, et nous l'utilisons ensuite pour démontrer le Théorème 3.1.6, dont l'énoncé fournit les éléments manquants jusqu'alors pour terminer la démonstration du Théorème 3.1.7.

La dernière section de ce chapitre traite des spécificités du cas $F = \mathbb{Q}_p$, dans lequel l'Hypothèse 1 est vérifiée par toutes les représentations lisses irréductibles. On commence par y donner une description explicite des représentations supersingulières de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, puis l'on détermine la structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[SL_2(\mathbb{Q}_p)]$-module des représentations supersingulières de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ décrites par Breuil [Br]. On décrit ensuite leurs classes d'isomorphisme, ce qui permet de terminer la preuve du Théorème 3.1.8. On établit enfin ce qui pourrait être qualifié de correspondance de Langlands semi-simple modulo p pour $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, à savoir une bijection qui établit un parallèle entre les classes d'isomorphisme des représentations projectives de dimension 2 de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et des ensembles de classes d'isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses semi-simples de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, de manière compatible[4] à la correspondance de Langlands locale modulo p établie par Breuil pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. On montre qu'il y a au plus une expression possible pour une telle correspondance, qui est celle donnée par la Définition 3.1.9.

3.2 Préliminaires

3.2.1 Notations générales

On fixe un entier premier p et un corps local non archimédien F complet pour une valuation discrète, de caractéristique résiduelle égale à p et de corps résiduel fini. On note $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F, $\mathfrak{p}_F$ son idéal maximal et $q = p^f$ le cardinal du corps résiduel $k_F = \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}_F$. On fixe une fois pour toutes une uniformisante $\varpi_F \in \mathfrak{p}_F$, une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_p$ de k_F et un plongement $\iota : k_F \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$. On note $v_F : F \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ la valuation ϖ_F-adique de F normalisée par $v_F(\varpi_F) = 1$ et $\mathrm{red} : \mathcal{O}_F \twoheadrightarrow k_F$ l'application de réduction modulo ϖ_F.

On désigne par $k_F^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de k_F, que l'on identifie à $\mathcal{O}_F$ via l'application $A : k_F^{\mathbb{N}} \to \mathcal{O}_F$ définie par la formule suivante : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et toute famille $\lambda = (\lambda_i)_{i=0}^n$ d'éléments de k_F, on pose

$$A(\lambda) := \sum_{i=0}^{n} \varpi_F^i[\lambda_i] \in \mathcal{O}_F \ ,$$

où $[.] : k_F \hookrightarrow \mathcal{O}_F^\times$ désigne l'application de Teichmüller.

Pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, on note $\mu_\lambda : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ le caractère lisse non ramifié (i.e. trivial sur $\mathcal{O}_F^\times$) valant λ en ϖ_F. Pour tout entier $r \in \{0, \ldots, q-1\}$, on note $\iota^r : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ le caractère trivial sur ϖ_F dont l'action sur $\mathcal{O}_F^\times$ est définie par la composition suivante :

$$\mathcal{O}_F^\times \xrightarrow{red} k_F^\times \longrightarrow k_F^\times \xrightarrow{\iota} \overline{\mathbb{F}}_p^\times \ ,$$

la flèche du milieu étant donnée par l'élévation à la puissance r. Plus généralement, si $\vec{r} = (r_0, \ldots, r_{f-1})$ est un f-uplet d'entiers appartenant à $\{0, \ldots, p-1\}$, on pose $\iota^{\vec{r}} := \iota^r$ avec $r = \displaystyle\sum_{i=0}^{f-1} p^i r_i$ entier appartenant à l'ensemble $\{0, \ldots, q-1\}$.

4. Via la projection des représentations galoisiennes d'une part et le foncteur de restriction de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ à $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ d'autre part

On désigne par G le groupe $GL_2(F)$, par K le groupe $GL_2(\mathcal{O}_F)$ qui est, à conjugaison près, l'unique sous-groupe compact maximal de G, par I le sous-groupe d'Iwahori standard de K et par $I(1)$ son pro-p-Iwahori. On rappelle que I est l'ensemble des éléments de K dont la réduction modulo ϖ_F est une matrice triangulaire supérieure du groupe fini $GL_2(k_F)$ tandis que $I(1)$ est le sous-groupe des éléments de I dont l'image par l'application de réduction modulo ϖ_F est unipotente.
On note $Z = F^\times I_2$ le centre de G (où I_2 est l'élément neutre de G), B le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures de G, T le tore maximal déployé des matrices diagonales de G et $U = \left\{ u(x) := \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ x \in F \right\}$ le radical unipotent de B. Rappelons que l'on dispose en particulier de la factorisation $B = TU = UT$. On note $\overline{U} = \left\{ \overline{u}(x) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix},\ x \in F \right\}$ le radical unipotent du sous-groupe de Borel opposé $\overline{B}$ formé des matrices triangulaires inférieures de G.
On introduit les éléments suivants de G, qui jouent un rôle important dans l'étude des représentations modulo p de G (voir par exemple [BL94], [Br] ou [O3]) :

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_F \end{pmatrix},\ \omega := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\omega_\lambda := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -A(\lambda) \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in k_F^{\mathbb{N}}$ arbitraire.

Nous nous intéressons dans ce chapitre au groupe spécial linéaire $G_S := SL_2(F)$. Ses sous-groupes compacts maximaux sont partitionnés en deux classes de conjugaison représentées par les sous-groupes $K_0 := SL_2(\mathcal{O}_F)$ et $K_1 := \alpha K_0 \alpha^{-1}$. Le centre de G_S est réduit à l'ensemble $\{I_2, -I_2\}$ (qui est trivial lorsque F est de caractéristique 2) et contenu dans $K_0 \cap K_1$. On note $B_S = B \cap G_S$ le sous-groupe de Borel de G_S consitué des matrices triangulaires supérieures et $T_S = T \cap G_S$ le tore maximal déployé des matrices diagonales, ce qui permet d'écrire que $B_S = T_S U = U T_S$. Le sous-groupe d'Iwahori standard de K_0 est noté I_S et est égal à $I \cap G_S$; son pro-p-Iwahori $I_S(1)$ est quant à lui égal à $I(1) \cap G_S$. On note Γ_S le noyau de l'application $K_0 \twoheadrightarrow SL_2(k_F)$ induite par la réduction modulo ϖ_F : c'est exactement le premier sous-groupe de congruence de G_S, dont on rappelle qu'il est défini par

$$\Gamma_S := \{g \in G_S \mid g \equiv I_2[\varpi_F]\} = \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}_F & \mathfrak{p}_F \\ \mathfrak{p}_F & 1+\mathfrak{p}_F \end{pmatrix} \cap G_S .$$

On introduit enfin les éléments suivants de G_S :

$$\alpha_0 := \begin{pmatrix} \varpi_F^{-1} & 0 \\ 0 & \varpi_F \end{pmatrix},\ w_0 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \beta_0 := \begin{pmatrix} 0 & -\varpi_F^{-1} \\ \varpi_F & 0 \end{pmatrix} .$$

On vérifie facilement que l'on a $\beta_0 = \alpha_0 w_0$ ainsi que les relations suivantes :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ w_0 \alpha_0^n w_0^{-1} = \alpha_0^{-n} = w_0^{-1} \alpha_0^n w_0 \ ; \tag{3.1}$$

$$\forall\, x \in F,\ w_0 u(x) = \overline{u}(-x) w_0 \ . \tag{3.2}$$

La relation (3.2) montre en particulier que l'on a $\overline{U} w_0 = w_0 U$.

3.2.2 Actions de groupes sur l'arbre de Bruhat-Tits de $SL_2(F)$

Nous renvoyons à [Ser1] pour plus de détails concernant la construction et les propriétés de l'arbre de Bruhat-Tits $\mathcal{X}$ de $SL_2(F)$. Une description élémentaire de $\mathcal{X}$ est la suivante : ses

sommets représentent les classes d'homothétie des $\mathcal{O}_F$-réseaux du F-espace vectoriel $F \oplus F$, et deux sommets sont reliés par une arête si et seulement s'il existe deux réseaux L_0, L_1 les représentant qui vérifient $\varpi_F L_0 \subset L_1 \subset L_0$, les inclusions étant strictes. On note v_0 le sommet correspondant à la classe d'homothétie du réseau standard $\mathcal{O}_F \oplus \mathcal{O}_F$ de $F \oplus F$, ce qui justifie son appellation de *sommet standard*.
L'arbre $\mathcal{X}$ est naturellement muni d'une distance, définie comme le nombre minimal d'arêtes nécessaire pour construire un chemin dans l'arbre entre deux sommets. En particulier, deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si la distance qui les sépare est égale à 1. Pour tout entier $n \geq 0$, on appellera *cercle de rayon* n (respectivement : *boule de rayon* n) l'ensemble des sommets de $\mathcal{X}$ situés à distance n (resp. : inférieure ou égale à n) du sommet standard v_0.

Cet arbre est également muni d'une action de G (donc en particulier de G_S) définie à partir de l'action matricielle d'un élément de G sur un $\mathcal{O}_F$-réseau de $F \oplus F$. Elle s'effectue par isométries pour la distance définie ci-dessus : pour tous sommets x, y de $\mathcal{X}$ et tout élément g de G, la distance entre gx et gy est égale à la distance entre x et y. De plus, l'action de G sur l'ensemble des sommets de $\mathcal{X}$ est transitive, tandis que l'action de G_S partitionne cet ensemble en deux orbites : celle du sommet standard v_0, que l'on note $\mathcal{A}_p$, et celle du sommet voisin $v_1 := \alpha v_0$, que l'on note $\mathcal{A}_{imp}$. Pour tout indice $i \in \{0, 1\}$, le stabilisateur de v_i sous l'action de G_S est égal au sous-groupe compact maximal K_i, tandis que le stabilisateur de v_0 sous l'action de G est égal au sous-groupe KZ de G.
L'action de G sur $\mathcal{X}$ permet par ailleurs de donner une description explicite des sommets situés à distance n de v_0 [Br, page 5]. Une partition en est en effet donnée par

$$\{g^0_{n,\lambda} v_0,\ \lambda \in k_F^n\} \bigsqcup \{g^1_{n-1,\mu} v_0,\ \mu \in k_F^{n-1}\}\ , \tag{3.3}$$

où les éléments $g^0_{m,\lambda}$ et $g^1_{m,\lambda}$ sont définis comme suit :

$$g^0_{m,\lambda} := \begin{pmatrix} \varpi_F^m & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } g^1_{m,\lambda} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\lambda) & \varpi_F^{m+1} \end{pmatrix}$$

avec $g^0_{0,0} = I_2$ et $g^1_{0,0} = \alpha$.
Rappelons alors que, par définition de l'action de G sur $\mathcal{X}$, le centre Z de G fixe chaque sommet de l'arbre. Ceci nous permet d'obtenir la description suivante des cercles de $\mathcal{X}$ en termes d'action de G_S (et non plus de G) sur $\mathcal{X}$.

Proposition 3.2.1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Une partition du cercle* S_{2n} *de rayon* $2n$ *est donnée par*

$$S_{2n} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha_0^{-n} v_0,\ \lambda \in k_F^{2n} \right\} \bigsqcup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & 1 \end{pmatrix} \alpha_0^n v_0,\ \mu \in k_F^{2n-1} \right\}\ .$$

2. *Une partition du cercle* S_{2n+1} *de rayon* $2n+1$ *est donnée par*

$$S_{2n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha_0^{-(n+1)} v_1,\ \lambda \in k_F^{2n+1} \right\} \bigsqcup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & 1 \end{pmatrix} \alpha_0^n v_1,\ \mu \in k_F^{2n} \right\}\ .$$

Démonstration. Il suffit de considérer les identités matricielles suivantes ($\lambda \in k_F^{2n}$, $\mu \in k_F^{2n+1}$) :

$$\begin{cases} g^0_{2n,\lambda} & = \begin{pmatrix} 1 & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^n & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^n & 0 \\ 0 & \varpi_F^n \end{pmatrix} ; \\ g^0_{2n+1,\mu} & = \begin{pmatrix} 1 & A(\mu) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^{n+1} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-(n+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^n & 0 \\ 0 & \varpi_F^n \end{pmatrix} ; \\ g^1_{2n,\lambda} & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\lambda) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^{-n} & 0 \\ 0 & \varpi_F^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^n & 0 \\ 0 & \varpi_F^n \end{pmatrix} ; \\ g^1_{2n+1,\mu} & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^{-(n+1)} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^{n+1} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{n+1} \end{pmatrix} ; \end{cases}$$

et de les intégrer dans la description (3.3) du cercle S_n pour conclure en distinguant selon la parité de n. $\square$

Les considérations précédentes permettent donc d'identifier :
- le quotient G/KZ à l'ensemble des sommets de $\mathcal{X}$ grâce à l'application $[gKZ \mapsto gv_0]$;
- le quotient G_S/K_0 à l'ensemble des sommets de $\mathcal{X}$ situés à distance paire de v_0, qui n'est autre que l'orbite $\mathcal{A}_p$, grâce à l'application $[gK_0 \mapsto gv_0]$;
- le quotient G_S/K_1 à l'ensemble des sommets de $\mathcal{X}$ situés à distance impaire de v_0, qui n'est autre que l'orbite $\mathcal{A}_{imp}$, grâce à l'application $[gK_1 \mapsto gv_1]$.

Ceci permet notamment de définir le support dans l'arbre d'un élément f de $\mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma)$ (resp. $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma)$; $\mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma^\alpha)$) lorsque σ est une représentation lisse irréductible de KZ (resp. de K_0) sur $\overline{\mathbb{F}}_p$: on dit qu'*un sommet v appartient au support de f* s'il peut être écrit sous la forme gv_0 (resp. g_sv_0 ; g_sv_1) avec $g \in G$ (resp. $g_s \in G_S$) appartenant au support de f. En particulier, le support de f dans $\mathcal{X}$ est une partie finie de l'arbre $\mathcal{X}$ (resp. de l'orbite $\mathcal{A}_p$; de l'orbite $\mathcal{A}_{imp}$).

3.2.3 Décompositions en doubles classes de G_S

On commence par rappeler les décompositions d'Iwasawa de G_S par rapport à chacun de ses sous-groupes compacts maximaux.

Lemme 3.2.2. *Pour tout $i \in \{0,1\}$, on a $G_S = B_SK_i = K_iB_S$.*

Démonstration. On pourrait citer [BT1, Section 4.4] comme référence pour ce résultat, mais nous pouvons aussi le démontrer directement de la façon suivante. On part de la décomposition d'Iwasawa pour $GL_2(F)$, prouvée de manière élémentaire dans [BH, (7.2.1)] : $G = BK$. Si M est un élément de G_S, il peut donc être écrit sous la forme $M = bk$ avec $b \in B$ et $k \in K$. On a alors $\det(k)\det(b) = 1$, de sorte que si l'on pose $k_1 := \begin{pmatrix} \det(k)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k$ et $b_1 := b\begin{pmatrix} \det(b)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $M = b_1k_1$ avec $b_1 \in B_S$ et $k_1 \in K \cap G_S = K_0$, ce qui prouve la décomposition d'Iwasawa associée à K_0. On en déduit la décomposition d'Iwasawa associée à K_1 en remarquant que l'on a

$$G_S = \alpha G_S \alpha^{-1} = (\alpha B_S \alpha^{-1})(\alpha K_0 \alpha^{-1}) = B_S K_1 \ ,$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

Nous rappelons maintenant quelques décompositions de G_S en doubles classes disjointes qui nous seront utiles par la suite. On donne tout d'abord l'énoncé de la décomposition de Bruhat [IGA, Théorème 11.4.(ii)], ainsi qu'un raffinement provenant de la factorisation $B_S = T_SU$ [Spr, Section 3.7].

Lemme 3.2.3 (Décomposition de Bruhat)**.** *Le groupe G_S admet les décompositions en doubles classes disjointes suivantes :*

$$G_S = B_S \sqcup B_Sw_0B_S = B_S \sqcup B_Sw_0U \ .$$

De plus, l'écriture d'un élément de G_S dans la seconde décomposition est unique.

Remarque 3.2.4. Signalons ici que, dans la seconde décomposition [5], B_S est un sous-groupe fermé de G_S tandis que B_Sw_0U est une partie ouverte dense de G_S. Il est en outre facile de

5. A laquelle on fera référence dans la suite sous l'appellation *décomposition de Bruhat raffinée*.

voir que l'application envoyant B_S sur le point à l'infini et $B_S w_0 u(x)$ sur $x \in F$ établit un isomorphisme entre le quotient $B_S \backslash G_S$ et la droite projective $\mathbb{P}^1(F)$. Par ailleurs, le fait que $\beta_0 = \alpha_0 w_0$ avec $\alpha_0 \in B_S$ permet de réécrire les décompositions du Lemme 3.2.3 sous la forme

$$G_S = B_S \sqcup B_S \beta_0 B_S = B_S \sqcup B_S \beta_0 U. \tag{3.4}$$

Cette expression aura son intérêt lorsque nous étudierons les espaces de vecteurs $I_S(1)$-invariants des représentations obtenues par induction parabolique.

Remarque 3.2.5. On dispose de même d'une décomposition de Bruhat pour le groupe fini $SL_2(k_F)$:

$$SL_2(k_F) = B_S(k_F) \sqcup B_S(k_F) w_0 B_S(k_F) = B_S(k_F) \sqcup B_S(k_F) w_0 U(k_F)$$

avec unicité de la factorisation dans la seconde décomposition.

Nous énonçons maintenant la décomposition de Cartan pour chacun des deux sous-groupes compacts maximaux K_0 et K_1 de G_S, dont nous donnons une preuve par calcul direct pour éviter à nouveau de renvoyer le lecteur vers [BT1, Section 4.4].

Lemme 3.2.6. *Le groupe G_S admet la décomposition en doubles classes disjointes suivante :*

$$G_S = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} K_0 \alpha_0^{-n} K_0 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} K_1 \alpha_0^{-n} K_1 \ .$$

Démonstration. On démontre la décomposion de Cartan associée à K_0, dont on peut déduire celle associée à K_1 en conjugant par l'élément α, qui commute avec α_0.
D'après la décomposition d'Iwasawa rappelée dans le Lemme 3.2.2, il nous suffit de traiter le cas des éléments de B_S pour conclure. Soit donc $b = \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ un élément de B_S. On pose $n := v_F(a) \in \mathbb{Z}$ et l'on distingue deux cas, selon le signe de $v_F(a) - v_F(x)$.

– Ou bien $v_F(a) \leq v_F(x)$, auquel cas on a

$$b = \begin{pmatrix} \varpi_F^n & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\varpi_F^{-n} & x\varpi_F^{-n} \\ 0 & \varpi_F^n a^{-1} \end{pmatrix} .$$

  Par définition de n, les éléments $a\varpi_F^{-n}$ et $a^{-1}\varpi_F^n$ appartiennent à $\mathcal{O}_F^\times$ tandis que notre hypothèse assure que $x\varpi_F^{-n}$ est contenu dans $\mathcal{O}_F$. Nous avons ainsi prouvé que b appartient à $K_0 \alpha_0^{-n} K_0 = K_0 \alpha_0^n K_0$ avec n ou $-n$ entier positif.

– Ou bien $v_F(a) > v_F(x)$, auquel cas on a cette fois

$$b = \begin{pmatrix} a\varpi_F^{-n} & x\varpi_F^n \\ 0 & \varpi_F^n a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^n & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-n} \end{pmatrix} ,$$

  ce qui prouve de nouveau que b appartient à $K_0 \alpha_0^{-n} K_0 = K_0 \alpha_0^n K_0$ avec n ou $-n$ entier positif.

Ceci suffit donc à démontrer que G_S est bien égal à la réunion des doubles classes apparaissant dans l'énoncé. Enfin, cette réunion est effectivement formée de classes deux à deux disjointes puisque l'on sait que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la double classe $K_0 \alpha_0^{-n} K_0$ est contenue dans $KZ\alpha^{-2n}K$ et que les doubles classes $KZ\alpha^{-n}K$ sont deux à deux disjointes par décomposition de Cartan pour G par rapport à K [BL94, Section 3]. □

Remarque 3.2.7. L'identité (3.1) permet de donner une autre décomposition de G_S à partir de ses décompositions de Cartan :

$$G_S = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} K_0 \alpha_0^n K_0 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} K_1 \alpha_0^n K_1 \ .$$

La première égalité vient de l'appartenance de w_0 à K_0 tandis que la deuxième s'en déduit directement puisque α_0 et α commutent.

Nous terminons cette section par un énoncé décrivant les doubles classes de G_S modulo B_S à droite et I_S (ou $I_S(1)$) à gauche.

Lemme 3.2.8. *Le groupe G_S admet les décompositions en doubles classes disjointes suivantes :*

$$G_S = B_S I_S \sqcup B_S \beta_0 I_S = B_S I_S(1) \sqcup B_S \beta_0 I_S(1) \ ,$$

où l'on rappelle que l'on a posé $\beta_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\varpi_F^{-1} \\ \varpi_F & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration. Commençons par remarquer que la seconde décomposition découle directement de la première une fois que l'on a remarqué que $I_S = T_S(\mathcal{O}_F) I_S(1)$, où l'ensemble $T_S(\mathcal{O}_F)$ des éléments de T_S à coefficients dans $\mathcal{O}_F^\times$ est à la fois contenu dans B_S et normalisé par w_0.
Pour obtenir la première décomposition, on rappelle tout d'abord que, grâce au Lemme 3.2.2, on dispose de la décomposition d'Iwasawa $G_S = B_S K_0$. Si l'on applique la première décomposition de Bruhat du groupe fini $SL_2(k_F)$ et que l'on relève [6] l'écriture ainsi obtenue à K_0, on obtient :

$$G_S = B_S I_S \sqcup B_S I_S w_0 I_S \ .$$

Par ailleurs, la décomposition de Bruhat raffinée pour G_S assure que l'on a

$$B_S I_S w_0 I_S = (B_S I_S w_0 I_S \cap B_S) \sqcup (B_S I_S w_0 I_S \cap B_S w_0 U) \ .$$

Comme la réduction modulo ϖ_F de $w_0 \in K_0$ n'est pas une matrice triangulaire supérieure, l'élément w_0 n'appartient pas à $B_S I_S$ et la double classe $B_S I_S w_0 I_S$ est alors d'intersection vide avec B_S. La double classe $B_S I_S w_0 I_S = B_S I_S w_0 I_S \cap B_S w_0 U$ est par suite incluse dans $B_S w_0 U$.

Nous allons maintenant prouver que tout élément de $I_S w_0 I_S$ appartient à $B_S w_0 U(\mathcal{O}_F)$, où $U(\mathcal{O}_F)$ désigne le sous-groupe de U formé des éléments à coefficients dans $\mathcal{O}_F$. Ceci terminera la preuve car nous aurons alors montré que la double classe $B_S I_S w_0 I_S$ est contenue dans $B_S w_0 I_S$, et que l'on a donc la décomposition annoncée car, étant donné que α_0 est un élément de B_S, on a $B_S w_0 = B_S \beta_0$.
Soit donc x un élément de $I_S w_0 I_S$. Par ce qui précède, x appartient en particulier à la double classe $B_S w_0 U$ donc il peut être écrit sous la forme $b w_0 u$ avec $b \in B_S$ et $u \in U$. Un calcul explicite va alors montrer que u doit être à coefficients entiers : en effet, notons $b = \begin{pmatrix} \nu & \xi \\ 0 & \nu^{-1} \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec ξ, $\zeta \in F$ et $\nu \in F^\times$. On a alors

$$x = b w_0 u = \begin{pmatrix} \xi & \xi\zeta - \nu \\ \nu^{-1} & \nu^{-1}\zeta \end{pmatrix} \ , \tag{3.5}$$

ce qui assure tout d'abord que ν^{-1}, $\nu^{-1}\zeta$ et ξ sont des éléments de $\mathcal{O}_F$ puisque x appartient à K_0. Par ailleurs, si l'on décompose $x \in I_S w_0 I_S$ sous la forme $i w_0 j$ avec i, j des éléments de I_S dont les réductions modulo ϖ_F sont respectivement égales à $\begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} \\ 0 & i_{22} \end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ 0 & j_{22} \end{pmatrix}$, on obtient par un calcul immédiat que la réduction modulo ϖ_F de x doit être de la forme $\begin{pmatrix} * & * \\ i_{22}j_{11} & * \end{pmatrix}$. En comparant cette expression avec la réduction modulo ϖ_F de l'égalité (3.5), on voit que l'image modulo ϖ_F de l'élément ν^{-1} doit être égale à $i_{22}j_{11} \neq 0$, donc que ν^{-1} doit appartenir à $\mathcal{O}_F^\times$, ce qui prouve finalement que $\zeta = \nu(\nu^{-1}\zeta)$ appartient à $\mathcal{O}_F$ et termine la démonstration. □

6. En prenant les images réciproques par l'application de réduction modulo ϖ_F.

3.3 $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de $SL_2(F)$ et de son sous-groupe de Borel standard

3.3.1 Caractères de G_S

Rappelons tout d'abord [P, Théorème IV.3.1] que pour tout corps R, le sous-groupe dérivé de $SL_2(R)$ est :
- égal à $SL_2(R)$ si R contient au moins 4 éléments ;
- isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_3$ si $R = \mathbb{F}_2$ (auquel cas $SL_2(\mathbb{F}_2)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$) ;
- de cardinal 8 si $R = \mathbb{F}_3$ (auquel cas $SL_2(\mathbb{F}_3)$ est de cardinal 24).

Sachant que tout groupe fini de cardinal égal à un nombre premier est cyclique, on en déduit que l'abélianisé de $SL_2(R)$ est :
- trivial si R contient au moins 4 éléments ;
- isomorphe à $(\mathbb{F}_2, +)$ si $R = \mathbb{F}_2$;
- isomorphe à $(\mathbb{F}_3, +)$ si $R = \mathbb{F}_3$.

On obtient donc directement le résultat suivant.

Proposition 3.3.1. *Le seul $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $SL_2(F)$ est le caractère trivial.*

Démonstration. Par hypothèse, F est un corps local non archimédien donc il est infini. Il est par suite redevable du premier cas des assertions énoncées ci-dessus, ce qui assure que l'abélianisé de $SL_2(F)$ est trivial et permet de conclure grâce à la Proposition 2.1.4. □

3.3.2 Caractères du sous-groupe de Borel B_S

On rappelle que $B_S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix},\ a \in F^\times,\ b \in F \right\}$, et l'on commence par démontrer que son abélianisé est naturellement isomorphe au tore diagonal de G_S.

Lemme 3.3.2. *1. Le groupe dérivé de B_S est égal à son radical unipotent U.*

2. L'abélianisé de B_S est égal au tore diagonal T_S.

Démonstration. Un calcul immédiat montre que si b et β sont deux éléments de B_S, leur commutateur $b\beta b^{-1}\beta^{-1}$ est un élément de U, ce qui prouve déjà que le groupe dérivé de B_S est contenu dans U.
Réciproquement, considérons un élément $u(x) \in U$ avec $x \in F$. Fixons un élément a de $F^\times \backslash \{\pm 1\}$, ce qui est possible car F est un corps infini, et posons $\xi := xa(a^2-1)^{-1}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & \xi \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & -\xi \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & a\xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a^{-1}\xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \xi a^{-1}(a^2-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= u(x) ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $u(x)$ est contenu dans le groupe dérivé de B_S et termine la preuve du premier point de l'énoncé. Le second en découle directement à partir de la factorisation $B_S = T_S U$. □

Proposition 3.3.3. *L'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de B_S est en bijection avec l'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de $F^\times$. Plus précisément, tout $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de B_S est de la forme*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \chi(a)$$

avec $\chi : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse uniquement déterminé.

Démonstration. Si $\chi : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ est un caractère lisse, on sait d'après la Proposition 2.1.4 qu'il se factorise à travers l'abélianisé de B_S. Nous venons de prouver que cet abélianisé est égal au tore diagonal T_S, lui-même naturellement isomorphe à $F^\times$ par l'application $[x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}]$. Autrement dit, il existe un caractère lisse $\eta : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ tel que :

$$\forall\ a \in F^\times,\ \forall\ b \in F,\ \chi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\right) = \eta(a)\ ,$$

ce qui prouve le résultat annoncé. □

On note encore $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ le caractère de B_S obtenu par inflation du caractère $\eta : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$. Rappelons que l'argument qui prouve la Proposition 3.3.3 permet aussi de démontrer que tout $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de B s'obtient par inflation à partir de deux caractères lisses $\eta_1, \eta_2 : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$. On note $\eta_1 \otimes \eta_2$ le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de B ainsi obtenu et l'on remarque que l'on a en particulier :

$$\forall\ \eta_1, \eta_2 : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times,\ (\eta_1 \otimes \eta_2)|_{B_S} = \eta_1\eta_2^{-1}\ . \tag{3.6}$$

3.4 Induction parabolique et représentations de la série principale

L'objectif de cette section est d'étudier la structure des représentations de G_S obtenues par induction parabolique à partir d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de B_S. Plus précisément, nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.4.1. *Soit $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse.*

1. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est de longueur 2. Il est indécomposable si et seulement si η n'est pas le caractère trivial. Dans le cas contraire, il est totalement décomposé.*
2. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est irréductible si et seulement si η n'est pas le caractère trivial. Dans le cas contraire, il est indécomposable de longueur 2, et admet le caractère trivial $\mathbf{1}$ comme sous-objet et la représentation de Steinberg $St_S := \dfrac{\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$ comme quotient.*
3. *Il n'existe pas d'isomorphisme entre sous-quotients d'induites paraboliques distinctes.*

Pour ce faire, on commencera par étudier la structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module portée par $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ (Section 3.4.1). Ceci nous fournira suffisamment d'informations pour déterminer sa structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module (Section 3.4.2). Nous calculerons ensuite la dimension des espaces de vecteurs invariants sous l'action du pro-p-Iwahori $I_S(1)$ des différents sous-quotients irréductibles qui apparaissent (Section 3.4.3), ce qui nous permettra de prouver facilement le dernier point du Théorème 3.4.1 (Section 3.4.4).

Remarque 3.4.2. Une étude plus fine des espaces de vecteurs $I_S(1)$-invariants est réalisée dans la Section 6.3.10 de cette thèse, avec pour motivation à cet endroit la recherche d'un éventuel analogue de l'équivalence de catégories construite par Ollivier pour les représentations modulo p de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ [O3, Théorème 1.3].

On fixe désormais un caractère lisse $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et l'on considère la représentation $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ obtenue par induction parabolique de ce caractère.

3.4.1 Structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module

Les arguments développés dans cette section sont inspirés des méthodes utilisées lors de l'étude des représentations complexes (voir par exemple [BH, Section 9]). L'application d'évaluation en I_2 définit un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-modules

$$\phi : \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta) \twoheadrightarrow \eta \tag{3.7}$$

dont le noyau V s'identifie, par décomposition de Bruhat raffinée, au sous-espace des fonctions de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ à support dans $B_S w_0 U$. Remarquons que la lissité des éléments de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ permet d'obtenir la caractérisation suivante des éléments de V, dont une démonstration est donnée dans [BH, Section 9.3, Lemme page 64].

Lemme 3.4.3. *Un élément $f \in \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ appartient à V si et seulement s'il existe un sous-groupe ouvert compact U_0 de U tel que le support de f soit contenu dans $B_S w_0 U_0$.*

Nous allons l'utiliser pour démontrer le théorème suivant, qui constitue le résultat fondamental de cette sous-section.

Proposition 3.4.4. *V est une représentation lisse irréductible de B_S.*

Démonstration. L'idée de la preuve consiste à donner un modèle de V pour lequel l'irréductibilité s'obtiendra assez facilement à partir d'arguments topologiques. Notons $C_c^\infty(U)$ l'ensemble des fonctions lisses $U \to \overline{\mathbb{F}}_p$ à support compact. Cet espace est muni d'une action lisse de B_S définie par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \cdot \phi := [u(y) \mapsto \phi\left(u\left(\frac{a^{-1}y+b}{a}\right)\right)] \ , \tag{3.8}$$

et l'application $[f \mapsto [u \mapsto f(w_0 u)]]$ induit alors un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-modules

$$\Psi : V \simeq C_c^\infty(U) \otimes \eta^{-1} \ . \tag{3.9}$$

En effet, le Lemme 3.4.3 assure que l'application Ψ admet pour application inverse la fonction envoyant un élément $\phi \in C_c^\infty(U)$ sur la fonction $f \in V$ définie par $f(bw_0u) = \eta(b)\phi(u)$ pour tous $u \in U$ et $b \in B_S$, et que ces deux opérateurs préservent bien les propriétés de lissité et de support caractérisant les espaces de fonctions dans lesquels ils prennent leurs valeurs. Enfin, ils sont compatibles avec l'action de B_S puisque l'on a, pour tout élément $a \in F^\times$ et toute paire $(x, z) \in F \times F$,

$$w_0 u(z) \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} w_0 u\left(\frac{a^{-1}z+x}{a}\right) \ ,$$

ce qui implique que pour tout élément $b \in B_S$ et toute fonction $f \in V$, on a :

$$\forall\ y \in F,\ \Psi(b \cdot f)(u(y)) = \eta(b^{-1})(b \cdot \Psi(f))(u(y)) \ .$$

Puisque la torsion par un caractère ne modifie pas la longueur, il nous suffit de prouver l'irréductibilité du $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $C_c^\infty(U)$ pour conclure. Commençons par rappeler que U est égal à la réunion de ses sous-groupes ouverts compacts, et que toute fonction $f \in C_c^\infty(U)$ est, par hypothèse de lissité, à support dans un sous-groupe ouvert compact de U. Par ailleurs, si U_0 est un sous-groupe ouvert compact de U et si $C_c^\infty(U_0)$ désigne l'espace des fonctions de $C_c^\infty(U)$ à support dans U_0, il est facile de voir que l'espace des vecteurs U_0-invariants de $C_c^\infty(U_0)$ est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et engendré par la fonction indicatrice 1_{U_0}. En effet, si f est un élément U_0-invariant de $C_c^\infty(U_0)$, l'application de la formule (3.8) pour $a = 1$ montre que f doit vérifier la condition suivante :

$$\forall\ x \in F,\ \ f(u(x)) = (u(x) \cdot f)(I_2) = f(I_2)\ ,$$

ce qui prouve que f est constante et donc colinéaire à 1_{U_0}.
Comme U_0 est un pro-p-groupe, on peut appliquer le Lemme 2.1.9 qui assure donc que toute sous-représentation non nulle de $C_c^\infty(U_0)$ contient 1_{U_0}. Pour conclure, il nous suffit de prouver que quel que soit le sous-groupe ouvert compact U_0 choisi, sa fonction indicatrice engendre le $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $C_c^\infty(U)$. Pour ce faire, on remarque que la famille de sous-groupes ouverts $U_n := \alpha_0^n U_0 \alpha_0^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$ est un système fondamental de voisinages de I_2 dans U, et que l'action de U sur la fonction 1_{U_n} permet de construire toutes les fonctions indicatrices translatées $1_{U_n u}$ avec $u \in U$. En écrivant par ailleurs que $U_0 = \alpha_0^{-n} U_n \alpha_0^n$ avec $\alpha_0 \in T_S$, on voit que l'action de $B_S = T_S U$ sur 1_{U_0} permet de construire tout élément de l'espace $C_c^\infty(U)$, ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 3.4.5. $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ *est un* $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$*-module de longueur 2.*

Démonstration. C'est une reformulation de la proposition précédente à partir de la définition de V comme noyau de la surjection (3.7). □

Remarque 3.4.6. La Proposition 3.4.4 implique en particulier que les seuls sous-quotients irréductibles du $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ sont le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère η et le noyau V de la surjection (3.7), et qu'ils sont tous deux de multiplicité 1.

Nous souhaitons maintenant étudier l'indécomposabilité du $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$. Autrement dit, nous voulons déterminer les conditions sous lesquelles la suite exacte courte suivante de $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-modules admet un scindage :

$$1 \longrightarrow V \longrightarrow \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta) \longrightarrow \eta \longrightarrow 1\ . \tag{3.10}$$

Ceci équivaut à étudier les cas où η peut être obtenu comme sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$. Supposons donc qu'il existe une fonction lisse non nulle $f : G_S \to \overline{\mathbb{F}}_p$ telle que $b \cdot f = \eta(b) f$ pour tout élément $b \in B_S$. Par définition de l'action de G_S sur $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$, cette condition est équivalente à la suivante :

$$\forall\ b \in B_S,\ \forall\ g \in G_S,\ \ f(gb) = \eta(b) f(g) = f(bg)\ , \tag{3.11}$$

qui assure en particulier que la droite engendrée par f est stable sous l'action de B_S et que l'élément f est fixe sous l'action de U. On rappelle maintenant qu'il existe, par lissité de f, un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que f soit fixe sous l'action du sous-groupe $U_N := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F^N \mathcal{O}_F & 1 \end{pmatrix}$. Un calcul direct montre alors que l'on a, pour tout $x \in F^\times$ et tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \alpha_0^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x\varpi_F^{2k} & 1 \end{pmatrix} \alpha_0^{-k}\ .$$

Comme α_0 est contenu dans B_S, on déduit de la relation (3.11) que f est fixe sous l'action du groupe $\overline{U}$ des matrices unipotentes inférieures. Il suffit maintenant de remarquer que l'on a l'égalité matricielle suivante :

$$w_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour conclure que l'action de w_0 fixe l'élément f, et donc[7] que la droite engendrée par f est stable sous l'action de G_S. Elle définit par suite un $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module de dimension 1, qui est nécessairement égal au caractère trivial d'après la Proposition 3.3.1. Ceci implique en particulier que le caractère η, qui est par définition égal à la restriction à B_S du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module engendré par f, doit lui aussi être trivial.
Réciproquement, la fonction constante égale à 1 engendre un sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ qui est canoniquement isomorphe au caractère trivial. La Proposition 3.4.4 assure de plus que ce sous-module est d'intersection nulle avec le noyau V de la surjection (3.7), ce qui prouve grâce au Corollaire 3.4.5 que $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ est somme directe de ses deux sous-quotients irréductibles. Nous avons donc démontré le résultat suivant, qui n'est autre que la seconde partie de la première assertion du Théorème 3.4.1.

Proposition 3.4.7. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est décomposable si et seulement si $\eta = \mathbf{1}$ est le caractère trivial. Dans ce cas, il est totalement décomposé.*

3.4.2 Structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module

Nous allons utiliser les résultats de la sous-section précédente pour déterminer la structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module des représentations de G_S obtenues par induction parabolique. Nous obtiendrons ainsi en particulier un critère simple d'irréductibilité pour ces représentations.

Proposition 3.4.8. *Soit $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse.*

1. *$\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est une représentation irréductible de G_S si et seulement si η n'est pas le caractère trivial.*
2. *$\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module indécomposable de longueur 2. Il admet le caractère trivial comme sous-objet et la représentation de Steinberg $St_S := \dfrac{\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$ comme quotient.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ soit un $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module réductible. Le Corollaire 3.4.5 et la Remarque 3.4.6 assurent alors que c'est un objet de longueur 2 qui admet un sous-quotient de dimension 1, celui-ci étant nécessairement le caractère trivial d'après la Proposition 3.3.1. Ceci implique que le caractère trivial est un sous-quotient du $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$, dont le seul sous-quotient de dimension 1 est η. On en déduit donc que l'on doit avoir $\eta = \mathbf{1}$.
Réciproquement, la fonction constante égale à 1 engendre un sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ isomorphe au caractère trivial. Le Corollaire 3.4.5 assure donc que le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ est de longueur 2 avec pour quotient la représentation $St_S := \dfrac{\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$. C'est toutefois un module indécomposable : si ce n'était pas le cas, la Remarque 3.4.6 impliquerait alors que le sous-espace des fonctions de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ à support dans $B_S w_0 U$, qui n'est autre que le sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module V introduit dans la Section 3.4.1, est stable sous l'action de G_S. Ceci est faux puisque pour tout sous-groupe ouvert compact U_0 de U, l'image de la fonction indicatrice de

7. Par décomposition de Bruhat.

l'ouvert $B_S w_0 U_0$ sous l'action de w_0 est égale à la fonction indicatrice du fermé $B_S\overline{U}_0$, où $\overline{U_0} := w_0 U_0 w_0$ est un sous-groupe ouvert compact de $\overline{U}$, et n'est donc pas à support dans $B_S w_0 U$. □

Une conséquence immédiate de ce résultat concerne le comportement des représentations non supercuspidales vis-à-vis de la conjugaison par α. Elle nous sera très utile lorsque nous devrons nous préoccuper de l'influence de nos choix de compacts maximaux sur nos résultats (voir Section 3.5.5 pour plus de détails).

Proposition 3.4.9. *Si V est une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible non supercuspidale de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, alors V^α et V sont des représentations isomorphes de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

Démonstration. On rappelle qu'une représentation lisse irréductible non supercuspidale est une représentation qui apparaît comme sous-quotient d'une représentation induite parabolique de la forme $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ avec $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse. La Proposition 3.4.8 assure donc que si V est une représentation lisse irréductible non supercuspidale de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, elle se trouve dans l'un des trois cas suivants :

- V est une représentation de la forme $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ avec $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ non trivial ;
- V est le caractère trivial ;
- V est la représentation de Steinberg St_S.

Si V est le caractère trivial, il n'y a rien à démontrer. Supposons maintenant que $V = \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ avec $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse. D'après la Proposition 2.2.5, on a

$$\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)\right)^\alpha \simeq \mathrm{Ind}_{B_S^\alpha}^{G_S}(\eta^\alpha)\ .$$

Puisque α fixe point par point le tore T_S, on a immédiatement $\eta^\alpha = \eta$ et $B_S^\alpha = B_S$, ce qui fournit l'isomorphisme annoncé dans ce cas.
Enfin, si V est la représentation de Steinberg, on sait grâce à la Proposition 3.4.8 que V est l'unique quotient du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$. Cela implique que V^α est quotient de la représentation $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})\right)^\alpha \simeq \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$, donc que V^α est isomorphe à la représentation de Steinberg St_S, ce qui termine la démonstration. □

Remarque 3.4.10. Comme nous l'avons démontré dans la preuve ci-dessus, l'énoncé de la Proposition 3.4.9 est encore valable lorsque $V = \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$, qui n'est pas un $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module irréductible [8].

3.4.3 Espaces de vecteurs invariants sous $I_S(1)$

Le Lemme 3.2.8 fournit la décomposition en doubles classes ouvertes disjointes

$$G_S = B_S I_S(1) \sqcup B_S \beta_0 I_S(1)$$

qui assure en particulier que tout élément $I_S(1)$-invariant de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est entièrement déterminé par ses valeurs en I_2 et en β_0. Ceci implique donc directement le résultat suivant.

Proposition 3.4.11. *L'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Il est engendré par la famille de fonctions $I_S(1)$-invariantes $\{\ell_{1,\eta},\ \ell_{2,\eta}\}$ satisfaisant aux égalités suivantes :*

$$\begin{cases} \ell_{1,\eta}(I_2) = 1\ ; & \ell_{2,\eta}(I_2) = 0\ ; \\ \ell_{1,\eta}(\beta_0) = 0\ ; & \ell_{2,\eta}(\beta_0) = 1\ . \end{cases}$$

8. Mais est trivialement un quotient d'une représentation lisse de G_S obtenue par induction parabolique...

Remarque 3.4.12. Si l'on reprend les notations de la Section 3.4.1, on voit par exemple que V est le $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module engendré par la fonction $\ell_{2,\eta}$ tandis que le quotient η est engendré par l'image de $\ell_{1,\eta}$ sous l'application d'évaluation en I_2.

Etudions maintenant l'action du sous-groupe d'Iwahori I_S sur ces deux fonctions. Si i est un élément de $I_S = T_S(k_F)I_S(1)$, on peut l'écrire sous la forme $i = ti_1$ avec $t \in T_S(\mathcal{O}_F^\times)$ et $i_1 \in I_S(1)$. On a alors :

$$\forall\ f \in \left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)\right)^{I_S(1)},\ \forall\ x \in G_S,\ (i \cdot f)(x) = (t \cdot f)(x) = f(xt)\ . \tag{3.12}$$

La décomposition $G_S = B_S I_S(1) \sqcup B_S \beta_0 I_S(1)$ permet alors de distinguer deux possibilités pour l'élément $x \in G_S$.

- Ou bien $x = b\xi$ avec $b \in B_S$ et $\xi \in I_S(1)$, auquel cas l'on a $xt = bt(t^{-1}\xi t)$. Comme $t \in T_S(\mathcal{O}_F^\times)$ normalise $I_S(1)$ et comme f est supposée invariante sous l'action de $I_S(1)$, on obtient ainsi que

$$(t \cdot f)(x) = \eta(bt)f(1) = \eta(t)f(b) = \eta(t)f(x)\ . \tag{3.13}$$

- Ou bien $x = b\beta_0\xi$ avec $b \in B_S$ et $\xi \in I_S(1)$, auquel cas on peut cette fois écrire que $xt = b(\beta_0 t\beta_0^{-1})\beta_0(t^{-1}\xi t)$ avec $t^{-1}\xi t \in I_S(1)$ et $\beta_0 t\beta_0^{-1} \in T_S(\mathcal{O}_F^\times)$. On en déduit donc que l'on a

$$(t \cdot f)(x) = \eta(b\beta_0 t\beta_0^{-1})f(\beta_0) = \eta(\beta_0 t\beta_0^{-1})f(b\beta_0) = \eta(\beta_0 t\beta_0^{-1})f(x)\ . \tag{3.14}$$

Par conséquent, si l'on note η^+ et η^- les $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de I_S respectivement obtenus par inflation de la restriction à $T_S(\mathcal{O}_F^\times)$ des caractères η et $\eta^{w_0} := \eta(w_0.w_0^{-1})$, on obtient le résultat suivant.

Lemme 3.4.13. *Le sous-groupe d'Iwahori I_S agit respectivement sur les fonctions $\ell_{1,\eta}$ et $\ell_{2,\eta}$ par les caractères η^+ et η^-. Autrement dit, on a :*

$$\forall\ i \in I_S,\ \left\{\begin{array}{l} i \cdot \ell_{1,\eta} = \eta^+(i)\ell_{1,\eta}\ ; \\ i \cdot \ell_{2,\eta} = \eta^-(i)\ell_{2,\eta}\ . \end{array}\right.$$

Ceci montre en particulier que $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ admet au plus deux composantes I_S-isotypiques non nulles, à savoir celles associées à η^+ et à η^-. Remarquons en outre que l'égalité $w_0^2 = I_2$ implique grâce à un calcul direct que $\eta^+ = \mathbf{1}$ si et seulement si η est un caractère *non ramifié*[9] de $F^\times$, ce qui prouve en particulier le résultat suivant.

Corollaire 3.4.14. *Soit $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse.*

1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
   i) $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ *admet des vecteurs I_S-invariants non nuls ;*
   ii) $\eta^+ = \mathbf{1}$ *;*
   iii) $\eta^- = \mathbf{1}$ *;*
   iv) η *est non ramifié.*
2. *Pour tout caractère lisse non ramifié $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, on a*

$$\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)\right)^{I_S} = \left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)\right)^{I_S(1)}\ .$$

9. i.e. de restriction triviale à $\mathcal{O}_F^\times$.

Passons maintenant à l'étude de l'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de la représentation de Steinberg.

Proposition 3.4.15. *L'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module St_S est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Plus précisément, on dispose de la suite exacte courte suivante de $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels :*

$$1 \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow (\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1}))^{I_S(1)} \longrightarrow (St_S)^{I_S(1)} \longrightarrow 1 \ . \tag{3.15}$$

Démonstration. On commence par appliquer le foncteur des $I_S(1)$-invariants, qui est exact à gauche, à la suite exacte courte de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

$$1 \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1}) \longrightarrow St_S \longrightarrow 1$$

définissant la représentation de Steinberg. On obtient ainsi la suite exacte suivante de $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels :

$$1 \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p 1_{G_S} \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p \ell_{1,\mathbf{1}} \oplus \overline{\mathbb{F}}_p \ell_{2,\mathbf{1}} \longrightarrow (St_S)^{I_S(1)} \ . \tag{3.16}$$

Prouver la proposition revient donc à démontrer la surjectivité de la flèche de droite dans la suite exacte (3.16). Pour cela, considérons un élément $f \in (St_S)^{I_S(1)}$ et un relèvement $\tilde{f} \in \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ de f. Nous voulons prouver que $\tilde{f}$ est invariant sous l'action de $I_S(1)$. Tout d'abord, l'hypothèse de $I_S(1)$-invariance sur f se traduit de la manière suivante pour $\tilde{f}$:

$$\forall\ i \in I_S(1),\ \exists\ \lambda(i) \in \overline{\mathbb{F}}_p \mid i \cdot \tilde{f} - \tilde{f} = \lambda(i) 1_{G_S} \ . \tag{3.17}$$

Pour conclure, nous allons prouver que la fonction $\lambda : I_S(1) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ est identiquement nulle. Pour ce faire, on commence par rappeler que l'on dispose, par définition des éléments de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$, des identités suivantes :

$$\forall\ b \in B_S,\ \forall\ x, i \in I_S(1),\ \left\{ \begin{array}{l} (i \cdot \tilde{f} - \tilde{f})(bx) = \tilde{f}(xi) - \tilde{f}(x) \ ; \\ (i \cdot \tilde{f} - \tilde{f})(bw_0 x) = \tilde{f}(w_0 xi) - \tilde{f}(w_0 x) \ . \end{array} \right. \tag{3.18}$$

On remarque ensuite que λ est un homomorphisme de groupes puisqu'il vérifie :

$$\begin{array}{rcl} \forall\ u, v \in I_S(1),\ \lambda(uv) 1_{G_S} & = & u \cdot (v \cdot \tilde{f}) - u \cdot \tilde{f} + u \cdot \tilde{f} - \tilde{f} \\ & = & u \cdot (\tilde{f} + \lambda(v) 1_{G_S}) - u \cdot \tilde{f} + \lambda(u) 1_{G_S} \\ & = & (\lambda(u) + \lambda(v)) 1_{G_S} \ , \end{array}$$

la dernière égalité provenant de l'invariance de la fonction 1_{G_S} sous l'action de $I_S(1)$. Nous obtenons donc que $\lambda(uv) = \lambda(u) + \lambda(v)$ pour tous éléments $u, v \in I_S(1)$.
Sachant d'une part que $I_S(1)$ est engendré par $U(\mathcal{O}_F)$, $\overline{U}(\mathfrak{p}_F)$ et $T_S(1 + \mathfrak{p}_F)$, et d'autre part que la relation (3.17) implique que $\lambda(u) = (u \cdot \tilde{f} - \tilde{f})(I_2)$ pour tout élément $u \in I_S(1)$, on peut conclure comme suit : l'appartenance de $\tilde{f}$ à $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ assure que pour tout élément u de $U(\mathcal{O}_F)$ ou de $T_S(1 + \mathfrak{p}_F)$, on a $\lambda(u) = 0$. Par ailleurs, si $u = w_0^{-1} v w_0 \in \overline{U}(\mathfrak{p}_F)$ avec $v \in U(\mathfrak{p}_F)$, la seconde relation de (3.18) assure que l'on a $\lambda(u) = \lambda(w_0^{-1} v w_0) = \tilde{f}(v w_0) - \tilde{f}(w_0) = 0$ car v est contenu dans B_S.
L'homomorphisme λ étant nul sur un système générateur de $I_S(1)$, il est identiquement nul et $\tilde{f}$ est bien un élément $I_S(1)$-invariant de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$. □

Corollaire 3.4.16. *Pour tout caractère lisse $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, la représentation de G_S portée par $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est engendrée par l'espace de ses vecteurs $I_S(1)$-invariants.*

Démonstration. Si η n'est pas le caractère trivial, la Proposition 3.4.8 assure que la représentation $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est irréductible et il n'y a rien à démontrer grâce au Lemme 2.1.9. Supposons à présent que $\eta = \mathbf{1}$ et considérons un élément $\tilde{F}$ de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$. Comme St_S est une représentation irréductible de G_S, elle est engendrée par ses vecteurs $I_S(1)$-invariants, et l'image de $\tilde{F}$ dans le quotient St_S est donc de la forme $\sum_{j \in J} g_j \cdot f_j$ avec J un ensemble fini d'indices et, pour tout $j \in J$, $g_j \in G_S$ et $f_j \in (St_S)^{I_S(1)}$. La suite exacte courte (3.15) permet de relever chaque f_j en un élément $F_j \in \left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})\right)^{I_S(1)}$ et assure que la différence $\tilde{F} - \sum_{j \in J} g_j \cdot F_j$ est alors contenue dans $\mathbf{1}$, ce qui signifie qu'elle est égale à une fonction constante ℓ qui est évidemment $I_S(1)$-invariante. Nous obtenons finalement une écriture de $\tilde{F}$ sous la forme $\ell + \sum_{j \in J} g_j \cdot F_j$ avec ℓ et les fonctions F_j qui sont des éléments $I_S(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$, ce qui prouve le résultat annoncé. □

Remarque 3.4.17. Une seconde démonstration possible consiste à adapter ligne à ligne les arguments développés pour GL_2 par Barthel-Livné [BL95, Section 3] : elle est effectuée dans la Section 7.1.

3.4.4 Absence d'isomorphismes non triviaux

Commençons par remarquer que puisque le caractère trivial est le seul $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module de dimension finie qui apparaît parmi les sous-quotients possibles des représentations de la forme $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$, il ne peut pas être isomorphe à une représentation paraboliquement induite ou à la représentation de Steinberg, qui sont quant à elles de dimension infinie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.
Rappelons ensuite que si deux représentations de G_S sont isomorphes, leurs espaces de vecteurs $I_S(1)$-invariants doivent être isomorphes comme $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels. Les Propositions 3.4.11 et 3.4.15 excluent donc toute possibilité d'isomorphisme entre la représentation de Steinberg et une représentation de la forme $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$.
Il nous reste à étudier l'existence éventuelle d'un isomorphisme entre deux représentations obtenues par induction parabolique. Si η et χ sont deux $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de B_S, on sait par réciprocité de Frobenius lisse (Proposition 2.2.1) que

$$\mathrm{Hom}_{G_S}(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta), \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi)) = \mathrm{Hom}_{B_S}(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)|_{B_S}, \chi) \ .$$

Une condition nécessaire pour qu'il existe un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules entre $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ et $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi)$ est donc que χ soit un quotient du $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$, ce qui n'est possible que si $\chi = \eta$ d'après la Remarque 3.4.6. Cette même remarque assure que χ est un quotient de multiplicité 1 de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi)$, ce qui montre que la dimension sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de l'espace $\mathrm{End}_{G_S}(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi)) = \mathrm{Hom}_{B_S}(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi), \chi)$ doit être égale à 1.

Si l'on récapitule, on voit que l'on a finalement démontré le résultat suivant.

Proposition 3.4.18. *Il n'existe pas d'isomorphisme non trivial entre représentations non supercuspidales. Autrement dit : si π_1 et π_2 sont deux représentations non supercuspidales de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, alors π_1 et π_2 sont isomorphes si et seulement s'il existe un caractère lisse $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ tel que $\pi_1 = \pi_2 = \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$. Dans ce cas, l'espace d'entrelacements $\mathrm{End}_{G_S}(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta))$ est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

3.4.5 Lien avec les représentations non supercuspidales de $GL_2(F)$

Commençons par rappeler le résultat suivant [BL94, Theorem 30], qui décrit (à torsion par un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de G près) la structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module des représentations de $GL_2(F)$ obtenues par induction parabolique des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses du sous-groupe de Borel B.

Théorème 3.4.19. *Soit $\eta : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse.*

1. *Si η n'est pas le caractère trivial, alors la représentation de G portée par $\mathrm{Ind}_B^G(\eta \otimes \mathbf{1})$ est irréductible.*
2. *La représentation $\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})$ est de longueur 2 ; elle contient comme unique sous-objet la représentation triviale, et son quotient est égal à la représentation de Steinberg St.*

Nous démontrons maintenant le résultat suivant, qui établit un lien très fort entre représentations non supercuspidales de $SL_2(F)$ et de $GL_2(F)$.

Théorème 3.4.20. *Pour tout $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse η de $F^\times$, l'application de restriction à G_S induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules :*

$$\mathrm{Ind}_B^G(\eta \otimes \mathbf{1})|_{G_S} \simeq \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta) \ ,$$

ainsi qu'un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules entre $St|_{G_S}$ et St_S.

Démonstration. Sachant que $G = BG_S$, l'isomorphisme entre les représentations $\mathrm{Ind}_B^G(\eta\otimes\mathbf{1})|_{G_S}$ et $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ s'obtient directement par application de la décomposition de Mackey pour les induites lisses.
On dispose alors en particulier d'un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})|_{G_S} \simeq \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ qui induit un morphisme injectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

$$\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})/\mathbf{1} \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})/\mathbf{1} \ .$$

Le membre de droite (resp. de gauche) de cette application est par définition égal à St_S (resp. à $St|_{G_S}$), ce qui permet de conclure par irréductibilité de St_S que l'on a bien $St|_{G_S} \simeq St_S$ et termine la démonstration. □

Pour prouver ce théorème, on commence par remarquer que les induites paraboliques attachées à G sont naturellement munies d'une structure de sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module des induites paraboliques attachées à G_S qui leur correspondent. Plus précisément, on dispose de l'énoncé suivant, qui est une conséquence directe de la décomposition de Mackey pour les induites lisses (Proposition 2.2.8) puisque l'on a $G = BG_S$.

Proposition 3.4.21. *Pour tout caractère lisse $\eta : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, l'application de restriction à G_S définit un plongement de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules*

$$\mathrm{Ind}_B^G(\eta \otimes \mathbf{1})|_{G_S} \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta) \ .$$

Remarque 3.4.22. Le Théorème 3.4.20 permet de déduire le fait suivant à partir des résultats de la Section 3.4.3 et de Barthel-Livné ([BL94, Lemma 28 & Corollary 36(1)] et [BL95, Lemma 27]) : si W est une représentation lisse de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui est sous-quotient d'une représentation de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\eta)$ avec $\eta : B \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse, et si V désigne sa restriction à G_S, alors $W^{I(1)} = V^{I_S(1)}$.

3.5 Classification des représentations lisses irréductibles de $SL_2(F)$

3.5.1 Représentations lisses irréductibles des sous-groupes compacts maximaux de G_S

On rappelle que $q = p^f$ désigne le cardinal du corps résiduel k_F et que l'on a fixé une fois pour toutes une uniformisante ϖ_F de F ainsi qu'un plongement $\iota : k_F \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$. Pour tout entier $r \in \{0, \dots, p-1\}$, on note $Sym^r(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ la représentation du groupe fini $SL_2(k_F)$ ayant pour espace sous-jacent $\bigoplus_{i=0}^{r} \overline{\mathbb{F}}_p x^{r-i} y^i$ sur lequel un élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL_2(k_F)$ agit par :

$$Sym^r\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(x^{r-i}y^i) := (ax+cy)^{r-i}(bx+dy)^i \ .$$

Pour tout f-uplet d'entiers $\vec{r} :=(r_0, \dots, r_{f-1})$ de $\{0, \dots, p-1\}^f$, on définit $Sym^{\vec{r}}(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ comme la représentation de $SL_2(k_F)$ ayant pour espace vectoriel sous-jacent

$$V_{\vec{r}} := Sym^{r_0}(\overline{\mathbb{F}}_p^2) \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} Sym^{r_1}(\overline{\mathbb{F}}_p^2) \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} \dots \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} Sym^{r_{f-1}}(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$$

sur lequel un élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL_2(k_F)$ agit par

$$Sym^{\vec{r}}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(v_0 \otimes \dots v_{f-1}) := \bigotimes_{j=0}^{f-1} Sym^{r_j}\left(\begin{pmatrix} a^{p^j} & b^{p^j} \\ c^{p^j} & d^{p^j} \end{pmatrix}\right)(v_j) \ .$$

On sait [J, Section 1] qu'à isomorphisme près, toute représentation lisse irréductible de $SL_2(k_F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est de la forme $Sym^{\vec{r}}(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ pour un unique paramètre $\vec{r} \in \{0, \dots, p-1\}^f$. Ceci permet de démontrer la propriété suivante, qui décrit toutes les représentations lisses irréductibles $\sigma_{\vec{r}}$ de K_0 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Lemme 3.5.1. *Soit π une représentation lisse irréductible de K_0 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Il existe un unique f-uplet $\vec{r} \in \{0, \dots, p-1\}^f$ tel que π soit isomorphe à la représentation de K_0 triviale sur Γ_S et obtenue par inflation de la représentation $Sym^{\vec{r}}(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$. On note $\sigma_{\vec{r}}$ cette représentation (et l'on omet la flèche sur $\vec{r}$ lorsque $f = 1$).*

Démonstration. Soit π une représentation lisse irréductible de K_0 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Puisqu'elle est non nulle, le Lemme 2.1.9 assure qu'elle contient un vecteur non nul invariant sous l'action du pro-p-groupe Γ_S. L'hypothèse d'irréductibilité implique alors que l'action du sous-groupe distingué Γ_S sur π est triviale, ce qui signifie que l'action de K_0 sur π se factorise à travers le quotient $K_0/\Gamma_S \simeq SL_2(k_F)$ et termine la démonstration grâce au résultat sus-mentionné. □

Corollaire 3.5.2. *Pour toute représentation lisse irréductible π de K_1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, il existe un unique paramètre $\vec{r} \in \{0, \dots, p-1\}^f$ tel que π soit isomorphe à la représentation $\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}$.*

Démonstration. Si π est une représentation lisse irréductible de K_1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, alors $\pi^{\alpha^{-1}}$ est une représentation lisse irréductible de $\alpha^{-1}K_1\alpha = K_0$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. D'après le Lemme 3.5.1, la représentation $\pi^{\alpha^{-1}}$ est donc isomorphe à une unique représentation de la forme $\sigma_{\vec{r}}$, ce qui assure que la représentation $\pi = (\pi^{\alpha^{-1}})^{\alpha}$ est isomorphe à la représentation $\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}$ et que le paramètre $\vec{r}$ est unique. □

Définition 3.5.3. On appelle *poids de Serre de K_0* toute représentation de K_0 de la forme $\sigma_{\vec{r}}$ avec $\vec{r} \in \{0, \ldots, p-1\}^f$. De la même manière, on appelle *poids de Serre de K_1* toute représentation de K_1 de la forme $\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}$ avec $\vec{r} \in \{0, \ldots, p-1\}^f$.

Remarque 3.5.4. Parce que cela nous sera utile par la suite, rappelons ici que Barthel et Livné ont prouvé [BL94, Proposition 4] que toute représentation lisse irréductible de KZ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ ayant un caractère central trivial sur ϖ_F est, à isomorphisme près, de la forme $\sigma_{\vec{r},m} := \sigma_{\vec{r}} \otimes \det^m$ avec $(\vec{r}, m) \in \{0, \ldots, p-1\}^f \times \{0, \ldots, p-2\}$ unique.

Pour finir, nous introduisons une notation supplémentaire déjà présente dans les les travaux de Barthel-Livné [BL94, BL95] et de Breuil [Br] : pour tout $\vec{r} = (r_0, \ldots, r_{f-1})$, on note $U_{\vec{r}}$ l'opérateur de $\sigma_{\vec{r}}$ défini par $U_{\vec{r}} := \bigotimes_{i=0}^{f-1} U_{r_i}$, où $U_{r_i} \in \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\sigma_{r_i})$ est défini par $U_{r_i}(y^{r_i}) = y^{r_i}$ et :

$$\forall\, j \in \{0, \ldots, r_i - 1\},\ U_{r_i}(x^{r_i - j} y^j) = 0 \ .$$

3.5.2 Algèbres de Hecke sphériques associées à K_0

Définition de l'opérateur $\tau_{\vec{r}}$

Fixons un poids de Serre $\sigma_{\vec{r}}$ de K_0 et intéressons-nous à la structure de la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}})$. Par ce que nous avons rappelé lors du chapitre de préliminaires généraux (Section 2.3), ceci revient à étudier la structure de l'algèbre de convolution $\mathbb{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}})$. La décomposition de Cartan de G_S associée à K_0 (Lemme 3.2.6) permet de reprendre ligne à ligne la preuve de [BL94, Lemma 7], qui ne repose que sur l'action des éléments de U, et d'obtenir ainsi l'énoncé suivant.

Lemme 3.5.5. *La $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de convolution $\mathbb{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}})$ admet pour base la famille $\{\phi_n,\ n \geq 0\}$ définie comme suit :*

i) ϕ_n *admet pour support la double classe* $K_0 \alpha_0^{-n} K_0$ *;*

ii) *si n est strictement positif,* $\phi_n(\alpha_0^{-n}) = U_{\vec{r}}$ *;*

iii) $\phi_0(I_2) = Id$.

Pour tout entier $n \geq 0$, notons $\tau_n \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}})$ l'opérateur de Hecke correspondant à la fonction $\phi_n \in \mathbb{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}})$ par réciprocité de Frobenius compacte (Proposition 2.3.2) : la famille $\{\tau_n,\ n \geq 0\}$ est alors une base sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}})$. Elle satisfait de plus aux relations suivantes.

Proposition 3.5.6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\tau_{n+1} = \begin{cases} (\tau_1)^{n+1} & si\ \vec{r} \neq \vec{0}\,; \\ (\tau_1 + 1)^{n+1} - (\tau_1 + 1)^n & si\ \vec{r} = \vec{0}. \end{cases}$$

Remarque 3.5.7. Dire que $\vec{r} = 0$ équivaut à dire que $\sigma_{\vec{r}}$ est la représentation triviale de K_0.

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'on dispose de l'égalité suivante dans G :

$$\alpha_0^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_F^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^{-n} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi_F^{-n} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-n} \end{pmatrix} \alpha^{2n},$$

avec $\begin{pmatrix} \varpi_F^{-n} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-n} \end{pmatrix}$ élément du centre Z de G, de sorte que la double classe $K_0\alpha_0^{-n}K_0$ est contenue dans la double classe $KZ\alpha^{-2n}K$. Comme $\phi_n(\alpha_0^{-n})$ est par construction égal à la valeur en α^{-2n} de la n-ième fonction définissant la base de l'algèbre de convolution associée au triplet $(G, KZ, \sigma_{\vec{r}})$ [BL94, Lemma 7], on peut conclure en reprenant les calculs de Barthel-Livné [BL94, Proposition 8] qui relient entre eux les opérateurs $T_{2n} \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, KZ, \sigma_{\vec{r}})$. On obtient ainsi que

$$\tau_n = \begin{cases} \tau_1^n & \text{si } \vec{r} \neq \vec{0} \ ; \\ (\tau_1+1)^{n-1}\tau_1 & \text{si } \vec{r} = \vec{0} \ ; \end{cases}$$

ce qui prouve le résultat annoncé. □

Corollaire 3.5.8. *Posons*

$$\tau_{\vec{r}} = \begin{cases} \tau_1 & \textit{si } \vec{r} \neq \vec{0} \ ; \\ \tau_1 + 1 & \textit{si } \vec{r} = \vec{0} \ . \end{cases} \tag{3.19}$$

Alors l'algèbre $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(K_0, \sigma_{\vec{r}})$ est égale à l'algèbre de polynômes $\overline{\mathbb{F}}_p[\tau_{\vec{r}}]$.

Remarque 3.5.9. Il suffirait de prendre $\tau_{\vec{r}} = \tau_1$ pour pouvoir conclure quant à la structure polynomiale de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(K_0, \sigma_{\vec{r}})$. Le choix que nous effectuons ici dans la définition de $\tau_{\vec{r}}$ s'explique par un souci de compatibilité avec la théorie développée pour $GL_2(F)$, et sera notamment justifié par la Proposition 3.5.13 ci-après.

Action de $\tau_{\vec{r}}$ sur les fonctions standard

Nous avons rappelé dans la Section 3.2.2 que le quotient G_S/K_0 est en bijection avec l'ensemble des sommets de l'arbre de Bruhat-Tits $\mathcal{X}$ situés à distance paire de v_0. Cette remarque nous permet d'obtenir une description assez simple des doubles classes modulo K_0 de G_S en termes de classes à gauche modulo K_0.

Proposition 3.5.10. *Pour tout entier $n \geq 0$, la double classe $K_0\alpha_0^nK_0$ possède la décomposition suivante en classes à gauche disjointes :*

$$K_0\alpha_0^nK_0 = \left(\bigsqcup_{\lambda\in k_F^{2n}} \begin{pmatrix} A(\lambda) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_0^n K_0\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{\mu\in k_F^{2n-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & 1 \end{pmatrix} \alpha_0^n K_0\right) .$$

Démonstration. Comme G_S agit par isométries sur l'arbre $\mathcal{X}$, l'action de $K_0 = \mathrm{Stab}_{G_S}(v_0)$ sur les sommets de $\mathcal{X}$ ne modifie pas la distance au sommet v_0. Par conséquent, tout élément de $K_0\alpha_0^nK_0$ envoie v_0 sur un sommet situé à distance $2n$, ce qui assure grâce à la Proposition 3.2.1 que $K_0\alpha_0^nK_0$ est contenu dans la réunion de classes disjointes

$$\left(\bigsqcup_{\lambda\in k_F^{2n}} \begin{pmatrix} 1 & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha_0^{-n} K_0\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{\mu\in k_F^{2n-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & 1 \end{pmatrix} \alpha_0^n K_0\right) .$$

Cette réunion correspond au membre de droite de l'égalité figurant dans l'énoncé puisque l'on dispose de l'identité suivante, valable pour tout élément $\lambda \in k_F^{(\mathbb{N})}$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha_0^{-n} &= \begin{pmatrix} 1 & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_0^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A(\lambda) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_0^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Comme la fonction $A(.)$ est par définition à valeurs entières, l'inclusion réciproque est évidente et l'égalité voulue est donc prouvée. $\square$

Ce dernier résultat permet de donner une expression plus explicite de la formule (2.4) rappelée dans le Chapitre 2 lorsque $T_f = \tau_1$ est l'opérateur qui apparaît dans la Proposition 3.5.6.

Corollaire 3.5.11. *Pour tout élément $g \in G_S$ et tout vecteur $v \in \sigma_{\vec{r}}$, on a l'identité suivante :*

$$\begin{aligned} \tau_1([g,v]) &= \sum_{\lambda \in k_F^2} \left[g \begin{pmatrix} A(\lambda) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_0,\ U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & A(\lambda) \end{pmatrix} \right) v \right] \\ &+ \sum_{\mu \in k_F} \left[g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & 1 \end{pmatrix} \alpha_0,\ U_{\vec{r}} v \right] . \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule (2.4) en choisissant pour système de représentants des classes à gauche modulo K_0 de $K_0\alpha_0^{-1}K_0 = K_0\alpha_0K_0$ celui de la Proposition 3.5.10, puis de remarquer que l'on a, pour tout élément $\mu \in k_F^{\mathbb{N}}$,

$$\sigma_{\vec{r}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varpi_F A(\mu) & 1 \end{pmatrix} \right) = Sym^{\vec{r}}(I_2) = Id .$$

$\square$

3.5.3 Compatibilité avec les objets analogues pour $GL_2(F)$

Comme nous l'avons déjà mentionné, les travaux de Barthel-Livné [BL94, BL95] montrent l'existence, pour tout poids de Serre $\sigma_{\vec{r},m}$ de KZ, d'un opérateur $T_{\vec{r},m} \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, KZ, \sigma_{\vec{r},m})$ tel que la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke est égale à l'algèbre des polynômes en $T_{\vec{r},m}$:

$$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, KZ, \sigma_{\vec{r},m}) = \overline{\mathbb{F}}_p[T_{\vec{r},m}] . \tag{3.20}$$

Comme $\sigma_{\vec{r},m}$ et $\sigma_{\vec{r},n}$ ont la même restriction à G_S quelles que soient les valeurs de m et n, on peut imposer sans perte d'information que $m = 0$, ce qui signifie que l'on considère le poids $\sigma_{\vec{r}}$. La valeur de l'opérateur $T_{\vec{r}} := T_{\vec{r},0}$ sur les fonctions standard de $\mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}})$ est alors donnée par la formule suivante [Br, équation (4)] :

$$\forall\ g \in G,\ \forall\ v \in \sigma_{\vec{r}},\ T_{\vec{r}}([g,v]) = [g\alpha, U_{\vec{r}}v] + \sum_{\lambda \in k_F} [gg_{1,\lambda}^0, \sigma_{\vec{r}}(\omega)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(\omega_\lambda)v] , \tag{3.21}$$

ce qui montre notamment que si le support dans l'arbre $\mathcal{X}$ de $f \in \mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}})$ est inclus dans $\mathcal{A}_p$ (resp. : dans l'orbite $\mathcal{A}_{imp}$), alors le support de $T_{\vec{r}}(f)$ est contenu dans $\mathcal{A}_{imp}$ (resp. : $\mathcal{A}_p$).

Remarquons maintenant que l'on dispose d'un morphisme injectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) & \to & \mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}}) \ , \\ {[g,v]} & \mapsto & [g,v] \end{array}$$

dont l'image est égale à l'ensemble des éléments de $\mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}})$ à support dans KZG_S, i.e. de support dans l'arbre contenu dans $\mathcal{A}_p$. De même, l'application définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^\alpha) & \to & \mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}}) \\ {[g,v]} & \mapsto & [g\alpha,v] \end{array}$$

est un morphisme injectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules ayant pour image l'ensemble des éléments de $\mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}})$ à support dans $KZ\alpha G_S$, i.e. de support dans l'arbre contenu dans $\mathcal{A}_{imp}$. Comme l'action de $T_{\vec{r}}$ sur $\mathcal{X}$ envoie $\mathcal{A}_p$ dans $\mathcal{A}_{imp}$ et vice-versa, on obtient déjà l'énoncé suivant.

Proposition 3.5.12. *Pour toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible $\sigma_{\vec{r}}$ de K_0, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \oplus \mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}) & \rightarrow & \mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}}) \\ & & ([g_1, v_1], [g_2, v_1]) & \mapsto & [g_1, v_1] + [g_2\alpha, v_2] \end{array}$$

est un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules. De plus, l'action de l'opérateur $T_{\vec{r}} \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, KZ, \sigma_{\vec{r}})$ sur $\mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}})$ « échange » les deux facteurs directs qui apparaissent dans le membre de gauche.

En particulier, nous obtenons ainsi que l'action de l'opérateur $T_{\vec{r}}^2$ définit un endomorphisme G_S-équivariant du facteur $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$, et correspond donc à un élément de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G_S, K_S, \sigma_{\vec{r}})$. Le Théorème 3.5.8 rend alors légitime l'interrogation suivante : quel est le polynôme en $\tau_{\vec{r}}$ qui permet de décrire l'action de $T_{\vec{r}}^2$ sur $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$? La réponse est très simple et tout à fait conforme à l'intuition, comme en atteste le résultat suivant.

Proposition 3.5.13. *Soit $\sigma_{\vec{r}}$ un poids de Serre pour K_0. Pour tout élément $g \in G_S$ et tout vecteur $v \in \sigma_{\vec{r}}$, on a*

$$T_{\vec{r}}^2([g, v]) = \tau_{\vec{r}}([g, v]) \ .$$

Démonstration. Par G_S-équivariance et $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéarité des deux opérateurs $T_{\vec{r}}$ et $\tau_{\vec{r}}$, il suffit de vérifier que notre énoncé est vrai pour $g = I_2$. Le Corollaire 3.5.11 assure d'une part que l'on a

$$\begin{aligned} \tau_1([I_2, v]) &= \sum_{\lambda \in k_F^2} \left[\begin{pmatrix} A(\lambda) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_0,\ U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & A(\lambda) \end{pmatrix} \right) v \right] \\ &+ \sum_{\mu \in k_F} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & 1 \end{pmatrix} \alpha_0,\ U_{\vec{r}} v \right] \\ &= \sum_{\lambda \in k_F^2} \left[\begin{pmatrix} \varpi_F^{-1} A(\lambda) & -\varpi_F \\ \varpi_F^{-1} & 0 \end{pmatrix},\ U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & A(\lambda) \end{pmatrix} \right) v \right] \\ &+ \sum_{\mu \in k_F} \left[\begin{pmatrix} \varpi_F^{-1} & 0 \\ A(\mu) & \varpi_F \end{pmatrix},\ U_{\vec{r}} v \right] \\ &= \sum_{\lambda \in k_F^2} \left[\begin{pmatrix} \varpi_F^2 & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^{-1} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-1} \end{pmatrix},\ U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & A(\lambda) \end{pmatrix} \right) v \right] \\ &+ \sum_{\mu \in k_F} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & \varpi_F^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^{-1} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-1} \end{pmatrix}, U_{\vec{r}} v \right] \ . \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que, puisque $\sigma_{\vec{r}}$ agit via la réduction modulo ϖ_F des éléments de K_0 et puisque le support de l'opérateur $U_{\vec{r}}$ est égal à la droite engendrée par $y^{\vec{r}}$, on peut écrire que

$$U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & A(\lambda) \end{pmatrix} \right) v = U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \sigma_{\vec{r}}(\omega_{\lambda_0}) v = (-1)^{\vec{r}} U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}}(\omega_{\lambda_0})(v) \ ,$$

en prenant garde au fait que $\sigma_{\vec{r}}$ est à présent considérée comme une représentation de KZ. On obtient ainsi l'expression suivante de $\tau_1([I_2, v])$:

$$\begin{aligned} \tau_1([I_2, v]) &= \sum_{\lambda \in k_F^2} \left[\begin{pmatrix} \varpi_F^2 & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^{-1} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-1} \end{pmatrix},\ (-1)^{\vec{r}} U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}}(\omega_{\lambda_0})(v) \right] \\ &+ \sum_{\mu \in k_F} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & \varpi_F^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^{-1} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-1} \end{pmatrix}, U_{\vec{r}} v \right] \ . \end{aligned}$$

D'autre part, les calculs effectués par Breuil [Br, Equations (4) à (8)] pour l'opérateur $T_{\vec{r}}$ permettent d'écrire que :

$$\begin{aligned}
T_{\vec{r}}^2([I_2,v]) &= \sum_{\lambda\in k_F^2}\left[\begin{pmatrix}\varpi_F^2 & A(\lambda)\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(\omega_{\lambda_1})\sigma(w)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(\omega_{\lambda_0})(v)\right]\\
&+ \sum_{\mu\in k_F}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ \varpi_F A(\mu) & \varpi_F^2\end{pmatrix},\ U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(\omega_\mu w)U_{\vec{r}}v\right]\\
&+ [I_2,\sum_{\mu\in k_F}U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(\omega_\mu)(v)]+[I_2,\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}v]\\
&= \sum_{\lambda\in k_F^2}\left[\begin{pmatrix}\varpi_F^2 & A(\lambda)\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \sigma_{\vec{r}}(\omega_0)\sigma_{\vec{r}}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ -A(\lambda_1) & 1\end{pmatrix}\right)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(\omega_{\lambda_0})(v)\right]\\
&+ \sum_{\mu\in k_F}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ \varpi_F A(\mu) & \varpi_F^2\end{pmatrix},\ U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ -A(\mu) & 1\end{pmatrix}\right)U_{\vec{r}}v\right]\\
&+ [I_2,\sum_{\mu\in k_F}U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(\omega_\mu)(v)]+[I_2,\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}v]\\
&= \sum_{\lambda\in k_F^2}\left[\begin{pmatrix}\varpi_F^2 & A(\lambda)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varpi_F^{-1} & 0\\ 0 & \varpi_F^{-1}\end{pmatrix},\ (-1)^{\vec{r}}U_{\vec{r}}U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(\omega_{\lambda_0})(v)\right]\\
&+ \sum_{\mu\in k_F}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ \varpi_F A(\mu) & \varpi_F^2\end{pmatrix},\ U_{\vec{r}}U_{\vec{r}}v\right]\\
&+ [I_2,\sum_{\mu\in k_F}U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(\omega_\mu)(v)]+[I_2,\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}v]\ .
\end{aligned}$$

En remarquant que l'on dispose de l'égalité $U_{\vec{r}}U_{\vec{r}} = U_{\vec{r}}$ et que l'on a, puisque le support et l'image de $U_{\vec{r}}$ sont tous deux égaux à la droite engendrée par $y^{\vec{r}}$,

$$\forall\ a,d\in\mathcal{O}_F^\times,\ \forall\ c\in\mathcal{O}_F,\ \sigma_{\vec{r}}\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ c & d\end{pmatrix}\right)U_{\vec{r}}v = d^{\vec{r}}U_{\vec{r}}v\ ,$$

on obtient finalement l'expression suivante de $T_{\vec{r}}^2([I_2,v])$:

$$\begin{aligned}
T_{\vec{r}}^2([I_2,v]) &= \sum_{\lambda\in k_F^2}\left[\begin{pmatrix}\varpi_F^2 & A(\lambda)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varpi_F^{-1} & 0\\ 0 & \varpi_F^{-1}\end{pmatrix},\ (-1)^{\vec{r}}U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(\omega_{\lambda_0})(v)\right]\\
&+ \sum_{\mu\in k_F}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ \varpi_F A(\mu) & \varpi_F^2\end{pmatrix},\ U_{\vec{r}}v\right]\\
&+ [I_2,\sum_{\mu\in k_F}U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(\omega_\mu)(v)]+[I_2,\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}v]\ .
\end{aligned}$$

Pour conclure, il nous suffit de rappeler [BL94, page 271] que $U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}$ est nul si $\vec{r}\neq\vec{0}$ tandis que $U_{\vec{0}}\sigma_{\vec{0}}(w)U_{\vec{0}}$ est l'application identité. La nullité de $Card(k_F)=p^f$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ assure alors que

$$[I_2,\sum_{\mu\in k_F}U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(\omega_\mu)(v)]+[I_2,\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}v] = \begin{cases}0 & \text{si } \vec{r}\neq\vec{0}\ ;\\ [I_2,v] & \text{si } \vec{r}=\vec{0}\ .\end{cases}$$

Nous avons ainsi démontré que l'on a

$$\begin{aligned}
T_{\vec{r}}^2([I_2,v]) &= \begin{cases}\tau_1([I_2,v]) & \text{si } \vec{r}\neq\vec{0}\\ (\tau_1+1)([I_2,v]) & \text{si } \vec{r}=\vec{0}\end{cases}\\
&= \tau_{\vec{r}}([I_2,v]) \text{ par (3.19)}\ ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat annoncé. □

Remarque 3.5.14. Un autre point de vue possible sur ce résultat est le suivant : grâce à la Proposition 3.5.12, l'application de restriction à $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ définit un morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres allant de $\overline{\mathbb{F}}_p[T_{\vec{r}}^2]$ vers $\overline{\mathbb{F}}_p[\tau_{\vec{r}}] = \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}})$. L'énoncé de la Proposition 3.5.13 affirme alors que ce morphisme est un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres, que la Proposition 3.5.12 permet de réécrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}}) \simeq \{\Phi \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, KZ, \sigma_{\vec{r}}) \mid \Phi(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})) \subset \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})\} \ .$$

3.5.4 Autre description des représentations non supercuspidales

L'objectif de cette sous-section est de relier les représentations non supercuspidales que nous avons étudiées dans la Section 3.4 aux induites compactes des poids de Serre $\sigma_{\vec{r}}$ et $\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}$. Pour cela, nous allons une fois encore nous appuyer sur certains résultats obtenus par Barthel-Livné dans leur étude des représentations modulo p de $GL_2(F)$, que nous rappelons maintenant.

