Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe

Nicolas Giroud

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel :

Présentée par

Nicolas Giroud

Thèse dirigée par **Sylvain Gravier**
et codirigée par **Denise Grenier**

préparée au sein **de l'Institut Fourier**
et de **l'école doctorale MSTII**

Étude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe

à soutenir publiquement le **28 octobre 2011**,
devant le jury composé de :

Mme Viviane Durand-Guerrier
Professeur à l'Université de Montpellier 2, Rapporteur
M. Michel Rigo
Professeur à l'Université de Liège, Rapporteur
M. Frédéric Mouton
Maître de conférences à l'Université Joseph Fourier à Grenoble, Examinateur
M. Denis Tanguay
Professeur à l'Université du Québec à Montréal, Examinateur
M. Sylvain Gravier
Directeur de recherche à l'Institut Fourier à Grenoble, Directeur de thèse
Mme Denise Grenier
Maître de conférences à l'Univesité Joseph Fourier à Grenoble, Co-Directeur de thèse

Étude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe

Ici, c'est Grenoble…

Remerciements

Je voudrais commencer par remercier les membres de l'institut Fourier, aussi bien le personnel administratif et technique que les enseignants, chercheurs et doctorants, pour m'avoir accueilli durant mes années de thèse ainsi que durant mes études antérieures.

Je tiens à remercier mes directeurs de thèse, Sylvain Gravier et Denise Grenier, pour avoir accepté d'encadrer ce travail ainsi que pour leur disponibilité et leur soutien durant ces années. Ce travail doit beaucoup à leurs idées et à la complémentarité de leurs apports.

Je remercie Michel Rigo et Viviane Durand-Guerrier, qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Leurs lectures attentives et leurs remarques me seront précieuses. Merci à Frédéric Mouton et Denis Tanguay d'avoir accepté d'être examinateur lors de la soutenance.

Je tiens aussi à remercier Michèle et Évelyne pour m'avoir laisser faire mes expérimentations dans leurs classes.

Mes remerciements vont également à l'ensemble de Maths à Modeler, les discussions que j'ai pues avoir avec ses membres m'ont beaucoup appris. Je tiens, en particulier, à remercier Charles dont le point de vue est toujours pertinent et original ; Sylvain pour m'avoir permis d'aller dans des conférences parfois éloignées ; Cécile, Éric, Julien, Léa et Paul avec qui nous avons essayé de faire un « putsch » qui a, malheureusement, échoué mais qui m'a permis d'apprendre beaucoup de choses ; Michèle et Karine avec qui travailler est très sympa ; Laurent pour m'avoir « converti » à Linux et enfin la nouvelle génération : Aline, Aline Mex, Élise, Marion, Simon et Ximena, pour les différentes discussions que nous avons pues avoir sur « les chefs » et l'aide qu'ils ont pue m'apporter. Merci également à Robert pour son soutien moral et technique.

Merci aussi aux membres de l'IREM de Grenoble de m'avoir si bien acceuilli.

Merci à Hervé et Simon d'avoir accepté que j'occupe une partie de mes journées à fouiner dans leur bureau. En particulier, soutenir en ce jour béni, date de naissance du grand « *mamon* », est une grande fierté pour moi.

Merci aussi aux différents doctorants et post-docs de l'institut Fourier que j'ai pu cotôyer durant mes années de thèse, en particulier à Éléonora, Antoine, Bashar, Camille, Clélia, Damien, Delphine, Hernan, Jeff, Johanna, Jorge Marianne, Mathieu, Maxime, Mickaël, Nicolas, Olivier, Samuel, Sylvain.... La bonne ambiance ainsi que la solidarité qui règne entre les thésards est à préserver.

Je voudrai aussi remercier plus particulièrement certains thésards, mes ex-voisins de bureau : Jean, Max et Vincent. Même s'ils m'ont contaminé avec la « loose » du 112, les nombreuses discussions absurdes ainsi que les bières que nous avons partagées resteront de très bons moments.

Par rapport aux services que Jean m'a rendu notamment lorsqu'il a guetté le « chef », jour et nuit, afin d'obtenir sa signature et lorsqu'il a servi d'interface entre l'école doctorale et moi, je lui dois ce paragraphe (et plus). Alors merci à lui d'avoir pris sur son temps pour accomplir, avec brio et sans bavures, les quêtes que je lui avais confiées (finalement tu n'auras pas à te servir de ton fusil à cartouches soporifiques. . .).

Mes remerciements vont également à Aline Mex et Simon pour leur aide précieuse dans les tâches administratives de ma soutenance et à Sébastien sans qui ce manuscript n'aurait pas de page de couverture.

Passons maintenant aux personnes avec qui j'ai partagé un bureau, merci à Nico « le ouf » pour ses conseils et ses chansons et à Thomas pour ses conseils en décoration de bureau.

Je voudrais aussi remercier spécialement Alvaro et Ximena qui sont devenus plus que des co-bureaux et qui ont rendu ces années de thèse beaucoup plus sympas à passer !

Enfin je voudrais remercier tous ceux qui se reconnaîtront dans cette phrase : « Il n'y a que Grenoble », vous voyez que j'ai quand même un peu travaillé durant ces 4 dernières années !

Pour finir, je voudrais remercier ma famille pour m'avoir soutenue et en particulier ma mère qui m'a éduqué, poussé à être meilleur, hébergé et nourri durant toutes mes études (et elles ont été longues !), sans elle rien n'aurait été possible.

Sommaire

Table des figures

Introduction

Une première motivation. De nombreux mathématiciens mettent en avant le caractère expérimental des mathématiques, nous pouvons citer ARNOLD (1998), pour qui les mathématiques sont « la partie de la physique où les expérience ne coûtent pas cher », PERRIN (2007) ou encore POLYA (1990). Pourtant, il est quasiment certain que pour presque toute la population, les mathématiques sont dénuées d'expérimental[1], les mathématiques ce n'est pas de la physique et encore moins de la biologie ! Il est vrai que lorsqu'on parle de sciences, les mathématiques sont exclues de celles dîtes « expérimentales ». En mathématiques, nous ne manipulons pas de tubes à essais, d'oscilloscopes ou encore de scalpels !

Pourtant, récemment, il s'est développé une nouvelle branche des mathématiques, *les mathématiques expérimentales*, dans laquelle, selon BORWEIN et BAILEY (2008), les chercheurs utilisent les outils informatiques comme un « laboratoire ». Par exemple, ils les utilisent pour analyser des exemples ou tester une nouvelle idée. On pourrait alors en conclure que les mathématiques sont devenues expérimentales avec l'arrivée d'ordinateurs et de logiciels avancés. Cela n'est pas notre point de vue, nous pensons que caractère expérimental d'une science n'est pas seulement lié à l'utilisation d'outils « extérieurs » mais s'inscrit dans un processus de résolution de problèmes dans lequel expérimenter est en intéraction avec d'autres actions comme proposer de nouveaux problèmes, vérifier une hypothèse/conjecture. . . De ce fait, selon nous, d'une part le caractère expérimental des mathématiques a toujours été présent et d'autre part, expérimenter en mathématiques ne nécessite pas d'utiliser des outils complexes, une feuille et un crayon peuvent par exemple suffire.

Notre motivation première à l'étude de la « démarche expérimentale en mathématiques » est que nous considérons que c'est un processus utile à la résolution de problèmes mathématiques. En ce sens, nous pouvons voir la « démarche expérimentale en mathématiques » comme l'aspect expérimental de l'activité de recherche en mathématiques.

Une seconde motivation. Nos motivations ne sont pas seulement épistémologiques, elles sont aussi d'ordre didactique. Si nous nous sommes intéressé à la démarche expérimentale en mathématiques, c'est avant tout

[1] GODOT (2005) a montré que :

> l'image des mathématiques que peut avoir un élève et par extrapolation le grand public, peut être celle d'une discipline où il faut faire des calculs, dont il faut se servir pour résoudre des problèmes numériques.

car nous considérons qu'il est important (voir indispensable) que ce savoir-faire soit enseigné. Par rapport à cela, nous partageons le point de vue du ministère de l'éducation nationale qui, depuis une dizaine d'années, préconise la pratique régulière de la « démarche scientifique »[2] par les élèves du primaire et du secondaire. Par exemple, nous retrouvons dans le programme de première scientifique du *B.O. hors série n°7 30 août 2001*, le schéma de la figure .1 associé au texte suivant :

> Pour concevoir un programme de mathématiques dans le cadre d'une formation scientifique pour les élèves de première et de terminale S, il convient :

- de prendre en compte la diversité des mathématiques actuelles,
- de rappeler les éléments fondamentaux propres à toute démarche mathématique et, de ce fait, incontournables dans tout projet de formation mathématique.

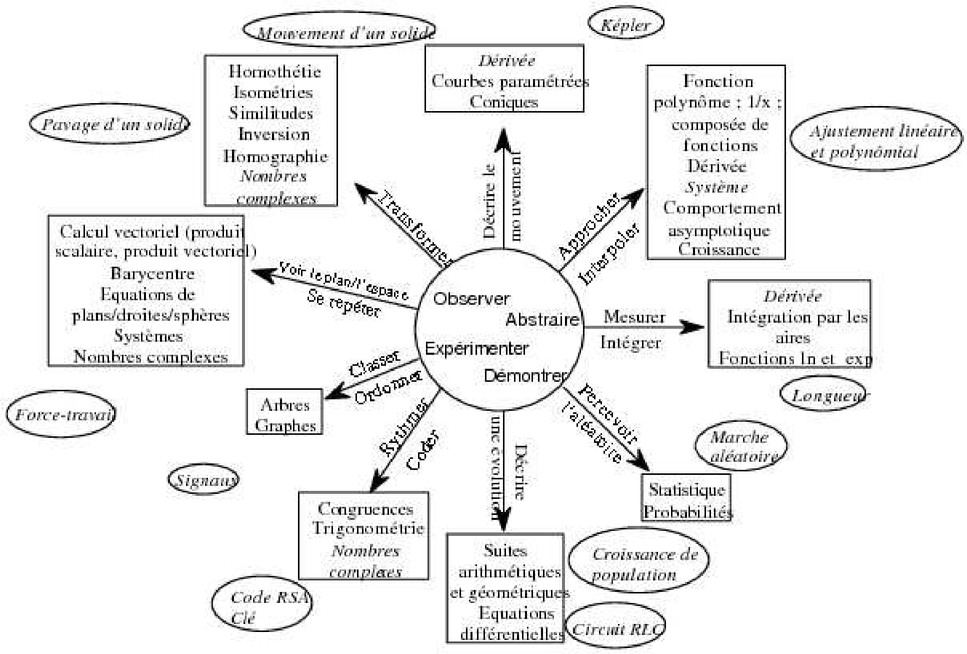


FIG. .1. Extrait du programme de première S de 2002.

Nous percevons la « démarche expérimentale en mathématiques » comme un processus global lié à différents « savoirs transversaux » (GRENIER et PAYAN, 2002), comme définir, prouver, étudier un cas particulier, modéliser, produire un exemple... De ce fait, avec l'apprentissage de la démarche expérimentale, il y a aussi l'apprentissage de ces savoirs qui est en jeu. Cela constitue pour nous une seconde motivation.

[2]Nous donnons à la fin du chapitre 1 de la partie 1, notre point de vue sur les termes démarche expérimentale, démarche scientifique et d'investigation.

Notre point de vue épistémologique sur les mathématiques. Notre point de vue épistémologique sur les mathématiques peut se résumer ainsi : les problèmes sont au cœur de l'activité mathématique, non seulement parce que, faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes mais parce que faire des mathématiques, c'est aussi en proposer de nouveaux. Ce point de vue rejoint celui de BROUSSEAU (1998, p. 49)

> On ne fait de mathématiques que lorsqu'on s'occupe de problèmes mais on oublie parfois que résoudre une partie du problème n'est qu'une partie du travail ; trouver des bonnes questions est aussi important que leur trouver des solutions.

La notion de problème mathématique est centrale dans notre travail. Nous considérons en particulier que la « démarche expérimentale en mathématiques » :
– a pour origine une tentative de résolution d'un problème mathématique ;
– est un processus générateur de nouveaux problèmes mathématiques.

Contenu du document. Ce document comporte donc une partie épistémologique dans laquelle nous définissons la « démarche expérimentale » en mathématiques et expliquons en quoi sa pratique permet d'« avancer » dans la résolution de problèmes. Une partie didactique est aussi présente dans laquelle nous décrivons des conditions didactiques favorables à son apprentissage que nous validons à l'aide d'expérimentations.

L'hypothèse fondamentale de notre étude est que l'apprentissage de la démarche expérimentale ne peut se faire qu'en situation de résolution de problèmes. La partie didactique de notre travail a donc été, en partie, consacré à la détermination de conditions épistémoligique et didactiques favorisant la pratique de la démarche expérimentale en situation de résolution de problème de recherche.

Structure du document. Pour définir une « démarche expérimentale en mathématiques », nous avons utilisé les travaux de PERRIN (2007) ainsi que des éléments des thèses de DAHAN (2005) et DIAS (2009). La définition que nous donnons est « pragmatique », elle est basée sur un ensemble d'actions qui intéragissent entre elles.

L'étude des intéractions entre ces différentes actions nous a amené à définir la notion de *concept-problème*. Pour définir cette notion, nous avons utilisé les travaux de VERGNAUD sur le concept mathématique. Le concept-problème est l'application du concept mathématiques de VERGNAUD à un problème donné. Pour un élève, en référence à ARTIGUE (1990), nous parlons de sa conception sur un problème.

En plus de permettre décrire les intéractions en jeu lors de la pratique de la démarche expérimentale, le concept-problème d'un problème a des applications en didactiques des mathématiques. D'une part, concernant l'analyse a priori, il est une aide à l'identification d'obstacles, de difficultés et des problèmes ou représentations manquants. D'autre part, au niveau de l'analyse a posteriori, où il permet la confrontation du concept-problème à la conception de l'élève sur le problème. Pour expliquer comment repérer des obstacles et des difficultés dans le concept-problème, nous utilisons les travaux de Duroux (1983) et El Bouazzaoui (1988). L'établissement du concept-problème apparaît aussi comme une aide au choix des variables de recherche (Godot, 2005 ; Grenier et Payan, 2002).

Nous nous sommes aussi demandé si l'institution scolaire propose réellement aux élèves de pratiquer une « démarche expérimentale en mathématiques ». Celai nous a permis de faire des hypothèses sur les conditions didactiques favorisant la pratique d'une « démarche expérimentale en mathématiques ».

Pour compléter le cadre théorique de la recherche, nous avons effectué un état des lieux sur les travaux de didactique de mathématiques reliés à la « démarche expérimentale ». Nous avons en particulier considéré les travaux de (Grenier et Payan, 2002) et (Godot, 2005) sur les situations de recherche en classe dont nous reprenons les caractéristiques dans la définition de notre modèle de situation.

La définition de démarche expérimentale, la notion de concept problème, l'état des lieux, les résultats que nous avions obtenu sur la situation du jeu du set (Giroud, 2007, 2009), ainsi que les notions classique en didactique des mathématiques de variable didactique et de milieu (Brousseau, 1998) constituent notre cadre théorique. Suite à sa constitution, nous énonçons nos hypothèses de recherche.

Le cadre théorique va nous permettre de caractériser un modèle de situation-problème favorisant la pratique de la démarche expérimentale. Nous construirons une situation basée sur le problème de recherche *Chercher la frontière* qui vérifie les caractéristiques de ce modèle. L'étude de cette situation a été faîte à l'aide d'une analyse mathématique et didactique ainsi que de deux expérimentations.

Dans l'ensemble du document, nous avons essayé de proposer des exemples pour étayer nos propos. Malheureusement nous avons utilisé différents problèmes mathématiques pour construire ces exemples. Pour éviter d'alourdir le texte des énoncés, parfois long, de ces problèmes, nous avons réalisé un guide des problèmes. Dans ce guide, les énoncés des problèmes ainsi que des références didactiques et mathématiques sont présents. Nous nous excusons auprès du lecteur et espérons que la découverte de ces problèmes « mathàmodelesques » sera pour lui un moment de plaisir et de curiosité.

Problématique et contexte

1. Problématique et contexte

1.1. Contexte. La recherche que nous avons menée s'inscrit dans le thème combinatoire et didactique de l'institut Fourier et dans les projets de l'Équipe Recherche Technologie et Éducation Maths à Modeler (devenue aujourd'hui une fédération de recherche). Cette recherche est centrée sur la démarche de recherche en mathématiques et plus particulièrement sur son côté expérimentale : la démarche expérimentale.

Ce savoir-faire est aujourd'hui au cœur des programmes mathématiques du lycée en France. Des travaux de didactiques françaises ont, récemment, été produits sur le sujet, nous pouvons citer les thèses de Dahan (2005) et Dias (2009). Les travaux de Dias (ibid.) portent sur la démarche expérimentale comme levier à l'apprentissage, ceux de Dahan (2005) s'intéressent à la prise en compte de la démarche expérimentale dans les analyses didactiques. L'Institut National de Recherche Pédagogique (INRP) a fait paraître un dossier de veille contenant un état des lieux sur le sujet. De plus, les académies proposent aujourd'hui des modules de formation, à destination des enseignants de mathématiques, sur la démarche expérimentale. Toutefois, Papadopoulos et Iatridou (2010) mentionne que de travaux de recherche sur l'enseignements des mathématiques portant sur la « démarche expérimentale en mathématiques » sans utilisation d'outils technologiques ont été produits.

Le sujet n'est pas seulement étudié en mathématiques, il est aussi étudié dans les disciplines dîtes expérimentales[3]. D'ailleurs, il existe un projet européen, Science Teacher Education Advanced Methods (S-TEAM), dont l'un des thèmes principaux est la démarche d'investigation[4] dans les sciences. L'INRP a aussi tenu des journées scientifiques portant sur les démarches d'investigation dans l'enseignement des sciences.

La démarche expérimentale en mathématique est donc devenue un objet d'apprentissage mais aussi de recherche.

Nous nous sommes intéressé à l'apprentissage de la démarche expérimentale en mathématiques car nous faisons le postulat que : savoir faire des mathématiques, c'est savoir résoudre (partiellement) des problèmes de recherche, la résolution de tels problèmes nécessitant de passer par des phases expérimentales.

[3] Les didacticiens des sciences expérimentales se sont d'ailleurs intéressées à la démarche expérimentale dans leurs disciplines bien avant ceux des mathématiques.

[4] Nous verrons dans le chapitre 1 de la première partie, les différences que nous faisons entre démarche expérimentale, démarche d'investigation et démarche scientifique.

1.2. Problématique. Par rapport aux travaux effectués, notre problématique se situe en amont, ce qui nous intéressera est la transmission du savoir-faire démarche expérimentale et en particulier au rôle qu'il joue dans la résolution de problème de recherche. Nos questions de recherche sont les suivantes :

Question de recherche 1

Quelles sont les conditions à un réel apprentissage de la démarche expérimentale par les élèves ?

Question de recherche 2

Quel est l'apport de la pratique de la démarche expérimentale en situation de résolution de problèmes ?

Notre travail n'est donc pas centré sur une problématique d'apprentissage de savoirs notionnels mais sur l'apprentissage du savoir-faire *démarche expérimentale*. Nous faisons l'hypothèse fondamentale suivante :

Hypothèse fondamentale

La démarche expérimentale en mathématique est un savoir-faire qui ne peut s'apprendre qu'à travers sa pratique en situation de résolution de problèmes.

Cette hypothèse va sous-tendre nos objectifs de recherche.

2. Objectifs de la recherche

2.1. Objectif général. Un des nos objectifs de recherche est la détermination des conditions épistémologiques et didactiques favorisant la mise en pratique de la démarche expérimentale par les élèves. En plus d'un modèle de situation, nous chercherons à construire et à analyser des situation se référant à ce modèle.

La construction théorique que nous proposerons sera testée, expérimentalement, à l'aide des situations élaborées.

Note deuxième objectif est d'étudier l'apport de la démarche expérimentale pour la résolution de problèmes du point de vue épistémologique et didactique. Les expérimentations que nous avons menées nous permettrons de faire une

Nous allons maintenant donner les moyens que nous mettrons en place pour mener cette étude.

2.2. Objectifs opérationnels. Afin d'établir les caractéristiques épistémologiques et didactiques d'un milieu favorisant la pratique de la démarche expérimentale, nous ferons un état des lieux concernant la démarche expérimentale au niveau des travaux de didactiques mais aussi dans l'enseignement. Pour pouvoir réaliser cela, il nous faudra d'abord caractériser la démarche expérimentale en mathématiques. Étant donné que nous considérons la démarche expérimental comme un processus global relier à plusieurs savoirs transversaux comme prouver, définir, modéliser... L'étude de ce processus nécessite la prise en compte de ces savoirs et de leurs « liens » avec l'expérimental. Cette recherche nous a amené à développer la notion de *conception sur un problème*, grâce à laquelle nous déterminons des apports de la démarche expérimentale pour la résolution de problèmes.

Pour tester notre modèle, nous utliserons une situation spécifique : *chercher la frontière*. Nous ferons une analyse a priori de cette situation afin de vérifier que celle-ci se réfère à notre modèle et d'obtenir des éléments de gestion (épistémologiques) de la situation en vue d'une expérimentation.

La situation n'ayant jamais été expérimentée, nous réaliserons deux expérimentations afin d'affiner la situation en vue de la rendre la plus intéressante possible au niveau expérimentale, mais aussi au niveau des savoirs transversaux ainsi que des savoirs notionnels. Les expérimentations nous donnerons aussi des éléments de réponses sur l'apport de la pratique de la démarche expérimentale par des élèves.

Première partie

Un point de vue épistémologique et didactique sur la démarche expérimentale en mathématiques

CHAPITRE I

Un point de vue épistémologique sur la démarche expérimentale

Nous allons dans ce chapitre essayer de présenter notre point de vue sur la démarche expérimentale en mathématiques, ainsi que sur les différentes actions qui la composent. Nous détaillerons plus particulièrement, notre point de vue sur la modélisation en mathématiques, processus que nous considérons comme étant central dans une démarche expérimentale. Nous essayerons également de montrer quel peut être l'apport de la démarche expérimentale pour la résolution de problèmes.

Nous prendrons la définition suivante : *pratiquer la démarche expérimentale en mathématiques* consiste à essayer de résoudre un **problème**[1], qui est donc l'objet central de la démarche. Pour ce faire, des actions sont effectuées de façon non nécessairement ordonnée et à, éventuellement, répéter. Nous disinguons les types d'actions suivants :
- proposer de nouveaux problèmes ;
- expérimenter-observer-valider ;
- tenter de prouver.

Le processus de succession entre les actions s'interprète en terme d'intéractions, le résultat d'une action entraînant la réalisation d'une autre action. Pour étudier les interactions en jeu au cours du processus, nous sommes amenés à parler de « conception d'un problème » que nous développons dans la section 1 page 21.

Dans cette définition, nous retrouvons l'articulation entre formulation (proposer un nouveau problème), validation (tenter de prouver et valider) et expérimentation, qui est, selon Dias (2009, p. 25), ce qui « donne du sens » à l'expérimental en mathématiques.

Dans un premier temps, nous allons montrer les points communs entre notre définition et une définition donnée par Perrin (2007).

1. Par rapport à la définition de Perrin

La démarche exprimée comme un processus itératif se retrouve dans la description qu'en donne Perrin (ibid.) pour les mathématiques :

> Elle comprend plusieurs étapes, à répéter éventuellement :
> - expérience,
> - observation de l'expérience,

[1]Nous considérons qu'un problème est un couple (question, instances). Par exemple, pour le problème de la chasse à la bête : étant donné un jardin rectangulaire et une bête □□, quel est le nombre minimum de piège empêchant la bête de rentrer dans ce jardin ? La question est : quel est le nombre minimum, et les instances sont : l'ensemble des rectangles et la bête □□.

– formulation de conjectures,
– tentative de preuve,
– contre-expérience, production éventuelle de contre-exemples,
– formulation de nouvelles conjectures,
– nouvelle tentative de preuve, etc.

Toutefois, une première différence apparaît concernant l'objet de la démarche, qui pour Perrin (2007) semble être la notion de conjecture alors que notre définition est centrée sur la notion de problème[2]. En effet, si la démarche met en jeu la formulation de conjecture, elle met aussi en jeu la proposition de nouveaux problèmes d'autres types, par exemple pour le problème du jeu du set, l'expérimental nous amène à étudier le problème suivant : comment vérifier qu'un jeu est sans set ?

Dans l'article où l'on retrouve cette définition, Perrin (ibid.) prend en compte la possibilité de se poser de « nouvelles questions » et montre que l'expérimentation est « source de nombreuses questions ». Toutefois, il ne semble pas prendre en compte la possibilité de produire de nouveaux problèmes utiles pour la résolution du problème initial (comme celui du jeu de set).

D'autre part, l'auteur décrit un processus cyclique dans lequel chaque cycle comporte les mêmes étapes qui se succèdent linéairement. Notre définition, si elle prend en compte ce côté itératif, ne possède pas, de manière générale, cet aspect linéaire.

Nous allons maintenant décrire, plus en détail, les éléments de la démarche.

2. L'origine de la démarche

Selon Perrin (ibid.), une démarche expérimentale a pour origine un problème :

> Au commencement, il y a une situation, de nature mathématique ou au moins mathématisable[. . .] Cette situation peut donner lieu à un ou des problèmes.

Perrin définit[3]un problème comme « une question mathématique, en générale ouverte » qu'il s'est posé ou qui lui a été posée par un collègue ou un étudiant.

Nous nous rallions à ce point de vue et considérons que le point de départ de toute démarche expérimentale est un problème ouvert qui peut nous avoir

[2]Ce n'est pas contradictoire du fait que nous voyons les conjectures comme des nouveaux problèmes.

[3]Perrin rajoute concernant la notion de problème :

> Je n'entends donc pas du tout ici le mot problème au sens scolaire [. . .] D'une certaine façon, ces problèmes là sont (en général) le contraire de vrais problèmes car les élèves qui les résolvent n'ont ni à se poser les questions, ni à faire preuve d'initiative pour les résoudre, mais au contraire à se couler dans la pensée de l'auteur du problème.

Il rajoute que ces problèmes scolaires sont utiles car ils « ont pour fonction de vérifier les acquisitions d'un certain nombres de techniques et de modes de raisonnements sans lesquels ont ne peut pas faire de mathématiques. ».

été posé par nous même ou par une personne extérieure. Toutefois, nous distinguons problème de question. Les problèmes ouverts qui nous serviront d'exemples sont les suivants :

– la chasse à la bête ;
– le jeu du set ;
– le clobber ;
– les caisses de dynamites ;
– les permutations ;
– chercher la frontière ;
– la roue aux couleurs.

Nous allons maintenant voir ce que nous entendons par proposer de nouveaux problèmes[4].

3. Proposer de nouveaux problèmes

Nous avons défini un problème comme un couple (question, instance), nous considérons donc que proposer de nouveaux problèmes signifie :

– changer les instances du problème ;
– changer la question du problème ;
– changer les instances et la question.

Nous allons essayer d'illustrer cela à travers l'exemple du problème des *caisses de dynamites*. Un premier problème que nous pouvons être amené à nous poser lors d'une tentative de résolution en pratiquant la démarche expérimentale est : comment vérifier qu'un ensemble de cases est une solution admissible[5] ? Ici, nous avons changé la question et gardé les même objets. Pour répondre à cette question, nous pouvons essayer de répondre à un de ces sous-problèmes : trouver une stratégie de construction de solution admissible (changement de question).

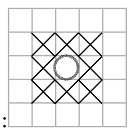
Face à une solution admissible, nous sommes confronté au problème suivant : est-ce que la solution est localement maximale[6] ? (changement de question) ce qui peut nous amener à chercher des solutions de cardinal supérieur et ainsi à nous poser des questions du type : existe-t'il des solutions de cardinal X ?

Nous pouvons aussi avoir des changements d'instance qui peuvent se voir comme des sous-problèmes. Considérons le problème pour l'explosion carré[7], il peut nous mener à étudier le problème pour l'explosion ligne et colonne, car l'optimum pour l'explosion ligne et colonne fournit un majorant à l'optimum de l'explosion carré.

[4] Nous avons déjà mentionné que le problème est central dans notre point de vue sur la démarche expérimentale, nous verrons dans la section 2 de ce chapitre, que le problème à résoudre ainsi que les problèmes qui peuvent en « découler » sont des éléments importants de la conception d'un problème.

[5] Une solution admissible est une configuration de caisses vérifiant la contrainte de sécurité. Une solution est une solution admissible de cardinalité optimum.

[6] Une solution admissible localement maximale est une solution admissible qu'il n'est pas possible d'agrandir.

[7] L'explosion carré est la suivante : 

D'autre part, nous pouvons aussi nous poser le problème suivant : est-ce qu'une solution admissible localement maximale est une solution ? (changement de question et d'instances)

Ensuite, par exemple, si les explosions sont de types diagonales, nous pouvons proposer le problème suivant : quel est le nombre maximum de diagonales du même type qui recouvrent entièrement l'entrepôt ? Ici, nous avons un changement de question et d'instances.

Nous venons de présenter des exemples de problèmes que nous pouvons nous poser lorsque nous résolvons le problème des caisses de dynamites.

D'autre part, nous pouvons aussi être amené à spécifier le problème (essayer de le résoudre sur un cas particulier) ou à généraliser le problème (essayer de résoudre un problème plus général), ou encore nous demander si nous pourrions résoudre ce problème en utilisant des techniques de programmation linéaire (changement d'instances)... En particulier, pour expérimenter, il est, généralement, nécessaire de spécifier le problème.

Cet exemple nous permet aussi de mettre évidence l'existence de 2 types de problèmes :

(1) existence : est-ce que cet objet existe ?

(2) recherche de solutions : quelle est la solution ?

Par exemple, le problème des caisses de dynamites est un problème de recherche de solutions et le problème *existe-t'il une solution de cardinal X ?* est un problème d'existence.

Enfin, arrive un moment où nous croyons avoir trouvé la réponse au problème initial, nous émettons alors une conjecture, c'est-à-dire une assertion que nous considérons comme vraie. Une conjecture peut être vue comme un problème d'existence. Par exemple, la conjecture, l'optimum est 10, correspond au problème, est-ce qu'il existe une solution de cardinalité 10 ?

4. Expérimenter-observer-valider

Nous considérons que l'*action d'expérimenter* consiste à utiliser une stratégie ou construire une stratégie[8]en vue de résoudre un problème. Nous définisons une *stratégie* comme un ensemble de manipulations ordonnées sur des objets du problème ou sur leurs représentations. Des exemples de manipulations sont : prendre un crayon, dessiner, manipuler des jetons de bois, faire effectuer des calculs à un logiciel... Un exemple de stratégie est représenté par la figure I.1. Il concerne le problème des caisses de dynamites. La stratégie est celle décrite par la figure où le numéro associé à chaque caisse indique l'ordre dans lequel nous avons placé les caisses. Nous avons manipulé des objets du problème, à savoir des caisses et un entrepôt. De plus, l'action d'expérimenter permet la production d'un fait observable, qui dans cet exemple est une configuration de caisses de dynamites.

[8]Nous différencions stratégie construite de stratégie utilisée par le fait qu'une stratégie utilisée pré-existe à l'action d'expérimenter alors que la stratégie construite se développe au cours de l'action.

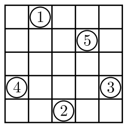


FIG. I.1. Exemple de stratégie.

L'action d'expérimenter est effectuée avec pour objectif la résolution d'un problème. Nous considérons que c'est notre conception sur le problème qui guide la construction de la stratégie ou la stratégie à utiliser.

D'autre part, au cours de la construction ou de l'utilisation d'une stratégie, nous observons le résultat de chacune de nos manipulations. C'est pourquoi l'action d'observer est aussi présente.

L'action de validation intervient au cours de l'action expérimenter pour contrôler que les manipulations que nous effectuons sont correctes. Dans l'exemple que nous avons présenté, la validation peut se voir à travers la vérification que chaque piège est sur une et une seule case. Nous parlons alors de *validation de la stratégie*, cela consiste à s'assurer que les manipulations effectuées sont autorisées par le problème et conforme à la stratégie. L'identification d'une stratégie plus générale peut alors nous amener à rencontrer un nouveau problème de recherche de solutions qui consiste à étudier le domaine de validité de la stratégie. Illustrons cela avec le problème des caisses de dynamites.

EXEMPLE I.1 (Domaine de validité d'une stratégie). Considérons ce problème avec les instances suivantes : un entrepôt carré de côté de longeur 6 et des explosions de type reine. Nous avons connaissance du résultat, l'optimum est inférieur à 7. Nous expérimentons pour répondre au problème d'existence, existe-t'il une solution admissible de cardinalité 7 ? Pour cela nous employons la stratégie du cavalier, placer les caisses en suivant le mouvement du cavalier. Nous obtenons la configuration de la figure I.2. Cette configuration est une solution admissible de cardinal 7 donc elle est solution.

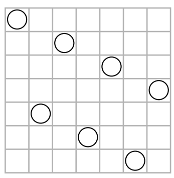


FIG. I.2. Configuration produite avec la stratégie du cavalier.

Nous rencontrons un nouveau problème qui consiste à déterminer le domaine de validité de la stratégie cavalier[9], là-dire à rechercher les entrepôts pour lesquels cette stratégie fournit une solution.

D'autre part, l'action de validation intervient à la fin de l'action d'expérimenter lorsque le produit de la stratégie est obtenu et que l'on doit

[9]Cette stratégie a été mise au point par des élèves du CLEPT lors d'un MATh.en.JEANS, ce qui les amené à étudier le domaine de validité de cette stratégie pour des entrepôts carrés.

s'assurer que les faits résultants de l'action d'expérimenter sont des solutions ou des solutions admissibles au problème étudié. Dans l'exemple que nous avons présenté ce type de validation peut se voir dans l'action de vérifier que la configuration de la figure I.1 est une solution admissible. Nous parlons alors de *validation du produit de la stratégie*, qui consiste à s'assurer que les faits résultants de l'action d'expérimenter sont des solutions ou des solutions admissibles au problème étudié. Cela permet, en particulier, de donner le statut d'*exemple* ou de *contre-exemple* à ces faits.

De plus, nous pouvons voir la validation du produit de la stratégie comme une activité de preuve qui peut être de nature empirique ou mathématique. En effet, la validation du produit de la stratégie n'est pas nécessairement mathématique, nous pouvons très bien effectuer une validation de nature plus « empirique ». D'autre part, le problème associé à la validation n'est pas, généralement, nécessaire pour la résolution, c'est-à-dire qu'il est, a priori, possible de résoudre le problème sans résoudre le problème associé à la validation. Par exemple, pour le problème des entrepôts le problème de la construction d'un algorithme qui permet de vérifier qu'une configuration est une solution admissible est annexe, il est utile si nous cherchons à déterminer un minorant à l'optimum par exhibition de solution admissible mais n'intervient pas, a priori, si l'on cherche à résoudre le problème en dénombrant le nombre de configurations possibles à X caisses et à comparer le résultat avec le nombre de configurations non-admissibles à X caisses.

En ce sens, le problème de la validation du produit de la stratégie apparaît comme annexe par rapport au problème initial mais peut être essentiel suivant le chemin de résolution que nous envisageons et ainsi devenir un problème à résoudre.

4.1. Deux types d'expériences. Nous avons vu précédemment que l'action d'expérimenter a pour objectif la résolution d'un problème. Nous allons distinguer deux types d'expériences qui vont dépendre du problème objet de l'expérience :

- *l'expérience générative*, lorsque l'objet de l'expérience est un problème de recherche de solutions ;
- *l'expérience validative*, lorsque l'objet de l'expérience est un problème d'existence.

Les noms de ces expériences sont données en référence à DAHAN (2005, p. 22) qui distingue 2 types d'expérience :

> Une expérience est une procédure qui génère des faits observables avec comme fonction, une fonction de validation ou de génération d'hypothèses. Une expérimentation est la réalisation d'une expérience avec la fonction attribuée à cette expérience, validative (d'hypothèse) ou générative (d'hypothèse).

Nous partageons son point de vue selon lequel il y aurait deux types d'expériences mais considérons que c'est l'objet, *i.e.* le problème, qui caractérise l'expérience et non la rétroaction de l'expérience. Nous considérons que la validation ou la génération de problèmes sont des rétroactions possibles. D'autre part, nous ne parlons pas d'hypothèse mais de problème, notion plus générale qui englobe celle d'hypothèse de la même manière que la notion de conjecture.

Nous retrouvons aussi 2 types d'expériences chez Dias (2009, p. 160) :

> 'expérience-action' (ou expérienciation) : Les élèves expérimentent "pour voir", actions qui peuvent être qualifiées d'essais, d'explorations ouvertes non référencées a priori à une théorie.[...]
>
> 'expérience-objet' (ou expérimentation) : Les expériences sont conduites pour tester : une idée, une représentation, une image mentale.

L'expérience-objet apparaît comme similaire à l'expérience générative de Dahan (2005) même si elle semble plus générale pouvant prendre comme objet plus que des hypothèses. Quant à l'expérience-action, elle se rapproche de notre description d'expérimenter à travers une action. Cette expérience-action peut être vue comme notre expérience générative en remplaçant le « pour voir » par « résoudre un problème de type recherche de solution ».

4.2. Lien entre expérience générative et expérience validative. La stratégie associée à une expérience générative peut, parfois, se voir comme une succession d'expériences validatives. En effet, une expérience générative, dont l'objet est un problème P dont les instances appartiennent à ensemble E de cardinal supérieur à 2, entraîne la rencontre de problèmes qui sont des cas particuliers de P. Toutefois, le fait que nous rencontrions le problème n'implique pas le fait que nous cherchions à résoudre ces problèmes en allant jusqu'à une preuve mathématique ; nous pouvons nous contenter de donner une réponse sans en avoir fait la preuve, car l'objectif n'est pas la résolution de ces cas particuliers mais la résolution du problème général. Nous illustrons cela avec le problème de la roue au couleur

Exemple I.2 (Lien entre expérience générative et validative.). Nous considérons le problème de la roue au couleur $P_{2,.}$, pour quelles valeurs de n, existe-t'il une solution à $P_{2,n}$?

$P_{2,.}$ est donc un problème de recherche de l'ensemble des n pour lesquels il existe une solution. La validation du produit de la stratégie consiste donc à vérifier qu'il existe une solution à $P_{2,n}$ pour un n donné. De ce fait, une tentative de résolution de $P_{2,.}$ de manière expérimentale nous amène à rencontrer des problèmes d'existence du type $P_{2,n}$. L'expérimentation générative qui a pour objet $P_{2,.}$ a donc comme stratégie une succession d'action similaires à des expérimentations validatives ayant pour objet $P_{2,n}$[10].

Nous expérimentons pour résoudre ce problème, nous choisisons de commencer par expérimenter sur une roue dont le cercle extérieur est composé de 2 couleurs, nous rencontrons $P_{2,2}$. En essayant de construire une solution, nous réalisons, qu'il n'existe pas de solution, car soit nous n'utilisons qu'une seule couleur soit nous n'avons aucune couleur qui soit face à l'autre. Nous avons, ici, résolu $P_{2,2}$: la réponse est négative.

[10]A priori, cela ne veut pas dire que l'on va essayer de résoudre $P_{2,n}$, en particulier si l'on ne prend pas $P_{2,n}$ comme objectif de résolution alors il n'est pas nécessaire d'effectuer l'action tentative de preuve sur $P_{2,n}$.

Nous essayons ensuite avec trois couleurs sur le cercle extérieur, nous produisons la configuration de la figure I.3. Pour la valider nous tournons la roue d'un cran dans le sens des aiguilles d'une montre, nous obtenons alors une configuration qui n'est pas solution.

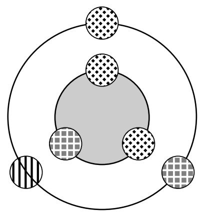


FIG. I.3. Une configuration pour un cercle extérieur composé de 3 couleurs.

En essayant de construire une nouvelle solution, nous remarquons qu'à changement de couleur près, la configuration de la figure I.3 est l'unique configuration possible. En effet, si l'on place une couleur rouge en face de la couleur rouge du cercle extérieur, nous sommes obligés de passer la couleur rouge devant la couleur bleu du cercle extérieur et comme nous devons utiliser deux couleurs, nous sommes obligé de placer la couleur bleu devant la couleur verte. Il n'y a donc pas de solution. Nous avons résolu $P_{2,3}$: la réponse est négative.

Nous allons maintenant essayer avec 4 couleurs, nous produisons la solution de la figure I.4. En validant cette configuration, nous nous apercevons que c'est bien une solution. Nous avons résolu $P_{2,4}$: la réponse est positive.

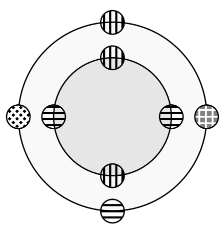


FIG. I.4. Une solution avec un cercle extérieur composé de 4 couleurs.

Pour 5 couleurs, toutes les configurations que nous avons produites ne sont pas des solutions. Nous conjecturons alors que la réponse de $P_{2,5}$ est négative. Nous ne faisons pas la preuve, car nous jugeons que le seul type de preuve que nous imaginons –la preuve par exhaustivité des cas – serait trop complexe à mettre en œuvre.

Pour $P_{2,6}$, nous produisons la configuration de la figure I.5, c'est une solution. La réponse de $P_{2,6}$ est donc positive.

Pour 7 couleurs, toutes les configurations que nous avons produites ne sont pas des solutions. Nous conjecturons alors que la réponse de $P_{2,7}$ est négative. Nous ne cherchons pas à faire de preuve pour les mêmes raisons que pour $P_{2,5}$.

Nous avons donc donné les réponses suivantes :

– Non pour $P_{2,2}$, $P_{2,3}$, $P_{2,5}$ et $P_{2,7}$;

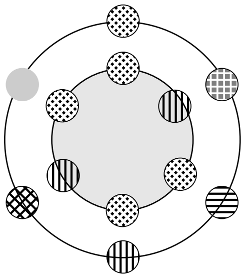


FIG. I.5. Une solution avec un cercle extérieur composé de 6 couleurs.

– Oui pour $P_{2,4}$ et $P_{2,6}$;

Cela nous amène à conjecturer qu'il existe une solution si et seulement si le couleur sur le cercle extérieur est pair supérieur à 4.

Dans cet exemple, nous avons vu comment nous pouvions rencontrer des cas particuliers en expérimentant sur un problème de recherche de solutions dont l'une des instances est un ensemble de cardinalité supérieure à 2. Nous avons vu que nous avons résolu certains de ces problèmes, essentiellement ceux qui étaient triviaux, mais que nous nous sommes contenté de conjectures pour les cas plus complexes, car notre objectif n'est pas la résolution de ces cas mais du problème plus général.[11]

4.3. Expérimenter permet de découvrir des arguments locaux. L'exemple précédent montre aussi qu'en essayant de construire une solution à $P_{2,2}$ et à $P_{2,3}$, nous avons construit des arguments locaux qui nous ont permis de faire la preuve de la non-existance d'une solution. De ce fait, ici, l'expérimentation nous a amené à effectuer une tentative de preuve de l'impossibilité de la solution en nous donnant l'outil de la preuve, la construction par forçage.

4.4. Expérimenter, c'est faire des choix. A chaque fois que nous expérimentons, nous effectuons des choix sur différents types de variables :

- du problème. En effet, si nous nous intéressons au problème des caisses de dynamite sur un rectangle quelconque. Lorsque nous expérimentons, il est possible soit de choisir un rectangle de dimensions particulières sur lequel expérimenter, soit d'essayer d'expérimenter sur un rectangle générique[12] ou pour le problème de la roue au couleur, du nombre de couleur sur le cercle exérieur. Cela nécessite donc de fixer les variables du problème. Concernant le choix de l'objet sur lequel expérimenter, PERRIN (2007) met en avant le premier exemple non-trivial, il souligne aussi que la trivialité est dépendante de l'expérimentateur.

[11]Nous verrons plus tard que la conjecture est incorrecte mais que les réponses que nous avons données aux cas particuliers sont justes.

[12]Le rectangle particulier et le rectangle générique ne sont pas au même niveau, expérimenter sur le rectangle générique implique que ce que nous testions ou essayions de voir soit vue de manière structurel, c'est-à-dire en ne faisant intervenir que les propriétés d'un rectangle quelconque.

– de la stratégie employée. Il est, en effet, possible que la stratégie soit dépendante de certaines variables, il nous faudra alors fixer les paramètres de la stratégie pour expérimenter. Par exemple, pour la situation des caisses de dynamites, imaginons que nous essayons de construire une solution en plaçant une caisse sur chaque diagonale de la figure III.7 alors nous avons plusieurs possibilités pour placer les caisses qui ne sont pas sur les diagonales coins.

Les expérimentations en mathématiques peuvent être conduites en utilisant divers types d'outils : logiciels informatiques, matériaux concrets, papier-crayon... Nous n'allons pas développer cela plus en détail dans cette section, car ce qui nous intéresse est le processus d'expérimenter, que nous considérons comme « transversal » à tous ces outils. Nous traiterons dans la section *les mathématiques expérimentales*, des différences entre ces outils. Toutefois, nous pouvons rajouter qu'expérimenter c'est aussi choisir l'outil que nous allons utiliser et effectuer les réglages de cet outil pour produire le fait qui nous intéresse.

5. Tentative de preuve

Nous avons vu que l'expérimentation peut nous amener à effectuer des tentatives de preuves par la découverte d'arguments locaux et par l'étude de cas particuliers menant à la production de conjectures.

Cette action n'est toutefois pas sans lien avec l'expérimentation à travers les nouveaux problèmes qu'elle est susceptible de générer, notamment à travers les résultats intermédiaires (lemmes) qui peuvent apparaître et nous amener à expérimenter et à effectuer des preuves. Par exemple, pour le jeu du set, si nous cherchons à montrer qu'il n'existe pas de jeu à X cartes sans set, nous pouvons dénombrer le nombre de jeu de X cartes contenant un set et le comparer avec le nombre de jeu de X cartes total. Cela nous amène à essayer de résoudre deux nouveaux problèmes : dénombrer le nombre de jeu avec un set et dénombrer le nombre total de jeu. Ces nouveaux problèmes peuvent alors devenir des objectifs locaux que nous pouvons essayer de traiter en expérimentant.

6. Conclusion.

Nous tenons à mettre en avant la démarche expérimentale en mathématiques comme un processus non-ordonné où plusieurs types d'actions interagisent entre elles. Nous considérons que ce processus est plus une attitude pertinente à adopter face un problème, qu'une démarche protocolaire à suivre étape par étape. De ce fait, nous pouvons considérer que la démarche expérimentale en mathématique est proche de celle des sciences expérimentales à travers le jeu d'interaction entre questionnements, expérimentations et validations. Nous récapitulons cette section à travers le schéma de la figure XIII.1 qui prend en compte les types d'actions et les intéractions entre ces actions.

En particulier, ce schéma nous permet de mentionner que nous allons principalement nous intéresser aux interactions faisant intervenir l'action d'expérimenter.

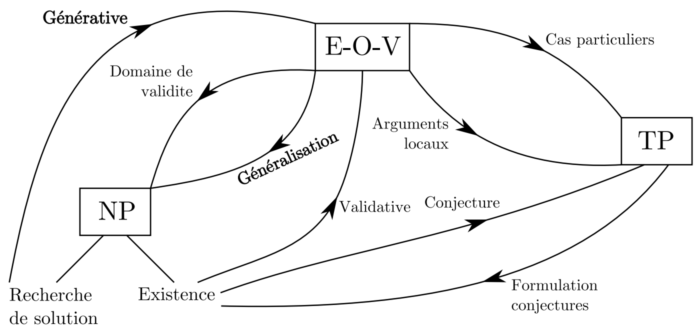


FIG. I.6. Schéma récapitulatif.

D'autre part, ce schéma peut porter à confusion en faisant croire que nous pouvons pratiquer la démarche expérimentale sans expérimenter. Ce n'est pas le cas, nous considérons que la pratique de la démarche expérimentale passe obligatoirement par l'action d'expérimenter.

Maintenant que nous avons exposé notre point de vue sur la démarche expérimentale en mathématiques, nous le situerons par rapport aux termes, démarche scientifique, démarche de recherche et démarche d'investigation.

6.1. Différentes « démarches ». Les expressions suivantes sont souvent utilisées : *démarche scientifique*, *démarche de recherche*, *démarche d'investigation* et *démarche expérimentale*. Nous allons commencer par expliquer le sens que nous attribuons à ces différentes expressions.

Nous considérons que la démarche scientifique est l'ensemble des moyens qu'utilisent les scientifiques[13] pour résoudre les problèmes qu'ils se posent. Par exemple, la recherche bibliographique est, pour nous, un élément de la démarche scientifique.

Selon nous, la démarche expérimentale en mathématiques correspond au côté expérimental de la démarche scientifique en mathématiques. Par exemple, nous considérons que la recherche bibliographique n'est pas un élément de la démarche expérimentale et que la démarche expérimentale en mathématiques est un moyen de construire de nouvelles connaissances de manière « active ». Nous le voyons comme un sous-ensemble de la démarche scientifique.

Quant au terme démarche d'investigation, terme qui est apparu dans les programmes du collège de 2008 (*B. O. hors série n°6 28 août 2008*), nous nous référerons au sens qui lui est donné dans ces programmes. Pour une étude plus détaillé du terme investigation, nous pourrons consulter (MATHERON, 2010). Dans le programme de mathématiques du collège de 2008 (*B. O. hors série n°6 28 août 2008*), la démarche d'investigation « privilégie la construction du savoir par l'élève et » s'appuie sur « la résolution de problèmes (en mathématiques) ». Le programme donne un canevas possible de séquences découpées en moments :

(1) Le choix d'une situation problème ;
(2) L'appropriation du problème par les élèves ;

[13] tous les scientifiques

(3) La formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles ;
(4) L'investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves ;
(5) L'échange argumenté autour des propositions élaborées ;
(6) L'acquisition et la structuration des connaissances ;
(7) La mobilisation des connaissances.

Le programme stipule qu'il est possible de faire des « aller-retour » entre ces différents moments. De plus, ce canevas est possible pour la démarche d'investigation en physique, biologie ou mathématiques même s'il doit « être aménagé pour chaque discipline ».

La démarche d'investigation est donc un processus de nature didactique puisqu'il prévoit l'acquisition, la structuration et la mobilisation des nouvelles connaissances acquises. La démarche d'investigation est donc un processus didactique d'acquisition de connaissances. De ce fait, il est de nature différente par rapport à la démarche expérimentale, qui est un savoir-faire utile pour la résolution de problèmes.

Toutefois, la pratique de la démarche expérimentale pourrait être possible au cours d'une démarche d'investigation, mais elle ne semble pas être prise en compte par les auteurs du programme, car dans une démarche d'investigation, il n'y a qu'un seul problème à résoudre (« l'investigation ou la résolution du problème [. . .] »).

Nous finissons cette section en présentant différents outils utilisables pour expérimenter en mathématiques.

7. Outils experimentaux

Nous allons, dans cette sous-section, décrire différents outils qui peuvent être utilisés pour expérimenter.

Dans sa thèse, Dahan (2005) différencie les expériences utilisant papier-crayon et nouvelles technologies. Concernant l'activité de recherche papier-crayon, il dit qu'entre l'expérimentation que nous effectuons manuellement et notre cerveau, « , ill n'y a comme intermédiaire que la machine humaine », c'est-à-dire nous. Il dit que « l'activité intellectuelle de recherche se développe dans un va-et-vient entre deux pôles : entre le signifié écrit ou déclaré et le signifiant qui n'est autre que l'énonciation par la machine humaine d'un état de perception du problème par le cerveau. ». Cela entraîne une modification constante des deux pôles « jusqu'à une stabilisation complète des invariants ou des relations cherchées dans le problème traité. ». L'environnement papier-crayon est donc seulement régie par une interaction entre l'observation de ce que nous faisons sur notre « feuille de papier » que nous pouvons considérer comme l'expérimentation et la perception qui en découle dans notre « tête », qui est l'interprétation de ces expériences à travers un modèle.

Pour l'expérimentation médiée technologiquement, il y a, contrairement à l'activité papier crayon, un intermédiaire qui fait son apparition, cela peut-être une calculette ou un ordinateur, avec lequel nous pouvons communiquer. Cet objet peut alors nous donner des informations que nous devrons décoder et interpréter en fonctions de nos connaissances. Dahan (ibid., p. 27) dit, de plus, qu'« utiliser l'instrument technologique médian revient donc à accéder à une modélisation du cadre dans lequel l'instrument permet de travailler. ». L'utilisation d'un instrument technologique impose un modèle dans lequel travailler.

Nous remarquerons aussi que l'expérimentation mentale – où nous imaginons mentalement l'expérience – est une expérimentation papier crayon. Cependant une question se pose concernant les situations qui prévoient l'utilisation d'un support matériel non technologique *est-ce que nous pouvons classer ces situations dans les catégories définies précédemment ?*. Si nous considérons le support matériel non technologique[14]comme un outil qui va permettre de résoudre le problème, alors nous sommes en présence d'un médian selon la définition qu'en donne Dahan (ibid.) (« Si ce chercheur utilise cet instrument pour résoudre un problème, nous parlerons de cet instrument comme un médian »). Et alors, dans ce cas, nous pouvons parler d'expérimentation médiée matériellement non technologique. Comment la caractériser ? Nous pouvons la décrire comme mettant en jeu une interaction entre une personne et un support qui nous renvoie des informations (des faits) en fonction des manipulations que nous effectuons sur lui, manipulations qui sont limitées à celles autorisées par le support matériel.

Pour observer une différence entre le support matériel non technologique et technologique, il nous faut donner des définitions plus précises. Il nous semble que ce qui donne son caractère technologique à un support est le fait qu'il effectue, sur notre demande, des opérations comme un calcul ou le traçage d'une droite passant par un point. Le support matériel non technologique quant à lui ne peut effectuer d'opérations. Au niveau de la rapidité d'expérimentation, nous pouvons donc dire que le support matériel non technologique permet d'accélérer le délai entre deux expérimentations alors que le support informatique permet aussi d'accélérer l'expérimentation en la prenant en partie à sa charge.

Nous pouvons donc distinguer trois types de médian expérimentaux : papier-crayon, technologique et matériel non technologique. Cela pose la question de la validation du fait renvoyé par chacun de ces médians. En particulier pour les médians technologiques, pour lesquels il est nécessaire de posséder des connaissances, non seulement pour faire fonctionner le médian, mais aussi pour valider le produit des stratégies.

[14]Il semble que les expérimentations médiées matériellement soient principalement utilisées en mathématiques à des fins didactiques.

CHAPITRE II

La notion de concept-problème

1. Une formalisation de la notion de conception sur un problème

Dans cette section, nous allons donner notre point de vue sur la conception sur un problème. Comme mentionné dans le chapitre précédent, il nous a semblé pertinent de développer cette notion afin d'étudier les intéractions qu'il pouvait y avoir entre les différents éléments de notre modèle de démarche expérimentale. Dans cette section, nous présentons une définition de concept-problème qui est une spécification, aux problèmes, de celle donnée par VERGNAUD (1990) sur les concepts mathématiques.

1.1. Une définition. D'après ARTIGUE (1990, p. 270), au cours d'un exposé donné lors de la deuxième école d'été de didactique, VERGNAUD a défini la notion de *concept mathématique*concept mathematique@concept mathématique comme un triplet (S, I, $\mathcal{S}$) où :

- S : ensemble des situations qui donnent du sens au concept ;
- I : ensemble des invariants opératoires associés au concept ;
- $\mathcal{S}$: ensemble des signifiants permettant de représenter le concept, ses propriétés et les situations qu'il permet d'appréhender.

Et il rajoute que la *conception* est l'analogue sujet, à un moment donné, du concept. Pour définir la notion de concept-problème, nous spécifions la définition donnée par VERGNAUD.

Nous considérons que *le concept-problème sur un problème P*concept problème@concept-problème est composée des éléments suivants :

- l'ensemble des problèmes $\mathcal{P}$ qui donnent du sens à P, nous parlerons d'*espace problème* ;
- l'ensemble des invariants opératoires qui correspondent aux connaissances sur lesquelles repose l'action du sujet en situation de résolution d'un élément de $\mathcal{P}$;
- l'ensemble des représentations $\mathcal{R}$ que l'on peut associer aux éléments de $\mathcal{P}$.

En référence à VERGNAUD, nous parlerons de *conception sur un problème* lorsque nous nous situerons du côté du sujet.

Nous considérons qu'un problème *donne du sens* à P lorsque nous établissons une relation entre ce problème et P (la relation n'est pas nécessairement binaire). Nous avons choisi de formaliser la notion de *donner du sens* à travers des relations opérationnelles pour la résolution de problèmes, car nous cherchons à établir une conception sur un problème liée à sa résolution. Par exemple, une relation que nous ne prendrons pas en compte est la suivante : être dans la liste des 23 problèmes d'Hilbert, car elle ne nous semble pas pertinente pour la résolution de problème.

Nous avons identifié différents types de relations possibles, par exemple, les relations binaires suivantes par rapport à un problème P :
- une relation suffisante : la résolution de P_1 entraîne la résolution de P, nous la notons $P_1 \rightarrow P$;
- une relation nécessaire : la résolution de P entraîne la résolution de P_2, nous la notons $P_2 \leftarrow P$;

Nous donnons maintenant des exemples de telles relations.

Exemple II.1 (Relation binaire). Considérons le problème de la chasse à la bête, que nous appelons P_{cb}, et considérons les deux problèmes suivants :
- P_- déterminer un minorant à l'optimum de P_{cb} ;
- P_+ déterminer un majorant à l'optimum de P_{cb}.

Alors nous avons les relations suivantes : $P_{\mathrm{cb}} \rightarrow P_-$ et $P_{\mathrm{cb}} \rightarrow P_+$.

Les relations ne sont toutefois pas, exclusivement, de nature binaire. Des problèmes peuvent entretenir une relation avec le problème à travers un autre problème, en voici un exemple :

Exemple II.2 (Relation ternaire). Nous reprenons les notations de l'exemple précédent, nous avons vu que nous avions les relations suivantes : $P_{\mathrm{cb}} \rightarrow P_-$ et $P_{\mathrm{cb}} \rightarrow P_+$. Nous pouvons établir une nouvelle relation entre P_{cb}, P_+ et P_-, en effet, lorsque nous trouvons une solution à P_+ qui est égale à celle de P_- nous avons résolu P_{cb}, nous avons ainsi une relation entre P_+, P_- et P, nous la notons : $(P_+, P_-) \rightarrow P_{\mathrm{cb}}$.

D'autre part, nous sommes dans le cas où $P_{\mathrm{cb}} \rightarrow P_-$ et $P_{\mathrm{cb}} \rightarrow P_+$, il y a donc équivalence, ce que nous notons $(P_+, P_-) \leftrightarrow P_{\mathrm{cb}}$.

Cet exemple est un cas particulier dans lequel P_{cb} entretient une relation suffisante avec les 2 problèmes mentionnés. Cela n'est pas toujours le cas, nous présentons dans ce qui suit un exemple pour lequel nous pensons[1]que la résolution du problème initial n'entraîne pas la résolution des problèmes intermédiaires.

Exemple II.3 (Relation ternaire non équivalente). Considérons le problème de la chasse à la bête pour une bête et un jardin carré de côté de longueur 4. La configuration de la figure II.1 est une solution admissible que nous qualifions de *localement maximale*, car quel que soit le piège que nous supprimons, la bête peut se poser. Une solution est une solution admissible localement maximale, de ce fait, des problèmes qui nous permettent de résoudre la chasse à la bête sont les suivants :
- P_{max} : Déterminer l'ensemble des solutions localement maximales ;
- P_{card} : Déterminer le cardinal le plus grand d'une solution localement maximale.

La résolution de ces problèmes entraînent la résolution de P_{cb}. Cependant, connaître l'optimum de P_{cb} ne permet pas de résoudre P_{max}.

[1] Nous utilisons le terme penser, car s'il est possible de montrer que la résolution d'un problème va entraîner la résolution d'un autre problème, nous ne savons pas montrer que la résolution d'un problème ne permet pas la résolution d'un autre problème. Nous ne pouvons que croire que la résolution d'un problème n'entraîne pas la résolution d'un autre, généralement, car nous ne savons pas comment utiliser le premier pour résoudre le second.

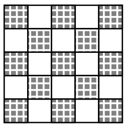


FIG. II.1. Une solution localement maximale.

Nous pouvons aussi avoir des relations de nature fraternelle, c'est-à-dire, des problèmes qui sont des cas particuliers d'un même problème. Voici un exemple :

EXEMPLE II.4 (Relation fraternelle). Considérons les deux problèmes suivants :
- $P_{\square\square\square}$: le problème avec une bête est en forme de $\square\square\square$;
- $P_{\boxplus}$: le problème avec une bête en forme de $\boxplus$.

Ce sont des cas particuliers de P_{cb}. Le fait que 2 problèmes soient fraternels est pertinent au niveau de la résolution, car il est possible que ces problèmes puissent se résoudre en utilisant une même preuve.

Nous pourrions aussi envisager une relation représentation, pour laquelle le lien entre les problèmes est que les objets sur lesquels portent le problème peuvent se représenter de manière identique ; toutefois, établir ce type de représentation sans construire de relation entre les questions ne permet pas de fabriquer un lien pertinent pour la résolution de problème.

D'autre part, nous considérons que tout changement de représentation s'accompagne d'un changement de problème (qui peut être équivalent). Cela peut se rattacher à l'aspect modélisation de l'activité de résolution de problème mathématiques. De ce fait, les relations entre les problèmes prennent aussi en compte des outils de modélisation permettant de passer d'une représentation à une autre. Voici un exemple illustrant le lien entre représentation et problème :

EXEMPLE II.5 (Représentation/problème). Cet exemple porte sur le jeu du set à 3 lignes, set de taille 3 et 3 couleurs. Pour résoudre ce problème, nous pouvons essayer de « voir » le problème autrement. Pour cela, nous pouvons assigner à chacune des cartes un point de l'espace en associant la couleur de la i-ème ligne à la i-ème coordonée. Il nous faut aussi associer à chaque couleur un chiffre. Par exemple en associant rouge à 0, bleu à 1 et vert à 2 alors la carte de la figure II.2 devient le point de coordonées $(1, 0, 2)$.

FIG. II.2. Une carte de coordonnée $(1, 0, 2)$.

En utilisant cette représentation les cartes deviennent donc des points de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$, l'ensemble des cartes peut donc être représenté par la figure II.3[2].

Dans cette nouvelle représentation, les sets deviennent des triplets de points alignés verticalement, horizontalement et diagonalement. Le problème

[2]Nous avons tracées ces arrêtes pour faire apparaître la forme de cube, elles permettent aussi de faire apparaître certains plans.

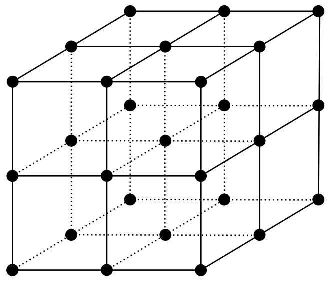


FIG. II.3. Une représentation géométrique des cartes.

change et devient alors le problème suivant : quel est le plus grand ensemble de points qui ne contient pas 3 points alignés horizontalement, verticalement et diagonalement ? Nous avons donc, ici, la même question que concernant le problème initial mais elle ne porte pas sur les même objets, puisque la représentation géométrique fait apparaître les objets droites ou encore hypercubes.

Une question qui se pose alors est de savoir si le nouveau problème est équivalent au problème initial. Pour répondre à cette question positivement nous devons nous assurer que trouver un jeu sans set est équivalent à trouver un ensemble de points ne contenant pas 3 points alignés. Ce qui est bien le cas ici. La relation entre les deux problèmes est alors la suivante : résoudre le problème du set pour des sets de taille 3 avec 3 couleurs est équivalent à résoudre le problème de l'alignements de points dans des hypercubes.

Cet exemple illustre le lien qu'il peut y avoir entre représentation et problèmes. C'est ce lien qui nous semble être caractéristique de la modélisation mathématique. Nous définissons ainsi la *modélisation mathématique* comme l'action de construire de nouvelles représentations/problèmes.

Dans cet exemple, nous tombons sur un cas où les deux problèmes sont équivalents. Ce n'est pas tout le temps le cas, en voici un exemple :

EXEMPLE II.6 (Représentations/problèmes non-équivalents). Considérons P_{cb} et la représentation de la figure II.4 où le chiffre de chaque case représente le nombre de positions qu'un ▭ peut prendre lorsqu'il recouvre cette case. Le problème P_{rec} associé à cette représentation est le suivant : déterminer des configurations qui minimisent le nombre de positions éliminées, tout en éliminant, au moins, le nombre total de bête (changement d'objets mais pas de question).

2	3	4	4	4	3	2
3	4	5	5	5	4	3
3	4	5	5	5	4	3
2	3	4	4	4	3	2

FIG. II.4. Représentation par recouvrement.

Ce problème met en jeu une nouvelle optimalité basée sur le nombre de bêtes éliminées. Le cas idéal étant de trouver une configuration qui élimine exactement le nombre de positions total qu'une bête peut prendre.

La relation qu'entretiennent P_{rec} et P_{cb} est la suivante : une solution admissible de P_{rec} est une solution admissible de P_{cb} et réciproquement une solution admissible de P_{cb} est une solution admissible de P_{rec}, toutefois, une solution de P_{rec} n'est pas nécessairement une solution de P_{cb} (voir figure II.5) et une solution de P_{cb}, n'est pas nécessairement une solution pour P_{rec}[3](voir figure II.6).

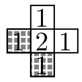


FIG. II.5. $P_{\text{rec}} \nrightarrow P_{\text{cb}}$.

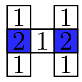


FIG. II.6. $P_{\text{cb}} \nrightarrow P_{\text{rec}}$.

Cependant, cette représentation peut être utilisée pour résoudre le problème P_{-} par l'étude du problème suivant : déterminer un minorant au nombre de pièges qui éliminent le nombre total de positions qu'une bête peut prendre. Pour cela, il nous faut résoudre le problème suivant : quel est le nombre de positions total qu'une bête peut prendre ? Nous pouvons ensuite effectuer des raisonnements analogues à celui-ci : pour le rectangle de l'exemple de la figure II.4 (la bête est un), nous pouvons voir qu'un piège élimine au plus 5 positions, le nombre total de position étant 34, il faut au moins 7 pièges pour éliminer les 34 positions. Donc il faut au moins 7 pièges pour empêcher la bête de se poser dans le jardin.

Comme nous l'avons vu dans les exemples précédents, l'apparition d'une nouvelle représentation entraîne un changement de problème. Elle peut aussi permettre la généralisation du problème initiale sous une nouvelle forme, en voici un exemple :

EXEMPLE II.7. Le problème du jeu du set admet une représentation géométrique. Comme nous l'avons vu, le problème géométrique a pour origine un changement d'objets par rapport au problème initial. Dans l'exemple II.5, les objets que nous avons mentionnés sont isomorphes à ceux du problème initial. En particulier, l'ensemble des cartes est représenté par un hypercube.
L

e point de vue géométrique permet de dépasser ces limitations en prenant comme objet, par exemple, des tores, des cylindres.... Le changement de représentation peut donc amener à construire, non seulement un nouveau problème, mais toute une nouvelle classe de problèmes.

Enfin, nous considérons que toute représentation/problème est associée à des invariants opératoires qui comportent les éléments suivants : axiomes, propositions vraies/fausses/plausibles [4], éléments de validation et les exemples/contre-exemples ainsi que des concepts. Ces éléments forment un sous-ensemble des invariants opératoires sur lesquels reposent notre action lors de la résolution de P. En particulier, nous utilisons ces éléments théoriques pour valider les résultats que nous émettons. Voici un exemple d'invariants opératoires associés à une représentation :

[3]En utilisant une représentation en programmation linéaire matricielle de ces problèmes, nous pouvons nous rendre compte que ces problèmes n'ont pas la même fonction à optimiser.

EXEMPLE II.8 (Invariants opératoires). Considérons P_{cb} et la représentation du problème en terme de programmation linéaire en nombre entier sous forme matricielle (pas de changement de question mais changement d'objets). Par exemple, pour P_{cb} sur un rectangle de dimensions 3×2 avec une bête de la forme  , il existe une bijection entre les solutions admissibles de ce problème et les solutions du problème suivant : résoudre l'équation (E) d'inconnue $(x_i)_{1\leq i\leq 12}$, appartenant à $\{0,1\}^{12}$, suivante :

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\\ x_8\\ x_9\\ x_{10}\\ x_{11}\\ x_{12} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}$$

Une bijection est la suivante :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

FIG. II.7. Bijection entre les solutions.

Le problème équivalent est alors de déterminer le minimum de la fonction f sur l'ensemble des solutions de (E) avec :

$$f\left((x_1,\ldots,x_{12})\right) = \sum_{i=1}^{12} x_i$$

En programmation linéaire, ce problème est appelé le problème *primal*.

Cette représentation nous amène aussi à nous poser le problème *dual*, qui est le suivant : déterminer le maximum de la fonction f^* sur l'ensemble des solutions de (E^*), où (E^*) est l'équation d'inconnue $(y_i)_{1\leq i\leq 10} \in \{0,1\}^{10}$ suivante :

$$
{}^t\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5\\ y_6\\ y_7\\ y_8\\ y_9\\ y_{10} \end{pmatrix}
\leq
\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}
$$

Et f^* la fonction définie par :

$$f^*\left((y_1, \ldots, y_{10})\right) = \sum_{i=1}^{10} y_i$$

L'étude de ce nouveau problème pour résoudre le problème primal se justifie par le fait que nous avons le théorème suivant : le cardinal d'une solution admissible de E^* est un minorant à l'optimum de E. Ce théorème fait donc partie de nos invariants opératoires en permettant de relier E^* à E. D'autre part, nous avons connaissance d'exemples de problèmes[5]dans lesquels nous avons l'égalité, ces exemples sont aussi des invariants opératoires, qui appuient l'utilisation du problème dual pour résoudre le problème de la chasse de la bête.

Cette nouvelle représentation amène de nouveaux objets comme des matrices, des inéquations, des fonctions... D'autre part, elle amène de nouveaux invariants opératoires liés à ces objets : opérations élémentaires sur les matrices, algorithme du simplexe, pivot de Gauss, transformation d'équations... Nous pouvons aussi y retrouver la conception suivante : les solutions sont les parties entières des solutions du système réel (c'est-à-dire où l'inconnue est un vecteur réel).

D'autre part, en reconnaissant que ce problème est un problème de programmation linéaire en nombres entiers, qui est un problème NP-complet, cela pose un nouveau problème, celui de la complexité de P_{cb}. Cela va ainsi mettre en jeu de nouveaux invariants opératoires issus de la théorie de la complexité algorithmique.

Enfin, cette représentation amène aussi d'autres représentations, par exemple géométrique avec l'apparition d'objets comme des hyperplans, des polyèdres convexes... La question du problème est identique, par contre les objets sur lequels nous travaillons sont différents, ce qui va amener à utiliser d'autres résultats plus géométriques.

Cet exemple nous permet d'identifier deux types d'invariants opératoires, ceux qui vont appuyer les changements de problèmes et de représentations

[5]D'ailleurs, ici, plus que des exemples, nous pourrions dire que nous avons connaissance du théorème suivant : il existe des problèmes pour lesquels l'optimum du dual est égal à l'optimum du primal. C'est par exemple le cas pour cet exemple.

et ceux qui vont soutenir le travail de résolution à l'intérieur d'une représentation. En particulier, certains de ces invariants opératoires peuvent être des conceptions, en voici un nouvel exemple :

Exemple II.9 (Local $\Rightarrow$ global). Nous avons vu précédemment (voir exemple II.3 page 22) que pour P_{cb}, une solution est une solution admissible localement maximale. De ce fait, une conception possible est la suivante : une solution admissible localement maximale est une solution. Cette conception est, généralement, fausse.

D'autre part, pour construire une solution nous pouvons utiliser la stratégie suivante :

– Découper le jardin en sous-jardins,
– Mettre le nombre minimum de pièges sur chacun des sous-jardins.

Cette stratégie consiste donc à découper le jardin en sous-jardins sur lesquels nous plaçons le nombre de pièges minimum. La conception qu'il peut y avoir derrière cette stratégie est la suivante : si la configuration de piège est minimum sur tous sous-jardins alors elle est minimum pour le jardin.

Nous regroupons ces 2 conceptions sous l'appellation : local $\Rightarrow$ global. En effet, il y a derrière ces conceptions l'idée qu'une optimalité locale entraîne une optimalité globale.

D'autres part, les éléments d'une conception sur un problème, en particulier les problèmes/représentations n'ont pas tous le même « poids » . En effet, nous pouvons préférer résoudre un problème en utilisant telle piste de recherche, telle représentation plutôt qu'une autre... Les raisons peuvent être de nature esthétique ou de nature plus pragmatique comme la difficulté estimée des problèmes à résoudre ou encore la pertinence du problème pour la résolution.

Exemple II.10 (Poids). Nous avons vu que le problème de la chasse à la bête est un problème de programmation linéaire en nombres entiers que nous pouvons représenter sous forme matricielle. Une représentation combinatoire du problème est aussi possible. Pour le problème dual, c'est la suivante : quel est le nombre maximum de $\square\!\square$ disjoints qu'on peut placer dans un jardin ? Par rapport à la version matricielle, ici, nous avons changé les objets.

Nous préférons résoudre le problème sous sa forme combinatoire, en cherchant le nombre maximum de $\square\!\square$ que l'on peut placer dans le jardin plutôt que de chercher à optimiser une fonction (même si les problèmes sont équivalents). De ce fait, ici, nous donnons plus de poid à la représentation combinatoire qu'à la représentation matricielle.

D'autre part, au niveau expérimental, nous pouvons préférer utiliser une représentation plutôt qu'une autre, en voici un exemple :

Exemple II.11 (Poids expérimental). Nous avons vu dans l'exemple II.5 page 23, que le problème du jeu du set pouvait être représenté géométriquement par un changement d'objets. Un des apports de cette représentation peut se voir au niveau expérimental où l'ensemble des cartes est « dessinable » quand le nombre de lignes est inférieure à trois. Il est alors plus facile de vérifier qu'un ensemble de points ne contient pas de droites que de vérifier qu'un ensemble de cartes ne contient pas de sets, car nous pouvons nous aider des symétries de l'objet géométrique.

Toutefois, lorsque le nombre de lignes est supérieur à 4, nous travaillons avec des objets géométriques qui sont de dimension supérieure à 4 ce qui rend cette représentation moins opérationnelle expérimentalement. Ceci n'est pas le cas de la représentation initiale puisqu'elle nous permet de représenter des jeux de cartes avec n'importe quel nombre de lignes sans problème. Chaque représentation a donc des avantages et des inconvénients. De ce fait, la résolution d'un problème n'implique pas, généralement, l'utilisation d'une seule représentation mais de plusieurs. Ici, par exemple, nous pouvons utiliser la représentation géométrique pour déterminer un jeu sans set et la représentation analytique (représenter les couleurs par des variables) pour prouver qu'il est maximum.

Concernant le problème de la chasse à la bête, une conception sur ce problème possible est schématisée avec la figure II.8 où nous reprenons les éléments que nous avons développés dans les exemples précédents.

Nous allons maintenant nous attarder sur un aspect de la conception sur un problème, qui concerne les invariants opératoires de nature mathématique, que l'on peut associer à la validation. Nous prêtons une attention particulière à la validation théorique[6]des résultats, car l'objectif de la démarche n'est pas seulement la découverte de la solution du problème mais aussi la preuve de celui-ci.

1.2. Validation théorique. En mathématiques, les preuves sont dîtes de nature déductive, car elles consistent en des suites d'inférences déductives. À la base de ces suites d'inférences déductives, nous retrouvons des axiomes que nous pouvons voir comme des propositions que nous admettons comme vraies. Effectuer la preuve d'un théorème consiste donc à effectuer une suite d'inférence déductives jusqu'à obtenir le résultat souhaité. Cependant, comme nous l'avons déjà un peu vu et comme nous le verrons plus tard, l'activité de preuve ne consiste pas seulement en un jeu sur des inférences mais est une activité beaucoup plus complexe qu'il est difficile de décrire pouvant faire intervenir des processus de modélisation, de l'expérimental, des nouveaux problèmes...

Dans la sous-sous-section suivante, nous prenons en compte l'aspect déductif de la preuve à travers les axiomes et les théorèmes. Cette sous-sous-section reprend le concept de théorie locale dû à Durand-Guerrier (2005).

1.2.1. *Axiome-théorème.* Dans (Durand-Guerrier, 2010), l'auteur caractérise la démarche expérimentale en mathématiques de la manière suivante :

> Ce qui caractérise la dimension expérimentale en mathématiques, c'est le va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets.

[6]Nous parlons de validation théorique des résultats en opposition avec ce que nous pourrions appeler une validation expérimentale basée sur la répétition d'un même fait.

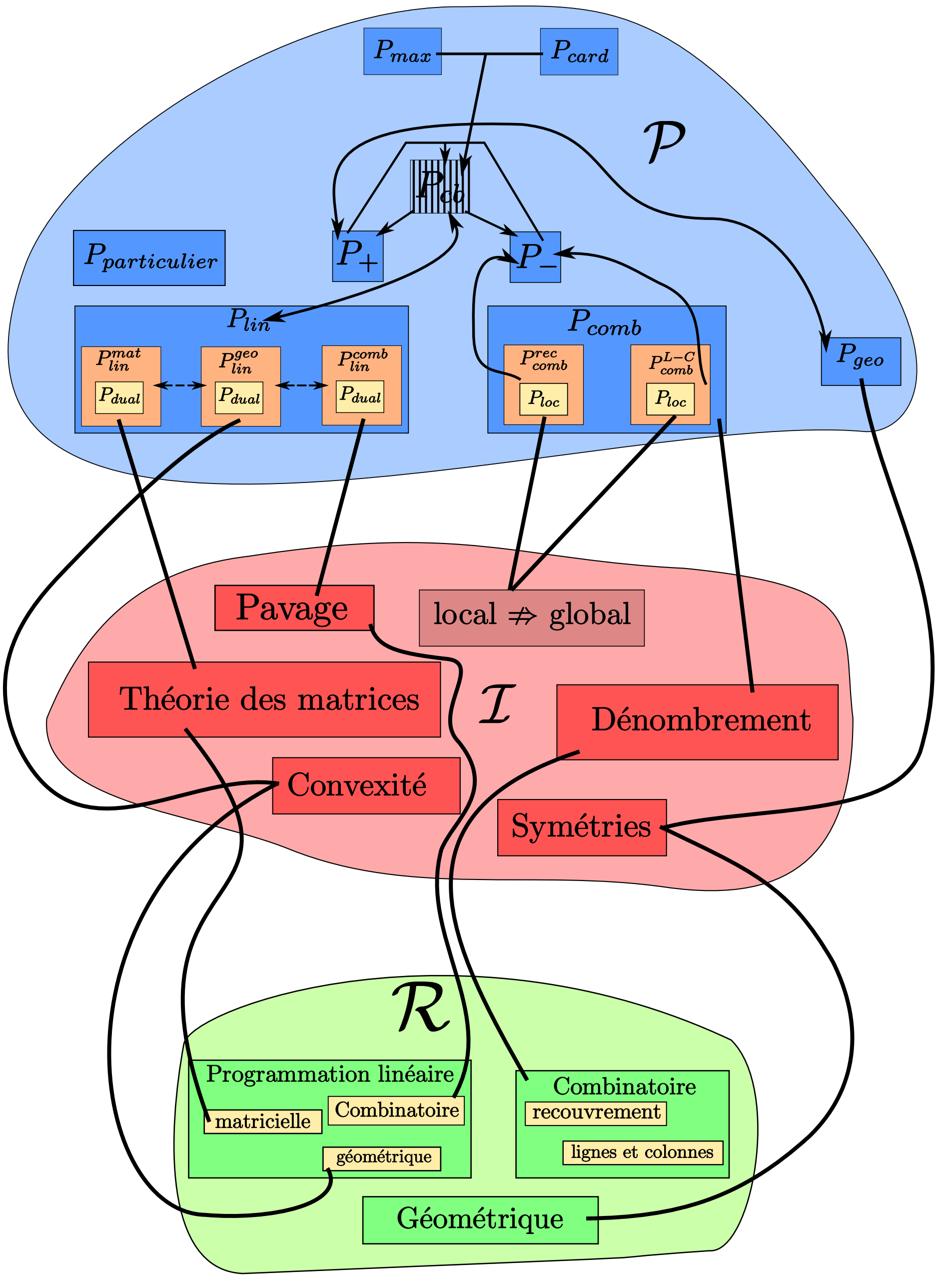


FIG. II.8. Une conception sur la chasse à la bête.

DURAND-GUERRIER (2005, p. 19) définit une théorie locale comme un ensemble :

> Qui comporte les définitions, les énoncés théoriques assumés (axiomes), et certaines propositions considérées comme vraies, découlant ou non des axiomes.

L'auteur utilise ce concept pour modéliser l'activité d'élèves essayant de résoudre un problème. Il nous semble que ce concept de théorie locale fait partie intégrante de l'aspect théorique de la conception à travers les axiomes et les résultats mathématiques prouvés ou non. Pour l'exemple III.1 page 39, un axiome peut être : « deux caisses ne peuvent pas se trouver sur la même diagonale ». Cet axiome est l'une des contraintes du problème, nous l'avons utilisé pour déduire d'autres résultats comme des minorants et des majorants.

Nous retrouvons aussi ce point de vue sur la construction d'une théorie par la mise en place d'axiome chez ARNOLD (1998) :

> En mathématiques a été mise au point une technique particulière [pour vérifier les conjectures] qui peut parfois être utile pour les applications pratiques mais qui peut nous induire en erreur. Elle s'appelle la *modélisation*. Pour la construction d'un modèle on fait l'idéalisation suivante : certains faits, connus seulement avec un certain degré d'approximation ou de probabilités, sont considérés comme absolument vrais et sont pris comme « axiomes ». La signification de cet « absolu » est exactement que nous nous permettons d'agir avec ces « faits » selon les règles de la logique formelle, en appelant « Théorèmes » les déductions que nous en tirons.

Cette vision de la modélisation n'est pas incompatible avec la notre, dans le sens où sa modélisation correspond à l'action de représenter un objet par ses régularités ce qui amène alors à formuler le problème dans un nouveau cadre théorique.

Remarque : Remarquons que les axiomes des problèmes que nous avons proposés sont, initialement, les contraintes du problème. Ce sont les contraintes du problèmes qui vont servir de bases aux déductions que nous allons effectuer.

Notre point de vue sur l'aspect validation théorique d'une conception comporte cette théorie déductive qui englobe des objets mathématiques notionnels, des résultats mathématiques, des éléments de validation. Nous allons dans ce qui suit décrire ce que nous appelons *éléments de validation.*

1.2.2. *Éléments de validation.* Nous considérons que les éléments de validation sont composés de deux catégories d'objets : des types de preuves et des arguments. Les types de preuves peuvent être : exhaustivité des cas, récurrence, preuve par contre-exemple... Les arguments sont des propositions. Donnons un exemple :

EXEMPLE II.12. Pour le problème de la chasse à la bête, imaginons que nous essayons de résoudre ce problème sur un carré quelconque avec une bête . C'est un problème de recherche de solution. Nous commençons par chercher sur un carré de côté 2, nous construisons une solution à 3 (voir figure II.9), nous pouvons alors, facilement, montrer par une preuve par exhaustivité des cas que nous ne pouvons pas faire mieux que 3. Nous avons alors utilisé le type de preuve : exhaustivité des cas.

Sur un carré de côté 3, nous construisons la solution de la figure II.10 et nous prouvons par une preuve par exhaustivité des cas que cette solution est minimum. Nous continuons avec des carrés plus grands, par exemple jusqu'au carré de taille 7. En étudiant le ratio nombre de bêtes sur le nombre de cases des exemples précédents, nous nous apercevons qu'il est tout le temps, environ, égal à 3, ce qui correspond au nombre de cases composant une bête. Nous conjecturons alors que le minimum de pièges à utiliser pour un carré de côté c est égal à $\left\lfloor \frac{(c+1)^2}{3} \right\rfloor$. Nous justifions cette conjecture par : comme une bête est composée de 3 cases alors il faut un piège toutes les 3 cases.

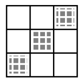


FIG. II.9. Carré de côté 2.

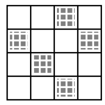


FIG. II.10. Carré de côté 3.

Nous étudions alors la validité de cet argument. Cet argument est vérifié sur chacun de nos exemples, nous effectuons alors une expérience validative dont la stratégie a pour objectif la construction d'un contre-exemple. Pour un carré de côté 1 avec une bête , l'argument n'est pas vérifié, car aucune bête ne peut venir dans ce jardin. Cependant, nous considérons que cet exemple n'est pas un contre-exemple, c'est juste un cas trivial pour lequel cela ne marche pas. Nous construisons ensuite le jardin de la figure II.11. Pour ce jardin composé de 9 cases, il suffit d'un piège pour empêcher la bête de se poser. Pourtant ce jardin est composé de 9 cases. Cet exemple peut alors nous convaincre que notre argument est faux ou plutôt incomplet (preuve par contre-exemple) : en effet, pour des carrés, ce rapport est vérifié. La question que nous nous posons alors est quelle est la différence entre un carré et la figure II.11 ?

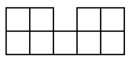


FIG. II.11. Un jardin.

Une des informations que nous pouvons tirer de ces différents exemples et des questions que nous nous sommes posées est qu'il faut tenir compte de la forme du jardin et de la forme de la bête. Cette information, nous allons considérer qu'elle fait partie de la conception du problème que nous avons développée et nous allons voir que nous pouvons l'utiliser comme un outil pour identifier des preuves fausses. En effet, si une preuve ne prend pas en compte la géométrie de la bête par rapport au jardin, les exemples précédents montrent que la preuve utilise soit des arguments incomplets soit des arguments faux. Nous pouvons donc utiliser la proposition « il faut prendre en compte la forme de la bête par rapport à la forme du jardin » comme un élément de validation de preuve.

Cet argument peut se voir comme l'identification d'une hypothèse qu'il est nécessaire d'utiliser dans la preuve. Pour cet exemple, l'hypothèse est la forme du jardin. En effet, nous avons vu qu'il existait un contre-exemple pour une forme de jardin différente ; de ce fait, il est nécessaire d'utiliser cette hypothèse dans la preuve. Toutefois, si cet argument permet de réfuter, il ne permet pas de valider.

Cet exemple montre donc que la validation porte d'une part sur les résultats mais aussi sur leurs preuves. En particulier, savoir si une preuve est correcte ou non est un problème complexe, nous verrons dans la sous-section 2.2.1 page 54 que l'expérimental peut être une aide au contrôle de la preuve.

2. L'utilisation du concept-problème en didactique.

Nous allons voir dans ce chapitre, de quelle manière utiliser le concept-problème à des fins didactiques. Voici les utilités que nous avons déterminées :

- Le concept-problème est une aide à l'analyse apriori d'une situation, il permet de faire des hypothèses sur certains obstacles, difficultés et problème ou représentation manquante. L'établissement de la conception d'un élève (à l'aide d'une expérimentation) et de sa confrontation au concept-problème permet alors de vérifier ces hypothèses. Nous détaillons cela dans la section 1 de ce chapitre.
- Le concept-problème est une aide aux choix des variables de recherche (Godot, 2005 ; Grenier et Payan, 2002). Nous détaillerons cela dans la section 2 de ce chapitre.

2.1. Obstacles, difficultés et problème ou représentation manquant. Dans un premier temps, nous allons rappeler les définitions usuelles d'obstaclesobstacle et de difficultés en didactique des mathématiques. Nous nous référons aux travaux de Duroux (1983), El Bouazzaoui (1988) et Brousseau (1989) concernant les notions d'obstacle et de difficulté en didactique des mathématiques.

2.1.1. *Obstacles.* Selon, Duroux (1983, p. 54), un *obstacle* a nécessairement les caractéristiques suivantes :

> 1 il s'agit d'une connaissance qui fonctionne comme telle sur un ensemble de situations et pour certaines valeurs des variables de ces situations. [...].
>
> 2 L'obstacle est une connaissance qui, en tentant de s'adapter à d'autres situations ou a d'autres valeurs des variables, va provoquer des erreurs spécifiques, repérables, analysables.
>
> 3 L'obstacle est une connaissance stable. Dans les situations qui sortent de son domaine de validité, son rejet coûtera plus à l'élève qu'une tentative d'adaptation à tout prix, même si cela alourdit notablement les processus de résolution employés. C'est le symptôme classique de l'élève qui « fait compliqué » alors qu'il pourrait « faire simple ».
>
> 4 L'obstacle ne pourra donc être franchi que dans des situations spécifiques de rejet et ce rejet sera constitutif du savoir. Par exemple, l'acquisition du concept de convergence d'une suite numérique se fera contre la conception selon laquelle tout nombre a une représentation décimale exacte. Le retour même sur la conception obstacle sera partie intégrante du nouveau savoir.

En didactiques des mathématiques, l'obstacle apparaît donc comme étant une connaissance antérieure ou une conception utilisée en dehors de son domaine de validité. BROUSSEAU (1989) identifie alors 4 types d'obstacles :

– *Obstacle ontogénétique* : ce sont les obstacles qui sont dûs à des « limitations du sujet à un moment de son développement ».
– *Obstacle didactique* : ils sont dûs au système éducatif.
– *Obstacle épistémologique* : ce sont des obstacles qui constituent la connaissance visée, on ne peut y échapper.
– *Obstacle culturel* : ils sont dûs à l'influence de la culture et de la société.

2.1.2. *Différences entre obstacles et difficultés.* Dans sa thèse, EL BOUAZZAOUI (1988, p. 32-33) différencie obstacle et difficulté, il décrit une *difficulté* de la manière suivante :

> Si le problème se pose, à une époque donnée, dans une certaine théorie mathématique, vient à être résolu sans que sa solution ne remette en cause de façon décisive le point de vue de la théorie en question, dans tel cas, on dit qu'une difficulté a été vaincue. Le signe qu'il y a eu difficulté, c'est que les mathématiques de l'époque ont été bloquées, même si les moyens de le résoudre étaient peut-être déjà disponibles...

Il décrit la notion d'obstacle de la manière suivante :

> Si, par contre, le problème qui se pose vient à être résolu après avoir exigé une restructuration de la connaissance et un changement important de point de vue, alors on dit qu'un obstacle a été surmonté. Le signe qu'il y a eu obstacle, c'est que la théorie de l'époque a freiné et empêché la résolution du problème.

Chez EL BOUAZZAOUI, nous retrouvons donc l'idée qu'un obstacle est une connaissance qui empêche la résolution d'un problème. Une difficulté apparaissant lorsque tous les « outils » sont disponibles mais que nous n'avons pas encore trouvé comment les utilisés pour résoudre le problème. Une difficulté n'est donc pas un obstacle, car elle n'est pas une connaissance mais une absence de connaissance.

Toutefois, toute absence de connaissance ne peut se voir comme une difficulté, en effet, considérons le problème de la chasse à la bête (P_{cb}), comme nous avons pu le voir page ? ? ? ? ?, il est nécessaire pour résoudre ce problème d'avoir connaissance du problème dual (P_{dual}), l'absence de P_{dual} peut-elle alors être considérée comme une difficulté ? Étant donné que l'apparition de P_{dual} exige de modéliser P_{cb} différemment, il nous semble que cette absence ne peut pas être considérée comme une difficulté, car elle exige un changement de point de vue sur le problème. Cette absence n'est pas non plus un obstacle au sens didactique, car elle n'entraîne pas l'apparition d'erreurs. Dans ce cas, nous parlerons donc d'un *problème ou représentation manquants.*

2.1.3. *Identification à l'aide du concept-problème.* Dans cette section, nous cherchons à utiliser le concept-problème pour identifier des obstacles, des difficultés et des problèmes ou représentations manquantes. L'établissement du concept-problème sur le problème P à l'aide d'une analyse mathématiques va nous permettre de faire des hypothèses sur les obstacles, difficultés, problèmes ou représantations manquants. De plus, l'établissement, expérimentale, de la conception d'un élève sur P permet de vérifier ces hypothèses.

Pour cela, nous utiliserons les relations entre les problèmes. En référence, aux travaux cités précédemment, nous considérerons que :

– Il y a un *obstacle transversal* lorsque, dans la conception de l'élève, une relation établie entre 2 problèmes est erronnée. Le terme obstacle est approprié, car « l'erreur » effectuée peut se voir comme l'application d'une connaissance en dehors de son domaine de validité. En référence à BROUSSEAU (1989), nous parlerons d'*obstacle épistémologique* lorsque le franchissement de celui-ci est nécessaire à la résolution du problème.
– Il y a une *difficulté* lorsqu'il manque une relation entre 2 problèmes connus dont l'un au moins est présent dans la conception de l'élève. Nous pouvons parler de difficulté, car les moyens pour résoudre le problème sont présents, seul l'établissement des relations est manquant.
– Il y a un *problème ou représentation manquant* lorsqu'un problème ou une représentation est absent de la conception de l'élève.

EXEMPLE II.13 (problème/représentation manquant). Considérons le problème de la chasse à la bête P_{cb} avec une bête et des rectangles de grandes dimensions, en regardant le concept-problème de la chasse à la bête que nous avons développée, (voir page) P_{cb}, la résolution passe par la détermination d'un minorant à l'optimum. L'étude de P_{dual} permet de répondre à cette question. L'absence de P_{dual} dans une conception est un problème ou représentation manquant.

EXEMPLE II.14 (obstacle transversal). Nous avons vu, au chapitre I section formalisation de la conception d'un problème, que les problèmes P_{cb} et P_{rec}[7] entretiennent le lien suivant : une solution admissible de P_{cb} est une solution admissible de P_{rec} et réciproquement. Dans l'optique de résoudre P_{cb}, une conception que nous pourrions établir concernant la relation entre ces problèmes est la suivante : une solution de P_{rec} est une solution de P_{cb}.[8]

Nous sommes face à un obstacle transversal, car c'est une erreur portant sur la relation entre 2 problèmes. Nous la qualifions pas d'épistémologique, car P_{rec} n'est pas nécessaire à la résolution de P_{cb}.

EXEMPLE II.15 (Obstacle épistémologique). Considérons le problème de la chasse à la bête, P_{cb} et le problème, P_{pavage} qui consiste à paver le jardin avec des bêtes. Nous avons vu que le problème P_{pavage} permet de donner une réponse à P_- mais ne donne pas de réponses à P_+. Bien souvent les

[7] P_{rec} : déterminer les configurations qui minimisent le nombre de positions éliminées, tout en éliminant, au moins, le nombre total de bête.

[8] Cela a été le cas lors d'un MATh.en.JEANSavec des élèves de première scientifique. Cette conception est fausse comme nous l'avons montré page ? ? ? ? ? ? ? ?. En traduisant ces problèmes en terme de programmation linéaire matricielle, nous pouvons nous rendre compte que ces problèmes n'ont pas la même fonction à optimiser.

personnes qui cherchent à résoudre P_{cb} établissent la relation suivante entre P_{pavage} et P_{cb} : $P_{pavage} \rightarrow P_{cb}$. Nous considérons que ces personnes sont confrontées à un obstacle transversal, que nous pouvons décrire comme une confusion entre condition nécessaire et suffisante qui entraîne une relation entre 2 problèmes qui est erronée. C'est donc un obstacle transversal que nous qualifions d'épistémologique, car il est nécessaire pour la résolution de P_{cb}.

Exemple II.16 (Difficulté). Considérons le problème de la chasse à la bête, souvent des personnes qui ont connaissance du problème de pavage et du problème de minoration n'utilisent pas le problème pavage pour résoudre le problème de minoration. Ils n'établissent donc pas de relation entre ces problèmes. Il y a donc une difficulté.

2.2. Concept-problème et choix des variables de recherche. Grenier et Payan (2002) définissent les variables de recherche de la manière suivante :

> [...] si l'on considère, par exemple, comme un savoir, le triplet (question[9], conjecture, preuve), on peut se poser la question de l'existence d'une situation fondamentale pour ce savoir et donc, l'existence de situations adidactiques associées. Les éléments du triplet (Question, Conjecture, Preuve) sont les *invariants* de la SRC. Les *variables didactiques* associées sont des **variables « de recherche »**, au sens où elles déterminent la compréhension et l'intérêt de la question, son ouverture à de nouvelles questions, l'élargissement des stratégies de recherche, les possibilités de transformation du problème (modélisation).

Une variable de recherche est aussi une variable du problème que l'élève peut modifier.

Les variables de recherche apparaîssente donc comme un outil que l'enseignant peut utiliser pour permettre aux élèves de développer leur conception par l'étude de nouveaux problèmes. Le choix pour l'enseignant est alors de déterminer quelles sont les variables du problèmes qu'il va utiliser comme variable de recherche. Ce choix se fait en fonction des questions, conjectures et preuves que ces variables sont susceptibles de faire produire aux élèves.

Les variables de recherche portent sur des questions ou des instances du problème. Les variables de recherche portant sur les instances du problèmes donnent aux élèves la possibilité d'étudier des cas particuliers mais aussi le problème de la généralisation des résultats obtenus sur ces cas particuliers. D'autre part, les variables portant sur les instances peuvent aussi changer la nature des objets en jeu, c'est-à-dire changer la représentation du problème, ce qui est lié au processus de modélisation.

Quant aux variables de recherche qui portent sur les questions, apriori il est pus difficile d'en faire des variables de recherche effectives (pourquoi se poser une autre questions ?), toutefois la pratique de la démarche expérimentale permet de rendre ce type de variable effective grâce aux nouveaux

[9] Nous considérons que le terme question se rapproche de ce que nous appelons problème.

problèmes que la pratique de la démarche expérimentale entraînent en particulier le problème de la validation du produit de la stratégie. Par exemple, *le jeu du set* est un problème de recherche de solution, expérimenter pour le résoudre mène à mettre en place des stratégies de construction de jeu sans set, ce qui pose la nouvelle question : comment savoir qu'un jeu est sans set ? Cette question ouvre une nouvelle problématique dans laquelle nous pouvons aussi être amené à rechercher l'algorithme le plus efficace pour tester si un jeu est sans set, cette question n'est donc pas sans intérêt.

L'utilisation du concept-problème, en particulier de l'espace problème, peut alors être une aide au choix des variables de recherche. En effet, l'espace problème permet de déterminer les liens entre les problèmes et donc d'anticiper sur les nouveaux problèmes que les élèves pourraient être amenés à se poser ainsi que d'identifier les problèmes importants à la résolution. De plus, il permet de déterminer les exemples, les savoirs notionnels, les représentations, les types de preuves que ces nouveaux problèmes mettent en jeu.

CHAPITRE III

Démarche expérimentale et conception sur un problème

1. Développement de la conception sur le problème

Nous faisons l'hypothèse que notre conception du problème guide les actions que nous effectuons et que les faits produits par l'expérimental sont interprétés à travers la conception du problème que nous avons développée. De plus, nous considérons que la pratique de la démarche expérimentale permet d'enrichir notre conception sur le problème.

Dans l'exemple suivant, nous essayons d'illustrer en quoi l'utilisation de la démarche expérimentale permet le développement de la conception du problème.

Exemple III.1 (Conception-démarche expérimental). Nous allons essayer de décrire une démarche de résolution pour un cas particulier du problème des reines et l'effet que cela peut avoir sur notre conception du problème. Nous avons essayé de faire cette reconstitution de démarche expérimentale en considérant que c'est la première fois que nous rencontrons un problème de ce type, c'est-à-dire que nous avons pris une conception qui est initialement « faible » et en particulier, qui ne permet pas d'émettre des hypothèses sur les moyens de résoudre ce problème.

Nous prenons un bâtiment carré de taille 7 (côté de 8 cases) et des explosions *diagonales*[1], c'est-à-dire si une caisse explose alors toutes les caisses situées dans les diagonales passant par cette caisse sont touchées. C'est un problème de recherche de solution, que nous appelons P.

Nous commençons par effectuer une expérience générative, nous produisons ainsi des configurations de cases (configuration de cases vérifiant les contraintes du problèmes). La validation du produit de la stratégie consiste alors à vérifier qu'une configuration est une solution admissible. Ce qui nous fait rencontrer le problème, comment vérifier qu'une configuration est une solution admissible ?

Nous identifision 2 manières de résoudre ce problème, la première consiste à résoudre, P_{-}, construire une solution admissible, et la deuxième à résoudre $P_{vérif}$, construire un algorithme de vérification.

Nous décidons d'essayer de répondre à $P_{vérif}$. Nous utilisons l'axiome suivant : 2 caisses de dynamites ne peuvent pas être dans la même diagonale. Nous obtenons la stratégie suivante : tracer les diagonales passant par chacune des caisses de la configuration, si deux caisses ne sont pas touchées par la même diagonale alors la configuration est une solution admissible.

[1]Cette explosion correspond au mouvement du fou aux échecs.

Ce résultat nous permet de déterminer si des configurations sont des solutions admissibles. Nous reprenons ensuite la résolution de P par la mise en place d'expérience. Nous produisons ainsi des configurations et utilisons la stratégie de vérification pour les valider. Nous produisons alors la configuration de la figure III.1, nous lui appliquons la stratégie de vérification (voir figure III.2). Nous remarquons alors que les casses grisées ne sont touchées par aucune autre caisse. De ce fait nous pouvons rajouter une caisse sur l'une de ces deux cases, nous obtenons ainsi une solution admissible de cardinal 9. Cela nous mène à formuler la conjecture c_1, l'e cardinal d'une solution est l'optimum est 9. Cette hypothèse est soutenue par les exemples précédents : aucune solution admissible n'est de cardinal supérieur à 9 et par le fait que cette solution admissible ne peut être agrandie. c_1 peut être vue comme le problème suivant : est ce que l'optimum est 9 ?

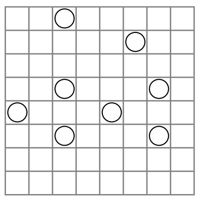


Fig. III.1. Une solution admissible

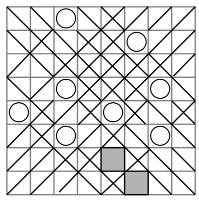


Fig. III.2. Stratégie de vérification.

Nous observons aussi qu'il existe deux types de solution admissible, les solutions admissibles « agrandissables » et celles qui ne le sont pas. Nous décidons d'appeler les solutions admissibles qu'il est impossible d'agrandir, solutions admissibles *localement maximales*. Nous nous posons alors le problème P_{max}, comment rendre une solution admissible localement maximale ? Nous considérons ce problème comme pertinent, car une solution est nécessairement une solution admissible localement maximale.

Pour répondre à ce problème, nous formalisons la technique que nous avons utilisée précédemment : considérons que nous ayons une configuration C alors en traçant les diagonales passant par chacune des caisses de C, nous déterminons, dans un premier temps, si C est une solution admissible. Si les diagonales passent par toutes les cases du carré alors la solution est localement maximale. Sinon, nous pouvons rajouter une caisse sur une case libre. En réitérant ce procédé tant qu'il y a une case libre, nous obtenons une solution admissible localement maximale. Nous appelons cette technique : *technique de maximalisation.*

Nous tentons alors de prouver c_1 avec l'argument suivant : il existe une solution admissible localement maximale de cardinal 9. Nous remarquons que cet argument peut être utilisé si la réponse à P_{sol}, est ce qu'une solution admissible localement maximale est une solution ?, est positive. Nous ne voyons pas quels outils utiliser pour prouver que c'est le cas et décidons de mettre de côté ce problème pour revenir sur l'étude de c_1. Nous effectuons alors une expérience dont l'objet est c_1, nous essayons donc de construire une solution admissible de cardinalité supérieure à 10.

Nous produisons la solution admissible de cardinalité 9 représentée par la figure III.3.

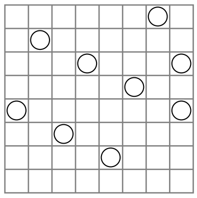


Fig. III.3. Une solution admissible.

En appliquant la technique de maximalisation sur la solution de la figure III.3, nous obtenons la figure III.4. La configuration n'est pas localement maximale, car les casses grisées ne sont touchées par aucune des caisses de la solution. Elle peut être rendue localement maximale en ajoutant une caisse sur une case grisée, car les cases grisées sont sur une même diagonale. De ce fait, nous obtenons une solution admissible de cardinalité 10, ce qui nous permet de prouver que la réponse à c_1 est négative. Nous émettons alors la conjecture c_2, l'optimum est 10. D'autre part, cet exemple couplé avec celui de la figure III.1, nous permet de prouver que la réponse à P_{sol} estF négative.

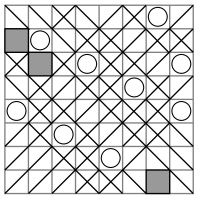


Fig. III.4. Technique de maximalisation.

Nous effectuons alors une expérience pour résoudre c_2. Cela nous mène à produire la stratégie de construction, optimiser localement[2]le nombre de caisses. L'utilisation de cette stratégie est soutenue par le fait que nous considérons qu'il est possible qu'en optimisant localement des configurations, nous arrivions à construire une solution.

En essayant d'utiliser cette stratégie pour construire des solutions admissibles, nous observons que si nous plaçons les caisses sur une même ligne alors elles ne peuvent pas se faire exploser entre elles. Cela nous amène donc à établir une nouvelle stratégie de construction qui consiste à placer des caisses sur une même ligne, puis à utiliser la technique de maximalisation pour la compléter. Cette méthode de construction est appelée *stratégie ligne*

Nous rencontrons le problème suivant : est ce que la stratégie ligne permet de construire une solution admissible de cardinal supérieur à 10 ? C'est un problème d'existence. Pour répondre à ce problème, une des variables de

[1]Nous disons qu'elle est localement maximale, lorsque quelque soit la case libre sur laquelle nous rajoutons une caisse, la configuration n'est plus une solution admissible.

[2]Nous plaçons une caisse et nous essayons de mettre le maximum de caisses possibles dans son voisinage. Nous réitérons ce procédé avec les caisses ajoutées.

la stratégie de l'expérience, que nous avons identifiée, est la ligne que nous choisissons pour placer les caisses. Notre stratégie va donc consister à tester pour chaque ligne quelle va être le cardinal de la solution.

Nous commençons par placer les caisses sur la ligne du milieu, ce qui nous donne une solution admissible localement maximale de cardinal 8. Nous déplaçons alors la ligne vers le haut. Nous trouvons ainsi un exemple de solution admissible localement maximale à 12 (voir figure III.5), qui permet de répondre par la négative à c_2 et d'en faire la preuve.

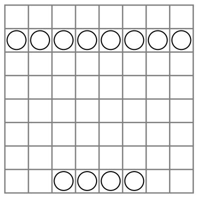


FIG. III.5. Une solution admissible de cardinal 12.

D'autre part, nous avons observé que plus nous déplaçions la ligne vers le haut, plus le cardinal de la solution augmenté, nous arrivons ainsi à la solution admissible localement maximale représentée sur la figure III.6 qui est de cardinal 14.

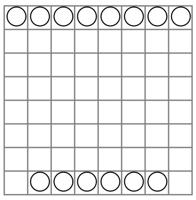


FIG. III.6. Meilleure configuration obtenue avec la stratégie ligne.

En utilisant la stratégie ligne, nous ne pouvons pas obtenir de résultat meilleur que celui-ci, car les lignes « du bas » donnent les même résultat que les lignes « du haut » par symétrie. Nous émettons ainsi la conjecture c_3, l'optimum est 14. Cette conjecture est soutenue par le fait qu'aucune autre solution admissible que nous avons produite n'est de cardinalité supérieure à 14, que la solution admissible que nous avons trouvée est localement maximale et qu'il n'est pas possible avec la stratégie ligne d'obtenir une meilleure solution.

Dans un premier temps, nous effectuons une expérience pour répondre à c_3, car pour l'instant nous avons toujours réussi à faire mieux que les hypothèses que nous avions formulées. Nous n'arrivons pas à trouver de solution admissible de cardinalité supérieure. Nous allons maintenant tenter de prouver que la réponse à c_3 est positive (*i.e.* que l'optimum est 14).

Nous avons l'idée de preuve suivante, trouver un majorant à l'optimum égal à 14. Ce qui nous amène à étudier le problème P_+, déterminer un majorant à l'optimum. Nous avons alors la relation $(P_-, P_+) \to P$.