Rappels concernant $GL_2(F)$

Pour toute paire de paramètres $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \ldots, p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$, on note $\pi(\vec{r}, \lambda)$ la représentation de G portée par le conoyau de l'opérateur $T_{\vec{r}} - \lambda$:

$$\pi(\vec{r}, \lambda) := \frac{\mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}})}{T_{\vec{r}} - \lambda} \ .$$

Ces représentations conoyaux permettent d'énoncer le théorème suivant, qui reprend une partie des résultats énoncés dans [BL94, Theorem 30 & Theorem 33].

Théorème 3.5.15. *1. Toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible à caractère central de G peut s'écrire comme quotient d'une représentation de la forme $\pi(\vec{r}, \lambda) \otimes (\chi \circ \det)$ où $\chi : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ est un caractère lisse modérément ramifié.*

2. Si $\lambda \neq 0$ et $(\vec{r}, \lambda) \neq (\vec{0}, \pm 1)$, la représentation $\pi(\vec{r}, \lambda)$ est isomorphe à la représentation $\mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\lambda^{-1}} \otimes \mu_\lambda \iota^{\vec{r}})$, et est irréductible si et seulement si $(\vec{r}, \lambda) \neq (\overrightarrow{p-1}, \pm 1)$.

3. La représentation $\pi(\vec{0}, \pm 1)$ est une extension non triviale du caractère $\mu_{\pm 1} \circ \det$ par la représentation $(\mu_{\pm 1} \circ \det) \otimes St$.

Nous introduisons alors le vocabulaire suivant : si π est une représentation lisse irréductible à caractère central de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, on dit que

- $(\vec{r}, \lambda, \chi)$ est une *paramétrisation possible* de π lorsqu'il existe un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules $\pi(\vec{r}, \lambda) \otimes (\chi \circ \det) \twoheadrightarrow \pi$;
- π est *supersingulière* lorsqu'elle admet une paramétrisation de la forme $(\vec{r}, 0, \chi)$.

On dispose alors du résultat suivant [BL94, Theorem 34].

Théorème 3.5.16. *Soient π une représentation lisse irréductible à caractère central de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et $(\vec{r}, \lambda, \chi)$ une paramétrisation possible de π. On est toujours dans l'un des quatre cas suivants :*

1. *π est un caractère $\eta \circ \det$, et l'on a alors $(\vec{r}, \lambda, \chi) = (\vec{0},\ \pm 1,\ \eta\mu_{\pm 1})$;*
2. *π est de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\chi_1 \otimes \chi_2)$, et la paire $(\vec{r}, \lambda)$ doit alors vérifier $\chi_2|_{\mathcal{O}_F^\times} = \iota^{\vec{r}} \chi_1|_{\mathcal{O}_F^\times}$ et $\lambda^2 = (\chi_1 \chi_2^{-1})(\varpi_F)$. En outre, on a forcément $\lambda \neq 0$, $\chi = \chi_1 \mu_\lambda$ et, dans le cas où $\vec{r} \in \{\vec{0},\ \overrightarrow{p-1}\}$, on a de plus $\lambda \neq \pm 1$.*
3. *π est une représentation de la série spéciale $(\eta \circ \det) \otimes St$, et l'on a alors $(\vec{r}, \lambda, \chi) = (\overrightarrow{p-1},\ \pm 1,\ \eta\mu_{\pm 1})$*
4. *π est supersingulière, et on a alors forcément $\lambda = 0$.*

Conséquences pour $SL_2(F)$

Nous commençons par introduire les analogues des représentations conoyaux attachées au sous-groupe compact maximal K_0 de $SL_2(F)$. Pour toute paire $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \ldots, p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$ de paramètres, on pose

$$\pi_0(\vec{r}, \lambda) := \frac{\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})}{(\tau_{\vec{r}} - \lambda)} \ .$$

Ce sont des représentations lisses de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui vérifient la propriété suivante.

Proposition 3.5.17. *Pour toute paire de paramètres $(\vec{r}, \lambda)$ avec $\lambda \neq 0$, le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\pi(\vec{r}, \lambda)|_{G_S}$ est isomorphe à $\pi_0(\vec{r}, \lambda^2)$.*

Démonstration. D'après la Proposition 3.5.12, l'application identité induit une injection de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

$$\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \hookrightarrow \mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}}) \ .$$

En la composant à gauche avec l'application de réduction modulo $T_{\vec{r}} - \lambda$, on obtient une application $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéaire et G_S-équivariante non nulle [10]

$$\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \to \pi(\vec{r}, \lambda) \ . \tag{3.22}$$

La Proposition 3.5.13 permet alors de déduire de la factorisation $T_{\vec{r}}^2 - \lambda^2 = (T_{\vec{r}} - \lambda)(T_{\vec{r}} + \lambda)$ que le morphisme (3.22) se factorise en un morphisme non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

$$\pi_0(\vec{r}, \lambda^2) \to \pi(\vec{r}, \lambda) \ . \tag{3.23}$$

Nous montrons d'abord que l'application (3.23) est injective lorsque λ est non nul. Soient $\overline{f} \in \pi_0(\vec{r}, \lambda^2)$ et $f \in \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ un relèvement de $\overline{f}$. Dire que $\overline{f}$ appartient au noyau du morphisme (3.23) signifie qu'il existe une fonction $g \in \mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}})$ et une fonction $h \in \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ telles que

$$f - (T_{\vec{r}} - \lambda)(g) = (T_{\vec{r}}^2 - \lambda^2)(h) \ . \tag{3.24}$$

Décomposons alors g à l'aide de la Proposition 3.5.12 : $g = g_0 + g_1$ avec g_i élément de $\mathrm{ind}_{K_i}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha^i})$. Ceci permet d'écrire l'identité (3.24) sous la forme

$$f - (T_{\vec{r}} - \lambda)(g_0 + g_1) = (T_{\vec{r}}^2 - \lambda^2)(h)$$

ou encore

$$f - T_{\vec{r}}(g_1) + \lambda g_0 - (T_{\vec{r}}^2 - \lambda^2)(h) = T_{\vec{r}}(g_0) - \lambda g_1 \ . \tag{3.25}$$

Pour que cette égalité soit possible, il est nécessaire que ses deux membres soient nuls : en effet, le terme de gauche est à support dans l'orbite $\mathcal{A}_p$ de l'action de G_S sur l'arbre de Bruhat-Tits $\mathcal{X}$ tandis que le membre de droite est à support dans l'orbite $\mathcal{A}_{imp}$. On en déduit donc que $T_{\vec{r}}(g_0) = \lambda g_1$, ce qui se réécrit $g_1 = \lambda^{-1} T_{\vec{r}}(g_0)$ puisque λ est non nul, puis que

$$f = T_{\vec{r}}(g_1) - \lambda g_0 + (T_{\vec{r}}^2 - \lambda^2)(h) = \lambda^{-1}(T_{\vec{r}}^2 - \lambda^2)(g_0 + \lambda h)$$

avec $g_0 + \lambda h \in \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$. La Proposition 3.5.13 assure alors que f est un élément de l'image de $\tau_{\vec{r}}$, ce qui signifie que $\overline{f} = 0$ et montre que le morphisme (3.23) est injectif.

Nous démontrons maintenant sa surjectivité. D'après la Proposition 3.5.12, tout élément du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}})$ s'écrit de manière unique sous la forme $x + y$ avec $x \in \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ et $y \in \mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha})$, et l'action de $T_{\vec{r}}$ échange les deux espaces. La Proposition 3.5.13 assure

10. Par exemple car l'élément $[I_2, x^{\vec{r}}]$ est clairement d'image non nulle dans $\pi(\vec{r}, \lambda)$.

donc que prouver la surjectivité du morphisme (3.23) revient à montrer que pour toute paire $(x, y) \in \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \times \mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha})$, il existe des éléments $z_0, x_0, x_1 \in \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ et $z_1 \in \mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha})$ tels que

$$(x + y) + (T_{\vec{r}} - \lambda)(z_0 + z_1) = x_0 + (T_{\vec{r}}^2 - \lambda^2)(x_1) \ .$$

Par l'étude du support de chaque terme dans l'arbre $\mathcal{X}$, on voit que ceci équivaut à demander que le système suivant soit vérifié :

$$\begin{cases} x + T_{\vec{r}}(z_1) - \lambda z_0 = x_0 + (T_{\vec{r}}^2 - \lambda^2)(x_1) \ ; \\ y + T_{\vec{r}}(z_0) - \lambda z_1 = 0 \ . \end{cases} \tag{3.26}$$

Comme λ est supposé non nul, on peut poser $z_1 := \lambda^{-1} y$ et $x_0 = x + T_{\vec{r}}(\lambda^{-1} y)$. Ce sont respectivement des éléments de $\mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha})$ et $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ qui vérifient

$$\begin{cases} x + T_{\vec{r}}(z_1) = x + T_{\vec{r}}(\lambda^{-1} y) = x_0 \ ; \\ y + T_{\vec{r}}(0) - \lambda z_1 = y - y = 0 \ . \end{cases}$$

Le quadruplet $(z_0, x_0, x_1, z_1) = (0, \lambda^{-1} y, x + T_{\vec{r}}(\lambda^{-1} y), 0)$ est donc solution du système (3.26), ce qui prouve la surjectivité du morphisme (3.23) et termine la démonstration. $\square$

Ce résultat permet d'obtenir une autre description des représentations non supercuspidales de G_S dont l'étude a fait l'objet de la Section 3.4.

Théorème 3.5.18. *Soit $(\vec{r}, \lambda)$ une paire de paramètres telle que $\lambda \neq 0$.*

1. *Si $(\vec{r}, \lambda) \neq (\vec{0}, 1)$, il existe un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules*

$$\pi_0(\vec{r}, \lambda) \simeq \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_{\lambda^{-1}} \iota^{\overrightarrow{p-1-r}}) \ .$$

2. *La représentation $\pi_0(\vec{0}, 1)$ est une extension non triviale du caractère trivial $\mathbf{1}$ par la représentation de Steinberg St_S.*

Démonstration. Soit $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \ldots, p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ une paire de paramètres avec $(\vec{r}, \lambda) \neq (\vec{0}, 1)$. On a alors $(\vec{r}, \sqrt{\lambda^{-1}}) \neq (\vec{0}, \pm 1)$ donc le second point du Théorème 3.5.15 assure l'existence d'un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules de la forme

$$\pi(\vec{r}, \sqrt{\lambda^{-1}}) \simeq \mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\sqrt{\lambda}} \otimes \mu_{\sqrt{\lambda^{-1}}} \iota^{\vec{r}}) \ . \tag{3.27}$$

Remarquons alors que

$$\mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\sqrt{\lambda}} \otimes \mu_{\sqrt{\lambda^{-1}}} \iota^{\vec{r}}) = \mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\lambda} \iota^{\overrightarrow{p-1-r}} \otimes \mathbf{1}) \otimes (\mu_{\sqrt{\lambda^{-1}}} \iota^{\vec{r}} \circ \det) \ ,$$

de sorte qu'en restreignant l'action de G à G_S, on déduit de (3.27) l'existence d'un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

$$\pi(\vec{r}, \sqrt{\lambda^{-1}})|_{G_S} \simeq \mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\lambda} \iota^{\overrightarrow{p-1-r}} \otimes \mathbf{1})|_{G_S} \tag{3.28}$$

qui se réécrit, grâce au premier point du Théorème 3.4.20, sous la forme

$$\pi(\vec{r}, \sqrt{\lambda^{-1}})|_{G_S} \simeq \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_{\lambda} \iota^{\overrightarrow{p-1-r}}) \ , \tag{3.29}$$

et montre donc que $\pi_0(\vec{r}, \lambda^{-1})$ est isomorphe à $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_{\lambda} \iota^{\overrightarrow{p-1-r}})$ grâce à la Proposition 3.5.17. Signalons au passage que le choix de la racine $\sqrt{\lambda^{-1}}$ n'a aucune influence sur le résultat.
Pour démontrer le second point, on rappelle que le Théorème 3.5.15 fournit la suite exacte courte non scindée de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules

$$1 \longrightarrow St_G \longrightarrow \pi(\vec{0}, 1) \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow 1 \ . \tag{3.30}$$

Rappelons alors que la Proposition 3.5.12 assure que la restriction à $\pi_0(\vec{0},1)$ de la surjection $\pi(\vec{0},1) \twoheadrightarrow \mathbf{1}$ est encore surjective. Par ailleurs, on sait grâce au Théorème 3.4.20 que la restriction à G_S de la représentation St_G fournit la représentation de Steinberg St_S. On déduit donc de la suite exacte (3.30) l'existence d'une suite exacte courte de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules de la forme

$$1 \longrightarrow (St_S \cap \pi_0(\vec{0},1)) \longrightarrow \pi_0(\vec{0},1) \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow 1 \ .$$

Comme la représentation $\pi_0(\vec{0},1)$ est de dimension infinie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, elle n'est pas isomorphe au caractère trivial et il faut donc que l'intersection $St_S \cap \pi_0(\vec{0},1)$ soit non nulle. Par irréductibilité du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module St_S, on obtient ainsi que $St_S \cap \pi_0(\vec{0},1) = St_S$, ce qui prouve que l'on dispose en fait de la suite exacte courte suivante de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules :

$$\mathbf{1} \longrightarrow St_S \longrightarrow \pi_0(\vec{0},1) \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow 1 \ . \tag{3.31}$$

Cette extension de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules n'est pas scindée car chaque terme de la suite exacte (3.30) est le $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module engendré par le terme qui lui correspond dans la suite exacte (3.31). Par conséquent, tout scindage de (3.31) fournirait un scindage de (3.30), ce qui contredirait la troisième assertion du Théorème 3.5.15. □

Corollaire 3.5.19. *Soit $(\vec{r},\lambda)$ une paire de paramètres avec $\lambda \neq 0$.*

1. *La représentation $\pi_0(\vec{r},\lambda)$ admet un unique quotient irréductible. Ce quotient est une représentation non supercuspidale de G_S, et n'est isomorphe à aucune autre représentation s'obtenant comme quotient de $\pi(\vec{s},\mu)$ avec $\mu \neq 0$ et $(\vec{r},\lambda) \neq (\vec{s},\mu)$.*
2. *L'isomorphisme* (3.28) *induit des isomorphismes de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules :*

$$\pi(\vec{r},\pm\lambda)|_{G_S} \simeq \pi_0(\vec{r},\lambda^2) \ .$$

Démonstration. Le premier point est une conséquence directe des descriptions données par le Théorème 3.5.18 ainsi que du Théorème 3.4.8 (pour l'unicité du quotient irréductible) et de la Proposition 3.4.18 (pour l'absence d'isomorphismes). Le second point découle quant à lui des descriptions du Théorème 3.5.18 et de l'isomorphisme (3.28). □

Par analogie avec ce qui existe pour les représentations modulo p de $GL_2(F)$, nous introduisons la terminologie suivante : si V est une représentation lisse irréductible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, on dit que

- la paire $(\vec{r},\lambda)$ est une *paramétrisation possible par rapport à K_0* de V si V est quotient du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\pi_0(\vec{r},\lambda)$;
- la représentation V est *supersingulière par rapport à K_0* si elle admet une paramétrisation possible par rapport à K_0 de la forme $(\vec{r},0)$.

Proposition 3.5.20. *La notion de supersingularité par rapport à K_0 est bien définie : si V admet une paramétrisation possible de la forme $(\vec{r},0)$, alors toute paramétrisation possible de V sera de cette forme.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que V admette une paramétrisation possible de la forme $(\vec{\rho},\lambda)$ avec $\lambda \neq 0$. Le Corollaire 3.5.19 et le Théorème 3.4.20 assurent alors l'existence d'une représentation W lisse irréductible à caractère central trivial sur ϖ_F et non supercuspidale de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ dont la restriction $W|_{G_S}$ à G_S est isomorphe à V. Le Théorème 3.5.16 affirme alors de plus que toute paramétrisation possible du $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module W est de la forme $(\vec{s},\mu)$ avec μ non nul, tandis que la Remarque 3.4.22 assure que la restriction à G_S établit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $W^{I(1)}$ et $V^{I_S(1)}$.
Rappelons maintenant que l'on a supposé V supersingulière par rapport à K_0, ce qui signifie

qu'il existe un morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $\phi : \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \twoheadrightarrow V$ tel que $\phi \circ \tau_{\vec{r}} = 0$. Par réciprocité de Frobenius compacte, ϕ correspond à un morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[K_0]$-modules non nul [11] $f : \sigma_{\vec{r}} \hookrightarrow V$. Comme l'élément $x^{\vec{r}} \in \sigma_{\vec{r}}$ est un générateur du $\overline{\mathbb{F}}_p[KZ]$-module $\sigma_{\vec{r}}$ qui est invariant sous l'action de $I(1)$ (et de $I_S(1)$), son image par f doit nécessairement être un élément non nul de $V^{I_S(1)}$, que l'on peut identifier à un élément non nul w de $W^{I(1)} \simeq V^{I_S(1)}$.
Notons $\tilde{f} : \sigma_{\vec{r}} \hookrightarrow W$ le morphisme KZ-équivariant envoyant $x^{\vec{r}}$ sur w et $\psi : \mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}}) \twoheadrightarrow W$ le morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules qui correspond à $\tilde{f}$ par réciprocité de Frobenius compacte. La formule permettant de construire ψ à partir de $\tilde{f}$ et ϕ à partir de f, rappelée dans la preuve de la Proposition 2.2.3, montre alors [12] que l'on a $\psi(v) = \phi(v)$ pour tout élément $v \in \mathrm{ind}_{K_0}^{G_0}(\sigma_{\vec{r}})$, vu comme un élément de $\mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}})$ grâce à la Proposition 3.5.12. Ceci implique, grâce à la Proposition 3.5.13, que l'on a :

$$\forall\ v \in \sigma_{\vec{r}},\ \ (\psi \circ T_{\vec{r}}^2)([I_2, v]) = (\phi \circ \tau_{\vec{r}})([I_2, v]) = 0\ ,$$

et prouve donc, par G-équivariance de ψ et de $T_{\vec{r}}$, que la fonction $\psi \circ T_{\vec{r}}^2$ est identiquement nulle. Autrement dit, l'image de $T_{\vec{r}}$ est contenue dans le noyau de l'application $\psi \circ T_{\vec{r}}$, ce qui assure que $\psi \circ T_{\vec{r}}$ se factorise en un morphisme G-équivariant $\pi(\vec{r}, 0) \to W$. Puisque la paire $(\vec{r}, 0)$ ne peut pas être une paramétrisation possible du $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module W, il faut que l'on ait $\psi \circ T_{\vec{r}} = 0$, soit donc que ψ se factorise à travers $\pi(\vec{r}, 0)$. Par suite, ψ doit être nulle puisque sa non-nullité montrerait que $(\vec{r}, 0)$ est une paramétrisation possible de W. Cependant, ceci est absurde car la nullité de ψ impliquerait celle de ϕ, donc celle de V puisque ϕ est surjective. □

Corollaire 3.5.21. *Toute représentation supersingulière par rapport à K_0 est supercuspidale.*

Démonstration. La description explicite des représentations non supercuspidales de G_S effectuée dans le Théorème 3.4.8 permet de déduire du Théorème 3.5.18 que toute représentation non supercuspidale admet une paramétrisation possible de la forme $(\vec{r}, \lambda)$ avec $\lambda \neq 0$. La Proposition 3.5.20 implique alors qu'une telle représentation ne saurait être supersingulière, ce qui prouve l'énoncé voulu par contraposition. □

3.5.5 De l'inutilité relative de K_1

Arrêtons-nous ici un instant pour rappeler que, contrairement à $GL_2(F)$ qui admet une unique classe de conjugaison de sous-groupes compacts maximaux, $SL_2(F)$ admet deux classes de sous-groupes compacts maximaux représentées par K_0 et K_1. Comme il n'existe a priori aucune raison de privilégier K_0 par rapport à K_1, il semble raisonnable de vérifier si les objets associés à K_1 (algèbres de Hecke sphériques, représentations conoyaux) ne font pas apparaître de nouvelles représentations de $SL_2(F)$, ou s'ils ne fournissent pas de nouvelles paramétrisations des représentations déjà obtenues à partir des conoyaux associés à K_0.
Nous allons montrer que toute l'information fournie par K_1 est contenue dans (et est en fait équivalente à) celle fournie par K_0. La base de cette correspondance réside dans les arguments développés à propos de la compatibilité entre l'induction compacte et la conjugaison des représentations dans le chapitre de préliminaires, et dans le fait que K_0 et K_1 sont conjugués dans $GL_2(F)$, dont $SL_2(F)$ est un sous-groupe normal fermé.

11. donc injectif par irréductibilité du $\overline{\mathbb{F}}_p[K_0]$-module $\sigma_{\vec{r}}$.
12. C'est immédiat sur les fonctions de la forme $[I_2, v]$ avec $v \in \sigma_{\vec{r}}$, et l'on conclut par G_S-équivariance des fonctions ψ et ϕ.

Algèbres de Hecke sphériques associées à K_1

Soit $\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}$ une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de K_1. D'après le Corollaire 2.3.6, on dispose d'un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres

$$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_1, \sigma_{\vec{r}}^{\alpha}) \simeq \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}}) \ . \tag{3.32}$$

Si l'on note $\tau_{\vec{r}}^{1}$ l'image de l'opérateur de Hecke $\tau_{\vec{r}}$ par cet isomorphisme, on déduit directement du Corollaire 3.5.8 et de l'isomorphisme (3.32) le résultat suivant.

Proposition 3.5.22. *L'algèbre* $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_1, \sigma_{\vec{r}}^{\alpha})$ *est égale à l'algèbre de polynômes* $\overline{\mathbb{F}}_p[\tau_{\vec{r}}^{1}]$.

Comparaison des représentations conoyaux

A l'image de ce qui a été fait pour K_0, la Proposition 3.5.22 mène à introduire les représentations conoyaux suivantes : pour toute paire de paramètres $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \ldots, p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$, on pose

$$\pi_1(\vec{r}, \lambda) := \frac{\mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha})}{(\tau_{\vec{r}}^{1} - \lambda)} \ .$$

On dit alors qu'une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible V de G_S admet $(\vec{r}, \lambda)$ comme *paramétrisation possible par rapport à* K_1 s'il existe un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules de la forme $\pi_1(\vec{r}, \lambda) \twoheadrightarrow V$. La représentation V est dite *supersingulière par rapport à* K_1 lorsqu'elle admet une paramétrisation possible de la forme $(\vec{r}, 0)$.

Proposition 3.5.23. *Pour toute paire de paramètres* $(\vec{r}, \lambda)$*, la conjugaison par* α *induit un isomorphisme de* $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$*-modules entre* $\pi_1(\vec{r}, \lambda)$ *et* $(\pi_0(\vec{r}, \lambda))^{\alpha}$.

Démonstration. La Proposition 2.2.5 et la Remarque 2.2.6 assurent que la conjugaison par α induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules :

$$\mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}) \simeq \left(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})\right)^{\alpha} \ .$$

En outre, la définition de l'opérateur $\tau_{\vec{r}}^{1}$ assure que cet isomorphisme est équivariant sous l'action des algèbres de Hecke sphériques associées au poids de Serre de paramètre $\vec{r}$, à savoir $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_1, \sigma_{\vec{r}}^{\alpha})$ sur le membre de gauche et $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}})$ sur le membre de droite, ce qui suffit à démontrer le résultat voulu. □

Corollaire 3.5.24. *Soit* $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \ldots p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$.

1. *Le* $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$*-module* $\pi_1(\vec{r}, \lambda)$ *admet un unique quotient irréductible, et les quotients associés à deux telles paramétrisations distinctes ne sont pas isomorphes.*
2. *Si* $(\vec{r}, \lambda)$ *est une paramétrisation possible par rapport à* K_1 *de* V*, alors* V *n'est pas supercuspidale.*
3. *La notion de supersingularité par rapport à* K_1 *est bien définie, et toute représentation supersingulière par rapport à* K_1 *est supercuspidale.*

Démonstration. Les deux premiers énoncés proviennent directement du Corollaire 3.5.19 une fois que l'on a remarqué que V est un quotient de $\pi_1(\vec{r}, \lambda)$ si et seulement si $V^{\alpha^{-1}}$ est un quotient de $\pi_0(\vec{r}, \lambda)$ et que l'on a rappelé que la Proposition 3.4.9 assure que toute représentation non supercuspidale est isomorphe à sa représentation α-conjuguée. Le troisième énoncé provient quant à lui de la combinaison des Propositions 3.5.20 et 3.5.23 et du Corollaire 3.5.21. □

Décomposition des conoyaux associés à G et à G_S.

Fixons un paramètre $\vec{r} \in \{0, \ldots, p-1\}^f$. La décomposition du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}})$ fournie par la Proposition 3.5.12 induit par passage au quotient un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

$$\pi(\vec{r}, 0) \simeq \frac{\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})}{T_{\vec{r}}(\mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}))} \oplus \frac{\mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha})}{T_{\vec{r}}(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}))} \ . \tag{3.33}$$

Par ailleurs, les résultats de compatibilité entre induction compacte et conjugaison établis dans la Proposition 2.2.5 permettent de réécrire l'isomorphisme de la Proposition 3.5.12 sous la forme :

$$\mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}})|_{G_S} \simeq \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \oplus \left(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})\right)^{\alpha} \ .$$

Cette remarque va nous permettre d'analyser partiellement la structure des représentations de G_S données par $\pi(\vec{r}, 0)$, $\pi_0(\vec{r}, 0)$ et $\pi_1(\vec{r}, 0)$. Pour ce faire, nous aurons besoin du résultat suivant.

Proposition 3.5.25. *Pour tout paramètre $\vec{r}$, on dispose d'un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules*

$$\left(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})\right)^{\alpha^2} \simeq \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \ .$$

Démonstration. On commence par rappeler que l'on a $\alpha^2 = \varpi_F \alpha_0$ et que l'action par conjugaison du centre de G est triviale, ce qui montre déjà que l'on a

$$\left(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})\right)^{\alpha^2} = \left(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})\right)^{\alpha_0} = \mathrm{ind}_{\alpha_0 K_0 \alpha_0^{-1}}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha_0}) \ .$$

Considérons alors l'application $\Psi : \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \to \mathrm{ind}_{\alpha_0 K_0 \alpha_0^{-1}}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha_0})$ définie par :

$$\forall\ f \in \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}),\ \forall\ g \in G_S,\ \Psi(f)(g) := f(\alpha_0^{-1} g) \ .$$

Ceci a un sens car α_0 est un élément de G_S et car on a, pour toute paire $(k_0, g) \in K_0 \times G_S$,

$$\Psi(f)(\alpha_0 k_0 \alpha_0^{-1} g) = f(k_0 \alpha_0^{-1} g) = \sigma_{\vec{r}}(k_0) f(\alpha_0^{-1} g) = \sigma_{\vec{r}}^{\alpha_0}(\alpha_0 k_0 \alpha_0^{-1}) \Psi(f)(g) \ .$$

L'application Ψ est clairement $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéaire, et sa G_S-équivariance provient du calcul suivant : pour tous $g, x \in G_S$, on a

$$(g \cdot \Psi(f))(x) = \Psi(f)(xg) = f(\alpha_0^{-1} x g) = (g \cdot f)(\alpha_0^{-1} x) = \Psi(g \cdot f)(x) \ .$$

Comme la bijectivité de Ψ est immédiate, on en conclut que Ψ est un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules, ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 3.5.26. *Posons* $\pi_{\vec{r}} := \dfrac{\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})}{T_{\vec{r}}(\mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}))}$.

1. *L'isomorphisme* (3.33) *peut être réécrit sous la forme*

$$\pi(\vec{r}, 0)|_{G_S} \simeq \pi_{\vec{r}} \oplus \pi_{\vec{r}}^{\alpha} \ .$$

2. *Les $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $(\pi(\vec{r}, 0))^{\alpha}$ et $\pi(\vec{r}, 0)$ sont isomorphes.*
3. *L'opérateur $T_{\vec{r}}$ induit les suites exactes courtes non scindées suivantes de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules :*

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow \pi_{\vec{r}}^{\alpha} \longrightarrow \pi_0(\vec{r}, 0) \longrightarrow \pi_{\vec{r}} \longrightarrow 0 \ ; \\ 0 \longrightarrow \pi_{\vec{r}} \longrightarrow \pi_1(\vec{r}, 0) \longrightarrow \pi_{\vec{r}}^{\alpha} \longrightarrow 0 \ . \end{cases}$$

Dans chacune de ces suites, la première flèche est définie par l'opérateur $T_{\vec{r}}$ tandis que la seconde est donnée par la projection définie par l'isomorphisme du premier point.

Démonstration. Les deux premières assertions découlent directement de la Proposition 3.5.25, qui implique notamment que l'on a $\pi_{\vec{r}}^{\alpha^2} \simeq \pi_{\vec{r}}$, et de la G-équivariance de l'opérateur $T_{\vec{r}}$. Nous allons montrer l'existence de la première suite exacte fournie par la troisième assertion, la seconde suite exacte s'en déduisant par α-conjugaison.
On commence par remarquer que l'on dispose, par définition de $\pi_0(\vec{r},0)$ et de $\pi_{\vec{r}}$, d'un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules induit par l'application identité de $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$:

$$\pi_0(\vec{r},0) \twoheadrightarrow \pi_{\vec{r}} \ .$$

Son noyau est égal au quotient $\dfrac{T_{\vec{r}}(\mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}))}{T_{\vec{r}}^2(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}))}$, qui est naturellement isomorphe à l'image de $\pi_{\vec{r}}^{\alpha}$ par l'opérateur G-équivariant $T_{\vec{r}}$. L'injectivité de $T_{\vec{r}}$, assurée par [BL94, Lemma 20], permet donc d'en déduire que l'on a bien la suite exacte courte annoncée. Il nous reste à vérifier qu'elle n'est pas scindée, ce qui se prouve par l'absurde : notons j la surjection définie par la flèche de droite de notre suite exacte et supposons qu'il existe un homomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $F : \pi_{\vec{r}} \to \pi_0(\vec{r},0)$ tel que $F \circ j$ soit l'application identité. La Proposition 3.5.13 assure que l'on devrait alors avoir :

$$\forall\ f \in \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}),\ \ F(f \bmod T_{\vec{r}}) = (F \circ j)(f \bmod T_{\vec{r}}^2) = f \bmod T_{\vec{r}}^2 \ .$$

Appliquons cette égalité à l'élément $T_{\vec{r}}([I_2, x^{\vec{r}}])$: on obtient ainsi que

$$T_{\vec{r}}([I_2, x^{\vec{r}}]) \bmod T_{\vec{r}}^2 = F(T_{\vec{r}}([I_2, x^{\vec{r}}]) \bmod T_{\vec{r}}) = 0 \ ,$$

ce qui signifie que $T_{\vec{r}}[I_2, x^{\vec{r}}]$ doit appartenir à $T_{\vec{r}}^2(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}))$. Ceci est absurde pour des raisons de support : en effet, la formule (3.21) assure que le support dans $\mathcal{X}$ de l'élément $T_{\vec{r}}([I_2, x^{\vec{r}}])$ est inclus dans le cercle de rayon 1, tandis que la Proposition 3.5.13 implique que tout élément de $T_{\vec{r}}^2(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})) = \tau_{\vec{r}}(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}))$ est à support dans l'orbite $\mathcal{A}_p$, formée de la réunion des cercles de rayon pair de $\mathcal{X}$. □

3.5.6 Introduction de l'Hypothèse 1

Position du problème

Pour aller plus loin dans l'analogie avec les résultats obtenus par Barthel-Livné sur les $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles à caractère central de G, nous souhaiterions obtenir un analogue du résultat suivant [BL94, Proposition 32 & Theorem 33], qui affirme que toute telle représentation de G est quotient d'une représentation conoyau $\pi(\vec{r},\lambda)$ bien choisie.

Théorème 3.5.27. *Soit V une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible à caractère central de G. Il existe une paire de paramètres $(\vec{r},\lambda) \in \{0,\dots p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$ et un caractère lisse $\chi : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ tels que V soit isomorphe à un quotient de la représentation $\pi(\vec{r},\lambda) \otimes (\chi \circ \det)$.*

L'étude détaillée de la preuve de ce théorème montre qu'elle repose sur une bonne connaissance de l'action de IZ sur l'espace des vecteurs $I(1)$-invariants de $\mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}})$ et sur l'énoncé de finitude suivant, donné par [BL95, Proposition 16] dans le cas où $\sigma_{\vec{r}} = \mathbf{1}$ et par [BL94, Proposition 18] dans les autres cas.

Proposition 3.5.28. *Soient η un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de IZ et $\sigma_{\vec{r}}$ un poids de Serre de KZ. Supposons que W soit un sous-$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, IZ, \eta)$-module non nul de la composante (IZ,η)-isotypique de $\mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}})$. Alors W est de codimension finie dans ladite composante isotypique.*

Pour pouvoir adapter de manière directe les arguments de Barthel-Livné, il nous faudrait pouvoir prouver des résultats correspondants à ces deux énoncés pour les représentations lisses irréductibles de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Nous allons maintenant expliquer pourquoi il n'est malheureusement pas possible d'espérer pouvoir le faire en toute généralité en exhibant un contre-exemple à l'assertion de finitude demandée par la Proposition 3.5.28 lorsque $\vec{r} = \overrightarrow{\frac{p-1}{2}}$.

Remarque 3.5.29. Clarifions tout de suite un point : ceci ne signifie pas qu'il est impossible d'obtenir un énoncé comparable à celui du Théorème 3.5.27 pour les représentations lisses irréductibles de $SL_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$! C'est simplement que la méthode suivie par Barthel-Livné pour démontrer ce résultat n'est pas celle qu'il convient d'utiliser si l'on souhaite le démontrer pour $SL_2(F)$. Comme nous le verrons ci-après (Théorèmes 3.5.35 et 3.5.36), nous savons en fait démontrer l'existence d'une paramétrisation possible par rapport à un sous-groupe compact fixé pour la quasi-totalité des représentations lisses irréductibles considérées [13].

Structure des algèbres de Hecke-Iwahori attachées à $SL_2(F)$

Si $\chi : I_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ est un caractère lisse, il est nécessairement trivial sur le pro-p-Iwahori $I_S(1)$ et provient donc par inflation d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère du groupe fini $I_S/I_S(1) \simeq k_F^\times$. Autrement dit, il existe un paramètre $\vec{r} \in \{0, \ldots, p-1\}^f$ tel que :

$$\forall\, x \in k_F^\times,\ \chi\left(\begin{pmatrix} [x] & 0 \\ 0 & [x]^{-1} \end{pmatrix}\right) = x^{\vec{r}} = \omega^{\vec{r}}(x) .$$

En particulier, on a $\chi^2 = \mathbf{1}$ si et seulement si $\omega^{\vec{r}} = \omega^{\overrightarrow{p-1-r}}$, ce qui équivaut à demander que $\vec{r}$ prenne l'une des trois valeurs suivantes : $\vec{0}$, $\overrightarrow{\frac{p-1}{2}}$ ou $\overrightarrow{p-1}$.

Par ailleurs, les doubles classes de G_S modulo I_S sont paramétrées par le groupe de Weyl [14] W_S de $SL_2(F)$. Un système de représentants des éléments de W_S dans G_S est fourni par la famille $\{\alpha_0^n,\ w_0\alpha_0^n;\ n \in \mathbb{Z}\}$. Si l'on note ϕ_n la fonction de support égal à $I_S\alpha_0^{-n}I_S$ qui vaut 1 en α_0^{-n}, et ψ_n la fonction de support égal à $I_S w_0\alpha_0^{-n}I_S$ qui vaut 1 en $w_0\alpha_0^{-n}$, on dispose alors du résultat suivant.

Proposition 3.5.30. *L'algèbre de convolution $\mathbb{H}(G_S, I_S, \chi)$ admet pour base*
- *la famille $\{\phi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ si $\chi^2 \neq \mathbf{1}$;*
- *la famille $\{\phi_n, \psi_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ si $\chi^2 = \mathbf{1}$.*

Démonstration. Un élément de $\mathbb{H}(G_S, I_S, \chi)$ est à support dans un nombre fini de doubles classes modulo I_S, donc peut s'écrire comme une combinaison linéaire finie d'éléments à support dans une seule double classe. Supposons maintenant que f soit un élément de $\mathbb{H}(G_S, I_S, \chi)$ à support dans une unique double classe modulo I_S, et déterminons les valeurs qu'il peut prendre en fonction de l'allure de la double classe qui forme son support.
- Si f est à support dans $I_S\alpha_0^{-n}I_S$, il est entièrement déterminé par sa valeur en α_0^{-n}, qui doit vérifier la condition suivante : pour tous éléments $i_1, i_2 \in I_S$ tels que $i_1\alpha_0^{-n} = \alpha_0^{-n}i_2$,

$$\chi(i_1)f(\alpha_0^{-n}) = \chi(i_2)f(\alpha_0^{-n}) . \tag{3.34}$$

13. Nous verrons qu'en réalité, seul le cas où le corps F est de caractéristique 2 nécessite de faire une véritable hypothèse.

14. Nous ne parlons bien entendu pas du groupe de Weyl fini $W_0 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de $SL_2(F)$, mais du groupe de Weyl $W_S \simeq W_0 \rtimes \mathbb{Z}$ qui peut être défini comme le quotient $N_{G_S}(T_S)/T_S(\mathcal{O}_F)$ du normalisateur du tore diagonal T_S dans $SL_2(F)$ par le sous-groupe $T_S(\mathcal{O}_F)$ des éléments de T_S à coefficients entiers, et qui est parfois appelé *groupe d'Iwahori-Weyl* [PR]. On retrouvera cette terminologie dans le Chapitre 6.

Cependant, un calcul direct montre que deux tels éléments i_1,i_2 vérifient $i_1 i_2^{-1} \in I_S(1)$, ce qui assure que χ prend la même valeur en i_1 et en i_2, et montre que la condition (3.34) est vérifiée par toute valeur de $f(\alpha_0^{-n})$.

– Si f est à support dans $I_S w_0 \alpha_0^{-n} I_S$, il est entièrement déterminé par sa valeur en $w_0\alpha_0^{-n}$, qui doit satisfaire à la condition suivante : pour tous éléments $i_1, i_2 \in I_S$ tels que $w_0^{-1} i_1 w_0 \alpha_0^{-n} = \alpha_0^{-n} i_2$,
$$\chi(i_1) f(w_0\alpha_0^{-n}) = \chi(i_2) f(w_0\alpha_0^{-n}) \ .$$
L'égalité $w_0^{-1} i_1 w_0 \alpha_0^{-n} = \alpha_0^{-n} i_2$ implique que χ doit prendre la même valeur en $w_0^{-1} i_1 w_0$ et en i_2, donc que l'on doit en particulier avoir :
$$\forall\ x \in k_F^\times,\ \chi\left(\begin{pmatrix} [x] & 0 \\ 0 & [x]^{-1} \end{pmatrix}\right) = \chi\left(\begin{pmatrix} [x]^{-1} & 0 \\ 0 & [x] \end{pmatrix}\right) \ ,$$
ce qui revient à demander que $\chi^2 = \mathbf{1}$ et termine la démonstration. □

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $T_n \in \mathcal{H}(G_S, I_S, \chi)$ l'opérateur de Hecke correspondant à la fonction ϕ_n et S_n celui qui correspond à la fonction ψ_n lorsqu'elle existe. De même, on dispose d'opérateurs de Hecke-Iwahori $T_{n,n+1}$ (et $T_{n+1,n}$ lorsqu'ils existent) pour $GL_2(F)$, dont on rappelle ici la définition ([BL94, Lemma 9] et [BL95, Notation page 8]) : pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, l'opérateur de Hecke $T_{n,n+1}$ (resp. $T_{n+1,n}$ lorsqu'il existe) correspond à la fonction de $\mathbb{H}(G, IZ, \tilde{\chi})$ dont le support est égal à $IZ\alpha^{-n}I$ (resp. $IZ\beta\alpha^{-n}I$) et qui vaut 1 en α^{-n} (resp. $\beta\alpha^{-n}$).
Remarquons à présent que si $\tilde{\chi}$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de IZ, la décomposition de G sous la forme $G = IZG_S \sqcup IZ\alpha G_S$ permet d'obtenir par décomposition de Mackey une écriture du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{ind}_{IZ}^G(\tilde{\chi})$ sous la forme
$$\mathrm{ind}_{IZ}^G(\tilde{\chi})|_{G_S} = \mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\chi) \oplus \mathrm{ind}_{I_S^\alpha}^{G_S}(\chi^\alpha) \ ,$$
où χ désigne la restriction à I_S de $\tilde{\chi}$, et où χ^α désigne le caractère de $I_S^\alpha = \alpha I_S \alpha^{-1}$ obtenu par α-conjugaison du caractère χ. Un calcul direct à partir des formules de convolution montre alors que l'action des opérateurs $T_{2n,2n+1}$ et $T_{2n,2n-1}$ associés au caractère $\tilde{\chi}$ laisse stable le facteur $\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\chi)$, et que les endormorphismes de $\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\chi)$ ainsi définis admettent l'expression très simple suivante dans $\mathcal{H}(G_S, I_S, \chi)$.

Proposition 3.5.31. *Supposons que $\tilde{\chi}$ soit un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de IZ prolongeant χ.Pour tout $f \in \mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\chi) \subset \mathrm{ind}_{IZ}^G(\tilde{\chi})$, on a*
$$\forall\ n \in \mathbb{Z},\ T_{2n,2n+1}(f) = T_n(f) \ .$$
Lorsque cela a un sens, i.e. lorsque $\tilde{\chi}$ se factorise par le déterminant (ce qui revient à dire que $\chi = \mathbf{1}$), on a aussi :
$$\forall\ n \in \mathbb{Z},\ T_{2n+2,2n+1}(f) = S_n(f) \ .$$

Etude des composantes (I_S, χ)-isotypiques de $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$

Proposition 3.5.32. *On part de la décomposition suivante de G_S en doubles classes disjointes :*
$$G_S = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} K_0 \alpha_0^{-n} I_S(1) \ .$$

Démonstration. On dispose de la décomposition suivante de G en doubles classes disjointes modulo KZ à droite et $I(1)$ à gauche fournie par [BL94, Proposition 14] :
$$G = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} KZ\alpha^{-n} I(1) \ ,$$

qui assure déjà que les doubles classes apparaissant dans notre énoncé sont disjointes puisque $K_0\alpha_0^{-n}I_S(1)$ est contenue dans $KZ\alpha^{-2n}I(1)$.
Soit maintenant g un élément de G_S. Par ce qui précède, on sait qu'il existe des éléments $k \in K$, $z \in Z$ et $i \in I(1)$ ainsi qu'un entier $n \in \mathbb{Z}$ tels que $g = kz\alpha^{-n}i$. Le calcul du déterminant de g montre alors que l'on doit avoir $\det(k)\det(z)\varpi_F^{-n}\det(i) = 1$. Si l'on écrit $\det(z)$ sous la forme $u\varpi_F^{2x}$ avec $u \in \mathcal{O}_F^\times$, on obtient que l'on doit avoir $n = 2x$, puis que $\det(k)u\det(i) = 1$. Comme le groupe des matrices diagonales est abélien, on peut conclure en écrivant $g = k_1\alpha_0^{-x}i_1$, où $k_1 \in K_0$ et $i_1 \in I_S(1)$ sont définis par les formules suivantes :

$$k_1 := k\begin{pmatrix} \det(i)u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\; i_1 := \begin{pmatrix} \det(i)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i \;.$$

□

Fixons un entier $n \in \mathbb{Z}$ et considérons un élément $I_S(1)$-invariant $f \in \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ de support égal à $K_0\alpha_0^{-n}I_S(1)$. Il est entièrement déterminé par sa valeur en α_0^{-n}, qui doit par définition vérifier la condition suivante : pour tout élément $k \in K_0$ tel que $\alpha_0^n k\alpha_0^{-n}$ appartient à $I_S(1)$, on a

$$\sigma_{\vec{r}}(k)f_n(\alpha_0^{-n}) = f_n(\alpha_0^{-n}) \;. \tag{3.35}$$

Nous allons alors distinguer selon le signe de n, et supposer tout d'abord que $n \geq 1$. En appliquant l'égalité (3.35) à $k = \overline{u}(x)$ avec $x \in \mathcal{O}_F^\times$, on obtient que $f(\alpha_0^{-n})$ est un élément de $\sigma_{\vec{r}}$ invariant sous l'action de $\overline{U}(k_F)$, donc colinéaire à $y^{\vec{r}}$ par [BL94, Lemma 2].
De même, si l'on suppose $n \leq 0$ puis que l'on applique l'égalité (3.35) à $k = u(x)$ avec $x \in \mathcal{O}_F^\times$, on obtient que $f(\alpha_0^{-n})$ doit être invariant sous l'action de $U(k_F)$, donc colinéaire à $x^{\vec{r}}$ par [BL94, Lemma 2].
Autrement dit, si l'on note f_n l'élément $I_S(1)$-invariant de $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ de support égal à $K_0\alpha_0^{-n}I_S(1)$ et dont la valeur en α_0^{-n} est $x^{\vec{r}}$ lorsque $n \leq 0$ (resp. $y^{\vec{r}}$ lorsque $n \geq 1$), on obtient l'énoncé suivant, où la seconde assertion s'obtient par calcul direct.

Proposition 3.5.33. *1. Les éléments $I_S(1)$-invariants de $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ forment un espace vectoriel sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ dont une base est donnée par la famille $\{f_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$.*

2. L'action de I_S sur la fonction f_n est donnée par le caractère $\omega^{\vec{r}}$ si $n \leq 0$, et par le caractère $\omega^{-\vec{r}}$ si $n \geq 1$.

Corollaire 3.5.34. *Soit $\chi : I_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse tel que la composante (I_S, χ)-isotypique de $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ soit non nulle. On a alors $\chi = \omega^{\vec{r}}$ ou $\chi = \omega^{-\vec{r}}$.*

Démonstration. On rappelle qu'un élément appartient à la composante (I_S, χ)-isotypique de $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ lorsque I_S agit sur cet élément à travers le caractère χ. Si f est un élément non nul de ladite composante isotypique, il est contenu dans l'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ et peut donc être écrit comme une combinaison linéaire finie de la forme $\sum_{j\in I} \lambda_j f_j$.
On dispose alors de la chaîne d'égalités suivante pour tout élément $i \in I_S$:

$$\sum_{j\in J} \lambda_j\chi(i)f_j = \chi(i)f = i\cdot f = \sum_{j\in J}\lambda_j(i\cdot f_j) = \sum_{j\in J}\lambda_j\epsilon_j(i)f_j \;,$$

où ϵ_j vaut $\omega^{\vec{r}}$ lorsque $j \leq 0$ et $\omega^{-\vec{r}}$ lorsque $j \geq 1$, ce qui implique que l'on doit avoir

$$\sum_{j\in J}\lambda_j(\chi(i) - \epsilon_j(i))f_j = 0 \;.$$

Comme les supports des fonctions f_n sont deux à deux disjoints, on en déduit que l'on a forcément :

$$\forall\ i \in I_S,\ \forall\ j \in J,\ \lambda_j(\chi(i) - \epsilon_j(i)) = 0\ .$$

On conclut alors en rappelant que la non-nullité de f assure l'existence d'un indice j tel que $\lambda_j \neq 0$, donc tel que $\chi = \epsilon_j$. □

Construction du contre-exemple annoncé

Plaçons-nous à présent dans le cas où $\vec{r} = \frac{\overrightarrow{p-1}}{2}$, ce qui implique tout d'abord que $\omega^{\vec{r}} = \omega^{-\vec{r}}$ et donc, grâce à la Proposition 3.5.33, que la composante $(I_S, \omega^{\vec{r}})$-isotypique de $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ est égale à $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\mathbb{F}}_p f_n$. Par ailleurs, la non-trivialité du caractère $\omega^{\vec{r}}$ implique que si χ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de IZ qui prolonge de manière lisse le caractère $\omega_{\vec{r}}$, il ne peut pas se factoriser à travers le déterminant. La Proposition 3.5.31 et le second point de [BL94, Lemma 9] assurent alors que chaque élément de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G_S, I_S, \omega_{\vec{r}})$ va agir de la même manière qu'un certain polynôme en des opérateurs $T_{2n,2n+1}$. On en déduit, d'après la description de l'action de ces opérateurs fournie par [BL94, Lemma 12 & Proposition 16], que le $\mathcal{H}(G_S, I_S, \omega_{\vec{r}})$-module engendré par la fonction f_1 est égal à $\bigoplus_{n\geq 1} \overline{\mathbb{F}}_p f_n$ et est donc de codimension infinie dans la composante $(I_S, \omega^{\vec{r}})$-isotypique de $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$.

Nous avons ainsi mis en défaut la possibilité d'une adaptation inconditionnelle de l'énoncé de la Proposition 3.5.28 dans le cas de G_S. Ceci explique pourquoi nous sommes amenée, pour poursuivre notre étude détaillée des représentations lisses irréductibles de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, à nous limiter aux représentations lisses irréductibles de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ satisfaisant à l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1 : La représentation considérée admet une paramétrisation possible par rapport à K_0.

Comme nous le verrons dans la suite, cette hypothèse n'est guère contraignante : nous allons en effet prouver qu'elle est vérifiée
- par toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible **admissible** de G_S ;
- par toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de G_S **lorsque le corps** F **n'est pas de caractéristique** 2.

En particulier, les résultats que nous prouverons à partir de cette hypothèse seront valables pour n'importe quelle $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $SL_2(F)$ lorsque F est une extension finie arbitraire de $\mathbb{Q}_p$.

Cas des représentations lisses irréductibles admissibles

Théorème 3.5.35. *Toute représentation lisse irréductible admissible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est quotient d'une représentation conoyau $\pi_0(\vec{r}, \lambda)$ pour une paire de paramètres $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \ldots, p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$.*

Démonstration. Soit V une représentation lisse irréductible admissible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. En rappelant que l'on a noté Γ_S le pro-p-radical de K_0, on sait grâce au Lemme 2.1.9 et à l'hypothèse d'admissibilité que V^{Γ_S} est une représentation de $SL_2(k_F)$ de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, et qu'elle contient donc un poids de Serre $\sigma_{\vec{r}}$ pour K_0. La réciprocité de Frobenius compacte assure alors que $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{K_S}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}), V)$ est un espace vectoriel non nul de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, ce qui implique qu'il contient un vecteur propre sous l'action de l'algèbre commutative $\mathcal{H}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}}) = \overline{\mathbb{F}}_p[\tau_{\vec{r}}]$. Autrement dit, il existe un homomorphisme non nul

$\Phi : \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \to V$ et un scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ tels que $\Phi \circ \tau_{\vec{r}} = \lambda\Phi$. Ceci montre notamment que Φ se factorise à travers le quotient $\dfrac{\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})}{(\tau_{\vec{r}} - \lambda)(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}))} = \pi_0(\vec{r}, \lambda)$ en un homomorphisme non nul $\bar{\Phi} : \pi_0(\vec{r}, \lambda) \to V$, ce qui termine la démonstration car l'homomorphisme $\bar{\Phi}$ étant non nul, il doit être surjectif par irréductibilité de V. $\square$

Cas où F n'est pas de caractéristique 2

Nous allons maintenant montrer que lorsque F n'est pas de caractéristique 2, toute représentation lisse irréductible de G_S vérifie l'Hypothèse 1. A la différence de ce que nous avons réalisé dans le cas admissible, nous ne procédons pas par adaptation de l'argument de Barthel-Livné mais nous utilisons directement le résultat énoncé dans le Théorème 3.5.27. La démonstration que nous proposons ci-dessous repose de manière fondamentale sur la finitude du quotient G/G_SZ, qui est mise en défaut lorsque F n'est pas de caractéristique 2.

Théorème 3.5.36. *Soit σ une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de G_S.*

1. *Il existe une représentation Π de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui est lisse, irréductible, à caractère central prolongeant celui de σ, et dont la restriction à G_S contient σ.*
2. *Il existe une représentation Π de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui est lisse, irréductible, à caractère central, et dont la restriction à G_S admet σ comme quotient.*
3. *L'Hypothèse 1 est vérifiée par σ. De plus, si σ n'est pas supersingulière par rapport à K_0, elle admet une unique paramétrisation possible par rapport à K_0.*

Démonstration. La démonstration que nous donnons de la première assertion utilise un argument de filtration pour lequel il est crucial que le quotient G/G_SZ soit fini. On commence par étendre σ en une représentation lisse irréductible à caractère central de G_SZ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ que l'on note encore σ, et l'on considère la représentation induite $\mathrm{Ind}_{G_SZ}^{G}(\sigma)$. Puisque F n'est pas de caractéristique 2, le sous-groupe normal G_SZ est d'indice fini dans G, de sorte que la représentation $\mathrm{Ind}_{G_SZ}^{G}(\sigma)$ est de longueur finie. Elle peut donc être filtrée par une suite finie de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules

$$\{0\} = \Pi_m \subset \Pi_{m-1} \subset \ldots \subset \Pi_1 \subset \Pi_0 = \mathrm{Ind}_{G_SZ}^{G}(\sigma)$$

telle que pour tout entier $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, le quotient $\pi_i := \Pi_i/\Pi_{i+1}$ soit une représentation (lisse) irréductible de G.
Notons alors r le plus grand entier $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ tel que l'intersection $\Pi_i \cap \sigma$ soit non nulle. Par irréductibilité du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module σ, on doit alors avoir $\sigma \subset \Pi_r$; la maximalité de r assure quant à elle que l'on a $\Pi_{r+1} \cap \sigma = \{0\}$, ce qui implique que σ peut être vu comme un sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module du quotient π_r et prouve notre premier point.

La seconde assertion se démontre par un argument analogue car, étant donné que le quotient G/G_SZ est fini, on sait que l'induite lisse $\mathrm{Ind}_{G_SZ}^{G}(\sigma)$ est égale à l'induite compacte $\mathrm{ind}_{G_SZ}^{G}(\sigma)$ (Proposition 2.2.2), dont σ est quotient (comme $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module) par réciprocité compacte de Frobenius.

On en déduit la validité de l'Hypothèse 1 pour σ de la manière suivante : considérons une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation Π de G lisse, irréductible, à caractère central, et dont la restriction à G_S admet σ comme quotient. D'après le premier point du Théorème 3.5.15, on sait qu'il existe un caractère lisse $\chi : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et une paire de paramètres $(\vec{r}, \lambda)$ pour lesquels on dispose d'un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules

$$\pi(\vec{r}, \lambda) \otimes (\chi \circ \det) \twoheadrightarrow \Pi \ . \tag{3.36}$$

Cela signifie qu'il existe un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules $\psi : \mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}}) \otimes (\chi \circ \det) \twoheadrightarrow \Pi$ vérifiant $\psi \circ T_{\vec{r}} = \lambda\psi$, ce qui implique que l'on a aussi $\psi \circ T_{\vec{r}}^2 = \lambda^2\psi$. La Proposition 3.5.12 assure alors que ce morphisme induit un morphisme non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

$$\psi_S : \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \oplus \mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^\alpha) \twoheadrightarrow \sigma$$

qui induit lui-même deux morphismes de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

$$\psi_{S,0} : \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \to \sigma \text{ et } \psi_{S,1} : \mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^\alpha) \to \sigma \ . \tag{3.37}$$

L'un de ces deux morphismes doit être non nul, et donc surjectif par irréductibilité de σ. Si $\psi_{S,0}$ est non nul, on a terminé : en effet, la Proposition 3.5.13 implique que l'on a de plus $\psi_{S,0} \circ \tau_{\vec{r}} = \lambda^2\psi_{S,0}$, ce qui entraîne que $\psi_{S,0}$ se factorise à travers le quotient $\pi_0(\vec{r}, \lambda^2)$ et donc que $(\vec{r}, \lambda^2)$ est une paramétrisation possible de V. Si le morphisme $\psi_{S,0}$ est identiquement nul, la Proposition 3.5.23 permet de déduire du morphisme $\psi_{S,1}$ l'existence d'un morphisme non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

$$\pi_0(\vec{r}, \lambda^2) \twoheadrightarrow \sigma^{\alpha^{-1}} \ .$$

Deux cas sont alors à distinguer :

- ou bien λ est non nul, auquel cas la Proposition 3.4.9 et le Corollaire 3.5.19 impliquent que les représentations $\sigma^{\alpha^{-1}}$ et σ sont isomorphes, ce qui montre que la paire $(\vec{r}, \lambda^2)$ est de nouveau une paramétrisation possible de σ ;
- ou bien λ est nul, auquel cas la preuve de la Proposition 3.5.25 assure que la composition à droite du morphisme ψ_S par la conjugaison des représentations par α définit un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

  $$\psi_S^\alpha : \mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^\alpha) \oplus \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \twoheadrightarrow \sigma \ .$$

  L'application $\psi_{S,0}^\alpha : \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \to \sigma$ obtenue par projection de ψ_S^α est dans ce cas égale à la composée à droite du morphisme non nul $\psi_{S,1}$ par la conjugaison par α. Elle est par suite non nulle, donc surjective, et prouve alors que $(\vec{r}, 0)$ est une paramétrisation possible de V.

L'unicité de la paramétrisation possible dans le cas non-supersingulier est une conséquence directe du Corollaire 3.5.19. □

Remarque 3.5.37. Lorsque F est de caractéristique nulle [15], il est même possible de démontrer [LL, Lemma 2.4] que la restriction à G_S de toute représentation lisse irréductible admissible de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ se décompose en une somme directe finie de représentations lisses irréductibles admissibles de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Remarquons aussi que la preuve du Théorème 3.5.36 fournit aussi, **sans hypothèse sur la caractéristique du corps** F, une démonstration du résultat suivant.

Corollaire 3.5.38. *Soit σ une représentation lisse irréductible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Supposons que σ soit contenue dans la restriction à G_S d'une représentation lisse irréductible Π de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ à caractère central prolongeant celui de σ.*
Alors σ est supersingulière par rapport à K_0 si et seulement si Π est supersingulière.

Démonstration. La fin de la démonstration du Théorème 3.5.36 prouve que si $(\vec{r}, \lambda)$ est une paramétrisation de Π, alors $(\vec{r}, \lambda^2)$ est une paramétrisation possible par rapport à K_0 de σ. Ceci montre déjà que si Π est une représentation supersingulière de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, alors σ est supersingulière par rapport à K_0. L'implication réciproque se déduit tout aussi facilement de cette assertion une fois que l'on a rappelé que, d'après la Proposition 3.5.20, les seules paramétrisations possibles par rapport à K_0 d'une représentation supersingulière sont de la forme $(\vec{r}, 0)$. □

15. Et, plus généralement, lorsque le quotient G/G_SZ est fini.

3.5.7 Equivalence entre supersingularité et supercuspidalité

Nous commençons par vérifier qu'une fois de plus, les rôles tenus par K_0 et K_1 dans nos constructions sont parfaitement symétriques.

Proposition 3.5.39. *Soit σ une représentation lisse irréductible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

1. *Si σ est admissible ou si F est de caractéristique différente de 2, alors σ admet une paramétrisation possible par rapport à K_1. De plus, si σ n'est pas supersingulière par rapport à K_1, cette paramétrisation possible est unique.*
2. *Supposons que Π soit une représentation de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui est lisse, irréductible, à caractère central prolongeant celui de σ, et dont la restriction à G_S contient σ. Alors σ est supersingulière par rapport à K_1 si et seulement si Π est supersingulière.*

Démonstration. Il suffit de reprendre ligne à ligne les démonstrations des Théorèmes 3.5.35, 3.5.36, et du Corollaire 3.5.38 en échangeant les rôles des compacts K_0 et K_1. Ceci est possible grâce à la définition de l'opérateur $\tau^1_{\vec{r}}$, qui assure sa compatibilité avec l'action de l'opérateur G-équivariant $T^2_{\vec{r}}$, à la Proposition 3.5.12, qui implique que le $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module $\mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}})$ est isomorphe à sa représentation α-conjuguée quel que soit le poids de Serre $\sigma_{\vec{r}}$ choisi, et au Corollaire 3.5.24. $\square$

Nous allons maintenant prouver que le choix du sous-groupe compact maximal n'a pas d'influence sur les informations obtenues pour une représentation donnée.

Théorème 3.5.40. *Soit V une représentation lisse irréductible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Soit $(\vec{r},\lambda)$ une paire de paramètres. On suppose que F est de caractéristique différente de 2 ou que V est admissible.*

1. *Si $\lambda \neq 0$, la paire $(\vec{r},\lambda)$ est une paramétrisation possible de V par rapport à K_0 si et seulement si c'en est une par rapport à K_1.*
2. *La notion de supersingularité ne dépend pas du choix du compact maximal.*

Démonstration. Supposons que $(\vec{r},\lambda)$ soit une paramétrisation possible de V par rapport à K_0 avec $\lambda \neq 0$. Cela signifie qu'il existe un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $\pi_0(\vec{r},\lambda) \twoheadrightarrow V$ qui induit, grâce à la Proposition 3.5.23, un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules de la forme $\pi_1(\vec{r},\lambda) \twoheadrightarrow V^\alpha$. Comme λ est supposé non nul, le second point du Corollaire 3.5.24 implique que V^α n'est pas supercuspidale, et qu'elle est donc isomorphe à V d'après la Proposition 3.4.9 ; on obtient ainsi finalement un morphisme surjectif $\pi_1(\vec{r},\lambda) \twoheadrightarrow V$ qui montre que $(\vec{r},\lambda)$ est aussi une paramétrisation possible de V par rapport à K_1.
Démontrons maintenant que si V est supersingulière par rapport à K_1, alors elle l'est forcément par rapport à K_0. Pour cela, supposons par l'absurde que V admette une paramétrisation possible par rapport à K_0 de la forme $(\vec{r},\lambda)$ avec $\lambda \neq 0$. Le point précédent implique alors que $(\vec{r},\lambda)$ est aussi une paramétrisation possible de V par rapport à K_1, ce qui contredit l'hypothèse de supersingularité par rapport à K_1 à cause du dernier point du Corollaire 3.5.24, et prouve notre assertion car nos hypothèses assurent que V vérifie l'Hypothèse 1.
Pour chaque assertion, l'implication réciproque s'obtient en échangeant les rôles de K_0 et de K_1 dans l'argument développé ci-dessus, ce qui est possible grâce aux Proposition 3.5.20 et 3.5.39 ainsi qu'aux Corollaires 3.5.21 et 3.5.24, et termine donc la démonstration. $\square$

Nous pouvons désormais parler de représentation supersingulière et de paramétrisation possible sans préciser de choix de compact maximal, ce qui fournit l'énoncé suivant.

Corollaire 3.5.41. *Soit V une représentation lisse irréductible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, que l'on suppose de plus admissible si F est de caractéristique 2. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *V est supersingulière ;*
2. *V est supercuspidale.*

Démonstration. Les Corollaires 3.5.21 et 3.5.24 affirment déjà que la supersingularité implique la supercuspidalité. Réciproquement, si V est une représentation supercuspidale et si $(\vec{r}, \lambda)$ en est une paramétrisation possible par rapport à K_0, le Corollaire 3.5.19 implique que l'on doit avoir $\lambda = 0$ par supercuspidalité de V, donc que V est supersingulière par rapport à K_0, ce qui termine la démonstration grâce au dernier point du Théorème 3.5.40. □

3.5.8 Enoncés de classification

Théorème 3.5.42. *1. Les classes d'isomorphisme des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles admissibles de $SL_2(F)$ se partitionnent en quatre familles :*

  (a) le caractère trivial $\mathbf{1}$ *;*

  (b) la représentation de Steinberg St_S ;

  (c) les représentations paraboliquement induites $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ avec η un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse non trivial de B_S ;

  (d) les représentations supersingulières.

2. Cette classification est compatible avec la classification de Barthel-Livné pour les $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles à caractère central de $GL_2(F)$: si W est une représentation lisse irréductible à caractère central de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui contient une représentation lisse irréductible V de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, alors V appartient à une famille de la classification ci-dessus si et seulement si W appartient à la même famille dans la classification des représentations lisses irréductibles à caractère central de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ donnée par les travaux de Barthel-Livné.

3. Si F n'est pas de caractéristique 2*, on peut supprimer l'hypothèse d'admissibilité.*

Démonstration. Soit V une représentation lisse irréductible admissible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. D'après le Théorème 3.5.35, elle vérifie l'Hypothèse 1 et peut donc s'écrire comme quotient d'une représentation conoyau $\pi_0(\vec{r}, \lambda)$ avec $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \ldots, p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$. Si λ est non nul, on sait grâce au Corollaire 3.5.19 que V appartient à l'une des trois premières familles. Si $\lambda = 0$, alors V appartient à la quatrième famille par définition de la notion de supersingularité.
Les familles apparaissant dans l'énoncé sont deux à deux disjointes : le Corollaire 3.5.41 prouve que la quatrième famille est disjointe des trois premières, tandis que la disjonction entre deux quelconques des trois premières familles est conséquence de la Proposition 3.4.18.
L'assertion de compatibilité de notre classification avec celle de Barthel-Livné provient directement du Théorème 3.4.20 et du Corollaire 3.5.38.
Les mêmes arguments sont valables pour toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $SL_2(F)$ lorsque F n'est pas de caractéristique 2 car dans ce cas, l'Hypothèse 1 est vérifiée grâce au Théorème 3.5.36. □

3.6 Le cas $F = \mathbb{Q}_p$

Nous supposons désormais que $F = \mathbb{Q}_p$, ce qui assure en particulier que l'Hypothèse 1 est vérifiée par toute représentation lisse irréductible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On peut de plus choisir pour uniformisante $\varpi_F = p$ et c'est ce que ferons dans la suite. Le corps résiduel k_F est le corps à p éléments $\mathbb{F}_p$, donc nous avons en particulier $f = 1$: nous écrironrs donc r au lieu de $\vec{r}$ pour alléger les notations.

Cette dernière section s'organise comme suit : nous donnons tout d'abord une description explicite des représentations supersingulières de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ que l'on obtient à partir des résultats de Breuil pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ [Br]. Nous établissons ensuite un analogue pour $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ de la "correspondance de Langlands locale semi-simple" définie par Breuil dans le cas des représentations modulo p de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ [Br, Définition 4.2.4].

3.6.1 Description explicite des représentations supersingulières

L'étude précise des représentations supersingulières de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ est essentiellement due à Breuil, qui a démontré le théorème suivant [Br, Corollaires 4.1.1, 4.1.3, 4.1.4 et 4.1.5]. On note $\overline{f} \in \pi(r,0,1)$ l'image modulo $T_{\vec{r}}$ d'un élément f de $\mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_r)$, et ε désigne ici le caractère cyclotomique modulo p vu comme caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$ via l'isomorphisme de réciprocité faisant correspondre les uniformisantes aux Frobenius géométriques.

Théorème 3.6.1. *1. Pour tout paramètre $r \in \{0,\dots,p-1\}$, la représentation $\pi(r,0)$ est irréductible.*

2. Il existe un unique isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules

$$\pi(r,0) \simeq \pi(p-1-r,0) \otimes (\varepsilon^r \circ \det)$$

envoyant $\overline{[I_2, x^r]}$ sur $\overline{[\alpha, y^r]}$.

3. Les seules représentations de G de la forme $\pi(s,0)\otimes\chi$ avec χ un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de G qui sont isomorphes à $\pi(r,0)$ sont les suivantes :

$$\pi(r,0)\ ;\ \pi(r,0)\otimes(\mu_{-1}\circ\det)\ ;\ \pi(p-1-r,0)\otimes(\varepsilon^r\circ\det)\ ;\ \pi(p-1-r,0)\otimes(\mu_{-1}\varepsilon^r\circ\det)\ .$$

Fixons à présent un paramètre $r \in \{0,\dots,p-1\}$. La compréhension de la représentation $\pi(r,0)$ repose de manière fondamentale sur la structure de l'espace de ses vecteurs $I(1)$-invariants. On a notamment le résultat suivant [Br, Théorème 3.2.4 et Remarque 3.2.5].

Théorème 3.6.2. *Pour tout paramètre $0 \le r \le p-1$, l'espace des vecteurs $I(1)$-invariants de $\pi(r,0)$ est égal à*

$$\pi(r,0)^{I(1)} = \overline{\mathbb{F}}_p\overline{[I_2, x^r]} \oplus \overline{\mathbb{F}}_p\overline{[\alpha, y^r]}\ . \tag{3.38}$$

En reprenant en détail la preuve de cet énoncé, on remarque qu'elle reste valable si l'on souhaite calculer l'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de $\pi(r,0)$. En effet, elle démontre que l'espace des vecteurs de $\pi(r,0)$ invariants sous l'action du sous-groupe engendré par les matrices unipotentes inférieures et supérieures de G, qui est encore un sous-groupe de G_S, est contenu dans le membre de droite de (3.38) ; on conclut alors en vérifiant que les vecteurs $\overline{[I_2, x^r]}$ et $\overline{[\alpha, y^r]}$ sont bien fixes sous l'action de $I(1)$. Ils sont donc en particulier fixes sous l'action de $I_S(1)$, ce qui fournit le résultat suivant.

Théorème 3.6.3. *Pour tout paramètre $r \in \{0,\dots,p-1\}$, l'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de $\pi(r,0)$ est égal à*

$$\pi(r,0)^{I_S(1)} = \overline{\mathbb{F}}_p\overline{[I_2, x^r]} \oplus \overline{\mathbb{F}}_p\overline{[\alpha, y^r]} = \pi(r,0)^{I(1)}\ .$$

Cet énoncé fait naïvement apparaître deux sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules de $\pi(r,0)|_{G_S}$: la représentation $\pi_{r,\infty}$ engendrée par le vecteur $v_{r,\infty} := \overline{[I_2, x^r]}$ et la représentation $\pi_{r,0}$ engendrée par le vecteur $v_{r,0} := \overline{[\alpha, y^r]}$. Le Corollaire 3.5.38 assurent qu'elles sont supersingulières pour G_S, et la proposition suivante montre qu'elles définissent bien a priori des objets différents.

Proposition 3.6.4. *Les représentations $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{r,0}$ sont d'intersection nulle :*

$$\pi_{r,0} \cap \pi_{r,\infty} = \{0\} \ .$$

Démonstration. Rappelons que nous avons introduit dans le Corollaire 3.5.26 le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\pi_r = \dfrac{\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_r)}{T_r(\mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_r^\alpha))}$ qui contient, par définition, le vecteur $v_{r,\infty} = \overline{[I_2, x^r]}$. Par suite, il doit contenir la représentation de G_S que ce vecteur engendre, à savoir $\pi_{r,\infty}$. De même, l'isomorphisme de la Proposition 3.5.12 assure que le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module π_r^α contient la représentation $\pi_{r,0}$. On conclut alors grâce au corollaire sus-mentionné qui assure en particulier que l'intersection $\pi_r \cap \pi_r^\alpha$ est réduite à $\{0\}$. □

Nous pouvons donc considérer la représentation en somme directe $\pi_{r,\infty} \oplus \pi_{r,0}$. Elle est naturellement munie d'une structure de sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module de $\pi(r,0)|_{G_S}$, dont elle permet de décrire complètement la structure.

Proposition 3.6.5. *L'inclusion de $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{r,0}$ dans $\pi(r,0)$ induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules*

$$\pi(r,0)|_{G_S} = \pi_{r,\infty} \oplus \pi_{r,0} \ .$$

Démonstration. La seule chose qui reste à vérifier est la surjectivité de l'application définie par l'inclusion du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\pi_{r,\infty} \oplus \pi_{r,0}$ dans $\pi(r,0)$, et elle découle d'un calcul direct : on commence par rappeler que puisque $\pi(r,0)$ est une représentation irréductible de G, on a en particulier [16]

$$\pi(r,0) = \langle G \cdot v_{r,\infty} \rangle \ . \tag{3.39}$$

Par suite, tout élément de $\pi(r,0)$ est une combinaison linéaire finie à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ de fonctions standard de la forme $g \cdot \overline{[I_2, x^r]}$ avec $g \in G$.
Remarquons maintenant que tout élément g de G peut se décomposer sous la forme $g_s \alpha^j k$ avec $g_s \in G_S$, $j \in \{0,1\}$ et $k \in KZ$. En effet, il suffit d'écrire le déterminant de $g \in G$ sous la forme up^n avec $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ et $n \in \mathbb{N}$, puis de choisir j de même parité que n et de poser $k = \begin{pmatrix} p^m & 0 \\ 0 & p^m u \end{pmatrix}$ avec $m := \dfrac{n-j}{2}$ et $g_s := g(\alpha^j k)^{-1} \in G_S$. La définition de $\sigma_{\vec{r}}$ assurant que $\begin{pmatrix} p^m & 0 \\ 0 & p^m u \end{pmatrix} \cdot x^r = x^r$ pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$ et tout élément $u \in \mathbb{Z}_p^\times$, on en conclut que l'on a, avec les notations précédentes,

$$g \cdot \overline{[I_2, x^r]} = g_s \cdot \overline{[\alpha^j, x^r]} \ ,$$

ce qui montre que $g \cdot \overline{[I_2, x^r]}$ appartient à $\pi_{r,\infty}$ (resp. $\pi_{r,0}$) lorsque $j = 0$ (resp. $j = 1$) et termine la démonstration. □

Corollaire 3.6.6. *Pour tout paramètre $r \in \{0, \ldots, p-1\}$, les $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $(\pi_{r,\infty})^\alpha$ et $\pi_{r,0}$ sont isomorphes.*

Démonstration. La comparaison de la Proposition 3.6.5 et du second point du Corollaire 3.5.26 montre que

$$\pi_{r,\infty} \oplus \pi_{r,0} = \pi_r \oplus \pi_r^\alpha \ . \tag{3.40}$$

Nous avons déjà vu que la représentation $\pi_{r,\infty}$ est contenue dans π_r tandis que la représentation $\pi_{r,0}$ est contenue dans π_r^α. Pour que l'égalité (3.40) soit possible, il faut donc que l'on ait $\pi_{r,\infty} = \pi_r$ et $\pi_{r,0} = \pi_r^\alpha$, ce qui termine la démonstration. □

16. On note $\langle G \cdot v \rangle$ la $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation de G engendrée par le vecteur v.

Intéressons-nous à présent aux propriétés de réductibilité des représentations $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{r,0}$, ainsi qu'à l'existence éventuelle d'isomorphismes non triviaux entre ces représentations. Nous allons pour cela étudier les espaces de vecteurs $I_S(1)$-invariants de ces représentations, qui font l'objet de la proposition suivante.

Proposition 3.6.7. *Soit $r \in \{0, \ldots, p-1\}$.*
L'espace des $I_S(1)$-invariants de $\pi_{r,\infty}$ (resp. $\pi_{r,0}$) est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $v_{r,\infty}$ (resp. $v_{r,0}$).

Démonstration. On traite le cas des $I_S(1)$-invariants de $\pi_{r,\infty}$, celui de $\pi_{r,0}$ s'obtenant de la même manière. On commence par remarquer que le Théorème 3.6.3 assure que la droite $\overline{\mathbb{F}}_p v_{r,\infty}$ est contenue dans $\pi_{r,\infty}^{I_S(1)}$. Réciproquement, si l'on suppose que f est un élément non nul de $\pi_{r,\infty}^{I_S(1)}$, il doit a fortiori appartenir à $\pi(r,0)^{I_S(1)}$. Par application du Théorème 3.6.3, il peut donc être écrit sous la forme

$$f = av_{r,\infty} + bv_{r,0} \tag{3.41}$$

avec a, $b \in \overline{\mathbb{F}}_p$ non simultanément nuls. Par ailleurs, f appartient par hypothèse au $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\pi_{r,\infty} = \langle G_S \cdot v_{r,\infty} \rangle$ donc il peut aussi être écrit comme une somme finie de la forme

$$f = \sum_{i \in I} \lambda_i s_i v_{r,\infty} \tag{3.42}$$

avec $\lambda_i \in \overline{\mathbb{F}}_p$ et $s_i \in G_S$ pour tout $i \in I$. La comparaison des identités (3.41) et (3.42) montre alors que l'on doit alors avoir

$$bv_{r,0} = -av_{r,\infty} + \sum_{i \in I} \lambda_i s_i v_{r,\infty} \in \pi_{r,0} \cap \pi_{r,\infty}$$

ce qui n'est possible que si $b = 0$ d'après la Proposition 3.6.4 et nécessite donc que $f = av_{r,\infty}$ soit colinéaire à $v_{r,\infty}$. □

Ce premier résultat suffit déjà à prouver l'irréductibilité des représentations $\pi_{r,0}$ et $\pi_{r,\infty}$.

Corollaire 3.6.8. *Pour tout paramètre $r \in \{0, \ldots p-1\}$, les représentations $\pi_{r,0}$ et $\pi_{r,\infty}$ sont des représentations lisses irréductibles de G_S.*

Démonstration. Supposons que π soit un sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module non nul de $\pi_{r,0}$. Le Lemme 2.1.9 assure alors que l'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de π est non nul. Comme $\pi^{I_S(1)}$ est aussi un sous-espace vectoriel de l'espace $\pi_{r,0}^{I_S(1)}$ et que celui-ci est, d'après la Proposition 3.6.7, égal à la droite engendrée par $v_{r,0}$, on doit forcément avoir $\pi^{I_S(1)} = \pi_{r,0}^{I_S(1)}$. Ceci montre que $\pi = \pi_{r,0}$ puisque $v_{r,0}$ engendre le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\pi_{r,0}$. Le même argument permet de montrer l'irréductibilité de $\pi_{r,\infty}$, ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 3.6.9. *Pour tout paramètre $r \in \{0, \ldots, p-1\}$, la restriction à G_S de $\pi(r,0)$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module de longueur 2 totalement décomposé. Ses sous-quotients irréductibles sont $\pi_{r,0}$ et $\pi_{r,\infty}$.*

Démonstration. C'est une réécriture de la Proposition 3.6.5 à la lumière du Corollaire 3.6.8. □

Remarquons maintenant que le second point du Théorème 3.6.1 assure l'existence d'un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules de la forme

$$\pi_{p-1-r,\infty} \simeq \pi_{r,0} \ , \tag{3.43}$$

ce qui permet notamment de se limiter à l'étude des isomorphismes entre $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{s,\infty}$.
Par ailleurs, la définition de ces représentations assure qu'un tel isomorphisme est entièrement déterminé par sa valeur en $v_{r,\infty}$, celle-ci devant appartenir à $\pi_{s,\infty}^{I_S(1)}$ par hypothèse de G_S-équivariance. On déduit donc de la Proposition 3.6.7 le fait suivant.

Corollaire 3.6.10. *Pour toutes valeurs r et s prises dans l'ensemble $\{0,\ldots,p-1\}$, l'espace $\mathrm{Hom}_{G_S}(\pi_{r,\infty},\pi_{s,\infty})$ est de dimension 0 ou 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

Pour déterminer les cas où cet espace est non nul, nous allons étudier un peu plus en détail l'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de $\pi_{r,\infty}$. Une première possibilité consiste à déterminer sa structure de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, I_S(1))$-module : ceci sera effectué dans le Chapitre 6, avec à cet endroit d'autres motivations qui nécessitent de connaître précisément cette structure.
Une seconde possibilité consiste à se limiter à l'étude de la représentation de I_S portée par cet espace de vecteurs invariants. C'est assez facile car l'application de réduction modulo p permet d'identifier le quotient $I_S/I_S(1)$ au tore fini $T_S(\mathbb{F}_p)\simeq\mathbb{F}_p^\times$ des matrices diagonales de $SL_2(\mathbb{F}_p)$, de sorte que la représentation en question n'est rien d'autre qu'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathbb{F}_p^\times$.

Proposition 3.6.11. *Soient $r,s\in\{0,\ldots,p-1\}$.*

1. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[I_S]$-module porté par $\pi_{r,\infty}^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère ι^r.*
2. *Si $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{s,\infty}$ sont des représentations isomorphes de G_S, alors on a $s=r$ ou bien $\{r,s\}=\{0,\ p-1\}$.*

Démonstration. Pour montrer le premier point, il suffit de calculer l'action d'un élément de $T(\mathbb{F}_p)=I_S/I_S(1)$ sur le vecteur $v_{r,\infty}$. On obtient :

$$\forall\ \lambda\in\mathbb{F}_p^\times\ ,\ \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}[I_2,x^r]=[I_2,\sigma_r(\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix})(x^r)]=\lambda^r[I_2,x^r]\ ,$$

ce qui prouve le résultat voulu.
Pour la seconde assertion, on remarque que si $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{s,\infty}$ sont deux représentations isomorphes de G_S, alors les représentations de I_S portées par leurs espaces de vecteurs invariants doivent elles aussi être isomorphes. On en déduit donc que l'on doit avoir $\iota^r=\iota^s$, ce qui implique que $p-1$ doit diviser $r-s$. Au vu des valeurs prises par r et s, cela ne laisse que trois possibilités :
- ou bien $r-s=-(p-1)$, ce qui équivaut à dire que $(r,s)=(0,p-1)$;
- ou bien $r-s=0$, ce qui équivaut à dire que $r=s$;
- ou bien $r-s=p-1$, ce qui équivaut à dire que $(r,s)=(p-1,0)$. □

Pour compléter cet énoncé, il ne nous reste qu'à vérifier si les représentations $\pi_{0,\infty}$ et $\pi_{p-1,\infty}\simeq\pi_{0,0}$ sont ou non isomorphes. C'est l'objet de la proposition suivante, qui fait intervenir les espaces de vecteurs K_0-invariants des représentations considérées.

Proposition 3.6.12. *Les représentations $\pi_{0,\infty}$ et $\pi_{p-1,\infty}$ ne sont pas isomorphes car on a :*

$$\begin{cases}\pi_{0,\infty}^{K_0}=\pi_{0,\infty}^{I_S(1)}\neq\{0\}\ ;\\[2ex] \pi_{p-1,\infty}^{K_0}=\pi_{0,0}^{K_0}=\{0\}\ .\end{cases}$$

Démonstration. Une condition nécessaire pour que deux représentations de G_S soient isomorphes est que leurs espaces de vecteurs K_0-invariants soient de même dimension. Ceci implique notamment, grâce à l'isomorphisme existant entre $\pi_{p-1,\infty}$ et $\pi_{0,0}$, qu'il suffit de vérifier que $v_{0,0}$ n'est pas invariant sous l'action de K_0 tandis que $v_{0,\infty}$ l'est afin de conclure.

Le fait que $v_{0,\infty}$ soit invariant sous l'action de K_0 est évident puisque σ_0 est égal au caractère trivial :

$$\forall\ k \in K_0,\ k \cdot [I_2, 1] = [I_2, \sigma_0(k)(1)] = [I_2, 1]\ .$$

Par ailleurs, un calcul direct de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}[\alpha, 1] - [\alpha, 1]$ suivi d'une comparaison avec la formule (3.21) montre que cette différence n'appartient pas à l'image de l'opérateur T_0. Ceci signifie que $v_{0,0}$ n'est pas fixe sous l'action de l'élément $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in K_0$ et termine donc la démonstration. $\square$

3.6.2 Correspondance de Langlands locale semi-simple

Pour tout entier $r \in \{0, \ldots, p-1\}$, on pose $\pi_r := \pi_{r,\infty}$, ce qui est cohérent avec les notations du Corollaire 3.5.26. L'énoncé suivant récapitule alors les résultats principaux que nous avons démontrés dans la sous-section précédente.

Théorème 3.6.13. *1. A isomorphisme près, il existe p représentations supersingulières de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, notées $\pi_0, \ldots, \pi_{p-1}$.*

2. La restriction à G_S de toute représentation supersingulière de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module de longueur 2 totalement décomposé. Plus précisément, on a :

$$\forall\ r \in \{0, \ldots, p-1\},\ \pi(r, 0)|_{G_S} = \pi_r \oplus \pi_{p-1-r}\ .$$

3. Pour tout $r \in \{0, \ldots, p-1\}$, l'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de π_r est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et l'on a $(\pi_r)^\alpha \simeq \pi_{p-1-r}$.

Il va nous permettre de déduire des travaux de Breuil ce que l'on pourrait qualifier de correspondance de Langlands locale semi-simple modulo p pour $SL_2(\mathbb{Q}_p)$. On reprend pour cela les notations de [Br, Section 4.2] : on désigne par $G_{\mathbb{Q}_p} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$, par ω_2 le caractère fondamental de Serre de niveau 2 et par $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})$ l'unique représentation irréductible de $G_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ dont le déterminant est ε^{r+1} et dont la restriction au sous-groupe d'inertie de $G_{\mathbb{Q}_p}$ est égale à $\omega_2^{r+1} \oplus \omega_2^{p(r+1)}$.
Breuil a démontré [Br, Corollaire 4.2.3] l'existence d'une unique bijection entre les classes d'isomorphisme des représentations supersingulières de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et les classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de $G_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui envoie, pour tout entier $r \in \{0, \ldots, p-1\}$ et tout caractère $\chi : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, la représentation $\pi(r, 0) \otimes (\chi \circ \det)$ sur $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}) \otimes \chi$. Elle lui permet de définir une « correspondance de Langlands locale semi-simple modulo p » [Br, Définition 4.2.4] entre les classes d'isomorphisme des représentations semi-simples de $G_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et certaines classes d'isomorphisme de représentations lisses semi-simples de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ que nous rappelons maintenant.

Définition 3.6.14. Pour tout entier $r \in \{0, \ldots, p-1\}$, on note $[p-3-r]$ l'unique entier de $\{0, \ldots p-2\}$ congru à $p-3-r$ modulo $p-1$. On note π^{ss} la semi-simplifiée d'une représentation lisse π et l'on rappelle que tout caractère lisse de $\mathbb{Q}_p^\times$ peut être considéré comme un caractère fini de $G_{\mathbb{Q}_p}$ par l'injection $\mathbb{Q}_p^\times \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}_p}^{ab}$ de la théorie du corps de classes local normalisée de manière à envoyer les uniformisantes sur les Frobenius géométriques.
On appelle *correspondance de Langlands locale semi-simple modulo p pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$* la correspondance suivante entre l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations semi-simples de $G_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et un ensemble de classes d'isomorphisme de représentations lisses semi-simples de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$:

– pour tout caractère lisse $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, tout entier $r \in \{0, \ldots, p-1\}$ et tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^{r+1}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \otimes \chi \leftrightarrow (\pi(r,\lambda)^{ss} \otimes (\chi \circ \det)) \oplus (\pi([p-3-r], \lambda^{-1})^{ss} \otimes (\chi \circ \det)) \ ;$$

– pour tout entier $r \in \{0, \ldots, p-1\}$ et tout caractère lisse $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$,

$$\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}) \otimes \chi \leftrightarrow \pi(r, 0) \otimes (\chi \circ \det) \ .$$

Regardons ce qu'il advient si l'on essaye d'établir une relation analogue entre représentations galoisiennes et représentations supersingulières de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ qui serait compatible avec la correspondance de Breuil. Le second point du Théorème 3.6.13 implique que l'on doit faire correspondre à chaque représentation galoisienne $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})$ un ensemble de représentations supersingulières de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}) \longleftrightarrow \{\pi_r; \pi_{p-1-r}\} \ .$$

Cet ensemble est de taille 2 si $r \neq \frac{p-1}{2}$, et de taille 1 (avec multiplicité 2) si $r = \frac{p-1}{2}$. En outre, les ensembles correspondant à r et à $p-1-r$ sont les mêmes, ce qui se traduit du côté galoisien par le fait que les représentations projectives induites par $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})$ et $\mathrm{ind}(\omega_2^{p-1-(r+1)})$ sont isomorphes.
Une seconde différence notable avec le cas de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ est que l'on perd la possibilité de distinguer une représentation galoisienne de sa tordue par un caractère non trivial. En effet, si l'on restreint à $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ la correspondance obtenue par Breuil, on voit que quel que soit le caractère $\chi : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et quel que soit l'entier $r \in \{0, \ldots, p-1\}$, les représentations galoisiennes $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})$ et $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}) \otimes \chi$ correspondent au même ensemble $\{\pi_r; \pi_{p-1-r}\}$ de représentations supersingulières de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$.
Pour atteindre notre objectif, il nous faut donc considérer la correspondance suivante au niveau des représentations supersingulières[17] :

$$proj \circ \mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}) \longleftrightarrow \{\pi_r; \pi_{p-1-r}\} \tag{3.44}$$

avec $r \in \{0, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$. Elle met en bijection l'ensemble des paquets de représentations supersingulières de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ avec celui des classes d'isomorphismes de représentations galoisiennes *projectives* de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Intéressons-nous maintenant au devenir des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations de $G_{\mathbb{Q}_p}$ scindées de dimension 2 dans une telle correspondance. On commence par rappeler que si (r, λ) est une paire de paramètres telle que $\lambda \neq 0$, le second point du Corollaire 3.5.19, assure l'existence d'isomorphismes de représentations de G_S de la forme suivante :

$$\pi(r, \lambda)|_{G_S} \simeq \pi_0(r, \lambda^2) \simeq \pi(r, -\lambda)|_{G_S} \ .$$

Le pendant de ces isomorphismes lorsque l'on regarde du côté galoisien s'exprime par les égalités suivantes :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^{r+1}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{r+1}\mu_{\lambda^2}\mu_{\lambda^{-1}} & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{r+1}\mu_{-\lambda}\mu_{-1} & 0 \\ 0 & \mu_{-\lambda^{-1}}\mu_{-1} \end{pmatrix} \ .$$

Si l'on souhaite que notre correspondance reste compatible à celle qui existe pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ après restriction à $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, il nous faut définir la correspondance suivante pour les paires (r, λ) avec $\lambda \neq 0$ et $r \in \{0, \ldots, p-1\}$:

$$proj \circ \begin{pmatrix} \varepsilon^{r+1}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \leftrightarrow \pi_0(r, \lambda)^{ss} \oplus \pi_0([p-3-r], \lambda^{-1})^{ss} \ . \tag{3.45}$$

17. On note *proj* la projection canonique de $GL_2(...)$ vers $PGL_2(...)$.

On établit ainsi une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations galoisiennes *projectives* semi-simples de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et une famille de classes d'isomorphisme de représentations modulo p lisses semi-simples de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ obtenues à partir de représentations non supersingulières.

Remarque 3.6.15. En décomposant $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ comme somme des $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ avec $\ell \neq p$ entier premier et en travaillant sur chaque composante ℓ-primaire, on peut reprendre ligne à ligne l'argument développé par Serre dans le cas complexe [Ser77, Section 6, cas local du Théorème 4] pour montrer que $H^2(G_{\mathbb{Q}_p}, \overline{\mathbb{F}}_p^\times) = \{0\}$, où l'action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ est bien entendu l'action triviale. Par suite, toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation projective de dimension finie de $G_{\mathbb{Q}_p}$ se relève en une représentation linéaire de $G_{\mathbb{Q}_p}$ de même dimension sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, ce qui permettrait d'écrire notre correspondance de Langlands locale modulo p en considérant des classes d'isomorphismes de représentations linéaires galoisiennes *à torsion par un caractère lisse près*.

Chapitre 4

Représentations modulo p de $U(2,1)(E/F)$

4.1 Introduction

Soient p un nombre premier et F un corps local non archimédien complet pour une valuation discrète, de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel fini k_F. Dans l'article [BL94] où ils décrivent les classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles admissibles de $GL_2(F)$ à coefficients dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_p$ de k_F, Barthel et Livné évoquent la possibilité d'étendre leurs travaux pour d'autres groupes. Nous avons traité le cas de $SL_2(F)$ dans le chapitre précédent, et de nombreux articles (tels [Br], [Her2], [O1] ou encore [V5]) se sont penchés sur le cas des groupes formés par les F-points de groupes réductifs connexes définis et **déployés** sur F.

Dans ce chapitre, nous adaptons les idées développées dans le cas déployé pour traiter aussi complètement que possible un premier exemple de groupe quasi-déployé sur F mais non déployé sur F, à savoir celui du groupe unitaire quasi-déployé non ramifié à 3 variables que l'on notera $U(2,1)$. Tout comme SL_2, il est de rang 1 sur F, et nous verrons qu'il satisfait le même type de résultats que ceux démontrés dans le chapitre précédent.

Remarque 4.1.1. Les résultats contenus dans ce chapitre ainsi que dans le Chapitre 3 semblent se généraliser naturellement au cas des représentations modulo p du groupe des F-points d'un groupe réductif connexe défini, quasi-déployé et de rang 1 sur F. Une partie de cette généralisation est présentée dans le Chapitre 5, le reste étant en cours de rédaction. Nous pensons par ailleurs qu'il est en fait possible de supprimer l'hypothèse de quasi-déploiement et d'obtenir ainsi des résultats analogues pour les représentations modulo p de groupes réductifs connexes de rang 1 sur F.

Remarque 4.1.2. Dans la suite, nous supposons par commodité que E/F est non ramifiée et que p est impair car nous ne possédons pas de bonne référence pour certains des résultats que nous utilisons dans la Section 4.5. Cependant, la majorité des résultats et des preuves présentés ici sont valables sans ces hypothèses, ce qui explique que nous gardions les notations les plus générales possibles [1], produisant par suite l'apparition d'uniformisantes conjuguées dans certains de nos calculs.

1. Une autre justification de ce choix réside dans l'optique d'une généralisation prochaine de tous les énoncés obtenus dans ce chapitre.

Présentation des principaux résultats

On fixe une extension quadratique séparable E/F, une uniformisante ϖ_E de E placée au-dessus d'une uniformisante fixée ϖ_F de F, et l'on note $\mathbb{G}$ le groupe unitaire $U(2,1)(E/F)$ associé à la forme quadratique de signature $(2,1)$ sur l'espace vectoriel E^3. On désigne par $\overline{x}$ l'image d'un élément $x \in E$ par l'unique F-automorphisme non trivial de E et par $N : E \to F$ l'application norme attachée à l'extension E/F. On pose $E^{(1)} := \ker N$ et l'on note $\mathbb{B}$ le sous-groupe de Borel de $\mathbb{G}$ formé des matrices triangulaires supérieures.

Le premier résultat important de ce chapitre concerne les représentations non supercuspidales de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On rappelle qu'une représentation lisse irréductible de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est dite supercuspidale lorsqu'elle n'est isomorphe à aucun sous-quotient d'une représentation de la forme $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ avec $\chi : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ caractère lisse.

Théorème 4.1.3. *Soit $\chi : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ un caractère lisse.*

1. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ est de longueur 2. Il est indécomposable si et seulement si χ ne se factorise pas à travers l'application déterminant. Dans le cas contraire, il est totalement décomposé.*
2. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ est irréductible si et seulement si χ ne se factorise pas à travers l'application déterminant. Dans le cas contraire, il est indécomposable de longueur 2 avec le caractère χ comme sous-objet et la représentation de la série spéciale $St_{\mathbb{G}} \otimes \chi$ comme quotient, où $St_{\mathbb{G}} := \dfrac{\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$ est la représentation de Steinberg.*
3. *Les classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles non supercuspidales de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ se partitionnent en trois familles : les caractères, les représentations de la série principale et les représentations de la série spéciale. De plus, il n'existe pas d'entrelacement entre deux représentations distinctes provenant d'une même famille, et toute représentation non supercuspidale de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est admissible.*

Cet énoncé repose de manière fondamentale sur l'étude de la structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-module des représentations de la forme $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ avec $\chi : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ caractère lisse, ainsi que sur une certaine connaissance de leurs espaces de vecteurs invariants sous l'action du pro-p-Iwahori standard $\mathbb{I}(1)$ de $\mathbb{G}$ et des caractères définis par l'action du sous-groupe d'Iwahori standard $\mathbb{I}$ sur ces espaces (Théorème 4.4.13).

Pour pouvoir décrire les autres $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathbb{G}$, on suppose que l'extension E/F est non ramifiée, ce qui permet de choisir la même uniformisante pour E et F, et l'on suit les idées introduites dans [BL94] en nous penchant sur la structure des algèbres de Hecke sphériques $\mathcal{H}(\mathbb{G},\mathbb{K},V) := \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]}(\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V))$ avec $\mathbb{K}$ sous-groupe compact maximal de $\mathbb{G}$ et V représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On rappelle [2] que cette algèbre est isomorphe à la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de convolution $\mathbb{H}(\mathbb{G},\mathbb{K},V)$ des fonctions $f : \mathbb{G} \to \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(V)$ lisses à support compact telles que :

$$\forall\ k_1, k_2 \in \mathbb{K},\ \forall\ g \in \mathbb{G},\ \ f(k_1 g k_2) = k_1 f(g) k_2\ .$$

Par ailleurs, si l'on désigne par $\mathbb{U}$ le sous-groupe des éléments unipotents de $\mathbb{B}$ et par $\mathbb{T}$ le tore des matrices diagonales de $\mathbb{G}$, on sait que l'espace des vecteurs $(\mathbb{K} \cap \mathbb{U})$-invariants de V définit un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{T} \cap \mathbb{K} = \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^{\times})$, où $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^{\times})$ est le sous-groupe des éléments de $\mathbb{T}$ à coefficients dans l'anneau des entiers $\mathcal{O}_E$ de E. On sait donc de même que l'algèbre de Hecke

2. Nous renvoyons le lecteur souhaitant plus de détails à la Section 2.3 du Chapitre 2.

sphérique $\mathcal{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times), V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}})$ est isomorphe à la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de convolution $\mathbb{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times); V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}})$ des fonctions $\psi : \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ lisses à support compact telles que :

$$\forall\ \tau \in \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times),\ \forall\ t \in \mathbb{T},\ \psi(\tau t) = \tau\psi(t)\ .$$

On démontre alors le théorème suivant, qui est un cas particulier de [Her1, Theorem 1.2] lorsque l'on suppose que F est de caractéristique nulle et que $\mathbb{K} = \mathbb{G} \cap GL_3(\mathcal{O}_E)$.

Théorème 4.1.4. *Soit $\mathbb{K}$ un sous-groupe compact maximal de $\mathbb{G}$ et soit V une représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Posons $t_0 := \begin{pmatrix} {\varpi_E}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varpi_E \end{pmatrix}$ où ϖ_E est une uniformisante fixée de E.*
L'application $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V : \mathbb{H}(\mathbb{G}, \mathbb{K}, V) \to \mathbb{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times), V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$ définie par :

$$\forall\ f \in \mathbb{H}(\mathbb{G}, \mathbb{K}, V),\ \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f) := \left[t \mapsto \sum_{u \in \mathbb{U}/\mathbb{U}\cap\mathbb{K}} f(tu)|_{V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}} \right]\ ,$$

est un homomorphisme injectif de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres dont l'image est égale à l'ensemble des éléments de $\mathbb{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times), V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$ dont le support est contenu dans $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)t_0^{\mathbb{N}}$.
En particulier, l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}(\mathbb{G}, \mathbb{K}, V)$ est une algèbre de polynômes à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ en un opérateur de Hecke T_V explicitement déterminé.

Ce résultat nous permet donc de définir, pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, la représentation conoyau $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda) := \dfrac{\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V)}{(T_V - \lambda)(\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V))}$. Connaître en détail la structure de ces représentations nous permettrait de décrire toutes les représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ grâce à l'énoncé suivant.

Théorème 4.1.5. *Pour toute représentation lisse irréductible admissible π de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, il existe une paire (V, λ) avec V représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ telle que π soit un quotient du $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda)$.*

Nous pouvons ainsi introduire les deux notions suivantes : une représentation lisse irréductible est dite *supersingulière* (relativement à $\mathbb{K}$) lorsqu'elle est isomorphe à un quotient d'une représentation conoyau de la forme $\pi_{\mathbb{K}}(V, 0)$. Plus généralement, on dira que (V, λ) est une *paramétrisation possible* (relativement à $\mathbb{K}$) de la représentation lisse irréductible π lorsque π est un quotient du $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda)$.

Tout le reste du chapitre vise à caractériser autant que possible les représentations supersingulières de $\mathbb{G}$, et se place sous l'hypothèse où E/F est non ramifiée avec le même choix d'uniformisante pour E et F. Une première idée consisterait à décrire complètement les représentations lisses irréductibles non supersingulières de $\mathbb{G}$, ce qui revient à comprendre la structure des représentations conoyaux de la forme $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda)$ avec $\lambda \neq 0$. Nous commençons par démontrer le résultat suivant, qui donne des conditions assez restrictives sur les paramétrisations possibles des représentations obtenues par induction parabolique et sur la structure possible d'une grande famille de représentations conoyaux. On désigne par ϕ la matrice antidiagonale $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et par $\eta^\phi := \eta(\phi.\phi)$ le caractère ϕ-conjugué de η. On rappelle que l'on a $\phi^2 = I_3$.

Proposition 4.1.6. *1. Soit $\eta : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse. Si (V, λ) est une paramétrisation possible de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ relativement à $\mathbb{K}$, alors $\lambda = \eta(t_0)$.*

2. *Soient V une représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$* ***qui ne s'étend pas en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de*** $\mathbb{G}$[3] *et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ un scalaire non nul. Notons $\eta : \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ le caractère lisse dont la restriction à $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^{\times})$ est donnée par le caractère porté par $(V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}})^{\phi}$ et qui envoie t_0 sur λ. On note encore η le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{B}$ obtenu par inflation. L'application $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^{\times})$-équivariante $V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}} \to \eta^{\phi}$ définie par l'identité induit alors un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules de la forme*

$$\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda) \twoheadrightarrow \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta) \ .$$

Nous démontrons ensuite que l'on peut déjà calculer toutes les paramétrisations possibles des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de $\mathbb{G}$ et des représentations de la série spéciale de $\mathbb{G}$. Rappelons que l'on désigne par V_0 l'unique $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ contenue dans la représentation de Steinberg $St_{\mathbb{G}}$.

Théorème 4.1.7. *1. Pour tout caractère lisse $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$, le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\eta \circ \det$ admet une et une seule paramétrisation possible, à savoir la paire $(\eta \circ \det, 1)$.*

2. *Pour tout caractère lisse $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$, la représentation $St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det)$ de la série spéciale admet une unique paramétrisation possible, à savoir la paire $(V_0 \otimes (\eta \circ \det), 1)$.*

Pour compléter notre étude, il nous faudrait pouvoir déterminer toutes les paramétrisations possibles des représentations de la forme $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ avec $\eta : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ caractère lisse. Pour l'instant, les résultats que nous avons prouvés à ce sujet peuvent être formulés comme suit.

Proposition 4.1.8. *Soit $\eta : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ un caractère lisse.*

1. *Si η ne s'étend pas en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$, alors le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ admet exactement une paramétrisation possible.*
2. *Si η s'étend en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$, alors le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ admet au plus une paramétrisation possible, à savoir la paire $(V_0 \otimes \eta, \eta(t_0))$ où V_0 est l'unique représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ contenue dans la représentation de Steinberg $St_{\mathbb{G}}$ de $\mathbb{G}$.*

Signalons tout de suite que le Théorème 4.1.5 ne permet pas de conclure à l'unicité de la paramétrisation dans le second cas de la Proposition 4.1.8 car nous avons démontré auparavant que si η est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$, la représentation $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ n'est pas irréductible.

En comparant les résultats obtenus jusqu'ici pour $\mathbb{G}$ avec ceux qui existent pour $GL_2(F)$ [BL94, Theorem 25], pour $SL_2(F)$ et, plus généralement, pour $GL_n(F)$ [Her2, Theorem 3.1], il est naturel de se demander si le morphisme surjectif introduit dans la Proposition 4.1.6 n'est pas carrément un isomorphisme, puisqu'il l'est lorsque l'on travaille avec les groupes sus-mentionnés. En outre, disposer d'un tel isomorphisme permet d'obtenir une classification des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathbb{G}$, et nous n'avons à l'heure actuelle trouvé aucun argument qui mettrait cette propriété d'injectivité en défaut.

Une autre question qui surgit naturellement lors de la comparaison avec les théories existant pour d'autres groupes porte sur la structure des représentations conoyaux $\pi_{\mathbb{K}}(\eta \circ \det, \lambda)$ avec $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ et $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ caractère lisse. Nous savons démontrer[4] par un argument utilisant la structure de l'arbre de Bruhat-Tits que la représentation $\pi(\mathbf{1}, 1)$ est une extension non scindée du caractère $\mathbf{1}$ par $St_{\mathbb{G}}$. Ceci implique en particulier que toute représentation conoyau de la forme $\pi_{\mathbb{K}}(\eta \circ \det, 1)$ est une extension non scindée du caractère $\eta \circ \det$ par la représentation

3. Ce qui signifie que V est soit de dimension strictement supérieure à 1, soit un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{K}$ qui ne s'étend pas en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$.

4. Mais n'avons pas eu le temps d'inclure cette preuve dans le manuscrit.

de la série spéciale $St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det)$. Par ailleurs, si l'on s'intéresse à $\pi_{\mathbb{K}}(\eta \circ \det, \lambda)$ avec $\lambda \neq 1$, nous savons en construire un quotient de la forme $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$, qui doit alors être irréductible à cause du Théorème 4.1.7 (qui implique que le caractère χ ne peut pas être étendu en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$). De nouveau par analogie avec les théories de référence, nous pensons que la surjection ainsi définie est en fait un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules, et que la démonstration de cette affirmation doit être identique à celle qui devrait donner l'injectivité du morphisme de la Proposition 4.5.26.

Toutes ces considérations nous mènent à introduire l'hypothèse suivante, qui va nous permettre d'énoncer ensuite une conjecture regroupant deux assertions de nature différente : la première est une supposition que nous faisons et que nous n'avons pas encore complètement démontrée (pour des raisons essentiellement techniques et temporelles) ; la seconde est un fait que nous savons démontrer, mais dont la preuve n'a pas pu être incluse dans ce manuscrit.

Hypothèse A : *La paire (V, λ), avec V représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ scalaire non nul, vérifie l'une des deux assertions suivantes :*
- *V ne s'étend pas en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$;*
- *V s'étend en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse η de $\mathbb{G}$ et $\lambda \neq 1$.*

Conjecture B :

1. *Pour toute paire (V, λ) satisfaisant à l'Hypothèse A, la représentation conoyau $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda)$ est isomorphe au $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$, où $\eta : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ est le caractère lisse dont la restriction à $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^{\times})$ vaut $(V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}})^{\phi}$ et qui envoie t_0 sur λ.*
2. *Notons V_0 l'unique représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ contenue dans la représentation de Steinberg $St_{\mathbb{G}}$. Pour tout caractère lisse $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$, le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\pi_{\mathbb{K}}(V_0 \otimes (\eta \circ \det), 1)$ est une extension non scindée du caractère $\eta \circ \det$ par la représentation de la série spéciale $St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det)$.*

Sous cette conjecture, nous pouvons tout d'abord compléter l'énoncé de la Proposition 4.1.8, ce qui mène à l'unicité du quotient lisse irréductible de n'importe quelle représentation conoyau.

Proposition 4.1.9. *Supposons que la Conjecture B soit vérifiée. Pour tout caractère lisse $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$, le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta \circ \det)$ admet une et une seule paramétrisation possible, à savoir la paire $(V_0 \otimes (\eta \circ \det), 1)$ où V_0 désigne l'unique $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ contenue dans $St_{\mathbb{G}}$.*

Corollaire 4.1.10. *Supposons que la Conjecture B soit vraie. Pour toute paire (V, λ) avec V représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$, le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module porté par la représentation conoyau $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda)$ admet (à isomorphisme près) un unique quotient irréductible. De plus, ce quotient irréductible n'est pas supercuspidal.*

Nous déduisons tout d'abord de ces énoncés que la notion de supersingularité relativement à $\mathbb{K}$ introduite précédemment est bien définie, puis qu'elle est équivalente à la notion de supercuspidalité.

Lemme 4.1.11. *Supposons que la Conjecture B soit vérifiée.*
La notion de supersingularité par rapport à $\mathbb{K}$ est alors bien définie : si π est une représentation lisse irréductible de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ admettant une paramétrisation possible de la forme $(V, 0)$ avec V représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, alors toute paramétrisation possible de π est de la forme $(W, 0)$ avec W représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Théorème 4.1.12. *Supposons que la Conjecture B soit vérifiée. Pour toute représentation lisse irréductible admissible π de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, on a équivalence entre les assertions suivantes :*

i) *π est supersingulière relativement à $\mathbb{K}$;*

ii) *π est supercuspidale.*

Ce dernier résultat prouve en particulier que la notion de supersingularité ne dépend pas, pour les représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathbb{G}$, du choix de $\mathbb{K}$ puisqu'elle est équivalente à la notion de supercuspidalité qui n'a absolument rien à voir avec les sous-groupes compacts maximaux de $\mathbb{G}$. Nous pouvons alors conclure ce chapitre par l'énoncé de classification suivant des représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, qui est démontré sous réserve de disposer de la Conjecture B.

Théorème 4.1.13. *Supposons que la Conjecture B soit vérifiée.*
A isomorphisme près, toute représentation lisse irréductible admissible de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ appartient à l'une et et une seule des quatre familles suivantes :

i) *les caractères de $\mathbb{G}$, de la forme $\eta \circ \det$ avec $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse ;*

ii) *les représentations de la série principale, de la forme $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ avec $\eta : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse qui ne s'étend pas en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$.*

iii) *les représentations de la série spéciale, de la forme $St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det)$ avec $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse et $St_{\mathbb{G}} := \dfrac{\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$ représentation de Steinberg ;*

iv) *les représentations supersingulières.*

Plan du chapitre

Après une section qui regroupe divers résultats préliminaires plus ou moins techniques, nous consacrons la Section 4.3 à la description explicite des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de $\mathbb{G}$ et de $\mathbb{B}$ ainsi qu'à quelques résultats qui en découlent. La Section 4.4 contient une étude complète des représentations lisses de $\mathbb{G}$ obtenues par induction lisse des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de $\mathbb{B}$, ce qui permet notamment d'obtenir une démonstration du Théorème 4.1.3. La dernière section de ce chapitre, qui est la plus longue, commence par une démonstration du Théorème 4.1.4. On démontre ensuite le Théorème 4.1.5 en adaptant les arguments développés dans le cas déployé, puis l'on s'intéresse aux représentations conoyaux $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda)$ et à leurs relations éventuelles avec les représentations non supercuspidales de $\mathbb{G}$. Pour ce faire, nous introduisons un isomorphisme remarquable $\Delta : \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{K}]}(V, \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)) \to \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)]}(V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}, \eta^{\phi})$ lorsque V est une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ et η un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{B}$. Cet isomorphisme fait l'objet de la Section 4.5.3 et tient une place importante dans la compréhension des paramétrisations possibles des représentations lisses irréductibles non supercuspidales de $\mathbb{G}$ puisqu'il est à la base des démonstrations fournissant la Proposition 4.1.6 et le Théorème 4.1.7. Nous terminons alors ce chapitre en introduisant la Conjecture B et en l'utilisant pour aboutir à l'énoncé de classification donné dans le Théorème 4.1.13.

4.2 Préliminaires

4.2.1 Notations générales

On fixe un entier premier p et l'on considère un corps local non archimédien F que l'on suppose complet pour une valuation discrète, de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel fini. On note $\mathcal{O}_F$ l'anneau des éléments entiers de F, $\mathfrak{p}_F$ son idéal maximal et $k_F = \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}_F$ son corps résiduel. On désigne par E une extension quadratique séparable non ramifiée de F

et, si x est un élément de E, on note $\overline{x}$ son image par l'unique F-automorphisme non trivial [5] de E, $Tr(x) := x + \overline{x}$ sa trace et $N(x) := x\overline{x}$ sa norme. On note $\mathcal{O}_E$ l'anneau des entiers de E, $\mathfrak{p}_E$ son idéal maximal et k_E son corps résiduel. On fixe une uniformisante $\varpi_F \in \mathfrak{p}_F$, une uniformisante $\varpi_E \in \mathfrak{p}_E$ au-dessus de [6] ϖ_F, et une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_p$ de k_F qui contient k_E. Remarquons que comme la conjugaison préserve la valuation $\mathfrak{p}_E$-adique [7], le noyau $E^{(1)}$ de l'application norme est contenu dans $\mathcal{O}_E^\times$. Il vérifie de plus $E^{(1)} \cap F = \{\pm 1\}$, cette intersection étant réduite à un élément lorsque F est de caractéristique 2.

On note $G := GL_3(E)$ le groupe des matrices inversibles de taille 3×3 à coefficients dans E, $K := GL_3(\mathcal{O}_E)$ qui est à conjugaison près l'unique sous-groupe compact maximal de G, et B le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures de G. On a alors $B = TU = UT$, où U désigne le radical unipotent de B et T le tore déployé maximal des matrices diagonales. On considère la forme hermitienne Φ sur E^3 de signature $(2,1)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\phi := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

On note $\mathbb{G}$ le groupe unitaire qui lui est associé, défini comme étant le groupe des automorphismes de E^3 auto-adjoints par rapport à Φ. Autrement dit, le groupe $\mathbb{G}$ peut être identifié au sous-groupe suivant de G :

$$\mathbb{G} = \{M \in G \mid {}^t\overline{M}\phi M = \phi\} = U(2,1)(E/F) .$$

Remarquons que l'on a en particulier $\det M \in E^{(1)}$ pour tout élément $M \in \mathbb{G}$. De plus, un calcul direct montre que les éléments de $\mathbb{G}$ sont exactement les matrices $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ de G qui satisfont aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
Tr(\overline{a}g) &= N(d) \ ; && (4.1)\\
Tr(\overline{b}h) &= N(e) - 1 \ ; && (4.2)\\
Tr(\overline{c}i) &= N(f) \ ; && (4.3)\\
\overline{a}h - \overline{d}e + \overline{g}b &= 0 \ ; && (4.4)\\
\overline{b}i - \overline{e}f + \overline{h}c &= 0 \ ; && (4.5)\\
\overline{a}i - \overline{d}f + \overline{g}c &= 1 \ . && (4.6)
\end{aligned}$$

On note $\mathbb{B} = B \cap \mathbb{G}$ le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures de $\mathbb{G}$, qui admet donc la description suivante :

$$\mathbb{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{a}^{-1} & b & c \\ 0 & e & \overline{b}ae \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} ;\ e \in E^{(1)};\ a, b, c \in E \text{ avec } Tr(a^{-1}c) = N(b) \right\} .$$

Son radical unipotent est noté $\mathbb{U} = U \cap \mathbb{G}$, et $\mathbb{T} = T \cap \mathbb{G}$ désigne le tore maximal des matrices diagonales. On a encore $\mathbb{B} = \mathbb{T}\mathbb{U} = \mathbb{U}\mathbb{T}$, mais le tore $\mathbb{T}$ n'est pas un tore déployé de $\mathbb{G}$: le tore

5. Que l'on appellera parfois l'application de *conjugaison*.

6. Ce qui signifie que l'on a $\varpi_E^e = \varpi_F$, où $e = e(E/F)$ désigne l'indice de ramification de E/F. Comme l'extension E/F est supposée non ramifiée, on peut choisir la même uniformisante pour E et F, ce que nous ferons à partir de la Section 4.5.3. Cependant, comme nous l'avons expliqué dans la Remarque 4.1.2, plusieurs résultats énoncés ci-après sont encore valables lorsque l'extension E/F est ramifiée, ce qui explique pourquoi nous gardons des notations générales autant que possible.

7. Cette propriété se vérifie par un calcul direct en distinguant selon que l'extension quadratique E/F est non ramifiée ou totalement ramifiée.

déployé maximal contenu dans $\mathbb{T}$ est isomorphe à $F^\times$, tandis que $\mathbb{T}$ est isomorphe à $E^\times \times E^{(1)}$. On note $\overline{\mathbb{U}}$ le radical unipotent du Borel opposé $\overline{\mathbb{B}}$: un calcul direct montre alors que $\phi\mathbb{U}\phi = \overline{\mathbb{U}}$ et que la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall t \in \mathbb{T},\ \phi t \phi = \bar{t}^{-1} . \tag{4.7}$$

L'action par conjugaison de $\mathbb{G}$ sur l'ensemble de ses sous-groupes compacts maximaux possède deux orbites, dont des représentants sont donnés [8] par $\mathbb{K}_0 := K \cap \mathbb{G}$ et $\mathbb{K}_1 := (PKP^{-1}) \cap \mathbb{G}$ avec $P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varpi_E \end{pmatrix}$. Signalons ici que l'on connaît la structure des groupes finis obtenus par «réduction modulo ϖ_E» de $\mathbb{K}_0$ et de $\mathbb{K}_1$ [T, Section 3.11] : ils sont respectivement égaux au groupe unitaire fini $U(2,1)(k_E/k_F)$ et au produit $U(1,1)(k_E/k_F) \times k_E^{(1)}$, où $k_E^{(1)}$ désigne l'ensemble des éléments de k_E dont la norme [9] est égale à 1.
On note $\mathbb{I}$ le sous-groupe d'Iwahori standard de $\mathbb{G}$: il est constitué des éléments de $\mathbb{K}_0$ dont la réduction modulo ϖ_E est une matrice triangulaire supérieure inversible, et est aussi égal à l'intersection $\mathbb{K}_0 \cap \mathbb{K}_1$. Il contient le pro-$p$-Iwahori standard $\mathbb{I}(1)$, formé des éléments de $\mathbb{I}$ dont la réduction modulo ϖ_E est unipotente. On introduit enfin l'élément suivant de $\mathbb{T}$, qui appartient au tore déployé maximal de $\mathbb{G}$ contenu dans $\mathbb{T}$ puisque l'extension E/F est supposée non ramifiée :

$$t_0 := \begin{pmatrix} \overline{\varpi_E}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varpi_E \end{pmatrix} .$$

4.2.2 Autour des éléments de $\mathbb{B}$

La décomposition de Bruhat raffinée, rappelée dans la sous-section suivante, motive la recherche d'une description de l'action par translations à droite de $\mathbb{B}$ sur la double classe $\mathbb{B}\phi\mathbb{U}$ lorsque l'on souhaite étudier les représentations de $\mathbb{G}$ obtenues par induction parabolique à partir de $\mathbb{B}$. Cette sous-section regroupe quelques résultats un peu techniques à ce sujet dont nous ferons usage par la suite, notamment dans la Section 4.4.
On commence par introduire les notations suivantes : pour tous scalaires $x, y \in E$ et $z \in E^\times$, on pose

$$u(x,y) := \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & \overline{x} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \overline{u}(x,y) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & \overline{x} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } t(z,y) := \begin{pmatrix} \overline{z}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} .$$

Les éléments de $\mathbb{U}$ (respectivement : de $\overline{\mathbb{U}}$) sont alors exactement les $u(x,y)$ (resp. $\overline{u}(x,y)$) avec $x, y \in E$ tels que $Tr(y) = N(x)$ tandis que les éléments de $\mathbb{T}$ sont tous de la forme $t(a,e)$ avec $a \in E^\times$ et $e \in E^{(1)}$. Un premier calcul direct montre que quelles que soient les valeurs des paramètres a, e, x et y, on a

$$t(a,e)u(x,y) = u(\overline{a}^{-1}\overline{e}x, N(a^{-1})y)t(a,e) . \tag{4.8}$$

Grâce à l'identité (4.7), on déduit de cette expression la relation suivante.

Lemme 4.2.1. *Soient $t(a,e) \in \mathbb{T}$ et $u(x,y) \in \mathbb{U}$. Pour tout $b \in \mathbb{B}$, on a*

$$b\phi u(x,y)t(a,e) = bt(\overline{a}^{-1}, e)\phi u(\overline{a}ex, N(a)y) .$$

8. La Section 7.2 contient une preuve de cette affirmation reposant sur des arguments dus à Hijikata [Hij].
9. Relative à l'extension quadratique k_E/k_F, ce qui a un sens puisque l'extension E/F est supposée non ramifiée.

Un second calcul, tout aussi direct que celui menant à l'égalité (4.8), montre que l'on dispose de l'identité suivante.

Lemme 4.2.2. *Soient* $u(x, y)$ *et* $u(b, c)$ *deux éléments de* $\mathbb{U}$*. Alors :*

$$u(x, y)u(b, c) = u(x + b, y + c + x\overline{b}) \ . \tag{4.9}$$

En particulier, l'inverse de $u(x, y)$ *est égal à* $u(-x, \overline{y})$*.*

On termine en rappelant une identité qui relie explicitement les éléments non triviaux de $\overline{\mathbb{U}}$ à ceux de $\mathbb{B}\phi\mathbb{U}$ et qui s'obtient par un calcul direct.

Lemme 4.2.3. *Pour tout élément* $\overline{u}(x, y) \in \overline{\mathbb{U}}$ *avec* $(x, y) \neq (0, 0)$*, on a l'égalité suivante :*

$$\overline{u}(x, y) = \begin{pmatrix} \overline{y}^{-1} & y^{-1}\overline{x} & 1 \\ 0 & \overline{y}y^{-1} & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \phi u(y^{-1}\overline{x}, y^{-1}) \in \mathbb{B}\phi\mathbb{U} \ .$$

Remarque 4.2.4. Puisque l'on impose que l'égalité $Tr(y) = N(x)$ soit vérifiée, on voit immédiatement que la condition $(x, y) \neq (0, 0)$, qui signifie simplement que l'élément $\overline{u}(x, y)$ n'est pas égal à I_3, est équivalente à la condition $y \neq 0$.

4.2.3 Décompositions en doubles classes de $\mathbb{G}$

Notons W_0 le groupe de Weyl fini associé à $\mathbb{G}$. On rappelle qu'il peut être défini comme le quotient par $\mathbb{T}$ du normalisateur $N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})$ de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{G}$, auquel cas le calcul explicite [10] de $N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})$ montre que W_0 est un groupe de cardinal 2 et que ϕ peut être choisi comme relèvement dans $N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})$ d'un générateur de W_0. La décomposition de Bruhat pour $\mathbb{G}$ [IGA, Théorème 11.4.(ii)] et sa version raffinée (qui provient de la factorisation $\mathbb{B} = \mathbb{T}\mathbb{U}$ et du fait que ϕ normalise $\mathbb{T}$) s'écrivent donc de la manière suivante.

Théorème 4.2.5 (Décomposition de Bruhat)**.** *Le groupe* $\mathbb{G}$ *admet les décompositions en doubles classes disjointes suivantes :*

$$\begin{aligned} \mathbb{G} &= \mathbb{B} \sqcup \mathbb{B}\phi\mathbb{B} && (4.10) \\ &= \mathbb{B} \sqcup \mathbb{B}\phi\mathbb{U} \ . && (4.11) \end{aligned}$$

On sait de plus que la factorisation des éléments de $\mathbb{G}$ donnée par la décomposition (4.11) est unique, et que $\mathbb{B}\phi\mathbb{U}$ est une partie ouverte dense de $\mathbb{G}$ tandis que $\mathbb{B}$ est un sous-groupe fermé non ouvert de $\mathbb{G}$.

Remarque 4.2.6. Comme E/F est supposée non ramifiée, on dispose aussi d'une décomposition de Bruhat pour le groupe fini $\mathbb{G}(k_E)$ formé des matrices M de $GL_3(k_E)$ vérifiant ${}^t\overline{M}\phi M = \phi$:

$$\mathbb{G}(k_E) = \mathbb{B}(k_E) \sqcup \mathbb{B}(k_E)\phi\mathbb{B}(k_E) = \mathbb{B}(k_E) \sqcup \mathbb{B}(k_E)\phi\mathbb{U}(k_E) \ ,$$

où $\mathbb{B}(k_E)$ et $\mathbb{U}(k_E)$ désignent respectivement le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathbb{G}(k_E)$ et le radical unipotent de $\mathbb{B}(k_E)$. Là encore, on a unicité de l'écriture dans la seconde décomposition.

Nous démontrons maintenant quelques résultats techniques qui vont nous servir à démontrer les décompositions d'Iwasawa (Corollaire 4.2.8) et de Cartan (Théorème 4.2.12) pour $\mathbb{G}$ à partir de la décomposition de Bruhat raffinée rappelée ci-avant, nous évitant ainsi d'avoir à renvoyer le lecteur vers [BT1, Section 4.4].

10. Que l'on donne dans la Section 7.3.

Lemme 4.2.7. *Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{K}_0, \mathbb{K}_1\}$.*

1. *L'élément ϕ admet la factorisation suivante :*
$$\phi = \begin{pmatrix} \overline{\varpi_E} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varpi_E^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \overline{\varpi_E}^{-1} \\ 0 & -1 & 0 \\ \varpi_E & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$
En particulier, ϕ appartient à $\mathbb{TK}$ et à $\mathbb{KT}$.
2. *Pour tous éléments $x, y \in E$ tels que $N(x) = Tr(y)$, on dispose de la décomposition matricielle suivante :*
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -\overline{x} \\ 1 & x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{y}^{-1} & -xy^{-1} & 1 \\ 0 & \overline{y}y^{-1} & -\overline{x} \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{xy^{-1}} & 1 & 0 \\ y^{-1} & xy^{-1} & 1 \end{pmatrix} . \tag{4.12}$$
En particulier, ϕu appartient à $\mathbb{BK}$ pour tout élément $u \in \mathbb{U}$.

Démonstration. Un calcul direct permet de vérifier que ϕ admet bien la factorisation annoncée, ce qui montre qu'il appartient à $\mathbb{TK}_1$ et achève la preuve du premier point puisque ϕ appartient clairement à $\mathbb{K}_0$ et est égale à son inverse. La décomposition du second point se vérifie de même par un calcul direct.
Soit maintenant $u(x, y) \in \mathbb{U}$ avec $x, y \in E$ tels que $N(x) = Tr(y)$. On peut supposer y non nul car dans le cas contraire, on a nécessairement $x = 0$ et la matrice $u(0, 0) = I_3$ est trivialement contenue dans $\mathbb{BK}$. Remarquons ensuite que l'égalité $N(x) = Tr(y)$ implique que l'on a $2v_E(x) \geq v_E(y)$, ce qui se réécrit $v_E(x) \geq \frac{v_E(y)}{2}$. Nous allons conclure en distinguant selon le signe de $v_E(y)$.
Si $v_E(y) \geq 0$, alors on a aussi $v_E(x) \geq 0$ et la matrice $u(x, y)$ appartient en fait à $\mathbb{I} = \mathbb{K}_0 \cap \mathbb{K}_1$, ce qui implique directement que $\phi u(x, y)$ appartient bien à $\mathbb{BK}$. Supposons maintenant que $v_E(y) < 0$, ce qui signifie que y^{-1} appartient à $\mathfrak{p}_E$. C'est alors aussi le cas de xy^{-1}, puisque l'inégalité $v_E(x) \geq \frac{v_E(y)}{2}$ est équivalente à $v_E(xy^{-1}) = v_E(x) - v_E(y) \geq \frac{-v_E(y)}{2} > 0$, et de $\overline{xy^{-1}}$, puisque la conjugaison préserve la valuation ϖ_E-adique. Un calcul immédiat montre alors que l'on a
$$\phi u(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -\overline{x} \\ 1 & x & y \end{pmatrix} ,$$
ce qui permet de déduire de la factorisation (4.12) que $\phi u(x, y)$ est bien un élément de $\mathbb{BK}$ et termine la démonstration. □

Corollaire 4.2.8 (Décomposition d'Iwasawa)**.** *Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{K}_0, \mathbb{K}_1\}$. Le groupe $\mathbb{G}$ admet une décomposition d'Iwasawa relativement à $\mathbb{K}$:*
$$\mathbb{G} = \mathbb{BK} = \mathbb{KB} .$$

Démonstration. Par décomposition de Bruhat raffinée, on sait que $\mathbb{G}$ est la réunion de $\mathbb{B}$ et de $\mathbb{B}\phi\mathbb{U}$, et le Lemme 4.2.7 assure que $\phi\mathbb{U}$ est contenu dans $\mathbb{BK}$, ce qui prouve que $\mathbb{G} = \mathbb{BK}$ et termine la démonstration, l'autre décomposition s'obtenant par passage à l'inverse. □

Lemme 4.2.9. *Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{K}_0, \mathbb{K}_1\}$. Tout élément de $\mathbb{U}$ peut être écrit sous la forme $k_1 t_0^{-n} k_2$ avec $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ et $n \geq 0$. Autrement dit, on a $\mathbb{U} \subset \mathbb{K}t_0^{-\mathbb{N}}\mathbb{K}$.*

Démonstration. Soit $u(x, y) \in \mathbb{U}$ avec $x, y \in E$ tels que $N(x) = Tr(y)$. Comme nous l'avons vu dans la preuve du Lemme 4.2.7, on est forcément dans l'un des deux cas suivants :

– ou bien $v_E(y) \geq 0$, auquel cas $u(x,y)$ est un élément de $\mathbb{U} \cap \mathbb{K}$ et il suffit de prendre $k_1 = u(x,y)$, $n = 0$ et $k_2 = I_3$ pour conclure ;
– ou bien $v_E(y) < 0$, auquel cas on utilise la factorisation (4.12) pour écrire que

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \phi \begin{pmatrix} \overline{y}^{-1} & -xy^{-1} & 1 \\ 0 & \overline{y}y^{-1} & -\overline{x} \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{xy^{-1}} & 1 & 0 \\ y^{-1} & xy^{-1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \phi \begin{pmatrix} 1 & -x\overline{y}^{-1} & y^{-1} \\ 0 & 1 & -\overline{x}y^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{y}y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{xy^{-1}} & 1 & 0 \\ y^{-1} & xy^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme nous l'avons expliqué dans la preuve du Lemme 4.2.7, la condition $N(x) = Tr(y)$ assure que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -x\overline{y}^{-1} & y^{-1} \\ 0 & 1 & -\overline{x}y^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{xy^{-1}} & 1 & 0 \\ y^{-1} & xy^{-1} & 1 \end{pmatrix}$ appartiennent toutes deux à $\mathbb{K}$. D'autre part, on sait que si $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0$, alors ϕ appartient à $\mathbb{K}$ et il suffit de poser $-n = v_E(y) < 0$ pour avoir le résultat annoncé. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{K}_1$, il suffit de remarquer que l'on a

$$\begin{aligned} \phi \begin{pmatrix} 1 & -x\overline{y}^{-1} & y^{-1} \\ 0 & 1 & -\overline{x}y^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \overline{x}y^{-1} \\ 1 & -x\overline{y}^{-1} & \overline{y}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varpi_E^{-1} \\ 0 & -1 & \overline{x}y^{-1}\varpi_E^{-1} \\ \overline{\varpi_E} & -x\overline{y}^{-1} & (\overline{y}\varpi_E)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\varpi_E}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varpi_E \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pour conclure en posant $-n := v_E(y) + 1 \leq 0$.

Nous avons ainsi prouvé dans les deux cas l'existence d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et de deux éléments $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ tels que $u(x,y) = k_1 t_0^{-n} k_2$, ce qui est le résultat annoncé. □

Lemme 4.2.10. *Soit* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{K}_0, \mathbb{K}_1\}$. *Tout élément de* $\mathbb{B} = \mathbb{T}\mathbb{U}$ *peut être écrit sous la forme* $k_1 t k_2$ *avec* $t \in \mathbb{T}$ *et* $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$. *Autrement dit, on a* $\mathbb{B} \subset \mathbb{K}\mathbb{T}\mathbb{K}$.

Démonstration. Soit $b \in \mathbb{B}$. Comme $\mathbb{B} = \mathbb{T}\mathbb{U}$, il existe des scalaires $a \in E$, $e \in E^{(1)}$ et $x, y \in E$ vérifiant $N(x) = Tr(y)$ tels que $b = t(a,e)u(x,y)$. Si y appartient à $\mathcal{O}_E$, alors $u(x,y)$ appartient à $\mathbb{U} \cap \mathbb{K}$ et il n'y a rien à démontrer, ce qui nous permet de supposer que $v_E(y) < 0$. On peut alors écrire grâce à la formule (4.12) que l'on a

$$u(x,y) = \phi \begin{pmatrix} \overline{y}^{-1} & -xy^{-1} & 1 \\ 0 & \overline{y}y^{-1} & -\overline{x} \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{xy^{-1}} & 1 & 0 \\ y^{-1} & xy^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{xy^{-1}} & 1 & 0 \\ y^{-1} & xy^{-1} & 1 \end{pmatrix}$ qui appartient à $\mathbb{I}(1)$, donc à $\mathbb{K}$. Pour conclure, nous allons distinguer selon le signe de $v_E(a)$.

– Si $v_E(a) \geq 0$, alors on a

$$\begin{aligned} t(a,e)u(x,y) &= \phi t(\overline{a}^{-1}, e)\phi u(x,y) \\ &= \phi t(\overline{a}^{-1}, e) \begin{pmatrix} \overline{y}^{-1} & -xy^{-1} & 1 \\ 0 & \overline{y}y^{-1} & -\overline{x} \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{xy^{-1}} & 1 & 0 \\ y^{-1} & xy^{-1} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\begin{aligned} t(a,e)u(x,y) &= \phi \begin{pmatrix} a\overline{y}^{-1} & -axy^{-1} & a \\ 0 & e\overline{y}y^{-1} & -e\overline{x} \\ 0 & 0 & \overline{a}^{-1}y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{xy^{-1}} & 1 & 0 \\ y^{-1} & xy^{-1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \phi \begin{pmatrix} 1 & -ax\overline{ey}^{-1} & N(a)y^{-1} \\ 0 & 1 & -\overline{ax}ey^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\overline{y}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e\overline{y}y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{a}^{-1}y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{xy^{-1}} & 1 & 0 \\ y^{-1} & xy^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme a est par hypothèse contenu dans $\mathcal{O}_E$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -ax\overline{ey}^{-1} & N(a)y^{-1} \\ 0 & 1 & -\overline{ax}ey^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathbb{K}$, ce qui prouve le résultat annoncé lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0$ puisque ϕ est aussi un élément de $\mathbb{K}_0$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{K}_1$, on utilise l'astuce de la preuve du Lemme 4.2.9 en écrivant $\phi \in \mathbb{K}_1\mathbb{T}$ sous la forme $\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varpi_E^{-1} \\ 0 & -1 & 0 \\ \overline{\varpi_E} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\varpi_E}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varpi_E \end{pmatrix}$ et en remarquant que l'appartenance de y^{-1} et de xy^{-1} à $\mathfrak{p}_E$ assure que l'élément

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \overline{\varpi_E}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varpi_E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -ax\overline{ey}^{-1} & N(a)y^{-1} \\ 0 & 1 & -\overline{ax}ey^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\varpi_E} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varpi_E^{-1} \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} \overline{\varpi_E}^{-1} & -ax\overline{e}(\overline{y\varpi_E})^{-1} & N(a)(y\overline{\varpi_E})^{-1} \\ 0 & 1 & -\overline{ax}ey^{-1} \\ 0 & 0 & \varpi_E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\varpi_E} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varpi_E^{-1} \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} 1 & -a\overline{e}x\overline{y}^{-1}\overline{\varpi_E}^{-1} & N(a)N(\varpi_E^{-1})y^{-1} \\ 0 & 1 & -\overline{a}e\overline{x}y^{-1}\varpi_E^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est contenu dans $\mathbb{K}_1$. On en déduit donc que $t(a,e)u(x,y)$ appartient à la double classe $\mathbb{K}_1 t(\overline{a}^{-1}y\varpi_E, e\overline{y}y^{-1})\mathbb{K}_1$, ce qui prouve le résultat voulu.

– Si $v_E(a) < 0$, on se ramène au cas précédent en travaillant avec $b^{-1} \in \mathbb{B}$. En effet, si $b = t(a,e)u(x,y)$, on sait grâce au Lemme 4.2.2 et à la formule (4.8) que l'on a

$$b^{-1} = u(-x,\overline{y})t(a^{-1},\overline{e}) = t(a^{-1},\overline{e})u(-\overline{a}^{-1}\overline{e}x, N(a^{-1})\overline{y})$$

avec $a^{-1} \in \mathfrak{p}_E$. Par suite, si $v_E(N(a^{-1})\overline{y}) \geq 0$, alors $u(-\overline{a}^{-1}\overline{e}x, N(a^{-1})\overline{y})$ appartient à $\mathbb{K}$ et b^{-1} appartient à $\mathbb{KTK}$, ce qui implique qu'il en va de même pour b ; si $v_E(N(a^{-1})\overline{y}) < 0$, on peut alors reprendre pour $b_1 := b^{-1}$ l'argument développé ci-avant pour b dans le cas où $v_E(y) < 0$ et $v_E(a) \geq 0$ en considérant cette fois $a_1 := \overline{a}^{-1}$ et $y_1 := N(a^{-1})\overline{y}$. On obtient donc finalement que b^{-1} est un élément de $\mathbb{KTK}$, ce qui implique que b appartient lui aussi à $\mathbb{KTK}$ et termine la démonstration. □

Remarque 4.2.11. La première partie de la preuve du Lemme 4.2.10 (cas où $v_E(a) \geq 0$) montre en particulier le résultat suivant : si $n \in \mathbb{N}$ et si $u(x,y) \in \mathbb{U}$ n'appartient pas à $\mathbb{K}$, alors l'élément $t_0^n u(x,y)$ appartient à $\mathbb{K}t_0^m\mathbb{K}$ avec $m = \begin{cases} -n + v_E(y) & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{K}_0 \ ; \\ -n + v_E(y) + 1 & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{K}_1 \ . \end{cases}$ Remarquons en particulier que l'on a toujours $m < -n$.

Théorème 4.2.12 (Décomposition de Cartan)**.** *Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{K}_0, \mathbb{K}_1\}$. Le groupe $\mathbb{G}$ admet les décompositions en doubles classes disjointes suivantes :*

$$\mathbb{G} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}t_0^n\mathbb{K} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}t_0^{-n}\mathbb{K} \ .$$

Démonstration. Le fait que $\mathbb{G}$ soit réunion des doubles classes $\{\mathbb{K}t_0^n\mathbb{K}, n \in \mathbb{Z}\}$ provient directement de la décomposition d'Iwasawa $\mathbb{G} = \mathbb{B}\mathbb{K}$ et du Lemme 4.2.10 puisqu'un calcul immédiat montre que l'on a $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)t_0^{\mathbb{Z}} = t_0^{\mathbb{Z}}\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$, où $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times) := \mathbb{T}\cap\mathbb{K}$ est le sous-groupe des éléments de $\mathbb{T}$ à coefficients dans $\mathcal{O}_E$. Remarquons par ailleurs que l'élément $\xi := \overline{\varpi_E}\varpi_E^{-1}$ appartient [11] à $\mathcal{O}_E^\times$ et fournit l'identité suivante :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \overline{t_0}^n = \begin{pmatrix} \xi^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\xi}^{-n} \end{pmatrix} t_0^n\ .$$

Combinée avec la relation (4.7), cette égalité prouve que l'on a $\mathbb{K}t_0^n\mathbb{K} = \mathbb{K}t_0^{-n}\mathbb{K}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et montre donc que $\mathbb{G}$ est la réunion des doubles classes $\{\mathbb{K}t_0^n\mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\}$. Il nous reste à vérifier que ces classes sont deux à deux disjointes : soient donc $m, n \in \mathbb{N}$ tels que t_0^m appartienne à $\mathbb{K}t_0^n\mathbb{K}$. Puisque $\mathbb{T}\cap\mathbb{K} = \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$ ne contient aucune puissance non triviale de t_0, la nullité de m ou de n entraîne la nullité de l'autre exposant, ce qui permet de supposer que m et n sont tous deux strictement positifs.
Ecrivons alors t_0^m sous la forme $k_1 t_0^n k_2$ avec $k_1 = (k_{ij}^1)_{1\leq i,j\leq 3}$ et $k_2 = (k_{ij}^2)_{1\leq i,j\leq 3}$ deux éléments de $\mathbb{K}$. Le calcul explicite du coefficient situé en position $(1,1)$ implique que l'on doit avoir

$$k_{11}^1 k_{11}^2 \overline{\varpi_E}^{-n} + k_{12}^1 k_{21}^2 + k_{13}^1 k_{31}^2 \varpi_E^n = \overline{\varpi_E}^{-m} \tag{4.13}$$

ce qui donne, après multiplication par $\overline{\varpi_E}^m$,

$$k_{11}^1 k_{11}^2 \overline{\varpi_E}^{m-n} + k_{12}^1 k_{21}^2 \overline{\varpi_E}^m + \xi^n k_{13}^1 k_{31}^2 \overline{\varpi_E}^{m+n} = 1\ . \tag{4.14}$$

Comme k_1 et k_2 appartiennent tous deux à $\mathbb{K}$, les coefficients $k_{11}^1 k_{11}^2$, $k_{12}^1 k_{21}^2$ et $\xi^n k_{13}^1 k_{31}^2$ sont tous trois contenus dans $\mathcal{O}_E$. Pour que l'égalité (4.14) soit possible, il faut donc avoir $m-n \leq 0$, i.e. $m \leq n$. Par symétrie des rôles de m et n, on en conclut que l'on doit avoir $m = n$, ce qui termine la démonstration. □

Remarque 4.2.13. La méthode développée à la fin de la preuve du Théorème 4.2.12 nous permet aussi de montrer que pour tous entiers naturels non nuls m et n, on a :

$$(t_0^{\pm m} \in \mathbb{K}t_0^n\mathbb{K}\mathbb{U}) \Longrightarrow (m \leq n)\ .$$

Une preuve de cette assertion est donnée dans la Section 7.4 par souci de complétude.

Corollaire 4.2.14. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $t_0^n\mathbb{U}\cap\mathbb{K}t_0^n\mathbb{K} = t_0^n(\mathbb{U}\cap\mathbb{K})$.

Démonstration. Ce résultat, qui peut être vu comme un cas particulier de [BT1, 4.4.4.ii)], est une conséquence directe des calculs effectués précédemment. L'inclusion de $t_0^n(\mathbb{U}\cap\mathbb{K})$ dans $t_0^n\mathbb{U}\cap\mathbb{K}t_0^n\mathbb{K}$ étant immédiate, concentrons-nous sur la preuve de l'inclusion réciproque en fixant un élément $u(x,y) \in \mathbb{U}$ tel que $t_0^n u(x,y)$ soit contenu dans $\mathbb{K}t_0^n\mathbb{K}$ et en supposant par l'absurde que $u(x,y)$ n'appartienne pas à $\mathbb{U}\cap\mathbb{K}$. La Remarque 4.2.11 impliquerait alors que $t_0^n u(x,y)$ est un élément de $\mathbb{K}t_0^m\mathbb{K}$ avec $m < -n$, ce qui prouverait la non-vacuité de l'intersection $\mathbb{K}t_0^{-n}\mathbb{K}\cap\mathbb{K}t_0^m\mathbb{K} = \mathbb{K}t_0^n\mathbb{K}\cap\mathbb{K}t_0^m\mathbb{K}$ et contredirait le fait que les doubles classes $\{\mathbb{K}t_0^{-r}\mathbb{K},\ r \in \mathbb{N}\}$ sont deux à deux disjointes. On en conclut que $u(x,y)$ doit appartenir à $\mathbb{U}\cap\mathbb{K}$, ce qui termine la démonstration. □

Nous terminons cette sous-section en prouvant un énoncé de décomposition de $\mathbb{G}$ en doubles classes disjointes modulo $\mathbb{B}$ à droite et $\mathbb{I}$ ou $\mathbb{I}(1)$ à gauche.

11. On peut en fait toujours choisir l'uniformisante de manière à ce que ξ soit égal à ± 1.

Lemme 4.2.15. *Le groupe $\mathbb{G}$ admet les décompositions en doubles classes disjointes suivantes :*

$$\mathbb{G} = \mathbb{B}\mathbb{I} \sqcup \mathbb{B}\phi\mathbb{I} = \mathbb{B}\mathbb{I}(1) \sqcup \mathbb{B}\phi\mathbb{I}(1) \ .$$

Démonstration. Commençons par signaler que la seconde décomposition découle immédiatement de la première une fois que l'on a remarqué que $\mathbb{I} = \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)\mathbb{I}(1)$, où $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$ désigne le sous-groupe des éléments de $\mathbb{T}$ à coefficients dans $\mathcal{O}_E$, et que ϕ normalise $\mathbb{T}$. Pour démontrer la première décomposition, on rappelle tout d'abord que $\mathbb{G}$ admet une décomposition d'Iwasawa par rapport à $\mathbb{K}_0$ (Corollaire 4.2.8) : $\mathbb{G} = \mathbb{B}\mathbb{K}_0$. Par ailleurs, la décomposition de Bruhat du groupe fini $\mathbb{G}(k_E)$ rappelée dans la Remarque 4.2.6 fournit, après relèvement par l'application de réduction modulo ϖ_E, la décomposition suivante de $\mathbb{K}_0$ en classes disjointes :

$$\mathbb{K}_0 = \mathbb{I} \sqcup \mathbb{I}\phi\mathbb{I} \ .$$

On dispose donc déjà de la décomposition suivante de $\mathbb{G}$:

$$\mathbb{G} = \mathbb{B}\mathbb{I} \sqcup \mathbb{B}\mathbb{I}\phi\mathbb{I} \ . \tag{4.15}$$

Rappelons maintenant que la décomposition de Bruhat de $\mathbb{G}$ permet d'écrire la double classe $\mathbb{B}\mathbb{I}\phi\mathbb{I}$ sous la forme $(\mathbb{B}\mathbb{I}\phi\mathbb{I} \cap \mathbb{B}) \sqcup (\mathbb{B}\mathbb{I}\phi\mathbb{I} \cap \mathbb{B}\phi\mathbb{U})$. Comme ϕ n'appartient pas à $\mathbb{I}$, l'intersection $\mathbb{B}\mathbb{I}\phi\mathbb{I} \cap \mathbb{B}$ est vide : en effet, si elle ne l'était pas, cela signifierait qu'il existe des éléments $i, j \in \mathbb{I}$ et $b, \beta \in \mathbb{B}$ tels que $b\beta^{-1} = i\phi j$. Cette écriture assurerait alors que $b\beta^{-1}$ est un élément de $\mathbb{B} \cap \mathbb{K}_0$, donc de $\mathbb{I}$, ce qui impliquerait que $\phi = i^{-1}(b\beta^{-1})j^{-1}$ est un élément de $\mathbb{I}$.
Nous obtenons ainsi que $\mathbb{B}\mathbb{I}\phi\mathbb{I} = \mathbb{B}\mathbb{I}\phi\mathbb{I} \cap \mathbb{B}\phi\mathbb{U}$, ce qui prouve que $\mathbb{B}\mathbb{I}\phi\mathbb{I}$ est contenu dans $\mathbb{B}\phi\mathbb{U}$.
Nous allons maintenant montrer que la double classe $\mathbb{I}\phi\mathbb{I}$ est incluse dans $\mathbb{B}\phi\mathbb{U}(\mathcal{O}_E)$, où $\mathbb{U}(\mathcal{O}_E)$ désigne le sous-groupe des éléments de $\mathbb{U}$ à coefficients dans $\mathcal{O}_E$. Ceci suffit pour conclure car l'on aura ainsi prouvé que l'on dispose de la chaîne d'inclusions

$$\mathbb{B}\mathbb{I}\phi\mathbb{I} \subset \mathbb{B}\phi\mathbb{U}(\mathcal{O}_E) \subset \mathbb{B}\phi\mathbb{I} \ ,$$

donc finalement que $\mathbb{B}\mathbb{I}\phi\mathbb{I} = \mathbb{B}\phi\mathbb{I}$ puisque l'inclusion de $\mathbb{B}\phi\mathbb{I}$ dans $\mathbb{B}\mathbb{I}\phi\mathbb{I}$ est évidente.
Soit donc x un élément de $\mathbb{I}\phi\mathbb{I}$. Nous avons précédemment montré que $\mathbb{B}\mathbb{I}\phi\mathbb{I}$ est inclus dans $\mathbb{B}\phi\mathbb{U}$, ce qui permet de décomposer x sous la forme $b\phi u$ avec $b \in \mathbb{B}$ et $u \in \mathbb{U}$. Nous allons vérifier par un calcul explicite que u est à coefficients dans $\mathcal{O}_E$. Si l'on note

$$b := \begin{pmatrix} \overline{a}^{-1} & x & y \\ 0 & e & \overline{x}ae \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ et } u := \begin{pmatrix} 1 & g & h \\ 0 & 1 & \overline{g} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

le calcul de $x = b\phi u$ montre alors que l'on a

$$x = \begin{pmatrix} y & -x + gy & \overline{a}^{-1} - \overline{g}x + hy \\ \overline{x}ae & e(\overline{x}ag - 1) & e(h\overline{x}a - \overline{g}) \\ a & ag & ah \end{pmatrix} \ . \tag{4.16}$$

Rappelons maintenant que x appartient par hypothèse à la double classe $\mathbb{I}\phi\mathbb{I}$, ce qui assure d'une part que x est à coefficients dans $\mathcal{O}_E$, donc que ag et ah sont contenus dans $\mathcal{O}_E$. D'autre part, si l'on écrit x sous la forme $i\phi j$ avec $i, j \in \mathbb{I}$ et si l'on note $\begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} \\ 0 & i_{22} & i_{23} \\ 0 & 0 & i_{33} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ 0 & j_{22} & j_{23} \\ 0 & 0 & j_{33} \end{pmatrix}$ les réductions respectives de i, j modulo ϖ_E, on obtient par un calcul direct que la réduction modulo ϖ_E de x doit être de la forme $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ i_{33}j_{11} & * & * \end{pmatrix}$. La comparaison de cette écriture avec l'expression (4.16) montre que la réduction modulo ϖ_E de a doit être égale à $i_{33}j_{11} \neq 0$, ce qui implique que a est un élément de $\mathcal{O}_E^\times$, et donc que $g = a^{-1}(ag)$ et $h = a^{-1}(ah)$ appartiennent à $\mathcal{O}_E$. $\square$

4.2.4 Actions de groupe sur l'arbre de Bruhat-Tits

Nous clôturons cette première section par un bref rappel concernant l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathbb{G}$. C'est un arbre $\mathcal{X}$ qui est naturellement muni d'une distance δ définie comme le nombre minimal d'arêtes nécessaire pour construire un chemin dans l'arbre entre deux sommets donnés, ainsi que d'une action de $\mathbb{G}$ par isométries relativement à δ. Si l'on note $\mathcal{A}$ l'appartement défini par le tore déployé maximal contenu dans $\mathbb{T}$ et si l'on suppose [12] que l'on n'est pas dans le cas très particulier où l'extension E/F est ramifiée avec F de caractéristique égale à 2, on peut alors donner la description explicite suivante de $\mathcal{X}$ [T, 2.10 et 3.11] [13]. On rappelle qu'une application $f : E^3 \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est une *norme additive* lorsqu'elle satisfait les deux conditions suivantes :
i) $\forall\ x, y \in E^3,\ f(x+y) \geq \inf(f(x), f(y))$;
ii) $\forall\ \lambda \in E,\ \forall\ x \in E,\ f(\lambda x) = f(x) + v_E(\lambda)$.
On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des normes additives $f : E^3 \to \overline{\mathbb{R}}$ qui sont maximales pour la propriété supplémentaire suivante [14] :

$$\forall\ x, y \in E^3,\ v_E(\Phi(x,y)) \geq f(x) + f(y),$$

et on le munit de l'action de $\mathbb{G}$ définie par $g \cdot f := [x \mapsto f(g^{-1}x)]$. On peut alors identifier $\mathcal{X}$ à $\mathcal{B}$ grâce à l'unique application $\mathbb{G}$-équivariante définie comme suit sur $\mathcal{A} \simeq \mathbb{R}$: à tout réel $v \in \mathbb{R}$ est associée la norme additive f_v donnée par $f_v(x,y,z) := \inf(v_E(x) - v, v_E(y), v_E(z) + v)$ pour tout triplet $(x,y,z) \in E^3$. On dispose alors de la caractérisation suivante des sommets (hyper)spéciaux de $\mathcal{X}$: le sommet associé à la norme additive f_v est

– spécial s'il existe une base (e_1, e_2, e_3) de E^3 et un demi-entier $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ tels que l'on ait

$$\forall\ (x_1, x_2, x_3) \in E^3,\ f_v\left(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i\right) = \inf(v_E(x_1) - \lambda, v_E(x_2), v_E(x_3) + \lambda)\ ; \qquad (4.17)$$

– hyperspécial si l'extension E/F est non ramifiée et s'il existe une base de E^3 dans laquelle f_v satisfait la condition (4.17) avec $\lambda = 0$.

On désigne par v_0 le sommet de $\mathcal{X}$ qui correspond à la norme additive f_0 sous cet isomorphisme : c'est un sommet spécial [15] dont le stabilisateur sous l'action de $\mathbb{G}$ est égal au sous-groupe compact maximal $\mathbb{K}_0$. On note v_1 le sommet voisin de v_0 dont le stabilisateur sous l'action de $\mathbb{G}$ est égal au sous-groupe compact maximal $\mathbb{K}_1$: c'est aussi un sommet spécial [16] de $\mathcal{X}$, et le stabilisateur de l'arête ayant pour extrémités v_0 et v_1 est alors égal au sous-groupe d'Iwahori standard $\mathbb{I}$. Sachant que l'on a $\delta(v_0, t_0 v_0) = 2$, on déduit des décompositions de Cartan pour $\mathbb{G}$ obtenues dans la section précédente que l'on peut identifier [17] :

– le quotient $\mathbb{G}/\mathbb{K}_0$ à l'ensemble des sommets de $\mathcal{X}$ situés à distance paire de v_0 ;
– le quotient $\mathbb{G}/\mathbb{K}_1$ à l'ensemble des sommets de $\mathcal{X}$ situés à distance impaire de v_0.

Ceci nous permet d'introduire la notion de support dans l'arbre d'un élément $f \in \mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V)$ avec V représentation lisse irréductible de $\mathbb{K} = \mathbb{K}_i \in \{\mathbb{K}_0, \mathbb{K}_1\}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$: on dit qu'*un sommet v de $\mathcal{X}$ appartient au support de f* s'il peut être écrit sous la forme gv_i avec $g \in \mathbb{G}$ qui appartient au support de f. Remarquons que, par définition des éléments de $\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V)$, le support de f dans $\mathcal{X}$ est toujours une partie finie de l'orbite $\mathbb{G}v_i$ de v_i.

12. Ce qui est le cas ici puisque l'on a supposé que E/F est non ramifiée.
13. Une telle description existe aussi dans le cas très particulier sus-mentionné, mais avec une présentation légèrement différente. Nous renvoyons le lecteur à [T, 2.10] pour plus de détails.
14. Ce qui impose bien entendu que l'on suppose qu'elles vérifient ladite propriété.
15. Et même hyperspécial lorsque E/F est non ramifiée.
16. Mais non hyperspécial.
17. Nous renvoyons le lecteur à [Chou, Preuve du Corollaire 1.5.3] pour une rédaction détaillée du fait que les sommets situés à distance $2n$ de v_i sont exactement ceux de la forme gv_i avec $g \in \mathbb{K}_i t_0^n \mathbb{K}_i$.

4.3 $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de $U(2,1)(E/F)$ et de son sous-groupe de Borel standard

Nous commençons par un énoncé qui décrit la structure des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de $\mathbb{G}$.

Proposition 4.3.1. *Tout $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$ est de la forme $\chi \circ \det$, avec $\chi : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse uniquement défini.*

Démonstration. Dieudonné a prouvé [Di, Sections II.4 et II.5] que le groupe dérivé de $\mathbb{G}$ est égal au sous-groupe des éléments de $\mathbb{G}$ de déterminant égal à 1. On obtient donc l'énoncé voulu grâce à la Proposition 2.1.4 et au fait que le déterminant d'un élément de $\mathbb{G}$ est toujours contenu dans $E^{(1)}$. □

Nous voulons maintenant déterminer la structure des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de $\mathbb{B}$. Il nous faut pour cela calculer le groupe dérivé de $\mathbb{B}$.

Proposition 4.3.2. *Le groupe dérivé de $\mathbb{B}$ est égal à $\mathbb{U}$.*

Démonstration. Ce résultat bien connu repose sur un calcul direct dont l'expression est facilitée grâce aux énoncés de la Section 4.2.2. On remarque tout d'abord que l'égalité (4.8) assure que le groupe dérivé de $\mathbb{B} = \mathbb{T}\mathbb{U} = \mathbb{U}\mathbb{T}$ est contenu dans $\mathbb{U}$. Pour montrer l'inclusion réciproque, fixons un élément $u(x, y) \in \mathbb{U}$ et posons

$$\begin{cases} X := \dfrac{\overline{\varpi_E}}{1-\varpi_E} x \ , \\ Y := \dfrac{N(\varpi_E)}{1-N(\varpi_E)} \left(y + \dfrac{\varpi_E}{1-\varpi_E} N(x) \right) \ . \end{cases}$$

On dispose alors du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
Y + \overline{Y} &= \frac{N(\varpi_E)}{1-N(\varpi_E)} \left(y + \overline{y} + \left(\frac{\varpi_E}{1-\varpi_E} + \frac{\overline{\varpi_E}}{1-\overline{\varpi_E}} \right) N(x) \right) \\
&= \frac{N(\varpi_E)N(x)}{1-N(\varpi_E)} \left(1 + \frac{\varpi_E(1-\overline{\varpi_E}) + \overline{\varpi_E}(1-\varpi_E)}{N(1-\varpi_E)} \right) \\
&= \frac{N(\varpi_E)N(x)}{1-N(\varpi_E)} \left(\frac{(1-\varpi_E)(1-\overline{\varpi_E}) + \varpi_E + \overline{\varpi_E} - 2N(\varpi_E)}{N(1-\varpi_E)} \right) \\
&= \frac{N(\varpi_E)N(x)}{1-N(\varpi_E)} \left(\frac{1-N(\varpi_E)}{N(1-\varpi_E)} \right) \\
&= \frac{N(\varpi_E)N(x)}{N(1-\varpi_E)} \\
&= X\overline{X} \ ,
\end{aligned}$$

où la seconde égalité provient de l'appartenance de $u(x, y)$ à $\mathbb{U}$ qui assure que $Tr(y) = N(x)$. Nous avons donc prouvé que $Tr(Y) = N(X)$, ce qui implique que l'élément $u(X, Y)$ appartient à $\mathbb{U}$. Un calcul immédiat à partir de la relation (4.8) et du Lemme 4.2.2 montre alors que le commutateur de $t(\varpi_E, 1) \in \mathbb{T}$ et de $u(X, Y)$ est égal à

$$\begin{aligned}
t(\varpi_E,1)u(X,Y)t(\varpi_E^{-1},1)u(-X,\overline{Y}) &= u(\overline{\varpi_E}^{-1}X,\ N(\varpi_E^{-1})Y)u(-X,\overline{Y}) \\
&= u((\varpi_E^{-1}-1)X,\ N(\varpi_E^{-1})Y+\overline{Y}-\overline{\varpi_E}^{-1}X\overline{X}) \\
&= u\left(\frac{\overline{\varpi_E}}{1-\varpi_E}X,\ Y(N(\varpi_E^{-1})-1)+N(X)(1-\overline{\varpi_E}^{-1})\right) \\
&= u(x,y)\ ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $u(x,y)$ appartient au groupe dérivé de $\mathbb{B}$ et termine la démonstration. □

La factorisation $\mathbb{B}=\mathbb{T}\mathbb{U}$, où $\mathbb{T}$ est isomorphe[18] au produit $E^\times \times E^{(1)}$, permet alors d'obtenir le résultat de structure suivant pour les $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de $\mathbb{B}$.

Corollaire 4.3.3. *L'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de $\mathbb{B}$ est en bijection avec l'ensemble des paires (χ_2,χ_3) où χ_2 est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $E^{(1)}$ et χ_3 est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $E^\times$. Plus précisément, tout $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse χ de $\mathbb{B}$ est de la forme*

$$\chi\left(\begin{pmatrix}\overline{a}^{-1} & b & c\\ 0 & e & \overline{b}ae\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\right)=\chi_2(e)\chi_3(a)$$

avec χ_2 et χ_3 comme décrits ci-dessus.

Nous terminons cette section par une caractérisation des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de $\mathbb{B}$ qui peuvent être prolongés en des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de $\mathbb{G}$.

Lemme 4.3.4. *Soit χ un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{B}$. Notons (χ_2,χ_3) la paire de caractères lisses qui lui correspond par le Corollaire 4.3.3.*
Le caractère χ s'étend en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$ si et seulement si :

$$\forall\ x\in E^\times,\ \chi_3(x)=\chi_2\left(\frac{x}{\overline{x}}\right)\ .$$

Démonstration. Grâce à la Proposition 4.3.1, le caractère χ se prolonge en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$ si et seulement s'il existe un caractère lisse $\eta : E^{(1)}\to\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ tel que l'on ait :

$$\forall\ M\in\mathbb{B},\ \chi(M)=(\eta\circ\det)(M)\ . \tag{4.18}$$

L'application de la relation (4.18) à l'élément $M=\begin{pmatrix}\overline{a}^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$ avec $a\in E^\times$ quelconque assure d'une part que l'on a $\chi_3(a)=\eta\left(\frac{a}{\overline{a}}\right)$. L'application de cette même relation à l'élément $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ avec $e\in E^{(1)}$ quelconque montre d'autre part que l'on a $\chi_2(e)=\eta(e)$, ce qui prouve que la condition de l'énoncé est nécessaire. Elle est clairement suffisante : en effet, si l'on suppose qu'elle est vérifiée, on a alors

$$\chi\left(\begin{pmatrix}\overline{a}^{-1} & b & c\\ 0 & e & \overline{b}ae\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\right)=\chi_2(e)\chi_3(a)=\chi_2(ea\overline{a}^{-1})=(\chi_2\circ\det)\left(\begin{pmatrix}\overline{a}^{-1} & b & c\\ 0 & e & \overline{b}ae\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\right)\ ,$$

ce qui montre que χ est la restriction à $\mathbb{B}$ du $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse $\chi_2\circ\det$ de $\mathbb{G}$ et termine la démonstration. □

18. Via l'application $[(a,e)\mapsto t(a,e)]$.

4.4 Induction parabolique et représentations de la série principale

L'objectif de cette section est de déterminer la structure des représentations de $\mathbb{G}$ obtenues par induction parabolique des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de $\mathbb{B}$. Nous allons plus précisément démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.4.1. *Soit $\chi : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse.*

1. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ est de longueur 2. Il est indécomposable si et seulement si χ ne se factorise pas par l'application déterminant. Dans le cas contraire, il est totalement décomposé.*
2. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ est irréductible si et seulement si χ ne se factorise pas par l'application déterminant. Dans le cas contraire, il est indécomposable de longueur 2 avec le caractère χ comme sous-objet et la représentation de la série spéciale $St_{\mathbb{G}} \otimes \chi$ comme quotient, où $St_{\mathbb{G}} := \dfrac{\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$ est la représentation de Steinberg de $\mathbb{G}$.*
3. *Les classes d'isomorphisme des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations non supercuspidales de $\mathbb{G}$ se partitionnent en trois familles : les caractères, les représentations de la série principale et les représentations de la série spéciale. De plus, il n'existe pas d'entrelacement entre deux représentations distinctes appartenant à une même famille, et toute représentation non supercuspidale de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est admissible.*

La clé de voûte de cet énoncé réside dans la structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-module des induites paraboliques, que nous étudions dans la Section 4.4.1 et qui fournit directement la structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module recherchée comme nous le verrons dans la Section 4.4.2. Nous démontrons la dernière assertion du Théorème 4.4.1 dans la Section 4.4.3. Remarquons qu'une partie de cet énoncé peut aussi être obtenu à partir du calcul des dimensions des espaces de vecteurs invariants sous l'action du pro-p-Iwahori $\mathbb{I}(1)$ des différents sous-quotients apparus dans les sections précédentes, comme nous l'expliquerons dans la Section 4.4.4.

Remarque 4.4.2. Le contenu de cette section ne nécessite aucune hypothèse concernant la ramification de E/F ou la parité de p.

4.4.1 Structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-module

On fixe désormais un caractère lisse $\chi : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et l'on s'intéresse à la représentation de $\mathbb{B}$ portée par $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$. L'application d'évaluation en I_3 définit un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-modules

$$\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi) \twoheadrightarrow \chi$$

dont le noyau $\mathcal{V}$ est égal, par décomposition de Bruhat raffinée, au sous-espace des éléments de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ dont le support est contenu dans $\mathbb{B}\phi\mathbb{U}$. On dispose de la caractérisation suivante des éléments de $\mathcal{V}$.

Lemme 4.4.3. *Un élément $f \in \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ appartient à $\mathcal{V}$ si et seulement s'il existe un sous-groupe ouvert compact $\mathbb{U}_0$ de $\mathbb{U}$ tel que le support de f soit inclus dans $\mathbb{B}\phi\mathbb{U}_0$.*

Démonstration. Il est évident que cette condition est suffisante. Pour prouver sa nécessité, fixons un élément f de $\mathcal{V}$. Par définition, on a $f(I_3) = 0$, de sorte que, par lissité de f, il existe un sous-groupe ouvert compact $\overline{\mathbb{U}}_0$ de $\overline{\mathbb{U}}$ tel que f soit identiquement nulle sur $\mathbb{B}\overline{\mathbb{U}}_0$. Rappelons maintenant que l'application envoyant un élément u sur la double classe $\mathbb{B}\phi u$ induit un homéomorphisme Φ de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{B}\backslash\mathbb{B}\phi\mathbb{U}$. La compacité du quotient $\mathbb{B}\backslash\mathbb{G}$ et le Lemme 4.2.3 assurent alors que l'image du support de f par l'homéomorphisme Φ^{-1} est un sous-groupe ouvert compact $\mathbb{U}_0$ de $\mathbb{U}$, ce qui termine la démonstration car le support de f est par construction contenu dans la double classe $\mathbb{B}\phi\mathbb{U}_0$. □

L'intérêt de l'espace $\mathcal{V}$ réside dans le prochain énoncé, qui constitue le point-clé de cette section.