Une première réponse à P_+ que nous trouvons est le nombre de cases dont est composé l'entrepôt, 64. Cependant, il nous semble l'optimum est proche de 14, nous cherchons donc un majorant beaucoup plus petit en essayant d'utiliser l'axiome, il ne peut pas y avoir deux caisses dans une même diagonale. Nous pouvons le reformuler de la manière suivante : dans une diagonale, nous pouvons placer au plus une caisse de dynamite. Ce résultat nous mène à essayer de résoudre le problème P_{rec}, déterminer le nombre de diagonales qui recouvre toutes les cases de l'entrepôt. En effet, nous avons la relation $P_{rec} \rightarrow P_{+}$ puisqu'une réponse à P_{rec} est une réponse à P_{+}.

Pour répondre à P_{rec}, nous déterminons le cardinal de l'ensemble des diagonales. Il est égal à 30. Il n'est donc pas possible de placer plus de 30 caisses dans l'entrepôt. Comme nous pensons que l'optimum est proche de 14, nous continuons à chercher des arguments nous permettant de réduire ce nombre. Nous avons alors l'idée de découper l'entrepôt comme sur la figure III.7, ces diagonales recouvrent bien entièrement l'entrepôt et sont au nombre de 15. Nous savons maintenant que l'optimum est 14 ou 15.

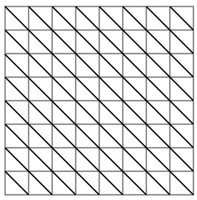


FIG. III.7. Les diagonales.

Les éléments théoriques que nous avons développés nous fournissent un majorant, 15, or nous avions conjecturé, à la suite d'une série d'expériences, que l'optimum est 14, il y a alors un décalage (mais pas de contradiction) entre l'expérimentale (14) et nos connaissances théoriques (15). Deux choix s'offrent à nous essayer de trouver une solution de 15 caisses (faire une expérience) ou essayer de montrer qu'il n'existe pas de solution de 15 caisses (tenter de prouver).

Nous choisissons d'expérimenter en utilisant le résultat suivant pour guider notre stratégie, si une solution de cardinal 15 existe alors chaque diagonale de la figure III.7 doit contenir exactement une caisse. Ce résultat est vrai, car il existe un recouvrement de l'entrepôt par 15 diagonales et qu'il y a au plus une caisse par diagonale donc, par le principe de la cage aux pigeons, si une solution à 15 existe, elle est composée d'exactement une caisse par diagonale.

Nous allons maintenant, construire des configurations en utilisant le résultat précédent pour appuyer notre stratégie. Concernant, cette stratégie une variable que nous avons identifiée est la position des caisses les unes par rapport aux autres. Il nous semble donc, a priori, difficile construire un ordre pour tester les différentes configurations possibles. Nous décidons donc de construire des configurations avec cette stratégie sans utiliser d'ordre précis.

En construisant des configurations, nous observons que pour les diagonales coins (voir figure III.8), nous n'avons qu'une seule possibilité, or pour cette unique possibilité, les diagonales coins sont sur une même diagonale. Ce qui montre l'impossibilité de construire une solution de cardinal 15.

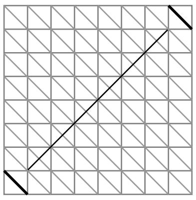


FIG. III.8. Les diagonales coins.

Nous venons de résoudre le problème pour des carrés de taille 7. Nous essayons maintenant de résoudre le problème $P_{carré}$ avec la même question mais des entrepôts différents en forme de carrés et toujours des explosions diagonales. Pour cela, nous nous demandons si nous ne pourrions pas utiliser des généralisations des résultats que nous avons trouvés. Les 2 résultats clés de la preuve sont l'existence d'une solution de cardinal 14 et l'impossibilité de placer 15 caisses. Or le premier résultat est obtenu à travers la stratégie ligne et le second résultat est obtenu par le recouvrement de la figure III.7. Nous allons donc essayer de généraliser ces stratégies et résultats pour résoudre $P_{carré}$. Cela nous mène ainsi à généraliser le problème P_{rec} à l'ensemble des carrés.

Pour répondre à P_{rec} nous effectuons des expériences génératives (en faisant varier la longueur du côté d'un carré), ce qui nous mène à faire la conjecture c_{form} : pour un carré de longeur de côté c, le nombre de diagonales recouvrant le carré est égal à $2c + 1$.

Nous faisons aussi la conjecture c_{cons}, en plaçant les caisses comme sur la figure III.9 nous obtenons une solution admissible.

Nous effectuons alors des expériences pour répondre à c_{cons} et c_{form}. Ces expérimentations viennent confirmer que les résultats se généralisent, nous tentons alors de prouver ces résultats. Nous les prouvons, ce qui nous permet de prouver que l'optimum pour un carré de côté de longeur c est $2c$.

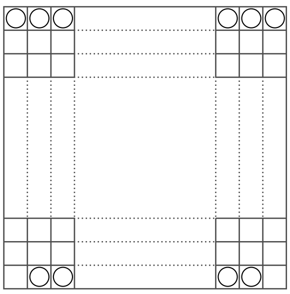


FIG. III.9. Une solution générale.

Nous pourrions alors continuer en nous posant, par exemple, les problèmes suivants :
– que se passe-t-il pour un rectangle ?
– existe-t-il d'autres solutions ?
– le procédé utilisé se généralise-t-il à d'autres explosions ?
– quel est le nombre de solutions ?
– etc.

Nous avons essayer d'illustrer, à travers cet exemple, comment une question ouverte peut nous amener à développer une conception sur un problème en dialectique avec l'expérimentation. L'un des apports essentiels de la démarche expérimentale est, pour nous, son rôle de producteur d'exemples et de contre-exemples à travers les faits qu'elle génère. Ces faits sont interprétés en rapport avec l'objectif de l'expérimentation et notre conception du problème. Cela nous mène à modifier notre conception par l'apparition de nouveaux problèmes, la formulation de nouveaux résultats et la mise en place de nouvelles expériences.

Dans un premier temps, nous allons mentionner ce que nous entendons par interprétation.

1.1. Interprétation. Nous considérons que l'*interprétation* est la confrontation d'un fait à une conception via une expérimentation.

L'interprétation d'un fait va dépendre : du pourquoi (problème) et comment (outils) a été construite l'expérimentation et de la conception du problème. Giordan (1999) dit à propos de cela :

> Ce faisant l'expérimentation reste toujours un artifice. Elle n'apporte aucune information en soi. Elle ne prend sens que par interaction avec d'autres expériences et surtout en relation avec l'hypothèse qui lui procure son cadre de questionnement et d'interprétation.

Considérons, par exemple, le fait suivant issu du problème des caisses de dynamite : une configuration de 13 caisses de dynamites. Si l'expérimentation avait pour objectif de répondre à un problème d'existence du type : est ce que cette stratégie permet de construire des solutions admissibles ?, alors la validation va consister à vérifier que la configuration est une solution admissible. Si ce n'est pas le cas, alors l'interprétation que nous en donnons est la non-fonctionnalité de la stratégie : cette configuration apparaît comme un contre-exemple. Dans le cas contraire, alors cette configuration est un exemple sur lequel la stratégie fonctionne. Alors que si cette configuration apparait, lorsque l'objectif est la résolution d'un problème de recherche de solution, cette configuration est un exemple de configuration de cardinalité 13 ou un exemple de configuration incorrecte.

Les implications sur notre conception ne sont pas les mêmes : dans le premier cas, nous devons modifier ou changer de stratégie alors que dans le deuxième cas, la seule implication est le fait de savoir que cette configuration n'est pas solution. La valeur attribuée par l'expérimentateur à certains résultats est relative à sa conception du problème Nous pouvons penser que plus le résultat a d'implication pour la conception, plus il va être identifié comme important.

Le processus d'interprétation permet ainsi de transcrire les rétro-actions renvoyées par l'expérimentation dans la conception à travers la production d'exemples et de contre-exemples.

Nous pouvons rajouter que l'interprétation met en jeu des raisonnements que Polya (1990) appelle « plausibles reasonnings », en particulier le raisonnement inductif, généraliser à la suite d'une étude de cas particuliers. En effet, un des buts de la démarche expérimentale est la découverte de nouveaux résultats et selon POLYA (1990), c'est le raisonnement plausible qui est à l'origine des nouvelles découvertes :

> Anything new that we learn about the world involves plausible reasoning.

Il rajoute qu'en particulier en mathématiques :

> We secure our mathematical knowledge by *demonstrative reasonning*, but we support our conjectures by *plausible reasonning*.

De ce fait, les faits que nous avons produits, par exemple pour répondre à un problème de recherche de solution, peuvent être à la base de conjectures. Ce sont alors des invariants opératoires.

Le rôle important de la formulation d'une conjecture, au cours d'une démarche expérimentale, est aussi mentionné par PERRIN (2007) qui cite Grothendiek :

> Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle. . . Souvent la question prend la forme d'une affirmation - une affirmation qui, en vérité est un coup de sonde.. . . Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse - encore fallait-il l'écrire pour que cela saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence. Ca permet maintenant de revenir à la charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un moins "à côté de la plaque".

La production d'une conjecture peut amener à effectuer l'action tentative de preuve dont l'objectif va être de prouver la conjecture.

1.2. Lien entre expérimenter et tenter de prouver.

1.2.1. *L'émission d'une conjecture : le début d'une phase de preuve.* Nous considérons que l'émission d'une conjecture peut être à l'origine de l'action « tenter de prouver ». En effet, la formulation d'une conjecture, signifie que nous avons identifié un résultat que nous croyons vrai, que nous pouvons voir comme un problème d'existence, est ce que cet objet a bien cette propriété ? Nous pouvons alors, pour résoudre ce problème, tenter de prouver que la réponse est positive.

D'autre part, nous considérons qu'expérimenter permet l'apparitition de conjectures à travers les exemples et les contre-exemples produits, ce qui nous permet de justifier un premier lien entre expérimenter et tenter de prouver. Or pour donner à un fait le statut d'exemple ou de contre-exemple, il est nécessaire d'avoir développé une conception du problème qui permet d'identifier ce qui est un exemple de ce qui est un contre-exemple.

Les conjectures issues d'une démarche expérimental peuvent être basées sur l'étude d'exemples, contre-exemples produits à la suite d'expérimentations. Nous pouvons alors parler de raisonnement inductif, POLYA (1994) le définit de la manière suivante :

> L'induction est une manière de raisonner qui conduit à la découverte de lois générales en partant de l'observation d'exemples particuliers et de leur combinaison, elle est employée dans toutes les sciences même en mathématiques. (...) L'induction essaie de découvrir derrière l'observation la régularité et la cohérence.

Nous rajoutons à cette citation, que nous prendrons comme définition de l'induction, que ce raisonnement ne peut se faire qu'à travers un problème et une confrontation à une conception de ce problème. En effet, même si nous ne remettons pas en cause le fait que la seule observation (qui se rapproche ici de l'expérience vécue) puisse amener à établir des lois générales, l'induction fait partie d'un processus où nous sommes actif du point de vue scientifique et nécessite donc la présence d'une problématique.

Nous présentons dans ce qui suit un exemple pour illustrer le raisonnement inductif au cours d'une démarche expérimentale.

EXEMPLE III.2. Nous allons donner un exemple de démarche[3]sur le clobber qui permet de résoudre cas du la bande de deux alternée. Nous considérons que nous avons résolu le problème de la grille monochromatique pour des rectangles et que nous avons connaissance de l'invariant et donc du fait qu'il est impossible de terminer avec un seul jeton sur des rectangles alternés dont l'un des côtés est un multiple de 3. Notre conception du problème comporte donc tous les éléments que nous avons utilisés pour résoudre le problème monochromatique, en particulier les outils et les représentations que nous avons utilisés.

La connaissance de l'invariant nous permet de réduire le problème de la bande de 2 alternée aux bandes dont le nombre de colonnes n'est pas un multiple de 3. Ce problème est de type recherche de solution. Nous cherchons des solutions en faisant varier la longeur de la bande de manière croissante, car nous considérons que les bandes de petites tailles sont plus faciles à résoudre.

Lorsqu'il n'y a qu'une seule colonne, nous terminons. Pour le cas avec deux colonnes, nous jouons comme sur la figure III.10.

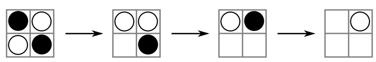


FIG. III.10. Bande de 2 avec 2 colonnes.

Après quelques essais, nous trouvons la solution de la figure III.11 pour la bande de 4 colonnes. Pour la bande de 5 colonnes, nous trouvons la solution de la figure III.12, pour la bande de 7 colonnes la solution de la figure III.13.

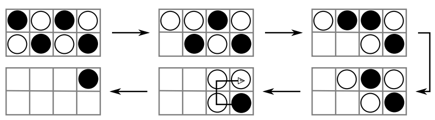


FIG. III.11. Bande de 2 avec 4 colonnes.

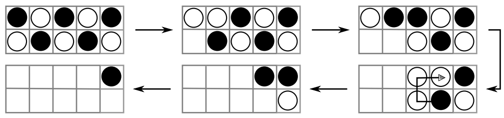


FIG. III.12. Bande de 2 avec 5 colonnes.

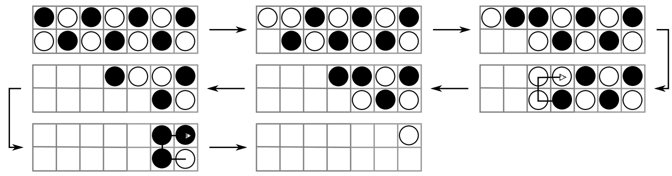


FIG. III.13. Bande de 2 avec 7 colonnes.

Nous observons alors que la stratégie que nous utilisons semble utiliser les mêmes manipulations. Cette observation nous mène à étudier les exemples de parties précédemment jouées. Nous observons que nous utilisons le cas de 2 colonnes pour résoudre le cas à 4 colonnes, le cas de 4 colonnes pour résoudre le cas de 5 colonnes et le cas de 5 colonnes pour résoudre le cas de 7 colonnes. Cela nous mène à émettre la conjecture suivante : il est possible de faire toute la bande de 2 sauf avec un nombre de colonnes multiple de 3. Cette conjecture est supportée par les exemples que nous avons produits précédemment, par le fait que nous pensons pouvoir résoudre ce problème par la construction d'un algorithme récursif et par la connaissance de l'invariant. Cette conception est aussi soutenue par le fait que certains des cas que nous avions traités auparavant (par exemple le cas monochromatique) ont été résolu par l'utilisation de l'outil[4], algorithme récursif. Nous tentons alors de prouver la conjecture, par la résolution du problème, construire un algorithme récursif. C'est un problème d'existence.

Le raisonnement inductif a, ici, été utilisé pour produire la conjecture mais aussi pour produire l'argument qui la justifie à savoir qu'il existe un algorithme de résolution récursif. Nous nous sommes basés sur les différents exemples que nous avons produits pour à la fois émettre la conjecture et l'argument qui la supporte.

Pour construire un algorithme récursif, nous commençons par étudier le sous-problème (spécification), peut-on résoudre la bande à 8 en utilisant la stratégie que nous avons utilisé pour la bande à 7 colonnes ?

Nous avons vu (voir figure III.13) qu'avec la bande de 7, nous pouvons finir dans le coin haut droit avec un jeton de couleur opposée à celle du jeton, initialement, situé dans ce coin. Il ne nous reste donc qu'à résoudre le cas de la figure III.14.

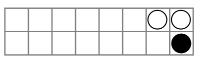


FIG. III.14. Cas à résoudre.

[3]C'est un exemple issu d'une démarche utilisée par un élève du CLEPT lors d'un MATh.en.JEANS. Nous n'avons énoncé que les grandes étapes de la démarche.

[4]La bande de 2 alternée et les rectangles monochromatiques, sont en relation outil.

Nous résolvons ce cas et finalement jouons comme sur la figure III.15.

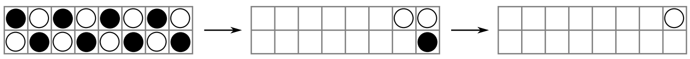


FIG. III.15. En utilisant le résultat de la bande à 7.

Nous savons qu'il n'est pas possible de résoudre le cas où le nombre de colonnes est 9, nous passons donc au cas de 10 colonnes. Nous étudions alors le problème du passage de la bande de 8 à la bande de 10. Cela revient à résoudre le cas suivant de la figure III.16.

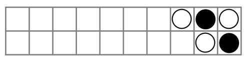


FIG. III.16. Cas à résoudre.

Nous jouons alors comme sur la figure III.17.

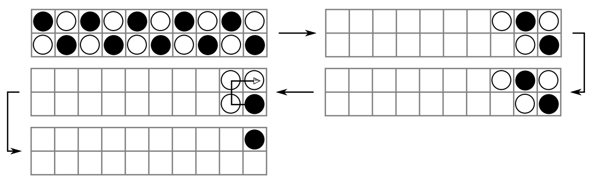


FIG. III.17. En utilisant le résultat de la bande à 8.

Nous observons alors que nous passons de la bande à 10 à la bande à 11 de manière analogue au passage de la bande à 7 à la bande à 8. De même, le passage de la bande à 11 à la bande à 13 se fait de manière analogue au passage de la bande à 8 à la bande à 10. Cela nous entraîne à décomposer notre problème en les 2 sous-problèmes suivants[5] :

(A) Le passage des bandes de 4 à 5, 7 à 8, 10 à 11 et ainsi de suite ;

(B) Le passage des bandes 2 à 4, 5 à 7, 7 à 9 et ainsi de suite.

Nous pouvons alors remarquer que le problème (A) concerne le passage de $3k+1$ vers $3k+2$ et que le (B) concerne le passage de $3k+2$ vers $3k+4$.

Par rapport aux exemples que nous avons traités, nous pouvons observer que le passage de $3k+1$ vers $3k+2$ se fait comme sur la figure III.18 et le passage de $3k+2$ vers $3k+4$ se fait comme sur la figure III.19.

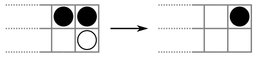


FIG. III.18. Cas 1.

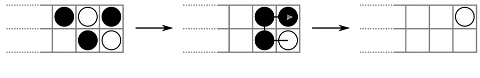


FIG. III.19. Cas 2.

[5]Nous ne savons pas a priori si nous avons effectué une « bonne » décomposition. Nous faisons, ici, l'hypothèse que cette décomposition permet de résoudre le problème, cette hypothèse est soutenue par les exemples de passages que nous avons produits.

D'autre part, comme nous savons terminer avec un seul jeton dans le coin supérieur droit de la bande de deux (voir figure III.10), cela prouve que toutes les bandes de 2 dont le nombre de colonne n'est pas un multiple de 3 peuvent être terminées avec un seul jeton. De plus, ce jeton peut être situé dans le coin supérieur droit du rectangle.

Dans l'exemple précédent, nous avons fait ce que nous pourrions appeler une *induction constructive*, nous avons observé en résolvant des cas particuliers que nous pouvions construire un algorithme permettant de terminer avec un seul jeton. Nous avons pu faire cette observation, car la stratégie que nous utilisions nous ramenait périodiquement vers les même motifs. Nous avons alors pu remarquer que le problème pouvait se ramener à deux sous-problèmes (A) et (B).

La conception du problème est intervenue dans un premier temps dans les choix de cas particuliers sur lesquels nous avons expérimentés. Des exemples se sont alors rajoutés à la conception du problème, exemples qui ont, à travers un raisonnement inductif, appuyés la conjecture puis le découpage de la preuve en 2 sous-problèmes. D'autre part, la conception a servi de guide de l'observation à travers la recherche d'une stratégie inductive.

La preuve que nous avons effectuée précédemment est une preuve par induction. Elle est issue d'un raisonnement qui procède du particulier au général. Cependant comme mentionné par Gohau (1992), la formulation d'une hypothèse ou d'une conjecture n'est pas focémment issue de l'observation et d'un raisonnement inductif :

> L'énoncé d'une hypothèse n'exige pas une observation préalable répétée. Elle peut naître sans que l'observation la soutienne. Elle vient à l'esprit d'une manière qu'on ne saurait codifier. C'est au sens propre une invention...

Toutefois, nous faisons l'hypothèse que la démarche expérimentale favorise l'émission de conjectures issues du raisonnement inductif.

1.2.2. *Expérimenter pour produire des contre-exemples et des nouvelles conjectures.* L'action d'expérimenter sur un problème d'existence peut amener à la production d'un fait qui va être interprété comme un contre-exemple et de ce fait entraîner l'action tenter de prouver.

L'exemple III.2 illustre le fait que la phase de tentative de preuve n'est pas indépendante de l'expérimental. Nous étudions, ici, un nouvel exemple proposé dû à Polya (1990), dans lequel il montre que le rôle des contre-exemples ne se limitent pas à l'invalidation mais aussi à la production de nouvelles conjectures.

Exemple III.3. Dans cet exemple Polya essaye de résoudre le problème, est ce que la formule d'Euler est vraie pour les polyèdres ? C'est un problème d'existence. Il commence par tester la formule sur les polyèdres les plus connus comme le cube ou le tétraèdre, il voit que la relation est vérifiée. Il continue alors avec tous les polyèdres réguliers puis avec des polyèdres qui ne sont pas réguliers, la formule d'Euler est toujours vérifiée.

Il teste alors la formule sur un nouveau polyèdre. Ce polyèdre n'est pas choisit au hasard : il choisit un polyèdre non convexe. Ce choix est soutenu par le fait que tous les polyèdres qu'il a testés sont convexes. Ici, il a fait appel à une connaissance sur les polyèdres pour pouvoir les identifiés : il existe des polyèdres convexes et des non-convexes[6].

Il essaye alors avec un polyèdre non convexe, il observe alors que celui-ci ne vérifie pas la conjecture. Elle n'est donc pas vraie. Cependant, il décide de ne pas s'arrêter là, car il se rend compte que la formule est vraie pour un grand nombre de polyèdres qui ont tous la particularité d'être convexes. Il propose donc un nouveau problème-conjecture, est ce que la formule d'Euller est vraie pour tous les polyèdres convexes ?

Dans cet exemple, POLYA a été amené à modifié sa conception du problème à travers les expériences qu'il a effectuées. Dans un premier temps, les faits produits lui permettent de croire que la formule est vraie et ensuite d'en découvrir un contre-exemple.

Nous pouvons, cependant, nous demandé pourquoi il choisit de commencer par expérimenter sur des polyèdres réguliers, puis des non réguliers. Une hypothèse est qu'il a identifié la classe de polyèdres comme une variable pertinente du problème, dans ces expérimentations il teste donc les différentes classes dont il a connaissance.

Malgré la découverte de ce contre-exemple, il ne s'est pas arrêté à une réponse négative. Il a observé les similarités et les différences entre les exemples de polyèdres pour lesquels la formule d'Euler est vraie et le contre-exemple, ce qui l'a amené à proposer une nouvelle conjecture. Nous parlerons de ce jeu sur les exemples et les contre-exemples, plus en détail, dans la section *Pourquoi pratiquer la démarche expérimentale en mathématique ?*.

De plus, cette idée de proposition d'une nouvelle conjecture à la suite d'un contre-exemple est aussi présente chez PERRIN (2007) et chez GIORDAN (1999). Perrin signale aussi qu'il y a une différence entre la validité de la preuve associée à la conjecture et la validité de la conjecture, il résume ceci par deux maximes :

> **Maxime.** Il ne faut pas jeter le bébé avec l'eau du bain.

> **Maxime.** Démonstration fausse ne signifie pas idée fausse.

Concernant l'erreur, en citant Grothendieck, il rajoute la maxime suivante :

> **Maxime.** La découverte de l'erreur est un des moments cruciaux, un moment créateur entre tous, dans tout travail de découverte.

1.2.3. *Conclusion.* Nous avons aussi vu qu'expérimenter pouvait permettre l'émergence d'arguments locaux, éléments théoriques de la conception, qui peuvent nous amener à tenter de prouver par la question suivante : est ce que je pourrais utiliser cet argument pour prouver ce résultat ?

D'autre part, l'expérience à travers la production de faits observables peut permettre la formulation de conjectures à l'aide d'un raisonnement inductif.

[6]Nous faisons l'hypothèse qu'une personne ayant la conception : tous les polyèdres sont convexes, n'aurait pas pu choisir comme exemple un polyèdre non convexe. Ce moment montre aussi que nos conceptions sur les objets du problèmes vont influencer les choix expérimentaux que nous faisons.

Enfin, la réalisation d'une expérience validative peut permettre de produire un fait qui peut être interprété comme un contre-exemple enclenchant l'action tentative de preuve : la résultat est faux, car il existe un contre-exemple. Ce qui peut amener à proposer un nouveau problème.

Pour conclure, expérimenter peut entraîner l'action de tenter de prouver grâce à ces 2 intéractions :

– arguments locaux ;
– cas particuliers : contre-exemple ou conjecture.

D'autre part, l'action tentative de preuve est reliée à l'action expérimenter à travers les nouveaux problèmes qu'elle peut amener, comme la formulation d'une nouvelle conjecture où d'un « plan » de preuve à travers une suite de nouveaux problèmes et les relations qu'ils entretiennent avec la conjecture.

1.3. Lien entre tenter de prouver-expérimenter et proposer de nouveaux problèmes.

1.3.1. *tenter de prouver : proposer de nouveaux problèmes.* Nous avons vu, avec l'exemple de Polya, que la tentative de preuve de type contre-exemple pouvait entraîner la proposition d'une nouvelle conjecture.

D'autre part, l'action tentative de preuve d'une conjecture peut amener à proposer de nouveaux problèmes et à établir des relations entre ces nouveaux problèmes et le problème-conjecture. Ces nouveaux problèmes peuvent nous amener à développer des résultats intermédiaires, des lemmes. Des retours à l'expériences sont alors possibles pour résoudre ces nouveaux problèmes. Dans l'exemple III.1 page 39, un nouveau problème amener par la tentative de preuve est P_+, dont la résolution nous a amené à P_{rec} qui nous a permis d'établir le lemme, le carré peut être recouvert par 15 diagonales du même type.

Cela pose le problème de la validation d'une preuve : savoir dire si une preuve est vraie ou fausse, n'est pas un problème facile. Citons Perrin (2007) sur le sujet :

> Lorsqu'on propose une preuve, en étant à son niveau de compétence (et pas sans coudées au-dessus, ce qui est souvent le cas en situation d'enseignement), il est bien difficile d'assurer que cette preuve est vraiment correcte.

L'expérimental apparaît alors comme un moyen de contrôle sur la preuve. Ceci est aussi souligné par Arnold (1998) :

> Tout mathématicien en activité sait que s'il ne contrôlait pas (au mieux par des exemples), sur une dizaine de pages de calculs la moitié des signes erait fausse, et les « 2 » passeraient par erreur du numérateur au dénominateur. La technique pour combattre de telles erreurs est le contrôle extérieur par des expériences ou des comparaisons, avec des résultats obtenus par des méthodes indépendantes, comme dans tout autre science expérimentale.

Pour Arnold (ibid.), l'expérimental est un moyen de contrôle sur la preuve, à travers ce que nous considérons être des expériences validatives ayant pour objet des problèmes intermédiaires reliés entre eux par le fait que leurs résolutions va permettre de résoudre le problème-conjecture. ARNOLD (ibid.) ne mentionne pas comment il choisit les cas particuliers sur lesquels ils testent « ces calculs », nous considérons que la conception que nous avons du problème intervient sur le choix de ceux-la. Par exemple, un choix que nous pouvons faire est de tester la preuve sur des exemples que l'on juge triviaux pour les vérifications, c'est-à-dire des cas particuliers pour lesquels nous jugeons qu'il est facile de vérifier « les calculs ».

1.3.2. *expérimenter : proposer de nouveaux problèmes.* Le second lien peut se voir avec l'expérimentation qui entraîne la rencontre de nouveaux problèmes, en particulier le problème de la validation des faits, qui bien qu'annexe par rapport à la résolution du problème permet de s'assurer que les interprétations que nous faisons sont basées sur des observations valides (voir sous-section 4 page 10).

De plus, l'observation d'une structure dans la stratégie que nous utilions peut nous amener à proposer un nouveau problème dont l'étude est le domaine de validité de la statégie identifiée (voir exemple I.1 page 11).

1.3.3. *Conclusion.* Nous identifions 4 intéractions pouvant engendrer de nouveaux problèmes :

(1) tenter de prouver : mise en place d'un plan de preuve ;
(2) tenter de prouver : formulation d'une conjecture ;
(3) expérimenter : validation des faits ;
(4) expérimenter : structuration de la stratégie.

2. Autres apports de la démarche expérimental

L'expérimentation permet de manipuler les objets en jeu dans le problème et donc de nous familiariser avec ceux-ci, PERRIN (2007) parle de « familiarisation avec un domaine ». Cela permet aussi de révéler les premières difficultés du problème et ainsi de faire apparaîre de nouveaux problèmes dans la conception du problème. L'expérimental participe ainsi à l'appropriation du problème et à la familiarisation avec les objets en jeu à travers le développement de notre conception.

Nous avons déjà énoncé dans la section I, certains « produits » de la démarche expérimentale comme des exemples et des contre-exemples. Dans cette section, nous étudierons plus en détails les intéractions qu'ils entretiennent avec la généralisation, l'induction et la preuve.

2.1. Rôle des exemples.

2.2. exemple et raisonnement inductif : production de conjectures. Nous avons déjà mentionné dans la sous-sous-section 1.2.1 page 46 avec l'exemple III.2, que les exemples pouvaient servir de matériel à la production de conjecture à travers l'utilisation du raisonnement inductif. La production d'exemple pour conjecturer représente l'un des intérêts de la pratique de la démarche expérimentale.

2.2.1. *Expérimentation et exemple : validation d'arguments.* Nous avons dans la sous-section 5 mis en avant le fait que l'expérimental était un moyen de contrôle sur les preuves. D'après ARNOLD (1998), ce moyen de contrôle peut s'exercer par le contrôle des calculs intermédiaires sur des exemples. Éclairons ceci sur un exemple :

EXEMPLE III.4. Cet exemple porte sur le problème de la roue aux couleurs, nous allons, ici, étudier le cas où le cercle extérieur est multicolore strict et le cercle intérieur composé de 2 couleurs ($P_{2,.}$). Nous avons considéré que notre conception sur le problème était peu développée. Nous disposons toutefois de certains types de preuves associés à des problèmes de combinatoires comme la preuve par exhaustivité des cas. C'est un problème de recherche de solution, qui consiste à déterminer l'ensemble des valeurs du cercle extérieur pour lesquels il existe une solution.

Nous commençons par effectuer une expérimentation générative pour résoudre $P_{2,.}$. La stratégie que nous utilisons est de commencer par des cercles extérieurs dont le nombre de couleur est petit puis de le faire croître. La validation consiste à vérifier que pour un n donné, il existe une solution à $P_{2,n}$.

Nous commençons donc par étudier le cas où le cercle extérieur est composé de deux couleurs. Nous prouvons qu'il n'existe pas de solution. Ceci est aussi vrai pour un cercle extérieur de 3 couleurs, nous le montrons en effectuant une preuve par exhaustivité des cas.

Passons maintenant à une roue dont le cercle extérieur est composé de 4 couleurs, alors nous pouvons trouver la solution de la figure III.20.

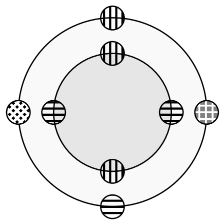


FIG. III.20. Une solution avec un cercle extérieur composé de 4 couleurs.

Avec un cercle extérieur composé de 5 couleurs, nous n'arrivons pas à trouver de solutions, nous faisons une preuve par exhaustivité des cas pour montrer qu'il est impossible de trouver une solution, ce qui nous amène à mettre en jeu des symétries pour simplifier la preuve. Pour un cercle extérieur composé de 6 couleurs, nous trouvons la solution de la figure III.21.

Nous observons alors que la solution de la figure III.21 et la solution de la figure III.20 sont similaires :

– les couleurs du cercle intérieur sont deux couleurs diamétralement opposées ;
– sur le cercle extérieur, le diamètre du cercle extérieur définit deux demi-cercle sur lesquels les couleurs sont placées de manière alternées.

Cela nous permet de structurer notre stratégie de construction de configuration. Ce qui nous amène à étudier le domaine de validité de cette stratégie, que nous appelons S.

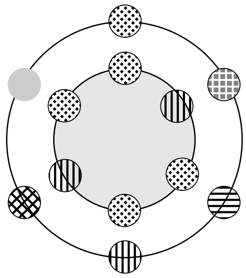


Fig. III.21. Une solution avec un cercle extérieur composé de 6 couleurs.

Nous essayons cette stratégie sur une roue dont le cercle extérieur est composé de 8 couleurs, cela donne la configuration de la figure III.22. Nous vérifions que cette configuration est bien solution.

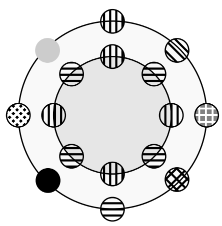


Fig. III.22. Teste de la technique.

Nous formulons alors la conjecture : S construit une solution pour les roues dont le cercle extérieur est composé d'un nombre paire de couleur supérieur à 4. Nous tentons alors de prouver cette conjecture et proposons la preuve suivante :

– comme le nombre de couleur est pair, il est toujours possible de trouver 2 couleurs diamétralement opposées ;
– il suffit de vérifier qu'en plaçant le même couleur sur le cercle intérieur pour les deux couleurs diamétralement opposées puis qu'en plaçant les couleurs de manière alternées sur les 2 demi-cercles engendrés par les extrémités nous obtenons une solution.

Ceci prouve qu'il est toujours possible de construire une solution lorsque le nombre de couleur sur le cercle extérieur est multiple de 2 (supérieur à 4).

En expérimentant sur le problème des cas impairs, nous observons que S n'est pas applicable, car il n'est pas possible de trouver 2 couleurs diamétralement opposées. Ce dernier résultat associé au fait que nous n'avons trouvé aucune solution pour les cas impairs (prouvé dans certains cas), nous amènent à conjecturer qu'il est impossible de trouver une solution lorsque le nombre de couleur sur le cercle extérieur est impair.

En tentant de prouver ce résultat, nous proposons le problème P_{diam} : est-ce que si une configuration est solution, les couleurs intérieures sont diamétralement opposées sur le cercle extérieur ? Une réponse positive à ce problème nous permettrait de répondre par la négative au problème des impairs.

Nous tentons de prouver que la réponse à P_{diam} est positive et émettons la justification suivante : appelons x_i les couleurs du cercle extérieur de telle façon que x_i et x_{i+1} soit côte à côte sur le cercle. Supposons que les couleurs du cercle intérieur soit x_0 et x_k alors à chaque itération, les couleurs extérieurs x_0 et x_k doivent faire face à la même couleur pour que la configuration soit une solution. Donc si la séquence de couleur α passe devant x_0, la même séquence α doit passer devant x_k. Nous illustrons ceci par la figure III.23.

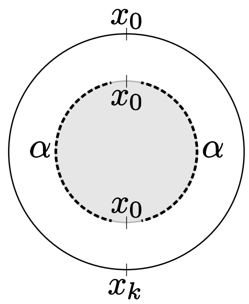


FIG. III.23. x_0 et x_k doivent faire face à la même séquence de couleur.

De ce fait, il faut le même nombre de couleur entre x_0 et x_k, qui sont donc diamétralement opposés. Il est donc nécessaire d'avoir un nombre de couleur pair sur le cercle extérieur. Ce qui prouve qu'il est impossible de trouver une solution lorsque le nombre de couleur sur le cercle extérieur est impair.

Le résultat clé de la preuve d'impossibilité est le fait qu'il est nécessaire d'avoir le même nombre de couleur entre x_0 et x_k. Ce résultat explique aussi pourquoi il est possible de trouver une solution lorsque le nombre de couleur est pair. Cependant, cet argument est-il valide ? Étudier la validité de cet argument revient à étudier P_{diam}. Nous décidons donc d'expérimenter pour résoudre P_{diam}, la stratégie va donc consister à construire des configurations telles que les deux couleurs du cercle intérieur ne soit pas diamétralement opposé sur le cercle extérieur.

Lorsque le cercle extérieur est composé de 4 couleurs, nous n'arrivons pas à construire de solution, cela nous amène à prouver que la solution de la figure III.20 est l'unique solution. Pour 6, nous commençons par essayer construire une solution telle que les deux couleurs intérieures soient adjacentes sur le cercle extérieur x_0 et x_1. Pour cela, nous avons vu le résultat suivant : les couleurs x_0 et x_1 du cercle extérieur doivent toujours être face à la même couleur, ce résultat nous fournit la suite de la stratégie pour construire une solution. En particulier, s'il existe une solution telle que les deux couleurs du cercle intérieur soient adjacentes sur le cercle extérieure, elle peut être construite en utilisant cette stratégie.

Nous sommes donc, ici, dans un cas particulier, où la stratégie utilisé fournit une solution si elle existe, donc dans le cas où la stratégie produise une configuration qui n'est pas solution alors il n'existe pas de solution telle que les couleurs internes soient adjacentes sur le cercle extérieur.

Nous commençons par mettre la même couleur devant x_0 et x_1, nous obtenons la figure III.24. Ensuite, la stratégie nous impose de mettre la couleur rouge (x_0) devant la couleur jaune (x_5) du cercle extérieur (voir figure III.25). En continuant ainsi de suite, nous n'avons pas de choix et nous obtenons la configuration de la figure III.26, qui n'utilise qu'une seule couleur sur le cercle intérieur. La stratégie produit donc une configuration qui n'est pas solution, nous pouvons alors en conclure qu'il n'existe pas de solution, avec 2 couleurs sur le cercle intérieur qui sont 2 couleurs adjacentes sur le cercle extérieur, lorsque le nombre de couleur est égal à 6 sur le cercle extérieur.

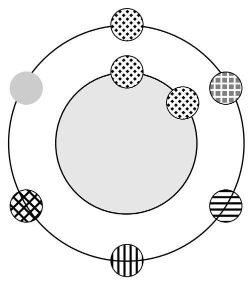


FIG. III.24. Première étape.

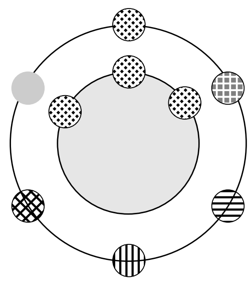


FIG. III.25. Seconde étape.

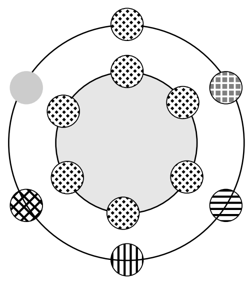


FIG. III.26. Résultat final.

Nous prenons alors comme couleur du cercle extérieur x_0 et x_2, la stratégie produit alors la configuration de la figure III.27 et nous vérifions que c'est effectivement une solution.

Cette figure montre qu'il existe une solution qui ne vérifie pas la condition, donc l'argument que nous avons utilisé est incorrect. La preuve que nous avons faîte est donc fausse.

Remarque : Nous avons construit le contre-exemple à l'argument. La recherche d'un contre-exemple amène à rentrer dans un processus de construction d'objets mathématiques vérifiant une propriété.

Deux choix sont possibles : réparer la preuve ou revenir au problème de la conjecture. Nous décidons d'essayer de réparer la preuve. Pour cela, nous étudions les figure III.27 et III.23.

En comparant les figures III.27 et III.23, nous pouvons remarquer que notre erreur est d'avoir considérer qu'il y avait autant de couleur entre x_0 et x_k et x_k et x_0. La représentation de la figure III.23 est une représentation spécifique et non générale de la condition : s'il « passe » la séquence α

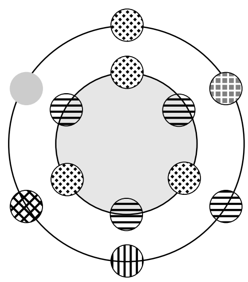


FIG. III.27. Une solution où les couleurs internes ne sont pas diamétralement opposées.

devant x_0 alors il est nécessaire qu'il « passe » la séquence α devant x_k. Par comparaison avec la figure III.27, nous pouvons maintenant penser que la représentation générale de cette condition est la figure III.28. Pour pouvoir terminer le cercle, il est donc nécessaire que l'angle associé à α divise 360. Ceci nous permet donc de nous apercevoir que notre conjecture est fausse et nous permet de nous rendre compte que ce qui entre en jeu n'est pas la parité du nombre de couleur, mais sa primalité.

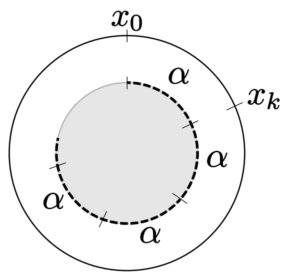


FIG. III.28. Représentation générale.

Cet exemple illustre donc le rôle que les exemples peuvent jouer dans la validation des arguments ainsi que l'apport de la comparaison et de l'étude d'exemples. Cet exemple montre aussi qu'il est, parfois, pertinent pour invalider un argument de s'autoriser à changer les « variables » du problème[7].

2.2.2. *Exemples génériques.* Les exemples peuvent aussi jouer le rôle d'exemple générique, c'est à dire d'un exemple qui représente une classe d'objet. Les « opérations » que nous effectuons sur cet objet sont alors reproductibles à tous les objets de la classe. D'une certaine manière, l'exemple n'est générique qu'en ce que toutes les « opérations » que nous effectuons sur lui, nous pouvons nous imaginer les réaliser sur n'importe quel autre élément de la classe en obtenant un résultat analogue. Ceci nécessite donc d'opérer sur des structures communes à l'ensemble des objets de la classe.

[6]Ici, nous n'arriverons pas à réparer la preuve car le résultat que nous voulons montrer est faux, car nous pouvons trouver une solution lorsque le nombre de couleur extérieure est égal à 9.

[7]Notre problème était sur les impairs, mais nous avons identifié que l'argument porté aussi sur les pairs, nous avons donc expérimenté sur les pairs, ce qui nous a permis d'invalider l'argument.

Ce point de vue à le défaut de ne pas prendre en compte le problème, car la généricité de l'exemple ne s'exprime que vis à vis d'un problème.

Un point de vue qui prend ceci en considération est celui de Perrin (2007), qui voit les exemples génériques comme des exemples sur lesquel « les comportements observés vont s'étendre au cas général. » Il propose pour trouver des exemples génériques de considérer le premier exemple non-trivial. L'exemple générique semble donc être, pour lui, l'exemple qui va prendre en compte toute la « complexité » du problème pour une classe d'objet donnée, c'est-à-dire un exemple qui ne fait « aucune concession ». Par exemple, pour le problème de la frontière, le carré de côté 2 n'est pas un exemple générique, car l'algorithme optimal pour résoudre ce cas, qui consiste à interroger les 4 coins, ne peut pas s'étendre aux autres carrés, ce cas ne permet pas de rendre compte de la « complexité » du problème. Un exemple générique est donc un exemple qui représente la « complexité » du problème, un exemple dont la résolution permet de résoudre le problème.

Nous définisons donc un *exemple générique* comme un exemple pour lequel nous pensons que la généralisation du processus de sa résolution va nous permettre de résoudre le problème. La généricité de l'exemple va donc dépendre de l'expérimentateur et du problème auquel il se réfère.

2.2.3. *Preuves par contre-exemples.* Comme nous l'avond déjà vu, les exemples peuvent jouer le rôle de contre-exemples et être utilisés pour montrer que des conjectures sont fausses.

2.2.4. *Exemple et processus de définition.* Ouvrier-Buffet (2003) mentionne que les exemples et les contre-exemples peuvent jouer un rôle au cours du processus de définition lors de la recherche du domaine de validité d'une conjecture. L'auteur considère, s'appuyant sur les travaux de Lakatos et de Balacheff, que « la génération d'exemples et de contre-exemples et leur utilisation » est un opérateur de la conception Lakatosienne de la définition. Nous donnons dans la sous-section 2.4 p. 61 un exemple d'un tel processus, dans lequel nous mettons aussi en avant le côté expérimental du processus de définition.

2.2.5. *Conclusion sur les exemples.* Nous considérons que la démarche expérimentale est un processus produisant des exemples. Nous avons essayé d'illustrer dans cette sous-section l'importance des exemples pour la résolution d'un problème. Nous avons identifié les utilités suivantes :

– production/affinement de conjecture ;
– invalidation d'argument ;
– preuve par contre-exemple ;
– preuve par exemple générique ;
– processus de définition.

2.3. Validation du produit de la stratégie : production de nouveaux outils. La validation du produit de la stratégie peut amemer à construire des outils qui peuvent être utiles lors d'une tentative de preuve. En effet, considérons le problème du jeu de set, comme nous l'avons mentionné, en expérimentant pour résoudre ce problème, nous rencontrons le problème de validation qui consiste à vérifier qu'un ensemble de cartes est sans set.

Pour des sets de taille 3, la stratégie de base consiste à tester tous les triplets de cartes d'un ensemble, or cela nécessite de choisir un ordre afin d'être sûr d'avoir tester tous les triplets de cartes. Cette technique est fonctionnelle, toutefois, elle n'est pas efficace. Nous pouvons construire une technique plus efficace grace à l'outil *bloc*. Dans l'exemple suivant, nous montrons comment nous pouvons utiliser cet outil pour déterminer un résultat intéressant sur le problème.

Exemple III.5. Considérons le problème du jeu de set et le jeu à 3 couleurs avec des sets de taille 3. Nous allons donner ici, un exemple d'utilisation de l'outil bloc, construit dans un premier temps pour valider qu'un jeu est sans set et que nous allons utilisé pour prouver le résultat R suivant : si $n \geq 1$,

$$Max(n, 3, 3) \leq 3^{n-1} \times 2$$

Cet outil, nous l'avons, à l'origine construit pour effectuer la validation du produit d'une stratégie lors d'une expérience de recherche de solution. La validation consiste à vérifier qu'un jeu est sans set[8]. Nous commençons par expliquer sur un exemple, quel est cet outil.

Considérons le jeu à 4 lignes suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour chercher à savoir s'il contient un jeu sans set, nous le réarrangeons de la manière suivante par bloc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 & 2 & 2 & | & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & | & 1 & 3 & 2 & | & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & | & 2 & 1 & 1 & | & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & | & 2 & 3 & 2 & | & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Un α-*bloc* est ainsi l'ensemble des cartes qui ont la couleur α sur la première ligne. Les blocs permettent de vérifier plus « rapidement » que le jeu est sans set, puisqu'il nous suffit de regarder si chaque bloc contient un set, puis à ensuite vérifier que tout triplet de carte dont la première ligne est multicolore stricte[9]ne contient pas de set.

Nous pouvons alors remarquer que vérifier qu'un bloc ne contient pas de set est équivalent à supprimer la première ligne du bloc et à vérifier que le jeu à 3 lignes obtenu ne contient pas de set.

Une généralisation de ce résultat est la suivante : dans un jeu à l ligne sans sets, chaque bloc est composé d'un jeu à $l - 1$ lignes sans set. Voici un schéma illustrant ceci :

[8]Être capable de détermienr si un jeu est sans set est utile pour le problème lorsqu'on cherche un minorant par exhibition d'un jeu sans set. Toutefois, il est a priori possible de résoudre le jeu du set sans résoudre ce problème. Par exemple, pour montrer qu'il existe une solution de cardinal X, nous pourrions dénombrer le nombre total de jeu de carte de X cartes et dénombrer le nombre de jeu de X cartes et les comparer, ce qui nous permettrait de prouver l'existence d'un jeu de X cartes sans set sans l'avoir exhiber.

[9]Nous disons qu'une ligne est multicolore stricte lorsque les couleurs qui la composent sont deux à deux différentes.

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & | & 2 & \dots & 2 & | & 3 & \dots & 3 \\ & J_1 & & | & & J_2 & & | & & J_3 & \end{pmatrix}$$

En considérant que c'est un jeu sans set à l lignes alors chaque J_i est jeu sans set à $l-1$ lignes. La preuve de ce résultat est facile : si un jeu est sans set alors chaque bloc est sans set donc tout triplet de cartes d'un bloc est sans set. Comme la première ligne d'un bloc est unicolore, cela signifie que tout triplet de cartes d'un bloc ne contient pas de set, c'est à dire que pour tout triplet il existe une ligne, différente de la première ligne, qui ne soit ni multicolore stricte ni unicolore. Nous appelons ce résulat R_1.

Nous pouvons alors voir que R_1 peut être utilisé pour obtenir le résultat R. En effet, nous pouvons faire une preuve du résultat R dans laquelle R_1 est le pas d'induction. Il nous reste à chercher les conditions initiales de la preuve par induction, nous avons $Max(1,3,3) = 2$. Remarquons que nous pouvons améliorer ce résultat en prouvant que $Max(2,3,3) = 4$ ou $Max(3,3,3) = 9$.

Cet exemple illustre le fait qu'un outil développé dans un premier temps pour valider des faits a pu être réutiliser pour déterminer un résultat intéressant sur le problème initial.

2.4. L'expérimental une aide à la recherche d'un domaine de validité. Nous allons essayé d'illustrer dans cette sous-section, le fait que l'expérimentale peut être une aide à la définition de nouveaux objets, à travers ce qu'Ouvrier-Buffet (2003) appelle problème de recherche du domaine de validité d'une conjecture.

Voici un nouvel exemple[10]illustrant le cas de la définition par recherche du domaine de validité :

Exemple III.6. Considérons le problème des échanges avec l'échange cycle de taille 3 avec grille quelconque et nombre de couleur égal à 2. Supposons que nous connaissons le théorème suivant :

Théorème III.7

soit G une grille 4-connexe[11], C et C' des colorations de G jumelles alors l'échange domino permet de passer de C à C'.

Nous sommes face à un problème de recherche de solution, nous commençons par expérimenter sur une ligne de taille 2. Nous pouvons alors observer qu'il est possible de tout faire (voir figure) pour la ligne de longueur 2.

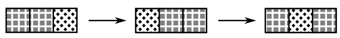


Fig. III.29. Les 3 configurations possibles pour la ligne de longueur 2.

Comme nous pouvons atteindre toutes les configurations en particulier, nous pouvons réaliser l'échange domino entre 2 cases de la ligne de longueur

[10]Les résultats de cet exemple ont été trouvés lors d'un MATh.en.JEANS avec le CLEPT.

[11]Une grille est 4-connexe si tout couple de cases est relié par un chemin de cases adjacentes. Deux cases sont adjacentes si elles ont un côte en commun.

2. Ceci nous donne le lemme suivant : *étant donné 3 cases côte à côte coloriée avec 2 couleurs, nous pouvons, avec le cycle de taille 3, réaliser l'échange domino de 2 cases côte à côte.*

De ce fait, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème III.8

Soit L une ligne de longueur supérieure à 2, C et C' des colorations jumelles de L composées de 2 couleurs, alors en utilisant le cycle de taille 3, il est possible de transformer C en C'.

Démonstration : Nous allons dans un premier temps montrer que sur une ligne de longeur supérieure à 2, nous pouvons effectuer l'échange domino pour tout couple de cases côte à côte. Pour cela, il nous suffit de remarquer que comme la ligne est de longueur supérieure à 2 alors tout couple de cases côte à côte est inclus dans un triplet de cases côte à côte. Nous pouvons alors appliquer le lemme précédent puisque la ligne n'est coloriée qu'avec 2 couleurs. Pour finir, nous utilisons le théorème III.7. ■

Nous pouvons alors généraliser cette preuve à des grilles 4-connexe vérifiant la condition H suivante : tout couple de cases côte à côte est inclus dans un triplet de cases côte à côte. Nous sommes alors face au problème P_{grille}, quelles sont les grilles qui vérifient la condition H ? P_{grille} est un problème de recherche de solution. Nous expérimentons pour résoudre P_{grille}.

Ápres, quelques expérimentations, nous observons que toutes les grilles que nous avons construites qui vérifient la condition H sont 4-connexes, c'est-à-dire des grilles qui sont telles que tout couple de cases est relié par un chemin dont deux cases successives ont la même abscisse ou la même ordonnée. Ce qui nous amène à émettre la conjecture C, être 4-connexes est équivalent à vérifier la condition H. C se découpe en 2 sous-problèmes : C_1, 4-connexes implique H et C_2, H implique $4 - connexes$. Ce sont des problèmes d'existence.

Nous expérimentons pour résoudre C_2. La stratégie consiste à construire des grilles vérifiant la condition H. Toutes les grilles que nous construisons sont bien $4 - connexes$. Nous décidons expérimenter pour résoudre C_1, la stratégie consiste à produire des grilles 4-connexes. Nous construisons la grille 4-connexe représentée sur la figure III.30. Cette grille ne vérfie pas la condition H. Cela nous permet de prouver que la réponse de C est négative.

Toutefois, C n'est pas si « négative » que cela, car une grille vérifiant la condition H est bien une grille 4-connexe,

Nous pouvons alors poser la question : étant donné une configuration de la grille de la figure III.30, est-il possible de passer à n'importe quelle configuration ?. Nous expérimentons pour résoudre ce problème, nous construisons alors les configurations a et b de la figure III.31 pour lesquelles il est impossible de transformer l'une en l'autre. Ce qui montre que nous n'arriverons pas à passer d'une configuration quelconque à une configuration quelconque quelque soit la grille 4-connexe. La réponse est négative.

2.5. Conclusion. La pratique de la démarche expérimentale permet de produire des exemples, dont nous avons montré différents rôles qu'ils peuvent tenir lors de la résolution d'un problème. En particulier, ils permettent de

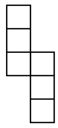


FIG. III.30. Une grille 4-connexes ne vérifiant pas la condition H.

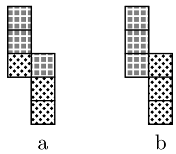


FIG. III.31. Un contre-exemple.

produire des conjectures et d'effectuer un double contrôle sur elles : un contrôle au niveau de sa validité et un contrôle sur sa preuve.

Sa pratique permet aussi de rencontrer de nouveaux problèmes, comme le problème de la validation du produit de la stratégie. Si la résolution de ce problème peut appraître comme annexe, elle permet néanmoins la construction d'objets qui peuvent s'avérer utiles dans la résolution du problème initial.

L'expérimental apprait aussi comme une aide à la définition de nouveaux objets, en particulier lorsque ces objets correspondent au domaine de validité d'une conjecture.

CHAPITRE IV

Quelques différences entre les mathématiques et les sciences expérimentales.

1. L'induction entre découverte et validité.

L'induction est souvent considérée comme étant le raisonnement associée aux sciences expérimentales et pas au mathématiques. Nous avons essayé de montrer que le raisonnement inductif, que nous avons définit de la même manière que Polya[1], est aussi un raisonnement présent en mathématiques. Cette définition de l'induction fait apparaître le raisonnement inductif comme un raisonnement de découverte.

L'une des questions qui se pose est alors de savoir si le raisonnement inductif peut-être utilisé pour valider des hypothèses. Popper (2007, p. 320), en parlant des sciences expérimentales, répond par la négative :

> [...] l'analyse de la procédure de justification des hypothèses ne nous amène, à mon avis, à rien dont l'on puisse dire que cela fait partie d'une logique inductive.

Il rajoute ensuite (p. 321) que : « l'évaluation de l'hypothèse repose seulement sur les conséquences déductives (des prévisions) que l'on peut en tirer : il n'est même pas nécessaire de mentionner le terme « induction ». ».

La validation d'une hypothèse est donc selon Popper, non pas basée sur le raisonnement inductif, mais sur le raisonnement hypothético-déductif. Selon Gohau (1992, p. 11), l'induction en sciences expérimentales est le raisonnement hypothético-déductif et non pas l'induction telle que nous l'avons définie. Nous expliquons cette différence par le fait que nous voyons le raisonnement inductif en mathématique comme à l'origine de découverte, mais pas de la validation mathématique, alors qu'il semble qu'en sciences expérimentales, l'induction soit vue comme un procédé de validation. Remarquons tout de même que la preuve par induction en mathématiques offre une procédure permettant de valider certains énoncés mais qu'elle ne peut en rien se comparer à un raisonnement hypothético-déductif[2].

Cela nous permet donc de souligner une première différence qui touche au processus de validation entre mathématiques et sciences expérimentales. La preuve mathématiques est essentiellement de nature déductive (même si la démarche mathématiques ne procède pas que par déduction) alors que le processus de preuve en sciences expérimentale semble être de nature

[1] Un raisonnment qui par observation d'exemples particuliers mène à la découverte de lois générales

[2] Le raisonnement hypothético-déductif est aussi utilisé en mathématiques lors d'expérimentation validative.

hypothético-déductive. En sciences expérimentale, la validation d'une hypothèse nécessite donc une confrontation entre les faits que l'on peut déduire de l'hypothèse et des résultats expérimentaux. De ce fait, les expérimentations doivent être reproductibles.

2. Protocole-Reproductibilité : validation

Selon POPPER (2007) la reproductibilité des expériences est l'un des critères de « démarcation » entre une science et une non-science. Un moyen d'obtenir la reproductibilité est alors d'énoncer les protocoles utilisés avec une grande précision :

> le chercheur décrit le matériel et les produits utilisés, il indique une à une les étapes de sa démarche ou encore le dispositif technique approprié. Un ou plusieurs « témoins » sont nécessaires afin d'établir des comparaisons fondées. (GIORDAN, 1999, p. 50)

En mathématiques, les expérimentations n'apparaissant qu'au niveau du processus de découverte, ce qui est communiqué à la communauté étant essentiellement le résultat et sa preuve mathématiques. En mathématiques, les expérimentations n'ont donc pas être reproductibles[3]puisqu'elles ne font pas partie des heuristiques de validation.

Remarque : Certains chercheurs de sciences expérimentales remettent en cause le principe de reproductibilité de Popper, en particulier pour les expériences qui sont faîtes par « la nature elle-même », nous ne souhaitons pas rentrer dans ce débat mais le lecteur intéressé pourra consulter (GUY, 1989).

[3]Au moins une exception existe, la revue *Experimental Mathematics* (voir `http://www.expmath.org`) demande aux auteurs de fournir les expérimentations mathématiques qu'ils ont utilisées sous une forme qui puissent permettrent à d'autres mathématiciens de les répéter. Cette demande se fait d'une part pour des considérations heuristiques et d'autre part pour apporter des éléments de support aux conjectures émises.

CHAPITRE V

Travaux didactiques autour de la démarche expérimentale

1. Une synthèse : le dossier de veille de l'INRP

L'institut national de recherche pédagogique a publié un dossier sur les travaux concernant la démarche expérimentale (Kuntz et al., 2007). Ce dossier comporte un bref historique de ce savoir-faire, ainsi qu'une synthèse de l'état actuel de l'enseignement de la démarche expérimentale en France et à l'étranger. Il inclut aussi des résultats d'expérimentations menées en France concernant l'apport de la démarche expérimentale sur l'apprentissage des mathématiques.

2. La démarche expérimentale et la construction de savoirs notionnels

2.1. Les travaux de Dias. Dans « La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage », Dias recherche une organisation didactique pertinente pour la construction des savoirs notionnels. Son hypothèse de recherche principale est « que la construction des savoirs et connaissances scientifiques nécessite[1]un recours à l'expérimentation dans un environnement didactique spécifique. » (p. 25).

L'auteur s'interroge donc sur la dimension expérimentale des mathématiques, qu'il caractérise comme « un va et vient constant entre théorie et expérience » (p. 25). Il questionne l'expérimentation et identifie, à l'aide d'une analyse épistémologique, différentes caractéristiques d'expérimenter. Expérimenter c'est :

– rencontrer l'incertitude ;
– c'est construire un réel partager ;
– c'est interagir avec des objets selon un rapport dialectique ;
– c'est construire du nouveau à partir du familier.

Cette analyse l'amène à conclure que « la dimension expérimentale des mathématiques est consistante sur le plan épistémologique. » (p. 43).

Il détermine alors des caractéristiques d'un milieu propice à l'expérimentation. Il s'appuie sur les travaux de Brousseau pour mettre en avant le fait que le va et vient entre objets sensibles et théoriques peut se faire à travers les phases d'action-formulation et de validation. Il utilise les travaux de Bloch, Margolinas et Brousseau pour appuyer le fait qu'il est pertinent que le milieu laisse aux élèves la possibilité d'agir, tout en leur renvoyant des rétro-actions. D'autre part, il stipule que l'utilisation d'instruments est pertinente du fait de leur capacité à favoriser l'activité mathématiques et

[1]Le caractère nécessaire nous apparaît comme trop fort.

accorde une importance particulière aux signes dans la formulation et l'interprétation. De plus, les objets matériels ainsi que les savoirs de base doivent être « suffisament familier pour le sujet afin que celui-ci puisse s'engager dans l'action, en dégager des conjectures et les questionner. » (p. 99).

Ces différentes caractéristiques, il les retrouve dans ce qu'il appelle « un milieu laboratoire ». Ce milieu comprend 3 dimensions :

– une dimension sémantique permettant un discours sur les objets ;
– une dimension syntaxique représentant les connaissances des sujets sur les objets ;
– une dimension pragmatique dans laquelle le sujet peut modifier ses connaissances grâce aux interactions qu'il y développe.

Une des hypothèses de recherche de l'auteur est que les milieux de type laboratoire permettent la médiation entre les objets sensibles et théoriques à travers les phases d'action, de formulation et de validation.

La situation étudiée et expérimentée dans la thèse est celle des polyhèdres réguliers de Platon[2]. L'auteur a conduit des expérimentations dans l'enseignement spécialisé[3] qui lui ont permis de confirmer la pertinence des milieux de type laboratoire pour la construction de connaissances scientifiques.

2.2. Les travaux d'Aldon. ALDON (2007) s'intéresse à la démarche expérimentale comme levier à l'apprentissage de nouvelles connaissances mathématiques. Il émet l'hypothèse que la faible diffusion des problèmes de recherche dans les classes est, en partie, dûe à un usage dont l'objectif principal est l'apprentissage de savoirs transversaux. Il cherche donc à mettre au point des situations de recherche qui puissent aussi être utilisées pour la transmission de savoirs mathématiques notionnels institutionnalisables et pouvant ensuite être travaillés en classe. Grâce à des observations d'élèves en situation de recherche, ALDON (ibid.) montre le rôle joué par les expériences dans la construction de nouvelles connaissances.

2.3. Un accès aux concepts élémentaires de théorie des nombres. SINCLAIRE, ZAZKIS et LILJEDAHL (2003) ont utilisé un micro-monde sur les nombres entiers conçu pour permettre aux utilisateurs de rentrer dans une démarche expérimentale[4] afin de résoudre des problèmes mettant en jeu des concepts de théorie des nombres[5]. Le logiciel a été conçu pour favoriser la mise en place de raisonnements à partir d'images.

Un des résultats de l'expérimentation est que certaines conceptions assez répandues – comme « plus le nombre est grand, plus il a de facteurs »– ont été remises en question par les expériences réalisées à l'aide du logiciel.

[2]Elle consiste à déterminer les polyèdres convexes de l'espace qui sont réguliers.

[3]Les expérimentations ont été menées auprès d'élèves en CLIS et UPI TSL

[4]Les auteurs définissent la démarche expérimental de la manière suivante :

> *We use the term 'experimental approach' to describe ways of discovering that rely on empirical methods.*

[5]L'utilisation du logiciel était optionnel, la moitié des participants ont utilisé les ordinateurs.

2.4. L'apprentissage du concept de fonction médiée technologiquement. LAGRANGE (2005) s'intéresse aux outils technologiques (logiciels de calculs algébriques) comme aide à l'étude de relations fonctionnelles. Il cherche à « transposer » les pratiques des chercheurs en mathématiques concernant la démarche expérimentale en utilisant des outils technologiques construit pour la classe. Pour cela, il développe une situation utilisant le logiciel Casyopée.

La situation construite par LAGRANGE a pour objectif de permettre aux élèves de concilier raisonnement inductif et construction de connaissances théoriques, en opposition à ce qu'il appelle « *poor induction* » dans laquelle les connaissances théoriques sont fournies par l'enseignant.

L'auteur identifie un « *gap* » chez les élèves dans l'articulation technique-théorie. Pour y remédier, il considère la systématisation des méthodes expérimentales et l'instrumentation des outils comme une possible solution.

3. La démarche expérimentale et l'apprentissage de la preuve

Nous avons vu précédemment que le processessus de preuve est un des éléments constitutifs d'une démarche expérimentale. Dans cette sous-section, nous nous intéresserons aux travaux qui ont étudié ce processus en lien avec la démarche expérimentale.

Même si dans la littérature nous ne trouvons que peu de trace de travaux parlant de démarche expérimentale et de preuve, certains auteurs, sans mentionner le terme démarche expérimentale, soutiennent la pertinence de placer les élèves en situation de démarche scientifique pour la production de conjectures et de preuves. Dans cette section, nous allons faire une synthèse de ces travaux.

3.1. L'école italienne. BOERO, GARUTI et MARIOTTI (1996) soutiennent l'hypothèse que la « *dynamic exploration* » joue un rôle crucial dans la résolution de problème. Selon eux, elle favorise la production et la preuve de la conjecture requise pour résoudre le problème. Derrière l'expression « *dynamic exploration* », il nous semble qu'on retrouve la volonté de placer les élèves dans une activité de démarche d'expérimentale par l'apport de matériel qu'ils peuvent utiliser pour mener leurs explorations. Ils mettent aussi en avant le fait que l'exploration du problème permet d'établir des liens logiques entre les faits (condition suffisante/nécessaire).

Dans (BOERO et al., 1996), les auteurs font l'hypothèse d'un lien cognitif entre la production de conjectures et la construction de preuves. Ils remarquent une continuité au niveau des arguments utilisés[6]. En particulier, si une argumentation est développée pour supporter la conjecture, les expériences menées confirment que la preuve est alors plus accessible aux élèves. Cela vient renforcer l'hypothèse de l'investigation comme levier à la production de preuve. Les auteurs soulignent aussi l'importance du contrat didactique, du « *field of experience* » et de la gestion de la classe pour obtenir ce type de résultats.

[6]Des arguments utilisés pour soutenir la conjecture sont réutilisés lors de la construction de la preuve

Toutefois, Pedemonte (2007) montre que même s'il y a une continuité entre l'argumentation et la preuve, il peut aussi y avoir une différence structurelle, qui si elle n'est pas « comblée » par les élèves va entraîner un échec au niveau de la preuve.

Certains des auteurs mentionnés précédemment se sont aussi intéressés au processus qui vont permettre de produire des propositions conditionnelles (du type « si A alors B… »). Dans (Boero, Garuti et Lemut, 1999), les auteurs identifient 4 processus à la base de propositions conditionnelles. Ces processus ne sont pas seulement basés sur l'observation mais comportent une part d'exploration à travers la génération d'exemples et de cas particuliers : ces processus sont de nature expérimentale.

D'autre part, nous pouvons remarquer que dans (ibid.), les auteurs identifient des liens entre ces processus et la production de preuve, nous pouvons voir que le moment clé dans chacun des liens identifiés est la production d'un nouveau problème.

Bartolini Bussi (2009) émet l'hypothèse que lorsque la conjecture est produite trop rapidement, il se peut que la phase de production de conjecture ne produisent pas suffisament d'arguments pour la preuve. Pour éviter cela, l'auteur conseille d'utiliser des stratégies qui vont ralentir la phase de production de conjectures et favoriser l'exploration du problème.

3.2. Expérimentation et preuve sont complémentaires. Kortenkamp (2006) a aussi travailler sur l'apprentissage de la preuve à l'aide de l'expérimentation. Pour lui l'enseignement de la preuve ne comprend pas seulement le « *how to prove* » mais aussi le « *when to prove* ». Dans cet article, l'auteur s'emploit à expliquer pourquoi il considère que l'expérimentation et la preuve ne sont pas opposés mais complémentaires. Les expériences sont, pour lui, une source de motivation à la preuve. D'autre part, il souligne le caractère validatif, génératif et explicatif des expériences. En particulier, il met en avant qu'expérimenter peut permettre de trouver des preuves.

3.3. Raisonnement hypothético-déductif. Nous pouvons aussi citer Jahnke (2007), qui soutient l'hypothèse que la compréhension de la preuve mathématique du point de vue épistémologique est favorisée par la formulation d'hypothèse et par le « *test* » de leurs conséquences (à la manière d'un physicien) plutôt que par l'élaboration de chaîne de déduction.

3.4. L'intérêt des « théories locales ». Grenier et Tanguay (2010) montre que l'expérimentation, couplée au contrat didactique usuel concernant la preuve, peut dans certains cas éloigner les élèves des raisonnements pertinents et de la preuve. En effet, l'expérimentation qu'ils ont conduite sur les polyèdres réguliers n'a pas été concluante au niveau de la preuve. Les élèves, bien qu'ayant expérimenté et exploré le problème, n'ont pas produit les arguments et raisonnements appropriés. Les auteurs expliquent cela par un contrat didactique mettant l'accent sur la formulation empiriques de conjectures et sur la prédominance de preuves de nature calculatoire. D'autre part, ils expliquent certaines conceptions des élèves par des appels non contrôlés à leur intuition. Enfin, s'appuyant sur les travaux de Jahnke, ils soutiennent l'hypothèse que les élèves ont construits leurs propositions sans faire appel à des « *local theories* », restant ainsi dans une relation de vérité et non de validité.

En conclusion, GRENIER et TANGUAY (ibid.) soutiennent que :

> [...] *current curricular trends, promulgating proving processes based on experimentations and conjectures, will lead to en efficient learning of proof, with proof attaining its full meaning in the learner's understanding, only if these processes are set within a genuine process of building 'small theories'*[...]

3.5. Formation des enseignants. Avec une perspective différente, GANDIT (2008) utilisent les situations de recherche et la pratique de la démarche d'investigation dans une ingienierie de formation des enseignants dont l'objectif est de travavailler leur conception sur la preuve. En effet, l'enquête que l'auteur a mené montre que l'enseignement « classique » de la preuve en dénature son sens (p. 86) :

> la preuve est un moyen de mettre en œuvre les connaissances du cours, elle s'apprend dans un contexte, où le doute est absent, où il n'y a pas d'enjeu de vérité, on suit un modèle de rédaction donné qui montre l'enchaînement de pas ternaires, construits sur le mode hypothèse/règle/conclusion.

En conclusion, il nous semble que de nombreux auteurs soutiennent l'hypothèse que permettre aux élèves de produire leurs propres conjectures et de leur laisser le temps de les affiner et d'en explorer les conséquences est un levier à l'apprentissage de la preuve.

4. La démarche expérimentale et la perception des mathématiques

Dans sa thèse, GODOT (2005) s'intéresse (entre autres choses) à la diffusion de la culture mathématiques et à l'apport des situations de recherche vis-à-vis de la culture scientifique. Les enquêtes que l'auteur a mené ont montré que la plupart des élèves ont une vision dans laquelle faire des mathémtiques consiste à résoudre des problèmes numériques en faisant des calculs. Pour changer ce rapport aux mathématiques, l'auteur propose d'utiliser des situations de recherche (p. 317) :

> [...] nous faisons l'hypothèse que les situations de recherche peuvent contribuer à enrichir l'image des mathématiques, quelles que soient l'institution où elles sont mises en œuvre.

GODOT (ibid.) justifie ce choix par le fait que les situations de recherche « montrent et font vivre les mathématiques sous leur aspect expérimental, « les mathématiques en train de se faire ». ».

5. La démarche expérimentale et le développement de compétences relatives à la résolution de problème

Les expérimentations menées par GODOT (ibid.) révèlent que les situations de recherche mettent en jeu des notions transversales comme « l'argumentation, la généralisation, l'impossibilité, la modélisation, la recherche de preuve. » (p. 209) qui ne sont que rarement travaillées en classe.

Nous pouvons aussi mentionner l'article de PAPADOPOULOS et IATRIDOU (2010) dont l'objet est l'étude des phases expérimentales produites par des élèves en situation de résolution de problème. Pour les auteurs, l'enseignement des théorèmes est paradoxal :

> *However, in the classroom setting a theorem that is introduced to the students demanding its proof creates a paradox.*

Ce paradoxe a amené les auteurs à proposer une situation, portant sur le théorème de Pick[7], dans laquelle il est demandé aux élèves de déterminer la formule du théorème. Les donnent aux élèves l'information suivante :« la formule utilise le de points appartenant à l'intérieur du polygone et le nombre de points appartenant à sa frontière ». L'expérimentation de cette situation a permis aux auteurs de répondre aux questions suivantes :

(1) Quelle est l'influence de l'expérience acquise lors de la résolution de problème sur les expérimentations produites par les élèves ?
(2) Quels sont les contrôles (expérimentaux) que les élèves ont développé ?

Les élèves ayant participé à l'expérience avaient suivi des cours de « *problem solving* » dont l'objectif était le calcul d'aire de formes irrégulières. Ces cours ont permis aux élèves d'apprendre les prérequis nécessaires à la résolution d'un problème portant sur les aires ainsi que de développer des techniques pour calculer les valeurs de celles-ci.

Lors des expérimentations, les élèves ont réutilisé des techniques développées lors de ces cours. Au niveau de l'expérimental, les auteurs ont remarqué que les élèves avaient identifié des variables qu'ils considéraient comme pertinentes (nombre de points internes, nombres de points sur la frontières, aires), ils ont alors conduit des expérimentations en faisant varier ces variables : une libre et les autres fixés, afin d'identifier leur rôle.

En réponse à la question 1), les auteurs ont conclu que pour que les expérimentations des élèves soient efficaces, un prérequis est de posséder les connaissances suffisantes en rapport avec le concept en jeu dans la situation, ici l'aire. Ils ont rajouté que l'absence de connaissance pouvait handicaper la partie expérimentale.

Par rapport aux contrôles, les auteurs ont remarqué que les élèves ont expérimenté en controllant la forme des polygones ainsi que les relations entre les variables.

Notre point de vue par rapport à cette situation est d'une part qu'il aurait peut être était possible que les élèves développent les techniques relatives aux calculs d'aires en tentant de résoudre les sous-problèmes induit par le problème initial. En effet, l'expérimental à travers le problème de la validation du produit de la stratégie aurait amené les élèves à rencontrer le problème suivant : *comment déterminer l'aire d'un polygone* ?

D'autre part, les variables « pertinentes » ne sont pas identifiées par les élèves mais données par l'énoncé. L'énoncé général *quel est l'aire d'un polygone dont les sommets sont sur des points de la grille ?* pourrait permettre

[7]Quelle est l'aire d'un polygone convexe dont tous les sommets sont situés sur un point de la grille ?

d'engendrer le problème du calcul d'aire d'un polygone donné (validation du produit de la stratégie) ainsi que de laisser la possibilité aux élèves d'identifier les variables pertinentes du problème.

6. La démarche expérimentale et le processus de définition

Ouvrier-Buffet (2003) mentionne que les exemples et les contre-exemples peuvent jouer un rôle au cours du processus de définition lors de la recherche du domaine de validité d'une conjecture. L'auteur considère, s'appuyant sur les travaux de Lakatos et de Balacheff, que « la génération d'exemples et de contre-exemples et leur utilisation » est un opérateur de la conception Lakatosienne de la définition.

7. La prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques dans les analyses didactiques

7.0.1. *Les travaux de Dahan.* Dans sa thèse, « La démarche de découverte expérimentalement médiée par cabri-géomètre en mathématiques » (2005), Dahan (p. 10) a pour objectif de fournir une caractérisation de la démarche expérimentale « dans les activités de tentatives de résolution de problèmes mathématiques, [. . .], médiée essentiellement par le logiciel de géométrie dynamique Cabri » (p. 10). Il s'intéresse donc, plus particulièrement, à l'expérimentation à l'aide de figures. Les situations qu'ils proposent utilisent la notion de « boîte noire »[8]dûe à Bernard Capponi. L'auteur justifie l'intérêt des problèmes de ce type pour répondre à ses questions (p. 135) par :
– l'obligation d'investigation ;
– la visibilité des investigations ;
– la discrétisation de la démarche ;
– la génération d'un débat.

L'hypothèse principale de l'auteur est que la démarche expérimentale se décompose en 2 phases – une phase pré-conjecture et une phase post-conjecture – chacune d'elles se décomposant en macro-étapes. Une macro-étapes et une succession de micro-étapes. Les micro-étapes sont du type exploration-interprétation.

Les macro-étapes de la phase pré-conjecture sont schématisées, page 179, ce schéma est reproduit sur la figure V.1, et celles de la phase post-conjecture page 180, reproduit sur la figure V.2.

Les ruptures marquent la fin d'une stratégie d'expérimentation et en annoncent une nouvelle :

Rupture 1 : Elle amorce la dévolution du problème ;

Rupture 2 : Elle marque l'apparition d'une première conjecture et l'entrée dans « une phase à activité de raisonnement logique mathématique plus dense. » (p. 181).

[8]Un problème de boîte noire consiste en la recherche d'une transformation géométrique sachant que l'on peut connaître (grâce à un logiciel) l'image de n'importe quel point par cette transformation.

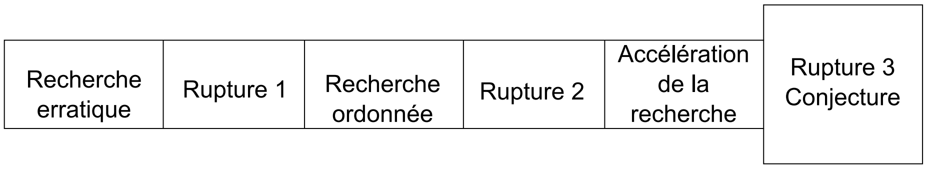


FIG. V.1. Schéma de la phase pré-conjecture de DAHAN.

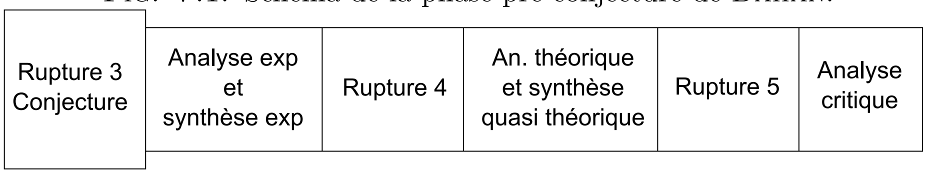


FIG. V.2. Schéma de la phase post-conjecture de DAHAN.

Rupture 3 : Elle arrive avec la découverte d'une conjecture solutionnant en partie le problème et marque l'entrée dans une phase de validation plus théorique utilisant l'environnement Cabri.

Rupture 4: Elle marque la formulation de la conjecture ultime et le passage à la Cabri-preuve (validation à l'aide du logiciel Cabri).

L'auteur a expérimenté avec différents types de publics : des lycéens, des enseignants et des chercheurs. L'une de ces hypothèses est que le niveau mathématiques de l'expérimentateur est corrélé avec les expériences proposées. Il a obtenu les résultats suivants :
– les macro-étapes de la phase pré-conjecture sont apparues ;
– les macro-étapes de la phase post-conjecture ne sont apparues qu'avec les chercheurs. Une des hypothèses de l'auteur est que cela est dûe au contrat didactique : la consigne était de trouver la transformation et non pas de la prouver.

7.1. Un texte de Durand-Guerrier. DURAND-GUERRIER (2010) met en évidence « les enjeux épistémologiques et didactiques de la prise en compte de la dimension expérimentale dans l'apprentissage des mathématiques. ». L'auteur caractérise la dimension expérimentale des mathématiques de la manière suivante :

> Ce qui caractérise la dimension expérimentale en mathématiques, c'est le va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets.

DURAND-GUERRIER rappel que la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques est au cœur de la théorie des situations didactiques de BROUSSEAU. D'autre part, elle souligne l'importance de la nature des expériences dans les phases d'actions, de formulation et de validation ainsi que dans le processus de conceptualisation. Plus précisément, elle met en avant les aspects suivants :
– les expériences contribuent au processus de conceptualisation par l'élaboration de nouveaux objets, résultats, preuves. . . ;

– l'importance des expériences pour l'évolution du milieu pour la validation. De ce fait, les situations de formulation sont insuffisantes à rendre compte à elle seule des actions des élèves. Une conséquence directe est qu'il n'y a pas forcémment un milieu commun pour la validation.
– au niveau méthodologique, il est nécessaire de recueillir d'autres traces que les productions écrites des élèves. De plus, les nouvelles techniques doivent être expérimentées par les élèves afin qu'ils puissent les valider expérimentalement. Ce dernier point pourrait expliquer le fait que les élèves « n'abandonnent pas facilement leur mode de traitement des situations, même après qu'un travail collectif important ait été fait. ».
– au niveau de la gestion de la classe, la présence potentielle de plusieurs milieux pour la validation peut fragiliser les débats. Il est donc important pour l'enseignant de prendre en compte « les connaissances mobilisées par les sujets pendant l'action, dans l'élaboration des conjectures et des preuves. ».

8. Les travaux autour des situations de recherche en classe

Des thèses ont été faites ou sont en cours autour des situations de recherche en classe :

– Rolland (1998) a montré la pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation
– Ouvrier-Buffet (2003) s'est intéressé au processus de définition d'objets mathématiques, la démarche expérimentale est prise en compte dans ses travaux à travers l'opérateur « génération d'exemples et de contre-exemples » et le caractère opératoire d'une définition ;
– Deloustal-Jorrand (2004) s'est intéressé à l'implication mathématiques. Elle a cherché à construire des situations didactique problématisant l'implication à travers 3 cadres : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensemble.
– Godot (2005) a étudié les situations de recherche en classe et hors classe. Notamment par rapport aux apprentissages en jeu et à l'effet du support matériel sur ceux-ci.
– Gandit (2008) a étudié les conceptions des enseignants sur la preuve et a construit une ingénierie de formation pour travailler ces conceptions. L'ingénierie comporte une phase dans laquelle les enseignants sont mis en position de chercheur.
– Cartier (2008) a travaillé sur l'utilisaiton de l'objet mathématique *graphe* pour l'enseignement de la preuve et de la modélisation. Elle a proposé des situations mettant en jeu cette notion pour l'apprentissage de la preuve et de la modélisation. .
– Modeste, dans ses travaux de thèses, s'intéressent à l'apprentissage de l'algorithmie à l'aide de situations de recherche.
– Colipan, actuellement doctorante, travaille sur la modélisation mathématique à l'aide de situation de recherche.

CHAPITRE VI

Les élèves pratiquent-ils la démarche expérimentale ?

Nous avons vu dans l'introduction que, même si dans les programmes du lycée le terme de démarche expérimentale tel quel n'est pas présent, de nombreux éléments proches de ceux que nous décrivons sont présents.

Le but de ce chapitre est de répondre à Q_2, qui est la question servant de titre à ce chapitre. Pour répondre à cette question, il nous est nécessaire d'étudier les exercices/problèmes que les élèves sont amenés à étudier en classe et de prendre en compte les moyens dont ils disposent pour les résoudre. Pour cela, nous avons décidé d'analyser des manuels.

Dans « Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms : a way to understand teaching and learning cultures », Pepin et Haggarty étudient l'utilisation des manuels par les enseignants dans la classe. Les interviews qu'ils ont conduites mettent en avant le fait que les enseignants français – tout comme les enseignants allemands et anglais – utilisent les manuels essentiellement pour les exercices qu'ils proposent. D'autre part, Ils mentionnent que le manuel est le principal outil des enseignants dans la classe et que concernant la France :

> *Textbooks in France were mainly written by inspectors and tended to be in line with current thinking on perceived 'good practice'.*

Cela nous permet de justifier que les manuels sont une source importante d'exercices pour les enseignants et qu'il est pertinent de les analyser. Toutefois, nous ne pouvons pas omettre que d'autres sources existent que cette étude ne prend pas en compte. Il nous faut aussi signaler que nous n'étudierons pas l'utilisation des exercices par les enseignants, nous nous limiterons à une analyse des exercices présents dans des manuels. De ce fait, la question à laquelle nous répondrons est la suivante : les exercices des manuels permettent-ils la mise en pratique de la démarche expérimentale ?

Pour cela, nous construisons une grille d'analyse d'exercices (section 1) avec laquelle nous allons analyser des manuels. Cela fournit les résultats de la section 2. Avant de présenter ces sections, il nous faut définir ce que nous appelons *exercice*. Nous considérons qu'un exercice est un énoncé posant une question ou demandant d'effectuer une action. En particulier, nous ne faisons pas de distinction entre les énoncés pour lesquels nous connaissons une technique de résolution et les énoncés pour lesquels cette technique n'est pas à notre disposition.

1. Une grille d'analyse

Nous construisons dans cette section une grille d'analyse de manuel portant sur la démarche expérimentale. Notre objectif est de déterminer si les exercices présents dans les manuels permettent la pratique d'une démarche expérimentale telle que nous la proposons. Pour cela, nous allons essayer de répondre aux deux questions suivantes :

I) qu'est-ce qu'une démarche expérimentale dans les manuels ?

II) quel est son rôle didactique ?

Nous allons, au long de cette construction, faire appel à des travaux effectués dans le domaine de la didactique des sciences expérimentales. En effet, nous faisons l'hypothèse que certains phénomènes d'enseignement de la démarche expérimentale peuvent être commun aux mathématiques et aux sciences expérimentales.

Nous avons dans le premier chapitre donné des éléments caractérisant une démarche expérimentale :

– proposer de nouveaux problèmes ;
– expérimenter-observer-valider ;
– tenter de prouver.

Nous essaierons donc de déterminer si les exercices des manuels permettent la mise en place de ces différents éléments, cela correspond à notre premier élément pour essayer de répondre à la question 1. Cela nous donne une première sous-questions :

I.1) Les exercices permettent-ils d'effectuer les actions précédemment citées ?

Nous allons maintenant, dans une première sous-section, voir ce que peuvent apporter les travaux effectués en didactique des sciences expérimentales à ce travail. Dans une deuxième sous-section, nous reviendrons sur l'analyse épsitémologique produite dans le premier chapitre afin de compléter la grille. Enfin, dans une troisième sous-section, nous développons un aspect de l'expérimental lié à l'incertitude.

1.1. Quelques éléments issus des sciences expérimentales.

1.1.1. *La démarche OHERIC.* Notre but n'est pas d'étudier la démarche OHERIC mais de prendre en compte les critiques qui ont été émises contre ce modèle afin de construire notre grille d'analyse.

La démarche OHERIC est un modèle de démarche expérimentale qui a été utilisé dans l'enseignement des sciences expérimentales mais aussi dans la formation des enseignants (Giordan, 1999, p. 37). Ce sigle signifie : Observation, Hypothèse, Expérimentation, Résultat, Interprétation, Conclusion. Giordan (ibid., p. 37) reproche à ce modèle d'être une version « linéaire et idéalisée » de la démarche expérimentale et de commencer par l'observation (Astolfi, 2005). Ce modèle correspond plutôt, selon Astolfi (ibid.), « à un schéma d'exposition a *postériori*, à une stratégie de communication de la science achevée et reconstruire. ».

Comme nous considérons aussi qu'une démarche expérimentale est un processus non-linéaire dont le coeur est un problème, nous retiendrons de cette critique de la démarche OHERIC les questions suivantes concernant la démarche expérimentale :

I.2) Est-elle linéaire ?

I.3) Commence-t-elle par une observation ou un problème ?

D'autre part, Astolfi (ibid.) pense que ce modèle, même s'il n'est pas un modèle satisfaisant de l'activité scientifique, peut être utile au niveau pédagogique, notamment pour faire « accéder [les élèves] à un savoir stabilisé ». Il semble donc distinguer deux buts à l'utilisation d'expérimentation en classe : la construction du savoir et le travail de l'activité scientifique.

Nous chercherons donc à déterminer si l'objectif didactique des exercices est la construction de savoir ou le travail de l'activité scientifique.

II.1) quel est son rôle : construction de savoir, travail de l'activité scientifique ou autre ?

Galiana (1999) a effectué une étude de manuel concernant la démarche expérimentale. Nous reprenons certains éléments de cette étude.

1.1.2. *Une étude de manuel.* Dans son article, étudiant les pratiques expérimentales dans les manuels, Galiana (ibid.) analyse, plus particulièrement :

– les expériences les plus fréquemment citées ;
– l'évolution historique du statut des expériences ;
– les démarches, la logique et les relations causales qui sont à l'oeuvre.

Nous n'allons pas faire une étude comparable à la sienne, nous limitant à l'étude d'une collection de manuels récents. Toutefois, nous utiliserons des éléments de cet article pour faire nos analyses. En particulier, Galiana (ibid.) repère des expériences qui sont présentes à chaque époque et s'interroge sur les raisons et les conséquences. L'auteur fait l'hypothèse que les raisons s'appuient sur des critères de simplicités, en particulier d'être « limpides quant à leur interprétation supposée ». Il rajoute (p. 13) que :

> Nous sommes, sur le plan de l'interprétation, dans le domaine de l'évidence. La conclusion est indiscutable.

L'auteur critique cet aspect car, selon lui (p. 13) :

> En privilégiant ce qui donne à voir, on privilégie l'*experientia*, l'observation de sens commun, au détriment de l'*experimentum*, l'expérience construite et réfléchie élaborée dans le cadre d'un programme scientifique de recherche.

D'autre part, l'auteur met en évidence le fait que ces expériences sont présentes dans les manuels à travers toutes les époques. Ce qui est, selon lui, à l'origine d'un « contexte d'évidences et d'habitudes » dans lequel « il est impossible de prendre du recul. ».

De cela, nous réutiliserons les éléments suivants :

II.2) quel est le rôle de l'élève : observateur ou expérimentateur ?

Galiana (ibid.) identifie aussi des expérimentations qu'il qualifie de monstratives ou démonstratives, dont le but est la mise en évidence d'un fait pour renforcer un discours théorique. Selon l'auteur, ces expériences sont des preuves :

> L'expérience émaille le discours de preuves dont l'évidence est soulignée (approche empirique). L'expérience est conçue comme preuve.

Ce type d'expérience peut donc se voir comme étant des appuis à un résultat, un problème se pose toutefois si l'expérience est interprétée comme étant la preuve du résultat. Ce point de vue sur les expériences est surtout présent dans les manuels de la période 1850-1980.

Dans les manuels de 1992-1996, l'expérience joue plusieurs rôles :

> Les expériences citées dans le texte à propos de la photosynthèse ont pour fonction la mise en évidence d'un phénomène ou d'un problème, la mise en évidence de relations, l'apprentissage de la comparaison, d'initier un questionnement mais aussi d'initier un apprentissange technique, de permettre la résolution d'un problème, de faire émerger des représentations.

Ce qui précède nous permet de préciser la question II.1, nous associons ainsi l'apprentissage technique, la mise en évidence d'un fait ou d'une problématique à la construction du savoir et la résolution de problème au travail de l'activité scientifique.

L'auteur identifie d'autres problèmes concernant les expériences proposées par les manuels comme l'utilisation exclusive du raisonnement inductif (partir des observations pour déduire des lois générales) mais nous avons considéré que ceci était spécifique[1]aux sciences expérimentales.

1.2. Confrontation avec notre définition. L'analyse épistémologique fait aussi[2]apparaître des aspects se situant au niveau de la preuve mathématique, du questionnement et de la modélisation.

II.3) Lien avec preuve et conjecture Nous porterons notre attention sur les points suivants[3] :

- quels types d'expérimentations sont présents : validatives, génératives ?
- l'expérimental est-il utilisé pour contrôler des conjectures ?
- l'expérimental est-il utilisé pour contrôler des preuves ?

II.4) Lien avec la démarche d'investigation Nous avons vu d'une part que la démarche expérimentale est un procédé de découverte dont l'objectif est la réponse à un problème et d'autre part que le fait de se poser de nouveaux problèmes fait partie intégrantes des actions qui composent une démarche expérimentale. Pour étudier le lien avec la démarche d'investigation, nous essaierons de répondre aux questions suivantes :

- un problème est-il à l'origine de l'expérimentation ? ce problème est-il ouvert ?

[1]Même si nous pourrions faire une analogie avec les mathématiques concernant l'utilisation exclusive du raisonnement déductif.

[2]Nous n'avons pas effectué une recherche exhaustive concernant les études qui ont pu être menées dans le domaine des sciences expérimentales. Il est donc possible que certains points traités dans cette sous-section puissent aussi être présents dans des travaux de didactique des sciences expérimentales.

[3]Ces points ont été traités dans la section III du chapitre 1 de la partie 1.

– les exercices peuvent-ils conduirent l'élève à proposer de nouveaux problèmes ?

II.5) Modélisation Nous avons aussi vu que dans une démarche expérimentale, telle que nous la considérons, une activité de modélisation est développée. Nous nous demanderons en particulier, si les exercices permettent de rentrer dans une activité de modélisation générant des éléments mathématiques.

1.3. Incertitude. La démarche expérimentale est utilisée pour la résolution d'un problème ouvert, c'est-à-dire un problème dont nous ne connaissons pas la réponse ou un moyen permettant d'obtenir cette réponse. C'est donc un problème sur lequel pèse une incertitude. Zaslavsky (2005) distingue trois types d'incertitude pour les mathématiques :

i) Hypothèses rivales (« *competing claims* ») : Plusieurs affirmation plausibles qui se contredisent.
ii) Chemin inconnu ou conclusion incertaine (« *unknown path or questionnable conclusion* ») : Incertitude associée à la recherche d'une solution qui est inconnue au sujet. Généralement, ce type d'incertitude est présente dans les problèmes d'exploration, d'investigation et dans les problèmes ouverts.
iii) Hypothèse non vérifiable facilement (« *non-readily verifiable outcome* ») : Lorsqu'un sujet manque de confiance concernant la validité ou l'exactitude d'une hypothèse qui nécessite une vérification et qu'il ne possède pas de méthode pour vérifier cette hypothèse. L'auteur rajoute que ce type d'incertitude est présente dans le domaine des probabilités et de la combinatoire. C'est le type d'incertitude associée à l'absence de moyen de contrôle d'un résultat.

L'auteur insiste sur le fait que ces types d'incertitude ne sont pas dépendants mais interdépendants. C'est à dire que chaque type d'incertitude peut entrainer les autres types d'incertitudes.

Remarquons que les types d'incertitudes précédents ont un point en commun qui est la non-unicité de la réponse possible, une condition suffisante à la création d'incertitude peut donc être la possibilité d'envisager plusieurs réponses possibles. De plus, une incertitude qui semble plus spécifique au troisième type d'incertitude est celle de l'absence de moyen de contrôle d'un résultat.

Au niveau de l'expérimental, la non-unicité des solutions envisageables peut se transcrire à travers un jeu entre expérimentations et conjectures, comme dans l'exemple **??** où apparaît une confrontation entre ce que nous pouvons déduire du « modèle » et ce que l'expérimental propose. Nous dirons donc qu'il y a *incertitude expérimental* lorsque le problème permet la mise en place d'un jeu de vérification-affinement des conjectures. Par exemple, le problème associé à la conjecture de Goldblach : est-ce que tout nombre pair strictement supérieur à deux peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers ?, ne possède pas, initialement, ce type d'incertitude expérimental, car à chaque fois que nous expérimentons sur des nombres, nous pouvons trouver un couple de nombre premiers. Ceci est à la fois dû au limitation sur la grandeur des nombres des expérimentations à la main mais aussi aux limitations informatiques puisqu'il a été vérifié qu'un couple de nombre premier existait pour tout entier pair strictement supérieur à 2 et inférieur à 4×10^{14} (RICHSTEIN, 2000). Nous parlerons d'absence *d'incertitude au niveau du raisonnement inductif* pour le problème de Goldblach. Le problème de la validation du produit de la sratégie pour la conjecture de Goldblach peut être résolu avec une connaissance permettant de vérifier si un nombre est premier.

De plus, au niveau expérimental, l'absence de moyen de contrôle peut se voir par le manque de résultat théorique permettant la validation des observations. Comme dans le *jeu du set*[4], cette absence impose donc à l'élève de construire des outils lui permettant de valider mathématiquement ces observations.

Ce qui nous amnène à nous poser la question suivante :

I.4) Est-ce que les problèmes permettent la présence d'une incertitude ?

Nous allons dans la sous-section suivante construire la grille d'analyse basée sur les questions que nous avons identifiées précédemment.

1.4. Construction de la grille d'analyse. Dans un premier temps, nous allons récapituler les questions auxquelles nous essaierons de répondre :

I) Qu'est qu'une démarche expérimentale ?
  - I.1) permet-elle de : proposer de nouveaux problèmes, expérimenter-observer-valider, tenter de prouver ?
  - I.2) est-elle linéaire ?
  - I.3) commence-t-elle par une observation ou un problème ?
  - I.4) présence d'incertitude.

II) Quel est son rôle didactique ?
  - II.1) quel est son rôle : construction du savoir ou travail de l'activité scientifique ?
  - II.2) quel est le rôle de l'élève : expérimentateur ou observateur ?
  - II.3) apprentissage de la preuve.
  - II.4) apprentissage de la démarche d'investigation.
  - II.5) apprentissage de la modélisation.

1.4.1. *Critères de sélection des exercices.* Dans un premier temps, il nous faut nous limiter à une classe d'exercices ou de problèmes pour éviter d'étudier tous les exercices présents dans les manuels. Nous faisons le choix de ne considérer que les exercices dans lesquels :

A) le manuel demande explicitement de faire une expérience ;

B) à l'origine il y a un problème que nous considérons comme ouvert.

[4]Ceci rejoint ce que dit ZASLAVSKY (2005) sur l'incertitude qui pèse en combinatoire qui est souvent du type 3, car, selon lui, les élèves ont des difficultés à décider s'ils ont testé tous les cas.

Nous avons choisi les exercices du type A, car ce sont des exercices où le manuel demande explicitement de faire une expérience. De ce fait, cela nous permettra d'étudier son rôle mais aussi de répondre à la question I). Les exercices du type B ont été choisis, car nous avons vu que, d'après notre modèle de la démarche expérimentale, initialement, il y a un problème ouvert, ces exercices sont donc susceptibles de provoquer la mise en place d'une démarche expérimentale.

D'autre part, nous avons pu remarquer durant l'analyse du manuel des exercices d'un autre type, auquel nous associons la lettre C. Dans ces exercices, le manuel ne demande pas à l'élève de faire une expérimentation mais seulement d'effectuer une observation sur une figure qu'il fournit, figure qui est le résultat d'une expérimentation effectuée par les auteurs du manuel. En particulier, nous considérons que la présence d'exercices du type C, est le signe d'une séparation entre une phase de découverte et une phase de validation. De plus, ces exercices vont nous permettre de déterminer des éléments de contrat didactique concernant l'observation.

1.4.2. *Comment répondre aux questions ?* Pour répondre aux questions I.1) et I.2), nous observerons plus particulièrement le découpage des exercices effectué par le manuel. Ce découpage nous permettra aussi de répondre aux points II.3) et II.4). Nous porterons une attention particulière à des découpages du type : phase de découverte expérimentale suivi d'une phase de vérification expérimentale suivi par une phase de preuve.

Pour répondre à la question II.2), nous nous appuierons sur l'hypothèse de travail suivante : *Lorsque le manuel demande explicitement à l'élève de faire une expérimentation, l'élève ne va pas en effectuer d'autres.* Nous considérerons donc que l'élève est dans le rôle de l'expérimentateur lorsqu'il peut décider de faire une expérimentation, quelle expérimentation il veut faire et quels moyens/outils il va utiliser pour la réaliser. Nous chercherons à savoir si le manuel demande aux élèves d'effectuer telle expérimentation ou telle autre.

L'étude du point II.4) se fera en essayant de voir si les exercices proposés sont posés de manière générale et comportent plusieurs sous-problèmes traitables par les élèves en n'étant pas mis en avant par le manuel. Ceci est basé sur l'hypothèse de travail suivante : *un cadre trop rigide empêche les élèves de se poser de nouvelles questions.* Cette hypothèse peut être vue comme une conséquence d'un élément du contrat didactique : je ne vais pas faire plus que ce qu'on me demande.

Pour étudier le point II.5), la méthodologie utilisée sera de considérer qu'il ne peut y avoir activité de modélisation que dans le cas où l'élève est susceptible de suivre son propre chemin de résolution. ll faudra donc que le découpage de l'exercice ne soit pas trop « dirigiste » et et que l'exercice ne soit pas trop « proche » d'autres exercices pour lesquels les élèves ont une technique de résolution.

Pour répondre à la question I.4), nous essayerons de faire les exercices proposés par le manuel en effectuant les expérimentations demandées nous utiiliserons certains éléments de contrat didactique concernant l'obsevation pour conclure. Enfin, la question I.3) ne pose pas de problèmes particuliers.

2. Étude d'une collection de manuels

La collection de manuel que nous avons choisie est la collection « Déclic Maths » correspondant aux programmes scolaires de 2002 (*B.O. hors série n°2, 4 et 7, 30 août 2001*). Nous allons étudier les manuels suivants :

– pour la seconde, le manuel *Déclic Maths Seconde* ;
– pour la première scientifique, le manuel *Déclic Maths Première S* ;
– pour la terminale scientifique, le manuel *Déclic Maths Terminale S*

Nous avons choisi de focaliser nos analyses sur ces niveaux, car nos expérimentations ont été faîtes avec des élèves de seconde et de première scientifique. De plus, nous faisons l'hypothèse que c'est dans les séries scientifiques que nous sommes susceptibles de trouver le plus d'exercices permettant la mise en pratique de la démarche expérimentale. Nous nous sommes aussi intéressés au niveau de la seconde, car il nous permet de suivre une possible évolution depuis le début du lycée.

2.1. Seconde.

2.1.1. *Un exemple de type A.* La figure VI.3 page 88 représente un exemple d'exercice du type A, c'est-à-dire un exercice dans lequel le manuel demande explicitement de faire une expérimentation. Les réponses aux questions précédentes, portant sur cet exercice, sont les suivantes :

I.1), I.2) La démarche est linéaire : observation puis conjecture et enfin pour finir, la preuve.

I.3) C'est un problème de recherche de solutions : « Trouver l'ensemble de tous les points M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ ».

I.4) Nous ne pouvons pas considérer que le problème ait une incertitude expérimentale au niveau des résultats, pour plusieurs raisons :

– le manuel donne les étapes expérimentales à suivre durant le processus de résolution : nous émettons l'hypothèse que l'élève ne va pas remettre en cause les manipulations demandées par le manuel. Nous avons l'effet de contrat didactique suivant : *si le manuel me demande de faire ça, c'est que cela va me permettre de résoudre le problème* ;
– en effectuant les manipulations demandées par le manuel, il est impossible de ne pas observer un cercle. D'autre part, le seul objet étudié au cours du cursus scolaire qui ressemble a un cercle est le cercle ;
– le manuel ne semble pas prévoir la formulation d'une conjecture fausse par l'élève ;
– Les transformations géométriques vues dans ce chapitre (p. 260) transforment un cercle en un cercle de même rayon (elles conservent les distances). De ce fait, l'élève peut interpréter la partie 3 de l'activité comme la confirmation à sa conjecture.

De plus, pour cet exercice, étant donné que la validation mathématique de l'observation entraîne la résolution du problème et que le problème cloisone la phase d'expérimentation et la phase de preuve, il n'y a pas d'incertitude expérimentale au niveau des contrôles.

II.1) L'expérimentation a pour but de permettre à l'élève d'émettre une conjecture sur le lieu de point décrit par M'. Utiliser un logiciel de géométrie dynamique facilite l'expérimentation en permettant la construction de la trace du point M' lorsque M bouge sur le cercle. Le rôle de l'expérimentation est donc la mise en évidence d'un fait.

II.2) Le rôle de l'élève est d'effectuer les manipulations demandées par le manuel : « Créer… », « Construire… », « Faire bouger… », … L'élève est donc dans une position d'observateur des manipulations demandées par le manuel.

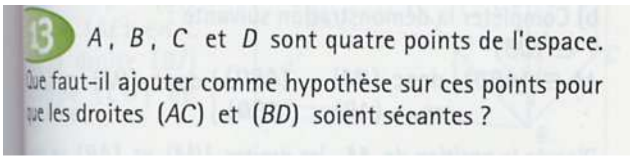
II.3) Nous remarquons que le manuel demande explicitement de quitter le logiciel de géométrie durant la phase de démonstration par la phrase suivante : « On quitte le logiciel et on prend sa feuille de papier. » L'expérimental ne semble donc pas avoir sa place durant le processus de démonstration. L'expérimentale est utilisée pour contrôler la conjecture émise.

II.4) Il n'y a pas possibilité de se poser de nouvelles questions, une fois la preuve effectuer le problème est terminé.

II.5) L'élève est obligé de suivre le chemin tracé par le manuel ce qui va le conduire à la résolution du problème, il n'y a donc pas d'activité de modélisation. En plus de cela, nous pouvons signaler que la partie 3 : *Vérification à l'aide du logiciel d'une conjecture faite* fourni la modélisation à utiliser pour résoudre le problème.

Commentaire : Cet exercice montre l'aspect outil des transformations. Il permet aussi de manipuler un logiciel de géométrie dynamique, en particulier la fonction trace. L'hypothèse que nous émettons est que le manuel n'a pas laissé les expérimentations à la charge de l'élève, car il voulait s'assurer que le statut de point libre soit donné au point M et que la fonction trace soit activée. L'activation de la fonction trace sur le point M' est presque nécessaire pour pouvoir conjecturer que l'ensemble de points décrit par M' est un cercle.

2.1.2. *Un exemple d'exercice de type B.* Les exercices du type B sont les exercices dont la question est une question ouverte. La figure VI.1 présente un exercice de ce type.



13 A, B, C et D sont quatre points de l'espace. Que faut-il ajouter comme hypothèse sur ces points pour que les droites (AC) et (BD) soient sécantes ?

FIG. VI.1. Un exercice de type B.

Cet exercice propose une question ouverte, dont le chemin de résolution n'est pas donné par le manuel. Cependant, nous pouvons trouver dans le cours (p. 200) une propriété qui permet de répondre directement à cette question : deux droites sécantes sont coplanaires. Cet exercice permet toutefois de mettre en place des expérimentations ou des changements de questions (pour simplifier le problème nous pourrions dans un premier temps considérer que les 4 points sont dans un même plan). Dans cet exercice, l'élève peut effectuer ses propres expérimentations.

2.1.3. *Un exemple d'exercice de type C.* La figure VI.2 représente un tel exercice. Nous avons décidé de prendre en compte ces exercices dans notre analyse, car cela permet de répondre à la question 5a sur les raisons qui poussent le manuel à prendre où à laisser l'expérimentation à la charge de l'élève.

Le problème de l'exercice de la figure VI.2 est la résolution d'une équation du second degré. Pour résoudre ce type d'équation, la technique que le manuel demande de réaliser est de factoriser l'expression. La détermination des facteurs se fait de manière expérimentale par lecture graphique suivi d'un calcul algébrique montrant que ce qui a été déterminé graphiquement est correct. Cette technique n'est valable que lorsque la représentation graphique des fonctions permet d'obtenir les racines sur un multiple de l'unité de l'axe des abscisses, ce qui est bien le cas ici.

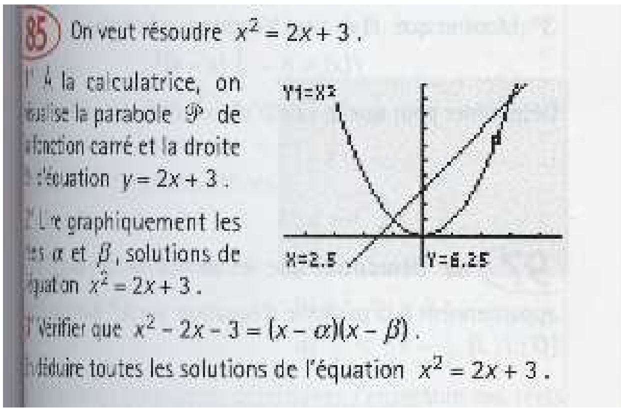

85 On veut résoudre $x^2 = 2x + 3$.
1° À la calculatrice, on ...sualise la parabole $\mathcal{P}$ de ...fonction carré et la droite ...équation $y = 2x + 3$.
2° L...e graphiquement les ...s α et β, solutions de ...quation $x^2 = 2x + 3$.
3° Vérifier que $x^2 - 2x - 3 = (x - \alpha)(x - \beta)$.
...éduire toutes les solutions de l'équation $x^2 = 2x + 3$.

FIG. VI.2. Un exercice de type C.

Essayons maintenant de répondre aux questions précédentes concernant cet exercice :

I.1), I.2) La démarche est linéaire : observation du graphique puis preuve. L'expérimental n'est pas utilisé dans la démarche de preuve, ni pour contrôler les conjectures, car l'exercice ne laisse pas la possibilité à l'élève de représenter ces courbes autrement, par exemple en effectuant un zoom.

I.3) Une question est à l'origine.

I.4) L'incertitude expérimentale est absente. En effet, nous faisons l'hypothèse que les élèves ne vont pas remettre en cause le fait que l'intersection des courbes se fait pour des abscisses entières. Cette hypothèse est relié à la possible règle de contrat didactique suivante : les figures données par le manuel représente « parfaitement » les objets qu'elles représentent. D'autre part, il est même nécessaire, pour pouvoir finir cet exercice de considérer que les abscisses sont entières.