Théorème 4.4.4. *Le* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$*-module* $\mathcal{V}$ *est irréductible.*

Démonstration. L'idée de la démonstration consiste à donner un autre modèle de la représentation $\mathcal{V}$ pour lequel on peut prouver l'irréductibilité à partir d'arguments topologiques. Notons $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{U})$ l'ensemble des fonctions lisses définies sur $\mathbb{U}$ qui sont à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ et à support compact. On le munit de l'action lisse à gauche de $\mathbb{B}$ définie par la formule suivante :

$$\forall\ b \in \mathbb{B},\ \forall\ f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{U}),\ b \cdot f := [x \mapsto \chi(\overline{b}^{-1})f(t^{-1}xtu)]\ , \tag{4.19}$$

où $b = tu$ est la factorisation de b dans $\mathbb{B} = \mathbb{T}\mathbb{U}$. On considère ensuite l'application $\mathcal{J}$ envoyant un élément f de $\mathcal{V}$ sur la fonction $\mathcal{J}(f)$ définie par :

$$\forall\ x \in \mathbb{U},\ \mathcal{J}(f)(x) := f(\phi x)\ .$$

L'unicité de l'écriture dans la décomposition de Bruhat raffinée assure que l'application naturelle $\mathbb{U} \to \mathbb{B}\backslash\mathbb{B}\phi\mathbb{U}$ envoyant u sur la classe à droite $\mathbb{B}\backslash\mathbb{B}\phi u$ est un homéomorphisme d'espaces topologiques (où le membre de gauche est muni de la topologie induite par $\mathbb{G}$ tandis que celui de droite est muni de la topologie quotient). Combiné au Lemme 4.4.3, ceci assure que l'application $\mathcal{J}$ est à valeurs dans $C_c^\infty(\mathbb{U})$, et il est alors facile de voir que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Il nous reste à vérifier que cet isomorphisme est $\mathbb{B}$-équivariant, ce qui découle directement du calcul suivant ($b = tu \in \mathbb{B}$, $f \in \mathcal{V}$, $x \in \mathbb{U}$) :

$$\begin{array}{rcll} (b \cdot \mathcal{J}(f))(x) & = & (b \cdot [y \mapsto f(\phi y)])(x) & \\ & = & \chi(\overline{b}^{-1})f(\phi t^{-1}xtu) & \text{par la formule (4.19)} \\ & = & f(\overline{t}^{-1}\phi t^{-1}xtu) & \\ & = & f(\phi tt^{-1}xtu) & \text{par la relation (4.7)} \\ & = & f(\phi xb) & \\ & = & \mathcal{J}([y \mapsto f(yb)])(x) & \\ & = & \mathcal{J}(b \cdot f)(x)\ . & \end{array}$$

Nous avons donc réduit notre problème à la preuve de l'irréductibilité du $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-module défini sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{U})$ par la relation (4.19). Pour le résoudre, on commence par rappeler que $\mathbb{U}$ est égal à la réunion de ses sous-groupes ouverts compacts et que, par lissité, tout élément de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{U})$ est à support dans un tel sous-groupe ouvert compact. En outre, si $\mathbb{U}_0$ est un sous-groupe ouvert compact de $\mathbb{U}$, il est facile de voir que le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel des vecteurs $\mathbb{U}_0$-invariants de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{U}_0)$ est de dimension 1 engendré par la fonction indicatrice $1_{\mathbb{U}_0}$ de $\mathbb{U}_0$: en effet, si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{U}_0)$ est invariante sous l'action de $\mathbb{U}_0$, elle vérifie alors, pour tout élément $u_0 \in \mathbb{U}_0$, $f(u_0) = (u_0 \cdot f)(I_3) = f(I_3)$, ce qui prouve que f est une fonction constante sur $\mathbb{U}_0$.

Nous allons démontrer que quel que soit le choix du sous-groupe ouvert compact $\mathbb{U}_0$ de $\mathbb{U}$, la fonction indicatrice $1_{\mathbb{U}_0}$ engendre le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-module $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{U})$. On pourra alors conclure de la manière suivante : supposons que W soit une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse non nulle de $\mathbb{B}$ contenue dans $C_c^\infty(\mathbb{U})$ et choisissons un élément non nul $f \in W$ ainsi qu'un sous-groupe ouvert compact $\mathbb{U}_0$ de $\mathbb{U}$ contenant le support de f. Le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{U}_0]$-module engendré par f est non nul donc il

contient, grâce au Lemme 2.1.9, un vecteur non nul et invariant sous l'action du pro-p-groupe $\mathbb{U}_0$. Ce qui précède assure alors que ce $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{U}_0]$-module contient la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{U}_0}$, qui engendre le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-module $C_c^\infty(\mathbb{U})$. On en conclut donc que le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-module engendré par f, qui est inclus dans W, contient $C_c^\infty(\mathbb{U})$, ce qui prouve finalement que W est égal à $C_c^\infty(\mathbb{U})$.
Soit $\mathbb{U}_0$ un sous-groupe ouvert compact de $\mathbb{U}$. La relation (4.8) montre en particulier que pour tous éléments $x, y \in E$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$t_0^{-n} u(x,y) t_0^n = u(\varpi_E^n x, \overline{\varpi}_E^{2n} y) \ ,$$

ce qui assure notamment que la famille $\{t_0^{-n}\mathbb{U}_0 t_0^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un système fondamental de voisinages de I_3 dans $\mathbb{U}$. Par ailleurs, un calcul immédiat reposant sur la Proposition 4.2.1 montre que $t_0^{-1} \cdot 1_{\mathbb{U}_0} = \chi_3(\varpi_E^{-1}) 1_{t_0^{-1}\mathbb{U}_0 t_0}$ et que, si l'on pose $\mathbb{U}_n := t_0^{-n}\mathbb{U}_0 t_0^n$, alors on a :

$$\forall\ u \in \mathbb{U},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ u \cdot 1_{\mathbb{U}_n} = 1_{\mathbb{U}_n u^{-1}} \ .$$

On a ainsi prouvé que l'action de $\mathbb{B} = \mathbb{T}\mathbb{U}$ sur $1_{\mathbb{U}_0}$ permet d'engendrer tout élément de l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{U})$, ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 4.4.5. *Pour tout caractère lisse* $\chi : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, *le* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$*-module* $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ *est de longueur* 2.

Démonstration. C'est une simple reformulation du Théorème 4.4.4 à partir de la définition de $\mathcal{V}$ comme noyau de la surjection $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi) \twoheadrightarrow \chi$ donnée par l'application d'évaluation en I_3. □

Remarque 4.4.6. Les résultats montrés ci-avant assurent que les seuls sous-quotients du $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ sont χ et $\mathcal{V}$. En particulier, il n'existe qu'un seul sous-quotient de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, à savoir le caractère χ.

Une fois le Corollaire 4.4.5 prouvé, il est légitime de s'interroger sur l'éventuelle décomposabilité du $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-module porté par $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$, ce qui revient à étudier l'existence éventuelle d'un scindage de la suite exacte courte suivante de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-modules :

$$1 \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi) \longrightarrow \chi \longrightarrow 1 \ . \tag{4.20}$$

Nous allons démontrer le critère suivant d'indécomposabilité.

Théorème 4.4.7. *Le* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$*-module* $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ *est décomposé si et seulement si* χ *s'étend en un* $\overline{\mathbb{F}}_p$*-caractère lisse de* $\mathbb{G}$*. Dans ce cas, c'est un module totalement décomposé.*

Démonstration. Supposons que χ soit la restriction à $\mathbb{B}$ d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$, que la Proposition 4.3.1 permet d'écrire sous la forme $\eta \circ \det$ avec η un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $E^\times$. On a alors $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta \circ \det) \simeq (\eta \circ \det) \otimes \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})$, ce qui permet de se limiter à traiter le cas où χ est le caractère trivial de $\mathbb{B}$. Sous cette hypothèse, le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-module engendré par la fonction constante égale à 1 est un sous-objet de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})$ isomorphe au caractère trivial $\mathbf{1}$. Comme $\mathcal{V}$ est irréductible et de dimension infinie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, on a forcément $\mathcal{V} \cap \mathbf{1} = \{0\}$, ce qui permet de conclure grâce au Corollaire 4.4.5 que $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1}) = \mathcal{V} \oplus \mathbf{1}$ est totalement décomposé.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ soit un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-module décomposé. Le Corollaire 4.4.5 assure alors que le caractère χ est un sous-objet de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$, donc qu'il existe une fonction non nulle $f \in \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ vérifiant

$$\forall\ b \in \mathbb{B},\ \forall\ x \in \mathbb{G},\ f(xb) = \chi(b) f(x) = f(bx) \ . \tag{4.21}$$

Nous allons prouver que la droite $\overline{\mathbb{F}}_p f$ est stable sous l'action de $\mathbb{G}$, ce qui assurera que χ peut s'étendre en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$ et terminera la démonstration. Rappelons tout d'abord que la décomposition de Bruhat montre que le groupe $\mathbb{G}$ est engendré par $\mathbb{B}$ et par ϕ. La relation (4.21) assure que la droite $\overline{\mathbb{F}}_p f$ est stable sous l'action de $\mathbb{B}$, de sorte qu'il ne nous reste qu'à prouver sa stabilité sous l'action de ϕ. Nous procédons pour ce faire en trois étapes.

1ère étape : Etude du support de f :

La fonction f est non nulle, donc son support est d'intersection non vide avec l'ouvert dense $\mathbb{B}\phi\mathbb{U}$ de $\mathbb{G}$. La relation (4.21) assurant que l'on a $f(b\phi u) = \chi(b)f(\phi)$ pour tous éléments $b \in \mathbb{B}$ et $u \in \mathbb{U}$, on obtient ainsi que le support de f contient $\mathbb{B}\phi\mathbb{U}$. Comme le support de f est une partie fermée de $\mathbb{G}$, il contient aussi l'adhérence de $\mathbb{B}\phi\mathbb{U}$; la densité de $\mathbb{B}\phi\mathbb{U}$ dans $\mathbb{G}$ permet donc de conclure que le support de f est en fait égal à $\mathbb{G}$.

2ème étape : Action de $\overline{\mathbb{U}}$ sur f :

Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{\mathbb{U}}_n := \mathbb{G} \cap \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathfrak{p}_E^n & 1 & 0 \\ \mathfrak{p}_E^n & \mathfrak{p}_E^n & 1 \end{pmatrix}$ l'ensemble des éléments de $\overline{\mathbb{U}}$ dont les coefficients hors diagonale sont tous de valuation $\mathfrak{p}_E$-adique supérieure ou égale à n. La famille $\{\overline{\mathbb{U}}_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est alors une filtration décroissante exhaustive de $\overline{\mathbb{U}}$ et, par hypothèse de lissité, il existe un entier $N \in \mathbb{Z}$ tel que f soit fixe sous l'action de $\overline{\mathbb{U}}_N$. Remarquons maintenant que la relation (4.8) assure par transposition que l'on a :

$$\forall\ k \in \mathbb{Z},\ t_0^k \overline{\mathbb{U}}_N t_0^{-k} = \overline{\mathbb{U}}_{N+k}\ . \tag{4.22}$$

Ceci nous permet de montrer que $\overline{\mathbb{U}}$ agit trivialement sur f comme suit : si u est un élément de $\overline{\mathbb{U}}$, il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que u appartienne à $\overline{\mathbb{U}}_m = t_0^{(m-N)} \overline{\mathbb{U}}_N t_0^{-(m-N)}$. En l'écrivant sous la forme $u = t_0^{(m-N)} v t_0^{-(m-N)}$ avec $v \in \overline{\mathbb{U}}_N$, on voit que l'on a alors

$$u \cdot f = \chi(t_0^{-(m-N)})(t_0^{(m-N)} v) \cdot f = \chi(t_0^{-(m-N)})(t_0^{(m-N)} \cdot f) = f\ ,$$

la seconde égalité provenant de la définition de l'entier N. On a ainsi prouvé que l'action d'un élément $u \in \overline{\mathbb{U}}$ arbitrairement choisi fixe f, soit donc que $\overline{\mathbb{U}}$ agit trivialement sur f.

3ème étape : Conclusion :

Nous allons terminer en montrant que l'action de ϕ sur f est égale à la multiplication par $\dfrac{f(\phi)}{f(I_3)}$, ce scalaire étant bien défini et non nul grâce à la première étape. Si x est un élément de $\mathbb{G}$, la décomposition de Bruhat raffinée assure qu'il vérifie l'un des deux cas suivants.

– Ou bien x est un élément de $\mathbb{B}$, auquel cas l'on a

$$(\phi \cdot f)(x) = f(x\phi) = \chi(x)f(\phi) = \frac{f(\phi)}{f(I_3)}\chi(x)f(I_3) = \frac{f(\phi)}{f(I_3)}f(x)\ .$$

Remarquons ici que, puisque $\phi^2 = I_3$, le calcul ci-dessus implique que l'on doit avoir $\left(\dfrac{f(\phi)}{f(I_3)}\right)^2 = 1$, ce qui se réécrit

$$\frac{f(\phi)}{f(I_3)} = \frac{f(I_3)}{f(\phi)}\ . \tag{4.23}$$

– Ou bien x est un élément de $\mathbb{B}\phi\mathbb{U}$, auquel cas il admet une décomposition de la forme $x = b\phi u$ avec $b \in \mathbb{B}$ et $u \in \mathbb{U}$. La seconde étape assure alors en particulier que l'élément $\phi u \phi \in \overline{\mathbb{U}}$ fixe la fonction f, de sorte que l'on a

$$(\phi \cdot f)(x) = f(b\phi u\phi) = ((\phi u \phi) \cdot f)(b) = f(b)\ .$$

Comme les relations (4.21) et (4.23) impliquent que l'on a

$$\frac{f(\phi)}{f(I_3)}f(x) = \frac{f(I_3)}{f(\phi)}\chi(b)f(\phi) = \chi(b)f(I_3) = f(b)\ ,$$

on en déduit que l'on a encore $(\phi \cdot f)(x) = \dfrac{f(\phi)}{f(I_3)}f(x)$ dans ce cas.

Nous avons donc finalement prouvé que $\phi \cdot f = \dfrac{f(\phi)}{f(I_3)}f$, ce qui termine la démonstration. □

Remarque 4.4.8. La preuve du Théorème 4.4.7 démontre notamment le fait suivant :
Le caractère χ est un sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-module de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ si et seulement si χ s'étend en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$.

4.4.2 Structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module

Nous allons déduire des résultats précédents une preuve du second point du Théorème 4.4.1, qui décrit la structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$.

Supposons tout d'abord que $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ soit un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module réductible. Le Corollaire 4.4.5 assure alors que c'est un objet de longueur 2 admettant un sous-quotient de dimension 1 dont la restriction à $\mathbb{B}$ doit être égale à χ. On déduit donc de la Proposition 4.3.1 l'existence d'un caractère lisse $\eta : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ tel que χ soit la restriction à $\mathbb{B}$ de $\eta \circ \det$.

Réciproquement, si l'on suppose que χ est la restriction à $\mathbb{B}$ d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$ que l'on écrit sous la forme $\eta \circ \det$, on a alors $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi) = \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta \circ \det) \simeq (\eta \circ \det) \otimes \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})$, ce qui permet de se limiter à l'étude du cas $\eta = \mathbf{1}$. La fonction constante égale à 1 engendre alors un sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})$ isomorphe au caractère trivial, ce qui prouve grâce au Corollaire 4.4.5 que le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})$ est de longueur 2 avec le caractère trivial $\mathbf{1}$ comme sous-objet et le quotient irréductible $St_{\mathbb{G}} := \dfrac{\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$ comme quotient. C'est cependant un module indécomposable : si ce n'était pas le cas, la Remarque 4.4.6 impliquerait que le sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-module $\mathcal{V}$ introduit dans la Section 4.4.1, qui n'est autre que le sous-espace des éléments de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})$ à support dans $\mathbb{B}\phi\mathbb{U}$, est stable sous l'action de $\mathbb{G}$. Ceci est faux car si $\mathbb{U}_0$ est un sous-groupe ouvert compact de $\mathbb{U}$, l'image de la fonction indicatrice de $\mathbb{B}\phi\mathbb{U}_0$ sous l'action de l'élément ϕ est égale à la fonction indicatrice de $\mathbb{B}\overline{\mathbb{U}}_0$ avec $\overline{\mathbb{U}}_0 := \phi\mathbb{U}_0\phi$ sous-groupe de $\overline{\mathbb{U}}$, et n'est donc pas un élément de $\mathcal{V}$.
Nous avons ainsi démontré l'énoncé suivant, qui fournit le second point du Théorème 4.4.1.

Proposition 4.4.9. *Soit $\chi : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse.*

1. $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ *est une représentation irréductible de $\mathbb{G}$ si et seulement si χ n'est pas de la forme $\eta \circ \det$ pour un caractère lisse $\eta : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$.*
2. *Pour tout caractère lisse $\eta : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta \circ \det)$ est indécomposable de longueur 2. Il admet le caractère $\eta \circ \det$ comme sous-objet et la représentation de la série spéciale $St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det)$ comme quotient, où $St_{\mathbb{G}} := \dfrac{\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$ est la représentation de Steinberg de $\mathbb{G}$.*

4.4.3 Etude des entrelacements

Grâce aux résultats démontrés jusqu'alors, on sait que toute représentation lisse irréductible de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui est sous-quotient d'une représentation de la forme $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$, où $\chi : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ est un caractère lisse, appartient à l'une des trois familles suivantes :

- les $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de $\mathbb{G}$;
- les représentations *de la série principale* : ce sont les représentations de la forme $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ avec $\chi : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse ne se factorisant pas par le déterminant ;
- les représentations *de la série spéciale* : ce sont les représentations obtenues en tordant la représentation de Steinberg $St_{\mathbb{G}}$ par les caractères $\chi \circ \det$ avec χ un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $E^{(1)}$.

Démontrons tout d'abord qu'il n'existe pas d'isomorphisme entre représentations provenant de familles distinctes. Pour cela, on commence par remarquer que les seuls sous-quotients de dimension finie qui apparaissent dans la liste sont les caractères de $\mathbb{G}$, qui sont deux à deux non isomorphes, et ne peuvent pas être isomorphes aux représentations de la série spéciale ou de la série principale qui sont quant à elles de dimension infinie. Nous allons maintenant démontrer qu'il n'existe pas d'isomorphisme entre une représentation paraboliquement induite et une représentation de la série spéciale.

Proposition 4.4.10. *Il n'existe pas d'isomorphisme entre représentations de la série spéciale et représentations paraboliquement induites à partir d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{B}$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules de la forme

$$St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det) \simeq \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi) \ .$$

Ceci implique tout d'abord l'irréductibilité de la représentation $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ puisque la représentation $St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det)$ est irréductible. Par ailleurs, la définition des représentations de la série spéciale permet de déduire de cet isomorphisme l'existence d'un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules

$$\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta \circ \det) \twoheadrightarrow \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$$

qui induit, par réciprocité lisse de Frobenius, un morphisme non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-modules de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta \circ \det)$ sur χ. La Remarque 4.4.6 assure alors que χ est la restriction à $\mathbb{B}$ du caractère $\eta \circ \det$, ce qui montre qu'il se factorise à travers l'application déterminant et contredit l'irréductibilité de la représentation $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ d'après le premier point de la Proposition 4.4.9. □

Remarque 4.4.11. Une démonstration plus rapide de ce résultat repose sur l'étude des espaces de vecteurs $\mathbb{I}(1)$-invariants et sera donnée dans la section suivante (voir Remarque 4.4.17).

Ceci suffit à démontrer que les trois familles apparaissant dans l'énoncé du troisième point du Théorème 4.4.1 sont deux à deux disjointes. Nous allons maintenant nous pencher sur les entrelacements pouvant exister entre deux représentations non supercuspidales issues de la même famille. On traite tout d'abord le cas des représentations de la série principale (et, plus généralement, de deux représentations obtenues par induction parabolique).

Proposition 4.4.12. *1. Il n'existe pas d'isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules entre représentations paraboliquement induites à partir de $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de $\mathbb{B}$ distincts :*

$$\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta) \simeq \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi) \iff \eta = \chi \ .$$

2. L'espace d'entrelacements $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]}(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta))$ est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules entre $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ et $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$. Par réciprocité lisse de Frobenius (rappelée dans la Proposition 2.2.1), on a alors

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}}(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi), \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi), \eta),$$

ce qui implique que η est un sous-quotient du $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{B}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$. D'après la Remarque 4.4.6, ceci n'est possible que si $\eta = \chi$, ce qui termine la démonstration car l'assertion réciproque est immédiate et car le second point découle directement de la Remarque 4.4.6. □

Pour terminer, il nous faut étudier la possibilité d'un entrelacement entre deux représentations de la série spéciale. Pour ce faire, nous avons besoin de plus de renseignements concernant ces représentations, notamment au sujet de leurs espaces de vecteurs invariants sous l'action du pro-p-Iwahori $\mathbb{I}(1)$.

4.4.4 Espaces de vecteurs invariants sous $\mathbb{I}(1)$

Dans toute cette partie, χ désigne un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{B}$ fixé tandis que η désigne un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $E^{(1)}$ qui définit le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse $\eta \circ \det$ de $\mathbb{G}$.

Dimension des $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels

Nous commençons par calculer les dimensions des espaces de vecteurs invariants sous l'action de $\mathbb{I}(1)$ pour les sous-quotients de représentations paraboliquement induites. Pour cela, nous remarquons tout d'abord que la décomposition $\mathbb{G} = \mathbb{B}\mathbb{I}(1) \sqcup \mathbb{B}\phi\mathbb{I}(1)$ rappelée dans le Lemme 4.2.15 implique que tout élément $\mathbb{I}(1)$-invariant de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ est entièrement déterminé par ses valeurs en I_3 et en ϕ, celles-ci pouvant être arbitrairement choisies. On en déduit donc que l'espace des vecteurs $\mathbb{I}(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ est de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et qu'une base en est donnée par les fonctions $\mathbb{I}(1)$-invariantes $f_{1,\chi}$, $f_{2,\chi}$ caractérisées par le système suivant :

$$\begin{cases} f_{1,\chi}(I_3) = 1 \ ; & f_{2,\chi}(I_3) = 0 \ ; \\ f_{1,\chi}(\phi) = 0 \ ; & f_{2,\chi}(\phi) = 1 \ . \end{cases}$$

Un calcul direct [19] reposant sur la décomposition $\mathbb{G} = \mathbb{B}\mathbb{I}(1) \sqcup \mathbb{B}\phi\mathbb{I}(1)$ du Lemme 4.2.15 permet alors de démontrer le résultat suivant.

Théorème 4.4.13. *1. Le sous-groupe d'Iwahori $\mathbb{I}$ agit respectivement sur $f_{1,\chi}$ et $f_{2,\chi}$ par les $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses χ^+ et χ^- de $\mathbb{I}$ obtenus par inflation de la restriction à $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$ des caractères χ et $\chi^\phi = [g \mapsto \chi(\phi g \phi)]$.*

2. Le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ admet au plus deux composantes $\mathbb{I}$-isotypiques non nulles, à savoir celles associées à χ^+ et à χ^-.
En particulier, on a $\left(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)\right)^{\mathbb{I}} = \left(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)\right)^{\mathbb{I}(1)}$ si et seulement si χ est un caractère non ramifié (i.e. de restriction triviale au sous-groupe $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$) de $\mathbb{B}$.

Remarque 4.4.14. La Proposition 4.3.1 assure que le seul $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse non ramifié de $\mathbb{G}$ est le caractère trivial.

On s'intéresse à présent aux représentations de la série spéciale en prouvant tout d'abord le résultat suivant.

Théorème 4.4.15. *On dispose de la suite exacte courte suivante de $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels :*

$$1 \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p 1_{\mathbb{G}} \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p f_1 \oplus \overline{\mathbb{F}}_p f_2 \longrightarrow (St_{\mathbb{G}})^{\mathbb{I}(1)} \longrightarrow 1 \ ,$$

où l'on a posé $f_i := f_{i,\mathbf{1}}$ pour $i \in \{1, 2\}$.
En particulier, l'espace des vecteurs $\mathbb{I}(1)$-invariants de la représentation de Steinberg est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

19. Analogue à celui mené dans la Section 3.4.3 pour les représentations non supercuspidales de $SL_2(F)$, et formulé de manière générale pour les groupes quasi-déployés de rang 1 dans la Section 5.5.1 (Lemme 5.5.2).

Démonstration. Par définition de la représentation $St_{\mathbb{G}}$, on dispose de la suite exacte courte suivante de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules :

$$1 \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1}) \longrightarrow St_{\mathbb{G}} \longrightarrow 1 \ . \tag{4.24}$$

En lui appliquant le foncteur des $\mathbb{I}(1)$-invariants, qui est exact à gauche, on obtient la suite exacte suivante de $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels :

$$1 \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p 1_{\mathbb{G}} \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p f_1 \oplus \overline{\mathbb{F}}_p f_2 \longrightarrow (St_{\mathbb{G}})^{\mathbb{I}(1)} \tag{4.25}$$

où $1_{\mathbb{G}}$ désigne la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{G}$ et où l'on a noté $f_i := f_{i,\mathbf{1}}$ pour tout $i \in \{1, 2\}$. Il nous suffit donc de démontrer la surjectivité de la flèche de droite dans la suite exacte (4.25) pour obtenir l'énoncé voulu.
Soient f un élément de $(St_{\mathbb{G}})^{\mathbb{I}(1)}$ et $\tilde{f} \in \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})$ un relèvement de f. Nous voulons prouver que $\tilde{f}$ est invariant sous l'action de $\mathbb{I}(1)$. On commence par traduire ce que signifie pour $\tilde{f}$ l'hypothèse de $\mathbb{I}(1)$-invariance de f, ce qui fournit l'assertion suivante : pour tout élément $i \in \mathbb{I}(1)$, il existe $\lambda(i) \in \overline{\mathbb{F}}_p$ tel que $i \cdot \tilde{f} - \tilde{f} = \lambda(i)1_{\mathbb{G}}$. Pour conclure, il nous suffit donc de montrer que la fonction $\lambda : \mathbb{I}(1) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ est identiquement nulle.
Pour cela, on commence par rappeler que l'on dispose des deux identités suivantes :

$$\forall\ b \in \mathbb{B},\ \forall\ x \in \mathbb{I}(1),\ \forall\ i \in \mathbb{I}(1),\ \left\{ \begin{array}{l} (i \cdot \tilde{f} - \tilde{f})(bx) = \tilde{f}(xi) - \tilde{f}(x)\ ; \\ (i \cdot \tilde{f} - \tilde{f})(b\phi x) = \tilde{f}(\phi x i) - \tilde{f}(\phi x)\ . \end{array} \right. \tag{4.26}$$

On remarque ensuite que λ est un homomorphisme de groupes puisque l'on a :

$$\begin{array}{rcl} \forall\ u, v \in \mathbb{I}(1),\ \lambda(uv)1_{\mathbb{G}} & = & u \cdot (v \cdot \tilde{f}) - u \cdot \tilde{f} + u \cdot \tilde{f} - \tilde{f} \\ & = & u \cdot (\tilde{f} + \lambda(v)1_{\mathbb{G}}) - u \cdot \tilde{f} + \lambda(u)1_{\mathbb{G}} \\ & = & (\lambda(u) + \lambda(v))1_{\mathbb{G}}\ , \end{array}$$

ce qui implique que $\lambda(uv) = \lambda(u) + \lambda(v)$.
Comme $\mathbb{I}(1)$ est engendré par $\mathbb{U}(\mathcal{O}_E)$, $\overline{\mathbb{U}}(\mathfrak{p}_E)$ et $\mathbb{T}(1 + \mathfrak{p}_E)$, on peut terminer la démonstration comme suit : la première relation de (4.26) assure que pour tout élément u de $\mathbb{U}(\mathcal{O}_E)$ ou de $\mathbb{T}(1+\mathfrak{p}_E)$, on a $\lambda(u) = 0$. Par ailleurs, si $u = \phi v \phi \in \overline{\mathbb{U}}(\mathfrak{p}_E)$ avec $v \in \mathbb{U}(\mathfrak{p}_E)$, la seconde relation de (4.26) assure que l'on a $\lambda(u) = \lambda(\phi v \phi) = \tilde{f}(v\phi) - \tilde{f}(\phi) = 0$ car $v \in \mathbb{B}$.
Le morphisme λ étant nul sur un système générateur de $\mathbb{I}(1)$, il est identiquement nul et $\tilde{f}$ est bien un élément $\mathbb{I}(1)$-invariant de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})$. ☐

Remarque 4.4.16. Puisque $\mathbb{I}$ agit trivialement sur un générateur de $St_{\mathbb{G}}^{\mathbb{I}(1)}$, l'espace $St_{\mathbb{G}}^{\mathbb{I}}$ des $\mathbb{I}$-invariants de la représentation de Steinberg est aussi de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, et est donc égal à l'espace des vecteurs $\mathbb{I}(1)$-invariants de $St_{\mathbb{G}}$.

Remarque 4.4.17. Comme nous l'avions annoncé dans la Section 4.4.3, nous pouvons obtenir une démonstration bien plus rapide de la Proposition 4.4.10 à partir des résultats que nous venons de démontrer. En effet, deux représentations isomorphes de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ doivent avoir des espaces de vecteurs $\mathbb{I}(1)$-invariants de même dimension. Comme les représentations de la forme $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ ont un espace de vecteurs $\mathbb{I}(1)$-invariants qui est de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, elles ne peuvent être isomorphes aux représentations de la série spéciale, dont les espaces de vecteurs $\mathbb{I}(1)$-invariants sont de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat suivant, qui assure que les représentations de la série spéciale sont deux à deux non isomorphes.

Théorème 4.4.18. *Si les* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$*-modules* $St_{\mathbb{G}}$ *et* $St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det)$ *sont isomorphes, alors* $\eta \circ \det$ *est le caractère trivial.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules entre $St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det)$ et $St_{\mathbb{G}}$. Par composition avec la surjection canonique $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta \circ \det) \twoheadrightarrow St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det)$, on obtient un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta \circ \det) \twoheadrightarrow St_{\mathbb{G}}$ dont le noyau est égal au sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\eta \circ \det$. Grâce au Théorème 4.4.15, la restriction aux espaces de vecteurs $\mathbb{I}(1)$-invariants définit alors un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{I}]$-modules

$$\Psi : \overline{\mathbb{F}}_p f_{1,\eta} \oplus \overline{\mathbb{F}}_p f_{2,\eta} \twoheadrightarrow \mathbf{1}_{\mathbb{I}},$$

où $\mathbf{1}_{\mathbb{I}}$ désigne le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère trivial de $\mathbb{I}$, dont le noyau est égal à $(\eta \circ \det)^{\mathbb{I}(1)} = \eta \circ \det$ et qui vérifie de plus :

$$\forall\, i \in \mathbb{I}, \begin{cases} \Psi(i \cdot f_{1,\eta}) = i \cdot \Psi(f_{1,\eta}) \ , \\ \Psi(i \cdot f_{2,\eta}) = i \cdot \Psi(f_{2,\eta}) \ . \end{cases}$$

Grâce au Théorème 4.4.13 et à la Remarque 4.4.16, ceci équivaut à dire que l'on a :

$$\forall\, i \in \mathbb{I}, \begin{cases} (\eta \circ \det)^{+}(i)\Psi(f_{1,\eta}) = \Psi(f_{1,\eta}) \ , \\ (\eta \circ \det)^{-}(i)\Psi(f_{2,\eta}) = \Psi(f_{2,\eta}) \ . \end{cases}$$

Comme Ψ est non nul, l'un des deux vecteurs $\Psi(f_{1,\eta})$ ou $\Psi(f_{2,\eta})$ doit être non nul, ce qui implique déjà que l'on doit avoir $(\eta \circ \det)^{+} = \mathbf{1}$ ou $(\eta \circ \det)^{-} = \mathbf{1}$. Remarquons maintenant qu'un générateur de $\eta \circ \det = (\eta \circ \det)^{I(1)}$ dans $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta \circ \det)$ est nécessairement de support égal à $\mathbb{G}$, et donc de la forme $\lambda f_{1,\eta} + \mu f_{2,\eta}$ avec λ, μ deux scalaires non nuls. Par suite, on a $\Psi(f_{1,\eta}) = (-\lambda^{-1}\mu)\Psi(f_{2,\eta})$, ce qui implique que l'on doit avoir $(\eta \circ \det)^{+} = (\eta \circ \det)^{-} = \mathbf{1}$. Ces égalités signifient exactement que le caractère $\eta \circ \det$ est trivial sur $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^{\times})$, et qu'il est donc trivial sur $\mathbb{G}$ puisque l'image du déterminant est contenue dans $E^{(1)}$. □

Remarque 4.4.19. Les résultats qui précèdent assurent en particulier que toute représentation lisse irréductible non supercuspidale de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est admissible.

Génération des représentations par leurs $\mathbb{I}(1)$-invariants

L'application du Lemme 2.1.9 pour le pro-p-groupe $\mathbb{I}(1)$ assure que toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible non nulle de $\mathbb{G}$ est engendrée par l'espace de ses vecteurs $\mathbb{I}(1)$-invariants. Nous allons démontrer qu'il en va de même pour les représentations de la forme $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta \circ \det)$. Quitte à tordre par un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$, on peut se limiter à l'étude du cas où η est le caractère trivial. On dispose alors du résultat suivant.

Proposition 4.4.20. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})$ est engendré par le sous-espace vectoriel $\left(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})\right)^{\mathbb{I}(1)}$ de ses vecteurs $\mathbb{I}(1)$-invariants.*

Démonstration. Soit $\tilde{f}$ un élément de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})$. Notons f son image dans la représentation quotient $St_{\mathbb{G}}$. Comme la représentation de Steinberg est irréductible, elle est engendrée par le sous-espace non nul $St_{\mathbb{G}}^{\mathbb{I}(1)}$, ce qui permet d'écrire f comme une somme finie de la forme $\sum_{j \in J} g_j \cdot \varphi_j$ avec $\varphi_j \in St_{\mathbb{G}}^{\mathbb{I}(1)}$ et $g_j \in \mathbb{G}$ pour tout indice $j \in J$. La suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow \left(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})\right)^{\mathbb{I}(1)} \longrightarrow St_{\mathbb{G}}^{\mathbb{I}(1)} \longrightarrow 1$$

dont on a prouvé l'existence lors de la preuve du Théorème 4.4.15 assure que chaque φ_j possède un relèvement Φ_j dans $\left(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})\right)^{\mathbb{I}(1)}$. La différence $\tilde{f} - \sum_{j \in J} g_j \cdot \Phi_j$ est alors contenue dans le noyau de la projection $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1}) \twoheadrightarrow St_{\mathbb{G}}$, qui est par définition égal au caractère trivial et dont l'espace de représentation dans $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})$ est celui des fonctions constantes sur $\mathbb{G}$. On obtient ainsi l'existence d'une fonction constante ℓ telle que l'on ait $\tilde{f} - \sum_{j\in J} g_j \cdot \Phi_j = \ell$, ce qui prouve que $\tilde{f} = \ell + \sum_{j\in J} g_j \cdot \Phi_j$ appartient au $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module engendré par les éléments $\mathbb{I}(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})$ et termine la démonstration. $\square$

4.5 Classification des représentations lisses irréductibles admissibles

On fixe désormais l'un des deux sous-groupes compacts maximaux $\mathbb{K}_0$ ou $\mathbb{K}_1$, que l'on notera $\mathbb{K}$ dans la suite et dont $\mathbb{K}(1)$ désignera le pro-p-radical. On rappelle que l'extension E/F est supposée non ramifiée, ce qui nous permet de choisir la même uniformisante pour E et F, et assure alors en particulier que t_0 est égal à son conjugué.

Cette dernière section est organisée comme suit : nous commençons par prouver que pour toute représentation lisse irréductible V de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V) := \mathcal{H}(\mathbb{G}, \mathbb{K}, V)$ est naturellement munie d'une structure d'algèbre de polynômes en un opérateur T_V à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$. Ces opérateurs T_V sont à la base de la notion de *paramétrisation possible* par rapport à $\mathbb{K}$ d'une représentation lisse irréductible admissible de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et permettent notamment de conjecturer une nouvelle description des représentations non supercuspidales étudiées dans la section précédente. Nous en déduisons une autre caractérisation des représentations supercuspidales (via la notion de représentation *supersingulière*) ainsi qu'une classification exhaustive des représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ reposant sur leurs paramétrisations possibles.

Remarque 4.5.1. Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction de ce chapitre, nous pensons que les arguments développés dans cette section peuvent être directement adaptés au cas où $\mathbb{G}$ est remplacé par le groupe des F-points d'un groupe réductif connexe quasi-déployé de rang 1 sur F, et qu'ils restent encore valables lorsque l'on supprime l'hypothèse de quasi-déploiement.

4.5.1 Structure des algèbres de Hecke sphériques

On reprend les notations de la Section 2.3. D'après la Proposition 2.3.2, l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V) := \mathrm{End}_{\mathbb{G}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V))$ est isomorphe à l'algèbre de convolution $\mathbb{H}_{\mathbb{G}}(V)$ des fonctions $f : \mathbb{G} \to \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(V)$ à support compact qui vérifient la condition suivante :

$$\forall\ k_1, k_2 \in \mathbb{K},\ \forall\ g \in \mathbb{G},\ f(k_1 g k_2) = k_1 f(g) k_2\ . \tag{4.27}$$

Etant donné que $\mathbb{K}\cap\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$ et que $V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}$ est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, on obtient de même que l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{\mathbb{T}}(V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}) := \mathrm{End}_{\mathbb{T}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)}^{\mathbb{T}}(V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}))$ est isomorphe à l'algèbre de convolution $\mathbb{H}_{\mathbb{T}}(V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$ des fonctions $\psi : \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ à support compact qui vérifient [20] :

$$\forall\ t \in \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times),\ \forall\ \tau \in \mathbb{T},\ \psi(t\tau) = t\psi(\tau)\ . \tag{4.28}$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on note $\varphi_n \in \mathbb{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times), V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$ la fonction de support égal à $t_0^n\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times) = \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)t_0^n$ qui envoie t_0^n sur 1 ; la famille $\{\varphi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est alors une base sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de l'espace vectoriel $\mathbb{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times), V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$. On désigne par τ_n l'élément de $\mathcal{H}_{\mathbb{T}}(V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$ correspondant à φ_n par l'isomorphisme de la Proposition 2.3.2 et l'on définit aussi, pour tout entier $n \geq 0$,

20. Qui est bien l'analogue de la condition (4.27) puisque $\mathbb{T}$ est un groupe abélien.

l'élément $\phi_n \in \mathbb{H}(\mathbb{G},\mathbb{K},V)$ comme étant la fonction de support égal à $\mathbb{K}t_0^n\mathbb{K}$ dont la valeur en t_0^n est donnée par la composée $V \twoheadrightarrow V_{\overline{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}} \simeq V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}} \hookrightarrow V$, où $V_{\overline{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}}$ désigne l'espace des vecteurs co-invariants de V pour le sous-groupe opposé à $\mathbb{K}\cap\mathbb{U}$ relativement à $\mathbb{K}\cap\mathbb{T}$, et où l'isomorphisme $V_{\overline{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}} \simeq V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}$ est l'inverse de l'isomorphisme induit par la projection canonique de V sur $V_{\overline{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}}$ [Cab, Sections 3.2 et 3.5].

Cette première sous-section a pour but de démontrer le théorème suivant, qui fournit une description de l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$.

Théorème 4.5.2. *Soient $\mathbb{K}$ un sous-groupe compact maximal de $\mathbb{G}$ et V un poids de Serre pour $\mathbb{K}$. L'application $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V : \mathbb{H}(\mathbb{G},\mathbb{K},V) \to \mathbb{H}(\mathbb{T},\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times),V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$ définie par :*

$$\forall\ f \in \mathbb{H}(\mathbb{G},\mathbb{K},V),\ \ \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f) := \left[t \mapsto \sum_{u\in\mathbb{U}/(\mathbb{U}\cap\mathbb{K})} f(tu)|_{V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}} \right] \tag{4.29}$$

est un homomorphisme d'algèbres injectif dont l'image est égale à l'ensemble des éléments de $\mathbb{H}(\mathbb{T},\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times),V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$ à support dans $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)t_0^{\mathbb{N}}$.
En particulier, l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$ est une algèbre de polynômes à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ en l'opérateur de Hecke T_V associé par réciprocité de Frobenius compacte [21] *à la fonction ϕ_V de $\mathbb{H}(\mathbb{G},\mathbb{K},V)$ ayant φ_1 pour image par $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$ (i.e. telle que $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(\phi_V)=\varphi_1$).*

Remarque 4.5.3. Si $\Psi_{\mathbb{G}} : \mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V) \to \mathbb{H}(\mathbb{G},\mathbb{K},V)$ et $\Psi_{\mathbb{T}} : \mathcal{H}_{\mathbb{T}}(V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}) \to \mathbb{H}(\mathbb{T},\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times),V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$ désignent les isomorphismes d'algèbres fournis par la Proposition 2.3.2, on dispose alors d'un isomorphisme de Satake $\mathcal{S}_V : \mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V) \to \mathcal{H}_{\mathbb{T}}(V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$ défini par $\mathcal{S}_V := \Psi_{\mathbb{T}}^{-1}\circ\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V\circ\Psi_{\mathbb{G}}$. C'est un homomorphisme injectif de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres qui vérifie en particulier $\mathcal{S}_V(T_V)=\tau_1$, et permet donc d'identifier l'algèbre $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$ à la sous-algèbre de $\mathcal{H}_{\mathbb{T}}(V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$ formée des polynômes en τ_1 à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$. Selon le contexte, on utilisera l'un ou l'autre de ces deux isomorphismes de Satake ($\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$ ou $\mathcal{S}_V$).

Remarque 4.5.4. Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{K}_0$ et car $F=0$, l'énoncé du Théorème 4.5.2 peut aussi être obtenu comme une application directe des travaux de Herzig [Her1, Theorem 1.2]. Ceux-ci ont depuis été généralisés par Henniart et Vignéras au cas où $\mathbb{K}$ est un sous-groupe parahorique spécial de $\mathcal{G}(F)$ avec $\mathcal{G}$ un groupe réductif connexe défini sur F [HV, Theorem 1.7].

La démonstration du Théorème 4.5.2 se décompose en trois étapes inspirées de la méthode développée par Herzig : on commence par vérifier que $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$ est une application bien définie et que c'est un homomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres. On détermine ensuite la forme des éléments qui sont images par $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$ des fonctions de $\mathbb{H}(\mathbb{G},\mathbb{K},V)$ à support dans une seule double classe modulo $\mathbb{K}$, ce qui nous permet d'obtenir l'injectivité de $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$. Un peu plus de travail nous permet enfin de montrer que l'image du morphisme de Satake est égale au $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base $\{\varphi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$, ce qui suffit à conclure car l'on vérifie facilement [22] que tout élément de cet espace est un polynôme en φ_1 à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Etape 1 : L'application $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$ est un homomorphisme d'algèbres bien défini

On fixe désormais une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible V du sous-groupe compact maximal $\mathbb{K}$. Nous rappelons tout d'abord un résultat simple mais cependant très utile concernant la décomposition du sous-groupe $\mathbb{B}\cap\mathbb{K}$.

Lemme 4.5.5. *Le groupe $\mathbb{B}\cap\mathbb{K}$ admet les factorisations suivantes :*

$$\mathbb{B}\cap\mathbb{K} = \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)(\mathbb{U}\cap\mathbb{K}) = (\mathbb{U}\cap\mathbb{K})\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)\ .$$

21. i.e. par l'isomorphisme d'algèbres de la Proposition 2.3.2.
22. Comme nous le verrons dans le Lemme 4.5.12.

Démonstration. On sait déjà que $\mathbb{B} = \mathbb{T}\mathbb{U} = \mathbb{U}\mathbb{T}$. Il suffit maintenant de remarquer que la description explicite de $\mathbb{K}$ (rappelée dans la Section 7.2) assure que si $b = tu$ appartient aussi à $\mathbb{K}$, alors ses coefficients diagonaux doivent appartenir à $\mathcal{O}_E$, ce qui implique que t appartient à $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$, et par suite que $u = t^{-1}b$ appartient à la fois à $\mathbb{K}$ et à $\mathbb{U}$, i.e. à $\mathbb{K} \cap \mathbb{U}$. Ceci prouve que $\mathbb{B}$ est contenu dans $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)(\mathbb{K} \cap \mathbb{U})$ et termine la démonstration car l'inclusion réciproque est immédiate tandis que l'autre égalité se démontre par le même argument. $\square$

La première étape de la démonstration du Théorème 4.5.2 se résume alors au résultat suivant.

Lemme 4.5.6. *L'application $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$ donnée par la formule* (4.29) *est un homomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres bien défini.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{G} \to \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(V)$ un élément de $\mathbb{H}(\mathbb{G}, \mathbb{K}, V)$. Etant donné que $\mathbb{K}$ est un sous-groupe ouvert compact de $\mathbb{G}$ et que f est à support compact dans $\mathbb{G}$, l'image du support de f dans le quotient $\mathbb{G}/\mathbb{K}$ est un ensemble fini. Par décomposition d'Iwasawa, ce quotient est isomorphe au quotient $\mathbb{B}/(\mathbb{B} \cap \mathbb{K})$. Le Lemme 4.5.5 implique donc que l'image du support de f dans le quotient $\mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$ est un ensemble fini et que pour tout élément $t \in \mathbb{T}$, la somme définissant $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)(t)$ contient un nombre fini de termes non nuls. Par ailleurs, le fait que $\mathbb{T}$ normalise $\mathbb{U}$ assure que l'application $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)$ est bien à valeurs dans $V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}$, ce qui achève de démontrer que $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$ est bien définie.
La $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéarité de l'application $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$ est claire sur la formule (4.29). Il nous reste donc à vérifier que notre application est compatible aux produits de convolution, ce qui repose sur le même argument que celui utilisé par Herzig [Her1, Step 2 page 9] et que nous rappelons ci-dessous : soient f_1, f_2 deux éléments de $\mathbb{H}(\mathbb{G}, \mathbb{K}, V)$ et soit $t \in \mathbb{T}$. Par définition du produit de convolution $f_1 \star f_2$ dans $\mathbb{H}(\mathbb{G}, \mathbb{K}, V)$, on sait que

$$\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f_1 \star f_2)(t) = \sum_{u \in \mathbb{U}/(\mathbb{U}\cap\mathbb{K})} \sum_{g \in \mathbb{G}/\mathbb{K}} f_1(tug) f_2(g^{-1}) \ .$$

La décomposition d'Iwasawa relative à $\mathbb{K}$ et le Lemme 4.5.5 permettent alors d'écrire que

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f_1 \star f_2)(t) &= \sum_{u \in \mathbb{U}/(\mathbb{K}\cap\mathbb{U})} \sum_{g \in \mathbb{B}/(\mathbb{K}\cap\mathbb{B})} f_1(tug) f_2(g^{-1}) \\
&= \sum_{u \in \mathbb{U}/(\mathbb{K}\cap\mathbb{U})} \sum_{\tau \in \mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} \sum_{v \in \mathbb{U}/(\mathbb{U}\cap\mathbb{K})} f_1(tu\tau v) f_2(v^{-1}\tau^{-1}) \\
&= \sum_{\tau \in \mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} \sum_{u \in \mathbb{U}/(\mathbb{K}\cap\mathbb{U})} \sum_{v \in \mathbb{U}/(\mathbb{K}\cap\mathbb{U})} f_1(t\tau uv) f_2((uv)^{-1}\tau^{-1}u^{-1}) \\
&= \sum_{\tau \in \mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} \sum_{u \in \mathbb{U}/(\mathbb{K}\cap\mathbb{U})} \sum_{\nu \in \mathbb{U}/(\mathbb{K}\cap\mathbb{U})} f_1(t\tau\nu) f_2(\nu^{-1}\tau^{-1}u) \\
&= \sum_{\tau \in \mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} \sum_{v \in \mathbb{U}/(\mathbb{K}\cap\mathbb{U})} \sum_{u \in \mathbb{U}/(\mathbb{K}\cap\mathbb{U})} f_1(t\tau v) f_2(\tau^{-1}u) \\
&= \sum_{\tau \in \mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} \sum_{v \in \mathbb{U}/(\mathbb{K}\cap\mathbb{U})} f_1(t\tau v) \left(\sum_{u \in \mathbb{U}/(\mathbb{K}\cap\mathbb{U})} f_2(\tau^{-1}u) \right) \\
&= \sum_{\tau \in \mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} \left(\sum_{v \in \mathbb{U}/(\mathbb{U}\cap\mathbb{K})} f_1(t\tau v) \right) \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f_2)(\tau^{-1}) \\
&= \sum_{\tau \in \mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f_1)(t\tau) \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f_2)(\tau^{-1}) \\
&= \left(\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f_1) \star \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f_2) \right)(t) \ .
\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f_1 \star f_2) = \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f_1) \star \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f_2)$, ce qui termine la démonstration. $\square$

Etape 2 : Preuve de l'injectivité de $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$

Par décomposition de Cartan, tout élément de $\mathbb{H}(\mathbb{G},\mathbb{K},V)$ est à support dans un nombre fini de doubles classes de la forme $\mathbb{K}t_0^n\mathbb{K}$ avec $n \in \mathbb{N}$. Nous allons tout d'abord déterminer l'allure qu'admet l'image d'un élément à support dans une seule double classe modulo $\mathbb{K}$.

Lemme 4.5.7. *Soit $f \in \mathbb{H}(\mathbb{G},\mathbb{K},V)$ à support dans la double classe $\mathbb{K}t_0^n\mathbb{K}$ avec $n \in \mathbb{N}$. Il existe alors une famille de scalaires $(\lambda_r)_{-n\leq r\leq n-1} \in \overline{\mathbb{F}}_p^r$ tels que*

$$\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f) = f(t_0^n)(I_3)\varphi_n + \sum_{r=-n}^{n-1} \lambda_r\varphi_r \ . \tag{4.30}$$

Démonstration. Soient $t \in \mathbb{T}$ un élément fixé et $m \in \mathbb{Z}$ l'unique entier tel que t appartienne à $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)t_0^m$. Par définition du morphisme de Satake $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$, on sait que

$$\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)(t) = \sum_{u\in\mathbb{U}/(\mathbb{U}\cap\mathbb{K})} f(tu)|_{V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}} \ .$$

Si $m \neq 0$ et si u est un élément de $\mathbb{U}$, on a $f(tu) \neq 0$ si et seulement si $t_0^m u$ appartient à $\mathbb{K}t_0^n\mathbb{K}$, ce qui implique que t_0^m appartient à $\mathbb{K}t_0^n\mathbb{K}\mathbb{U}$ et nécessite donc, d'après la Remarque 4.2.13, que m vérifie $-n \leq m \leq n$. Ceci prouve que le support de $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)$ est contenu dans $\bigoplus_{r=-n}^{n} \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)t_0^r$ et assure donc que l'on peut écrire $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)$ sous la forme $\sum_{r=-n}^{n} \lambda_r\varphi_r$, où $\{\lambda_r\}_{-n\leq r\leq n}$ désigne une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{F}}_p$. Pour conclure, il reste à vérifier que le coefficient de φ_n dans cette expression est bien celui donné par l'énoncé, ce que nous allons faire en calculant $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)(t_0^n)$ de deux façons. La décomposition $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f) = \sum_{r=-n}^{n} \lambda_r\varphi_r$ assure tout d'abord que l'on doit avoir $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)(t_0^n) = \lambda_n\varphi_n(t_0^n)$. Par ailleurs, le Corollaire 4.2.14 affirme que $t_0^n\mathbb{U} \cap \mathbb{K}t_0^n\mathbb{K} = t_0^n(\mathbb{U}\cap\mathbb{K})$, ce qui implique que l'on a

$$\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)(t_0^n) = \sum_{u\in\mathbb{U}/(\mathbb{U}\cap\mathbb{K})} f(t_0^n u)|_{V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}} = f(t_0^n)|_{V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}} = f(t_0^n)(I_3)\varphi_n(t_0^n) \ .$$

On en déduit donc finalement que $\lambda_n = f(t_0^n)(I_3)$, ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 4.5.8. *L'homomorphisme de Satake $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$ est injectif.*

Démonstration. Supposons que f soit un élément non nul de $\mathbb{H}(\mathbb{G},\mathbb{K},V)$ et notons son support sous la forme $\bigsqcup_{i=1}^{r} \mathbb{K}t_0^{n_i}\mathbb{K}$ avec $r \geq 1$ et $0 \leq n_1 < \ldots < n_r$. On peut alors décomposer f sous la forme $f = \sum_{i=1}^{r} f_i$ avec $f_i \in \mathbb{H}(\mathbb{G},\mathbb{K},V)$ de support égal à la double classe $\mathbb{K}t_0^{n_i}\mathbb{K}$, ce qui permet d'écrire par $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéarité de $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$ que $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)(t_0^{n_r}) = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f_i)(t_0^{n_r})$. Si l'on applique maintenant la formule (4.30) à chaque fonction f_i, on voit que la classe $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)t_0^{n_r}$ est contenue dans le support de $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f_i)$ si et seulement si $i = r$, auquel cas l'on a $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f_r)(t_0^{n_r}) = f_r(t_0^{n_r})(I_3)\varphi_{n_r} \neq 0$. On en conclut donc que $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)(t_0^{n_r}) = \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f_r)(t_0^{n_r})$ est non nul, ce qui prouve que la fonction $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)$ n'est pas identiquement nulle et termine la démonstration. □

Etape 3 : Calcul de l'image de $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$

Pour déterminer complètement l'image de $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$, il nous faut améliorer un peu la formule (4.30). C'est l'objectif des prochains énoncés qui vont nous permettre de prouver que les éléments de l'image de $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$ sont les combinaisons linéaires à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ des fonctions φ_n avec $n \geq 0$. On commence par rappeler le résultat suivant qui est une traduction de la première partie de [HV, Section 7.6] dans le cas qui nous intéresse [23].

Lemme 4.5.9. *Pour tout $F \in \mathbb{H}(\mathbb{G}, \mathbb{K}, V)$ et tout entier naturel $n \geq 1$, on a $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(F)(t_0^{-2n}) = 0$.*

On en déduit alors le résultat suivant, qui permet d'améliorer l'expression de la formule (4.30).

Lemme 4.5.10. *Pour tout élément $f \in \mathbb{H}(\mathbb{G}, \mathbb{K}, V)$, le support de $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)$ est d'intersection vide avec $\bigoplus_{n\geq 1} \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)t_0^{-n}$.*

Démonstration. Par $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéarité de $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$, on peut se limiter à traiter le cas où f est à support dans une seule double classe $\mathbb{K}t_0^n\mathbb{K}$, $n \geq 0$. Supposons par l'absurde que le support de $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)$ soit d'intersection non vide avec $\bigoplus_{n\geq 1} \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)t_0^{-n}$ et notons $m \in \mathbb{N}^*$ le plus grand entier tel que $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)t_0^{-m}$ soit inclus dans le support de $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)$. Comme $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$ est un homomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres, on obtient en particulier que

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f \star f)(t_0^{-2m}) &= \left(\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f) \star \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)\right)(t_0^{-2m}) \\
&= \sum_{t\in\mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)(t_0^{-2m}t)\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)(t^{-1}) \\
&= \sum_{r\in\mathbb{Z}} \underbrace{\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)(t_0^{-2m+r})}_{\text{nul si } r<m} \underbrace{\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)(t_0^{-r})}_{\text{nul si } r>m} \\
&= \left(\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)(t_0^{-m})\right)^2
\end{aligned}$$

doit être non nul, ce qui contredit l'énoncé du Lemme 4.5.9 pour la fonction $F := f \star f$. C'est donc que m n'existe pas, ce qui montre que le support de $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(f)$ est contenu dans $\bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)t_0^n$ et termine la démonstration. $\square$

Remarque 4.5.11. Ce résultat permet de raffiner fortement la formule (4.30) puisqu'il affirme que les coefficients $\lambda_{-1}, \ldots, \lambda_{-n}$ apparaissant dans cette décomposition doivent être nuls.

Lemme 4.5.12. *Pour tous entiers $m, n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n \star \varphi_m = \varphi_{m+n}$.*

Démonstration. Pour tout élément $t \in \mathbb{T}$, on a

$$\begin{aligned}
(\varphi_n \star \varphi_m)(t) &= \sum_{x\in\mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} \varphi_n(tx)\varphi_m(x^{-1}) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_n(tt_0^k)\varphi_m(t_0^{-k}) \\
&= \varphi_n(tt_0^{-m}) .
\end{aligned}$$

23. Remarque : nous savons actuellement prouver « à la main » le Lemme 4.5.9 sous certaines hypothèses reliant l'entier n aux doubles classes modulo $\mathbb{K}$ qui apparaissent dans le support de f. Les cas qui nous manquent pour avoir une preuve complète ne sont pas dus à un problème conceptuel, mais à l'apparition d'une combinatoire assez affreuse que nous ne maîtrisons pas entièrement pour l'instant.

La fonction $\varphi_n \star \varphi_m$ est donc de support égal à $t_0^{m+n}\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times) = \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)t_0^{m+n}$ et vaut $\varphi_n(t_0^n) = 1$ en t_0^{m+n}, ce qui prouve finalement que $\varphi_n \star \varphi_m = \varphi_{m+n}$ et termine la démonstration. □

Théorème 4.5.13. *L'image du morphisme de Satake $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$ est égale à la sous-algèbre $\overline{\mathbb{F}}_p[\varphi_1]$ de $\mathbb{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times), V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}})$ formée des polynômes en φ_1 à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

Démonstration. D'après le Lemme 4.5.7 et la Remarque 4.5.11, on sait déjà que l'image du morphisme de Satake $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$ est contenue dans le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$. Réciproquement, l'appartenance de φ_n à l'image de $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$ s'obtient par l'argument classique de trigonalisation basé sur la formule (4.30). En effet, si on applique ladite formule pour $f = \phi_0$, on obtient que $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(\phi_0) = \varphi_0$, ce qui prouve que φ_0 appartient à l'image de $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$. On raisonne ensuite par récurrence sur $n \geq 0$ en écrivant (avec les notations de la formule (4.30)) que l'on a

$$\varphi_n = \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(\phi_n) - \sum_{r=0}^{n-1} \lambda_r \varphi_r \ . \tag{4.31}$$

Ceci prouve donc que l'image du morphisme de Satake $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$ est égale au $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base $\{\varphi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, et permet de conclure grâce au Lemme 4.5.12 qui assure que $\varphi_n = \varphi_1^n$ pour tout entier $n \geq 1$. □

Injectivité des opérateurs $T_V - \lambda$

Grâce à la formule (4.31) et à l'injectivité de $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V$, on sait qu'il existe un unique scalaire $\lambda_0 \in \overline{\mathbb{F}}_p$ tel que $\phi_V = \phi_1 - \lambda_0\phi_0$. Cette égalité nous permet de réécrire la formule (2.4) donnant l'action de l'opérateur T_V sur les fonctions standard sous la forme suivante :

$$\forall v \in V,\ \forall\, g \in \mathbb{G},\ T_V([g, v]) = -\lambda_0[g, v] + \sum_{x \in C_1} [gxt_0^{-1}, x^{-1}v] \ , \tag{4.32}$$

où l'on désigne par $\{xt_0^{-1}, x \in C_1\}$ un système de représentants dans $\mathbb{G}$ des classes à gauche de $\mathbb{K}t_0^{-1}\mathbb{K}$ modulo $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}t_0^{-1}\mathbb{K} = \bigsqcup_{x \in C_1} xt_0^{-1}\mathbb{K} \ .$$

Théorème 4.5.14. *Pour tout $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, l'opérateur $T_V - \lambda : \mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V) \to \mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V)$ est injectif.*

Démonstration. Fixons un scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ et considérons un élément $f \in \mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V)$ vérifiant $(T_V - \lambda)(f) = 0$. Décomposons-le sous la forme $f = \sum_{i=1}^{r} [g_i, v_i]$ avec $r \geq 1$, $v_1, \ldots, v_r \in V$ et $g_1, \ldots, g_r \in \mathbb{G}$ vérifiant les deux conditions suivantes [24] :

i) les sommets $g_1 v_{\mathbb{K}}, \ldots, g_r v_{\mathbb{K}}$ sont deux à deux distincts ;

ii) pour tout indice $1 \leq i \leq r-1$, $\delta(g_i v_{\mathbb{K}}, v_{\mathbb{K}}) \leq \delta(g_{i+1} v_{\mathbb{K}}, v_{\mathbb{K}})$.

La formule (4.32) nous permet alors d'écrire que $T_V(f) = -\lambda_0 f + \sum_{i=1}^{r} \sum_{x \in C_1} [g_i x t_0^{-1}, x^{-1} v_i]$, et l'hypothèse sur f devient alors

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{x \in C_1} [g_i x t_0^{-1}, x^{-1} v_i] = (\lambda + \lambda_0) f \ . \tag{4.33}$$

24. On rappelle que δ désigne la distance naturelle existant sur l'ensemble des sommets de l'arbre de Bruhat-Tits $\mathcal{X}$ et que $v_{\mathbb{K}}$ désigne le sommet spécial de $\mathcal{X}$ ayant $\mathbb{K}$ pour stabilisateur sous l'action de $\mathbb{G}$.

Remarquons maintenant que le support des fonctions standard associées à l'indice $i = r$ dans le membre de gauche de (4.33), i.e. les éléments $[g_r x t_0^{-1}, x^{-1} v_r]$ avec $x \in C_1$, sont à support dans des sommets de $\mathcal{X}$ situés à distance $\delta(g_r v_{\mathbb{K}}, v_{\mathbb{K}}) + 2$ du sommet $v_{\mathbb{K}}$ (par définition de C_1) et deux à deux disjoints grâce à la condition i) imposée ci-dessus. Comme le support du membre de droite de (4.33) est par construction à support dans la boule de centre $v_{\mathbb{K}}$ et de rayon $\delta(g_r v_{\mathbb{K}}, v_{\mathbb{K}})$, on en déduit que chacune des fonctions $[g_r x t_0^{-1}, x^{-1} v_r]$ doit être nulle, ce qui équivaut à dire que l'on doit avoir $v_r = 0$. On peut alors conclure par récurrence descendante (sur $r \geq 1$) que le support de f doit être vide, ce qui signifie que f est la fonction nulle et termine la démonstration. □

4.5.2 Existence d'une paramétrisation possible pour les représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$

Proposition 4.5.15. *Pour toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible V de $\mathbb{K}$, $\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V)$ n'est pas une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation admissible de $\mathbb{G}$.*

Démonstration. Il nous suffit de prouver que l'espace des vecteurs $\mathbb{K}(1)$-invariants de $\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V)$ n'est pas de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour conclure. Pour ce faire, on remarque que cet espace contient en particulier la composante $(\mathbb{K}, V)$-isotypique de $\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V)$ qui est isomorphe à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$ par réciprocité de Frobenius compacte. Nous avons vu dans la Section 4.5.1 que cette algèbre s'identifie à une algèbre de polynômes à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$, ce qui implique qu'elle est de dimension infinie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Nous avons ainsi prouvé que l'espace des vecteurs $\mathbb{K}(1)$-invariants de $\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V)$ contient un sous-espace vectoriel de dimension infinie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, ce qui termine la démonstration. □

Théorème 4.5.16. *Pour toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible admissible π de $\mathbb{G}$, il existe une représentation lisse irréductible V de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et un scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ tels que π soit un quotient de la représentation conoyau* $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda) := \dfrac{\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V)}{(T_V - \lambda)}$.

Démonstration. L'argument est identique à celui qui permet de prouver le Théorème 3.5.35 du Chapitre 3. Supposons que π soit une représentation lisse irréductible admissible de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Le Lemme 2.1.9 assure alors que $\pi^{\mathbb{K}(1)}$ est une représentation lisse non nulle de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, et l'admissibilité de π implique qu'elle est de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, donc qu'elle contient une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible V de $\mathbb{K}$. La réciprocité de Frobenius compacte assure alors que $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]}(\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V), \pi)$ est un espace vectoriel non nul de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, ce qui implique qu'il contient un vecteur propre sous l'action de l'algèbre commutative $\mathcal{H}(\mathbb{G}, \mathbb{K}, V) = \overline{\mathbb{F}}_p[T_V]$. Autrement dit, il existe un homomorphisme non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules $\Phi : \mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V) \to \pi$ et un scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ tels que $\Phi \circ T_V = \lambda \Phi$. Ceci montre notamment que Φ se factorise à travers le quotient $\dfrac{\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V)}{(T_V - \lambda)(\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V))} = \pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda)$ en un homomorphisme non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules $\bar{\Phi} : \pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda) \to \pi$. Par irréductibilité de π, la non-nullité de $\bar{\Phi}$ assure sa surjectivité, ce qui termine la démonstration. □

Définition 4.5.17. Soit π une représentation lisse irréductible admissible de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Soient V une représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ un scalaire. On dit que la paire (V, λ) est une *paramétrisation possible de π (par rapport à $\mathbb{K}$)* si π est un quotient de la représentation conoyau $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda)$.

Définition 4.5.18. Plus généralement, si π est une représentation lisse de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et si V est une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$, on dit qu'un homomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres

$\chi : \mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ est un *paramètre de Hecke pour* π lorsqu'il existe un homomorphisme non nul $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V), \pi)$ tel que :

$$\forall\, T \in \mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V),\ \psi \circ T = \chi(T)\psi\ .$$

Ceci équivaut à demander que $\psi \circ T_V = \chi(T_V)\psi$, où T_V est le générateur de $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$ mis en évidence dans la Section 4.5.1.

Une conséquence immédiate de ces définitions est donnée par l'énoncé suivant.

Corollaire 4.5.19. *Soient V une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$, $\chi : \mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un homomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres et π une représentation lisse irréductible admissible de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Posons $\lambda := \chi(T_V)$. Alors χ est un paramètre de Hecke pour π si et seulement si (V, λ) est une paramétrisation possible de π.*

4.5.3 Un isomorphisme utile

Cette sous-section a pour objectif l'introduction de deux isomorphismes $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$-équivariants [25]

$$\begin{cases} \Delta : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)}(V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}, \eta^\phi)\ , \\ \\ \tilde{\Delta} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V), \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)}(V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}, \eta^\phi)\ , \end{cases}$$

dont le rôle sera crucial lors du calcul de toutes les paramétrisations possibles des représentations non supercuspidales de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (Section 4.5.4), elle-même à la base de la classification des représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ que nous donnons à la fin de ce chapitre (Théorème 4.5.41).

On fixe une fois pour toutes dans cette sous-section une représentation lisse irréductible V de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ ainsi qu'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse η de $\mathbb{B}$, dont le conjugué η^ϕ définit un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse du sous-groupe de Borel opposé $\overline{\mathbb{B}}$.

Nous allons démontrer le théorème suivant, qui nous permettra notamment d'obtenir une autre description des représentations obtenues par induction parabolique des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de $\mathbb{B}$ (Théorème 4.5.26).

Théorème 4.5.20. *Soient V une représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et η un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{B}$. L'application $[f \mapsto f(\cdot)(I_3)]$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$-équivariant*

$$\Delta : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)}(V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}, \eta^\phi)\ .$$

Démonstration. Soient V un poids de Serre de $\mathbb{K}$ et η un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{B}$. On dispose de la chaine suivante d'isomorphismes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)) &\overset{\Delta_1}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V), \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)) && (4.34) \\ &\overset{\Delta_2}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V), \eta) && (4.35) \\ &\overset{\Delta_3}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{B}\cap\mathbb{K}}^{\mathbb{B}}(V), \eta) && (4.36) \\ &\overset{\Delta_4}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\cap\mathbb{B}}(V, \eta) && (4.37) \\ &\overset{\Delta_5}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)}(V^{\overline{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}}, \eta) && (4.38) \\ &\overset{\Delta_6}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)}(V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}, \eta^\phi)\ . && (4.39) \end{aligned}$$

25. L'action de $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$ sur le membre de droite ayant lieu via l'isomorphisme de Satake $\mathcal{S}_V$.

En effet, les isomorphismes (4.34) et (4.37) proviennent de la réciprocité de Frobenius compacte, l'isomorphisme (4.35) provient de la réciprocité de Frobenius lisse et l'isomorphisme (4.36) provient du théorème de décomposition de Mackey (Lemme 2.2.8). L'isomorphisme (4.38) est une conséquence directe du Lemme 4.5.5 et de l'isomorphisme $V_{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}} \simeq V^{\overline{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}}$ induit par la projection canonique de V sur $V_{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}$, tandis que l'isomorphisme (4.39) est défini par l'application identité, ce qui a un sens car $\phi^2 = I_3$ et $\overline{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}} = \phi(\mathbb{K}\cap\mathbb{U})\phi^{-1}$. Un calcul direct [26] montre que l'isomorphisme Δ résultant de la composition des isomorphismes Δ_i est bien l'application envoyant un élément $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta))$ sur l'homomorphisme $f(.)(I_3) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)}(V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}, \eta^\phi)$.
Il nous reste maintenant à expliquer pourquoi Δ est équivariant pour l'action de $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$. Soient $T \in \mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$ et $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta))$ avec ψ non nulle. Nous voulons démontrer que

$$\Delta(\psi|T) = \Delta(\psi)|T \ . \tag{4.40}$$

Calculons tout d'abord le membre de gauche de (4.40) : par réciprocité de Frobenius compacte, l'élément ψ correspond à l'élément $\Psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V), \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta))$ défini par :

$$\forall\ f \in \mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V),\ \ \Psi(f) := \sum_{x\in\mathbb{G}/\mathbb{K}} x\cdot\psi(f(x^{-1})),$$

de sorte que l'on a en particulier $\psi(v) = \Psi([I_3, v])$ où $[I_3, v]$ est la fonction standard [27] associée à la paire $(\mathbb{K}, v)$. Par ailleurs, l'opérateur T correspond, par la Proposition 2.3.2, à la fonction $\tilde{\phi} \in \mathbb{H}(\mathbb{G}, \mathbb{K}, V)$ caractérisée par la formule suivante :

$$\forall\ f \in \mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V),\ \forall\ g \in \mathbb{G},\ T(f)(g) = \sum_{x\in\mathbb{G}/\mathbb{K}} \tilde{\phi}(x)(f(x^{-1}g))\ .$$

Avec ces notations, la fonction $\psi|T$ résultant de l'action de T sur ψ est celle qui correspond à $\Psi\circ T$ par réciprocité de Frobenius. Autrement dit, on a :

$$\begin{aligned}
(\psi|T)(v) &= (\Psi\circ T)([I_3, v]) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{G}/\mathbb{K}} x\cdot\psi(T([I_3,v])(x^{-1})) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{G}/\mathbb{K}} x\cdot\psi\left(\sum_{y\in\mathbb{G}/\mathbb{K}} \tilde{\phi}(y)([I_3,v](y^{-1}x^{-1}))\right) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{G}/\mathbb{K}} x\cdot\psi(\tilde{\phi}(x^{-1})(v))\ .
\end{aligned}$$

On en déduit donc que si v appartient à $V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}$, alors on a

$$\Delta(\psi|T)(v) = (\psi|T)(v)(I_3) = \left(\sum_{x\in\mathbb{G}/\mathbb{K}} x\cdot\psi(\tilde{\phi}(x^{-1})(v))\right)(I_3)\ ,$$

ce qui se réécrit sous la forme suivante (par décomposition d'Iwasawa, et car ψ est à valeurs dans $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$) :

$$\Delta(\psi|T)(v) = \sum_{b\in\mathbb{B}/(\mathbb{B}\cap\mathbb{K})} \psi(\tilde{\phi}(b^{-1})(v))(b)\ . \tag{4.41}$$

Intéressons-nous maintenant au membre de droite de (4.40). Par définition, l'opérateur T agit sur $\Delta(\psi)$ à travers la fonction $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(\tilde{\phi})$, où $\tilde{\phi}$ est l'élément de $\mathbb{H}(\mathbb{G}, \mathbb{K}, V)$ défini ci-avant. Cette

26. Donné dans la Section 7.5 dans un souci de complétude.
27. On renvoie à la Section 2.2.2 pour un rappel de sa définition.

fonction $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(\tilde{\phi}) \in \mathbb{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times), V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$ correspond, par réciprocité de Frobenius compacte, à l'opérateur $\Theta \in \mathrm{End}_{\mathbb{T}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)}^{\mathbb{T}}(V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}))$ défini par la formule suivante :

$$\forall\, f \in \mathrm{ind}_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)}^{\mathbb{T}}(V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}),\ \forall\, g \in \mathbb{T},\ \Theta(f)(g) = \sum_{t\in\mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(\tilde{\phi})(t)(f(t^{-1}g)) .$$

D'autre part, la fonction $\Delta(\psi) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)}(V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}, \eta)$ correspond, par réciprocité de Frobenius compacte, à la fonction $D \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)}^{\mathbb{T}}(V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}), \eta)$ définie par

$$\forall\, f \in \mathrm{ind}_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)}^{\mathbb{T}}(V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}),\ D(f) := \sum_{t\in\mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} t\cdot\Delta(\psi)(f(t^{-1})) .$$

Avec ces notations, la réciprocité de Frobenius compacte fait correspondre les éléments $\Delta(\psi)|T$ et $D\circ\Theta$, ce qui signifie que l'on a, pour tout vecteur $v \in V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}$,

$$\begin{aligned}
(\Delta(\psi)|T)(v) &= (D\circ\Theta)([I_3, v]) \\
&= \sum_{t\in\mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} t\cdot\Delta(\psi)(\Theta([I_3,v])(t^{-1})) \\
&= \sum_{t\in\mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} t\cdot\Delta(\psi)\left(\sum_{x\in\mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(\tilde{\phi})(x)([I_3,v](x^{-1}t^{-1}))\right) \\
&= \sum_{t\in\mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} t\cdot\Delta(\psi)(\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(\tilde{\phi})(t^{-1})(v)) \\
&= \sum_{t\in\mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} \psi(\mathcal{S}_{\mathbb{G}}^V(\tilde{\phi})(t))(v)(t^{-1}) \\
&= \sum_{t\in\mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} \sum_{u\in\mathbb{U}/(\mathbb{U}\cap\mathbb{K})} \psi(\tilde{\phi}(tu)(v))(t^{-1}) \\
&= \sum_{b\in\mathbb{B}/(\mathbb{B}\cap\mathbb{K})} \psi(\tilde{\phi}(b)(v))(b^{-1}) \\
&= \sum_{b\in(\mathbb{B}\cap\mathbb{K})\backslash\mathbb{B}} \psi(\tilde{\phi}(b^{-1})(v))(b) .
\end{aligned}$$

Le passage de la quatrième à la cinquième égalité est possible car $\mathbb{T}$ est un groupe abélien et car ψ est à valeurs dans $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$. On conclut alors en remarquant que si $b = k_1\beta k_2$ avec $k_1, k_2 \in \mathbb{B}\cap\mathbb{K}$ et $\beta\in\mathbb{B}$, on a

$$\begin{aligned}
\psi(\tilde{\phi}(b^{-1})(v))(b) &= \psi(\tilde{\phi}(k_2^{-1}\beta^{-1}k_1^{-1})(v))(k_1\beta k_2) \\
&= \psi(k_2^{-1}\tilde{\phi}(\beta^{-1})(k_1^{-1}v))(k_1\beta k_2) \\
&= \eta(k_1)(k_2\cdot\psi(k_2^{-1}\tilde{\phi}(\beta^{-1})(k_1^{-1}v)))(\beta) \\
&= \eta(k_1)\psi(\tilde{\phi}(\beta^{-1})(k_1^{-1}v))(\beta) \\
&= \eta(k_1)\psi(\tilde{\phi}(\beta^{-1})(\eta(k_1^{-1})v))(\beta) \\
&= \psi(\tilde{\phi}(\beta^{-1})(v))(\beta) .
\end{aligned}$$

Dans ce calcul, la troisième égalité vient du fait que $\tilde{\phi}$ est à valeurs dans $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$, la quatrième égalité provient de la $\mathbb{K}$-équivariance de l'opérateur ψ, et la cinquième égalité vient du fait que s'il existe un élément non nul dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta))$, alors $\mathbb{B}\cap\mathbb{K}$ agit sur V par le caractère η (par réciprocité de Frobenius lisse).
Nous avons donc prouvé que le terme $\psi(\tilde{\phi}(b^{-1})(v))(b)$ ne dépend que de la double classe de b modulo $\mathbb{B}\cap\mathbb{K}$, ce qui implique en particulier que l'on a $\Delta(\psi|T) = \Delta(\psi)|T$ et termine la démonstration. □

Remarque 4.5.21. Comme nous l'avons déjà remarqué dans la preuve ci-dessus, l'existence de cet isomorphisme fournit en particulier la propriété suivante : *une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible V de $\mathbb{K}$ est contenue dans $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ si et seulement si les $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de $\mathbb{T}$ portés par $V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}$ et η^ϕ ont la même restriction à $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$.*

Remarque 4.5.22. Le dernier calcul effectué dans la preuve du Théorème 4.5.20 reflète le fait que l'action de $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$ sur le membre de droite ne se fait pas a priori à l'aide du morphisme de Satake $\mathcal{S}_V$, mais plutôt par à travers le morphisme noté $\mathcal{S}'_T$ dans [Her2] et dans [HV]. Leur coïncidence est un petit miracle qui repose sur le fait que notre algèbre est engendré par un seul opérateur, donc qu'elle est en particulier commutative, et que $\mathbb{T}$ est le seul sous-groupe de Levi standard propre de $\mathbb{G}$.

Remarque 4.5.23. La preuve de l'équivariance de Δ relativement à l'action de $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$ montre aussi que l'isomorphisme $\tilde{\Delta} := \Delta \circ \Delta_1^{-1}$ est $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$-équivariant.

4.5.4 Autre description des représentations non supercuspidales

Représentations conoyaux et induites paraboliques

Nous commençons par donner une condition nécessaire pour qu'un caractère $\chi : \mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ puisse être un paramètre de Hecke d'une représentation obtenue par induction parabolique à partir de $\mathbb{B}$. Remarquons avant cela que si c'est le cas, la réciprocité de Frobenius lisse implique que V doit être un sous-objet de la représentation de $\mathbb{K}$ portée par $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$, dont on rappelle qu'elle est isomorphe à $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}\cap\mathbb{K}}^{\mathbb{K}}(\eta)$ par décomposition de Mackey.

Théorème 4.5.24. *Soient $\eta : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse et V une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$. Si $\chi : \mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ est un paramètre de Hecke pour $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$, alors $\chi(T_V) = \eta(t_0)$.*

Démonstration. Supposons que $\chi : \mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ soit un paramètre de Hecke pour $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$. C'est donc qu'il existe un homomorphisme non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules $\tilde{\phi} : \mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V) \to \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ vérifiant $\tilde{\phi} \circ T_V = \chi(T_V)\tilde{\phi}$. Appliquons à cette égalité l'isomorphisme $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$-équivariant $\tilde{\Delta}$ introduit dans la Remarque 4.5.23 : on obtient alors que l'on doit avoir

$$\tilde{\Delta}(\tilde{\phi})|T_V = \chi(T_V)\tilde{\Delta}(\tilde{\phi}) \ . \tag{4.42}$$

Nous allons maintenant calculer $\tilde{\Delta}(\tilde{\phi})|T_V := \tilde{\Delta}(\tilde{\phi})|\tau_1$ d'une autre manière. Plus généralement, nous allons calculer $f|\tau_n$ pour $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)}(V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}, \eta^\phi)$ et $n \in \mathbb{Z}$ quelconques, où l'on rappelle que $\tau_n \in \mathcal{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times), V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$ correspond à la fonction $\varphi_n \in \mathbb{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times), V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$ de support égal à $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)t_0^n = t_0^n\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$ valant 1 en t_0^n. Par définition, $f|\tau_n$ est l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)}(V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}, \eta^\phi)$ associé[28] à la fonction $F \circ \tau_n$, où $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)}^{\mathbb{T}}(V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}), \eta^\phi)$ est l'image de f par réciprocité de Frobenius compacte. Remarquons maintenant que l'on a, pour toute fonction $\psi \in \mathrm{ind}_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)}^{\mathbb{T}}(V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$,

$$\begin{aligned}(F \circ \tau_n)(\psi) &= \sum_{t \in \mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} t \cdot f((\psi \circ \tau_n)(t^{-1})) \\ &= \sum_{t \in \mathbb{T}/\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)} \eta^\phi(t) f((\psi \circ \tau_n)(t^{-1})) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \eta(\phi t_0^m \phi^{-1}) f(\psi(\tau_n(t_0^{-m}))) \\ &= \eta(t_0^n) f(\psi(1)) \ .\end{aligned}$$

28. Toujours par réciprocité compacte de Frobenius.

La seconde égalité vient du fait que f est à valeurs dans η^{ϕ}, tandis que la troisième égalité découle de la décomposition $\mathbb{T} = \bigsqcup_{m\in\mathbb{Z}} t_0^m \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$ et de la $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$-équivariance des fonctions en jeu. On en déduit donc que l'on a, pour tout vecteur $v \in V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}$,

$$(f|\tau_n)(v) = (F \circ \tau_n)([I_3, v]) = \eta(t_0^n)f(v) \ , \tag{4.43}$$

ce qui prouve que $f|\tau_n = \eta(t_0^n)f$. En considérant cette égalité pour $n = 1$, on obtient donc en particulier que

$$\tilde{\Delta}(\tilde{\phi})|T_V = \eta(t_0)\tilde{\Delta}(\tilde{\phi}) \ . \tag{4.44}$$

En comparant (4.42) et (4.44), on voit que l'on doit avoir $\chi(T_V)\tilde{\Delta}(\tilde{\phi}) = \eta(t_0)\tilde{\Delta}(\tilde{\phi})$. Comme $\tilde{\Delta}$ est un isomorphisme, la non-nullité de $\tilde{\phi}$ implique celle de $\tilde{\Delta}(\tilde{\phi})$, et l'on en conclut que l'on doit finalement avoir $\chi(T_V) = \eta(t_0)$, ce qui termine la démonstration. □

Remarque 4.5.25. Ce théorème montre qu'à toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible V de $\mathbb{K}$ contenue dans $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ est associé au plus un paramètre de Hecke dont les valeurs sont entièrement déterminées par le caractère η ; en particulier, elles ne dépendent ni du choix de V, ni du choix de $\mathbb{K}$. Soulignons de plus le fait que l'énoncé du théorème est valable sans aucune hypothèse d'irréductibilité sur la représentation $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$.