II.1), II.2) L'expérimentation apparaît ici comme un outil permettant de résoudre le problème, elle a pour but de mettre en évidence un fait. L'élève est uniquement dans un rôle d'observateur.

II.3) La preuve sert, ici, à valider les observations effectuées sur la figure. Toutefois, la preuve étant un calcul algébrique de base, elle ne nous semble pas pouvoir faire intervenir l'expérimentale, d'autant plus que les valeurs à conjecturer sur la figure sont correctes.

II.4) Le problème ne permet pas de se poser de nouvelles questions, car il est fermé.

II.5) Le problème ne permet pas à l'élève de construire sa propre modélisation puisque c'est le manuel qui donne la représentation graphique de l'équation et qui demande d'effectuer la factorisation.

2.1.4. *Résultats.* Nous n'avons trouvé que peu d'exercices du type A, B ou C, puisqu'au total pour ces 3 types, nous n'avons trouvé que 41 exercices alors que le livre en contient 1008.

Dans le manuel de seconde, nous n'avons trouvé que peu d'exercices proposant une question ouverte (type B), ils sont au nombre de 8 (voir annexe ? ? ? ? page ? ? ? ? ?). Il y a par contre un nombre important d'exercices du type A, c'est-à-dire, demandant d'effectuer une expérimentation, ils sont au nombre de 27 (voir annexe page ? ? ? ? ?). Les manipulations demandées par le manuel sont des trois types suivants :

– construction et déformation d'une figure géométrique à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ou à la main ;
– calculer des « formules » à la main ;
– représenter des courbes en utilisant une calculatrice graphique.

Nous avons trouvé 6 exercices du type C dans lesquels ce n'est pas une expérimentation qui est demandée mais une observation sur une figure fournie par le manuel.

Les exercices de type B ne proposant qu'une unique question ouverte, nous considérerons que ce sont des exercices qui permettent le travail d'une démarche expérimentale telle que nous la préconisons, à ceci près que les problèmes ne sont généralement pas suffisamment « ouverts » pour permettre de se poser de nouvelles questions et qu'ils peuvent se résoudre en utilisant les théorèmes du cours ne permettant pas la construction de nouveaux outils de résolution et ainsi un travail de modélisation.

Les exercices de type A nous permettent de répondre à nos questions, car ils sont généralement découpés en sous-questions qui nous permettent d'obtenir un squelette de la démarche utilisée. Voici les réponses que nous obtenons :

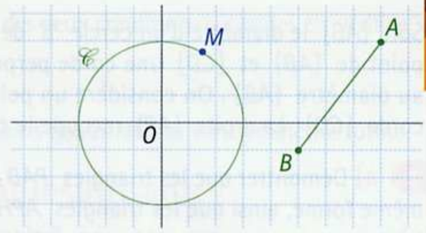
I.1), I.2) La démarche utilisée est exclusivement linéaire : mise en place d'une expérimentation puis observation puis émission d'une conjecture suivi d'une vérification par la mise en place d'une nouvelle expérimentation (pas souvent) et pour finir la phase de preuve.

I.3) Très peu d'exercice commence par une questions.

I.4) Il n'y a pas présence d'incertitude expérimentale du fait que :

– comme les expérimentations ne sont pas laissées à la charge de l'élève mais demandées par le manuel. La règle de contrat

2 Conjecturer un ensemble de points



Dans la figure ci-contre, le cercle $\mathscr{C}$ de centre O est fixé, ainsi que le segment $[AB]$.
Pour tout point M libre sur le cercle $\mathscr{C}$, on construit le point M' tel que $ABMM'$ soit un parallélogramme.

Le but est de trouver l'ensemble de tous les points M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$.

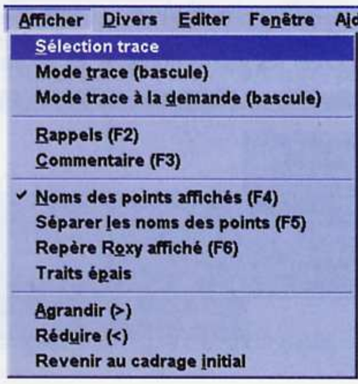
1 Utilisation d'un logiciel de géométrie pour construire la figure ► *Voir Module 5, p. 340*

a) En utilisant le quadrillage, construire la partie fixe : centre O, cercle $\mathscr{C}$ et segment $[AB]$.
Créer le point M libre sur le cercle $\mathscr{C}$.

b) À partir de M, on veut construire le point M'.
Comment traduire simplement que $ABMM'$ est un parallélogramme ?
Construire le parallélogramme $ABMM'$, en créant le point M'.

c) Faire bouger le point M et vérifier que $ABMM'$ reste bien un parallélogramme !

2 Recherche de l'ensemble décrit par le point M'



Le logiciel permet de laisser la trace du point M' lorsque M bouge sur le cercle $\mathscr{C}$.
Sous GEOPLANW :
Afficher / Sélection trace , et cliquer sur la ligne de M'.
Cliquer sur l'icône .
Faire bouger le point M à l'aide de la souris : des points M' se dessinent.
Quel semble être l'ensemble décrit par le point M' ?
Cliquer sur l'icône pour effacer la trace des points M'.

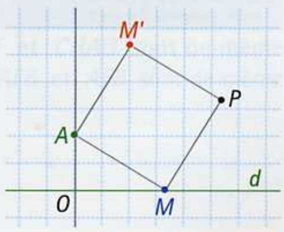
3 Vérification à l'aide du logiciel d'une conjecture faite

Trouver une transformation telle que le point M a pour image le point M'.
Définir cette transformation sur le logiciel (par point et image : attention, il faut que ce soit des points fixes de la figure).
Créer la ligne image du cercle $\mathscr{C}$ par la transformation ainsi définie.
Vérifier que lorsque le point M bouge, le point M' se déplace sur cette ligne.

4 On quitte le logiciel et on prend sa feuille de papier

Démontrer la conjecture faite et rédiger cette démonstration.

Pour aller plus loin



Dans la figure ci-contre la droite d est fixe, ainsi que le point A.
M est un point libre de la droite d.

Quel est l'ensemble décrit par le point M' tel que $AMPM'$ soit un carré ?

FIG. VI.3. Exercice du type A

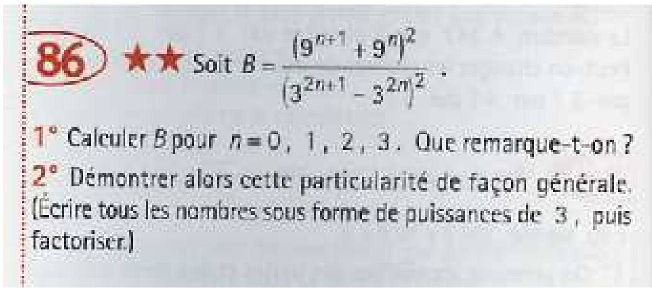
suivante : ce que me demande de faire le manuel me permet de résoudre le problème, permet d'enlever toute incertitude expérimentale. De plus, lorsqu'il y a des observations numériques à effectuer, le manuel s'arrange pour que cela soit sur des nombres entiers ;
- la conjecture est souvent renforcée par les questions qui vont suivre ;
- dans le t.d. 2 p. 71, le manuel demande de considérer les résultats expérimentaux comme vrais ;
- un seul exercice met en garde les élèves contre ce qui est affichée par la calculatrice (activité 3 p. 61) ;
- la démarche linéaire observation, conjecture puis preuve ne permet pas la mise en place d'une incertitude, du fait de la possible règle de contrat suivante : le manuel ne va pas nous demander de prouver un résultat qui est faux. De ce fait, s'il y a incertitude elle ne porte que sur la validité de la preuve et non du résultat. Ce qui participe à donner un aspect linéaire à la démarche.

II.1) Le principale rôle des expérimentations demandées par le manuel est de faire émettre des conjectures. La mise en évidence d'un fait semble donc être le principale rôle de l'expérimentation. Les exercices de recherche d'un maximum ou d'un minimum, ou encore de résolution d'une équation du second degré sont résolus à l'aide d'une technique que l'on peut qualifier d'expérimentale : nous émettons une conjecture sur la solution et nous montrons ensuite par un calcul algébrique que ce nombre est bien solution, c'est grâce à cette conjecture sur la solution que ces exercices sont résolvables en utilisant les éléments fournis par le cours. L'expérimentation apparaît ainsi comme un outils dans la résolution. Cependant, ici, l'outil n'est utilisable que lorsque l'unité de l'axe des abscisses ou des ordonnées est un multiple de la solution, ce que nous ne pouvons pas savoir a priori. Nous ne considérons pas que ce sont des exercices mettant en jeu une démarche expérimentale, car ils ne sont que l'application d'une technique expérimentale.

II.2) L'élève est le plus souvent dans une position d'observateur. L'élève ne fait qu'effectuer les manipulations demandées par le manuel, manipulations qui permettent la résolution de l'exercice.

II.3) L'expérimental ne semble pas utiliser dans la démarche de preuve puisqu'il semble y avoir une « clôture » (comme sur la figure VI.1) entre l'expérimental qui est utilisé pour obtenir une conjecture (et parfois à la contrôler) et la phase de preuve.

Tous les exercices ne commencent pas par une question, plusieurs exercices commencent par demander d'effectuer des observations sans que l'on sache pour quelles raisons les effectuer comme l'exercice 86 p. 34 de la figure VI.4.



86 ★★ Soit $B = \dfrac{(9^{n+1} + 9^n)^2}{(3^{2n+1} - 3^{2n})^2}$.

1° Calculer B pour $n = 0, 1, 2, 3$. Que remarque-t-on ?

2° Démontrer alors cette particularité de façon générale. (Écrire tous les nombres sous forme de puissances de 3, puis factoriser.)

FIG. VI.4. Un exercice qui commence par des observations.

La première question joue, ici, le rôle d'observation de référence, elle est indiscutable, de ce fait elle empêche toute inférence inductive autre que celle souhaitée par le manuel[5].

II.4) Il n'y a pas possibilité de se poser de nouvelles questions, car les exercices ne sont pas posés de manière suffisamment générale pour permettre de traiter de nouvelles questions, il y a une fin à chaque exercice.

II.5) L'élève ne peut pas construire son propre modèle de la situation. En particulier, lorsqu'un changement de représentation est utile pour résoudre l'exercice, il est introduit par le manuel qui ne laisse donc pas l'élève prendre à sa charge l'activité de modélisation.

Nous faisons l'hypothèse que ces exercices sont choisis pour, dans un premier temps, mettre en place une démarche expérimentale linéarisée et ensuite permettre aux élèves de s'approprier les outils technologiques telles que les calculatrices graphiques et les logiciels de géométrie dynamique. Cette hypothèse se justifie par les titres des activités : Courbe à l'écran d'une calculatrice p. 61, Courbe et lecture à l'écran d'une calculatrice p. 71, utilisation d'un logiciel de géométrie pour construire une figure p. 269... Mais aussi par les textes comme ceux des figures VI.5 ou VI.3. Ceci est aussi confirmé par les objectifs du programme de seconde (*B.O. hors série n°7, 30 août 2001*) :

> L'informatique, devenue aujourd'hui absolument incontournable, permet de rechercher et d'observer des lois expérimentales dans deux champs naturels d'application interne des mathématiques : les nombres et les figures du plan et de l'espace.(p. 31)
>
> Utiliser de façon raisonnée et efficace la calculatrice pour les calculs et pour les graphiques.(p. 33)

Certains exercices du manuel ont donc deux objectifs : le travail de la démarche expérimentale et l'appropriation des outils technologiques.

D'autre part, nous faisons l'hypothèse que l'expérimentation n'est pas laissée à la charge des élèves, car le manuel veut imposer l'utilisation d'outils bien précis. Effectuer la « bonne » expérimentation, avec ces outils, nécessite

[5]Nous pouvons aussi remarquer que le manuel associe à la formule (a priori dépendante de n) la lettre B (indépendante de n), implicitement cela signifie que B est une constante, ce qui est le cas ici.

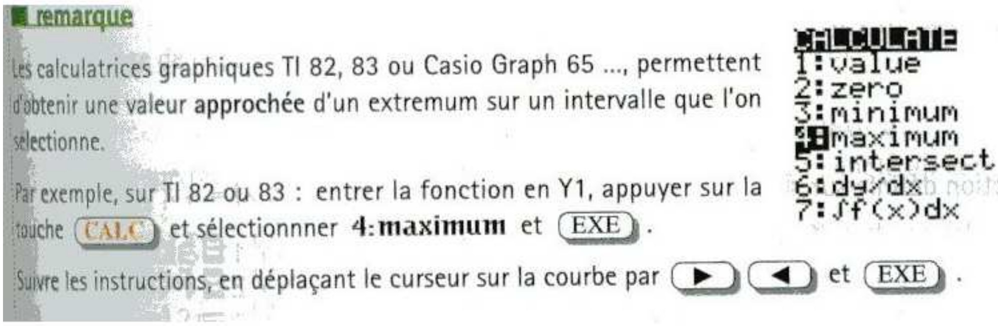


FIG. VI.5. Comment se servir de sa calculatrice.

de posséder des connaissances (sur ces outils) que les élèves ne possèdent pas nécessairement, pour remédier à cela, le manuel est contraint à donner les manipulations à effectuer. De plus, en donnant les manipulations à effectuer, le manuel s'assure que les élèves vont conjecturer ce qu'il souhaite : c'est un moyen de contrôler ce que les élèves vont observer. Le manuel construit un scénario de démarche de découverte qu'il fait exécuter à l'élève.

Concernant les exercices de type C, notre hypothèse est que la figure est fournie pour éviter de donner les manipulations à effectuer, car le but n'est pas dans ces exercices l'appropriation de l'outil technologique mais de la méthode de résolution utilisant ces outils. D'ailleurs, pour les exercices du type de celui de la figure VI.2, le manuel, après deux exercices semblables dans lesquels il donnent une figure, décide de demander, dans un nouvel exercice, de résoudre des équations en utilisant la technique utilisée dans les exercices précédents sans fournir de figure. Il laisse donc la production de la figure à la charge de l'élève. Nous ne pouvons, toutefois, pas considérer que les élèves en résolvant ces nouvelles équations pratiquent une démarche expérimentale, car ils ne font qu'utiliser une technique de résolution connue[6]possédant une partie expérimentale.

2.1.5. *Conclusion sur le manuel de seconde.* Le manuel de seconde présente la démarche expérimentale de manière linéaire à travers les exercercices qu'ils proposent : réalisation d'une expérience → observation → formulation d'une conjecture → preuve du résultat conjecturé. De plus, un grand nombre d'exercices (parmi ceux que nous avons identifiés) ne laissent pas à l'élève la possibilité de réaliser ses propres expérimentations, il n'effectue que les manipulations demandées par le manuel en utilisant les outils préconisés par celui-ci. De ce fait, il n'est pas dans le rôle d'un expérimentateur mais d'un observateur. Ceci peut s'expliquer par :
– le fait que le manuel ne fournit pas, tout le temps, la problématique, l'exercice commençant par une observation ;
– la préconisation d'outils technologiques pour réaliser ces expérimentations, qui nécessitent pour être réaliser correctement des connaissances sur les outils que les élèves n'ont pas forcémment ;
– c'est une manière de contrôler les observations de l'élève et ainsi de l'empêcher de conjecturer un résultat autre que celui attendu (qui est

[6] La technique est utilisable, seulement, lorsque les racines sont entières.

le « bon » résultat). Les expérimentations demandées par le manuel sont, d'ailleurs, le plus souvent « pertinentes[7] » ;

L'incertitude expérimentale n'est donc pas présente, essentiellement, car le manuel ne prévoit pas la possibilité pour l'élève de conjecturer un résultat faux : il n'y a pas de dialectique entre preuve et expérimentation. L'expérimentation validative n'est que très peu utilisée, le rôle de l'expérimentation est réduit à la mise en évidence d'un fait.

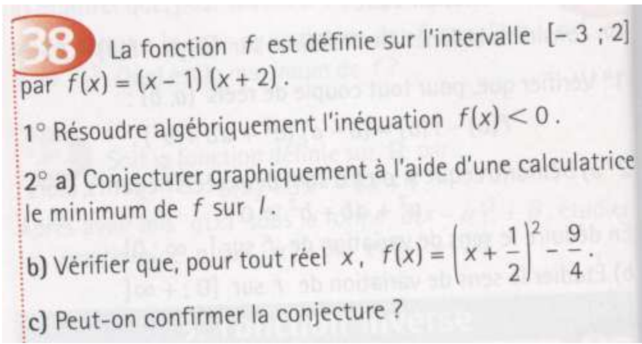
Concernant l'activité de modélisation, elle n'est pas présente, puisque les exercices peuvent se résoudrent en utilisant les connaissances du cours. De plus, lorsqu'il peut être utile de changer de représentants pour avancer dans la résolution, la nouvelle représentation est donnée par le manuel.

Le manuel construit une démarche de découverte linéaire et scénarisée qu'il fait jouer à l'élève, nous ne pouvons donc pas parler de démarche expérimentale. L'élève n'est qu'un observateur.

2.2. Première scientifique.

2.2.1. *Un exemple d'exercice de type A.* La figure VI.8 page 94 représente l'exemple d'un exercice de type A. Cet exercice est semblable à l'exercice de la figure VI.3. Les réponses à nos questions sont donc sensiblement les mêmes. À la différence de l'exercide de la figure VI.3, pour cet exercice la conjecture n'est d'aucune utilitée dans la preuve qui apparaît donc comme complétement indépendante de l'expérimental.

Nous avons aussi un autre exemple d'exercice de type A avec la figure VI.6 dans lequel le manuel semble prévoir la possibilité d'une conjecture fausse de la part des élèves. Remarquons que la conjecture n'est d'aucune utilité' pour trouver le minimum de la fonction du fait que le manuel donne la décomposition de Gauss de la fonction.



38 La fonction f est définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$ par $f(x) = (x-1)(x+2)$.

1° Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) < 0$.

2° a) Conjecturer graphiquement à l'aide d'une calculatrice le minimum de f sur I.

b) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$.

c) Peut-on confirmer la conjecture ?

Fig. VI.6. Un autre exercice de type A

2.2.2. *Un exemple d'exercice de type B.* La figure VI.7 représente un exercice de type B. Le manuel ne donne pas de technique pour résoudre ce problème. Nous pouvons remarquer que les deux étoiles signifient que cet exercice est considéré comme difficile par le manuel.

[7] Les cas particuliers à traiter sont choisis de manière pertinente, car ils permettent de traiter les différents cas possibles et de conjecturer le « bon » résultat.

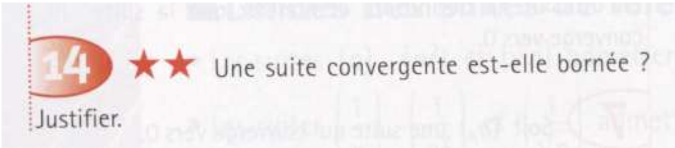

14 ★★ Une suite convergente est-elle bornée ?
Justifier.

FIG. VI.7. Un exercice du type B.

2.2.3. *Un exemple d'exercice de type C.* L'exercice de la figure VI.9 demande à l'élève d'effectuer une conjecture sur la figure donnée. Cette figure semble être donnée pour que l'élève puisse facilement lire le point d'intersection des deux courbes. De plus, le zoom est choisi pour permettre d'émettre une conjecture sur la droite axe de symétrie. Le manuel ne laisse donc pas l'élève expérimenter et ainsi faire les choix expérimentaux pertinents. D'autre part, le manuel a dessiné ces courbes de manière à ce que les coordonnées du point d'intersection puisse être conjecturées par l'élève. Ceci fonctionne grâce à un contrat didactique spécifique au couple (figure, observation demandée par le manuel) : une figure fournie une représentation « conforme » de l'observation demandée par le manuel.

2.2.4. *Résultats et conclusion.* Nous avons identifié 26 exercices du type A, 11 exercices du type B et 9 exercices du type C (voir ? ? ? ?). Le nombre total d'exercices est de 1312.

Les résultats que nous obtenons sont comparables à ceux du manuel de seconde même si :
– le manuel semble laisser plus de liberté à l'élève pour réaliser des expérimentation, le manuel demande toujours à l'élève de réaliser des expérimentations mais ne lui donne pas, à chaque fois, les manipulations à effectuer (t.d. 3p. 289, ex. 52 p. 300) ;
– il y a plus d'exercices de type B, c'est-à-dire, proposant une question ouverte (même s'ils sont toujours assez peu nombreux) ;
– souvent la conjecture n'a aucune utilité pour la démonstration puisque nous pouvons, en suivant les indications données par le manuel dans la phase de preuve, prouver le résultat sans connaître la conjecture.

De ce fait, l'élève est souvent dans la position d'observateur d'une démarche de découverte mise en scène par le manuel.

2.3. Terminale scientifique.

2.3.1. *Des exemples d'exercices de type A.* La figure VI.10 est un exercice de type A, le manuel demande de formuler une conjecture suite à l'étude de certains termes d'une suite récurrente. Le manuel ne dit d'ailleurs pas ce que l'on doit observer : convergence, croissance... L'exercice commence par une observation et non par une question. Il se trouve que la suite vaut 1 lorsque n est impair et 2 lorsque n est pair. Nous pouvons remarquer que l'exercice donne à l'élève une partie du protocole pour expérimenter en lui demandant d'utiliser la touche « ANS » de la calculatrice.

Nous avons aussi trouver, toujours concernant les suites, l'exercice de la figure VI.11. Nous pouvons remarquer que pour cet exercice, le manuel ne demande pas d'effectuer les calculs à l'aide de la calculatrice, il ne précise pas avec quels moyens l'élève doit effectuer les observations. Nous faisons

4 Recherche d'un minimum

$ABCD$ est un carré de côté de longueur 6 cm. Un point M variable se déplace sur le segment $[AB]$ et le point N du segment $[BC]$ est tel que $AM = BN$. Le point O est le milieu de $[AC]$.

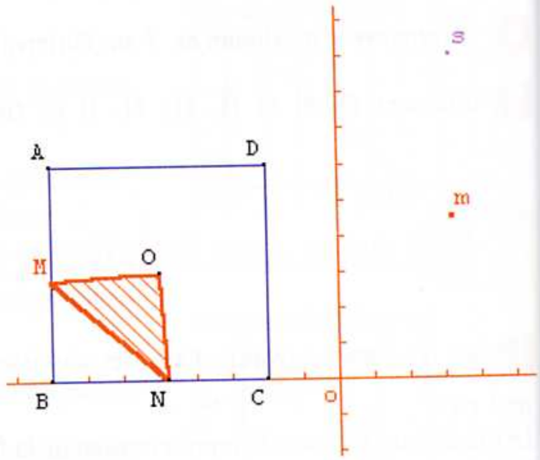
L'objectif de ce *T.D.* est d'étudier l'aire du triangle OMN et l'aire du quadrilatère $OMBN$, en fonction de la position du point M sur le segment $[AB]$.

Si on pose $AM = x$ (x appartenant à l'intervalle $[0\,;6]$), l'aire du triangle AOM est une fonction f de x et l'aire du quadrilatère $OMBN$ est une fonction g de x.

1 Construction de la courbe représentative de f à l'aide de GEOPLANW

Initiation au logiciel GEOPLANW, *p.* 498

- Créer les points : $A(-8\,;6)$, $B(-8\,;0)$, $C(-2\,;0)$ et $D(-2\,;6)$ et le milieu O de $[AC]$.
- Créer le point M libre sur $[AB]$, puis la longueur x du segment $[AM]$, à l'aide de : Numérique \ Calcul géométrique \ Longueur d'un segment.
- Créer le point N de coordonnées $(-8 + x\,;0)$.
- Créer l'aire a du triangle OMN à l'aide de : Numérique \ Calcul géométrique \ Aire du triangle.



Créer de même l'aire b du triangle BMN, puis les points $m(x\,;a)$ et $s(x\,;a+b)$.

La fonction f associe à toute valeur x de l'intervalle $[0\,;6]$ l'aire a du triangle OMN.
De même, la fonction g, qui à x associe $a + b$, donne l'aire du quadrilatère $OMBN$ en fonction de x.

2 En déplaçant le point M sur le segment $[AB]$, conjecturer les variations de f et de g.
En particulier quel est le minimum de f?
(On peut utiliser le mode TRACE ou la création du LIEU des points m et s lorsque M se déplace sur $[AB]$ pour répondre aux questions précédentes.)

3 Démonstration des résultats précédents

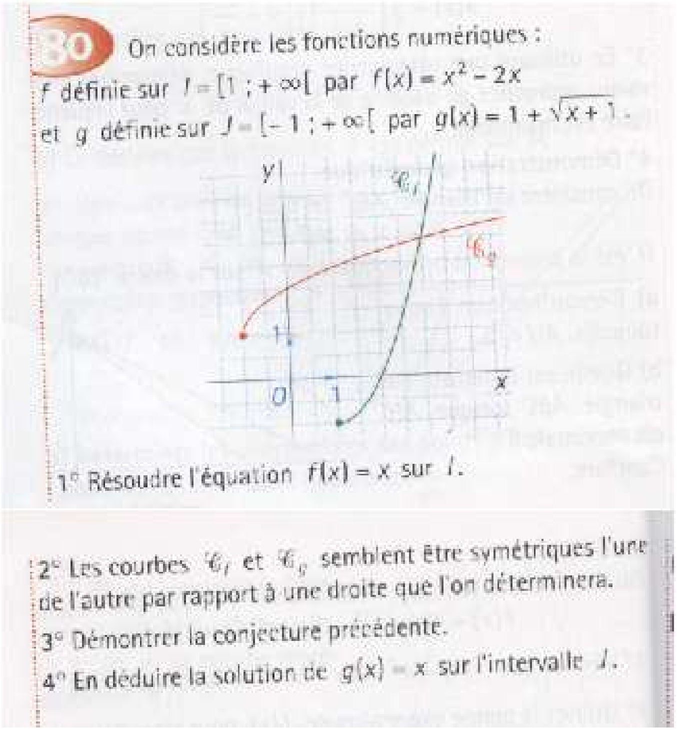
a) Montrer que le triangle OMN est rectangle isocèle en O.

b) On a $f(x) = \dfrac{OM^2}{2}$. Démontrer que $f(x) = \dfrac{(3-x)^2 + 9}{2}$.

En déduire la valeur minimale de l'aire du triangle OMN et la position correspondante du point M

c) Calculer l'aire du triangle BNM en fonction de x et en déduire que la fonction g est constante

Fig. VI.8. Un exercice du type A.



80 On considère les fonctions numériques :
f définie sur $I = [1\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2x$
et g définie sur $J = [-1\,;+\infty[$ par $g(x) = 1 + \sqrt{x+1}$.

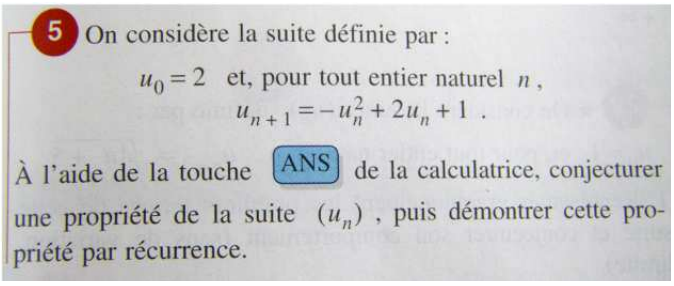
1° Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur I.

2° Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ semblent être symétriques l'une de l'autre par rapport à une droite que l'on déterminera.

3° Démontrer la conjecture précédente.

4° En déduire la solution de $g(x) = x$ sur l'intervalle J.

FIG. VI.9. Un exercice du type C.



5 On considère la suite définie par :

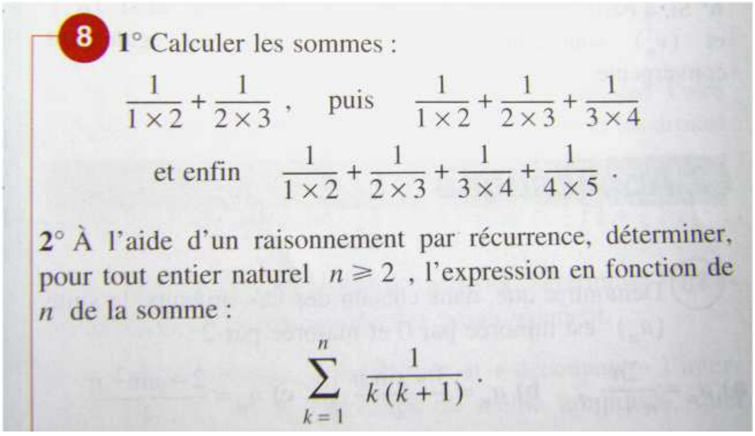
$u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n + 1$.

À l'aide de la touche ANS de la calculatrice, conjecturer une propriété de la suite (u_n), puis démontrer cette propriété par récurrence.

FIG. VI.10. Un exercice du type A.

l'hypothèse que dans ce cas, l'élève va effectuer les calculs « à la main ». Nous la justifions par le fait que le manuel ne précise pas d'autres outils à utiliser et par la règle du contrat suivante : lorsqu'on nous demande d'effectuer des calculs sur des fractions alors nous devons donner le résultat sous forme de fraction. Cette règle est ce qui fait « marcher » l'exercice, car en effectuant des calculs approchés, il est beaucoup plus difficile d'observer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ et ainsi de résoudre l'exercice. Nous remarquons aussi que le manuel donne un ordre concernant le calcul des premiers termes de la suite. Nous faisons l'hypothèse que cet ordre a pour but que les élèves découvrent le pas de la récurrence.

Les exercices des figures VI.10 et VI.11 viennent confirmer le fait que les manuels choisissent les médians, ainsi que les cas particuliers avec lesques



8 **1°** Calculer les sommes :

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}, \quad \text{puis} \quad \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}$$

$$\text{et enfin} \quad \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}.$$

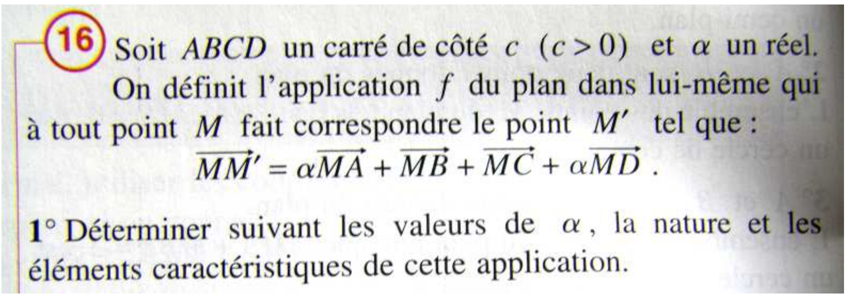
2° À l'aide d'un raisonnement par récurrence, déterminer, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, l'expression en fonction de n de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

FIG. VI.11. Un autre exercice sur de type A.

l'élève doit expérimenter en fonction de ce qu'il est pertinent d'observer pour arriver à une résolution de l'exercice. Il ne laisse pas ce travail être effectué par l'élève.

2.3.2. *Un exercice de type B.* Nous avons considéré que l'exercice de la figure VI.12 pouvait être un exercice de type B. Dans un premier temps, nous pouvons remarquer que l'exercice nous donne l'une des variables pertinentes du problème à savoir α : implicitement suivant les valeurs de α la transformation ne sera pas la même.



16 Soit $ABCD$ un carré de côté c $(c > 0)$ et α un réel. On définit l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M fait correspondre le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \alpha\overrightarrow{MD}.$$

1° Déterminer suivant les valeurs de α, la nature et les éléments caractéristiques de cette application.

FIG. VI.12. Un exercice de type B

Nous proposons la démarche suivante pour résoudre ce problème : nous pouvons dans un premier temps pour une valeur de α particulière (par exemple $\frac{1}{3}$) déterminer quelle va être l'image du carré $ABCD$. Nous trouvons la figure VI.13 .

Nous pouvons observer que le carré ABCD est transformé en un carré de côté supérieur qui n'a pas le même centre que ABCD. Nous pouvons donc éliminer les transformations comme la rotation ou la translation. Nous nous posons alors le problème suivant : quels sont les points fixes de la transformation ? Ce problème est la clé de notre résolution.

Pour résoudre ce problème, nous adoptons une modélisation analytique des points et trouvons qu'il n'y a qu'un seul point fixe (nous aurions aussi pu reconnaître que l'ensemble des points fixes est un barycentre lorsque $\alpha \neq -1$). Nous déterminons aussi les coordonnées de ce point en fonction de

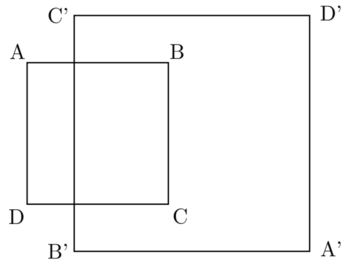


FIG. VI.13. La transformation du carré $ABCD$.

α et apercevons que si $\alpha = -1$ alors ce point n'existe pas, $\alpha = -1$ est donc un cas particulier. Pour l'instant, nous mettons de côté ce cas et plaçons le point fixe Ω sur la figure que nous avons tracée.

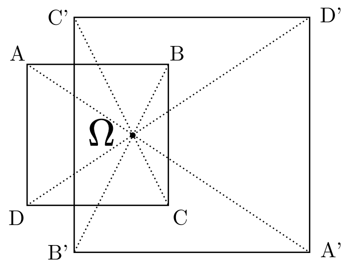


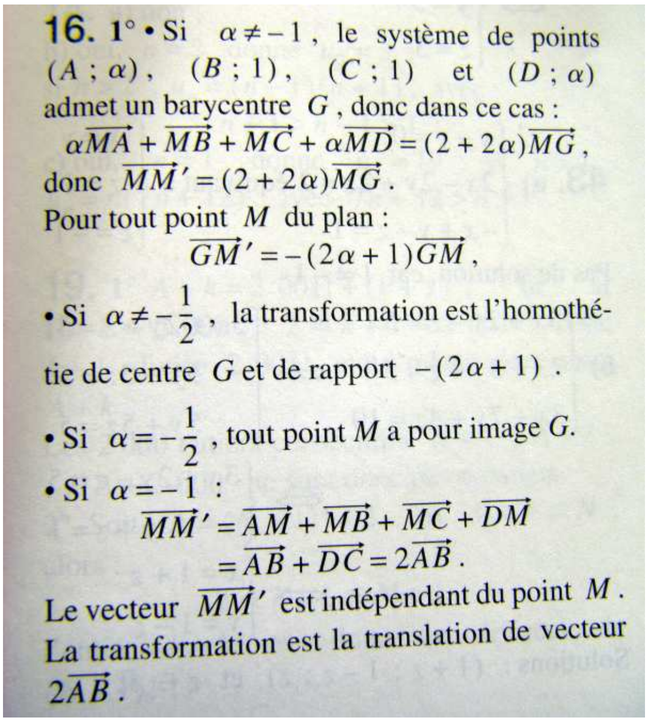
FIG. VI.14. Le point fixe Ω par lequel les droites se coupent.

Nous pouvons alors observer que ce point se trouve sur les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD'). Nous conjecturons alors que la transformation est une homothétie de centre Ω. Pour montrer que la transformation est une homothétie de centre Ω et de rapport k, il nous suffit alors de montrer que $\overrightarrow{MM'} = (1+k)\overrightarrow{M\Omega}$. En utilisant la relation de Chasle, en introduisant le point Ω et en utilisant le fait que Ω est un point fixe de la transformation, nous trouvons que $\overrightarrow{MM'} = 2(1+\alpha)\overrightarrow{M\Omega}$. La transformation est donc une homothétie lorsque $\alpha \neq -1$ et $\alpha \neq -\frac{1}{2}$. Lorsque $\alpha = -\frac{1}{2}$ la transformation est l'application constante égale à Ω.

Il nous reste à traiter le cas où $\alpha = -1$. En calculant les images de A, B, C et D, nous trouvons que leurs images correspondent à celles d'une translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$. Nous conjecturons que la transformation est une translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$. Il nous reste maintenant à montrer que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$. Nous avons $\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$. Or dans $ABCD$ nous avons $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, d'où le résultat.

Cet exercice est un exercice pour lequel nous pouvons trouver une correction à la fin du manuel, la correction est présente sur la figure VI.15. Cette correction n'explique pas pourquoi il est intéressant d'introduire le barycentre pour résoudre l'exercice, cela peut ainsi apparaître comme étant une « astuce ».

2.3.3. *Un exercice de type C.* L'exercice de la figure VI.16 est un exercice d'identification de paramètre d'une fonction connaissant une expression



16. 1° • Si $\alpha \neq -1$, le système de points $(A\,;\alpha)$, $(B\,;1)$, $(C\,;1)$ et $(D\,;\alpha)$ admet un barycentre G, donc dans ce cas :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \alpha\overrightarrow{MD} = (2+2\alpha)\overrightarrow{MG},$$

donc $\overrightarrow{MM'} = (2+2\alpha)\overrightarrow{MG}$.

Pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{GM'} = -(2\alpha+1)\overrightarrow{GM},$$

• Si $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, la transformation est l'homothétie de centre G et de rapport $-(2\alpha+1)$.

• Si $\alpha = -\frac{1}{2}$, tout point M a pour image G.

• Si $\alpha = -1$:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est indépendant du point M. La transformation est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

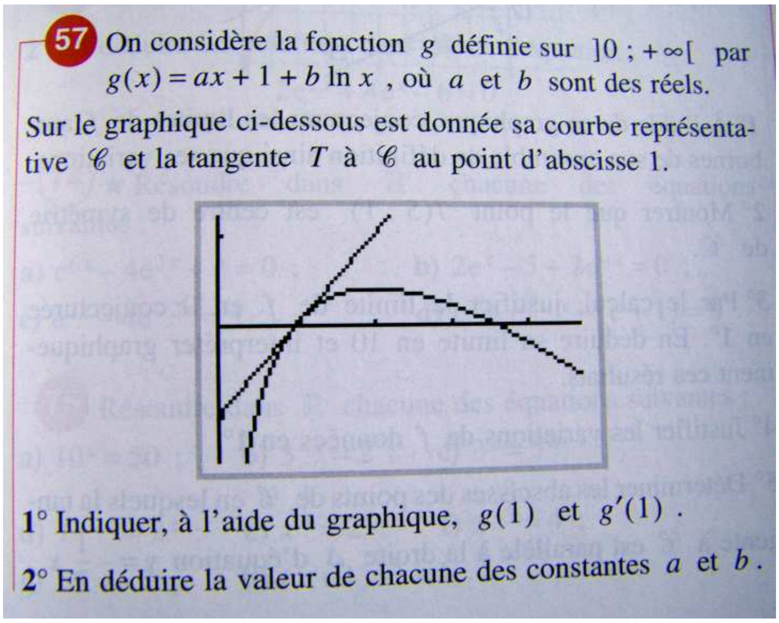
FIG. VI.15. Une correction de l'exercice de la figure VI.12.

algébrique et une de ces courbes représentatives. Le manuel nous demande de faire une observation dans le but de pouvoir déterminer les paramètres inconnus. Nous pouvons remarquer que cet exercice ne peut être résolu qu'en applicant la règle du contrat précédemment mentionnée : une figure fournie une représentation « conforme » de l'observation demandée par le manuel. Le manuel ne permet pas à l'élève de faire de nouvelles expérimentations pour valider ses observations.

2.3.4. *Résultats et conclusion.* Nous avons identifié 23 exercices du type A. Cela nous a permis de discerner de nouveaux types d'expérimentations demandées par le manuel concernant les suites récurrentes :

– tracer de la courbe de la fonction associée à la suite récurrente et représentation des premiers termes de la suite à l'aide de la courbe ;
– calcul des premiers termes d'une suite à l'aide de la calculatrice.

Nous avons concernant les exercices A les même résultats que précédemment concernant la linéarité, la problématique et le rôle de l'expérimentation. De même, il n'y a pas plus de possibilités de se poser de nouvelles questions et l'élève n'est que rarement en position de construire son propre modèle de la situation. Nous pouvons rajouter que comme précédemment, l'incertitude expérimentale n'est pas présente pour les même raisons. Il nous faut, toutefois, signaler que les exercices de type A du manuel de terminale scientifique sont moins « dirigistes » au niveau des expérimentations, laissant parfois l'élève choisir comment il veut effectuer l'expérimentation demandée, par exemple en lui laissant choisir les premiers termes de la suite à calculer et avec quel médian. Cependant, comme illustré par les exercices des figures


57 On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = ax + 1 + b\ln x$, où a et b sont des réels.

Sur le graphique ci-dessous est donnée sa courbe représentative $\mathscr{C}$ et la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

1° Indiquer, à l'aide du graphique, $g(1)$ et $g'(1)$.

2° En déduire la valeur de chacune des constantes a et b.

FIG. VI.16. Un exercice de type C

VI.10 et VI.11, le manuel peut être plus dirigiste lorsque qu'il considère qu'un médian va être plus pertinent qu'un autre. De plus, nous pouvons signaler que, lorsque le manuel précise le médian avec lequel expérimenter, c'est essentiellement la calculatrice qui est mentionnée. Nous faisons l'hypothèse que c'est une des raisons qui font que le manuel est moins « dirigiste », car la calculatrice est un outils que les élèves ont appris à maitriser lorsqu'ils étaient en première et en seconde (au moins). L'utilisation importante de la calculatrice est peut-être aussi due au fait qu'elle est le seul outil qui peut être autorisé lors de l'épreuve du baccalauréat de mathématiques.

Remarque : Nous avons aussi remarquer que dans beaucoup d'exercices d'étude de fonction, le manuel ne demande de tracer la courbe représentative qu'à la fin de l'exercice. Ce tracer peut servir d'expérimentation validative mais nous faisons l'hypothèse que le tracé doit être effectué grâce à l'étude de fonction qui le précéde. De plus, il peut aussi être intéressant d'effectuer des expérimentations au cours de l'étude algébrique. Ce tracer correspond au travail de la technique suivante : tracer la courbe représentative d'une fonction en connaissant son tableau de variation.

Nous avons repérés au moins 22 exercices du type B. Parmi ces exercices, nous retrouvons un nombre important d'exercices de détermination d'un lieu de points, comme l'exercice de la figure VI.12. Ces exercices peuvent être résolus à traver une démarche expérimentale mais comme ils sont souvent similaires, il est probable que seuls les premiers exercices soient porteurs d'une incertitude expérimentale.

Enfin, nous avons détecté 18 exercices du type C. Les figures données par le manuel doivent, comme précédemment, être interprétées comme « idéales » pour permettre la résolution des exercices. Nous pouvons signaler qu'un nombre important d'exercices concerne l'identification de fonction en présence d'une courbe représentative et d'une expression algébrique comportant des paramètres inconnus comme l'exercice de la figure VI.16 mais le manuel ne semble pas donner le statut de conjecture à ces observations. Nous pouvons rattacher ce type d'exercice à un travail de modélisation de courbes qui peut être effectué, par exemple, en physique sauf que dans ce cas, nous émettons l'hypothèse que la courbe est produite suite à une expérimentation et donc issue d'une problématique se rattachant à un cadre théorique qui va donner le modèle algébrique de la courbe, l'expérimentation servant à ajuster les paramètres.

3. Conclusion

3.1. Non-mise en pratique de la démarche expérimentale. De cette étude de manuels, nous pouvons en conclure que la démarche expérimentale telle que nous l'avons définie ne peut pas être mise en pratique à travers les exercices proposés par ces manuels. Certains exercices mettent en jeu une démarche expérimentale « scénarisée » dans laquelle le manuel fait jouer à l'élève le scénario d'une démarche de découverte. Ces exercices sont découpés en phases qui se succèdent linéairement de l'une à l'autre : mise en place de l'expérimentation → observation → formulation d'une conjecture → preuve de la conjecture. L'expérimentale est donc essentiellement utilisée pour son rôle générateur et non pas pour son rôle de validation. L'expérimentale est parfois utilisée pour valider le résultat attendu de l'exercice, mais elle ne a jamais paru être utilisée dans le processus de preuve, qui apparaît comme indépendant de la phase de découverte. De ce fait, les intéractions entre conjectures, preuves et expérimentations sont absentes. Cela engendre une séparation entre une phase de découverte expérimentale et une phase de preuve déductive et impose que la conjecture émise soit toujours vraie.

L'absence d'incertitude expérimentale est due au manque d'incertitude au niveau des résultats étant donné que les expérimentations demandées par le manuel font apparaître les faits comme évidents. De plus, il n'y a pas d'incertitude au niveau des contrôles puisqu'après avoir formulé la conjecture, nous pouvons toujours effectuer sa preuve en suivant les étapes données par le manuel. Cette absence d'incertitude expérimentale ne permet pas de se rendre compte du rôle que joue la preuve mathématiques dans le processus de résolution, celle-ci apparaissant accesoire, du fait que toute incertitude est absente.

D'autre part, le manuel donne un rôle « passif » à l'élève en ne lui permettant pas de choisir ces expérimentations, tout comme ce sur quoi va porter son observation. L'élève n'est donc qu'un observateur et, au plus, le réalisateur d'une expérimentation demandée par le manuel. En outre, le travail de modélisation n'est pas présent étant donné que les exercices peuvent se résoudre en appliquant les théorèmes et propriétés du cours. L'expérimental n'est donc utilisé que pour travailler des notions déjà vues en cours. Enfin, tous les exercices proposés par le manuel ont une fin, ils ne sont donc pas conçus pour pouvoir permettre aux élèves de se poser de nouvelles questions.

Nous retrouvons aussi le même phénomène que dans les manuels de primaire (Godot, 2005), à savoir l'absence de véritable problème de recherche.

3.2. Hypothèses sur les raisons qui empêchent cette mise en pratique. Ici, nous allons tâcher de donner des raisons à la non-mise en pratique de la démarche expérimentale.

`Absence de connaissances sur les outils technologiques.` Premièrement, nous avons vu que l'utilisation d'outils technologiques étaient préconisées par les programmes. De ce fait, le manuel, pour répondre aux attentes du programme, doit contenir des exercices permettant de travailler avec ces outils. Or l'utilisation de ces nouveaux outils nécessitent que les élèves apprennent à les maitriser. Nous faisons l'hypothèse que l'absence de connaissances sur les outils technologiques est la raison qui poussent le manuel à donner les manipulations expérimentales à effectuer. De ce fait, un des buts des exercices mettant en jeu des expérimentations à travers des outils technologiques peut parfois être l'apprentissage de l'outil à l'aide des mathématiques et non la résolution de problèmes mathématiques à l'aide de l'outil technologique.

Cela nous amène à formuler l'hypothèse suivante concernant l'apprentissage de la démarche expérimentale :

Hypothèse

L'apprentissage de la démarche expérimentale ne peut se faire qu'en permettant aux élèves d'utiliser des outils d'expérimentations qu'ils maîtrisent.

`Manuel conçu pour être utilisé de manière autonome.` le découpage des exercices en sous-question qui guide vers la résolution est ce qui donne l'aspect linéaire à la démarche, nous faisons l'hypothèse que le manuel découpe les exercices en sous-question pour permettre aux élèves d'avancer dans la résolution. Il se donne le rôle de « guide ». Ce rôle pourrait être tenu par l'enseignant, la question qui se pose alors est de savoir si le manuel est conçu pour fonctionner indépendemment de l'enseignant. En effet, dans le cas d'un manuel conçu pour fonctionner en intéraction avec un enseignant, ce rôle de guide pourrait être laissé à la charge de l'enseignant qui interviendrait alors en fonction des avancées des élèves. Nous faisons l'hypothèse que le manuel est conçu pour que les élèves puissent résoudre les exercices sans interventions « extérieures ». Cette hypothèse permet aussi d'expliquer le fait que l'élève ne puisse pas formuler de conjectures fausses, ainsi que les choix effectués par le manuel concernant les médians à utiliser (voir figure VI.11). De plus, cela explique l'absence de problèmes réellement ouverts permettant aux élèves de se poser de nouvelles questions. Une autre hypothèse qui pourrait expliquer ceci est le coût en terme de temps, plus l'exercice est guidé moins la résolution sera coûteuse.

Nous formulons ainsi l'hypothèse sur l'apprentissage de la démarche expérimentale suivante :

Hypothèse

L'apprentissage de la démarche expérimentale nécessite la présence d'une personne pouvant servir de guide aux élèves.

Remarque : Il semble que la linéarité dans les manuels n'est pas seulement présente pour la démarche expérimentale mais qu'elle se retrouve aussi au niveau de la preuve (Gandit, 2008).

`Travail unique des notions du programmes.` Nous faisons l'hypothèse que le manuel a, uniquement, pour objectif l'introduction, le développement et l'application des notions du programme. Il se trouve donc dans une situation où les exercices doivent permettre le travail de ces notions. Ceci explique en partie, l'impossibilité de développer de nouveaux outils de résolutions et ainsi la rentrée dans une activité de modélisation. Le seul endroit où de telles exercices pourraient être utilisés est dans les activité d'introduction (qui mettent d'ailleurs en jeu des « pseudo » démarches expérimentales), mais comme dit précédemment, laisser l'élève construire sa propre modélisation du problème prend du temps et n'aboutira pas forcémment à la résolution du problème, ce qui explique le découpage et l'introduction des éléments de modélisation par le manuel. Ceci n'est pas spécifique à la France, une étude de Fan et Zhu (2007) portant sur les heuristiques de découvertes dans les manuels singapouriens, américains et chinois a montré que la plupart des problèmes pouvaient être résolus directement sans faire appel à de telles heuristiques.

Cela nous amène à formuler l'hypothèse suivante :

Hypothèse

> *L'apprentissage de la démarche expérimentale nécessite des problèmes dont la résolution fait appel à des objets mathématiques qui n'ont pas encore été travaillés par les élèves.*

`Option inductiviste.` Nous avons précédemment mis en avant le fait que les manuels, plutôt que de placer l'élève dans une position d'expérimentateur, le placer dans une position d'observateur. Nous pourrions interpréter cela comme un principe idéologique rattaché à ce que Joshua (1989) appelle « l'option inductiviste », qui consiste à empêcher le production de multiples inférences en donnant la primauté à une observation :

> Concernant la présentation du problème, le point marquant paraît être une valorisation extrême du point de départ de la monstration, l'expérience de référence. Comme l'inférence inductive est un processus aléatoire, ses partisans -qui veulent au contraire en établir la primauté- sont conduits à se donner les meilleurs chances de départ. Une expérience de référence trop lâche, permettant trop d'inférences diverses, est un danger pour l'ensemble du processus. La monstration se doit donc d'abord d'être parlante et *simple*, et de permettre une *correspondance stricte avec "le" phénomène.*(p. 38)

Par rapport à notre analyse, nous retrouvons un phénomène similaire à savoir des exercices commençant, souvent, avec une observation/expérimentation de « référence » qui empêche ensuite la production d'inférences inductives diverses. Nous retrouvons aussi cette idée chez Galiana (1999) avec la limpidité des interprétations et les conclusions indiscutables.

3.3. Pistes de recherche. Un des problèmes de cette étude est qu'elle ne prend pas en compte la manière dont les enseignants utilisent les manuels. Ce que nous proposons n'est que notre interprétation des manuels, interprétation qui ne prend pas en compte la « réalité » de la classe. Comme souligné par GILBERT (1989), une analyse de manuel ne permet pas de conclure avec « certitude » sur les pratiques enseignantes. GILBERT (ibid.) recommande pour cela de mener des interviews d'enseignants conjointement avec des analyses de manuels afin que l'étude porte sur les contenus et sur la manière dont ils sont utilisés. Malheureusement dans le cadre de ce travail, nous n'avons pas conduit d'interviews d'enseignants à propos de la démarche expérimentale.

Un deuxième problème est le fait que nous faisons des hypothèses sur les différents objectifs assignés aux exercices par les auteurs des manuels. Ces hypothèses méritent confirmation pour pouvoir confirmer nos interprétations, il aurait donc était intéressant de conduire cette analyse à l'aide des auteurs des manuels pour qu'ils nous expliquent les raisons de leurs différents choix didactiques.

D'autre part, les modèles de résolution des exercices que nous avons utilisés ne sont pas nécessairement ceux que les élèves utilisent, ils peuvent donc très bien pratiquer la démarche expérimentale en résolvant certains exercices qui, selon nous, ne permettaient pas sa mise en pratique. Par exemple, il est possible que même en essayant de résoudre un problème particulier, les élèves se posent de nouvelles questions en généralisant le problème. Il nous aurait donc fallu aussi étudier de quelle manière les élèves résolvent les exercices proposés par les manuels. Ce qui nous aurait aussi permis de mettre à l'épreuve les hypothèses que nous avons formulées sur le contrat didactique.

Une autre hypothèse que nous pouvons fournir à ce que nous avons constater s'appuie sur le travail de (GALIANA, 1999). L'auteur remarque que certaines expériences de biologie sont présentes à travers toutes les époques dans les manuels, créant selon lui « un contexte d'évidences et d'habitudes. ». Une des causes à ce que nous avons observé pourrait donc, aussi, être l'existence d'un ensemble d'habitudes qui se reproduisent empêchant tout changement dans l'enseignement des mathématiques. Pour confirmer cette hypothèse, il nous faudrait mener une étude comparable à la sienne en étudiant les manuels au cours du temps.

Enfin, nous avons pu remarquer que certains phénomènes observés dans les sciences expérimentales sont aussi présents en mathématiques. La question que cela nous pose est de savoir si cela est dû à une conception commune de l'expérimentation ou à des raisons didactiques de « contrôle » des actions de l'élève. Une autre hypothèse est que cela proviendrait du mode de transmission – les manuels – et à une volonté qu'ils soient « self-contained » pour l'élève.

CHAPITRE VII

Jeu du set

Ce que nous allons présenter dans ce chapitre correspond aux résultats, précédents la thèse, obtenus sur un problème appelé *jeu du set*. L'analyse complète du problème peut se trouver dans (GIROUD, 2007), ce mémoire porte sur la démarche expérimentale en mathématiques.

Dans ce chapitre, nous donnerons un résumé de la partie de ce mémoire consacré au *jeu du set*.

1. Présentation du problème

Cette situation a été proposée par Sylvain Gravier. Avant de pouvoir présenter le problème, nous aurons besoin de certaines définitions.

DÉFINITION VII.1 ($(n, c) - jeu$). Soit $\mathcal{C}$ un ensemble contenant c couleurs, nous disons qu'un $(n; c)$*-jeu* est un ensemble de cartes composées de n lignes et avec, sur chacune des lignes, une couleur appartenant à $\mathcal{C}$.

La figure VII.1 est un exemple de $(3; 4)$-jeu.

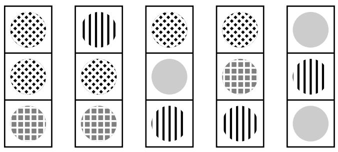


FIG. VII.1. Un $(3; 4)$-jeu : un ensemble de cartes composées de 3 lignes remplies avec 4 couleurs.

DÉFINITION VII.2 (t-mauvaise ligne). Dans un $(n; c)$-jeu, nous appelons C^i la couleur située sur la i^{e} ligne de la carte C. Dans un sous-ensemble de t cartes $\{C_1, \ldots, C_t\}$ d'un $(n; c)$-jeu, nous disons que la i^{e} ligne de ce sous-ensemble est t*-mauvaise* si elle vérifie l'une des 2 propriétés suivantes :

(1) $C_1^i = C_2^i = \ldots = C_t^i$, dans ce cas nous dirons que la ligne est *unicolore*.

(2) les $(C_j^i)_{j \in \{1, \ldots t\}}$ sont différents 2 à 2, dans ce cas nous disons que la ligne est *multicolore stricte*.

La figure VII.2 et VII.3 représentent une 3-ligne unicolore et une 3-ligne multicolore stricte.

DÉFINITION VII.3 (t-set). Dans un $(n; c)$-jeu, un t*-set* est un sous-ensemble de t cartes tel que **toutes** les lignes soient t-mauvaises.

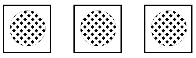


Fig. VII.2. Une ligne unicolore

Fig. VII.3. Une ligne multicolore stricte

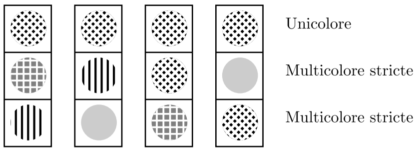


Fig. VII.4. Un 4-set

La figure VII.4 est un exemple de 4-set dans un $(3;4)$-jeu.

Nous pouvons maintenant formuler le problème P_0 :

> *Étant donné 3 entiers n, c et t, déterminer le plus grand $(n;c)$-jeu qui ne contient pas de t-set.*

Les figures VII.5 et VII.6 sont des exemples de $(3;4)$-jeu avec et sans set.

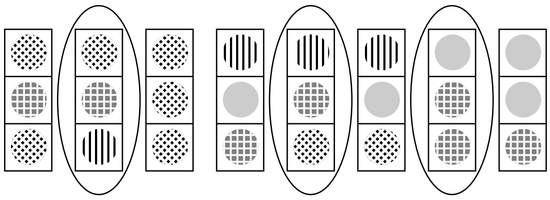


Fig. VII.5. Un $(3;4)$-jeu de 8 cartes contenant un 3-set

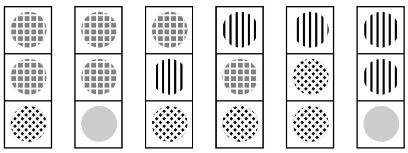


Fig. VII.6. Un $(3;4)$-jeu de 6 cartes ne contenant pas de 3-set.

2. Analyse apriori

Nous allons donner dans cette section, des éléments succints d'analyse apriori du problème. Une analyse plus détaillée se trouve dans ? ? ?.

2.1. Petite analyse mathématique. Considérons le problème P_0 avec $t = 1$, toute carte est un 1-set, de ce fait il n'est pas possible de construire un jeu de cartes sans 1-set.

Pour le problème P_0 avec $t = 2$, tout ensemble de cartes de cardinalité 2 est un 2-set. De ce fait, les plus grands (n,c)-jeux sans 2-sets sont les ensembles de cardinalité 1.

Nous allons maintenant consacrer le reste de l'analyse mathématique à l'étude du problème P_0 avec $t = 3$, c'est-à-dire, que nous ne considérerons que des sets composés de 3 cartes.

2.1.1. *Problèmes en jeu.* Afin de simplifier l'analyse mathématique, nous nous limiterons à l'étude de 3-set. En premier lieu, nous pouvons observer qu'étant donné un jeu sans 3-set de cardinal m dans lequel toutes les cartes sont différentes, nous obtenons un jeu sans 3-set de cardinal $2m$ en duplicant chacune des cartes. Cette technique est exemplifiée sur la figure VII.7.

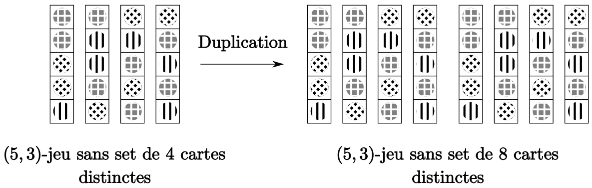


FIG. VII.7. Un exemple de duplication d'un $(5, 3)$-jeu

De plus, un jeu contenant 3 fois la même carte contient un set. Ces premiers résultats nous permettent de voir que résoudre P_0 avec $t = 3$ est équivalent à résoudre le problème P_1 suivant : *étant donné 2 entiers n et c déterminer le plus grand* $(n; c)$*-jeu dont toutes les cartes sont distinctes et qui ne contient pas de* 3*-set.*

Nous appelons $\max(n; c)$ la solution de P_1.

Pour résoudre P_1, une possibilité est de chercher à résoudre à P_2 : *comment construire un* (n, c)*-jeu sans 3-set ?* Nous pouvons remarquer que la résolution de P_2 permet d'obtenir un minorant à la solution de P_1.

Expérimenter pour résoudre P_2, nous confronte alors au problème P_3 : *déterminer une technique (algorithme) pour savoir si un jeu est sans 3-set.* Ce problème peut nous amener à nous poser le problème de l'efficacité de notre technique et ainsi à nous poser le problème P_3' : *quelle est la technique la plus efficace pour savoir si un jeu contient un 3-set ?*

Les nouveaux problèmes que nous avons identifiés, ne permettent pas encore de résoudre complétement P_1 puisqu'ils ne nous permettent pas de savoir si un jeu sans 3-set est maximal, c'est le problème P_4. Un premier moyen de résoudre P_4 est le problème P_5 : *est-il possible de rajouter une carte ?* Une réponse positive montre que le jeu n'est pas maximal, toutefois une réponse négative ne permet pas de conclure que le jeu est maximal comme le montre les figures VII.8 et VII.9.

Nous disons qu'un $(n; c)$-jeu sans set est *localement maximal*, lorsqu'il n'est pas possible de lui rajouter une carte sans faire apparaître un set. De

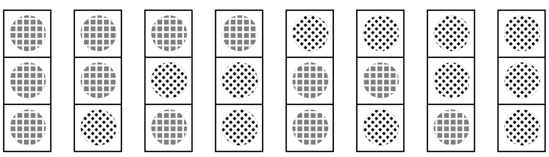


FIG. VII.8. Un $(3; 3)$-jeu de cardinal 8 sans 3-set auquel il n'est pas possible de rajouter une carte sans créer un 3-set.

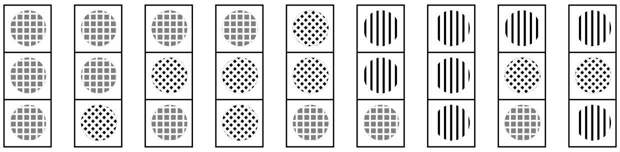


FIG. VII.9. Un $(3;3)$-jeu de cardinal 9 sans 3-set.

ce fait, l'exemple précédent montre qu'un jeu localement maximal n'est pas nécessairement maximal.

Un autre moyen de savoir si le jeu est maximal est de connaître un majorant à la solution de P_1. Ce qui nous amène au problème P_5 : *déterminer un majorant à* $\max(n;c)$. Les problèmes P_2 et P_5 permettent alors d'obtenir un encadrement de $\max(n;c)$. Nous allons rechercher des encadrements dont la distance entre le majorant le minorant est la plus petite possible (s'ils sont les mêmes nous avons trouvé la solution).

Nous allons maintenant donner des éléments de réponses aux problèmes que posés précédemment.

2.1.2. *Éléments de réponses.* Nous allons commencer par résoudre le problème pour un $(n;2)$-jeu, c'est-à-dire, des jeux comportant des cartes qui ne sont construites qu'avec 2 couleurs. Nous pouvons nous apercevoir qu'un $(n;2)$-jeu, dont toutes cartes sont distinctes, ne contient jamais de 3-set. En effet, supposons qu'un tel jeu contienne un 3-set alors il contient un sous-ensemble de 3 cartes $\{C_1, C_2, C_3\}$ tel que toutes les lignes de ce sous-ensemble soient mauvaises. Or comme nous n'utilisons que 2 couleurs, une mauvaise ligne est unicolore donc $C_1 = C_2 = C_3$, ce qui est en contradiction avec le fait que toutes les cartes soient disctinctes. Nous donnerons plus loin une autre preuve de ce résultat. Nous obtenons un premier théorème :

Théorème VII.4

Pour tout entier $n \geq 1$, $\max(n;2) = 2^n$

Une stratégie naïve, S_3^1, de résolution de de P_3 (vérification de la présence d'un 3-set) consiste à tester tous les triplets de 3 cartes, cette stratégie a un coût élevé puisque pour un jeu de m cartes, nous devons tester $\binom{m}{3}$ triplets. Remarquons que la mise en place d'une stratégie pose le problème[1] suivant : comment savoir tous les triplets ont été testés ? Il peut alors être intéressant d'ordonner les couleurs et d'utiliser, par exemple l'ordre lexicographique, pour construire un ordre sur les cartes.

Une stratégie, S_3^2 plus efficace utilise la notion de *bloc*.

DÉFINITION VII.5 (Bloc). Un α-*bloc* d'un $(n;c)$-jeu est l'ensemble des cartes du jeu ayant la couleur α sur la première ligne.

La stratégie S_3^2 consiste à :

(1) Vérifier la présence de sets dans chacun des blocs.
(2) Vérifier que les triplets de cartes composés de cartes issues de blocs différents ne forment pas de set.

[1] De manière générale, toutes les stratégies énumératives nécessitent de s'assurer que tous les cas ont été testés.

Comme pour S_3^1, S_3^2 requiert de définir un ordre sur les cartes. Cette stratégie est, généralement, plus rapide, car elle ne teste pas les triplets dont la première ligne n'est pas une mauvaise ligne.

La notion de bloc peut aussi être utilisée pour répondre à P_2. En effet, considérons G, un $(n-1;c)$-jeu sans 3-set, de cardinal m alors ce jeu peut être utilisé pour construire un $(n;c)$-jeu sans 3-set de cardinal $2m$. La méthode de construction, S_2^1 est expiquée sur la figure VII.10.

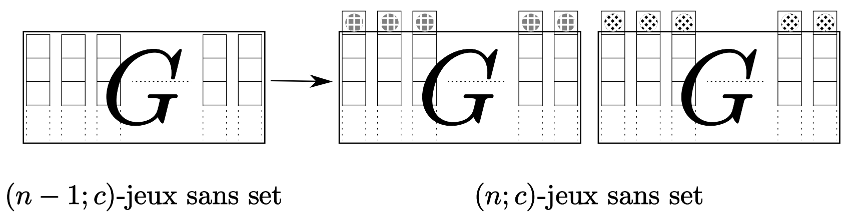


FIG. VII.10. Méthode de construction S_2^1.

Cette méthode de construction inductive fonctionne, car comme le jeu construit ne contient que 2 blocs, les seuls 3-sets possibles sont ceux constitués de cartes appartenant à un même bloc et ce n'est pas possible, car G est sans 3-set.

Cette méthode de construction nous permet aussi de déterminer un minorant à $\max(n;c)$, $2\max(n-1;c) \leq \max(n;c)$.

Par rapport à S_2^1, le problème suivant se pose : *est-il possible de rajouter des cartes à un jeu construit avec S_2^1 ?* Lorsque le $(n-1;c)$-jeu sans 3-set est localement maximal, c'est impossible sans créer un 3-set. En effet, appelons G' le jeu construit avec S_2^1 en utilisant G alors G' est composé d'un α-bloc et d'un β-bloc.

D'une part, comme G est localement maximal, il n'est pas possible de rajouter une carte au α-bloc et au β-bloc. D'autre part, soit γ une couleur différente de α et β alors il n'est pas possible de rajouter une carte ayant la couleur γ sur sa première ligne. En effet, considérons $C = (\gamma, a_2, \ldots, a_n)$ une carte à n lignes et la carte à $n-1$ lignes, $C' = (a_2, \ldots, a_n)$. Alors, comme G est localement maximal, il existe 2 cartes appartenant à G, C_1 et C_2, telles que $\{C', C_1, C_2\}$ soit un 3-set. De ce fait, les cartes (α, C_1) ; (β, C_2) et C' forment un 3-set.

Et comme, la carte (α, C_1) appartient au α-bloc de G', et la carte (β, C_2) appartient au β-bloc de G', $G' \bigcup C'$ contient un 3-set.

La notion de bloc peut aussi être utilisée pour répondre à P_5 (majorant). En effet, la taille maximal d'un bloc d'un $(n;c)$-jeu est $\max(n-1;c)$. Comme nous avons c couleurs, le nombre maximal de blocs que peut contenir un jeu est c d'où le résultat suivant : $\max(n;c) \leq c\max(n-1;c)$. Cela nous donne le théorème suivant :

Théorème VII.6

Soit $n \geq 1$ et $c \geq 2$ des entiers alors :

$$2\max(n-1;c) \leq \max(n;c) \leq c\max(n-1;c)$$

Remarquons que ce théorème appliqué avec $c = 2$ donne une autre preuve du théorème VII.4. Lorsque $c \geq 3$, il existe des $(n;c)$-jeu sans 3-set de cardinalité supérieure à $2\max(n-1;c)$. Pour construire un tel jeu, nous pouvons utiliser les stratégies de construction suivantes :

– S_2^2 : Commencer avec un jeu G sans set (qui peut être vide) et ajouter une carte C telle que $G \bigcup C$ soit sans set. Répéter cette opération tant qu'il est possible de rajouter une carte.
– S_2^3 : Considérer un jeu de cartes G, dès qu'un set est trouvé, retirer de G une des cartes formant le set. Répéter cette opération tant qu'il y a un set.

La cardinalité des jeux produits en utilisant l'une de ces stratégies va, apriori, dépendre de l'ordre dans lequel les cartes sont prises, sauf lorsque le nombre de couleur est de 2 ($c = 2$) puisque dans ce cas, un $(n;2)$-jeu est sans 3-set. De ce fait, utiliser une de ces stratégies avec 2 couleurs permet de construire un jeu sans set maximal.

La stratégie S_2^2 amène à construire des jeux localement maximaux, ce qui n'est pas, nécessairement, le cas de S_2^3.

Dans tous les cas, ces stratégies permettent d'obtenir des jeux sans set localement maximaux. Le problème que pose ces stratégies est le suivant : *Quel est l'ordre à utiliser pour obtenir un jeu sans set maximal ?* Nous ne savons pas résoudre ce problème.

Utiliser avec un ordre lexicographique, la stratégie S_2^2 donne des $(n;c)$-jeu de cardinalité 2^n sans 3-set . Avec un ordre différent, nous pouvons trouver un $(3;3)$-jeu de cardinalité 9 sans 3-set . En annexe (ou dans le mémoire!!!!!!!!!!!!), nous pouvons trouver une preuve du théorème suivant :

Théorème VII.7

$\max(2;3) = 4$ *et* $\max(3;3) = 9$.

La preuve est une preuve énumérative par l'absurde, dans laquelle nous utilisons la notion de variable pour réduire le nombre de cas à traiter. La preuve du théorème suivant est du même type :

Théorème VII.8

Pour tout nombre entier c, $\max(2;c) = 4$.

Remarque : Dans les exemples donnés en première partie, nous avons vu que le jeu du set admet une représentation géométrique dont l'un des intérêts est de permettre la généralisation du problème à d'autres formes que les hypercubes. Nous n'étudierons pas, ici, la représentation géométrique du set pour des raisons didactiques : d'une part, nous faisons l'hypothèse que des élèves de secondaire ne vont pas utiliser d'eux-même cette représentation. D'autre part, elle oblige à considérer des objets géométriques de dimension supérieure à 4.

2.2. Petite analyse didactique. Ce problème admet 3 variables : n le nombre de ligne, c le nombre de couleur et t la taille d'un set. Nous avons décidé d'utiliser le nombre de lignes et le nombre de couleurs comme des variables des recherches, car elles laissent la possibilité, d'une part à étudier des cas particulier et à effectuer des généralisations, d'autre part de voir le problème de manière inductive. Par contre, nous avons décidé de fixer la taille d'un set à $t = 3$, car nous avons vu que pour $t = 2$ ou $t = 1$, le problème est très facile et pour $t = 3$, le problème est suffisament complexe et adapté une situation de recherche.

Á l'aide de l'analyse mathématique, nous avons déterminé les savoirs en jeu suivants :

– La définition d'un set requiert la compréhension de **quantificateurs logiques**.
– S_2^2 et S_2^3 incitent à construire un **algorithme** pour résoudre P_2. Cette construction amène à définir une **relation d'ordre** sur les cartes. De plus, du fait que ces stratégies amènent à construire des jeux maximaux, cela amène à discuter de la différence entre **maximum local et global**.
– La notion de **bloc** permet de modéliser un jeu de carte, ce qui peut être utiliser pour partiellement résoudre P_2 et P_5 de manière **inductive**.
– Les preuves des résultats donnant la valeur de $\max(n; c)$ se font par **énumération** et **comptage** (pour $c = 2$). Nous pouvons utiliser des **variables** pour réduire le nombre de cas à traiter.
– Les problèmes P_2 et P_5 mettent en jeu les notions de **minorant** et **majorant**. Notions qui sont proches de **conditions nécessaires et suffisantes**.

3. Présentation dela situation expérimentale

3.1. Objectif des expérimentations. En menant des expérimentations, notre objectif était de tester les potentialités expérimentales de cette situation. Nous avons cherché à étudier dans quelle mesure les élèves étaient capables de rentrer dans une démarche expérimentale et de progresser dans la résolution du problème. En particulier, nous nous sommes intéressé aux contrôles mathématiques utilisés par les élèves pour valider leurs résultats (Giroud, 2009).

3.2. Déroulement des expérimentations. Nous avons conduit deux expérimentations, une avec une classe de seconde et l'autre avec une classe de première scientifique. Les élèves ont travaillé par groupe de 3 ou 4. Chaque expérimentation a duré 2 heures. L'expérimentation avec la classe de seconde a été faîte en premier. Nous avons filmé un groupe lors de chaque expérimentation.

Le problème a été présenté oralement avec des exemples au tableau. Du matériel a été donné aux élèves : des cercles coloriés avec 4 couleurs différentes et, seulement avec la classe de première, des cartes non coloriées avec 1, 2, 3 ou 4 lignes.

Dans les deux expérimentations, nous avons posé le problème de manière générale, sans demander aux élèves de se limiter aux nombres de lignes et aux nombres de couleurs du matériel. La situation a été gérée suivant le modèle de SiRC, afin de laisser aux élèves la responsabilité de l'avancé de la recherche.

Ces deux expérimentations se différencient donc par le niveau des élèves et par des modifications apportées au matériel.

4. Résultats des expérimentations

4.1. Contrôle de la présence d'un set dans un jeu. Dans un premier temps, nous allons décrire la manière dont un groupe de la classe de seconde a essayé de résoudre P_3, c'est-à-dire, la manière dont la présence de sets dans un jeu a été contrôlée.

Les élèves ont commencé par essayer de construire un $(3; 4)$-jeu sans 3-set avec la stratégie S_2^2. Ils ont construit un jeu sans 3-set G_1 et lui ont ajouté une carte C. Puis, ils ont cherché un 3-set dans $G_1 \bigcup C$ en testant de manière « aléatoire » des triplets de cartes. Ils n'ont pas trouvé de set mais n'étaient pas sûrs d'avoir testé tous les triplets. La recherche de l'exhaustivité des triplets n'est donc pas maîtrisée par ces élèves.

Ils ont alors formulé le problème, P_{3a}, suivant : *comment pouvons-nous savoir si tous les triplets de cartes ont été testés ?* Ils ont essayé de résoudre P_{3a} durant une minute sans trouver de solution. Á la suite de cela, ils ont conclu qu'ils avaient testé tous les triplets de $G_1 \bigcup C$ même si ce n'était pas le cas. Sur l'ensemble de la scéance, ce groupe a affirmé a 11 reprises qu'un jeu était sans set et ce n'était vrai qu'une fois.

Notre interprétation est que les élèves de ce groupe, n'arrivant pas à résoudre rapidement P_{3a}, ont décidé d'une part de donner à P_0 une priorité plus élevée qu'à P_3 et d'autre part de se fier à leur stratégie de validation expérimentale « tester tous les triplets ».

Durant toute la scéance, les élèves se sont fiés à une validation expérimentale pour tester la présence de sets. Même après leur avoir montré des sets dans leurs jeux, ils n'ont pas cherché une autre stratégie pour résoudre P_{3a}. Malgré cela, ils ont reconnu que leur stratégie était « trop difficile à faire » et que leur contrôle expérimental associer à cette stratégie n'était pas efficace.

Les élèves n'ont donc pas donné assez d'importance à P_3. Cela rejoint les observations de SCHOENFELD (1992) dans l'étude du « problem solving » : les élèves sont plus concernés par le problème initial que par les sous-problèmes, même si ces derniers sont « clés ». Or pour cette situation P_3 est un élément clé pour avancer dans la résolution de P_0, en particulier pour produire des conjectures. De plus, la résolution de P_3 peut amener à construire la notion de bloc, objet intéressant pour prouver certains résultats ou construire des jeux sans set.

Dans les deux expérimentations, aucun groupe n'a semblé cherché une technique efficace pour résoudre P_3, les élèves ont seulement utilisé des stratégies expérimentales basées sur « tester tous les triplets » sans les transformées en algorithmes. En conséquence, certains groupes n'ont pas réussi à obtenir de résultats pour P_1 avec 3 lignes ($n = 3$). La notion de bloc n'est apparue dans aucune de nos expérimentations.

Il semble donc que les élèves se sont exclusivement fiés à une validation expérimentale de la présence de set. Une interprétation pourrait être que les élèves n'ont pas trouvé de solution mathématiques à P_3, ils ont donc décidé de rester dans un contrôle expérimental pour progresser dans la résolution de P_0.

4.2. Résultats généraux.

4.2.1. *Communs aux deux expérimentations.* Les premières difficultés sont venues de la définition de set. Comme nous l'avons mentionné, la définition met en jeu des quantificateurs et des connecteurs logiques : « pour toutes lignes, il existe ... ou ... ». Ce qui a été source de confusions : « il existe une ligne qui est soit ... soit ... » ou « toutes les lignes sont identiques ».

L'utilisation de matériel a amené les élèves à produire leurs propres expérimentations mathématiques. Les élèves ont commencé à faire des essais pour résoudre P_2 et P_3. Ils ont produit des conjectures qu'ils ont testées par des expérimentations comme « ce jeu est maximum », « en utilisant cette stratégie, on construit des jeu sans set », « avec seulement 2 couleurs sur chaque carte, il n'y a pas de sets. », ce qui leur a aussi permis de construire des contre-exemples. Les élèves se sont donc sentis responsables de la validité de leurs résultats. Sauf pour un groupe, qui, après avoir testé expérimentalement la présence d'un set, nous appelé pour valider ce résultat. Á aucun moment, ce groupe n'a pu décider. Avec ce groupe, il y a eut un problème au niveau du contrat didactique.

Au niveau des solutions établies, certains groupes ont prouvé $\max(n, 2)$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$. Mais seulement un groupe a généralisé ce résultat et ce groupe a fait les 2 expérimentations. Les élèves ont trouvé ces résultats en utilisant la stratégie de construction S_2^2. Au niveau de la preuve de ces résultats, les difficultés ont porté sur le dénombrement des cartes pour le cas $n = 3$.

Toujours en utilisant S_2^2, des élèves ont trouvé un $(2; 3)$-jeu sans set de cardinalité 4. Ils ont conjecturé qu'il était maximal. Ils n'ont pas réussi à montrer que ce jeu était maximal. Avec 3 lignes, le meilleur résultat obtenu est un jeu sans set de cardinalité 8, des élèves ont conjecturé son optimalité.

Le problème de la majoration P_5 n'a pas été posé même s'il a été rencontré de manière indirecte pour montrer la maximalité de certains jeux.

4.2.2. *Différences entre les 2 expérimentations.* Nous présontons les différences sous forme de liste :

Répétition des cartes: En seconde, la discussion sur le fait que la même carte soit répétée plusieurs fois dans un même jeu n'est apparue qu'à la fin de la première heure. Alors qu'en première, elle a eut lieu à la suite de la présentation du problème. Cela a amené les élèves à établir l'équivalence entre P_0 et P_1.

Nombre de lignes: Durant la présentation du problème, nous avons donné un exemple avec trois lignes. Les élèves de seconde n'ont alors travaillé qu'avec des jeu de 3 lignes. Nous avons donc été obligé d'intervenir pour leur expliquer qu'ils pouvaient aussi jouer avec d'autre valeur pour le nombre de lignes. C'est la raison pour laquelle, nous avons décidé de donner des cartes avec 2, 3 et 4 lignes dans la deuxième expérience dans la classe de première. Les élèves ont alors cherché à résoudre P_0 avec $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$ mais ils n'ont pas donné à n une valeur supérieure à celles induites par le matériel. En première, des élèves ont ainsi conjecturé le théorème $VII.8$ pour $c \leq 4$.

Stratégies: Un groupe de la classe de seconde a utilisé une stratégie de construction basée sur des figures géométriques, mais cette stratégie produisait des jeu avec sets.

Un élève de seconde a affirmé que si on commence par un jeu sans set de 3 lignes et qu'on lui rajoute un nombre arbitraire de ligne alors on a toujours un jeu sans set de même cardinalité. Ici, nous sommes proche de la construction inductive. Malheureusement, cet élève croyait que l'objectif principal était de résoudre le problème avec 3 lignes, il n'a donc pas développé cette idée.

Un groupe de la classe de première a utilisé la stratégie S_2^3. Ils n'ont pas obtenu de nouveaux résultats mais ont été obligés de représenter toutes les cartes possibles, ils ont alors utilisé des symboles à la place des couleurs.

5. Conclusion

Dans les deux classes, les élèves ont essayé de résoudre ce problème en faisant des expérimentations génératives et validatives. Ils ont ainsi cherché à construire expérimentalement des jeux de cartes sans set. Toutefois, ils n'ont pas réussi à mettre au point un algorithme permettant de déterminer si un jeu contient un set, ce qui les a empêché de faire des observations pertinentes. En conséquence, certains groupes n'ont obtenu aucun résultats, même partiels, pour les cartes de 3 lignes.

Nous faisons l'hypothèse que la non-identification de ce problème comme un problème essentiel vient d'une conception des élèves sur l'activité mathématiques : faire des mathématiques c'est résoudre le problème posé et c'est tout. Il n'y a donc pas de place pour la résolution de nouvelles questions induites par le problème initial.

Une session de 2 heures est probablement insuffisante pour permettre l'apparition de la notion de bloc et des stratégies S_3^2 et S_1^2. Cette situation a été utilisée lors d'un MATh.en.JEANS (18 scéances dans l'année), les stratégies S_3^2 et S_1^2 sont apparues ainsi que les résultats associés.

Le plus petit exemple montrant la différence entre localment maximal et maximal apparaît pour les $(3;3)$-jeu (voir figures VII.8 et VII.9). Les élèves de première ont trouvé un $(3;3)$-jeu sans set de cardinalité 8 localement maximal (celui composé d'uniquement 2 couleurs) qu'ils ont conjecturé comme maximal. Á la fin de la scéance, nous leur avons montré un contre-exemple, ce qui nous a permis de discuter des différences entre maximum local et maximum.

Deuxième partie

Construction d'un milieu et hypothèses de recherche

CHAPITRE VIII

Hypothèses de recherche et de travail

1. Postulats

En introduction, nous avons fait le postulat suivant :

Postulat 1

Savoir faire des mathématiques c'est savoir résoudre (partiellement) des « problèmes de recherche », la résolution de tels problèmes passant par des phases expérimentales.

Par rapport aux analyses que nous avons conduites dans la première partie (analyse de manuel et jeu du set), nous faisons le postulat suivant :

Postulat 2

La démarche expérimentale en mathématiques, telle que nous l'entendons, n'est pas proposée par l'institution scolaire.

2. Hypothèses de recherche et de travail

Nous faisons les hypothèses de recherche suivante :

Hypothèse de recherche 1

Les élèves, de niveau collège ou supérieur, sont capables de rentrer dans une démarche expérimentale en mathématiques.

Nous avons restreint l'hypothèse au niveau collège ou supérieur à cause de la complexité des situations que nous étudions. Un travail similaire pour le niveau primaire est possible avec l'utilisation de situation comme la chasse à la bête ou celle du pavage.

D'autre part, l'analyse épistémologique que nous avons réalisé justifie l'aspect épistémologique de l'hypothèse suivante :

Hypothèse de recherche 2

La pratique de la démarche expérimentale permet aux élèves d'« avancer » dans la résolution du problème.

Ces hypothèse sont aussi appuyées par les travaux que nous avions effectués concernant le *jeu du set*.

Pour vérifier ces hypothèses de recherche, nous allons, en utilisant la caractérisation de démarche expérimentale que nous donnons, vérifier qu'au cours de nos expérimentations, les élèves ont bien mis en place les éléments caractéristiques de cette démarche. De plus, nous essaierons de regarder dans nos expérimentations quel a été l'apport (positif ou négatif) de la pratique de la démarche expérimentale dans l'« avancée » de la recherche. Nous considérons qu'il y a avancée dans la recherche lorsque la conception des élèves sur le problème est modifiée. Par exemple, lorsqu'un nouveau problème est formulé, une nouvelle relation entre 2 problèmes établis, un nouvel exemple produit, une nouvelle représentation utilisée...

Dans le chapitre sur le jeu du set, nous avons vu que les élèves n'ont utilisé qu'une validation expérimentale concernant la présence d'un set et que cela a eut pour conséquence d'être un obstacle à la production de résultats. Par rapport à notre modèle de démarche expérimentale, le problème de la présence d'un set dans un jeu de carte, apparaît comme étant un problème de validation de la stratégie de construction de jeu sans set. Nous porterons donc une attention particulière à la manière dont les élèves valident leurs stratégies lorsqu'ils expérimentent.

Enfin, nous faisons les hypothèses de travail suivantes :

Hypothèse de travail

La pratique de la démarche expérimentale en mathématiques nécessite de mettre en place un contrat didactique différent de l'usuel. Ce contrat devra laisser plus de responsabilité à l'élève dans l'avancement de la résolution du problème.

Cette première hypothèse de travail s'appuie aussi sur les travaux présentés dans la première partie. Nous effectuons aussi l'hypothèse suivante :

Hypothèse de travail

Les actions que nous effectuons sont guidées par la « conception » que nous portons sur le problème que nous essayons de résoudre.

CHAPITRE IX

Éléments constitutifs d'un milieu pour la démarche expérimentale

Nous avons vu dans le chapitre I que pratiquer la démarche expérimentale en mathématiques consister à essayer de résoudre un problème en effectuant les actions suivantes de façon non nécessairement ordonnées et à, éventuellement, répéter :
– proposer de nouveaux problèmes ;
– expérimenter-observer-valider ;
– tenter de prouver.

Notre objectif principal est donc de donner des éléments de ce qu'est un *milieu adidactique* permettant de réaliser ces 3 types d'actions. Dans la section suivante, nous allons voir quels sont les moyens que nous considérons pour rendre cela possible.

1. Caractéristiques d'un milieu a-didactique

1.1. L'élève doit prendre l'expérimentation à sa charge. Par cela, nous entendons que l'élève doit effectuer des expériences qu'il a construit lui même afin d'avancer dans la résolution du problème. L'élève doit pouvoir faire ses propres choix expérimentaux. En particulier, l'élève doit prendre à sa charge le problème de la validation du produit de l'expérimentation.

Pour réaliser cela, l'enseignant devra donc dévoluer cette responsabilité aux élèves. D'autre part, nous faisons l'hypothèse que fournir du matériel aux élèves va les inciter à effectuer des expériences (utilisant ce matériel) pour avancer dans la résolution du problème.

1.2. Les outils matériels contenus dans le milieu doivent être maîtrisés par les élèves. À la suite de notre étude de manuel, page 101, nous avons fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse

Le milieu doit permettre d'utiliser des outils d'expérimentations maîtrisés par les élèves..

Nous avons fait cette hypothèse (p. 101) en réponse à ce qui est, selon nous, un frein à la pratique de la démarche expérimentale : l'utilisation d'outils non maitrisés par les élèves.

Nous proposons donc d'utiliser les médians suivants :
– support matériel : plateau en bois ou en carton, jetons. . .
– papier et crayon ;
– outils de contruction géométrique ;

– logiciel informatique simple d'accès ne retranscrivant que les actions des élèves.

De plus, Pour que ces éléments soient dans le milieu, nous préconisons l'utilisation de situations qui seront porteuses d'incertitudes (ZASLAVSKY (2005)) pour l'élève, l'utilisation des médians apparaissant alors comme un outil permettant de réduire cette incertitude (voir sous-section 1.6).

1.3. Les instances du problème initial doivent être des objets apparaissant comme non-usuels pour les élèves. Les travaux de LITHNER montre que l'utilisation de problèmes éloignés de ceux que les élèves ont l'habitude de traiter favorise l'utilisation du » raisonnement plausible« que nous considérons comme étant au cœur de la démarche expérimentale.

LITHNER (2000) identifie 2 types de raisonnements : le raisonnement « PR », en référence au « Plausible Reasonning » de POLYA (1990) et le raisonnement « EE », pour « Established Experiences ». Pour LITHNER, le raisonnement PR est fondé sur les propriétés mathématiques des objets alors que le raisonnement EE est fondé sur l'expérience personnelle concernant les objets du problème.

Un exemple de raisonnement EE, sur une tâche T donné par LITHNER est le suivant :

> The solutions to all maximisations tasks I have solved have been found where $f'(x) = 0$. So T is solved by finding where $f'(x) = 0$

Un exemple de raisonnement PR, sur la même tâche T est le suivant :

> If one sees the graph of a function as hills and valleys, a maximum is found at the top of a hill. At the top slope is zero, and the slope is described by the derivative. So T is solved by examining the points where $f'(x) = 0$.

Même si le raisonnement EE n'est pas sans intérêt au cours d'une recherche, le raisonnement PR nous semble être au cœur de la démarche expérimentale. LITHNER (2000) remarque qu'en situation de résolution d'un problème d'optimisation continu, les élèves[1], qui n'ont pas réussi à résoudre le problème, ont utilisé le raisonnement EE dans la construction de leur stratégie de résolution. Le raisonnement PR étant seulement utilisé de manière locale.

De plus, dans un article plus récent, LITHNER (2010) montre que lorsque les élèves sont confrontés à des problèmes qui sont proches de ceux rencontrés dans leurs manuels, ils utilisent principalement le raisonnement « Imitative Reasonning » alors que confronté à des tâches qui s'éloignent de celles données par les manuels, ils vont utiliser des raisonnements basés sur le raisonnement plausible et les propriétés mathématiques des objets, créant par la même de nouvelles démarches de résolution.

Cela nous amène ainsi à faire l'hypothèse qu'utiliser, pour les instances, des objets proches[2] de ceux que les élèves ont travaillé ou travaillent va

[1]Les élèves avaient, normalement, les connaissances nécessaires pour résoudre le problème

[2]Proche au niveau des représentations. L'utilisation d'objets proches au niveau conceptuel est indispensable, toutefois il faut que le milieu puisse être enrichi par de

les amener à favoriser l'utilisation de raisonnement EE au détriment du raisonnement PR, ce qui va être un obstacle à la construction de nouveaux objets mathématiques et à la formulation de nouveaux problèmes.[3].

Nous pourrions nous demander aussi pourquoi ne pas simplement considérer des problèmes avec des instances usuelles et des questions différentes. Nous faisons l'hypothèse que les instances, notamment à travers leurs représentations favorisent l'utilisation du raisonnement EE, bien plus que la question. Toutefois, il se peut aussi que si la tâche est identifiée comme étant proche d'une tâche que les élèves ont l'habitudes de réaliser (même si les instances sont différentes) entraînent les élèves à utiliser du raisonnement EE, cela peut par exemple être le cas dans le problème d'optimisation, *la chasse à la bête*, que l'on pourrait essayer de résoudre en cherchant à dériver une fonction…

Pour cela nous préconisons l'utilisatin de problèmes issues des mathématiques discrètes, car ils existent de nombreux problèmes faciles d'accès dont les instances ne sont pas usuelles pour les élèves.

1.4. Le milieu doit permettre la construction de nouveaux objets mathématiques. Nous avons fait dans le chapitre portant sur l'étude d'un manuel (p. 102), l'hypothèse suivante :

Hypothèse

> *L'apprentissage de la démarche expérimentale nécessite des problèmes dont la résolution fait appel à des objets mathématiques qui n'ont pas encore été travaillés par les élèves.*

Nous faisons cette hypothèse, car une démarche expérimentale doit, selon nous, permettre le développement de nouveaux objets mathématiques. En effet, si les objets mathématiques clés de la résolution sont des objets qui sont connus des élèves, leur démarche peut être amputée de tout travail de modélisation.

1.4.1. *Le milieu doit permettre la construction d'objets mathématiques à l'aide de l'expérimental.* En particulier, il doit être possible d'identifier des propriétés sur les objets mathématiques afin d'émettre des conjectures. Dans ce cas, l'expérimental participe au développement, chez l'élève, de sa conception sur le problème.

Nous dirons que cette construction est possible à travers l'expérimentation lorsqu'expérimenter amène à formuler de nouveaux problèmes dont la résolution peut entraîner la construction de nouveaux objets.

Voici des exemples :

---

nouveaux objets construits par les élèves : ces nouveaux objets peuvent être des exemples, des contre-exemples, de nouvelles définitions…

[3]Remarquons que nous considérons l'apprentissage du raisonnement PR sur des situations proches de celles travaillées en classe comme l'un des objectifs de l'apprentissage des mathématiques à l'école. Nous pourrions donc utiliser des problèmes dont les objets sont proches de ceux qui ont été travaillés en classe, toutefois, il nous semble que le franchissement de l'« obstacle » EE ne peut se faire qu'une fois que les élèves ont été mis en situation de chercher un problème.

Exemple IX.1. Dans le jeu de la chasse à la bête, à l'aide d'expérimentation générative nous pouvons construire des solutions admissibles et ainsi être confronté au probléme suivant : cette solution admissible est-elle solution (optimale) ?

Exemple IX.2. En essayant de résoudre le jeu du set de manière expérimentale, nous sommes confronté au nouveau problème suivant : comment vérifier qu'un jeu de carte contient un set ? La résolution de ce problème peut nous amener à construire la notion de bloc, que nous pouvons utiliser pour résoudre le problème du set dans certains cas particuliers.

Pour savoir si le milieu peut permettre de construire de nouveaux outils de résolutions, il est donc nécessaire de déterminer les nouveaux problèmes que l'activité expérimentale est susceptible de nous faire rencontrer.

1.5. Un grand nombre de propositions doivent être vérifiables expérimentalement sur des cas particuliers. Selon Bernard (2008), les hypothèses effectuées dans une « méthode expérimentale » doivent être vérifiable expérimentalement[4]. En reprenant cette idée, le problème proposé aux élèves doit pouvoir permettre la formulation de propositions et conjectures vérifiables expérimentalement.

1.6. Mais la validation expérimentale doit apparaître comme insuffisante... Toutefois, afin que la vérification expérimentale ne soit pas un obstacle à la preuve, la situation doit comporter une incertitude suffisamment élevée pour justifier une validation théorique. En référence à Zaslavsky (2005), voici des types d'incertitudes que la situation doit permettre de générer :

(1) hypothèses rivales ;
(2) chemin inconnu ou conclusion incertaine ;
(3) hypothèse non vérifiable facilement.

D'autre part, nous différencions plusieurs niveaux d'*incertitude expérimentale* :

– le milieu est *sans incertitude* si l'élève connaît déjà la réponse au problème ou s'il connaît une stratégie qui permet de la trouver.
– le milieu est d'un *faible niveau d'incertitude expérimentale* pour un élève lorsqu'il est porteur d'incertitude et lorsque l'incertitude ne persiste pas expérimentalement, c'est-à-dire si l'élève n'est amené qu'à formuler peu de nouveaux problèmes. C'est par exemple le cas, dans le problème étudié dans le chapitre ? ? ? ? concernant les manuels scolaires, l'expérimentation nous amenant à faire apparaître un cercle à chaque fois.
– Nous dirons que le milieu possède *un haut niveau d'incertitude expérimentale* pour l'élève lorsque l'incertitude persiste, c'est-à-dire lorsque expérimentalement l'élève est amené à formuler de multiples nouveaux problèmes.

[4]En sciences empiriques, généralement, ce qu'on vérifie ce sont des conséquences de l'hypothèse.

Pour obtenir un haut niveau d'incertitude expérimentale, nous proposons d'utiliser des problèmes dont l'espace problème est important. Pour permettre le développement de cet espace problème, nous proposons de laisser la prise en charge de certaines variables du problème aux élèves : les *variables de recherche* (GODOT, 2005 ; GRENIER et PAYAN, 2002, p. 133 ;).

Enfin, il nous semble que la possibilité d'effectuer des généralisations basées sur des cas particuliers peut faire rentrer les élèves dans un processus de preuve, du fait du besoin de vérifier que le résultat est vrai pour un grand nombre de cas. Cela nous amène donc à utiliser des instances du problème comme variables de recherche.

Selon Bloch, pour que les élèves puissent effectuer des preuves, il est nécessaire que le milieu comportent des types de preuves qu'ils connaissent ou qu'ils construisent.

1.7. Le milieu doit permettre l'étude de cas particuliers. Nous avons vu que les cas particuliers peuvent jouer un rôle important dans l'avancée de la recherche, que cela soit, avec l'expérimentation générative, pour établir des propriétés sur des objets mathématiques ou, avec l'expérimentation validative, pour faire des preuves. Un milieu favorable à la démarche expérimentale produit des objets mathématiques qui peuvent servir d'exemples ou de contre-exemples.

Pour permettre aux élèves d'étudier des cas particuliers, nous proposons d'utiliser des *variables de recherche* portant sur les instances du problème.

1.8. Le modèle de SiRC. Le modèle de situation que nous préconisons pour l'apprentissage de la démarche expérimentale se rapproche de celui des situations de recherche en classe(GRENIER et PAYAN, 2002), ce dernier est caractérisé de la manière suivante :

(1) la situation s'inscrit dans une problématique de recherche professionnelle ;
(2) le question initiale est facile d'accès ;
(3) des stratégies initiales existent ;
(4) plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles ;
(5) une question résolue renvoie très souvent une nouvelle question.

Le milieu associé au SiRC est, d'après GRENIER et PAYAN (ibid.), muni des caractéristiques suivantes :

– les concepts mathématiques en jeu ne sont pas désignés à l'avance et ne sont pas restreints a priori ;
– les apprentissages en jeu sont ceux qui sont constitutifs de l'activité de recherche mathématique : argumenter, formuler et étudier des conjectures, prouver, modéliser...
– des savoirs notionnels sont aussi en jeu, ils vont constituer les « points d'ancrage notionnels » pour l'enseignant ;
– aucune stratégie, aucune connaissance ne doit être a priori exclue ;
– présence de variables de recherche ;
– pour l'élève, un critère de réussite « provisoire » est l'émission d'une conjecture forte ou la résolution d'un cas particulier ;

– pour l'enseignant, le critère de réussite est la reconnaissance d'apprentissages liés au triplet (question, conjecture, preuve).

D'autre part, dans une SiRC, les élèves sont en position de chercheur et ont pour tâche de produire des résultats qui sont nouveaux pour eux. Tandis que, selon GRENIER et PAYAN (2002), l'enseignant est dans une « double position de chercheur et de gestionnaire de la situation ». Il est en position de chercheur, car les élèves peuvent se poser des problèmes pour lesquels il n'a pas les réponses, il peut alors s'associer à eux pour chercher des solutions. D'autre part, il doit contrôler l'activité de l'élève par rapport aux objectifs d'apprentissage, *les savoirs transversaux*[5]. En particulier, il doit s'assurer des apprentissages reliés au débat scientifique (LEGRAND, 1993), GRENIER et PAYAN (2002) donnent les exemples suivants : une affirmation doit être argumentée, un contre-exemple est suffisant pour annuler une conjecture mais parfois il est possible de modifier celle-ci pour en faire une autre conjecture, des exemples ne suffisent pas à prouver. Concernant l'enseignant, GODOT (2006) dit aussi qu'il est amené à interroger, relancer les recherches, à « pratiquer une pédagogie de l'encouragement » en référence à la gestion des problèmes ouverts développés à Lyon (ARSAC et MANTE, 2007).

De part les caractéristiques que nous venons de développer, les SiRC sont susceptibles de générer une activité expérimentale pertinente chez les élèves. En particulier, nous faisons l'hypothèse qu'un problème proche de la recherche dispose d'un *espace problème* important.

Nous reprendrons donc les caractéristiques du milieu de ces situations notamment concernant les positions et objectifs respectifs de l'enseignant et des élèves, l'idée d'un problème proche de la recherche ainsi que celle des variables de recherche.

1.9. Le rôle des élèves et de l'enseignant. L'enseignant doit établir un nouveau contrat avec les élèves que nous avons représenté dans le tableau

Pour résumer, l'enseignant doit créer des conditions qui mettent les élèves dans une position, la plus proche possible, de celle d'un chercheur, il ne doit donc pas apparaître comme ayant toutes les réponses et, s'il connaît des solutions, il ne doit pas les donner..

2. Par rapport aux caractéristiques d'un « milieu pour l'expérience » de Durand-Guerrier

DURAND-GUERRIER (2010) donne son point de vue sur un milieu favorisant le recours à l'expérimental :

> L'organisation par le professeur d'un milieu permettant de favoriser le recours à l'expérience est une tâche complexe et exigeante. Un tel milieu doit être nourri par la connaissance a priori, pour le professeur, de l'épistémologie et de l'histoire des savoirs en jeu dans la situation. Il doit comporter des objets matériels (sensibles) ou des objets mathématiques suffisamment familiers pour le sujet pour que celui-ci puisse

[5]Les *savoirs transversaux* sont les savoir-faires nécessaires à toute activité mathématique et sont constitutifs de la démarche scientifique.

[6]Même s'il peut, dans un premier temps, soumettre la preuve à la classe.

	Élève	Enseignant
Objectifs	ceux mentionnés par GRENIER et PAYAN (2002)	
Critères de réussite	ceux mentionnés par GRENIER et PAYAN (2002)	
Expérimentations	responsable des expérimentations	dévolue la responsablilité des expérimentations
Conjectures	production à sa charge	doit en dévoluer la production
Validation des résultats	prise en charge	doit la dévoluer
Validation de la preuve		est responsable de la validité des preuves[6]
Problèmes	peut s'autoriser à formuler et résoudre de nouveaux problèmes	peut s'autoriser à introduire de nouveaux problèmes
Preuve		doit identifier ou introduire les nouveaux types de preuve
Incertitude	réduit l'incertitude localement	ne doit pas réduire l'incertitude sauf en cas de blocage
Savoir-faire		doit contrôler les *savoirs transversaux*

TAB. IX.1. Tableau du contrat didactique

> s'engager dans l'action, en dégager des conjectures et les questionner. Il est nécessaire que ce milieu favorise la mobilisation d'outils (par exemple : élaboration de conjectures ou de règles, élaborations d'objets nouveaux, changement de cadre, mise en relation de propriétés etc...) permettant de mettre en œvre un traitement mathématique général dont les résultats pourront être confrontés aux résultats des actions sur les objets. Il faut enfin qu'il permette la médiation entre sujets et objets et favorise l'articulation entre les aspects sémantiques, syntaxiques et pragmatiques qui sont mobilisés pour l'élaboration de conjectures puis de preuves.

Un des points qui nous semble intéressant est la présence d'« objets mathématiques suffisamment familiers pour le sujet ». Cela se rattache au domaine de réalité ou le domaine d'expérience tel que décrit par DURAND-GUERRIER (ibid.) :

> Ici, il ne s'agit plus d'objets sensibles, mais d'objets, de propriétés et de techniques, naturalisés, c'est-à-dire suffisamment familiers pour que les résultats des actions soient considérés comme fiables (on trouve un sens proche de cette notion de réalité chez Tarski, 1960). Ils permettent donc de valider les hypothèses ou les prévisions et constituent donc en ce sens un domaine d'expérience pour le sujet, dans un

sens voisin de Boero (2002), à qui j'emprunte, en la détournant un peu, l'expression.

Cette « fiabilité » des actions, nous la retrouvons dans notre modèle de l'expérimentation à travers la validation d'une stratégie et la validation du produit d'une stratégie (voir page ???????), sans une validation fiable à ce niveau, les élèves ne pourront pas décider si un fait issu de l'expérimental est vrai ou faux. De ce fait, cette validation doit être accessible à l'élève sous peine de ne rester qu'à un niveau empirique ou empirico-théorique biaisé par des observations erronées.

Concernant l'aspect matériel, nous pouvons rattacher cette idée à l'hypothèse que nous avons fait sur les médians.

Quant à l'aspect mathématiques, nous rajouterons à ces caractristiques la possibilité du développement de ce domaine de réalité ou d'expérience à travers l'activité de résolution du problème. En effet, des objets mathématiques qui, initialement, ne sont pas dans le domaine d'expérience, peuvent, ensuite, appartenir à ce domaine. Pour cela, l'activité expérimentale nous apparaît comme un levier.

3. Portrait robot d'un problème

L'objectif étant la construction d'une situation, nous allons chercher à établir, dans cette section, le « portrait robot »[7]d'un problème mathématique satisfaisant les conditions que nous avons mentionnées précedemment. Toutefois, seule une analyse mathématique et didactique de la situation est à même de confirmer la présence des caractéristiques que nous cherchons. Ce que nous essayons de déterminer est une classe de problèmes susceptibles d'avoir les prorpriétés que nous cherchons.

Nous rappelons que les caractéristiques que le problème doit avoir sont les suivantes :
- instances non-usuelles ;
- large champ de problèmes ;
- un grand nombre de propositions doivent être vérifiables expérimentalement ;
- haut niveau d'incertitude expérimentale ;
- nombreux cas particuliers étudiables.

Pour obtenir des instances non-usuelles, nous pouvons utiliser des problèmes issues des mathématiques discrètes étant donné qu'un grand nombre d'objets issus de ce domaine ne sont pas étudiés en classe de mathématiques[8]. L'intérêt des mathématiques discrètes se retrouve aussi au niveau des représentations, étant donné que, souvent, les objets « de petites tailles » sont représentables (entièrement) relativement facilement à l'aide de papier crayon ou de matériel.

En rapport avec le modèle de SiRC, un type de problème qui possède ces caractéristiques est un problème proche de la recherche actuelle, toutefois tous les problèmes de recherche, même accessibles au niveau de la compréhension du problème par un élève, ne sont pas adaptés, c'est par exemple

[8]Il nous faut signaler que les graphes sont au programme de la spécialité mathématiques de terminale ES.

le cas de la conjecture de Goldblach pour lequel nous considérons que l'incertitude expérimentale est faible pour un élève. Il est alors indispensable de se mettre en situation de résoudre le problème afin d'évaluer l'incertitude expérimentale. Un signe d'incertitude expérimentale élevée est lorsque le problème est riche est en conjecture (fausse ou vraie).

L'intérêt de considérer un problème proche de la recherche est de s'assurer qu'il possède un champ de problèmes importants. Une grande partie de ce champs de problèmes doit être accessibles aux élèves, de ce fait, une analyse mathématiques et didactique du problème est indispensable pour confirmer de manière a-priori l'accessibilité du champ aux élèves.

Des problèmes de recherche issues des mathématiques discrètes sont alors intéressants, de part le large champ de problème, leur existence marginale dans les programmes scolaires et leur côté accessible au premier abord[9].De plus, le domaine des mathématiques discrètes apparaît comme étant adapté à l'apprentissage de la preuve et de la modélisation (Grenier et Payan, 1998).

Pour s'assurer que de nombreux cas particuliers soient étudiables, il est intéressant d'utiliser des problèmes possédant des instances appartenant à un large domaine. Le rôle de l'analyse a-priori est alors de s'assurer qu'un certains nombres de ces instances est accessibles aux élèves.

Pour s'assurer que le problème propose de nombreuses propositions vérifiables expérimentalement, il est indispensable de chercher à résoudre le problème à l'aide d'une démarche expérimentale.

[9]Car il semble que les mathématiques discrètes soit une branche des mathématiques où les énoncé d'un certains nombres de problèmes sont compréhensibles par le « grand public ».

Troisième partie

Analyse de *Chercher la frontière*

CHAPITRE X

Analyse mathématique

1. Présentation du jeu

Nous allons présenter 2 versions du problème *chercher la frontière*. Dans les deux versions, le jeu utilise 2 joueurs. Toutefois, dans la première version du jeu (situation 0), un seul joueur est confronté à un problème. Dans une deuxième version (situation 1), chaque joueur est confronté à un problème différent. Ces problèmes mettent en jeu les même objets : des frontières et des territoires. Nous présentons maintenant les 2 situations.

1.1. Situation 0. Comme l'intitulé du problème l'indique, les objets du problèmes sont des frontières et des territoires. Les territoires que nous considérons sont des ensembles de cases connexes[1], en voici des exemples :

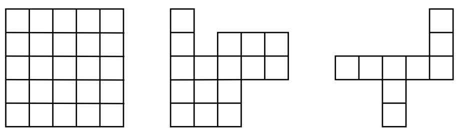


Fig. X.1. Exemples de territoires.

Les frontières sont des ensembles de cases qui peuvent être des segments verticaux, horizontaux, diagonaux et anti-diagonaux ou l'ensemble vide (frontière vide). En voici des exemples :

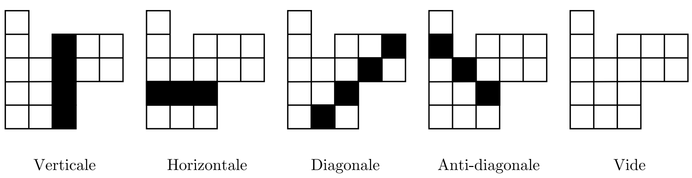


Fig. X.2. Exemples de frontières.

De plus, les frontières séparent les territoires en 2 sous-territoires : un territoire rouge et un territoire bleu, comme nous pouvons le voir sur la figure X.3.

Le jeu est alors le suivant :

[1]Nous considèrons q'un ensemble de cases est connexe lorsque, pour tout couple de cases, il existe un chemin reliant ces cases. Un chemin est une suite de cases tel que 2 cases consécutives soient adjacentes par un côté.

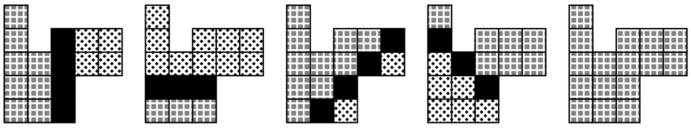


Fig. X.3. Exemples de séparation d'un territoire.

Étant donné un territoire vierge[2], le joueur 2 choisit une frontière qu'il cache au joueur 1. Le joueur 1 doit trouver quelle est cette frontière. Pour cela, il a le droit de demander au jouer 2 la couleur de n'importe quelle case du territoire. L'objectif du joueur 1 est donc de déterminer la frontière en utilisant le plus petit nombre d'interrogations.

Exemple X.1 (Un exemple de partie). Le territoire celui de la figure X.4. Le joueur 2 choisit la frontière de la figure X.5.

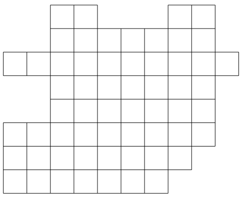


Fig. X.4. Territoire vierge.

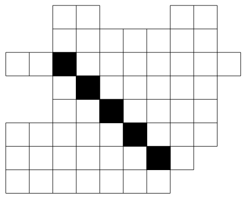
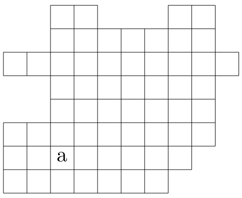
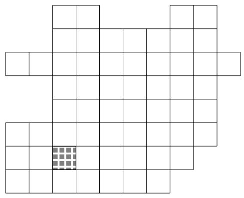


Fig. X.5. Frontière à trouver.

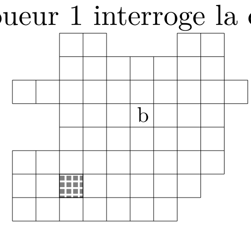
Voici le déroulement de la partie :



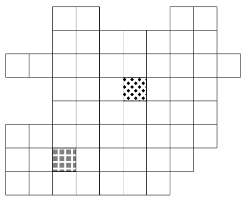
Le joueur 1 interroge la case a.



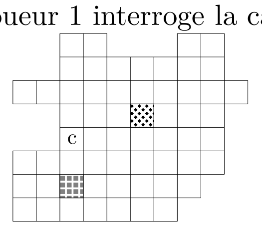
Le joueur 2 donne la couleur bleue.



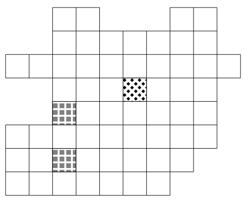
Le joueur 1 interroge la case b.



Le joueur 2 donne la couleur rouge.

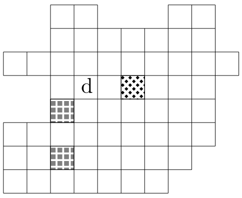


Le joueur 1 interroge la case c.

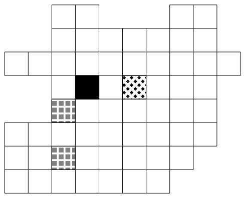


Le joueur 2 donne la couleur bleue.

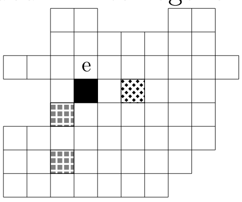
[2]Un territoire vierge est un territoire où aucune case n'est coloriée.



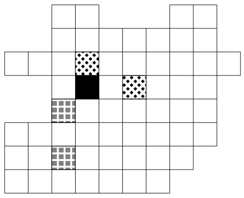
Le joueur 1 interroge la case d.



Le joueur 2 donne la couleur noire.

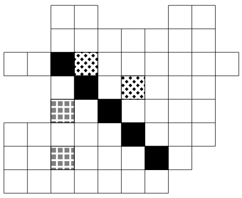


Le joueur 1 interroge la case e.



Le joueur 2 donne la couleur rouge.

Le joueur 1 conclut alors en 5 coups :



Dans cette version, le joueur 2 ne fait pas face à un problème puisqu'il a juste à choisir une frontière et à donner les couleurs en fonction de celle-ci. Ce n'est pas le cas du joueur 1 qui est confronté au problème $P_{chercheur}$: comment trouver la frontière en utilisant le plus petit nombre d'interrogations ?

Nous présentons maintenant la seconde version du jeu, dans laquelle le joueur 2 est aussi confronté à un problème.

1.2. Situation 1. Les objets sont les mêmes que ceux de la situation 0. La situation est identique à ceci près que le joueur 2 est autorisé à modifier la frontière au cours de la partie. Voici l'énoncé de cette situation :

> Étant donné un territoire vierge, le joueur 1 doit trouver la frontière cachée par le joueur 2. Pour cela, le joueur 1 a le droit de demander au joueur 2 la couleur de n'importe quelle case du territoire. L'objectif du joueur 1 est donc de déterminer la frontière en utilisant le plus petit nombre d'interrogations. L'objectif du joueur 2 est de maximiser le nombre d'interrogations utilisées par le joueur 1.

Le joueur 1 est toujours confronté au problème $P_{chercheur}$, car déterminer un algorithme qui trouve la frontière quelque soit la frontiière choisie par le joueur 2 est équivalent à déterminer un algorithme quelque soit la stratégie employée par le joueur 2.

Le joueur 2 est, quant à lui, confronté au problème $P_{donneur}$, comment maximiser le nombre d'interrogations utilisées par le joueur 1 ?

Dans la suite, nous appelerons *chercheur* le joueur 1 et *donneur* le joueur 2. Et P_{fr} le problème qui consiste à rechercher le nombre minimal d'interrogations permettant de trouver la frontière.

Dans la sous-section suivante, nous présentons une version mathématisée de la situation 1.

1.3. Formalisation de la situation 1. La représentation que nous utilisons, ici, met en jeu des objets de $\mathbb{Z}^2$ à savoir des points, des vecteurs, des droites et des demi-plans.

Considérons $D_4 = \{(1,0),(1,1),(0,1),(-1,1)\}$. Nous appelons *droites* les ensembles suivants : $\{z \in \mathbb{Z}^2, \langle z,u\rangle = a\}$ où $u \in D_4$ et $a \in \mathbb{Z}$. On dira que la droite est :

– *horizontale* si $u = (0,1)$;
– *verticale* si $u = (1,0)$;
– *diagonale* si $u = (1,-1)$;
– *anti-diagonale* si $u = (1,1)$.

Une droite D sépare $\mathbb{Z}^2$ en trois parties $P_1 = \{z \in \mathbb{Z}^2, \langle z,u\rangle < a\}$, $P_2 = \{z \in \mathbb{Z}^2, \langle z,u\rangle > a\}$ et D, nous dirons que les points de P_1 sont *rouges*, ceux de P_2 *bleus* et ceux de D sont *noirs*. Nous définissons aussi *la frontière F issue de D d'un sous ensemble A* de $\mathbb{Z}^2$ par l'intersection de A et D. Nous pouvons maintenant énoncer le problème.

Enoncé : Sur une partie finie A de $\mathbb{Z}^2$ vierge, 2 joueurs s'affrontent. Le premier joueur que nous appellerons *le chercheur* cherche à trouver une frontière de A que le joueur 2, que nous appellerons *le donneur*, cache.
Pour trouver la frontière, le chercheur a le droit de demander au joueur 2 la couleur de n'importe quel point de A. Le but pour le chercheur est de trouver la frontière en utilisant le minimum d'interrogations et pour le donneur de retarder le plus longtemps possible la découverte de la frontière.

Dans ce qui suit, nous allons analyser ces situations. Dans un premier temps, nous nous consacrons à la situation du côté du chercheur en mettant en avant les différentes conceptions du problèmes qui pourraient être développées. Ensuite, nous nous consacrerons au donneur. Nous essaierons dans nos analyses de prendre en compte l'aspect expérimental en donnant une attention particulière aux problèmes rencontrés, aux cas particuliers et aux exemples.

De plus, notre analyse se limitera à des territoires vierges de forme **rectangulaire**.

2. Analyse mathématique de la situation pour le chercheur

Nous utilisons le vocabulaire suivant : un algorithme est un *algorithme de recherche* s'il trouve la frontière et il est de *défense* s'il donne les couleurs des points de manière non contradictoire.

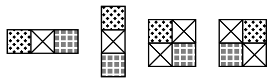
Le problème $P_{chercheur}$ est un problème de recherche de solution. Lorsque nous expérimentons pour le résoudre, nous produisons donc des stratégie, des ensembles de cases coloriées et une frontière. La validation du produit de la stratégie va donc consister à s'assurer que les couleurs des cases déterminent effectivement la frontière, c'est-à-dire, que la frontière annoncée est l'unique frontière possible. Ce problème peut alors se traiter au niveau de la stratégie

$P_{vérif}$, s'assurer que la stratégie employée trouve la frontière ou au niveau de la configuration de cases P_{gen} s'assurer que la configuration de cases engendrent cette frontière.

Si notre stratégie n'est pas suffisament structurée, nous allons nous diriger vers P_{gen}. Ce problème peut alors nous amener à développer le résultat suivant :

Lemme X.2

Le point croix est noir dans les configurations suivantes :



1 2 3 4

Nous pouvons alors nous poser le problème de la réciproque et conclure que ce sont les seules configurations pour lesquelles nous pouvons donner la couleur noire à un point.

Ce lemme nous permet de dire si un point est noir et permet même dans les cas 3 et 4 de déterminer la frontière, car nous connaissons 2 points noirs.

Le problème P_{gen} peut aussi amener à établir la stratégie suivante : vérifier que la configuration engendre 2 points noirs ou vérifier qu'elle engendre un point noir et la direction de la frontière. Le résultat justifiant cette stratégie est le suivant :

Théorème X.3

Soit F une frontière alors :

a) *si 2 points sont noirs, F est issue de la droite passant par ces 2 points ;*

b) *si un point est noir et si F est dirigée par le vecteur u, F est issue de la droite passant par ce point et dirigée par u.*

Nous rencontrons ainsi le problème $P_{direction}$, quelles sont les configurations qui engendrent une unique direction ? Nous ne traiterons pas ce problème tout de suite, nous verrons plus tard un théorème qui sera une réponse partielle de ce problème. Nous pouvons aussi rencontrer le problème P_{noir}, quelles sont les configurations qui engendrent 2 points noirs ?

Nous allons maintenant nous concentrer sur les stratégies de recherche que nous pouvons développer pour résoudre $P_{chercheur}$. En particulier, ces stratégies sont construites avec une volonté d'optimiser le nombre d'interrogations qu'elles utilisent. Si la stratégie est jugée suffisament optimale, nous pouvons alors essayer de construire un algorithme de recherche basée sur celle-ci, le problème de la construction d'un algorithme est P_{algo}. Nous sommes alors confrontés à P_{evalC}, évaluer l'optimalité d'un algorithme de recherche. Pour répondre à P_{evalC}, il nous faut déterminer le nombre d'interrogations utilisée par l'algorithme[3], c'est le problème $P_{nombreC}$. Une réponse à $P_{nombreC}$ fournit un majorant à l'optimum, cela donne donc une réponse au problème P_+ : déterminer un majorant. De plus, l'évaluation ne peut se faire sans confrontation avec un minorant, c'est le problème P_- : déterminer un minorant au nombre minimum d'interrogations.

Remarque : Une fois que nous avons constuit un algorithme, il nous faut prouver que cet algorithme trouve la frontière quelle que soit la frontière choisie par le donneur pour S_0 ou quelque soit l'algorithme de défense qu'utilise le donneur pour S_1[4]. Les résultats produits pour résoudre P_{gen}, les lemmes X.3 et X.2, peuvent alors être des outils à utiliser pour prouver qu'un algorithme de recherche trouve la frontière. D'ailleurs nous verrons que nous utilisons ces résultats pour prouver que les algorithmes que nous proposons trouvent effectivement la frontière.

Avant de voir comment construire des algorithmes de recherche, nous allons étudier $P_{éval}$, évaluer l'optimalité d'un algorithme, qui pose avant tout la question de savoir quelle optimalité nous allons considérer.

2.1. Définition de l'optimalité. Une première chose que nous devons signaler est que nous ne considérerons que des algorithmes qui jouent de manière non-aléatoires, car cela ne change rien au niveau de la réponse à $P_{chercheur}$ mais rend les définitions plus complexes. Par contre, considérer des algorithmes aléatoires permet d'engendrer de nouveaux problèmes, en particulier de nouvelles optimalités, et de faire appel à de nouveaux invariants opératoires et représentations.

L'optimalité a considéré pour l'algorithme de recherche n'est pas définie dans les énoncés. Pour définir une optimalité, nous pouvons commencer par définir une relation d'ordre entre les algorithmes. Nous envisageons les 2 relations suivantes :

(1) optimalité au pire des cas : $A < B$ lorsqu'au pire des cas, A utilise moins d'interrogations que B ;
(2) optimalité locale : $A < B$ lorsqu'il existe une frontière que A trouve en utilisant moins d'interrogations que B.

La seconde relation n'est pas une relation valide, car il peut exister des cas où $A < B$ et $B > A$. Toutefois, cela n'empêche pas, a priori, l'existence d'un algorithme de recherche optimal pour cette optimalité, qui serait alors un algorithme qui, quelque soit la manière dont joue le joueur 2, utilise moins d'interrogations que tout autre algorithme. Ce serait une sorte d'algorithme « ultimement optimal » : un algorithme est ultimement optimal lorsqu'il est optimal contre tout algorithme de défense. Or un tel algorithme n'existe pas sur un rectangle dont l'une des dimensions est strictement supérieure à 1. En effet, suppposons qu'un tel algorithme A existe et considérons un rectangle de dimensions non nulles et une frontière horizontale f. Alors comme il existe un algorithme de recherche qui détermine f en 2 interrogations, A détermine f en 2 interrogations. Donc l'algorithme A joue son premier coup sur un point du segment f. Considérons maintenant, une autre frontière horizontale f' parallèle à f alors nous pouvons effectuer pour f' le même raisonnement que pour f et donc A commence nécessairement par interroger un point de f'. Donc A joue son premier coup sur f et f', or f et f' sont disjointes, donc ce n'est pas possible. De ce fait, A n'existe pas.

La première relation est quant à elle valide (c'est une relation d'ordre totale), un algorithme optimal est alors l'algorithme qui au pire des cas

[4]Prouver qu'un algorithme trouve la frontière quelque soit la frontière choisie par le donneur est équivalent à prouver qu'il la trouve quelque soit l'algorithme de défense utilisé.

utilisent le plus petit nombre d'interrogations. L'optimalité au pire des cas se formalisent de la manière suivante pour S_0 :

DÉFINITION X.4 (Nombre d'interrogations, au pire, utilisées pour S_0). Si A est un algorithme de recherche sur un rectangle R, $\mathcal{F}$ l'ensemble des frontières possibles sur R et $A(f)$ le nombre d'interrogations utilisées par A pour trouver la frontière f.

Le *nombre d'interrogations au pire utilisées* par A sur R est

$$X = \max\{A(f)|f \in \mathcal{F}\}$$

Nous disons alors que A s'*arrête* en X interrogations au pire.

La définition précédente se reformule de la manière suivante :

DÉFINITION X.5. Un algorithme A s'arrête en X interrogations si les deux conditions suivantes sont réunies :
- quelque soit la frontière, A trouve la frontière en moins de X interrogations ;
- il existe une frontière pour laquelle A effectue X interrogations.

Un algorithme optimal au pire des cas se définit alors de la manière suivante :

DÉFINITION X.6 (Algorithme de recherche optimal au pire des cas pour S_0). Soit R un rectangle, $\mathcal{A}$ l'ensemble des algorithmes de recherche sur R et $\mathcal{F}$ l'ensemble des frontière possibles sur R alors un algorithme de recherche A_0 est *optimum* au pire sur R lorsque :

$$\max\{A_0(f)|f \in \mathcal{F}\} = \min_{A\in\mathcal{A}} \max\{A(f)|f \in \mathcal{F}\} = m$$

m est alors appelé *optimal au pire des cas* ou, plus court, *optimal au pire.*

Nous faisons la même chose pour S_1 :

DÉFINITION X.7 (Nombre d'interrogations au pire utilisées pour S_1). Si A est un algorithme de recherche sur un rectangle R, S_A l'ensemble des algorithmes de défense sur R, $S \in \mathsf{S}_A$ et $A(S)$ le nombre d'interrogations utilisées par A pour trouver la frontière sur R lorsque le donneur utilise S.

Le *nombre d'interrogations au pire utilisées* par A sur R est :

$$X = \max\{A(S),\ S \in \mathsf{S}_A\}$$

Nous disons que A s'arrête en au pire X interrogations.

Nous définissons alors un algorithme optimal de la manière suivante :

DÉFINITION X.8 (Algorithme optimal au pire pour S_1). Un algorithme de recherche A_0 est alors *optimal au pire* sur R lorsque :

$$\max\{A_0(S),\ S \in \mathsf{S}_{A_0}\} = m = \min_{A\in\mathcal{A}} \max\{A(S),\ S \in \mathsf{S}_A\}$$

m est alors appelé *optimal au pire des cas* ou, plus court, *optimal au pire.*

Ces deux optimalités sont, en fait, équivalentes. En effet, considérons un algorithme de recherche A qui termine en X interrogations pour S_1, alors il existe un algorithme de défense qui fait effectuer X interrogations à A. Appelons f la frontière trouvée par A lorsqu'il joue contre cet algorithme de défense, alors dans la situation S_0, si le donneur choisit la frontière f, A va la trouver en X interrogations. D'autre part, si A termine en X interrogations pour S_0 alors il existe une frontière f que A trouve en X interrogations. Donc lorsque A joue contre l'algorithme de défense associée à f, il utilise X interrogations.

Un algorithme de défense contrant un algorithme de recherche équivaut donc à choisir une frontière. Dans ce qui suit, nous ne considérerons que l'optimalité au pire et ne ferons plus de distinctions, pour le chercheur, entre les situations S_0 et S_1.

Remarque : Dans les définitions concernant S_1, nous ne considérons que des algorithmes de défense contrant **tout** algorithme de recherche et non des algorithmes de défense contrant **un unique** algorithme de recherche. Nous disons qu'un algorithme de défense qui ne prend comme instance qu'un seul algorithme de recherche est un *algorithme de défense local* et qu'un algorithme de défense qui prend tout algorithme de recherche comme instance est un *algorithme de défense globale*.

Nous pourrions définir une optimalité analogue en remplaçant l'ensemble des algorithmes de défense globaux par l'ensemble des algorithmes de défense contrant l'algorithme. A priori, cela ne donne pas la même optimalité. La définition que nous avons donnée est celle adaptée à S_1, car le donneur qui n'a pas, a priori, connaissance de l'algorithme de recherche utilisé par le chercheur doit chercher des algorithmes de défense globaux.

Ces optimalités sont, toutefois, équivalentes, car soit A un algorithme de recherche, nous pouvons transformer tout algorithme de défense local S en un algorithme de défense globale S' avec $A(S) = A(S')$. Pour cela, soit B un algorithme de recherche alors tant que B interroge le même point que A donner la couleur que S aurait donné. Sinon, donner une couleur cohérente.

Revenons maintenant sur $P_{chercheur}$, nous allons proposer des stratégies et des algorithmes de recherche que nous pouvons développer en essayant de résoudre ce problème. Nous allons, dans un premier temps, proposer des stratégies et algorithmes de recherche, qui utiliseront le lemme X.3 qui donne les conditions d'arrêt pour les algorithmes de recherche.

2.2. Stratégies issues du lemme X.3. Ce lemme donne deux idées pour trouver un algorithme de recherche :

a) trouver deux points de la frontière ;

b) trouver un point de la frontière et sa direction.

Cela pose les problèmes suivants :

– $P_{algo-noir}$, comment trouver un point de la frontière ?

– $P_{algo-direc}$, comment trouver la direction de la frontière ?

En particulier, ces problèmes sont respectivement reliés au problème P_{noir} et $P_{direction}$, par le fait que résoudre P_{noir} (resp. $P_{direction}$) peut permettre la résolution de $P_{algo-noir}$ (resp. $P_{algo-direc}$).

D'autre part, comme nous cherchons à optimiser l'algorithme, cela pose aussi le problème suivant : quelle est la meilleure stratégie, commencer à chercher un point de la frontière ou commencer par chercher l'orientation de la frontière ?

2.2.1. *Stratégie : trouver deux points de la frontière.* Dans cette sous-sous-section, nous présentons différents algorithmes de recherche qui commencent par chercher deux points de la frontière. Nous pouvons commencer par citer les algorithmes triviaux comme celui qui consiste à interroger les points un par un, de gauche à droite, en allant de haut en bas, mais nous pouvons observer que cet algorithme n'est pas efficace en jouant contre la frontière vide. En expérimentant pour construire un tel algorithme, nous pouvons observer le résultat suivant :

Lemme X.9

Une segment horizontal ou vertical qui contient deux points de couleurs différentes contient un point de la frontière.

Remarque : Ceci n'est plus vrai pour un segment diagonal ou antidiagonal.

Ce lemme nous donne l'idée de la stratégie suivante : interroger les extrémités des lignes ou des colonnes puis lorsque nous trouvons deux extrémités de couleurs différentes, chercher sur ce segment le point qui est de couleur noire. Cela pose donc le problème suivant : étant donné un segment dont les extrémités sont de couleurs différentes, comment trouver un point de la frontière ?. Une méthode triviale serait d'interroger chaque point, en allant de gauche à droite, mais cette méthode n'est pas efficace à cause de l'observation suivante :

Lemme X.10

Si 2 points situés sur une même ligne horizontale, verticale, diagonale ou anti-diagonale sont de même couleur alors les points du segment admettant ces points comme extrémités sont de la même couleur.

« Faire des sauts » est donc plus efficace. Nous proposons les deux algorithmes suivants, basés sur cette stratégie, pour trouver le point frontière : *l'algorithme de pas k* et *l'algorithme de subdivision en k segment.*

Algorithme X.1 (*Pas k*)

Sur un segment de longueur n dont les couleurs des extrémités sont rouge et bleu :

(1) Interroger de gauche à droite un point sur k. Si, un point est noir, stop. Sinon, dès que deux points rouge et bleu sont à une distance n_1 inférieure à k, passer à l'étape suivante ;

(2) Si $n_1 \leq 2$, un point noir est le milieu de ce segment. Sinon, appliquer ce qui précède sur la ligne de taille n_1 avec un pas de taille k_1 où $k_1 < k$.

Remarque : Cet algorithme utilise des représentations sous forme de distance des cas 1 et 2 du lemme X.2 comme conditions d'arrêts.

A chaque étape, l'algorithme réduit la longueur du segment, il trouve donc la frontière. De plus, si $l(n)$ correspond à l'optimum sur une ligne de longueur n dont les extrémités sont de couleurs différentes, alors l'algorithme de pas k nécessite, au pire, au moins $\lfloor \frac{n-2}{k} \rfloor + l(k)$ coups.

Nous appellons *k-subdivion* d'un segment s de longueur n un sous ensemble de segments de s composé de $k - r$ segments de taille $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ et de r segments de taille $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1$ où r est le reste de la division euclidienne de n par k. De plus, deux segments ne peuvent s'intersecter qu'en une extrémité.

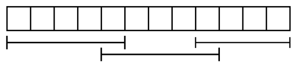


FIG. X.6. Exemple de 3-subdivion d'un segment de longueur 11.

Une k-subdivision correspond au partage d'un segment en k segments de « même » longueur.

Algorithme X.2 (*Subdivision en k segments*)

Sur un segment s dont les extrémités sont de couleurs rouge et bleu :

(1) Effectuer une k-subdivision de s. Si un des points interrogés est noir, stop. Sinon, un des segments de la subdivision s' à ces extrémités de couleurs différentes. Si ce segment est de longueur 2, son milieu est un point noir. Sinon, passer à l'étape 2 ;

(2) Si c'est possible, effectuer ce qui précède sur s'. Sinon, effectuer l'étape précédente en remplaçant k par k' avec $k' < k$.

Cet algorithme réduit la longueur du segment à chaque étape ce qui lui permet de trouver un point noir. De plus, il utilise, au pire, pour un segment de longueur n au moins $(k-1)\lfloor \log_k(n) \rfloor$ interrogations.

Commentaire 0 : L'algorithme de subdivision peut être vu comme un algorithme de pas j où j dépend de la longueur de la ligne. L'algorithme le plus rapide est l'algorithme de 2-subdivisions. La différence entre ces algorithmes réside dans le rôle de la variable k qui, avec l'algorithme de pas, est fixée pour tous les segments et qui dépend de la longueur du segment pour l'algorithme de subdivision. Sur une instance, ces algorithmes peuvent être similaires mais ils ne le sont pas de manière générale.

Ces algorithmes amènent avec eux le problème, quelle est la valeur, de pas ou de subdivision, la plus efficace pour déterminer un point noir ? Ce problème est un problème de recherche de solution, expérimenter pour le résoudre peut amener à conjecturer que pour le problème concernant l'algorithme pas, le pas le plus efficace est fonction de la longueur du segment, en particulier que c'est le milieu. Pour le problème concernant l'algorithme de subdivision, cela peut amener à conjecturer que la subdivions la plus efficace est 2.

L'observation suivante va nous permettre de terminer l'algorithme de recherche, en réduisant la zone de recherche lorsque un point noir a été trouvé :

Lemme X.11

Si la frontière n'est pas réduite à un point, tout point de la frontière contient dans son voisinage[5] *un autre point de la frontière.*

Une fois un point noir P trouvé, nous pouvons donc trouver un deuxième point de couleur noire en étudiant le voisinage de P.

Nous proposons deux algorithmes qui trouvent la frontière en déterminant deux points de sa frontière :

Algorithme X.3 (*Deux points et pas*)

Soit R un rectangle, on pose $X = 0$ (compteur du nombre de points noirs trouvés).

(1) Effectuer une rotation pour que le rectangle ait moins de lignes que de colonnes. Passer à l'étape 2.

(2) (a) Si $X = 2$, conclure.

(b) Si $X = 0$, interroger l'extrémité gauche puis l'extrémité droite de chaque ligne en allant du haut vers le bas.

(i) Si une ligne contient 2 extrémités noires, conclure ;

(ii) Si une ligne a des extrémités rouge et bleue, $X := X+1$ et passer à l'étape 3 ;

(iii) Si une ligne a une extrémité rouge ou bleue et l'autre extrémité noire, $X := X + 1$.

(A) si cette ligne est la ligne du bas, conclure ;

(B) sinon, appliquer l'étape 2 en commençant à la ligne suivante.

(c) Si $X = 1$, interroger les points voisins du point noir. Conclure dès qu'on trouve un autre point noir.

(3) Appliquer l'algorithme de pas sur cette ligne pour trouver un point noir.

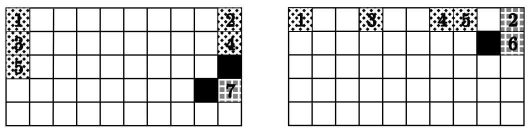


FIG. X.7. Exemples de parties ou le chercheur utilise l'algorithme 2 points et pas de 3.

La figure X.7 montre, qu'une fois, qu'un point de la frontière a été trouvé, la rapidité de l'algorithme est améliorable en considérant les différentes possibilités pour la direction de la frontière. Par exemple, si sur une ligne qui n'est pas la première ou la dernière, nous trouvons une extrémité rouge ou bleue et une extrémité noire, alors nous pouvons conclure : la frontière sera diagonale, si l'extrémité noire est à droite ou antidiagonale, si l'extrémité noire est à gauche.

[5]Nous considérons le voisinage associé à la distance suivante : $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$, $d(X,Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

Théorème X.12

L'algorithme 2 points avec un pas k, pour un rectangle de dimensions $n \times p$ avec $n \leq p$, nécessite, au pire, au moins $\max\{2(n+1), 3 + \lfloor\frac{n-2}{k}\rfloor + l(k)\}$ *interrogations pour trouver la frontière..*

Démonstration : La preuve va se faire en considérant les deux cas suivants : frontière vide et frontière vertical. Si la frontière est vide, l'algorithme effectue $2(n+1)$ interrogations pour la déterminer. De plus, si la frontière est verticale, l'algorithme interroge les extrémités de la première ligne, elles vont être de couleur différentes. Supposons que leurs couleurs soient rouge et bleu alors pour trouver un point de la frontière, l'algorithme utilise au moins $\lfloor\frac{n-2}{k}\rfloor$ interrogations pour trouver dans quel sous-segment de la subdivision se trouve le point noir puis au moins $l(k)$ interrogations pour déterminer où se trouve le point noir dans ce segment. De plus, il lui faut encore au moins une interrogation pour trouver un deuxième point noir. ■

Algorithme X.4 (*Deux points et subdivision*)

Cet algorithme est identique à l'algorithme 2 points et pas, sauf que nous remplaçons l'algorithme de pas k par l'algorithme de k-subdivision.

Par une preuve, analogue à celle du théorème X.12, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème X.13

L'algorithme 2 points avec une k-subdivision, pour un rectangle de dimensions $n \times p$ avec $n \leq p$, nécessite, au pire, au moins $\max\{2(n+1), 3 + (k-1)\lfloor\log_k(p)\rfloor\}$ *interrogations pour trouver la frontière.*

Commentaire 1 : Les algorithmes 2 points trouvent rapidement la frontière dans le cas où elle est verticale. Cependant, ils sont beaucoup plus lent lorsque la frontière est vide ou coin. De ce fait, ces algorithmes ont des chances d'être optimaux sur des rectangles où il y a une « grande » différence (supérieure à 4^p) entre les longueurs des côtés.

Expérimentalement sur des petits cas, il est facile de trouver un contre-exemple à l'optimalité de cette solution. Sur un carré de côté 3, ces algorithmes utilisent, au pire, au moins 6 interrogations alors qu'il est facile de trouver un algorithme qui termine en, au pire, 4 interrogations.

2.2.2. *Stratégie : direction de la frontière puis un point noir.* L'algorithme que nous cherchons à construire comporte 2 étapes :

(1) déterminer la direction de la frontière ;
(2) trouver un point noir.

Étant donné que nous cherchons à construire l'algorithme le plus efficace, nous pouvons chercher à construire un algorithme qui va être optimal à chacune de ses étapes. C'est le problème $P^{Dir-N}_{opt.etp.cherc.}$. Ici, cela consiste à chercher un algorithme qui détermine la direction de la fontière en un nombre minimal d'interrogations puis qui, ensuite, trouve un point noir en utilisant le nombre minimum d'interrogations.

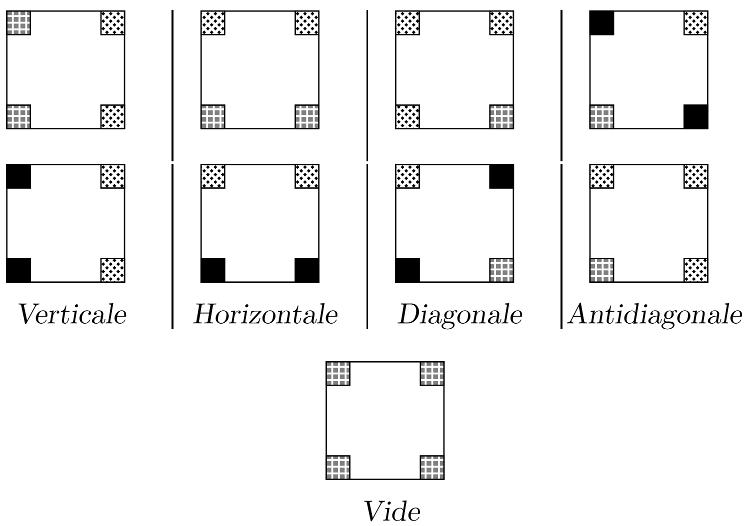
Cela pose alors le problème de savoir si une telle construction permet de construire un algorithme optimal au pire.

Dans un premier temps, nous allons nous attacher à trouver un algorithme qui permet de déterminer la direction de la frontière. Remarquons, qu'une méthode, peut être, de chercher deux points de couleurs noires. Comme cela reviendrait à utiliser les algorithmes 2 points, nous allons donc chercher des algorithmes trouvant la direction de la frontière sans imposer[6] à l'algorithme de trouver un point noir. Cependant, une première question se pose : « est-il possible de trouver un algorithme qui permette de déterminer la direction de la frontière sans lui imposer d'en trouver des points ? »

L'algorithme que nous cherchons doit être capable de distinguer les différents types de frontières possibles : vide, horizontal, vertical, diagonal, antidiagonal. En expérimentant avec les exemples de frontières coins et vide, nous pouvons observer que pour distinguer l'un de l'autre, nous devons interroger les coins du rectangle. De ce fait, un algorithme qui détermine la direction de la frontière devra, dans certains cas, interroger les coins du rectangle. De plus, il est facile de contrer une stratégie qui n'interroge pas les coins en donnant tout le temps la même couleur. Cela nous amène au premier résultat, le théorème X.14, qui, en plus de permettre la distinction entre les cas vide et coins permet de traiter les autres cas.

Théorème X.14 (*Correspondance coins-directions d'un carré*)

Nous avons la correspondance suivante entre la couleur des coins d'un carré et le type de frontière passant par le carré :



Nous pouvons nous apercevoir que pour un carré la couleur des coins impose une unique direction de frontière. L'exemple suivant prouve que ce n'est plus vrai pour des rectangles :

Pour les rectangles, nous n'obtenons que le théorème suivant :

[6]Le sans imposer signifie, ici, que l'algorithme ne va pas nécessairement trouver un point noir avant de trouver la direction de la frontière.

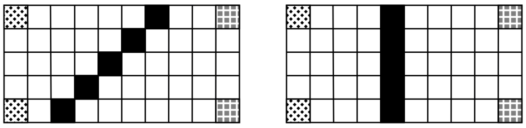
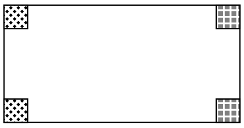


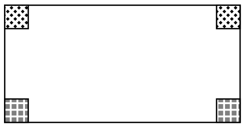
FIG. X.8. La couleur des coins de ce rectangle n'impose pas une unique direction.

Théorème X.15 (***Correspondance coins-directions d'un rectangle***)

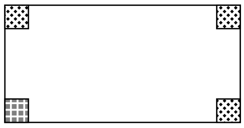
Nous avons les correspondances suivantes pour un rectangle dont la longueur est strictement supérieure à la largeur :



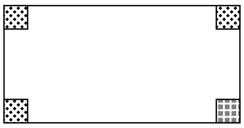
1. Verticale, diagonale ou antidiagonale



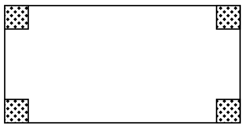
2. Horizontale



3. Antidiagonale



4. Diagonale



5. Vide

De plus, si deux coins sont de même couleur alors la frontière est le segment dont les extrémités sont ces points.

Remarque : Pour un rectangle de dimensions $l \times (l+1)$, la couleur des coins impose une unique direction.

Nous dirons qu'un *algorithme est associé au théorème correspondance coins-directions* si les quatre premiers coups de l'algorithme consiste à interroger les coins.

Théorème X.16

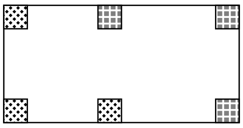
Un algorithme associé au théorème de correspondance coins-directions est optimal au pire pour trouver la direction pour un carré ou pour un rectangle de dimensions $l \times (l+1)$.

Démonstration : Sur un carré ou sur un rectangle de dimensions $l \times (l+1)$, un algorithme associé au théorème de correspondance donne l'orientation de la frontière en au pire 4 interrogations. De plus, considérons que le donneur ait décidé de choisir la frontière vide, alors si le chercheur n'interroge pas un des coins du rectangle, il y a au moins deux possibilités de frontière : vide et coin. ■

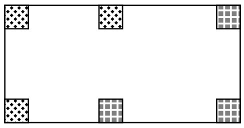
Dans le cas d'un rectangle qui n'est pas un carré, interroger les 4 coins est insuffisant à déterminer la direction de la frontière. Il faut donc compléter l'algorithme. Le seul cas qui pose problème est celui où les coins adjacents sur les largeurs sont de même couleur. Il nous faut donc trouver une condition qui nous permette de distinguer ces deux cas. Nous avons la condition suivante :

Lemme X.17

Dans les cas suivants, nous pouvons conclure sur la direction de la frontière :



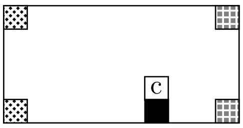
Antidiagonale



Diagonale

Ce lemme peut nous donner l'idée de rechercher un point noir sur une longueur en interrogeant à chaque fois la case symétrique axialement. Toutefois, cette stratégie est, généralement, moins efficace que celle qui consiste à rechercher un point noir sur une ligne puis ensuite à déterminer la direction de la frontière. En effet, la détermination de la direction de la frontière peut se faire « rapidement » une fois un point de la frontière trouvée. Il nous suffit d'interroger un point (spécifique) d'une frontière possible pour déterminer la direction de la frontière, c'est le résultat suivant :

Lemme X.18

Dans le cas suivant : 

, en interrogeant la case c, nous déterminons la frontière.

Démonstration : Les trois frontières possibles sont la frontière verticale, diagonale ou antidiagonale passant par le point noir. Nous allons considérer les couleurs possibles pour c :
- si c est noir alors la frontière est verticale ;
- si c est bleu alors la frontière est antidiagonle ;
- si c est rouge alors la frontière est diagonale. ∎

Sur un carré, il est donc possible d'obtenir un algorithme qui nous permette dans un premier temps de trouver la direction de la frontière puis ensuite de trouver un point de la frontière. Nous utilisons l'expression « conclure si c'est possible » pour éviter d'énumérer tous les cas où il est, à la fin d'une étape de l'algorithme, possible de conclure. Cela donne l'algorithme suivant :

Algorithme X.5 (*Direction puis recherche d'un point noir sur des carrés*)

Sur un carré :

(1) Interroger les 4 coins du carré. Conclure si c'est possible en utilisant le théorème X.14, sinon passer à l'étape 2.

(2) Deux coins adjacents sont forcémment de couleurs différentes, effectuer une recherche d'un point noir sur un segment reliant ces deux coins. Une fois le point noir trouvé, conclure en utilisant le théorème X.14 ;

Cet algorithme trouve la frontière, car il détermine la direction de la frontière puis un de ses points.

Sur un rectangle de longueur strictement supérieur à la largeur plus un, nous sommes dans un cas où la couleur des coins ne permet pas d'éliminer toutes les possibilités de directions. Une stratégie possible est d'interroger les quatres coins, puis ensuite un point noir et enfin d'utiliser le lemme X.18 pour déterminer la direction de la frontière.

Algorithme X.6 (*Direction puis recherche d'un point noir sur des rectangles*)

Sur un rectangle R de longueur stricement supérieur à sa largeur plus un :

(1) Interroger les 4 coins. Puis, conclure si c'est possible en utilisant le théorème X.15. Sinon, passer à l'étape 2.

(2) Deux coins adjacents sont forcémment de couleurs différentes, faire une recherche de point noir sur le segment de plus petite longueur. Une fois le point noir trouvé, conclure si c'est possible. Sinon, passer à l'étape 3.

(3) Comme nous n'avons pas pu conclure à l'étape précédente, c'est que nous avons le choix entre 3 directions de la frontière (théorème X.15). Nous utilisons alors le lemme X.18 pour déterminer la direction de la frontière.

Cet algorithme est un algorithme de recherche, car si la frontière est vide ou coin ou (anti)diagonale passant par un coin, elle est déterminée lors de l'étape 1. Sinon, l'algorithme trouve un point de la frontière qui se trouve sur le bord du rectangle, il conclut dans le cas où la frontière est diagonale ou antidiagonale ou horizontale (théorème X.15). Sinon, les frontières possibles sont verticales, diagonales ou antidiagonales (théorème X.15), il utilise alors le lemme X.18 pour trouver la direction, ce qui lui permet de conclure.

Commentaire 2 : L'efficacité des algorithmes direction puis recherche d'un point noir va dépendre de l'efficacité de l'algorithme de recherche sur un segment dont les extrémités sont de couleurs différentes. En utilisant un algorithme optimal pour la recherche du point noir, nous aurions alors résolu $P^{Dir-N}_{opt.etp.cherc.}$. Ce résultat pourrait être utilisé pour tenter de prouver que cet algorithme est optimal au pire. Cependant, cet argument n'est pas suffisant. Par exemple, sur un segment un algorithme qui interroge les extrémités et ensuite recherche un point noir n'est pas optimal au pire des cas (voir figure X.9 et X.10).

De ce fait, résoudre $P^{Dir-N}_{opt.etp.cherc.}$ ne permet pas de résoudre $P_{chercheur}$.

De plus, nous pouvons signaler, concernant l'algorithme direction puis recherche d'un point noir sur un rectangle, qu'il est facilement améliorable en interrogeant dans un premier temps deux coins adjacents situés sur un bord de plus grande longueur et en commençant la recherche d'un point noir dès que nous avons trouvé deux coins de couleurs différentes. Toutefois, le nouvel

1		3		2		3'

FIG. X.9. Algorithme qui termine en 3 interrogations

1		4	3	4'		2

FIG. X.10. Algorithme optimal à chacune de ses étapes.

algorithme ne respectera plus les contraintes directions puis point noir. Ceci peut être observé en jouant des parties sur des rectangles dont la longueur est « largement » supérieur[7] à la largeur. En effet, sur des rectangles de ce type, le donneur a intérêt à forcer le chercheur à chercher le point noir sur la longueur plutôt que sur la largeur. En interrogeant les extrémités d'une longueur, le chercheur commence donc plus rapidement à chercher un point noir, si le donneur a conscience. De plus, une fois un point noir trouvé sur la longueur, il suffit d'une interrogation pour déterminer la direction de la frontière. Nous présentons un tel algorithme dans la partie modélisation en terme de frontière.

2.2.3. *Conclusion sur les stratégies issues du lemme X.3.* Ces idées ont mené à la construction d'algorithmes de recherche. Les algorithmes de recherche direction puis point noir que nous avons trouvés sont plus efficaces que les algorithmes 2 points noirs. Pour prouver que ces algorithmes terminent, nous avons utilisé des arguments de nature inductive ainsi que des théorèmes et lemmes de nature géométrique. En particulier, les coins des rectangles jouent un rôle important dans la mise en place des algorithmes direction puis point noir. Les preuves que nous avons mises en place pour déterminer le nombre d'interrogations utilisées, au pire, par les algorithmes considèrent les différents cas de frontières et évaluent, pour chaque cas, le nombre d'interrogations utilisées pour en déterminer le maximum. Remarquons, que ce type de preuves permet au donneur de trouver une stratégie pour contrer le chercheur, toutefois cette stratégie n'est applicable qu'avec cet algorithme et nécessite que le donneur ait connaissance de l'algorithme utilisé par le chercheur.

Toutefois, si les résultats que nous avons obtenus permettent de donner le nombre d'interrogations au pire utilisées par nos algorithmes de recherche, ils ne permettent pas d'évaluer leur optimalité, nous ne répondons qu'à une seule partie de P_{evalC} mathématiquement : P_+. Un moyen de pallier à ce manque est de déterminer un minorant à l'optimum. Un minorant évident est 1. Toutefois, il nous semble très éloigner de l'optimum. Nous pouvons utiliser les théorèmes de correspondance pour obtenir 4 comme minorant. Cependant, une conception que nous portons sur le problème est que le nombre d'interrogations croît en fonction de la dimensions des rectangles et tend vers l'infini lorsque les dimensions tendent vers l'infini. De ce fait, ce résultat partiel, utile pour les petits cas[8], nous semble loin d'être optimal pour les autres cas. Nous verrons dans la suite comment

[7]Nous verrons plus tard que le largement supérieur peut être quantifié par au moins quatre fois supérieur

[7]Les expérimentations que nous avons faîtes pourraient nous avoir convaincues que l'un de ces algorithmes est optimal, c'est pourquoi nous précisons mathématiquement.

obtenir des minorants plus proches de l'optimum que ceux que nous avons présenté.

La modélisation de la situation que nous venons d'effectuer est basée sur les propriétés géométriques de la droite, elle met en jeu des objets tels que des directions, les coins du rectangles, des distances... La représentation que nous avons utilisée est donc une représentation géométrique. Nous parlerons ainsi de *modèle géométrique* de la situation.

Nous allons maintenant proposer un modèle de la situation basée sur l'observation suivante : lorsque plusieurs cases sont de la même couleur alors nous n'avons pas besoin d'interroger certaines cases pour déterminer leurs couleurs. Cette observation peut être effectuée au cours de la construction d'une stratégie lors d'une expérimentation, car elle nous permet de ne pas interroger inutilement une case. Elle nous donne l'idée d'essayer de « contrôler » le plus grand sous-ensemble de points à chaque interrogations. Cela va nous fournir un nouveau modèle du problème que nous appellons *modèle points*. Nous parlons de nouveaux modèles, car nous allons voir que les problèmes auxquels nous essaierons de répondre sont différents du modèle géométrique, notamment au niveau des instances considérées.

2.3. Modèle points. Nous allons étudier $P^{points}_{opt.etp.cherc.}$, construire un algorithme qui contrôle le plus grand ensemble de points à chacune de ses étapes. Nous chercherons donc à construire un algorithme optimal à chacune de ces étapes avec une optimalité définie en terme de cardinalité de points. Comme pour le problème $P^{Dir-N}_{opt.etp.cherc.}$, $P^{points}_{opt.etp.cherc.}$ pose le problème de l'optimalité au pire des cas d'une de ses solutions.

Nous utiliserons donc la stratégie d'optimisation locale du nombre de points restants suivante :

Stratégie X.1 (*Elimination de points*)

Interroger un point X qui contrôle le plus grand nombre de points. Répéter cette opération jusqu'à trouver la frontière.

Expérimenter pour résoudre $P^{points}_{opt.etp.cherc.}$ amène à rencontrer le problème de validation suivant $P_{enveloppe}$, étant donné une coloration[9] C d'un rectangle, quels sont les points dont on peut connaître la couleur ? Sur la figure X.11, les points bleus et rouges foncés correspondent aux points connus initialement, ils composent C. Les points de couleurs claires correspondent aux points dont la couleur peut être déduite d'après C.

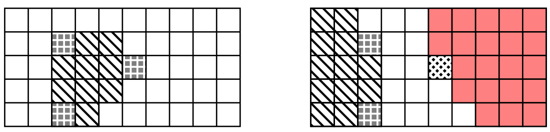


FIG. X.11. Différences entre 3 points bleus et 2 points bleus avec un point rouge.

[8]Ce résultat permet de montrer l'optimalité au pire de certains algorithmes pour des carrés de longueur de côté 1, 2 et 3.

Nous disons que les points de couleurs claires sont *engendrés* par C. Le modèle points diffèrent donc du modèle géométrique par le fait que les objets que nous considérons sont différents.

Remarque : Dans le modèle points, la condition d'arrêt peut être vue comme le fait de contrôler toutes les cases du rectangle.

Nous obtenons le théorème X.19 pour déterminer l'ensemble des points engendrés.

Théorème X.19 (*Théorème d'intersection*)

Soit R un rectangle muni d'une coloration partielle C, r l'ensemble des points rouges et b bleus. Nous appelons $\mathcal{F}$, l'ensemble des frontières possibles sur R.

Soit F une frontière possible alors F sépare R en trois parties : F_r de couleur rouge, F_b de couleur bleue et F_n de couleur noire.

L'ensemble des points rouges engendré par C est alors : $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F_r$ et l'ensemble des points bleus engendré par E est : $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F_b$.

Démonstration : L'ensemble des points bleus engendrés est contenu dans $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F_b$ car, s'il existe un point P bleu qui n'est pas dans $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F_b$ alors il existe une frontière $F^0 \in \mathcal{F}$ pour laquelle $P \notin F_b^0$. Donc si le donneur choisit la frontière F^0, P n'est pas bleu.

De plus, un point P contenu dans $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F_b$ est nécessairement bleu, car s'il est de couleur rouge ou noire, il existe une frontière $F \in \mathcal{F}$ pour laquelle $P \notin F_b$ ■

Remarque : La démonstration montre que ce théorème est vrai sur n'importe quelle forme de terrain. Remarquons également que lorsqu'il n'y a qu'une seule couleur, la zone correspond à l'enveloppe convexe pour la convexité engendrée par les droites horizontales, verticales, diagonales et antidiagonales. Dans cette convexité, les convexes sont les intersections de demi-plans engendrées par ces droites.

Nous pouvons associer à ce théorème, la stratégie[10]suivante : considérer l'ensemble des frontières possibles et prendre l'intersection des F_r et des F_b puis compter le nombre points de couleurs connues. Toutefois, nous pouvons la simplifier en considérant les *frontières limites* que nous définissons de la manière suivante : une frontière possible F est une frontière limite pour r si $d(F,r) = \min_{G\in\mathcal{F}}\{d(G,r)\}$ où d est la distance définie par : si $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$, $d(X,Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$. La stratégie est la même que la précédente sauf qu'au lieu de considérer l'ensemble des frontières possibles, nous considérons l'ensemble des frontières limites. Un algorithme basé sur cette stratégie, que nous pourrions donner, consisterait en une adaptation du parcours de GRAHAM (1972) à ce type de convexité. Nous donnerons, dans

[9]Une *coloration* d'un rectangle est un sous-ensemble de points colorés cohérents avec la convexité engendrée par les droites de D_4. Formellement, une coloration partielle de R est une application f de R dans $\{0, 1, 2, 3\}$ où 0 correspond à la couleur inconnue, 1 et 2 aux couleurs rouge et bleu et 3 à la couleur noire telle que $\mathrm{conv}(f^{-1}(1)) \cap \mathrm{conv}(f^{-1}(2)) = \emptyset$ et pour $i = 1, 2$, $\mathrm{conv}(f^{-1}(i)) \cap \mathrm{conv}(f^{-1}(3)) = \emptyset$ et tel qu'il existe une droite de D_4 contenant $\mathrm{conv}(f^{-1}(3))$ et séparant $\mathrm{conv}(f^{-1}(1))$ et $\mathrm{conv}(f^{-1}(2))$.

la suite, un résultat qui donne de manière analytique l'enveloppe convexe de deux points en fonction de leur position relative.

Nous allons maintenant chercher à étudier la relation entre $P^{points}_{opt.etp.cherc.}$ et $P_{chercheur}$. Une première remarque que nous pouvons faire est que contrôler la plus grande zone ne suffit pas à obtenir un algorithme optimal au pire des cas. La figure X.12 en est un exemple : sur a nous trouvons la frontière en 4 interrogations alors que sur b, nous pouvons le faire en 2. Ceci nous montre que l'optimalité en points à chaque étape de l'algorithme n'est pas suffisante à justifier qu'il est optimal au pire des cas.

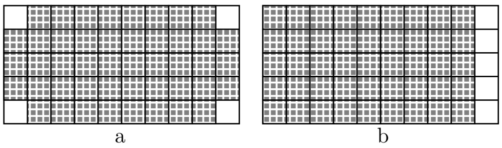


FIG. X.12. Contre-exemple à l'idée du contrôle de zone

Une solution de $P^{points}_{opt.etp.cherc.}$ n'est pas nécessairement une solution de $P_{chercheur}$. En effet, en jouant le premier coup, comme sur la figureX.13, alors un point qui maximise le nombre de points restants est le point A. Nous demandons la couleur du point A, si le donneur répond bleu, il nous faut encore, au pire, deux interrogations pour trouver la frontière. Donc nous terminons en, au pire, quatre interrogations. La figure X.14 montre que nous pouvons finir en utilisant seulement trois interrogations. Cela montre que résoudre $P^{points}_{opt.etp.cherc.}$ ne permet pas forcémment de résoudre $P_{chercheur}$.

De ces exemples, nous pouvons aussi en déduire l'importance de la première interrogation. Ce qui peut nous amener à essayer de résoudre le problème de savoir quelle est la « meilleure » première interrogation à jouer.

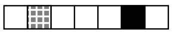


FIG. X.13. Un algorithme qui maximise le nombre de points inconnus.

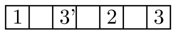


FIG. X.14. Un algorithme qui termine plus vite.

Nous allons maintenant essayer de résoudre $P^{points}_{opt.etp.cherc}$. Nous avons essayé d'étudier le problème sur des carrés et des rectangles mais nous n'avons pas réussi à mettre au point un tel algorithme de recherche, nous avons donc décidé de restreindre ce problème aux segments.

Nous proposons un tel algorithme pour un segment, il consiste à interroger une extrémité, puis à chaque étape à interroger le « milieu » des points sans couleur. Soit $[AB]$ un segment de longueur l, un point milieu de l est un point M tel que $|AM - BM| \leq 1$. Si le segment est de longueur pair, il y a un unique milieu. Lorsque le segment est de longueur impair, il y a deux points qui sont milieux.

Algorithme X.7 (*Algorithme des milieux*)

Soit un segment $[AB]$ de longueur l, considérons que $A = (0, 0)$. Les conditions de terminaison sont les suivantes : un point rouge et un point bleu à distance 1, deux points noirs, un point noir et un point de couleur rouge ou bleu et les deux extrémités de même couleur.

(1) Interroger A.

(2) Considérer le plus grand segment S de couleur inconnue. Interroger un milieu de S.

  (a) Si une des conditions de terminaisons est vérifiée, conclure ;

  (b) Sinon : recommencer l'étape 2.

Remarque : Cet algorithme peut être vu comme l'algorithme de 2-subdivisions appliqué à un segment dont la couleur de tous les points est inconnue.

Cet algorithme trouve la frontière, car, à chaque étape, il réduit le nombre de points inconnus. De plus, il est optimal en cardinalité de points à chacune de ses étapes, car, à chaque étape, le segment est d'une des formes suivantes :

FIG. X.15. Les deux types de segments possibles.

Un point qui réalise le « MaxMin » localement est, alors, un point qui est milieu du sous-segment non colorié. Cet algorithme pose alors le problème du choix du milieu. Nous pouvons observer, avec les exemples de parties représentées par la figure X.16, qu'en choisissant le « bon » milieu l'algorithme termine plus rapidement.

FIG. X.16. Différences entre les « milieux ».

Nous verrons plus tard d'où provient cette différence, sans en dire plus, elle est dû au fait qu'en cherchant à obtenir l'optimalité par cardinalité de points, nous ne prenons pas en compte le cas de la frontière vide. Cet exemple montre aussi que l'optimalité en cardinalité de points à chaque étape pas l'optimalité au pire de l'algorithme. L'évaluation de l'algorithme donne le théorème X.20.

Théorème X.20

Sur un segment de longueur s*, l'algorithme des milieux utilise au moins* $\lfloor \log_2(s) \rfloor + 1$ *interrogations au pire et au plus* $\lfloor \log_2(s) \rfloor + 2$ *interrogations au pire.*

Démonstration : L'algorithme ne rencontre que des segments du type de deux de la figure X.15. Considérons que l'algorithme rencontre un segment de ce type admettant un sous-segment de couleurs inconnues de longueur l. Alors à l'étape suivante de l'algorithme, le segment de couleurs inconnues est de longueur l' avec $l' \leq \lceil \frac{l-2}{2} \rceil$, car en jouant au milieu, l'algorithme partage le segment de couleurs inconnues en deux sous-segments de longueurs $\lfloor \frac{l-2}{2} \rfloor$ et $\lceil \frac{l-2}{2} \rceil$. De plus, le donneur peut imposer que le segment soit de longueur $l' = \lceil \frac{l-2}{2} \rceil$. $\lceil \frac{l-2}{2} \rceil$ est donc la longueur maximum du plus grands segment de couleurs inconnues.

Donc si le segment de couleurs inconnues est de longueur $2^k - 1$, nous avons l' qui est, au maximum, égal à $2^{k-1} - 1$. Donc si le segment initial est de longueur s avec $s = 2^n$, à la fin de l'étape 1, le segment de couleurs inconnues est de longueur $s-1$ et à la fin de l'étape 2, il est, au maximum, de longueur $2^{n-1} - 1$. Par récurrence, à la fin de l 'étape n, le segment est, au maximum, de longueur $2 - 1 = 1$. Donc à la fin de l'étape $n + 1$, il est, au maximum, de longueur inférieure à 0. De plus, si le segment initial est de longueur $2^n - 1$, nous trouvons, par un même raisonnement, que le segment est de longueur, au maximum, égale à 0 à la fin de l'étape n. Comme l'algorithme est croissant suivant la taille d'un segment, il utilise donc au moins $\lfloor \log_2(s) \rfloor + 1$ interrogations au pire.

De plus, sur un segment de longueur 0, il nous faut au plus une interrogation pour conclure d'où au plus $\lfloor \log_2(s) \rfloor + 2$ interrogations. ■

Commentaire 3 : Pour conjecturer le théorème X.20, nous pouvons soit savoir qu'un algorithme du type dichotomique termine en $\log_2$, soit expérimenter.

Expérimentalement, pour pouvoir évaluer le nombre de coups de l'algorithme, prendre comme objet d'étude les puissances de deux est pertinent. De plus, expérimentalement, deux possibilités sont offertes pour évaluer le nombre d'interrogations, au pire, que va utiliser cet algorithme. La première est de jouer contre un donneur humain, mais dans ce cas pour obtenir la bonne conjecture, il faut que le donneur utilise un algorithme suffisamment optimal. L'autre solution est de simuler des parties où on considère que le donneur donne la couleur qui laisse le maximum de points de couleur inconnue. La deuxième stratégie permet de se rendre compte de l'argument essentiel de la preuve à savoir qu'au maximum l'algorithme divise en deux le nombre de points inconnus, ce qui peut nous amener à nous demander si nous pouvons faire mieux que deux, premier pas vers le lemme X.21.

Enfin, remarquons que trouver le nombre d'interrogations que l'algorithme utilise, au pire, est équivalent à étudier une suite récurrente décroissante et à trouver quel est le premier terme de la suite qui est égal à 0 (changement de représentation).

Remarque : Nous pouvons remarquer que si nous changeons les règles du jeu et imposons qu'il y est nécessairement une frontière qui coupe le territoire alors l'algorithme des milieux fini en exactement, au pire, $\lfloor \log_2(s) \rfloor + 1$ interrogations.

Une fois ce théorème établit, nous devons essayer d'évaluer l'optimalité de l'algorithme (P_{evalC}). Pour cela, nous pouvons commencer par chercher des minorants à l'optimum, c'est le problème P_-. De manière évidente, il faut au moins 1 interrogation. P_- admet comme sous-problème les problèmes du type : est ce qu'il est possible de déterminer la frontière en X interrogations ? Une réponse négative à ce problème fournit un minorant et une réponse positive un majorant. Pour répondre par la négative, nous pouvons effectuer des preuves par l'absurde et pour répondre positivement, il nous suffit d'exhiber un algorithme de recherche s'arrêtant en, au pire, X interrogations.

Sur des segments, l'idée de réduire le nombre de points inconnus va nous permettre d'obtenir un minorant à l'optimum. L'idée consiste à résoudre le problème, chercher le nombre maximum de points inconnus que nous pouvons rendre de couleurs connues avec une interrogation. Nous pouvons alors observer qu'avec une seule interrogation, nous pouvons au plus diviser le nombre de points inconnus par deux. Ce qui nous permet d'obtenir le lemme X.21.

Lemme X.21

Soit s un segment muni de la coloration C tel que au moins un point soit colorié. Soit C' la coloration engendrée par C et k le nombre de points inconnus de C'. Soit X un point de couleur inconnue dans C' alors il existe une couleur i pour laquelle la coloration engendrée par $C' \cup \{(X, i)\}$ possède un nombre de points inconnus supérieur à $\left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil$.

Démonstration : Nous pouvons remarquer que, si C' ne contient pas de points noirs, $s(C')$ est nécessairement d'une des formes de la figure X.17.

Appelons E l'ensemble des points inconnus, nous avons $|E| = k$. De ce fait, en posant X_R l'ensemble, privé de X, des points qui deviennent rouges si X est rouge et X_B l'ensemble, privé de X, des points qui deviennent bleus lorsque X est bleu, nous avons $X_R \cap X_B = \emptyset$ et $X_R \cup X_B = E$ d'où $X_R \bigsqcup X_B = E \setminus \{X\}$. ∎

Commentaire 4 : Une interprétation du lemme X.21 est qu'avec une interrogation, si le donneur joue « bien », le nombre de points inconnus sera toujours supérieur à la « moitié » du nombre de cases inconnues de l'étape précédente.

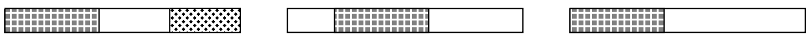


FIG. X.17. Les différents types de segments possibles.

Remarque : Pour un rectangle, nous ne pouvons pas diviser par deux l'ensemble des points inconnus, car nous n'avons pas $X_R \cup X_B$ qui est égal à l'ensemble des points inconnus. Pour obtenir un résultat similaire, sur un rectangle il faudrait que nous connaissions un majorant du nombre de points inconnus restants quelque soit le point interrogé. Ce que nous ne connaissons pas.

Ce lemme nous permet d'obtenir le théorème suivant :

Théorème X.22

Tout algorithme de recherche de la frontière sur un segment de longueur s utilise au pire, au moins, $\lfloor \log_2(s) \rfloor + 1$ interrogations.

Démonstration : Après une interrogation le nombre de points inconnus est s. En utilisant le lemme X.21, nous trouvons que le nombre de points inconnus est supérieur à 1 en $\lfloor \log_2(s) \rfloor + 1$ interrogations. ∎

Corollaire X.23

L'algorithme des milieux est optimal au pire à 1 coup près sur un segment.

Commentaire 5 : L'algorithme des milieux est optimal au pire des cas à 1 coup près. De plus, comme la preuve du théorème X.22 ne fait pas intervenir la frontière vide, dans le cas où nous imposons qu'une frontière coupe le territoire[11], l'algorithme des milieux est optimal. En observant l'exemple de la figure X.16, nous pouvons nous poser le problème suivant, est-il possible, en déterminant les « bons » milieux, de construire un algorithme optimal ? Nous verrons dans la partie sur le modèle en terme de frontière que la réponse est oui. Toutefois, dans le cas d'un segment, sans utiliser ce modèle nous pourrions trouver le « bon » milieu à interroger en étudiant différents exemples comme celui de la figure X.16.

De plus, nous pourrions utiliser l'algorithme des milieux en tant que sous-algorithme de l'algorithme direction puis recherche d'un point noir, cela fournirait un algorithme optimal pour la recherche de la direction et optimal pour la recherche d'un point noir lorsque deux extrémités d'un segment sont de couleurs différentes. Cependant, comme nous l'avons déjà vu, les figures X.9 et X.10 montrent que cet algorithme n'est pas optimal au pire.

Un problème encore plus difficile est le problème P_{card} : trouver les ensembles de points de cardinal donné, qui contrôlent la plus grande zone du rectangle. Résourdre P_{card} permet de résoudre $P_{chercheur}$ et P_{fr} mais la résolution de P_{fr} et de $P_{chercheur}$ ne permet pas la résolution de P_{card}.

Résoudre P_{card} revient à chercher des ensembles de points qui vérifient la propriété $\star_k$.

Pour énoncer la propriété $\star_k$, nous avons besoin de la définition suivante : soit E un sous-ensemble de points et C une coloration de E, nous appelons $E(C)$ l'ensemble des points engendrés par E muni de la coloration C et $\mathcal{C}^E$ l'ensemble des colorations possibles pour E. Un ensemble E qui vérifie la propriété $\star_k$ est un ensemble de cardinal k qui a la propriété suivante :

$$\min_{C \in \mathcal{C}^E} |E(C)| = \max_{|H|=k} \min_{C \in \mathcal{C}^H} |H(C)|$$

Nous allons maintenant essayer de trouver des ensembles qui vérifient la propriété $\star_k$. Lorsque $k = 1$, il n'y a pas de problème. Pour $k = 2$, nous devons étudier l'enveloppe convexe[12] de deux points. La démonstration du lemme suivant est présentée en annexe.

Lemme X.24 (*Enveloppe convexe de 2 points*)

Soit $(z_1, z_2) \in (\mathbb{Z}^2)^2$ *et* $z_2 - z_1 = (n, p)$ *alors :*

(1) si $|n| \leq |p|$,

$$conv(z_1, z_2) = \{z_1 + (ksgn(n), (k+t)sgn(p)), (k, t) \in \{0, \cdots, |n|\} \times \{0, \cdots, |p| - |n|\}\}$$

(2) si $|p| \leq |n|$,

$$conv(z_1, z_2) = \{z_1 + ((k+t)sgn(n), ksgn(p)), (k, t) \in \{0, \cdots, |p|\} \times \{0, \cdots, |n| - |p|\}\}$$

Ce lemme détermine l'enveloppe convexe de deux points dans $\mathbb{Z}^2$, il nous reste à décrire l'enveloppe convexe de deux points z_1 et z_2 d'un rectangle R

[11] Ce qui revient à interdire la frontière vide.

[12] La convexité que nous considérons est celle engendrée par les droites horizontales, verticales, diagonales et antidiagonales.

relativement[13] à R. Un rectangle étant un convexe, l'enveloppe convexe de z_1 et z_2 relativement à R est identique à celle de $\mathbb{Z}^2$.

Ce lemme nous permet de déterminer le cardinal de l'enveloppe convexe de deux points en fonction de leur position relative :

Lemme X.25

Soit z_1 et z_2 des points de $\mathbb{Z}^2$ tels que $z_2 - z_1 = (n, p)$ alors :

(1) si $|n| \leq |p|$, $|conv(z_1, z_2)| = (|p| - |n| + 1)(|n| + 1)$;

(2) si $|n| \geq |p|$, $|conv(z_1, z_2)| = (|n| - |p| + 1)(|p| + 1)$.

Démonstration : Si si $|n| \leq |p|$, alors d'après le lemme X.24 : $\mathrm{conv}(z_1, z_2) = \{z_1 + ((k + t)sgn(n), ksgn(p)), (k, t) \in \{0, \cdots, |p|\} \times \{0, \cdots, |n| - |p|\}\}$. $\mathrm{conv}(z_1, z_2)$ est donc pavable par $|p| - |n| + 1$ segments verticaux de longueur $|p|$. La preuve est identique dans le cas où $|p| \geq |n|$. ■

Ceci nous permet de déterminer l'enveloppe convexe (de deux points) de plus grand cardinal dans un rectangle R de dimension $L \times l$, $L \geq l$. Nous considérons que l'extrémité bas gauche est de coordonnées $(0, 0)$. Il nous suffit de déterminer le maximum de la fonction $f_1 : (x, y) \rightarrow (y - x + 1)(x + 1)$ sur $R_1 = \{(x, y) \in R, x \leq y\}$ (car nous pouvons supposer que $z_1 = (0, 0)$) et $f_2 : (x, y) \rightarrow (x - y + 1)(y + 1)$ sur $R_2 = \{(x, y) \in R, y \leq x\}$.

$f_1(x, .)$ est une fonction affine sur $[x, l]$ de coefficient directeur $(x+1) > 0$ c'est donc une fonction strictement croissante sur $[x, l]$ donc elle atteint son maximum en l. De plus, $f_1(., l)(x) = -x^2 + lx + l + 1$, $f_1(., l)'(x) = -2x + l$ est une fonction positive sur $[0, \frac{l}{2}]$ et négative sur $[\frac{l}{2}, L]$ donc $f_1(., l)$ atteint son maximum en $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil$ ou $\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor$ or $f_1(\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil, l) = f_1(\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor, l)$ (car $l = \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor$) donc f_1 atteint son maximum aux points $m_{l-} = (\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor, l)$ et $m_{l+} = (\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil, l)$

Par une preuve similaire, nous montrons que f_2 atteint son maximum aux points $m_{L-} = (L, \min\{\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor, l\})$ et $m_{L+} = (L, \min\{l, \left\lceil \frac{L}{2} \right\rceil\})$. Nous en déduisons que la fonction $\max(f_1, f_2)$ atteint sur R son maximum en m_{L+} et m_{L-}.

Cependant, ceci ne permet pas d'obtenir $\star_k$. Il nous reste, pour cela, à étudier le cas où le donneur donne les couleurs rouge et bleu aux deux premières interrogations du chercheur. En effectuant des expériences, nous pouvons observer qu'il n'y a que les 6 cas de la figure X.18 à traiter.

Dans le cas 6, si les deux points considérés sont de même couleur, leur enveloppe convexe est égale à ces deux points. De ce fait, nous ne prendrons pas en compte ce cas.

Pour traiter les autres cas, nous pouvons observer sur la figure X.18 que dans le cas 3, il est facile d'obtenir le nombre de points de couleurs connues, car cela revient à additionner l'aire de 2 rectangles de dimensions connues. Le cas 2 revient à additionner l'aire de deux triangles isocèles. Les seuls cas qui posent problèmes sont les cas 1, 4 et 5, pour traiter ces cas, nous allons calculer l'aire en considérant l'aire d'un rectangle ou d'un triangle isocèle

[13] L'enveloppe convexe d'un ensemble de points relativement à X est l'intersection de l'enveloppe convexe de ces points dans $\mathbb{Z}^2$ avec X.

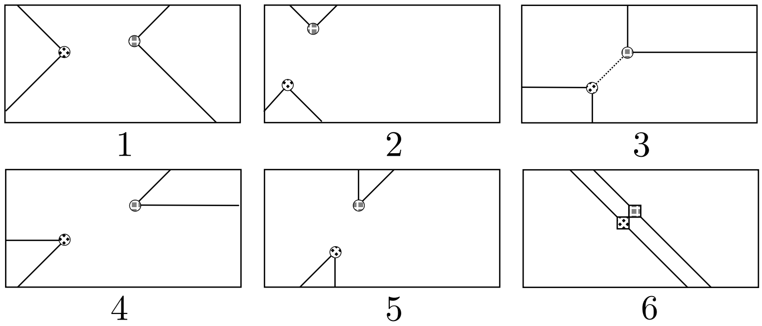


FIG. X.18. Cas possibles lorsque 2 points sont rouge et bleu.

puis en lui enlevant l'aire de triangles rectangles comme représenter sur la figure X.19 avec les triangles grisés.

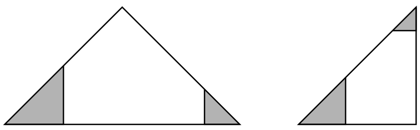


FIG. X.19. Triangles à enlever.

Nous introduisons donc la fonction α définie sur $\mathbb{Z}^2$ par

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{(y-x)(y-x+1)}{2} & \text{si } x \leq y \text{ ;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction donne l'aire d'un triangle isocèle rectangle de côté $y-x$. Nous obtenons ainsi le lemme X.26.

Lemme X.26

Soit $z_1 = (x_1, y_1)$ rouge et $z_2 = (x_2, y_2)$ bleu des points de R rectangle de dimension $l \times L$ avec $l \leq L$, tels que $z_2 - z_1 = (n, p)$ avec $n \geq 0$, $p \geq 0$ et $(|n|, |p|) \neq (1, 1)$ alors :

(1) si $p \leq 1$, l'ensemble des points rouges est de cardinal :

$$(x_1+1)^2 - \alpha(y_1, x_1) - \alpha(l - y_1, x_1)$$

L'ensemble des points bleus est de cardinal :

$$(L - x_2 + 1)^2 - \alpha(y_2, L - x_2) - \alpha(l - y_2, L - x_2)$$

(2) si $n \leq 1$, l'ensemble des points rouges est de cardinal :

$$(y_1+1)^2 - \alpha(x_1, y_1) - \alpha(L - x_1, y_1)$$

L'ensemble des points bleus est de cardinal :

$$(l - y_2 + 1)^2 - \alpha(x_2, l - y_2) - \alpha(L - x_2, l - y_2)$$

(3) si $0 \leq |n - p| \leq 1$, l'ensemble des points rouges est de cardinal :

$$(y_1+1)(x_1+1)$$

L'ensemble des points bleus est de cardinal :

$$(L - y_2 + 1)(l - x_2 + 1)$$

(4) *si $n-p > 1$ et $p > 1$, l'ensemble des points rouges est de cardinal :*

$$(x_1 + 1)^2 - \alpha(y_1, x_1) - \alpha(0, x_1)$$

L'ensemble des points bleus est de cardinal :

$$(L - x_2 + 1)^2 - \alpha(l - y_2, L - x_2) - \alpha(0, L - x_2)$$

(5) *si $p - n > 1$ et $n > 1$, l'ensemble des points rouges est de cardinal :*

$$(y_1 + 1)^2 - \alpha(x_1, y_1) - \alpha(0, y_1)$$

L'ensemble des points bleus est de cardinal :

$$(l - y_2 + 1)^2 - \alpha(L - x_2, l - y_2) - \alpha(0, l - y_2)$$

Démonstration : $(z+1)(z+1)$ correspond au nombre de points inclus dans un triangle isocèle de hauteur z. En effet, ce nombre de points est égal à $\sum_{k=1}^{z}(2k+1)$ (voir figure X.20). Si $x \leq y$, $\alpha(x, y)$ correspond au nombre de points inclus dans un triangle rectangle isocèles de côté $y - x$, car un tel triangle contient $\sum_{k=1}^{y-x} k$ points (voir figure X.21). $(y+1)(x+1)$ correspond au nombre de points inclus dans un rectangle de dimensions $x \times y$. ■

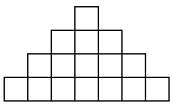


FIG. X.20. Triangle isocèle de hauteur 3

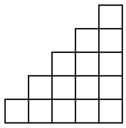


FIG. X.21. Triangle rectangle isocèle de côté 4

Nous allons maintenant essayer de déterminer dans chacun des cas si le minimum est atteint par le cardinal de l'enveloppe convexe ou par le cardinal de l'ensemble des points bleus et rouges. Pour simplifier les calculs, nous ne considérons que des carrés. Sur des carrés, nous pouvons négliger les « effets de bords » pour les cas 1, 2, 4 et 5 sous certaines conditions, car il existe une translation verticale ou horizontale qui ne change pas la cardinalité de l'enveloppe convexe mais maximise la cardinalité de l'ensemble contenant les points bleus et rouges. Lorsque les conditions ne sont pas réunies, le minimum est atteint par l'enveloppe convexe. En notant, $\mathrm{RB}(z_1, z_2)$ le cardinal de l'ensemble des points bleus et rouges lorsque z_1 est de couleur rouge et z_2 de couleur bleu, cela donne le lemme suivant :

Lemme X.27

Soit C un carré de côté c, soit $z_1 = (x_1, y_1)$ et $z_2 = (x_2, y_2)$ des points de C, $z_2 - z_1 = (n, p)$. Alors :

(1) *Dans le cas 1 :*

(a) *si* $x_1 \le \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor$ *et* $c - x_2 \le \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor$, *nous posons* $u = (0, \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor - y_1)$ *alors* $RB(z_1 + u, z_2 + u) = (x_1 + 1)^2 + (c - x_1 - n + 1)^2 \ge RB(z_1, z_2)$. *La fonction associée à ce cardinal atteint son maximum en* $x = \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor - n$ *si* $n \le \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor$ *et en* $x = 0$ *sinon.*

(b) *si* $x_1 \ge \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor$ *alors le MaxMin est égal à* $2\left(\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor - 1\right)$.

(2) *Dans le cas 2 :*

(a) *si* $y_1 \le \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor$ *et* $c - y_2 \le \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor$, *nous posons* $u = (\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor - x_1, 0)$ *alors* $RB(z_1 + u, z_2 + u) = (y_1 + 1)^2 + (c - y_1 - n + 1)^2 \ge RB(z_1, z_2)$. *La fonction associée à ce cardinal atteint son maximum en* $y = \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor - n$ *si* $n \le \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor$ *et en* $y = 0$ *sinon.*

(b) *si* $y_1 \ge \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor$ *alors le MaxMin est atteint pour le cardinal de l'enveloppe convexe de* z_1 *et* z_2.

(4) *Dans le cas 4, nous posons* $u = (0, y_0) = (0, x_1 - y_1 + (n - p))$ *alors* $z_1 + u \in C$, $z_2 + u \in C$ *et* $RB(z_1+u, z_2+u) = (x_1+1)(\frac{x_1}{2} + 1) + (c - x_1 - n + 1)(\frac{c - x_1 - n}{2} + 1) \ge RB(z_1, z_2)$.

De plus, la fonction $f : x \to (x + 1)(\frac{x}{2} + 1) + (c - x - n + 1)(\frac{c-x-n}{2} + 1)$ *atteint son maximum sur* $[0, c - n]$ *en* 0 *;*

(5) *Dans le cas 5, nous posons* $u = (x_0, 0) = (y_1 - x_1 + (p - n), 0)$ *alors* $z_1 + u \in C$, $z_2 + u \in C$ *et* $RB(z_1+u, z_2+u) = (y_1+1)(\frac{y_1}{2} + 1) + (c - y_1 - p + 1)(\frac{c - y_1 - p - y_o}{2} + 1) \ge RB(z_1, z_2)$.

De plus, la fonction $f : y \to (y + 1)(\frac{y}{2} + 1) + (c - y - n + 1)(\frac{c-y-n}{2} + 1)$ *atteint son maximum sur* $[0, c - n]$ *en* 0.

Démonstration : Les cas 2 et 5 sont identiques aux cas 1 et 4, car nous sommes sur un carré. Nous traitons dans un premier temps le cas 1 :

a) Comme $x_1 \le \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor$, $c - x_2 \le \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor$ et $p \le 1$ alors $\alpha(\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor, x_1) = \alpha(c - \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor, x_1) = \alpha(\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor + p, c - x_2) = \alpha(c - \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor - p, c - x_2) = 0$. Le lemme X.26, nous donne alors la valeur de $\mathrm{RB}(z_1+u, z_2+u)$ qui est supérieure à $\mathrm{RB}(z_1, z_2)$, car α est positif.

b) Dans le cas où $x_1 \ge \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor + 1$ alors z_1 et z_2 sont dans un rectangle de dimension $\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor \times 1$ car $|p| \le 1$. Donc le maximum possible pour le cardinal de l'enveloppe convexe de z_1 et z_2 est $2\left(\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor - 1\right)$. Nous allons montrer qu'il existe une translation verticale de vecteur v telle que $\mathrm{RB}(z_1 + v, z_2 + v) \ge 2\left(\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor - 1\right)$. En fait, il nous suffit de montrer que l'ensemble des points rouges est de cardinal supérieur à $2\left(\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor - 1\right)$. Le cardinal de l'ensemble des points rouges est égal à $r = (x_1 + 1)^2 - \alpha(y_1, x_1) - \alpha(c - y_1, x_1)$ d'après le lemme X.26. De plus comme $x_1 \ge \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor$ alors $r \ge (\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor + 1)^2 - \alpha(y_1, x_1) - \alpha(c - y_1, x_1)$. En effectuant la translation verticale de vecteur $v = (0, \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor - y_1)$, nous avons $\mathrm{RB}(z_1 + v, z_2 + v) \ge \left(\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor + 1\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x_1 - \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil\right)\left(x_1 - \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil + 1\right) \ge \left(\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor + 1\right)^2 - \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor\left(\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor + 1\right) = \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor^2 + \frac{3}{2}\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor + 1 \ge 0$ donc lorsque $x_1 \ge \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor + 1$, le MaxMin est égal à $2\left(\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor - 1\right)$.

Pour le cas 4, il nous suffit de vérifier que $x_1 + n - p \ge x_1$. Ceci est vrai car dans le cas 4 nous avons $n - p > 1$. Donc d'après le lemme X.26, $\mathrm{RB}(z_1 + u, z_2 + u) = (x_1 + 1)(\frac{x_1}{2} + 1) + (x_2 + 1)(\frac{x_2}{2} + 1) \ge \mathrm{RB}(z_1, z_2)$.

De plus, $f'(x) = 2x - (c-n)$ donc la fonction est maximale en 0 et $c-n$ or $f(0) = f(c-n)$ donc f atteint son maximum en 0. ■

Ce lemme nous permet de « déterminer » le MaxMin dans les cas 1, 2, 4 et 5.

Lemme X.28

Soit C un carré de côté c, soit $z_1 = (x_1, y_1)$ et $z_2 = (x_2, y_2)$ des points de C, $z_2 - z_1 = (n, p)$. Alors :

(1) Dans les cas 1 et, MaxMin est égal à :

$$\max\{2\gamma, (c-\theta)^2 + 1\}$$

avec $\gamma = \lfloor c + 4 - 2\sqrt{c+3} \rfloor$ et $\theta = \lfloor c + 2 - \sqrt{2+2c} \rfloor$.

(2) Dans le cas 3 MaxMin est égal à :

$$\max\{(c - \lceil N_1 \rceil + 1)^2 + 1, \lfloor N_1 \rfloor + 1\}$$

avec $N_1 = c + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{4c+5}}{2}$.

(3) Dans les cas 4 et 5, MaxMin est égal à :

$$\max\left\{\left(\frac{c - \lceil \chi \rceil}{2} + 1\right)(c - \lceil \chi \rceil + 1) + 1, \left(\left\lceil \frac{\lfloor \chi \rfloor}{2} \right\rceil + 1\right)\left(\left\lfloor \frac{\lfloor \chi \rfloor}{2} \right\rfloor + 1\right)\right\}$$

avec $\chi = 2c + 5 - \sqrt{2c^2 + 14c + 21}$.

Démonstration : (1) Dans le cas 1,

a) Nous allons chercher quelles sont les conditions sur x_1 pour que $\mathrm{RB}(z_1 + u, z_2 + u) \geq |\mathrm{conv}(z_1, z_2)|$. Pour cela, nous allons étudier le signe de la fonction $f : x \to (x+1)^2 + (c - x - n + 1)^2 - |\mathrm{conv}(z_1, z_2)|$ sur $[0, c-n]$. La dérivée de cette fonction est $f'(x) = 4x - 2c + 2n$, nous obtenons donc le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{c-n}{2}$		$c-n$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(\frac{c-n}{2})$	$\nearrow$	

Lorsque $p = 0$ alors $f(\frac{c-n}{2}) = 2(\frac{1}{2}(c-n)+1)^2 - n - 1$ donc lorsque n est « proche » de c, $f(\frac{c-n}{2})$ est négatif et lorsque n est proche de 0, il est positif. Il nous faut donc chercher les valeurs de n pour lesquelles $f(\frac{c-n}{2}) \geq 0$. Pour cela, nous posons $g(n) = f(\frac{c-n}{2})$. $g'(n) = n - c - 3$ donc $g'(n) < 0$ sur $[2, c]$ donc g est décroissante sur $[2, c]$. De plus, sur $[2, c]$, $g(n) = 0$ pour $n = c + 3 - \sqrt{2c+7}$. Nous posons $\alpha = \lfloor c + 3 - \sqrt{2c+7} \rfloor$ alors si $n \leq \alpha$, $g(n) \geq 0$ et si $n \geq \alpha + 1$, $g(n) \geq 0$.

i) Cas où $n \leq \alpha$, le minimum est le cardinal de l'enveloppe convexe donc nous cherchons $\max\{n+1 | 2 \leq n \leq \alpha\}$. Il est égal à $\alpha + 1$.

ii) Cas où $n \geq \alpha+1$. Comme $f(0) = f(c-n) > 0$, il nous faut déterminer les valeurs de x telles que $f(x) = 0$. $f(x) = 0$ est équivalent à $x = X_1 = \frac{c-n}{2} - T$ ou $x = X_2 = \frac{c-n}{2} + T$ où $T = \frac{1}{2}\sqrt{6n - 4c - 2 - (c-n)^2}$.

Soit $h(n) = \frac{c-n}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6n - 4c - 2 - (c-n)^2}$, $h'(n) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2T}(c-n+3)$. donc pour tout $n \in [\alpha+1, c]$, $h'(n) \leq 0$. Donc h est décroissante sur $[\alpha+1, c]$. De plus $h(c+3-\sqrt{2c+7}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2c+7}-3) \geq 0$, $h(c) < 0$ et $h(n) = 0$ pour $n = c+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4c+5}$. Nous posons $\beta = \left\lfloor c + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4c+5}\right\rfloor$ alors lorsque $\alpha + 1 \leq n \leq \beta$, $X_1 \geq 0$ et $X_2 \leq c$ et lorsque $\beta + 1 \leq n \leq c$, $X_1 \leq 0$ et $X_2 \geq c$.

– Cas où $\beta + 1 \leq n \leq c$ alors pour tout $x \in [0, c-n]$, $f(x) \leq 0$ donc le minimum est atteint par $RB(z_1 + u, z_2 + u)$. Donc le MaxMin est égal à $\max\{(c-n+1)^2 + 1 | \beta + 1 \leq n \leq c\} = (c-\beta)^2 + 1$;
– Cas où $\alpha + 1 \leq n \leq \beta$. Dans le cas où $x \in [0, X_1] \cup [X_2, c-n]$ alors $f(x) \geq 0$ donc le minimum est le cardinal de l'enveloppe convexe donc nous cherchons $\max\{n+1 | \beta \geq n \geq \alpha+1\}$. Le maximum est égal à $\beta + 1$.

  Dans le cas où $x \in [\lceil X_1 \rceil, \lfloor X_2 \rfloor]$ alors le minimum est $\mathrm{RB}(z_1 + u, z_2 + u) = (x+1)^2 + (c-x-n+1)^2$. Soit $i : x \to (x+1)^2 + (c-x-n+1)^2$ alors $i'(x) = f'(x)$ donc i est maximum en $\lceil X_1 \rceil$ ou $\lfloor X_2 \rfloor$. Or $i(X_1) = i(X_2) = n+1$ donc le maximum est inférieur à $\beta + 2$;

Lorsque $p = 1$, nous avons $f(\frac{c-n}{2}) = 2(\frac{c-n}{2} + 1)^2 - 2n$ qui est positif si et seulement si $n \leq c + 4 - 2\sqrt{c+3}$. Nous posons $\gamma = \left\lfloor c + 4 - 2\sqrt{c+3}\right\rfloor$.

i) Cas où $n \leq \gamma$. Le minimum est atteint par le cardinal de l'enveloppe convexe, le MaxMin est donc égal à 2γ.

ii) Cas où $\gamma \leq n \leq c$. $f(x) = 0$ est équivalent à $x = Z_1 = \frac{c-n}{2} - R$ ou $x = Z_2 = \frac{c-n}{2} + R$ où $R = \frac{1}{2}\sqrt{8n - 4c - 4 - (c-n)^2}$. Nous posons $\theta = \left\lfloor c + 2 - \sqrt{2+2c}\right\rfloor$ alors si $\gamma \leq n \leq \theta$, $Z_1 \geq 0$ et $Z_2 \leq c$ et si $\theta \leq n \leq c$, $Z_1 \leq 0$ et $Z_2 \geq c$.
– Cas où $\theta + 1 \leq n \leq c$. Le MaxMin est égal à $(c-\theta)^2 + 1$.
– Cas où $\gamma \leq n \leq \theta$. Le MaxMin est inférieur à $\theta + 2$.

Nous pouvons alors remarquer que $2\left(\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor - 1\right)$, $\alpha + 1$, $\beta + 2$, $\theta + 2$ sont inférieurs à c et $2\gamma \geq c$. De plus, $(c-\theta)^2 + 1 \geq (c-\beta)^2 + 1$. Donc dans le cas 1, le MaxMin est égal à $\max\{2\gamma, (c-\theta)^2 + 1\}$.

(2) Dans le cas 3,

(a) Cas où $n = p$. Nous avons $RB(z_1, z_2) = (x_1+1)(y_1+1) + (c-n-x_1+1)(c-n-y_1+1)$ et $|\mathrm{conv}(z_1, z_2)| = n+1$. Nous avons :

$$\max\{RB(z_1, z_2) | z_2 - z_1 = (n, n)\} = (c-n+1)^2 + 1$$

Nous allons comparer ce résultat avec $n+1$. Ce qui nous permettra de déterminer en fonction de la valeur de n par qui est atteint le minimum. Pour cela, nous allons étudier la fonction $f : n \to (c-n+1)^2 - n$. Nous posons $N_1 = \frac{1}{2}(2c+3-\sqrt{4c+5})$ et $N_2 = \frac{1}{2}(2c+3+\sqrt{4c+5})$, ce sont les racines de f. Nous pouvons remarquer que $N_2 \geq c$ et $0 \leq N_1 \leq c$ donc sur $[0, c]$, $f(n) \geq 0$ si et seulement si $n \leq N_1$.

(i) Cas où $c \geq n \geq \lceil N_1 \rceil$. Le minimum est atteint par RB, le MaxMin est donc égal à $(c - \lceil N_1 \rceil + 1)^2 + 1$.

(ii) Cas où $0 \leq n \leq \lfloor N_1 \rfloor$. Le minimum est atteint par la convexité, le MaxMin est donc égal à $\lfloor N_1 \rfloor + 1$.

Donc Maxmin est égal à $\max\{(c - \lceil N_1 \rceil + 1)^2 + 1, \lfloor N_1 \rfloor + 1\}$ dans le cas où $n = p$.

(b) Cas où $p = n + 1$. Nous avons $RB(z_1, z_2) = (x_1 + 1)(y_1 + 1) + (c - n - x_1 + 1)(c - n - y_1)$ et $|\text{conv}(z_1, z_2)| = 2(n + 1)$. Nous avons :

$$\max\{RB(z_1, z_2) | z_2 - z_1 = (n, n + 1)\} = (c - n + 1)^2$$

Etudions la fonction $g : n- > (c-n+1)^2 - 2(n+1)$. Les racines de g sont $M_1 = c + 2 - \sqrt{2c + 5}$ et $M_2 = c + 2 + \sqrt{2c + 5}$. Or $0 \leq M_1 \leq c$ et $M_2 \geq c$. Donc sur $[0, c]$, $g(n) \geq 0$ si et seulement si $n \leq M_1$.

(i) Cas où $c \geq n \geq M_1$. Le MaxMin est égal à $(c - \lceil M_1 \rceil + 1)^2$;

(ii) Cas où $n \leq M_1$. Le MaxMin est égal à $2(\lfloor M_1 \rfloor + 1)$.

(3) Dans le cas 4, nous avons $|\text{conv}(z_1, z_2)| = (n-p+1)(p+1)$ et $RB(z_1 + u, z_2 + u) = (x_1 + 1)(\frac{x_1}{2} + 1) + (c - x_1 - n + 1)(\frac{c - x_1 - n}{2} + 1) \geq \text{RB}(z_1, z_2)$. Nous avon :

$$\max\{RB(z_1, z_2) | z_2 - z_1 = (n, p)\} = \left(\frac{c - n}{2} + 1\right)(c - n + 1) + 1$$

Posons $f : (n, p) \to \left(\frac{c-n}{2} + 1\right)(c - n + 1) + 1 - (n - p + 1)(p + 1)$. $\frac{\partial f}{\partial p}(n, p) = 2p - n$. Donc $f(n, .)$ atteint son minimum en $f(n, \frac{n}{2})$. $f(n, \frac{n}{2})$ est supérieur à 0 sur $[0, c]$ si et seulement si $n \leq \chi = 2c + 5 - \sqrt{2c^2 + 14c + 21}$.

(a) Cas où $n \leq \chi$. Le minimum est atteint par le cardinal de l'enveloppe convexe, nous cherchons donc $\max\{(n - p + 1)(p + 1) | n \leq \lfloor \chi \rfloor,\ p \leq n - 1\}$. A n fixé, le maximum est atteint pour $p = \lfloor n/2 \rfloor$ ou $p = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Donc

$$\max\{(n - p + 1)(p + 1) | n \leq \lfloor \chi \rfloor,\ p \leq n - 1\} = \left(\left\lceil \frac{\lfloor \chi \rfloor}{2} \right\rceil + 1\right)\left(\left\lfloor \frac{\lfloor \chi \rfloor}{2} \right\rfloor + 1\right)$$

.

(b) Cas où $\chi \leq n \leq c$. Le minimum est atteint par $RB(z_1 + u, z_2 + u)$. Nous cherchons donc $\max\{\left(\frac{c-n}{2} + 1\right)(c - n + 1) + 1 | \lceil \chi \rceil \leq n \leq c\}$. Celui-ci est égal à

$$\left(\frac{c - \lceil \chi \rceil}{2} + 1\right)(c - \lceil \chi \rceil + 1) + 1$$

Dans le cas 4, le MaxMin est donc égal à

$$\max\left\{\left(\frac{c - \lceil \chi \rceil}{2} + 1\right)(c - \lceil \chi \rceil + 1) + 1, \left(\left\lceil \frac{\lfloor \chi \rfloor}{2} \right\rceil + 1\right)\left(\left\lfloor \frac{\lfloor \chi \rfloor}{2} \right\rfloor + 1\right)\right\} \quad \blacksquare$$

Nous ne savons pas déterminer quelle est la fonction qui est maximum en fonction de c. Par contre, pour une valeur numérique de c donnée, ce lemme (plus la preuve) nous permet de déterminer le couple de points à interroger qui atteint le MaxMin.

2.3.1. *Conclusion sur le contrôle du plus grand ensemble.* Nous ne savons pas comment contrôler le plus grand nombre de points à chaque étape. Pour un segment, il existe des algorithmes localement optimaux en terme de cardinalité, cependant nous avons pu voir (figure X.16) que cela n'implique pas une optimalité au pire.

La modélisation en terme de cardinalité de points, apparaît donc comme assez efficace pour des segments. Cependant, pour un rectangle, il nous semble qu'il est difficile de construire un algorithme optimal par étape. De plus, nous avons utilisé ce modèle pour obtenir une réponse à P_{-} pour des segments, malheureusement, il paraît plus difficile d'obtenir un résultat de ce type pour des rectangles en prenant comme objet des points.

Ce modèle nous a amené à introduire de nouveaux objets comme des aires, des triangles isocèles, rectangles, des fonctions... Nous avons également été amené à étudier des suites récurrentes pour évaluer le nombre d'interrogations, au pire, utilisées par les algorithmes. En particulier, nous avons été amené à chercher le premier indice pour lequel le terme est égal à 0.

Nous allons, tout d'abord, proposer un nouveau modèle basé, non pas sur la cardinalité du nombre de points inconnus, mais sur la cardinalité du nombre de frontière possibles. Nous chercherons à donc à interroger le point qui va élliminer le plus grand nombre de frontières. Nous l'appelerons *modèle frontières*. Il y a donc un changement d'instances, nous passons des points à des frontières.

2.4. Modèle frontières. Nous allons chercher à résoudre le problème $P^{Fr}_{opt.etp.cherc}$: construire un algorithme qui à chaque étape élimine le plus grand nombre de frontières. Comme pour les problèmes du type $P_{opt.etp.cherc}$ mentionnés précédemment, un problème qui se pose est de savoir si la résolution de $P^{Fr}_{opt.etp.cherc}$ entraîne la résolution de $P_{chercheur}$.

Pour commencer, nous donnons quelques définitions. Soit F l'ensemble des frontières possibles, I l'ensemble des points de couleur inconnue et X un point de I. Nous posons F_i^X l'ensemble des frontières possibles si X est de couleur i. Alors jouer sur le point qui élimine le plus grand nombre de frontières, au pire, revient à chercher le point pour lequel le nombre de frontières possibles restantes est minimum, c'est à dire, le point X_0 tel que :

$$\max\left\{|F_R^{X_0}|, |F_B^{X_0}|, |F_N^{X_0}|\right\} = \min_{X\in I}\left\{\max\left\{|F_R^{X}|, |F_B^{X}|, |F_N^{X}|\right\}\right\}$$

En expérimentant pour déterminer quels sont les points à interroger, nous pouvons observer que le premier coup X_1 enlève au plus quatre frontières quelque soit le point sur lequel il est joué sur un rectangle non segment. En identifiant la position relative des points comme une variable pertinente du problème, nous pouvons aussi observer que quelque soit la position de X_1, si X_1 est bleu et si le deuxième coup X_2 est rouge alors le nombre de frontières restantes ne dépend que de la position relative de X_1 et X_2.

Nous avons ainsi le lemme suivant :

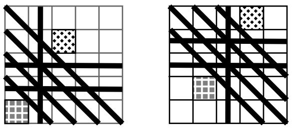


FIG. X.22. Le nombre de frontières restantes ne dépend que de la position relative.

Lemme X.29

Soit X_1 et X_2 des points d'un rectangle tels que $X_2 - X_1 = (n, p)$ avec $n \geq 0$ et $p \geq 0$ alors si X_1 est bleu, si X_2 est bleu, le nombre de frontières restantes est égal à $3p + n - 4$ si $p > n$, à $p + 3n - 4$ si $p < n$ et à $4n - 2$ si $n = p$.

Démonstration : Si X_2 est rouge et $0 \leq n < p$ alors le nombre de frontières possibles est par énumération : $n-1$ verticales, $p-1$ horizontales, $p+n-1$ antidiagonales et $p-n-1$ diagonales. Ce qui fait $3p+n-4$ frontières. Le cas $n > p \geq 0$ se déduit par rotation.

Il reste le cas $n = p \geq 0$ alors nous avons $n - 1$ horizontales, $n - 1$ verticales, 0 diagonales et $2n - 1$ antidiagonales. ■

De plus, nous avons le lemme suivant qui fait le lien entre les F_i^X :

Lemme X.30

Sur un rectangle R de dimensions $l \times L$ muni d'une coloration partielle C qui contient au moins un point X_1 colorié. Soit F l'ensemble des frontières possibles et X_2 un point de R dont la couleur est inconnue alors nous avons $F_N^{X_2} \bigsqcup F_R^{X_2} \bigsqcup F_B^{X_2} = F$ et donc $|F_N^{X_2}| + |F_R^{X_2}| + |F_B^{X_2}| = |F|$.

Démonstration : Nous avons $F_N^{X_2} \cup F_R^{X_2} \cup F_B^{X_2} = F$, car si $f \in F$ alors soit X_2 appartient à f, soit X_2 est de couleur rouge, soit X_2 est bleu. Il nous reste à montrer que les $F_i^{X_2}$ sont disjoints. Soit $f \in F_R^{X_2} \cap F_B^{X_2}$ alors :

– si X_1 est rouge ou bleu, f sépare X_1 et X_2 strictement et X_1 et X_2 sont dans le même demi-plan de f, ce qui est impossible ;
– si X_1 est noir, X_1 appartient à f et X_2 appartient au deux demi-plan engendré par f, ce qui est impossible.

Il reste le cas suivant : $f \in F_R \cap F_N$. f alors passe par X_2 et X_2 strictement inclus dans un demi-plan de f, ce qui est impossible. ■

Remarque : Ce résultat n'est vrai que si la coloration partielle est au moins de cardinal 1, en d'autres termes, c'est vrai seulement après une interrogation, car lorsque aucun point n'est colorié : $F_R^{X_2} = F_B^{X_2}$.

Il nous reste maintenant à dénombre le nombre de frontières possibles sur un rectangle vierge, c'est le problème $P_{card-fr}$. Ce problème est facile à résoudre, il suffit de compter le nombre de frontière horizontale, verticale et diagonale. Sur un rectangle vierge de dimensions $l \times L$, Il y a ainsi $(l + 1) + (L + 1) + 2(l + L + 1) + 1 = 3L + 3l + 5$ frontières possibles. Donc après une interrogation, le nombre de frontières restantes est égal à $3L + 3l + 1$. Cela permet, en utilisant les lemmes X.29 et X.30, de déterminer le couple de points X_1, X_2 qui élimine le plus de frontières.

Par exemple, pour un rectangle de dimensions 10×5, le nombre de frontières possibles après une interrogation sur un point X_1 est égale à 46. Cherchons un point X_2 tel que

$$\max\{F_R^{X_2}, F_B^{X_2}, F_N^{X_2}\} = \min_X \max\{F_R^X, F_B^X, F_N^X\}$$

Comme $F_N^X = 4$ ou $F_N^X = 3$, par le principe de la cage aux pigeons, nous avons :

$$\min_X \max\{F_R^X, F_B^X, F_N^X\} \geq \left\lceil \frac{46-4}{2} \right\rceil = 21$$

Nous allons, maintenant, déterminer[14]un couple (n_0, p_0) avec $n_0 \geq 0$, $p_0 \geq 0$ et $n_0 > p_0$ tel que :

$$\max\{46 - (3n_0 + p_0 - 4) - 4, 3n_0 + p_0 - 4, 4\} = 21$$

Il nous suffit de trouver un couple (n_0, p_0) tel que $3n_0 + p_0 - 4 = 21$, les couples $(7, 4)$, $(8, 1)$ conviennent. De plus, ils correspondent à des points de R. En jouant, X_1 par exemple en $(0, 0)$ et X_2 en $(7, 4)$ ou $(8, 1)$ alors nous obtenons le nombre minimum de frontières restantes possibles après deux interrogations.

Pour un rectangle, nous ne savons pas déterminer de manière générale, le couple de points à interroger. Par contre, pour un carré, nous avons le résultat suivant :

Proposition X.31

Soit C un carré de côté c, alors pour éliminer le maximum de frontière en deux interrogations, il suffit d'interroger des points X_1 et X_2 tels que $X_2 - X_1 = (c, 3)$.

Démonstration : Sur carré vierge de côté $c \geq 3$, il y a $6c + 5$ frontières possibles donc, après une interrogation, il en reste $6c+1$. Comme nous avons :

$$\max\{F_R^{X_2}, F_B^{X_2}, F_N^{X_2}\} = \min_X \max\{F_R^X, F_B^X, F_N^X\}$$

et que $F_N^X = 4$ ou $F_N^X = 3$, par le principe de la cage aux pigeons :

$$\min_X \max\{F_R^X, F_B^X, F_N^X\} \geq \left\lceil \frac{6c-3}{2} \right\rceil$$

Or $\lceil \frac{6c-3}{2} \rceil = 3c-1$ et $\max\{6c+1-(3c+3-4)-4, 3c+3-4, 4\} = 3c-1$ ■

Remarque : Précédemment, pour montrer que les points que nous considérions optimisent le nombre de frontières éliminées, nous avons minoré

$$\min_X \max\{F_R^X, F_B^X, F_N^X\}$$

et exhibé un couple de points qui atteint ce minorant. Nous aurions, également, pu les trouver par un calcul direct en cherchant le minimum de la fonction suivante : $X \to \max\{F_R^X, F_B^X, F_N^X\}$. En effet, pour un X donné les lemmes X.29 et X.30 nous permettent de calculer la valeur de cette fonction. Toutefois, cela semble plus difficile à réaliser.

[14]Un tel couple n'existe pas tout le temps.

Nous pouvons aussi signaler que la position relative n'est pas unique, de manière générale, les solutions sont l'ensembles des $(c-k, 3k+3)$ sont solutions pour $k \leq \lfloor \frac{c-3}{3} \rfloor$.

Nous appelons *couple de minimisation*, deux points qui minimisent le nombre de frontières à interroger. Cette proposition nous permet de trouver les couples de minimisations d'un carré. Un problème qui se pose est maintenant de savoir quelle est la meilleure position pour la première interrogation ?

En déterminant l'enveloppe convexe d'un couple de minimisation, qui est représenté par la figure X.23, nous pouvons observer que l'ensemble des points inconnus est divisé en deux zones non connexes de même forme, que nous appelerons *botte*. Nous dirons que la botte est de dimension $c \times k$ si la tige est de longueur c et la semelle de longueur k (Figure X.24).

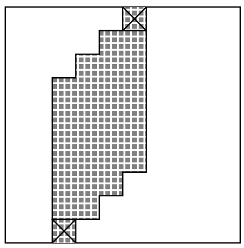


FIG. X.23. Les bottes.

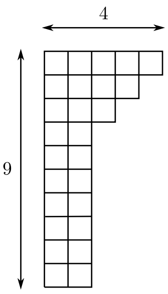


FIG. X.24. Une botte de dimension 9×4.

Sur une botte de dimensions $c \times k$, il y a $k-2$ frontières verticales possibles, $k+1$ frontières diagonales et $k-2$ frontières antidiagonales, ce qui fait au total $3k-3$ frontières possibles. La figure X.25 donne le nombre de frontières dans chaque botte en fonction de la position de la première interrogation.

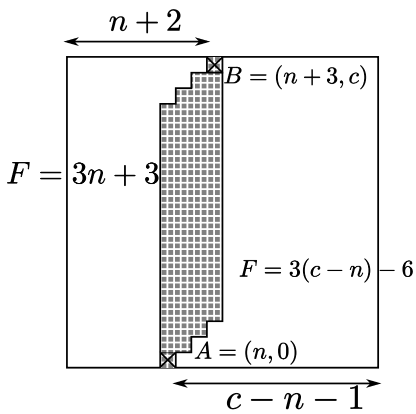


FIG. X.25. Nombre de frontières dans les bottes.

Lorsque le couple de minimisation est bleu, si F est le nombre de frontières possibles, nous cherchons une translation horizontale qui permet de trouver, un troisième point, X_3 à interroger ayant la propriété[15] :

$$\max\{F_R^{X_3}, F_B^{X_3}, F_N^{X_3}\} = \left\lceil \frac{F-3}{2} \right\rceil$$

Nous pouvons observer que, mis à part la frontière vide, les deux bottes ne « partagent » pas de frontières, c'est-à-dire, si une frontière passe par une botte alors son intersection avec l'autre botte est vide. De ce fait, nous pouvons, au plus, éliminer « environ » la moitié des frontières possibles d'une botte. L'atteinte de ce minorant n'est donc possible que si sur une botte il passe « très peu » de frontières et sur l'autre botte un « grand » nombre de frontières. Or, il se trouve que le nombre de frontière diminue si la semelle de la botte diminue, de ce fait, considérons le cas où la différence entre les bottes est la plus grande. Cela correspond au cas où un des points du couple de minimisation est un coin du carré.

Si X_3 a pour abscisse n et est bleu, le nombre de frontières restantes est égal à $3(c-n)+c+3+1 = 4c-3n+4$, la figure X.26 donne l'idée de la preuve, il faut remarquer que $A+B=c$.

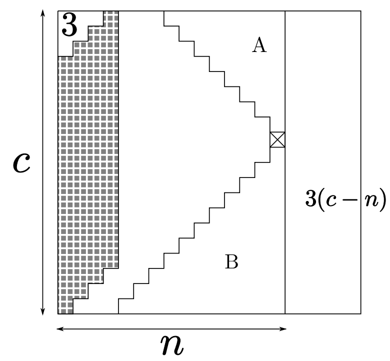


FIG. X.26. Idée de la preuve.

Ceci permet de ramener le problème à la résolution d'une équation à une inconnue n : $4c-3n+4 = \left\lceil \frac{F-3}{2} \right\rceil$ où $F = 3(c-1)$. Pour résoudre cette équation, nous allons différencier les cas où c est pair et où c est impair. Si $c = 2k$ alors $3n = 5k+7$ et si $c = 2k+1$, $3n = 5k+9$. Donc n n'existe pas tout le temps : si c est pair, il n'existe que si $\frac{c}{2}$ est congru à 1 modulo 3 et si c impair, il n'existe que si $\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor$ est congru à 0 modulo 3. Donc n existe si et seulement si c est de la forme $6k+1$ ou $6k+2$. De plus, nous avons $c \geq n \geq \frac{5}{3}\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor$ si et seulement si $c \geq 13$. Donc pour c congru à 0 ou 1 modulo 6 et $c \geq 13$, il existe un point X_3 qui permet d'atteindre le minorant. De plus, ce sont les seuls cas pour lesquels il existe.

EXEMPLE X.32. Nous allons, maintenant, repérer des types de raisonnements que nous pourrions effectuer pour construire un algorithme de recherche en utilisant ce qui a été fait précédemment. Nous ne traiterons qu'un seul exemple, celui où $c = 13$.

[15] $\left\lceil \frac{F-3}{2} \right\rceil$ est un minorant du nombre de frontières restantes. Il n'est pas certain que le point X_3 vérifiant cette propriété existe.

La figure X.27 représente le cas $c = 13$ où X_3 est bleu, l'abscisse de X_3 est donc égal à 13. Nous pouvons alors nous apercevoir que l'ensemble des points de couleur inconnue est composé de trois convexes non adjacents lorsque l'ordonnée de X_3 est différente de 0 ou c et de deux convexes lorsque l'ordonnée de X_3 est égale à 0 ou c.