Proposition 4.5.26. *Soient V une représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$* ***qui ne s'étend pas en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de*** $\mathbb{G}$[29] *et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ un scalaire* ***non nul****. Notons $\eta : \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ le caractère lisse dont la restriction à $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$ est donnée par le caractère porté par $(V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}})^{\phi}$ et qui envoie t_0 sur λ, ainsi que le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{B}$ obtenu par inflation.*
L'application $\tilde{\Delta}^{-1}(id) : \mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V) \to \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$, où $\tilde{\Delta}$ est l'isomorphisme $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$-équivariant défini dans la Remarque 4.5.23, induit alors un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules :

$$\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda) \twoheadrightarrow \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta) \ .$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que puisque $\mathbb{T} = t_0^{\mathbb{Z}}\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$, la formule donnée dans l'énoncé suffit à définir entièrement le caractère η. Par ailleurs, l'égalité $\phi^2 = I_3$ assure que l'identité définit un isomorphisme $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$-équivariant $\varphi : V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}} \to \eta^{\phi}$ qui fournit, par application de l'opérateur $\tilde{\Delta}^{-1}$, un homomorphisme non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules

$$\Phi := \tilde{\Delta}^{-1}(\varphi) : \mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V) \to \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta) \ .$$

Comme $\tilde{\Delta}^{-1}$ est $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$-équivariant, on a de plus

$$\begin{aligned} \Phi|T_V &= \tilde{\Delta}^{-1}(\varphi|T_V) \\ &= \tilde{\Delta}^{-1}(\varphi|\tau_1) \\ &= \tilde{\Delta}^{-1}(\eta(t_0)\varphi) \quad \text{par application de (4.44)} \\ &= \eta(t_0)\Phi \\ &= \lambda\Phi \ , \end{aligned}$$

ce qui prouve que Φ définit un homomorphisme non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules

$$\Psi : \pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda) \to \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta) \ .$$

Démontrons la surjectivité de l'application Ψ. L'image de Ψ est un sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module non nul de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$. Par suite, si Ψ n'était pas surjective, le Théorème 4.4.1 impliquerait que η se prolonge en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$ (encore noté η) et que l'image de Ψ, qui est

29. Ce qui signifie que V est soit de dimension strictement supérieure à 1, soit un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{K}$ qui ne s'étend pas en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$.

aussi l'image de Φ, serait égale à ce caractère. Autrement dit, Φ définirait un homomorphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules $\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V) \twoheadrightarrow \eta$ qui induirait, par réciprocité de Frobenius compacte, un homomorphisme non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{K}]$-modules $V \to \eta|_{\mathbb{K}}$. L'irréductibilité de V et de $\eta|_{\mathbb{K}}$ impliquerait que ce dernier homomorphisme est en fait un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{K}]$-modules, ce qui contredirait l'hypothèse selon laquelle V ne s'étend pas en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$ et termine ainsi la démonstration. □

Paramétrisations possibles des représentations lisses irréductibles non supercuspidales de $\mathbb{G}$ - Première partie

On peut déjà calculer toutes les paramétrisations possibles de plusieurs familles de représentations lisses irréductibles non supersingulières de $\mathbb{G}$. Les premières concernées sont les représentations de la série spéciale, qui font l'objet des deux prochains énoncés.

Théorème 4.5.27. *La représentation de Steinberg admet une unique paramétrisation possible, à savoir la paire $(V_0, 1)$ où V_0 désigne l'unique représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ contenue dans $St_{\mathbb{G}}$.*

Démonstration. D'après le Théorème 4.4.15, l'espace des vecteurs $\mathbb{I}(1)$-invariants de $St_{\mathbb{G}}$ est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On déduit donc de l'application du Lemme 2.1.9 au sous-groupe $\mathbb{I}(1)$ de $\mathbb{K}$ que $St_{\mathbb{G}}$ contient une unique représentation lisse irréductible V_0 de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}$, à savoir le sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{K}]$-module engendré par $St_{\mathbb{G}}^{\mathbb{I}(1)}$. Par suite, toute paramétrisation possible de $St_{\mathbb{G}}$ doit être de la forme (V_0, λ) avec $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$. Comme V_0 est une représentation irréductible de $\mathbb{K}$, tout élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_0, St_{\mathbb{G}})$ est entièrement déterminé par sa valeur en un vecteur non nul de $V_0^{\mathbb{I}(1)} = St_{\mathbb{G}}^{\mathbb{I}(1)}$. Cette valeur doit, par $\mathbb{K}$-équivariance, appartenir à l'espace des vecteurs $\mathbb{I}(1)$-invariants de $St_{\mathbb{G}}$, ce qui assure que l'on a :

$$\begin{aligned} \dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_0, St_{\mathbb{G}}) = \dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(V_0^{\mathbb{I}(1)}, St_{\mathbb{G}}^{\mathbb{I}(1)}) &= \dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(St_{\mathbb{G}}^{\mathbb{I}(1)}, St_{\mathbb{G}}^{\mathbb{I}(1)}) \\ &= \dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} St_{\mathbb{G}}^{\mathbb{I}(1)} \\ &= 1\ . \end{aligned} \tag{4.45}$$

Par réciprocité de Frobenius compacte, on en déduit que l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V_0), St_{\mathbb{G}})$ est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, ce qui implique que $St_{\mathbb{G}}$ admet au plus une paramétrisation possible relativement à V_0, et permet de déduire du Théorème 4.5.16 que $St_{\mathbb{G}}$ admet une et une seule paramétrisation possible relativement à $\mathbb{K}$ qui doit être de la forme (V_0, λ).
Remarquons maintenant que l'irréductibilité du $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $St_{\mathbb{G}}$ assure que V_0 ne s'étend pas en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathbb{G}$, ce qui permet de déduire de la Proposition 4.5.26 l'existence d'une surjection $\mathbb{G}$-équivariante allant de la représentation conoyau $\pi_{\mathbb{K}}(V_0, 1)$ sur le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta_0)$, où $\eta_0 : \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ est le caractère lisse valant 1 en t_0 et dont la restriction à $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^{\times})$ est donnée par $(V_0^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}})^{\phi}$. L'existence de ce morphisme non nul implique alors, par réciprocité de Frobenius compacte, que V_0 est un sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{K}]$-module de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta_0)$, et assure donc la non-nullité de la composante $(\mathbb{I}, \mathbf{1})$-isotypique de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta_0)$ grâce à la Remarque 4.4.16. On déduit du Théorème 4.4.13 qu'il faut que l'on aie $\eta_0|_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^{\times})} = \mathbf{1}$ ou $(\eta_0)^{\phi}|_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^{\times})} = \mathbf{1}$, ce qui prouve que la restriction de η_0 à $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^{\times})$ doit être égale au caractère trivial $\mathbf{1}$ puisque $\phi^2 = I_3$, et donc finalement que $\eta_0 = \mathbf{1}$ puisque $\mathbb{T} = t_0^{\mathbb{Z}}\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^{\times})$.
On a ainsi prouvé que le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\pi_{\mathbb{K}}(V_0, 1)$ admet le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})$ comme quotient, ce qui implique que la paire $(V_0, 1)$ est une paramétrisation possible de $St_{\mathbb{G}}$ et termine la démonstration. □

Corollaire 4.5.28. *Pour tout caractère lisse $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$, la représentation de la série spéciale $St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det)$ admet une unique paramétrisation possible. Elle est donnée par la* *paire* $(V_0 \otimes (\eta \circ \det), 1)$ *avec* V_0 *désignant l'unique représentation lisse irréductible de* $\mathbb{K}$ *sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$ *contenue dans* $St_{\mathbb{G}}$.

Démonstration. Ce résultat est une conséquence directe du Théorème 4.5.27 une fois que l'on a remarqué que, puisque t_0 est de déterminant égal à 1, la paire (V, λ) est une paramétrisation possible de $St_{\mathbb{G}}$ si et seulement si la paire $(V \otimes (\eta \circ \det), 1)$ est une paramétrisation possible de $St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det)$. □

Remarquons maintenant que les arguments utilisés pour prouver la Proposition 4.5.26 peuvent être détournés pour calculer les paramétrisations possibles des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de $\mathbb{G}$. En l'occurrence, nous allons prouver que tout $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$ admet une et une seule paramétrisation possible et qu'elle est complètement explicite, comme en atteste le résultat suivant.

Théorème 4.5.29. *Pour tout caractère lisse* $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, *le* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$*-module* $\eta \circ \det$ *admet une et une seule paramétrisation possible relativement à* $\mathbb{K}$, *à savoir la paire* $(\eta \circ \det, 1)$.

Démonstration. Considérons un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse $\eta \circ \det : \mathbb{G} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$. Puisque $\phi^2 = I_3$, l'application $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$-équivariante définie par l'identité $\eta \circ \det \to \eta \circ \det$ induit, via l'isomorphisme $\tilde{\Delta}$ introduit dans la Remarque 4.5.23, un homomorphisme non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules

$$\psi : \mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(\eta \circ \det) \to \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta \circ \det) \ .$$

Le Corollaire 4.5.28 empêche la surjectivité de cette application, ce qui implique grâce au Théorème 4.4.1 que l'image de ψ est égale au caractère $\eta \circ \det$ et signifie donc que ψ est un homomorphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules $\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(\eta \circ \det) \twoheadrightarrow \eta \circ \det$. Rappelons maintenant que, par définition, on a $\psi = \tilde{\Delta}(id)$, ce qui nous permet d'appliquer la formule (4.44) et d'obtenir ainsi que $\psi | T_{\eta\circ\det} = (\eta \circ \det)(t_0)\psi = \psi$. L'application ψ peut donc être factorisée à travers l'image de l'opérateur $T_{\eta\circ\det} - 1$, ce qui montre que l'on dispose d'un homomorphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules

$$\pi_{\mathbb{K}}(\eta \circ \det, 1) \twoheadrightarrow \eta \circ \det \ ,$$

et signifie donc que $(\eta \circ \det, 1)$ est une paramétrisation possible de $\eta \circ \det$.

Supposons réciproquement que (V, λ) soit une paramétrisation possible du $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\eta\circ\det$. C'est donc qu'il existe un homomorphisme non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules $\Phi : \mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V) \twoheadrightarrow \eta \circ \det$ tel que $\Phi \circ T_V = \lambda\Phi$. Cet homomorphisme correspond par réciprocité de Frobenius compacte à un homomorphisme non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{K}]$-modules $V \to \eta \circ \det$, qui doit alors être un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{K}]$-modules par irréductibilité de V et de $\eta \circ \det$.
En appliquant l'opérateur $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$-équivariant Δ à l'égalité $\Phi \circ T_V = \lambda\Phi$, on obtient par ailleurs que $\Delta(\Phi)|T_V = \lambda\Delta(\Phi)$. Remarquons alors que puisque V est isomorphe à $\eta \circ \det$, il est possible d'appliquer la formule (4.44) pour calculer $\Delta(\Phi)|T_V$, ce qui prouve que l'on doit avoir $\Delta(\Phi)|T_V = (\eta \circ \det)(t_0)\Delta(\Phi) = \Delta(\Phi)$. Comme Φ est non nulle et que Δ est bijective, la comparaison des deux expressions obtenues pour $\Delta(\Phi)|T_V$ montre que λ doit être égal 1, ce qui achève finalement de montrer que $(\eta \circ \det, 1)$ est la seule paramétrisation possible du caractère $\eta \circ \det$. □

Introduction de la Conjecture 1

Pour compléter notre étude, il nous faudrait pouvoir déterminer toutes les paramétrisations possibles des représentations de la forme $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ avec $\eta : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse. Pour l'instant, nos connaissances à ce sujet se résument à la proposition suivante, qui découle directement de la Proposition 4.5.26 [30] et du Corollaire 4.5.28.

Proposition 4.5.30. *Soit* $\eta : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ *un caractère lisse.*

1. *Si* η *ne s'étend pas en un* $\overline{\mathbb{F}}_p$*-caractère lisse de* $\mathbb{G}$*, alors le* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$*-module* $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ *admet exactement une paramétrisation possible.*
2. *Si* η *s'étend en un* $\overline{\mathbb{F}}_p$*-caractère lisse de* $\mathbb{G}$*, alors le* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$*-module* $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ *admet au plus une paramétrisation possible, à savoir la paire* $(V_0 \otimes \eta, \eta(t_0))$ *où* V_0 *désigne l'unique représentation lisse irréductible de* $\mathbb{K}$ *sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$ *contenue dans la représentation de Steinberg* $St_{\mathbb{G}}$ *de* $\mathbb{G}$*.*

Signalons tout de suite que le Théorème 4.5.16 ne permet pas de conclure à l'unicité de la paramétrisation dans le second cas de la Proposition 4.5.30 car la représentation $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ n'est pas irréductible lorsque η est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$.

En comparant les résultats que nous avons obtenus jusqu'ici à ceux qui existent pour $GL_2(F)$ [BL94, Theorem 25], pour $SL_2(F)$ et, plus généralement, pour $GL_n(F)$ [Her2, Theorem 3.1], il est naturel de s'interroger quant à l'injectivité du morphisme surjectif introduit dans la Proposition 4.5.26, puisqu'il l'est pour les groupes sus-mentionnés. En outre, disposer d'un tel isomorphisme permettrait d'obtenir une classification des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathbb{G}$, et nous n'avons trouvé à l'heure actuelle aucun argument mettant cette propriété d'injectivité en défaut.
Une autre question qui surgit naturellement lors de la comparaison avec les théories existant pour d'autres groupes porte sur la structure des représentations conoyaux $\pi_{\mathbb{K}}(\eta \circ \det, \lambda)$ avec $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ non nul et $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse. Nous savons démontrer [31] par un argument utilisant la structure de l'arbre de Bruhat-Tits que la représentation $\pi(\mathbf{1}, 1)$ est une extension non scindée du caractère $\mathbf{1}$ par $St_{\mathbb{G}}$, la propriété de non-scindage étant une conséquence directe du Théorème 4.5.27. Ceci nous permet donc de décrire les représentations conoyaux de la forme $\pi_{\mathbb{K}}(\eta \circ \det, 1)$ comme extension non scindée du caractère $\eta \circ \det$ par la représentation de la série spéciale $St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det)$. Par ailleurs, si l'on considère une représentation conoyau de la forme $\pi_{\mathbb{K}}(\eta \circ \det, \lambda)$ avec $\lambda \neq 1$, nous savons en construire un quotient de la forme $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\chi)$ à l'aide de l'isomorphisme $\tilde{\Delta}$. Un tel quotient doit alors être irréductible à cause du Corollaire 4.5.28, qui impose que le caracère χ ne s'étend pas en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$, et du Théorème 4.4.1. De nouveau par analogie avec les théories de référence, nous pensons que la surjection ainsi définie est en fait un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-modules, et que la démonstration de cette affirmation doit être identique à celle qui devrait prouver l'injectivité du morphisme de la Proposition 4.5.26.

Toutes ces considérations nous mènent à introduire l'hypothèse suivante, qui va nous permettre ensuite d'énoncer une conjecture regroupant deux assertions de nature différente : la première est une supposition que nous faisons et que nous n'avons pas encore complètement démontrée (pour des raisons essentiellement techniques et temporelles) ; la seconde est un fait que nous savons démontrer, mais dont la preuve n'est pas dans ce manuscrit par manque de temps.

Hypothèse 2. La paire (V, λ) avec V une représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ non nul vérifie l'une des deux assertions suivantes :

- V ne s'étend pas en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$;
- V s'étend en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse η de $\mathbb{G}$ et $\lambda \neq \eta(t_0)$.

Conjecture 1. *1. Pour toute paire* (V, λ) *satisfaisant à l'Hypothèse 2, la représentation conoyau* $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda)$ *est isomorphe au* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$*-module* $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$*, où* $\eta : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ *est le caractère lisse dont la restriction à* $\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)$ *vaut* $(V^{\mathbb{K} \cap \mathbb{U}})^\phi$ *et qui envoie* t_0 *sur* λ*.*

30. Ou du Théorème 4.5.16.
31. Mais n'avons pas encore eu le temps de rédiger cette preuve.

2. *Notons V_0 l'unique représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ contenue dans la représentation de Steinberg $St_{\mathbb{G}}$. Pour tout caractère lisse $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\pi_{\mathbb{K}}(V_0 \otimes (\eta \circ \det), 1)$ est une extension non scindée du caractère $\eta \circ \det$ par la représentation de la série spéciale $St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det)$.*

Remarque 4.5.31. La Conjecture 1 est en fait équivalente aux assertions d'injectivité que nous avons demandées ci-avant.

Paramétrisations possibles des représentations lisses irréductibles non supercuspidales de $\mathbb{G}$ - Seconde partie

Grâce à la Conjecture 1, nous pouvons obtenir les paramétrisations qui nous manquaient jusqu'alors, notamment pour compléter l'énoncé de la Proposition 4.5.30. Nous en déduirons que pour toute paire (V, λ) avec V représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ scalaire non nul, le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module admet un unique quotient irréductible, qui est de plus non supercuspidal.

Proposition 4.5.32. *Supposons que la Conjecture 1 soit vérifiée. Pour tout caractère lisse $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta \circ \det)$ admet une et une seule paramétrisation possible, à savoir la paire $(V_0 \otimes (\eta \circ \det), 1)$ où V_0 désigne l'unique représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ contenue dans $St_{\mathbb{G}}$.*

Démonstration. Le premier point de la Conjecture 1 s'applique grâce au premier cas de l'Hypothèse 2, assurant que la paire donnée dans l'énoncé est une paramétrisation possible de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta \circ \det)$ par le même argument que celui qui permet de prouver le Théorème 4.5.27. On conclut alors grâce au second point de la Proposition 4.5.30. □

Corollaire 4.5.33. *Supposons que la Conjecture 1 soit vraie. Pour toute paire (V, λ) avec V représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ non nul, le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{G}]$-module porté par la représentation conoyau $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda)$ admet (à isomorphisme près) un unique quotient irréductible. De plus, ce quotient n'est pas supercuspidal.*

Démonstration. Supposons que π soit un quotient irréductible de $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda)$. Si la paire (V, λ) satisfait à l'un des cas de l'Hypothèse 2, notre énoncé découle du premier point de la Conjecture 1 et du Théorème 4.4.1, qui assure en particulier que toute représentation lisse non supercuspidale de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ admet à isomorphisme près un unique quotient irréductible. Si la paire (V, λ) ne vérifie aucun des cas de l'Hypothèse 2, elle est alors redevable du second point de la Conjecture 1, ce qui termine la démonstration en utilisant à nouveau le Théorème 4.4.1. □

4.5.5 Supersingularité et supercuspidalité

Inspirée par ce qui a été fait pour $GL_2(F)$ [BL94, BL95] et pour $SL_2(F)$ (Chapitre 3), nous introduisons la définition suivante, dont nous commençons par vérifier qu'elle est bien posée.

Définition 4.5.34. Soit π une représentation lisse irréductible admissible de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On dit que la représentation π est *supersingulière (relativement à $\mathbb{K}$)* lorsqu'elle admet une paramétrisation possible de la forme $(V, 0)$.

Lemme 4.5.35. *Supposons que la Conjecture 1 soit vérifiée.*
La notion de supersingularité par rapport à $\mathbb{K}$ est alors bien définie : si π est une représentation lisse irréductible de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ admettant une paramétrisation possible de la forme $(V, 0)$ avec V représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, alors toute paramétrisation possible de π est de la forme $(W, 0)$ avec W représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Démonstration. Supposons que π soit une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathbb{G}$ admettant une paramétrisation possible de la forme (V, λ) avec $\lambda \neq 0$. Nous allons distinguer deux cas, selon que V provient ou non d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$.

- Si V ne s'étend pas en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$, le premier point de la Conjecture 1 implique que π est un quotient irréductible d'une représentation de la forme $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ avec $\eta : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ caractère lisse. Les Théorèmes 4.5.24 et 4.5.29 ainsi que le Corollaire 4.5.28 assurent alors que toute paramétrisation possible (W, μ) de π doit vérifier $\mu \neq 0$.
- Si V s'étend en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$, le second point de la Conjecture 1 implique que π est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$ (égal à V) et est donc redevable du Théorème 4.5.29 qui assure que l'unique paramétrisation de π n'est pas supersingulière.

Par contraposition, on a donc prouvé que si π admet une paramétrisation possible par rapport à $\mathbb{K}$ de la forme $(V, 0)$, alors toutes ses paramétrisations possibles par rapport à $\mathbb{K}$ doivent être de cette forme, ce qui termine la démonstration. □

Nous démontrons maintenant une propriété des paramètres de Hecke qui assurera[32] que la notion de supersingularité définie ici est équivalente à la notion de supersingularité définie dans [Her2, Section 4].

Lemme 4.5.36. *Soient V un poids de Serre de $\mathbb{K}$ et $\chi : \mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un homomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) il existe un caractère lisse $\chi_0 : \mathcal{H}_{\mathbb{T}}(V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ tel que $\chi = \chi_0 \circ \mathcal{S}_V$;

ii) $\chi(T_V) \neq 0$.

Démonstration. Ce que l'on a vu dans la Section 4.5.1 montre que l'algèbre $\mathcal{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^{\times}), V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$ est égale à l'algèbre de fractions rationnelles $\overline{\mathbb{F}}_p(\tau_1)$ et que l'isomorphisme de Satake $\mathcal{S}_V$ permet d'identifier $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$ à la sous-algèbre de polynômes $\overline{\mathbb{F}}_p[\tau_1]$ en envoyant T_V sur τ_1. Supposons alors qu'il existe un homomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres $\chi_0 : \mathcal{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^{\times}), V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ vérifiant $\chi = \chi_0 \circ \mathcal{S}_V$. On dispose dans ce cas des égalités suivantes dans $\mathcal{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^{\times}), V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}})$:

$$1 = \chi_0(1) = \chi_0(\tau_1)\chi_0(\tau_1^{-1}) ,$$

qui montrent notamment que $\chi_0(\tau_1) = \chi_0(\mathcal{S}_V(T_V)) = \chi(T_V)$ est non nul.
Réciproquement, si $\chi(T_V) = \lambda$ est un scalaire non nul, on peut définir un homomorphisme d'algèbres $\chi_0 : \mathcal{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^{\times}), V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ en envoyant τ_1 sur λ. Dans ce cas, on a par construction $\chi(T_V) = (\chi_0 \circ \mathcal{S}_V)(T_V)$, ce qui prouve que $\chi = \chi_0 \circ \mathcal{S}_V$ et termine la démonstration. □

Rappelons que puisque $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$ est une algèbre de polynômes en l'opérateur T_V précédemment défini, tout homomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres ayant $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V)$ pour source est entièrement déterminé par sa valeur en T_V. Ceci permet de poser la définition suivante.

Définition 4.5.37. Soit V un poids de Serre de $\mathbb{K}$. On appelle *caractère supersingulier de V* l'unique homomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres $\chi : \mathcal{H}_{\mathbb{G}}(V) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ envoyant T_V sur 0.

On dispose alors du résultat suivant, qui n'est qu'une reformulation de la définition de la supersingularité pour les représentations.

Corollaire 4.5.38. *Une représentation π est supersingulière par rapport à $\mathbb{K}$ si et seulement s'il existe une représentation lisse irréductible V de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ telle que π admette le caractère supersingulier de V pour paramètre de Hecke.*

32. Car $\mathbb{G}$ n'admet que deux sous-groupes paraboliques standard relativement à $\mathbb{T}$, à savoir $\mathbb{B}$ et $\mathbb{G}$.

Nous avons maintenant toutes les cartes en main pour démontrer, sous réserve que la Conjecture 1 soit vraie, l'équivalence des notions de supersingularité relativement à $\mathbb{K}$ et de supercuspidalité pour les représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathbb{G}$.

Théorème 4.5.39. *Supposons que la Conjecture 1 soit vérifiée. Pour toute représentation lisse irréductible admissible π de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, on a équivalence entre les assertions suivantes :*

i) *π est supersingulière relativement à $\mathbb{K}$;*

ii) *π est supercuspidale.*

Démonstration. L'implication *i)* $\Rightarrow$ *ii)* a déjà été démontrée dans la preuve du Lemme 4.5.35, mais nous rappelons tout de même l'argument, qui consiste à prouver l'implication contraposée. Supposons donc que π soit une représentation non supercuspidale de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. D'après la Proposition 4.4.9, trois possibilités se présentent :

- ou bien π est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$, auquel cas le Théorème 4.5.29 assure que π n'est pas supersingulière ;
- ou bien π est une représentation de la série principale de $\mathbb{G}$, et le Théorème 4.5.24 implique dans ce cas que π n'est pas supersingulière ;
- ou bien π est une représentation de la série spéciale de $\mathbb{G}$, auquel cas le Corollaire 4.5.28 assure que π n'est pas supersingulière.

Dans tous les cas, π n'est pas supersingulière, ce qui prouve par contraposition que toute représentation supersingulière est nécessairement supercuspidale.
Réciproquement, le Corollaire 4.5.33 assure qu'une représentation lisse irréductible admissible supercuspidale de $\mathbb{G}$ ne peut pas admettre de paramétrisation possible relativement à $\mathbb{K}$ de la forme (V, λ) avec $\lambda \neq 0$. Comme le Théorème 4.5.16 affirme qu'elle admet au moins une paramétrisation possible, on en conclut qu'elle doit être supersingulière, ce qui termine la démonstration. ☐

Remarque 4.5.40. Cet énoncé prouve en particulier que la notion de supersingularité est indépendante du choix de $\mathbb{K}$ puisqu'elle est équivalente à la notion de supercuspidalité qui n'a absolument aucun lien avec $\mathbb{K}$. On peut donc parler de représentation supersingulière sans avoir besoin de choisir un sous-groupe compact maximal $\mathbb{K}$ de référence.

Nous pouvons alors conclure ce chapitre par l'énoncé de classification suivant des représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, que l'on a démontré sous réserve de disposer de la Conjecture 1.

Théorème 4.5.41. *Supposons que la Conjecture 1 soit vérifiée.*
A isomorphisme près, toute représentation lisse irréductible admissible de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ appartient à l'une et et une seule des quatre familles suivantes :

i) *les caractères de $\mathbb{G}$, de la forme $\eta \circ \det$ avec $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse ;*

ii) *les représentations de la série principale, de la forme $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)$ avec $\eta : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse qui ne s'étend pas en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$.*

iii) *les représentations de la série spéciale, de la forme $St_{\mathbb{G}} \otimes (\eta \circ \det)$ avec $\eta : E^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse et $St_{\mathbb{G}} := \dfrac{\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$ représentation de Steinberg ;*

iv) *les représentations supersingulières.*

Démonstration. Fixons $\mathbb{K} \in \{\mathbb{K}_0, \mathbb{K}_1\}$ un sous-groupe ouvert compact maximal de $\mathbb{G}$. Si π est une représentation lisse irréductible admissible de $\mathbb{G}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, le Théorème 4.5.16 assure que π est un quotient d'une représentation de la forme $\pi_{\mathbb{K}}(V, \lambda)$ avec V une représentation lisse irréductible de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$. Si $\lambda = 0$, la représentation π est alors supersingulière ; si $\lambda \neq 0$, le premier point de la Conjecture 1 combiné aux Corollaires 4.5.28 et 4.5.33 ainsi qu'à la Proposition 4.5.26 et au Théorème 4.5.29 assure que π est respectivement isomorphe à un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{G}$, à une représentation de la série principale ou à une représentation de la série spéciale.

Ces quatre familles sont bien deux à deux disjointes : les résultats de la Section 4.4.3 assurent en effet que les trois premières familles sont deux à deux disjointes et le Théorème 4.5.39 montre que la quatrième famille est disjointe des trois premières. $\square$

Chapitre 5

Induction parabolique pour les groupes quasi-déployés de rang 1

5.1 Introduction

Soient p un nombre premier, C un corps algébriquement clos de caractéristique p et F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel fini k_F. Notons $G := \mathcal{G}(F)$ le groupe des points rationnels d'un groupe réductif connexe $\mathcal{G}$ défini sur F. L'étude des C-représentations lisses de G pousse en particulier à s'intéresser aux représentations de la forme $\mathrm{Ind}_Q^G(\sigma)$ où $Q = \mathcal{Q}(F)$ désigne le groupe des points rationnels d'un sous-groupe parabolique standard $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{G}$ dont on note $\mathcal{M}$ le sous-groupe de Levi standard et où σ désigne une C-représentation lisse de Q obtenue par inflation d'une C-représentation lisse irréductible admissible de $M = \mathcal{M}(F)$. On se pose plus précisément la question suivante : peut-on déterminer un critère d'irréductibilité pour la représentation $\mathrm{Ind}_Q^G(\sigma)$ et, lorsque celui-ci est en défaut, peut-on déterminer les facteurs de Jordan-Hölder de cette représentation ?

Le cas $\mathcal{G} = GL_2$ est traité dans les articles de Barthel-Livné [BL94, BL95]. Par des méthodes reposant sur la compréhension des modules à droite sur l'algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori, Ollivier [O1] a déterminé un critère d'irréductibilité pour ces représentations lorsque $\mathcal{G} = GL_n$ avec $n \geq 2$ quelconque, et a donné une étude plus détaillée des facteurs de Jordan-Hölder dans les cas de réductibilité lorsque $n = 3$. Vignéras [V5] a par la suite étendu ces résultats au cas où $\mathcal{G}$ est supposé déployé sur F.

Les Sections 3.4 et 4.4 de cette thèse répondent à notre question lorsque $\mathcal{G}$ est égal à SL_2 (qui est déployé sur F) ou à $U(2,1)$ (qui est quasi-déployé mais non déployé sur F) : pour ce faire, nous avons adapté les méthodes développées dans le cas de SL_2 au cas de $U(2,1)$. Ce chapitre a pour objectif de montrer que l'on peut naturellement généraliser ces arguments pour obtenir une description complète des représentations de G obtenues par induction parabolique lorsque $\mathcal{G}$ est quasi-déployé sur F et de F-rang 1, l'intérêt technique de ce cas étant que tout sous-groupe parabolique propre de $\mathcal{G}$ en est un sous-groupe de Borel, et que le sous-groupe de Levi standard est alors un tore, ce qui implique notamment que la représentation σ est simplement un C-caractère lisse.

Remarque 5.1.1. Nous pensons que les arguments et résultats présentés dans ce chapitre s'adaptent au cas où $\mathcal{G}$ est un groupe réductif connexe défini sur F de F-rang 1 (i.e. si l'on supprime l'hypothèse de quasi-déploiement).
Nous pensons aussi, en comparant le contenu de ce chapitre avec les résultats obtenus par Vignéras dans le cas déployé, qu'il est plus généralement possible d'adapter les méthodes utilisées dans ces deux cas pour traiter dans un premier temps le cas des groupes réductifs

connexes quasi-déployés sur F de rang quelconque, puis de supprimer ensuite l'hypothèse de quasi-déploiement.

Présentation des principaux résultats

Dans toute la suite, on notera en majuscule romane le groupe des F-points rationnels du groupe algébrique désigné par la majuscule calligraphiée correspondante (comme par exemple $G = \mathcal{G}(F)$, $T = \mathcal{T}(F)$, etc...).

On fixe un tore déployé maximal $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$ et l'on note $\mathcal{T}$ le centralisateur de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{G}$. Comme $\mathcal{G}$ est quasi-déployé sur F, le groupe $\mathcal{T}$ est un tore de $\mathcal{G}$, et est donc en particulier abélien. On se donne un sous-groupe de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathcal{G}$ contenant $\mathcal{T}$ et l'on note $\mathcal{U}$ son radical unipotent.

On considère un C-caractère lisse $\chi : T \to C^\times$ que l'on étend par inflation en un C-caractère lisse de B, et l'on s'intéresse à la C-représentation lisse de G définie par l'induite lisse $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$. Le premier résultat important de ce chapitre porte sur la structure de $C[B]$-module de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$, qui permet notamment d'obtenir un critère simple d'irréductibilité en tant que $C[G]$-module [1].

Théorème 5.1.2. *1. Le $C[B]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est un objet de longueur 2 qui admet comme sous-quotients irréductibles le caractère χ (comme quotient) et le sous-$C[B]$-module V_χ des éléments de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ s'annulant en l'élément neutre de G (comme sous-objet).*

2. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) le $C[B]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est décomposable ;

(b) le $C[G]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est réductible ;

(c) le caractère χ se prolonge en un C-caractère lisse de G.

3. Si χ se prolonge en un C-caractère lisse de G, alors $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est un $C[B]$-module totalement décomposé, ainsi qu'un $C[G]$-module indécomposable de longueur 2 qui admet comme sous-quotients irréductibles le caractère χ (comme sous-objet) et la représentation $St_G \otimes \chi$ (comme quotient), où St_G désigne la représentation de Steinberg.

Remarque 5.1.3. Rappelons ici que si χ est un C-caractère lisse de G, l'application C-linéaire envoyant f sur $\chi^{-1}f$ définit un isomorphisme de $C[G]$-modules entre $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ et $\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1}) \otimes \chi$.

Le Théorème 5.1.2 permet donc de classer les sous-quotients irréductibles des représentations qui nous intéressent en trois familles :
- les C-caractères de G ;
- les représentations *de la série principale* : ce sont les représentations de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ avec χ un C-caractère lisse de B qui ne s'étend pas en un C-caractère lisse de G ;
- les représentations *de la série spéciale* : ce sont les représentations de la forme $St_G \otimes \eta$ avec η un C-caractère lisse de G.

Le prochain énoncé montre que cette classification fournit en fait une partition des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles non supercuspidales de G sur C.

Théorème 5.1.4. *Il n'existe pas d'isomorphisme entre représentations lisses irréductibles non supercuspidales provenant de deux familles distinctes.*

Nous nous intéressons ensuite à l'existence éventuelle d'isomorphismes entre représentations non supercuspidales provenant d'une même famille. Le cas des représentations de la série principale se traite rapidement grâce aux résultats obtenus sur leur structure de $C[B]$-module.

1. Qui correspond à un critière d'indécomposabilité en tant que $C[B]$-module.

Lemme 5.1.5. *Il n'existe pas d'isomorphisme entre représentations de la série principale induites par des caractères distincts.*

Pour étudier les entrelacements pouvant exister entre représentations de la série spéciale, nous avons besoin d'informations supplémentaires portant notamment sur la structure des espaces de vecteurs invariants sous l'action du pro-p-Iwahori $I(1)$ de G, dont la définition est rappelée dans la Section 5.2.1. Ceci mène tout d'abord au résultat suivant, qui décrit l'espace des $I(1)$-invariants des représentations obtenues par induction parabolique.

Théorème 5.1.6. *Soit $\chi : B \to C^\times$ un C-caractère lisse. Notons χ^+ le C-caractère lisse de I obtenu par inflation du caractère de $T(\mathcal{O}_F)$ donné par la restriction de χ. De même, on note χ^- le C-caractère lisse de I obtenu par inflation de la restriction de χ^{w_0} à $T(\mathcal{O}_F)$, où w_0 est l'élément non trivial du groupe de Weyl fini de G relatif à T.*

1. *L'espace des vecteurs $I(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur C.*
2. *Le $C[G]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ admet au plus deux composantes I-isotypiques non nulles, à savoir celles associées à χ^+ et à χ^-. Plus précisément, il en admet exactement une si et seulement si $\chi^+ = \chi^-$, et en admet deux sinon.*
   En particulier, le groupe I agit trivialement sur l'espace des vecteurs $I(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ si et seulement si la restriction à $T(\mathcal{O}_F)$ du caractère χ est triviale (auquel cas l'on dit que χ est un caractère non ramifié*).*
3. *Le $C[G]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est engendré par le sous-espace de ses vecteurs $I(1)$-invariants.*

On peut alors démontrer le résultat suivant, qui décrit l'espace des vecteurs $I(1)$-invariants de la représentation de Steinberg St_G, et en déduire une condition nécessaire à l'existence d'entrelacement entre deux représentations de la série spéciale.

Théorème 5.1.7. 1. *On dispose de la suite exacte courte suivante de C-espaces vectoriels :*

$$1 \longrightarrow C \longrightarrow \left(\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})\right)^{I(1)} \longrightarrow St_G^{I(1)} \longrightarrow 1 \ .$$

En particulier, l'espace des vecteurs $I(1)$-invariants d'une représentation de la série spéciale est de dimension 1 sur C.

2. *Soit $\eta : G \to C^\times$ un caractère lisse. Si St_G et $St_G \otimes \eta$ définissent des $C[G]$-modules isomorphes, alors η est un caractère non ramifié (i.e. de restriction triviale au sous-groupe $T(\mathcal{O}_F)$).*

Plan du chapitre

La première section regroupe divers préliminaires : on y introduit les notations utilisées dans la suite et l'on y rappelle quelques résultats classiques (décompositions de Bruhat, d'Iwahori, d'Iwasawa). Le coeur de ce chapitre réside dans la Section 5.3, où l'on fournit une preuve du Théorème 5.1.2. On étudie ensuite dans la Section 5.4 les entrelacements pouvant éventuellement exister entre représentations non supercuspidales, ce qui fournit en particulier le Théorème 5.1.4 et le Lemme 5.1.5. La Section 5.5 est enfin dédiée à l'étude des espaces de vecteurs $I(1)$-invariants des représentations recontrées jusqu'alors, et permet notamment de démontrer les Théorèmes 5.1.6 et 5.1.7.

5.2 Préliminaires

5.2.1 Notations

On fixe un nombre premier p et un corps local non archimédien F complet pour une valuation discrète, de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel fini. On note $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F, $\mathfrak{p}_F$ son idéal maximal et $k_F := \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}_F$ son corps résiduel. On fixe une fois pour toutes une uniformisante $\varpi_F \in \mathfrak{p}_F$ et l'on se donne un corps C algébriquement clos de caractéristique p (qui sera le corps des coefficients des représentations considérées).

On désigne par $\mathcal{G}$ un groupe réductif connexe défini sur F que l'on suppose quasi-déployé sur F et de F-rang semi-simple égal à 1. On note $G := \mathcal{G}(F)$ le groupe de ses points rationnels et l'on fixe un sommet spécial v_0 de l'arbre de Bruhat-Tits $\mathcal{X}$ [T, Section 2] du groupe adjoint G_{ad} de G. On note K le sous-groupe parahorique spécial attaché au sommet v_0 : il est canoniquement égal au groupe des $\mathcal{O}_F$-points d'un schéma en groupes lisse affine connexe $\mathcal{G}_K$ défini sur $\mathcal{O}_F$ et de fibre générique égale à $\mathcal{G}$ [T, Section 3.4.1]. On sait de plus [BT2, 5.1.32.ii)] que si $\overline{\mathcal{G}}_K$ désigne le quotient réductif maximal de la fibre spéciale de $\mathcal{G}_K$, alors l'application de réduction modulo ϖ_F induit un morphisme surjectif $red : K \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{G}}_K(k_F)$ dont le noyau est égal au pro-p-radical $K(1)$ de K.

On fixe un tore déployé maximal $\mathcal{S} \simeq \mathbb{G}_m$ de $\mathcal{G}$ tel que v_0 appartient à l'appartement défini par $\mathcal{S}$, et l'on note $\mathcal{T}$ le centralisateur de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{G}$: c'est un tore de $\mathcal{G}$ qui vérifie $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ si et seulement si $\mathcal{G}$ est déployé sur F. On définit le groupe de Weyl fini W_0 de $\mathcal{G}$ relatif à $\mathcal{T}$ comme le quotient $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})/\mathcal{T}$, où $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ désigne le normalisateur de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{G}$. D'après [LAG, Corollary V.21.4], le groupe W_0 est aussi égal au quotient $N_G(T)/T$, où $N_G(T)$ désigne le normalisateur de T dans G. Puisque $\mathcal{G}$ est de rang 1 sur F, le groupe W_0 est réduit à deux éléments [LAG, Proposition IV.13.13]. Comme K est spécial, on a aussi $W_0 = (N_G(T) \cap K)/(T \cap K)$, ce qui permet de choisir un représentant $w_0 \in N_G(T) \cap K$ de l'élément non trivial de W_0. Par définition, il vérifie en particulier $w_0^2 \in T \cap K$.

On se donne un sous-groupe de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathcal{G}$ contenant $\mathcal{T}$ et l'on note $\mathcal{U}$ son radical unipotent. Il admet notamment la décomposition de Levi standard $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{U}$, ce qui fournit (en passant aux points rationnels) une décomposition en produit semi-direct $B = TU$ avec U radical unipotent de B. On note $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^{w_0}$ le sous-groupe de Borel de $\mathcal{G}$ opposé à $\mathcal{B}$ (par rapport à $\mathcal{T}$) et $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^{w_0}$ son radical unipotent. On a donc $\mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{B}} = \mathcal{T}$ et $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{T}\overline{\mathcal{U}}$, ce qui implique que l'on a $\overline{B} = T\overline{U}$ avec $\overline{U} = w_0 U w_0^{-1}$ radical unipotent de $\overline{B} = w_0 B w_0^{-1}$.

On fixe une arête contenant le sommet v_0 de l'appartement défini par $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{X}$ et l'on note I le stabilisateur de cette arête sous l'action de G : c'est un sous-groupe d'Iwahori [BT2, 5.2.6] qui s'identifie à l'ensemble des éléments de K dont l'image par l'application red appartient au groupe fini $\mathcal{B}(k_F)$ [T, Section 3.7, page 55]. Son pro-p-radical $I(1)$, appelé *pro-p-Iwahori de G*, s'identifie quant à lui aux éléments de K dont l'image par l'application red appartient au groupe fini $\mathcal{U}(k_F)$. En outre, on dispose d'une factorisation de I sous la forme $I = \mathcal{T}(k_F)I(1)$ [T, Section 3.7] qui assure notamment [2] que l'on a $I = \mathcal{T}(\mathcal{O}_F^\times)I(1)$.

On fixe enfin un générateur λ du groupe $X_*(S)$ des F-cocaractères du tore déployé maximal S de G, et l'on pose $t_0 := \lambda(\varpi_F)$, ce qui assure en particulier que l'on a $S(F)/S(\mathcal{O}_F) \simeq t_0^{\mathbb{Z}}$ [Car, Section 3.1].

2. Après relèvement de $\mathcal{T}(k_F)$ par l'application de réduction modulo ϖ_F.

5.2.2 Quelques décompositions de G

On commence par rappeler les énoncés des décompositions de Bruhat [IGA, Théorème 11.4.ii)], d'Iwasawa et d'Iwahori.

Lemme 5.2.1 (Décomposition de Bruhat)**.** *Le groupe G admet les décompositions en doubles classes disjointes suivantes :*

$$G = B \sqcup Bw_0B = B \sqcup Bw_0U \ ,$$

avec unicité de l'écriture dans la seconde décomposition. De plus, Bw_0U est une partie ouverte dense de G tandis que B en est une partie fermée non ouverte.

Remarque 5.2.2. Signalons ici que l'on dispose des mêmes décompositions lorsque l'on travaille avec les groupes finis correspondants [3] [IGA, Théorème 11.4.ii)] :

$$\mathcal{G}(k_F) = \mathcal{B}(k_F) \sqcup \mathcal{B}(k_F)w_0\mathcal{B}(k_F) = \mathcal{B}(k_F) \sqcup \mathcal{B}(k_F)w_0\mathcal{U}(k_F) \ .$$

Lemme 5.2.3 (Décomposition d'Iwasawa)**.** *Le groupe G admet la factorisation suivante : $G = BK$.*

Lemme 5.2.4 (Décomposition d'Iwahori)**.** *L'application produit établit une bijection*

$$(I \cap U)(I \cap T)(I \cap \overline{U}) \xrightarrow{\simeq} I \ .$$

De plus, cette propriété reste vraie quel que soit l'ordre mis sur les facteurs du membre de gauche.

Remarque 5.2.5. Comme les ensembles $I \cap U$ et $I \cap \overline{U}$ sont inclus dans $I(1)$, la factorisation de I sous la forme $(I \cap U)(I \cap \overline{U})(I \cap T)$ implique que l'on dispose de la factorisation suivante de $I(1)$:

$$I(1) = (I(1) \cap U)(I(1) \cap \overline{U})(I(1) \cap T) \ . \tag{5.1}$$

On termine cette section par une description des doubles classes de G modulo B à droite et I ou $I(1)$ à gauche.

Lemme 5.2.6. *Le groupe G admet les décompositions en doubles classes disjointes suivantes :*

$$G = BI \sqcup Bw_0I = BI(1) \sqcup Bw_0I(1) \ .$$

Démonstration. Etant donné que w_0 normalise T, que T est un sous-groupe de B et que l'on a $I = \mathcal{T}(\mathcal{O}_F^\times)I(1)$, il est immédiat de voir que la décomposition associée à $I(1)$ est une conséquence directe de celle qui est associée à I. Par ailleurs, le relèvement de la décomposition de Bruhat finie rappelée dans la Remarque 5.2.2 via l'application de réduction modulo ϖ_F fournit la décomposition en doubles classes disjointes suivante de K :

$$K = I \sqcup Iw_0I \ .$$

On déduit alors de la décomposition d'Iwasawa que l'on a $G = BK = BI \sqcup BIw_0I$. Remarquons maintenant que la décomposition d'Iwahori permet d'écrire que

$$BIw_0I = B(I \cap T)(I \cap U)(I \cap \overline{U})w_0I = B(I \cap \overline{U})w_0I \ .$$

Il suffit alors de remarquer que $w_0^{-1}(I \cap \overline{U})w_0$ est contenu dans $K \cap w_0^{-1}\overline{U}w_0 = \mathcal{U}(\mathcal{O}_F)$, donc en particulier dans $I(1) \subset I$, pour conclure que l'on a $BIw_0I = Bw_0I$ et terminer ainsi la démonstration. $\square$

3. Par abus de notation, on note encore w_0 l'image dans $\overline{\mathcal{G}}_K(k_F)$ de l'élément $w_0 \in N_G(T) \cap K$ choisi précédemment.

5.3 Structure des représentations obtenues par induction parabolique

L'objectif de cette section est de démontrer le Théorème 5.1.2, qui généralise directement les Théorèmes 3.4.1 et 4.4.1 et peut être reformulé de la manière suivante.

Théorème 5.3.1. *Soit $\chi : B \to C^\times$ un caractère lisse obtenu par inflation d'un C-caractère lisse du sous-groupe de Levi T.*

1. *Le $C[B]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est de longueur 2 et admet χ comme quotient. Il est décomposable si et seulement si χ se prolonge en un C-caractère lisse de G. Dans ce cas, il est totalement décomposé.*
2. *Le $C[G]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est réductible si et seulement si χ se prolonge en un C-caractère lisse de G. Dans ce cas, c'est un $C[G]$-module indécomposable de longueur 2 qui admet χ comme sous-objet et la représentation de la série spéciale $St_G \otimes \chi$ comme quotient, où $St_G := \dfrac{\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$ est la représentation de Steinberg de G.*

5.3.1 Structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[B]$-module

On fixe désormais un C-caractère lisse χ de T et l'on note encore $\chi : B \to C^\times$ le C-caractère lisse de B obtenu par inflation. Cette première sous-section a pour but de démontrer le premier point du Théorème 5.3.1. Pour ce faire, on remarque que l'application d'évaluation en l'élément neutre 1 de G définit un morphisme surjectif de $C[B]$-modules

$$\mathrm{Ind}_B^G(\chi) \twoheadrightarrow \chi$$

dont le noyau V_χ est égal au sous-espace des éléments de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ à support dans Bw_0U. Pour montrer que $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est de longueur 2 comme représentation de B sur C, il nous suffit donc de prouver que V_χ est un $C[B]$-module irréductible. Pour cela, on commence par donner une autre caractérisation des éléments de V_χ.

Lemme 5.3.2. *Un élément $f \in \mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ appartient à V_χ si et seulement s'il existe un sous-groupe ouvert compact U_0 de U tel que le support de f soit contenu dans Bw_0U_0.*

Démonstration. Seule l'implication directe de cette équivalence nécessite un argument. Supposons que la fonction f appartienne à V_χ. Elle vérifie $f(1) = 0$ donc, par hypothèse de lissité, elle est nulle sur un ensemble de la forme $B\overline{U}_0$ avec $\overline{U}_0$ un sous-groupe ouvert compact [4] de $\overline{U}$. Remarquons maintenant que, puisque $B \cap \overline{U} = \{1\}$, la décomposition de Bruhat raffinée assure que tout élément non trivial de $B\overline{U}_0$ est contenu dans Bw_0U. Rappelons alors que l'application naturelle envoyant un élément u sur la classe Bw_0u induit un homéomorphisme de U sur $B\backslash Bw_0U$ et que le quotient $B\backslash G$ est compact. Par suite, l'image du support de f sous l'homéomorphisme sus-mentionné est un sous-groupe ouvert compact U_0 de U, et le support de f est par construction contenu dans la double classe Bw_0U_0, ce qui termine la démonstration. $\square$

Cet énoncé va nous permettre de donner un autre modèle du $C[B]$-module V_χ, pour lequel l'assertion d'irréductibilité sera plus facile à démontrer. Notons $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ l'espace des fonctions lisses définies sur U, à valeurs dans C et à support compact. On le munit de l'action lisse à gauche de B définie par la formule suivante :

$$\forall\, b \in B,\ \forall\, f \in \mathcal{C}_c^\infty(U),\ b \cdot f := [x \mapsto \chi(w_0tw_0^{-1}) f(t^{-1}xtu)]\ , \tag{5.2}$$

4. Qui dépend bien entendu de f.

où $b = tu$ est une factorisation de b dans TU. Si l'on pose $\mathcal{J}(f) := [u \mapsto f(w_0 u)]$ pour toute fonction $f \in V_\chi$, le Lemme 5.3.2 assure que $\mathcal{J}$ est à valeurs dans $\mathcal{C}_c^\infty(U)$, et l'on vérifie immédiatement que $\mathcal{J}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels dont l'inverse est donné par l'application envoyant une fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ sur l'élément de V_χ défini par $[bw_0u \mapsto \chi(b)\phi(u)]$. L'application $\mathcal{J}$ est par ailleurs B-équivariante : en effet, si $b = tu$ est un élément de B et si f appartient à V_χ, on a alors

$$\begin{array}{rcl} \forall\, x \in U, \quad (b\cdot \mathcal{J})(x) & = & \chi(w_0 t w_0^{-1})\mathcal{J}(f)(t^{-1}xtu) \\ & = & \chi(w_0 t w_0^{-1}) f(w_0 t^{-1} x t u) \\ & = & \chi(w_0 t w_0^{-1}) f(w_0 t^{-1} w_0^{-1} w_0 x t u) \\ & = & \chi(w_0 t w_0^{-1})\chi(w_0 t^{-1} w_0^{-1}) f(w_0 x t u) \\ & = & f(w_0 x b) \\ & = & (b\cdot f)(w_0 x) \\ & = & \mathcal{J}(b\cdot f)(x)\ , \end{array}$$

ce qui prouve que l'on a bien $\mathcal{J}(b\cdot f) = b\cdot \mathcal{J}(f)$. Nous avons ainsi démontré le résultat suivant.

Lemme 5.3.3. *Le $C[B]$-module V_χ est isomorphe au $C[B]$-module défini sur $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ par la formule* (5.2)*.*

Prouver l'irréductibilité du $C[B]$-module V_χ revient donc à prouver celle de $\mathcal{C}_c^\infty(U)$, que nous allons démontrer à partir d'arguments reposant sur la topologie du groupe localement profini U. Pour ce faire, on commence par rappeler [Vig96, II.1.3.ii)] que U admet une filtration croissante exhaustive par des pro-p-sous-groupes ouverts compacts et que, par hypothèse de lissité, tout élément de $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ est à support dans un tel sous-groupe.
Par ailleurs, si U_0 est un sous-groupe ouvert compact de U, il est facile de voir que l'espace vectoriel des éléments U_0-invariants de $\mathcal{C}_c^\infty(U_0)$ est de dimension 1 sur C et qu'il est engendré par la fonction indicatrice 1_{U_0} de U_0 : en effet, si f est un élément U_0-invariant de $\mathcal{C}_c^\infty(U_0)$, la formule (5.2) montre que l'on a $f(u) = (u\cdot f)(1) = f(1)$ pour tout élément $u \in U_0$, ce qui prouve que f est constante sur U_0.
Nous allons maintenant démontrer le résultat suivant, qui nous permettra d'obtenir facilement l'assertion d'irréductibilité voulue.

Lemme 5.3.4. *Pour tout sous-groupe ouvert compact U_0 de U, la fonction indicatrice 1_{U_0} engendre le $C[B]$-module $\mathcal{C}_c^\infty(U)$.*

Démonstration. Soit U_0 un sous-groupe ouvert compact de U. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on pose $U_n := t_0^n U_0 t_0^{-n}$. L'application de [Vig96, I.3.v)] à l'élément $m = t_0 \in Z(T) = T$ montre que la famille $\{U_n,\ n \geq 1\}$ est une filtration décroissante de sous-groupes ouverts compacts d'intersection triviale, donc qu'elle fournit une base de voisinages pour l'élément neutre 1, tandis que la famille $\{U_{-n},\ n \geq 1\}$ est une filtration croissante exhaustive de U. En outre, un calcul immédiat à partir de la formule (5.2) assure que l'on dispose des identités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \forall\, u \in U, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}, & u\cdot 1_{U_n} = 1_{U_n u^{-1}}\ , \\ \forall\, t \in T, & t\cdot 1_{U_0} = \chi(w_0 t w_0^{-1}) 1_{tU_0t^{-1}}\ , \end{array} \right.$$

ce qui prouve que l'action de $B = TU$ sur 1_{U_0} permet d'engendrer tout élément de $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ et termine la démonstration. □

Corollaire 5.3.5. *Le $C[B]$-module $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ est irréductible.*

Démonstration. Supposons que W soit une sous-représentation lisse non nulle de $\mathcal{C}_c^\infty(U)$. Choisissons un élément non nul $f \in W$ ainsi qu'un pro-p-sous-groupe ouvert compact U_0 de U qui contient le support de f. Le $C[U_0]$-module engendré par f est alors contenu dans $C_c^\infty(U_0)$, et le Lemme 2.1.9 assure qu'il contient un vecteur non nul invariant sous l'action du pro-p-groupe U_0. Le rappel effectué avant d'énoncer le Lemme 5.3.4 implique alors que ce module doit contenir la fonction indicatrice 1_{U_0}, et donc que le $C[B]$-module engendré par f, qui est par construction inclus dans W, contient a fortiori la fonction 1_{U_0}. Le Lemme 5.3.4 implique alors que $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ est contenu dans W, ce qui montre que $W = \mathcal{C}_c^\infty(U)$ et termine la démonstration. □

Corollaire 5.3.6. *Le* $C[B]$*-module* $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ *est de longueur* 2*, avec* χ *comme quotient et* V_χ *comme sous-objet.*

Démonstration. C'est une reformulation du Corollaire 5.3.5 à partir de la définition de V_χ. □

Remarque 5.3.7. Ce qui précède montre en particulier que le seul sous-quotient de dimension finie du $C[B]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est égal à χ, et que les deux seuls sous-quotients irréductibles de ce même module sont χ et V_χ.

Une fois traitée la question de la réductibilité, il est naturel de s'interroger quant à l'indécomposabilité éventuelle du $C[B]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$. Le Corollaire 5.3.6 permet de reformuler ce problème de la façon suivante : quels sont les cas où le caractère χ est un sous-$C[B]$-module de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$?
Supposons qu'il existe un élément $f \in \mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ tel que $b \cdot f = \chi(b)f$ pour tout élément $b \in B$. On a alors :

$$\forall\ b \in B,\ \forall\ g \in G,\ f(bg) = \chi(b)f(g) = f(gb)\ . \tag{5.3}$$

Ces égalités vont nous permettre de démontrer le résultat suivant, qui fournit une condition nécessaire de décomposabilité dont nous vérifierons ensuite la suffisance.

Lemme 5.3.8. *La droite* $C \cdot f$ *engendrée par* f *est stable sous l'action de* G*. Autrement dit : si* χ *est un sous-objet du* $C[B]$*-module* $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$*, alors* χ *s'étend en un* C*-caractère lisse de* G*.*

Démonstration. Nous allons travailler en trois étapes : nous commençons par prouver que f ne s'annule pas sur G, puis qu'elle est fixe sous l'action de $\overline{U}$, ce qui nous permettra de conclure.

1ère étape : Supp $f = G$: L'irréductibilité du $C[B]$-module de dimension infinie V_χ implique que f n'appartient pas à V_χ, donc que $f(1)$ est non nul, ce qui prouve grâce à l'expression (5.3) que B est contenu dans le support de f. Celui-ci étant par suite non vide, il doit être d'intersection non vide avec l'ouvert dense Bw_0U. La formule (5.3) implique alors que $f(w_0)$ doit être non nul, puis que tout l'ouvert Bw_0U est nécessairement contenu dans le support de f. La décomposition de Bruhat raffinée permet alors de conclure que le support de f est égal à G.

2ème étape : f est fixe sous l'action de $\overline{U}$: De nouveau grâce à [Vig96, I.3.v)], on sait que si $\overline{U}_0$ est un sous-groupe ouvert compact de $\overline{U}$, la famille $\{t_0^{-n}\overline{U}_0t_0^n\}_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de sous-groupes ouverts compacts de $\overline{U}$ d'intersection triviale tandis que la famille $\{t_0^n\overline{U}_0t_0^{-n}\}_{n\geq 1}$ est une filtration croissante exhaustive de $\overline{U}$.
Fixons un tel sous-groupe ouvert compact $\overline{U_0}$. Par lissité de la fonction f, il existe un entier $N \geq 1$ tel que f soit fixe sous l'action de $t_0^{-N}\overline{U}_0t_0^N$. Soient maintenant $u \in \overline{U}$ et $n \geq 1$ tel que u appartienne à $t_0^n\overline{U}_0t_0^{-n}$. En écrivant que $n = -N + (n+N)$, on obtient l'existence d'un élément $v \in t_0^{-N}\overline{U}_0t_0^N$ tel que $u = t_0^{n+N}vt_0^{-(n+N)}$, et l'on a alors

$$u \cdot f = (t_0^{n+N}vt_0^{-(n+N)}) \cdot f = \chi(t_0^{-(N+n)})(t_0^{n+N}v) \cdot f = \chi(t_0^{-(N+n)})\chi(t_0^{N+n})f = f\ .$$

On a ainsi démontré que f est fixe sous l'action d'un élément $u \in \overline{U}$ arbitrairement choisi, ce qui signifie que f est fixe sous l'action de $\overline{U}$.

3ème étape : Conclusion : La formule (5.3) assure que la droite engendrée par f est stable sous l'action de B. Par décomposition de Bruhat, il nous suffit de montrer que cette droite est stable sous l'action de w_0 pour conclure quant à sa stabilité sous l'action de tout élément de G. Nous allons prouver que w_0 agit que f par le scalaire $\lambda := \dfrac{f(w_0)}{f(1)}$, qui est bien défini et non nul d'après la première étape.
Pour cela, considérons un élément x de G. D'après la décomposition de Bruhat raffinée, il satisfait à l'un des deux cas suivants.
– Ou bien $x = tu$ appartient à B, auquel cas l'on a

$$\begin{aligned}(w_0 \cdot f)(x) &= f(xw_0)\\ &= \chi(x)f(w_0)\\ &= \frac{f(w_0)}{f(1)}\chi(x)f(1)\\ &= \frac{f(w_0)}{f(1)}f(x)\\ &= \lambda f(x)\ .\end{aligned}$$

Remarquons de plus que puisque w_0^2 appartient à T, on dispose de l'égalité suivante :

$$\chi(w_0^2)f = w_0^2 \cdot f = \left(\frac{f(w_0)}{f(1)}\right)^2 f\ . \tag{5.4}$$

– Ou bien $x = bw_0u$ appartient à Bw_0U, auquel cas l'on a

$$\begin{aligned}(w_0 \cdot f)(x) &= f(bw_0uw_0)\\ &= \chi(b)f(w_0uw_0^{-1}w_0^2)\\ &= \chi(b)(w_0^2 \cdot f)(w_0uw_0^{-1})\\ &= \chi(b)\left(\frac{f(w_0)}{f(1)}\right)^2 f(w_0uw_0^{-1}) && \text{par (5.4)}\\ &= \chi(b)\left(\frac{f(w_0)}{f(1)}\right)^2 (w_0uw_0^{-1} \cdot f)(1) && \text{avec } w_0uw_0^{-1} \in \overline{U}\\ &= \chi(b)\left(\frac{f(w_0)}{f(1)}\right)^2 f(1) && \text{par la deuxième étape}\\ &= \chi(b)\left(\frac{f(w_0)}{f(1)}\right) f(w_0)\\ &= \lambda f(bw_0)\\ &= \lambda f(bw_0u) && \text{par (5.3)}\\ &= \lambda f(x)\ .\end{aligned}$$

Dans tous les cas, nous avons prouvé que $(w_0 \cdot f)(x) = \lambda f(x)$, ce qui montre que w_0 agit sur f par le scalaire λ et termine la démonstration. □

Réciproquement, supposons que χ s'étende en un C-caractère lisse de G (encore noté χ). On dispose alors d'un isomorphisme de $C[G]$-modules [5] de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ sur $\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1}) \otimes \chi$ qui permet de se limiter à l'étude du cas où $\chi = \mathbf{1}$ est le caractère trivial de G. Il est toutefois immédiat de constater que l'ensemble des fonctions constantes $G \to C$ est un sous-$C[G]$-module de $\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})$ sur lequel G agit trivialement, ce qui termine la preuve du résultat suivant, et achève ainsi la démonstration du premier point du Théorème 5.3.1.

5. Donné par $[f \mapsto \chi^{-1}f]$.

Proposition 5.3.9. *Le* $C[B]$*-module* $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ *est décomposable si et seulement si le caractère* χ *s'étend en un* C*-caractère lisse de* G*. Dans ce cas, on a* $\mathrm{Ind}_B^G(\chi) = \chi \oplus V_\chi$*, où* V_χ *est le noyau de la surjection* $\mathrm{Ind}_B^G(\chi) \twoheadrightarrow \chi$ *définie par l'application d'évaluation en* 1*.*

5.3.2 Structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module

Nous allons déduire des résultats de la sous-section précédente une démonstration rapide du second point du Théorème 5.3.1, qui décrit la structure de $C[G]$-module portée par $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$. Supposons tout d'abord que $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ soit un $C[G]$-module réductible. Le Corollaire 5.3.6 assure alors que c'est un objet de longueur 2 qui possède un sous-quotient de dimension 1 dont la restriction à B doit être égale au caractère χ. En particulier, ceci prouve que χ doit se prolonger en un C-caractère lisse de G.

Réciproquement, l'argument qui précède l'énoncé de la Proposition 5.3.9 montre que si χ s'étend en un C-caractère lisse de G, alors c'est un sous-objet de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$. Le Corollaire 5.3.6 assure dans ce cas que le quotient $\dfrac{\mathrm{Ind}_B^G(\chi)}{\chi}$ est un $C[G]$-module irréductible. Ce quotient est par ailleurs isomorphe à la représentation $St_G \otimes \chi$, où l'on note $St_G := \dfrac{\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$ la représentation de Steinberg de G.

Dans tous les cas, le $C[G]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est indécomposable : s'il ne l'était pas, le Corollaire 5.3.6 impliquerait alors que l'espace V_χ formé des éléments de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ s'annulant sur l'élément neutre de G est stable sous l'action de G. Mais ceci est faux : en effet, si U_0 est un sous-groupe ouvert compact de U, le Lemme 5.3.2 assure que la fonction indicatrice de Bw_0U_0 appartient à V_χ. Son image sous l'action de $w_0 \in G$ est cependant égale à la fonction indicatrice du fermé $Bw_0U_0w_0^{-1}$, qui n'appartient pas à V_χ puisqu'elle prend la valeur 1 sur l'élément neutre de G.

Si l'on récapitule, on voit que l'on a finalement démontré le résultat suivant, qui n'est autre que le second point de l'énoncé du Théorème 5.3.1.

Théorème 5.3.10. *Le* $C[G]$*-module* $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ *est réductible si et seulement si* χ *s'étend en un* C*-caractère lisse de* G*. Dans ce cas, c'est un objet indécomposable de longueur* 2 *dont les sous-quotients irréductibles sont* χ *(comme sous-objet) et* $St_G \otimes \chi$ *(comme quotient), où* $St_G := \dfrac{\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$ *désigne la représentation de Steinberg de* G*.*

5.4 Etude des entrelacements

D'après les résultats démontrés jusqu'à présent, toute représentation lisse irréductible de G qui est sous-quotient d'une représentation de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$, où $\chi : B \to C^\times$ est un caractère lisse obtenu par inflation d'un C-caractère lisse de T, appartient à l'une des trois familles suivantes :

- les C-caractères lisses de G ;
- les représentations *de la série principale* : ce sont les représentations de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ où χ est un C-caractère lisse de B obtenu par inflation d'un C-caractère lisse de T qui ne peut pas être prolongé en un C-caractère lisse de G ;
- les représentations *de la série spéciale* : ce sont les représentations de la forme $St_G \otimes \eta$, où η est un C-caractère lisse de G.

Nous commençons par démontrer qu'il n'existe pas d'isomorphisme entre représentations provenant de familles distinctes. Pour cela, on remarque tout d'abord que les seuls sous-quotients de dimension finie qui apparaissent dans notre liste sont les C-caractères lisses de G, ce qui implique qu'un élément de la première famille ne peut pas être isomorphe à un élément de l'une des deux autres familles. Nous allons maintenant prouver qu'un élément de la deuxième famille ne peut pas être isomorphe à un élément de la troisième famille.

Lemme 5.4.1. *Pour tous C-caractères lisses $\chi : B \to C^\times$ et $\eta : G \to C^\times$, les représentations de G portées par $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ et $St_G \otimes \eta$ ne sont pas isomorphes.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'un tel isomorphisme existe. Il assure tout d'abord l'irréductibilité du $C[G]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ puisque le $C[G]$-module $St_G \otimes \eta$ est irréductible d'après le Théorème 5.3.10.
Par ailleurs, la composée de cet isomorphisme avec la surjection $\mathrm{Ind}_B^G(\eta) \twoheadrightarrow St_G \otimes \eta$ fournit un morphisme surjectif de $C[G]$-modules de $\mathrm{Ind}_B^G(\eta)$ vers $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ qui correspond, par réciprocité lisse de Frobenius, à un morphisme non nul (donc surjectif) de $C[B]$-modules $\mathrm{Ind}_B^G(\eta) \twoheadrightarrow \chi$. La Remarque 5.3.7 implique alors que le caractère χ doit être égal au caractère $\eta|_B$. Autrement dit, le caractère χ se prolonge en un C-caractère lisse de G (à savoir η), ce qui contredit l'irréductibilité du $C[G]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ à cause du Théorème 5.3.10. □

Remarque 5.4.2. Une autre démonstration de ce résultat, reposant sur l'étude des espaces de vecteurs $I(1)$-invariants, sera donnée dans la prochaine section (voir Remarque 5.5.6).

Maintenant que nous avons prouvé que les trois familles apparaissant dans notre liste sont deux à deux disjointes, nous nous intéressons aux entrelacements pouvant exister entre deux objets d'une même famille. Nous traitons tout d'abord le cas des représentations de la série principale, pour lesquelles nous montrons qu'il n'existe pas d'entrelacement non trivial.

Lemme 5.4.3. *Soient χ_1, χ_2 deux C-caractères lisses de B obtenus par inflation de C-caractères lisses de T. Les C-représentations de G données par $\mathrm{Ind}_B^G(\chi_1)$ et $\mathrm{Ind}_B^G(\chi_2)$ sont isomorphes si et seulement si $\chi_1 = \chi_2$. Dans ce cas, l'espace d'entrelacements $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G]}(\mathrm{Ind}_B^G(\chi_1))$ est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

Démonstration. Seule l'implication en sens direct nécessite un argument. Supposons que les $C[G]$-modules $\mathrm{Ind}_B^G(\chi_1)$ et $\mathrm{Ind}_B^G(\chi_2)$ soient isomorphes. La réciprocité de Frobenius lisse assure alors l'existence d'un morphisme non nul de $C[B]$-modules de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\chi_1) \twoheadrightarrow \chi_2$, ce qui implique par la Remarque 5.3.7 que l'on doit avoir $\chi_2 = \chi_1$ et prouve l'implication voulue par contraposition. La seconde assertion est une conséquence directe de la Remarque 5.3.7. □

Pour étudier les entrelacements éventuels entre représentations de la série spéciale, nous avons besoin de plus de renseignements, notamment au sujet des espaces de vecteurs $I(1)$-invariants, ce qui est l'objet de la prochaine section.

5.5 Espaces de vecteurs $I(1)$-invariants

Nous commençons par calculer les dimensions des espaces de vecteurs $I(1)$-invariants en jeu et par étudier l'action du sous-groupe d'Iwahori I sur ces espaces, ce qui va notamment nous fournir une condition nécessaire à l'existence d'entrelacement entre représentations de la série spéciale. On démontre ensuite que toute représentation lisse de G sur C qui apparaît comme sous-quotient d'une représentation paraboliquement induite est engendrée comme $C[G]$-module par le sous-espace de ses vecteurs $I(1)$-invariants. Remarquons ici que, d'après les résultats d'irréductibilité démontrés dans les sections précédentes, le seul cas où cette assertion n'est pas immédiate est celui où l'on considère une représentation de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ avec $\chi : G \to C^\times$

caractère lisse.

On fixe de nouveau un C-caractère lisse χ de B obtenu par inflation d'un C-caractère lisse du tore T.

5.5.1 Dimension des espaces de vecteurs $I(1)$-invariants

D'après le Lemme 5.2.6, les deux doubles classes ouvertes $BI(1)$ et $Bw_0I(1)$ forment une partition du groupe G. Tout élément $I(1)$-invariant de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est donc entièrement caractérisé par ses valeurs en 1 et en w_0. Comme le caractère χ est trivial sur $I(1)$ à cause du Lemme 2.1.9, il l'est a fortiori sur $B \cap I(1)$, ce qui fournit le résultat suivant.

Lemme 5.5.1. *L'espace des vecteurs $I(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est de dimension 2 sur C. Une base en est donnée par la famille $\{f_{1,\chi}, f_{2,\chi}\}$ de fonctions $I(1)$-invariantes caractérisées par le système suivant :*

$$\begin{cases} f_{1,\chi}(1) = 1 \ ; \quad f_{1,\chi}(w_0) = 0 \ ; \\ f_{2,\chi}(1) = 0 \ ; \quad f_{2,\chi}(w_0) = 1 \ . \end{cases}$$

Par ailleurs, la factorisation $I = T(\mathcal{O}_F^\times)I(1)$ montre que le sous-groupe d'Iwahori I agit sur tout élément $I(1)$-invariant de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ par un C-caractère lisse de I défini par inflation d'un C-caractère lisse de $T(\mathcal{O}_F^\times)$.

Lemme 5.5.2. *Notons χ^+ (respectivement χ^-) le C-caractère lisse de I obtenu par inflation du C-caractère lisse $\chi|_{T(\mathcal{O}_F^\times)}$ (resp. $\chi^{w_0}|_{T(\mathcal{O}_F^\times)}$, où l'on pose $\chi^{w_0}(t) := \chi(w_0 t w_0^{-1})$).*

1. *Le groupe I agit sur $f_{1,\chi}$ (resp. $f_{2,\chi}$) à travers le caractère χ^+ (resp. χ^-). Autrement dit :*

$$\forall\ i \in I, \ \begin{cases} i \cdot f_{1,\chi} = \chi^+(i) f_{1,\chi} \ ; \\ i \cdot f_{2,\chi} = \chi^-(i) f_{2,\chi} \ . \end{cases}$$

2. *Le $C[G]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ admet au plus deux composantes I-isotypiques non nulles, à savoir celles associées à χ^+ et à χ^-. En particulier, on a $\left(\mathrm{Ind}_B^G(\chi)\right)^{I(1)} = \left(\mathrm{Ind}_B^G(\chi)\right)^I$ si et seulement si $\chi|_{T(\mathcal{O}_F^\times)}$ est trivial (auquel cas le caractère χ est dit* non ramifié*).*

Démonstration. Soit f un élément $I(1)$-invariant de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ et soit i un élément de I que l'on écrit sous la forme $i = ti_1$ avec $t \in T(\mathcal{O}_F^\times)$ et $i_1 \in I(1)$. L'invariance de f sous l'action de $I(1)$ assure alors que l'on a :

$$\forall\ x \in G, \ (i \cdot f)(x) = f(xti_1) = f(xt) \ ,$$

ce qui permet de distinguer deux cas grâce au Lemme 5.2.6.

- Ou bien $x = bi_2$ appartient à $BI(1)$, et l'on a alors $xt = btt^{-1}i_2t$ avec $t^{-1}i_2t$ qui appartient encore à $I(1)$ (puisque t est à coefficients dans $\mathcal{O}_F^\times$). L'invariance de f sous l'action de $I(1)$ permet alors d'obtenir que

$$f(xt) = \chi(bt)f(1) = \chi(t)f(x) = \chi^+(i)f(x) \ .$$

- Ou bien $x = bw_0i_2$ appartient à $Bw_0I(1)$, auquel cas l'on a $xt = (bw_0tw_0^{-1})w_0(t^{-1}i_2t)$ avec $bw_0tw^{-1} \in B$ et $t^{-1}i_2t \in I(1)$. L'invariance de f sous l'action de $I(1)$ implique alors cette fois que

$$f(xt) = \chi(bw_0tw_0^{-1})f(w_0) = \chi(w_0tw_0^{-1})f(bw_0) = \chi^-(i)f(x) \ .$$

Comme $f_{1,\chi}$ (resp. $f_{2,\chi}$) est de support égal à $BI(1)$ (resp. $Bw_0I(1)$), l'action de I sur $f_{1,\chi}$ (resp. $f_{2,\chi}$) est entièrement déterminée par le premier cas (resp. le second cas), ce qui démontre la première assertion.
Les seules composantes I-isotypiques non nulles de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ sont alors celles associées à χ^+ et χ^-. En effet, si f est un élément non nul de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ sur lequel I agit par un C-caractère lisse ψ, il faut que f soit invariant sous l'action de $I(1)$ puisque la restriction de ψ à $I(1)$ est triviale d'après le Lemme 2.1.9. On peut donc écrire f comme une combinaison linéaire de la forme $a_1f_{1,\chi} + a_2f_{2,\chi}$ avec a_1, $a_2 \in C$ non simultanément nuls. On a alors, pour tout élément $i \in I$,

$$\psi(i)(a_1f_{1,\chi} + a_2f_{2,\chi}) = \psi(i)f = i \cdot f = a_1(i \cdot f_{1,\chi}) + a_2(i \cdot f_{2,\chi}) = a_1\chi^+(i)f_{1,\chi} + a_2\chi^-(i)f_{2,\chi} ,$$

ce qui implique que l'on a $a_1(\psi(i) - \chi^+(i)) = 0$ ou $a_2(\psi(i) - \chi^-(i)) = 0$, et prouve donc que $\psi = \chi^+$ (resp. $\psi = \chi^-$) si a_1 (resp. a_2) est non nul.
Remarquons enfin que l'on a $\chi^+ = \chi^-$ si et seulement si χ et χ^{w_0} ont la même restriction à $T(\mathcal{O}_F^\times)$. En particulier, l'égalité qui apparaît dans la seconde assertion de l'énoncé est donc vraie si et seulement si χ^+ et χ^- sont tous deux triviaux, ce qui équivaut à dire [6] que la restriction de χ à $T(\mathcal{O}_F^\times)$ est triviale et termine la démonstration. □

Intéressons-nous à présent aux espaces de vecteurs invariants des représentations de la série spéciale. Nous allons démontrer le résultat suivant.

Théorème 5.5.3. *L'espace des vecteurs $I(1)$-invariants de la représentation de Steinberg est de dimension 1 sur C et il s'insère dans la suite exacte courte suivante de C-espaces vectoriels :*

$$1 \longrightarrow C \cdot 1_G \longrightarrow \left(\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})\right)^{I(1)} \longrightarrow St_G^{I(1)} \longrightarrow 1 .$$

Démonstration. Rappelons que, par définition de la représentation de Steinberg, on dispose de la suite exacte courte suivante de $C[G]$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow \mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1}) \longrightarrow St_G \longrightarrow 1 .$$

En lui appliquant le foncteur des $I(1)$-invariants, qui est exact à gauche, nous obtenons la suite exacte suivante d'espaces vectoriels sur C :

$$0 \longrightarrow C \cdot 1_G \longrightarrow Cf_1 \oplus Cf_2 \longrightarrow St_G^{I(1)} \tag{5.5}$$

où l'on a posé $f_j := f_{j,\mathbf{1}}$ pour alléger les notations ($j \in \{1, 2\}$) et où 1_G désigne la fonction constante sur G égale à l'unité 1 de C. Pour conclure, il nous suffit de prouver la surjectivité de la flèche de droite dans la suite exacte (5.5). Autrement dit, nous voulons prouver que tout élément $I(1)$-invariant de St_G admet un relèvement $I(1)$-invariant dans $\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})$.

Soient donc $\overline{f} \in St_G^{I(1)}$ et $f \in \mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})$ un relèvement de $\overline{f}$. L'hypothèse de $I(1)$-invariance sur $\overline{f}$ se traduit de la manière suivante pour f :

$$\forall\ i \in I(1),\ \exists\ \lambda(i) \in C \mid i \cdot f - f = \lambda(i)1_G .$$

Nous allons démontrer que l'application $\lambda : I \to C$ ainsi définie est identiquement nulle, ce qui prouvera que f est invariant sous l'action de $I(1)$ et terminera la démonstration. Pour ce faire, on commence par rappeler que, puisque f appartient à $\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})$, on dispose des identités suivantes :

$$\forall\ x, i \in I(1),\ \forall\ b \in B,\ \begin{cases} (i \cdot f - f)(bx) = f(xi) - f(x) \ ; \\ (i \cdot f - f)(bw_0x) = f(w_0xi) - f(w_0x) \ . \end{cases} \tag{5.6}$$

6. Car w_0^2 appartient au groupe abélien T.

Remarquons maintenant que λ est un morphisme de groupes. On a en effet :

$$\begin{aligned}\forall\ u,v\in I(1),\ \lambda(uv)1_G &= (uv)\cdot f - f\\ &= (uv)\cdot f - u\cdot f + u\cdot f - f\\ &= u\cdot(\lambda(v)1_G)+\lambda(u)1_G\\ &= \lambda(v)(u\cdot 1_G)+\lambda(u)1_G\\ &= (\lambda(v)+\lambda(u))1_G\ ,\end{aligned}$$

ce qui prouve que l'on a $\lambda(uv)=\lambda(u)+\lambda(v)$. Grâce à la factorisation de $I(1)$ donnée par la formule (5.1), il nous suffit donc de prouver que la fonction λ est nulle sur $I(1)\cap U$, $I(1)\cap\overline{U}$ et $I(1)\cap\overline{T}$ pour prouver qu'elle est identiquement nulle. Cependant, la première relation donnée par le système (5.6) assure que si i appartient à $I\cap U$ ou à $I\cap T$, alors i vérifie

$$\lambda(i)=(i\cdot f-f)(1)=f(i)-f(1)=0\ .$$

Enfin, si i appartient à $I\cap\overline{U}$, l'élément $w_0iw_0^{-1}$ appartient à U et la seconde relation qui apparaît dans le système (5.6) montre alors que l'on a

$$\lambda(i)=(i\cdot f-f)(w_0)=f(w_0iw_0^{-1}w_0)-f(w_0)=f(w_0)-f(w_0)=0\ ,$$

ce qui termine la démonstration. □

Une conséquence directe de ce résultat et de la trivialité des C-caractères lisses de G sur $I(1)$ est la suivante.

Corollaire 5.5.4. *Si π est une représentation de la série spéciale, alors* $\dim_C\pi^{I(1)}=1$.

Remarque 5.5.5. Comme le groupe $T(\mathcal{O}_F^\times)$ agit trivialement sur la représentation de Steinberg, on obtient directement que $St_G^I=St_G^{I(1)}$. Plus généralement, l'argument développé dans la preuve du Lemme 5.5.2 permet de prouver qu'une représentation $St_G\otimes\eta$ de la série spéciale admet des vecteurs I-invariants non nuls[7] si et seulement si le caractère η est non ramifié.

Remarque 5.5.6. Comme annoncé dans la section précédente, les résultats obtenus ci-dessus permettent d'obtenir une autre démonstration de l'absence d'isomorphismes entre une représentation de la série spéciale et une représentation obtenue par induction parabolique. En effet, les espaces de vecteurs $I(1)$-invariants de deux représentations isomorphes de G doivent être de même dimension sur C. Nous venons cependant de démontrer que ces espaces sont de dimension 1 pour les représentations de la série spéciale, tandis qu'ils sont de dimension 2 pour les représentations obtenues par induction parabolique.

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat suivant, qui donne une condition nécessaire à l'existence sur les entrelacements entre représentations de la série spéciale.

Théorème 5.5.7. *Soit $\eta:G\to C^\times$ un caractère lisse. Si les C-représentations de G portées par St_G et par $St_G\otimes\eta$ sont isomorphes, alors η est un caractère non ramifié (i.e. de restriction triviale à $T(\mathcal{O}_F)$).*

Démonstration. Supposons qu'il existe un isomorphisme de $C[G]$-modules entre St_G et $St_G\otimes\eta$. Par composition avec la surjection canonique $\mathrm{Ind}_B^G(\eta)\twoheadrightarrow St_G\otimes\eta$, on obtient alors un morphisme surjectif de $C[G]$-modules $\mathrm{Ind}_B^G(\eta)\twoheadrightarrow St_G$ dont le noyau est égal au sous-module

7. Ce qui équivaut à dire que I agit trivialement sur l'espace des vecteurs $I(1)$-invariants puisque celui-ci est de dimension 1 sur C.

de $\mathrm{Ind}_B^G(\eta)$ isomorphe à η. Par passage aux espaces de vecteurs $I(1)$-invariants, on obtient grâce au Théorème 5.5.3 un morphisme surjectif de $C[I]$-modules

$$\Psi : Cf_{1,\eta} \oplus Cf_{2,\eta} \twoheadrightarrow C\mathbf{1}_I \ ,$$

où $\mathbf{1}_I$ désigne le C-caractère trivial du sous-groupe d'Iwahori I, dont le noyau est égal à $\eta^{I(1)} = \eta$. On a alors

$$\forall\ i \in I, \ \begin{cases} \Psi(i \cdot f_{1,\eta}) = i \cdot \Psi(f_{1,\eta}) \ , \\ \Psi(i \cdot f_{2,\eta}) = i \cdot \Psi(f_{2,\eta}) \ , \end{cases}$$

ce qui équivaut à dire, au vu du Lemme 5.5.2 et de la Remarque 5.5.5, que l'on a :

$$\forall\ i \in I, \ \begin{cases} \eta^+(i)\Psi(f_{1,\eta}) = \Psi(f_{1,\eta}) \ , \\ \eta^-(i)\Psi(f_{2,\eta}) = \Psi(f_{2,\eta}) \ . \end{cases}$$

Comme Ψ est non nul, l'un des deux vecteurs $\Psi(f_{1,\eta})$ ou $\Psi(f_{2,\eta})$ doit être non nul, ce qui implique déjà que l'on doit avoir $\eta^+ = \mathbf{1}$ ou $\eta^- = \mathbf{1}$. Remarquons maintenant qu'un générateur de $\eta = \eta^{I(1)}$ dans $\mathrm{Ind}_B^G(\eta)$ doit être de support égal à G, et est donc de la forme $\lambda f_{1,\eta} + \mu f_{2,\eta}$ avec λ, μ deux scalaires non nuls. Par suite, on a $\Psi(f_{1,\eta}) = (-\lambda^{-1}\mu)\Psi(f_{2,\eta})$, ce qui implique que l'on doit avoir $\eta^+ = \eta^- = \mathbf{1}$. Ces égalités signifient exactement que η est non ramifié, ce qui termine la démonstration □

Remarque 5.5.8. A l'aune de ce qui a été réalisé dans les chapitres précédents, il nous semble qu'il suffirait de comprendre l'action des algèbres de Hecke sphériques relatives à K pour pouvoir déterminer entièrement les classes d'isomorphisme des représentations de la série spéciale.