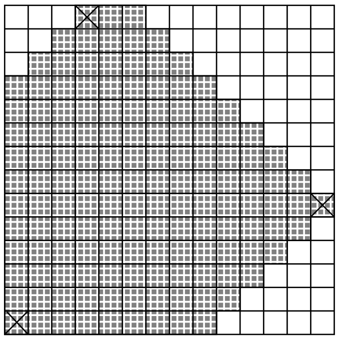


Fig. X.27. Carré de côté 13

De plus, si nous voulons optimiser le nombre de frontières restantes, il ne faut pas que les nombres de frontières passant par les deux convexes situés à « droite » soient trop proches, l'optimalité en cardinalité de frontières ne peut s'obtenir que si ces nombres sont suffisamment différents. En appelant h le nombre de frontières passant par le convexe haut droit et b le nombre de frontières passant par le convexe bas droit, il faut que $h \geq \left\lceil \frac{h+b+3}{2} \right\rceil$ ce qui équivaut à $b+3 \leq h-1$ ou les relations analogues en échangeant h et b.

Dans le cas où ces relations sont vérifiées pour h, nous pouvons trouver un point qui permet de minimiser le nombre de frontières restantes, car toutes les frontières possibles du convexe haut droit sont du même type (antidiagonale) et *adjacentes*[16], jouer sur ce convexe revient donc à jouer sur un segment de longueur le nombre de frontières dont l'une des extrémités est bleue (voir figure X.28).

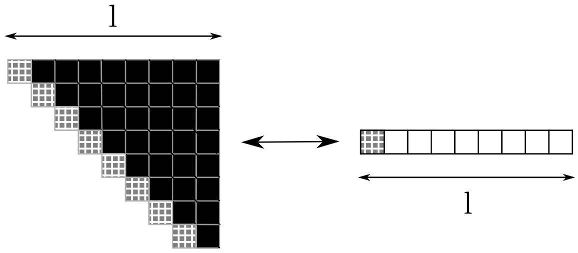


Fig. X.28. Equivalence entre un unique type de frontières adjacentes et un segment.

Nous pouvons alors jouer un quatrième coup X_4 qui réalise le minimum de frontières restantes. Il est intéressant que ce coup corresponde au coin du convexe haut droit, car cela va nous permettre de supprimer une zone

[16]Deux frontières du même type sont adjacentes si elles passent par deux points qui sont adjacents.

de recherche et ainsi de réduire le nombre de convexes non adjacents, cela correspond au cas où $h-1 = b+3$. Comme nous avons $h+b = 12$, $X_3 = (13, 4)$ convient. Nous prenons $X_3 = (13, 4)$, dans le cas où il est bleu, interroger le coin du convexe haut droit permet de minimiser le nombre de frontières restantes qui sera égal à 8 quelque soit la couleur de ce coin, nous appelons ce point X_4.

Si X_4 est bleu alors l'ensemble des points de couleur inconnue est constitué de deux convexes non adjacents sur lesquels passent 3 et 4 frontières (voir figure X.29). Nous jouons alors le coin bas droit du convexe sur , X_5, cela permet de minimiser le nombre de frontières restantes, il est de 3 si X_5 est rouge, 4 si X_5 est bleu.

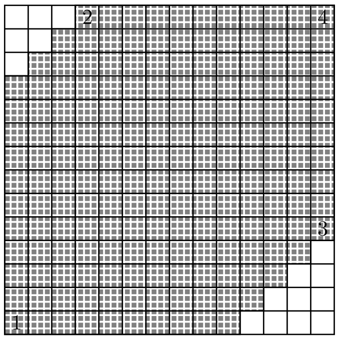


FIG. X.29. Lorsque les points sont bleus.

Nous trouvons donc la frontière en au plus 7 interrogations en minimisant à chaque étape le nombre de frontières restantes, dans le cas où le donneur donne aux quatres premiers coups que nous avons joués la couleur bleue. Reste les cas où le donneur donne la couleur rouge à une des quatres premières interrogations.

Nous allons maintenant montrer que dans le cas où il donne à X_2, X_3 ou X_4 la couleur rouge, nous terminons aussi en 7 interrogations.

Dans le cas où X_2 est rouge alors nous considérons le chemin $\mathcal{C}$ de la figure X.30 qui relie X_1 à X_2. La frontière « coupe » alors ce chemin.

La figure X.31 (les points jaunes correspondent aux coups que l'algorithme joue si X_3 est bleu, les points verts aux coups que nous jouons si X_3 est rouge) montre que nous pouvons trouver où la frontière « coupe » le chemin en moins de 4 interrogations. Un coup suffit alors pour déterminer la direction de la frontière et ainsi conclure. De ce fait, si les deux premiers points sont de couleurs rouge et bleu alors nous trouvons la frontière en moins de 7 interrogations.

Dans le cas, où le premier point à être rouge est le troisième point interrogé, nous considérons le chemin $\mathcal{C}'$ de la figure X.32. Nous allons alors utiliser un algorithme qui interroge les points de $\mathcal{C}'$ de manière analogue à $\mathcal{C}$, il est donné par la figure X.33 (les points jaunes sont les points à interroger si X_4 est bleu et les points verts ceux à interroger si X_4 est rouge.), l'algorithme trouve la « coupure » en moins de 7 interrogations.

Il existe une situation pour laquelle, l'algorithme utilise 7 interrogations. Toutefois, dans ce cas, en déterminant la coupure, il détermine aussi la

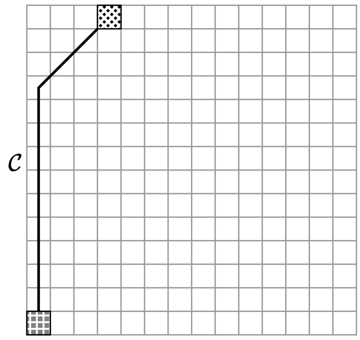


FIG. X.30. Chemin reliant X_1 et X_2.

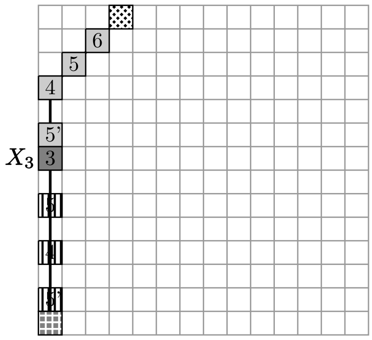


FIG. X.31. Algorithme trouvant la « coupure ».

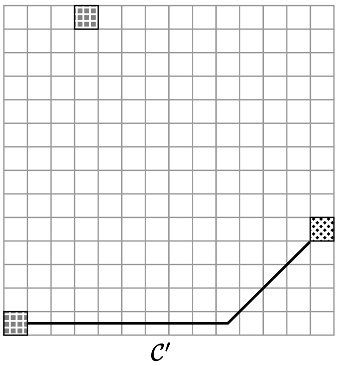


FIG. X.32. Chemin reliant X_1 à X_3.

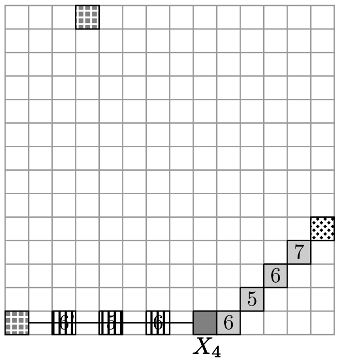


FIG. X.33. Algorithme trouvant la « coupure ».

direction de la frontière, car les frontières sont toutes du même type. Donc nous trouvons la frontière en moins de 7 interrogations.

Il ne nous reste plus que le cas où le donneur donne la couleur rouge à la quatrième interrogation. Comme précédemment, nous allons jouer sur un chemin. Les figures X.34 et X.35 illustrent ceci. Nous sommes dans un cas, où il n'y a plus qu'un seul type de frontière possible.

Nous n'avons pas traité les cas où l'une des quatre premières interrogations est de couleur noire, il est facile de voir que dans ces cas, nous pouvons conclure en moins de 7 interrogations.

Nous venons donc d'exhiber un algorithme qui termine en 7 interrogations et qui utilise la stratégie optimiser le nombre de frontières restantes à chaque étape.

Cet exemple montre, sur un cas particulier, comment nous pouvons construire un algorithme de recherche en utilisant l'idée d'optimiser le nombre de frontières restantes. Pour le cas où $c = 13$, c'est un travail assez « lourd » puisqu'il nécessite de rechercher après chaque interrogation le point qui minimise le nombre de frontières restantes. Nous n'allons pas, dans la suite, chercher à généraliser l'algorithme précédent. Cet algorithme est une application de la stratégie X.2 au carré de côté 13.

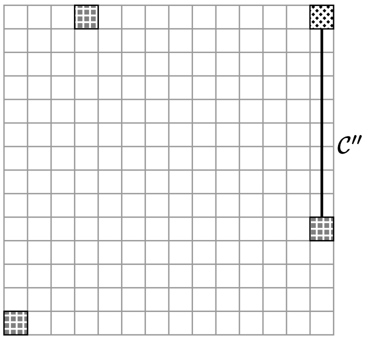


FIG. X.34. Chemin reliant X_3 à X_4.

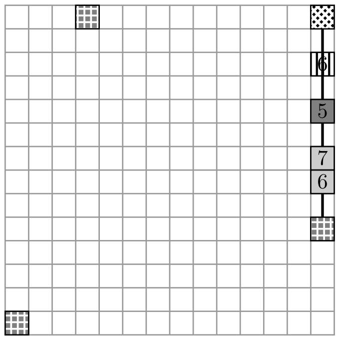


FIG. X.35. Algorithme trouvant la frontière.

Stratégie X.2 (*Elimination de frontières*)

La condition d'arrêt est la suivante : le nombre de frontières possibles est égal à 0.

(1) Interroger un point qui élimine le plus de frontières possibles.
   (a) Si la condition de terminaison est vérifiée, conclure.
   (b) Sinon, recommencer l'étape 1.

L'efficacité de cette stratégie va, *apriori*, dépendre des choix effectués lorsqu'il y a plusieurs points possibles. En effet, il se peut que plusieurs points maximisent le nombre de frontières éliminées. C'est en particulier le cas du premier point sur un carré, où tous les points éliminent le même nombre de frontières. Sur un carré de taille 3, si le premier point interrogé est une extrémité alors l'algorithme s'arrête en 4 interrogations, sinon il s'arrête en 5 interrogations. Malheureusement, nous ne savons pas quel est le « meilleur » choix pour la première interrogation sur un carré. Toutefois, nous verrons que, sur un segment, il est plus efficace de jouer la première interrogation sur une extrémité.

Nous avons l'impression qu'il existe un algorithme optimal en cardinalité de frontière à chaque étape qui pourraient atteindre l'optimum. Cependant nous ne savons pas, en fonction des coups joués, donner le point qui élimine le plus de frontières de manière non « gloutonne ». De ce fait, un ordinateur utiliserait un nombre d'opérations élémentaires largement supérieur au nombre de coups joués en appliquant cet algorithme. De même « humainement », sur des objets de grande tailles, cet algorithme est impossible à mettre en oeuvre sans améliorer de manière significative l'algorithme glouton, en obtenant par exemple des résultats du type de la proposition X.31. Toutefois, en expérimentant cette stratégie sur des carrés de « petites tailles », nous pouvons construire des algorithmes optimaux au pire pour ces carrés.

Remarque : En utilisant le lemme X.30, nous pouvons donner un minorant au nombre d'interrogations, au pire, que tout algorithme utilisant la stratégie X.2 utilise, car nous pouvons en déduire un minorant aux nombres de frontières possibles à chaque étape. Cependant, nous ne pouvons pas, *a priori*, utilisé ce lemme pour obtenir un majorant.

D'autre part, nous pouvons remarquer que ce minorant est valable quelque soit l'algorithme de recherche, c'est donc un minorant à l'optimum.

Nous allons, maintenant, donner une solution à $P^{Fr}_{opt.etp.cherc.}$. (en fait, il atteint à chaque étape le nombre minimal de frontières restantes possibles). Il correspond à un algorithme des milieux qui interroge le « bon » milieu. En effet, sur un segment nous pouvons assimiler les frontières non vides et non segments aux points. Donc, l'algorithme des milieux qui, au début, à pour but de minimiser le nombres de points restants, minimise aussi le nombre de frontières restantes à condition de prendre en compte la frontière vide. Le seul cas où nous devons « compter » la frontière vide est lorsque le coloriage est uniquement bleu ou rouge, nous sommes alors dans le cas de la figure X.36. Si le segment de couleurs inconnues est de longueur l alors il nous suffit de considérer qu'il est de longueur $l+1$ et de jouer sur un de ces milieux.

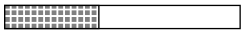


FIG. X.36. Cas où il faut jouer sur le « bon » milieu.

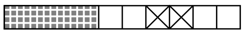


FIG. X.37. Les milieux possibles en considérant que le segment est de longueur 5

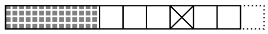
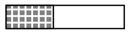


FIG. X.38. Les milieux possibles en considérant que le segment est de longueur $5+1$

Nous dirons qu'un segment est de type T_1 lorsqu'il est de la forme suivante :  et de type T_2 lorsqu'il est de cette forme :  . Les *conditions d'arrêt sur un segment* que nous considérons sont les suivantes : un point rouge et un point bleu à distance 1, deux points noirs, un point noir et un point de couleur rouge ou bleu et les deux extrémités de même couleur.

Algorithme X.8 (*Algorithme de recherche sur un segment de type T_1*)

Soit S un segment de type T_1. Les conditions d'arrêt sont celles du segment.

(1) Considérer le plus grand segment S de couleur inconnue.
(2) Interroger un milieu de S :
   (a) Si une des conditions d'arrêt est vérifiée, conclure ;
   (b) Sinon, recommencer l'étape 1 sur le nouveau segment.

Algorithme X.9 (*Algorithme dichotomique*)

algorithme dichotomique Soit un segment $[AB]$ de longueur l, considérons que $A=(0,0)$. Les conditions d'arrêt sont celles du segment.

(1) Interroger A.

(2) Considérer le plus grand segment S de couleurs inconnues.
   (a) S'il est de type T_1, lui appliquer l'algorithme X.8.
   (b) S'il est de type T_2, interroger le milieu de $S' = S \cup \{(l+1, 0)\}$.
      (i) Si une des conditions de terminaisons est vérifiée, conclure ;
      (ii) Sinon : recommencer l'étape 2.

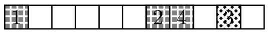


FIG. X.39. Un exemple de jeu utilisant l'algorithme dichotomique.

Nous allons maintenant montrer que l'algorithme dichotomique est optimal au pire des cas, pour cela il nous faut déterminer le nombre d'interrogations, au pire, qu'il utilise.

Théorème X.33

Sur un segment de longueur l l'algorithme dichotomique s'arrête en, au pire, $1 + \lfloor \log_2(l+1) \rfloor$ interrogations.

Démonstration : L'algorithme dichotomique n'est confronté qu'à des segments du type 1 ou 2, donc si à l'étape n avec n ≥ 1, le nombre de frontière possible est F_n à l'étape n+1, le nombre de frontières possibles sera inférieur à $\lceil \frac{F_n - 1}{2} \rceil$. Comme initialement, il y a $l + 3$ frontières, après une interrogation, il en reste un nombre inférieur à $l + 1$, l'algorithme s'arrête en moins de $1 + \lfloor \log_2(l+1) \rfloor$. Comme, a l'étape n si n ≥ 1, le donneur peut donner une couleur qui laisse $\lceil \frac{F_n - 1}{2} \rceil$ possibilités de frontières à l'étape n+1. L'algorithme s'arrête en, au pire, $\lfloor \log_2(l+1) \rfloor + 1$ interrogations. ■

Le théorème X.22, page 153, permet de montrer que si l n'est pas de la forme $2^n - 1$, l'algorithme dichotomique est optimal au pire. En fait, en comptant le nombre de frontières et, non le nombre de points, nous pouvons améliorer le minorant et ainsi montrer que l'algorithme dichotomique est optimal au pire. Le théorème X.22 repose sur le lemme X.21 (page 153), nous allons donc donner une version « frontière » de ce résultat, le lemme X.34.

Lemme X.34

Soit s un segment partiellement colorié avec au moins un point colorié et F l'ensemble des frontières possibles. Soit X un point de couleur inconnue alors :

$$\max \left\{ |F_R^X|, |F_B^X|, |F_N^X| \right\} \geq \left\lceil \frac{|F| - 1}{2} \right\rceil$$

Démonstration : Comme un point du segment est colorié, $|F_N^X| = 1$, de plus nous avons, d'après le lemme X.30, $|F_R^X| + |F_B^X| = |F| - 1$. D'où le résultat en appliquant le principe de la cage aux pigeons. ■

Nous obtenons, ainsi, le théorème suivant :

Théorème X.35

Tout algorithme de recherche de la frontière sur segment de longueur l utilise, au pire, au moins $1 + \lfloor \log_2(l+1) \rfloor$ interrogations.

Démonstration : Sur un segment de longueur l vierge, le nombre de frontières possibles est égal à $l + 3$. Après une interrogation, si le donneur donne la couleur noire, le nombre de frontières restantes est égal à 2, nous pouvons alors trouver la frontière en 3 interrogations. Sinon, le nombre de frontière est égal à $l+1$. En utilisant le lemme X.34, le nombre de frontières possibles est supérieur à 1 à l'étape $\lfloor \log_2(l+1) \rfloor$. Donc tout algorithme utilise au moins $\lfloor \log_2(l+1) \rfloor$ interrogations. ■

En corollaire, nous avons donc l'optimalité au pire de l'algorithme dichotomique.

Corollaire X.36

L'algorithme dichotomique est optimal au pire des cas sur un segment.

Commentaire 6 : Nous avons montré que l'algorithme dichotomique est optimal sur un segment. Cet algorithme est une version améliorée de l'algorithme des milieux. La modélisation en terme de frontière nous a permis de comprendre pourquoi l'algorithme des milieux n'est pas optimal au pire : il ne prend pas en compte la frontière vide.

Dans ce qui suit, nous utilisons cet algorithme pour modifier l'algorithme X.6, direction puis recherche d'un point noir, présenté page 146. Nous allons aussi évaluer son optimalité à l'aide du lemme X.30. L'algorithme direction puis recherche d'un point noir consiste à interroger les quatres coins d'un rectangle puis à rechercher sur un bord du rectangle un point de la frontière. Nous allons modifier légèrement cet algorithme, comme décrit dans le commentaire portant sur cet algorithme page 147. Voici l'algorithme que nous proposons :

Algorithme X.10 (*Algorithme coins puis dichotomie*)

algorithme coins puis dichotomie Sur un rectangle :

(1) Interroger les extrémités d'un bord de plus grande longueur ;
   (a) Si les deux extrémités sont noires, la frontière est le bord,
   (b) Si une seule extrémité est noire, interroger le point de la figure X.40 qui existe,
   (c) Si les deux extrémités sont de même couleur bleu ou rouge, passer à l'étape 2,
   (d) Sinon, passer à l'étape 3.

(2) Interroger un coin du rectangle non interrogé ;
   (a) Si ce coin est de la même couleur que les deux précédents, appliquer l'algorithme de dichotomie sur le bord de plus petite longueur contenant le coin non interrogé (en considérant que le premier coup a déjà été joué). Conclure,

(b) Si ce coin est de couleur noire, interroger le point le point de la figure X.42. Conclure,

(c) Sinon, appliquer l'étape 2 de l'algorithme dichotomique sur le segment d'extrémité de couleur différentes. Une fois un point noir trouvé, interroger le point de la figure X.41.

(3) Appliquer l'étape 2 de l'algorithme dichotomique au segment d'extrémités de couleur différentes. Une fois un point noir trouvé, interroger le point de la figure X.41 pour déterminer la direction de la frontière.

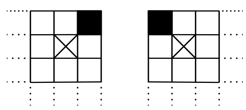


FIG. X.40. Cas 1b.

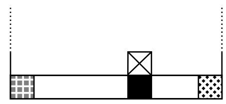


FIG. X.41. Cas 2c et 3.

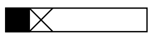


FIG. X.42. Cas 2b.

Les figures X.43 et X.44 représentent des exemples d'utilisation de cet algorithme. Nous pouvons remarquer que cet algorithme trouve la frontière vide en 5 interrogations sur ce rectangle, alors que l'algorithme non amélioré trouve la frontière vide en 4 interrogations. Toutefois, au pire, l'algorithme amélioré est plus rapide.

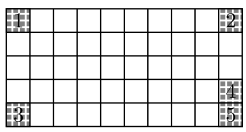


FIG. X.43. Frontière vide.

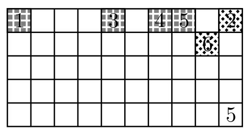


FIG. X.44. Frontière diagonale.

Nous allons évaluer le nombre d'interrogations, au pire, nécessaire pour que cet algorithme trouve la frontière sur un rectangle. Pour cela, il nous faut compter le nombre d'interrogations que l'algorithme X.8 utilise.

Lemme X.37

Sur un segment de type T_1 dont la longueur du segment de couleurs inconnues est l, l'algorithme X.8 s'arrête en $\lceil \log_2(l) \rceil$.

Démonstration : La longueur du segment de couleurs inconnues est l, donc il y a $l+1$ points de couleurs inconnues. Donc après une interrogation de l'algorithme le nombre de points de couleur inconnue est inférieur à $\lceil \frac{l}{2} \rceil$. Donc si $l = 2^k + 1$, l'algorithme trouve la frontière en $k+1$ étapes et si $l = 2^k$ l'algorithme trouve la frontière en k étapes. D'où le résultat. ■

Théorème X.38

Sur un rectangle de dimensions $l \times L$ avec $l \leq L$, l'algorithme X.10 trouve la frontière en, au pire, $\max\{3 + \lceil \log_2(L-2) \rceil, 4 + \lceil \log_2(l-2) \rceil\}$ *interrogations.*

Démonstration : Nous considérons que nous sommes dans le cas de figure X.45. Nous allons donner le nombre d'interrogations utilisées par l'algorithme en fonction de la frontière :

(1) si la frontière est vide, l'algorithme s'arrête en 4 interrogations ;
(2) si la frontière est verticale, l'algorithme s'arrête en $3 + \lceil \log_2(L-2) \rceil$;
(3) si la frontière est horizontale ou diagonale ou antidiagonal, l'algorithme s'arrête en $4 + \lceil \log_2(l-2) \rceil$.

■

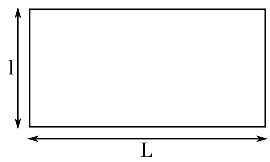


Fig. X.45. Longeur et largeur du rectangle.

Remarque : Nous pouvons remarquer que la preuve du théorème fournit un algorithme de défense maximisant le nombre d'interrogations d'un chercheur utilisant cet algorithme.

Dans le paragraphe qui suit, nous essayons d'évaluer l'optimalité au pire des cas de l'algorithme X.10, nous aurons besoin du lemme X.30, qui est l'analogue au lemme X.34 pour les rectangles.

Toutefois, ce lemme n'est pas forcémment construit en analogie avec le problème des segments. En effet, le problème que nous cherchons à résoudre dans le modèle frontière est de déterminer le point qui élimine le plus de frontières. Un moyen de résoudre ce problème est de déterminer le nombre M maximum de frontières que l'on peut éliminer au pire et ensuite un point qui élimine, au pire, M frontières. Une telle méthode de résolution nous amène donc à rencontrer le problème P_{max} : étant donné une coloration, quel est le nombre maximum de frontières qu'il est possible d'éliminer en une interrogation ? Une réponse partielle à ce problème est alors le lemme X.34.

Lemme X.39

Sur un rectangle muni d'une coloration partielle de cardinal au moins 1*, si F est le nombre de frontières possibles et X un point de R dont la couleur est inconnue alors nous avons* $\max\{F_R^X, F_B^X, F_N^X\} \geq \left\lceil \frac{F-4}{2} \right\rceil$.

Démonstration : En effet, d'après le lemme X.30, nous avons $F_N^X \bigsqcup F_R^X \bigsqcup F_B^X = F$ et $F_N^X \leq 4$. D'où le résultat. ■

Remarque : Le lemme X.39 est l'un des avantages du modèle frontière par rapport au modèle points En effet, dans le modèle points, nous n'avions pas su comment construire un analogue au lemme X.21 pour les rectangles. En utilisant une représentation en terme de frontières plutôt que de points, il est possible d'obtenir, pour les rectangles, un analogue au lemme X.34 qui est le lemme X.39.

Ce résultat peut être observé à la suite d'expérimentations pour résoudre P_{max}, en particulier lorsqu'elles ont pour objet le problème sur des instances de type segment.

Théorème X.40

Tout algorithme utilise, sur un rectangle de dimensions $l \times L$, au moins $\left\lfloor \log_2 \left(\frac{3L+3l+4}{2} \right) \right\rfloor$ interrogations au pire.

Démonstration : Soit F la nombre de frontières initiales alors après une interrogation, le nombre de frontières est égal à $F-4$ si le donneur ne donne pas la couleur noire. Supposons que F soit de la forme 2^k+1 alors le nombre frontières restantes est égal à 2^k-3 après une première interrogation. D'après le lemme X.39, le nombre de frontières après, la seconde interrogation, est supérieur à $\left\lceil \frac{2^k-7}{2} \right\rceil = 2^{k-1}-3$. Donc, après $k-1$ interrogations, le nombre de frontières est supérieur à $2^2-3=1$ frontière. Donc si $F=2^k+1$, tout algorithme utilise au moins $k-1$ interrogations.

Supposons maintenant que F soit de la forme 2^k alors le nombre de frontières restantes après une première interrogation est égal à 2^k-4 donc après la deuxième interrogation, le nombre de frontières restantes est supérieur à $2^{k-1}-4$ donc après $k-3$ interrogations, le nombre de frontières restantes est supérieur à 4 donc il faut au moins $k-2$ interrogations pour déterminer la frontière.

Comme la suite est croissante en fonction de son terme initial et que sur un rectangle de dimensiosn $l \times L$, le nombre de frontières initiales est égal à $3L+3l+5$, nous avons le résultat. ■

Remarque : Ici, nous pouvons améliorer ce minorant, en étudiant le moment où le nombre de frontières restantes est inférieur à 10. En utilisant des arguments de type cage aux pigeons, cela nous donne le tableau X.1 où F_n correspond au nombres de frontières restantes après n interrogations. Nous donnons dans la partie résolution partielle du problème, un minorant prenant en compte ce tableau.

Nous allons maintenant, utiliser le théorème X.40 et le théorème X.38 pour évaluer l'optimalité de l'algorithme direction puis recherche d'un point noir amélioré. Il nous faut donc comparer $\max\{3+\lceil\log_2(L-2)\rceil, 4+\lceil\log_2(l-2)\rceil\}$ avec $L \geq l$ et $\left\lfloor \log_2 \left(\frac{3L+3l+4}{2} \right) \right\rfloor$. Pour cela, nous différencierons deux cas, le cas où $(l,L) \in \{2^k+3, 2^{k+1}+2\}^2$ et le complémentaire de ce cas. En, effet dans le cas où $(l,L) \in \{2^k+3, 2^{k+1}+2\}^2$ alors $\max\{3+\lceil\log_2(L-2)\rceil, 4+\lceil\log_2(l-2)\rceil\} = 4+\lceil\log_2(l-2)\rceil$ et dans le cas contraire le maximum est égal à $3+\lceil\log_2(L-2)\rceil$.

Dans le cas où $(l,L) \in \{2^k+3, \ldots, 2^{k+1}+2\}^2$ alors le nombre d'interrogations, au pire, utilisé par l'algorithme est égal à $5+k$. De plus dans ce cas,

F_n	F_{n+1}
4	≥ 2
5	≥ 2
6	≥ 2
7	≥ 3
8	≥ 3
9	≥ 3
10	≥ 4
> 10	$\geq \left\lceil \frac{F_n-4}{2} \right\rceil$

TAB. X.1. Nombre de frontières possibles après n coups

la nombre d'interrogations nécessaire est supérieur à $\left\lfloor \log_2\left(\frac{6(2^k+3)+4}{2}\right)\right\rfloor = \left\lfloor \log_2\left(3(2^k+3)+2\right)\right\rfloor = \left\lfloor \log_2\left(3(2^k)+11\right)\right\rfloor$. Donc si $k \leq 3$, nous avons $\left\lfloor \log_2\left(3(2^k)+11\right)\right\rfloor = k+2$. Sinon, ce nombre est égal à $k+1$.

Dans le cas complémentaire, alors le nombre d'interrogations nécessaire est supérieur à $\left\lfloor \log_2\left(\frac{3L+4}{2}\right)\right\rfloor = \lfloor \log_2(3L+4) - \log_2(2)\rfloor = \lfloor \log_2(3L+4) - 1\rfloor = \lfloor \log_2(3L+4)\rfloor - 1$ et inférieur à $3 + \lceil \log_2(L-2)\rceil$. $3 + \lceil \log_2(L-2)\rceil - (\lfloor \log_2(3L+4)\rfloor - 1) = 4 + \lceil \log_2(L-2)\rceil - \lfloor \log_2(3L+4)\rfloor$. Il nous reste donc à minorer $\lfloor \log_2(3L+4)\rfloor - \lceil \log_2(L-2)\rceil$.

Nous avons $\lfloor \log_2(3L+4)\rfloor - \lceil \log_2(L-2)\rceil \geq 0$. En effet, $\lfloor \log_2(3L+4)\rfloor - \lceil \log_2(L-2)\rceil \geq \log_2(3L+4) - \log_2(L-2) - 2 = \log_2\left(\frac{3L+4}{4(L-2)}\right) > -1$, car $\frac{3L+4}{4(L-2)} > \frac{1}{2}$. Donc comme $\lceil \log_2(3L+4)\rceil - \lceil \log_2(L-2)\rceil$ est entier, $\lceil \log_2(3L+4)\rceil - \lceil \log_2(L-2)\rceil \geq 0$. De ce fait, nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème X.41

Sur un rectangle, l'algorithme coins puis dichotomie est optimal au pire à 4 interrogations près.

Remarque : Cet algorithme est optimal au pire à quatre coups près. Toutefois, même si le minorant ne nous donne pas l'optimalité, pour les carrés de taille 2, 3, 4 et 5 l'algorithme est optimal. Si le carré est de côté 2, 3 et 4, l'algorithme termine en 4 interrogations et il est impossible de faire moins que 4 interrogations, car il faut au moins 4 interrogations pour dire que la frontière est non vide. Pour le cas où le carré est de côté 5, l'algorithme trouve la frontière en, au pire, 5 interrogations. En essayant de contruire un algorithme qui termine en 4 interrogations, nous pouvons remarquer, qu'en particulier, il détermine la frontière vide en moins de 4 interrogations et de ce fait il est obligé d'interroger dans ce cas les 4 coins du carré. Nous allons utiliser cette remarque pour faire une preuve par l'absurde de l'impossibilité de déterminer la frontière en 4 interrogations. Supposons qu'il existe un algorithme qui s'arrête 4 interrogations. Donc, d'après la remarque précédente, l'algorithme commence par interroger un coin du carré. Si le donneur donne la couleur bleue à ce coin, alors l'algorithme interroge un autre coin du carré, si le donneur donne aussi la couleur bleue alors l'algorithme interroge un troisième point du carré. Si le donneur donne la couleur bleue alors l'algorithme va interroger le quatrième coin du carré.

Dans ce cas, si le donneur ne donne pas la couleur bleue mais la couleur rouge par exemple, alors plusieurs frontières sont possibles (voir figure X.46) donc l'algorithme ne peut pas déterminer la frontière en 4 interrogations, ce qui est contradictoire. Donc il n'existe pas d'algorithme s'arrêtant en 4 interrogations. En utilisant le théorème X.40, nous n'aurions pas pu montrer que l'algorithme était optimal au pire pour ces carrés.

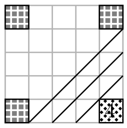


FIG. X.46. Frontières possibles.

Commentaire 7 : Nous avons vu que l'algorithme coins puis dichotomie est optimal à 4 coups près sur un rectangle quelconque et optimal pour de « petits » carrés. En utilisant le tableau X.1 (ce qui est fait dans la partie résolution partielle du problème), nous pouvons améliorer le minorant. Cependant, cela ne permet pas, d'obtenir l'optimalité de l'algorithme. Nous avons vu que pour certains carrés, en utilisant d'autres arguments, nous arrivions à prouver l'optimalité de l'algorithme. Pour des carrés, il est possible de conjectuer que cet algorithme est optimal au pire. De plus, cette conjecture peut être renforcée par le fait que cet algorithme est optimal à chacune de ces étapes (conception : local $\Rightarrow$ global).

2.4.1. *Conclusion sur le modèle frontières.* Le modèle frontières est basé sur une question identique au problème point mais avec des instances différentse, les points sont remplacés par des frontières. Le modèle frontières permet de trouver des minorants optimaux à une constante près. En particulier, il permet d'en obtenir un pour les rectangles, là où le modèle points n'est pas suffisant. De plus, pour le segment, il permet d'obtenir un minorant optimal.

Ce modèle permet aussi de construire des algorithmes optimaux en cardinalité de frontières à chaque étape. Toutefois, si la stratégie est simple à énoncer et à effectuer sur des « petits » rectangles, elle devient beaucoup plus difficile à mettre en pratique sur des « grands » rectangles. Nous n'avons donc pas su l'utiliser de manière « efficace » pour construire un algorithme de recherche.

2.5. Modéle par densité de zone. Nous pouvons aussi remarquer que, pour certaines colorations, par tout point ne passe pas le même nombre de frontières, ceci peut nous donner l'idée de jouer sur les zones du rectangles qui sont de plus haute densité[17]. Nous pouvons, facilement, remarquer que les zones les plus denses sont des points. De ce fait, jouer sur la zone la plus dense revient à jouer sur le point par lequel passe le plus de frontière. Nous pouvons observer que dans un grand nombre de situations, il n'y a pas unicité du point par lequel passe le plus grand nombre de frontières, il nous faut alors trouver une stratégie pour choisir le point que nous allons interroger. Nous pouvons, pour cela, remarquer que certaines frontières passent par

[17]rapport du nombre de frontières passant par la zone sur l'aire de la zone

plus de points que d'autres, par exemple une frontière coin passe seulement par un seul point. Une option est donc de décider de choisir un point, qui maximise le nombre de points touchés par les frontières « passant » par lui, ce qui pourrait réduire le nombre de points à considérer. Formellement, *le nombre de points touchés par les frontières passant par le point X* est : soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des frontières contenant le point X alors le nombre de points touchés par les frontières passant par X est :

$$1 + \sum_{f \in \mathcal{F}} (card(f) - 1)$$

.

Le problème auquel nous sommes confronté est $P^{densité}_{chercheur}$, construire un algorithme qui interroge à chaque étape le point de plus haute densité.

La stratégie est donc la suivante :

Stratégie X.3 (*Stratégie par densité de zone*)

Interroger à chaque étape, un point qui maximise le nombre de frontières passant par lui et qui maximise le nombre de points touchés par ces frontières.

Regardons sur un exemple ce qu'une telle stratégie pourrait donner.

Exemple X.42. Nous allons appliquer la stratégie précédente sur un carré de côté 2. La première interrogation devra être jouée au centre du carré, car par ce point passe 4 frontières qui touchent tous les points du rectangle. Supposons que ce point soit bleu, tous les points restants ont alors même valeur : il passe par chaque point 3 frontières qui touchent 5 points du carré. Nous choissisons d'interroger un coin, supposons qu'il soit bleu, alors les points qui maximisent sont les points A et B de la figure X.47. Par symétrie, que nous interrogions le point A ou le point B revient au même. Interrogeons le point A. Supposons que ce point soit de couleur bleu. Les point de plus haute densité sont alors les points B et C. Interrogeons le point C et supposons qu'il soit bleu. Tous les points restants ont alors la même valeur. Interrogeons alors un des coins et supposons qu'il soit également bleu alors en interrogeant ensuite l'autre coin, nous terminons en 5 interrogations. En utilisant la stratégie par densité de zone, nous avons terminé en 5 interrogations car nous avons choisit d'interroger de préférence les coins. Sans cela, nous aurions pu interroger 7 ponts du carré (voir figure X.48).

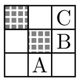


Fig. X.47. Points de plus haute densité.

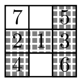


Fig. X.48. Sans donner de préférence aux coins.

Cet exemple montre donc que sur un carré de taille 3 cette stratégie n'est pas optimal[18]. Nous pouvons alors nous demander, si pour des carrés

[18]Sur un carré de taille 3, nous avons précédemment vu que nous pouvions trouver la frontière en 4 interrogations

de grande taille, cette stratégie peut fournir un algorithme optimale au pire. En expérimentant, nous pouvons observer que cette stratégie nous amène à jouer « au centre » du carré. La raison en est la suivante : si par les coins, il passe 4 frontières, elles ne touchent que $3c + 1$ points au maximum alors qu'un point central peut toucher jusqu'à $4c + 1$ points. Donc, cette stratégie ne permet pas de prendre en compte les frontières coins et vides « rapidement ». Ce qui nous fait penser que cette stratégie ne va pas être optimale.

2.6. Modèle par découpage. L'idée est, ici, de voir un rectangle comme une union disjointe de rectangles de dimensions inférieures, le but étant de se ramener à la recherche d'une frontière sur un de ces rectangles. Cette idée nous a été inspiré par les expérimentations que nous avons effectuée. Nous avons tenu à présenter ce modèle dans l'analyse mathématiques et non dans l'analyse a posteriori, car il fournit l'exemple d'un algorithme optimal à une constante près sur les rectangles tout en étant peu efficace lorsque les rectangles sont de petites dimensions. C'est donc un algorithme de recherche intéressant mais que nous aurions pu « zapper » en expérimentant seulement sur des « petits » cas.

Pour diviser un rectangle en sous-rectangles, nous pouvons utiliser des droites horizontales ou verticales, qui nécessitent, chacune, deux interrogations, comme sur la figure X.49. Il n'y a séparation que si le donneur donne la même couleur à ces points. Dans le cas où les points ne sont pas de même couleur, cela nous ramène à rechercher un point noir sur un segment, donc nous obtenons une zone de recherche plus « intéressante ». Dans le cas où les deux points sont de la même couleur, alors le rectangle est divisé en deux sous-rectangles sur lesquels nous recherchons une frontière qui ne peut pas être verticale si la séparation est horizontale et, horizontale si la séparation est verticale.

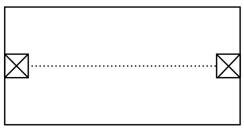


Fig. X.49. Droite qui permet de diviser un rectangle en sous-rectangle

Le but étant de se ramener à des zones les plus petites possibles, tout en utilisant le moins d'interrogations possibles, le plus efficace est de diviser le rectangle en quatre sous-rectangles de même taille en interrogeant les milieux des bords comme sur la figure X.50. Si ces quatres points sont bleus alors, sur chaque rectangle, les frontières sont d'un seul type. Il est alors nécessaire de déterminer dans quel sous-rectangle est la frontière. Pour cela, il suffit d'interroger les coins du rectangle, il est plus efficace d'interroger en premier les coins des « grands » rectangles. Si tous les coins sont de la même couleur alors la frontière est vide, sinon, si un coin est de couleur différente, la frontière est alors dans le rectangle qui admet ce coin.

Basé sur l'ébauche de stratégie précédente, nous proposons l'algorithme de recherche suivant :

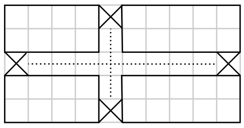


FIG. X.50. Découpage en quatres rectangles.

Algorithme X.11 (*Découpage*)

Sur un rectangle R :

(1) Interroger un milieu d'un plus petit bord ;

(2) Interroger le milieu du bord opposé correspondant ;

  (a) Si les deux points sont noirs, la frontière est le segment passant par ces deux points.

  (b) Si un point est noir, interroger le point de la figure X.51 et conclure.

  (c) Si les deux points sont de même couleur, passer à l'étape 3.

  (d) Sinon, rechercher un point de la frontière sur le segment, par exemple, en utilisant l'algorithme des milieux. Une fois un point trouvé, interrogé le point de la figure X.52.

(3) Interroger un milieu d'un bord de plus grande longueur ;

(4) Interroger le milieu du bord opposé correspondant ;

  (a) Si un point est noir, la frontière est le segment passant par ce point parrallèle au bord ;

  (b) Si les points sont de couleurs différentes, alors la frontière est nécessairement parralèle au bord de plus grande longueur. Il existe alors un segment dont les extrémités sont de couleurs différentes, considérer le plus petit de ces segments et chercher un point noir, en utilisant par exemple l'algorithme des milieux.

  (c) Sinon, les deux points sont de la même couleur que les deux premières interrogations, effectuer l'action suivante : tant que pas trouver un point de couleur différente, interroger les coins de R, en commençant par ceux dont le côté inclus dans le bord de plus petite taille est le plus grand. Si aucun point de couleur différente n'est trouvé, la frontière est vide. Sinon, passer à l'étape 5.

(5) Jouer comme sur un segment, en utilisant, par exemple l'algorithme des milieux.

Nous allons, maintenant, essayer de trouver le nombre d'interrogations au pire utilisées par cet algorithme sur un rectangle de dimensions $L \times l$.

FIG. X.51. Cas 2b

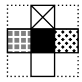


FIG. X.52. Cas 2d

Théorème X.43

Sur un rectangle de dimensions $L \times l$ avec $L \geq l$, l'algorithme s'arrête en $\max\left\{7 + \left\lfloor \log_2\left(\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1\right)\right\rfloor, 3 + \lfloor \log_2(L-1) \rfloor, 8\right\}$ *interrogations.*

Démonstration : Nous considérons que les bords de plus grande taille sont horizontaux.

- Si la frontière est verticale ou diagonale non incluse dans un quart de rectangle ou antidiagonale non incluse dans un quart de rectangle, l'algorithme trouve la frontière en, au pire, $3 + \lfloor \log_2(L-1) \rfloor$ interrogations. $2 + \lfloor \log_2(L-1) \rfloor$ pour déterminer un point noir, puis une interrogation pour déterminer sa direction.
- Si la frontière est horizontale, l'algorithme trouve la frontière en $4 + \left\lfloor \log_2(\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil - 1) \right\rfloor$.
- Si la frontière est vide, l'algorithme termine en 8 interrogations.
- Si la frontière est diagonale ou antidiagonale incluse dans un quart de rectangle. Il faut, 6 interrogations au pire, pour savoir si la frontière est dans un rectangle de plus grande taille. Si la frontière est dans un rectangle dont le côté vertical est de plus grande taille, alors il faut encore, au pire, rajouter $\left\lfloor \log_2(\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil - 1) \right\rfloor$. Si elle est dans un rectangle dont le côté vertical est de plus petite taille, alors il faut rajouter $1 + \left\lfloor \log_2(\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1) \right\rfloor$ interrogations. Le nombre d'interrogation, au pire, est donc de $7 + \left\lfloor \log_2(\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1) \right\rfloor$. ■

En utilisant le théorème X.40, nous pouvons évaluer l'optimalité au pire de l'algorithme de découpage.

Théorème X.44

L'algorithme de découpage est optimal au pire à 5 *interrogations près sur un rectangle de dimensions non nulles.*

Démonstration : Dans les cas où le maximum est égal à 8 alors comme sur n'importe quel rectangle de dimensions non nulles, il faut au moins 4 interrogations, nous avons le résultat. Sinon, dans un premier temps, nous comparons $\left\lfloor \log_2\left(\frac{3L+3l+4}{2}\right) \right\rfloor$ et $7 + \left\lfloor \log_2\left(\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1\right) \right\rfloor$. Nous avons : $7 + \left\lfloor \log_2\left(\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1\right) \right\rfloor - \left\lfloor \log_2\left(\frac{3L+3l+4}{2}\right) \right\rfloor \leq 8 + \log_2\left(\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1\right) - \log_2\left(\frac{3L+3l+4}{2}\right)$ or

$$8 + \log_2\left(\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1\right) - \log_2\left(\frac{3L+3l+4}{2}\right) = 8 + \log_2\left(\frac{2\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil - 2}{3L+3l+4}\right)$$

et $3L + 3l + 4 \geq 6l + 4 > 0$ d'où :

$$8 + \log_2\left(\frac{2\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil - 2}{3L+3l+4}\right) \leq 8 + \log_2\left(\frac{1}{6}\right) < 6$$

Il nous reste à comparer, $\lfloor \log_2\left(\frac{3L+3l+4}{2}\right)\rfloor$ et $3 + \lfloor \log_2(L-1)\rfloor$. Nous avons :

$$3 + \lfloor \log_2(L-1)\rfloor - \left\lceil \log_2\left(\frac{3L+3l+4}{2}\right)\right\rceil \leq 4 + \log_2\left(\frac{2L-2}{3L+3l+4}\right)$$

Or $3L + 3l + 4 \geq 3L + 4$ d'où :

$$4 + \log_2\left(\frac{2L-2}{3L+3l+4}\right) \leq 4 + \log_2\left(\frac{2}{3}\right) < 4 \qquad \blacksquare$$

Commentaire 8 : Cet algorithme est optimal à une constante près sur les rectangles, toutefois, sur des petits rectangles, par exemple le carré de côté 3, l'algorithme termine en 8 interrogations au pire alors que, comme nous l'avons déjà vu, nous pouvons finir en, au pire, 4 interrogations. Nous utilisons donc le double d'interrogations et interrogeons quasiment tous les points du carré. Cet algorithme est peu efficace pour les « petits » cas mais assez efficace pour les « grands ». De ce fait, en expérimentant sur des « petits » cas, nous pouvons être amené à rejeter l'idée de cette stratégie, considérant qu'elle n'est pas optimale.

3. Analyse mathématique de la situation pour le donneur

Comme pour le chercheur, nous nous limitons à l'étude de $P_{donneur}$ sur des parties de $\mathbb{Z}^2$ de forme rectangulaire. Le problème $P_{donneur}$ est un problème de recherche de solution. Lorsque nous expérimentons pour résoudre ce problème, la validation de la stratégie va consister à s'assurer que les couleurs que nous donnons sont cohérentes. De ce fait, le donneur rencontre le problème $P_{cohérent}$, comment donner des couleurs de manière cohérentes ? Ce problème peut être résolu en résolvant, un problème que le chercheur rencontre dans le modèle point, le problème $P_{enveloppe}$ (voir page 148). Les stratégies présentées dans la partie sur le chercheur pour résoudre $P_{enveloppe}$ peuvent aussi être utilisées par $P_{donneur}$.

D'autre part, pour résoudre $P_{cohérent}$, le donneur peut développer d'autres stratégies que celles issues de $P_{enveloppe}$, comme celle de choisir une frontière possible et de donner la couleur de la case en fonction de cette frontière.

L'objectif pour le donneur est de construire un algorithme de défense qui retarde le plus possible la découverte de la frontière par le chercheur. Il peut développer 2 types d'algorithme de défense, les algorithmes de défense locaux qui ne contrent qu'un seul algorithme de recherche et les algorithmes de défense globaux qui contrent tout algorithme de recherche. Comme signaler précédemment, trouver un algorithme de défense local revient à chercher la frontière qui maximise le nombre d'interrogations d'un algorithme de recherche donné. Dans cette partie, nous nous intéresserons qu'à des algorithmes de défense globaux[19]car *a priori*, le donneur n'a pas connaissance de l'algorithme de recherche. Pour simplifier les notations, les algorithmes de défense globaux seront dorénavant appeler algorithme de défense. $P_{donneur}$ met en jeu les 3 problèmes suivants :

(1) construire un algorithme ;
(2) prouver que quelque soit la manière dont l'opposant joue, l'algorithme répond de manière non contradictoire ;

(3) évaluer l'optimalité de l'algorithme (P_{evalD}).

En particulier, comme pour le chercheur, P_{evalD}, va nécessiter de préciser l'optimalité que nous considérerons et va se faire en considérant les problèmes :

– $P_{nombreD}(A)$: quel est le nombre d'interrogations minimum que le chercheur effectue lorsqu'il joue contre l'algorithme de défense A.
– P_{-}.

3.1. Définition de l'optimalité. Comme pour le chercheur cette définition peut commencer par la mise en place d'une relation d'ordre dont le but est de définir ce qu'est un algorithme de défense « meilleur » qu'un autre. Nous proposons les relations, analogues à celles du chercheur (voir page 136), suivantes :

(1) au pire des cas : $A < B$ lorsque au pire des cas, A fait effectuer moins d'interrogation que B ;
(2) locale : $A < B$ lorsqu'il existe un algorithme pour lequel, A fait effectuer moins d'interrogations que B ;

Comme pour le chercheur, la seconde relation n'est pas satisfaisante, car nous pouvons avoir des cas où $A < B$ et $B > A$. Toutefois, cette définition pose le problème de l'existence d'un algorithme de défense « ultime » qui serait optimal contre tout algorithme de recherche. Nous avons vu qu'un algorithme de recherche « ultime » ne pouvait exister, toutefois nous ne savons pas si un algorithme de défense « ultime » existe.

L'optimalité que nous étudierons est celle au pire des cas, un algorithme de défense optimal sera donc un algorithme de défense qui, au pire des cas, fait effectuer le maximum d'interrogations au chercheur. Nous formalisons cette définition de la manière suivante :

Définition X.45 (Optimalité au pire des cas d'un algorithme de défense). Soit R un rectangle, S un algorithme de défense sur R et $\mathcal{A}$ l'ensemble des algorithmes de recherche sur R alors nous dirons que S s'arrête en X interrogation lorsque $X = \min\{A(S)|A \in \mathcal{A}\}$.

Nous posons S, l'ensemble des algorithmes de défense sur R, un algorithme de défense S_0 sera, donc, optimal sur R s'il vérifie :

$$\min\{A(S_0)|A \in \mathcal{A}\} = \max_{S \in \mathsf{S}} \min\{A(S)|A \in \mathcal{A}\}$$

Nous pouvons reformuler la définition précédente de la manière suivante :

Définition X.46. Un algorithme de défense S s'arrête en X interrogations si les 2 conditions suivantes sont réunies :

(1) quelque soit l'algorithme de recherche utilisé par le chercheur, il utilise au moins X interrogations en jouant contre S ;
(2) il existe un algorithme de recherche qui utilise S interrogations en jouant contre S.

[19]De plus, nous avons déjà donné dans l'analyse mathématique du chercheur quelques algorithmes de défense locaux optimaux, en particulier nous avons vu qu'ils pouvaient se déduire des preuves comptant le nombre d'interrogations utilisées, au pire, par un algorithme de recherche.

Nous allons maintenant revenir à la résolution du problème de construction d'un algorithme de défense. Les algorithmes que nous allons proposés vont être issus des différents modèles que nous avons présentées dans l'analyse mathématique du chercheur. Dans un premier temps, nous allons donner une stratégie qui ne fait pas intervenir un des modèles précédents, elle consiste à répondre en essayant d'anticiper le nombre de coups que chaque couleur va impliquer pour le chercheur. Par exemple, elle met en jeu ce type de raisonnement : « Si je donne la couleur bleue il peut terminer en trois interrogations et si je donne la couleur rouge en 2 interrogations alors je vais donner la couleur rouge. ». Nous appelerons ce type de stratégie, *stratégie par défaut*. Cette stratégie consiste à effectuer un arbre des possibilités et choisir la branche de l'arbre qui est la plus longue. La difficulté est de construire l'arbre, car il faut envisager à chaque sommet un très grand nombre de possibilités, sans simplification dû à la convexité (qui ne sont pas simples à mettre en place). Par exemple pour un carré de taille 5, pour donner la couleur de la deuxième interrogations du donneur, il faut envisager 3 sommets pour les couleurs puis pour chaque couleur, envisager 23 sommets correspondant aux 23 autres points du carré. Cette stratégie est donc difficilement applicable. Cependant, elle peut être appliquée localement lorsque le nombre de possibilité est faible. Cette stratégie est optimale mais difficilement utilisable.

Nous allons maintenant donner des stratégies et des algorithmes issus des modèles que nous avons présentés pour le chercheur :

3.2. Modèle géométrique. La modélisation géométrique de la situation consiste, pour le chercheur, à utiliser les propriétés géométriques de la droite pour trouver la frontière. Ici, nous utilisons ces propriétés pour contrer le chercheur. Comme pour le chercheur, nous proposons un algorithme dont l'idée directrice est issue du lemme X.3.

3.2.1. *Stratégie : retarder l'apparition d'un point noir.* La stratégie est de retarder le plus longtemps possible l'apparition d'un point de la frontière. L'algorithme ne doit, donc, jamais dire noir sauf si c'est l'unique possibilité. Donc l'algorithme doit choisir entre la couleur rouge et la couleur bleue à chaque interrogation, le problème est donc, comment faire ce choix ?

Nous allons donner un exemple de construction d'un tel algorithme. Nous observons, dans un premier temps, que lorsqu'un point rouge et un point bleu sont présents alors un point de la frontière est présent « entre » ces deux points, ce qui donne au chercheur d'avoir une information supplémentaire. La stratégie va donc être de donner le plus longtemps possible la même couleur, bleue par exemple. Cette stratégie est en particulier très efficace lorsque le chercheur utilise une stratégie n'interrogeant pas les coins « rapidement ».

Une des failles de la stratégie apparaît lorsque le chercheur interroge les 4 coins. Nous pouvons alors soit abandonnée cette stratégie, soit la modifiée pour qu'elle s'adapte à ce cas, nous pouvons la modifier simplement en donnant la couleur rouge au quatrième coin. Il nous reste à trouver comment jouer en présence d'un point rouge et d'un point bleu. D'après ce qui précède, l'apparition d'un point de couleur rouge ne se fait que lorsque les trois premiers coins sont bleus et que le chercheur interroge le quatrième coin, nous sommes dans un cas analogue à celui de la figure X.53.

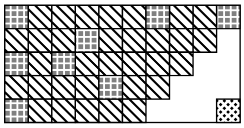


FIG. X.53. 3 coins bleus et un coin rouge.

Nous pouvons alors observer que les frontières restantes ont toutes la même direction. Cette situation est alors équivalente à jouer sur un segment (voir figure X.28) : nous pouvons associer à chaque frontière un point du segment. Le point de vue pris, modélisation par plus grande zone ou modélisation par frontière (qui sont dans ce cas équivalentes) nous permettent alors de choisir la couleur à donner aux points interroger.

Nous pouvons aussi rencontrer un autre cas qui pose problème qui est celui représenté par la figure X.54. Pour garder l'algorithme cohérent, nous devons donc prendre en compte le cas où un point bleu est à distance 1 du quatrième coin.

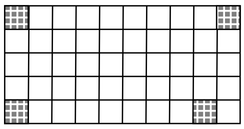


FIG. X.54. Un autre cas à prendre en compte.

Un algorithme qui vérifie ces conditions est le suivant :

Algorithme X.12 (*Tout le temps bleu*)

(1) Si 3 coins sont bleus et un coin de couleur inconnue :
   (a) Si le point interrogé est un coin :
      (i) Si aucun point bleu n'est à distance 1 de ce coin, donner la couleur rouge ;
      (ii) Si un point bleu est à distance 1, donner la couleur bleue ou noire.
   (b) Sinon, donner la couleur bleu.

(2) Si au plus 2 coins sont bleus, donner la couleur bleue ;

(3) Si 3 coins sont bleus et un coin rouge :
   (a) Si le point interrogé est un point de couleur inconnue appartenant à l'enveloppe convexe des points bleus ou rouge, donner la couleur des point de l'enveloppe convexe ;
   (b) Sinon, donner la couleur en fonction du nombre de frontières restantes ou du nombre de points de couleur inconnue, par exemple en utilisant un algorithme du type algorithme des milieux.

Cet algorithme est non contradictoire, car quelque soit la manière dont joue le chercheur, il le confronte à un des cas de la figure X.55. Dans chacun de ces cas, l'algorithme répond de manière non contradictoire.

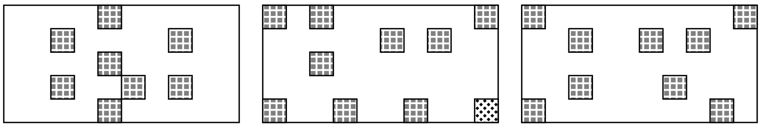


FIG. X.55. Les différents cas auxquels est confronté l'algorithme tout le temps bleu.

Cet algorithme n'est pas optimal à cause du cas de la figure X.54. En effet, si le chercheur interroge trois coins puis un point à distance 1 du quatrième coin, il peut trouver la frontière en 5 interrogations quelque soit les dimensions du rectangle[20]. Comme pour ces cas, nous pouvons, « presque », nous ramener à un jeu sur des segments, pour réparer cette « faille », nous pouvons dans les cas de la figure X.56, donner les couleurs comme dans l'étape 3b.

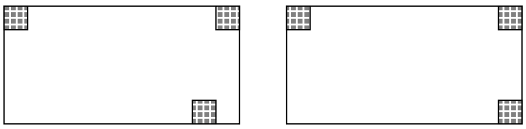


FIG. X.56. Les cas où il est préférable d'utiliser l'algorithme des milieux

Cet algorithme possède aussi une seconde « faille », présente sur des rectangles dont la longueur est « très » supérieure à la largeur et pour lesquels le chercheur utilise un algorithme qui interroge les coins. Par exemple, dans le cas d'un rectangle de dimensions $4 \times n$, un chercheur utilisant un tel algorithme trouve la frontière en 5 interrogations quelque soit la valeur de n (Voir figure X.57). Cette faille ne peut être réparée sans changer la stratégie à la base de l'algorithme.

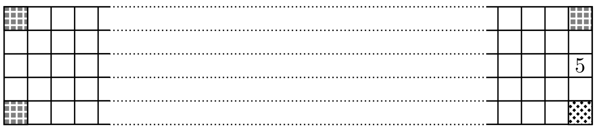


FIG. X.57. Deuxième « faille ».

Commentaire 9 : Cet algorithme possède des « failles » qui pourraient être utilisées pour finir beaucoup plus rapidement que « nécessairement ». Cependant, ces failles ne sont pas du même type : nous pensons, qu'il est probable, que la première « faille » ne soit trouvable qu'en connaissant l'algorithme de défense alors que la deuxième faille, du fait de l'importance des coins, est « facilement » trouvable lorsque le rectangle utilisé pour jouer possède une longueur de taille « largement » supérieure à celle de la largeur.

[20] nous avons vu que le nombre d'interrogations croît avec les dimensions du rectangles et tend vers l'infini

Concernant l'idée de retarder le plus possible l'apparition d'un point noir, l'exemple de la figure X.58 montre que ce n'est pas toujours la meilleure stratégie à adopter. En effet, en donnant la couleur bleu ou rouge au point A, il ne reste qu'une seule frontière possible alors qu'en donnant la couleur noire, il reste trois possibilités de frontières.

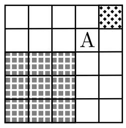


FIG. X.58. Noir, c'est mieux.

Cet exemple, nous amène à penser qu'il faut aussi prendre en compte la direction de la frontière.

3.3. Modèle points. Ici, l'idée pour le donneur est de donner les couleurs en fonction du nombre de points de couleurs inconnues que cela va laisser. Nous avons proposé, dans la partie concernant le chercheur, la stratégie X.1, appelée stratégie d'élimination des points, qui consiste à interroger le point qui élimine le plus de points de couleur inconnue. Nous avons vu que cette stratégie n'est que peu utilisable en pratique, car nous ne savons pas, de manière non gloutonne, trouver un point qui maximise cette élimination. La stratégie associée pour le donneur est la suivante :

Stratégie X.4 (*Maximisation des points de couleur inconnue*)

Donner la couleur qui maximise le nombre de points de couleur inconnue.

Par rapport à celle du chercheur, cette stratégie est plus facile à mettre en place, car il suffit de compter, en fonction du point interrogé par le chercheur, le nombre de points de couleur inconnue restants.

Nous sommes donc confronté au problème $P^{points}_{opt.etp.don.}$, construire un algorithme de défense qui à chaque étape interroge le point maximisant le nombre de points inconnus. Cela nous amène donc à nous poser la question, cette optimalité par étape entraîne-t'elle une optimalité au pire des cas ?

Pour résoudre $P^{points}_{opt.etp.don.}$, nous avons utilisé $P_{enveloppe}$. En particulier, nous utiliserons le théorème X.19 page 149 pour déterminer quels sont les points rouges et bleus, puis de les compter. Nous illustrons cela dans l'exemple suivant.

EXEMPLE X.47. Considérons la situation de la figure X.59, nous allons voir comment choisir la couleur à donner au point A pour maximiser le nombre de points de couleur inconnue. Sur les figures X.60, X.61 et X.62, les points de couleurs claires sont les points qui se colorent en fonction de la couleur de A. Pour arriver à ces résultats, nous avons appliqué le théorème X.19. Il ne nous reste qu'à compter les points de couleur inconnue restants. Si A est bleu, ce nombre est égal à 62. Si A est rouge, il est égal à 50 et si A est noir, il est égal à 0. La couleur à donner est donc la couleur bleue.

Cet exemple montre aussi que si E_R est l'ensemble des points rouges et X un point de couleur inconnue alors si X est rouge, l'ensemble des points

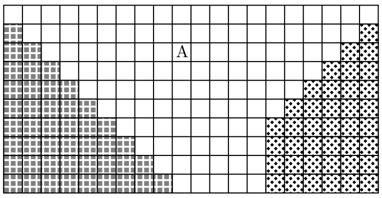


FIG. X.59. La situation.

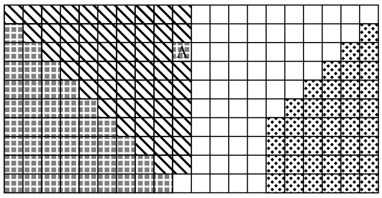


FIG. X.60. Si A est bleu.

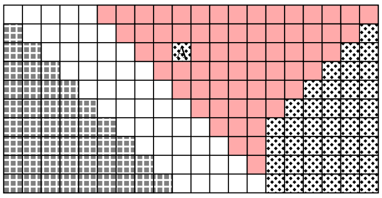


FIG. X.61. Si A est rouge.

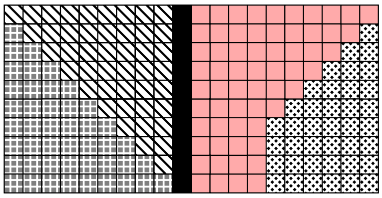


FIG. X.62. Si A est noir.

rouges n'est pas, généralement, seulement composé de l'enveloppe convexe de $X \cup E_R$. Contrôler la convexité n'est donc pas suffisant pour déterminer le cardinal de l'ensemble des points d'une même couleur. Nous ne connaissons pas d'autre technique que celle présentée dans l'exemple X.47 pour trouver la couleur qui maximise le nombre de points inconnus.

Remarque : Sur un segment, nous pouvons obtenir en fonction de la position du point interrogé le nombre de points inconnus par une formule explicite, car nous ne jouons que sur des segments qui sont du type de ceux de la figure X.17 page 153. Cette formule calcul simplement la distance du point à l'ensemble des points bleus et rouges ou à une extrémité. De plus, en jouant sans connaître la formule, il est facile de déterminer la couleur à donner au point, par exemple cela peut être « visuellement » évident comme sur la figure X.63. Les seuls cas, où ce n'est pas « visuellement évident », sont ceux où le point est proche du milieu. Dans ces cas, si la ligne n'est pas trop grande, nous pouvons nous en sortir en comptant les points « à la main ».

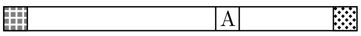


FIG. X.63. Evidence visuelle.

La stratégie de maximisation des points n'est pas nécessairement, localement, la plus efficace. En effet, dans la situation de la figure X.64, si le chercheur joue son second coup sur le point A, alors s'il est bleu, il reste 2 points inconnus et s'il est rouge, il reste 3 points inconnus. Nous donnons donc la couleur rouge au point A. Si le chercheur joue ensuite sur le point B alors il trouve la frontière. Donc en donnant la couleur rouge à A, le chercheur finit en trois interrogations. Alors que si nous donnons la couleur bleue au point A, il faut au moins 2 interrogations supplémentaires au chercheur pour trouver la frontière. Le chercheur trouve donc la frontière en au moins quatre interrogations si A est bleu.

FIG. X.64. Contre-exemple.

Cet exemple montre aussi que la stratégie ne fournit pas nécessairement un algorithme optimale au pire, puisque dans la situation de la figure X.64, le nombre minimum d'interrogation est 3.

Toutefois, cet algorithme peut contrer optimalement[21]des algorithmes de recherche comme, par exemple, l'algorithme dichotomique ou l'algorithme direction puis recherche amélioré.

Sur un rectangle, nous ne savons pas évaluer le nombre d'interrogations minimal pour le chercheur. Par contre, pour les segments, la preuve du théorème X.22 page 153 permet d'évaluer le nombre minimal d'interrogations nécessaire que tout algorithme de recherche doit utiliser si le donneur utilise l'algorithme de maximisation des points. Cela donne le théorème suivant :

Théorème X.48

Si le donneur utilise l'algorithme de maximisation des points sur un segment de longueur l alors le chercheur utilise au minimum $\lfloor \log_2(l) \rfloor + 1$ interrogations.

En comparant ce résultat avec l'optimal sur un segment (corollaire X.36 page 173), nous pouvons nous rendre compte que cet algorithme de défense est optimal au pire à une constante près sur des segments.

Commentaire 10 : Cet algorithme est utilisable humainement tant que les dimensions des rectangles ne sont pas trop grandes, il utilise également le théorème X.19. De plus, nous pouvons nous aider de l'aspect visuel pour donner les couleurs.

D'autre part, il n'est pas optimal contre tout algorithme de recherche mais seulement contre certains d'entre eux. Du point de vue expérimental, pour mettre en défaut cet algorithme, il peut donc être utile que le chercheur n'utilise pas un algorithme de recherche contre lequel il est optimal.

3.3.1. *Conclusion sur la modélisation en terme de points.* Cette modélisation donne une stratégie de défense au donneur, qu'il peut utiliser, « concrètement », sur des petits rectangles ou sur des segments. Cependant, la mise au point d'un algorithme qui compte le nombre de points inconnus et qui ne soit pas trop « coûteux » semble nécessaire pour pouvoir utiliser « efficacement » cette stratégie sur de grands rectangles.

Cette stratégie, qui ne permet pas, nécessairement, d'obtenir un algorithme de défense optimal au pire, se trouve aussi être particulièrement efficace contre certains algorithmes de recherche comme l'algorithme coins puis dichotomie ou l'algorithme dichotomique.

3.4. Modèle frontières. Le problème, $P^{fr}_{opt.etp.don.}$ est le suivant : construire un algorithme qui laisse le plus de frontières possibles à chaque étape.

[21]Cela nécessite, généralement, de faire le « bon » choix sur la couleur à donner lorsque le nombre de points restants, si le point est rouge et si le point est bleu, est le même.

Comme pour les problèmes $P_{opt.etp}$ que nous avons identifié, il pose la question de savoir si cette optimalité par étape va entraîner une optimalité au pire.

$P^{fr}_{opt.etp.don.}$ donne la stratégie suivante :

Stratégie X.5 (*Maximisation des frontières*)

Donner la couleur qui maximise le nombre de frontières restantes.

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, cette stratégie semble plus « facile » à utiliser que son analogue pour le chercheur, car elle ne nécessite que de compter le nombre de frontière restantes en fonction de la couleur d'un seul point, celui qui est interrogé. Pour effectuer cela, nous pouvons compter le nombre de frontières verticales, puis horiozontales, puis diagonales, puis antidiagonales et enfin vides possibles. Voici, un exemple d'application de cette stratégie :

Exemple X.49. Considérons la situation de la figure X.65, nous allons voir comment choisir la couleur à donner au point A, pour maximiser le nombre de frontières restantes. Si le point A est bleu (figure X.66) le nombre de frontière restantes est égal à 6. Si A est rouge (figure X.67) le nombre de frontières restantes est 4 et si A est noir, il est de 1. Donc nous allons donner la couleur blue au point A.

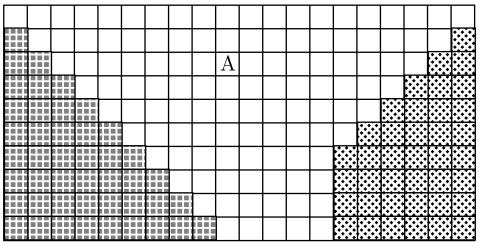


Fig. X.65. La situation.

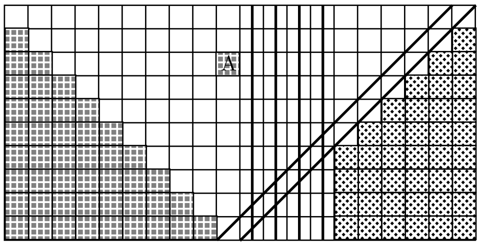


Fig. X.66. Si A est bleu.

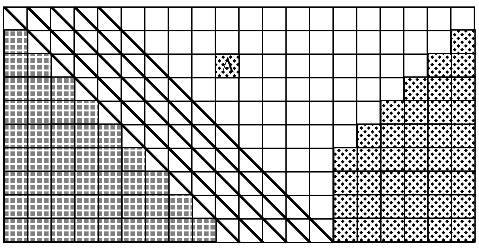


Fig. X.67. Si A est rouge.

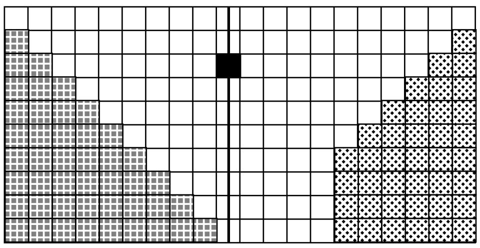


Fig. X.68. Si A est noir.

Remarque : Nous pouvons remarquer que la situation de l'exemple précédent est la même que celle de la figure X.59 et que les deux stratégies imposent de jouer bleu, Ceci pose le problème de savoir si la stratégie de maximisation de points est équivalente à la stratégie de maximisation de frontières. L'exemple de la figure X.69 prouve que ceci est faux. En effet, si le chercheur interroge le point A, le donneur doit donner la couleur bleue pour maximiser le nombre de frontières restantes et la couleur rouge pour maximiser le nombre de points de couleur inconnue.

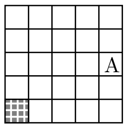


FIG. X.69. Les stratégies ne sont pas équivalentes.

L'intérêt du modèle frontière est qu'il permet l'évaluation du nombre d'interrogations minimum qu'un chercheur doit effectuer si le donneur joue avec un algorithme utilisant la stratégie de maximisation du nombre de frontières restantes, il nous suffit de faire une preuve analogue à celle du théorème X.40 page 176. Nous obtenons alors le résultat suivant :

Théorème X.50

Sur un rectangle de dimensions $l \times L$, un chercheur doit effectuer, au moins, $\left\lfloor \log_2\left(\frac{3L+3l+4}{2}\right)\right\rfloor$ interrogations pour déterminer la frontière lorsque le donneur utilise un algorithme utilisant la stratégie de maximisation des frontières.

Remarque : Un algorithme de défense qui oblige tout algorithme de recherche à effectuer X interrogations, implique que tout algorithme de recherche utilise au moins X interrogations pour trouver la frontière. La réciproque est fausse.

Sur un segment, les stratégies de maximisation du nombre de points et du nombre de frontières sont proches. De ce fait, la remarque page 189 s'applique aussi. Sur des segments, un algorithme utilisant la stratégie de maximisation du nombre de frontières est optimal. Pour des rectangles, nous ne savons pas si cette stratégie peut amener à construire un algorithme de défense optimal au pire.

EXEMPLE X.51. Soit C un carré de côté 12, nous considérons un algorithme de recherche qui commence par interroger un coin puis, si ce point n'est pas noir, le point $X_2 = (3, 12)$. Nous allons donner les couleurs en utilisant la stratégie de maximisation des points. Pour la première interrogation, nous pouvons indifféremment donner la couleur bleue ou la couleur rouge. Nous choisissons de donner la couleur bleue. Si X_2 est de couleur bleue, il reste 34 frontières et si X_2 est de couleur noire, il en reste 35. Nous devons donc donner la couleur rouge au point X_2. Le chercheur peut alors trouver la frontière en utilisant quatre interrogations supplémentaires (voir figure X.70, les numéros donnent l'ordre dans lequel les cases sont interrogées). Si nous donnons la couleur rouge à X_2, le chercheur peut trouver la frontrière en 6 interrogations.

Dans le cas où nous donnons la couleur bleue à X_2. Si le donneur interroge le point X_3 (figure X.71) et que nous lui donnons la couleur bleue alors il faut au moins 7 interrogations pour déterminer la frontière. Donc, ici, il aurait été préférable de donner la couleur bleue au point X_2.

Cependant, nous ne savons pas si cet algorithme est optimal au pire, en effet, ce n'est pas parce qu'il n'est pas localement optimal contre un algorithme de recherche qu'il n'est pas optimal au pire[22].

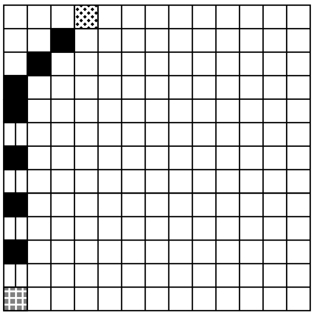


FIG. X.70. Si X_2 est rouge.

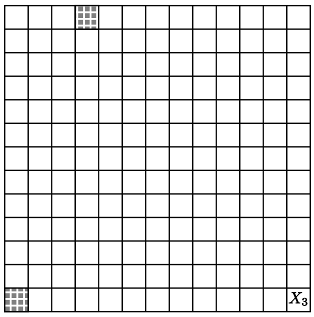


FIG. X.71. Si X_2 est bleu.

Sur un segment, l'algorithme contre de manière optimale l'algorithme dichotomique ou encore l'algorithme des milieux. Sur des carrés de longueur de côté c, l'algorithme contre l'algorithme X.10 coins puis dichotomie de manière optimale. En voici la preuve lorsque $c > 2$, les deux premières interrogations sont jouées sur deux coins adjacents, l'algorithme de défense va donner la même couleur à ces deux points (bleu et bleu laisse $3c + 1$ frontières alors que bleu et rouge en laisse $3(c - 1)$). Ensuite, l'algorithme interroge un troisième coin du carré, si ce coin est bleu alors le nombre de frontières restantes est $c + 1$ et si le troisième coin est rouge, il est de $2(c - 1)$. Donc l'algorithme de défense donne la couleur rouge au troisième coin. L'algorithme de recherche interroge alors les points milieux du plus petit segment de type T_2. Pour maximiser le nombre de coups du chercheur, il suffit de donner à chaque fois la couleur qui laisse le plus de points du segment de couleur inconnue. Comme dans ce cas, le nombre de frontières passant par chaque point est le même, il y a une correspondance entre le nombre de frontières et le nombre de points, de ce fait l'algorithme de défense maximise le nombre de coups du chercheurs.

3.4.1. *Conclusion sur le modèle frontières.* Cette modélisation a permis l'apparition d'un algorithme de défense assez efficace puisqu'il est optimal contre les algorithmes de recherche que nous avons présentés. Nous avons exhibé un exemple sur lequel, il n'est pas localement optimal. Nous avons aussi vu qu'évaluer le nombre d'interrogations minimum que tout algorithme de recherche doit effectuer contre un algorithme de défense donne un minorant au nombre d'interrogations que tout algorithme de recherche doit effectuer et ainsi un minorant à l'optimum.

[22]Pour montrer que l'algorithme de défense n'était pas optimal, il nous aurait fallu exhiber un algorithme de défense pour lequel tout algorithme de recherche est obligé d'effectuer au moins 7 interrogations

3.5. Modèle par densité de zone. Pour le chercheur, l'idée était d'interroger les points les plus denses, sachant que nous avions défini le point le plus dense comme celui par lequel passe le plus grand nombre de frontières et pour lesquels le nombre de points touchés par ces frontières est le plus élevé. Nous n'avons pas trouvé d'algorithme de défense reprenant cette idée, cependant, nous avons vu que cette stratégie admettait un point faible qui est le fait qu'elle n'interroge les coins que tardivement. De ce fait, cela peut nous amener à imaginer une stratégie utilisant cette faille, cela donne une stratégie similaire à celle ayant conduit à l'algorithme tout le temps bleu.

3.6. Modéle par découpage. Ici, la stratégie est de découper le rectangle en sous-rectangle de dimensions inférieures. Nous n'avons pas trouvé de stratégie de défense reprenant cette idée. De plus, comme un algorithme de recherche issu de cette stratégie est optimal à une constante près, il n'admet pas de faille. Il n'est donc pas possible de trouver un algorithme de défense faisant exploser le nombre d'interrogations utilisées.

4. Bilan de l'analyse mathématique

Dans l'analyse mathématique de *checher la frontière* nous avons cherché à mettre en avant les différents problèmes que nous pouvons être amener à rencontrer en essayant de résoudre ce problème. En particulier, nous avons pu voir que nous pouvions développer plusieurs modèles de la situation comprenant des représentations et des théories différentes.

Chacun de ces modèles nous a amené à mettre en place des algorithmes de recherche et de défense ce qui nous a permis de voir que certains d'entre-eux sont plus propices que d'autres à l'élaboration d'algorithme de recherche ou d'algorithme de défense. Une des difficultés majeures que nous avons rencontrée est le passage de la stratégie à l'algorithme. En effet, ce passage nécessite la recherche de points vérifiant certaines propriétés relativement à une coloration, problèmes que nous n'avons pas su résoudre en dehors des « petits » cas. Cela ne nous a pas empêcher de déterminer un algorithme de recherche optimal au pire à une constante près, l'algorithme coins puis dichotomie.

Chaque modèle vient avec ses propres problèmes, toutefois certaines questions sont communes à plusieurs modèles, c'est le cas de la question de construction d'un algorithme optimal par étape, $P_{opt.etp.}$. La relation entre $P_{opt.etp.}$ et $P_{chercheur}$ ou $P_{donneur}$ est alors à étudier. En particulier, nous avons vu qu'une solution à $P_{opt.etp.}$ ne fournit pas nécessairement un algorithme optimal au pire.

De plus, nous pouvons être confronté au problème P_{loc} : est ce qu'un algorithme localement optimal contre un algorithme, est un algorithme optimal ?. Nous avons vu que, généralement, c'est faux. D'autre part, nous avons aussi pu voir qu'un algorithme optimal n'est pas localement optimal contre tout algorithme (s'il l'était alors il serait ultimement optimale et il n'existe pas d'algorithme ultimement optimal).

Nous avons vu que le problème *chercher la frontière* était relié à de nombreux autres problèmes. En particulier, des problèmes issus de changement de représentations : géométriques, points, frontières, densité et découpage.

Les changements de représentations points et géométriques peuvent se voir comme un passage au dual, nous ne cherchons plus à minimiser le nombre d'interrogations mais à maximiser le nombre de frontière ou de points éliminés. Il apparaît alors que le problème de minimisation fournit un majorant à l'optimum et le problème de maximisation, un minorant.

Chaque représentation-problème nous a ainsi amené à utilisé des objets spécifiques ou transversaux à ces représentations. En particulier des stratégies et des algorithmes de recherche/défense.

4.1. Stratégies et algorithmes.

4.1.1. *Chercheur.* Concernant les algorithmes et les stratégies de recherche que nous avons présentés, nous avons pu voir que nous avons eu des difficultés à passer de la stratégie à l'algorithme de recherche, en particulier pour le modèle points. La difficulté majeure est le fait que bien souvent ces algorithmes nécessitent l'utilisation d'un sous-algorithme non-constant qui, s'il n'est pas coûteux, en terme d'interrogations est coûteux en temps lorsque nous l'effectuons « à la main » et coûteux en opérations élémentaires si nous voulons le programmer. Par contre, ce sont des algorithmes applicables « à la main » sur de petits objets. Le modèle géométrique est intéressant dans ce cas, car nous avons pu construire un algorithme de recherche optimal à une constante près et ne nécessite pas d'utiliser de sous-algorithme non-constant, il est donc à la fois effectuable « à la main » et programmable sans problème.

Sur des segments, nous avons pu obtenir un algorithme de recherche optimal au pire en utilisant le modèle frontières. Cet algorithme peut aussi être obtenu en utilisant le modèle points, à condition de choisir la bon « milieu ». De plus, nous avons vu différents types d'optimalités pour les algorithmes de recherche, il y a l'optimalité au pire, qui est celle par défaut que nous avons utilisée, il y aussi une optimalité relative à l'algorithme de défense et il y a une optimalité « par étape », qui consiste à dire qu'un algorithme est optimal lorsque toutes ses étapes sont effectuées de manière optimale.

4.1.2. *Donneur.* Concernant l'aspect défensif de la situation, comme pour l'aspect offensif, les difficultés sont causées par le passage de la stratégie à l'algorithme de défense. L'utilisation de sous-algorithmes non-constant en est la principale cause. Toutefois, pour les algorithmes de défense, ces algorithmes sont moins coûteux. Le modèle le plus intéressant est celui en terme de frontières, car il permet de se poser le problème du nombre minimum de frontières restantes, la résolution de ce problème peut nous mener à la découverte d'un minorant efficace à l'optimum, ne dépendant que des dimensions du rectangle. En fait, en changeant les territoires à considérer, ce modèle permet d'obtenir un minorant sur n'importe quel terrain, pour peu que nous sachions minorer le nombre de frontières passant par ce terrain. Nous n'avons pas réussi à utiliser le modèle points pour obtenir un minorant sur des rectangles, cependant, il fournit un minorant optimal à une constante près pour les segments.

Remarquons que les objets du modèle géométrique, très intéressants, pour trouver un algorithme de recherche, ne nous ont pas permis d'obtenir un minorant élevé puisque le seul que nous avons obtenu est égal au nombre de coins du rectangles. Toutefois, ce minorant (ou des arguments analogues à sa preuve) peut être utiliisé pour effectuer des preuves d'optimalité de certains algorithmes comme l'algorithme coins puis dichotomie sur des » petits« carrés.

Nous avons choisi de considérer une définition de l'optimalité d'un algorithme de défense, au pire. Toutefois, cette définition ne prend pas en compte l'efficacité de l'algorithme contre un algorithme de recherche donné. Pour combler ce manque, nous pouvons imposer une optimalité plus forte, en forçant l'algorithme de défense à être efficace contre tout algorithme de recherche, c'est-à-dire, en cherchant des algorithmes qui maximisent, quel que soit l'algorithme de recherche, le nombre d'interrogations effectuées, nous l'avons appellé l'optimalité ultime. Nous avons vu qu'un tel algorithme n'existe pas.

D'autre part, la construction d'un algorithme de recherche ou d'un algorithme de défense nous a amené à rencontrer le problème $P_{enveloppe}$, problème que nous rattachons à la notion de convexité.

4.2. Convexité. La convexité apparaît à travers le problème $P_{enveloppe}$ que rencontre à la fois le chercheur et le donneur. Elle joue un rôle imporant à tous les niveaux, elle est utilisée par le chercheur et pour le donneur pour construire des stratégies d'expérimentation. Toutefois, il n'est pas nécessaire de résoudre $P_{enveloppe}$ pour développer des algorithmes de recherche efficace, ni pour mettre au point des algorithmes de défense.

Elle est aussi utilisée de manière implicite[23]par l'algorithme coins puis dichotomie, qui est l'algorithme le plus efficace que nous avons présenté. En effet, cet algorithme utilise le théorème coins-directions que nous pouvons voir comme un résultat de convexité.

La convexité permet aussi de généraliser le problème en prenant comme instance du problème des ensembles de cases convexes. Ce nouveau problème est traité dans les annexes.

Enfin, nous avons aussi effectuer des preuves des résultats que nous avons énoncés, en particulier, nous pouvons repérer que certains types de preuves sont communs à plusieurs modèles.

4.3. Preuves-éléments de validation. Les preuves que nous avons effectuées concernent plusieurs types de résultats :

– algorithme de recherche : arrêt d'un algorithme (induction), nombre d'interrogations utilisées,
– nombre d'interrogations minimum que doit effectuer tout algorithme de recherche : étude de suites récurrentes ;
– étude de la convexité : enveloppe convexe, dénombrement de frontières, dénombrement de points ;
– recherche de points optimaux ;
– algorithme de défense : nombres d'interrogations minimum qu'il fait effectuer à tous les algorithmes et à un algorithme donné ;

[23]La convexité permet de généraliser le problème en élargissant les instances du problèmes. En particulier, jouer sur des convexes est une généralisation pertinente, car elle permet de généraliser les résultats obtenus sur le rectangle. Dans l'annexe, nous présentons une généralisation de l'algorithme de recherche direction puis dichotomie à n'importe quel convexe. Cette généralisation utilise de manière importante les propriétés de la convexités. Nous montrons que cet algorithme est optimal à 4 interrogations près pour tout convexe.

– évaluation de l'optimalité d'un algorithme ou d'une stratégie : comparaison de formules entières, exhibition de contre-exemples.

Pour chaque type de résultat, différents types de preuves ont été mis en place. Pour prouver que tout algorithme de recherche termine en, au moins, X interrogations, nous avons montré qu'à chaque étape d'un algorithme de recherche soit le nombre de frontières, soit le nombre de points de couleur inconnue, diminue d'une certaine valeur qu'on ne peut pas dépasser.

Pour le nombre d'interrogations utilisées au pire par un algorithme de recherche nous avons évalué, en fonction de chaque type de frontière, le nombre d'interrogations nécessaire, au pire, et pris le maximum.

Pour l'arrêt d'un algorithme, nous avons principalement utilisé des résultats intermédiaires issus de la convexité mais aussi des propriétés liées à l'induction. De plus dans certains cas, nous avons utilisé une technique similaire à celle qui évalue le nombre d'interrogations, au pire, utilisées par l'algorithme : nous avons montré que pour chaque type de frontière, l'algorithme détermine toutes les frontières de ce type.

Enfin, nous présentons des schémas de conceptions possibles concernant ce problème, nous avons séparé $P_{chercheur}$ et $P_{donneur}$ pour que les schémas soient lisibles. $P_{chercheur}$ et $P_{donneur}$ sont dans une relation de **dualité**.

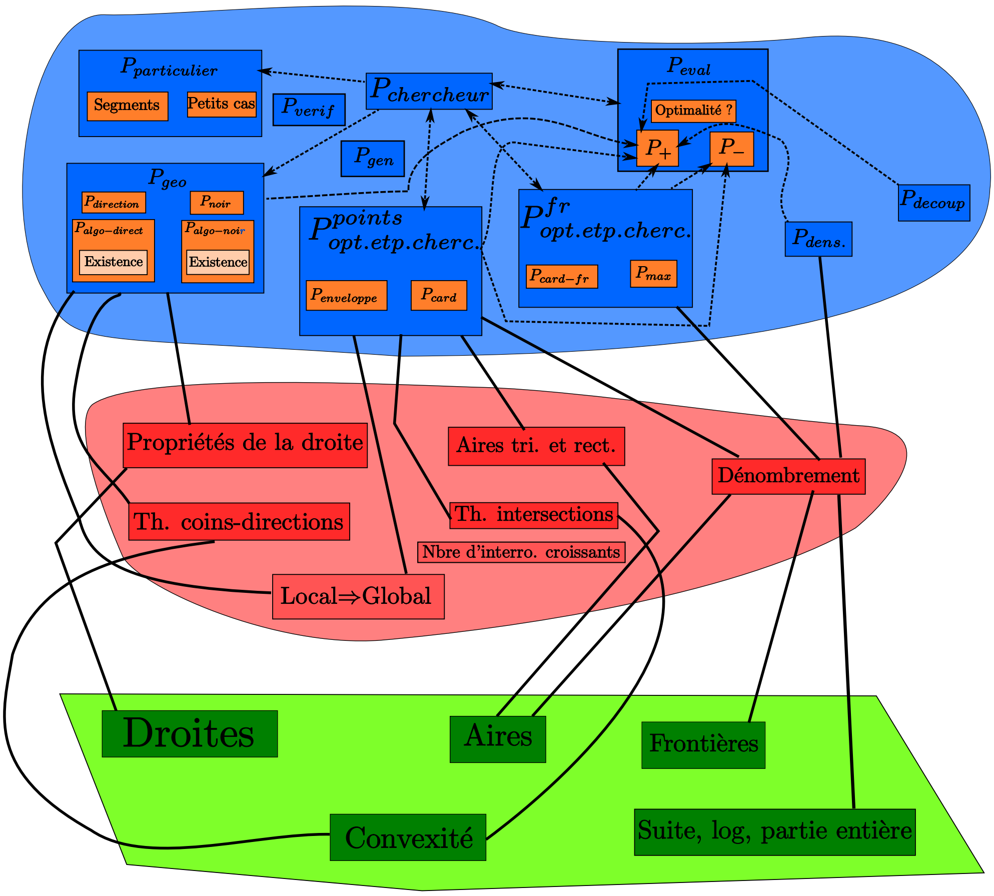


FIG. X.72. Schéma d'une conception de $P_{chercheur}$.

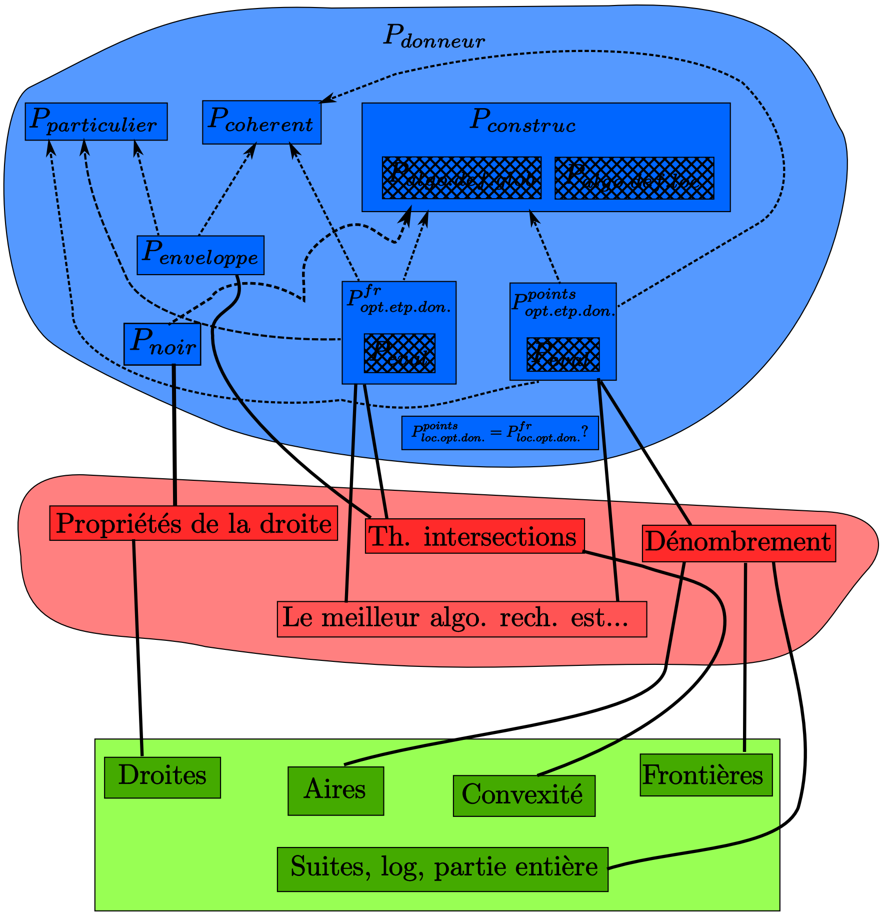


FIG. X.73. Schéma d'une conception de $P_{donneur}$.

CHAPITRE XI

Analyse didactique de *Chercher la frontière*

1. Conditions de dévolution de la situation

Nous faisons l'hypothèse que les connaissances requises pour la compréhension du jeu et pour pouvoir y jouer sont des connaissances que tout élève du primaire ou supérieur possède. De ce fait, il n'y a pas à posséder de connaissances particulières pour pouvoir jouer au jeu.

La dévolution ne concerne pas seulement la dévolution du jeu mais aussi celle du problème mathématique associé, que nous découpons en deux sous-problèmes : le problème du chercheur et le problème du donneur. Ces problèmes peuvent apparaître comme duaux. La dévolution de ces problèmes met en jeu les mêmes connaissances que la dévolution du jeu. D'autre part, il n'est pas certain que la dévolution de ces 2 problèmes se fasse de la même manière.

Pour faciliter la dévolution, nous proposons de commencer par la situation 0, c'est-à-dire celle où le donneur n'est pas autorisé à bouger la frontière, puis d'introduire le problème du donneur lors d'une autre séance.

2. Espace problème et obstacles

Nous allons dans cette sous-section étudier l'espace problème du concept-problème *chercher la frontière.*

2.1. Espace problème. Premièrement, si nous expérimentons pour construire un algorithme de recherche, la validation du produit de la stratégie consiste en s'assurer qu'un ensemble de cases coloriées engendre une unique frontière. Cela va ainsi nous amener à rencontrer les problèmes identifiés dans l'analyse mathématique, $P_{vérif}$ (s'assurer que la stratégie trouve la frontière) et P_{gen} (s'assurer qu'une configuration de cases engendrent une unique frontière), qui sont des sous-problèmes du problème de construction d'un algorithme de recherche. Concernant le donneur, le problème est de s'assurer que les couleurs données sont cohérentes, $P_{cohérent}$, c'est-à-dire de s'assurer qu'il existe à chaque étape une frontière possible.

Un outil de résolution de P_{gen}, la convexité, peut devenir objet d'étude et ainsi s'étudier par elle-même. En particulier, l'étude de la convexité peut mener à une généralisation du problème à toute forme convexe (voir annexe ? ? ? ? ? ?).

Le problème $P_{cohérent}$ peut être résolu par l'étude du problème $P_{enveloppe}$ (déterminer l'enveloppe convexe).

D'autre part, de manière générale, la construction d'un algorithme peut nous amener à résoudre le problème suivant : pour quelles instances cet algorithme est-il optimal ? L'objet du problème devient alors l'étude d'un algorithme. Ce problème peut permettre de résoudre le problème initial pour certaine instance.

Comme nous l'avons vu dans l'analyse mathématique, P_{eval} nécessite de définir l'optimalité du problème. La résolution de P_{evalC} (pour un algorithme de recherche) se fait en résolvant $P_{nombreC}$ et P_-, tandis que la résolution de P_{evalD} (pour un algorithme de défense) se fait en résolvant $P_{nombreD}$ et P_+.

Une réponse à $P_{nombreC}$ donne une réponse à P_+, tandis qu'une réponse à $P_{nombreD}$, donne une réponse à P_-. Une preuve de l'optimalité d'un algorithme de recherche s'obtient en résolvant $P_{nombreC}$ et en cherchant à obtenir une réponse à P_- égale à celle de $P_{nombreC}$.

Nous avons vu que les algorithmes peuvent être issus d'une activité de modélisation. Chacun de ces modèles vient avec de nouveaux problèmes, en particulier des problèmes d'existence de points ou d'ensemble de points vérifiant certaines propriétés :

- dans le modèle-frontières, nous sommes confrontés au problème de la recherche du point minimisant le nombre de frontières restantes ;
- dans le modèle-points, nous recherchons un point minimisant le nombre de points restants ;
- dans le modèle par densité de zone, nous cherchons un point minimisant la densité de la zone restante ;

Nous définissons ainsi de nouvelles optimalités, cela pose des problème de construction d'un algorithme optimal (à chaque étape) par rapport à ces nouvelles optimalités, $P^{points}_{opt.etp.}$ et $P^{fr}_{opt.etp.}$.

Nous sommes ainsi confrontés à des problèmes du type $P_{opt.etp.}$, ce qui pose le problème de savoir si l'optimalité par étape entraîne une optimalité au pire. La relation entre $P_{opt.etp.}$ et $P_{chercheur}$ ou $P_{donneur}$), est donc potentiellement un obstacle transversal.

Revenons maintenant sur les différents modèles identifiés. Ils comportent chacun de nouveaux problèmes qui peuvent être identiques au niveau des questions comme le problème d'existence ou de détermination d'un point vérfiant certaines propriétés. Voici une liste de tels problèmes :

(1) quel est le nombre minimum de points inconnus/frontières restants que nous pouvons obtenir avec X interrogations ?

(2) existe-t-il un algorithme qui atteint ce minimum à chaque interrogation ? Si oui, est-il optimal ?

(3) étant donné une coloration partielle, quel est le point qui minimise le nombre de points inconnus/frontières restants ?

(4) comment construire un algorithme qui minimise le nombre de points/frontières à chaque interrogation et quel est alors le meilleur point initial à considérer ?

(5) quel est le nombre minimum de points inconnus/frontières restants après une interrogation ?

(6) étant donné une coloration partielle, existe-t-il un point qui « divise » le nombre de points inconnus/frontières estantes par deux ?

(7) entre plusieurs points éliminant le nombre maximum de points/frontières, lequel choisir ?

Pour le modèle-points, lors de l'analyse mathématique, nous n'avons pu répondre à ces questions que de manière très partielle, seul le cas des segments a été entièrement traité. Si un élève décide de s'attaquer à ces questions, l'enseignant peut donc proposer à l'élève de résoudre $P_{chercheur}$ avec pour instance des segments. En travaillant sur des segments, à travers ce modèle, cela peut mener l'élève vers l'algorithme dichotomique et lui permettre d'obtenir un minorant efficace. La résolution du problème, *quel est le cardinal de l'enveloppe convexe de X points ?*, peut permettre de résoudre les problèmes de cette liste. Toutefois, en dehors des segments, il nous apparaît comme complexe. De ce fait, mis à part pour ce cas, nous n'avons pas réussi à établir de relation entre $P_{chercheur}$ et $P^{points}_{loc.opt.cherc.}$.

Concernant le modèle-frontières, dans l'analyse mathématique nous avons apporté des réponses à certains de ces problèmes – en particulier ceux concernant le dénombrement de frontières – qui permettent d'obtenir un minorant efficace pour les rectangles. Cependant, nous n'avons pas réussi à construire un algorithme minimisant, à chaque interrogation, le nombre de frontières restantes, sans mettre en place un sous-algorithme très « coûteux » en calculs intermédiaires. De plus, nous n'avons pas réussi à évaluer le nombre d'interrogations, au pire, utilisées par un tel algorithme. Ce problème est difficile car il est relié à (6), problème auquel nous ne savons pas répondre. Pour résoudre ces problèmes, il nous faut aussi considérer les problèmes suivants :

(1) quel est le nombre de frontières possibles sur un rectangle vierge ?
(2) comment compter le nombre de frontières restantes ?

La résolution de $P^{fr}_{opt.etp.cherc.}$ et du problème, *quel est le nombre maximal de frontières que nous pouvons éliminer en une interrogation ?*, permettent d'obtenir des réponses à P_+ et P_- très proches. La résolution de ces problèmes est le moyen le plus efficace que nous avons trouvé pour évaluer l'optimum. Nous pouvons donc considérer que nous sommes en présence d'un obstacle épistémologique : l'absence du modèle-frontières ne permet pas une résolution « avancée » du problème.

Pour la modélisation géométrique et la modélisation en densité de zone, nous avons déterminé les problèmes spécifiques suivants :

(1) Le modèle géométrique pose les problèmes suivants :
   (a) comment déterminer un point noir ?
   (b) comment déterminer l'orientation de la frontière sans connaître de point noir ?
   (c) comment déterminer l'orientation de la frontière en connaissant un point noir ?
   (d) comment déterminer la frontière sur un segment dont les extrémités sont de couleur différente ?
   (e) pouvons nous trouver des conditions de minimalités géométriques ?

   Les réponses aux problèmes (a), (c), (d) ne sont pas difficiles à trouver. Le problème (b) est déjà plus complexe, à cause de l'exemple des frontières vides ou coins, le théorème coins-directions peut apparaître comme une observation d'une suite d'expériences avec une stratégie coins. Les réponses à ces problèmes permettent de construire un algorithme de recherche efficace et de prouver que l'algorithme trouve la frontière.

Le problème (e) est difficile, le seul argument de minimalité que nous avons trouvé est : le plus petit ensemble de points qui engendre le rectangle est de cardinalité 4, il faut donc au moins 4 interrogations pour trouver la frontière vide donc au moins 4 interrogations au pire. Cet argument donne un minorant efficace sur des rectangles de petite dimension mais pas lorsque les dimensions augmentent. De ce fait, il apparaît difficile pour des élèves d'aller plus loin que cela concernant le problème (e).

(2) Le modèle par densité de zone pose les questions suivantes :
   (a) comment définir la densité ?
   (b) quelle est la zone de plus haute densité ?
   (c) entre plusieurs points ayant la plus haute densité, comment choisir le point à interroger ?

   Nous pouvons nous rendre compte assez rapidement que cette modélisation ne permet pas d'obtenir d'algorithme de recherche optimal au pire, car elle incite à interroger le centre du rectangle. Ces questions perdent donc de l'intérêt dans l'optique de résoudre P_{fr}. Il peut donc être intéressant que des élèves ayant choisi ce modèle émettent cette observation. De plus, ces problèmes sont résolubles sur des cas particuliers.

Pour le modèle par découpage, nous n'avons pas identifié de problème spécifique autre que la recherche du découpage optimal. Ce modèle est intéressant, car il fournit un exemple d'algorithme peu efficace sur les rectangles de petite dimension mais optimal au pire à une constante près sur tous les rectangles.

De plus, comme nous l'avons vu dans l'analyse mathématique, le problème initial propose des cas particuliers accessibles auxquels nous pouvons être confrontés en spécifiant les instances, c'est-à-dire en fixant les dimensions du rectangle.

D'autre part, nous pouvons être amené à nous poser le problème de l'optimalité locale d'un algorithme, P_{loc} : est-ce que cet algorithme A est localement optimal contre cet algorithme B ?

En particulier, si A est localement optimal contre B, cela pose le problème de savoir si A est optimal et donc de l'étude de la relation entre P_{loc} et $P_{chercheur}$ ou $P_{donneur}$.

2.2. Obstacles, difficultés et problèmes ou représentations manquants. Nous récapitulons les obstacles et difficultés que nous avons identifiés.

2.2.1. *Obstacles épistémologiques.* Nous avons trouvé les obstacles épistémologiques suivants :

– La relation entre $P_{nombreC}$ et P_- ou la relation entre $P_{nombreD}$ et P_+. Une réponse de $P_{nombreC}$ n'est pas une réponse à P_-, de même qu'une

réponse à $P_{nombreD}$ n'est pas une réponse à P_+. Ces relations sont donc basées sur le concept de condition nécessaire et suffisante.
- La relation entre $P^{point}_{opt.etp.cherc}$ ou $P^{fr}_{opt.etp.cherc}$ et $P_{chercheur}$. Comme nous l'avons vu, une solution d'un $P_{opt.etp.cherc.}$ n'est pas nécessairement une solution de $P_{chercheur}$. Ces relations sont basées sur le concept d'optimalité locale/globale. Nous avons le même obstacle pour le donneur.
- Il y a un obstacle concernant l'optimalité locale et la relation entre P_{loc} et $P_{chercheur}$ (ou $P_{donneur}$). Comme nous l'avons vu, un algorithme localement optimal n'est pas nécessairement optimal et un algorithme optimal n'est pas localement optimal contre tout algorithme.

2.2.2. *Difficultés.* Nous avons identifié les difficultés suivantes à l'aide de l'espace problèmé du concept-problème :
- la relation entre P_{eval} et P_+ ou P_-.
- la relation entre $P_{nombreC}$ et P_+ (ou P_{evalD}) ou entre $P_{nombreD}$ et P_- (ou P_{evalC}) qui peut être absente.
- la relation entre $P^{fr}_{opt.etp.cherc}$ et $P^{points}_{opt.etp.cherc}$ avec des segments.

2.2.3. *Problèmes ou représentations manquants.* A priori, tous les problèmes ou représentations peuvent être manquants. De ce fait, nous avons décidé de ne prendre en compte que ceux qui apparaîssent comme nécessaires à la résolution du problème. Nous avons identifiés les problèmes suivants :
- L'absence du problème P_- pour le chercheur ou du problème P_+ pour le donneur.
- L'absence des problèmes du modèle-frontières. Dans l'analyse mathématique, ce modèle s'est avéré le seul nous permettant de déterminer une réponse à P_- pour des rectangles optimale à une constante près[1]. De plus, en annexe est présentée une résolution partielle de *chercher la frontière* sur des convexes dans laquelle est utilisée le modèle-frontières pour obtenir un minorant optimal à une constante près. Ce modèle est donc particulièrement efficace et son absence peut être un frein important à la résolution du problème.

3. Savoirs en jeu et optionnels

Même si l'objectif principal[2]d'une SiRC n'est pas la transmission d'un savoir notionnel, chaque situation met en jeu des savoirs notionnels qui apparaissent comme requis durant le processus de résolution du problème. De ce fait, en nous plaçant dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), nous pourrions considérer que ces savoirs correspondent aux savoirs notionnels visés lors d'une situation a-didactique. De ce fait, certains éléments de la théorie des situations didactiques apparaissent comme pertinents pour effectuer l'analyse didactique des savoirs notionnels en jeu dans une SiRC. Ces savoirs notionnels seront appelés *savoirs en jeu.*

D'autres savoirs notionnels peuvent être en jeu dans les SiRC, mais n'apparaissent pas comme nécessaires ; ce sont les choix fait par les élèves par

[2]Principal dans le sens où la situation n'est pas construite pour travailler une notion particulière mais pour permettre le travail de la démarche scientifique et du raisonnement. Toutefois, le travail de la démarche scientifique ne peut se faire sans le développement de nouveaux objets mathématiques, d'où la présence de savoirs notionnels engendrés par la

rapport aux problèmes qu'ils vont tenter de résoudre, aux modèles qu'ils vont développer, aux stratégies qu'ils vont employer... qui vont permettre (ou non) leurs apparitions. Nous les appelons *savoirs optionnels*. Ce sont les savoirs dont l'apparition est due à une conception particulière du problème.

Dans un premier temps, notre analyse va tenter d'identifier les savoirs en jeu et les savoirs optionnels de la situation *Chercher la frontière* en nous basant sur l'analyse mathématique de la situation. Ces savoirs sont ceux que nous identifions comme pouvant être constitutifs des invariants de la conception sur le problème. En particulier, la conception sur le problème que nous avons développée nous permet de relier ces savoirs à des problèmes et des représentations.

D'autre part, nous donnerons, sous la forme d'un commentaire, un exemple de démarche expérimentale permettant de provoquer l'apparition de certains savoirs que nous avons identifié.

4. Savoirs notionnels

Comme nous l'avons vu dans l'analyse mathématique, le problème, que cela soit pour le chercheur ou le donneur, se découpe en trois sous-problèmes : la construction d'un algorithme, la vérfication qu'il fait « bien » son travail et l'évaluation de son optimalité. De ce fait, dans cette section, nous classons les savoirs notionnels en fonction de leur caractère optionnel et en fonction des sous-problèmes précédents.

4.1. Savoirs en jeu. L'analyse mathématique nous permet d'identifier les savoirs en jeu. Ce problème met en jeu des savoirs liés à **l'optimisation discrète** et à **l'algorithmique**.

4.1.1. *Construction d'un algorithme.* Les savoirs algorithmiques portent sur la **formulation/écriture d'un algorithme** ainsi que sur les types de preuves utilisables pour prouver qu'un algorithme s'arrête. Ces savoirs sont des invariants associés à une représentation algorithmique du problème. La construction de l'**algorithme dichotomique** est aussi en jeu à travers une résolution du problème sur les segments.

D'autre part, des savoirs géométriques liés aux **propriétés de la droite** et à la **convexité**, essentiellement la notion d'**enveloppe convexe** (vue de manière géométrique), peuvent entrer en jeu pour résoudre le problème, *est-ce que l'algorithme s'arrête ?* Ces savoirs sont liés aux représentations géométriques du problème, droite et convexité.

4.1.2. *Vérification.* Pour vérifier qu'un algorithme fait « bien » son travail, le chercheur peut utiliser les **propriétés de la droite** : par 2 points passe une unique droite et une unique droite est engendrée par un point et une direction. Pour montrer qu'un algorithme est correct, il nous suffit donc de montrer que l'algorithme permet d'obtenir l'une de ces propriétés.

Pour le donneur, il est amené à étudier le problème $P_{cohérent}$ qu'il peut résoudre en utilisant $P_{enveloppe}$, ce qui le mène à étudier l'**enveloppe convexe** en mettant en place le théorème d'intersection qui fait intervenir les notions d'**intersection** et de **demi-plan**.

---

situation. Il est important de prendre en compte ces savoirs dans l'analyse des situations pour le gestionnaire, car cela permet de prévoir des obstacles que les élèves peuvent rencontrer.

Exemple de démarche : Nous allons présenter un exemple de démarche dans laquelle nous allons être amené à utiliser des propriétés de la droite et de la convexité ainsi que l'algorithme dichotomique.

Nous cherchons à résoudre le problème $P_{chercheur}$ sur des carrés. Nous ne connaissons pas encore d'algorithme nous permettant de déterminer la frontière. Nous décidons donc d'essayer de construire un algorithme qui détermine la frontière, c'est-à-dire de résoudre P_{algo}. Pour cela, nous choissisons d'expérimenter sur un carré de côté 7. Nous avons choisi 7, car un carré de côté 7 ne nous apparait pas comme un cas trivial (au contraire de 1 ou 2) ou un cas trop complexe. Notre stratégie d'expérimentation est guidée par l'idée d'interroger les cases proches du centre du rectangle. Nous choisissons d'expérimenter en changeant le type de frontière à la fin de chaque partie.

Nous expérimentons avec une frontière verticale puis une horizontale. La première observation que nous faisons est qu'il n'y a pas besoin d'interroger certaines cases. Cela nous pose le problème $P_{enveloppe}$. Nous décidons de ne pas résoudre tout de suite ce problème de manière générale, nous nous contentons de résoudre les cas particuliers que nous rencontrons au cours de l'expérimentation.

Une autre observation que nous faisons est O_2 : lorsqu'une case est bleue et une case est rouge alors la frontière est « entre » ces cases.

D'autre part, ces expérimentations nous confrontent au problème P_{gen} : étant donné une configuration de couleur, peut-on déterminer la frontière ? et si oui où est-elle ? Nous utilisons alors les propriétés de la droite pour répondre : une droite est engendrée par 2 points. Cela nous donne le résultat suivant : si 2 points sont noirs alors la frontière est la droite passant par ces 2 points. Notre stratégie de recherche a donc maintenant pour objectif de déterminer des cases qui appartiennent à la frontière.

Nous décidons ensuite d'expérimenter avec une frontière vide. En cherchant cette frontière, nous observons qu'en interrogeant les cases aux centres du carré, nous ne pouvons pas conclure. Nous décidons donc de changer de stratégie et d'interroger les bords du carré. Nous observons alors que lorsque les 4 coins du carré sont de même couleur, le carré entier est de cette couleur. Nous modifions donc notre stratégie, nous allons maintenant commencer par interroger les coins.

Nous expérimentons avec la stratégie coins, en faisant le choix de commencer avec une frontière horizontale. Une fois les coins interrogés, l'observation O_2 nous mène à interroger les cases d'un bord dont les extrémités sont bleue et rouge. Nous trouvons un point P de la frontière. Il nous reste à en déterminer un second. Nous cherchons alors les frontières possibles passant par P. Nous remarquons qu'il n'y en a qu'une seule, nous concluons.

Nous continuons à expérimenter en changeant la frontière. À chaque fois, nous remarquons qu'une fois les coins interrogés, il ne reste qu'un seul type de frontière possible et que nous sommes amenés à jouer sur un segment dont les extrémités sont de couleur différente. Nous conjecturons le théorème coins-directions et prenons comme objet d'étude le segment dont les extrémités sont rouge et bleue.

4.1.3. *Évaluation de l'optimalité.* L'aspect optimisation implique dans un premier temps de définir la notion de « **s'arrête en X interrogations** » en relation avec le problème et ainsi de comprendre la notion d'**algorithme optimal**, en particulier de comprendre la différence entre une **optimalité locale** et une **optimalité globale**. La définition du nombre d'interrogations au pire d'un algorithme que nous avons utilisée fait apparaître des **quantificateurs** universels et existentiels.

D'autre part, le dénombrement du nombre d'interrogations utilisés par un algorithme fait intervenir la notion de **maximum** d'un ensemble (pour le chercheur) et de **minimum** (pour le donneur), ce qui fait intervenir les **quantificateurs** universel et existentiel.

Les définitions d'optimalité que nous avons envisagées font intervenir les notions de **MaxMin** (pour le chercheur) et de **MinMax** (pour le donneur).

L'évaluation de l'optimalité des algorithmes met en jeu les notions de **minorant**, **majorant**, **borne supérieure**, **borne inférieure** et ainsi d'**intervalle** contenant la solution. Les notions de **condition suffisante** et **condition nécessaire** interviennent également, par exemple, s'il existe un algorithme de recherche qui termine en, au pire, X interrogation alors le nombre d'interrogations optimal est inférieur à X. De même, si Y est un minorant du nombre d'interrogations optimal alors tout algorithme de recherche détermine la frontière en au moins Y interrogations. Cela met donc aussi en jeu un travail sur les quantificateurs. De plus, il faut rechercher le maximum de différentes formules.

L'étude de **suites récurrentes** est aussi obligatoire pour obtenir des minorants au nombre d'interrogations optimal utilisé par tout algorithme de recherche, de même la notion de **logarithme**[3]**en base 2** et de **partie entière inférieure et supérieure** sont présentes. Il faut, en effet, manipuler des **inégalités logarithmiques** pour évaluer l'optimalité des algorithmes. Pour énoncer des résultats généraux, cela nécessite aussi de manipuler des **expréssions algébriques**.

4.2. Savoirs optionnels. Les savoirs optionnels sont les savoirs qui apparaissent en fonction des modèles, des stratégies et des problèmes posés. Nous n'avons pas identifié d'autres savoirs que les savoirs nécessaires dans les modèles par découpage, géométrique et par densité de zones.

4.2.1. *Construction d'un algorithme.* Dans le modèle-point, la construction d'un algorithme de recherche pose des problèmes d'**existence** de points vérifiant certaines propriétés (pour le chercheur). D'autre part, il mène (pour le chercheur et le donneur) à la recherche du **cardinal** de l'enveloppe convexe de points de même couleur, ce qui est possible en la déterminant de manière **analytique**. Cette action permet le passage d'une représentation géométrique vers une représentation plus analytique de la convexité et conduit à la définition de **fonctions polynomiales du second degré**, correspondant à des **sommes d'entiers**, ainsi qu'à l'étude de leur **maximum** et **mimimun** sur un segment. Le **principe de la cage aux pigeons** est également utile. La notion de max min est aussi indispensable.

Dans le modèle-frontière, la construction d'un algorithme mène à **dénombrer** les frontières restantes inconnues et (uniquement pour le chercheur) à rechercher des points maximisant le nombre de frontières éliminées, ce qui mène à résoudre des **équations linéaires** à une inconnue entière.

[3]Remarquons que les propriétés de la fonction logarithme sont seulement utilisées pour comparer les minorants et les majorants. Pour trouver les minorants ou les majorants, les logarithmes peuvent être remplacés par des inégalités faisant intervenir des puissances de 2. Par exemple, $X = \lfloor \log_2(l) \rfloor$ peut être remplacé par $X = k$ si et seulement si $2^k \leq l \leq 2^k - 1$;

4.2.2. *Vérification.* Le chercheur peut aussi utiliser des arguments de nature **inductive**, pour le modèle-frontières (resp. modèle-pointss) : le nombre de frontière (resp. de points) diminue strictement à chaque interrogation donc l'algorithme détermine la frontière.

4.2.3. *Évaluation de l'optimalité.* Dans le modèle-point, nous n'avons pas réussi à construire un algorithme issu des stratégies que nous proposons (sauf pour les segments). Nous ne connaissons donc pas les savoirs spécifiques en jeu pour dénombrer le nombre d'interrogations utilisées (pour les segments, nous retrouvons les savoirs de la sous-sous-section 4.1.3).

Dans le modèle-frontière, le chercheur peut encadrer le nombre d'interrogations utilisées par un algorithme correspondant à la stratégie d'élimination de frontières (page 170) sans avoir connaissance de l'algorithme. Cela met en jeu les savoirs de la sous-sous-section 4.1.3. De plus, pour le donneur, ce modèle permet d'obtenir un minorant à la solution, l'obtention de ce minorant fait intervenir les même savoirs que ceux de la sous-sous-section 4.1.3.

Dans le modèle-point, nous sommes amenés à définir une nouvelle optimalité[4], ce qui va nous amener à étudier le lien qu'il peut y avoir entre l'optimalité au pire et cette nouvelle optimalité.

Le modèle-frontières nous mène aussi à définir une nouvelle optimalité[5], mais elle n'implique pas, *a priori*, l'optimalité par défaut. Comme pour le modèle-point, nous sommes donc amené à étudier le lien entre l'optimalité par défaut et cette nouvelle optimalité.

Cette liste de savoir en jeu n'est pas exhaustive ; d'autres savoirs que nous n'avons pas repérés peuvent aussi apparaître. Nous allons maintenant essayer de repérer les différents types de preuves en jeu avec la situation ainsi que les savoirs notionnels et les raisonnements intervenant dans ces preuves.

5. Savoirs transversaux

5.1. Activité de modélisation. Dans cette sous-section, nous allons voir quels sont les premiers éléments de modélisation que nous sommes amenés à développer lors de la résolution du problème et quels sont les nouveaux problèmes que nous pouvons nous poser.

5.1.1. *Premiers éléments de modélisation.* Dans l'analyse mathématique, nous avons discerné différents modèles utilisablent. Mais avant d'arriver à l'établissement de ces modèles, en expérimentant, deux des premières observations que nous pouvons faire sont que :

(1) lorsqu'un point est situé entre deux cases de couleur différente horizontalement ou verticalement alors ce point est un point de la frontière ;
(2) il y certains points qu'il n'est pas nécessaire d'interroger pour déterminer leur couleur.

D'autre part, nous faisons l'hypothèse que les autres premiers éléments de modélisation qui vont apparaître sont ceux qui « initialisent » le modèle géométrique, c'est-à-dire le lemme X.3 qui donne deux représentations de la

[4]Contrôler le plus grand ensemble de points

[5]optimiser le nombre de frontières restantes

droite. Ces premiers éléments sont à la base du modèle-droite de la situation. Ce sont en particulier des invariants opératoires qui vont guider nos actions lors de nos expériences, ils permettent ainsi la construction de stratégie.

Nous considérons que ces éléments sont les signes d'une activité de modélisation de la situation dans le cas où c'est la première fois que les élèves essayent de résoudre un problème de ce type.

De plus, une remarque importante pour la résolution du problème est que la solution du problème est indépendante de la manière dont joue l'opposant. Cette remarque est aussi valable pour les algorithmes : l'objectif est la détermination d'algorithmes pouvant jouer contre tout algorithme de l'opposant. Les algorithmes que nous cherchons doivent donc être indépendant de la manière dont joue l'opposant. Ces remarques conduisent ainsi à considérer une optimalité indépendante de la manière dont joue l'adversaire. Nous avons vu dans l'analyse mathématique que deux définitions d'optimalité sont possibles : l'optimalité au pire et l'optimalité local, l'optimalité au pire étant la plus adaptée à la résolution du problème.

L'analyse mathématique nous a aussi permis de déterminer d'autres types de modèles de la situation comme le modéle-point ou le modéle-frontière. Ces modèles ont à leur originie la rencontre d'un nouveau problème issu de la construction d'une stratégie.

Nous allons dans la sous-section suivante, donner les éléments qui nous apparaissent nécessaire pour formuler et valider des résultats concernant cette situation.

5.2. Conjectures possibles : argumentations. Les conjectures émises vont dépendre des problèmes que les élèves vont essayer de résoudre. Toutefois, il apparaît nécessaire que certaines d'entre elles portent sur l'optimalité d'un algorithme et sur le nombre maximum d'interrogations qu'un algorithme donné effectue.

En particulier, nous faisons l'hypothèse que les conjectures affirmant l'optimalité de l'algorithme coins puis dichotomie et celles affirmant l'optimalité de l'algorithme dichotomique vont apparaître. En effet, l'analyse mathématique a montré qu'il est difficile de trouver des algorithmes plus rapides que ceux-ci, l'algorithme dichotomique étant même optimal. Nous pouvons aussi rajouter qu'il est facile de prouver l'optimalité de ces algorithmes pour des objets de petite dimension. Nous verrons dans la sous-section 5.5 pourquoi nous pensons que l'algorithme coins puis recherche dichotomique a de « fortes chances » d'apparaître.

Ces conjectures/hypothèses peuvent être supportées par plusieurs types d'arguments :

expérimentaux répétitifs : à chaque fois que nous effectuons une expérience générative pour résoudre un problème de recherche de solution, nous observons que le même résultat se répète. Par exemple, si le problème est de déterminer le nombre d'interrogations au pire utilisé par un algorithme, l'argument peut être le suivant : « En jouant avec cet algorithme, nous avons à chaque fois trouvé la frontière en moins de 8 interrogations, donc cet algorithme utilise au pire 8 interrogations ». Lorsque nous cherchons, il est possible que nous tenions ce type de raisonnement, il n'est pas absurde de penser qu'un résultat est vrai car il se répète. Toutefois, ceci est insuffisant pour prouver un résultat mathématique. Dans un raisonnement de ce type, il peut être intéressant de s'assurer que les différents cas observés sont mathématiquement valides.

expérimentaux validatifs[6]: à chaque fois que nous expérimentons pour résoudre le problème d'existence associée au résultat R, R est vrai. Ceci est équivalent à ne pas trouver de contre-exemples à R. Pour cette situation, cela peut être l'argument suivant :« Je n'ai pas réussi à trouver d'algorithme plus rapide, donc je pense que l'algorithme est optimal ». Ce raisonnement est tout à fait valable « heuristiquement », il est même plus « convaincant » que le précédent, car nous avons cherché à mettre en défaut la conjecture. Il peut mener à une preuve par exhaustivité des cas de la conjecture. Toutefois, en lui-même (sans avoir montré que nous avons traité tous les cas), il est insuffisant pour obtenir une preuve mathématique.

Cela peut aussi permettre d'identifier un exemple que nous allons considérer comme crucial (Balacheff, 1987), c'est-à-dire comme étant le plus difficile : si cela marche pour lui alors cela marchera pour les autres. Remarquons que pour faire cela, il est nécessaire d'utiliser, implicitement ou non, un critère permettant de déterminer qu'un cas est le plus difficile. Cela peut mener à identifier une structure, une régularité, un paramètre pertinent. Ici, par exemple, concernant un algorithme de recherche, le cas le plus difficile peut être modélisé comme étant celui où cet algorithme affronte un algorithme de défense que l'on va considérer comme optimal.

arguments mathématiques : ils peuvent être de plusieurs types. Pour cette situation, nous pouvons avoir l'arguments :« l'algorithme est optimal à chaque étape, il est donc optimal. ». Cet argument est un obstacle épistémologique de la situation (relation erronée entre $P_{opt.etp.}$ et $P_{chercheur}$ ou $P_{donneur}$).

Les étapes se réfèrent au modèle utilisé. Par exemple, l'algorithme qui interroge les coins puis cherche un élément de la frontière par dichotomie sur une ligne peut être interprété de la manière suivante : la première étape consiste à déterminer si la frontière est présente et la deuxième étape consiste à déterminer un élément de la frontière. Nous pouvons alors justifier l'optimalité au pire de cet algorithme par le raisonnement suivant : l'algorithme est optimal pour l'étape une, il est aussi optimal pour l'étape deux donc il est optimal. Remarquons que pour cet exemple, les étapes ne sont pas les interrogations mais les différents objectifs de l'algorithme. Cet

[6]Nous pouvons nous demander quelle est la différence entre ces deux types d'arguments. Ils se différencient par la position du chercheur : pour le cas répétitif, cela ne correspond qu'à l'observation d'un résultat qui se répéte, nous sommes dans une position passive alors que, pour le cas validatif, nous sommes dans une position active, nous cherchons à tester le résultat, c'est notre incapacité à trouver un contre-exemple qui appuie la conjecture.

argument est incomplet, car il faudrait aussi montrer que l'optimalité par étape implique l'optimalité au pire. Ici, nous nous rapprochons d'une preuve, car il nous suffit de montrer que l'optimalité par étape implique l'optimalité au pire. Cependant, nous avons vu que ce n'était pas le cas.

Nous pouvons aussi avoir l'argument suivant : « cet algorithme est localement optimal contre un algorithme optimal, il est donc optimal. ». Cet argument est aussi un obstacle épistémologique de la situation (relation erronée entre P_{loc} et $P_{chercheur}$ ou $P_{donneur}$). Derrière cet argument, il y a la conception suivante : si on gagne contre le meilleur alors on est le meilleur.

Voici 3 autres exemples d'arguments mathématiques :

– plus le nombre de points de couleur inconnue est petit/grand à chaque étape, plus l'algorithme de recherche/défense est efficace ;
– plus le nombre de frontières supprimées est grand/petit à chaque étape, plus l'algorithme de recherche/défense est efficace ;
– plus la découverte d'un point de la frontière est retardé, plus l'algorithme de défense est efficace ;

D'autres arguments mathématiques peuvent appuyer nos conjectures, en particulier nous retrouvons ceux que nous avons utilisés dans les preuves d'optimalités effectuées dans l'analyse mathématique comme les arguments associés à la preuve par majoration du reste ou à la preuve par exhaustivité des cas.

exemple générique[7]: BALACHEFF (1987) appelle ainsi le type d'argumentation s'appuyant sur un cas particulier interprété « en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individu. ». C'est par exemple le cas lorsque nous exprimons l'algorithme sur un carré particulier alors que nous sommes conscients que nous pourrions appliquer le même algorithme à tout autre carré. Ce type de raisonnement nécessite d'avoir identifié une structure grâce à laquelle nous allons pouvoir définir une classe d'objets sur laquelle nos résultats s'appliquent. Cela peut ainsi nous amener à définir de nouveaux objets qui peuvent être, par exemple, les convexes pour ce problème.

Cette liste d'arguments n'est pas exhaustive ; par exemple nous ne parlons pas du raisonnement analogique. De plus, cette liste ne prend pas en compte les phénomènes sociaux qui pourraient intervenir dans une classe, notamment ceux provenant des interactions entre les élèves et des interventions de l'enseignant. En particulier, l'interprétation des élèves concernant les réponses de l'enseignant à leurs questions pourrait « tuer » l'incertitude pesant sur la validité d'un résultat.

De plus, nous n'avons considéré que les conjectures portant sur l'optimalité d'algorithmes. Or nous avons vu que d'autres problèmes mathématiques

[7] Page 59 la notion d'exemple générique est définie comme un exemple rendant compte de toute la complexité d'un problème.

pouvaient être engendrés par la situation, problèmes qui peuvent mener à la formulation de conjectures portant sur d'autres objets, comme par exemple sur le point minimisant le nombre de frontières restantes. Toutefois, cela ne change pas les catégories que nous avons mentionnées.

5.3. Formulations et validations : types de preuves et raisonnements. BLOCH (2000, p. 47) utilise le concept de *Sytème de preuve de l'analyse*[8](SPA), qui peut être défini comme l'ensemble des objets « qui entrent nécessairement dans la constitution d'un milieu pour l'enseignement de l'analyse, **afin que la validation y soit possible**. » L'auteur voit ce système comme étant la transposition didactique de l'ensemble des savoirs et raisonnements permettant de valider des résultats d'analyse. L'idée sous-jacente au concept de SPA est l'affirmation de l'existence, pour chaque théorie mathématique, d'un système de preuve qui lui est propre. Ici, nous ne chercherons pas à discuter de cette affirmation, mais utiliserons l'idée du système de preuve pour essayer de déterminer le système de preuve associé à la situation, c'est-à-dire l'ensemble des savoirs et raisonnements permettant de valider des résultats issus de cette situation. Ceci nous permettra de discerner les éléments de validation qui devront être produits par les élèves ou introduits[9]par l'enseignant, dans le milieu de référence, pour permettre aux élèves de valider leurs résultats.

5.3.1. *Sytème de preuve associé au problème.* Dans un premier temps, nous donnerons le système de preuve associé à la construction d'un algorithme, à la vérification de son fonctionnement puis à l'évaluation de l'optimalité de l'algorithme.

5.3.2. *Construction d'un algorithme.* Ce problème est un problème d'optimisation discrète d'algorithme, comme mentionné dans l'analyse mathématique. Il nécessite donc d'être en mesure de formuler des algorithmes. Les algorithmes peuvent être représentés par des **arbres**, mais aussi par des paragraphes utilisants des phrases de la forme **« tant que... faire... »**, **« si... alors... »** . La représentation en arbre permet de déterminer, directement, le nombre d'interrogations au pire utilisé par l'algorithme. Cependant, elle peut être difficile à mettre en place pour des grands rectangles. Notons qu'il est possible de donner une représentation des algorithmes pour des rectangles de dimension fixée en numérotant les cases, Par exemple, c'est-ce que nous avons fait sur la figure (mettre la référence). Cette représentation utilise cependant des implicites logiques.

5.3.3. *Vérification.* De plus, il nous faut prouver que les algorithmes de recherche que nous utilisons s'arrêtent. Pour cela, nous avons principalement utilisé deux types de raisonnement : un **raisonnement récursif** « Je réduis à chaque étape en m'arrêtant quand je trouve 0, donc à un moment j'arrive à 0, car je travaille avec des entiers » et des preuves par **exhaustivité des**

[8]Selon BLOCH (2000), ce système a, pour la première fois, été défini par Legrand en 1991.

[9]Il est possible pour l'enseignant d'introduire certains éléments de validation si ils ne sont pas produits par les élèves, la question qui se pose est de savoir quels sont les éléments à introduire et quand. Nous essaierons de répondre à cette question dans la partie concernant la gestion.

cas. Le raisonnement récursif utilise une des **propriété des nombres entiers** : toute suite d'entiers décroissant strictement est finie, qui se prouve en utilisant l'**axiome de** $\mathbb{N}$: tout ensemble d'entier non vide possède un plus petit élément. Remarquons qu'une preuve par exhaustivité des cas nécessite de montrer que nous avons bien traité tous les cas. Pour prouver cela, nous pouvons utiliser un **ordre de parcours** des cas. Une preuve par exhaustivité des cas est simplifiable en utilisant des arguments de **symétrie** ou des **raisonnements par différences**. Ce que nous appelons raisonnement par différences est un raisonnement qui assimile deux objets, *a priori* différents, comme étant le même objet. Ici, un exemple est de ne plus considérer les couleurs mais les différences entre les couleurs : « un carré avec trois coins bleus et un coin rouge est équivalent à un carré avec trois coins rouge et un coin bleu ».

5.3.4. *Évaluation de l'optimalité.* Il nous faut compter le nombre d'interrogations utilisées, au pire, par un algorithme de recherche. Sur des « petits » cas, nous pouvons utiliser des preuves par exhaustivité, en considérant les différentes réponses possibles données à chaque interrogation, ce qui revient à construire un **arbre**. Cependant, pour généraliser il semble nécessaire d'obtenir des résultats intermédiaires comme les théorèmes coins-directions et le lemme X.18. Ces résultats peuvent, une fois encore, être validés par des preuves par exhaustivité.

Nous allons aussi obtenir des formules concernant le nombre d'interrogations utilisées au pire en mettant en jeu des **parties entières** et des **logarithmes en base 2**. Si ces types de fonctions ne sont pas connues par les élèves, nous pouvons les représenter par des expressions du type : **« Si** $2^k \leq c \leq 2^{k+1} - 1$ **alors le nombre d'interrogations utilisées est** k **sur un carré de côté** c **»** . Cependant, cette représentation est moins opérative que celle en terme de fonctions, et utilise la notion de **puissance de 2**.

D'autre part, le caractère optimisation discrète du problème impose de manipuler des **inégalités** dans $\mathbb{N}$ et de faire des **preuves d'optimalité**. Les preuves que nous proposons consistent à déterminer un majorant (P_+) puis un minorant (P_-) et enfin à montrer qu'ils sont égaux. Une heuristique de recherche associée à ce type de preuve est d'essayer, petit à petit, d'augmenter le minorant et de réduire le majorant. Derrière ce type de preuve se cache les notions de **condition suffisante** et de **condition nécessaire**, si m est un minorant alors pour trouver la frontière, au pire, il est nécessaire d'utiliser m interrogations et si M est un majorant, il suffit de M interrogations pour trouver la frontière. Notons que pour des cas particuliers, nous pouvons utiliser des **preuves par l'absurde**.

La résolution de P_- sur des segments peut se faire à l'aide du modèle-points ou modèle-frontières mais sur des rectangles, le modèle le plus efficace est le modèle-frontières.

L'analyse mathématique a montré qu'il était « très difficile » d'obtenir l'égalité (nous ne l'obtenons pas nous même !). De ce fait nous avons le plus souvent obtenu des inégalités. Pour des cas particuliers, comparer le minorant et le majorant n'est pas difficile, car il s'agit de comparer deux entiers donnés. Toutefois, lorsque nous voulons comparer un minorant et un majorant qui dépendent des dimensions du rectangle, nous passons d'un calcul sur les entiers à un calcul algébrique. Nous devons alors respecter les **règles de validation du calcul algébrique**. De plus, cela implique d'étudier la différence de deux fonctions, il y a peu de chance qu'elle soit constante et comme nous manipulons des parties entières de logarithmes, il est difficile de déterminer de manière exacte la différence. Le plus pertinent pour le problème est alors de majorer la valeur absolue de la différence, ce qui se fait en utilisant des **raisonnements associés aux inégalités**[10]et des **propriétés du logarithme et des parties entières**. Remarquons que, même si nous n'utilisons pas la représentation par des « fonctions » des logarithmes et partie entière, nous pouvons manipuler ce type d'inégalité. En voici un exemple :

EXEMPLE XI.1. Nous voulons comparer $X = \lfloor \log_2(x) \rfloor$ avec $Y = \lceil \log_2(y) \rceil$, nous supposons que nous savons que $\lfloor \log_2(x) \rfloor$ est supérieur à $\lceil \log_2(y) \rceil$. Sous forme discursive, ces expressions deviennent « si $2^k \leq x \leq 2^{k+1} - 1$ alors $X = k$ » et « si $2^l \leq y \leq 2^{l+1} - 1$ alors $Y = l + 1$ ». $X - Y$ est donc inférieur à d si et seulement si $2^k \leq x \leq 2^{k+1} - 1$ et $2^{k-1} \leq y \leq 2^{k+d} - 1$, donc il suffit de montrer que $\frac{x}{2} \leq y \leq 2^d x - 1$ pour montrer que la différence des deux expressions est inférieure à d.

Pour prouver qu'un nombre M est un majorant du nombre d'interrogations optimal, il suffit d'**exhiber des algorithmes de recherche** qui terminent en moins de M interrogations. Pour montrer que m est un minorant, c'est plus délicat. Un type de preuve consiste à **exhiber un algorithme de défense** (qui peut être une frontière) et à montrer que tout algorithme de recherche jouant contre cet algorithme de défense va utiliser au moins m interrogations. Il est possible d'effectuer des **preuves par exhaustivité des cas** sur des cas particuliers. Cependant, souvent, le cas général ne peut être traité avec ce type de preuve. Dans l'analyse mathématique que nous avons faîte, nous n'avons trouvé qu'un seul type de preuve : elle consiste à déterminer une « quantité[11] » qui diminue strictement à chaque interrogation de tout algorithme de recherche et dont on peut majorer la perte entre deux interrogations. Nous appelerons ce type de preuves, ***preuve par majoration du reste***. Pour cette situation, nous pensons que ce type de preuve est le plus difficile à mettre en place, car il ne s'agit pas de seulement trouver l'idée de la preuve mais aussi de trouver la « quantité ». Nous pensons que l'idée de la preuve peut survenir en observant que le nombre de frontières ou le nombre de points diminuent à chaque interrogation sans dépasser une certaine quantité. Ces observations sont plus faciles à réaliser sur un segment, où les frontières ne sont que d'un seul type. De même, l'utilisation d'un algorithme de subdivision sur un segment peut permettre de se poser la question suivante : *est-il possible de diviser par plus de deux le nombre de points ?* question dont la réponse fournit un lemme de la preuve. Pour généraliser cette preuve à d'autres formes de territoires, il est préférable (presque nécessaire) d'être dans le **modèle-frontières** plutôt que points, car le problème des points apparaît comme plus complexe.

[10]Par exemple : « Si $0 < a \leq c$ et $b \geq d > 0$ alors $a - b \leq c - d$ »

[11]Nous n'avons trouvé que les frontières et les points.

Pour prouver qu'un algorithme de recherche s'arrête en au moins m interrogations, il suffit d'**exhiber une frontière** (ou un algorithme de défense local) qui fait effectuer m interrogations à l'algorithme de recherche. Pour montrer qu'une frontière f fait effectuer m interrogations à un algorithme de recherche, il suffit de jouer une partie entre l'algorithme de recherche et l'algorithme de défense local associé à f.

Dans ce qui suit, nous allons nous attacher à donner les preuves « négatives ». Nous présenterons essentiellement des preuves de non-optimalité. Pour prouver qu'un algorithme de recherche n'est pas optimal au pire, il suffit d'**exhiber un algorithme** de recherche qui s'arrête plus vite. Ceci nécessite d'avoir compris la notion d'**optimalité au pire** d'un algorithme.

Cependant, montrer qu'il existe un algorithme de recherche qui termine plus vite pour certaines frontières n'est pas une preuve de la non-optimalité au pire de l'algorithme. Pour les algorithmes de défense, la réponse va dépendre de l'optimalité considérée. Pour l'optimalité au pire, il nous suffit d'**exhiber un algorithme** de défense qui va faire effectuer à **tout** algorithme de recherche un nombre d'interrogations supérieur. Remarquons que le fait d'**exhiber un algorithme** de défense, local ou global, qui impose un nombre d'interrogations plus grand à un algorithme de recherche **donné**, n'est pas une preuve de non-optimalité pour l'optimalité au pire. Par contre, cela en est une pour l'optimalité ultime.

Un autre type de preuve pour les algorithmes de défense, prenant comme instance un ensemble de rectangles, est de chercher une faille et de montrer, par exemple, qu'il existe un algorithme de recherche qui termine en un nombre d'interrogations constant pour tout rectangle. Cette preuve prouve que cet algorithme n'est pas optimal au pire pour de « grands » rectangles. Elle nécessite, toutefois, un lemme qui montre que le nombre d'interrogations est croissant en fonction des dimensions du rectangle.

De plus, pour montrer qu'un algorithme de recherche donné ne peut pas s'arrêter en m interrogations, il suffit d'**exhiber une frontière** (ou un algorithme de défense local) pour lequel l'algorithme utilise au moins $m+1$ interrogations. Remarquons qu'effectuer des preuves « négatives » se ramène, essentiellement, à la production de **contre-exemples** et nécessite de comprendre que la **négation d'une proposition universelle** est une proposition existentielle et que la **négation d'une proposition existentielle** est une proposition universelle. Considérer des propositions universelles ou existentielles ne peut se faire qu'en ayant compris **la notion d'optimalité** pour un algorithme. De plus, suivant la définition d'optimalité considérée, les contre-exemples ne seront pas les mêmes.

Enfin, des éléments de validations de type conceptions qui sont possibles pour cette situation sont les suivants :

(1) un algorithme optimal à chacune de ses étapes est optimal ;

(2) le nombre d'interrogations croît avec les dimensions du rectangle ;

(3) l'ordre d'interrogation des cases n'a pas d'importance (vrai sur des petits cas) ;

(4) puisqu'au pire des cas, je suis obligé de jouer sur cette case alors je dois l'interroger ;

(5) si on gagne contre le meilleur, on est le meilleur ;

(6) par une preuve par majoration du reste il faut au moins X interrogations, donc il existe un algorithme de recherche qui trouve la frontière en X interrogations.

Les arguments (1), (3), (4), (5) et (6) sont, généralement, erronés alors que le (2) est vrai. Voici un exemple concernant le quatrième argument :

Exemple XI.2. Le problème que nous cherchons à résoudre est le suivant : sur un segment, lequel de ces algorithmes est le plus rapide :

A. interroger **les** extrémités du segment puis effectuer une dichotomie ;

B. interroger **une** extrémité du segment puis effectuer une dichotomie.

Ces algorithmes s'arrêtent avec le même nombre d'interrogations lorsque la longueur du segment est différente de 2^n+1. De ce fait, en expérimentant uniquement sur des segments de longueurs différentes de 2^n+1, nous pouvons conjecturer que A et B sont aussi rapides l'un que l'autre. Un argument mathématique qui peut soutenir cette conjecture est : puisqu'au pire des cas, je suis obligé de jouer sur la deuxième extrémité du segment avec l'algorithme B alors c'est pareil que de jouer avec l'algorithme A.

Enfin, au niveau de la formulation et de la validation, il nous faut signaler qu'il est indispensable que dans le milieu de référence soit présente la notion de **conjecture**. En effet, la situation amène à formuler des résultats dont la validité n'a pas encore été prouvée ; il est donc indispensable que cette notion soit présente afin de permettre aux élèves de formuler leurs résultats en leur donnant le statut approprié. D'autre part, il est nécessaire pour l'avancée de la recherche de passer par des **résultats partiels**, il est donc important que les élèves puissent les identifier. Ce paragraphe rejoint certaines des recommandations de Godot (2005) sur les conditions de gestion d'une situation de recherche.

5.4. Nouveaux concepts. Dans cette sous-section, nous présentons les nouveaux concepts qui peuvent être définis pour résoudre le problème. En premier lieu, il y a la relation d'ordre entre 2 algorithmes pour définir ce que signifie « s'arrêter en X interrogations ».

5.4.1. *Être meilleur que.* En essayant de résoudre le problème en commençant par chercher des algorithmes, nous allons, certainement, produire plusieurs algorithmes. De ce fait, il nous faudra comparer ces algorithmes entre eux, ce qui va nécessiter de définir une relation d'ordre entre les algorithmes. Pour la recherche, nous faisons l'hypothèse que la relation d'ordre qui va être choisie va être celle associée à l'optimalité au pire. Une autre possibilité pourrait être de considérer l'optimalité ultime.

Pour les algorithmes de défense, les définitions que nous pouvons formuler sont basées soit sur l'optimalité au pire, soit sur l'optimalité locale. Remarquons que suivant la définition, la preuve a effectué n'est pas la même.

5.4.2. *S'arrêter en X interrogations.* Pour résoudre le problème, il est aussi nécessaire de définir la notion de *s'arrêter en X interrogations* pour un algorithme. Pour pouvoir obtenir un majorant à la solution du problème, nous pouvons dire qu'un algorithme de recherche s'arrête en X interrogations si les deux conditions suivantes sont réunies :

– quelque soit la frontière, il la trouve en au plus X interrogations ;
– il existe une frontière pour laquelle il s'arrête en X interrogations

D'autre part, nous pouvons dire qu'un algorithme de défense s'arrête en X interrogations si les deux conditions suivantes sont réunies :

– quelque soit l'algorithme de recherche, l'algorithme de recherche effectue au moins X interrogations (lorsqu'il est confronté à l'algorithme de défense) avant de s'arrêter ;
– il existe un algorithme de recherche qui s'arrête en X interrogations lorsqu'il est confronté à cet algorithme de défense.

5.4.3. *Enveloppe convexe.* L'étude de la convexité permet de déterminer l'ensemble des points qui sont d'une même couleur. Ce problème apparaît dès que l'on joue une partie, que l'on soit en position de chercheur ou de donneur. En particulier, le concept mis en jeu est celui d'enveloppe convexe. Nous allons proposer différentes définitions qui peuvent se voir comme des modèles de la notion d'ensemble des points de même couleur.

Une première remarque est que la notion d'enveloppe convexe n'a pas la même utilité pour le chercheur et le donneur. Pour le donneur, cela permet de jouer sans contradiction alors que pour le chercheur cela permet de rendre ses stratégies plus efficaces. De ce fait, nous pourrions avoir les définitions suivantes : « *C'est l'ensemble des points que le chercheur n'a pas besoin d'interroger* » et « *C'est l'ensemble des points pour lesquels si le chercheur interroge un de ces points alors le donneur n'a pas de choix sur la couleur à donner* ». Ces définitions ne sont pas formelles. Pour les rendre formelles, il est nécessaire de modéliser ce que sont « les points que le chercheur n'a pas besoin d'interroger » et les points pour lesquels « le donneur n'a pas de choix sur la couleur à donner ». Le concept mathématique qui intervient alors est celui d'enveloppe convexe dont on peut donner les définitions suivantes (par rapport aux problèmes) :

– « *L'enveloppe convexe d'un ensemble de points d'une même couleur est l'ensemble des points dont on peut être sûr qu'ils sont de même couleur* » Cette définition peut être vue comme une zéro-définition (Ouvrier-Buffet, 2003) ; elle est essentiellement descriptive et ne permet pas d'obtenir directement une technique déterminant l'enveloppe convexe. De plus, cette définition est informelle car elle est fonction des compétences du chercheur (c'est lui qui est sûr). Pour enlever le caractère impersonnel de cette définition, il est alors nécessaire de modéliser mathématiquement « pour être sûr ». Un moyen de le faire est de dire qu'on est sûr lorsque pour toute frontière possible les points sont de même couleur. Cette formalisation permet ainsi d'obtenir une définition mathématique de la convexité du problème. D'autre part, cette nouvelle définition donne une technique de détermination de l'enveloppe convexe à travers l'étude des frontières possibles, ce qui amène à établir le théorème d'intersection.
– « *L'enveloppe convexe d'un ensemble de points d'une même couleur est l'ensemble des points situés à l'intérieur des frontières limites* » La figure XI.1 illustre ceci, l'intérieur est symbolisé par les cases de couleurs claires et les frontières limites par les droites de couleur noire. Sans définir ce qu'est l'« intérieur des frontières limites », cette définition n'est

que descriptive, c'est aussi une zéro-définition. Elle nécessite de faire appel à des concepts extérieurs : ceux de frontière limite et d'intérieur de frontière limite. Cette définition peut aussi être vue comme une technique dans le sens où elle permet de déterminer, étant donné une configuration de points coloriés sur un rectangle, l'enveloppe convexe. Cette définition-technique est parfaitement utilisable de manière « informelle », car il nous est toujours possible de déterminer les frontières limites et l'intérieur en les utilisant de manière implicite. Il n'apparaît donc pas nécessaire de la formaliser lorsque nous travaillons sur des objets dont tous les paramètres sont fixés. Cela a pour conséquence qu'expérimentalement, cette stratégie est utilisable, et nous faisons de plus l'hypothèse qu'elle est fiable. Cela peut empêcher les élèves de mathématiser complétement cette technique ou d'en rechercher une autre.

D'autre part, la représentation du rectangle joue un rôle important. En effet la définition n'est opératoire que graphiquement parce qu'on peut « voir » les droites et les points. Une représentation analytique sous forme de coordonnées ne permet plus cela, ou nécessite d'effectuer une représentation graphique avant de pouvoir appliquer cette technique. La représentation analytique permet de poser la question de la généralisation de la technique à des points dont les coordonnées sont indéterminées. Cette représentation nécessite la construction d'un algorithme prenant comme instance des points de couleurs et renvoyant l'ensemble des points qui sont de même couleur.

Nous avons défini dans l'analyse mathématique page 149 de manière formelle les frontières limites. Cependant cette définition peut apparaître comme trop complexe du fait qu'elle utilise le concept de distance à un ensemble.

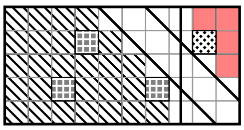


FIG. XI.1. Une représentation de la définition.

– « *L'enveloppe convexe d'un ensemble de points d'une même couleur est l'intersection des demi-plans de cette couleur engendrés par chaque frontière possible* » Cette définition est formelle, elle est basée sur la propriété des frontières qui séparent le plan en deux demi-plans. Cette définition est aussi opératoire et son utilisation peut mener à définir le concept de frontière limite comme nous avons pu le faire dans la section 2.3 page 149 afin d'obtenir une technique de détermination de l'enveloppe convexe plus efficace que celle qui consiste à prendre toutes les intersections. Cette définition repose sur la notion d'intersection entre ensembles. Nous faisons l'hypothèse que cette définition ne va pas apparaître de manière adidactique.

Comme mentionné précédemment, ceci peut mener à rencontrer des problèmes portant sur cette convexité, ce qui peut mener à généraliser le problème à tou convexe. Nous faisons l'hypothèse que l'étude de la convexité pour elle-même ne peut se faire que si les élèves ont déjà étaient confrontés à une autre convexité, par exemple la convexité usuelle dans $\mathbb{R}$. Il est alors préférable de parler de comparaison entre différentes convexités.

5.4.4. *Milieu d'un segment discret.* La notion de milieu doit aussi être définie, notamment pour formaliser l'algorithme dichotomique. Les élèves ont déjà été confrontés au concept de milieu durant leur scolarité. Toutefois, il est fortement probable que cela se soit déroulé dans le cadre continu. Nous pourrions utiliser la définition du milieu d'un segment du cadre continu : point situé à égale distance des extrémités. Cette définition pose problème, car il existe des segments discrets pour lesquels ce point n'existe pas. Les élèves peuvent alors se rendre compte sur des exemples que ce point n'existe pas toujours. Dans ce cas, le choix du milieu va se faire en fonction du modèle choisi. En effet, comme nous l'avons vu dans l'analyse mathématique, une modélisation du milieu en terme de distance propose de choisir entre deux points alors qu'une modélisation en terme de frontière est plus précise permettant de choisir dans tous les cas le « bon » milieu.

Nous pouvons aussi penser que les expérimentations vont jouer un rôle important dans la détermination du « bon » milieu lorsque nous nous posons la question : *quel est le milieu que je dois choisir ?*. Cette question peut, en effet, nous mener à effectuer des expérimentations où l'une des variables a pour domaine l'ensemble des points susceptibles de servir de milieu.

Remarquons que lorsque les dimensions du rectangle sont fixées et « pas trop grandes », nous n'avons pas besoin de définir la notion de milieu dans sa généralité, nous pouvons nous contenter de dire que dans telle configuration, le milieu est ce point.

5.4.5. *Algorithmes particuliers.* Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'analyse didactique au paragraphe 5.3.1, les élèves vont être amenés à définir des algorithmes. Nous avons identifié les critères suivants qui vont permettre de considérer qu'une stratégie est pertinente, c'est-à-dire les critères sur lesquels les stratégies ou les algorithmes vont être évalués. Nous avons déterminé les critères suivants :

- fonctionnalité : est-ce que la stratégie permet de trouver la frontière ? ;
- efficacité : est-ce que la stratégie est plus rapide qu'une autre ? ceci va dépendre de la classe d'objets considérés, par exemple un carré particulier ou tous les carrés ;
- réalisabilité : est-ce qu'il est possible de transformer la stratégie en un algorithme ? Nous avons vu que certaines stratégies, pour être transformées en algorithmes, nécessitent de résoudre des problèmes mathématiques complexes.

En particulier, l'étude de la réalisabilité d'une stratégie peut mener à l'étude de nouveaux problèmes mathématiques mettant en jeu les objets de « base » de chaque modèle. Ce sont ces problèmes qui vont être à l'origine des savoirs optionnels de la situation. Il y a alors de nouveaux problèmes qui apparaissent suivant « les points de vue » adoptés.

De plus, au niveau de l'efficacité nous faisons l'hypothèse qu'un des critères qui va être retenu est l'efficacité de l'algorithme sur les petits cas par comparaison avec le nombre d'interrogations effectué par un algorithme connu. Ceci implique qu'un algorithme peu efficace sur des cas particuliers ne sera pas étudié de manière générale.

5.4.6. *Fonction logarithme en base 2.* Nous avons vu que cette fonction est utilisé pour évaluer le nombre d'interrogations au pire utilisées par l'algorithme dichotomique. Comme nous l'avons vu, il est possible de formuler les résultats sans faire intervenir de manière explicite la fonction logarithme, de la manière suivante : si la longeur du segment est entre 2^p et $2^{p+1}-1$ alors l'algorithme dichotomique s'arrête en $p+1$ interrogations. En particulier, ce résultat peut être conjecturé en expérimentant sur des segments dont les longeurs sont des puissances de 2.

5.4.7. *Conclusion.* Nous pouvons nous apercevoir que les objets qui peuvent apparaître sont reliés à la construction d'algorithmes et à une volonté de les rendre le plus efficace possible. Ce sont des objets qui nous semblent accessibles aux élèves.

5.5. Des exemples pertinent pour cette situation. Les exemples pertinents sont ceux que nous identifions comme étant à l'origine d'une évolution des problèmes. Certains ne sont interprétés que comme des contre-exemples dans le sens où ils invalident une conjecture/hypothèse mais ils peuvent aussi être à l'origine d'une nouvelle idée. C'est par exemple le cas avec des exemples qui vont invalider une stratégie ou un algorithme et qui vont ensuite servir à construire de nouvelles stratégies que nous cherchons comme étant optimale pour ces exemples.

Deux des exemples importants sont la frontière vide et les frontières coins. En effet, lorsque le donneur choisit l'une de ces frontières, le chercheur, s'il ne dispose pas d'une stratégie interrogeant les bords, va utiliser une grand nombre d'interrogations pour trouver la frontière. De ce fait, nous faisons l'hypothèse, qu'il prend alors conscience de l'importance des coins. L'apparition de cet exemple lors d'une expérimentation peut alors être un moment clé de la recherche, car il peut avoir comme « feedback » la mise en place d'une stratégie interrogeant les coins. C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse que les stratégies coins vont apparaître à partir du moment où le donneur choisit de jouer avec une frontière coin ou une frontière vide.

Dans le cas où cet exemple n'apparaîtrait pas, par exemple si les élèves oublient de jouer avec les frontières coin et vide, l'enseignant peut alors prendre la place du donneur de couleur le temps d'une partie afin d'introduire cet exemple dans le milieu.

Il est difficile de prévoir tous les exemples qui vont jouer un rôle important dans la recherche des élèves, car cela va dépendre des problèmes auxquels ils vont essayer de répondre ainsi que des modèles de la situation qu'ils vont développer. Les contre-exemples (figures X.10, X.12, X.13, X.64, X.57) que nous donnons dans l'analyse mathématique sur la non-optimalité de différentes stratégies issues des modélisations que nous proposons, nous semblent pouvoir jouer le rôle d'exemple pertinents. Toutefois, contrairement aux frontières vides et coins, qui sont des instances du problème, ils sont des exemples de partie. De plus, par rapport aux stratégies de recherche que nous avons prévues, il semble que certains de ces exemples ont plus de « chances » d'apparaître que d'autres :

– figure X.10 (p. 147) : ces exemples de parties représentés par cette figure sont un contre-exemple au fait qu'un algorithme optimal à chacune de ses étapes (direction puis recherche sur un segment) sur un rectangle soit un algorithme optimal au pire. Il est possible que cette partie soit « expérimentée » par les élèves, mais il nous semble peu probable que les élèves considèrent le problème : *est-ce qu'un algorithme optimale à chacune de ses étapes est optimal ?* De ce fait, pour que cette partie soit reconnue comme un exemple relié à ce problème il faut que les élèves aient connaissance de ce problème. Comme nous faisons l'hypothèse que les élèves vont développer la conception :« optimal à chaque étape donc optimal au pire », ce problème ne sera pas posé par les élèves.

  D'autre part, même si le problème est présent dans la conception des élèves, il n'est pas sûr qu'ils considèrent les segments comme des cas particuliers de rectangles, ce qui peut entraîner une non-reconnaissance du contre-exemple.
– figure X.12 (p. 150) : ces exemples de parties représentées par cette figure ne nous semblent pas être des exemples de parties jouables en utilisant la stratégie de contrôle de la plus grande aire de points. De ce fait, il est plus vraisemblable que ces exemples vont apparaître lorsque l'on va chercher un contre-exemple à l'optimalité de l'idée de contrôle de zone. Cela nécessite la présence du problème, *est-ce que contrôler la plus grande zone permet de terminer plus rapidement ?*, dans la conception des élèves.
– figure X.13 (p. 150) : ces exemples de partie sont des contre-exemples à l'optimalité de la stratégie de contrôle de la plus grande aire de points à chaque interrogation. Il est possible que ces exemples apparaîssent si les élèves essayent de résoudre le problème, *est-ce que la première interrogation joue un rôle ?*
– figure X.64 (p. **??**) : cet exemple peut apparaître lorsque l'on expérimente en lien avec la stratégie de défense par maximisation du nombre de points inconnus.
– figure X.57 (p. 187) : comme mentionné dans le commentaire page 187, ce contre-exemple peut apparaître du fait de l'importance des coins pour la situation. Par contre, cela nécessite que les élèves expérimentent sur des rectangles dont la longeur d'un des côtés est largement supérieure à l'autre.

D'une manière générale, l'apparition de ces exemples peut se faire au cours de parties que les élèves jouent mais l'assimilation de ceux-ci en tant que contre-exemples dans la conception ne peut se faire que lorsque les élèves expérimentent pour résoudre les problèmes qui leur sont associés.

D'autre part, cela nous permet d'identifier 2 types d'exemples : ceux qui sont des instances du problème et ceux qui sont des parties. Nous faisons l'hypothèse que les fronitères vide et coins vont permettrent l'apparition des stratégies coins.

6. Est ce que ce problème vérifie les conditions épistémologiques de notre modèle ?

Dans cette section, nous montrons que le problème *Chercher la frontière* a les caractéristiques épistémologiques du modèle de situation pour la démarche expérimentale que nous avons défini dans le chapitre 2 de la partie 2.

6.1. Instances non-usuelles. Les instance du problèmes sont des convexes discrets et des droites discrètes. Ce ne sont pas des objets qui sont enseignés dans le cursus scolaire français.

6.2. Construction de nouveaux objets mathématiques. Comme nous avons pu le voir précédemment, il est possible de construire un grand nombre de nouveaux objets mathématiques.

6.3. Cas particuliers. Le problème comporte un grand nombre de cas particuliers que cela soit des segments, des carrés ou des rectangles. D'autre part, l'étude de la convexité peut amener à généraliser le problème à l'ensemble des convexes.

6.4. Un grand nombre de propositions doivent être vérifiables expérimentalement. Ce problème comporte de nombreuses propositions qui sont vérifiables expérimentalement, en particulier celles du type :« l'algorithme termine en X interrogation » De plus, le problème de construction d'algorithme mène à vérifier qu'une stratégie de recherche ou de défense fonctionnet correctement ($P_{vérif}$).

6.5. La validation expérimentale doit apparaître comme insuffisante. Par rapport aux types d'incertitudes identifiées par ZASLAVSKY (2005), étant donné que le problème est un problème de recherche de solution, l'incertitude principale est de type chemin inconnu ou conclusion incertaine.

Nous considérons que ce problème possède un haut niveau d'incertitude expérimentale (voir page 81). En effet, en expérimentant pour déterminer le nombre d'interrogations, au pire, qu'un algorithme de recherche (ou de défense) effectue, nous obtenons des résultats qui peuvent varier « fortement » en fonction de l'algorithme de défense (ou de recherche) ou de la frontière utilisée par le deuxième joueur. De plus, comme nous l'avons vu précédemment, ce problème admet un espace problème assez important.

Concernant l'opimalité d'un algorithme, d'une part étant donné la complexité du problème, qui met en jeu deux joueurs jouant l'un conte l'autre, il nous semble qu'il est difficile d'être convaincu qu'un algorithme est optimal sans effectuer une preuve mathématique. D'autre part, comme nous l'avons vu, certaines stratégies de construction d'algorithme nécessitent de faire des choix sur les cases à interroger, par exemple lorsque nous cherchons à éliminer le maximum de frontières à chaque étape et qu'il existe deux cases maximisant le nombre de frontières éliminées. De ce fait, il est difficile d'être convaincu qu'un algorithme est optimal, car en faisant un choix différent, il est peut être possible d'obtenir un algorithme plus efficace.

Cette présence d'incertitude permet ainsi de motiver l'action de rechercher un moyen de validation plus efficace qu'une validation expérimentale.

6.6. Le modèle de SiRC. Enfin, nous allons vérifier que ce problème est un candidat élligible pour être une SiRC[12](Grenier et Payan, 2002).

(1) *Chercher la frontière* est un problème encore ouvert ;
(2) la question initiale est facile d'accès comme nous l'avons vu dans la section 1 de ce chapitre ;
(3) des stratégies initiales existent : il est possible de mettre en place des stratégies de recherche ou de défense assez rapidement ;
(4) l'analyse mathématique montre qu'il existe de nombreuses stratégies pour avancer dans la recherche ;
(5) l'espace problème est très important.

7. Quelques éléments de gestion de la situation

7.1. Différents outils d'expérimentations possibles. Les différents outils expérimentaux que nous envisageons pour la situation sont les suivants :
– papier-crayon ;
– plateaux en bois et jetons matériels ;
– ordinateurs.

L'enseignant peut ne proposer la situation que sous forme « papier-crayon », c'est-à-dire en laissant les élèves dessiner les grilles et utiliser des symboles pour représenter les couleurs. Les élèves jouent alors sur la grille qu'ils ont dessinée. L'enseignant peut aussi décider de fournir du matériel aux élèves, comme des plateaux avec des cases et des jetons de couleur rouge, bleu et noir qu'on peut utiliser pour donner des couleurs aux cases. Nous pouvons alors nous demander quels sont les avantages et inconvénients à proposer ce matériel. Au niveau de la réalisation des expériences, ce matériel permet de faciliter la répétition des expériences, car la grille n'est jamais à redessiner. De plus, comme nous avons pu le constater dans diverses expérimentations que nous avons conduites, la présence de matériel est une incitation à utiliser l'expérimental pour résoudre le problème. D'autre part, Godot (2005) stipule la pertinence de ce support pour aider à la dévolution du problème, produire des contre-exemples et effectuer aisément des essais.

Au niveau des inconvénients, le matériel peut ne pas correspondre à l'ensemble des rectangles, il est donc nécessaire de faire des choix sur les dimensions proposées, ces choix peuvent être interprétés par les élèves comme les cas clés à résoudre où les cas qu'il faut résoudre comme nous avons pu le constater dans une expérimentation conduite sur le jeu du set. D'autre part, Godot (ibid., p. 131) mentionne que : « L'utilisation exclusive du jeu matériel semble donc apparaître comme un obstacle à une validation mathématique des résultats. » De plus, l'auteur rajoute (p. 132) que « cela semble être un obstacle à la formulation et à la généralisation des résultats, si le joueur ne parvient pas à s'en détacher. ».

[12]Voir page ? ? ? ? ? pour une caractérisation

Un autre médian utilisable pour cette situation est l'ordinateur à travers un programme dans lequel les élèves pourraient fixer eux-même la taille du rectangle[13], en particulier dans la situation étudiée par Godot (ibid.). Le fait de laisser les élèves fixer eux-même les variables du problème facilite la mise en place de généralisation. Ainsi, l'utilisation d'un logiciel informatique pourrait permettre de disposer d'un « matériel » de taille « quelconque » et de sa propriété de facilitateur d'expériences et de généralisations. Cependant, il a pour inconvénient de nécessiter une autre organisation de la classe en emmenant les élèves en salle informatique.

Lorsque cette situation est jouée en solitaire, nous pouvons penser que l'utilisation d'un logiciel informatique jouant le donneur de couleur en choisissant aléatoirement la frontière peut être pertinente. En effet, cela permet à l'élève de jouer de véritables parties sans avoir à prendre le rôle du donneur de couleur, lui permettant ainsi d'expérimenter plus rapidement en se confrontant à diverses frontières qui ne sont pas choisies par lui. Cette possibilité de répéter les expériences est selon Perrin (2007) et Borwein (2005) l'un des avantages des outils informatiques, qui permettent ainsi de repérer plus rapidement les conjectures fausses. Toutefois, cela peut avoir les même inconvénients que le matériel et pose des questions concernant l'algorithme que l'ordinateur utilise pour « jouer ».

Il nous faut aussi signaler qu'il peut être pertinent, lorsqu'on a obtenu une formule d'un majorant et celle d'un minorant, d'utiliser un logiciel de calcul formel pour étudier leur différence. Dans le cas où les élèves arrivent à obtenir des formules de ce type, il sera peut être intéressant de leur proposer d'effectuer des expériences à l'aide d'un logiciel de calcul formel, mais avant cela, l'utilisation d'un tel logiciel ne se justifie pas.

7.2. Questions et éléments de validation. Dans son analyse de la situation du flocon de Van Koch, Bloch (2005, p. 28) détermine les différentes questions et éléments de validation qui pourraient permettre aux élèves de valider leurs résultats. Dans le cas où certains éléments ne sont pas produits par les élèves eux-mêmes, le gestionnaire peut décider de les introduire ou de poser des problèmes susceptibles de les faire apparaître. Nous allons maintenant chercher à identifier ces éléments.

Nous avons dans la sous-section 5.3 déterminé les types de preuves associés à la situation et dans la sous-section 5.2 les conjectures et les arguments pouvant les supporter. Cela va nous permettre de déterminer les éléments de validation qu'il est possible d'introduire en fonction des problèmes étudiés par les élèves.

Recherche d'un minorant (P_{-}) : pour aider les élèves à déterminer des arguments leur permettant d'effectuer des preuves concernant l'optimalité au pire d'un algorithme, l'enseignant peut poser les problèmes[14]suivants : est-ce qu'il est possible de trouver la frontière en 1 interrogation ? en 2 interrogations ?... En introduisant ces problèmes dans la conception des élèves, l'objectif est que les

[13]D'ailleurs, une telle version du jeu existe sur la valise Maths à Modeler à l'url suivante : `http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/LAVALISE/Frontiere/Stage2.html`. Toutefois, le logiciel propose une aide pour donner les couleurs, aide qui ne peut être désactivée.

élèves s'approprient cette nouvelle problématique afin d'obtenir un intervalle efficace pour l'optimum.

De plus, cette nouvelle problématique est reliée, de manière directe, à celle du donneur de couleur (lorsque la frontière n'est pas fixée). De ce fait, il nous paraît important, pour faciliter son apparition, que le donneur soit autorisé à « bouger » la frontière.

Preuve par exhaustivité des cas : ce type de preuve peut être amené par une suite d'expériences validatives, en effet ce type d'expérience a pour objectif un problème d'existence, qui consiste en la recherche d'un objet appartement à un ensemble E et vérifiant une propriété. En expérimentant sur des objets de E, nous pouvons être amené à observer que nous avons testé tous les objets de E et ainsi conclure qu'un tel objet n'existe pas.

Toutefois, il se peut que ce type de preuve ne soit pas reconnu comme étant valide par les élèves, du fait qu'elle soit basée sur une étude d'exemples. Le rôle du gestionnaire peut alors être d'introduire ce type de preuve ou de le désigner aux élèves comme étant valide mathématiquement.

De plus, face à des arguments tels que : « nous avons tout essayé », le gestionnaire peut introduire les questions qui suivent pour essayer de transformer cet argument en une preuve par exhaustivité des cas ou pour permettre sa réfutation : est-ce que vous êtes sûrs que vous avez testé tous les cas ? comment êtes vous sûrs d'avoir testé tous les cas ?

Preuve par majoration du reste : nous faisons l'hypothèse que ce type de preuve a peu de chances d'apparaître de manière adidactique pour des élèves du secondaire ou du primaire. Ce type de preuve correspond à un passage au dual du problème. C'est une technique très utilisée en optimisation discrète mais qui n'est pas au programme du secondaire ou du primaire.

Toutefois, en essayant de résoudre le problème pour des segments, il est possible que ce type de preuve émerge. En effet, sur un segment, nous faisons l'hypothèse que l'algorithme dichotomique va apparaître, ce qui peut permettre l'apparition du problème : *est-ce qu'il est possible de faire mieux que diviser par deux ?* La résolution de ce problème permet de prouver l'optimalité au pire de l'algorithme dichotomique en effectuant une preuve par majoration du reste. Le modèle utilisé par les élèves — frontières ou points — déterminera alors la complexité de la généralisation de la preuve. Il n'est toutefois pas certain que les élèves essayent de généraliser cela aux rectangles, car il est alors nécessaire de se détacher de la ligne et de ne voir que des quantités qui diminuent à chaque interrogation. L'enseignant pourrait alors introduire la question suivante : *est-ce qu'il est possible d'utiliser le même type d'arguments pour les*

[14] C'est un des procédés qui est utilisé pour entraîner les élèves vers la recherche d'un minorant élevé pour la situation de la chasse à la bête, les questions sont alors du type : est-ce qu'il est possible d'empêcher la bête de venir dans le jardin avec 1 piège ?

rectangles ?. Cette question semble implicitement dire que c'est possible. Une autre formulation moins empreinte d'implicite pourrait alors être celle-ci : « je n'ai aucune idée de si c'est possible, mais si vous arrivez à utiliser des arguments similaires sur des rectangles, ce serait intéressant car cela nous fournirait un minorant. ». De manière général, ce type de discours peut être intéressant pour amener les élèves à effectuer des généralisations tout en restant neutre.

Preuve par algorithme de défense : c'est un type de preuve utilisable pour montrer qu'un nombre est un minorant au nombre de coups optimal d'un algorithme ou de tous les algorithmes, il consiste à exhiber un algorithme de défense qui empêche le chercheur de trouver la frontière en moins d'interrogations que ce nombre. La construction de tels algorithmes est le rôle du donneur de couleur lorsqu'on autorise la frontière à « bouger ». Ces algorithmes seront donc, a priori, présents dans le milieu, toutefois cela n'assure pas que les élèves vont les utiliser comme des outils de preuve. Pour introduire dans le milieu ce type de preuve, l'enseignant peut poser la question suivante : comment est-ce que vous joueriez pour empêcher l'adversaire de trouver la frontière en moins de X coups ? ou : si quelqu'un te dis qu'il trouve la frontière en X coups, comment ferais-tu pour lui montrer que c'est impossible ? Comment jouerais-tu contre lui ? Remarquons que ces questions peuvent aussi mener à la production de preuves d'impossibilité par l'absurde.

Ce type de preuve dispose de son analogue pour les algorithmes de défense pour obtenir des majorants.

Preuve par exhibition de frontière : ce type de preuve peut s'employer pour montrer des résultats du même type que les preuves par algorithme de défense. Il consiste à montrer qu'un algorithme ne permet pas de trouver cette frontière avec un nombre d'interrogations données. Ce type de preuve est une sous-classe des algorithmes de défense. En effet, comme vu dans l'analyse mathématique, à toute frontière nous pouvons associer un algorithme de défense global. Cependant, la réciproque est fausse car un algorithme de défense global ne renvoit pas nécessairement la même frontière pour deux algorithmes de recherche différents.

Contre-exemples : nous avons vu dans l'analyse mathématique et épistémologique que les contre-exemples jouent un rôle crucial dans l'avancer de la recherche. En mettant de côté la difficulté que peut représenter la détermination d'un contre-exemple à un résultat. Nous faisons l'hypothèse que la pratique de la démarche expérimentale va favoriser l'apparition de preuve de ce type.

Une question de gestion qui se pose est de savoir si l'enseignant doit, connaissant un contre-exemple, intervenir pour en faire part aux élèves. Il peut essayer d'introduire le contre-exemple dans la conception sans le faire apparaître comme tel, par exemple avec la question suivante : « et si vous essayez sur ça, est-ce que cela marche ? ». Il peut être intéressant que le gestionnaire pose ce genre de questions même pour des exemples qui ne sont pas des contre-exemples pour que les élèves n'interprètent pas l'objet de la question comme un contre-exemple. En particulier, pour éviter que le gestionnaire soit constamment en train de « jouer un rôle » et de « mentir », il est nécessaire qu'il soit confronté à des résultats qu'il ne sait ni prouver, ni réfuter. Ceci a aussi l'intérêt de rendre le gestionnaire plus « humain » et ainsi de réduire les effets du contrat didactique usuel. Ce jeu didactique du gestionnaire peut aussi être utilisé pour les pistes de recherche, les idées... En particulier, c'est pour cela, qu'il est intéressant que le gestionnaire soit en position (réelle) de collaborateur afin que les élèves s'aperçoivent qu'il n'est pas « infaillible » sans avoir à jouer un rôle.

Toutefois, comme déjà mentionné, il faut faire attention à l'implicite qui peut se dégager des interventions du gestionnaire, il est selon nous préférable d'intervenir lorsque le nouveau contrat didactique a été mis en place pour laisser la responsabilité de la recherche aux élèves. En particulier, il nous semble important de laisser, le plus longtemps possible[15], la responsabilité de la validation des résultats aux élèves.

De plus, ce qu'il reste à déterminer est le moment auquel il est préférable d'effectuer ces interventions. De manière naïve, nous répondrions qu'il faut avoir laissé les élèves chercher un certain temps pour leur donner le temps de déterminer eux-même un contre-exemple ou une preuve, mais nous pensons qu'il est difficile de déterminer le moment propice (s'il existe) et que cette question reste à traiter.

7.3. Variables de la situation. Une première variable est le fait d'autoriser ou non le donneur à « bouger » la frontière. La situation 0 occulte toute la problématique relative au donneur de couleur. De ce fait, les preuves par algorithme de défense risquent de ne pas apparaître au profit de preuves par exhibition de frontière. En effet, dans ce cas, l'optimalité de la situation se modélise par une optimalité sur l'ensemble des frontières et non pas sur l'ensemble des algorithmes de défense. Les autres variables didactiques de la situation sont des instances du problème, la forme (rectangle ou carré), les dimensions et le médian utilisé.

a) Les formes que nous pouvons utiliser sont le segment, le carré et le rectangle. Le segment est un cas dégénéré de rectangle ou de carré mais ne peut être vu comme analogue, car il ne possède que deux extrémités. Nous faisons l'hypothèse que la spécification du problème aux segments peut apparaître de manière adidactique, car nous prévoyons l'apparition d'algorithme de type coins. Toutefois, le problème que nous sommes amenés à résoudre n'est pas le problème général sur les segments mais un sous-problème où une/les extrémité(s) sont coloriées.

[15]Le plus longtemps possible, car si nous pensons que les élèves peuvent effectuer une preuve du résultat, la validation de la preuve - dire si la preuve est correcte ou non - ne peut être effectuée que par le gestionnaire de la situation. En particulier, nous pensons qu'il est indispensable que le gestionnaire de la situation intervienne pour donner le statut de « correcte » à une preuve.

Par rapport à l'évaluation des algorithmes (P_{eval}), le carré et le rectangle sont analogues. Toutefois, de manière générale, le carré apparaît comme moins « technique » à traiter que le rectangle du fait qu'il ne dépend que d'une seule dimension. Les calculs sont ainsi simplifiés pour le carré.

b) Les dimensions des rectangles influent sur les types de preuve que nous pouvons utiliser. Sur des objets de petite dimension, il est possible de mettre en place des preuves par exhaustivité des cas ou d'utiliser des preuves par exhibition de frontière. Cependant, pour obtenir des minorants sur des objets de dimensions plus grandes, il est nécessaire de mettre en place d'autres types de preuves comme la preuve par majoration du reste.

D'autre part, travailler sur des rectangles/carrés de petite dimension peut permettre d'obtenir des résultats prouvés concernant l'optimum ou l'optimalité d'un algorithme. Ces résultats peuvent alors être utilisés pour supporter des conjectures portant sur l'ensemble des rectangles ou des carrés.

c) Nous avons identifié trois outils d'expérimentations possibles pour cette situation : papier-crayon, matériel et informatique. Nous avons déjà vu quels pouvaient être les intérêts et les inconvénients de chacun dans la sous-section 7.1.

Il nous semble que parmi ces variables, les plus pertinentes pour être des variables de recherche sont la forme et la dimension. Elles sont pertinentes, car elles laissent la possibilité de poser de nouveaux problèmes (convexité, segment, modèle-point, modèle-frontières...), d'obtenir des résultats pour des objets de petite dimension, de permettre d'expérimenter sur un grand échantillon d'objets, qu'elles laissent[16]la possibilité de généraliser des stratégies/algorithmes, qu'elles autorisent la mise en œuvre des différents types de preuves que nous avons identifiées...

D'autre part, même si l'étude que nous avons menée se limite aux rectangles, nous pourrions laisser les élèves libre de choisir la forme qu'ils souhaitent ou proposer d'autres formes, en particulier convexes. L'intérêt de proposer d'autres formes convexes peut être de se rendre compte que ces formes ont une structure commune à travers la présence de points extrémaux, structures que nous pouvons utiliser pour concevoir un algorithme de recherche. La reconnaissance de cette structure joue un rôle important dans la résolution sur des convexes de ce problème. En effet, la résolution peut se faire par classification des convexes par nombre de points extrémaux (voir annexe).

Enfin, laisser complétement libre la variable forme peut entraîner l'apparition de forme non convexe. Tant que la forme est connexe, il est possible de résoudre ce problème de manière analogue aux convexes, toutefois nous ne savons pas comment classifier de telles formes pour obtenir des résultats généraux. Il nous semble préférable de s'attaquer à des formes non-convexes (connexes) comme une nouvelle piste de recherche une fois les convexes traités (ce qui est déjà suffisament ambitieux !).

[16]Nous faisons l'hypothèse que face à un problème dont les variables sont fixées les élèves ne vont pas chercher à résoudre le problème en leurs donnant des valeurs différentes

La variable outil peut être laissée à la charge de l'élève mais ne nous semble pas pouvoir être qualifiée de variable de recherche du fait que sa prise en charge par l'élève ne permet pas la génération de nouveaux problèmes mathématiques. Toutefois, il peut être intéressant d'autoriser l'élève à choisir les outils avec lesquels il veut expérimenter, nous considérons que cela fait aussi partie du processus de démarche expérimentale que de décider quel est l'outil le plus adapté à utiliser[17].

Quant à la décision de fixer la frontière, il nous semble préférable qu'elle reste, au moins au début, à la charge de l'enseignant, car c'est une variable sur laquelle il est possible de jouer pour faciliter la dévolution de la situation. En effet, il peut être intéressant de commencer la situation en fixant la frontière afin de faciliter la dévolution du problème puis ensuite d'introduire la règle selon laquelle il est possible de bouger la frontière durant le jeu. Comme déjà mentionné précédemment, l'introduction de la problématique du second joueur est pertinente puisqu'elle permet d'introduire le problème du donneur, ce qui peut amener à établir une relation entre ce problème et celui de la recherche du minorant et ainsi à mettre ne place des preuves par algorithme de défense.

7.4. Difficultés et obstacles possibles. Dans cette sous-section, nous allons essayer de prévoir les difficultés que les élèves pourraient rencontrer et de déterminer des solutions employables par le gestionnaire pour aider les élèves à les franchir. Les difficultés que nous mentionnons dans cette partie ne sont pas nécessairement des difficultés issus d'absences de relation entre des problèmes. Elles peuvent être de nature technique. Voici les difficultés que nous avons identifiées :

De l'informel au formel : Dans (Cai et Cifarelli, 2005), les auteurs mettent en avant le fait que chez les élèves, la construction d'algorithme est souvent guidée par une idée informelle. Une des difficultés est alors de transformer l'idée informelle en un algorithme. Ils soulignent que ce processus est lié à la généralisation. Une des difficultés de la situation peut donc être le passage de la stratégie à l'algorithme. Cela met en jeu des connaissances sur les algorithmes, notamment au niveau de la formulation, et nécessite la prise de conscience de l'importance d'obtenir un procédé fiable. Il nous semble aussi qu'il faut distinguer deux cas : l'algorithme dont le domaine d'application est un objet donné (un rectangle avec les dimensions fixées/ un algorithme) et l'algorithme dont le domaine d'application est un ensemble d'objets (l'ensemble des rectangles/ un ensemble d'algorithme). En effet, il nous semble que le processus de généralisation n'intervient que dans le second cas. Cette

---

et à généraliser. Nous considérons que c'est l'un des effets du contrat didactique usuel. D'autre part, cela pose le problème de l'identification des variables.

[17]Dans tous les cas, même si ce n'est pas notre objectif dans cette thèse, nous considérons que l'intégration des TICE pour résoudre des problèmes doit avoir pour but de déboucher sur une autonomie expérimentale de l'élève dans laquelle les élèves expérimentent avec les outils qu'ils jugent les plus pertinents.

difficulté porte donc sur la production d'algorithme et en particulier sur la nécessité de prouver qu'ils déterminent la frontière ou sont cohérents quelque soit la manière dont joue l'opposant.

Le rôle du gestionnaire est de faire prendre conscience de cette nécessité à mathématiser les stratégies et d'aider les élèves dans la formulation des algorithmes. Toutefois, comme mentionné à la sous-section 5.2, nous ne savons pas comment inciter les élèves à formaliser et surtout à rendre cela nécessaire. Une solution est peut-être de pousser les élèves à écrire leurs stratégies, à les détailler et à généraliser. Concernant le dernier point, il apparaît comme pertinent de faire travailler les élèves sur des ensembles d'objets plutôt que sur un unique objet.

Minoration: Nous avons aussi identifié des difficultés liées à une absence de relation entre problème, par exemple entre $P_{nombreD}$ et P_-.

Concernant les obstacles, nous ne nous sommes pas limités aux obstacles épistémologiques ou transversaux.

Ça marche tout le temps : Une des difficultés que l'utilisation de l'expérimental peut générer est celui de ne pas aller plus loin qu'une justification expérimentale : un résultat est vrai, car il n'a jamais été mis en défaut dans nos expériences. Le gestionnaire peut alors intervenir en posant les questions suivantes : *Comment est-ce que vous êtes sûrs que cela va se reproduire tout le temps ? Existe-t'il un cas pour lequel c'est faux ? ˆEtes vous sûr d'avoir testé tous les cas ? Comment êtes-vous sûrs d'avoir testé tous les cas ?* Ces questions pourraient aussi être posées par un autre élève.

Il peut aussi être intéressant pour le gestionnaire, si c'est possible, d'introduire un contre-exemple pour invalider cette conception. Cependant, cette solution n'est utilisable que si le résultat admet effectivement un contre-exemple. L'introduction des contre-exemples ne doit se faire que lorsqu'on estime que ceux-ci sont hors de portée[18]des élèves.

Nous pouvons, ici, parler d'obstacle didactique, car il provient d'une conception erronée sur l'activité mathématiques.

Minorant/majorant : L'obstacle vient de la relation entre $P_{nombreC}$ ($P_{nombreD}$) et P_- (P_+). L'erreur est de considérer qu'une solution de $P_{nombreC}$ ($P_{nombreD}$) est une solution de P_- (P_+). Cet obstacle est donc dû à une conception erronnée sur condition nécessaire/suffisante. Un moyen permettant de franchir cet obstacle est de trouver un contre-exemple.

Étape : C'est l'obstacle issu de la relation entre $P_{opt.etp.}$ et $P_{chercheur}$ ou $P_{donneur}$. Il est basé sur une conception dans laquelle une optimalité par étape entraîne une optimalité au pire. Cette conception

[18]Nous considérons que la détermination d'un contre-exemple est hors de portée lorsqu'il est trop complexe pour être déterminer par les élèves et lorsque, manifestement, du fait des choix effectués par les élèves, il ne va pas être découvert.

peut être réfutée à l'aide de contre-exemples, par exemple l'un de ceux présentés dans l'analyse mathématique.

Si tu bats le meilleur, t'es le meilleur : C'est l'obstacle issu de la relation entre P_{loc} et $P_{chercheur}$. Il est basé sur une conception : si un algorithme est localement optimal contre un algorithme optimal alors il est optimal au pire des cas. Un moyen de mettre en défaut cette conception est d'utiliser des contre-exemples.

local/global : Une autre conception possible est le fait qu'un algorithme A est plus rapide qu'un algorithme B, car il existe une frontière ou un algorithme de défense pour lequel A est plus rapide que B. Cet argument est insuffisant, il prouve juste que localement B est plus rapide que A. Une interprétation possible de cette conception est la considération d'une optimalité ultime[19](voir page **??**), c'est-à-dire d'estimer que l'algorithme de recherche est optimal lorsqu'il est optimal contre tout algorithme de défense ou frontière. Pour cette définition de l'optimalité, cette conception est correcte, car effectivement B est un contre-exemple au fait que A soit optimal. De ce fait, ce raisonnement n'est pas faux, une discussion sur quelle optimalité nous allons choisir est alors nécessaire.

Toutefois, dans le cas où l'optimalité choisie est celle au pire, cette conception est réfutable à l'aide d'exemples. Cela peut aussi être vue comme une erreur dans la négation de l'optimalité qu'elle soit au pire ou ultime.

Remarque : Certains obstacles que nous avons identifiés sont transversaux à l'ensemble des problèmes d'optimisations discrètes comme minorant/majorant et local/global. D'ailleurs nous retrouvons certains de ces obstacles dans la situation de la chasse à la bête ou encore dans des problèmes de coloration.

8. Niveau des élèves et difficulté de la situation

Les éléments d'analyse précédents nous permettent ainsi de faire l'hypothèse suivante pour des élèves de niveau supérieur à fin de primaire concernant la situation *chercher la frontière* :

Hypothèse

(1) la construction d'un algorithme est une tâche accessible ;

(2) la détermination du nombre d'interrogations utilisées est une tâche accessible pour des rectangles particuliers et difficile pour l'ensemble des rectangles ;

[19]remarquons que nous pouvons penser qu'un algorithme ultime commence nécessairement par interroger les quatres coins à cause de la frontière vide (dont nous faisons l'hypothèse qu'elle est l'un des exemples les plus « marquants » de la situation). De ce fait, considérer implicitement une optimalité ultime peut impliquer de ne considérer comme optimaux que des algorithmes commençant par interroger les coins.

(3) l'évaluation d'un algorithme est une tâche accessible sur des rectangles de « petites » dimensions, complexe pour des rectangles de « grandes » dimensions et « très » complexe pour l'ensemble des rectangles ;

9. Récapitulatif des hypothèses et des questions de recherche

Nous rappelons notre hypothèse de recherche principale :

Hypothèse de recherche 3

Les élèves, de niveau collège ou supérieur, sont capables de rentrer dans une démarche expérimentale en mathématiques et celle-ci leur permet d'« avancer » dans la résolution du problème.

Pour vérifier cette hypothèse, nous allons d'une part vérifier que les élèves ont effectuées les actions caractéristiques ainsi que les interactions menant à expérimenter d'une démarche expérimentale (voir chapitre ? ? ? ? ? ? page ? ? ? ?) :
– proposer de nouveaux problèmes ;
– expérimenter-observer-valider ;
– tenter de prouver.

D'autre part, pour étudier l'effet de la démarche expérimentale sur l'avancée de la recherche, définie comme une évolution de la conception des élèves sur le problème, il nous faudra prendre en compte les différents éléments constitutifs d'une telle conception, c'est-à-dire les problèmes, les invariants et les représentations. La prise en compte de ces différents éléments nous permettra de faire une hypothèse sur la conception des sur *Chercher la frontière* et ainsi, en confrontant celle-ci avec le concept-problème, d'identifier les obstacles, les difficultés et les problèmes ou représentations manquants.

De plus, étant donné que notre problème admet des sous-problèmes de construction de solution admissible, nous essaierons de vérifier l'hypothèse suivante :

Hypothèse de recherche 4

Le développement d'une validation du produit de la stratégie « fiable » de problèmes de construction de solution (admissible) est une condition nécessaire à l'avancée de la résolution du problème de recherche de solution de manière expérimentale.

Enfin, nous nous intéresserons aux interventions du gestionnaire dans le but d'affiner la gestion de la situation et de vérifier que les conditions de gestion décrites au chapitre ? ? ? ? page ? ? ? ? ont bien été vérifiées.

Nous allons maintenant détailler les questions relatives à ce que nous avons mentionné précédemment, mais tout d'abord, intéressons nous à la dévolution de la situation.

9.1. Dévolution. Pour cette situation, nous devons non seulement expliquer le jeu mais surtout dévoluer le problème mathématique. Nous essaierons donc de répondre à la question suivante : l'objectif de la situation pour les élèves est-il de résoudre le problème mathématique ? Pour cela, nous considérerons que l'objectif est bien le problème mathématique lorsque les élèves s'écartent des positions de donneurs et de chercheurs pour tenter de déterminer les meilleurs stratégies de recherche ou de défense.

De plus, nous avons vu que le problème se décompose en deux sous-problèmes importants[20] : celui du chercheur et celui du donneur. Nous chercherons donc aussi à étudier la dévolution de ces deux sous-problèmes.

9.2. Démarche expérimentale. Relativement à l'hypothèse de recherche 1, nous avons dans un premier temps chercher à observer les actions suivantes ainsi que les intéractions avec expérimenter chez les élèves :
- proposer de nouveaux problèmes ;
- expérimenter-observer-valider ;
- tenter de prouver.

Puis pour répondre à l'hypothèse de recherche 2, nous nous intéresserons à aux problèmes et aux relations, aux conjectures et arguments, aux stratégies développées et aux nouveaux objets construits par les élèves.

9.2.1. *Nouveaux problèmes et modélisation.* Nous essaierons donc de répondre à la question suivante : quels sont les nouveaux problèmes étudiés par les élèves ? Cela et l'optimalité choisie par les élèves, nous permettra de déterminer les modèles utilisés par les élèves.

Nous avons identifié, partie ? ? ? chapitre ? ? ? ? page ? ? ? ? ?, les actions expérimentales suivantes susceptibles d'engendrer de nouveaux problèmes :
- tenter de prouver : mise en place d'un plan de preuve ;
- tenter de prouver : formulation d'une conjecture ;
- expérimenter : validation des faits ;
- expérimenter : structuration de la stratégie.

Nous essaierons ainsi de déterminer le rôle de l'expérimental dans la formulation de nouveaux problèmes en référence à cela.

La détermination des nouveaux problèmes nous permettra aussi de savoir quels sont les variables du problèmes qui ont été des variables de recherche effectives.

Nous ne traiterons pas des problèmes-conjectures ici, car nous allons les étudier aussi du côté de l'argumentation et de la preuve.

9.2.2. *Conjectures et arguments.* Nous chercherons à répondre aux questions suivantes :

(1) Quels sont les conjectures et les arguments qui les supportent émis par les élèves ?
(2) Quel est le rôle joué par l'expérimental dans la production et la validation des conjectures ?

9.2.3. *Stratégies développées.* Nous essaierons de répondre à la question suivante : quels sont les stratégies de construction développées par les élèves ? En particulier, concernant les stratégies nous faisons l'hypothèse suivante : les élèves peuvent rencontrer des difficultés à transformer une stratégie en un algorithme.

Nous essaierons aussi de déterminer le rôle que l'expérimental a joué dans la construction de ces stratégies, en particulier de déterminer comment

[20] En particulier, au niveau de la preuve.

les expérimentations génératives ont participé à la construction de stratégies et, pour répondre à l'hypothèse de recherche 2, comment les élèves ont-ils traité le problème de validation du produit de la statégie ?

9.2.4. *Nouveaux objets.* Quels sont les nouveaux objets qui apparaissent ? Deviennent-ils objets d'étude ? Quel rôle a joué l'expérimental dans la construction de ces objets ?

Nous faisons l'hypothèse que les définitions vont dans un premier temps être énoncées de manière descriptive et que sans intervention du gestionnaire les élèves ne vont pas les faire évoluer vers des énoncés plus « mathématiques ».

9.3. Conception des élèves, avancée dans la recherche, obstacles, difficultés et problèmes ou représentations absents. Les réponses aux question précédentes devraient nous permettre d'établir une conception des élèves sur *Chercher la frontière*, une conception développée est le signe d'une avancée dans la recherche. De plus, en comparant cette conception avec le concept-problème, cela nous permettra d'identifier des obstacles, des difficultés et des problèmes ou représentations absents.

Nous chercherons aussi à savoir si les difficultés et obstacles mentionnées (page ? ? ? ? ? ?) ont été présents.

CHAPITRE XII

Première situation expérimentale

1. Choix du niveau

Nous avons choisi de faire nos expérimentations dans une classe de seconde, nous allons dans cette section expliqué les raisons de ce choix.

Le premier argument concerne le niveau des élèves. L'analyse mathématique et didactique de la situation nous ont amené à faire l'hypothèse qu'une résolution partielle[1]de la situation pour des rectangles est possible pour des élèves de niveau collège ou supérieur. De ce fait, des élèves de seconde sont, sous cette hypothèse, susceptible de résoudre partiellement le problème. D'autre part, comme la seconde est une classe « médiane » entre le lycée et le collège, effectuer une expérimentation à ce niveau peut permettre d'effectuer une « dichotomie » sur les niveaux, c'est-à-dire si effectivement les élèves de seconde sont capables de résoudre partiellement le problème alors pour confirmer ou infirmer le niveau d'accès à la situation, il nous faudrait expérimenter en collège, si ce n'est pas le cas, il nous faudrait nous tourner vers des classes de terminale ou de niveau supérieur.

Un deuxième argument concerne les préconisations institutionnelles concernant les classes de seconde pour lesquelles l'algorithmie est devenue un thème important ces dernières années.

Un trosième argument est le fait qu'à l'issue de la classe de seconde, les élèves doivent faire un choix concernant leur orientation, les SiRC sont alors un moyen de leur faire découvrir une activité scientifique, leur permettant ainsi de faire le choix qui leur correspond le mieux.

2. Présentation et découpage des séances

2.1. Présentation de l'expérimentation. Cette expérimentation s'est déroulée dans une demi-classe de seconde du lycée international de Grenoble. Le découpage et la construction des séances ont été effectués en accord avec l'enseignant responsable de cette classe. Le nombre d'élève était de 7 sauf pour la dernière séance à cause d'un voyage scolaire. Nous avons demandé aux élèves de se mettre par groupe de 2 ou 3, la classe a été décomposée en 3 groupes. Nous avons effecuté 4 séances d'approximativement 1h30.

Nous avons pris des notes mais aussi filmé un ou deux groupes à chaque séance. Nous avions prévu de filmer deux groupes à chaque séance mais nous avons dû faire face à des problèmes techniques concernant une caméra.

Lors des deux premières séances, deux autres observateurs, en plus de l'enseignant et de moi-même, étaient présents. Chaque groupe a reçu du matériel avec lequel il pouvait jouer, ce matériel était composé de plateaux

[1]Par résolution partielle, nous entendons la résolution mathématiques complète (jusqu'à l'obtention d'une preuve) de certains sous-problèmes.

quadrillés de dimensions 7×7[2]ainsi que de jetons servant à donner les couleurs aux cases du plateau. Les dialogues des élèves parlent de plateau 8 par 8 pour un plateau de dimensions 7×7.

2.2. Découpage des séances prévu. Nous avions prévu le découpage de séance suivant :

Séance 1 : Présentation du problème dans laquelle le donneur n'est pas autorisé à bouger la frontière. Nous demandons ensuite aux élèves de jouer. Le but de cette séance est l'explication du jeu ainsi que la dévolution du problème. À la fin de la séance, nous demandons aux élèves de rédiger leurs réponses aux questions suivantes :
- Quelles sont les stratégies que vous avez adoptées ?
- En combien de coups êtes-vous sûr de trouver la frontière ?
- Avez-vous trouver d'autres résultats ? Si oui, lesquels ?

Commentaire 1 : Nous avons fait le choix de commencer par la situation S_0 pour faciliter l'explication et la dévolution du problème. De plus, les questions, posées en fin de séance, ont pour but de faire formuler par écrit les différentes stratégies et les justifications produites par les élèves. La troisième question a pour objectif d'apprendre aux élèves ce qu'est un résultat mathématique. En particulier, nous faisions l'hypothèse que les élèves n'allaient pas écrire un résultat qu'ils auraient énoncé lors de la première séance, nous prévoyions d'utiliser ce résultat pour expliquer aux élèves ce qu'est un résultat au cours d'une recherche.

Nous faisions l'hypotèse que les élèves allaient expérimenter avec le matériel fourni pour résoudre le problème.

Séance 2 : Nous commençons par faire un récapitulatif des différentes stratégies et résultats que nous avons pu observer dans les réponses écrites des élèves. Une fois ce récapitulatif terminé nous laissons les élèves poursuivre leur recherche. Nous intervenons ensuite au milieu de la séance pour généraliser le problème et poser la question suivante : comment simplifieriez-vous le problème ? Nous leur demandons ensuite de tenter de résoudre le problème sur certaines valeurs qu'ils ont émises. À la fin de la séance, nous demandons aux élèves de rédiger leurs réponses aux questions posées à la fin de la séance 1.

Commentaire 2 : Nous avons fait le choix de généraliser le problème en milieu de séance, car nous faisons l'hypothèse que les élèves ne vont pas généraliser et simplifier le problème d'eux-mêmes. De plus, nous faisons l'hypothèse que les élèves pour simplifier le problème vont proposer les formes que nous avons identifiées (segment et carrés de petites dimensions). Ces formes sont pertinentes didactiquement (car elles mettent en jeu d'autres types de preuves) et mathématiquement (car elles permettent d'obtenir des premiers arguments de minoration). Nous avons décidé de ne pas faire ce choix avant dans le but montrer aux élèves l'intérêt qu'il peut y avoir à s'autoriser à changer les variables d'un problème.

[2]Dimensions 7×7 correspond à un plateau carré de côté composé de 8 cases.

Séance 3 : Nous avions prévu deux possibilité pour le début de cette séance : récapitulatif ou recherche. Récapitulatif dans le cas où les élèves auraient obtenu des résultats prouvés concernant des petits cas lors de la séance précédente. Dans le cas contraire, nous laissons les élèves continuer à chercher. Ensuite, dans les deux cas, nous autorisons le donneur de couleur à bouger la frontière et nous les incitons à jouer sur le carré de taille é $\times$ 2 (3 cases de côté). Les élèves sont alors confrontés à la situation S_1.

Commentaire 3 : Nous demandons explicitement aux élèves de chercher sur le 2×2, car nous avons fait le choix didactique de mettre en avant le problème de minoration plutôt que le problème de la généralisation des algorithmes utilisés. Nous avons dû faire ce choix du fait du peu de nombre de séances possibles. Nous ne pouvons donc pas parler de véritable situation de recherche pour cette expérimentation, car nous ne laissons pas les élèves gérer leur recherche complétement[3].

De plus, comme déjà vu lors de l'analyse didactique de la situation, nous faisons l'hypothèse qu'autoriser le donneur à bouger la frontière permet aux élèves de produire des preuves de minoration par algorithme de défense.

Séance 4 : Nous commençons la séance par un bilan des stratégies et des résultats que les élèves ont produit concernant le 2×2, en particulier le gestionnaire est amené à parler des stratégies de défense. Ensuite, nous relançons le problème sur le plateau initial. À la fin, nous demandons aux élèves de préparer un poster afin de le présenter à la classe ou de l'afficher dans la salle.

Commentaire 4 : Le but de cette séance est d'essayer de généraliser les arguments utilisés pour le 2×2 sur le plateau initial. Nous n'avions pas prévu de séminaire pour cette classe, d'où la préparation d'un poster.

Les fiches descriptives de ces séances se trouvent en annexe (voir ? ? ? ? ? ? ?). Toutefois, nous avons d'une séance à l'autre modifié ce découpage pour obtenir un découpage différent (voir ? ? ? ? ?). À la fin, nous avions effectué les modifications suivantes :

Séance 2 : Nous avons remarqué que, lors de la séance 1, deux groupes[4] ont utilisé le théorème coins-directions (voir page **??**), nous avons donc décidé de présenter ce résultat à la classe et de demander son avis au groupe qui ne l'avait pas utilisé. Ce résultat n'avait pas été écris par les élèves. Ce choix a été fait pour permettre au troisième d'accéder à ce résultat et afin de montrer aux élèves que bien que ce résultat ne résolve pas le problème, il est très intéressant pour sa résolution.

Une différence par rapport à ce qui était prévu initialement, est que nous avons décidé d'introduire l'évolution dans le rôle du

[3] Si les élèves décident de s'attaquer à un autre problème. Suivant ce problème, nous pouvons les laisser continuer.

[4] Dont un en-acte.

donneur en lui demandant de maximiser le nombre de coups du chercheur, donc de commencer S_1 plus tôt que prévu. Nous avons fait ce choix afin d'introduire plus vite le problème du donneur afin de permettre l'apparition du type de preuve par algorithme de défense. De plus, il n'y a pas eu de difficulté d'interprétation de l'énoncé du problème. Nous avons fait le choix didactique de favoriser le problème de minoration. Nous avons dû effectuer ce choix compte tenu du nombre de séance, il nous semblait intéressant que les élèves essayent de résoudre ce problème à cause des raisonnements/connaissances en jeu avec celui-ci ainsi que de sa relation avec le problème original.

Séance 3 : Nous avons décidé de laisser les élèves continuer à chercher une réponse au problème suivant : peut-on trouver la frontière en 5 interrogations sur le 7×7 ?, qui avait été formulée par les élèves à la fin de la séance précédente.

Initialement, lors de la séance 3, il était prévu de généraliser et de simplifier le problème mais nous avons décidé que, plutôt que de proposer de nouveaux problèmes aux élèves, il était intéressant de leur donner du temps pour chercher sur le 7×7, en particulier dans le but de trouver des arguments de minoration mais aussi de leur permettre d'avoir le temps de répondre à un de leur problème. Ce choix est aussi guider par la volonté de mettre en avant le problème de minoration, en effet en changeant les instances du problème, il nous a semblé que les élèves allaient dans un premier temps se consacrer sur le problème de détermination d'un algorithme de recherche ainsi que sur son évaluation.

Séance 4 : C'est lors de cette séance que nous avons introduit le problème généralisé en leur demandant comment le simplifier. L'objectif était que les élèves cherchent sur le carré 1×1 ainsi que sur le segment de manière générale afin qu'ils mettent en place une preuve par exhaustivité des cas pour le carré 2×2 et qu'ils généralisent la dichotomie pour le segment.

2.3. Présentation du problème. Le problème a été présenté de la manière suivante lors de la première séance :

> Vous avez devant vous un plateau sur lequel se trouve une frontière. Qu'est ce qu'une frontière ? une frontière est une droite horizontale (exemple sur le plateau) ou verticale (exemple sur le plateau) ou diagonale (exemple sur le plateau de plusieurs diagonale dont la diagonale "coin"). La frontière peut aussi être absente, c'est à dire qu'elle est en dehors du plateau. La frontière sépare le plateau en deux zones de couleur différente une bleue et une blanche (exemple sur le plateau). Le but du jeu est de trouver la frontière en un minimum de coup.
>
> Le jeu se joue à deux joueurs ou trois joueurs pour le groupe de 3. Un joueur choisit la frontière et l'autre essaye de la trouver en un minimum de coup. Pour cela, il a le droit de

demander la couleur de n'importe quelle case du plateau. Dans le groupe 3, il y aura deux personnes qui joueront le rôle du chercheur. Vous jouez à tour de rôle chacun un coup. Vous changez les rôles à la fin de chaque partie. Dans les groupes de 2 aussi, vous échangez les rôles.

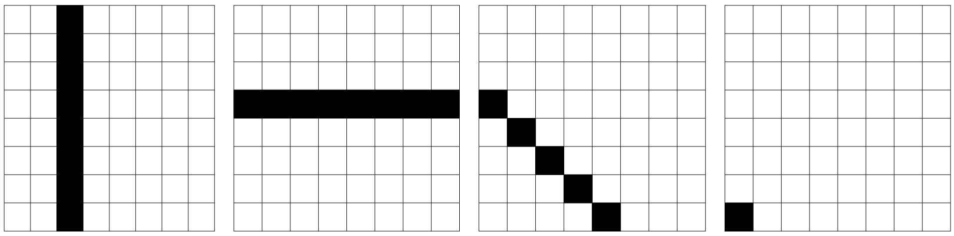


FIG. XII.1. Les exemples que nous avons présentés

3. Déroulement effectif : groupe 1

La retranscription complète des séances se trouve en annexe (??????). Nous allons dans ce qui suit proposé un résumé de ce que les différents groupes ont fait au cours des séances. Nous proposons un résumé suivi d'une synthèse du déroulement commentée. Nous avons décidé dans la synthèse de découper les actions des élèves en phases correspondant aux problèmes qu'ils essayent de résoudre et aux interventions du gestionnaire. De plus, nous avons y avons ajouté des commentaires qui sont des débuts d'analyse du travail des élèves et des interventions du gestionnaire.

3.1. Résumé du groupe 1. Ce groupe était composé de deux élèves. Lors de la première séance, les élèves de ce groupes ont, en réponse au problème S_0, développé la stratégie de recherche suivante :

(1) interroger les 4 coins;
(2) en fonction de la couleur des 4 coins, interroger un point milieu (c'est nous qui avons décidé d'appeler ce point milieu.).

Ils ont conjecturé que cette stratégie trouve la frontière en 6 interrogations et ont tenté de prouver cela en testant différents cas.

Lors de la deuxième séance, nous avons introduit la possibilité de bouger la frontière pour le donneur (S_1), les élèves ont déclaré que cela ne changeait rien. Ils l'ont justifié en utilisant les arguments qu'ils ont utilisés, lors de la première séance, pour tenter de prouver que leur stratégie termine en 6 interrogations. Les élèves ont aussi essayé une nouvelle stratégie, en jouant des parties avec cette stratégie, ils ont observé qu'elle est moins efficace que la stratégie coin, car « la frontière peut toujours être dans les coins. »

Les élèves de ce groupe ont produit deux stratégies de défense différentes. Un des élèves a produit une stratégie de défense locale contrant la stratégie coins puis milieu alors que l'autre a produit une stratégie globale. Cette dernière consiste à laisser le plus de possibilités à chaque interrogations et à ne jamais dire frontière.

La troisième séance a commencé par une mise en commun portant sur l'enveloppe convexe de 2 points. Le gestionnaire a expliqué que cela correspondait à l'intersection des demi-plans possibles. À la fin de la seconde séance, suite à des expérimentations, les élèves ont émis la conjecture que lorsqu'on n'autorise pas la frontière vide, il est possible de trouver la frontière en 5 interrogations. Lors de cette séance, le gestionnaire a demandé aux élèves de continuer à résoudre ce problème.

Après avoir effectué plusieurs expériences, les élèves de ce groupes ont déclaré que ce résultat est vrai. À la suite d'une intervention du gestionnaire, les élèves ont joué une partie, en tant que chercheur, contre le gestionnaire. Les élèves ont alors interrompu la partie après la troisième interrogations (les trois interrogations ont porté sur les coins) pour se demander comment ils pouvaient finir en 5 interrogations une fois 3 coins interrogés. Ils ont alors essayé de résoudre ce nouveau problème en expérimentant. Ils ont essayé en utilisant différentes stratégies : la stratégie coins et une stratégie qui n'interroge pas les bords mais ils n'ont pas réussi à trouver la frontière en 5 interrogations avec ces stratégies. Ils ont alors remis en cause la conjecture et fournis la justification suivante : « On a fait avec les bords, on a fait avec le centre. Avec 2 trucs, non. ». Dans le même temps, ils ont invalidé la stratégie qui n'interroge pas les bords, car « En fait, finalement, celle là c'est la mieux, celle avec les bords parce que celle avec le centre, tu peux avoir la frontière là (pointe un coin) et t'en rendre compte à la fin. ».

Suite à une intervention de l'enseignant pour expliquer aux élèves que pour l'instant la seule chose dont ils étaient sûrs est que la solution est entre 0 et 6, ils ont répliqué que 1 n'est pas possible, car une droite est déterminée par deux points. Ensuite, avec l'aide de l'enseignant, les élèves ont tenté de prouver en utilisant une preuve par algorithme de défense que 2 interrogations ne permettent pas de trouver la frontière.

A la suite de cela, lors d'une discussion avec le gestionnaire, les élèves ont introduit la notion de « territoire ». Ce qui a entraîné une discussion entre le gestionnaire et les élèves. Une partie de la discussion a porté sur la définition de territoire. Finalement, la définition suivante a été produite par les élèves : « Un territoire c'est un demi-plan, [. . .] c'est tous les endroits où il y a du bleu où tous les endroits où il y a du rouge. ». Les élèves ont alors dit qu'un territoire a entre 0 et 4 coins et que donc ll faut 4 interrogations pour pouvoir déterminer un territoire. Ensuite les élèves ont essayé de rédiger cela.

Les élèves ont décris leur stratégie en disant qu'il faut « 4 coins pour définir notre territoire plus 2 points pour définir la frontière. ». Les élèves ont justifié les 2 points par le fait que la frontière est une « ligne ». Ensuite, le gestionnaire a essayé d'obtenir des élèves une preuve de l'impossiblité de trouver la frontière en 3 interrogations, les élèves n'en ont pas établit. Finalement, le gestionnaire a donné une preuve aux élèves.

Lors de la quatrième séance, il manquait un élève de ce groupe, l'élève restant s'est associé à un autre groupe. Le gestionnaire a incité les élèves à jouer sur des objets plus simples lors de cette séance. Les élèves se sont intéressés aux carrés et ils y ont généralisé la stratégie coins puis milieux.

D'autre part, ils ont effectué des preuves de minoration en réutilisant l'argument des 4 coins.

3.2. Synthèse du déroulement du groupe 1. Ce groupe était composé de 2 élèves.

3.2.1. *Séance 1.* Lors de cette séance, ce groupe a été observé par un observateur. Ceci est une synthèse établie à partir de ses notes.

Premières expérimentations et découverte des coins (l. 25-47) : Les élèves ont commencé à jouer différentes parties en faisant varier le type de frontière. Ils ont essayé de jouer avec des frontières horizontales, verticales, diagonales. Les élèves ont aussi identifié le résultat suivant : lorsqu'une case est située entre une case bleue et une case rouge alors cette case est noire. Ce résultat est seulement vrai pour un segment horizontal ou vertical. Ces élèves ont commis une erreur en appliquant aussi ce résultat aux segments diagonaux. Ils ont utilisé différente stratégie qui semble « régulières ».

Commentaire 5 : Nous faisons l'hypothèse que les élèves ont volontairement choisi de faire varier le type de frontière à cause du discours suivant : « Est ce qu'il reste des frontières à faire ? » (l. 37) et de « Maintenant, il faut trouver une stratégie » (l. 45). De ce fait, nous faisons l'hypothèse que ces élèves n'ont pas commencer par jouer mais par chercher à résoudre le problème en mettant en place des expérimentations génératrices dont la variable est le type de frontière.

À la suite de la partie de ligne 30, un des élèves a dit : « T'aurais économisé 2 coups en jouant les coins. Les coins, c'est stratégique. ». Après cet exemple, les élèves développent des stratégies qui commencent systématiquement par interroger les coins.

Commentaire 6 : Nous faisons l'hypothèse que la partie de la ligne 30 est l'exemple qui a mis les élèves sur la piste d'une stratégie commençant par les coins. C'est un exemple qui a joué un rôle important pour l'avancer des recherches. D'ailleurs, nous verrons plus tard qu'un exemple, proche de celui-là, où la frontière est coin est devenu un exemple de référence.

Recherche d'un algorithme commençant par les coins (l. 47-90) : Les élèves ont cherché à déterminer un algorithme commençant par interroger les coins. Nous n'avons pas pu déterminer d'ordre précis d'interrogation des coins. Une fois les coins intérrogés, les élèves interrogaient les cases situées orthogonalement au type de frontière engendrée par la couleur des coins (voir cases grisées de la figure XII.2). Les élèves parlent de « chance » lorsqu'ils trouvent la frontière trop « rapidement » (l. 62).

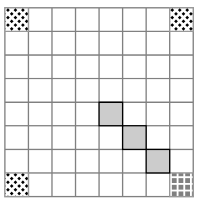


FIG. XII.2

De plus, nous pouvons remarquer que les élèves semblent avoir remarqué que dans certains cas la couleur des coins donnent la direction de la frontière.

Toutefois, ils n'ont pas énoncé le résultat et dans les différents exemples qu'ils ont traités certains cas ne sont pas apparus. Il semble donc que les élèves que le résultat général n'ait pas encore été identifié par les élèves. Cependant, ils se sont rendu compte qu'en interrogeant les coins, ils leur suffisaient de 4 interrogations pour déterminer la frontière vide.

D'autre part, une fois les quatre coins interrogés, ils semblaient choisir la case à interroger en fonction des frontières possibles (l. 60). Ils anticipent aussi sur le nombre futur d'interrogations (l. 89).

Finalement, ils ont obtenu une stratégie proche de l'algorithme coins puis dichotomie. Toutefois, nous ne savons pas s'ils ont remarqué qu'ils jouaient ensuite sur les « milieux ».

Commentaire 7 : Les élèves ont commencé à développer une stratégie de jeu basée sur les résultats suivants :

- si une case se situe entre une case de couleur bleue et une case de couleur rouge alors elle est de couleur noire ;
- il est pertinent de commencer à interroger les coins.

Nous faisons l'hypothèse que la pertinence des coins est dû à l'exemple de ligne 30 ainsi qu'au fait que les stratégies commençant par les coins qu'ils ont testées ont été les plus efficaces.

Cela les a mené à développer les résultats suivants :

- si les quatres coins sont bleus alors la frontière est vide ;
- trois coins bleus et un coins rouge, la frontière est diagonale ou antidiagonale ;
- deux coins bleus opposés à deux coins rouge, la frontière est verticale ou horizontale.

Nous pouvons remarquer (nous le retrouvons aussi dans les productions écrites des élèves voir ? ? ? ? ?) que les élèves n'ont pas traité de cas où au moins un coin est frontière (lors de la seconde phase). Nous faisons l'hypothèse que ce cas n'a pas été traité car les élèves ont considéré qu'ils ne permettaient pas d'atteindre le maximum.

Intervention du gestionnaire : Le gestionnaire est intervenu pour rappeler que les seules interrogations tolérées concernent la couleur des cases.

Réponses des élèves aux questions : Les élèves ont donné les stratégies sous forme de schéma (voir figure XII.3)

Ces algorithmes sont incomplets, car ils ne prennent pas en compte les cas où la frontière est coin ou horizontale/verticale passant par un bord.

Commentaire 8 : Ceci est peut-être dû au fait que ces cas sont jugés comme « triviaux » par rapport à une stratégie qui commence à interroger les coins. De ce fait, les élèves ne considèrent pas comme nécessaire de traiter ces cas. Au niveau de l'étude du problème, il est vrai que ces cas ne sont pas pertinents, par contre, il est nécessaire pour donner un algorithme correct de traiter ces cas.

Une hypothèse similaire ou pas ? est de considérer que les élèves n'ont pas considéré ces cas, car ils ont jugé qu'un « bon » joueur n'aurait pas proposé ces cas.

Les élèves ont répondu qu'ils étaient sûr de trouver la frontière en 6 coups. Cependant, ils n'ont pas fournis de preuve, sauf à considérer la description des stratégies qu'ils donnent comme une preuve de ce résultat. Dans

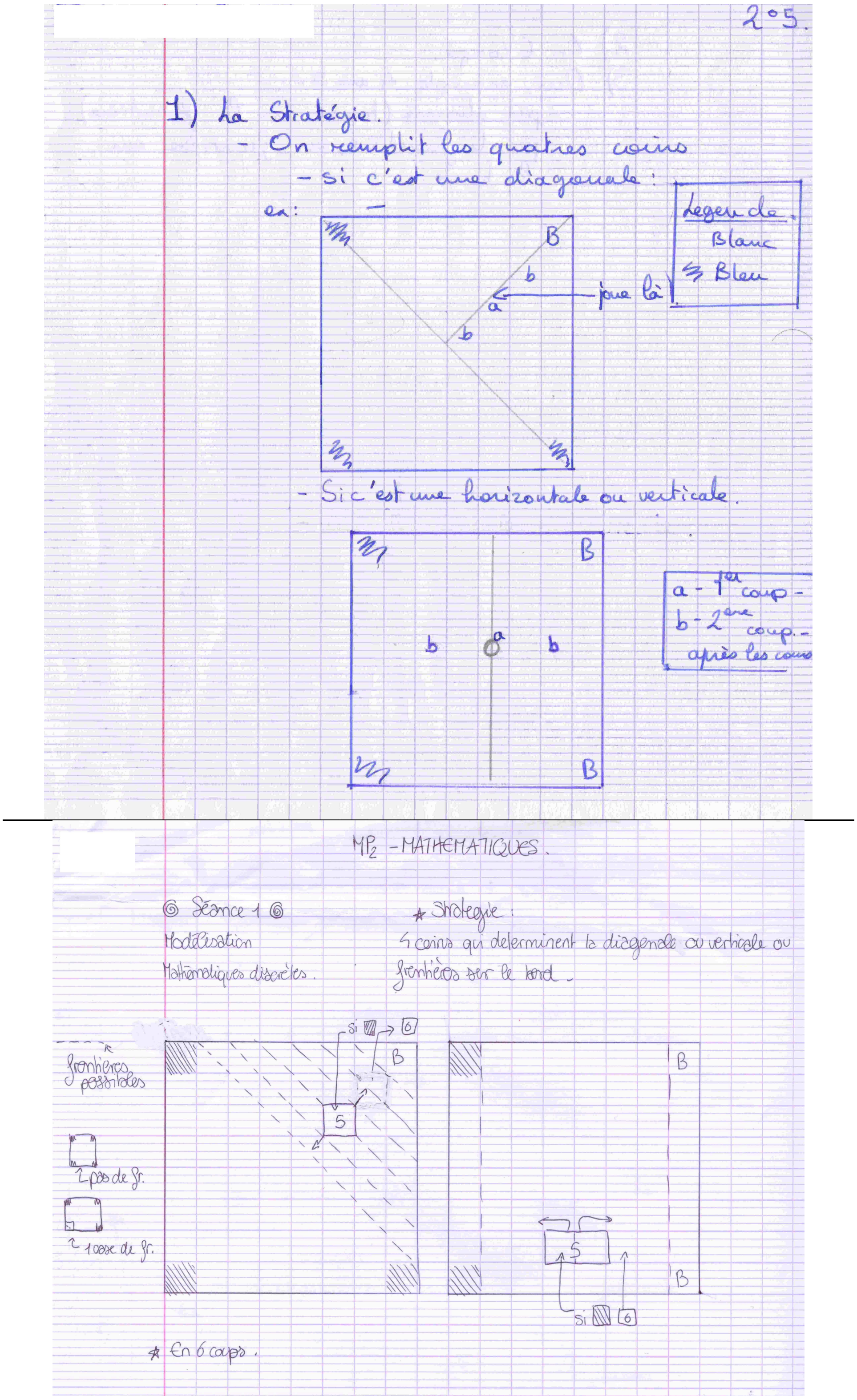


Fig. XII.3. Réponse des élèves du groupe 1 à la question 1

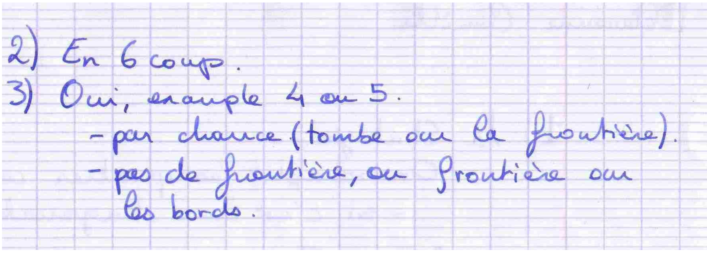

2) En 6 coup.
3) Oui, exemple 4 ou 5.
- par chance (tombe sur la frontière).
- pas de frontière, ou frontière sur les bords.