5.5.2 Génération par les $I(1)$-invariants

Nous terminons cette section par un résultat de génération des représentations lisses de G sur C qui sont sous-quotients (non nécessairement irréductibles) des représentations paraboliquement induites étudiées jusqu'alors.

Théorème 5.5.9. *Toute représentation lisse de G sur C qui apparaît comme sous-quotient d'une représentation paraboliquement induite est engendrée comme $C[G]$-module par l'espace de ses vecteurs $I(1)$-invariants.*

Démonstration. Si π est une représentation lisse irréductible non supercuspidale, il n'y a rien à démontrer car le Lemme 2.1.9 assure que $\pi^{I(1)}$ est non nul, et tout vecteur non nul de π engendre alors π en tant que $C[G]$-module.
D'après les résultats démontrés dans la Section 5.3.2, il nous reste un cas à traiter : celui où π est de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ avec χ un C-caractère lisse de G. On sait que l'on dispose alors de la suite exacte courte suivante de $C[G]$-modules :

$$1 \longrightarrow \chi \longrightarrow \mathrm{Ind}_B^G(\chi) \longrightarrow St_G \otimes \chi \longrightarrow 1 \ .$$

Soient maintenant f un élément de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ et $\overline{f}$ son image dans $St_G \otimes \chi$. Comme le $C[G]$-module $St_G \otimes \chi$ est irréductible, il est engendré par l'espace non nul de ses vecteurs $I(1)$-invariants, ce qui permet d'écrire $\overline{f}$ comme une somme finie de la forme $\overline{f} = \sum_{j \in J} g_j \cdot f_j$ avec $g_j \in G$ et $f_j \in (St_G \otimes \chi)^{I(1)} = St_G^{I(1)} \otimes \chi$ pour tout $j \in J$. Après avoir tordu la suite exacte courte du Théorème 5.5.3 par le caractère χ, on voit que chaque élément f_j admet un relèvement $I(1)$-invariant $F_j \in (\mathrm{Ind}_B^G(\chi))^{I(1)}$, et dire que $\overline{f} = \sum_{j \in J} g_j \cdot f_j$ signifie que la différence

$f - \sum_{j \in J} g_j \cdot F_j$ appartient au noyau de la projection $\mathrm{Ind}_B^G(\chi) \twoheadrightarrow St_G \otimes \chi$, qui n'est autre que le caractère χ. Cela signifie donc qu'il existe un élément $\phi \in \chi$ qui permet d'écrire f sous la forme

$$f = \phi + \sum_{j \in J} g_j \cdot f_j \ . \tag{5.7}$$

Grâce au Lemme 2.1.9, on sait que tout élément de χ est invariant sous l'action de $I(1)$. L'expression (5.7) montre donc que f appartient au $C[G]$-module engendré par les éléments $I(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$, ce qui termine la démonstration. □

Chapitre 6

Modules simples sur les algèbres de Hecke-Iwahori de $SL_2(F)$

6.1 Introduction

Soient p un nombre premier et F un corps local non archimédien complet pour une valuation discrète, de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel fini k_F. Une propriété fondamentale des représentations lisses à coefficients dans un corps C de caractéristique p est la suivante : toute C-représentation lisse non nulle d'une pro-p-groupe admet des vecteurs fixes non nuls. Ceci assure en particulier que toute représentation lisse de $G_S := SL_2(F)$ à coefficients dans une clôture algébrique fixée $\overline{\mathbb{F}}_p$ de k_F contient des vecteurs non nuls qui sont invariants sous l'action du pro-p-sous-groupe d'Iwahori standard $I_S(1)$ de G_S.
Par ailleurs, si π est une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse non nulle de G_S, la réciprocité de Frobenius compacte permet de munir l'espace $\pi^{I_S(1)}$ d'une structure naturelle de module à droite sur la pro-p-algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_S^1 := \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S(1)}^{G_S}(\mathbf{1}))$ associée à G_S. Un nouvel angle d'approche dans l'étude des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses de G_S consiste donc à étudier la structure des $\mathcal{H}_S^1$-modules à droite puis à repérer ceux d'entre eux qui correspondent à des espaces de vecteurs $I_S(1)$-invariants de représentations lisses de G_S.

L'utilisation de ce point de vue s'est révélée être très fructueuse dans le cadre de la théorie des représentations modulo p de $GL_2(F)$ puisqu'il a notamment permis à Ollivier [O3] de démontrer que l'application qui envoie une représentation lisse de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur l'espace de ses vecteurs invariants sous l'action du pro-p-Iwahori standard $I(1)$ de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ provient d'un foncteur (appelé « foncteur des $I(1)$-invariants ») qui établit une équivalence de catégories entre la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ engendrées par leurs vecteurs $I(1)$-invariants et la catégorie des modules à droite et à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ sur la pro-p-algèbre de Hecke-Iwahori attachée à $GL_2(\mathbb{Q}_p)$.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'éventualité d'un résultat analogue à celui d'Ollivier dans le cadre de la théorie des représentations modulo p de $SL_2(F)$. Nous réalisons le premier pas dans la construction d'un hypothétique foncteur des $I_S(1)$-invariants en démontrant l'existence de bijections entre certaines familles de représentations lisses et certains modules sur la pro-p-algèbre de Hecke-Iwahori attachée à $SL_2(F)$. Nous montrons dans la foulée que ces constructions sont compatibles, via les foncteurs de restriction, à celles qui existent pour les objets correspondants attachés à $GL_2(F)$.

Présentation des principaux résultats

Dans l'optique d'une compréhension plus générale des relations entre représentations lisses de $GL_n(F)$ et de $SL_n(F)$ à l'aide des algèbres de type Hecke-Iwahori, nous dédions la première section de ce chapitre à l'étude des relations pouvant exister entre les groupes de Weyl [1] de GL_n et de SL_n. On rappelle que le groupe de Weyl W de $GL_n(F)$ (resp. W_S de $SL_n(F)$) est défini comme le quotient du normalisateur du tore diagonal de $GL_n(F)$ (resp. $SL_n(F)$) par le groupe des éléments à coefficients entiers du tore diagonal, et qu'il fournit un système de représentants des doubles classes de $GL_n(F)$ modulo son sous-groupe d'Iwahori standard I (resp. : des doubles classes de $SL_n(F)$ modulo son sous-groupe d'Iwahori standard I_S). Cette dernière description permet de définir un morphisme de groupes injectif de W_S dans W, dont l'image est donnée par l'énoncé suivant.

Lemme 6.1.1. *L'application qui envoie la double classe I_SgI_S sur la double classe IgI, pour $g \in SL_n(F)$, induit un homomorphisme de groupes injectif de W_S dans W dont l'image est égale au groupe de Weyl affine W_{aff} de $GL_n(F)$.*

Une conséquence de ce résultat est qu'il induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres entre l'algèbre de Hecke-Iwahori de $SL_n(F)$ et l'algèbre de Hecke-Iwahori affine de $GL_n(F)$, dont nous rappelons les définitions dans la Section 6.2.3.

Dans toute la suite du chapitre, on se limite au cas $n = 2$, qui présente l'avantage de permettre des calculs explicites. Pour atteindre notre objectif, qui est d'obtenir une classification des classes d'isomorphisme des $\mathcal{H}_S^1$-modules à droite simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et de les relier aux représentations lisses irréductibles de $SL_2(F)$ étudiées dans le Chapitre 3, nous nous intéressons à la structure des modules simples sur trois algèbres de type Hecke-Iwahori : l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_S$, la deuxième algèbre de Hecke-Iwahori $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$ (aussi appelée algèbre de Hecke-Iwahori régulière, et paramétrée par un entier $r \in \{0, \dots [\frac{q-1}{2}]\}$ différent de $\frac{q-1}{2}$ avec q désignant le cardinal du corps fini k_F), et la troisième algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_S^\star$ (ou algèbre de Hecke-Iwahori exceptionnelle). L'introduction de ces trois familles d'algèbres est motivée par le résultat suivant.

Lemme 6.1.2. *La $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\mathcal{H}_S^1$ est isomorphe à une somme directe de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres de la forme suivante :*

$$\mathcal{H}_S^1 \simeq \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_S^\star \oplus \bigoplus_{\substack{r=1 \\ r \neq \frac{q-1}{2}}}^{[\frac{q-1}{2}]} \widetilde{\mathcal{H}}_S(r) \ ,$$

où $[x]$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{Q}$.

On commence par traiter le cas de l'algèbre de Hecke-Iwahori standard $\mathcal{H}_S$, dont on détermine tout d'abord un système générateur $\{\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1\}$ qui nous permet de décrire le centre de $\mathcal{H}_S$ comme l'algèbre des polynômes en $(\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1)^2$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ (Théorèmes 6.3.4 et 6.3.9), puis d'établir une classification des classes d'isomorphisme des $\mathcal{H}_S$-modules à droite simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Pour pouvoir l'énoncer, il nous faut introduire les notations suivantes.

– Pour toute paire de paramètres $(\epsilon_0, \epsilon_1) \in \{0, -1\} \times \{0, -1\}$, on note $M_1^S(\epsilon_0, \epsilon_1)$ le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{H}_S$ envoyant $\mathcal{T}_0$ sur ϵ_0 et $\mathcal{T}_1$ sur ϵ_1. Pour alléger les notations, on écrit $M_1^S(\epsilon)$ au lieu de $M_1^S(\epsilon, \epsilon)$ pour tout $\epsilon \in \{0, -1\}$.

1. Précisons tout de suite un point de vocabulaire : ce que nous appelons *groupe de Weyl* correspond à ce qui est appelé groupe d'Iwahori-Weyl dans [PR]. Ce n'est donc pas du *groupe de Weyl fini* isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ dont il est ici question.

– Pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, on note $M_2^S(\lambda)$ le $\mathcal{H}_S$-module $\overline{\mathbb{F}}_p x \oplus \overline{\mathbb{F}}_p y$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour lequel les actions de $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_1$ dans la base $\{x, y\}$ sont respectivement données par les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 6.1.3. *La liste suivante fournit un système de représentants des classes d'isomorphisme des $\mathcal{H}_S$-modules à droite simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$:*
– *les caractères $M_1^S(\epsilon_0, \epsilon_1)$ avec $(\epsilon_0, \epsilon_1) \in \{0, -1\} \times \{0, -1\}$;*
– *les $\mathcal{H}_S$-modules standard $M_2^S(\lambda)$ avec $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ différent de* 1.

Avant d'aller plus loin, notons que ces résultats ont un intérêt propre puisqu'ils sont étroitement reliés aux espaces de vecteurs I_S-invariants des représentations lisses de $SL_2(F)$. En effet, l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_S$ est isomorphe à l'algèbre de Hecke-Iwahori standard $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\mathbf{1}))$, ce qui permet de définir, pour toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse π de G_S, une structure de $\mathcal{H}_S$-module à droite le sous-espace des vecteurs de π invariants sous l'action du sous-groupe d'Iwahori standard I_S. On dispose alors du résultat de structure suivant, dans lequel nous utilisons les notations du Chapitre 3 pour décrire les représentations lisses de $SL_2(F)$ en jeu, dont on déduit ensuite quelques propriétés intéressantes du « foncteur des I_S-invariants », pour lequelles nous rappelons qu'un $\mathcal{H}_S$-module simple est dit *supersingulier* s'il n'est isomorphe à aucun quotient d'un $\mathcal{H}_S$-module de la forme $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)\right)^{I_S}$ avec $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse [2].

Théorème 6.1.4. *1. Le $\mathcal{H}_S$-module $\mathbf{1}^{I_S}$ est isomorphe au caractère $M_1^S(0)$.*

2. Le $\mathcal{H}_S$-module $(St_S)^{I_S}$ est isomorphe au caractère $M_1^S(-1)$.

3. Pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\mathcal{H}_S$-module $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda)\right)^{I_S}$ est isomorphe à $M_2^S(\lambda^{-1})$.

4. Supposons que $F = \mathbb{Q}_p$. On dispose alors des résultats supplémentaires suivants.
   (a) Le $\mathcal{H}_S$-module $\pi_0^{I_S}$ est isomorphe au caractère $M_1^S(-1, 0)$.
   (b) Le $\mathcal{H}_S$-module $\pi_{p-1}^{I_S}$ est isomorphe au caractère $M_1^S(0, -1)$.

Corollaire 6.1.5. *L'application envoyant une représentation lisse de $SL_2(F)$ sur l'espace de ses vecteurs I_S-invariants établit une bijection entre :*

i) l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ engendrées par leurs vecteurs I_S-invariants et l'ensemble des classes d'isomorphisme des $\mathcal{H}_S$-modules simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$;

ii) l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles non supercuspidales *de $SL_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ engendrées par leurs vecteurs I_S-invariants et l'ensemble des classes d'isomorphisme des $\mathcal{H}_S$-modules simples* non supersinguliers *de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

Corollaire 6.1.6. *1. Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. Le $\mathcal{H}_S$-module obtenu par restriction du $\mathcal{H}$-module π^I est isomorphe au $\mathcal{H}_S$-module $(\pi|_{SL_2(\mathbb{Q}_p)})^{I_S}$.*

2. Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible non supersingulière de $GL_2(F)$. Le $\mathcal{H}_S$-module obtenu par restriction du $\mathcal{H}$-module π^I est isomorphe au $\mathcal{H}_S$-module $(\pi|_{SL_2(F)})^{I_S}$.

Pour définir la seconde algèbre de Hecke-Iwahori, nous supposons q différent de 2 et nous fixons un entier $r \in \{0, \dots [\frac{q-1}{2}]\}$ distinct de $\frac{q-1}{2}$ lorsque p est impair. L'algèbre $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$ des endormorphismes du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{ind}_{\mathrm{I_S}}^{\mathrm{G_S}}(\omega^{\mathrm{r}} \oplus \omega^{\mathrm{q-1-r}})$ est alors égale à $\begin{pmatrix} A_r & B_r \\ B_{q-1-r} & A_{q-1-r} \end{pmatrix}$ avec

2. Nous rappelons aussi que l'on désigne par μ_λ le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère non ramifié de $F^\times$ qui envoie une uniformisante ϖ_F fixée de F sur $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$.

$A_k := \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^k))$ et $B_k := \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^k), \mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^{q-1-k}))$ pour k valant r ou $q-1-r$. La $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre A_k est engendrée par deux opérateurs X et Y satisfaisant aux relations $XY = YX = 0$. C'est donc en particulier une algèbre commutative dont les $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères sont donnés par les deux familles suivantes, toutes deux paramétrées par $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$:

- les caractères $\mu_1(\lambda)$ qui envoient X sur λ et Y sur 0 ;
- les caractères $\mu_2(\lambda)$ qui envoient X sur 0 et Y sur λ.

Remarquons que l'action par conjugaison de t sur les $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de $T_S(k_F)$ induit alors un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres entre A_r et A_{q-1-r} qui correspond à l'automorphisme de l'algèbre $\overline{\mathbb{F}}_p[X,Y]/(XY,YX)$ envoyant X sur Y et Y sur X.

Notons cependant que $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$ n'est pas une algèbre de matrices à coefficients dans un anneau, ce qui met en défaut les arguments de type Morita et nécessite une étude plus détaillée de la structure de $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$. Nous décrivons pour cela B_r et B_{q-1-r} ainsi que les relations existant entre A_r, B_r, A_{q-1-r} et B_{q-1-r}, ce qui nous suffit à déterminer les $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules (à droite) simples. Pour énoncer notre résultat de classification, nous introduisons les notations suivantes : on désigne par e_1 et e_2 les idempotents de $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$ respectivement définis par l'application identité de A_r et A_{q-1-r} (via le plongement diagonal de $A_r \oplus A_{q-1-r}$ dans $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$). Pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ et pour tout paramètre $k \in \{r, q-1-r\}$, on note $\mu_1^k(\lambda)$ (resp. $\mu_2^k(\lambda)$) le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de A_k envoyant X sur λ et Y sur 0 (resp. X sur 0 et Y sur λ). Lorsque $\lambda = 0$, on allège les notations en posant $\mu^k(0) := \mu_1^k(0) = \mu_2^k(0)$. On définit alors[3] deux caractères $M_1(0)$ et $M_2(0)$ de $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$ par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} M_1(0)|e_1 = \mu^r(0) \ ; & M_2(0)|e_1 = \{0\} \ ; \\ M_2(0)|e_2 = \{0\} \ ; & M_2(0)|e_2 = \mu^{q-1-r}(0) \ . \end{cases}$$

Pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, on définit $M_{12}(\lambda)$ comme l'unique[4] $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module à droite de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui vérifie $M_{12}(\lambda)|e_1 = \mu_1^r(\lambda)$ et $M_{12}(\lambda)|e_2 = \mu_2^{q-1-r}(\lambda)$; de même, on note $M_{21}(\lambda)$ l'unique $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module à droite de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui vérifie $M_{21}(\lambda)|e_1 = \mu_2^r(\lambda)$ et $M_{21}(\lambda)|e_2 = \mu_1^{q-1-r}(\lambda)$.

Théorème 6.1.7. *La liste suivante fournit un système de représentants des classes d'isomorphisme des $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules à droite simples :*

- *les caractères $M_1(0)$ et $M_2(0)$;*
- *les $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules $M_{12}(\lambda)$ et $M_{21}(\lambda)$ avec $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$.*

En particulier, tout $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module à droite simple est nécessairement de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ égale à 1 *ou* 2.

On s'intéresse enfin aux modules à droite simples sur la troisième algèbre de Hecke-Iwahori, qui n'intervient que lorsque p est impair et ne possède pas d'analogue dans la théorie des modules sur l'algèbre du pro-p-Iwahori de $GL_2(F)$, ce qui explique pourquoi nous l'avons aussi nommée algèbre de Hecke-Iwahori exceptionnelle. La structure de $\mathcal{H}_S^\star$ ressemble très fortement à celle de l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_S$, à la différence majeure près que les éléments $\mathcal{T}_0^\star$ et $\mathcal{T}_1^\star$ qui jouent pour $\mathcal{H}_S^\star$ le rôle tenu par $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_1$ pour $\mathcal{H}_S$ sont tous deux de carré nul, limitant ainsi un peu plus le nombre de $\mathcal{H}_S^\star$-modules simples possibles. Afin de pouvoir exprimer notre énoncé de classification des $\mathcal{H}_S^\star$-modules simples, nous introduisons les notations suivantes.

- On note $M_1^\star(0)$ l'unique $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{H}_S^\star$: il envoie $\mathcal{T}_0^\star$ et $\mathcal{T}_1^\star$ sur 0.
- Pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, on note $M_2^\star(\lambda)$ le $\mathcal{H}_S^\star$-module $\overline{\mathbb{F}}_p x \oplus \overline{\mathbb{F}}_p y$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour lequel les actions de $\mathcal{T}_0^\star$ et de $\mathcal{T}_1^\star$ dans la base $\{x, y\}$ sont respectivement données par les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. L'existence de ces caractères est expliquée dans la Section 6.3.7.
4. Le fait qu'un tel $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module existe est expliqué dans la Section 6.3.7.

Théorème 6.1.8. *Le caractère $M_1^\star(0)$ et les $\mathcal{H}_S^\star$-modules standard $M_2^\star(\lambda)$ avec $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ forment un système de représentants des classes d'isomorphisme des $\mathcal{H}_S^\star$-modules à droite simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

En combinant le Lemme 6.1.1 aux énoncés des Théorèmes 6.1.3, 6.1.7 et 6.1.8, on obtient une description exhaustive des $\mathcal{H}_S^1$-modules à droite simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On peut alors décrire la structure de $\mathcal{H}_S^1$-module à droite des représentations lisses irréductibles de $SL_2(F)$ exhibées dans le Chapitre 3. Pour plus de clarté dans le prochain énoncé, nous introduisons la terminologie suivante. Un $\mathcal{H}_S^1$-module à droite simple est dit :

- *posé sur la composante* $k = 0$ s'il est donné par un $\mathcal{H}_S$-module (à droite) simple dans la factorisation du Lemme 6.1.1 ;
- *posé sur la composante* $k = \dfrac{q-1}{2}$ s'il est donné par un $\mathcal{H}_S^\star$-module (à droite) simple dans la factorisation du Lemme 6.1.1 ;
- *posé sur la composante* $k = r$ s'il est donné par un $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module (à droite) simple dans la factorisation du Lemme 6.1.1.

Théorème 6.1.9. *1. Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\mathbf{1}^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère $M_1^S(0)$ posé sur la composante $k = 0$.*

2. Le $\mathcal{H}_S^1$-module $St_S^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère $M_1^S(-1)$ posé sur la composante $k = 0$.

3. Pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\mathcal{H}_S^1$-module $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda)\right)^{I_S(1)}$ est isomorphe au $\mathcal{H}_S$-module $M_2^S(\lambda^{-1})$ posé sur la composante $k = 0$. Il est simple lorsque $\lambda \neq 1$, et indécomposable de longueur 2 lorsque $\lambda = 1$.

4. Supposons que p soit impair. Pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\mathcal{H}_S^1$-module $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda \omega^{\frac{q-1}{2}})\right)^{I_S(1)}$ est isomorphe au $\mathcal{H}_S^\star$-module $M_2^\star(\lambda^{-1})$.

5. Supposons que $q \neq 2$ et fixons un scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$.

i) Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda \omega^r)\right)^{I_S(1)}$ est isomorphe au $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module $M_{12}(\lambda^{-1})$ posé sur la composante $k = r$.

ii) Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda \omega^{q-1-r})\right)^{I_S(1)}$ est isomorphe au $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module $M_{21}(\lambda^{-1})$ posé sur la composante $k = r$.

6. On suppose désormais que $F = \mathbb{Q}_p$. On dispose alors des résultats supplémentaires suivants, où $r \in \{0, \dots, [\frac{p-1}{2}]\}$ est un entier distinct de $\frac{p-1}{2}$ si p est impair.

(a) Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\pi_0^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère supersingulier $M_1^S(-1, 0)$ posé sur la composante $k = 0$.

(b) Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\pi_{p-1}^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère supersingulier $M_1^S(0, -1)$ posé sur la composante $k = 0$.

(c) Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\pi_{\frac{q-1}{2}}^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère supersingulier $M_1^\star(0)$ posé sur la composante $k = \dfrac{p-1}{2}$.

(d) Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\pi_r^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère supersingulier $M_1(0)$ posé sur la composante $k = r$.

(e) Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\pi_{p-1-r}^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère supersingulier $M_2(0)$ posé sur la composante $k = r$.

En appelant *module supersingulier* tout $\mathcal{H}_S^1$-module simple qui n'est isomorphe à aucune sous-quotient d'un $\mathcal{H}_S^1$-module à droite de la forme $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)\right)^{I_S(1)}$ avec $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse, on déduit du Lemme 6.1.2 et du Théorème 6.1.9 le résultat suivant, qui est de bon augure dans la recherche d'une équivalence de catégories basée sur le foncteur des $I_S(1)$-invariants.

Corollaire 6.1.10. *L'application qui envoie une représentation lisse irréductible de $SL_2(F)$ sur l'espace de ses vecteurs $I_S(1)$-invariants établit une bijection entre :*

i) l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles non super-cuspidales *de $SL_2(F)$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme des $\mathcal{H}_S^1$-modules à droite simples* non supersinguliers *de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$;*

ii) l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme des $\mathcal{H}_S^1$-modules à droite simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Plan du chapitre

Ce chapitre est essentiellement constitué de deux sections, la seconde étant volumiquement plus importante que la première car centrée sur le cas $n = 2$ pour lequel nous pouvons mener plus de calculs explicites.
La première section, qui n'impose aucune condition sur $n \geq 2$, est dévolue à l'étude des groupes de Weyl attachés à $GL_n(F)$ et à $SL_n(F)$; elle contient la preuve du Lemme 6.1.1 et de son corollaire portant sur les algèbres de Hecke-Iwahori, dont nous rappelons bien sûr les définitions.
Nous passons ensuite au cas $n = 2$. Après avoir démontré le Lemme 6.1.2, nous commençons par étudier la structure de l'algèbre de Hecke-Iwahori et de ses modules simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, ce qui nous permet déjà de démontrer les Théorèmes 6.1.3 et 6.1.4, puis d'en déduire les Corollaires 6.1.5 et 6.1.6 grâce aux résultats que nous avons prouvés dans le Chapitre 3.
Nous déterminons ensuite, pour chaque paramètre $r \in \{0, \dots, [\frac{q-1}{2}]\}$ que l'on suppose distinct de $\dfrac{q-1}{2}$ lorsque p est impair, la structure de la deuxième algèbre de Hecke-Iwahori $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$, puis celle de ses modules à droite simples. Il ne reste alors qu'à calculer les $\mathcal{H}_S^\star$-modules simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour achever la description complète des $\mathcal{H}_S^1$-modules simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.
On termine ce chapitre en donnant, pour chaque représentation lisse irréductible de $SL_2(F)$ obtenue dans le Chapitre 3, la structure du $\mathcal{H}_S^1$-module porté par l'espace de ses vecteurs invariants sous l'action du pro-p-Iwahori standard de G_S, et en vérifiant que l'on dispose ainsi des bijections nécessaires à l'existence d'une équivalence de catégories qui serait l'analogue de celle obtenue par Ollivier dans le cas des représentations lisses de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Notations générales

On fixe un entier premier p et l'on considère un corps local non archimédien F que l'on suppose complet pour une valuation discrète, de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel fini. On note $\mathcal{O}_F$ l'anneau des éléments entiers de F, $\mathfrak{p}_F$ son idéal maximal, $k_F = \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}_F$ son corps résiduel et $q = p^f$ le nombre d'éléments de k_F. On fixe une fois pour toutes une uniformisante $\varpi_F \in \mathfrak{p}_F$ de F ainsi qu'une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_p$ de k_F et un plongement ω de k_F (que l'on notera aussi parfois $\mathbb{F}_q$ dans la suite) dans $\overline{\mathbb{F}}_p$. Lorsque l'on aura besoin de faire appel aux résultats du Chapitre 3, on supposera que les choix faits ici sont les mêmes que ceux effectués dans le Chapitre 3.

On désigne par $G = GL_n(F)$ le groupe linéaire général, par $K = GL_n(\mathcal{O}_F)$ le sous-groupe compact maximal standard de G, par B le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures de G et par T le tore maximal déployé des matrices diagonales de G. On note I le sous-groupe d'Iwahori standard de K et $I(1)$ son pro-p-radical (appelé *pro-p-Iwahori* de G).

On rappelle que I est formé de l'ensemble des éléments de K dont la réduction modulo ϖ_F est une matrice triangulaire supérieure du groupe fini $GL_n(k_F)$, et que $I(1)$ est le sous-groupe des éléments de I dont la réduction modulo ϖ_F est un élément unipotent.

On introduit le groupe spécial linéaire $G_S = SL_n(F)$, dont $K_S := SL_n(\mathcal{O}_F)$ est un sous-groupe compact maximal. On note I_S le sous-groupe d'Iwahori standard de K_S et $I_S(1)$ le pro-p-Iwahori associé, dont les définitions sont analogues à celles données pour I et $I(1)$. Remarquons que l'on a notamment $I_S = I \cap G_S$ et $I_S(1) = I(1) \cap G_S$. Comme pour G, on dispose du tore maximal déployé $T_S = T \cap G_S$ des matrices diagonales de G_S et du sous-groupe de Borel $B_S = B \cap G_S$ des matrices triangulaires supérieures.

6.2 Groupes de Weyl de $GL(n,F)$ et de $SL(n,F)$ - Application aux algèbres de Hecke-Iwahori

Cette première section a pour objectif de relier les groupes de Weyl associés à G_S à leurs analogues pour G en démontrant le résultat suivant.

Théorème 6.2.1.
1. *L'application de W_S dans W envoyant la double classe $I_S w I_S$ sur la double classe IwI est un homomorphisme de groupes injectif ayant pour image le groupe de Weyl affine W_{aff} de G.*
2. *L'isomorphisme $W_S \simeq W_{aff}$ défini dans le point précédent induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres entre l'algèbre de Hecke-Iwahori de $SL_n(F)$ et l'algèbre de Hecke-Iwahori affine de $GL_n(F)$.*

6.2.1 Rappels concernant $GL_n(F)$

On commence par rappeler quelques résultats classiques concernant les groupes de Weyl attachés à $GL_n(F)$ et qui se trouvent par exemple dans [Lus] ou dans [V3, Chapitre 3]. Notons $(X, X^\vee, R, R^\vee, \Delta)$ la donnée radicielle associée au triplet (G, B, T), où $X \simeq \mathbb{Z}^n$ s'identifie en particulier au groupe $X^*(T)$ des F-caractères du tore maximal déployé T tandis que $X^\vee$ s'identifie au groupe $X_*(T)$ des F-cocaractères de T. Les racines simples (positives) de la donnée radicielle sont $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ avec α_i définie par :

$$\alpha_i \ : \ diag(\varpi_F^{x_1}, \dots, \varpi_F^{x_n}) \mapsto x_{i+1} - x_i \ .$$

La coracine associée à α_i peut alors être représentée par la matrice diagonale

$$A_i := diag(1, \dots, 1, \varpi_F^{-1}, \varpi_F, 1 \dots, 1) \ ,$$

où ϖ_F^{-1} est en position i tandis que ϖ_F est en position $i+1$.
Si $s_i \in \Delta$ désigne la réflexion associée à α_i, on appelle *groupe de Weyl fini* W_0 de G le groupe engendré par la famille $\{s_1, \dots, s_{n-1}\}$. Il est canoniquement isomorphe au quotient par T du normalisateur $N_G(T)$ de T dans G et paramétrise les doubles classes de K modulo I. De plus, l'application envoyant s_i sur la transposition $(i, i+1)$ est un isomorphisme du groupe W_0 sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Le groupe de Weyl W de G, qui fournit un système de représentants des doubles classes de G modulo I, est alors défini comme le quotient du normalisateur $N_G(T)$ par le sous-groupe $T(O_F)$ des points à coefficients entiers de T. On vérifie qu'il se décompose en un produit semi-direct de W_0 par X, où X est identifié au groupe multiplicatif de ses translations. Remarquons ici que, lorsque cela sera nécessaire, on notera de la même manière un élément de W (resp. de W_0) et un relèvement de cet élément dans G (resp. dans K).

Le groupe W contient un sous-groupe remarquable, appelé *groupe de Weyl affine de* G et noté W_{aff}. Il est défini comme le produit semi-direct de W_0 par le sous-groupe de X engendré par R, et l'on peut montrer que c'est un groupe de Coxeter ayant pour système générateur l'ensemble $\Sigma_{aff} := \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$, où l'on a posé $s_0 = t^{-1}s_1t$ avec

$$t := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \varpi_F & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in G.$$

Il permet d'obtenir une deuxième décomposition de W en produit semi-direct [V3, Proposition 3.1] : en effet, si l'on désigne par $\Omega = t^{\mathbb{Z}}$ le sous-groupe de G engendré par t, on peut vérifier que $W_{aff} \cap \Omega = \{1\}$ et que W est égal au produit semi-direct de W_{aff} par Ω. Ceci permet notamment de définir une application longueur ℓ sur W en prolongeant la longueur naturellement définie par le système Σ_{aff} sur le groupe de Coxeter W_{aff} de telle sorte que Ω soit exactement l'ensemble des éléments de longueur nulle dans W.

On définit enfin le groupe de Weyl étendu $W^{(1)}$ de G comme le quotient de $N_G(T)$ par le sous-groupe $T(1+\mathfrak{p}_F)$ des points de T à coefficients dans $1+\mathfrak{p}_F$. Il s'insère dans la suite exacte courte canoniquement scindée [5] suivante :

$$1 \longrightarrow T(\mathbb{F}_q) \longrightarrow W^{(1)} \longrightarrow W \longrightarrow 1 \ , \qquad (6.1)$$

dans laquelle $T(\mathbb{F}_q)$ désigne le tore diagonal du groupe linéaire fini $GL_n(\mathbb{F}_q)$. Le groupe de Weyl étendu $W^{(1)}$ paramétrise les doubles classes de G modulo $I(1)$, et est muni d'une fonction longueur, encore notée ℓ, qui étend la longueur précédemment définie sur W de telle sorte que les éléments de $T(\mathbb{F}_q)$ soient de longueur nulle. On introduit alors la notation suivante : pour toute partie M de W, on note $M^{(1)}$ son image réciproque dans $W^{(1)}$ définie par la suite exacte (6.1). On dispose donc en particulier du sous-groupe $W_{aff}^{(1)}$, appelé *groupe de Weyl affine étendu de* G, qui admet par suite une décomposition naturelle en un produit semi-direct de la forme $W_{aff} \ltimes T(\mathbb{F}_q)$.

6.2.2 De $GL_n(F)$ à $SL_n(F)$

De manière analogue à ce qui a été effectué dans la sous-section précédente, on peut définir des groupes de Weyl pour la donnée radicielle attachée à $SL_n(F)$. Nous rappelons tout d'abord les définitions correspondantes, puis nous relions les objets ainsi obtenus aux groupes de Weyl associés à G.

Groupes de Weyl de $SL_n(F)$

Notons $(X_S, X_S^\vee, R_S, R_S^\vee, \Delta)$ la donnée radicielle attachée au triplet (G_S, B_S, T_S). Le groupe de Weyl fini qui lui est associé paramétrise cette fois les doubles classes de K_S modulo I_S et est égal au groupe de Weyl fini défini pour G puisqu'il ne dépend que du système de racines simples de la donnée radicielle, qui est le même pour G et pour G_S. Ceci permet notamment de choisir les représentants des éléments de W_0 dans G_S, et c'est ce que l'on fera désormais.
On note W_S le groupe de Weyl de G_S, qui paramétrise les doubles classes de G_S modulo I_S et

5. Cette propriété de scindage est spécifique au cas où $G = GL_n(F)$ [V2bis].

est défini comme le produit semi-direct du groupe de Weyl fini W_0 par le groupe $X_S \simeq \mathbb{Z}^{n-1}$. On définit alors le groupe de Weyl étendu $W_S^{(1)}$ de G_S par la suite exacte courte

$$1 \longrightarrow T_S(\mathbb{F}_q) \longrightarrow W_S^{(1)} \longrightarrow W_S \longrightarrow 1 ,$$

où $T_S(\mathbb{F}_q)$ désigne le tore diagonal du groupe fini $SL_n(\mathbb{F}_q)$.

Remarque 6.2.2. On peut encore définir le groupe de Weyl affine attaché à G_S comme le produit semi-direct de W_0 par le groupe engendré par R_S. Nous verrons cependant ci-dessous (Lemme 6.2.3) que ce groupe est en fait égal au groupe de Weyl W_S, ce qui explique pourquoi nous n'introduisons pas de notation spécifique pour ce groupe de Weyl affine, au contraire de ce qui a été fait pour G.

Relations entre les groupes de Weyl de G et de G_S

Comme nous l'avons rappelé ci-avant, les groupes de Weyl W et W_S paramétrisent respectivement les doubles classes de G modulo I et de G_S modulo I_S. Puisque $I_S = I \cap G_S$, on dispose immédiatement d'un morphisme de groupes injectif de W_S dans W. Notre objectif ici est de donner une description plus précise de W_S en tant que sous-groupe de W. Pour ce faire, nous commençons par prouver un résultat qui met en évidence une différence majeure de structure entre ces deux groupes.

Lemme 6.2.3. *Le groupe de Weyl affine associé à la donnée radicielle de $SL_n(F)$ est égal au groupe de Weyl W_S.*

Démonstration. On commence par rappeler que X_S s'identifie à l'hyperplan de $X \simeq \mathbb{Z}^n$ formé des n-uplets dont la somme des coordonnées est nulle. Par suite, si $x = diag(\varpi^{x_1}, \dots, \varpi^{x_n})$ est un élément de X_S, il peut être décomposé sous la forme suivante :

$$\left(\prod_{i=1}^{n-2}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \varpi^{x_1+x_2+\ldots+x_i} & & & \\ & & & \varpi^{-(x_1+x_2+\ldots+x_i)} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \varpi^{\sum_{i=1}^{n-1} x_i} & \\ & & & & & \varpi^{x_n} \end{pmatrix}.$$

L'appartenance de x à X_S assure que l'on a $x_n = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i$, ce qui permet de traduire en termes de racines la décomposition matricielle précédente sous la forme suivante : on a $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(x)\alpha_i$, où l'on a posé $\lambda_i(x) := -\displaystyle\sum_{j=1}^{i} x_j = \sum_{j=i+1}^{n} x_j$. Ceci prouve que X_S est égal au groupe engendré par R_S, et donc que W_S est égal à son sous-groupe de Weyl affine. $\square$

Etant donné que les systèmes de racines R et R_S sont les mêmes, les groupes de Weyl affines associés à G et à G_S sont égaux, ce qui permet d'obtenir directement le résultat suivant, qui n'est autre que le premier point du Théorème 6.2.1.

Corollaire 6.2.4. *L'application $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéaire qui envoie la double classe I_SgI_S sur la double classe IgI (avec $g \in G_S$) induit un isomorphisme de groupes entre le groupe de Weyl W_S attaché à G_S et le groupe de Weyl affine W_{aff} attaché à G.*

Remarque 6.2.5. Cet énoncé est un cas particulier du résultat suivant dû à Pappas-Rapoport [PR, Section 2] : pour toute paire (G, T) où G est un groupe réductif connexe (résiduellement) déployé sur un corps local de corps résiduel parfait et où T est un tore déployé maximal de G, ils définissent un groupe d'Iwahori-Weyl qui s'identifie canoniquement au groupe de Weyl W que nous considérons ici [PR, Proposition 2.1]. Ils prouvent alors [PR, Section 2.a.2] que le groupe d'Iwahori-Weyl du recouvrement simplement connexe du groupe dérivé de G, qui n'est autre que le groupe de Weyl W_S de G_S lorsque la paire (G, T) est celle considérée dans ce chapitre, s'identifie naturellement au groupe de Weyl affine du système de racines affines de T, qui n'est autre que le groupe de Weyl affine W_{aff} de G.

6.2.3 Application aux algèbres de Hecke-Iwahori

Soit A un anneau commutatif unitaire d'unité 1_A. On le munit d'une structure de $\mathbb{Z}[q]$-module grâce au morphisme d'anneaux unitaires défini par $q \mapsto q1_A$. On suppose que A contient une racine primitive de l'unité d'ordre $q-1$ et que $q-1$ est inversible dans A, ce qui est par exemple le cas lorsque $A = \overline{\mathbb{F}}_p$.

On rappelle que l'on définit la A-algèbre de Hecke-Iwahori de G, notée $\mathcal{H}_A(G, I)$, comme la A-algèbre engendrée par la famille $(T_w)_{w \in W}$ satisfaisant aux relations suivantes :
– relations de tresse : si $w, w' \in W$ vérifient $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$, alors

$$T_{ww'} = T_w T_{w'} \ ;$$

– relations quadratiques : pour tout élément $s \in \Sigma_{aff}$, $(T_s + 1)(T_s - q) = 0$.
On vérifie alors [V2, Example 1] que la famille $(T_w)_{w \in W}$ est une base du A-module $\mathcal{H}_A(G, I)$. Par ailleurs, l'algèbre $\mathcal{H}_1(G, I)$ contient une sous-algèbre remarquable $\mathcal{H}_{aff,A}$, définie comme la sous-algèbre de base $(T_w)_{w \in W_{aff}}$ et appelée *algèbre de Hecke-Iwahori affine de G.*

De même, on définit la A-algèbre de Hecke-Iwahori de G_S, notée $\mathcal{H}_A(G_S, I_S)$, comme la A-algèbre engendrée par la famille $(\mathcal{T}_w)_{w \in W_S}$ satisfaisant aux relations suivantes :
– relations de tresse : si $w, w' \in W_S$ sont tels que $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$, alors

$$\mathcal{T}_{ww'} = \mathcal{T}_w \mathcal{T}_{w'} \ ;$$

– relations quadratiques : pour tout $s \in \Sigma_{aff}$, $(\mathcal{T}_s + 1)(\mathcal{T}_s - q) = 0$.
Tout comme dans le cas de l'algèbre de Hecke-Iwahori de G, on vérifie que la famille $(\mathcal{T}_w)_{w \in W_S}$ est une base du A-module $\mathcal{H}_A(G_S, I_S)$. En outre, les relations de tresse et les relations quadratiques ne dépendent que de l'ensemble Σ_{aff}, qui est le même pour G et pour G_S, et de la longueur ℓ sur le groupe de Weyl, qui est la même sur W et sur W_S. Ceci permet de déduire immédiatement du Corollaire 6.2.4 le résultat suivant.

Lemme 6.2.6. *Le morphisme de A-algèbres $\mathcal{H}_A(G_S, I_S) \to \mathcal{H}_A(G, I)$ envoyant $\mathcal{T}_w$ sur T_w est bien défini, injectif, et d'image $\mathcal{H}_{aff,A}$.*
Autrement dit : l'algèbre de Hecke-Iwahori de G_S à coefficients dans A est isomorphe à l'algèbre de Hecke-Iwahori affine de G à coefficients dans A.

6.3 Le cas $n = 2$

On suppose désormais que $n = 2$, ce qui signifie que l'on considère les groupes $G = GL_2(F)$ et $G_S = SL_2(F)$. L'objectif de cette section est de classifier les modules simples sur l'algèbre des endomorphismes du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{ind}_{I_S(1)}^{G_S}(\mathbf{1})$ et de les comparer :

- aux modules qui apparaissent comme espaces de vecteurs $I_S(1)$-invariants des représentations lisses irréductibles de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ que nous avons étudiées dans le Chapitre 3 ;
- aux modules obtenus par restriction [6] des modules simples sur l'algèbre des endomorphismes du $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module $\mathrm{ind}_{I(1)}^G(\mathbf{1})$.

Pour ce faire, l'idée consiste à décomposer les algèbres d'endomorphismes sus-mentionnées en somme directe d'algèbres plus simples à décrire, et parmi lesquelles vont notamment apparaître les algèbres de Hecke-Iwahori introduites dans la sous-section précédente. C'est pourquoi nous commençons par étudier les modules simples sur les algèbres de Hecke-Iwahori et par les relier aux objets analogues qui interviennent dans la théorie relative à G.

6.3.1 Notations

On reprend les notations utilisées dans le Chapitre 3 et dans les sections précédentes de ce chapitre. En particulier, on pose $u(x) := \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\overline{u}(x) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $x \in F$, on fixe un plongement de k_F dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ (que l'on prend égal à celui choisi dans le Chapitre 3) et l'on désigne par $[.] : k_F \hookrightarrow \mathcal{O}_F^\times$ l'application de Teichmüller. Les éléments s_1, t et s_0 de G sont ici respectivement égaux à :

$$s_1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; , \; t := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi_F & 0 \end{pmatrix} \; , \; s_0 = \begin{pmatrix} 0 & \varpi_F \\ -\varpi_F^{-1} & 0 \end{pmatrix} \; ,$$

de sorte que l'on a en particulier $\alpha_0 = s_1 s_0$. Le groupe de Weyl affine W_{aff} de G admet l'ensemble $\Sigma_{aff} = \{s_0, s_1\}$ pour système de Coxeter, tandis que le groupe de Weyl W de G est égal au produit semi-direct $W = W_{aff} t^{\mathbb{Z}}$ avec $t^{\mathbb{Z}}$ qui n'est autre que l'ensemble Ω des éléments de longueur nulle dans W introduit dans la Section 6.2.1.

Etant donné que $q = 0$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p$, les rappels de la Section 6.2.3 assurent que l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I)$ attachée à G est égale au $\overline{\mathbb{F}}_p$-module libre de base $(T_w)_{w \in W}$ satisfaisant aux relations suivantes :

- relations de tresse : si w, $w' \in W$ sont tels que $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$, alors

$$T_{ww'} = T_w T_{w'} \; ;$$

- relations quadratiques : pour tout élément $s \in \Sigma_{aff}$, $T_s^2 = -T_s$.

On sait grâce aux travaux de Vignéras [V1, Section 1.1] que si l'on pose $T := T_t$ et $S := T_{s_1}$, alors l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}$ est engendrée sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ par les opérateurs T, T^{-1} et S, et son centre est égal à la sous-algèbre de polynômes $\overline{\mathbb{F}}_p[T^2, T^{-2}, (S+1)T + TS]$.

De même, l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, I_S)$ attachée à G_S est égale au $\overline{\mathbb{F}}_p$-module libre de base $(\mathcal{T}_w)_{w \in W_s}$ satisfaisant aux mêmes relations de tresse [7] et aux mêmes relations quadratiques que $\mathcal{H}$. Pour alléger les notations, on notera désormais $\mathcal{T}_i := \mathcal{T}_{s_i}$ pour $i \in \{0, 1\}$, et l'on notera $\mathcal{H}_{aff} := \mathcal{H}_{aff, \overline{\mathbb{F}}_p}$ l'algèbre de Hecke-Iwahori affine de G.

6.3.2 Décomposition de la pro-p-algèbre de Hecke-Iwahori

Grâce au Lemme 2.1.9, on sait que l'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants d'une représentation lisse non nulle de G_S est non nul. La réciprocité compacte de Frobenius permet alors de munir cet espace d'une structure naturelle de module à droite sur l'algèbre

6. Après identification des algèbres d'endomorphismes en jeu, car il n'est pas clair a priori que l'algèbre $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S(1)}^{G_S}(\mathbf{1}))$ soit isomorphe à une sous-algèbre de $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G]}(\mathrm{ind}_{I(1)}^{G}(\mathbf{1}))$.

7. Paramétrées bien entendu par W_S au lieu de W.

$\mathcal{H}_S^1 := \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S(1)}^{G_S}(\mathbf{1}))$, et ce module est simple lorsque la représentation est supposée irréductible.

Comme $I_S(1)$ est un sous-groupe distingué de I_S, le Lemme 2.1.9 assure aussi que toute représentation lisse irréductible de I_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ se factorise à travers le quotient $I_S/I_S(1)$. Ce quotient étant isomorphe[8] au tore fini $T_S(k_F)$, lui-même canoniquement isomorphe au groupe fini $k_F^\times$, on obtient ainsi que tout $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de I_S provient par inflation d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $k_F^\times$, et est donc de la forme ω^r pour un unique entier $r \in \{0, \dots, q-2\}$. L'ensemble de ces caractères est muni d'une action par conjugaison du normalisateur de $T_S(k_F)$, et un calcul direct permet de vérifier que l'orbite de ω^r sous cette action, constituée de ω^r et de ω^{q-1-r}, est de taille 1 lorsque r est égal à 0 (cas *Iwahori*[9]) ou à $\dfrac{q-1}{2}$ (cas *exceptionnel*, qui n'existe pas lorsque $p = 2$) et de taille 2 sinon (cas *régulier*). On définit alors, pour tout entier $r \in \{0, \dots, q-2\}$, l'algèbre d'endomorphismes $\mathcal{H}_S(r)$ par la formule suivante :

$$\forall\, r \in \{0, \dots, q-2\},\ \mathcal{H}_S(r) := \begin{cases} \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r)) & \text{si } r \in \{0, \frac{q-1}{2}\}\ ; \\ \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r \oplus \omega^{q-1-r})) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.2}$$

L'introduction de ces différentes algèbres est motivée par le résultat suivant, qui fournit une décomposition en somme directe de la pro-p-algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_S^1$.

Lemme 6.3.1. *La $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\mathcal{H}_S^1$ admet la décomposition en somme directe suivante :*

$$\mathcal{H}_S^1 = \bigoplus_{r=0}^{\left[\frac{q-1}{2}\right]} \mathcal{H}_S(r)\ , \tag{6.3}$$

où l'on désigne par $[x]$ la partie entière de $x \in \mathbb{Q}$.

Démonstration. La démonstration de cet énoncé est analogue à celle de [V1, Proposition 3.1]. Par transitivité de l'induction compacte, on sait tout d'abord que

$$\mathrm{ind}_{I_S(1)}^{G_S}(\mathbf{1}) = \mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\mathrm{ind}_{I_S(1)}^{I_S}(\mathbf{1})) = \bigoplus_{0 \le r \le q-2} \mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r)\ .$$

Déterminons alors les paires $(r, k) \in \{0, \dots, q-2\}^2$ pour lesquelles les $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r)$ et $\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^k)$ peuvent être entrelacés. Par réciprocité de Frobenius compacte, on sait tout d'abord que l'on a

$$\mathrm{Hom}_{G_S}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r), \mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^k)) = \mathrm{Hom}_{I_S}(\omega^r, \mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^k)|_{I_S})\ .$$

La décomposition de Mackey (Proposition 2.2.7) implique par ailleurs que la restriction à I_S définit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[I_S]$-modules

$$\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^k)|_{I_S} \simeq \bigoplus_{w \in W_S} \mathrm{ind}_{I_{w,S}}^{I_S}(\omega^{k,w})\ ,$$

où l'on a posé $I_{w,S} := w^{-1} I_S w \cap I_S$ pour tout élément $w \in W_S \simeq \{I_2, s_1\} \times \mathbb{Z}$ ainsi que

$$\omega^{k,w} := \begin{cases} \omega^k & \text{si } w \in \mathbb{Z}\ ; \\ s_1 \cdot \omega^k = \omega^{q-1-k} & \text{si } w \in s_1\mathbb{Z}\ . \end{cases}$$

8. Par l'application de réduction modulo ϖ_F.

9. La terminologie *cas Iwahori* et *cas régulier* est directement inspirée de celle introduite par Vignéras [V1] lors de l'étude des modules simples sur la pro-p-algèbre de Hecke-Iwahori associée à G.

Remarquons ensuite que pour tout élément $w \in W_S$, l'application de réduction modulo ϖ_F fournit la suite exacte courte suivante :

$$1 \longrightarrow I_S(1) \cap I_{w,S} \longrightarrow I_{w,S} \longrightarrow T_S(k_F) \longrightarrow 1 .$$

Elle assure en particulier que $I_S = I_S(1)I_{w,S}$, et donc que $\omega^k = \omega^{k,w}$ si et seulement si ces deux caractères ont la même restriction à $I_{w,S}$. En outre, puisque $I_{w,S}$ est un sous-groupe d'indice fini dans I_S, on sait que les foncteurs d'induction lisse et compacte de $I_{w,S}$ à I_S coïncident [10], ce qui nous permet d'obtenir la chaîne suivante d'isomorphismes grâce aux propriétés d'adjonction de ces foncteurs [11] :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{I_S}(\omega^r, \mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^k)|_{I_S}) &\simeq \bigoplus_{w \in W_S} \mathrm{Hom}_{I_S}(\omega^r, \mathrm{ind}_{I_{w,S}}^{I_S}(\omega^{k,w})) \\ &\simeq \bigoplus_{w \in W_S} \mathrm{Hom}_{I_S}(\omega^r, \mathrm{Ind}_{I_{w,S}}^{I_S}(\omega^{k,w})) \\ &\simeq \bigoplus_{w \in W_S} \mathrm{Hom}_{I_{w,S}}(\omega^r, \omega^{k,w}) \\ &\simeq \bigoplus_{w \in W_S} \mathrm{Hom}_{I_S}(\omega^r, \omega^{k,w}) . \end{aligned}$$

La définition des caractères $\omega^{k,w}$ permet alors de conclure que les représentations $\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r)$ et $\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^k)$ sont entrelacées si et seulement si $r = k$ ou $r = q - 1 - k$, ce qui fournit deux possibilités :

- ou bien p est impair, auquel cas il existe deux orbites de taille 1 qui correspondent à $r = 0$ et $r = \dfrac{q-1}{2}$, toutes les autres orbites étant de taille 2. On a alors

$$\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S(1)}^{G_S}(\mathbf{1})) = \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\mathbf{1})) \oplus \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^{\frac{q-1}{2}})) \bigoplus_{0<r<[\frac{q-1}{2}]} \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r \oplus \omega^{q-1-r})) ;$$

- ou bien $p = 2$, auquel cas l'unique orbite de taille 1 est celle qui correspond à $r = 0$, et l'on a alors

$$\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S(1)}^{G_S}(\mathbf{1})) = \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\mathbf{1})) \bigoplus_{1 \le r \le [\frac{q-1}{2}]} \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r \oplus \omega^{q-1-r})) ,$$

ce qui prouve en tous les cas le résultat annoncé. □

Remarque 6.3.2. Dans la preuve ci-avant, le calcul effectué à partir de la décomposition de Mackey montre en particulier qu'un élément non nul de la composante (I_S, ω^k)-isotypique de $\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^{q-1-k})$ est nécessairement à support dans $I_S s_1 \alpha_0^{\mathbb{Z}} I_S$.

6.3.3 Structure de l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_S$

Générateurs de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_S$

L'objectif de ce premier paragraphe est de prouver que les opérateurs $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_1$ engendrent la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\mathcal{H}_S$. Pour cela, on commence par démontrer un lemme technique qui fournira le résultat voulu à l'aide d'une récurrence sur la longueur des éléments de W_S.

10. Voir Proposition 2.2.2.
11. Que l'on appelle habituellement les « Réciprocités de Frobenius », voir Propositions 2.2.1 et 2.2.3.

Lemme 6.3.3. *On dispose des identités suivantes dans $\mathcal{H}_S$:*

$$\mathcal{T}_{s_0 s_1} = \mathcal{T}_0 \mathcal{T}_1 \text{ et } \mathcal{T}_{s_1 s_0} = \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_0 \ .$$

Démonstration. C'est une application immédiate des relations de tresse puisque l'on a $\ell(s_0 s_1) = \ell(s_0) + \ell(s_1) = \ell(s_1 s_0)$. □

Théorème 6.3.4. *La $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\mathcal{H}_S$ est engendrée par les opérateurs $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_1$.*

Démonstration. Nous allons montrer que pour tout $w \in W_S$, l'élément $\mathcal{T}_w$ est un polynôme en les opérateurs $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_1$, en raisonnant par récurrence sur la longueur de w. Soient donc $w \in W_S$ un élément de longueur $n \geq 1$ et $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ une décomposition réduite de w. Remarquons tout d'abord que si $n = 1$, on a $w \in \{s_0, s_1\}$ et il n'y a rien à démontrer, tandis que le cas $n = 2$ est traité par le Lemme 6.3.3. On peut donc supposer que $n \geq 3$. Puisque s_0 et s_1 sont tous deux d'ordre 2 dans W_S, dire que la décomposition $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ est réduite signifie que pour tout indice $1 \leq i \leq n-1$, on a $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$. Ceci assure en particulier que l'on a $\{\sigma_1, \sigma_2\} = \{s_0, s_1\}$.
Nous allons maintenant distinguer selon la parité de l'entier n pour conclure.

- Si $n = 2m$ est pair, on a alors $w = (\sigma_1\sigma_2)^m$. Dans ce cas, l'hypothèse $\{\sigma_1, \sigma_2\} = \{s_0, s_1\}$ assure, par minimalité de la longueur de la décomposition de w considérée, que l'on a alors $\ell(w) = \ell(\sigma_1\sigma_2) + \ell((\sigma_1\sigma_2)^{m-1})$, ce qui permet d'obtenir grâce aux relations de tresse que l'on a $\mathcal{T}_w = \mathcal{T}_{\sigma_1\sigma_2}\mathcal{T}_{(\sigma_1\sigma_2)^{m-1}}$. Une récurrence immédiate sur $m \geq 1$ implique alors que l'on a $\mathcal{T}_w = (\mathcal{T}_{\sigma_1\sigma_2})^m$, ce qui permet de conclure à l'aide du Lemme 6.3.3 que $\mathcal{T}_w = (\mathcal{T}_{i_1}\mathcal{T}_{i_2})^m$, où i_1, i_2 sont définis par $\sigma_j = s_{i_j}$ pour $j \in \{1, 2\}$.
- Si $n = 2m+1$ est impair, on a alors $w = (\sigma_1\sigma_2)^m\sigma_1$, et la minimalité de la décomposition de w considérée assure cette fois que l'on a $\ell(w) = \ell((\sigma_1\sigma_2)^m) + \ell(\sigma_1)$. Les relations de tresse permettent alors d'écrire que $\mathcal{T}_w = \mathcal{T}_{w_1}\mathcal{T}_{\sigma_1}$ où $w_1 = (\sigma_1\sigma_2)^m$ est de longueur $2m$, ce qui permet de conclure à l'aide du cas précédent puisque $\sigma_1 \in \{s_0, s_1\}$. □

Lien avec les générateurs de $\mathcal{H}$

Nous avons expliqué dans la Section 6.2.3 que l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_S$ peut être identifiée à l'algèbre de Hecke affine $\mathcal{H}_{aff}$ associée à G, et donc être munie d'une structure de sous-$\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de $\mathcal{H}$. D'après ce qui a été vu dans la sous-section précédente, il semble naturel de s'interroger sur les polynômes en T, T^{-1} et S qui permettent de décrire les opérateurs $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_1$ dans $\mathcal{H}$. La réponse à cette question est l'objet du prochain énoncé.

Lemme 6.3.5. *On dispose des relations suivantes dans $\mathcal{H}$:*

$$\mathcal{T}_0 = T^{-1}ST \ ; \ \mathcal{T}_1 = S \ .$$

Démonstration. La seconde égalité est une conséquence immédiate de la définition des opérateurs $\mathcal{T}_1$ et S. Pour obtenir la première identité, on rappelle que l'on a $s_0 = t^{-1}s_1t$ avec s_1t qui est de longueur 1 dans le groupe de Weyl affine étendu de G [V1, Annexe A.2]. Comme t et t^{-1} sont tous deux de longueur nulle, on peut appliquer les relations de tresse pour $s_0 = t^{-1}(s_1t)$ puis pour s_1t, ce qui permet ainsi d'obtenir que

$$\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_{t^{-1}}\mathcal{T}_{s_1t} = (\mathcal{T}_t)^{-1}\mathcal{T}_{s_1}\mathcal{T}_t = T^{-1}ST \ ,$$

et termine la démonstration. □

Remarque 6.3.6. Comme T^2 est un élément central de $\mathcal{H}$, on a aussi $\mathcal{T}_0 = TST^{-1}$.

Ce lemme permet en particulier de reformuler le Théorème 6.3.4 de la façon suivante.

Corollaire 6.3.7. *L'algèbre $\mathcal{H}_S$ est isomorphe à la sous-$\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de $\mathcal{H}$ engendrée par les opérateurs S et $TST^{-1} = T^{-1}ST$.*

Construction du centre de $\mathcal{H}_S$

Nous terminons cette sous-section en exhibant un élément central dans $\mathcal{H}_S$ qui sera très utile lorsque nous voudrons décrire les $\mathcal{H}_S$-modules à droite simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (Théorème 6.3.13), puis en montrant que le centre de $\mathcal{H}_S$ est en fait engendré par cet élément.

Lemme 6.3.8. *L'opérateur $-(\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1)^2$ est un élément central de la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\mathcal{H}_S$.*

Démonstration. On commence par remarquer que, grâce aux relations quadratiques vérifiées par $\mathcal{T}_0$ et par $\mathcal{T}_1$, on a

$$-(\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1)^2 = -\mathcal{T}_0^2 + \mathcal{T}_0\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1^2 = \mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_0\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_0 \ .$$

Ceci permet d'écrire que l'on a d'une part

$$\begin{cases} -\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1)^2 = \mathcal{T}_0^2 + \mathcal{T}_0\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_0^2\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_0\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0 = -\mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_0\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0 \ , \\ -(\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1)^2\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_0^2 + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_0\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_0^2 = -\mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_0\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0 \ , \end{cases}$$

ce qui prouve que $\mathcal{T}_0$ commute avec $-(\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1)^2$, et que l'on a d'autre part

$$\begin{cases} -\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1)^2 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_1^2 + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_1^2\mathcal{T}_0 = -\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1 \ , \\ -(\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1)^2\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_1^2 + \mathcal{T}_0\mathcal{T}_1^2 + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1 = -\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1 \ , \end{cases}$$

ce qui prouve que $\mathcal{T}_1$ commute avec $-(\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1)^2$. D'après le Théorème 6.3.4, ceci suffit à démontrer que $-(\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1)^2$ est un élément central de $\mathcal{H}_S$ et termine donc la démonstration. □

Théorème 6.3.9. *Le centre de l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_S$ est égal à la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre des polynômes en l'opérateur $(\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1)^2$.*

Démonstration. Le fait que l'algèbre des polynômes en l'opérateur $(\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1)^2$ soit contenue dans le centre de $\mathcal{H}_S$ est une conséquence directe du lemme précédent. Pour prouver l'inclusion réciproque, nous allons raisonner par récurrence descendante sur le degré homogène maximal apparaissant dans la décomposition des éléments de l'algèbre de Hecke-Iwahori. D'après la preuve du Théorème 6.3.4, un élément de $\mathcal{H}_S$ peut toujours être écrit comme combinaison linéaire finie de monômes prenant l'une des quatre formes suivantes : $(\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1)^n$, $(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0)^n$, $(\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1)^n\mathcal{T}_0$ ou $(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0)^n\mathcal{T}_1$. Rappelons que ces monômes sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ puisqu'ils sont en fait respectivement égaux aux opérateurs $\mathcal{T}_{(s_0s_1)^n}$, $\mathcal{T}_{(s_1s_0)^n}$, $\mathcal{T}_{(s_0s_1)^ns_0}$ et $\mathcal{T}_{(s_1s_0)^ns_1}$. Nous procédons alors comme suit : nous commençons par traiter directement le cas des éléments de degré homogène maximal valant 1 ou 2, puis nous raisonnons par récurrence en distinguant selon la parité du degré homogène maximal.

- Considérons tout d'abord le cas des éléments de degré homogène maximal égal à 1. Un tel élément f peut être écrit sous la forme $f = \alpha\mathcal{T}_0 + \beta\mathcal{T}_1 + \ell$ avec $\alpha, \beta, \ell \in \overline{\mathbb{F}}_p$. Dans ce cas, la relation $\mathcal{T}_0 f = f\mathcal{T}_0$ se réduit à $\beta\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1 = \beta\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0$, ce qui n'est possible que si $\beta = 0$. De même, la relation $\mathcal{T}_1 f = f\mathcal{T}_1$ se réduit à $\alpha\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0 = \alpha\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1$, ce qui implique que α doit être nul et montre finalement que f doit être constant.
- Intéressons-nous maintenant au cas des éléments de degré homogène maximal égal à 2. Un tel élément f peut être écrit sous la forme $f = \alpha\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1 + \beta\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0 + \gamma\mathcal{T}_0 + \delta\mathcal{T}_1 + \ell$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ell \in \overline{\mathbb{F}}_p$. La relation $\mathcal{T}_0 f = f\mathcal{T}_0$ se réduit alors cette fois à l'égalité

$$(\delta - \alpha)\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1 + \beta\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0 = (\delta - \beta)\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0 + \alpha\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0,$$

ce qui implique que l'on doit avoir $\delta = \beta = \alpha$. Puisque $\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0+\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1 = -(\mathcal{T}_0-\mathcal{T}_1)^2-\mathcal{T}_0$, on obtient ainsi que l'élément $(\gamma-\alpha)\mathcal{T}_0 = f+\alpha(\mathcal{T}_0-\mathcal{T}_1)^2$ appartient au centre de $\mathcal{H}_S$, et est donc constant par le cas précédent, ce qui montre que $f = \ell - \alpha(\mathcal{T}_0-\mathcal{T}_1)^2$ est un polynôme en $(\mathcal{T}_0-\mathcal{T}_1)^2$.

– Traitons enfin le cas général d'un élément f de degré homogène maximal $d \geq 2$ en distinguant selon la parité de d.
  · Supposons tout d'abord que $d = 2n$ est pair avec $n \geq 1$ et décomposons f sous la forme $\alpha(\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1)^n + \beta(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0)^n + f_1$ avec $f_1 \in \overline{\mathbb{F}}_p[\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1]$ de degré homogène maximal strictement plus petit que d. La relation $\mathcal{T}_0 f = f\mathcal{T}_0$ s'écrit alors

$$-\alpha(\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1)^n + \beta\mathcal{T}_0(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0)^n + \mathcal{T}_0 f_1 = \alpha(\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1)^n\mathcal{T}_0 - \beta(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0)^n + f_1\mathcal{T}_0$$

  avec $-\alpha(\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1)^n$, $\beta(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0)^n$, $\mathcal{T}_0 f_1$ et $f_1\mathcal{T}_0$ tous de degré homogène maximal strictement inférieur à $2n+1$. Par suite, le calcul du terme de degré homogène $2n+1$ montre que l'on doit avoir $\alpha = \beta$, ce qui permet de réécrire f sous la forme $\alpha((\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1)^n + (\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0)^n) + f_1$, ou encore sous la forme $f = \alpha(\mathcal{T}_0-\mathcal{T}_1)^{2n} + \tilde{f}_1$ avec $\tilde{f}_1 \in \overline{\mathbb{F}}_p[\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1]$ de degré homogène maximal inférieur ou égal à $2n-1$. Mais l'on obtient alors que $\tilde{f}_1 = f - \alpha(\mathcal{T}_0-\mathcal{T}_1)^{2n}$ doit appartenir au centre de $\mathcal{H}_S$, ce qui implique par hypothèse de récurrence que c'est un polynôme en l'opérateur $(\mathcal{T}_0-\mathcal{T}_1)^2$, et que c'est donc aussi le cas de f.

  · Supposons maintenant que $d = 2n+1$ est impair. On peut donc cette fois écrire f sous la forme $\alpha(\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1)^n\mathcal{T}_0 + \beta(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0)^n\mathcal{T}_1 + f_2$ avec $f_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p[\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1]$ de degré homogène maximal inférieur ou égal à $2n$. De manière analogue à ce qui a été effectué dans le cas pair, le calcul du terme de degré homogène $2n+2$ dans chaque membre de l'égalité $\mathcal{T}_0 f = f\mathcal{T}_0$ (resp. $\mathcal{T}_1 f = f\mathcal{T}_1$) montre que l'on doit avoir $\beta = 0$ (resp. $\alpha = 0$). On en déduit que $f = f_2$ est un élément du centre de degré homogène maximal strictement plus petit que d, ce qui permet de lui appliquer l'hypothèse de récurrence et de conclure qu'il doit appartenir à $\overline{\mathbb{F}}_p[(\mathcal{T}_0-\mathcal{T}_1)^2]$. □

6.3.4 Modules simples sur l'algèbre de Hecke-Iwahori de G_S

L'objectif de cette sous-section est de classifier les $\mathcal{H}_S$-modules à droite simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, puis de relier nos résultats à ceux obtenus par Vignéras [V1] pour les $\mathcal{H}$-modules à droite simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Nous procédons comme suit : nous commençons par définir des $\mathcal{H}_S$-modules de dimension 1 et 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ dont nous prouvons ensuite qu'ils permettent de décrire tous les $\mathcal{H}_S$-modules simples de dimension finie (Corollaire 6.3.14). Nous terminons par l'étude de la structure de $\mathcal{H}_S$-module des $\mathcal{H}$-modules simples de dimension finie, dont on rappellera bien entendu la description (Théorème 6.3.15).

$\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de $\mathcal{H}_S$ et $\mathcal{H}_S$-modules standard

Pour toute paire de paramètres $(\epsilon_0, \epsilon_1) \in \{0, -1\} \times \{0, -1\}$, on note $M_1^S(\epsilon_0, \epsilon_1)$ le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{H}_S$ envoyant $\mathcal{T}_i$ sur ϵ_i pour tout $i \in \{0, 1\}$. Les relations quadratiques vérifiées par les opérateurs $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_1$ imposent que tout caractère de $\mathcal{H}_S$ est nécessairement de cette forme.
Pour alléger les notations, on notera $M_1^S(\epsilon)$ le caractère $M_1^S(\epsilon, \epsilon)$. On appellera *caractère trivial de $\mathcal{H}_S$* le caractère $M_1^S(0)$, et *caractère signe de $\mathcal{H}_S$* le caractère $M_1^S(-1)$.

Nous souhaitons maintenant déterminer la structure des $\mathcal{H}_S$-modules simples de dimension 2. Pour ce faire, nous introduisons la définition suivante : pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, on note $M_2^S(\lambda)$ le $\mathcal{H}_S$-module $\overline{\mathbb{F}}_p x \oplus \overline{\mathbb{F}}_p y$ muni des actions de $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_1$ respectivement définies par les matrices suivantes dans la base $\{x, y\}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On appelle alors *$\mathcal{H}_S$-module standard de paramètre λ* le $\mathcal{H}_S$-module $M_2^S(\lambda)$.

Remarque 6.3.10. Un calcul immédiat permet de vérifier que l'élément central $-(\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1)^2$ agit sur le $\mathcal{H}_S$-module $M_2^S(\lambda)$ par le scalaire $\lambda - 1$. Par suite, deux $\mathcal{H}_S$-modules standard associés à des paramètres distincts ne peuvent pas être isomorphes.

Nous énonçons maintenant les propriétés d'irréductibilité et d'indécomposabilité de ces modules standard.

Théorème 6.3.11. *Soit $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$.*

1. *Le $\mathcal{H}_S$-module standard $M_2^S(\lambda)$ est irréductible si et seulement si $\lambda \notin \{0, 1\}$.*
2. *Le $\mathcal{H}_S$-module standard $M_2^S(1)$ est indécomposable de longueur 2 avec le caractère trivial $M_1^S(0)$ comme sous-objet et le caractère signe $M_1^S(-1)$ comme quotient.*
3. *Le $\mathcal{H}_S$-module standard $M_2^S(0)$ est indécomposable de longueur 2 avec le caractère $M_1^S(-1, 0)$ comme sous-objet et le caractère $M_1^S(0, -1)$ comme quotient.*

Démonstration. Supposons que le $\mathcal{H}_S$-module standard $M_2^S(\lambda)$ soit irréductible. D'après la définition que l'on a donnée des $\mathcal{H}_S$-modules standard, il est clair que $M_2^S(1)$ contient le caractère trivial $M_1^S(0)$ (engendré par le vecteur $x + y$) et que $M_2^S(0)$ contient le caractère $M_1^S(-1, 0)$ (engendré par le vecteur y). Il faut donc que λ soit distinct de 0 et de 1 pour que le $\mathcal{H}_S$-module $M_2^S(\lambda)$ soit irréductible.
Supposons maintenant que $M_2^S(\lambda)$ contienne un caractère de $\mathcal{H}_S$ engendré par un vecteur $v = ax + by$ non nul. La définition des modules standard assure que pour toute valeur de λ, le $\mathcal{H}_S$-module $M_2^S(\lambda)$ est engendré par le vecteur x. Par suite, il faut que l'on aie $b \neq 0$, et l'on peut donc prendre $b = 1$, i.e. choisir v sous la forme $v = \alpha x + y$ avec $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p$. Nous allons alors distinguer deux possibilités, selon que α est nul ou non.

- Dire que $\alpha = 0$ signifie que l'on a $v = y$. L'hypothèse selon laquelle v engendre un $\mathcal{H}_S$-module de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ implique donc que λ doit être nul : en effet, la définition des modules standard assure que pour toute valeur non nulle de λ, l'action de $\mathcal{H}_S$ sur y engendre le module standard $M_2^S(\lambda)$ qui est de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.
- Si $\alpha \neq 0$, on écrit alors que l'on a $v|\mathcal{T}_0 = (\alpha - 1)y$ et $v|\mathcal{T}_1 = (\lambda - \alpha)x$. Comme x engendre le $\mathcal{H}_S$-module $M_2^S(\lambda)$, la seule possibilité pour que la seconde égalité soit vérifiée est que $\lambda - \alpha = 0$, i.e. $\lambda = \alpha$. Remarquons maintenant que si $\alpha \neq 1$, la première égalité implique que y doit appartenir au $\mathcal{H}_S$-module engendré par v, et qu'il en va donc de même pour $x = \alpha^{-1}(v - y)$, ce qui contredit de nouveau le fait que v engendre un $\mathcal{H}_S$-module de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Il faut donc aussi que α soit égal à 1, ce qui montre que $\lambda = 1$.

Nous avons ainsi prouvé que les seuls cas où $M_2^S(\lambda)$ peut être réductible sont ceux où λ appartient à l'ensemble $\{0, 1\}$, ce qui prouve par contraposition la première assertion.

Achevons enfin de traiter les cas $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$. Comme nous l'avons déjà signalé, le sous-$\mathcal{H}_S$-module de $M_2^S(0)$ engendré par y est canoniquement isomorphe au caractère $M_1^S(-1, 0)$. Il est alors immédiat de vérifier que le quotient de $M_2^S(0)$ par ce sous-$\mathcal{H}_S$-module est engendré par l'image du vecteur x et qu'il est canoniquement isomorphe au caractère $M_1^S(0, -1)$, ce qui assure en particulier l'indécomposabilité de $M_1^S(0)$, qui est engendré par l'action de $\mathcal{H}_S$ sur x.

De même, nous avons déjà vu que le sous-$\mathcal{H}_S$-module de $M_2^S(1)$ engendré par le vecteur $x + y$ est canoniquement isomorphe au caractère trivial $M_1^S(0)$. Il est une fois de plus immédiat de vérifier que le quotient de $M_2^S(1)$ par ce sous-module est engendré par l'image du vecteur y et qu'il est naturellement isomorphe au caractère signe $M_1^S(-1)$, ce qui implique l'indécomposabilité de $M_2^S(1)$, qui est engendré par l'action de $\mathcal{H}_S$ sur y, et termine la démonstration. $\square$

Théorème 6.3.12. *Tout $\mathcal{H}_S$-module simple de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est naturellement isomorphe à un $\mathcal{H}_S$-module standard $M_2^S(\lambda)$ pour un unique scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p \backslash \{0,1\}$.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{M}$ soit un $\mathcal{H}_S$-module simple de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Comme $\overline{\mathbb{F}}_p$ est un corps algébriquement clos et que $\mathcal{M}$ est de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, l'élément central $-(\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1)^2$ doit agir sur $\mathcal{M}$ par un scalaire que nous notons μ. Par ailleurs, la relation quadratique $\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1 + 1) = 0$ montre que le polynôme $X(X+1)$ est annulateur pour l'endomorphisme de $\mathcal{M}$ défini par l'action de $\mathcal{T}_1$. Cet endomorphisme ne peut pas être une homothétie : si c'était le cas, tout vecteur propre de $\mathcal{T}_0$ dans $\mathcal{M}$ engendrerait alors un sous-$\mathcal{H}_S$-module de $\mathcal{M}$ de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, ce qui contredirait la simplicité du $\mathcal{H}_S$-module $\mathcal{M}$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Ceci implique donc que $X(X+1)$ est le polynôme minimal de $\mathcal{T}_1$, ou encore que $\mathcal{M}$ est somme directe des sous-espaces propres $\ker \mathcal{T}_1$ et $\ker(\mathcal{T}_1 + 1)$ qui sont tous deux de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On conclut alors comme suit : fixons un vecteur non nul $v \in \ker(\mathcal{T}_1 + 1)$. Par simplicité de $\mathcal{M}$, la droite $\ker(\mathcal{T}_1 + 1)$ n'est pas stable sous l'action de $\mathcal{T}_0$, ce qui assure que les vecteurs v et $v|\mathcal{T}_0$ ne sont pas colinéaires. On dispose ainsi d'une base $\{v, v|\mathcal{T}_0\}$ de $\mathcal{M}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ dans laquelle l'action de $\mathcal{H}_S$ sur $\mathcal{M}$ est caractérisée par les égalités suivantes :

$$\begin{cases} v|\mathcal{T}_1 = -v \ , \\ (v|\mathcal{T}_0)|\mathcal{T}_0 = -v|\mathcal{T}_0 \ , \\ (v|\mathcal{T}_0)|\mathcal{T}_1 = (\mu + 1)v \ , \end{cases}$$

la dernière relation venant de l'égalité $-(\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1)^2 = \mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_0\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_0$. Autrement dit, l'action de $\mathcal{T}_0$ et de $\mathcal{T}_1$ dans la base $\{v, v|\mathcal{T}_0\}$ est respectivement donnée par les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & 1+\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

ce qui montre que $\mathcal{M}$ est isomorphe au $\mathcal{H}_S$-module standard $M_2^S(1+\mu)$. La simplicité de $\mathcal{M}$ et le Théorème 6.3.11 permettent alors de conclure quant à la valeur prise par le paramètre $\lambda := 1 + \mu$, l'unicité de ce paramètre provenant de la Remarque 6.3.10. $\square$

Classification des $\mathcal{H}_S$-modules simples de dimension finie

Théorème 6.3.13. *Tout $\mathcal{H}_S$-module simple de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est soit un caractère, soit un $\mathcal{H}_S$-module standard irréductible.*

Démonstration. L'argument est semblable à celui qui permet de prouver le Théorème 6.3.12. Supposons que $\mathcal{M}$ soit un $\mathcal{H}_S$-module simple de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui ne soit pas un caractère de $\mathcal{H}_S$. Etant donné que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps algébriquement clos $\overline{\mathbb{F}}_p$, l'élément central $-(\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1)^2$ doit agir sur $\mathcal{M}$ par un scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$. Cependant, les opérateurs $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_1$ ne peuvent pas agir sur $\mathcal{M}$ par des scalaires car cela contredirait la simplicité de $\mathcal{M}$ (si un seul des deux agit par un scalaire) ou le fait que $\mathcal{M}$ n'est pas un caractère (si les deux agissent par des scalaires). On déduit donc [12] de la relation quadratique $\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1 + 1) = 0$ l'existence d'un vecteur non nul x dans le noyau de $\mathcal{T}_1 + 1$. Ce vecteur vérifie par définition $x|\mathcal{T}_1 = -x$, et puisque $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{H}_S$-module simple qui n'est pas

12. On rappelle que l'action de $\mathcal{H}_S$ sur $\mathcal{M}$ est une action à droite, de sorte que la relation $\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_1 + 1) = 0$ assure que l'image de $\mathcal{T}_1$ est contenue dans le noyau de l'opérateur $\mathcal{T}_1 + 1$.

un caractère, le vecteur $x|\mathcal{T}_0$ ne peut pas être colinéaire au vecteur x. L'égalité $-(\mathcal{T}_0-\mathcal{T}_1)^2 = \mathcal{T}_0+\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_1\mathcal{T}_0$ permet alors de vérifier facilement que l'on dispose des relations suivantes :

$$\begin{cases} x|\mathcal{T}_1 = -x\ ; \\ (x|\mathcal{T}_0)|\mathcal{T}_0 = -x|\mathcal{T}_0\ ; \\ (x|\mathcal{T}_0)|\mathcal{T}_1 = (\lambda+1)x\ . \end{cases}$$

Autrement dit, le $\mathcal{H}_S$-module engendré par la famille libre $\{x, x|\mathcal{T}_0\}$ est égal au $\mathcal{H}_S$-module standard $M_2^S(\lambda+1)$. La simplicité de $\mathcal{M}$ implique alors que l'on doit avoir $\mathcal{M} = M_2^S(\lambda+1)$, ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 6.3.14. *Tout $\mathcal{H}_S$-module simple de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est isomorphe à un et un seul des $\mathcal{H}_S$-modules suivants :*

i) un caractère $M_1^S(\epsilon_0,\epsilon_1)$ avec $(\epsilon_0,\epsilon_1)\in\{0,1\}^2$;

ii) un $\mathcal{H}_S$-module standard $M_2^S(\lambda)$ avec $\lambda\in\overline{\mathbb{F}}_p\backslash\{0,1\}$.

Lien avec les $\mathcal{H}$-modules simples de dimension finie

On commence par rappeler la classification des $\mathcal{H}$-modules à droite simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ établie par Vignéras [V1]. Pour toute paire de paramètres $(\tau,\epsilon)\in\overline{\mathbb{F}}_p^\times\times\{0,-1\}$, on note $M_1(\tau,\epsilon)$ le caractère de $\mathcal{H}$ envoyant T sur τ et S sur ϵ. On définit ensuite, pour toute paire de paramètres $(a,z)\in\overline{\mathbb{F}}_p\times\overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\mathcal{H}$-module standard $M_2(a,z)$ comme étant le $\mathcal{H}$-module $\overline{\mathbb{F}}_p x\oplus\overline{\mathbb{F}}_p y$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ muni de l'action de $\mathcal{H}$ définie comme suit : les matrices donnant les actions de T et de S dans la base $\{x,y\}$ sont respectivement $\begin{pmatrix} 0 & z \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où les colonnes sont les images des vecteurs de base. On dispose alors du résultat suivant, qui donne la structure des $\mathcal{H}$-modules simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ [V1, Theorem 1.2].

Théorème 6.3.15. *1. Les $\mathcal{H}$-modules à droite simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ sont, à isomorphisme près, les $\mathcal{H}$-caractères $M_1(\tau,\epsilon)$ avec $(\tau,\epsilon)\in\overline{\mathbb{F}}_p\times\{0,-1\}$ et les $\mathcal{H}$-modules standard $M_2(a,z)$ avec $(a,z)\in\overline{\mathbb{F}}_p\times\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ tels que $a^2\neq z$.*

2. Pour tout scalaire non nul $a\in\overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\mathcal{H}$-module standard $M_2(a,a^2)$ est indécomposable de longueur 2. Il admet le caractère $M_1(a,0)$ comme sous-module et le caractère $M_1(-a,-1)$ comme quotient.

Puisque nous avons précédemment décrit $\mathcal{H}_S$ comme une sous-$\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de $\mathcal{H}$, tout $\mathcal{H}$-module est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{H}_S$-module. La fin de cette sous-section est consacrée à l'étude de cette structure pour les $\mathcal{H}$-caractères et pour les $\mathcal{H}$-modules standard. On commence par traiter le cas des $\mathcal{H}$-caractères.

Lemme 6.3.16. *Pour toute paire de paramètre $(\tau,\epsilon)\in\overline{\mathbb{F}}_p\times\{0,-1\}$, le $\mathcal{H}_S$-module porté par $M_1(\tau,\epsilon)$ est égal au caractère $M_1^S(\epsilon)$.*

Démonstration. La définition des $\mathcal{H}$-caractères et le Lemme 6.3.5 montrent immédiatement que pour toute paire de paramètres $(\tau,\epsilon)\in\overline{\mathbb{F}}_p^\times\times\{0,-1\}$, le $\mathcal{H}$-caractère $M_1(\tau,\epsilon)$ envoie à la fois $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_1$ sur le scalaire ϵ, ce qui prouve le résultat annoncé. □

Intéressons-nous à présent aux $\mathcal{H}$-modules standard. Fixons pour cela une paire de paramètres $(a,z)\in\overline{\mathbb{F}}_p\times\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et considérons le $\mathcal{H}$-module $M_2(a,z)$. Un calcul direct à partir des formules du Lemme 6.3.5 montre que l'action de $\mathcal{T}_0$ et de $\mathcal{T}_1$ sur $M_2(a,z)$ est respectivement donnée par les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ az^{-1} & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un changement de base permet alors de prouver directement le résultat suivant.