FIG. XII.4. Réponse des élèves du groupe 1 aux questions 2 et 3

ce dernier cas elle est incomplète. Toutefois, il semble que l'un des élèves du groupe ait conscience de la possiblité d'avoir des frontières coins ou bords comme le montre sa réponse à la question 3. Cet élève dispose donc de toutes les éléments de la preuve. Mais nous ne savons pas s'il a compris que ces éléments forment une preuve à sa réponse à la question 2.

3.2.2. *Séance 2.* Le groupe est composé des deux même élèves. Nous rappelons que cette séance a commencé par une mise en commun concernant le théorème coins-directions et par l'introduction du nouveau rôle du donneur qui a maintenant le droit de bouger la frontière. Nous n'avons que peu d'observations, car les notes ont été prises par le gestionnaire de la séance. Toutefois, nous possédons les réponses aux questions des élèves.

Une nouvelle règle : Après l'introduction de la nouvelle règle, les élèves semblent convaincus que la stratégie qu'ils ont développées lors de la première séance fonctionne toujours (l. 270-277). Les arguments suivants : « Cela ne change rien puisque de toute façon tu te fais piéger. » et « En s'orientant, on force l'autre à être de plus en plus précis. ».

Commentaire 9 : Pour les élèves de ce groupe, la nouvelle règle ne change rien, car leur stratégie permet toujours de trouver la frontière (ce qui est vrai). Toutefois, nous ne savons pas s'ils pensent aussi que cela n'affecte pas la valeur du maximum.

Une nouvelle stratégie : Les élèves semblent aussi avoir communiqué avec d'autres élèves entre les deux séances, ils testent ainsi une stratégie développée par un autre groupe lors de la première séance (l. 277-283). Ils invalident cette stratégie avec l'argument suivant (l. 283) : « La frontière peut toujours être dans les coins. »

Intervention du gestionnaire : Le gestionnaire est intervenu pour leur demander les raisons au fait qu'ils y arrivent toujours en 6 coups. Les élèves répondent que c'est à cause des figures XII.3 et XII.4 et qu'« on ne change pas parce qu'on le piège. ».

Commentaire 10 : Nous nous sommes demandé dans un commentaire précédent si les élèves pensaient que la description de la stratégie qu'ils avaient donné correspondait aussi à une preuve du fait que l'algorithme termine en 6 interrogations. Ce passage semble confirmer que les élèves voient en la description de la stratégie une preuve du fait que la stratégie termine en au plus 6 interrogations. Le gestionnaire aurait alors pu leur demander d'expliciter leurs arguments pour les aider à compléter la preuve.

Le gestionnaire demande ensuite aux élèves s'il existe des stratégies qui terminent en moins de 6 interrogations. Les élèves répondent qu'ils ont cherché et qu'ils ne voient pas comment. Le gestionnaire demande alors s'il est préférable de jouer sur le bord ou à l'intérieur. Les élèves commencent à chercher des stratégies interrogeant les cases centrales.

Commentaire 11 : Le gestionnaire apporte ici une nouvelle question. Toutefois, il aurait pu aussi demander aux élèves s'ils étaient sûr qu'on ne pouvait pas trouver la frontière en moins de 6 interrogations.

Le gestionnaire intervient encore une fois (l. 300) pour demander aux élèves s'ils peuvent trouver la frontière en 1, 2 ou 5 coups. Ce à quoi les élèves répondent : « S'il y a une frontière, on peut faire en 5 coups. ». De plus, sur une feuille, un des élèves écrit la réponse suivante : « 1 n'est pas possible, car il faut 2 points pour délimiter une droite. »

Commentaire 12 : L'argument fournit par l'élève est faux de manière générale (par exemple pour un point), nous ne connaissons pas le degré de généralité attribué par l'élève à cet argument mais, dans tous les cas, il manque un argument qui stipule que sur un rectangle de dimensions non nulles un point est insuffisant à déterminer une frontière.

Réponses des élèves aux questions : Les élèves ne changent pas la stratégie du chercheur mais donnent les stratégies de défense des figures XII.5 et XII.6.

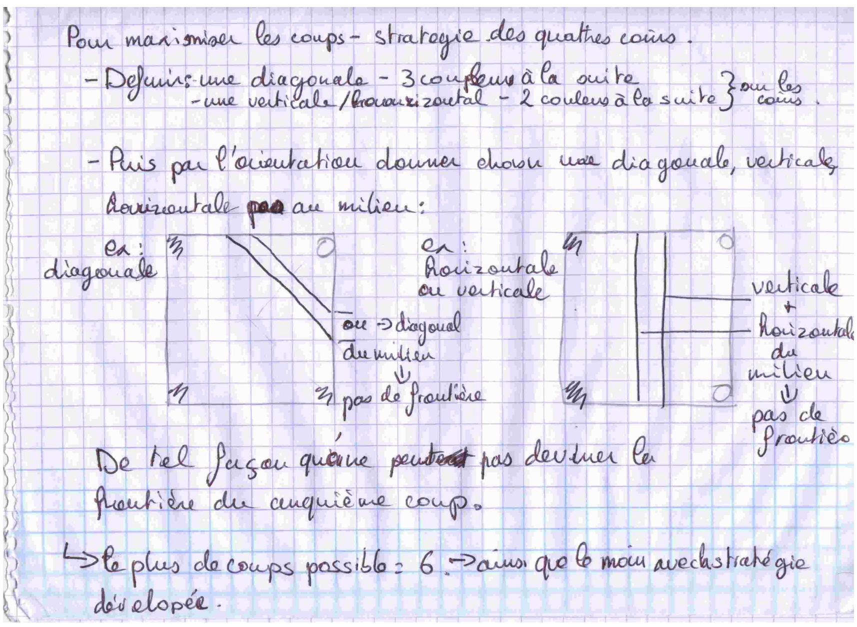


FIG. XII.5. Ce qu'a écrit un élève

Nous pouvons remarquer sur la figure XII.5, une stratégie de défense locale qui contre l'algorithme de recherche développé par les élèves. Alors que l'autre élève donne, avec la figure XII.6, une stratégie globale pouvant être utililisée contre d'autres algorithmes de recherche.

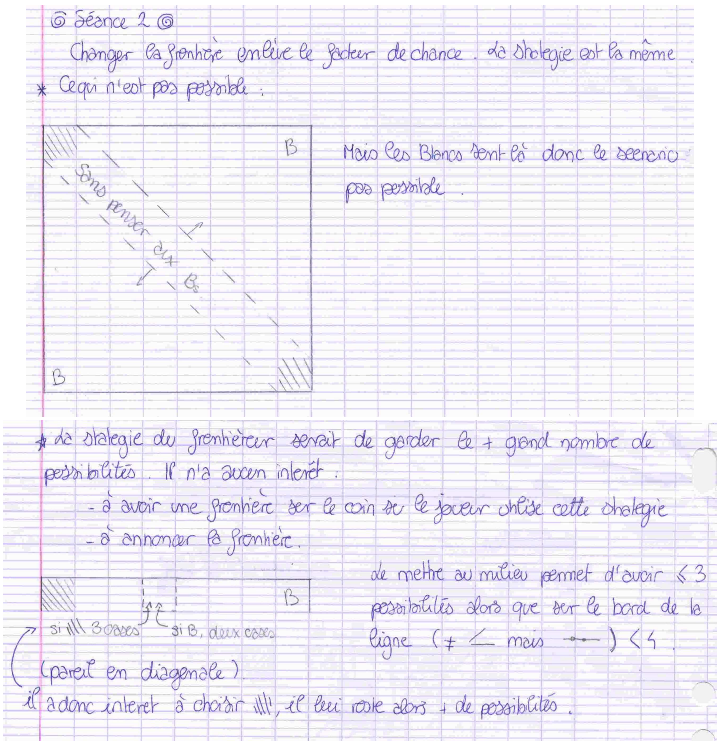


Fig. XII.6. Ce qu'a écrit l'autre élève

3.2.3. *Séance 3.* La séance a été filmée mais à cause de problèmes techniques le début de la séance est indisponible. Nous rappelons qu'à la fin de la séance 2, le gestionnaire a demandé à la classe de déterminer l'ensemble des points bleus sachant que deux points sont bleus. Ce qui revient à déterminer l'enveloppe convexe de deux points. Le début de la séance a commencé par une mise en commun des réponses des élèves à cette question. Puis par une institutionnalisation du gestionnaire expliquant que cet ensemble est l'intersection des demi-plans possibles. Le gestionnaire a aussi précisé que ceci était un résultat concernant le problème. De plus, à la fin de la séance 2, plusieurs groupes semblaient convaincus qu'on pouvait trouver la frontière en 5 interrogations à condition qu'on soit sûr que la frontière est présente, c'est-à-dire en considérant que la frontière vide n'est pas une frontière possible. Le gestionnaire a demandé aux élèves de répondre à ce nouveau problème.

Recherche d'une stratégie qui termine en 5 interrogations si on est sûr qu'il y a la frontière : La stratégie que semble mettre en place les élèves est de commencer par interroger 3 coins puis ensuite de jouer les milieux suivant la couleur des 3 coins (l. 943, l. 952). Les élèves voient cette stratégie comme analogue à la précédente (l. 952). De plus, lorsque les interrogations des 3 coins sont bleus, les élèves arrivent à déterminer la frontière en 5 interrogations. D'autre part, il semble que ce résultat est aussi vérifié pour les autres expérimentations qu'ils ont menées (l. 952).

Commentaire 13 : Il semble que les élèves aient effectué une validation expérimentale de ce résultat. Toutefois, ce résultat est faux lorsque les coins opposés sont de couleur différente.

Intervention du gestionnaire : Le gestionnaire intervient (l. 949) pour demander aux élèves s'ils pensent qu'il est possible de trouver la frontière en 5 interrogations. Les élèves répondent qu'ils « vérifiaient » que c'était bien le cas. Cela ne semble pas convaincre le gestionnaire, les élèves proposent alors au gestionnaire de jouer une partie contre eux. Lors de cette partie, le gestionnaire, qui joue le rôle de donneur, et les élèves jouent le début de partie retranscit sur la figure XII.7. À la suite de ces trois premiers coups, les élèves décident de continuer la partie entre eux (l. 960).

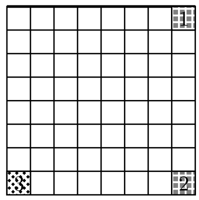


FIG. XII.7. Partie jouée entre l'observateur et les élèves.

Commentaire 14 : Le gestionnaire a joué cette partie pour introduire un exemple de partie où leur stratégie ne permet pas de déterminer la frontière en 5 interrogations.

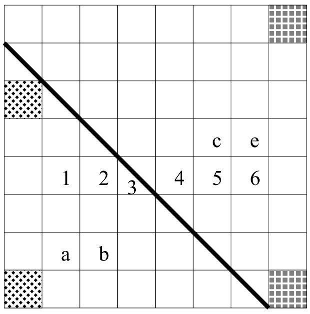
Ce sont les élèves qui ont décidé de se passer du gestionnaire, ils ont décidé de reprendre leur recherche personnelle interpellés par cet exemple.

Recherche d'une stratégie qui termine en 5 interrogations pour le début de partie précédent : Les élèves essayent de déterminer la frontière en 5 interrogations lorsque le début de partie est identique à celui jouer sur la figure XII.7. La stratégie que les élèves utilisent semblent être de considérer les frontières possibles puis d'anticiper sur ce que l'interrogation va engendrer : « Non, non en 6 coups parce que si ça fait frontière, il te reste 2 coups. » (l. 990) ou « Si tu joues là, c'est pareil que de jouer là et là. Ces 4 là, ces 3 là, ils sont pareils » (l. 1003).

Les élèves semblent rechercher la case à interroger qui va laisser le moins de possibilités de frontières : « Et après t'as deux possibilités. On va faire les possibilités, on va pousser la frontière petit à petit. Il reste ça et ta frontière là. ». Voici un exemple plus explicite (l. 1133) :

> Attends attends, parce qu'après tu demandes, par exemple tu demandes 1, 2, 3, 4, 5, 6. Après tu demandes là (3). Par exemple c'est bleu là. Ce qui te donne 2 choix (1,2). Là ça te donne 3 choix (4,5,6). Donc tu demandes là (5). 5 coups. Non, attends, 6 coups.

La recherche des possibilités semblent se faire par exhibition des cas possibles, il raisonne en formulant des phrases du type :« si ça c'est bleu alors. . . » et testent les différentes possibilités. Ils utilisent des crayons pour représenter les frontières possibles (ils en oublient parfois).



Commentaire 15 : Les élèves n'effectuent pas d'anticipations du type : il me reste tant de possibilité donc je ne peux pas le faire en un certains nombres d'interrogations, sauf lorsqu'il reste peu de possibilité. Ils semblent qu'ils se décident en anticipant les futurs coups joués. Ils n'anticipent pas sur le nombre de frontière restantes comme pour la preuve par majoration du reste. Par contre, la notion de frontières possibles est utilisées par les élèves.

Durant cette séquence (l.960-l.1095), les élèves ne sont pas dans un jeu, ils collaborent ensemble pour déterminer la solution. Les intéractions entre eux sont nombreuses et concernent la stratégie à employer pour déterminer la frontière en 5 interrogations.

Remise en cause de l'existence d'une solution à 5 interrogations À la ligne 1160, les élèves remettent pour la première fois en cause l'existence d'une solution à 5 :

> - Marche pas. Je ne sais pas si ça existe en 5 coups, peut-être. . .
> - Je pense pas.
> - Je pense pas non plus. On a fait avec les bords, on a fait avec le centre. Avec 2 trucs, non.

Commentaire 16 : Nous pouvons observer que les élèves justifient l'impossibilité d'une solution à 6 par le fait que les deux seules stratégies qu'ils envisagent ne fonctionnent pas. Toutefois, l'élève semble avoir conscience que cet argument est insuffisant puisqu'il continue à chercher une solution. Ils fournissent, ici, un argument de nature informelle.

À la suite de cela, les élèves semblent invalider la technique « bord » (l. 1173) :

> En fait, finalement, celle là c'est la mieux, celle avec les bords parce que celle avec le centre, tu peux avoir ta frontière là (pointe un coin) et t'en rendre compte à la fin.

L'élève rajoute ensuite : « Ou t'en as pas et tu trouveras donc jamais. » Ceci semble finir de convaincre les élèves qu'il est impossible de le faire en 5 coups : « C'est toujours en 6 coups » et montrant une configuration où les 3 coins ont été interrogés : « Ouais et la meilleure c'est ça. ». Les élèves émettent ainsi une nouvelle conjecture, remplaçant la précédente, 6 est le résultat optimal.

Commentaire 17 : Nous faisons l'hypothèse que ce qui a convaincu les élèves est le fait que :

(1) il n'y a que deux types de stratégies possibles : commencer par interroger les coins et commencer par interroger le centre ;
(2) la stratégie d'interroger le « centre » ne permet pas de trouver la frontière en 5 interrogations, car la frontière peut être dans un coin ;
(3) nous avons essayé de déterminer une stratégie terminant en 5 interrogations commençant par interroger le bord et nous n'avons pas réussi à en trouver une

Ces arguments supportent la conjecture portant sur l'impossibilité de déterminer la frontière en 5 interrogations.

Intervention du gestionnaire : Le gestionnaire intervient dans un premier temps pour prendre de l'information en leur demandant où ils en sont.

Voici un extrait du dialogue entre le gestionnaire et les élèves :

O :

> Donc vous pensez qu'en 5 c'est possible ?

E_2 :

> Ben en fait on a un peu tout essayé. Enfin, on pense qu'on a tout essayé... parce qu'on a essayé avec les bords et pas avec les centres, ça ne sert à rien.

O :

> Ben si vous pensez vraiment que 5 c'est pas possible, cela veut dire que vous pensez que 6 est la solution. Donc dans ce cas là, donc quand il y a un résultat et que vous êtes sûr de lui, on appelle cela une conjecture si il est pas démontré. Donc déjà vous pouvez noter que c'est votre conjecture, c'est à dire que 6 on peut pas faire mieux. Et après, là ce que vous savez c'est que la bonne solution est entre 0 et 6.

E_1 :

> Non là on pense que c'est 6 seulement... On sait qu'il y a une possibilité de solution entre 0 et 6.

O :

> ce que vous ne savez pas c'est si on peut faire moins que 6. Donc ça veut dire que la seule chose que vous pouvez dire c'est que la solution est entre 0 et 6.

E_2 :

> Non parce que 0 c'est pas possible et 1 c'est pas possible.

O :

> Pourquoi 1 c'est pas possible ?

E_2 :

> Parce qu'il faut 2 points pour déterminer une droite et comme la frontière c'est une droite.

Commentaire 18 : Nous pouvons remarquer que le début du dialogue est un argument supportant l'hypothèse que nous avons émise précédemment.

Le gestionnaire profite de ce moment pour introduire le terme de conjecture. Remarquons, que les élèves n'ont pas explicitement dit que le résultat qu'ils énoncent est vrai et qu'ils ne savent pas le prouvé, c'est le gestionnaire qui a interprété le discours de E_2 comme une conjecture. Toutefois, les élèves ne remettent pas en cause l'interprétation du gestionnaire.

Il essaye d'introduire l'heuristique de recherche de minorant progressive dans le milieu.

Le gestionnaire introduit ensuite un contre-exemple à l'argument présenté par les élèves concernant l'impossibilité de trouver la frontière en 1 interrogation en présentant le cas où le plateau n'est composé que d'un seule case.

Nous avons alors le dialogue suivant (l. 1217) :

E_2 :

> Non mais là on est entrain de parler de conjecture et de résultat sur un plateau 8 par 8.

O :

> Mais c'est parce que sur le plateau 8 par 8...

E_1 :

> Ouè mais là, il y a une possibilité de mouvement...

E_2 :

> Sur un plateau 5 par 5, on aurait pu trouver le résultat en moins de coups.

E_1 :

> Après il faut le dire dans la conjecture, sur un plateau 8 par 8.

Le gestionnaire donne alors la réponse aux élèves en disant que : « sur le plateau 8 par 8 une frontière est délimitée par 2 points. ».

Commentaire 19 : Nous notons une erreur du gestionnaire, car nous pensons que cet argument est incomplet, il ne correspond qu'à l'idée de la preuve, il aurait été préférable de donner l'argument suivant : je donne noir à la première interrogation du chercheur, il ne peut alors pas déterminer la frontière, car il y a au moins 2 possibilités de frontières passant par tous les points du carré 7×7. Cette erreur du gestionnaire peut provenir d'une interprétation trop hâtive de l'argument des élèves. Le gestionnaire n'a ainsi seulement remis en cause la validité de l'assertion mais pas la pertinence de l'argument pour démontrer qu'il était impossible de trouver la frontière en 1 interrogation.

Il nous semble qu'il y a, implicitement chez l'élève, l'idée que même si le donneur donne la couleur noire à ma première interrogations, il faut encore au moins une interrogation pour déterminer la frontière. Cela peut s'interpréter par un raisonnement par cas le plus favorable possible : dans le cas le plus favorable, il faut 2 interrogations, donc il me faut au moins 2 interrogations pour déterminer la frontière.

Le gestionnaire demande ensuite aux élèves s'ils peuvent trouver la frontière en 2 interrogations. Un élève répond que « Non, sauf si on a de la chance. ». Puis, un autre élève ajoute qu'avec la règle où le donneur peut déplacer la frontière, « 2 n'est pas possible parce qu'il [le donneur] va jamais dire quand tu... quand tu tentes un truc, il va jamais dire frontière. ».

Le gestionnaire essaye alors de rendre cet argument correct en demandant à l'élève de le formuler en tant qu'algorithme de défense : « Par exemple, imaginons que tu joues contre quelqu'un qui te dit en 2 coups je peux trouver la frontière. Tu vas jouer comment contre lui ? »

Commentaire 20 : Nous pouvons voir cette intervention du gestionnaire comme une tentative d'introduction de la preuve par algorithme de défense dans le milieu de référence. Le gestionnaire a décidé d'agir ainsi, car il croît reconnaître dans l'argumentation de l'élève l'idée de l'algorithme de défense. Nous pouvons voir sa phrase, comme une tentative de faire formuler correctement à l'élève la preuve.

Nous avons alors le dialogue suivant (l. 1237) :

O :

> Par exemple, imaginons que tu joues contre quelqu'un qui te dit en 2 coups je peux trouver la frontière. Tu vas jouer comment contre lui ?

E_2 :

> Ben je vais faire qu'en 2 coups il ne trouve pas la frontière.

O :

> Et comment tu vas faire ça ?

E_1 :

> Ben par exemple tu fais des bleus.

O :

> Si tu fais 2 bleus, qu'est ce qu'il se passe ?

E_1 :

> Ben il se retrouve avec une zone et tout le reste ça peut être n'importe quoi.

Le gestionnaire valide cet argument en demandant ensuite aux élèves si en 3 coups ils peuvent arriver à déterminer la frontière.

Commentaire 21 : Ici, l'argument de l'élève est incomplet car il ne mentionne pas le fait que deux points ne peuvent engendrer un rectangle qui est un argument provenant de la convexité. Toutefois, le gestionnaire valide cet argument, car il lui semble évident que deux points sont insuffisants à engendrer un rectangle avec cette convexité. Le gestionnaire prend ce résultat comme un axiome (tout comme les élèves).

La nouvelle question du gestionnaire a pour but que les élèves généralisent l'argument qu'ils ont émis précédemment.

Les élèves répondent : « Avec 3 cela permet d'ouvrir une nouvelle zone. ». Le gestionnaire ne semble pas avoir compris la réponse des élèves et repose la question. Les élèves répondent que « contre quelqu'un qui joue bien non ». Le gestionnaire demande ensuite aux élèves de « voir si c'est pas possible ou sinon vous cherchez pourquoi c'est pas possible. ». Un élève dit alors :« Mais si avec 5 c'est pas possible, avec 3 c'est pas possible. », il semble que le gestionnaire n'est pas entendu cette phrase.

Commentaire 22 : L'objectif des élèves est de montrer qu'il est impossible de trouver la frontière en 5 interrogations, ils ne semblent pas comprendre l'intérêt de chercher à montrer que 3 n'est pas possible. Nous pourrions aussi interpréter cela en terme d'efficacité : le fait qu'il ne soit pas possible de trouver la frontière en 5 interrogations implique l'impossibilité en 3 interrogations. Il est donc plus efficace de montrer qu'il est impossible de trouver la frontière en 5 interrogations plutôt que de montrer qu'il est impossible de la trouver en 3 interrogations. Le but des élèves et du gestionnaire sont ici différents : le gestionnaire cherche à obtenir un encadrement par une recherche de minorant alors que les élèves cherchent à obtenir le résultat exact.

Pourtant, le gestionnaire est intervenu précédemment en disant aux élèves que ce dont ils étaient sûr c'est que le résultat est entre 0 et 6 et les élèves avaient répondu que non on était sûr qu'en 1 ce n'était pas possible. Cette intervention du gestionnaire a été insuffisante à provoquer l'apparition de l'heuristique recherche de minorant progressive dans le milieu.

Ici, le gestionnaire aurait aussi pu intervenir en disant aux élèves, que lorsqu'on cherche, on ne trouve pas, tout le temps, le résultat recherché et qu'il faut parfois se contenter d'un résultat moins fort. Nous faisons l'hypothèse que l'absence de cette double connaissance — heuristique et métamathématique— a participé à cette incompréhension entre les attentes du gestionnaire et celles des élèves.

Durant toute l'intervention du gestionnaire, les élèves n'essayent pas de répondre à leurs questions mais à celles du gestionnaire sans en comprendre l'objectif.

D'autre part, il semble, à ce moment là, les élèves n'ont pas assimilé la preuve par algorithme de défense. Peut-être que ce type de preuve aurait nécessité une institutionnalisation.

Les élèves continuent ensuite leur recherche mais nous ne savons pas sur quoi.

Une nouvelle intervention du gestionnaire : un moment de confusion (l. 1268) : Le gestionaire intervient pour savoir où en sont les élèves. Les élèves répondent qu'ils ont « prouvé expérimentalement » qu'on ne pouvait pas trouver la frontière en 5 coups.

Commentaire 23 : Le gestionnaire interprète alors cela comme : nous avons fait tous les cas possibles et aucun ne marche. Il pose alors la question qui suivante.

> Vous avez fait toutes les possibilités ? Avec toutes les couleurs pour chaque pièce et chaque place ?

Les élèves expliquent alors qu'il y a des cas où on y arrive pas en montrant un cas avec 3 coins interrogés dont les 2 coins opposés de couleur différente. Le gestionnaire dit alors qu'ils ont seulement prouvé que dans ce cas leur stratégie ne fonctionne pas (l. 1302). Ce qui est confirmé par les élèves la ligne suivante :

> Notre stratégie ne marche pas en 5. Après le fait de demander là. De demander autre part. Ca ne délimite pas la possibilité d'une frontière sur les côtés, ni une frontière inexistante puisque comme on ne demande pas les 4 coins, on se retrouve avec un périmètre enrouler dans 3, donc on se retrouve toujours avec les 4 coins qui sont sans délimitations.

Le gestionnaire dit ensuite ceci : « Ce que tu viens de dire, cela ne te dit pas plus de 3, cela ne te dit pas qu'il faut plus que 4 coups ? ».

Commentaire 24 : Le gestionnaire interprète ce qu'a dit l'élève de la manière suivante : 3 interrogations ne suffisent pas à connaître la couleur des 4 coins. Nous verrons qu'apparemment ce n'est pas l'idée des élèves. Alors qu'il semble que les élèves disent qu'interroger le « centre » ne permet pas de distinguer frontière coin et frontière vide.

Nous avons ensuite le dialogue suivant entre le gestionnaire et les élèves (l. 1304) :

O :

J'ai pas compris.

E_1 :

Quand on a un territoire, il peut être inexistant ou il est presque inexistant puisque c'est juste un carré c'est pas une frontière, ou on peut avoir une frontière avec un coin, ou sinon 3 cases ou sinon c'est 4 cases.

O :

J'ai pas compris ces histoires de 4 cases là.

E_1 :

4 cases, c'est tout ce qui est horizontale ou verticale. Parce que quand elle est horizontale, on a 1, 2, 3, 4 coins

O :

Ah, d'accord, tu me parles des coins qui ne sont pas frontières.

E_1 :

Donc on a ou 3 coins, ou 4 coins ou 2 coins, donc il faut toujours prendre en compte la possibilité minimale. Parce que la plus grande possibilité,quand on a 4 coins, ça veut dire que c'est plus facile pour comprendre où...

O :

Quand il y a 4 coins cela te donne l'orientation de la frontière.

E_1 :

Donc cela veut dire que 4 coins cela permet l'orientation donc t'es obligé d'avoir au moins 4 coups pour avoir une orientation. Mais ça ne définit pas la frontière en quelque sorte. Déjà tu peux pas avoir 3 parce que si une frontière a 4 coins et ben en 3 coups, on arrive pas à déifnir ces 4 coins.

O :

Tu dis qu'en trois coups, on arrive pas à trouver...

E_1 :

Les 4 coins.

O :

> Ca y est j'ai compris ce que tu racontes. Tu dis qu'en 3 coups, on ne peut pas savoir la couleur des 4 coins. Tu peux écrire ça pourquoi on ne peut pas faire en 3 coups. Et en 4 coups alors est ce que c'est possible ?

Commentaire 25 : Le gestionnaire interprète les répliquent des élèves comme précédemment : 3 interrogations sont insuffisantes à connaître la couleur des 4 coins. Ceci est le résultat que le gestionnaire attend, toutefois nous allons voir que les élèves et le gestionnaire ne parle pas des mêmes « coins ».

Le dialogue entre le gestionnaire et les élèves se poursuit et à la ligne 1375 les élèves reparlent de territoire, ce qui pousse le gestionnaire à demander ce qu'est un territoire puis, ligne 1390, ce qu'est un coin. Voici la manière dont un territoire est défini par les élèves :

> Un territoire, c'est un demi-plan.
>
> Dans chaque demi-plan, on est obligé d'avoir un coup. A part s'il n'y a pas de demi plan. Donc pour définir si un demi-plan a un coin et qu'un coin est là, on est obligé d'utiliser les 4 coins.
>
> On a dit que un territoire a obligatoirement, comprend obligatoirement un point a part s'il n'y pas de territoire. Dans notre jeu, on a 2 possibilités un territoire ou pas de territoire, si on a un territoire, ce territoire est obligé de comprendre un coin ou 2 ou 3 ou même 4.

Le gestionnaire demande, à la suite de ces explications, ce qu'est un coin et si un coin est un coin du plateau. Après un dialogue de quelques minutes et à travers des exemples le gestionnaire arrive à comprendre ce que sont les coins dont parlent les élèves ainsi que les territoires.

Le premier exemple est présenté par les élèves, il est représenté par la figure XII.8.

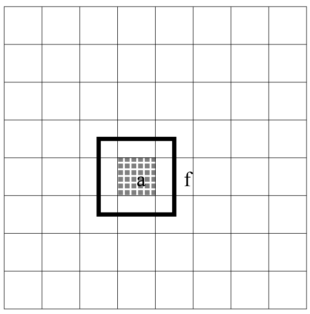


Fig. XII.8. Premier exemple.

Il a été associé au discours suivant : « Ouais parce que ça ne peut pas être un coin là (a), un coin ici parce qu'on ne peut pas avoir une frontière. Voilà (f) ».

À la suite de cet exemple, les élèves formulent une définition de territoire :

> Un territoire c'est un demi-plan, c'est ce que vous appellez..., un territoire c'est tous les endroits où il y a du bleu ou tous les endroits où il y a du rouge.

Le second exemple est l'œuvre du gestionnaire pour savoir s'il a bien compris cette définition (voir figure XII.9), ce qui débouche sur le dialogue suivant :

O :

> Donc ok, mais si par exemple, j'ai 2 bleus là. Ca vous dîtes que c'est le territoire bleu. (T) Mais pour le reste vous ne savez rien dire.

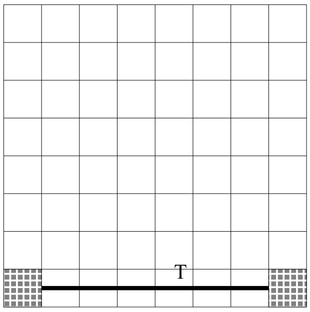


Fig. XII.9. Exemple de territoire.

E_1 :

> Pour l'instant, on ne sait rien dire. Mais pour définir, il faut d'abord définir, il faut d'abord avoir une idée de la définition d'un territoire. Donc un territoire, ça peut être d'avoir obligatoirement dans son truc, 0 coins, 1 coin, 3 coins ou 4. On peut pas avoir 2 points parce que sinon c'est une ligne.

O :

> Pourquoi il ne peut pas avoir 2 coins ?

E_2 :

> Si il peut avoir 2 coins regarde :

E_2 configure le plateau de la manière suivante :

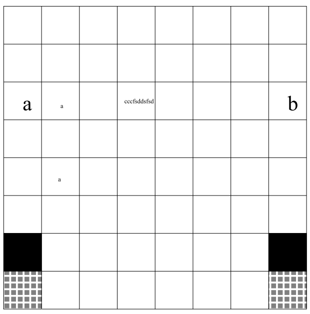


Fig. XII.10. Exemple de territoire avec deux coins.

E_1 :

> C'est la seule possibilité, donc il peut avoir de 0 à 4 coins.

O :

Mais je peux les mettre là aussi ((a) et (b)).

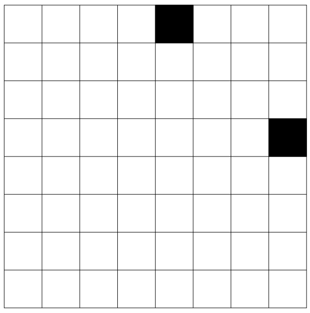
E_2 :

Non dans ce cas là, il y en a 4.

O :

Ah ok, moi je parlais des coins du plateau mais vous vous parlez des coins en général. Ok mais si c'est en diagonale par exemple. Là comme ça.

O configure le plateau de la manière suivante :



E_1 :

3

E_2 :

les 3 coins du triangles

O :

Donc là vous dîtes qu'il y a 3 coins ?

E_1 :

Oui

E_1 :

Et t'es obligé d'avoir 3 coins et touché... au moins 1 coin et obligé d'avoir un à 4 coins par contre... et pareil...En même temps il peut y avoir de 0 à 4 coins du plateau.

Les élèves ont donc des territoires possédant de 0 à 4 coins qui peuvent être de forme rectangle, triangle, ligne et le territoire « inexistant ».

Commentaire 26 : Durant tout le dialogue, il semble que le gestionnaire parlent des coins du plateau alors que les élèves parlent d'autres coins. De ce fait, le gestionnaire essaye de rapprocher ce que disent les élèves des résultats qu'il connaît concernant les coins du plateau.

Un territoire est donc l'ensemble des cases d'une même couleur (l. 1425) et un coin est un « sommet » de territoire. Toutefois, un coin peut aussi être un coin du plateau. D'ailleurs nous aurions pu nous apercevoir de cela plus rapidement à cause de la ligne 1360 où un élève dit :

Les coins qui délimitent la couleur des territoires.

Nous faisons l'hypothèse que les élèves classifient les territoires en fonction du nombre de coins qu'ils possèdent. De plus ligne 1470, les élèves disent qu'un territoire se définit par ses coins.

D'autre part, il nous faut signaler que les élèves utilisent le terme demi-plan de manière incorrecte. Un territoire est plutôt une intersection de demi-plan.

A travers ces définition, nous pouvons maintenant mieux interpréter certains passage du dialogue comme à la ligne 1408 :

> Une territoire, j'ai jamais dis s'il était bleu ou rouge. Là, pour définir si un territoire a un ou 4 coins, on est obligé de tester tous les coins.

Cette phrase des élèves qui n'avait pas été comprise par le gestionnaire suggère que pour déterminer le nombre de coin d'un territoire, nous devons interroger les coins du plateau. Ce résultat est faux à cause de l'exemple de la figure XII.10 puisque dans ce cas le territoire pourrait aussi avoir 4 coins. Mais au moment où les élèves ont énoncé ce résultat, cet exemple n'était pas encore connu.

De plus, l'élève E_1 dit : « Mais pour définir, il faut d'abord définir, il faut d'abord avoir une idée de la définition d'un territoire. Donc un territoire, ça peut être d'avoir obligatoirement dans son truc, 0 coin, 1 coin, 3 coins ou 4. ». Ici, il semble que pour les élèves posséder 1, 3 ou 4 coins est nécessaire pour un territoire. Par contre, nous ne savons pas s'ils le conçoivent comme une conséquence de la définition ou comme un élément de la définition. Il aurait ainsi pu être intéressant pour le gestionnaire d'intervenir pour essayer de savoir ce qu'il en était afin de lancer une discussion sur les définitions en mathématiques.

À la suite de cela, le gestionnaire relance les élèves sur le problème de trouver la frontière en 4 interrogations. Un élève répond :

> Pourquoi on est obligatoirement au moins obligé de faire en 4 parce qu'il faut définir un territoire, il faut définir ces 4 coins et pour définir ses 4 coins, parce que c'est maximal, le maximum il faut 4 trucs.

Le gestionnaire ne semble pas comprendre cette argumentation, les élèves rajoutent ensuite qu'ils sont entrain de « chercher le maximum pas le minimum donc le maximum pour définir le territoire c'est 4 coins. » et « Donc on est obligé dès le départ d'avoir 4 points pour définir ce territoire en maximum donc on ne peut pas faire en dessous de 4. ». Le gestionnaire ne dit plus rien à la suite de cette argumentation. Il semble qu'il ait ensuite demandé aux élèves de rédiger ces arguments.

Commentaire 27 : Il semble que l'élève n'associe pas au mot définir le sens usuel : les 4 coins caractérisent le territoire et il faut donc les trouver pour pouvoir déterminer le territoire. Effectivement un territoire est caractérisé par ses coins, cependant il n'est pas nécessaire d'interroger tous les coins d'un territoire pour pouvoir le déterminer sauf pour le territoire « vide ». L'argumentation de l'élève — le maximum de coins que peut comporter un territoire est 4 donc il faut 4 interrogations — nous semble donc incorrecte. Nous pouvons aussi remarquer que cet argument est optimal pour l'élève, car il n'est pas possible de trouver de territoire ayant plus de 4 coins. Nous pouvons voir cela comme une volonté de chercher non seulement des arguments de minoration mais aussi des arguments de minoration optimaux, dans le sens où le lemme sur lequel repose l'argument, le nombre de coin impose le nombre d'interrogation, ne pourrait pas fournir un meilleur résultat. L'élève ajoute donc un argument inutile par rapport au résultat à prouver. D'ailleurs ligne 1480, l'élève rajoute :

> Oui mais ça on le fait dans les maximums, on est d'accord parce que quand on essaye de prouver une conjecture, on prouve le maximum pas la minimum. Parce que si le maximum... On est entrain de chercher le maximum pas le minimum donc le maximum pour définir le territoire c'est 4 coins.

Ce rajout d'un argument inutile pour prouver le résultat paraît donc provenir d'une conception erronée sur la preuve d'un minorant que nous expliquons comme étant une confusion entre le but de la recherche : déterminer le plus grand minorant et l'objectif de la preuve : montrer que 4 est un minorant.

Commentaire 28 : Le fait q'un territoire ait entre 0 et 4 coins n'est jamais justifié par les élèves, comme précédemment nous ne savons toujours pas si c'est une propriété qui découle de la définition ou si c'est un élément de la définition. Une hypothèse est qu'il y a une confusion entre la définition et les propriétés d'un objet vérifiant la définition. Cette confusion peut provenir du fait que dans le processus de définition nous cherchons à ce que l'objet ait obligatoirement certaines propriétés, les élèves peuvent alors ne pas faire la différence entre la définition et l'objet que la définition représente. Nous identifions, ici, une erreur concernant le processus de définition/modélisation d'un objet qui voit la définition comme équivalente à l'objet ou le modèle comme équivalent à l'objet qu'il décrit.

Commentaire 29 : Nous noterons aussi la présence importante de la notion d'« obligatoire », de « devoir », en particulier concernant le fait de jouer les coins.

Ligne 1294, les élèves utilisent le terme « milieu » pour énoncer le point sur lequel il joue.

Phase de rédaction : Durant cette phase de rédaction, un des élèves énonce, en s'adressant à l'autre élève, l'argument suivant : « Ce qu'il faut dire c'est qu'en 3 coups, tu peux avoir un triangle. Tu peux avoir un triangle en 3 coups, mais c'est pas ça l'idée, l'idée c'est que quand t'as un territoire, t'as obligatoirement 4 coups. Le maximum d'un territoire pour le définir c'est 4 coins. »

Troisième intervention du gestionnaire (l. 1502) : A cause du changement de casette vidéo, nous n'avons pas le début de l'intervention. Les élèves commencent par décrire leur stratégie :« 4 coins pour définir notre territoire plus 2 points pour définir notre frontière. ». Le gestionnaire intervient pour dire qu'il n'est pas d'accord et donne un l'exemple suivant : « si tu sais que la frontière est horizontale ou diagonale, 1 coup cela suffit à la trouver. Enfin avec 1 coup si tu tombes sur la frontière... ». Les élèves répondent que :« comme la personne va bouger les pions, si on demande un point, elle va pas dire frontière. » Ce à quoi le gestionnaire répond par une question : « Tu crois qu'il vaut mieux toujours dire couleur que frontière ? ». Les élèves répondent qu'un cinquième coup oui mais pas au sixième où « on peut faire ce que l'on veut puisque de toute façon l'autre a deviné. ».

Commentaire 30 : La première partie de la stratégie utilise le résultat suivant : la couleur des 4 coins du plateau détermine la nature du territoire. Ce résultat est comme nous l'avons déjà vu faux.

De plus, il semble que le gestionnaire interprète la réponse des élèves comme : il ne faut jamais dire frontière. Un signe de l'influence des conceptions du gestionnaire sur les conceptions des élèves ? La réponse des élèves à la question du gestionnaire est d'ailleurs « locale », car elle a été interprétée par les élèves comme concernant leur algorithme de recherche. Nous éméttons l'hypothèse que la raison pour laquelle le gestionnaire n'a pas discuté de cet argument avec les élèves provient du fait que l'argument s'est trouvé en amont d'un autre argument qui a attiré l'attention du gestionnaire.

Les élèves justifient leur stratégie de la manière suivante (l. 1524) :

> Cela définit la forme du territoire et 2 coups pour définir le territoire avec la frontière. 2 coups pourquoi ? parce qu'il y a 2 points, moi je mélange un peu tout là, c'est pas vraiment vrai, je sais ce que je dis c'est un peu faux. Mais on peut presque analoguer 2 points pour la frontière parce que la frontière c'est une ligne ou un point ou y'a pas de frontière donc il y a de 0 à 2 points. Une frontière est définie par de 0 à 2 points sur... qui sont obligatoirement sur le tour du plateau.

L'élève rajoute (l. 1544) : « On a 4 coins et 2 points. »

Commentaire 31 : Nous interprétons l'ensemble de l'argumentation des élèves comme :

- un territoire a entre 0 et 4 coins donc il est nécessaire d'utiliser 4 interrogations pour déterminer la forme du territoire ;
- la frontière est déterminer par entre 0 et 2 points sur le bord, donc il est nécessaire d'utiliser 2 interrogations supplémentaires pour déterminer la frontière.

Nous pensons que le premier point est la manière dont les élèves interprétent les 4 premières interrogations de la stratégie alors que le second point concernent l'interprétation des deux interrogations suivantes. Les élèves donnent une justification informelle — a postériori — à la stratégie de recherche mais aussi au nombre d'interrogations au pire que la stratégie utilise. Notons qu'ils semblent avoir conscience que le second point n'est pas une justification mathématique valable. D'autre part, il nous semble que les élèves font une confusion entre l'impossibilité de trouver une stratégie en moins de 6 interrogations et l'explication de leur stratégie.

Cette interprétation est fausse, car ce qui est pertinent n'est pas le fait qu'une frontière est déterminée par 0, 1 ou 2 points mais la longueur des côtés du carré. Le gestionnaire semble être passé à côté de cette interprétation et semble n'avoir retenu que la fin de l'explication, à savoir que la frontière est définie par des points sur le bord du plateau.

Si le gestionnaire avait fait les observations précédentes, il aurait pu donner de nouvelles pistes demander aux élèves de chercher sur un carré de côté de longueur plus grande par exemple 10. Les élèves auraient ainsi pu permettre aux élèves d'invalider leur interprétation et peut-être de généraliser leur stratégie à traver la dichotomie.

Commentaire 32 : Il nous semble que dans le discours des élèves, définir est associé à déterminer.

Ensuite, il y a un dialogue entre le gestionnaire et les élèves (l. 1533-1570) durant lequel le gestionnaire questionne le fait qu'un territoire avec 4 coins soit une configuration maximale. Au cours de ce dialogue, les élèves parlent de « la possibilité » où « il n'y a pas frontière. ». Le gestionnaire pose alors une nouvelle question (l. 1571) : « Mais déjà, celui là, il vous dit quoi ? le cas où il n'y a pas de frontières il vous dit quelque chose quand même ? ». Une première réponse des élèves est la suivante : « cela veut dire qu'il n'y a pas de territoire rouge. Mais ça c'est évident ». La seconde réponse des élèves est : « Il nous dit que le territoire se définit en 4 coups. ». Puis le gestionnaire apporte la réponse en expliquant en quoi cet exemple montre qu'il faut au moins 4 interrogations. Voici le dialogue :

O :

En fait ce cas là ce que ça vous dit, ça vous dit que dans le cas où il n'y a pas de frontière, vous êtes obligés de faire au moins 4 coups. Donc pour faire celui là, il vous faut 4 coups.

E_1 :

Et ça c'est le cas minimum. Pour trouver une frontière qui est en 2 lignes, il faut donc 2 coups de plus.

O :

pas forcémment.

E_1 :

Pace qu'une frontière est définie...

O :

Là ce que tu fais tu cherches ton territoire et ensuite tu cherches la frontière. Mais peut être que ce n'est pas le bon ordre, peut être qu'il faut faire les 2 en même temps, peut être que les étapes ne sont pas comme ça. Je ne sais pas si tu vois ce que je veux dire ?

E_1 :

Oui si si, mais comment est ce qu'on fait pour définir une frontière quand on ne sait pas où est le territoire ?

Le gestionnaire est ensuite appelé ailleur.

Commentaire 33 : La question du gestionnaire a pour but de faire remarquer aux élèves que ce cas peut leur permettre de faire une preuve du fait que 4 est un minorant, elle est assez « directe ». Nous faisons l'hypothèse que le gestionnaire agit ainsi, car il ne comprend pas ce que les élèves veulent dire et n'arrive pas à leur faire formuler de manière compréhensible leur idée : il décide alors de les lancer sur une autre piste.

Nous pouvons voir dans la première réponse de l'élève et dans le « Mais ça s'est évident » un signe du contrat didactique : cette réponse est trop facile, ce n'est donc pas cela qu'il faut répondre.

Nous émettons l'hypothèse que le gestionnaire à interpréter la phrase suivante des élèves : « Pour trouver la frontière qui est en 2 lignes, il faut 2 coups de plus. » comme : la meilleure stratégie est d'abord de chercher la forme du territoire et ensuite de chercher la frontière. C'est ce qui le pousse à remettre en cause les étapes de l'algorithme. Cette interprétation semble aussi provenir des conceptions du gestionnaire sur la situation qui interprète les propos des élèves comme reliés à une optimalité par étape.

Un dialogue entre le gestionnaire et un élève du groupe lors d'une mise en commun (l. 1597) : La phase de mise en commun sera décrite et commentée dans la sous-section portant sur les mises en commun (voir page ? ? ? ? ?). Ce dialogue est provoqué par une mise en commun portant sur la possibilité de trouver la frontière en 4 interrogations, avant l'intervention de l'élève, un élève d'un autre groupe a essayé de donner une preuve de l'impossibilité de trouver la frontière en 4 interrogations. Durant cette discussion, l'élève, en plus de parler de territoire, introduit la notion d'« origine d'un territoire » : « Parce qu'un territoire ou une frontière a toujours pour origine un coin. ». De plus ligne 1637, l'élève énonce une définition de territoire :

> Un territoire, c'est un demi-plan. Ca peut-être A ou B. A ou B a toujours pour origine un point du. . . un coin dedans. Donc si on définit pas un coin à l'origine, on peut pas définir l'extension.

L'élève donne aussi son idée (l. 1677) :

> Ben c'est un peu l'idée que quand on a un territoire, on a une ville on commence avec une ville et après on a expension du territoire qui est définie par la frontière. Dans notre cas de figure, on a obligatoirement une ville ou on a rien, donc il y a ou un point d'origine ou il n'y en a pas. Donc si on définit le point d'origine d'avant, le coin d'origine, la frontière au début ce qui nous fait 4 coins après on a besoin de 2 autres pour définir la frontière.

Le gestionnaire ne semble pas comprendre l'explication de l'élève et donne alors une preuve (mal formulée) aux élèves.

Commentaire 34 : Nous ne comprennons pas vraiment ce que l'élève à chercher à dire. Nous retrouvons dans son discours l'idée qu'un territoire croît au cours du jeu. Il y a peut-être aussi l'idée que la première interrogation est l'origine du territoire. Toutefois, il est ensuite faux d'affirmer que ce premier point est un coin du territoire.

Commentaire 35 : Ce commentaire porte sur l'ensemble de la séance :

- il semble que les élèves plutôt que d'éliminer des type de frontières cherchent à éliminer des formes de territoire. En fait, par rapport à la caractérisation en acte de territoire qu'ils utilisent (un territoire est caractérisé par son nombre de coins), ceci n'est pas équivalent, car un même type de frontière peut définir des territoires de nature différente. Les élèves semblent donc considérer les territoires comme un élément pertinent de la situation ;
- Il apparaît aussi que les élèves de ce groupe n'ont pas assimilé la preuve par algorithme de défense comme une preuve pertinente pour ce problème. En effet, ils ont fait, avec l'aide du gestionnaire, une preuve par algorithme de défense pour montrer que 2 interrogations étaient insuffisantes, mais ils n'ont pas par la suite réutilisé ce type de preuve.
- Le gestionnaire aurait pu poser des questions sur les coins des territoires.
- Les élèves ont eu des difficultés à formuler de manière compréhensible pour le gestionnaire leurs idées. Nous avons vu que la compréhension

n'est venue qu'après que le gestionnaire et les élèves aient discuté de différents exemples. Le gestionnaire aurait pu demander des exemples pour faciliter sa compréhension, nous pourrions dire construire un concept/définition-en-acte qui aurait pu lui permettre d'aider les élèves à formuler de manière compréhensive leur idée.

– La preuve que les élèves fournissent concernant le fait que leur stratégie trouve la frontière en, au pire, 6 interrogations est incomplète car elle ne prend pas tous les cas en compte. Toutefois, la preuve des cas traités est correct. De plus, les arguments qu'ils donnent pour justifier que cette stratégie détermine la frontière, lors de cette séance, sont faux. En particulier, le résultat qui dit que la couleur des 4 coins du plateau caractérise le territoire. De ce fait ils font une preuve fausse que l'algorithme détermine la frontière. Les élèves ont exhibé un exemple (XII.10), qui est un contre-exemple à ce résultat mais n'ont pas remarqué que c'était un contre-exemple. D'autre parte, comme le résultat est effectivement vrai, les élèves ne remarquent pas que leur justification est fausse. Nous pouvons aussi remarquer qu'il semble que les élèves n'ont pas soumis la justification à l'expérimentation, ils n'ont pas cherché à vérifier que la couleur des 4 coins donnaient la forme des territoires, ils semblent qu'ils l'aient juste constater.

3.2.4. *Séance 4.* Lors de cette séance, du fait de l'absence de certains élèves, le groupe 1 a fusionné avec le groupe 3. Nous ne possédons concernant ce groupe que des notes du gestionnaire. Ce groupe est appelé groupe 4 dans les annexes. Lors des séances précédentes, tous les élèves ont développé la stratégie qui consiste à jouer les coins puis les milieux. Au début de la séance, le gestionnaire a demandé pourquoi il était plus intéressant de jouer au milieu que sur les autres points. Une preuve par exhaustivité des cas qu'une fois les 4 coins interrogés, le plus efficace est de jouer au « milieu » a été produite. Ensuite, le gestionnaire a incité les élèves à travailler sur des objets plus « simples ».

Les élèves de ce groupe se sont intéressés aux carrés. Ils ont généralisé la stratégie des coins puis milieux sur des petits carrés : 2 par 2, 3 par 3, 4 par 4, 5 par 5, 6 par 6. Ils ont effectué des preuves de minoration en réutilisant l'argument des 4 coins.

Commentaire 36 : Le gestionnaire intervient pour demander à un élève ce qu'il fait, il répond : « J'ai fais le 2 par 2 puis 3 par 3 puis 4 par 4... ce n'est pas ça qu'il faut faire ? ». L'élève cherche, ici, l'approbation du gestionnaire. Nous faisons l'hypothèse que cela provient du fait que l'élève n'est pas habitué à changer les variables d'un problème. De plus, nous avons pu observer le fait que les élèves ne cherchaient pas à déterminer des arguments de minoration pour les différents carrés, il a fallu que le gestionnaire intervienne pour qu'ils essayent de répondre à cette question. Toutefois, une fois la question posée, les élèves réutilisent immédiatement la preuve vue précédemment, ce qui leur permet de montrer qu'il faut, au moins, 4 interrogations pour chacun des carrés. Cependant au vue de la formulation employée par l'élève concernant le 2 par 2 : « il faut les 4 coins », « il faut toujours faire les 4 coins », il est possible que l'élève fasse, ici, une confusion entre le problème de minoration et le problème de majoration. Ceci est renforcé par le fait que sur le 2 par 2, il est vrai que le seul moyen de déterminer la frontière en 4 interrogations est d'interroger les 4 coins.

? ? ? A essayer de formuler mieux.

4. Déroulement effectif : groupe 2

4.1. Résumé court du groupe 2. Lors de la première séance, ce groupe a développé une stratégie qui consiste à interroger les coins et à ensuite jouer une case sur deux sur un segment où les coins sont de couleur différente. Les élèves ont assez vite remarqué qu'ils n'étaient pas obligés d'interroger toutes les cases pour pouvoir connaître leurs couleurs. Ils ont aussi observé que si deux coins sont de couleur différente alors une case frontière est présente sur le segment reliant ces deux cases. Ils ont écrit qu'ils trouvaient la frontière en, au pire, 7 interrogations mais n'ont pas effectué de preuve de ce résultat. De plus, un des élèves n'a pas réussi à formuler la stratégie de manière générale, l'écrivant pour un cas particulier. Ils ont aussi écrit que la couleur des 4 coins donnent la direction de la frontière.

Lors de la deuxième séance, les élèves, après une série d'expérimentations, ont considéré que la nouvelle consigne ne changeait rien. Ils ont justifié cela par le fait que la couleur des 4 coins donne la direction de la frontière. Ils ont amélioré la stratégie de la séance 1 en interrogeant les cases du milieu plutôt qu'une case sur deux, ce qui leur a permis de passer de 7 à 6 interrogations au pire. Ils ont aussi essayé de répondre à la question suivante : si la frontière vide n'est pas autorisée, est-ce qu'on peut trouver la frontière en 5 interrogations ? Ils ont d'abord cru que ce résultat était vrai puis ils ont trouvé un contre-exemple pour leur stratégie. Ils ont alors établis le résultat suivant : lorsque les deux coins opposés sont de même couleur alors on trouve la frontière en 5 interrogations.

Les élèves ont ensuite cherché à trouver une stratégie permettant de trouver la frontière en 5 interrogations. Pour cela, ils ont cherché des stratégies qui commençaient par interroger 3 coins puis des stratégies dont les trois premières interrogations ne se font pas sur des coins.

Au cours de la troisième séance les élèves ont continué à chercher une stratégie trouvant la frontière en 5 interrogations dans le cas où la frontière vide n'est pas autorisée.

La quatrième séance est consacrée à l'étude de cas simplifiés, les élèves de ce groupe, qui n'étaient que deux, ont étudié les carrés de 2 et 3 cases de côté. Les élèves jouent en interrogeant dans un premier temps les coins opposés puis ensuite les autres coins. Ils jouent quelques parties et formulent le résultat suivant pour le 1×1 : « Si il y a une frontière en 3 coups, sinon en 4. ». Les élèves avaient, durant les parties qu'ils ont jouées, produit un exemple qui aurait pu servir de contre-exemple. Ensuite les élèves étudient plus spécifiquement le carré de 3 cases de côté. La première stratégie qu'ils emploient est d'interroger les 4 coins. Ils disent alors, que c'est la même chose que la frontière vide soit autorisée ou pas, et que, dans tous les cas, le minimum est 4. Ce résultat n'a pas été prouvé à ce moment là, toutefois plus tard suite à une intervention du gestionnaire, les élèves ont expliqué ce résultat de la manière suivante : « En 4 parce que s'il y a pas de frontière, on ne pourra jamais savoir si ils [les coins] sont de la même couleur. ». Suite à une intervention du gestionnaire, un élève, qui donne les couleurs, expliquent que sa stratégie est de considérer une nouvelle frontière possible à chaque interrogation et ensuite de donner une couleur en fonction de cette frontière.

Les élèves énoncent ensuite le résultat suivant : si on est sûr qu'il y a une frontière alors on peut trouver la frontière en 3 interrogations sur le carré de 2 cases de côté. Le gestionnaire a alors essayé de montrer un contre-exemple aux élèves mais ceux-ci n'ont réussi à l'identifier comme un contre-exemple qu'avec l'aide du gestionnaire.

4.2. Résumé long commenté du groupe 2. Le groupe était composé de 3 élèves.

4.2.1. *Séance 1.* Concernant cette séance, nous ne disposons que des notes d'un observateur. À la suite de la présentation, 2 élèves cherchaient la frontière en interrogeant une case chacun à leur tour et un élève donnait les couleurs.

Ils remarquent assez rapidement qu'ils ne sont pas obligés d'interroger une case pour en connaître la couleur : « C'était sûr que c'était bleu. Ce n'était pas la peine de joué là. ». La stratégie qu'ils ont utilisé consiste à interroger 4 cases dont 3 sont des coins (voir figure XII.11). Ils justifient cette stratégie par « Un plus trois coins opposés, on en tire la direction de la diagonale. ». Ils jouent une case sur deux entre les coins de couleur différente.

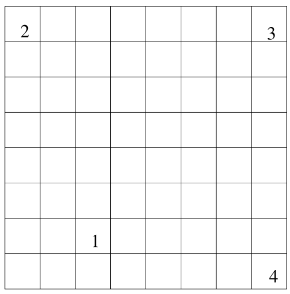


FIG. XII.11. Début de stratégie du groupe 2.

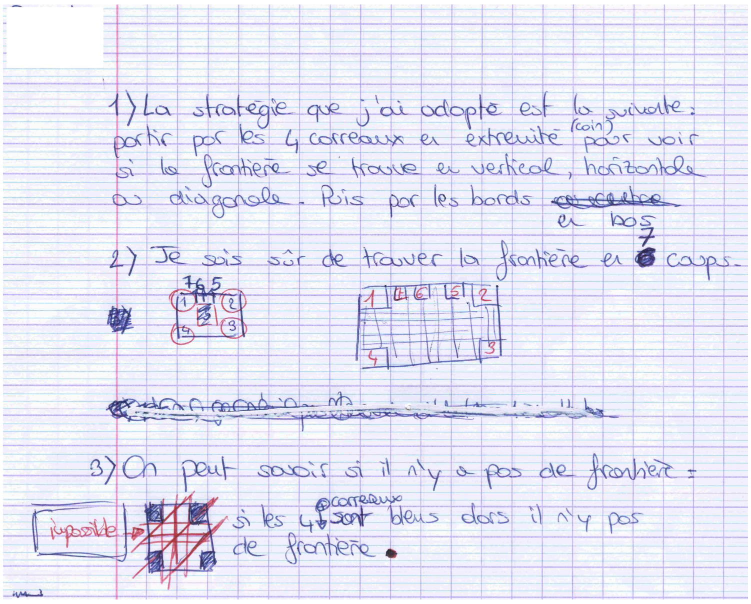
Ensuite, ils commencent à interroger une case sur deux dès qu'ils trouvent deux coins de couleur différente.

Réponses aux questions : Les figures XII.12 et XII.13 représentent les réponses des élèves aux questions. Nous pouvons observer que les élèves ont le théorème coins-direction.

Commentaire 37 : Nous ne savons pas si les élèves considèrent la figure XII.12 comme une preuve du fait que leur algorithme détermine la frontière en 7 interrogations. Toutefois, si c'est le cas, les élèves ne distingue pas les deux parties de la preuve : le fait que l'algorithme trouve effectivement la frontière et le nombre d'interrogations au pire utlisées. Dans tous les cas, il manque le résultat suivant pour que la preuve soit complète : « si deux points rouge et bleu sont sur une même ligne horizontale ou verticale alors il y a un point de la frontière entre ces deux points. ». Ce résultat a été utilisé par les élèves.

En plus de la stratégie de jeu, nous avons identifié les connaissances suivantes produites par les élèves :

(1) nous n'avons pas besoin d'interroger certaines cases pour en connaître la couleur ;



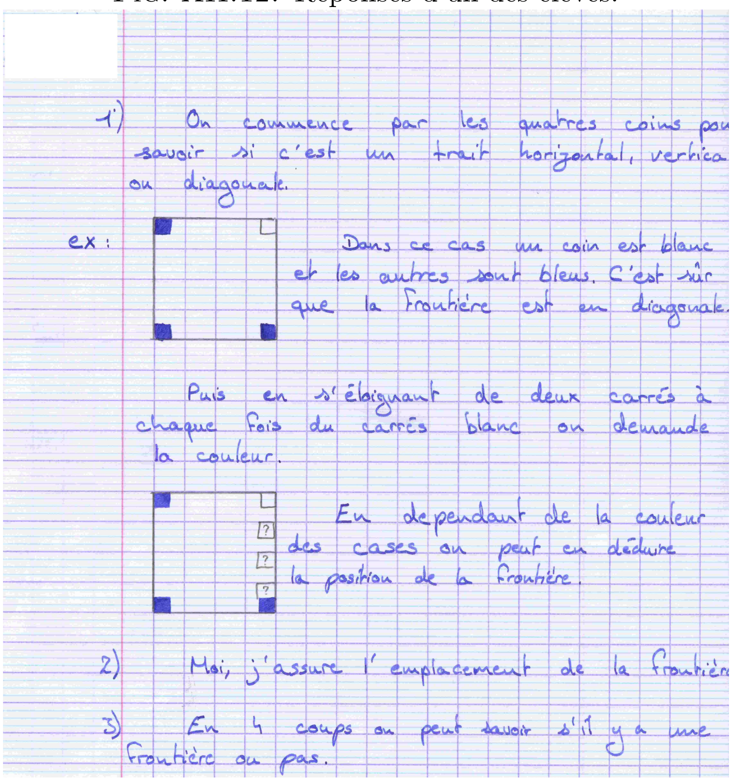
1) La stratégie que j'ai adopte est la suivante : partir par les 4 carreaux en extremité (coin) pour voir si la frontière se trouve en vertical, horizontale ou diagonale. Puis par les bords en bas

2) Je suis sûr de trouver la frontière en 7 coups.

3) On peut savoir si il n'y a pas de frontière : si les 4 carreaux sont bleus alors il n'y pas de frontière.

impossible

FIG. XII.12. Réponses d'un des élèves.



1) On commence par les quatres coins pou savoir si c'est un trait horizontal, vertica ou diagonale.

ex : Dans ce cas un coin est blanc et les autres sont bleus. C'est sûr que la frontière est en diagonale.

Puis en s'éloignant de deux carrés à chaque fois du carrés blanc on demande la couleur.

En dependant de la couleur des cases on peut en déduire la position de la frontière.

2) Moi, j'assure l'emplacement de la frontièr

3) En 4 coups on peut savoir s'il y a une frontière ou pas.

FIG. XII.13. Réponses d'un autre élève.

(2) si deux points rouge et bleu sont sur une même ligne horizontale ou verticale alors il y a un point de la frontière entre ces deux points ;

(3) la couleur des 4 coins donne la direction de la frontière.

Toutefois, les élèves n'ont pas identifié le résultat 3 comme un résultat, ils ont identifiés un résultat moins fort (conséquence de celui-ci) : « En interrogeant les 4 coins, nous pouvons savoir s'il y a une frontière ou pas. ». Les élèves ont eu durant la séance une discussion sur la frontière vide, un des élèves du groupe considérant qu'on n'avait pas le droit de jouer avec cette frontière, nous faisons l'hypothèse que c'est ce qui a provoqué le passage d'une stratégie où ils interrogent 3 coins à une stratégie où ils interrogent les 4 coins et que du coup, ce résultat leur a semblé plus important que le précédent. Toutefois, nous ne savons pas s'ils ont remarqué que ce résultat était une conséquence du résultat 3. Nous pouvons aussi remarquer que les élèves n'ont pas fait de preuve concernant les résultats 2 et 3. Nous ne savons pas si ces résultats sont pour eux, seulement, des observations ou s'ils ont essayé de les mettre en défaut.

Sur la figure XII.13, l'élève donne la stratégie sur un cas particulier. Nous faisons l'hypothèse que cet élève avait la même stratégie que l'autre élève mais qu'il n'a pas réussi à la formuler.

4.2.2. *Séance 2.* Nous rappelons que lors de cette séance, nous avons autorisé le donneur à bouger la frontière. Cette séance a été filmée.

Après l'introduction de la nouvelle consigne, les élèves affirment que « cela ne change pas grand chose, cela fait 7 coups. ».

Étude de la nouvelle consigne (l. 315) : Les élèves étudient la nouvelle consigne en jouant des parties. Leur stratégie a évolué depuis la séance 1, au lieu d'interroger une case sur deux, ils interrogent les cases milieux. Ils cherchent à vérifier que même avec la nouvelle consigne, on trouve la frontière en 6 interrogations au pire.

Ils changent ensuite de stratégie (l. 340) en jouant comme sur la figure XII.14, ils trouvent encore la frontière en 6 interrogations en interrogeant la case a.

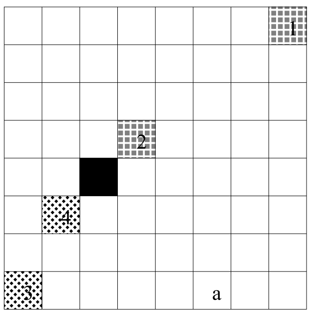


FIG. XII.14. Un essai avec une nouvelle stratégie.

Commentaire 38 : Il semble que les élèves essayent d'améliorer la stratégie en commençant la « dichotomie » dès qu'il y a deux cases de couleur différentes. Nous ne savons pas pourquoi ils ont décidé de jouer ensuite sur le point a, mais ce point a l'intérêt de permettre de déterminer la direction de la frontière.

Est ce qu'on peut faire plus que 6 ? : En jouant une nouvelle partie, avec la stratégie initiale lors de laquelle ils trouvent la frontière en 5 interrogations, un des élèves dit (l. 357) :

> Ouais mais c'était un coup de chance. Si là c'était bleu...(en montrant une case rouge), on aurait pas fait 5.

À la suite d'une nouvelle partie où les élèves, en utilisant la stratégie coin puis milieu trouve la frontière en 6 interrogations, nous avons le dialogue suivant (l. 368) entre les élèves :

> Encore 6, c'est pas possible même si tu changes de frontière c'est impossible avec la technique des 4 coins.
>
> Tu peux pas la changer après le quatrième.
>
> Mais si tu changes la frontière après tu peux pas, car après les 4 coins, tu peux pas changer de couleur.

De plus, après une autre partie, les élèves utilisent le terme « milieu » pour définir le point qu'ils interrogent à la suite des 4 coins (l. 377) : « Il faut toujours commencer dans le milieu. ».

Commentaire 39 : Nous ne savons pas si les élèves ont conscience qu'ensuite ils jouent aussi sur les milieux.

Ligne 385, les élèves disent « 6 coups, ça marche à chaque fois. ».

Commentaire 40 : Les élèves ont, durant cette phase, expérimenté, essentiellement en faisant varier la couleur des 4 coins, ceci les a mené à considérer qu'il n'était pas possible de faire faire plus de 6 interrogations à leur stratégie. Les arguments qu'ils ont fournis peuvent consituer une preuve du résultat, cependant nous ne savons pas s'ils en avaient conscience.

D'autre part, si nous faisons l'hypothèse que la figure XII.12 représente une justification du fait que leur algorithme de la séance 1 trouve la frontière en, au pire, 7 interrogations alors qu'ils n'ont pas remarqué qu'une même justification (incomplète) leur permettrait de prouver, avec la nouvelle consigne, que leur nouvelle stratégie trouve la frontière en 6 interrogations au pire.

Les élèves ne parlent pas de la stratégie pour contrer le chercheur. Les élèves identifient les parties où ils ont de « la chance » qui sont celles où le donneur aurait pu leur faire faire effectuer un nombre d'interrogations supérieur. Ils se rendent compte de cela à la fin d'une partie.

Intervention du gestionnaire (l. 400) : Le gestionnaire demande aux élèves où ils en sont. Ils répondent que « même si on change, on va tout le temps trouver 6. ». Les élèves fournissent alors la justification suivante : « en fait après les 4 coups du début dans les 4 coins, cela peut pas être dans un autre sens que celui où elle était déjà. ».

Commentaire 41 : L'élève justifie, ici, que cela ne change rien par rapport à la stratégie qu'ils utilisent mais il ne le justifie pas par rapport à toutes les stratégies. Nous avions déjà noté ceci concernant le groupe 1.

Le gestionnaire demande ensuite aux élèves s'il est possible de trouver une stratégie qui trouve la frontière en 5 interrogations. Les élèves répondent qu'« avec un coup de chance peut-être… ». Le gestionnaire leur demande alors si c'est possible lorsque l'autre joue en déplaçant la frontière, les élèves répondent que « s'il change ce sera toujours en 6 coups. ». Le gestionnaire demande alors aux élèves s'ils savent prouver que 6 est le minimum. Les élèves ne répondent pas. Le gestionnaire pose alors la question suivante (l. 441) :

> Comment me convaincrais-tu qu'on ne peut pas faire mieux que 6 ?

Commentaire 42 : Le gestionnaire pose cette question, car lorsqu'il a demandé aux élèves de prouver ce résultat, il n'a pas obtenu de réponse. Il essaye donc ici d'obtenir une explication en reformulant sa question pour donner la possibilité à l'élève de produire un début d'argumentation.

Les élèves préfèrent donner une explication à travers un exemple de partie : « faudrait le montrer en jouant ». Les élèves jouent en commençant à jouer les milieux une fois 3 coins interrogés. Ils jouent la partie retranscripte sur la figure XII.15 (l. 460) :

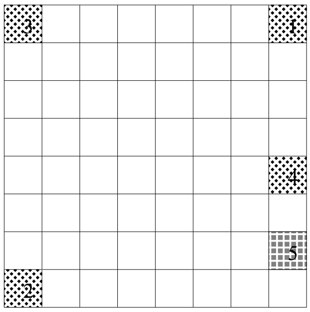


FIG. XII.15. Une partie jouée.

Au cours de cette partie, un des élèves a dit après la troisième interrogation : « Là en fait, tu ne fais pas le coin, tu commences tout de suite ».

À la suite de cette partie, le gestionnaire demande au donneur s'il n'aurait pas pu faire effectuer 6 interrogations au chercheur. L'élève répond : « S'il y avait eu trois rouges. ». Le chercheur dit alors que la frontière aurait été le coin non interrogé. Le gestionnaire dit alors que cela aurait pu être tout de la même couleur. Un des élèves dit alors « Soit y'a pas de frontière, soit elle est là (en montrant le coin). ». Les élèves énoncent alors le résultat suivant : « S'il n'y a pas de frontière on peut le faire en 5. ». Le gestionnaire demande alors comment ils vont faire. L'élève répond de la manière suivante :

E :

> On commence par les 2 coins opposés. Puis on interroge un autre coin par exemple celui-ci.

Ils font les manipulations de la figure XII.16

E :

> Là on sait déjà que c'est diagonal. Et donc on commence au milieu là.

Ils jouent comme sur la figure XII.17. Avant de jouer sur la case a, E dit :

> De toute façon c'est soit frontière, rouge ou bleue et...

Le donneur donne alors la couleur bleue à cette case. Ce qui leur permet de conclure.

Le gestionnaire demande alors ce qu'il se passe si la case 3 devient rouge. Les élèves montrent alors qu'ils peuvent terminer en 5 interrogations. Le gestionnaire dit alors aux élèves qu'ils l'ont convaincu qu'on pouvait trouver la frontière en 5 interrogations dans le cas où on interdit la frontière vide.

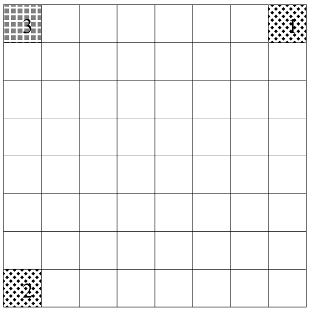


FIG. XII.16

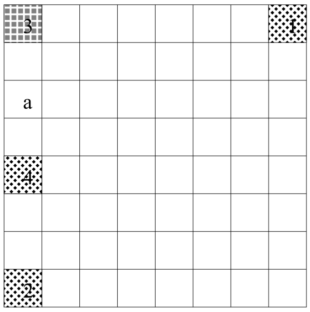


FIG. XII.17

Commentaire 43 : Le gestionnaire a commis une erreur, car tous les cas n'ont pas été vérifiés. Nous verrons que les élèves vont dans la suite trouver un contre-exemple.

Nous faisons l'hypothèse qu'une des raisons qui a poussé les élèves à conjecturer ce résultat est le fait que l'absence de frontière vide entraîne qu'il n'est pas utile d'interroger le dernier coin. Cela a été remarqué par un élève à la ligne 451.

Un contre-exemple à la conjecture précédente : Après le départ du gestionnaire, les élèves jouent une nouvelle partie (l. 515), toujours avec la même stratégie, où les coins opposés sont de couleur différente, ils se rendent alors compte que leur stratégie d'interroger les 3 coins puis ensuite les milieux ne marchent pas, car la couleur des 3 coins ne permet pas la détermination de la direction de la frontière : « Mais comment on fait pour déterminer si elle est diagonale ou verticale. ». Un élève dit ensuite : « Tout à l'heure on a eut de la chance parce que toutes les 3, elles étaient rouges. », puis dit qu'« il faut qu'il y ait les 3. » (sous entendu les trois coins de même couleur). Ce résultat est invalidé par un autre élève en exhibant une configuratoin avec les coins opposés de même couleur et un troisième point de couleur différente. Un élève formule alors le résultat suivant : « Il faut que les coins opposés soient de même couleur. »

Commentaire 44 : Cette expérimentation ainsi que le dialogue qui a suivi a entrainé la modification de la conjecture des élèves pour qui, à la fin, le résultat n'est vrai que si la couleur des coins opposés est différente. Durant ce dialogue, les élèves ont produit des contre-exemples, cela leur aussi permis d'observer les cas pour lesquels ils trouvaient la frontière en 5 interrogations : il faut que les coins opposés soient de même couleur pour trouver la frontière en 5 interrogations.

D'autre part, il semble que les élèves n'aient pas pris en compte le fait que le gestionnaire ait validé la conjecture précédente. Ce que nous pouvons interpréter comme un signe du fait que les élèves ont pris à leur charge la validité de leur résultat. Une autre hypothèse est qu'ils n'ont wpas fait attention à ce qu'a dit le gestionnaire.

De plus, nous pouvons remarquer que les élèves cherchent à améliorer leur stratégie en fonction de la couleur des 3 premiers coins. Toutefois, cette amélioration locale de la stratégie, ne permet pas une amélioration globale.

Intervention du gestionnaire : Le gestionnaire demande aux élèves ce qu'ils font, ils répondent qu'ils ont « donné un contre-exemple » au fait qu'il est possible de trouver la frontière en 5 interrogations lorsque la frontière vide n'est pas autorisée. Les élèves fournissent l'explication suivante (l. 555) :

> En fait, si on a de la chance et si on sait que les 2 sont rouges (en montrant 2 coins opposés) et que de l'autre côté (en montrant un autre coin) il est d'une autre couleur, on peut savoir si elle est diagonale, on peut le faire théoriquement. Mais si la couleur, elle n'est pas même pour les opposés, cela peut être soit verticale soit diagonale.

Le gestionnaire mentionne alors que cet argument est lié à leur stratégie et qu'il pourrait exister une autre stratégie permettant de le faire en 5. Les élèves répondent alors que « c'est sûr en 6. » et que « pas d'après ce qu'on a trouvé ». Le gestionnaire donne ensuite deux pistes de recherche aux élèves, la première est de rechercher une stratégie qui termine en 5 s'il pense qu'il en existe une. La deuxième est de chercher pouquoi il est impossible de déterminer la frontière en 5 interrogations, s'il pense que c'est impossible.

Commentaire 45 : Le gestionnaire fait ici le choix de favoriser la recherche d'une solution à 5. Il effectue ce choix, car il cherche à ce que les élèves conjecturent l'impossiblité d'une solution à 5. Une autre option aurait été de guider les élèves vers la recherche d'arguments de minoration.

Une nouvelle phase de recherche : Les élèves commencent de nouvelles parties sans tenir de rôle : il n'y a plus de chercheur et de donneur. Il semble qu'ils cherchent à déterminer une stratégie qui trouve la frontière en 5 interrogations.

Commentaire 46 : Le fait que les élèves se détachent des rôles nous apparaît comme un signe de la dévolution du problème mathématique.

Les élèves jouent une partie en commençant par interroger 3 coins, auxquels le donneur attribut la couleur bleue, car « Il y a toujours le problème de quand il n'y a pas de frontière. ». Ensuite les élèves déplacent les carrés bleus des coins (ils les placent sur les bords du carré). Ils commencent à chercher quelles sont les frontières possibles pour cette configuration. Cependant, ils se trompent et oublient d'en considérer. Ils semblent chercher en essayant de déterminer les zones dans lesquelles les frontières peuvent être. Toutefois, ils ne semblent pas chercher à éliminer des zones.

Commentaire 47 : Nous faisons l'hypothèse que les élèves ont déplacé les trois premiers coups des coins, car ils n'ont pas réussi, à travers les différentes parties qu'ils ont jouées, en interrogeant les trois coins en premier à déterminer la frontière en 5 interrogations. De ce fait, les trois premières interrogations ne doivent pas être jouées sur les coins, ce qui les mène à rechercher une stratégie où les trois premières interrogations ne sont pas dans les coins.

Remarquons qu'il passe des trois premières interrogations dans les coins à aucune des trois premières interrogations dans les coins. C'est peut-être dû à une erreur concernant la négation.

Ils changent ensuite pour la configuration de la figure XII.18.

Il y a alors une intervention du gestionnaire.

Nouvelle intervention de l'enseigant : Le gestionnaire intervient pour prendre de l'information sur ce que font les élèves. Ils répondent qu'ils

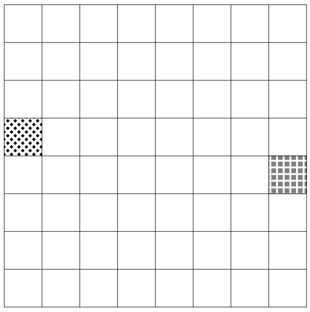


FIG. XII.18

cherchent à trouver uen solution à 5, ils disent ensuite qu'ils n'ont pas encore trouvé et qu'il y a toujours le même problème « s'il y a pas de frontière ».

Recherche d'une solution en 5 coups : Ils continuent à chercher une stratégie où les deux premiers coups sont joués sur les mêmes cases que celle de la figure XII.18, ils trouvent alors la frontière en 4 interrogation. Ils changent ensuite la couleur des cases en leur donnant la même couleur mais s'arrêtent avant d'avoir trouvé la frontière.

Nous n'avons pas pu voir la fin de la séance, car un élève est devant la caméra mais il semble jouer sans mettre les jetons dans les coins.

Ce qu'ils ont écrit sur leur feuille : Les élèves ont marqué sur leurs feuilles que la nouvelle règle ne changeait rien, que nous pouvons toujours connaître l'emplacement de la frontière en 6 interrogations. Toutefois, ils ont rajouté que, dans le cas où les coins opposés sont de même couleur, ils peuvent connaître la frontière en 5 interrogations.

Commentaire 48 : Les élèves semblent accorder beaucoup d'importance au résultat qu'ils ont développé à savoir que si les coins opposés sont de même couleur alors on peut trouver la frontière en 5 interrogations. Pourtant ce résultat ne change rien par rapport au problème puisqu'il ne s'agit que d'une amélioration locale[5] de l'algorithme de recherche. Nous pouvons y voir un signe d'une utilisation d'une optimalité ultime[6].

Cela peut aussi être vu comme une amélioration locale de l'algorithme de défense. Mais nous faisons l'hypothèse que les élèves n'ont pas remarqué cela.

4.2.3. *Séance 3.* Ce résumé est issu des notes d'un observateur. Le groupe a commencé par chercher à répondre à la question posée par le gestionnaire au début de la séance : « est-ce que vous êtes sûrs que si l'on sait qu'il y a une frontière sur le plateau alors on peut la trouver en 5 coups ? ». Ils ont commencé à utiliser une stratégie qui consiste à interroger les deux coins opposés puis un autre coin puis jouer aux milieu. Ils commencent par donner la même couleur aux coins, ils trouvent la frontière en 5 interrogations. Ensuite, ils ont donné aux coins opposés des couleurs différentes, ils n'ont pas réussi à terminer en 5 interrogation.

[5]Locale car cela ne change pas le nombre d'interrogation au pire utilisé par l'algorithme.

[6]L'optimalité ultime consiste à optimiser l'algorithme de recherche contre tout algorithme de défense.

Intervention du gestionnaire : Le gestionnaire intervient (ligne 853) pour poser la question suivante : « Pensez vous encore que l'on peut trouver la frontière en 5 coups si on est sûr que la frontière est présente ? ». Ils disent que cela marche si les 2 coins opposés sont de même couleur mais qu'ils « n'ont pas réussi » lorsque les coins opposés sont de couleur différente. Lee gestionnaire répète alors ce qu'il a dit lors de la dernière séance : si vous pensez que c'est possible en 5, il faut chercher une stratégie, sinon il faut essayer de montrer que ce n'est pas possible en 5. Les élèves cherchent une stratégie en 5.

Phase de recherche : Les élèves donnent alors des couleurs différentes aux extrémités de la première ligne du carré et cherchent la frontière dans cette configuration, ils jouent ensuite au milieu, puis il leur suffit d'un seul coup pour trouver une case par laquelle la frontière passe. Cependant, ils se rendent compte qu'ils ont le choix entre une frontière verticale, diagonale et anti-diagonale (ligne 875). Ils essayent alors de déterminer quelle est la frontière en utilisant qu'un seul coup. Finalement, ils n'y sont pas arrivés. Nous ne disposons pas de la suite de la recherche.

Nouvelle intervention du gestionniaire : Le gestionnaire intervient pour demander aux élèves s'ils ont trouvé une stratégie en 5 coups, ils répondent que non. Le gestionnaire apporte alors une nouvelle question aux élèves : est-ce que vous pensez qu'on peut le faire en 4 coups ?

Les élèves essayent alors de répondre à cette question, mais n'ont pas le temps de chercher à cause de la fin de la séance.

4.2.4. *Séance 4.* Un des élèves était absent lors de cette séance. Ce groupe a été filmé. Nous rappelons qu'au début de la séance le gestionnaire a généralisé le problème et demandé aux élèves de jouer sur des objets plus « simples » comme des segments ou des carrés plus petits.

Premières expérimentations et premières conjectures : Les élèves ont commencé par chercher sur le carré 1×1[7] et 2×2[8]. La stratégie que les élèves utilisent est d'interroger deux coins opposés dans un premier temps puis ensuite les autres coins. Ils arrivent à trouver la frontière en 2, puis 3 puis 4 interrogations sur le 1×1 et en 4 puis 4 pour le 2×2. Le gestionnaire intervient pour leur demander en combien de coups ils trouvent la frontière sur le 1×1, ils répondent (l. 1995) :« Si il y a une frontière en 3 coups, sinon en 4. ».

Commentaire 49 : Ce résultat est faux, il suffit de considérer la figure XII.19. Les élèves ont pourtant traité ce cas, mais ont oublié de considérer la frontière coin comme une frontière possible (l. 1975).

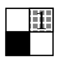


FIG. XII.19. Un contre-exemple non identifié par les élèves.

Nous pouvons remarquer qu'il semble que le gestionnaire ait identifié l'erreur (l. 1976), mais nous ne savons pas pourquoi il n'a pas discuté avec les élèves de leur affirmation.

[7] 2 cases de côté.

[8] 3 cases de côté.

D'autre part, nous pouvons observer que les élèves cherchent toujours à différencier le cas où la frontière vide est présente du cas contraire. Il semble que la présence de la frontière vide soit vue comme un élément pertinent de la situation, ce qui entraîne une double recherche : que se passe t'il lorsque la frontière vide est présente ? et que se passe-t'il dans le cas contraire ?

Les élèves étudient ensuite ce qu'il se passe sur un carré de 3 cases de côté. Cependant, cette fois-ci, ils ne commencent pas par interroger deux coins opposés mais des coins adjacents. Une première stratégie qu'ils emploient est d'interroger les 4 coins. Ils trouvent ainsi la frontière en 4 interrogatoins. Les élèves disent que :« C'est la même chose qu'il y ait une frontière ou qu'il n'y ait pas de frontière. » et « S'il y a une frontière, le minimum c'est 4. Et s'il n'y a pas de frontière, c'est 4 aussi. ».

Ensuite, ils changent leur stratégie, au lieu de commencer par interroger les 4 coins, ils interrogent 2 coins adjacents en leur donnant la même couleur puis interrogent la case milieu du carré à laquelle ils donnent dans un premier temps la couleur noire puis ensuite la couleur bleue.

Commentaire 50 : Il semble que pour les élèves l'ordre dans lequel les premières cases sont interrogées n'a pas d'importance.

Intervention du gestionnaire (l. 2018) : Le gestionnaire intervient en demandant à un élève s'il a changé la frontière en cours de route, l'élève répond : « Elle était comme ça au début, après comme ça et maintenant comme ça. En fait, je peux changer encore. ».

Commentaire 51 : La stratégie de défense de cet élève semble donc être d'imaginer une frontière possible et ensuite de donner une couleur correspondant à cette frontière. Cependant, nous ne savons pas s'il cherche à optimiser sa stratégie.

Les élèves jouent une nouvelle partie (l. 2023), au même élève que précédemment, le gestionnaire demande pourquoi il a donné telle couleur à une case. Nous avons alors la discussion suivante :

O :

Pourquoi tu lui as dit rouge ?

E_2 :

Parce que la frontière elle est là (il y avait deux possibilités de frontières)

O :

Oui mais comment tu fais en fait pour lui dire la couleur ?

E_2 :

Ca dépend de la frontière, de la position.

O :

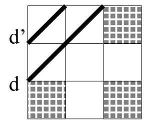
Oui mais là, si tu lui avais dit bleu.

Ils reconfigurent le plateau de cette manière :

E_2 :

Si c'est bleu la frontière elle est là (d) ou là (d')

O :



L'objectif c'est que lui il te demande le plus de cases et t'as intérêt à lui dire bleu ou lui dire rouge ?

E_2 :

Cela ne change rien.

Commentaire 52 : Durant ce passage, le gestionnaire essaye de faire expliquer à l'élève pourquoi pour maximiser le nombre d'interrogation du chercheur il choisit de donner ces couleurs. Toutefois, l'élève ne semble pas comprendre ce qu'attend le gestionnaire. Celui-ci choisit alors de spécialiser sa question sur un coup particulier.

De plus, le gestionnaire croît qu'il est plus efficace de donner la couleur bleue au coin qui est rouge. Donner la couleur bleue laisse effectivement plus de frontières possibles mais cela ne change rien concernant le nombre d'interrogations. Le gestionnaire se trompe. Il aurait, ici, était préférable que le gestionnaire choisisse un exemple où le changement de couleur aurait changé le nombre d'interrogations.

La discussion entre le gestionnaire et l'élève se poursuit. Lors de cette discussion le gestionnaire demande à l'élève de compter le nombre de frontières possibles lorsque le coin est rouge et lorsque le coin est bleu. Le gestionnaire demande ensuite à l'élève ce qu'il a intérêt à jouer. Il finit son intervention (l. 2059) par : « Ben voilà, c'est ça qu'il faut que vous regardiez. ».

Commentaire 53 : L'intervention du gestionnaire n'est pas neutre, ses questions ont pour but de guider l'élève vers la réponse qu'il souhaite. Le gestionnaire essaye de guider l'élève vers une autre stratégie de défense que celle qu'il utilise, les questions du gestionnaire peuvent être vues comme des questions intermédiaires ayant pour but d'aboutir à la formulation de la stratégie : laisser le plus de frontières possibles à chaque interrogation.

Nous pouvons reconnaître, ici, un effet topaze.

Les élèves continuent leur recherche en présence du gestionnaire qui intervient une nouvelle fois (l. 2081) pour demander à l'élève pourquoi il a donné telle couleur à telle case. L'élève répond :« Parce que j'avais choisis la frontière. ». Le gestionnaire dit alors concernant la stratégie de l'élève : « tu ne choisis pas ta frontière en fonction de la case qu'il te demande ». L'élève répond que cela ne change rien, « c'est tout le temps en 4 coups. ». Nous avons alors la discussion suivante :

O :

Et pourquoi ? parce que peut être en déplaçant la frontière comme il faut, tu lui ferais faire plus que 4 coups.

O :

A chaque fois qu'il te demande une case, essayes de bouger la frontière de façon à ce qu'il y ait le plus de possibilités, qu'il ne soit pas sûr. Et sur le 2 2 vous avez trouvé quoi ?

E_1 :

S'il y a une frontière en 3 coups et s'il y a une frontière en 4 coups.

O :

Pourquoi ?

E_1 :

En 4 parce que s'il y a pas de frontière on ne pourra jamais savoir si ils sont de la même couleur les 4. Donc il faut tenter les 4 coups. En 3, ben si on sait les 3 (en montrant 3 coins), on peut savoir l'autre. Si on sait que les 3 sont bleus, c'est obligé qu'il y ait une frontière. Ou s'il y a bleu bleu et blanc, c'est obligé que cela soit là, il y a un truc en dernier qui reste.

Commentaire 54 : L'élève semble utilisé le résultat suivant pour prouver l'impossibilité de trouver la frontière en 3 interrogations : Pour trouver la frontière vide, il faut interroger les 4 coins. Nous faisons l'hypothèse qu'il justifie ce résultat par le fait que sinon, une frontière coin peut être envisagé. C'est une preuve par exhibition de frontière.

Toutefois, la preuve du fait que lorsque la frontière vide n'est pas autorisée, on peut trouver la frontière en 3 interrogations est fausse, car elle ne considère qu'un seul cas possible pour les couleurs des 3 premières interrogations qui est de donner bleu à chaque fois. D'ailleurs le résultat est aussi faux. Le gestionnaire va ensuite essayer d'invalider ce dernier résultat.

Remarquons que le gestionnaire donne la stratégie qu'il attend au cours de ce dialogue. Toutefois, les élèves ne semblent pas l'avoir remarqué.

Le gestionnaire configure alors le plateau (1×1) dans le cas où la couleur des 3 coins est incohérente avec l'existence d'une frontière. Les élèves se rendent compte de cela, puis le gestionnaire propose le cas où les 2 cases de la première ligne sont bleues et une case de la seconde ligne est noire.

Commentaire 55 : Nous pouvons penser que le gestionnaire propose d'abord ce cas, car il croît le résultat des élèves vrai et a remarqué que leur preuve ne traitait pas tous les cas. Il propose ensuite un second cas et c'est sûrement à ce moment là, qu'il se rend compte que le résultat est faux.

Les élèves se rendent compte qu'il reste 2 frontière possibles. Le gestionnaire intervient alors pour dire qu'ils doivent interroger la dernière case. Cependant, ce contre-exemple ne semble pas convaincre un des élèves (l. 2125), celui-ci semble penser qu'il ne reste plus qu'une possibilité de frontière (la frontière diagonale). Le gestionnaire lui dit qu'il y a aussi le cas horizontal, puis l'élève enlève la case noire pour jouer une partie où elle devient bleue, il dit que là on a déterminé la frontière.

Le gestionnaire demande alors à l'élève quelle est la couleur à donner à la troisième case si les 2 cases de la première colonne sont bleues (l. 2137).

Commentaire 56 : Le gestionnaire pose cette question pour vérifier que les élèves ont bien compris l'explication précédente.

L'élève répond qu'on doit dire rouge car « si on me demande bleu c'est sûr qu'elle soit là, la frontière ». Le gestionaire invalide cet argument en lui rappelant que rouge n'est pas possible. L'élève rétorque (l. 2144) que « si on dit bleu c'est sûr qu'elle soit là, la frontière. ». Le gestionnaire lui demande alors ce qu'il doit dire, l'élève répond « Bleu puisque rouge cela ne peut pas être. ». Le gestionnaire demande alors s'il n'y a pas une autre possibilité. L'élève répond la frontière vide. Le gestionnaire dit alors :

> Ben en fait dans le cas où t'es sûr qu'il y a une frontière si ici tu dis bleu, tu finis en 3 coups. Si tu dis rouge t'as pas le droit mais par contre si tu veux finir l'autre en 4 coups tu dis quoi ?

L'élève répond qu'il ne sait pas. Le gestionnaire donne alors la réponse : « Je jouerais frontière. ». Le gestionnaire dit ensuite :

> Donc ici on est dans un cas, où c'est plus intéressant de dire frontière qu'une couleur. Donc c'est intéressant de voir ça.

Commentaire 57 : Le gestionnaire a essayé de vérifier que les élèves avaient bien compris que cette configuration était un contre-exemple. Cependant, cela n'a pas fonctionné. Il a alors réduit la difficulté de ces questions dans le but de provoquer l'apparition de la réponse qu'il souhaitait. Toutefois, jugeant que les élèves ne donnaient pas de réponses satisfaisantes et étant à cours de question, il a décidé de donner la réponse.

Le gestionnaire a donc utilisé l'effet topaze pour essayer d'obtenir la réponse qu'il souhaitait, à cours de questions, il a décidé de la donner à l'élève.

Nous avons les hypothèses explicatives suivantes par rapport à la non-identification de la stratégie que le gestionnaire veut que les élèves formulent :
– c'est un échec du premier effet topaze effectué par le gestionnaire ;
– cela provient de l'utilisation de l'axiome-en-acte suivant : il ne faut jamais dire frontière ;
– pour interpréter cette configuration comme un contre-exemple, il est nécessaire de se rendre compte que quelque soit les 3 premières interrogations jouées, le donneur de frontière peut nous mettre face à cette configuration, il faut reconnaître dans cette configuration un algorithme de défense. Les élèves et le gestionnaire ne partage pas, ici, la même représentation de cette configuration.

La dernière phrase du gestionnaire montre que celui-ci a interprété les actions des élèves à travers le deuxième point.

Recherche sur le carré de côté 4 et 3 cases. Les élèves jouent ces parties en s'attribuant des rôles.

Ils jouent une partie sur le carré de taille 4, le chercheur interroge un coin du carré, le donneur lui donne la couleur noire. Le chercheur interroge ensuite les coins adjacents auxquels le donneur donne les couleurs rouge et bleue. Le chercheur pense alors avoir trouvé la frontière, le donneur lui dit que non, le chercheur interroge alors le dernier coin auquel le donneur donne la couleur bleu. Le chercheur lui dit que c'est impossible.

Finalement, il semble que le donneur se soit trompé dans la couleur d'un coin. Le chercheur (l. 2266) fait remarquer au donneur que sa stratégie n'est pas bonne : « Au début normalement, tu dois dire bleu. ».

Ils jouent ensuite une nouvelle partie sur un carré de côté 4 cases en conservant leurs rôles, le chercheur interroge d'abord 2 coins opposés puis les autres 2 coins avant d'interroger une case d'une ligne où les extrémités sont de couleur différente. Le chercheur trouve la frontière en 5 coups.

Ensuite ils décident de jouer sur un carré de côté 3 en inversant les rôles. La partie qu'ils jouent est retranscripte sur la figure XII.20, le chercheur conclut que la frontière est d.

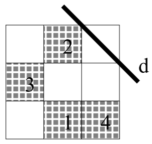


FIG. XII.20

Commentaire 58 : La partie que joue les élèves n'est pas valide, car la frontière aurait pu être un des deux autres coins de couleur inconnue. De plus, nous ne savons pas pourquoi le chercheur utilise cette stratégie alors qu'ils avaient précédemment commencés à interroger les coins.

Ils jouent ensuite une nouvelle partie dans laquelle ils commettent une erreur en considérant les frontières possibles. Ils jouent une nouvelle partie, en interrogeant cette fois les 4 coins, puis c'est la fin de la séance.

5. Déroulement effectif : groupe 3

Nous n'avons que peu de données concernant ce groupe, nous avons donc décidé de ne faire qu'un seul résumé. Ce groupe était composé de 2 élèves.

5.1. Résumé commenté du groupe 3.

5.1.1. *Séance 1.* À la fin de la première séance, ce groupe ne semble pas avoir développé de stratégie pour trouver la frontière. Ils semblent commencer par interroger des cases au « hasard » dans une zone située au centre du carré.

Commentaire 59 : L'idée qu'il peut y avoir derrière une telle stratégie est de se dire que la densité de frontière passant par cette zone est la plus importante.

5.1.2. *Séance 2.* Les élèves ont commencé cette séance en utilisant la stratégie qui consiste à interroger les coins et ensuite les milieux. Un des élèves a décrit la stratégie de la manière suivante : « Demander les 4 coins puis à chaque fois au milieu des cases restantes, on trouve en 6 coups. ». L'autre élève du groupe a décrit la stratégie dans un cas particulier. Aucun élève n'a fait la preuve que l'algorithme terminait en 6 interrogations au pire même s'ils étaient convaincus du résultat.

D'autre part, nous retrouvons, figure XII.21, la production d'un élève du groupe, il semble que cet élève ait compris que jouer au milieu permettait de diviser le nombre de frontières possibles par deux.

Nous pouvons nous apercevoir que les élèves ont identifié le résultat qui dit qu'entre deux cases de couleur rouge et bleu horizontale ou verticale, la frontière passe.

Un des élèves a aussi identifié le résultat suivant : lorsque nous avons la configuration représentée par la figure XII.22 alors « il revient au même de demander une case au centre que une sur les bords. ».

Un des élèves donne la stratégie de défense suivante : « toujours placer la frontière là où il y a le plus de possibilités. ».

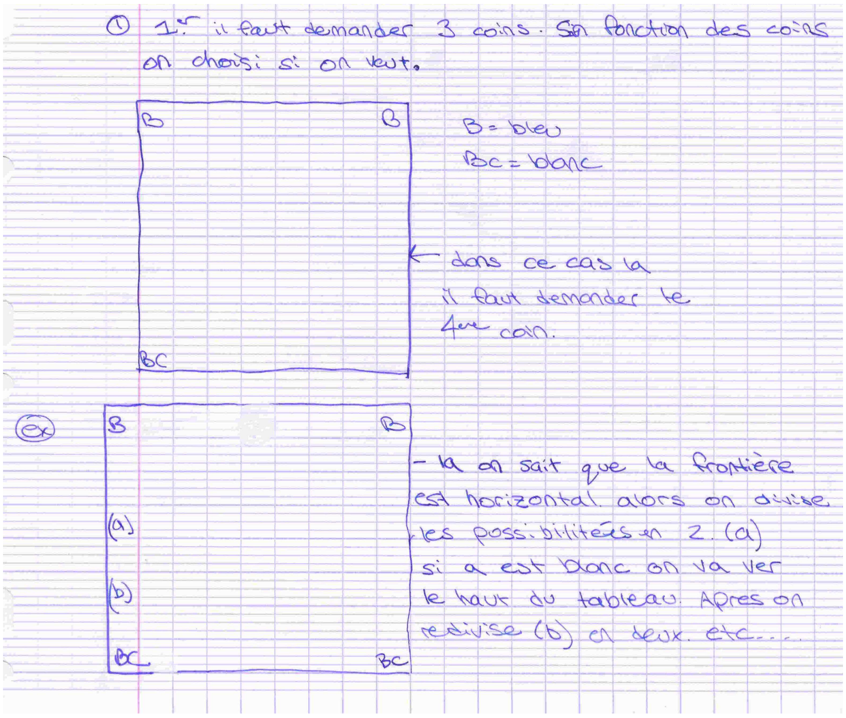


FIG. XII.21. Production d'un élève du groupe 3.

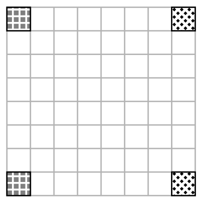


FIG. XII.22

Commentaire 60 : Les élèves ont remarqué que, sur un segment dont on connaît la couleur des extrémités, il est possible de diviser le nombre de frontières restantes par deux en jouant au milieu. Il aurait été intéressant qu'ils se posent la question de savoir s'il est possible de faire mieux que deux et qu'ils se demandent si il est aussi possible de diviser par deux sur le carré. Ces deux questions les auraient pu leur permettre d'envisager faire une preuve par majoration du reste sur le nombre de frontière.

5.1.3. *Séance 3.* Le groupe a commencé par essayer de déterminer quels étaient les ensembles de 3 ou 4 cases de même couleur qui engendraient le plus de points de la même couleur (l. 905) :

> On essaye de trouver où mettre des points de la même couleur
> pour qu'il y est le maximum de cases de cette couleur.

Le gestionnaire intervient pour prendre de l'information, les élèves lui disent que 3 points de même couleur forment un triangle, le gestionniaire invalide ceci (l. 909) en leur montrant que 3 points n'engendrent pas forcément un vrai triangle. Pour les élèves ce n'est pas important car : « Ce qu'il compte c'est qu'il reste 2 coins. » Ils utilisent ce résultat pour justifier le fait qu'on ne peut pas, ensuite (une fois trois interrogations jouées), trouver la frontière en 2 coups (l. 920), car « il reste trop de possibilités ».

Commentaire 61 : Les élèves essayent, ici, de faire une preuve de l'impossibilité de trouver la frontière en 5 interrogations. L'idée de la preuve des élèves semblent être d'essayer de déterminer le plus grand ensemble (en terme de nombre de points) que trois points de même couleur permettent de contrôler et ensuite de montrer qu'il n'est pas possible de déterminer la frontière en utilisant seulement deux interrogations.

Le gestionnaire donne alors un exemple aux élèves où trois points laissent seulement un coin du carré libre. Les élèves ont alors dit qu'« on arrive pas à trouver la frontière en 2 coups, car il reste trop de possibilités. ».

Commentaire 62 : Nous ne savons pas pourquoi le gestionnaire n'a pas essayé de reprendre l'idée de preuve des élèves, en effet, il aurait pu les guider vers la preuve suivante de l'impossibilité de déterminer la frontière en 5 interrogations :

Dans un premier temps : donner la couleur bleu aux trois premières cases interrogés par le chercheur. Ensuite :

(1) Cas où les 3 premières interrogations sont des coins : faire une preuve par exhaustivité des cas en fonction des cases interroger pour montrer qu'il faut au moins deux interrogations.

(2) Cas où au plus 2 des 3 premières interrogations sont des coins : il reste deux coins de libre, défendre en choissisant une frontière coin choisie dans un coin libre, il faut alors au moins deux interrogations au chercheur pour déterminer la frontière.

Cette preuve correspond à l'idée des élèves, la seule différence est qu'elle explique pourquoi « il y a trop de possibilités » pour déterminer la frontière en deux interrogations.

Les élèves ont ensuite essayé de répondre à la même question mais cette fois-ci concernant 4 points de même couleur. Les élève se sont rendus compte que dans le cas où les 4 points sont les 4 coins du carré alors cela leur permet d'engendrer tout le carré. Ils ont alors dit (l. 929) :

> On ne peut pas trouver la frontière avec ces 4 coups, car la personne en face ne va pas nous donner les 4 coins de la même couleur.

Le gestionnaire a alors dit :« Ce que vous venez de dire ne vous permettrez pas de démontrer qu'il faut au moins 4 coups pour trouver la frontière ? ».

Les élèves n'ont pas répondu, le gestionnaire a alors donné la réponse.

Commentaire 63 : Pour justifier qu'il n'est pas possible de trouver la frontière en 4 interrogations en interrogeant les coins, les élèves donnent un argument que nous apparentons à une preuve par algorithme de défense.

Il semble que les élèves n'ont pas compris les arguments du gestionnaire, car le groupe a essayé durant le reste de la séance de montrer qu'il était impossible de trouver la frontière en 4 coups. Selon un observateur qui a suivit le groupe, ils ont donné des arguments permettant de montrer cela, mais ils n'ont pas vu que les arguments mis ensembles composait une preuve.

5.1.4. *Séance 4.* Ce groupe a fusionné ave le groupe 1 lors de cette séance, nous avons résumé cette séance dans la sous-sous-section 3.2.4 page 262.

6. Phases de mise en commun

La première mise en commun a eut lieu au début de la séance 2. Nous en donnons un résumé commenté.

Débat sur le théorème coins-directions (l. 100) : Nous avons décidé de présenter le théorème coins-directions à la classe, car le groupe 1 et le groupe 2 avait utilisé, lors de la première séance ce résultat.

Le gestionnaire a commencé par énoncer le résultat suivant : La couleur des 4 coins donnent l'orientation de la frontière. Puis a demandé aux élèves s'ils pensaient que ce résultat est vrai et pourquoi. Une première réponse d'un élève du groupe 2 a été de dire que « c'est sûr ». Ensuite, un élève du groupe 1 a dit :

> Cela permet d'avoir une idée de où sont placées les frontières parce que comme c'est les coins, c'est quand même le territoire, donc c'est des bouts de territoires. Et sachant de quelles couleurs ils sont cela donne une idée globale, plus que sans.

Ensuite le gestionnaire a réitéré la question et a effectué le dessin de la figure XII.23 au tableau en demandant aux élèves quelle est l'orientation de la frontière.

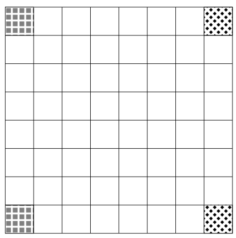


FIG. XII.23. Dessin du gestionnaire au tableau.

Commentaire 64 : L'introduction de cet exemple par le gestionnaire avait pour objectif que les élèves effectuent une preuve par exhaustivité des cas en fonction de la couleur des coins.

Les élèves répondent qu'elle est verticale. Puis un élève du groupe 1 fournit l'explication suivante :

> Cela dépend des règles que vous nous avez données. Tout ça c'est de la logique. On ne peut pas avoir... si on a une diagonale un côté rouge et un côté bleu. Si vous tracez n'importe quelle diagonale, il y aurait au moins un des coins que vous avez marqués qui seraient faux parce que vous auriez un bleu et un rouge dans un même territoire ce qui n'est pas possible. Un territoire cela ne contient qu'une couleur.

Après une discussion sur la possibilité d'avoir une frontière diagonale, un élève dit qu'elle « sépare un coin des 3 autres ». Le gestionnaire a alors dit :

> Donc vous dîtes qu'il y a le cas où on a 2 coins qui sont frontières et celui où 3 coins sont de la même couleur et un autre d'une couleur différente. Et si on a un coin d'une couleur et 3 autres d'une couleur différente ?

Les élèves répondent que la frontière est diagonale, le gestionnaire demande alors si c'est sûr que c'est une diagonale. Les élèves répondent que oui, car une horizontale ou une verticale coupe en 2 coins. Le gestionnaire a alors demandé s'il était possible que cela soit une frontière vide, les élèves ont répondu que non, car il y a deux couleurs.

Ensuite le gestionnaire a donné une preuve du théorème en récapitulant les cas traités et en rajoutant les cas où les coins sont frontières.

Ensuite, le gestionnaire a donné la nouvelle consigne, puis a ajouté qu'il y avait, maintenant, deux questions à traiter : « comment trouver la frontière en un minimum de coups et comment faire pour que l'autre fasse le maximum de coups. ».

Séance 3 : enveloppe convexe : À la fin de la séance 2, le gestionnaire avait posé la question suivante aux élèves :

> Quel est l'ensemble des cases sur lequel le placeur de frontière est obligé de dire bleu si il y a 2 cases bleus ?

La séance 3 a commencé par une mise en commun concernant les réponses des élèves à cette question. Un élève du groupe 1 donne la réponse suivante :

> Ben on fait des zones. Ca dépend, entre 2 trucs on peut faire des zones par rapport aux diagonales dans lesquelles ils sont et les verticales et donc l'endroit délimité par les 4 zones et par. . . en bout. . . si on donne un exemple. . .

Le gestionnaire a demandé à l'élève de répéter :

> Ca dépend de quand on a 2 points bleus il y a toujours des diagonales... enfin on peut faire passer des diagonales et des verticales ou des horizontales par là et...donc par ces diagonales, on définit, il y a un seul endroit qui compromet ben vraiment, entre les différentes diagonales horizontales ou verticales et donc ça comprend une zone.