Lemme 6.3.17. *1. Pour toute paire de paramètres $(a,z) \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times \times \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\mathcal{H}_S$-module porté par le $\mathcal{H}$-module standard $M_2(a,z)$ est égal au $\mathcal{H}_S$-module standard $M_2^S(a^2z^{-1})$.*

2. Pour tout paramètre $z \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\mathcal{H}_S$-module porté par le $\mathcal{H}$-module standard $M_2(0,z)$ est égal à la somme directe des $\mathcal{H}_S$-caractères $M_1^S(0,-1)$ et $M_1^S(-1,0)$.

La non-nullité du paramètre z permet alors d'obtenir l'énoncé suivant à partir du lemme précédent et du Théorème 6.3.11.

Corollaire 6.3.18. *Soit $(a,z) \in \overline{\mathbb{F}}_p \times \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ une paire de paramètres.*

1. *Si a est non nul et si $a^2 \neq z$, alors $M_2(a,z)$ est un $\mathcal{H}_S$-module irréductible.*
2. *Si a est non nul, alors $M_2(a,a^2)$ est un $\mathcal{H}_S$-module indécomposable de longueur 2. Il admet le caractère trivial $M_1^S(0)$ comme sous-objet et le caractère signe $M_1^S(-1)$ comme quotient.*
3. *Le $\mathcal{H}_S$-module $M_2(0,z)$ est totalement décomposable de longueur 2, et est somme directe des $\mathcal{H}_S$-caractères $M_1^S(0,-1)$ et $M_1^S(-1,0)$:*

$$M_2(0,z)|_{\mathcal{H}_S} = M_1^S(0,-1) \oplus M_1^S(-1,0) \ .$$

Remarque 6.3.19. Les résultats démontrés dans cette sous-section prouvent en particulier que tout $\mathcal{H}_S$-module à droite simple de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est contenu dans un unique $\mathcal{H}$-module à droite simple de même dimension.

6.3.5 Application aux espaces de vecteurs I_S-invariants

Par réciprocité de Frobenius compacte, l'algèbre $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\mathbf{1}))$ est isomorphe à la composante $(I_S,\mathbf{1})$-isotypique de $\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\mathbf{1})$, elle-même isomorphe à l'algèbre de convolution $\overline{\mathbb{F}}_p[I_S\backslash G_S/I_S]$ par l'application qui envoie la double classe I_SgI_S sur l'élément I_S-invariant de $\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ valant 1 en g. Sachant que le groupe de Weyl W_S paramétrise les doubles classes de G_S modulo I_S, on peut reprendre les calculs effectués dans [V1, Appendix 1.3 - Iwahori case] pour démontrer qu'il existe un unique morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres envoyant $\mathcal{T}_i$ sur l'élément I_S-invariant de $\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ de support $I_Ss_iI_S$ et de valeur 1 en s_i (avec $i \in \{0,1\}$), puis que ce morphisme induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres

$$\mathcal{H}_S \simeq \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\mathbf{1})) \ . \tag{6.4}$$

On rappelle [13] maintenant que si π est une représentation lisse irréductible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, l'espace π^{I_S} formé par ses vecteurs I_S-invariants est naturellement muni d'une structure de module à droite sur l'algèbre des endomorphismes du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\mathbf{1})$, donc d'une structure de $\mathcal{H}_S$-module à droite grâce à l'isomorphisme (6.4). Soulignons tout de suite que ce module peut éventuellement être nul, y compris lorsque π est une représentation lisse irréductible de G_S. Cependant, le Lemme 6.3.1 montre que, si l'on souhaite comprendre la structure de module des espaces de vecteurs $I_S(1)$-invariants (qui sont quant à eux non nuls dès que l'on considère des représentations lisses non nulles, cf. Lemme 2.1.9), il est très utile de connaître la structure de module de π^{I_S} lorsque cet espace est non nul.

Les résultats de cette sous-section reposent essentiellement sur l'étude des représentations

13. Et l'on renvoie à la Section 2.3.3 pour plus de détails.

lisses irréductibles de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ effectuée dans le Chapitre 3, sur la détermination des espaces de vecteurs I-invariants pour les représentations lisses irréductibles de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ réalisée par Vignéras [V4], et sur les liens entre $\mathcal{H}$-modules simples et $\mathcal{H}_S$-modules établis dans la sous-section précédente.

Cas des représentations non supersingulières

Nous commençons par rappeler l'énoncé suivant [V4, Section 6.5] qui fournit la structure de $\mathcal{H}$-module à droite [14] des espaces de vecteurs I-invariants pour les représentations lisses irréductibles non supersingulières [15] de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ contenant des vecteurs I-invariants non nuls. Les notations sont celles qui ont été introduites dans le Chapitre 3 ; en particulier, si $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ est un scalaire non nul, on désigne par μ_λ le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de B_S obtenu par inflation du caractère lisse non ramifié de $F^\times$ envoyant ϖ_F sur λ.

Théorème 6.3.20. *1. Le $\mathcal{H}$-module $\mathbf{1}^I$ est isomorphe à $M_1(1,0)$.*

2. Le $\mathcal{H}$-module $(St_G)^I$ est isomorphe à $M_1(1,-1)$.

3. Pour tout scalaire non nul $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\mathcal{H}$-module $(\mathrm{Ind}_B^G(\mu_\lambda \otimes \mathbf{1}))^I$ est isomorphe à $M_2(\lambda, \lambda^{-1})$.

Rappelons maintenant que les résultats démontrés dans le Chapitre 3 (Corollaire 3.4.14, Théorème 3.4.20 et Remarque 3.4.22) fournissent l'énoncé suivant.

Lemme 6.3.21. *1. Toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible non supersingulière de G_S qui admet des vecteurs I_S-invariants non nuls est isomorphe à une et une seule des représentations suivantes :*

(a) le caractère trivial $\mathbf{1}$;

(b) la représentation de Steinberg St_S ;

(c) la représentation de la série principale $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda)$ avec $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p \backslash \{0,1\}$.

2. L'espace $\mathbf{1}^{I_S}$ est égal à $\mathbf{1}^I$.

3. L'inclusion [16] de l'espace $(St_G)^I$ dans $(St_S)^{I_S}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

4. Pour tout scalaire non nul $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, l'inclusion de $(\mathrm{Ind}_B^G(\mu_\lambda \otimes \mathbf{1}))^I$ dans $(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda))^{I_S}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Les Lemmes 6.2.6, 6.3.16 et 6.3.17 nous permettent alors d'en déduire le résultat de structure suivant pour les espaces de vecteurs I_S-invariants des représentations lisses irréductibles non supersingulières de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ admettant des vecteurs I_S-invariants non nuls.

Théorème 6.3.22. *1. Le $\mathcal{H}_S$-module $\mathbf{1}^{I_S}$ est isomorphe au caractère $M_1^S(0)$.*

2. Le $\mathcal{H}_S$-module $(St_S)^{I_S}$ est isomorphe au caractère $M_1^S(-1)$.

3. Pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p \backslash \{0,1\}$, le $\mathcal{H}_S$-module $(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda))^{I_S}$ est isomorphe au $\mathcal{H}_S$-module standard $M_2^S(\lambda^{-1})$.

Remarque 6.3.23. Le même argument permet de montrer que le $\mathcal{H}_S$-module $(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1}))^{I_S}$ est isomorphe au $\mathcal{H}_S$-module standard $M_2^S(1)$. On peut aussi directement déduire ce résultat des Théorèmes 6.3.11 et 6.3.22.

14. Qui existe grâce à l'isomorphisme analogue de (6.4) démontré dans [V1, Section 1.1].

15. On rappelle que, pour les $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles de G et de G_S, la non-supersingularité est équivalente à la non-supercuspidalité. Cette équivalence est prouvée dans [BL94, Corollary 36] pour G et par le Corollaire 3.5.41 du Chapitre 3 pour G_S.

16. Grâce à l'application de restriction de G à G_S ; pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur vers la Section 3.4.5 du Chapitre 3.

Cas des représentations supersingulières

On suppose dans ce paragraphe que $F = \mathbb{Q}_p$. On sait alors par le Théorème 3.6.13 qu'il existe p classes d'isomorphisme pour les représentations supersingulières de G_S, qu'un système de représentants en est donné par la famille de représentations $\{\pi_r, 0 \leq r \leq p-1\}$ construites dans la Section 3.6, et qu'elles permettent de décomposer les représentations supersingulières de G obtenues par Breuil [Br, Théorème 1.1] de la façon suivante :

$$\forall\ r \in \{0, \ldots, p-1\},\ \pi(r, 0, \mathbf{1})|_{G_S} = \pi_r \oplus \pi_{p-1-r}\ .$$

Si l'on note $v_r := \overline{[I_2, x^r]}$ le vecteur $I_S(1)$-invariant qui engendre naturellement la représentation π_r [17], on dispose alors du résultat suivant [V4, Section 6.5].

Lemme 6.3.24. *Le $\mathcal{H}$-module $\pi(0,0,1)^I$ est isomorphe au $\mathcal{H}$-module standard supersingulier $M_2(0,1)$ et admet une base adaptée de la forme $\{v_0, y\}$ où y est un vecteur $I_S(1)$-invariant engendrant le sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module π_{p-1} dans $\pi(0,0,1)$.*

Par ailleurs, nous savons grâce aux Propositions 3.6.7 et 3.6.11 que les seules représentations supersingulières de G_S qui admettent des vecteurs I_S-invariants non nuls sont (à isomorphisme près) les représentations π_0 et π_{p-1}, et que leurs espaces de vecteurs I_S-invariants sont alors, tout comme leurs espaces de vecteurs $I_S(1)$-invariants, de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Grâce au Théorème 3.6.3, qui assure que tout vecteur $I_S(1)$-invariant de $\pi(0,0,1)$ est en fait $I(1)$-invariant, on peut déduire de ce qui précède le résultat suivant.

Théorème 6.3.25. *On suppose que $F = \mathbb{Q}_p$.*

1. *Le $\mathcal{H}_S$-module $\pi_0^{I_S}$ est isomorphe au caractère $M_1^S(-1,0)$.*
2. *Le $\mathcal{H}_S$-module $\pi_{p-1}^{I_S}$ est isomorphe au caractère $M_1^S(0,-1)$.*

Correspondance via le foncteur des I_S-invariants

En suivant ce qui existe dans le cas des $\mathcal{H}$-modules, nous introduisons la terminologie suivante : un $\mathcal{H}_S$-module simple est dit *supersingulier* s'il n'est pas isomorphe à un quotient d'un $\mathcal{H}_S$-module de la forme $(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta))^{I_S}$ avec η un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de B_S. Par ailleurs, l'application qui envoie une représentation lisse de G_S sur son espace de vecteurs I_S-invariants induit un foncteur allant de la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses de G_S engendrées par leurs vecteurs I_S-invariants vers la catégorie des $\mathcal{H}_S$-modules à droite que l'on appelle le *foncteur des I_S-invariants*. En comparant les résultats donnés par les Théorèmes 6.3.22 et 6.3.25 à la classification des $\mathcal{H}_S$-modules simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ fournie par le Corollaire 6.3.14, on obtient alors les deux énoncés suivants, le second étant valable sans hypothèse particulière sur le corps F.

Théorème 6.3.26. *Le foncteur des I_S-invariants établit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ engendrées par leurs vecteurs I_S-invariants et l'ensemble des classes d'isomorphisme des $\mathcal{H}_S$-modules simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

Théorème 6.3.27. *Le foncteur des I_S-invariants met en bijection l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles* non supercuspidales *de $SL_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ engendrées par leurs vecteurs I_S-invariants et l'ensemble des classes d'isomorphisme des $\mathcal{H}_S$-modules simples* non supersinguliers *de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

17. On renvoie le lecteur à la Section 3.6 pour les définitions et les notations

Compatibilité aux applications de restriction

Pour terminer cette sous-section, nous rappelons que l'on dispose de deux applications de restriction : la restriction à G_S des représentations modulo p de G, qui est canoniquement définie, et la restriction à $\mathcal{H}_S$ des $\mathcal{H}$-modules à droite. Grâce aux résultats prouvés dans cette sous-section et dans le Chapitre 3, nous disposons de l'énoncé suivant, qui affirme essentiellement que la prise des invariants sous le sous-groupe d'Iwahori standard commute aux foncteurs de restriction, et est rendu possible grâce aux deux faits non triviaux suivants [18] :

- le sous-groupe d'Iwahori standard I de $GL_2(F)$ agit trivialement sur l'espace des vecteurs I_S-invariants de toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible non supercuspidale de $GL_2(F)$;
- le sous-groupe d'Iwahori standard I de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ agit trivialement sur l'espace des vecteurs I_S-invariants de toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Corollaire 6.3.28. *1. Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. Le $\mathcal{H}_S$-module obtenu par restriction du $\mathcal{H}$-module π^I est isomorphe au $\mathcal{H}_S$-module $(\pi|_{SL_2(\mathbb{Q}_p)})^{I_S}$.*

2. Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible non supersingulière de $GL_2(F)$. Le $\mathcal{H}_S$-module obtenu par restriction du $\mathcal{H}$-module π^I est isomorphe au $\mathcal{H}_S$-module $(\pi|_{SL_2(F)})^{I_S}$.

6.3.6 Structure de la deuxième algèbre de Hecke-Iwahori

On fixe un paramètre $r \in \left\{1\dots,\left[\frac{q-1}{2}\right]\right\}$ que l'on suppose différent de $\dfrac{q-1}{2}$ lorsque q est impair. On définit la deuxième algèbre de Hecke-Iwahori $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$ comme l'algèbre des endomorphismes du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r \oplus \omega^{q-1-r})$. Elle se décompose sous la forme

$$\widetilde{\mathcal{H}}_S(r) = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ B_{q-1-r} & A_{q-1-r} \end{pmatrix}$$

où l'on a posé $\begin{cases} A_r = \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r)) \ ; \\ A_{q-1-r} = \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^{q-1-r})) \ ; \\ B_r = \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r), \mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^{q-1-r})) \ ; \\ B_{q-1-r} = \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^{q-1-r}), \mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r)) \ . \end{cases}$

La terminologie employée vient du fait que cette algèbre d'endomorphismes est l'objet qui corrspond pour G_S à la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre appelée seconde algèbre de Hecke-Iwahori pour G dans [V1, Section 2.2].

Le but de cette sous-section est de décrire la structure de l'algèbre $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$ en étudiant chacune de ses quatre composantes ainsi que les relations qui existent entre elles. Remarquons que si A_r et A_{q-1-r} sont bien des $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres, ce n'est pas le cas de B_r et de B_{q-1-r}, qui sont cependant munis (par composition naturelle des fonctions) d'une structure de bimodule sur A_r et sur A_{q-1-r} : on a en effet $A_{q-1-r} \circ B_r \circ A_r \subset B_r$ et $A_r \circ B_{q-1-r} \circ A_{q-1-r} \subset B_{q-1-r}$.

Description des $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres A_r et A_{q-1-r}

Notons A la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre commutative $\overline{\mathbb{F}}_p[X,Y]/(XY,YX)$. On dispose alors du résultat suivant, qui décrit la structure des $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres A_r et A_{q-1-r}.

18. Respectivement démontrés par les Théorèmes 3.4.20 et 3.6.3 du Chapitre 3.

Théorème 6.3.29. *Soient T_r et S_r les éléments de A_r ayant respectivement pour support*[19] *$I_S\alpha_0^{-1}I_S$ et $I_S\alpha_0 I_S$ et valant*[20] *respectivement 1 en α_0^{-1} et en α_0. L'application $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéaire envoyant T_r sur X et S_r sur Y induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres $A_r \simeq A$.*

Démonstration. Le plan de la démonstration est identique à celui qui sous-tend la preuve du résultat analogue existant pour G [V1, Appendix 1.3]. D'après la Proposition 2.3.2, l'algèbre $\mathcal{H}_r := \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r))$ est naturellement isomorphe à l'algèbre de convolution $\mathbb{H}_r$ des fonctions $f : G_S \to \overline{\mathbb{F}}_p$ à support compact modulo I_S telles que $f(igj) = \omega^r(ij)f(g)$ pour tous éléments $i, j \in I_S$ et $g \in G_S$. La Proposition 3.5.30 assure en outre que si l'on désigne par T_n l'élément de $\mathcal{H}_r$ qui correspond via cet isomorphisme à la fonction de $\mathbb{H}_r$ ayant $I_S\alpha_0^{-n}I_S$ pour support et 1 pour valeur en α_0^{-n}, alors la famille $\{T_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de l'espace vectoriel $\mathcal{H}_r$. Remarquons maintenant que l'on dispose des décompositions suivantes en classes à gauche disjointes :

$$\begin{cases} \forall\ n \in \mathbb{N}^*, & I_S\alpha_0^{-n}I_S = \displaystyle\bigsqcup_{x\in A_{2n}} u(-x)\alpha_0^{-n}I_S\ , \\ \forall\ n \in \mathbb{N}, & I_S\alpha_0^{n}I_S = \displaystyle\bigsqcup_{x\in A_{2n}} \overline{u}(-\varpi_F x)\alpha_0^{n}I_S\ , \end{cases}$$

où $A_k = \{[a_0] + \varpi_F[a_1] + \ldots + \varpi_F^{k-1}[a_{k-1}],\ a_i \in k_F\}$ est un système de représentants des éléments de $\mathcal{O}_F/\varpi_F^k\mathcal{O}_F$. On peut donc appliquer la formule (2.4) pour obtenir[21] l'action des opérateurs T_n sur la fonction standard $[I_2, 1] \in \mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r)$:

$$\begin{cases} \forall\ n \in \mathbb{N}, & T_n([I_2,1]) = \displaystyle\sum_{x\in A_{2n}} [\overline{u}(-\varpi_F x)\alpha_0^n, 1]\ ; \\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*, & T_{-n}([I_2,1]) = \displaystyle\sum_{x\in A_{2n}} [u(-x)\alpha_0^{-n}, 1]\ . \end{cases}$$

Rappelons que ces égalités suffisent à caractériser les opérateurs T_n par G_S-équivariance et par $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéarité. Puisque l'on a $\alpha_0^n\overline{u}(x)\alpha_0^{-n} = \overline{u}(\varpi_F^{2n}x)$ et $\alpha_0^{-n}u(x)\alpha_0^n = u(\varpi_F^{2n}x)$, un calcul direct reposant de nouveau sur la formule (2.4) montre alors que :

$$\begin{cases} \forall\ n \geq 0, & T_1 \circ T_n = T_{n+1} = T_n \circ T_1\ ; \\ \forall\ n \geq 1, & T_{-1} \circ T_{-n} = T_{-(n+1)} = T_{-n} \circ T_{-1}\ . \end{cases}$$

Pour terminer la preuve de la première assertion, il nous reste à démontrer que $T_1 \circ T_{-1} = T_{-1} \circ T_1 = 0$. Nous allons démontrer que $(T_1 \circ T_{-1})([I_2, 1]) = 0$: par G_S-équivariance et par $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéarité, cela suffit à justifier la nullité de $T_1 \circ T_{-1}$, et les calculs pour $T_{-1} \circ T_1$ s'effectuent de la même manière. L'application de la formule (2.4) assure que l'on dispose des égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (T_1 \circ T_{-1})([I_2,1]) &= \sum_{x\in A_2}\sum_{y\in A_2} [u(-x)\alpha_0^{-1}\overline{u}(-\varpi_F y)\alpha_0, 1] \\ &= \sum_{x\in A_2}\sum_{y\in A_2} [u(-x)\overline{u}(-\varpi_F^{-1} y), 1] \\ &= \sum_{x\in A_2} [u(-x), 1] + \sum_{y\in A_2\setminus\{0\}}\sum_{x\in A_2} [u(-x)\overline{u}(-\varpi_F^{-1}y), 1]\ . \end{aligned}$$

19. On appelle support d'un élément de A_r ou de A_{q-1-r} le support dans G_S de la fonction qui lui correspond par réciprocité de Frobenius compacte (cf Proposition 2.3.2 du Chapitre 2 pour plus de détails).

20. Remarque analogue à celle concernant les supports.

21. On rappelle que le caractère ω^r est trivial sur le pro-p-groupe $I_S(1)$, donc qu'il l'est en particulier sur les éléments de la forme $u(x)$ et $\overline{u}(\varpi_F x)$ avec $x \in \mathcal{O}_F$.

Comme le caractère ω^r est trivial sur $I_S(1)$, la première somme qui apparaît dans le membre de droite de la dernière expression est égale à $\mathrm{Card}(A_2)[I_2, 1]$, et est donc nulle car $\mathrm{Card}(A_2) \equiv 0\ [p]$. Pour traiter le second terme, on remarque que pour tout élément non nul $y \in F$, on a :

$$u(-x)\overline{u}(-\varpi_F^{-1}y) = u(-x)u(-\varpi_F y^{-1})s_1\alpha_0 \begin{pmatrix} -y & \varpi_F \\ 0 & -y^{-1} \end{pmatrix} ,$$

ce qui assure que $u(-x)\overline{u}(-\varpi_F^{-1}y)$ appartient à $I_S s_1 \alpha_0 I_S$ quels que soient les coefficients $x \in \mathcal{O}_F$ et $y \in \mathcal{O}_F \backslash \{0\}$, et implique en particulier que la somme $\displaystyle\sum_{y \in A_2 \backslash \{0\}} \sum_{x \in A_2} [u(-x)\overline{u}(-\varpi_F^{-1}y), 1]$ est un élément de $\mathbb{H}_r$ à support dans $I_S s_1 \alpha_0 I_S$, i.e. dans $I_S w_0 \alpha_0 I_S$ si l'on reprend les notations du Chapitre 3. Comme nous avons supposé r distinct de 0 et de $\dfrac{q-1}{2}$, la Proposition 3.5.30 assure qu'il n'existe pas d'élément non nul de $\mathbb{H}_r$ dont le support est inclus dans $I_S w_0 \alpha_0 I_S$. Par conséquent, la somme considérée ci-avant doit être nulle, ce qui prouve finalement que $T_1 \circ T_{-1} = 0$ et termine la démonstration puisque nous avons posé $T_r := T_1$ et $S_r := T_{-1}$. $\square$

Remarque 6.3.30. Avec des notations analogues, le même argument permet de montrer que la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre A_{q-1-r} est isomorphe à A par l'application $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéaire qui envoie T_{q-1-r} sur X et S_{q-1-r} sur Y. Par ailleurs, l'action par conjugaison de t sur les $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de I_S induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres de A_r sur A_{q-1-r}. L'automorphisme de A défini par la composition de ces trois isomorphismes est alors égal à l'automorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres envoyant X sur Y et Y sur X, et non pas à l'identité de A.

Description du (A_{q-1-r}, A_r)-bimodule B_r

Les calculs menés dans la preuve du Lemme 6.3.1 montrent que si l'on considère, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, l'élément $S_n^r \in B_r$ correspondant (par réciprocité de Frobenius) à la fonction f_n de la composante (I_S, ω^r)-isotypique de $\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^{q-1-r})$ ayant pour support $I_S s_1 \alpha_0^{-n} I_S = I_S \alpha_0^n s_1 I_S$ et pour valeur 1 en $\alpha_0^n s_1$, alors $\{S_n^r,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est une base du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel B_r.
Les décompositions en doubles classes à gauche disjointes

$$I_S(\alpha_0^n s_1)^{-1} I_S = \begin{cases} \displaystyle\bigsqcup_{x \in A_{2(-n)+1}} u(x)(\alpha_0^n s_1)^{-1} I_S & \text{si } n \leq 0 , \\ \displaystyle\bigsqcup_{x \in A_{2n-1}} \overline{u}(\varpi_F x)(\alpha_0^n s_1)^{-1} I_S & \text{si } n \geq 1 , \end{cases}$$

permettent alors de décrire [22] l'action des opérateurs S_n^r en calculant leur valeur sur la fonction standard $[I_2, 1] \in \mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r)$ (ce qui suffit à les caractériser par $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéarité et G_S-équivariance) :

$$\begin{aligned} S_n^r([I_2, 1]) &= \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in A_{2(-n)+1}} [u(x)(\alpha_0^n s_1)^{-1}, 1] & \text{si } n \leq 0 \\ \displaystyle\sum_{x \in A_{2n-1}} [\overline{u}(\varpi_F x)(\alpha_0^n s_1)^{-1}, 1] & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in A_{2(-n)+1}} [u(x)\alpha_0^n s_1, (-1)^{q-1-r}] & \text{si } n \leq 0 \\ \displaystyle\sum_{x \in A_{2n-1}} [\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0^n s_1, (-1)^{q-1-r}] & \text{si } n \geq 1 . \end{cases} \end{aligned}$$

Comme nous l'avons déjà indiqué, cela n'a pas de sens de vouloir composer directement deux éléments de B_r. Cependant, on peut composer un élément de B_r par un élément de A_r (à droite)

22. Toujours par réciprocité de Frobenius compacte.

ou de A_{q-1-r} (à gauche). Le résultat de ces compositions fait l'objet du prochain énoncé, que l'on démontre par calcul direct à partir des formules explicites données ci-avant.

Lemme 6.3.31. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$\left\{\begin{array}{lll} T_{q-1-r} \circ S^r_{-n} = S^r_{-(n+1)} & ; \quad S^r_{-n} \circ T_r = 0 & ; \\ S_{q-1-r} \circ S^r_{-n} = 0 & ; \quad S^r_{-n} \circ S_r = S^r_{-(n+1)} & . \end{array}\right.$$

2. *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\left\{\begin{array}{lll} T_{q-1-r} \circ S^r_{n} = 0 & ; \quad S^r_{n} \circ T_r = S^r_{n+1} & ; \\ S_{q-1-r} \circ S^r_{n} = S^r_{n+1} & ; \quad S^r_{n} \circ S_r = 0 & . \end{array}\right.$$

Démonstration. Par G_S-équivariance et $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéarité des opérateurs considérés, il nous suffit de vérifier que l'on dispose des égalités annoncées après évaluation en $[I_2, 1] \in \mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^r)$. Nous allons tout d'abord calculer l'action de T_{q-1-r} et de S_{q-1-r} par composition à droite, puis nous nous occuperons de l'action de T_r et de S_r par composition à gauche.

On commence par supposer que $n \geq 0$. On a tout d'abord

$$\begin{aligned}
(T_{q-1-r} \circ S^r_{-n})([I_2, 1]) &= T_{q-1-r}\left(\sum_{x \in A_{2n+1}} [u(x)\alpha_0^{-n} s_1, (-1)^{q-1-r}]\right) \\
&= \sum_{x \in A_{2n+1}} \sum_{y \in A_2} [u(x)\alpha_0^{-n} s_1 \overline{u}(-\varpi_F y)\alpha_0, (-1)^{q-1-r}] \\
&= \sum_{x \in A_{2n+1}} \sum_{y \in A_2} [u(x)\alpha_0^{-n} u(\varpi_F y) s_1 \alpha_0, (-1)^{q-1-r}] \\
&= \sum_{x \in A_{2n+1}} \sum_{y \in A_2} [u(x) u(\varpi_F^{2n+1} y)\alpha_0^{-n} s_1 \alpha_0, (-1)^{q-1-r}] \\
&= \sum_{z \in A_{2n+3}} [u(z)\alpha_0^{-(n+1)} s_1, (-1)^{q-1-r}] \\
&= S^r_{-(n+1)}([I_2, 1]) \ .
\end{aligned}$$

On déduit notamment de ces égalités que l'on a $S_{q-1-r} \circ S^r_{-n} = S_{q-1-r} \circ T^n_{q-1-r} \circ S^r_0$ pour tout $n \geq 0$, ce qui montre déjà que $S_{q-1-r} \circ S^r_{-n} = 0$ si $n \geq 1$ puisque la Remarque 6.3.30 assure que $S_{q-1-r} \circ T_{q-1-r} = 0$. Lorsque $n = 0$, on a directement

$$\begin{aligned}
(S_{q-1-r} \circ S^r_0)([I_2, 1]) &= S_{q-1-r}\left(\sum_{x \in A_1} [u(x) s_1, (-1)^{q-1-r}]\right) \\
&= \sum_{x \in A_1} \sum_{y \in A_2} [u(x) s_1 u(-y)\alpha_0^{-1}, (-1)^{q-1-r}] \\
&= \sum_{x \in A_1} \sum_{y \in A_2} [u(x) s_1 \alpha_0^{-1} u(-\varpi_F^{-2} y), (-1)^{q-1-r}] \ ,
\end{aligned}$$

soit donc

$$\begin{aligned}
(S_{q-1-r}\circ S_0^r)([I_2,1]) &= \sum_{x\in A_1}[u(x)\alpha_0 s_1,(-1)^{q-1-r}] \\
&+ \sum_{x\in A_1}\sum_{y\in A_2\backslash\{0\}}[u(x)\alpha_0 s_1\overline{u}(\varpi_F^2 y^{-1})\begin{pmatrix} -\varpi_F^{-2}y & -1 \\ 0 & -\varpi_F^2 y^{-1}\end{pmatrix}s_1,(-1)^{q-1-r}] \\
&= \sum_{x\in A_1}[\alpha_0 s_1\overline{u}(-\varpi_F^2 x),(-1)^{q-1-r}] \\
&+ \sum_{x\in A_1}\sum_{y\in A_2\backslash\{0\}}[u(x)\alpha_0 u(-\varpi_F^2 y^{-1})s_1\begin{pmatrix} -\varpi_F^{-2}y & -1 \\ 0 & -\varpi_F^2 y^{-1}\end{pmatrix}s_1,(-1)^{q-1-r}]\ .
\end{aligned}$$

Sachant que $\overline{u}(-\varpi_F^2 x)$ appartient à $I_S(1)$ pour tout élément $x\in A_1$, on obtient déjà la nullité de la première somme qui apparaît dans l'expression ci-dessus (car, une fois encore, $\mathrm{Card}(A_1)\equiv 0\ [p]$). Ceci prouve que l'on a en fait

$$(S_{q-1-r}\circ S_0^r)([I_2,1]) = \sum_{x\in A_1}\sum_{y\in A_2\backslash\{0\}}[u(x)\alpha_0 u(-\varpi_F^2 y^{-1})s_1\begin{pmatrix} -\varpi_F^{-2}y & -1 \\ 0 & -\varpi_F^2 y^{-1}\end{pmatrix}s_1,(-1)^{q-1-r}]\ .$$

On remarque alors que l'on dispose, pour tout $y\in A_2\backslash\{0\}$, des identités matricielles suivantes :

$$\begin{aligned}
u(-\varpi_F^2 y^{-1})s_1\begin{pmatrix} -\varpi_F^{-2}y & -1 \\ 0 & -\varpi_F^2 y^{-1}\end{pmatrix}s_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \varpi_F^2 y^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \varpi_F^{-2}y \\ -\varpi_F^2 y^{-1} & 0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varpi_F^2 y & 0 \\ -1-(\varpi_F^2 y^{-1})^2 & \varpi_F^{-2}y\end{pmatrix} \\
&= \alpha_0^{-2}\begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & y\end{pmatrix}\overline{u}(-\varpi_F^2 y^{-1}(1+(\varpi_F^2 y^{-1})^2))\ .
\end{aligned}$$

Etant donné que $\varpi_F^2 y^{-1}$ appartient à $\mathfrak{p}_F$ pour tout coefficient $y\in A_2\backslash\{0\}$, on a ainsi montré que $u(-\varpi_F^2 y^{-1})s_1\begin{pmatrix} -\varpi_F^{-2}y & -1 \\ 0 & -\varpi_F^2 y^{-1}\end{pmatrix}s_1$ appartient à $\alpha_0^{\mathbb{Z}}I_S$, ce qui montre que le support de $(S_{q-1-r}\circ S_0^r)([I_2,1])$ est contenu dans $I_S\alpha_0^{\mathbb{Z}}I_S$, et implique donc que la nullité de la fonction $(S_{q-1-r}\circ S_0^r)([I_2,1])$ grâce à la Remarque 6.3.2.

Supposons maintenant que $n\geq 1$. On a tout d'abord

$$\begin{aligned}
(S_{q-1-r}\circ S_n^r)([I_2,1]) &= S_{q-1-r}\left(\sum_{x\in A_{2n-1}}[\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0^n s_1,(-1)^{q-1-r}]\right) \\
&= \sum_{x\in A_{2n-1}}\sum_{y\in A_2}[\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0^n s_1 u(-y)\alpha_0^{-1},(-1)^{q-1-r}] \\
&= \sum_{x\in A_{2n-1}}\sum_{y\in A_2}[\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0^n\overline{u}(y)s_1\alpha_0^{-1},(-1)^{q-1-r}] \\
&= \sum_{x\in A_{2n-1}}\sum_{y\in A_2}[\overline{u}(\varpi_F x)\overline{u}(\varpi_F^{2n}y)\alpha_0^n s_1\alpha_0^{-1},(-1)^{q-1-r}]\ ,
\end{aligned}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\begin{aligned}(S_{q-1-r}\circ S_n^r)([I_2,1]) &= \sum_{x\in A_{2n-1}}\sum_{y\in A_2}[\overline{u}(\varpi_F(x+\varpi_F^{2n-1}y))\alpha_0^{n+1}s_1,(-1)^{q-1-r}]\\ &= \sum_{z\in A_{2n+1}}[\overline{u}(\varpi_F z)\alpha_0^{n+1}s_1,(-1)^{q-1-r}]\\ &= S_{n+1}^r([I_2,1])\ ,\end{aligned}$$

et prouve donc que l'on a $S_{q-1-r}\circ S_n^r=S_{n+1}^r$. On en déduit en particulier que pour tout entier $n\geq 2$, on a $T_{q-1-r}\circ S_n^r=T_{q-1-r}\circ S_{q-1-r}^{n-1}\circ S_1^r=0$ car nous savons grâce à la Remarque 6.3.30 que $T_{q-1-r}\circ S_{q-1-r}=0$. Lorsque $n=1$, on dispose directement du calcul suivant :

$$\begin{aligned}(T_{q-1-r}\circ S_1^r)([I_2,1]) &= T_{q-1-r}\left(\sum_{x\in A_1}[\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0 s_1,(-1)^{q-1-r}]\right)\\ &= \sum_{x\in A_1}\sum_{y\in A_2}[\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0 s_1\overline{u}(-\varpi_F y)\alpha_0,(-1)^{q-1-r}]\\ &= \sum_{x\in A_1}\sum_{y\in A_2}[\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0 u(\varpi_F y)s_1\alpha_0,(-1)^{q-1-r}]\\ &= \sum_{x\in A_1}\sum_{y\in A_2}[\overline{u}(\varpi_F x)u(\varpi_F^{-1}y)s_1,(-1)^{q-1-r}]\ ,\end{aligned}$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\begin{aligned}(T_{q-1-r}\circ S_1^r)([I_2,1]) &= \sum_{x\in A_1}\sum_{y_0\in A_1}\sum_{y_1\in A_1}[\overline{u}(\varpi_F x)u(y_1)u(\varpi_F^{-1}y_0)s_1,(-1)^{q-1-r})]\\ &= \sum_{x\in A_1}\sum_{y_1\in A_1}[\overline{u}(\varpi_F x)u(y_1)s_1,(-1)^{q-1-r}]\\ &+ \sum_{x\in A_1}\sum_{y_1\in A_1}\sum_{y_0\in A_1\backslash\{0\}}[\overline{u}(\varpi_F x)u(y_1)\overline{u}(\varpi_F y_0^{-1})\begin{pmatrix}\varpi_F^{-1}y_0 & -1\\ 0 & \varpi_F y_0^{-1}\end{pmatrix},(-1)^{q-1-r}]\ .\end{aligned}$$

La première double somme qui apparaît dans cette nouvelle expression peut être découpée de la façon suivante :

$$\sum_{x\in A_1}[\overline{u}(\varpi_F x)s_1,(-1)^{q-1-r}]+\sum_{x\in A_1}\sum_{y_1\in A_1\backslash\{0\}}[\overline{u}(\varpi_F x)\overline{u}(y_1^{-1})\begin{pmatrix}y_1 & -1\\ 0 & y_1^{-1}\end{pmatrix},(-1)^{q-1-r}]\ .$$

Etant donné que $\overline{u}(\varpi_F x)s_1=s_1u(-\varpi_F x)$ appartient à $s_1I_S(1)$ pour tout coefficient $x\in A_1$, on a déjà $\sum_{x\in A_1}[\overline{u}(\varpi_F x)s_1,(-1)^{q-1-r}]=0$. Par ailleurs, si x appartient à A_1 et si y_1 appartient à $A_1\backslash\{0\}$, on a aussi

$$\begin{aligned}\overline{u}(\varpi_F x)\overline{u}(y_1^{-1})\begin{pmatrix}y_1 & -1\\ 0 & y_1^{-1}\end{pmatrix} &= \overline{u}(y_1^{-1})\overline{u}(\varpi_F x)\begin{pmatrix}y_1 & -1\\ 0 & y_1^{-1}\end{pmatrix}\\ &= \overline{u}(y_1^{-1})\begin{pmatrix}y_1 & -1\\ \varpi_F y_1 x & y_1^{-1}-\varpi_F x\end{pmatrix}\\ &= \overline{u}(y_1^{-1})\begin{pmatrix}y_1 & -1\\ 0 & y_1^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\varpi_F xy_1 & -\varpi_F x\\ \varpi_F xy_1^2 & 1-\varpi_F xy_1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

avec $\begin{pmatrix} 1+\varpi_F xy_1 & -\varpi_F x \\ \varpi_F xy_1^2 & 1-\varpi_F xy_1 \end{pmatrix}$ qui appartient à $I_S(1)$ puisque x et y_1 appartiennent tous deux à A_1. On déduit donc de tout ceci que

$$\begin{aligned} & \sum_{x\in A_1}\sum_{y_1\in A_1\setminus\{0\}} [\overline{u}(\varpi_F x)\overline{u}(y_1^{-1})\begin{pmatrix} y_1 & -1 \\ 0 & y_1^{-1}\end{pmatrix}, (-1)^{q-1-r}] \\ = & \sum_{x\in A_1}\sum_{y_1\in A_1\setminus\{0\}} [\overline{u}(y_1^{-1})\begin{pmatrix} y_1 & -1 \\ 0 & y_1^{-1}\end{pmatrix}, (-1)^{q-1-r}] \\ = & \operatorname{Card}(A_1)\left(\sum_{y_1\in A_1\setminus\{0\}} [\overline{u}(y_1^{-1})\begin{pmatrix} y_1 & -1 \\ 0 & y_1^{-1}\end{pmatrix}, (-1)^{q-1-r}]\right) \\ = & \ 0 \ , \end{aligned}$$

la dernière égalité venant de la nullité de $\operatorname{Card}(A_1)$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p$. Ceci prouve finalement que $(T_{q-1-r}\circ S_1^r)([I_2,1])$ est en fait égal à

$$\sum_{x\in A_1}\sum_{y_1\in A_1}\sum_{y_0\in A_1\setminus\{0\}} [\overline{u}(\varpi_F x)u(y_1)\overline{u}(\varpi_F y_0^{-1})\begin{pmatrix} \varpi_F^{-1}y_0 & -1 \\ 0 & \varpi_F y_0^{-1}\end{pmatrix}, (-1)^{q-1-r}]$$

ou encore à

$$\sum_{x\in A_1}\sum_{y_1\in A_1}\sum_{y_0\in A_1\setminus\{0\}} [\overline{u}(\varpi_F x)u(y_1)\overline{u}(\varpi_F y_0^{-1})\alpha_0\begin{pmatrix} y_0 & -\varpi_F \\ 0 & y_0^{-1}\end{pmatrix}, (-1)^{q-1-r}] \ .$$

En particulier, le support de cet élément est contenu dans $I_S\alpha_0^{\mathbb{Z}}I_S$, ce qui implique que l'on doit avoir $(T_{q-1-r}\circ S_1^r)([I_2,1]) = 0$ d'après la Remarque 6.3.2, et prouve donc que $T_{q-1-r}\circ S_1^r = 0$.

Passons à présent à l'étude de l'action de T_r et de S_r sur B_r, en regardant d'abord son comportement sur les opérateurs S_{-n}^r avec $n\geq 0$. Grâce aux relations déjà prouvées, il nous suffit de savoir calculer $S_0^r\circ T_r$ et $S_0^r\circ S_r$. Nous commençons par le calcul de $S_0^r\circ S_r$: d'après les formules données ci-avant, on a

$$\begin{aligned} (S_0^r\circ S_r)([I_2,1]) &= S_0^r\left(\sum_{x\in A_2}[u(-x)\alpha_0^{-1},1]\right) \\ &= \sum_{x\in A_2}\sum_{y\in A_1}[u(-x)\alpha_0^{-1}u(y)s_1, (-1)^{q-1-r}] \\ &= \sum_{x\in A_2}\sum_{y\in A_1}[u(-x)u(\varpi_F^2 y)\alpha_0^{-1}s_1, (-1)^{q-1-r}] \\ &= \sum_{z\in A_3}[u(z)\alpha_0^{-1}s_1, (-1)^{q-1-r}] \\ &= S_{-1}^r([I_2,1]) \ , \end{aligned}$$

ce qui prouve par G_S-équivariance et $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéarité que $S_0^r\circ S_r = S_{-1}^r$. Une récurrence sur $n\geq 0$ permet alors d'en déduire que :

$$\forall\ n\geq 0,\ S_{-n}^r\circ S_r = T_{q-1-r}^{-n}\circ S_0^r\circ S_r = T_{q-1-r}^{-n}\circ S_{-1}^r = S_{-(n+1)}^r \ .$$

Calculons maintenant $S_0^r \circ T_r$ en identifiant sa valeur en $[I_2, 1]$. On a tout d'abord

$$\begin{aligned}
(S_0^r \circ T_r)([I_2,1]) &= S_0^r\left(\sum_{x\in A_2}[\overline{u}(-\varpi_F x)\alpha_0, 1]\right)\\
&= \sum_{x\in A_2}\sum_{y\in A_1}[\overline{u}(-\varpi_F x)\alpha_0 u(y)s_1, (-1)^{q-1-r}]\\
&= \sum_{x\in A_2}[\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0 s_1, (-1)^{q-1-r}]\\
&+ \sum_{x\in A_2}\sum_{y\in A_1\setminus\{0\}}[\overline{u}(-\varpi_F x)\alpha_0\overline{u}(y^{-1})\begin{pmatrix} y & -1\\ 0 & y^{-1}\end{pmatrix}] \; .
\end{aligned}$$

La première somme qui apparaît dans le membre de droite de l'expression ci-dessus peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in A_2}[\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0 s_1, (-1)^{q-1-r}] &= \sum_{x_0\in A_1}\sum_{x_1\in A_1}[\overline{u}(\varpi_F x_0)\overline{u}(\varpi_F^2 x_1)\alpha_0 s_1, (-1)^{q-1-r}]\\
&= \sum_{x_0\in A_1}\sum_{x_1\in A_1}[\overline{u}(\varpi_F x_0)\alpha_0 s_1 u(-x_1), (-1)^{q-1-r}]\\
&= \sum_{x_0\in A_1}\mathrm{Card}(A_1)[\overline{u}(\varpi_F x_0)\alpha_0 s_1, (-1)^{q-1-r}] \; ,
\end{aligned}$$

où le passage de la seconde égalité à la troisième est possible puisque $u(-z)$ appartient à $I_S(1)$ pour tout coefficient $z \in A_1$. Sachant que $\mathrm{Card}(A_1) \equiv 0$ $[p]$, on obtient ainsi la nullité de la somme considérée, ce qui montre que l'élément $(S_0^r \circ T_r)([I_2, 1])$ est en fait égal à $\sum_{x\in A_2}\sum_{y\in A_1\setminus\{0\}}[\overline{u}(-\varpi_F x)\alpha_0\overline{u}(y^{-1})\begin{pmatrix} y & -1\\ 0 & y^{-1}\end{pmatrix}, (-1)^{q-1-r}]$, ou encore à

$$\sum_{x\in A_2}\sum_{y\in A_1\setminus\{0\}}[\overline{u}(-\varpi_F x)\overline{u}(\varpi_F^2 y^{-1})\alpha_0\begin{pmatrix} y & -1\\ 0 & y^{-1}\end{pmatrix}, (-1)^{q-1-r}]$$

qui est à support contenu dans $I_S\alpha_0^{\mathbb{Z}}I_S$. La Remarque 6.3.2 implique alors la nullité de cet élément, ce qui prouve bien que $S_0^r \circ T_r = 0$.

Supposons enfin que l'on ait $n \geq 1$. Là encore, les formules démontrées ci-avant justifient qu'il nous suffit de calculer $S_1^r \circ T_r$ et $S_1^r \circ S_r$. On a tout d'abord

$$\begin{aligned}
(S_1^r \circ T_r)([I_2,1]) &= S_1^r\left(\sum_{x\in A_2}[\overline{u}(-\varpi_F x)\alpha_0, 1]\right)\\
&= \sum_{x\in A_2}\sum_{y\in A_1}[\overline{u}(-\varpi_F x)\alpha_0\overline{u}(\varpi_F y)\alpha_0 s_1, (-1)^{q-1-r}]\\
&= \sum_{x\in A_2}\sum_{y\in A_1}[\overline{u}(-\varpi_F(x-\varpi_F^2 y))\alpha_0^2 s_1, (-1)^{q-1-r}]\\
&= \sum_{z\in A_3}[\overline{u}(\varpi_F z)\alpha_0^2 s_1, (-1)^{q-1-r}]\\
&= S_2^r([I_2,1]) \; ,
\end{aligned}$$

ce qui démontre que l'on a $S_1^r \circ T_r = S_2^r$. On en déduit alors par récurrence que l'on a, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n^r \circ T_r = S_{q-1-r}^{n-1} \circ S_1^r \circ T_r = S_{n+1}^r \ .$$

Calculons enfin la valeur de $S_1^r \circ S_r$ en $[I_2, 1]$. Par définition des opérateurs en jeu, on a

$$\begin{aligned}
(S_1^r \circ S_r)([I_2,1]) &= S_1^r \left(\sum_{x\in A_2} [u(-x)\alpha_0^{-1}, 1] \right) \\
&= \sum_{x\in A_2} \sum_{y\in A_1} [u(-x)\alpha_0^{-1}\overline{u}(\varpi_F y)\alpha_0 s_1, (-1)^{q-1-r}] \\
&= \sum_{x\in A_2} \sum_{y\in A_1} [u(-x)\overline{u}(\varpi_F^{-1} y) s_1, (-1)^{q-1-r}] \\
&= \sum_{x\in A_2} [u(-x)s_1, (-1)^{q-1-r}] \\
&+ \sum_{x\in A_2} \sum_{y\in A_1\setminus\{0\}} [u(-x)u(\varpi_F y^{-1}) s_1 \begin{pmatrix} \varpi_F^{-1} y & 1 \\ 0 & \varpi_F y^{-1} \end{pmatrix} s_1, (-1)^{q-1-r}] \\
&= \sum_{x_0\in A_1} \sum_{x_1\in A_1} [u(-x_0)s_1\overline{u}(\varpi_F x_1), (-1)^{q-1-r}] \\
&+ \sum_{x\in A_2} \sum_{y\in A_1\setminus\{0\}} [u(-x+\varpi_F y^{-1}) \begin{pmatrix} \varpi_F y^{-1} & 0 \\ 1 & \varpi_F^{-1} y \end{pmatrix}, (-1)^{q-1}] \ .
\end{aligned}$$

Puisque $\overline{u}(\varpi_F x_1)$ appartient à $I_S(1)$ pour tout coefficient $x_1 \in A_1$, la première somme qui apparaît dans l'expression ci-dessus est égale à $\sum_{x_0\in A_1} \mathrm{Card}(A_1)[u(-x_0)s_1, (-1)^{q-1-r}]$, et est donc nulle puisque $\mathrm{Card}(A_1)$ est congru à 0 modulo p. Par suite, l'élément $(S_1^r \circ S_r)([I_2, 1])$ est en fait égal à

$$\sum_{x\in A_2} \sum_{y\in A_1\setminus\{0\}} [u(-x+\varpi_F y^{-1}) \begin{pmatrix} \varpi_F y^{-1} & 0 \\ 1 & \varpi_F^{-1} y \end{pmatrix}, (-1)^{q-1}] \ ,$$

c'est-à-dire à

$$\sum_{x\in A_2} \sum_{y\in A_1\setminus\{0\}} [u(-x+\varpi_F y^{-1})\alpha_0^{-1} \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ \varpi_F & y \end{pmatrix}, (-1)^{q-1}] \ ,$$

et est donc de support inclus dans $I_S \alpha_0^{\mathbb{Z}} I_S$. D'après la Remarque 6.3.2, cet élément doit être nul, ce qui prouve que $S_1^r \circ S_r$ est identiquement nul et termine la démonstration. □

Description du (A_r, A_{q-1-r})-bimodule B_{q-1-r}

Les calculs menés dans la sous-section précédente restent entièrement valables, sous peine d'échanger les paramètres r et $q-1-r$, lorsque l'on cherche à obtenir la structure du (A_r, A_{q-1-r})-bimodule B_{q-1-r}. On obtient donc directement qu'une base du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel B_{q-1-r} est donnée par la famille $\{S_n^{q-1-r},\ n \in \mathbb{Z}\}$ caractérisée par les égalités suivantes :

$$\forall\ n \in \mathbb{Z},\ S_n^{q-1-r}([I_2, 1]) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x\in A_{2(-n)+1}} [u(x)\alpha_0^n s_1, (-1)^r] & \text{si } n \leq 0 \\ \displaystyle\sum_{x\in A_{2n-1}} [\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0^n s_1, (-1)^r] & \text{si } n \geq 1 \ . \end{cases} ,$$

puis que la structure de (A_r, A_{q-1-r})-bimodule portée par B_{q-1-r} est donnée par les formules suivantes, qui sont l'exact analogue de celles données dans le Lemme 6.3.31.

Lemme 6.3.32. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$\left\{\begin{array}{lll} T_r \circ S_{-n}^{q-1-r} = S_{-(n+1)}^{q-1-r} & ; & S_{-n}^{q-1-r} \circ T_{q-1-r} = 0 \quad ; \\ S_r \circ S_{-n}^{q-1-r} = 0 & ; & S_{-n}^{q-1-r} \circ S_{q-1-r} = S_{-(n+1)}^{q-1-r} \quad . \end{array}\right.$$

2. *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\left\{\begin{array}{lll} T_r \circ S_{n}^{q-1-r} = 0 & ; & S_{n}^{q-1-r} \circ T_{q-1-r} = S_{n+1}^{q-1-r} \quad ; \\ S_r \circ S_{n}^{q-1-r} = S_{n+1}^{q-1-r} & ; & S_{n}^{q-1-r} \circ S_{q-1-r} = 0 \quad . \end{array}\right.$$

Description des éléments de $B_r \circ B_{q-1-r}$ dans A_{q-1-r}

Pour disposer d'une description complète des éléments de l'algèbre $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$, il nous faut décrire les éléments de la forme $S_n^k \circ S_m^{q-1-k} \in A_{q-1-k}$ pour tous entiers $n, m \in \mathbb{Z}$ et pour tout paramètre $k \in \{r, q-1-r\}$. Nous allons traiter dans cette sous-section le cas du paramètre $k = r$: celui du paramètre $k = q-1-r$ s'obtient par les mêmes calculs (en y échangeant bien entendu les rôles de r et de $q-1-r$), et les résultats qui lui sont associés seront donnés dans la sous-section suivante.
D'après les relations obtenues dans le Lemme 6.3.31, il nous suffit de calculer $S_1^r \circ S_1^{q-1-r}$, $S^r \circ S_1^{q-1-r} \circ S_0^r$, $S_0^r \circ S_1^{q-1-r}$ et $S_0^r \circ S_0^{q-1-r}$ pour connaître tous les éléments de $B_r \circ B_{q-1-r}$.

Lemme 6.3.33. *On dispose des égalités suivantes dans A_{q-1-r} :*

$$\left\{\begin{array}{lll} S_1^r \circ S_1^{q-1-r} = 0 & ; & S_0^r \circ S_1^{q-1-r} = (-1)^r T_{q-1-r} \quad ; \\ S_1^r \circ S_0^{q-1-r} = (-1)^r S_{q-1-r} & ; & S_0^r \circ S_0^{q-1-r} = 0 \quad . \end{array}\right.$$

Démonstration. Par G_S-équivariance et $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéarité, il nous suffit de vérifier que l'on dispose des égalités voulues après évaluation en $[I_2, 1] \in \mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^{q-1-r})$. On a tout d'abord

$$\begin{aligned} (S_1^r \circ S_1^{q-1-r})([I_2,1]) &= S_1^r \left(\sum_{x \in A_1} [\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0 s_1, (-1)^r] \right) \\ &= \sum_{x \in A_1} \sum_{y \in A_1} [\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0 s_1 \overline{u}(\varpi_F y)\alpha_0 s_1, (-1)^{q-1}] \\ &= \sum_{x \in A_1} \sum_{y \in A_1} [\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0 u(-\varpi_F y)\alpha_0^{-1}, (-1)^r] \\ &= \sum_{x \in A_1} \sum_{y \in A_1} [\overline{u}(\varpi_F x) u(-\varpi_F^{-1} y), (-1)^r] \\ &= \sum_{x \in A_1} [\overline{u}(\varpi_F x), (-1)^r] \\ &\quad + \sum_{x \in A_1} \sum_{y \in A_1 \setminus \{0\}} [\overline{u}(\varpi_F x)\overline{u}(-\varpi_F y^{-1}) \begin{pmatrix} \varpi_F^{-1} y & 1 \\ 0 & \varpi_F y^{-1} \end{pmatrix} s_1, (-1)^{q-1}] \ . \end{aligned}$$

Comme $\overline{u}(\varpi_F x)$ appartient à $I_S(1)$ pour tout élément $x \in A_1$, la première somme qui apparaît dans l'expression ci-dessus est égale à $\mathrm{Card}(A_1)[I_2, (-1)^r]$, et est donc nulle car $\mathrm{Card}(A_1) \equiv 0\ [p]$. On obtient ainsi que

$$\begin{aligned}
(S_1^r \circ S_1^{q-1-r})([I_2, 1]) &= \sum_{x\in A_1} \sum_{y\in A_1\setminus\{0\}} \left[\overline{u}(\varpi_F(x - y^{-1}))\alpha_0 \begin{pmatrix} y & \varpi_F \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix} s_1, (-1)^r\right] \\
&= \sum_{x\in A_1} \sum_{y\in A_1\setminus\{0\}} \left[\overline{u}(\varpi_F(x - y^{-1}))s_1\alpha_0^{-1} \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ -\varpi_F & y \end{pmatrix}, (-1)^r\right]
\end{aligned}$$

est un élément de A_{q-1-r} dont le support est contenu dans $I_S s_1 \alpha_0^{\mathbb{Z}} I_S$, ce qui implique qu'il est nul d'après la Proposition 3.5.30 et prouve donc que l'on a $S_1^r \circ S_1^{q-1-r} = 0$. Calculons ensuite $(S_1^r \circ S_0^{q-1-r})([I_2, 1])$. Les définitions des opérateurs S_1^r et S_0^{q-1-r} assurent directement que

$$\begin{aligned}
(S_1^r \circ S_0^{q-1-r})([I_2, 1]) &= S_1^r \left(\sum_{x\in A_1} [u(x)s_1, (-1)^r] \right) \\
&= \sum_{x\in A_1} \sum_{y\in A_1} [u(x)s_1\overline{u}(\varpi_F y)\alpha_0 s_1, (-1)^{q-1}] \\
&= \sum_{x\in A_1} \sum_{y\in A_1} [u(x)u(-\varpi_F y)\alpha_0^{-1}, (-1)^r] \\
&= \sum_{z\in A_2} [u(-z)\alpha_0^{-1}, (-1)^r] \\
&= (-1)^r S_{q-1-r}([I_2, 1]) \ ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que l'on a effectivement $S_1^r \circ S_0^{q-1-r} = (-1)^r S_{q-1-r}$.
Passons maintenant au calcul de $(S_0^r \circ S_1^{q-1-r})([I_2, 1])$. Par définition des opérateurs en jeu, on a directement

$$\begin{aligned}
(S_0^r \circ S_1^{q-1-r})([I_2, 1]) &= S_0^r \left(\sum_{x\in A_1} [\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0 s_1, (-1)^r] \right) \\
&= \sum_{x\in A_1} \sum_{y\in A_1} [\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0 s_1 u(y)s_1, (-1)^{q-1}] \\
&= \sum_{x\in A_1} \sum_{y\in A_1} [\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0\overline{u}(-y), (-1)^r] \\
&= \sum_{x\in A_1} \sum_{y\in A_1} [\overline{u}(\varpi_F x)\overline{u}(-\varpi_F^2 y)\alpha_0, (-1)^r] \\
&= \sum_{z\in A_2} [\overline{u}(-\varpi_F z)\alpha_0, (-1)^r] \\
&= (-1)^r T^{q-1-r}([I_2, 1]) \ ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $S_0^r \circ S_1^{q-1-r} = (-1)^r T_{q-1-r}$. Enfin, pour calculer $(S_0^r \circ S_0^{q-1-r})([I_2, 1])$, il suffit d'écrire que

$$\begin{aligned}
(S_0^r \circ S_0^{q-1-r})([I_2,1]) &= S_0^r\left(\sum_{x\in A_1}[u(x)s_1,(-1)^r]\right)\\
&= \sum_{x\in A_1}\sum_{y\in A_1}[u(x)s_1u(y)s_1,(-1)^{q-1}]\\
&= \sum_{x\in A_1}\sum_{y\in A_1}[u(x)\overline{u}(-y),(-1)^r]\\
&= \sum_{x\in A_1}[u(x),(-1)^r]+\sum_{x\in A_1}\sum_{y\in A_1\backslash\{0\}}[u(x)u(-y^{-1})s_1\begin{pmatrix} y & -1\\ 0 & y^{-1}\end{pmatrix},(-1)^{q-1}]\\
&= (-1)^{q-1}\sum_{x\in A_1}[u(x-y^{-1})s_1,y^{q-1-r}]\ ,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $(S_0^r \circ S_0^{q-1-r})([I_2,1])$ est un élément de A_{q-1-r} dont le support est contenu dans $I_S s_1 I_S$, et implique donc sa nullité grâce à la Proposition 3.5.30. On en conclut par G_S-équivariance et $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéarité que l'on a $S_0^r \circ S_0^{q-1-r}=0$, ce qui termine la démonstration. □

En combinant les relations précédentes à celles démontrées dans le Lemme 3.3, on obtient les formules plus générales suivantes.

Corollaire 6.3.34. *Soient $m\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$. On dispose des égalités suivantes dans A_{q-1-r}.*

1. *Si $n\geq 0$, alors on a*

$$S_{-n}^r\circ S_m^{q-1-r}=\begin{cases}(-1)^r T_{q-1-r}^{n+m} & \text{si } m\geq 1\ ;\\ 0 & \text{si } m\leq 0\ .\end{cases}$$

2. *Si $n\geq 1$, alors on a*

$$S_{n}^r\circ S_m^{q-1-r}=\begin{cases}(-1)^r S_{q-1-r}^{n-m} & \text{si } m\leq 0\ ;\\ 0 & \text{si } m\geq 1\ .\end{cases}$$

Démonstration. Supposons que $n\in\mathbb{N}$ et que $m\in\mathbb{Z}$. Si $m\geq 1$, les expressions obtenues dans le Lemme 3.3 nous permettent alors d'écrire que

$$S_{-n}^r\circ S_m^{q-1-r}=T_{q-1-r}^n\circ S_0^r\circ S_1^{q-1-r}\circ T_{q-1-r}^{m-1}=T_{q-1-r}^n\circ((-1)^rT_{q-1-r})\circ T_{q-1-r}^{m-1}=(-1)^rT_{q-1-r}^{m+n}\ ,$$

tandis que si $m\leq 0$, on a plutôt

$$S_{-n}^r\circ S_m^{q-1-r}=T_{q-1-r}^n\circ S_0^r\circ S_0^{q-1-r}\circ S_{q-1-r}^{-m}=0\ .$$

Supposons maintenant que $n\geq 1$. Si $m\geq 1$, les formules du Lemme 3.3 nous donnent cette fois

$$S_{n}^r\circ S_m^{q-1-r}=S_{q-1-r}^{n-1}\circ S_1^r\circ S_1^{q-1-r}\circ T_{q-1-r}^{m-1}=0\ ,$$

tandis que si $m\leq 0$, on a

$$S_{n}^r\circ S_m^{q-1-r}=S_{q-1-r}^{n-1}\circ S_1^r\circ S_0^{q-1-r}\circ S_{q-1-r}^{-m}=S_{q-1-r}^{n-1}\circ((-1)^rS_{q-1-r})\circ S_{q-1-r}^{-m}=(-1)^rS_{q-1-r}^{n-m}\ .$$

□

Description des éléments de $B_{q-1-r} \circ B_r$ dans A_r

Comme nous l'avons déjà dit, les preuves des résultats énoncés dans la sous-section précédente sont valables ligne à ligne une fois que l'on a échangé les rôles tenus par les paramètres r et $q-1-r$. On dispose donc en particulier des deux énoncés suivants.

Lemme 6.3.35. *On dispose des égalités suivantes dans A_r :*

$$\left\{\begin{array}{llll} S_1^{q-1-r} \circ S_1^r = 0 & ; & S_0^{q-1-r} \circ S_1^r = (-1)^{q-1-r} T_r & ; \\ S_1^{q-1-r} \circ S_0^r = (-1)^{q-1-r} S_r & ; & S_0^{q-1-r} \circ S_0^r = 0 & . \end{array}\right.$$

Corollaire 6.3.36. *Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dispose des égalités suivantes dans A_r.*

1. *Si $n \geq 0$, alors on a*

$$S_{-n}^{q-1-r} \circ S_m^r = \left\{\begin{array}{ll} (-1)^{q-1-r} T_r^{n+m} & \text{si } m \geq 1 \ ; \\ 0 & \text{si } m \leq 0 \ . \end{array}\right.$$

2. *Si $n \geq 1$, alors on a*

$$S_n^{q-1-r} \circ S_m^r = \left\{\begin{array}{ll} (-1)^{q-1-r} S_r^{n-m} & \text{si } m \leq 0 \ ; \\ 0 & \text{si } m \geq 1 \ . \end{array}\right.$$

6.3.7 Modules simples sur la deuxième algèbre de Hecke-Iwahori

Nous avons précédemment expliqué que la description des $\mathcal{H}_S^1$-modules simples à droite passe par la compréhension de la structure des $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules simples à droite. Pour ce faire, nous démontrons tout d'abord qu'un tel module est nécessairement de dimension 1 ou 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, puis nous déterminons ensuite tous les modules simples de dimension sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ fixée.

A cet effet, nous devons introduire quelques notations supplémentaires. Nous notons e_1 et e_2 les idempotents de $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$ respectivement définis par l'application identité de A_r et de A_{q-1-r} (via le plongement diagonal de $A_r \oplus A_{q-1-r}$ dans $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$). Ils satisfont aux relations usuelles, à savoir [23] $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ pour tous indices i, $j \in \{1, 2\}$ et $e_1 + e_2 = 1$. Enfin, pour tout élément $T \in \widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$ et tout $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module à droite M, on notera $m|T$ l'action à droite de T sur un vecteur $m \in M$.

Majoration de la dimension des $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules simples à droite

Théorème 6.3.37. *Tout $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module simple à droite est de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ égale à 1 ou à 2.*

Démonstration. Soit M un $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module simple à droite. Notons $M_1 := M|e_1$ et $M_2 := M|e_2$ les images respectives de M sous l'action des idempotents e_1 et e_2 de $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$, de sorte que l'on a une décomposition en $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels de la forme $M = M_1 \oplus M_2$. Par ailleurs, l'action de $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$ sur M munit naturellement M_1 d'une structure de sous-A_r-module de M et M_2 d'une structure de sous-A_{q-1-r}-module de M.
Supposons que M_1 soit non nul et considérons un sous-A_r-module non nul V_1 de M_1. Les relations qui existent entre les éléments de $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$ (démontrées dans la Section 6.3.6 ci-avant) assurent que $V := V_1 + (V_1|B_r)$ est stable sous l'action de $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$, ce qui implique que l'on a $V = M$ par simplicité de M, et donc $V_1 = M_1$ après application de l'idempotent e_1. Nous

23. On désigne par δ_{ij} le symbole de Kronecker, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.

avons ainsi prouvé que si M_1 est non nul, alors c'est un module simple à droite sur la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre commutative A_r, et il doit par conséquent nécessairement être de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.
De la même manière, on démontre que si M_2 est non nul, alors c'est un module simple à droite sur la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre commutative A_{q-1-r}, et il est donc forcément de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. La décomposition $M = M_1 \oplus M_2$ achève alors de prouver que M est de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ égale[24] à 1 ou à 2. $\square$

Réciproquement, nous devons maintenant déterminer tous les $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules à droite simples de dimension 1 ou 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Pour ce faire, nous commençons par remarquer le rôle important joué par les caractères de la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre commutative $A = \overline{\mathbb{F}}_p[X, Y]/(XY, YX)$ dans le découpage des $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules à droite. Ces caractères se répartissent en deux familles paramétrées par $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$: les caractères $\mu_1(\lambda)$ qui envoient X sur λ et Y sur 0, et les caractères $\mu_2(\lambda)$ qui envoient X sur 0 et Y sur λ. Notons que lorsque $\lambda = 0$, on a $\mu_1(0) = \mu_2(0)$ que l'on notera simplement $\mu(0)$, et que ce sont les seules égalités possibles entre deux caractères de A.
Pour simplifier la compréhension des notations utilisées par la suite, nous désignerons par $\mu_i^r(\lambda)$ le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de A_r défini par $\mu_i(\lambda)$ après application de l'isomorphisme $A_r \simeq A$ établi dans le Théorème 6.3.29. Par exemple, $\mu_1^r(\lambda)$ est le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de A_r envoyant T_r sur λ et S_r sur 0. On notera $\mu^r(0) = \mu_1^r(0) = \mu_2^r(0)$ le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de A_r envoyant T_r et S_r sur 0. Pour des raisons qui apparaîtront dans la prochaine section, ce caractère sera appelé le caractère *supersingulier* de A_r. De la même manière, on dispose des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères $\mu_i^{q-1-r}(\lambda)$ de A_{q-1-r}, avec $i \in \{1, 2\}$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, et l'on notera $\mu^{q-1-r}(0)$ le caractère supersingulier de A_{q-1-r}.

Classification des $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules à droite simples

Fixons un $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module à droite simple M. Tout comme dans la preuve du Théorème 6.3.37, nous posons $M_i := M|e_i$ pour tout indice $i \in \{1, 2\}$, ce qui fournit une décomposition du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel M sous la forme $M_1 \oplus M_2$. La structure de $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module à droite de M munit alors M_1 (resp. M_2) d'une structure de A_r-module (resp. de A_{q-1-r}-module) à droite, et le Théorème 6.3.37 assure que M_1, M_2 sont chacun de dimension 0 ou 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Traitons tout d'abord le cas où M est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, ce qui revient à dire qu'il existe un paramètre $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ et un indice $i \in \{1, 2\}$ tels que l'on ait $(M_1, M_2) = (\mu_i^r(\lambda), 0)$ ou $(M_1, M_2) = (0, \mu_i^{q-1-r}(\lambda))$. Supposons par exemple que M_1 soit non nul, i.e. de la forme $\mu_i^r(\lambda)$, et fixons un vecteur non nul $m \in M_1$. Les opérateurs T_r et S_r de A_r, vus comme élément de $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$, agissent alors respectivement sur m par les scalaires $\delta_{1i}\lambda$ et $\delta_{2i}\lambda$:

$$\begin{cases} m|T_r = \delta_{1i}\lambda m \ ; \\ m|S_r = \delta_{2i}\lambda m \ . \end{cases}$$

Remarquons maintenant que les formules démontrées dans le Lemme 6.3.35 prouvent en particulier que l'on a $T_r = (-1)^{q-1-r}(S_0^{q-1-r} \circ S_1^r)$ et $S_r = (-1)^{q-1-r}(S_1^{q-1-r} \circ S_0^r)$. Comme on a supposé que $M_2 = \{0\}$ et puisque l'action de B_r sur M envoie M_1 dans M_2, on obtient nécessairement que

$$\begin{cases} m|T_r = (-1)^{q-1-r} m|(S_0^{q-1-r} \circ S_1^r) = (-1)^{q-1-r}(m|S_1^r)|S_0^{q-1-r} = 0 \ , \\ m|S_r = (-1)^{q-1-r} m|(S_1^{q-1-r} \circ S_0^r) = (-1)^{q-1-r}(m|S_0^r)|S_1^{q-1-r} = 0 \ , \end{cases}$$

ce qui implique que l'on doit avoir $\lambda = 0$ par comparaison des deux expressions donnant $m|T_r$ ou $m|S_r$ selon la valeur de i. Réciproquement, les formules obtenues dans la Section 6.3.6 assurent que $M_1(0) := \mu^r(0) \oplus \{0\}$ est bien un module à droite sur $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$, et il est manifestement de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

24. Le cas de la dimension 0 est exclu car on a supposé que M est simple, donc non nul.

Les mêmes arguments, reposant cette fois sur l'utilisation du Lemme 6.3.33, montrent que lorsque M_2 est non nul, la seule possibilité est d'avoir $M = M_2(0) := \{0\} \oplus \mu^{q-1-r}(0)$, qui est bien stable sous l'action de $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$. On a donc finalement démontré le résultat suivant.

Théorème 6.3.38. *Il existe deux $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules à droite simples de dimension* 1 *sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$*, à savoir les caractères* $M_1(0) := \mu^r(0) \oplus \{0\}$ *et* $M_2(0) := \{0\} \oplus \mu^{q-1-r}(0)$.

Supposons maintenant que M soit un $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module à droite simple de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, ce qui signifie qu'il existe deux indices $i, j \in \{1, 2\}$ et deux paramètres $\lambda_i, \lambda_j \in \overline{\mathbb{F}}_p$ tels que $M_1 = \mu_i^r(\lambda_i)$ et $M_2 = \mu_j^{q-1-r}(\lambda_j)$. Remarquons tout d'abord que la simplicité de M nécessite, d'après les résultats que l'on a obtenus ci-avant sur la structure des $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules simples de dimension 1, que les paramètres λ_i et λ_j soient tous deux non nuls.
Fixons maintenant un vecteur non nul $m_1 \in M_1$. Les vecteurs $m_1|S_0^r$ et $m_1|S_1^r$ appartiennent alors tous deux à M_2, et ils ne peuvent en outre pas être simultanément nuls : si c'était le cas, on pourrait en effet reprendre les calculs menés dans la sous-section précédente (à partir des Lemmes 6.3.33 et 6.3.35) pour prouver la nullité de λ_i, ce qui contredirait la simplicité de M.
Supposons par exemple que $m_1|S_0^r$ soit non nul et appliquons-lui l'opérateur l'opérateur S_{q-1-r} : le Lemme 6.3.31 assure alors que l'on a

$$\begin{aligned} \delta_{2j}\lambda_j(m_1|S_0^r) &= (m_1|S_0^r)|S_{q-1-r} \\ &= m_1|(S_{q-1-r} \circ S_0^r) \\ &= 0 \ , \end{aligned}$$

ce qui implique que $\delta_{2j} = 0$, i.e que $j = 1$. Si l'on applique maintenant l'opérateur T_{q-1-r} au vecteur $m_1|S_0^r$, on obtient, de nouveau grâce au Lemme 6.3.31, que

$$\begin{aligned} \delta_{1j}\lambda_j(m_1|S_0^r) &= (m_1|S_0^r)|T_{q-1-r} \\ &= m_1|(T_{q-1-r} \circ S_0^r) \\ &= m_1|S_{-1}^r \\ &= m_1|(S_0^r \circ S_r) \\ &= (m_1|S_r)|S_0^r \\ &= \delta_{i2}\lambda_i(m_1|S_0^r) \ , \end{aligned}$$

ce qui montre par non-nullité de $m_1|S_0^r$ et de δ_{1j} que l'on a forcément $\delta_{i2} = 1$, i.e. $i = 2$, et $\lambda_i = \lambda_j$.
On a ainsi prouvé que si $m_1|S_0^r$ est non nul, alors il doit exister un paramètre $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ tel que l'on ait $M_1 = \mu_2^r(\lambda)$ et $M_2 = \mu_1^{q-1-r}(\lambda)$. De la même manière, on démontre que si $m_1|S_1^r$ est non nul, alors il doit exister un paramètre $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ tel que l'on ait $M_1 = \mu_1^r(\lambda)$ et $M_2 = \mu_2^{q-1-r}(\lambda)$.
On définit réciproquement, pour tout scalaire non nul $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, deux $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels $M_{12}(\lambda) := \overline{\mathbb{F}}_p m_1 \oplus \overline{\mathbb{F}}_p m_2$ et $M_{21}(\lambda) := \overline{\mathbb{F}}_p n_1 \oplus \overline{\mathbb{F}}_p n_2$ que l'on munit des relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} m_1|S_0^r = 0 \ ; \\ m_1|S_1^r = m_2 \ ; \\ m_1|T_r = \lambda m_1 \ ; \\ m_1|S_r = 0 \ ; \\ m_1|T_{q-1-r} = 0 \ ; \\ m_1|S_{q-1-r} = 0 \ ; \\ m_1|S_0^{q-1-r} = 0 \ ; \\ m_1|S_1^{q-1-r} = 0 \ ; \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} n_1|S_0^r = n_2 \ ; \\ n_1|S_1^r = 0 \ ; \\ n_1|T_r = 0 \ ; \\ n_1|S_r = \lambda n_1 \ ; \\ n_1|T_{q-1-r} = 0 \ ; \\ n_1|S_{q-1-r} = 0 \ ; \\ n_1|S_0^{q-1-r} = 0 \ ; \\ n_1|S_1^{q-1-r} = 0 \ . \end{array}\right.$$

Rappelons que l'on dispose en particulier, pour les actions à droite que l'on considère [25], des relations suivantes dans $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$:

$$\left\{\begin{array}{l} A_r B_{q-1-r} = B_r A_r = B_{q-1-r} A_{q-1-r} = A_{q-1-r} B_r = 0 \ ; \\ A_r A_{q-1-r} = B_r B_r = B_{q-1-r} B_{q-1-r} = A_{q-1-r} A_r = 0 \ . \end{array}\right.$$

25. Si l'on veut travailler avec une notation sous forme de composition (comme nous l'avons fait, lorsque

Combinées aux formules démontrées dans la Section 6.3.6, elles permettent de vérifier directement que $M_{12}(\lambda)$ et $M_{21}(\lambda)$ sont bien munis d'une structure de module à droite sur $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$. On dispose par exemple des calculs suivants :

$$\begin{cases} m_2|T_{q-1-r} = m_1|(T_{q-1-r} \circ S_1^r) = 0 \ ; \\ m_2|S_{q-1-r} = m_1|(S_{q-1-r} \circ S_1^r) = m_1|(S_1^r \circ T_r) = \lambda m_2 \ ; \\ m_2|S_1^{q-1-r} = m_1|(S_1^{q-1-r} \circ S_1^r) = 0 \ ; \\ m_2|S_0^{q-1-r} = m_1|(S_0^{q-1-r} \circ S_1^r) = (-1)^{q-1-r} m_1|T_r = (-1)^{q-1-r}\lambda m_1 \ ; \\ m_2|T_r = 0 \ ; \\ m_2|S_r = 0 \ ; \\ m_2|S_0^r = 0 \ ; \\ m_2|S_1^r = 0 \ . \end{cases}$$

Ils montrent en outre que l'on a $M_{12}(\lambda) = \mu_1^r(\lambda) \oplus \mu_2^{q-1-r}(\lambda)$, et l'on peut vérifier de même que l'on a $M_{21}(\lambda) = \mu_2^r(\lambda) \oplus \mu_1^{q-1-r}(\lambda)$. La description des caractères de $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$ donnée dans la sous-section précédente implique donc que $M_{12}(\lambda)$ et $M_{21}(\lambda)$ sont des $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules à droite simples de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Il est enfin immédiat de voir que ce sont des modules deux à deux non isomorphes puisqu'ils sont associés à des caractères centraux deux à deux distincts. Si l'on récapitule ce qui précède, nous obtenons finalement l'énoncé suivant.

Théorème 6.3.39. *Pour tout $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module à droite simple M de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, il existe un unique paramètre $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ tel que M soit isomorphe à l'un et un seul des deux $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules suivants :*

$$M_{12}(\lambda) := \mu_1^r(\lambda) \oplus \mu_2^{q-1-r}(\lambda) \ \textit{ou} \ M_{21}(\lambda) := \mu_2^r(\lambda) \oplus \mu_1^{q-1-r}(\lambda) \ .$$

On obtient donc finalement le résultat de classification suivant des $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules simples.

Corollaire 6.3.40. *La liste suivante fournit un système de représentants des classes d'isomorphisme des $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules à droite simples :*
- *les caractères supersinguliers $M_1(0)$ et $M_2(0)$;*
- *les $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-modules $M_{12}(\lambda)$ et $M_{21}(\lambda)$ avec $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$.*

6.3.8 Structure de la troisième algèbre de Hecke-Iwahori

Comme nous l'avons vu dans le Lemme 6.3.1, l'étude des modules simples sur la pro-p-algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}(G_S, I_S(1), \mathbf{1})$ fait intervenir une troisième algèbre de Hecke-Iwahori qui ne possède pas d'analogue lorsque l'on s'intéresse aux modules simples sur la pro-p-algèbre de Hecke-Iwahori de G. Ce phénomène reflète l'existence d'un caractère d'ordre 2 du tore fini $T_S(k_F)$ fournissant par inflation un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse d'ordre 2 du sous-groupe d'Iwahori I_S qui ne peut donc pas être étendu en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de G_S. Cette propriété n'existe pas lorsque l'on travaille avec le tore fini $T(k_F)$ de G puisqu'un tel caractère pourrait être factorisé à travers le déterminant [26], et donc étendu en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de G [V1, Section 2.1.1].

Nous définissons $\mathcal{H}_S^\star$ comme la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre engendrée par la famille $(\mathcal{T}_w^\star)_{w \in W_S}$ munie des relations suivantes :
- relations de tresse : si $w, w' \in W_S$ vérifient $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$, alors $\mathcal{T}_{ww'}^\star = \mathcal{T}_w^\star \mathcal{T}_{w'}^\star$;
- relations quadratiques : pour tout $i \in \{0,1\}$, $(\mathcal{T}_{s_i}^\star)^2 = 0$.

cela avait un sens, dans la Section 6.3.6), il faut renverser les expressions en les lisant de droite à gauche. Nous utilisons ici la notation sous forme d'action à droite car c'est celle qui apparaît naturellement lorsque l'on travaille avec des modules issus d'espaces de vecteurs $I_S(1)$-invariants, et qu'elle permet en outre de faire directement les calculs dans $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$ à l'aide de la multiplication matricielle usuelle.

26. C'est ce qui correspond au cas *Iwahori* dans [V1, Section 2.1].

Tout comme pour l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_S$, on peut démontrer que $\mathcal{H}_S^\star$ est le $\overline{\mathbb{F}}_p$-module de base $(\mathcal{T}_w^\star)_{w\in W_S}$. De plus, la démonstration du Théorème 6.3.4 reste valable et permet de prouver que $\mathcal{H}_S^\star$ est la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre engendrée par les opérateurs $\mathcal{T}_0^\star := \mathcal{T}_{s_0}^\star$ et $\mathcal{T}_1^\star := \mathcal{T}_{s_1}^\star$, qui sont tous deux de carré nul à cause des relations quadratiques.
L'introduction de cette troisième algèbre de Hecke-Iwahori est justifiée par le résultat suivant, dont la preuve s'effectue de la même façon que lorsque l'on cherche à démontrer l'existence d'un isomorphisme entre l'algèbre de Hecke-Iwahori standard $\mathcal{H}_S$ et l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}(G_S, I_S)$ (cf. Section 6.3.5).

Théorème 6.3.41. *Notons f_0 et f_1 les éléments de $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^{\frac{q-1}{2}}))$ qui sont respectivement associés par réciprocité de Frobenius compacte aux éléments ψ_0, ψ_1 de $\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^{\frac{q-1}{2}})$ définis comme suit :*
- *l'élément ψ_0 a pour support $I_S s_0 I_S$ et vaut 1 en s_0 ;*
- *l'élément ψ_1 a pour support $I_S s_1 I_S$ et vaut 1 en s_1.*

Il existe alors un unique morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres qui envoie f_0 sur $\mathcal{T}_0^\star$ et f_1 sur $\mathcal{T}_1^\star$, et il induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres :

$$\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\omega^{\frac{q-1}{2}})) \simeq \mathcal{H}_S^\star \ .$$

Détermination du centre de $\mathcal{H}_S^\star$

La structure des résultats démontrés dans ce paragraphe et de leurs preuves sont les mêmes que celles qui permettent d'obtenir les énoncés analogues pour l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_S$. Les simplifications par rapport au cas traité ci-avant proviennent du fait que les opérateurs $\mathcal{T}_0^\star$ et $\mathcal{T}_1^\star$ sont de carré nul, ce qui n'est pas le cas des opérateurs $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_1$.

Théorème 6.3.42. *Le centre de l'algèbre $\mathcal{H}_S^\star$ est égal à la sous-$\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre des polynômes en l'opérateur $(\mathcal{T}_0^\star - \mathcal{T}_1^\star)^2$.*

Démonstration. Commençons par remarquer que l'égalité $-(\mathcal{T}_0^\star - \mathcal{T}_1^\star)^2 = \mathcal{T}_0^\star\mathcal{T}_1^\star + \mathcal{T}_1^\star\mathcal{T}_0^\star$ assure que $(\mathcal{T}_0^\star - \mathcal{T}_1^\star)^2$ est effectivement un élément central de $\mathcal{H}_S^\star$ puisque l'on a

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{T}_0^\star(\mathcal{T}_0^\star - \mathcal{T}_1^\star)^2 = -\mathcal{T}_0^\star\mathcal{T}_1^\star\mathcal{T}_0^\star = (\mathcal{T}_0^\star - \mathcal{T}_1^\star)^2\mathcal{T}_0^\star \ ; \\ \mathcal{T}_1^\star(\mathcal{T}_0^\star - \mathcal{T}_1^\star)^2 = -\mathcal{T}_1^\star\mathcal{T}_0^\star\mathcal{T}_1^\star = (\mathcal{T}_0^\star - \mathcal{T}_1^\star)^2\mathcal{T}_1^\star \ . \end{array}\right.$$

Pour démontrer que, réciproquement, tout élément du centre de $\mathcal{H}_S^\star$ est un polynôme en l'opérateur $(\mathcal{T}_0^\star - \mathcal{T}_1^\star)^2$, nous reprenons l'argument développé dans la preuve du Théorème 6.3.9 et raisonnons par récurrence descendante sur le degré homogène maximal d'un élément du centre en traitant tout d'abord le cas des éléments centraux de degré homogène maximal égal à 1 ou à 2.
Dire que $Z := \alpha\mathcal{T}_0^\star + \beta\mathcal{T}_1^\star + \gamma$ est un élément central de $\mathcal{H}_S^\star$ (avec $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{\mathbb{F}}_p$) équivaut à dire que Z commute avec $\mathcal{T}_0^\star$ et avec $\mathcal{T}_1^\star$, ce qui signifie que l'on dispose des égalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \beta\mathcal{T}_0^\star\mathcal{T}_1^\star = \beta\mathcal{T}_1^\star\mathcal{T}_0^\star \ , \\ \alpha\mathcal{T}_1^\star\mathcal{T}_0^\star = \alpha\mathcal{T}_0^\star\mathcal{T}_1^\star \ , \end{array}\right.$$

et implique donc que $\alpha = \beta = 0$, i.e. que $Z = \gamma$ est une homothétie.
Supposons maintenant que $Z = \alpha\mathcal{T}_0^\star\mathcal{T}_1^\star + \beta\mathcal{T}_1^\star\mathcal{T}_0^\star + \gamma\mathcal{T}_0^\star + \delta\mathcal{T}_1^\star + \epsilon$ soit de degré homogène maximal égal à 2 (avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \overline{\mathbb{F}}_p$). Les relations de commutation avec $\mathcal{T}_0^\star$ et $\mathcal{T}_1^\star$ fournissent cette fois les égalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \beta\mathcal{T}_0^\star\mathcal{T}_1^\star\mathcal{T}_0^\star + \delta\mathcal{T}_0^\star\mathcal{T}_1^\star = \alpha\mathcal{T}_0^\star\mathcal{T}_1^\star\mathcal{T}_0^\star + \delta\mathcal{T}_1^\star\mathcal{T}_0^\star \ , \\ \alpha\mathcal{T}_1^\star\mathcal{T}_0^\star\mathcal{T}_1^\star + \gamma\mathcal{T}_1^\star\mathcal{T}_0^\star = \beta\mathcal{T}_1^\star\mathcal{T}_0^\star\mathcal{T}_1^\star + \gamma\mathcal{T}_0^\star\mathcal{T}_1^\star \ . \end{array}\right.$$

On en déduit que l'on doit avoir $\gamma = \delta = 0$ et $\alpha = \beta$, ce qui prouve que Z est égal à $\alpha(\mathcal{T}_0^\star\mathcal{T}_1^\star + \mathcal{T}_1^\star\mathcal{T}_0^\star) + \epsilon = -\alpha(\mathcal{T}_0^\star - \mathcal{T}_1^\star)^2 + \epsilon$ et est donc effectivement un polynôme en l'opérateur $(\mathcal{T}_0^\star - \mathcal{T}_1^\star)^2$.
Traitons enfin le cas général d'un élément central Z de degré homogène maximal $d \geq 2$ en distinguant selon la parité de d.

- Si $d = 2n$ est pair, on peut écrire Z sous la forme $Z = \alpha(\mathcal{T}_0^\star\mathcal{T}_1^\star)^n + \beta(\mathcal{T}_1^\star\mathcal{T}_0^\star)^n + Z_1$ avec $Z_1 \in \overline{\mathbb{F}}_p[\mathcal{T}_0^\star, \mathcal{T}_1^\star]$ de degré homogène maximal strictement inférieur à d. La relation $Z\mathcal{T}_0^\star = \mathcal{T}_0^\star Z$ se réduit alors à
$$\beta\mathcal{T}_0^\star(\mathcal{T}_1^\star\mathcal{T}_0^\star)^n + \mathcal{T}_0^\star Z_1 = \alpha\mathcal{T}_0^\star(\mathcal{T}_1^\star\mathcal{T}_0^\star)^n + Z_1\mathcal{T}_0^\star$$
avec $\mathcal{T}_0^\star Z_1$ et $Z_1\mathcal{T}_0^\star$ tous deux de degré homogène maximal strictement inférieur à $2n+1$, ce qui implique que l'on doit avoir $\alpha = \beta$ et Z_1 qui commute avec $\mathcal{T}_0^\star$. Ceci permet d'écrire Z sous la forme $Z = \alpha(\mathcal{T}_0^\star - \mathcal{T}_1^\star)^{2n} + \widetilde{Z}_1$ avec $\widetilde{Z}_1$ de degré homogène maximal strictement inférieur à d. On conclut alors en remarquant que $\widetilde{Z}_1 = Z - \alpha(\mathcal{T}_0^\star - \mathcal{T}_1^\star)^{2n}$ est encore un élément central de $\mathcal{H}_S^\star$, et est donc un polynôme en $(\mathcal{T}_0^\star - \mathcal{T}_1^\star)^2$ par hypothèse de récurrence.
- Si $d = 2n+1$ est impair, on peut écrire Z sous la forme $\alpha(\mathcal{T}_0^\star\mathcal{T}_1^\star)^n\mathcal{T}_0^\star + \beta(\mathcal{T}_1^\star\mathcal{T}_0^\star)^n\mathcal{T}_1^\star + Z_2$ avec $Z_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p[\mathcal{T}_0^\star, \mathcal{T}_1^\star]$ de degré homogène maximal strictement inférieur à d. La relation $\mathcal{T}_0^\star Z = Z\mathcal{T}_0^\star$ se réduit alors à
$$\beta(\mathcal{T}_0^\star\mathcal{T}_1^\star)^{n+1} + \mathcal{T}_0^\star Z_2 = \beta(\mathcal{T}_1^\star\mathcal{T}_0^\star)^{n+1} + Z_2\mathcal{T}_0^\star\ ,$$
ce qui implique que $\beta = 0$ et que Z_2 commute avec $\mathcal{T}_0^\star$. De même, la relation $\mathcal{T}_1^\star Z = Z\mathcal{T}_1^\star$ nécessite que l'on aie $\alpha = 0$ et Z_2 qui commute avec $\mathcal{T}_1^\star$, ce qui montre finalement que $Z = Z_2$ est un élément central de $\mathcal{H}_S^\star$ de degré homogène maximal strictement inférieur à d, et est donc un polynôme en $(\mathcal{T}_0^\star - \mathcal{T}_1^\star)^2$ par hypothèse de récurrence. □

6.3.9 Modules simples sur la troisième algèbre de Hecke-Iwahori de G_S

Nous allons maintenant classifier les $\mathcal{H}_S^\star$-modules simples (à droite) de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, et obtenir ainsi des énoncés qui ne seront pas sans rappeler leurs analogues relatifs aux $\mathcal{H}_S$-modules simples.

$\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères et $\mathcal{H}_S^\star$-modules standard

Un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{H}_S^\star$ est entièrement caractérisé par ses valeurs en $\mathcal{T}_0^\star$ et en $\mathcal{T}_1^\star$, qui doivent être de carré nul à cause des relations quadratiques vérifiées par $\mathcal{T}_0^\star$ et par $\mathcal{T}_1^\star$. On en conclut donc qu'il existe un et un seul $\mathcal{H}_S^\star$-module (simple) de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, à savoir le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère $M_1^\star(0)$ qui envoie $\mathcal{T}_0^\star$ et $\mathcal{T}_1^\star$ sur 0.

Penchons-nous à présent sur la structure des $\mathcal{H}_S^\star$-modules de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, on note $M_2^\star(\lambda)$ le $\mathcal{H}_S^\star$-module $\overline{\mathbb{F}}_p x \oplus \overline{\mathbb{F}}_p y$ muni des actions de $\mathcal{T}_0^\star$ et $\mathcal{T}_1^\star$ respectivement définies par les matrices suivantes dans la base $\{x, y\}$:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On appelle alors *$\mathcal{H}_S^\star$-module standard de paramètre* λ le $\mathcal{H}_S^\star$-module $M_2^\star(\lambda)$.

Remarque 6.3.43. Un calcul immédiat permet de vérifier que l'élément central $-(\mathcal{T}_0^\star - \mathcal{T}_1^\star)^2$ agit sur le $\mathcal{H}_S^\star$-module standard $M_2^\star(\lambda)$ par le scalaire λ. Par conséquent, deux $\mathcal{H}_S^\star$-modules standard de paramètres distincts ne peuvent pas être isomorphes.

Le prochain énoncé établit les propriétés d'irréductibilité et d'indécomposabilité de ces modules standard.

Théorème 6.3.44. *Soit* $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$.

1. *Le* $\mathcal{H}_S^\star$*-module standard* $M_2^\star(\lambda)$ *est irréductible si et seulement si* $\lambda \neq 0$.
2. *Le* $\mathcal{H}_S^\star$*-module standard* $M_2^\star(0)$ *est indécomposable de longueur* 2. *Autrement dit, c'est une extension non scindée du caractère* $M_1^\star(0)$ *par lui-même.*

Démonstration. Supposons que $M_2^\star(\lambda)$ soit un $\mathcal{H}_S^\star$-module réductible et choisissons un vecteur non nul $v = ax + by \in M_2^\star(\lambda)$ (avec $a, b \in \overline{\mathbb{F}}_p$) qui engendre un sous-$\mathcal{H}_S^\star$-module de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. D'après ce que l'on a vu sur les $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de $\mathcal{H}_S^\star$, il existe un et un seul $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{H}_S^\star$ et il envoie $\mathcal{T}_0^\star$ et $\mathcal{T}_1^\star$ sur 0. Par suite, on a forcément $\mathcal{T}_0^\star|v = 0$ et $\mathcal{T}_1^\star|v = 0$. La première égalité implique que l'on doit avoir $a = 0$, et la non-nullité de v nécessite alors que b soit non nul. Puisque l'égalité $\mathcal{T}_1^\star|v = 0$ impose quant à elle que $\lambda b = 0$, on en conclut qu'il faut que λ soit nul pour que v puisse exister, ce qui prouve que les $\mathcal{H}_S^\star$-modules standard de paramètre non nul sont irréductibles.
Réciproquement, le $\mathcal{H}_S^\star$-module $M_2^\star(0)$ n'est pas irréductible puisque le sous-$\mathcal{H}_S^\star$-module engendré par le vecteur y est égal à $M_1^\star(0)$. Il est toutefois indécomposable car engendré par le vecteur x, dont l'image modulo y est un générateur du quotient $M_2^\star(0)/M_1^\star(0) \simeq M_1^\star(0)$. □

Classification des $\mathcal{H}_S^\star$-modules simples de dimension finie

Théorème 6.3.45. *Tout* $\mathcal{H}_S^\star$*-module simple de dimension* 2 *sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$ *est isomorphe à un (unique)* $\mathcal{H}_S^\star$*-module standard de paramètre non nul.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{H}_S^\star$-module simple de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Comme $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps algébriquement clos $\overline{\mathbb{F}}_p$, l'élément central $-(\mathcal{T}_0^\star - \mathcal{T}_1^\star)^2$ doit agir sur $\mathcal{M}$ par un scalaire λ. Par ailleurs, la simplicité du $\mathcal{H}_S^\star$-module $\mathcal{M}$ assure que l'opérateur $\mathcal{T}_1^\star$ n'agit pas par homothétie sur $\mathcal{M}$: si c'était le cas, tout vecteur propre de $\mathcal{T}_0^\star$ engendrerait un sous-$\mathcal{H}_S^\star$-module de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, ce qui contredirait la simplicité de $\mathcal{M}$. La relation $(\mathcal{T}_1^\star)^2 = 0$ prouve alors que le noyau de $\mathcal{T}_1^\star$ est non trivial, ce qui nous permet de choisir un vecteur non nul $v \in \mathcal{M}$ tel que $v|\mathcal{T}_1^\star = 0$. La simplicité du $\mathcal{H}_S^\star$-module $\mathcal{M}$ implique cette fois que la famille $\{v, v|\mathcal{T}_0^\star\}$ doit être linéairement indépendante sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, et qu'elle fournit donc une base de $\mathcal{M}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ dans laquelle les actions de $\mathcal{T}_0^\star$ et de $\mathcal{T}_1^\star$ sont respectivement données par les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, le $\mathcal{H}_S^\star$-module engendré par $\{v, v|\mathcal{T}_0^\star\}$ est égal au $\mathcal{H}_S^\star$-module standard de paramètre λ. Comme $\mathcal{M}$ est simple, on doit forcément avoir $\mathcal{M} = M_2^\star(\lambda)$, ce qui implique en particulier que λ doit être non nul grâce au Théorème 6.3.44 et termine la démonstration. □

La preuve du Théorème 6.3.45 permet en fait de démontrer le résultat suivant de classification des $\mathcal{H}_S^\star$-modules simples de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Corollaire 6.3.46. *Le caractère* $M_1^\star(0)$ *et les* $\mathcal{H}_S^\star$*-modules standard* $M_2^\star(\lambda)$ *avec* $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ *forment un système de représentants des classes d'isomorphisme des* $\mathcal{H}_S^\star$*-modules simples de dimension finie sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$.

6.3.10 Structure de $\mathcal{H}_S^1$-module des espaces de vecteurs $I_S(1)$-invariants

On commence par réécrire l'énoncé du Lemme 6.3.1 sous une forme plus directement exploitable pour le calcul des modules simples sur la pro-p-algèbre de Hecke-Iwahori.

Corollaire 6.3.47. *La factorisation du Lemme 6.3.1 induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres :*

$$\mathcal{H}_S^1 \simeq \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_S^\star \oplus \bigoplus_{1<r<\frac{q-1}{2}} \widetilde{\mathcal{H}}_S(r) \ . \tag{6.5}$$

Démonstration. Comme nous l'avons expliqué au début de la Section 6.3.5, l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_S$ est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{H}_S(0)$. Le Théorème 6.3.41 assure que la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\mathcal{H}_S\left(\dfrac{q-1}{2}\right)$ est isomorphe à $\mathcal{H}_S^\star$, et lorsque r est différent de 0 ou de $\dfrac{q-1}{2}$, la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\mathcal{H}_S(r)$ est par définition égale à $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$, ce qui termine la démonstration. □

Définition 6.3.48. Soit $r \in \{0, \dots, [\frac{q-1}{2}]\}$. Un $\mathcal{H}_S^1$-module (à droite) simple est dit :
- *posé sur la composante* $k = 0$ lorsque la composante non nulle qui le définit dans la factorisation (6.5) est donnée par un $\mathcal{H}_S$-module simple ;
- *posé sur la composante* $k = \frac{q-1}{2}$ lorsque la composante non nulle qui le définit dans la factorisation (6.5) est donnée par un $\mathcal{H}_S^\star$-module simple ;
- *posé sur la composante* $k = r$ (avec $r \notin \{0, \frac{q-1}{2}\}$) lorsque la composante non nulle qui le définit dans la factorisation (6.5) est donnée par un $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module simple.

Cas Iwahori : modules provenant de l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_S$

Le Théorème 6.3.25 permet de déduire les deux énoncés suivants à partir des résultats démontrés dans les Sections 3.4.3 et 3.6.1 du Chapitre 3.

Proposition 6.3.49. *1. Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\mathbf{1}^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère $M_1^S(0)$ posé sur la composante $k = 0$.*

2. Le $\mathcal{H}_S^1$-module $(St_S)^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère $M_1^S(-1)$ posé sur la composante $k = 0$.

3. Pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\mathcal{H}_S^1$-module $(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda))^{I_S(1)}$ est isomorphe au module standard $M_2^S(\lambda^{-1})$ posé sur la composante $k = 0$. Ce module est simple lorsque $\lambda \neq 1$ (et est indécomposable de longueur 2 lorsque $\lambda = 1$).

Proposition 6.3.50. *Supposons que $F = \mathbb{Q}_p$.*

1. Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\pi_0^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère supersingulier $M_1^S(-1, 0)$ posé sur la composante $k = 0$.

2. Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\pi_{p-1}^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère supersingulier $M_1^S(0, -1)$ posé sur la composante $k = 0$.

Cas régulier : modules provenant de la deuxième algèbre de Hecke-Iwahori

Supposons que $q \neq 2$ et fixons un paramètre $r \in \{1, \dots, [\frac{q-1}{2}]\}$ avec $r \neq \frac{q-1}{2}$ si p est impair. Le Lemme 3.4.13 assure que pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda \omega^r)$ admet exactement deux composantes I_S-isotypiques non nulles, qui sont celles associées aux caractères ω^r et ω^{q-1-r}. Elles sont toutes deux de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et sont respectivement engendrées par la fonction $I_S(1)$-invariante ayant pour support $B_S I_S(1)$ (resp. $B_S s_1 I_S(1)$) et valant 1 en

I_2 (resp. λ en s_1). L'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda\omega^r)$ est donc muni d'une structure de $\mathcal{H}_S(r)$-module, et un calcul direct [27] permet alors de démontrer le résultat suivant.

Proposition 6.3.51. *Soient $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et $r \in \{1, \dots, [\frac{q-1}{2}]\}$ avec $r \neq \dfrac{q-1}{2}$ si p est impair.*

1. *Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda\omega^r)\right)^{I_S(1)}$ est isomorphe au $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module simple $M_{12}(\lambda^{-1})$ posé sur la composante $k = r$.*
2. *Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda\omega^{q-1-r})\right)^{I_S(1)}$ est isomorphe au $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module simple $M_{21}(\lambda^{-1})$ posé sur la composante $k = r$.*

Supposons maintenant que $F = \mathbb{Q}_p$ et intéressons-nous à la structure de $\mathcal{H}_S^1$-module des espaces de vecteurs $I_S(1)$-invariants des représentations supersingulières π_r et π_{p-1-r} de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$. D'après le premier point de la Proposition 3.6.11, ces deux espaces sont de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et sont respectivement munis d'une structure naturelle de module à droite sur $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\omega^r)$ et $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\omega^{p-1-r})$, qui est donnée dans chaque cas par le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère supersingulier. On obtient donc directement le résultat suivant.

Proposition 6.3.52. *Supposons que $F = \mathbb{Q}_p$ et fixons un paramètre $r \in \{1, \dots, [\frac{p-1}{2}]\}$ avec $r \neq \frac{p-1}{2}$ si p est impair.*

1. *Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\pi_r^{I_S(1)}$ est isomorphe au $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module supersingulier $M_1(0)$ posé sur la composante $k = r$.*
2. *Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\pi_{p-1-r}^{I_S(1)}$ est isomorphe au $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module supersingulier $M_2(0)$ posé sur la composante $k = r$.*

Cas exceptionnel : modules provenant de la troisième algèbre de Hecke-Iwahori

Les résultats énoncés dans ce paragraphe n'ont un sens que si l'on suppose que p est impair. On peut alors identifier les $\mathcal{H}_S^1$-modules qui «manquent» dans les classifications précédentes grâce aux deux propositions suivantes, la seconde ne traitant que du cas $F = \mathbb{Q}_p$.

Proposition 6.3.53. *On suppose que p est impair.*
Pour tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, le $\mathcal{H}_S^1$-module $(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda\omega^{\frac{q-1}{2}}))^{I_S(1)}$ est isomorphe au $\mathcal{H}_S^\star$-module standard $M_2^\star(\lambda^{-1})$ posé sur la composante $k = \dfrac{q-1}{2}$.

Proposition 6.3.54. *Supposons que $F = \mathbb{Q}_p$ avec p impair.*
Le $\mathcal{H}_S^1$-module $\pi_{\frac{p-1}{2}}^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère supersingulier $M_1^\star(0)$ de $\mathcal{H}_S^\star$ posé sur la composante $k = \dfrac{p-1}{2}$.

Correspondance via le foncteur des $I_S(1)$-invariants

En comparant les énoncés obtenus dans cette dernière section avec les résultats de classification des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles (admissibles) de $SL_2(F)$ obtenus dans le Chapitre 3 fournit directement l'énoncé suivant, qui est de bon augure dans la recherche d'une équivalence de catégories analogue à celle construire par Ollivier dans le cadre des représentations modulo p de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ [O3, Théorème 1.1].

27. Donné dans l'Appendice 7.6 par souci de complétude.

Corollaire 6.3.55. *L'application qui envoie une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse de $SL_2(F)$ sur l'espace de vecteurs $I_S(1)$-invariants induit une bijection entre :*

i) l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles non supercuspidales *de $SL_2(F)$ et celui des classes d'isomorphisme des $\mathcal{H}_S^1$-modules à droite simples* non supersinguliers *à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$;*

ii) l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ et celui des classes d'isomorphisme des $\mathcal{H}_S^1$-modules à droite simples à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Chapitre 7

Appendices

Nous regroupons ici les appendices des différents chapitres de cette thèse. Nous commençons par présenter une autre preuve de certains résultats démontrés dans la Section 3.4.3, puis nous donnons une construction (due à Hijikata) des sous-groupes compacts maximaux $\mathbb{K}_0$ et $\mathbb{K}_1$ du groupe unitaire $U(2,1)$ qui est au coeur du Chapitre 4. Les appendices suivants sont consacrés à des calculs repoussés ici pour ne pas polluer ledit chapitre : on calcule tout d'abord le normalisateur du tore diagonal $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{G}$, puis l'on étudie les intersections de la forme $\mathbb{K}t_0^n\mathbb{K}\mathbb{U} \cap \mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)t_0^m$ avec $\mathbb{K}$ valant $\mathbb{K}_0$ ou $\mathbb{K}_1$ pour démontrer les assertions formulées dans la Remarque 4.2.13, et l'on calcule enfin une formule explicite donnant l'isomorphisme Δ qui apparaît dans la Section 4.5. Le dernier appendice contient la preuve de la Proposition 6.3.51, qui donne la structure de module sur la pro-p-algèbre de Hecke-Iwahori des espaces de vecteurs $I_S(1)$-invariants des représentations de la série principale provenant du cas régulier.

7.1 Une autre preuve des résultats de la Section 3.4.3

Ce premier appendice présente une seconde preuve du Corollaire 3.4.16, directement inspirée des travaux de Barthel-Livné dans le cas de GL_2 ([BL94, Section 6] et [BL95, Section 3]). Elle est certes plus longue, mais ne nécessite pas de connaître l'irréductibilité de la représentation de Steinberg, dont elle fournit en fait une nouvelle preuve (voir Remarque 7.1.5).

Cette démonstration est basée sur une autre description de la représentation $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ reposant sur la décomposition de Bruhat raffinée $G_S = B_S \sqcup B_S w_0 U$. Notons j l'application définie sur $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ par la formule suivante :

$$\forall\, x \in F,\ j(f)(x) := f(w_0 u(x)) \ .$$

En remarquant que l'on a, pour tout $x \in F^\times$,

$$w_0 u(x) = \begin{pmatrix} x^{-1} & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad (7.1)$$

on déduit de la lissité de f que $j(f)$ est elle aussi localement constante et que, pour x assez grand (i.e. $v_F(x)$ très négative), on a

$$j(f)(x) = c_f \eta(x^{-1}) \ ,$$

où l'on a posé $c_f := f(I_2)$. L'application j est donc à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{J}(\eta)$ des fonctions lisses $\phi : F \to \overline{\mathbb{F}}_p$ pour lesquelles il existe une constante c_ϕ telle que $\phi(x) = c_\phi \eta(x^{-1})$ pour tout x assez grand. De même que dans [BL94, Section 6.1], on vérifie que j établit en fait un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels entre $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ et $\mathcal{J}(\eta)$, ce qui permet de munir ce dernier espace d'une structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module (par transport de la structure existant sur $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$) satisfaisant aux propriétés suivantes.

Lemme 7.1.1. *Soit ϕ un élément de $\mathcal{J}(\eta)$. Soient x, $y \in F$. Alors :*

1. $u(y)\phi(x) = \phi(x+y)$;
2. $\alpha_0\phi(x) = \eta(\varpi_F^{-1})\phi(\varpi_F^{-2}x)$;
3. $\alpha_0^{-1}\phi(x) = \eta(\varpi_F)\phi(\varpi_F^{2}x)$.

Démonstration. Ce résultat est l'analogue de [BL95, Lemma 17] et se prouve par un calcul direct. Soient ϕ un élément de $\mathcal{J}(\eta)$ et f son antécédent par l'application j. Pour vérifier le premier point, il suffit d'écrire que l'on a

$$u(y)\phi(x) := u(y)f(w_0u(x)) = f(w_0u(x)u(y)) = f(w_0u(x+y)) = \phi(x+y)\ .$$

Les deux derniers points sont quant à eux des cas particuliers du calcul plus général suivant (avec $\lambda \in F^\times$ arbitraire) :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\phi(x) &= f(w_0u(x)\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}) \\
&= f(\begin{pmatrix} x^{-1} & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}) \quad \text{par (7.1)} \\
&= \eta(x^{-1})f(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ x^{-1}\lambda & \lambda^{-1} \end{pmatrix}) \\
&= \eta(x^{-1})f(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{-1}x \\ \lambda x^{-1} & \lambda^{-1} \end{pmatrix}) \\
&= \eta(x^{-1})f(\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{-1}x \\ \lambda x^{-1} & \lambda^{-1} \end{pmatrix}) \\
&= \eta(x^{-1})f(\begin{pmatrix} \lambda^{-1}x & 0 \\ 0 & \lambda x^{-1} \end{pmatrix} w_0u(\lambda^{-2}x)) \\
&= \eta(\lambda^{-1})\phi(\lambda^{-2}x)\ .
\end{aligned}$$

□

On souhaite montrer que la famille $\{\ell_{1,\eta}, \ell_{2,\eta}\}$ engendre le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$, ce qui équivaut à prouver que la famille $\{j(\ell_{1,\eta}), j(\ell_{2,\eta})\}$ engendre le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathcal{J}(\eta)$. Nous commençons donc par expliciter cette seconde famille de fonctions.

Lemme 7.1.2. *Soit $x \in F$. Alors :*

1. $j(\ell_{1,\eta})(x) = \begin{cases} \eta(x^{-1}) & \text{si } v_F(x) < 0\ ; \\ 0 & \text{si } v_F(x) \geq 0\ . \end{cases}$
2. $j(\ell_{2,\eta})(x) = \eta(\varpi_F)\mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(x)$.

Démonstration. Soit x un élément de F. Grâce à l'égalité (7.1), on sait que toute fonction $f \in \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ vérifie

$$j(f)(x) = \eta(x^{-1})f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{pmatrix}) = \eta(\varpi_F)f(\beta_0u(x))\ , \tag{7.2}$$

la seconde égalité venant de la factorisation $w_0 = \alpha_0^{-1}\beta_0$ rappelée au début du Chapitre 3. Nous allons conclure en distinguant selon le signe de $v_F(x)$:

– si $v_F(x) < 0$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{pmatrix}$ appartient à $I_S(1)$ et la première égalité de (7.2) montre alors que $j(\ell_{1,\eta})(x) = \eta(x^{-1})$ et que $j(\ell_{2,\eta})(x) = 0$;
– si $v_F(x) \geq 0$, la matrice $u(x)$ est un élément de $I_S(1)$ et la seconde égalité montre alors que $j(\ell_{1,\eta})(x) = 0$ tandis que $j(\ell_{2,\eta})(x) = \eta(\varpi_F)$, ce qui termine la démonstration. $\square$

Pour achever notre tâche, nous aurons besoin du lemme technique suivant.

Lemme 7.1.3. *On a l'identité suivante dans $\mathcal{J}(\eta)$:*

$$\sum_{x \in k_F} \begin{pmatrix} \varpi_F & [x] \\ 0 & \varpi_F^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{1}_{\mathcal{O}_F} = \mathbf{1}_{\varpi_F \mathcal{O}_F} .$$

Démonstration. Pour tout élément $y \in F$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in k_F} \begin{pmatrix} \varpi_F & [x] \\ 0 & \varpi_F^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(y) &= \eta(\varpi_F^{-1}) \sum_{x \in k_F} \begin{pmatrix} \varpi_F & [x] \\ 0 & \varpi_F^{-1} \end{pmatrix} j(\ell_{2,\eta})(y) \\
&= \eta(\varpi_F^{-1}) \sum_{x \in k_F} \ell_{2,\eta} \left(w_0 u(y) \begin{pmatrix} \varpi_F & [x] \\ 0 & \varpi_F^{-1} \end{pmatrix} \right) \\
&= \eta(\varpi_F^{-1}) \sum_{x \in k_F} \ell_{2,\eta} \left(\beta_0 \begin{pmatrix} 1 & \varpi_F^{-1}[x] + \varpi_F^{-2} y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \eta(\varpi_F^{-1}) \sum_{x \in k_F} \mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(\varpi_F^{-1}[x] + \varpi_F^{-2} y) \\
&= \eta(\varpi_F^{-1}) \sum_{x \in k_F} \mathbf{1}_{\varpi_F^2 \mathcal{O}_F}(\varpi_F [x] + y) .
\end{aligned}$$

Notons que la quatrième égalité provient du Lemme 7.1.1. Il apparaît alors trois possibilités.
– Ou bien $v_F(y) \leq 0$, auquel cas $v_F(\varpi_F[x] + y) = v_F(y) \leq 0$ pour tout $x \in k_F$, ce qui assure que la somme apparaissant dans le dernier membre de droite est nulle, tout comme l'est $\mathbf{1}_{\varpi_F \mathcal{O}_F}(y)$.
– Ou bien $v_F(y) \geq 2$, auquel cas l'on a $v_F(\varpi_F[x] + y) = 1$ si x est non nul tandis que $v_F(\varpi_F[x] + y) = v_F(y)$ si $x = 0$. La somme apparaissant dans le dernier membre de droite est donc dans ce cas égale à $1 = \mathbf{1}_{\varpi_F \mathcal{O}_F}(y)$.
– Ou bien $v_F(y) = 1$ et il existe alors un unique $x_0 \in k_F$ vérifiant $y + \varpi_F[x_0] \equiv 0$ $[\varpi_F^2]$. Par suite, on a $v_F(\varpi_F[x] + y) = 2$ si $x = x_0$ et $v_F(\varpi_F[x] + y) = 1$ si $x \neq x_0$, ce qui assure que la somme qui apparaît dans le dernier membre de droite est égale à $1 = \mathbf{1}_{\varpi_F \mathcal{O}_F}(y)$.

Dans tous les cas, on a bien l'égalité demandée, ce qui prouve le résultat. $\square$

Corollaire 7.1.4. *La famille $\{\ell_1, \ell_2\}$ engendre la représentation de G_S portée par* $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$.

Démonstration. Remarquons que l'on peut aussi écrire $j(\ell_{1,\eta})$ sous la forme

$$j(\ell_{1,\eta}) = \eta^{-1}(\mathbf{1} - \mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}) .$$

On peut donc déduire directement des Lemmes 7.1.1, 7.1.2 et 7.1.3 que la famille $\{j(\ell_{1,\eta}), j(\ell_{2,\eta})\}$ engendre le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathcal{J}(\eta)$, ce qui équivaut à dire que $\{\ell_{1,\eta}, \ell_{2,\eta}\}$ engendre le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$. $\square$

Remarque 7.1.5. Ce résultat permet d'obtenir une autre démonstration de l'irréductibilité de la représentation de Steinberg, que nous présentons maintenant et dont l'intérêt est de ne pas utiliser la structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$. Supposons que π soit une sous-représentation non nulle de St_S. D'après le Lemme 2.1.9, l'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de π est non nul, donc est égal à $(St_S)^{I_S(1)}$ d'après la Proposition 3.4.15. Si Π désigne un relèvement de π dans $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$, on déduit de la suite exacte (3.15) que l'on doit avoir

$$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \Pi^{I_S(1)} = 1 + \dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \pi^{I_S(1)} = 2 = \dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} (\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta))^{I_S(1)} ,$$

ce qui assure que l'on a $\Pi^{I_S(1)} = \left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})\right)^{I_S(1)}$. Il suffit alors d'appliquer le Corollaire 7.1.4 pour obtenir que Π est égale à $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$, et donc que $\pi = St_S$.

7.2 Sous-groupes compacts maximaux de $U(2,1)$

Nous présentons ici une méthode de calcul des classes de conjugaison des sous-groupes compacts maximaux de $\mathbb{G} = U(2,1)(E/F)$ directement issue des travaux de Hijikata [Hij] que nous commençons par rappeler.

7.2.1 Cadre général de travail - Notations

Soit F le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet de rang 1. On considère une algèbre à division E sur F et l'on désigne par $\mathcal{O}$ son ordre maximal. On munit E d'un anti-automorphisme involutif $[\xi \mapsto \overline{\xi}]$, on fixe un élément $\mathbf{e}$ appartenant au centre de E et vérifiant $\overline{\mathbf{e}}\mathbf{e} = 1$, et l'on définit sur E l'opérateur $T_{\mathbf{e}} : \xi \mapsto \xi + \mathbf{e}\overline{\xi}$.
On désigne par (V, Φ) un espace $\mathbf{e}$-hermitien [Hij, page 5] de dimension n sur E. On note $G(V, \Phi)$ son groupe d'automorphismes auto-adjoints, ce qui signifie que l'on pose

$$G(V, \Phi) := \{\sigma \in \mathrm{End}(V) \mid \sigma\sigma^* = Id\}$$

où σ^* est l'adjoint de σ par rapport à Φ. On suppose que le groupe $G(V, \Phi)$ vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall\, x \in V,\ \exists\, \xi \in E \mid \Phi(x,x) = T_{\mathbf{e}}(\xi)\ ; \tag{7.3}$$

$$\text{pour tout idéal fractionnaire } \mathfrak{q} \text{ de } E,\ \mathfrak{q} \cap \{\Phi(x,x)\ ;\ x \in V\} \subset T_{\mathbf{e}}(\mathfrak{q})\ . \tag{7.4}$$

C'est par exemple le cas lorsque E est une extension quadratique séparable non ramifiée d'un corps local non archimédien F complet pour une valuation discrète, de caractéristique résiduelle p impaire et de corps résiduel fini, que l'on prend $\mathbf{e} = 1$ et que $G(V, \Phi)$ est alors le groupe unitaire considéré dans le Chapitre 4.
On introduit les deux définitions suivantes [Hij, page 11].

Définition 7.2.1. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal fractionnaire de E. Un $\mathcal{O}$-réseau M de V est dit $\mathfrak{q}$-*intégral* s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

a) $\forall\ (x,y) \in M \times M,\ \Phi(x,y) \in \mathfrak{q}$;

b) $\forall\ x \in M,\ \exists\ \xi \in \mathfrak{q} \mid \Phi(x,x) = T_{\mathbf{e}}(\xi)$.

Il est dit $\mathfrak{q}$-*intégral maximal* lorsqu'il est maximal parmi les réseaux $\mathfrak{q}$-intégraux de V, c'est-à-dire qu'il vérifie la condition supplémentaire suivante :

c) Si M est contenu dans un réseau $\mathfrak{q}$-intégral M', alors $M = M'$.

Remarque 7.2.2. Mentionnons ici que grâce à l'hypothèse (7.4), on sait exhiber des réseaux $\mathfrak{q}$-intégraux maximaux de V [Hij, Lemma 3.5].

Par abus de notation, on dira par ailleurs qu'un ordre Λ de $\mathrm{End}(V)$ est *auto-dual* lorsque son dual Λ^* est inclus dans Λ. Notons qu'on ne demande pas nécessairement qu'il y ait égalité. On dira que Λ est *auto-dual maximal* lorsqu'il est maximal (pour l'inclusion) parmi les ordres auto-duaux.
On dispose alors d'un premier résultat [Hij, Corollary 5.6] qui permet de classifier les ordres auto-duaux maximaux de $\mathrm{End}(V)$.

Théorème 7.2.3. *On se place dans le cadre des hypothèses effectuées jusqu'à présent. On note ℓ l'indice de Witt de l'espace (V, Φ) et l'on fixe un générateur ϖ de l'idéal maximal de $\mathcal{O}$.*

Soient L un réseau $\mathcal{O}$-intégral maximal de (V,Φ) et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de V adaptée[1] *à L. Pour tout entier $0 \le s \le \ell$, on note τ_s l'endomorphisme de V défini par :*

$$\forall\ 0 \le i \le n,\ \tau_s(e_i) := \begin{cases} e_i & si\ 1 \le i \le n-s\ , \\ e_i\varpi & si\ n-s+1 \le i \le n\ , \end{cases}$$

et l'on pose $\Lambda_s := \mathrm{End}(\tau_s L) \cap \mathrm{End}(\tau_s L)^*$.
Pour tout ordre auto-dual maximal Λ de $\mathrm{End}(V)$, il existe un élément $\sigma \in G(V,\Phi)$ et un unique entier $0 \le s \le \ell$ tels que

$$\sigma\Lambda\sigma^{-1} = \Lambda_s\ .$$

En particulier, l'ensemble des ordres auto-duaux maximaux de $\mathrm{End}(V)$ se partitionne en $\ell+1$ classes de conjugaison sous l'action de $G(V,\Phi)$ par automorphismes intérieurs, et $\{\Lambda_0,\dots,\Lambda_\ell\}$ en est un système de représentants.

Notons $G^{(1)}$ la composante Zariski-connexe de $G(V,\Phi)$: c'est un groupe algébrique pour lequel on peut déterminer les classes de conjugaison de ses sous-groupes compacts maximaux à l'aide du théorème suivant [Hij, Corollary 5.7].

Théorème 7.2.4. *On garde les hypothèses et les notations du Théorème 7.2.3. Tout sous-groupe compact maximal de $G^{(1)}$ est alors conjugué (par automorphisme intérieur) à l'un des $\ell+1$ groupes deux à deux non isomorphes définis par $U_s := G^{(1)} \cap \Lambda_s$, $0 \le s \le \ell$.*

Remarque 7.2.5. Si l'on ne suppose plus que la condition (7.4) est vérifiée, on peut seulement dire qu'il existe au moins $\ell+1$ sous-groupes compacts maximaux deux à deux non isomorphes dans $G^{(1)}$, donnés par les groupes U_s de l'énoncé ci-dessus.

7.2.2 Nombre de classes de conjugaison de sous-groupes compacts maximaux de $U(2,1)$

On considère à présent la situation suivante : F est un corps local non archimédien complet pour une valuation discrète, de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel fini, et E est une extension quadratique séparable non ramifiée de F dont on note $\mathcal{O}_E$ l'anneau des entiers, $\mathfrak{p}_E$ l'idéal maximal, et dont on fixe une uniformisante $\varpi_E \in \mathfrak{p}_E$. On note $\overline{x}$ l'image d'un élément x de E sous l'action de l'élément non trivial du groupe de Galois $Gal(E/F)$ et l'on définit Φ comme la forme hermitienne sur $V = E^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1,e_2,e_3) est donnée par

$$\phi := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Le groupe $G = G(V,\Phi)$ est alors égal au groupe des matrices $M \in GL_3(E)$ telles que ${}^t\overline{M}\phi M = \phi$, soit donc au groupe unitaire en trois variables $\mathbb{G} = U(2,1)(E/F)$ qui fait l'objet du Chapitre 4. C'est en particulier un groupe Zariski-connexe, ce qui implique que l'on a $G^{(1)} = G$.

D'après le Théorème 7.2.4, le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes compacts maximaux de G est égal à l'indice de Witt ℓ de l'espace (E^3,Φ) augmenté de 1. Pour calculer ℓ, on part de l'égalité suivante :

$$3 = \dim_E(E^3) = d + 2\ell\ ,$$

1. On renvoie à [Hij, Proposition 4.3] pour le rappel de la définition.

où d désigne la dimension du sous-espace anisotrope maximal de (E^3, Φ). Par ailleurs, le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E^3$ est un vecteur isotrope pour Φ si et seulement si ses coordonnées vérifient

$$\overline{x}z + x\overline{z} = y\overline{y} \ .$$

Ceci assure en particulier que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont tous deux isotropes pour Φ. Comme ils sont linéairement indépendants, on doit avoir $3 - d \geq 2$, ce qui revient à dire que $\ell \geq 1$. Cependant, nous travaillons dans un espace de dimension 3 sur E, et Φ n'est pas identiquement nulle puisque l'on a

$$\begin{cases} \Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 2 \ ; \\ \Phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = -1 \ . \end{cases}$$

On en conclut finalement que ℓ est nécessairement égal à 1, ce qui fournit le résultat suivant.

Proposition 7.2.6. *Il existe deux classes de conjugaison de sous-groupes compacts maximaux dans le groupe $U(2,1)(E/F)$.*

7.2.3 Calcul des sous-groupes compacts maximaux U_0 et U_1

Description des ordres auto-duaux maximaux Λ_0 et Λ_1

Le réseau $L = \mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E$ est un réseau $\mathcal{O}_E$-intégral maximal[2] de (E^3, Φ) pour lequel la base canonique est une base adaptée : on en déduit donc que l'application τ_0 est égale à l'identité. L'application τ_1 agit quant à elle comme suit sur les vecteurs de la base canonique :

$$\tau_1 : \begin{cases} e_1 & \mapsto & e_1 \\ e_2 & \mapsto & e_2 \\ e_3 & \mapsto & \varpi_E e_3 \end{cases} .$$

On obtient donc la description suivante des ordres auto-duaux maximaux Λ_0 et Λ_1 donnés par le Théorème 7.2.3 :

$$\begin{cases} \Lambda_0 = \mathrm{End}(L) \cap \mathrm{End}(L)^* = M_3(\mathcal{O}_E) \ ; \\ \Lambda_1 = \mathrm{End}(\mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E \oplus \mathfrak{p}_E) \cap \mathrm{End}(\mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E \oplus \mathfrak{p}_E)^* \ . \end{cases}$$

Nous allons donner une description plus explicite de Λ_1 à l'aide d'un calcul direct. Pour alléger les notations, on pose $W := \mathrm{End}(\mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E \oplus \mathfrak{p}_E)$, et l'on commence par déterminer l'allure des éléments de W. Une matrice $M := \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ appartient à W si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes pour toutes valeurs de α, β, γ dans $\mathcal{O}_E$:

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + \varpi_E c\gamma \in \mathcal{O}_E \ ; \\ d\alpha + e\beta + \varpi_E f\gamma \in \mathcal{O}_E \ ; \\ g\alpha + h\beta + \varpi_E i\gamma \in \mathfrak{p}_E \ . \end{cases}$$

2. Il est même $\mathcal{O}_E$-modulaire au sens de [Hij, Lemma 3.5].

En regardant le cas $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 0)$, puis $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$ et enfin $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$, on obtient respectivement que :

- h appartient à $\mathfrak{p}_E$ tandis que b et e appartiennent à $\mathcal{O}_E$;
- g appartient à $\mathfrak{p}_E$ tandis que a et d appartiennent à $\mathcal{O}_E$;
- i appartient à $\mathcal{O}_E$ tandis que c et f appartiennent à $\varpi_E^{-1}\mathcal{O}_E$.

On en déduit donc la description suivante de W :

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & \varpi_E^{-1}c \\ d & e & \varpi_E^{-1}f \\ \varpi_E g & \varpi_E h & i \end{pmatrix} \; ; \; a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathcal{O}_E \right\} .$$

Supposons maintenant que M soit contenu à la fois dans W et dans W^*, ce qui signifie que M et $M^* := \phi {}^t\overline{M} \phi$ appartiennent toutes les deux à W. Ce qui précède assure que l'on peut écrire M sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \varpi_E^{-1}c \\ d & e & \varpi_E^{-1}f \\ \varpi_E g & \varpi_E h & i \end{pmatrix}$$

avec a, b, c, d, e, f, g, h, $i \in \mathcal{O}_E$. Un calcul direct montre que l'on a alors

$$M^* = \begin{pmatrix} \overline{i} & -\overline{\varpi_E^{-1}f} & \overline{\varpi_E^{-1}c} \\ -\overline{\varpi_E h} & \overline{e} & -\overline{b} \\ \overline{\varpi_E g} & -\overline{d} & \overline{a} \end{pmatrix} ,$$

de sorte que la condition d'appartenance à W pour M^* équivaut à demander que $\varpi_E^{-1}f$ soit un élément de $\mathcal{O}_E$, i.e. que f appartienne à $\mathfrak{p}_E$, et que d soit un élément de $\mathfrak{p}_E$. On obtient ainsi la description suivante de Λ_1 :

$$\Lambda_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & \varpi_E^{-1}c \\ \varpi_E d & e & f \\ \varpi_E g & \varpi_E h & i \end{pmatrix} \; ; \; a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathcal{O}_E \right\} . \tag{7.5}$$

Expression de U_0 et de U_1

Il nous suffit maintenant d'appliquer le Théorème 7.2.4 pour obtenir des représentants des classes de conjugaison des sous-groupes compacts maximaux de $\mathbb{G}$. On dispose donc de la description suivante des sous-groupes compacts maximaux U_0 et U_1, respectivement notés $\mathbb{K}_0$ et $\mathbb{K}_1$ dans le Chapitre 4 :

- $U_0 = \mathbb{G} \cap M_3(\mathcal{O}_E) = \mathbb{G} \cap GL_3(\mathcal{O}_E)$ est le sous-groupe compact maximal standard formé des éléments de $\mathbb{G}$ à coefficients entiers ;

- $U_1 = \mathbb{G} \cap \Lambda_1$ où Λ_1 est explicité par la formule (7.5).

7.2.4 Intersection et conjugaison

On termine cet appendice par quelques remarques sur U_0 et U_1. Signalons tout d'abord que l'intersection de U_0 et de U_1 est égale à

$$U_0 \cap U_1 = \mathbb{G} \cap \begin{pmatrix} \mathcal{O}_E & \mathcal{O}_E & \mathcal{O}_E \\ \mathfrak{p}_E & \mathcal{O}_E & \mathcal{O}_E \\ \mathfrak{p}_E & \mathfrak{p}_E & \mathcal{O}_E \end{pmatrix} ,$$

soit donc exactement au sous-groupe d'Iwahori standard $\mathbb{I}$ de $\mathbb{G}$.
Remarquons ensuite que si l'ordre Λ_0 correspond à un sous-groupe compact maximal de $GL_3(E)$, à savoir $GL_3(\mathcal{O}_E)$, ce n'est pas le cas de Λ_1 qui est « strictement plus petit » au sens suivant : si l'on pose $P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varpi_E \end{pmatrix}$, le sous-groupe compact maximal de $GL_3(E)$ défini par

$$P\Lambda_0 P^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_E & \mathcal{O}_E & \varpi_E^{-1}\mathcal{O}_E \\ \mathcal{O}_E & \mathcal{O}_E & \varpi_E^{-1}\mathcal{O}_E \\ \mathfrak{p}_E & \mathfrak{p}_E & \mathcal{O}_E \end{pmatrix}$$

contient strictement Λ_1. Cependant, la maximalité de $\mathbb{K}_1$ parmi les sous-groupes compacts de $\mathbb{G}$ assure que l'on a tout de même $P\Lambda_0 P^{-1} \cap \mathbb{G} = \mathbb{K}_1 = \Lambda_1 \cap \mathbb{G}$.
On dispose plus généralement des identités suivantes : si $Q = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale quelconque, on a alors

$$\begin{cases} Q\Lambda_0 Q^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_E & \alpha\beta^{-1}\mathcal{O}_E & \alpha\gamma^{-1}\mathcal{O}_E \\ \alpha^{-1}\beta\mathcal{O}_E & \mathcal{O}_E & \beta\gamma^{-1}\mathcal{O}_E \\ \alpha^{-1}\gamma\mathcal{O}_E & \beta^{-1}\gamma\mathcal{O}_e & \mathcal{O}_E \end{pmatrix} ; \\ \\ Q\Lambda_1 Q^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_E & \alpha\beta^{-1}\mathcal{O}_E & \alpha(\varpi_E\gamma)^{-1}\mathcal{O}_E \\ \alpha^{-1}\beta\mathfrak{p}_E & \mathcal{O}_E & \beta\gamma^{-1}\mathcal{O}_E \\ \alpha^{-1}\gamma\mathfrak{p}_e & \beta^{-1}\gamma\mathfrak{p}_E & \mathcal{O}_E \end{pmatrix} . \end{cases}$$

7.3 Calcul du normalisateur du tore $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{G}$

Cet appendice fournit un calcul direct du normalisateur $N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})$ du tore diagonal $\mathbb{T}$ de $\mathbb{G}$, dont on rappelle qu'il est défini par

$$N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T}) := \{M \in \mathbb{G} \mid M\mathbb{T}M^{-1} = \mathbb{T}\} .$$

Supposons que $M := \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{G}$ soit un élément de $N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})$. Il existe donc, pour toute paire de scalaires $(\alpha, \epsilon) \in E^\times \times E^{(1)}$, une paire $(\beta, \nu) \in E^\times \times E^{(1)}$ telle que l'on ait

$$M \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\alpha}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\beta}^{-1} \end{pmatrix} M .$$

Cette égalité s'écrit, après calcul des deux membres, sous la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha a & \epsilon b & \overline{\alpha}^{-1}c \\ \alpha d & \epsilon e & \overline{\alpha}^{-1}f \\ \alpha g & \epsilon h & \overline{\alpha}^{-1}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta a & \beta b & \beta c \\ \nu d & \nu e & \nu f \\ \overline{\beta}^{-1}g & \overline{\beta}^{-1}h & \overline{\beta}^{-1}i \end{pmatrix} ,$$

et est donc équivalente au système suivant d'équations :

$$\begin{aligned}
(\alpha - \beta)a &= 0 \; ; && (7.6)\\
(\epsilon - \beta)b &= 0 \; ; && (7.7)\\
(\overline{\alpha}^{-1} - \beta)c &= 0 \; ; && (7.8)\\
(\alpha - \nu)d &= 0 \; ; && (7.9)\\
(\epsilon - \nu)e &= 0 \; ; && (7.10)\\
(\overline{\alpha}^{-1} - \nu)f &= 0 \; ; && (7.11)\\
(\alpha - \overline{\beta}^{-1})g &= 0 \; ; && (7.12)\\
(\epsilon - \overline{\beta}^{-1})h &= 0 \; ; && (7.13)\\
(\overline{\alpha}^{-1} - \overline{\beta}^{-1})i &= 0 \; . && (7.14)
\end{aligned}$$

Nous distinguons alors les deux cas suivants.

1er cas : Il existe une valeur de α pour laquelle $\alpha \neq \beta$, ce qui implique que M n'est pas un élément du sous-groupe fixant $\mathbb{T}$ point par point.

La condition (7.6) implique alors que $a = 0$ tandis que la condition (7.14) implique que $i = 0$. Comme M est contenue dans $\mathbb{G}$, elle satisfait la condition (4.1), qui implique que $d = 0$, ainsi que la condition (4.3), qui implique quant à elle que $f = 0$. L'inversibilité de la matrice M nécessite alors que g et c soient tous deux non nuls, de sorte que les conditions (4.4), (4.5) et (4.6) impliquent respectivement que $b = 0$, $h = 0$ et $c = \overline{g}^{-1}$, ce qui prouve finalement que M doit être de la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ \overline{c}^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & -e & 0 \\ 0 & 0 & \overline{c}^{-1} \end{pmatrix} \phi = \phi \begin{pmatrix} \overline{c}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\overline{e} & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

avec $c \in E^\times$ et $e \in E^{(1)}$ par la condition (4.2). Réciproquement, une telle matrice est bien contenue dans $N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})$ puisque l'on a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ \overline{c}^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\alpha}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \overline{c} \\ 0 & \overline{e} & 0 \\ c^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{T} .$$

2nd cas : Pour toute valeur de α, on a $\alpha = \beta$.

Le système d'équations (7.6) – (7.14) se réduit alors au système suivant :

$$(\epsilon - \alpha)b = 0\ ; \tag{7.15}$$
$$(\overline{\alpha}^{-1} - \alpha)c = 0\ ; \tag{7.16}$$
$$(\alpha - \nu)d = 0\ ; \tag{7.17}$$
$$(\epsilon - \nu)e = 0\ ; \tag{7.18}$$
$$(\overline{\alpha}^{-1} - \nu)f = 0\ ; \tag{7.19}$$
$$(\alpha - \overline{\alpha}^{-1})g = 0\ ; \tag{7.20}$$
$$(\epsilon - \overline{\alpha}^{-1})h = 0\ . \tag{7.21}$$

Choisissons $\alpha \in E^{\times}$ tel que $\alpha \neq \overline{\alpha}^{-1}$, ce qui signifie simplement que α n'est pas un élément de $E^{(1)}$ et qu'il est donc en particulier distinct de ϵ et de ν (qui sont, eux, contenus dans $E^{(1)}$). Les conditions (7.15), (7.16), (7.17), (7.19), (7.20) et (7.21) impliquent alors que l'on doit avoir $b = c = d = f = g = h = 0$. Autrement dit, M est déjà une matrice de $\mathbb{T}$. Comme $\mathbb{T}$ est évidemment contenu dans son normalisateur, on a ainsi achevé de prouver le résultat suivant.

Lemme 7.3.1. *Le normalisateur de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{G}$ admet la décomposition en doubles classes disjointes suivante :*

$$N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T}) = \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T}\phi = \mathbb{T} \sqcup \phi\mathbb{T}\ .$$

En particulier, le groupe de Weyl fini W_0 de $\mathbb{G}$ s'identifie naturellement au groupe $\{I_3, \phi\}$ engendré par ϕ.

7.4 Calcul des paires (m, n) telles que $t_0^m \mathbb{U} \cap \mathbb{K} t_0^n \mathbb{K} \neq \emptyset$

Cet appendice a pour objectif démontrer l'affirmation de la Remarque 4.2.13 dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous.

Lemme 7.4.1. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}^*$. Supposons que t_0^m appartienne à $\mathbb{K} t_0^n \mathbb{K} \mathbb{U}$. Alors n est non nul et l'on est dans l'un des deux cas suivants :*

i) $m > 0$, *et alors* $m \leq n$ *;*

ii) $m < 0$, *et alors* $-m \leq n$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $u \in \mathbb{U}$ et $k_1 = (k_{ij}^1)_{1 \leq i,j \leq 3}$, $k_2 = (k_{ij}^2)_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathbb{K}$ tels que l'on ait $t_0^m u = k_1 t_0^n k_2$. Un calcul explicite montre que $k_1 t_0^n k_2$ est alors donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} \overline{\varpi}_E^{-n} k_{11}^1 k_{11}^2 + k_{12}^1 k_{21}^2 + \overline{\varpi}_E^n k_{13}^1 k_{31}^2 & \overline{\varpi}_E^{-n} k_{11}^1 k_{12}^2 + k_{12}^1 k_{22}^2 + \overline{\varpi}_E^n k_{13}^1 k_{32}^2 & \overline{\varpi}_E^{-n} k_{11}^1 k_{13}^2 + k_{12}^1 k_{23}^2 + \overline{\varpi}_E^n k_{13}^1 k_{33}^2 \\ \overline{\varpi}_E^{-n} k_{21}^1 k_{11}^2 + k_{22}^1 k_{21}^2 + \overline{\varpi}_E^n k_{23}^1 k_{31}^2 & \overline{\varpi}_E^{-n} k_{21}^1 k_{12}^2 + k_{22}^1 k_{22}^2 + \overline{\varpi}_E^n k_{23}^1 k_{32}^2 & \overline{\varpi}_E^{-n} k_{21}^1 k_{13}^2 + k_{22}^1 k_{23}^2 + \overline{\varpi}_E^n k_{23}^1 k_{33}^2 \\ \overline{\varpi}_E^{-n} k_{31}^1 k_{11}^2 + k_{32}^1 k_{21}^2 + \overline{\varpi}_E^n k_{33}^1 k_{31}^2 & \overline{\varpi}_E^{-n} k_{31}^1 k_{12}^2 + k_{32}^1 k_{22}^2 + \overline{\varpi}_E^n k_{33}^1 k_{32}^2 & \overline{\varpi}_E^{-n} k_{31}^1 k_{13}^2 + k_{32}^1 k_{23}^2 + \overline{\varpi}_E^n k_{33}^1 k_{33}^2 \end{pmatrix}$$

de sorte que l'égalité $t_0^m u = k_1 t_0^n k_2$ implique que l'on a en particulier

$$\begin{cases} \overline{\varpi}_E^{-m} & = & \overline{\varpi}_E^{-n} k_{11}^1 k_{11}^2 + k_{12}^1 k_{21}^2 + \overline{\varpi}_E^n k_{13}^1 k_{31}^2 & \text{en regardant le coefficient } (1,1) \text{ ;} \\ \varpi_E^m & = & \overline{\varpi}_E^{-n} k_{31}^1 k_{13}^2 + k_{32}^1 k_{23}^2 + \overline{\varpi}_E^n k_{33}^1 k_{33}^2 & \text{en regardant le coefficient } (3,3) \text{ .} \end{cases} \tag{7.22}$$

Remarquons tout de suite qu'étant donné que k_1 et k_2 sont des éléments de $\mathbb{K}$, les produits de coefficients $k_{11}^1 k_{11}^2$, $k_{12}^1 k_{21}^2$, $k_{13}^1 k_{31}^2$, $k_{31}^1 k_{13}^2$, $k_{32}^1 k_{23}^2$ et $k_{33}^1 k_{33}^2$ appartiennent tous à $\mathcal{O}_E$. Par suite, si $n = 0$, la première égalité de (7.22) implique que $\overline{\varpi}_E^{-m}$ doit appartenir à $\mathcal{O}_E$, donc que m est négatif, tandis que la seconde égalité de (7.22) implique que ϖ_E^m doit appartenir à $\mathcal{O}_E$, donc que m est positif. La seule possibilité est donc que $m = 0$, ce qui contredit notre hypothèse et prouve que l'on doit avoir n strictement positif. Dans ce cas, nous allons conclure en distinguant selon le signe de m.

- Supposons tout d'abord $m > 0$. Dans ce cas, on multiplie la première égalité de (7.22) par $\overline{\varpi}_E^m$, ce qui donne

$$1 = \overline{\varpi}_E^{m-n} k_{11}^1 k_{11}^2 + \overline{\varpi}_E^m k_{12}^1 k_{21}^2 + \overline{\varpi}_E^n \overline{\varpi}_E^m k_{13}^1 k_{31}^2 \ . \tag{7.23}$$

  Comme m et $m+n$ sont tous deux strictement positifs, l'élément $\overline{\varpi}_E^m k_{12}^1 k_{21}^2 + \overline{\varpi}_E^n \overline{\varpi}_E^m k_{13}^1 k_{31}^2$ est contenu dans $\mathfrak{p}_E$ et la seule possibilité pour que l'identité (7.23) soit vraie est donc que l'on ait $m - n \leq 0$, i.e. $m \leq n$.

- Supposons maintenant que $m < 0$. Dans ce cas, on multiplie la seconde égalité de (7.22) par ϖ_E^{-m}, ce qui donne

$$1 = \overline{\varpi}_E^{-(n+m)} k_{31}^1 k_{13}^2 + \varpi_E^{-m} k_{32}^1 k_{23}^2 + \overline{\varpi}_E^n \varpi_E^{-m} k_{33}^1 k_{33}^2 \ . \tag{7.24}$$

  Comme $-m$ et $n - m$ sont tous deux strictement positifs, l'élément $\varpi_E^{-m} k_{32}^1 k_{23}^2 + \overline{\varpi}_E^n \varpi_E^{-m} k_{33}^1 k_{33}^2$ appartient à $\mathfrak{p}_E$. Par suite, la seule possibilité pour que l'identité (7.24) soit vraie est que l'on ait $-(m+n) \leq 0$, i.e. $-m \leq n$, ce qui achève de prouver le résultat annoncé. □

7.5 Calcul explicite de l'isomorphisme Δ

Nous donnons dans cet appendice le calcul explicite de l'isomorphisme Δ et vérifions qu'il est bien égal à l'application envoyant un homomorphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta))$ sur l'élément $f(.)(I_3) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)}(V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}, \eta)$.
Par définition, on a $\Delta = \Delta_6 \circ \Delta_5 \circ \Delta_4 \circ \Delta_3 \circ \Delta_2 \circ \Delta_1$, où les isomorphismes Δ_i sont définis comme suit.

- L'isomorphisme $\Delta_1 : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V), \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta))$ est celui qui provient de la réciprocité de Frobenius compacte, de sorte que l'on a :

$$\Delta_1 : f \mapsto F = [\phi \mapsto \sum_{x \in \mathbb{K}\backslash\mathbb{G}} f(\phi(x))(\cdot x^{-1})] \ .$$

- L'isomorphisme $\Delta_2 : \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V), \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V), \eta)$ est celui qui provient de la réciprocité de Frobenius lisse, de sorte que l'on a :

$$\Delta_2 : F \mapsto f_0 = [\phi \mapsto F(\phi)(I_3)] \ .$$

- L'isomorphisme $\Delta_3 : \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V), \eta) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{B}\cap\mathbb{K}}^{\mathbb{B}}(V), \eta)$ est induit par l'isomorphisme $\mathrm{ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}(V)|_{\mathbb{B}} \simeq \mathrm{ind}_{\mathbb{B}\cap\mathbb{K}}^{\mathbb{B}}(V)$ donné par la décomposition de Mackey, et est donc simplement égal à l'application de restriction à $\mathrm{ind}_{\mathbb{B}\cap\mathbb{K}}^{\mathbb{B}}(V)$.
- L'isomorphisme $\Delta_4 : \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(\mathrm{ind}_{\mathbb{B}\cap\mathbb{K}}^{\mathbb{B}}(V), \eta) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}\cap\mathbb{K}}(V, \eta)$ est celui qui provient de la réciprocité de Frobenius compacte, de sorte que l'on a :

$$\Delta_4 : f_0 \mapsto [v \mapsto f_0([I_3, v])] \ .$$

- L'isomorphisme $\Delta_6 \circ \Delta_5 : \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}\cap\mathbb{K}}(V, \eta) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}(\mathcal{O}_E^\times)}(V^{\mathbb{K}\cap\mathbb{U}}, \eta)$ est quant à lui simplement égal à l'application de restriction à $V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}$.

On en déduit donc que si f est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\eta))$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\Delta(f) &= (\Delta_6 \circ \Delta_5 \circ \Delta_4 \circ \Delta_3 \circ \Delta_2 \circ \Delta_1)(f) \\
&= (\Delta_6 \circ \Delta_5 \circ \Delta_4 \circ \Delta_3 \circ \Delta_2)([\phi \mapsto \sum_{x \in \mathbb{K}\backslash\mathbb{G}} f(\phi(x))(.x^{-1})]) \\
&= (\Delta_6 \circ \Delta_5 \circ \Delta_4 \circ \Delta_3)([\phi \mapsto \sum_{x \in \mathbb{K}\backslash\mathbb{G}} f(\phi(x))(x^{-1})]) \\
&= (\Delta_6 \circ \Delta_5 \circ \Delta_4)([\phi \mapsto \sum_{x \in (\mathbb{K}\cap\mathbb{B})\backslash\mathbb{B}} f(\phi(x))(x^{-1})]) \ .
\end{aligned}$$

Arrêtons-nous un instant pour remarquer que si x est un élément de $\mathbb{B}$, alors on a $f(\phi(x))(x^{-1}) = \eta(x^{-1}) f(\phi(x))(1)$, ce qui permet donc d'écrire que

$$\begin{aligned}
\Delta(f) &= (\Delta_6 \circ \Delta_5 \circ \Delta_4)([\phi \mapsto \sum_{x \in (\mathbb{B}\cap\mathbb{K})\backslash\mathbb{B}} \eta(x^{-1}) f(\phi(x))(I_3)]) \\
&= (\Delta_6 \circ \Delta_5)([v \mapsto \sum_{x \in (\mathbb{K}\cap\mathbb{B})\backslash\mathbb{B}} \eta(x^{-1}) f([I_3, v](x))(I_3)]) \\
&= (\Delta_6 \circ \Delta_5)([v \mapsto f(v)(I_3)]) \\
&= [v \mapsto f(v)(I_3)]|_{V^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}}
\end{aligned}$$

et prouve le résultat annoncé.

7.6 Structure de module des espaces de vecteurs $I_S(1)$-invariants des séries principales : le cas régulier

7.6.1 Structure du $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module à droite $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda\omega^r)\right)^{I_S(1)}$

Fixons un paramètre $r \in \{1\ldots,[\frac{q-1}{2}]\}$ distinct de $\frac{q-1}{2}$ lorsque p est impair, un scalaire non nul $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et considérons la représentation $\pi := \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda\omega^r)$. Les résultats de la Section 3.4 du Chapitre 3 assurent en particulier que l'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de π est de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et qu'il admet pour base la famille $\{\ell_{1,r},\ell_{2,r}\}$ caractérisée par les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \ell_{1,r}(I_2) = 1 & ; \quad \ell_{2,r}(I_2) = 0 \quad ; \\ \ell_{1,r}(s_1) = 0 & ; \quad \ell_{2,r}(s_1) = 1 \quad . \end{cases}$$

Remarquons que l'on a notamment $s_1 \cdot \ell_{1,r} = (-1)^r \ell_{2,r}$ et $s_1 \cdot \ell_{2,r} = (-1)^{r-1}\ell_{1,r}$.
Rappelons maintenant que, d'après la formule (2.5) du Chapitre 2 (Section 2.3.3), l'action d'un opérateur de Hecke $T \in \mathcal{H}_S^1$ sur un élément $f \in \pi^{I_S(1)}$ est donnée par

$$f|T = (\Phi_f \circ T)([I_2,1]) \ , \tag{7.25}$$

où $\Phi_f : \mathrm{ind}_{I_S(1)}^{G_S}(\mathbf{1}) \to \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda\omega^r)$ est l'unique morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules envoyant la fonction standard $[I_2,1]$ sur f. Ceci assure en particulier que la structure de $\mathcal{H}_S^1$-module à droite de $\pi^{I_S(1)}$ est donnée par un module à droite sur l'algèbre de Hecke-Iwahori $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$ via la factorisation du Corollaire 6.3.47.
Grâce aux résultats démontrés dans les Sections 6.3.6 et 6.3.7 du Chapitre 6, il nous suffit donc de comprendre l'action des opérateurs T_r, S_r, S_0^r et S_1^r sur $\ell_{1,r}$ pour déterminer la structure du $\mathcal{H}_S^1$-module à droite $\pi^{I_S(1)}$.

Lemme 7.6.1. *Soient* $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ *et* $r \in \{1,\ldots,[\frac{q-1}{2}]\}$ *avec* $r \neq \frac{q-1}{2}$ *si* p *est impair.*
Le $\mathcal{H}_S^1$*-module à droite* $(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda\omega^r))^{I_S(1)}$ *est canoniquement isomorphe au* $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$*-module à droite irréductible* $M_{12}(\lambda^{-1})$ *posé sur la composante* $k = r$*.*

Démonstration. Commençons par calculer $\ell_{1,r}|T_r$ et $\ell_{1,r}|S_r$. D'après la formule (7.25), on a tout d'abord

$$\ell_{1,r}|T_r \quad = \quad \sum_{x\in A_2} (\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0)\cdot \ell_{1,r} \ .$$

On a donc en particulier

$$\begin{aligned} (\ell_{1,r}|T_r)(I_2) &= \sum_{x\in A_2} \ell_{1,r}(\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0) \\ &= \ell_{1,r}(\alpha_0) + \sum_{x\in A_2\setminus\{0\}} \ell_{1,r}(\alpha_0\overline{u}(\varpi_F^{-1}x)) \\ &= (\mu_\lambda\omega^r)(\alpha_0)\ell_{1,r}(I_2) \\ &= \lambda^{-1} \ , \end{aligned}$$

le passage de la deuxième à la troisième égalité venant du fait que $\overline{u}(\varpi_F^{-1}x)$ n'appartient pas à $B_S I_S(1)$ lorsque x est un élément non nul de A_2. On a aussi

$$\begin{aligned} (\ell_{1,r}|T_r)(s_1) &= \sum_{x\in A_2} \ell_{1,r}(s_1\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0) \\ &= \sum_{x\in A_2} \ell_{1,r}(u(-\varpi_F x)\alpha_0^{-1}s_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car le support de $\ell_{1,r}$ est égal à $B_S I_S(1)$, et est donc disjoint de $B_S s_1 I_S(1)$. Nous avons ainsi déjà prouvé que $\ell_{1,r}|T_r = \lambda^{-1}\ell_{1,r}$.
Par ailleurs, nous avons

$$\ell_{1,r}|S_r \;=\; \sum_{x\in A_2}(u(-x)\alpha_0^{-1})\cdot\ell_{1,r}\ ,$$

ce qui donne d'une part

$$\begin{aligned}(\ell_{1,r}|S_r)(I_2) &= \sum_{x\in A_2}\ell_{1,r}(u(-x)\alpha_0^{-1})\\ &= \mathrm{Card}(A_2)\ell_{1,r}(\alpha_0^{-1})\\ &= 0\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}(\ell_{1,r}|S_r)(s_1) &= \sum_{x\in A_2}\ell_{1,r}(s_1u(-x)\alpha_0^{-1})\\ &= \ell_{1,r}(s_1\alpha_0^{-1}) + \sum_{x\in A_2\backslash\{0\}}\ell_{1,r}(s_1\alpha_0^{-1}u(-\varpi_F^{-2}x))\\ &= \sum_{x\in A_2\backslash\{0\}}\ell_{1,r}(\alpha_0 s_1 u(-\varpi_F^{-2}x))\\ &= \sum_{x\in A_2\backslash\{0\}}\lambda^{-1}\ell_{1,r}(\overline{u}(\varpi_F^{-2}x)s_1)\\ &= \sum_{x\in A_2\backslash\{0\}}\lambda^{-1}\ell_{1,r}\left(u(\varpi_F^{2}x^{-1})s_1\begin{pmatrix}\varpi_F^{-2}x & 1\\ 0 & \varpi_F^{2}x^{-1}\end{pmatrix}s_1\right)\\ &= \sum_{x\in A_2\backslash\{0\}}\lambda^{-1}\ell_{1,r}\left(\alpha_0^{-2}\begin{pmatrix}x^{-1} & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ \varpi_F^{2}x^{-1} & -1\end{pmatrix}\right)\ .\end{aligned}$$

Comme $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ \varpi_F^{2}x^{-1} & -1\end{pmatrix}$ appartient à $I_S(1)$ pour toute valeur $x\in A_2\backslash\{0\}$ et que les éléments de I_S agissent via leur image dans le tore fini $T_S(k_F)\simeq I_S/I_S(1)$, on obtient finalement, après décomposition des éléments non nuls de A_2 sous la forme $x_0+\varpi_F x_1$ avec $x_0, x_1\in A_1$ non simultanéments nuls, que

$$\begin{aligned}(\ell_{1,r}|S_r)(s_1) &= \lambda\left(\sum_{x\in A_2\backslash\{0\}}\ell_{1,r}\left(\begin{pmatrix}x^{-1} & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}\right)\right)\\ &= \lambda^2(\sum_{x_1\in A_1\backslash\{0\}}x_1^r) + \lambda\sum_{x_0\in A_1\backslash\{0\}}\mathrm{Card}(A_1)x_0^r\\ &= 0\ .\end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré que le sous-A_r-module engendré par $\ell_{1,r}$ dans $\pi^{I_S(1)}$ est égal au caractère $\mu_1^r(\lambda^{-1})$.
Passons maintenant au calcul de $\ell_{1,r}|S_0^r$. En appliquant de nouveau la formule (7.25), on a

$$\begin{aligned}\ell_{1,r}|S_0^r &= (-1)^{q-1-r}\sum_{x\in A_1}(u(x)s_1)\cdot\ell_{1,r}\\ &= (-1)^{q-1}\sum_{x\in A_1}u(x)\cdot\ell_{2,r}\\ &= (-1)^{q-1}\mathrm{Card}(A_1)\ell_{2,r}\\ &= 0\ ,\end{aligned}$$

où le passage de la deuxième égalité à la troisième provient de l'invariance de $\ell_{2,r}$ sous l'action de $I_S(1)$, donc en particulier sous l'action de $u(x)\in I_S(1)$ pour tout $x\in A_1$. Ceci prouve donc que $\ell_{1,r}|S_0^r$ est nul. Il nous reste à calculer $\ell_{1,r}|S_1^r$, ce que nous faisons en appliquant une fois encore la formule (7.25) :

$$\begin{aligned} \ell_{1,r}|S_1^r &= (-1)^{q-1-r}\sum_{x\in A_1}(\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0 s_1)\cdot \ell_{1,r} \\ &= (-1)^{q-1}\sum_{x\in A_1}(\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0)\cdot \ell_{2,r}\ . \end{aligned}$$

Nous avons donc en particulier

$$\begin{aligned} (\ell_{1,r}|S_1^r)(I_2) &= (-1)^{q-1}\sum_{x\in A_1}\ell_{2,r}(\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0) \\ &= (-1)^{q-1}\sum_{x\in A_1\setminus\{0\}}\ell_{2,r}\left(u(\varpi_F^{-1}x^{-1})s_1\begin{pmatrix}\varpi_F x & 1\\ 0 & \varpi_F^{-1}x^{-1}\end{pmatrix}\alpha_0\right) \\ &= (-1)^{q-1}\sum_{x\in A_1\setminus\{0\}}\ell_{2,r}\left(s_1\begin{pmatrix}x & \varpi_F\\ 0 & x^{-1}\end{pmatrix}\right) \\ &= (-1)^{q-1}(\sum_{\xi\in k_F\setminus\{0\}}\xi^r)\ell_{2,r}(s_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car nous avons supposé que $1\leq r\leq q-2$. La même méthode de calcul montre que l'on a

$$\begin{aligned} (\ell_{1,r}|S_1^r)(s_1) &= (-1)^{q-1}\sum_{x\in A_1}\ell_{2,r}(s_1\overline{u}(\varpi_F x)\alpha_0) \\ &= (-1)^{q-1}\left(\ell_{2,r}(s_1\alpha_0)+\sum_{x\in A_1\setminus\{0\}}\ell_{2,r}\left(s_1^2\begin{pmatrix}x & \varpi_F\\ 0 & x^{-1}\end{pmatrix}\right)\right) \\ &= (-1)^{q-1}\ell_{2,r}(\alpha_0^{-1}s_1) \\ &= (-1)^{q-1}\lambda\ , \end{aligned}$$

où le passage de la deuxième égalité à la troisième est possible car le support de $\ell_{2,r}$ ne contient aucun élément de B_S (et car $s_1^2=-I_2$). Nous avons ainsi prouvé que $\ell_{1,r}|S_1^r=(-1)^{q-1}\lambda\ell_{2,r}$, ce qui termine la démonstration en choisissant pour base adaptée du $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module $\pi^{I_S(1)}$ la famille $\{m_1=\ell_{1,r};\ m_2=(-1)^{q-1}\lambda\ell_{2,r}\}$. □

7.6.2 Structure du $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module à droite $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda\omega^{q-1-r})\right)^{I_S(1)}$

Considérons à présent la représentation $\pi':=\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda\omega^{q-1-r})$. De nouveau grâce aux résultats de la Section 3.4 du Chapitre 3, on sait que l'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de π' est de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et qu'il admet pour base la famille $\{\ell_{1,q-1-r},\ell_{2,q-1-r}\}$ caractérisée par les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \ell_{1,q-1-r}(I_2)=1 & ;\quad \ell_{2,q-1-r}(I_2)=0 \quad ; \\ \ell_{1,q-1-r}(s_1)=0 & ;\quad \ell_{2,q-1-r}(s_1)=1 \quad . \end{cases}$$

Il faut cependant noter que c'est cette fois la fonction $\ell_{2,q-1-r}$ qui appartient à la composante (I_S,ω^r)-isotypique de π', ce qui va mener à l'inversion des rôles joués par les indices i et j. Plus prosaïquement, on peut reprendre ligne à ligne les calculs développés dans la preuve du Lemme 7.6.1 pour obtenir directement l'énoncé suivant.

Lemme 7.6.2. *Soient $\lambda\in\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et $r\in\{1,\ldots,[\frac{q-1}{2}]\}$ avec $r\neq\frac{q-1}{2}$ si p est impair. Le $\mathcal{H}_S^1$-module à droite $(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda\omega^{q-1-r}))^{I_S(1)}$ est canoniquement isomorphe au $\widetilde{\mathcal{H}}_S(r)$-module à droite irréductible $M_{21}(\lambda^{-1})$ posé sur la composante $k=r$.*

Bibliographie

[Abe] N. Abe, *On a classification of irreducible admissible modulo p representations of a p-adic split reductive group*, preprint (2011).

[BL94] L. Barthel, R. Livné, *Irreducible modular representations of GL(2) of a local field*, Duke Math. J. 75, no. 2 (1994), 261–292.

[BL95] L. Barthel, R. Livné, *Modular representations of GL(2) of a local field : the ordinary, unramified case*, J. Number Theory 55 (1995), 1–27.

[BB] L. Berger, Ch. Breuil, *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de* $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, Astérisque 330 (2010), 155–211.

[IGA] A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Publ. Math. de l'université de Strasbourg XV, Hermann, Paris (1969).

[LAG] A. Borel, *Linear Algebraic groups*, Vol. 126 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New-York (1991).

[BorT] A. Borel, J. Tits, *Groupes réductifs*, Publ. Math. de l'IHES, tome 27 (1965), 5–151.

[Br] Ch. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $GL_2(\mathbb{Q}_p)$*, I*, Compositio Math. 138, no. 2 (2003), 165–188.

[BM02] Ch. Breuil, A. Mézard, *Multiplicités modulaires et représentations de* $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ *et de* $Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ *en* $\ell = p$ (avec un appendice de G. Henniart), Duke Math. J. 115 (2002), 205–310.

[BM11] Ch. Breuil, A. Mézard, *Multiplicités modulaires raffinées*, preprint (2011).

[BP] Ch. Breuil, V. Paškūnas, *Towards a modulo p Langlands correspondence for* GL_2, à paraître à Memoirs of AMS (2011).

[BT1] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local : I. Données radicielles valuées*, Publ. Math. de l'IHES, tome 41 (1972), 5–251.

[BT2] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local : II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Publ. Math. de l'IHES, tome 60 (1984), 5–184.

[BH] C.J. Bushnell, G. Henniart, *The local Langlands conjecture for GL(2)*, Springer, Berlin-Heidelberg-New-York (2006).

[Cab] M. Cabanes, *Irreducible modules and Levi supplements*, J. of Algebra 90 (1984), 84–97.

[Car] P. Cartier, *Representations of* $\mathfrak{p}$*-adic groups*, Proc. Sympos. Pure Math. XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1979), Part 1, 111–155.

[CE] M. Cabanes, M. Enguehard, *Representation theory of finite reductive groups*, New Mathematical Monographs 1, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2004).

[Chou] F. Choucroun, *Analyse harmonique des groupes d'automorphismes d'arbres de Bruhat-Tits*, Mémoires de la SMF 58 (1994), 1–166.

[Co] P. Colmez, *Représentations de* $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ *et* (φ, Γ)*-modules*, Astérisque 330 (2010), 281–509.

[D99] J.-F. Dat, *Types et inductions pour les représentations modulaires de groupes p-adiques*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 32 (1999), no. 1, 1–38.

[Di] J.A. Dieudonné, *La géométrie des groupes classiques*, 3ème édition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York (1971).

[HT] M. Harris, R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Math. Studies 151 (2001), Princeton University Press.

[He] G. Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $GL(n)$ sur un corps p-adique*, Inventiones Math. 139 (2000), no. 2, 439–455.

[HV] G. Henniart, M.-F. Vignéras, *A Satake isomorphism for representations modulo p of reductive groups over local fields*, preprint (2011).

[Her1] F. Herzig, *A Satake isomorphism in characteristic p*, Compositio Math. 147 (2011), no. 1, 263–283.

[Her2] F. Herzig, *The classification of irreducible admissible mod p representations of a p-adic GL_n*, à paraître dans Inventiones Math. (2011).

[Hij] H. Hijikata, *Maximal compact subgroups of some p-adic classical groups*, Yale University, Dept. of Mathematics (1963).

[Hu] Y. Hu, *Diagrammes canoniques et représentations modulo p de $GL_2(F)$*, à paraître à J. of the IMJ (2011).

[J] A.V. Jeyakumar, *Principal indecomposable representations for the group $SL(2,q)$*, J. of Algebra 30 (1974), 444–458.

[LL] J.-P. Labesse, R. Langlands, *L-indistinguishability for $SL(2)$*, Canad. J. Math. 31, no. 4 (1979), 726–785.

[LRS] G. Laumon, M. Rapoport, U. Stuhler, *D-elliptic sheaves and the Langlands correspondence*, Inventiones Math. 113 (1993), 217–238.

[Lus] G. Lusztig, *Affine Hecke algebras and their graded version*, J. of A.M.S., Vol. 2, no. 3 (1989), 599–635.

[O1] R. Ollivier, *Critère d'irréductibilité pour les séries principales de $GL(n,F)$ en caractéristique p*, J. of Algebra 304 (2006), 39–72.

[O2] R. Ollivier, *Platitude du pro-p-module universel de $GL_2(F)$ en caractéristique p*, Compositio Math. 143 (2007), 703–720.

[O3] R. Ollivier, *Le foncteur des invariants sous l'action du pro-p-Iwahori de $GL_2(F)$*, J. für die reine und angewandte Mathematik 635 (2009), 149–185.

[Pas] V. Paškūnas, *Coefficient systems and supersingular representations of $GL_2(F)$*, Mémoires de la SMF 99 (2004).

[PR] G. Pappas, M. Rapoport, *Local models in the ramified case. III Unitary groups*, J. of the IMJ 8, vol. 3 (2009), 507–564.

[P] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses, Paris (1996).

[R] J.D. Rogawski, *Application of the buildings to orbital integrals*, PhD Thesis, University of Princeton (1980).

[Ser77] J.-P. Serre, *Modular forms of weight one and Galois representations*, in «Algebraic Number Fields : L-functions and Galois properties», LMS Academic Press (1977).

[Ser1] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2*, Astérisque 46, SMF, Paris (1977).

[Ser2] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris (1978).

[Spr] T.A. Springer, *Reductive groups*, Proc. Sympos. Pure Math. XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1979), Part 1, 3–27.

[T] J. Tits, *Reductive groups over local fields*, Proc. Sympos. Pure Math. XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1979), Part 1, 29–69.

[Vig96] M.-F. Vignéras, *Représentations ℓ-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $\ell \neq p$*, Progress in Math. 137, Birkhäuser, Boston (1996).

[V0] M.-F. Vignéras, *Correspondance de Langlands semi-simple pour $GL(n, F)$ modulo $\ell \neq p$*, Inventiones Math. 144 (2001), no. 1, 177–223.

[V1] M.-F. Vignéras, *Representations modulo p of the p-adic group GL(2, F)*, Compositio Math. 140, no. 2 (2004), 333–358.

[V2] M.-F. Vignéras, *Pro-p-Iwahori Hecke algebra and supersingular $\overline{\mathbb{F}}_p$-representations*, Math. Ann. 331 (2005) , 523–556.

[V2bis] M.-F. Vignéras, *Errata to : Pro-p-Iwahori Hecke algebra and supersingular $\overline{\mathbb{F}}_p$-representations*, Math. Ann. 333 (2005) , 699–701.

[V3] M.-F. Vignéras, *Algèbres de Hecke affines génériques*, Representation Theory 10 (2006), 1–20.

[V4] M.-F. Vignéras, *Représentations irréductibles de $GL(2, F)$ modulo p*, in « L-functions and Galois representations », LMS Lecture Notes 320 (2007).

[V5] M.-F. Vignéras, *Série principale modulo p de groupes réductifs p-adiques*, GAFA 17 (2008), 2090–2112.

[W] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Annals of Math. 142 (1995), 443–551.