Le gestionnaire demande alors à l'élève de venir expliquer comment il fait au tableau. L'élève effectue le dessin de la figure XII.24

L'élève a tenu le discours suivant :

> On trace toutes les verticales, enfin on peut aussi tracer ces diagonales là mais elles servent un peu à rien car elles délimitent autre chose et les diagonales qui vont dans la même direction et puis on prend ce qu'il y a entre les horizontales et les diagonales.

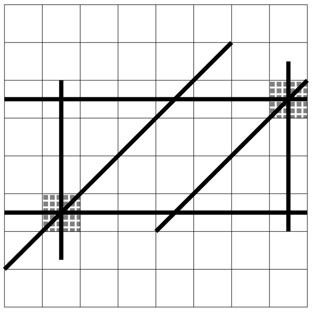


FIG. XII.24. Technique utilisée par un élève du groupe 1.

Le gestionnaire a alors demandé à l'élève pourquoi il avait fait ça, l'élève a répondu : « parce que dans cette zone là, c'est toujours bleu. ». Puis l'élève a justifié le fait qu'il ne pouvait pas y avoir de cases rouges par :

> Parce que si y'avait un rouge là, dans n'importe quelle frontière qu'il serait autour, y'a un problème parce que les 2 seraient d'un même côté de la frontière et ce n'est pas possible.

Commentaire 65 : Dans un premier temps, l'élève donne une technique pour déterminer l'ensemble des points bleus. Elle consiste en tracer les droites horizontales, verticales et diagonales passant par les points, puis à prendre « ce qu'il y a entre les horizontales et les diagonales. ». Cette technique fonctionne mais l'élève n'a pas réussi à formuler mathématiquement ce qu'il appelle la zone entre les horizontales et les diagonales.

La justification donnée par l'élève est une preuve par l'absurde, dans laquelle il suppose qu'un des points est rouge et montre qu'il y a alors une contradiction. Toutefois, l'élève prouve juste que la zone est de couleur bleue pas que c'est la zone maximale de couleur bleue.

Le gestionnaire a commencé une phrase mais n'a pas eut le temps de la finir, l'élève l'ayant interrompu. Puis, l'autre élève du groupe 1 est passé au tableau et a fait le dessin de la figure XII.25.

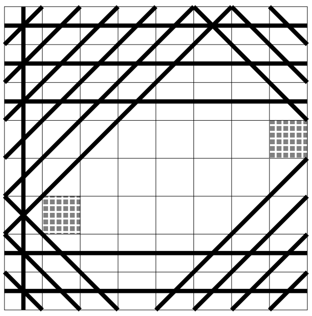


FIG. XII.25. Technique utilisée par un autre élève du groupe 1.

Cet élève a expliqué sa technique de cette manière :

> Là je vois que. . . , on fait toutes les frontières. . . on dit que les carrés bleus sont les extrémités de la zone, on fait toutes les frontières possibles qu'elles soient horizontales ou verticales et ensuite il y a celles là. Donc là on est sûr par exemple. . .

Commentaire 66 : La technique de l'élève semble être de tracer l'ensemble des frontières possibles, les cases bleues sont alors l'ensemble des cases par lesquelles aucune frontière possible ne passe.

Le gestionnaire demande alors aux autres élèves ce qu'ils en pensent. Des élèves ont répondu que c'était vrai, le gestionnaire a alors demandé pourquoi. L'autre élève du groupe 1 a alors répondu :

> C'est vrai parce que comme cela délimite les frontières possibles... quand on délimite, le seul endroit qui comprend toutes les... les autres frontières peuvent pas passer par des frontières... toutes les frontières impossibles peuvent pas passer outre les frontières, elles peuvet pas rentrer dans les frontières impo... Je ne sais pas comment faire avec ça mais c'est un peu l'idée que comme on a des frontières impossibles parce qu'elle passe par un bleu ça ne peut pas être une frontière donc comme on est obligatoirement un côté bleu et un côté blanc. Si ben, ces frontières impossibles elles délimitent un endroitou bien si là elles délimitent un endroit, il y a un obligatoirement un côté bleu et un côté rouge. Et donc du côté où il y a les carrés bleus c'est obligatoirement bleu.

Commentaire 67 : Dans l'argumentation de cet élève, il semble y avoir, à la fin, l'idée que l'on prend l'intersection des zones bleus délimitées par les frontières possibles. Le gestionnaire a interprété ce que dis l'élève de cette manière comme le confirme son argumentation ligne 773.

Le gestionnaire dit que « c'est ça » et donne alors une preuve (l. 773) dans laquelle il démontre que l'ensemble des points bleu est l'intersection des zones bleus engendrées par les frontières possibles.

Commentaire 68 : Il nous semble que l'idée originale de l'élève qui a proposé cette technique n'était pas de considérer l'intersection mais l'ensemble des cases par lesquelles ne passent pas une frontière possible. Nous faisons l'hypothèse que le gestionnaire n'avait pas repéré cela. En repérant cela, il aurait pu proposer une deuxième preuve aux élèves.

Une fois l'explication du gestionnaire terminée, dans laquelle il a introduit les notions d'intersection et de demi-plan, il a insisté sur le fait que ce résultat est un résultat intéressant pour le jeu. Puis à demander aux élèves, ce que le chercheur n'a pas intérêt à faire. Ce à quoi les élèves ont répondu qu'il n'avait pas intérêt à demander une des cases de la zone. Ensuite le gestionnaire a demandé ce que devait dire le donneur de couleur lorsque le chercheur demandé une des cases de la zone, les élèves ont répondu bleu.

Fin de la séance 3 : preuve de l'impossibilité à 4 (l. 1595) : Le gestionnaire a demandé aux élèves est ce qu'il était possible de déterminer la frontière en 4 interrogations. Un élève a répondu non, sa justification était que en 4 coups on ne couvre pas le plateau. Le gestionnaire a fait répéter à l'élève, qui a alors dit :

> Ben parce que si on prend 4 points au hasard et ils sont tous de la même couleur, on sait qu'ils ne sont pas dedans.

Le gestionnaire a alors dit ceci : « Je prends 4 points, je vais mettre des croix pour les points que je prends. Et tu fais quoi ? ».

Commentaire 69 : Le gestionnaire voulait que les élèves effectuent une preuve par algorithme de défense du résultat. Pour cela, il aurait été préférable qu'il commence par un point, en demandant à l'élève de jouer une partie contre lui.

Après une discussion, au cours de laquelle, il semble que le gestionnaire n'ait pas compris ce que les élèves lui ont dit, le gestionnaire a dit :« Oui mais si je dis ici, si je dis rouge, rouge, rouge et ici je dis bleu. ». Un élève a répondu que c'était bête de jouer comme ça, car on donne la frontière. Il a rajouté que :« Si vous aviez mis tout d'une même couleur, on pourrait pas trouver la frontière. ». Le gestionnaire a alors dit (l. 1650) :

> Voilà, donc qu'est ce que vous faîtes, vous m'auriez fais jouer tout de la même couleur. T'aurais dit tout bleu. Donc dans ce cas là, effectivement, si j'ai tout bleu, je ne peux pas gagner.

Le gestionnaire a ensuite demandé aux élèves s'il n'y avait pas un cas pour lequel, s'ils donnent tout bleu aux quatre premières interrogations alors ils peuvent trouver la frontière. Un élève a répondu : « s'il n'y a pas de frontière. ». Le gestionnaire a alors demandé aux élèves ce qu'ils joueraient. Un élève a répondu : « On en mettrait 1 rouge et 3 bleus ou 3 bleus et 1 rouge. ».

Le gestionnaire a ensuite conclut la séance en disant que ce qu'ils venaient de faire correspond à une preuve de l'impossibilité de trouver la frontière en 4 interrogations. Il a ensuite reformulé la preuve de la manière suivante :

> si on me donne 4 coups dont un n'est pas un coin, je dis tout bleu et si on me donne 4 coups qui sont tous les coins, je dis 3 bleu et un rouge.

Commentaire 70 : Le gestionnaire a effectué une preuve incomplète, car il n'a pas montré qu'il existait un algorithme de défense permettant d'obtenir les configurations qu'ils mentionnent. Une preuve correcte aurait été de donner l'algorithme de défense suivant pour les 4 premières interrogations :

(1) Donner la couleur bleue aux trois premières interrogations ;
(2) Nous allons maintenant traiter différents cas en fonction du nombre de coins interrogés :
   (a) Si les trois premières interrogations sont des coins : si le chercheur interroge un coin, donner la couleur rouge. Sinon, donner la couleur bleue.
   (b) Si au moins une des trois premières interrogations n'est pas un coin : donner la couleur bleue.

Puis, ajouter que 4 points bleus dont au moins un n'est pas un coin ne permet pas de déterminer la frontière (car il y a toujours la possibilité que la frontière soit vide ou coin) et que trois coins bleus et un coin rouge ne permettent pas de déterminer la frontière, car sur un plateau de 7×7, il y a au moins deux possibilités de frontières diagonales.

Séance 4 : preuve d'un résultat (l. 1700) : Lors de cette séance, le gestionnaire a commencé par rappeler un résultat que les élèves avaient trouvé à la séance précédente : le résultat est 5 ou 6 pour un plateau de 8 cases de côté. Puis, il a demandé aux élèves, pourquoi, lorsque 2 coins sont rouges et 2 coins sont bleus, ils jouaient au milieu. Un élève a répondu que cela en éliminer le plus. Le gestionnaire a ensuite demandé où était le milieu. Un élèves a répondu : « on fait 3 et 2, 3 d'un côté et 2 de l'autre. ». Puis le gestionnaire a demandé pourquoi il jouait sur ces cases. Le dialogue suivant a alors eu lieu :

E :

> Parce que c'est plus rapide que sur un bout, car si on fait sur un bout on est obligé d'avancer à chaque fois alors que là c'est tout de suite · · ·

O :

> Qu'est ce que t'appelles un bout ?

E :

> Un des bords à côté d'une des cases de couleur. Parce que si on ne demandé pas au milieu, on laisse plus de place à celui qui met la frontière car là c'est où on en laisse le moins pour choisir où il met sa frontière

O :

> En gros ce que tu dis c'est qu'en jouant là ou là, il aura moins de possibilité pour ses frontières et pourquoi ?

E :

> Parce qu'il reste d'un côté 2 cases et de l'autre 3.

Le gestionnaire a alors demandé quelle est la couleur a donné si on interroge la case Z de la figure XII.26.

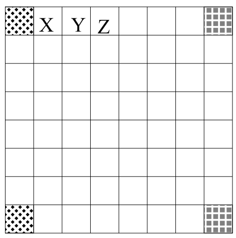


FIG. XII.26. Case grisée correspondant au milieu.

Les élèves ont répondu rouge, car il reste trois possibilités. Ensuite, le gestionnaire demande ce qu'il se passe si au lieu d'interroger la case Z, il interrogeait la case X. Un élève a répondu qu'il restait 5 possibilités dans le cas où l'on joue rouge. Puis, il a ensuite demandé ce qu'il se passait si on jouait sur la case Y. Les élèves ont répondu 4 si Y est rouge et 0 si Y est bleu.

Le gestionnaire essaye ensuite d'expliquer qu'un nombre de possibilités supérieures, n'implique pas un nombre d'interrogations supérieures :

> Comme il reste une possibilité pour placer la frontière, c'est fini. Mais ce qu'on vient de dire ne dis pas pourquoi c'est plus intéressant de jouer au milieu. Là, c'est intéressant car il

> reste moins de possibilités mais on pourrait très bien jouer Y ou X et qu'il nous reste un certains nombre de po interprété au pire des cas, c'est-à-dire la frontière vide ne peut être déterminer sans interroger les 4 coins.ssibilités et ensuite les éliminer après.

Les élèves n'ont pas semblé comprendre ce qu'a essayé de dire le gestionnaire. Il a alors dit :

> En jouant un coup, effectivement je suis d'accord en jouant Z, on va minimiser le nombre de possibilité restante pour les frontières, c'est là qu'on en aura le minimum. Cependant, on pourrait très bien joué sur Y et avoir rouge. Il nous reste 5 possibilités et ensuite faire qu'il nous reste avec le coup suivant moins de possibilité qu'en jouant sur une autre case.

Remarquons, toutefois, que les élèves et le gestionnaire font implicitement l'hypothèse suivante : jouer sur le bord est équivalent à jouer sur les autres cases dans le cas où l'on connait la couleur de tous les coins.

Les élèves ont rétorqué que : « Non parce qu'on a trouvé un deuxième coup après. ». Puis, « Avec Z, il suffit de rejouer encore un coup et on a trouvé. Si on joue au milieu des 3 cases, on a trouvé la frontière. ». Le gestionnaire a appelé ce point W. Il a ensuite demandé à l'élève de justifier pour quelles raisons il trouvait la frontière. L'élève a dit :

> Si c'est bleu on a trouvé la frontière. Si c'est rouge on a trouvé la frontière. Alors que si on jouait une autre lettre, cela ne marchait pas en un coup après.

Le gestionnaire a reformulé ce qu'a dit l'élève et ajouté qu'il fallait maintenant montrer qu'en interrogeant une autre case, il n'était pas possible de déterminer la frontière en 1 interrogation. Un élève a alors dit :

> On peut refaire comme vous faîtes, jouer les cases une par une et voir qu'on ne peut pas.

Le gestionnaire a répondu qu'il suffisait de montrer qu'avec les autres cases, on ne pouvait pas trouver la frontière en 1 interrogation.

Commentaire 71 : Certains élèves ont semblé avoir compris que qu'un nombre de possibilités plus élevé n'implique pas un nombre d'interrogations plus importants. Le gestionnaire aurait aussi pu introduire un contre-exemple afin de montrer que cet argument est faux.

Généralisation et travail sur des objets plus simples (l. 1840) : Le gestionnaire a demandé aux élèves sur quelles formes ils pensaient qu'il était plus facile de résoudre le problème. Un élève a répondu qu'en jouant sur un maillage triangulaire, cela serait plus simple. Le gestionnaire a invalidé cette idée disant qu'il fallait toujours garder un maillage carré. Puis, les élèves ont proposé des carrés de longeur de côté plus petite puis des rectangles.

Le gestionnaire a alors demandé aux élèves de chercher sur la ligne, le carré de côté 2 cases et le carré de côté 3 cases. Un élève a alors dit que sur la ligne, il joue de cette manière :

Je fais les coins, je joue au milieu après au milieu et encore au milieu.

Commentaire 72 : L'élève a généralisé la technique utilisée pour les carrés une fois les 4 coins interrogés.

CHAPITRE XIII

Analyses de la première expérimentation

Détaillé en quoi la pratique de la démarche expérimentale a permis de franchir les obstacles, quels types d'obstacles ?, éliminer les difficultés et progresser dans l'avancée de la recherche.

Prendre tous les obstacles, regardés ceux qui ne sont pas apparus et pourquoi, regardé ceux qui sont apparus et est-ce qu'ils ont été franchis.

1. Dévolution

La dévolution du jeu n'a pas posé de problème particulier, si ce n'est qu'il a fallu, au début, rappeler aux élèves que les seules questions autorisées sont celles portant sur la couleur des cases, les élèves demandant, parfois, la position de la frontière.

D'autre part, le problème mathématique du chercheur a été dévolulé dans tous les groupes. Les élèves se détachant des rôles de chercheur et donneur pour se consacrer à l'élaboration d'un algorithme de recherche. À contrario, la dévolution du problème de l'algorithme de défense ne s'est pas faîte, les élèves n'ont étudié ce problème que pour répondre aux questions du gestionnaire. La dévolution du problème du donneur n'a donc pas été satisfaisante.

2. Démarche expérimentale

Nous avons défini la démarche expérimentale comme la réalisation, non nécessairement ordonné et à éventuellement répété, des actions suivantes :

– proposer de nouveaux problèmes ;
– expérimenter-observer-valider ;
– tenter de prouver.

Le processus de succession entre les actions s'interprétant en terme d'intéractions. Voici le schéma récapitulatif :

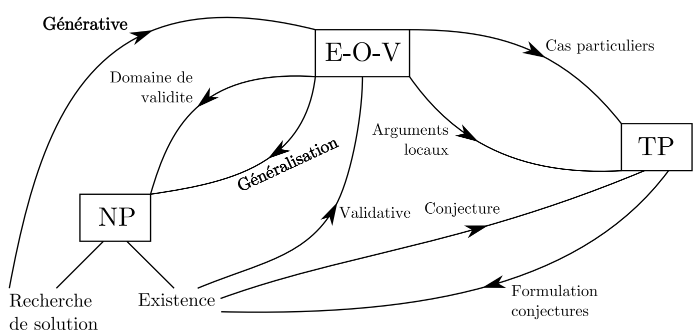


Fig. XIII.1. Schéma récapitulatif de la démarche expérimentale.

Nous considérons donc que les élèves sont rentrés dans une démarche expérimentale lorsqu'une intéraction entre proposer de nouveaux problèmes et expérimenter-observer-valider est réalisé. C'est-à-dire lorsque les élèves ont expérimenté pour construire une solution en réponse à un problème de recherche de solution (expérimentation générative) ou lorsqu'ils ont expérimenté pour répondre à un problème d'existence (expérimentation validative).

La situation *Chercher la frontière* est un problème de recherche de solutions. Les élèves ont réalisé des expérimentations génératives pour construire des stratégies de recherche. Ils ont donc pratiqué la démarche expérimentale.

Toutefois, ils ont aussi conduits des expérimentations validatives en réponse au problème d'existence suivant : existe-t'il un algorithme de recherche trouvant la frontière en moins de X interrogations ? ou par exemple le problème d'existence suivant : est-ce que mon algorithme de recherche terminen en au pire, X interrogations ? Ce dernier problème a, par exemple, mené les élèves du groupe 2 à effectuer des tentatives de preuve, voici un dialogue entre des élèves du groupe 2 (l. 368) illustrant cette tentative de preuve :

> Encore 6, c'est pas possible même si tu changes de frontière c'est impossible avec la technique des 4 coins.
>
> Tu peux pas la changer après le quatrième.
>
> Mais si tu changes la frontière après tu peux pas, car après les 4 coins, tu peux pas changer de couleur.

2.1. Nouveaux problèmes et modélisation.

2.1.1. *Optimalité utilisée.* Les élèves ont utilisé, implicitement, notre définition de *s'arrêter en X interrogations* pour évaluer le nombre d'interrogations utliisées par un algorithme de recherche.

D'autre part, les élèves ont aussi implicitements utilisés l'optimalité au pire concernant le chercheur. Nous avons, toutefois, remarqué quelques signes d'optimalité ultime lorsque le groupe 2 a semblé accordé beaucoup d'importance à une amélioration locale de l'algorithme de recherche (voir page 4.2.2). La question de la définition de l'optimalité semble ne pas s'être posée du fait que les élèves ont essentiellement[1]travaillé avec un seul algorithme.

Concernant l'optimalité de l'algorithme de défense, les élèves ont peu traité cette question, se contentant d'énoncer des algorithmes locaux et un

[1]Au cours de la séance 2, le groupe 1 a essayé de comparer la stratégie coins avec la stratégie centre. Ce groupe a conclut que la stratégie coin est plus efficace, car « la frontière peut toujours être dans les coins ». Les élèves sont revenus sur cette comparaison lors de la séance 3, ils ont aussi invalidé la stratégie centre, car si la frontière est un coin alors, avec la stratégie centre, la frontière ne peut être trouvée qu'« à la fin ». Les élèves du groupe 1 semblent donc considérer que la stratégie coin est plus efficace que la stratégie centre, car elle trouve la frontière coin plus rapidement. Cela peut être interprété comme un signe d'optimalité ultime, toutefois, les élèves sachant que l'algorithme coin puis milieu termine en, au pire, 6 interrogations. Nous faisons l'hypothèse qu'ici, il ne s'agit pas d'une optimalité ultime mais d'une optimalité par défaut, considérant que les élèves se sont rendus compte que la stratégie centre ne permettrait pas de terminer en moins de 6 interrogations à cause de la frontière coin.

algorithme global[2]. Ils n'ont pas cherché à évaluer ou à comparer ces algorithmes, ce qui n'a pas permis au problème de la définition de l'optimalité d'apparaître.

2.1.2. *Problèmes issus de l'expérimental.* En expérimentant pour construire un algorithme de recherche, les élèves ont été confrontés au problème de la validation de la stratégie, ils ont ainsi rencontré le problème : quand est-ce qu'une case est noire ? (P_{noir}).

Au niveau de la structuration de la stratégie, cela les a mené à observer qu'il n'était pas nécessaire d'interroger certaines cases sans que le problème de la convexité soit explicitement posé (il a été posé par le gestionnaire), la convexité a été utilisée *en-acte*.

En tentant de prouver qu'un algorithme coin termine en au plus X interrogations, la mise en place d'un plan de preuve a mené les élèves à se poser des questions du type : si X coins sont bleus et Y sont rouges, quel est le nombre minimum d'interrogations que je vais utiliser ? Les élèves ont identifié une variable, la couleur des coins, comme pertinente.

À la suite d'expérimentations, les élèves ont formulé des conjectures-problèmes d'existence de solution (algorithme terminant en X interrogations au pire), en voici un exemple (groupe 1, l. 1160) :

> - Marche pas. Je ne sais pas si ça existe en 5 coups, peut-être. . .
> - Je pense pas.
> - Je pense pas non plus. On a fait avec les bords, on a fait avec le centre. Avec 2 trucs, non.

En tentant de prouver qu'il n'est pas possible de construire un algorithme terminant en moins de 5 interrogations, les élèves du groupe 2 ont été confronté au problème : est-il possible de trouver la frontière en 5 interrogations lorsque la frontière vide n'est pas autorisée ? En essayant de résoudre ce problème, ils ont trouvé un contre-exemple, ils ont alors cherché à caractériser d'eux-même, les cas où il est possible de trouver la frontière en 5 interrogations avec leur stratégie (l.515). C'est un problème d'étude du domaine de validité.

L'expérimental est aussi à l'origine du sous-problème suivant : comment jouer contre une frontière coin ou vide ? En effet, il est apparu que les élèves, en position de chercheur, ont modifié leur stratégie de recherche à la suite d'une partie où le donneur a joué avec une frontière coin ou vide. Cette modification a eut lieu du fait que la stratégie utilisée par le chercheur était mise en défaut par ces frontières. À la suite de cela, les élèves ont mis en place une stratégie de recherche commençant par interroger les coins.

2.1.3. *Instances du problèmes.* Les élèves n'ont travaillé, sans intervention du gestionnaire, que sur des rectangles ayant les dimensions des plateaux que nous avions fournis. Ils n'ont pas cherché à généraliser le problème. Toutefois, comme vu précédemment, ils se sont attachés à répondre à un nouveau problème qui est le suivant : que se passe-t'il lorsque la frontière vide n'est pas autorisée ? La variable type de frontière a donc était une variable de recherche.

[2]L'algorithme est : laisser le plus de possibilités de frontières possibles.

Concernant la recherche sur des segments, les élèves n'ont pas explicitement dit, qu'une fois les 4 coins interrogés, cela revenait à chercher la frontière sur un segment. Cependant, lorsque nous avons demandé aux élèves de joué sur des segments (séance 4) un élève a, immédiatement, remarqué cela et généraliser la deuxième partie de la stratégie :

> Je fais les coins, je joue au milieu après au milieu et encore au milieu.

De ce fait, il est possible que cet élève ait remarqué qu'une fois les 4 coins interrogés, cela revenait à jouer sur des segments. Toutefois, nous n'avons aucune donnée nous permettant de dire que cet élève avait pris le problème des segments comme objet d'étude.

2.1.4. *Questions.* La question a été une variable de recherche, les élèves ayant formulé de nouvelles questions. Par exemple, les élèves du groupe 2 ont posé le problème suivant : quel est le plus grand ensemble de cases que l'on peut contrôler avec 3 ou 4 points ?

2.1.5. *Modèles.* Tous les élèves ont utilisé, au début, des résultats que nous associons à un modèle géométrique de la situation : théorèmes des coins pour déterminer l'orientation de la frontière ; entre un rouge et un bleu, il y a un noir ; une droite est engendré par 2 points...

Les élèves du groupe 1 ont utilisé pour la construction d'un algorithme de recherche, une stratégie locale[3]d'optimisation du nombre de frontières possibles restantes. Comme le montre l'extrait suivant :

> Et après t'as deux possibilités. On va faire les possibilités, on va pousser la frontière petit à petit. Il reste ça et ta frontière là.

Un élève de ce groupe a aussi utilisé la stratégie de défense globale suivante : « donner le plus grand nombres de possibilités ». Toutefois, il n'a pas défini « possibilité » Par rapport à ce que l'élève a écrit figure ? ? ? ? page ? ? ? ?, il semble qu'il cherche à maximiser le nombre de cases inconnues restantes mais par rapport à la manière dont cet élève a utilisé le terme « possibilité » dans les séances suivantes nous pourrions dire qu'il parle de frontières.

Le groupe 3 a essayé de répondre a ce problème : quels sont les ensembles de 3 et 4 points qui engendrent la plus grande enveloppe convexe ? Ce que nous relions au modèle-points.

Le groupe 2 est resté uniquement dans un modèle géométrique du problème.

2.2. axiomes, conjectures, théorèmes et argumentation. Dans cette sous-section, nous allons chercher à déterminer certains des invariants de la conception, en nous consacrant aux propositions mathématiques.

2.2.1. *Axiomes.* Ce que nous appelons axiome est un résultat utilisé par les élèves pour lequel nous faisons l'hypothèse que les élèves n'ont à aucun moment considéré qu'il pouvait être faux. Certains axiomes sont des contraintes du problème. Les élèves ont considéré les axiomes du tableau XIII.1.

[3]Locale, car il l'utilisait une fois les 3-4 premières interrogations effectuées.

`AX1`	une frontière sépare le carré en une zone rouge et une zone bleu.
`AX2`	une frontière est verticale, horizontale, diagonale ou vide.
`AX3`	un carré a 4 coins.
`AX4`	une case située horizontalement entre une case rouge et une case bleue est noire.
`AX4'`	entre une case bleue et une case rouge, la frontière passe.
`AX5`	il n'y a que deux types de stratégies possibles : celles commençant par interroger les bords et celles commençant par interroger le « centre ». (seulement le groupe 1)
`AX6`	2 points ne permettent pas d'engendrer un carré.
`AX7`	deux points noirs déterminent la frontière.
`AX8`	une frontière est caractérisée par un point et une direction.

Tab. XIII.1. Tableau des axiomes.

Ces axiomes ont été utilisés par les élèves pour mettre au point des stratégies de recherche et justifier des résultats. Nous pouvons remarquer qu'ils ne sont pas tous du même type. Les axiomes `AX1` et `AX2` sont ainsi les contraintes du problème. L'axiome `AX3` est une propriété du carré et les axiomes `AX7` et `AX8` des propriétés de la droite. Les axiomes `AX4`, `AX4'` sont des résultats qui auraient pu être déduit de `AX1` et `AX2`. L'axiome `AX6` peut être déduit de `AX1`, `AX2` et `AX3`. Quant à `AX5`, c'est un résultat que l'on peut considérer comme évident.

2.2.2. *Théorèmes et preuves.* Nous classons les résultats en 2 types, les théorèmes, qui sont ceux pour lesquels nous considérons que les arguments fournis en constituent une preuve, et, ceux pour lesquels l'argumentation est fausse ou incomplète, que nous appelons *résultats argumentés*. Nous verrons en particulier, que le statuts des résultats a évolué au cours de la recherche et des interventions du gestionnaire. Nous avons relevé les théorèmes du tableau XIII.2.

`TH1`	la couleur des 4 coins d'un carré 7×7, donne l'orientation de la frontière.
`TH2`	sur un carré 7×7, il suffit d'interroger les coins pour déterminer la frontière vide.
`TH5`	sur les carrés 1×1, 2×2 et 7×7, il faut au moins 4 interrogations pour trouver la frontière.
`TH5'`	sur un carré 7×7, il faut au moins 3 interrogations pour trouver la frontière.
`TH6`	sur un carré 7×7, une fois les 4 coins interrogés, le plus rapide est d'interroger les milieux.
`TH7`	sur un carré 1×1, l'optimum est 4.
`TH7'`	sur un carré 2×2, l'optimum est 4.
`TH8`	une technique pour déterminer l'enveloppe convexe de deux points.

Tab. XIII.2. Tableau des théorèmes.

Nous allons dans ce qui suit présenté les arguments utilisés pour prouver ces résultats, ainsi que, lorsque nous le pouvons, proposer une reconstruction de la génèse de ces résultats :

`TH1` : Ce résultat est apparu lorsque les élèves ont commencé à mettre en place des stratégies commençant par interroger les coins. En expérimentant, ils ont pu observer que la couleur des 4 coins donnent l'orientation de la frontière.

Les élèves ont utilisé des stratégies coins après avoir joué contre des donneurs utilisant des frontières coins ou vide. En effet, lors de ces parties, leurs stratégies initiales qui consistaient à interroger le « centre » ont été mises en défaut, ce qui les mené à rencontré le problème : *comment jouer contre une frontière vide ou coins ?*

Au niveau de la preuve, les élèves n'ont, semble-t-il, pas essayer de tenter de prouver ce résultat d'eux-même, il a fallu l'intervention du gestionnaire. Nous pouvons donc dire qu'initialement, ce résultat était un axiome pour les élèves, il n'est devenu un théorème que sous l'impulsion du gestionnaire. La preuve du résultat s'est faîte à travers une preuve par exhaustivité des cas dont l'auteur est le gestionnaire.

Pour remettre en cause l'évidence de cette proposition, le gestionnaire aurait pu demander aux élèves si le résultat était toujours vrai sur des rectangles.

`TH2` : Ce résultat a les mêmes origines que TH1. Les élèves se sont rendus compte qu'il suffisait d'interroger les coins pour déterminer la frontière vide. Comme TH1, il semble que ce résultat soit un axiome pour les élèves, Contrairement à TH1, le gestionnaire n'a pas cherché à obtenir une preuve de ce résultat par les élèves.

`TH5` : Ce résultat a été l'objet d'une mise en commun, au cours de la séance 3, par une preuve par algorithme de défense. Toutefois, les élèves du groupe 1 avaient déjà prouvé ce résultat au cours de la séance 2. Ce résultat n'a pas été énoncé par les élèves, il a pour origine des questions du gestionnaire : est-il possible de trouver la frontière en X interrogations ?

Nous allons rappeler ce que les élèves du groupe 1 ont fait. Avant de prouver TH5, ces élèves ont prouvé TH5' en utilisant une preuve par algorithme de défense obtenue par la question suivante du gestionnaire (l. 1237) :

> Par exemple, imaginons que tu joues contre quelqu'un qui te dit en 2 coups je peux trouver la frontière. Tu vas jouer comment contre lui ?

Les élèves ont répondu qu'ils donnaient deux fois la couleur bleue et qu'alors le chercheur se « retrouve avec une zone et tout le reste ça peut être n'importe quoi. ». Cet argument utilise l'axiome `AX4`, à savoir que deux points ne permettent pas d'engendrer un carré.

La preuve de TH5 a aussi été faîte par algorithme de défense. Elle a été dans un premier temps faîte sur le carré 7×7 puis réutiliser lors de la séance 4 pour les carrés 1×1 et 2×2. Pour le groupe 1, ce résultat a été introduit par erreur par le gestionnaire (l. 1302) lorsqu'il a effectué une interprétation incorrecte des propos des élèves. Les élèves du groupe 1 ont ensuite justifié ce résultat avec les arguments suivants (voir commentaire 21, 22 et 23) :

> Là pour définir si un territoire a un ou 4 coins, on est obligé de tester tous les coins.
>
> Pourquoi on est obligatoirement au moins obligé de faire en 4 ? Parce qu'il faut définir un territoire, il faut définir ses 4 coins et pour définir ses 4 coins, parce que c'est maximal, le maximum il faut 4 trucs.

Nous rappelons que nous considérons que, pour les élèves, un territoire est l'ensemble des points d'une même couleur (bleue ou rouge). D'autre part, nous faisons l'hypothèse que les élèves appellent coins d'un territoire les points extrémaux du territoire. Nous émettons aussi l'hypothèse que les élèves classifient les territoires en fonction du nombre de coins qu'ils possèdent.

Nous interprétons le premier argument de la manière suivante : les couleurs des 4 coins du plateau déterminent le nombre de coins du territoire et c'est le plus petit ensemble qui réalise cela. De ce fait, rien que pour déterminer le nombre de coins d'un territoire, il faut au moins 4 interrogations.

Cette argumentation est incorrecte, car la couleur des 4 coins du plateau ne déterminent pas le nombre de coins d'un territoire. Si ce résultat était vrai, alors il aurait encore fallu prouver qu'il est impossible de déterminer le nombre de coins d'un territoire en moins de 4 interrogations. L'interprétation que nous faisons de cet argument est analogue à la preuve du théorème X.16 page 144.

Quant au second argument, nous l'interprétons de la manière suivante : un territoire a entre 0 et 4 coins (`AX5`), il existe des territoires de 4 coins donc il faut au moins 4 interrogations sur les coins pour déterminer le territoire.

Il nous semble aussi concernant le second argument que l'élève rajoute un argument inutile : « c'est maximal » que nous interprétons comme une confusion entre le but de la recherche : déterminer le plus grand minorant et l'objectif de la preuve : montrer que 4 est un minorant.

Les élèves du groupe 1 n'ont donc pas réutilisé la preuve par algorithme de défense pour justifier TH5. Cependant, au cours d'une mise en commun (séance 3), un élève, n'appartenant pas au groupe 1, a proposé (l. 1605) un premier argument de convexité : « En 4 coups, on ne couvre pas la boule. », la boule étant pour lui le plateau. Le gestionnaire lui a demandé de s'expliquer, l'élève a alors proposé l'argument suivant :

> Ben parce que si on prend 4 points au hasard et ils sont tous de la même couleur, on sait qu'ils ne sont pas dedans.

Puis l'élève a rajouté, en commentant un dessin du gestionnaire, que « [...] tant qu'on ne demande pas les 4 coins, on n'est pas sûr que la frontière est sur le plateau. ». Ce résultat interprété de la manière suivante : il est nécessaire d'interroger les 4 coins pour pouvoir conclure, quelque soit la frontière choisie par le donneur, que la frontière est vide ou pas, est vrai. Par contre, il n'est plus vrai interprété de cette manière : quelque soit la frontière choisie par le donneur, il est nécessaire d'interroger les 4 coins pour pouvoir conclure que la frontière est vide ou pas. Nous faisons l'hypothèse que l'argument de l'élève se rattache à la première interprétation, car l'agencement des quantificateurs correspond à celui de l'optimalité au pire.

`TH6` : La règle d'action associée à ce résultat semble être apparue après plusieurs expérimentations pour le groupe 1 et le groupe 3. Pour le groupe 2, il semble que cela soit dû à une conversation hors classe avec des élèves du groupe 1 ou 3.

Nous considérons que ce résultat a d'abord été un théorème-en-acte pour les élèves (sauf peut-être le groupe 1) jusqu'à l'intervention du gestionnaire, au début de la séance 4, lors d'une mise en commun. Pour justifier ce résulat, les élèves disaient que jouer au milieu laisser moins de possibilités que jouer sur une autre cases. Les élèves et le gestionnaire ont dans un premier temps fait une tentative de preuve par exhaustivité des cas de ce résultat, puis le gestionnaire[4] a invalidé cet argument comme permettant, à lui seul, de prouver TH6. Les élèves ont alors fournit l'idée de la preuve : en jouant sur cette case on trouve la frontière en 1 interrogation alors que ce n'est pas le cas avec les autres.

Le gestionnaire a proposer aux élèves de montrer qu'en jouant sur d'autres cases qu'au « milieu », le nombre d'interrogations était au moins égal à celui utilisé en jouant sur le « milieu ». Les élèves ont alors proposé de faire une preuve analogue à celle faîte concernant le nombre de possibilités, c'est à dire de considérer chaque case et de regarder le nombre d'interrogations restantes.

`TH7` : Ce résultat a été énoncé par les élèves au cours de la séance 4. Toutefois, les élèves n'ont pas cherché à le prouver jusqu'à l'intervention du gestionnaire. Ils avaient trouver une technique permettant de déterminer la frontière en 4 interrogations, interroger les coins, mais ils n'avaient pas cherché à montrer qu'il était impossible de trouver la frontière en moins de 4 interrogations. Suite à l'intervention du gestionnaire, ils ont justifié qu'il était impossible de déterminer la frontière en moins de 4 interrogations en essayant de faire une preuve analogue au 7×7.

Nous ne disposons d'éléments détaillés que pour le groupe 2, nous avons alors pu remarquer que ce groupe avait, dans un premier temps, conjecturé que sur un carré de côté 2 cases (l. 1975) :

> S'il y a une frontière 3 coups, sinon 4.

La stratégie utilisées par les élèves était d'interroger deux coins opposés puis ensuite un troisième coin. Ils trouvaient alors la frontière en 3 interrogations à chaque partie jouée. Toutefois, ils ont commis une erreur face à la configuration de la figure XIII.2, ils ont oublié de considérer la frontière coin comme une frontière possible. Nous sommes, ici, face à un argument du type expérimental répétitif. Il existe un autre cas, pour lequel il est impossible de déterminer la frontière en 3 interrogations, c'est le cas où le donneur donne, à la première interrogation, la couleur noire. Les élèves n'ont pas traité ce cas durant les parties qu'ils ont jouées, nous faisons l'hypothèse que c'est

[4]Le gestionnaire a décidé de ne pas invalider directement le premier argument des élèves mais d'en étudier la validité pour permettre la mise en place dans le milieu de référence de la preuve par exhaustivité des cas.

dû au fait que les élèves considèrent comme non-pertinente la stratégie de défense consistant à donner la couleur noire à la première interrogation.

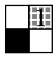


FIG. XIII.2. Un contre-exemple non identifié par les élèves.

En effectuant une preuve par exhaustivité des cas, les élèves auraient pu invalider ce résultat, cependant, il nous semble que les élèves n'ont pas cherché à valider mathématiquement ce résultat jusqu'à l'intervention du gestionnaire (l. 2097). Les élèves ont alors justifié le résultat de la manière suivante :

> En 4 parce que s'il y a pas de frontière on ne pourra jamais savoir s'ils sont de la même couleur les 4. Donc il faut tenter les 4 coups. En 3, ben si on sait les 3 (en montrant 3 coins), on peut savoir l'autre. Si on sait que les 3 sont bleus, c'est obligé qu'il y ait une frontière. Ou s'il y a bleu bleu et blanc, c'est obligé que cela soit là, il y a un truc en dernier qui reste.

Nous relions l'argument de la seconde partie de la citation à une preuve par exhaustivité des cas, cependant cette preuve est incomplète, car certains cas ne sont pas traités. Le gestionnaire a alors demandé aux élèves s'ils pouvaient déterminer la frontière avec la configuration de la figure XIII.3.

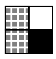


FIG. XIII.3. Configuration introduite par le gestionnaire.

Les élèves se sont alors rendus compte qu'il y avait deux frontière possibles et donc que cela nécessité une interrogation supplémentaire. Cependant, cet exemple n'a, semble-t'il, convaincu qu'un seul élève de ce groupe, l'autre continuant à croire qu'il est possible de trouver la frontière en 3 interrogations sur le 1×1.

`TH7'` : Les élèves du groupe 2 ont obtenu ce résultat après avoir joué des parties sur le carré de 3 cases de côté. Leur stratégie consistait à interroger les 4 coins du carré. Nous n'avons pas plus d'éléments concernant ce résultat qui a aussi été trouvé par le groupe 4.

`TH8` : Les élèves ont observé qu'il n'est pas nécessaire d'interroger certaines cases pour déterminer leur couleur. Toutefois, ils n'ont pas cherché à étudier un problème associé à observation, étant donné une configuration, déterminer l'ensemble des points de même couleur ? ($P_{enveloppe}$). C'est le gestionnaire qui a mis en avant un de ces sous-problèmes en demandant aux élèves de déterminer l'ensemble des points bleus lorsque deux points sont bleus.

Les 2 élèves du groupe 1, E_1 et E_2, ont proposé des stratégies pour déterminer l'ensemble des points de même couleur. La technique de E_1 consiste en tracer les droites horizontales, verticales et diagonales passant par les points, puis à prendre « ce qu'il y a entre les horizontales et les diagonales. » (voir figure XIII.4). Cette technique fonctionne, cependant l'élève n'a pas réussi à définir mathématiquement ce qu'il appelle la zone entre les horizontales et les diagonales, il est resté au niveau de la description.

D'autre part, E_1 justifie que cette zone ne comporte que des points bleus par une preuve par l'absurde :

> Parce que si y'avait un rouge là, dans n'importe quelle frontière qu'il serait autour, y'a un problème parce que les 2 seraient d'un même côté de la frontière et ce n'est pas possible.

L'élève ne justifie pas le fait que c'est la zone maximale de couleur bleue. E_2 a proposé la technique suivante : tracer toutes les frontières possibles, les cases qui n'appartiennent à aucune frontière sont alors les cases de même couleur (voir figure). E_1 a donné la justification suivante concernant la technique de E_2 :

> C'est vrai parce que comme cela délimite les frontières possibles... quand on délimite, le seul endroit qui comprend toutes les... les autres frontières peuvent pas passer par des frontières... toutes les frontières impossibles peuvent pas passer outre les frontières, elles peuvet pas rentrer dans les frontières impo... Je ne sais pas comment faire avec ça mais c'est un peu l'idée que comme on a des frontières impossibles parce qu'elle passe par un bleu ça ne peut pas être une frontière donc comme on est obligatoirement un côté bleu et un côté blanc. Si ben, ces frontières impossibles elles délimitent un endroit ou bien si là elles délimitent un endroit, il y a un obligatoirement un côté bleu et un côté rouge. Et donc du côté où il y a les carrés bleus c'est obligatoirement bleu.

Nous faisons l'hypothèse qu'il y a chez l'élève l'idée de l'intersection, qui est l'interprétation qu'en a retenu le gestionnaire.

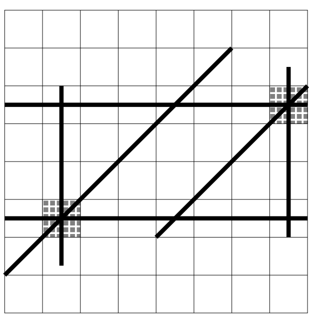


Fig. XIII.4. Technique du premier élève.

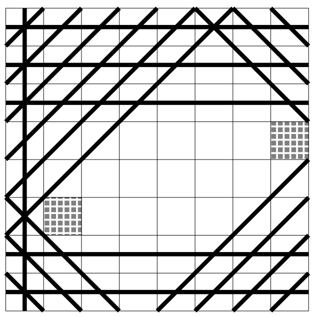


Fig. XIII.5. Technique du second élève.

2.3. Résultats argumentés. Les résultats argumentés que nous avons identifiés sont écrit dans le tableau XIII.3.

RA1	que le donneur soit autorisé à bouger la frontière ou pas, cela ne change rien pour l'algorithme coins puis milieux.
RA2	sur un carré 7×7, l'algorithme coins puis milieux trouve la frontière en, au pire, 6 interrogations.
RA3	il n'est pas possible de trouver la frontière en une seule interrogation.
RA4	ur un carré 7×7, si les coins opposés sont couleurs rouge et bleu alors on ne pas trouver la frontière en 5 interrogations.
RA5	il est plus intéressant de jouer sur le bord du carré plutôt qu'au centre.
RA6	sur un carrré 7×7 : il est impossible de déterminer la frontière en 5 interrogations.
RA7	sur un carrré 7×7 : si la frontière vide n'est pas autorisée, la frontière peut être trouvée en 5 interrogations.
RA7'	sur un carrré 7×7 : si la frontière vide n'est pas autorisée, l'optimum est 6 interrogations.

Tab. XIII.3. Tableau des résultats argumentés.

RA1 : Concernant ce résultat, le groupe 1 a émis ce résultat immédiatement après que le gestionnaire ait introduit la possibilité pour le donneur de bouger la frontière. Ils l'ont justifié par (l. 270-277) : « cela ne change rien puisque de toute façon tu te fais piéger » et « en s'orientant, on force l'autre à être de plus en plus précis. ».

Le groupe 2 a aussi émis ce résultat, mais pas immédiatement, suite à une phase expérimental dont l'objectif était de répondre au problème suivant : est-il possible de terminer en moins de 6 interrogations ? Durant cette phase, ils ont effectué plusieurs expérimentations validatives qui se distinguaient par la couleur données aux coins.

Les élèves ont conclus qu'il n'était pas possible, avec leur stratégie, de déterminer la frontière en moins de 6 interrogations. Ils ont fournis les arguments suivants : « Tu peux pas changer après le 4^{e} » et « Mais si tu changes la frontière après tu peux pas, car après les 4 coins, tu peux pas changer de couleur. ». C'est un argument mathématiques. Les élèves ont, ici, tous les arguments leur permettant de faire la preuve de ce résultat.

RA2 : Ce résultat est, au début de nature expérimental validatif, issu des observations des élèves suites à des expérimentations pour évaluer l'algorithme coins puis milieux. Les élèves du groupe 1 ont justifié ce résultat avec la figure XII.3 page 243. La justification qu'ils en donnent est incomplète (et contient des implicites), car elle oublie certains cas « triviaux » et ne justifie pas le fait que l'algorithme détermine la frontière. Un élève du groupe 2 a justifié ce résultat avec la figure XIII.6. Cette justification est incomplète pour les même raisons que le groupe 1.

D'autre part, lors de la séance 3 (voir commentaire 26), les élèves du groupe 1 ont fournis l'argument mathématiques : il faut 4 interrogations pour définir le territoire puis 2 interrogations pour déterminer la frontière, car une droite est déterminée par deux points. Les élèves de ce groupe semblaient avoir conscience que la deuxième partie de cette argumentation n'était pas

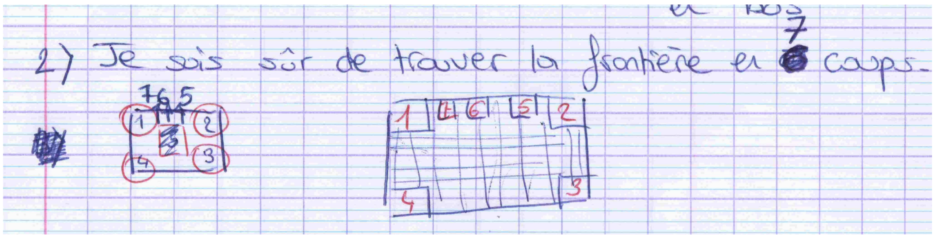


FIG. XIII.6. Justification d'un élève du groupe 2.

mathématiquement valable, que c'était plus de l'ordre de l'idée. Comme déjà mentionné dans le commentaire 26, cette interprétation n'est pas correcte, car, premièrement, 4 interrogations ne permettent pas différencier les territoires (voir figure XII.10) et deuxièmement, ce qui est pertinent n'est pas le fait qu'une frontière est déterminée par 0, 1 ou 2 points mais la longueur des côtés du carré. Nous faisons l'hypothèse que le deuxième point de l'interprétation aurait été invalidé si les élèves s'étaient posés la question pour des carrés de côtés de longueur supérieure. Cet argument peut aussi être associé à `RA6`, il nous semble en effet que les élèves essayent d'expliquer leur stratégie tout en justifiant son optimalité. Ici, nous sommes face à une optimalité par étape.

Concernant les élèves du groupe 2, ils avaient, au cours de la séance 1, mis au point une stratégie commençant par interroger les coins puis interrogeant une case sur deux. Ils n'ont commencé à interroger les milieux qu'au début de la séance 2. Ils avaient, à la fin de la séance 1, donné une justification analogue à celle du groupe 1 pour montrer que leur stratégie déterminait la frontière en 7 interrogations au pire. D'autre part, il semble qu'un des élèves du groupe donne une justification (TH1) à leur 4 premières interrogations : « pour voir où la frontière se trouve en vertical, horizontal ou diagonale. ». Mais il n'explique pas ensuite comment et pourquoi sa stratégie trouve la frontière.

`RA3` : Ce résultat a pour origine une réponse à un problème posé par le gestionnaire : est-il possible de trouver la frontière en 1 interrogation ? Ce résultat a seulement été émis par le groupe 1 qui l'a justifié en disant qu'il fallait « deux points pour délimiter une droite et comme la frontière c'est une droite ». Nous considérons que la justification des élèves est incorrecte, car si le plateau n'est constitué que d'une seule case, une seule interrogation suffit. Le gestionnaire a mentionné ce contre-exemple aux élèves, ils ont alors dit qu'il suffisait de rajouter le fait qu'on était sur un plateau de 8 cases de côtés :

> Après il faut le dire dans la conjecture, sur un plateau 8 par 8.

Les élèves considèrent donc qu'il suffit de rajouter une hypothèse[5]pour rendre leur justification correcte. Ici, ce n'est pas le cas, c'est une conséquence de cette hypothèse qui permet de compléter l'argumentation.

`RA4` : Ce résultat n'a été énoncé que par les élèves du groupe 2. Il est apparu à la suite d'expérimentation pour répondre au problème, si la frontière vide n'est pas autorisée, est-il possible de trouver la frontière en 5 interrogations ? Les élèves ont essayé de déterminer une stratégie, solution de ce problème, en commençant par interroger deux coins opposés puis un autre coin. Ils ont, à ce moment là, observé qu'il y avait une configuration pour laquelle ils n'arrivaient pas à déterminer la frontière en 5 interrogations : losque les coins opposés sont de couleur différente. Ils ont alors formulé le résultat `RA4`. Les élèves ont justifié le résultat par le fait que lorsque les coins opposés sont de même couleur, la frontière est diagonale alors que dans le cas où les coins opposés sont de couleur différente la frontière est soit verticale, soit horizontale (l. 555).

Remarquons, que ce que disent les élèves est correct, toutefois, la deuxième partie n'est pas nécessaire pour prouver le résultat qu'ils énoncent. Le deuxième argument est un argument concernant la réciproque de `RA4`[6]. De ce fait, nous faisons l'hypothèse qu'il y a chez les élèves une confusion entre condition nécessaire et suffisante au niveau de la formulation et qu'ainsi le résultat qu'ils énoncent n'est pas pour eux une implication mais une équivalence.

`RA4` est mal formulé, en voici une formulation correcte : sur un carré 7×7, si l'on commence par interroger deux coins opposés et qu'ils sont de couleur rouge et bleu alors on peut trouver la frontière en 5 interrogations.

`RA5` : Ce résultat n'est pas « mathématisé », car « jouer au centre » ou « jouer sur les bords » sont des stratégies qui ne sont pas définies. Les élèves restent dans une relation descriptive de ces stratégies. C'est le gestionnaire qui a demandé aux élèves s'il est préférable de jouer au centre ou sur les bords au cours de la séance 2. Cependant, les élèves n'ont pas émis ce résultat au cours d'une tentative de réponse à cette question du gestionnaire, mais, au cours de la séance 3, en essayant de répondre au problème suivant : si la frontière vide n'est pas autorisée, est-il possible de déterminer la frontière en 5 interrogations ?. Les élèves n'ont pas réussi sur un exemple introduit par le gestionnaire (l. 960) a trouvé la frontière en moins de 5 interrogations en utilisant des stratégies commençant par interroger les coins. Ils ont alors cherché des stratégies commençant par interroger le centre. Ils ont alors observé que ce type de stratégie ne leur permettait de déterminer les frontières coins qu'à la fin (l. 1173) :

> En fait, finalement, celle là c'est la mieux, celle avec les bords parce que celle avec le centre, tu peux avoir ta frontière là (pointe un coin) et t'en rendre compte à la fin.

---

[5]Ce procédé de rajouter une hypothèse pour rendre une justification juste est souvent utilisé par les élèves (pas forcémment pour cette situation) lorsqu'on leur donne un contre-exemple à un de leurs arguments dans lequel nous avons changé l'objet : pour rendre un argument vrai, il suffit de rajouter une hypothèse

[6]Sur un carré 7×7, si les coins ne sont pas de couleur opposée alors on peut trouver la frontière en 5 interrogations.

C'est la frontière coin qui est à la base de cet argument.

`RA6` : L'argument que les élèves du groupe 1 ont proposé pour justifier `RA2`, nous semble, à cause du vocabulaire employé « il faut... », pouvoir être utilisé pour justifier `RA6` : il faut 4 interrogations pour définir le territoire puis 2 interrogations pour déterminer la frontière, car c'est une droite. Nous pouvons donc voir, ici une confusion chez les élèves entre le nombre d'interrogation au pire utilisé par un algorithme et le nombre d'interrogations au pire que tout algorithme utilise.

Ce résultat n'a été justifié que par le groupe 3 lors de la séance 3. Dans un premier temps, l'idée de preuve des élèves a été de montrer que 3 points de même couleur laissent 2 coins vierges, ce qui laisse trop de possibilité pour pouvoir déterminer la frontière avec 2 interrogations supplémentaires. Le gestionnaire leur a fait remarqué que 3 points de même couleur ne laissent pas nécessairement 2 coins vierges, les élèves ont rétorqué qu'« on y arrive pas à trouver la frontière en 2 coups, car il reste trop de possibilités. ». Ce qu'il manque aux élèves pour pouvoir effectué une preuve de ce résultat est d'expliquer pourquoi, après 3 interrogations, il reste trop de« possibilité de frontières », ils auraient ainsi pu faire une preuve semblable à celle proposée dans le commentaire 57.

`RA7` : Le groupe 1 a au cours de la séance 2 conjecturé, dans un permier temps, `RA7` puis a fait évolué `RA7` (séance 3) vers `RA7'`. Ce groupe a conjecturé `RA7` au cours d'une intervention du gestionnaire (l. 300) demandant aux élèves s'il était possible de trouver la frontière en 1, 2 ou 5 interrogations. Les élèves ont alors répondu :

> S'il y a un frontière, on peut faire en 5 coups.

Nous n'avons pas plus d'informations concernant ce moment. Au début de la séance 3, le gestionnaire a demandé aux élèves de chercher s'il était possible, lorsque la frontière vide n'est pas autorisée, de trouver la frontière en 5 interrogations. Ce groupe a alors cherché à répondre à ce problème, les différentes expérimentations qu'ils ont conduites les ont chaque fois conduit à déterminer la frontière en 5 interrogations. La stratégie qu'ils ont utilisées consistait à interroger 3 coins puis suivant leurs couleurs des milieux. Toutefois, lors de ces différentes expérimentations les élèves n'ont pas testé le cas où 2 coins opposés sont rouge et bleu. Le gestionnaire est alors intervenu et a joué une partie avec eux, en position de donneur, dans laquelle il a donné aux coins opposés les couleurs rouge et bleu. Une fois les trois premières interrogations jouées, les élèves n'ont pas vu comment déterminer la frontière en 5 interrogations et ont interrompu la partie, pour se mettre à chercher une stratégie trouvant la frontière en 2 interrogations, une fois ces trois premières interrogations jouées. Ils n'ont pas réussi à mettre au point une stratégie trouvant la frontière en n'utilisant que deux interrogations supplémentaires, ils ont alors remis en cause la conjecture `RA7` :

> - Marche pas. Je ne sais pas si ça existe en 5 coups, peut-être...
> - Je pense pas.
> - Je pense pas non plus. On a fait avec les bords, on a fait avec le centre. Avec 2 trucs, non.

Finalement, les élèves sont arrivés à la conclusion que l'optimum était 6. Nous faisons ainsi l'hypothèse (voir aussi commentaire 12) que ce qui a convaincu les élèves est le fait que :

(1) il n'y a que deux types de stratégies possibles : commencer par interroger les coins et commencer par interroger le centre (AX5) ;
(2) nous avons essayé de déterminer une stratégie terminant en 5 interrogations commençant par interroger le bord et nous n'avons pas réussi à en trouver une (C1') ;
(3) `RA5` : interroger les bords est plus efficace qu'interroger le centre.

Ces arguments supportent la conjecture portant sur l'impossibilité de déterminer la frontière en 5 interrogations.

Quant au groupe 2, cette conjecture est apparue, au cours de la séance 2, lorsqu'ils expliquaient au gestionnaire pourquoi l'algorithme coins puis milieux s'arrête en 6 interrogations au pire. Cette conjecture est venue d'un exemple de partie, lors de laquelle ils ont trouvé la frontière en 5 interrogations en utilisant la stratégie 3 coins puis milieux. À la fin de cette partie, le gestionnaire a demandé au donneur s'il n'aurait pas pu faire effectuer 6 interrogations au chercheur. L'élève a répondu : « S'il y avait eu trois rouges. ». Le chercheur a alors dit que la frontière aurait été le coin non interrogé. Le gestionnaire a répondu que cela aurait pu être tout de la même couleur. Un des élèves a alors formulé « Soit y'a pas de frontière, soit elle est là (en montrant le coin). ». Puis un élève a énoncé la conjecture `RA7`.

Les élèves, sous l'impulsion du gestionnaire, font alors une preuve par exhaustivité des cas de `RA7`. Toutefois, il y a une erreur, car un cas (pour lequel il n'est pas possible de trouver la frontière en 5 interrogations avec la stratégie qu'ils utilisent) a été oublié. Les élèves ont traité ce cas après le départ du gestionnaire, ils ont alors réfuté la conjecture `RA7` (« on a donné un contre-exemple ») et énoncé le résultat `RA4`. (voir commentaire 39). Toutefois, le contre-exemple qu'ils ont donné à `RA7` est local puisqu'il ne s'applique qu'à leur stratégie (l. 555). Ils n'ont pas fournis d'argument montrant que `RA7` est fausse. Une hypothèse est que `RA7` est, pour les élèves, associée à la stratégie qu'ils utilisaient. Dans ce cas, `RA7` devrait être énoncée sous la forme suivante (R) : la stratégie 3 coins puis milieux permet de déterminer la frontière en 5 interrogations.

Cependant, le gestionnaire leur a ensuite fait remarquer cela, les élèves ont dit qu'ils n'avaient pas trouvé de stratégie permettant de déterminer la frontière en 5 interrogations. Ils ont ensuite semblé cherché une stratégie permettant de trouver la frontière en 5 interrogations. Ce qui confirme l'hypothèse précédente. D'ailleurs, nous pouvons nous rendre compte qu'au cours de cette phase de recherche, les élèves ont cherché des stratégies ne commençant pas par interroger les coins. Ils n'ont donc pas réfuté `RA7` mais l'assertion (R).

Un élève, du groupe 3, a aussi émis le résultat suivant : une fois les coins interrogés, jouer au milieu permet de diviser le nombre de frontières possibles par 2. Toutefois, nous n'avons aucune donnée concernant la génèse et l'argumentation de ce résultat, il nous est donc difficile de lui attribuer un statut.

Il est apparu que lorsque les élèves essayent de justifier leurs résultats par exhaustivité des cas, ils ne traitent pas certains cas, en particulier des cas « faciles » (couleur noire donnée dès le début), nous faisons l'hypothèse que :

Hypothèse

Lorsque les élèves effectuent une justification par exhaustivité des cas, ils ne traitent pas certains cas, car ils les considèrent comme « triviaux ».

Nous n'avons pas identifié de moment où les élèves ont essayé d'étudier la validité de leurs arguments[7].

2.4. Type de preuves. Nous avons identifié différents types de preuve utilisé au cours de cette expérimentation.

`Preuve par exhibition d'un exemple` Les élèves ont considéré que l'existence d'un algorithme de recherche s'arrêtant en, au pire, X interrogations impliqué que l'optimum inférieur à X. Ils ont ainsi établit la relation $P_{nombreC} \rightarrow P_{+}$.

Ils ont aussi cherché à prouver l'existence d'algorithmes s'arrêtant en X interrogations en les construisant.

D'autre part, les élèves ont produit des contre-exemples pour invalider des hypothèse/conjectures (voir par exemple l 515). Toutefois, certains exemples produits par les élèves et le gestionnaire n'ont parfois pas été identifiés comme des contre-exemples à certaines conjectures émises par les élèves (voir par exemple commentaire 44).

`Preuve par exhaustivité des cas.` Ce type de preuve a pour la première fois été utilisé au cours de la mise en commun de la séance 2. L'objectif était de montrer que TH1 est vrai. C'est le gestionnaire qui a effectué la preuve. Ce type de preuve a aussi été utilisé pour prouver TH6 lors d'une mise en commun. Au cours de cette mise en commun, les élèves et le gestionnaire ont dans un premier temps, prouver qu'en jouant au milieu, cela laisse moins de possibilités de frontières. Pour cela, ils ont effectué une preuve par exhaustivité des cas, en comptant le nombre de possibilté restantes en fonction de la case interrogée. Nous identifions, ici, la relation $P^{fr}_{opt.etp.don.} \rightarrow P_{donneur}$.

Puis, le gestionnaire a énoncé le fait que l'argument d'optimalité par étape était insuffisant. Les élèves ont ensuite proposer de faire une preuve par exhaustivité des cas de la proposition, il n'est pas possible de trouver la frontière plus rapidement en interrogeant les cases autres que celles du milieu. Les élèves ont donc réutilisé l'heuristique de la preuve par exhaustivité des cas.

Les élèves du groupe 3 ont aussi essayé de faire, par exhaustivité des cas, la preuve du résultat : si la frontière vide n'est pas autorisée, en interrogeant 3 coins d'un carré 1×1, quelque soit la couleur de ces coins, cela détermine la frontière. En faisant cette preuve, les élèves n'ont pas traité tous les cas et ont commis une erreur sur l'un d'eux. Le cas qu'ils ont oubllié de traiter

[7] On retrouve ici la séparation entre expérimentation et preuve constatée dans les manuels.

est celui où l'une des cases interrogées est de couleur noire. Nous faisons l'hypothèse qu'ils ont oublié de traiter un cas, car ils considèrent comme non-pertinente la stratégie de défense consistant à donner la couleur noire rapidement.

`Preuve par algorithme de défense.` La première fois que ce type de preuve a été utilisé, c'est au cours de la séance 2, lors d'une intervention du gestionnaire (l. 1237). L'objectif était d'établir une preuve de TH5'. La preuve a été obtenue par le gestionnaire en demandant aux élèves comment ils feraient pour empêcher le chercheur de déterminer la frontière en 2 interrogations.

Cependant, ce type de preuve n'a pas ensuite été réutilisé par les élèves de ce groupe pour montrer l'impossibilité de déterminer la frontière en 3 et 4 interrogations. Les élèves ayant fournis des arguments structurels utilisant la notion de « territoire ».

Une preuve de TH5 sur le 7×7 a été faîte au cours d'une mise en commun lors de la séance 3, un élève, n'appartenant pas au groupe 1, a, selon nous, proposé l'idée d'une preuve par algorithme de défense (mettre une référence ? ? ? ? ?).

D'autre part, les élèves du groupe 3 ont utilisé des preuves analogues pour montrer TH5 pour le 1×1 et 2×2 au cours de la séance 4. Les élèves ont semblé prouver le résultat suivant : pour déterminer la frontière vide, il faut interroger les 4 coins. Donc il faut au moins 4 interrogations, il s'agit d'une preuve par exhibition de frontière.

`Preuve par l'absurde.` Une preuve par l'absurde a été effectué par un élève du groupe 1 pour justifier TH8 (l. 725). Sa justification consiste à supposer qu'un point est de couleur rouge et à dire qu'alors pour toute frontière il y a un bleu et un rouge d'un même côté, ce qui est impossible.

2.5. Stratégies dévelopées. Les élèves ont proposé les stratégies suivantes :

– algorithme de recherche : coins puis milieux et uniquement le groupe 1 : stratégie centre et bord ;
– algorithme de défense : un algorithme contrant l'algorithme coins puis milieux et une stratégie de défense globale : laisser le moins de possibilités de frontières à chaque interrogations.

Les élèves ont aussi essayé de construire d'autres algorithmes de recherche mais ils n'en ont pas trouvé d'autre. Nous expliquons cela par le fait que les élèves ont essayé de construire des algorithmes de recherche par expérimentation générative, les « esquisses » de stratégies produites ont été jugées moins efficaces que l'algorithme coins puis dichotomie, qui est apparu rapidement (1^re^ séance) et qui est quasi-optimal.

D'autre part, les élèves n'ont pas proposé de stratégie « abstraite », autre que celle déterminant la direction et cherchant ensuite un élément de la frontière, les élèves sont restés dans une construction « action » de la stratégie.

Pour déterminer la frontière, mis à part le groupe 1 qui a proposé la stratégie commençant par interroger le centre et la stratégie commençant par interroger le bord. Nous faisons l'hypothèse que la non apparition de stratégie abstraite est dû à une construction d'algorithme de recherche de manière « expérimentale[8] ».

De plus, deux élèves ont proposé la stratégie de défense global, laisser le plus de possibilité, sans proposer la stratégie de recherche dual, interroger la case qui laisse le moins de possibilités, ce qu'ils n'ont pas fait. Nous retrouvons cette stratégie de manière locale (après les premières interrogations, qui étaient généralement les coins) sans qu'ils aient cherché à construire un algorithme basé entièrement sur cette stratégie. Le problème $P^{fr}_{opt.etp.cherc}$ n'a donc pas été posé dans sa forme général. Une hypothèse à cela est le fait que les élèves ont considéré qu'un algorithme optimal interroge commence par interroger des coins.

2.6. Exemples. Nous considérons aussi que les exemples sont des invariants de la conception, de nombreux exemples ont été produits par les élèves, essentiellement des exemples de parties, nous allons présenter les rôles qu'ils ont tenu.

2.6.1. *Les rôles que les exemples ont joué.* Nous avons identifié les rôles suivants :

`Preuve de majorant.` Les élèves ont utilisé le nombre d'interrogations au pire utilisé par les algorithmes qu'ils ont produits comme preuve de majorant (voir preuve par exhibition d'exemple dans la section Type de preuves).

`Preuve par exhaustivité des cas`. Voir la sous-section type de preuves, preuve par exhaustivité des cas.

`(In)validation d'une hypothèse/conjecture`. Les élèves ont utilisé des exemples pour invalider des hypothèses et des conjectures. En particulier, ils se sont servis des exemples de partie contre la frontière coin ou la frontière vide pour invalider toute stratégie de recherche autre que celles commençant par interroger les coins. Pour le groupe 1, à cause de l'axiome `AX5`, cela a aussi entraîné la validation d'une stratégie de type « bord ».

`Nouveaux problèmes` Nous faisons l'hypothèse que l'idée de stratégie coin a été mise au point en réponse au problème suivant : comment jouer contre une frontière coin ou vide ? Les élèves se sont ensuite souvent référés à ces exemples pour tester des stratégies.

`Rôle explicatif.` Les exemples de parties contre la frontière vide et des frontières coins ont été utilisés par les élèves pour expliquer l'intérêt de la stratégie coin. D'autre part, pour les élèves du groupe 2, la frontière vide a, nous semble-t'il, été considérée comme la raison de l'impossibilité de terminer en 5 interrogations sur le carré 7×7.

`Comparaison d'exemples et de contre-exemples.` Nous n'avons repéré ce rôle que pour le groupe 2 lorsque les élèves ont modifié la conjecture : il est possible de trouver la frontière en 5 interrogations lorsque la frontière vide n'est pas autorisée, pour la conjecture suivante : lorsque les coins opposés sont de même couleur, il est possible de trouver la frontière en 5 interrogation. Nous faisons l'hypothèse que la nouvelle conjecture provient

[8]Expérimentale dans le sens où l'algorithme est conçu par adaptation aux différentes possibilités de frontières lors des différentes parties jouées.

du fait que les élèves ont observé qu'ils trouvaient la frontière en 5 interrogations lorsque les coins opposés étaient de même couleur et que ce n'était pas le cas lorsque les coins opposés étaient de différentes couleurs.

2.6.2. *Les rôles que les exemples n'ont pas joué.* Dans la partie 1, chapitre ? ? ? ? ainsi que dans l'analyse épistémologique, nous avons relevé d'autres rôles que les exemples peuvent jouer, voici les rôles qu'auraient pu jouer les exemples pour les élèves :

`Exemple générique.` Aucun exemple de territoire n'a semblé joué le rôle d'exemple générique, nous faisons l'hypothèse que cela est dû au fait que les élèves n'ont pas cherché à généraliser le problème, ce qui les a empêché de chercher des algorithmes s'appliquant à tous carrés.

`Invalidation d'arguments.` Les élèves ont produit des arguments pour justifier des résultats mais n'ont pas semblé chercher à les tester en les appliquant à des exemples. En particulier, les arguments qu'ils utilisent pour justifier `RA6`, auraient été invalidés s'ils avaient essayé de les appliquer à des carré de longueur de côté supérieure. Remarquons que l'invalidation d'arguments nécessite, dans un premier temps, que les élèves déterminent le domaine d'application des arguments qu'ils énoncent, c'est-à-dire ici, remarquer que les arguments qu'ils énoncent sont parfois valables pour tous les carrés ou rectangles.

D'autre part, un des arguments que les élèves du groupe 1 ont utilisé pour justifier qu'il faut au moins 4 interrogations, est qu'il faut interroger les coins d'un territoire pour pouvoir le déterminer. Les élèves auraient alors pu se rendre compte que cet argument est faux, car ils ont une stratégie qui déterminent le territoire sans nécessairement interroger tous ses coins.

Enfin concernant les hypothèses que nous avions formulées sur les exemples (voir page ? ? ? ?) :
- l'exemple de la frontière coin ou vide va être jugé comme pertinent par les élèves et permettra la mise en place des stratégies coins ;
- les élèves vont produire des exemples/contre-exemples pour valider des conjectures et des preuves.

Nous pouvons dire que les parties contre les frontières coins et vide ont été des exemples pertinents pour les élèves et sont à l'origine de la stratégie coins. Les élèves ont effectivement utilisés des exemples/contre-exemples pour invalider et supporter leurs conjectures, toutefois les élèves n'ont pas cherché à étudier la validité de leurs arguments à l'aide d'expérimentations.

2.7. Nouveaux objets. Les objets suivants sont apparus au cours des recherches des élèves :

`Coin.` Les élèves ont, généralement, utilisé le terme *coin* pour désigner les cases de la figure XIII.7. Les élèves ont utilisé les coins pour déterminer l'orientation de la frontière et pour construire leur algorithme de recherche principal.

Nous considérons qu'utiliser de cette manière, la notion de coin n'a pas été construite, les élèves n'ont fait qu'utiliser un objet qu'ils connaissaient.

Ici, les coins sont un outil que l'expérimental a rendu pertinent d'utiliser grâce aux parties contre une frontière coin ou vide.

D'autre part, les élèves du groupe 1 ont utilisé les coins de manière plus général, puisqu'ils ont aussi parlé des coins d'un territoire. Les coins d'un territoire sont, selon nous, les points extrémaux des territoires. Utilisé de cette manière, nous considérons que la notion de coin a été construite. Nous parlons de cet aspect dans le paragraphe consacré à la notion de *territoire*.

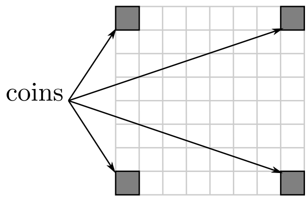


FIG. XIII.7. Les coins d'un carré 7×7.

`Frontières coins` Ces objets ne sont pas nouveaux, ils appartiennent à l'ensemble des frontières diagonales et anti-diagonales. Les élèves ont accordé à ces objets de l'importance en les désignant par le terme frontières coins. Les élèves ont distingué les frontières coins (et vide) des autres frontières, car ils les ont utilisé pour invalider des stratégies de recherche, en particulier toute stratégie interrogeant le « centre ».

`Territoire et origine d'un territoire.` Cet objet n'a été utilisé que par les élèves du groupe 1. Les élèves n'ont pas, dans un premier temps, définit cet objet explicitement. Puis, lors d'une intervention du gestionnaire, les élèves ont donné à *territoire* la définition suivante (l. 1425) :

> Un territoire c'est un demi-plan, [. . .] c'est tous les endroits où il y a du bleu où tous les endroits où il y a du rouge.

Avant d'énoncer cette définition, les élèves ont dit qu'un territoire était un demi-plan et qu'il avait entre 0 et 4 coins. Toutefois, comme mentionné au commentaire 23, nous ne savons pas si le fait qu'un territoire ait entre 0 et 4 coins est une propriété déduite de la définition ou si c'est un élément de la définition pour les élèves. Il y a donc peut-être eu chez les élèves une confusion entre la définition de l'objet et les propriétés de l'objet.

Nous avons aussi fait l'hypothèse, commentaire 21, que les élèves ont classifié les territoires en fonction de leur nombre de coins. Les élèves utlisent la proposition, les territoires ont entre 0 et 4 coins, comme un argument justifiant le fait qu'il faut au moins 4 interrogations pour déterminer la frontière (l. 1408 et l. 1471). Ils l'utilisent dans un premier temps en disant qu'il est obligatoire d'interroger les 4 coins du carré pour pouvoir déterminer le territoire :

> Là, pour définir si un territoire a un ou 4 coins, on est obligé de tester tous les coins.

Puis, ils semblent l'utiliser de manière différente, en disant qu'il est nécessaire d'interroger les 4 coins d'un territoire pour pouvoir le définir donc il faut au moins 4 interrogations :

> Pourquoi on est obligatoirement au moins obligé de faire en 4 parce qu'il faut définir un territoire, il faut définir ces 4 coins et pour définir ses 4 coins parce que c'est maximal, le maximum il faut 4 trucs.
>
> Donc on est obligé dès le départ d'avoir 4 points pour définir ce territoire en maximum donc on ne peut pas faire en dessous de 4.

Les élèves utilisent donc la notion de territoire pour justifier le fait qu'il faut au moins 4 interrogations pour déterminer la frontière, car un territoire a entre 0 et 4 coins.

Hypothèse

Il y a une confusion chez les élèves entre la définition de l'objet et les propriétés de l'objet.

`Frontière possible.` La notion de frontière possible a été utilisée par les élèves dans des stratégies pour choisir sur quelle case jouée ou pour déterminer la couleur à donner. Cette notion a aussi été utilisée pour déterminer l'ensemble des points de même couleur ($P_{enveloppe}$. La notion de frontière possible n'a pas été définie mais le terme ne prête pas à confusion.

Cette notion, est l'entrée vers le modèle-frontières, mais ici, cela n'a permis que d'obtenir une version modifiée de $P^{fr}_{opt.etp.cherc}$, par contre deux élèves ont formulé la stratégie de défense, donner la couleur qui va maximiser le nombre de frontières possibles pour résoudre $P_{donneur}$. Toutefois, aucun des élèves n'a essayé de la transformé en algorithme.

`Milieu.` Les élèves ont utilisé le terme *milieu* pour nommer les points sur lesquels ils jouaient une fois les 4 coins interrogés. Les élèves ont joué au milieu, car ils considéraient que c'était la case qui laissait le moins de « possibilités ». Ils ont remarqué qu'il n'y avait pas tout le temps un unique milieu. Ils jouaient alors indifférement sur un des « milieu ». Les élèves n'ont pas défini le terme de milieu, se contentant d'appeler la case sur laquelle ils jouaient « milieux ». Comme mentionné dans l'analyse didactique, il aurait été pertinent que les élèves cherchent à adapter l'algorithme de recherche à tous les carrés ou rectangles pour qu'ils soient amenés à définir la notion de « milieu ».

D'autre part, les élèves ont semblé considérer un milieu géométrique : autant de cases de part et d'autre du milieu, ils n'ont pas considéré un milieu en terme de frontières : autant de frontières restantes que la case soit bleue ou rouge[9].

Nous avions fait l'hypothèse (voir page ????) que les définitions des élèves allaient dans un premier temps être énoncées de manière descriptive et que sans intervention du gestionnaire, elles n'allaient pas devenir plus formelles. Cette expérimentation n'a pas invalidée cette hypothèse mais nous a permis de la compléter en rajoutant une composante action :

[9]Sur un carré, après avoir intérrogé les 4 coins, ces milieux sont identiques car il ne reste plus eginqu'un type de frontière.

3. Conception des élèves

Nous n'avons pas receuilli suffisamment de données pour le groupe 3, c'est pour cela que nous ne construirons que les conceptions des élèves du groupe 1 et du groupe 2.

3.1. Groupe 1. Étant donné que le groupe 1 a fusionné avec un autre groupe pour la dernière séance, nous avons décidé de n'utiliser que les données des trois premières séances. Nous considérons que la conception développée par les élèves du groupe 1 sur le problème est la suivante :

3.1.1. *Espace problèmes.* Nous retrouvons des problèmes que nous avions identifié dans l'analyse mathématique : $P_{chercheur}$, P_{algoC} $P_{donneur}$, $P_{nombreC}$, P_{noir}, P_{gen}, $P^{fr}_{opt.etp.cherch}$, P_+, P_-, $P_{enveloppe}$. Mais aussi des problèmes qui n'ont pas été identifiés dans l'analyse mathématique :
- P_{vide} : Que se passe t'il si la frontière vide est absente ?
- P_{coins}[10] : si X coins sont bleus et Y sont rouges, quel est le nombre minimum d'interrogations que je vais utiliser ?
- $P_{terri.coins}$: combien, un « territoire », possède-t'il de coins ?
- $P_{terri.carac.}$: comment caractériser un territoire ?
- $P_{bordvsmilieu}$: vaut-il mieux interroger le bord ou le milieu ? (introduit par le gestionnaire)
- P_{bouge} : est-ce que cela change quelque chose pour le chercheur si le donneur est autorisé à bouger la frontière ?
- P_{vsvide} : comment jouer si le donneur choisit la frontière vide ou une frontière coin ?
- $P_{def.fr}$: comment définir une frontière ?

Les problèmes ont les relations suivantes entre eux :
- $P_{algoC} \rightarrow P_+$;
- $P^{fr}_{opt.etp.cherch}$ est un élément local de résolution de P_{algoC} ;
- P_{noir} est un élément de résolution de P_{algoC} et de $P_{def.fr}$.
- $(P_{terr.coins}, P_{terri.carac}, P_{def.fr}) \rightarrow P_-$;
- P_{vide} est un cas particulier de $P_{chercheur}$;
- $P_{coins} \rightarrow P_{nombreC}$;
- P_{bouge} est un cas particulier de $P_{chercheur}$;
- $P_{bord\ vs\ milieu} \rightarrow P_{chercheur}$;
- P_{vsvide} est un cas particulier de $P_{chercheur}$.

Nous regroupons $P_{terr.coins}$,$P_{terri.carac}$ et $P_{def.fr.}$ sous le nom $P_{territoire}$. Nous regroupons aussi P_{vide}, P_{vsvide} et P_{bouge} sous le nom $P_{particulier}$.

Nous obtenons alors l'espace problème représenté par la figure XIII.8

3.1.2. *Invariants.* La conception des élèves comprend les objets mathématiques suivants :
- territoire et origine du territoire ;
- frontière possible ;
- frontière limite ;
- coins ;
- milieu ;
- l'algorithme coins puis milieux ;

[10]Ce problème peut être engendré par une tentative de preuve (mise en place d'un plan de preuve) du nombre d'interrogations au pire utilisé par un algorithme.

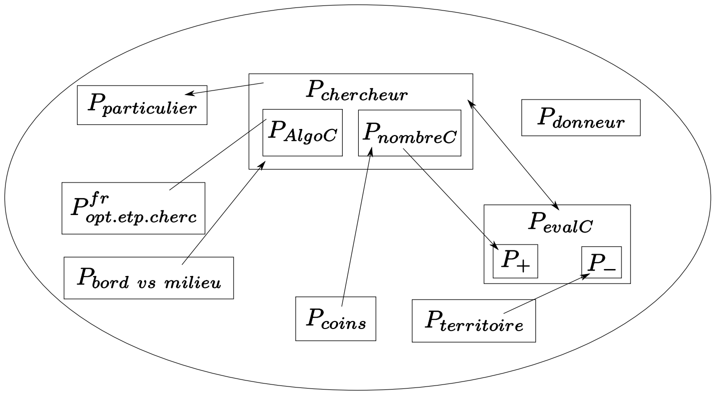


FIG. XIII.8. L'espace problème du groupe 1

– la stratégie de maximisation du nombre de frontière restantes ;
– demi-plan (introduite par le gestionnaire),
– les objets géométriques, droites, carrés, rectangles, triangles.

La conception des élèves comprend les résultats mathématiques suivants :

– la liste d'axiomes mentionnés dans le tableau ? ? ? ? ? ? ? ?
– une droite est déterminée par 2 points ;
– la couleur des 4 coins déterminent la direction de la frontière ;
– un territoire est « défini » par au maximum 4 coins ;
– un territoire ne peut contenir qu'une seule couleur ;
– l'algorithme coins puis dichotomie trouve la frontière en au maximum 6 coups ;
– utilisation des frontières limites répondre à $P_{enveloppe}$;
– il faut 4 coups pour déterminer un territoire ;
– il faut 6 interrogations pour déterminer la frontière ;
– il est plus intéressant de jouer sur le bord du carré plutôt qu'au centre ;
– cela ne change rien à l'optimum que le donneur soit autorisé à bougé la frontière.

La conception des élèves comprend les types de preuve suivants :

– preuve par exhaustivité des cas ;
– preuve par l'absurde ;
– preuve par exhibition d'un exemple.

La conception des élèves comprend les exemples suivants :

– exemples de parties avec la frontière coin et la frontière vide ;
– un exemple de partie dans lequel la couleur de 3 coins est fixée et dans laquelle, ils n'arrivent pas à trouver la frontière en 5 interrogations.
– des exemples de territoires ;

La conception des élèves sur le problème comprend les conceptions suivantes :

– il n'y a que 2 stratégies possibles interroger le bord ou interroger le milieu.
– il est obligatoire de jouer les coins ;
– plus l'algorithme est optimal à chaque étape, plus il risque d'être optimal

Nous faisons l'hypothèse que la dernière conception listée est bien présente chez les élèves, car lorsqu'ils cherchaient à construire des algorithmes de recherche du type coins, une fois les coins interrogés, ils cherchaient à interroger le point laissant le moins de possibilités de frontières possibles. De plus, un élève de ce groupe considérait que la stratégie de défense la plus efficace était de « donner le maximum de possibilités ».

3.1.3. *Représentations.* Les élèves ont utilisé des représentations droites et frontières et de la convexité (territoires). Ils ont aussi utilisé des symboles pour remplacer les couleurs. De plus, ils ont utilisé des dessins de, grilles et de cases, pour décrire l'algorithme coins puis dichotomie et montrer que celui-ci termine en, au plus, 6 interrogations.

3.2. Obstacles, difficulté, problèmes ou représentations manquants pour le groupe 1.

3.2.1. *Obstacles.* Une relation erronée dans la conception des élèves est $P_{territoire} \to P_{-}$. Selon nous, les élèves font cette erreur à cause d'une conception « temporelle » des étapes :

(1) au début, 4 coups pour déterminer le territoire ;
(2) une fois le territoire déterminé, 2 coups pour trouver la frontière, car une droite est engendré par 2 points.

Cette chronologie a peut être été causée par l'expérimental avec une tentative de preuve de type, mise en place d'un plan de preuve.

3.2.2. *Difficultés.* Par rapport au concept-problème que nous avons construit sur *Chercher la frontière*, nous pouvons voir au niveau de l'espace problème, l'absence de lien entre $P_{chercheur}$ et $P_{donneur}$. Ce qui a entraîné l'absence des problèmes générés par $P_{donneur}$. Une conséquence est la non apparition de $P_{nombreD}$ et de sa relation avec P_{-}. Nous pouvons aussi faire l'hypothèse que cela a empêché l'apparition de preuve par algorithme de défense et de l'heuristique de recherche par minorant progressif[11].

Une autre conséquence est le fait qu'un élève du groupe 1 a proposé la stratégie de défense globale, laisser le plus de possibilité de frontières, sans proposer la stratégie de recherche duale : interroger la case qui laisse le moins de possibilités.

Nous avons vu que le problème du donneur n'avait pas été dévolué aux élèves, une question qui se pose alors est : l'absence de relation, est-elle dûe à la non dévolution du problème du donneur ?

3.2.3. *Problèmes ou représentations manquants.*

Absence de problèmes particuliers : Comme nous avons pu le voir, les élèves n'ont pas fait varier la taille du carré, sauf lors de la dernière séance, sous l'impulsion du gestionnaire. Lors de cette séance, les élèves ont seulement étudié des carrés de tailles plus petites sur lesquels ils ont réutilisé les techniques qu'ils avaient développées sur le carré 7×7 au cours des séances précédentes. La variable territoire n'a pas été une variable de recherche.

L'absence des problèmes particuliers dans la conception des élèves a restreint l'espace des invariants au niveau des exemples.

[11] Essayer petit à petit d'obtenir des minorants plus grands

Illustrons cela, le groupe 1 a considéré qu'il fallait au moins 6 interrogations, car il faut 4 interrogations pour déterminer l'orientation de la frontière et ensuite 2 interrogations pour déterminer une droite, car une droite est déterminée par 2 points. Cet argument admet des contre-exemples avec des carrés de longeur de côté supérieure. Ce contre-exemple aurait aussi invalidé la relation $P_{territoires} \rightarrow P_{-}$.

D'autre part, au niveau des résultats, une recherche sur des « grands » carrés aurait permis aux élèves de se rendre compte que les types de preuves de minorations qu'ils ont utilisés (preuve par exhaustivité des cas, argument des 4 coins) sont peu efficaces[12]. Ce qui aurait alors pu les amener à mettre au point de nouvelles techniques de détermination de minorants.

Absence de problèmes « généraux » : Par problèmes généraux, nous entendons des problèmes dont les instances appartiennent à un ensemble de cardinal élevé, par exemple résoudre le problème $P_{chercheur}$ sur l'ensemble des carrés. Les élèves n'ont pas cherché à résoudre ce problème. La résolution de ce problème aurait pu permettre aux élèves de généraliser l'algorithme coins et dichotomie, et ainsi de se lancer dans le processus de définition de milieux.

De plus, ce problème nécessite d'étudier $P_{segment}$. Son apparition aurait donc pu permettre aux élèves de s'attaquer au problème sur des segments. Ceci est d'autant plus dommageable que la séance 4 montre que les élèves étaient en mesure de généraliser leurs résultats.

Non développement de la problématique « frontière » : si le modèle-frontières est initié, il ne s'est pas développé. Il y a donc une absence de la quasi-totalité de la problèmatique frontière et en particulier de P_{max}[13]. Résoudre P_{max} étant un moyen efficade de résoudre P_{-}, cette absence empêche l'obtention de minorants « quasi-optimaux ».

Non développement de la problématique du donneur: Nous pouvons voir cette absence comme une conséquence de l'absence de relation entre $P_{chercheur}$ et $P_{donneur}$.

Absence de la problématique de la convexité : Cette absence n'est pas étonnante, les élèves n'ont pas cherché à étudier la convexité de la situation en elle-même. La convexité a été utilisée en-acte.

3.3. Groupe 2. Nous allons donner la conception du groupe 2 que nous avons construite, elle est moins riche que celle du groupe 1.

[12]Le preuve par exhaustivité des cas est trop complexe à mettre en place et l'argument des 4 coins ne donnent un minorant constant égal à 4 qui est loin d'être optimal pour de « grands » carrés.

[13]Étant donné une coloration, quel est le nombre maximal de frontières qu'il est possible d'éliminer ?

3.3.1. *Espace des problèmes.* Nous avons identifié les problèmes suivants : $P_{chercheur}$, P_{algoC}, $P_{nombreC}$, $P_{donneur}$, P_{noir}, $P_{enveloppe}$, P_{+}, P_{vide}, P_{coins}, P_{bouge}, $P_{petitscarrés}$ (le problème sur des carrés de petite longueur de côté).

Les relations sont décrites sur le schéma de la figure XIII.9.

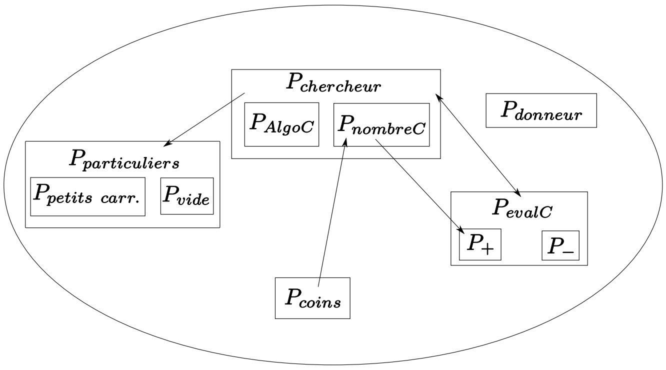


FIG. XIII.9. Espace problème du groupe 2

3.3.2. *Invariants.* La conception des élèves comprends les objets mathématiques suivants :
- frontière possible ;
- coins ;
- milieu ;
- l'algorithme coins puis milieux ;
- carrés ;

Nous retrouvons les résultats suivants :
- théorème coins-direction ;
- certaines cases ne sont pas à interroger ;
- si deux points rouge et bleu sont sur une même ligne horizontale ou verticale, il y a un point de la frontière entre ces deux points ;
- même avec la nouvelle consigne, l'algorithme coins puis milieux trouve la frontière en 6 interrogations au pire ;
- si les coins oppossés sont de couleur différente alors il est possible de trouver la frontière en 5 interrogations.
- une stratégie de recherche commençant par interroger les milieux de 2 bords opposés.
- sur un carré 1×1, le minimum est 4 ;

Nous avons les types de preuve :
- preuve par exhibition de frontière ;
- preuve par exhaustivité des cas.

Nous avons les exemples suivants :
- dans le cas où la frontière vide est interdite, un exemple de partie où lorsque 2 coins opposés sont de même couleur alors il est possible de trouver la frontière en 5 interrogations sur le carré 7×7 ;
- dans le cas où la frontière vide est interdite, un exemple de partie où lorsque 2 coins opposés sont de couleur différente, ils n'arrivent pas à trouver la frontière en 5 interrogations sur le carré 7×7 ;
- sur un carré 1×1, un exemple dans lequel il n'est pas possible de trouver la frontière en 3 interrogations (seul 1 élève de ce groupe)

Nous avons les conceptions suivantes :
– il n'est pas possible de trouver la frontière en 5 interrogations sur un carré 7×7 à cause de la frontière vide ;
– il faut que l'algorithme soit localement optimal ;
– il ne faut jamais dire noir (seulement 1 élève)

Cette dernière conception est une hypothèse que nous faisons, car les élèves accordent une grande importance à leur résultat portant sur le cas des coins opposés alors que celui-ci ne change pas le nombre d'interrogations au pire utilisé par leur algorithme, nous y voyons un signe d'optimalité locale (voir commentaire 48).

3.3.3. *Représentation.* Les représentations que les élèves ont utilisé sont des représentations géométriques. Un élève a utilisé des numéros pour dire dans quel ordre il interrogeait les cases.

3.4. Obstacles, difficulté, problèmes ou représentations manquants pour le groupe 2.

3.4.1. *Obstacles.* Nous n'avons pas identifié d'obstacle dans la conception.

3.4.2. *Difficulté.* Nous retrouvons la même difficulté que pour le groupe 1, la relation entre $P_{donneur}$ et $P_{chercheur}$. Cela a eut les mêmes conséquences que pour le groupe 1.

3.4.3. *Absence de problèmes.* Nous retrouvons les mêmes absences de problèmes que pour le groupe 1. Au niveau de la problématique-frontières, c'est un peu différent, car le problème de maximisation locale du nombre de frontières ne semble pas présent. Ce que nous avons dit pour le groupe 1 est aussi valable pour ce groupe.

3.4.4. *Expérimental et construction d'un modèle de la situation.* Ici, nous allons essayer de voir, plus en détail, le rôle de l'expérimental dans le développement d'un modèle de la situation.

`Une entrée dans la modélisation.` Les expérimentations génératives que les élèves ont menées leur ont permis d'obtenir leurs premiers éléments de modélisation du problème par appel aux propriétés de la droite. En particulier, l'expérimentation générative menée par le groupe 1 – jouer différentes parties en faisant varier le type de frontière – leur a permis de mettre au point la stratégie coins lorsqu'ils en sont venus à essayer une frontière diagonale proche d'un coin (l. 30).

`La génération d'exemple.` L'expérimental a permis aux élèves de produire des exemples de parties, de frontières, de stratégies... L'apport de l'expérimental peut donc se voir à travers les différents rôles que les exemples ont joué au cours de la recherche (voir sous-sous-section 2.6.1).

`Affinement-Réfutation de conjectures.` L'expérimental a été utilisé par les élèves pour évaluer des stratégies de recherche ou des conjectures. Les élèves ont ainsi affiné les conjectures qu'ils ont énoncées, c'est particulièrement le cas du groupe 2, lorsqu'ils ont dans un premier temps était convaincu qu'il était possible de trouver la frontière en 5 interrogations lorsque la frontière vide est absente, pour finalement se rendre compte que cela ne marchait que dans le cas où deux coins opposés étaient de même couleur. Les élèves ont utilisés les cas négatifs (contre-exemple) pour invalider leurs conjectures et les cas positifs (exemples) pour faire évoluer la conjecture en lui rajoutant des hypothèses qui selon eux permettaient de déterminer la frontière en 5 interrogations.

4. Conséquences sur le découpage des séances

Le fait que le problème du donneur n'ait pas été beaucoup cherché par les élèves a, comme nous l'avons vu, des conséquences sur la recherche des élèves, en particulier au niveau des résultats et du concept de dualité. Lors de cette expérimentation, nous n'avons introduit le rôle du donneur qu'à partir de la deuxième séance, car nous voulions favoriser la compréhension du problème par les élèves. Les élèves ayant compris les consignes sans difficultés, il nous semble donc possible et pertinent d'introduire le rôle du donneur lors de la première séance en même temps que le problème du chercheur dans le but de lui donner la même importance.

Nous avons aussi fait le choix de laisser les élèves cherchaient des arguments de minorations retardant ainsi la généralisation du problème (généralisation qu'ils n'ont pas effectuée d'eux-mêmes). Ce choix a été dicté par notre volonté de les faire travailler sur les 2 aspects du problèmes, toutefois comme nous avons pu le voir avec l'analyse didactique ou l'analyse des données, la généralisation peut permettre de modifier certains concepts, de produire de nouveaux types de preuves et de dévélopper des arguments plus généraux. Il nous semble donc pertinent de proposer un travail sur de nouveaux objets plus tôt.

CHAPITRE XIV

Deuxième situation expérimentale

1. Choix du niveau

Nous avons choisi d'expérimenter au même niveau que précédemment afin d'affiner les résultats trouvés précedemment ainsi que pour répondre aux questions que cela avait posées.

2. Présentation et découpage des séances

2.1. Présentation de l'expérimentation. Cette expérimentation s'est déroulée dans une demi-classe de seconde du lycée international de Grenoble. Le découpage et la construction des séances ont été effectués en accord avec l'enseignant responsable de cette classe. Le nombre d'élève était de 10 élèves mais ils n'ont pas tous étaient présents à toutes les séances. De plus, de nouveaux élèves sont arrivés au cours de la séquence. Nous avons demandé aux élèves de se mettre par groupe de 2 ou 3, la classe a été décomposée en 3 groupes. Nous avons effecuté 4 séances d'approximativement 1h30.

Nous avons pris des notes mais aussi filmé un ou deux groupes à chaque séance.

Un groupe a travaillé avec un plateau 7×7, un autre avec un plateau 5×10 et un dernier groupe avec un plateau 6×5. Nous avons fait le choix de donner différents types de plateaux, car nous voulions montrer aux élèves qu'il est possible de jouer avec différents territoires. Ce choix sur le matériel avait pour but d'inciter les élèves à modifier les instances du problèmes.

2.2. Découpe des séances. Nous trouverons en annexe ? ? ? ? ? les fiches descriptives des séances. Par rapport à la première expérimentation, nous avons décidé d'introduire dès le début la situation 1, c'est-à-dire $P_{donneur}$. Nous avons fait ce choix, car au cours de la première expérimentation, la dévolution de $P_{chercheur}$ n'a pas été un problème et que la problèmatique du donneur ne s'est pas développée[1]. En réponse à cela, nous proposons $P_{donneur}$ et $P_{chercheur}$ lors de la première séance afin de leur donner la même importance. Nous faisons l'hypothèse que cela va faciliter la dévolution de $P_{donneur}$ et des sous-problèmes associés.

Nous avons aussi fait le choix de faire travailler les élèves sur différents types de terrains. En particulier, de travailler sur des objets simples comme des petits carrés et sur des segments. De ce fait, nous avons introduit le problème du segment et des petits carrés au cours de la séance 2. Nous avons fait le choix de proposer ces problèmes aux élèves, car lors de la première

[1]Ce qui a empêché certains problèmes pertinents d'apparaître et a eut des conséquences sur les types de preuves utilisés et les résultats développés par les élèves.

expérimentation, la variable terrain n'avait pas été utilisée comme une variable de recherche. Ce qui avait causé l'absence de problèmes particuliers et ainsi laisser les élèves face à un terrain « expérimental » trop limité.

Nous ne donnons que les résumés des groupe 1 et 2, car nous n'avons pas recueilli assez de données concernant le groupe 3.

3. Déroulement effectif groupe 1

3.1. Résumé court du groupe 1. Ce groupe a quasiment été modifié à toutes les séances à cause d'absence, de retour ou d'apparition de nouveaux élèves sauf un élève qui a fait l'ensemble des 4 séances dans ce groupe.

Avant la première phase de mise en commun de la séance 2, les élèves avaient développé une stratégie de recherche et une stratégie de défense. Un des élèves voulait tester ses stratégies sur un autre plateau. La stratégie de défense consistait à laisser le maximum de possibilité de frontières alors que la stratégie de recherche consistait à interroger les coins puis à essayer de « diviser par 2 » le nombre de frontières restantes. Des erreurs ont été commises en position de chercheur, en annonçant que la frontière avait été trouvée alors que ce n'était pas le cas.

À la suite de la mise en commun, les élèves ont cherché un peu sur le segment, mais ils se sont plus intéressés aux petits carrés. Cela leur a permis de faire la preuve qu'il fallait au moins 4 interrogations pour trouver la frontière sur tout carré. Cette preuve a été faîte par algorithme de défense. Ils se sont ensuite intéressés au problèm des segments.

Ils ont fini par mettre au point la formule suivante : Si c est le nombre de coups, alors le segment composé de $2^c - 1$ cases est le plus grand segment qu'il est possible de faire en utilisant 5 interrogations au pire. Mais ils ne l'ont pas prouvé.

3.2. Résumé long du groupe 1.

3.2.1. *Séance 1.* Ce résumé est établit à l'aide des notes d'un observateur. Ce groupe a joué sur un plateau 6×5

Le groupe 1 a dévéloppé une stratégie de recherche qui consiste à interroger 3 coins puis à jouer sur la case laissant le moins de frontières possibles. La stratégie de défense est :

On donne la couleur qui donne le plus de possibilités.

De plus, le groupe a demandé à jouer sur un autre plateau pour tester ses stratégies.

3.2.2. *Séance 2.* La séance a été filmée. Ce groupe a commencé par jouer sur plateau 4×9. Lors de la première partie, une fois 3 coins interrogés, le donneur a compté le nombre de frontières possibles s'il donnait la couleur bleue puis le nombre de frontières possibles s'il donnait la couleur rouge. Il a trouvé 9 pour bleue et 8 pour rouge (ce qui est correct). Il a donné la couleur bleue. Le chercheur a alors dit que la frontière était là, le donneur lui a dit qu'elle pouvait être aussi à un autre endroit. Ils ont ensuite continué la partie.

Le chercheur a joué sur le coin non interrogé. Le donneur a compté les frontières possibles s'il donnait bleu puis rouge. Il a alors dit au chercheur :

> Décides, il y a autant de possibilités que cela soit rouge ou bleu, cela ne change rien.

Le chercheur a alors trouvé la frontière en 6 interrogations. En disant :

> C'est toujours pareil, on fait toujours 6

Intervention du gestionnaire (l. 252-270) : Le gestionnaire est intervenu pour demander aux élèves comment ils jouaient. Le chercheur a répondu :

> Tous les angles et après la pièce centrale. Après on prend au milieu. Si il me dit bleu je joue de ce côté et s'il me dit rouge je joue de celui là. Après je prends le milieu, enfin je prends les diagonales comme ça, je compte. C'est à dire là j'en laisse 2, là j'en laisse 1 et je sais où il est.

L'autre élève a ensuite dit :

> Pour trouver, on divise le nombre de possibilité par 2. Pour celui qui cache la frontière, on choisit la couleur suivant le nombre de possibilités qu'il reste si on met rouge ou bleu.

À la suite de cela, le gestionnaire a dit aux élèves qu'il est peut être possible que la stratégie de donner la couleur qui laisse le plus de possibilités, ne soit pas la plus efficace. Le donneur a répondu :

> Je ne sais pas comment on fait pour dire ça.

Inversement des rôles (l. 271-280) : Le chercheur a interrogé les 4 coins puis il a compté le nombre de frontières restantes s'il jouait sur a puis sur b (voir figure XIV.1).

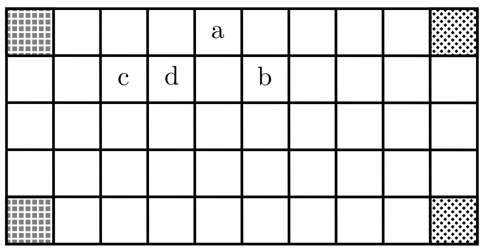


FIG. XIV.1. a ou b ?

Le chercheur a choisi la case b. Le donneur a donné la couleur rouge. Le chercheur a ensuite interrogé la case c et la case d auxquelles le donneur a donné la couleur bleue. Le chercheur a dit qu'il avait trouvé la frontière, le donneur a dit que non.

Intervention du gestionnaire (l 280-310) Le gestionnaire est intervenu pour demander de quelle manière ils jouaient, les élèves ont alors montré comment ils jouaient une fois que les 4 coins étaient interrogés. La partie qu'ils ont alors joué est représentée sur la figure XIV.2.

Le chercheur a alors dit que la frontière était diagonale, le donneur a dit que non, le chercheur a alors demandé la couleur de la case a. Le donneur a répondu noir, le chercheur a dit que la frontière était vertical, le donneur a

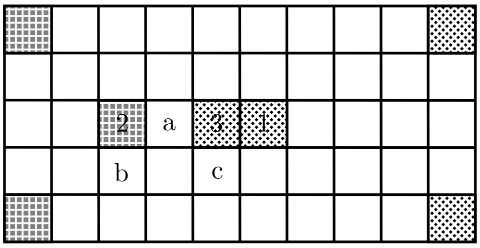


FIG. XIV.2. Explication pour le gestionnaire.

dit que non. Le chercheur s'est alors rendu compte que la frontière pouvait être diagonale et a demandé la couleur de la case située en dessous de *b*. Le donneur a alors dit noir, le gestionnaire est alors intervenu pour lui demander s'ils n'auraient pas pu lui faire faire un coup de plus. Le donneur a changé la couleur de *b* en bleu. Le chercheur a alors intérrogé la case *c*. Le gestionnaire a ensuite demandé quelle était leur technique pour donner les couleurs, le donneur a dit :

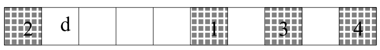
> Moi ma technique c'est toujours divisé par 2. Je compte les possibilités à chaque fois en fonction des couleurs. Et je prends la couleur qui donne le maximum de possibilité.

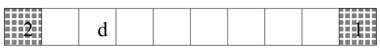
Le gestionnaire a alors demandé pourquoi est ce qu'il avait donné ces couleurs aux 4 coins, le donneur a répondu : « parce que cela laisse le plus de possibilités. ».

Commentaire 73 : Notons que les élèves ont montré la manière dont ils jouaient sur le cas le plus « difficile » pour une stratégie coin.

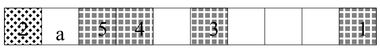
Après la mise en commun : jeu sur des segments Nous rappelons qu'au cours de la mise en commun de la séance 2, les stratégies utilisées par les élèves ont été écrites au tableau et que le théorème coins-direction a été présenté. Le gestionnaire a démandé aux élèves de simplifier le problème en travaillant sur des objets plus simples comme des segments ou sur des carrés de longueur de côté petite.

Les élèves du groupe 1 ont décidé de commencer à jouer sur une ligne composée de 10 cases. Les élèves ont joué les premières parties suivantes :

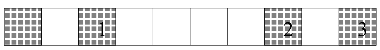




Puis changent la couleur de 2 en rouge. Ils jouent alors comme ceci :



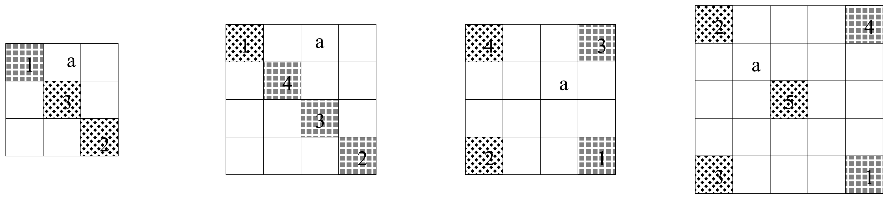
Ils jouent la partie suivante comme ceci :



L'élève qui donne les couleurs compte à chaque fois le nombre de possibilités de frontières restantes s'il joue bleu ou rouge. Suite à un problème technique, nous n'avons pas pu suivre ce qu'il s'est passé après.

Commentaire 74 : Pour le donneur, il est clair qu'il utilise la même technique que pour les rectangles. Pour le chercheur, il semble qu'il a spécifié la technique des rectangles à la ligne mais qu'il cherche aussi une technique plus efficace.

Jeu sur des carrés : Les élèves ont alors joué sur des carrés. Ils ont commencé par des carrés de 3 cases de côté pour progressivement aller jusqu'à un carré de 5 cases de côté. Voici les parties qu'ils ont jouées :



Commentaire 75 : Nous pouvons remarquer que lors des 2 premières partie, le donneur n'a pas fas fait le bon choix de couleur concernant l'interrogation 3 de la première partie et 4 de la seconde partie. En effet, en donnant la couleur noire à ces cases il aurait fait faire des coups supplémentaires au chercheur. Sachant que ces élèves utilisent la stratégie, « donner la couleur qui maximise le nombre de frontières », nous pouvons en conclure qu'ils ne testent pas le nombre de frontières restantes pour la couleur noire. Nous retrouvons donc la conception : « il ne faut jamais dire noir ».

D'autre part, les élèves ont bien généralisé leur stratégie de recherche aux carrés.

Ils ont ensuite joué sur le carré de 2 cases de côté. Ils pensaient pouvoir trouver la frontière en 3 interrogations. Suite à une intervention du gestionnaire, ils se sont rendus compte qu'ils avaient oublié de considérer le cas de la frontière coin. En continuant à jouer, ils ont alors conjecturé que l'optimum est 4 sur un carré de 2 cases de côté.

Le gestionnaire leur a alors demandé s'il était possible de trouver la frontière en 3 interrogations. Les élèves n'ont pas répondu, le gestionnaire a alors demandé aux élèves de quelle manière ils joueraient face à quelqu'un qui leur dirait qu'il peut trouver la frontière en 3 coups. Les élèves ont répondu qu'ils donneraient tout le temps la même couleur et que dans ce cas, le chercheur devait encore interroger la dernière case.

Commentaire 76 : Par sa question le gestionnaire a permis aux élèves de faire une preuve par algorithme de défense.

3.2.3. *Séance 3.* Lors de cet séance, un élève absent lors de la séance 2 est revenu dans le groupe.

Des parties sur le 4×9 **(l. 775-805)** Les élèves ont commencé à jouer sur le plateau 4×9 avec une stratégie coins puis milieux. Le gestionnaire est intervenu pour leur demander comment ils jouaient, le donneur a répondu :

> C'est lui qui doit trouver. Moi je fais toujours pareil, j'essaye de laisser le plus de possibilités possibles. Mais après c'est

> pour chercher, il faut diviser les possibilités par deux mais c'est vrai qu'il peut y avoir des cas où on trouve plus facilement même si il y a plus de possibilités. Enfin, si il y a 5 possibilités on trouve en 2 coups et s'il y en a 4, on trouve en 3 coups. Mais pour l'instant c'est lui qui trouve.

Commentaire 77 : Il semble que le donneur se soit rendu compte que la stratégie de maximisation du nombre de frontières restantes n'est pas nécessairement optimale.

Ensuite, ils ont continué à jouer sur le 4×9. Le gestionnaire est intervenu au cours d'une partie pour demander au donneur s'il n'aurait pas pu faire réaliser une interrogation supplémentaire au chercheur. Le donneur a répondu (l. 805) :

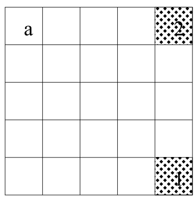
> Oui j'aurais pu mettre frontière.

Le gestionnaire a ensuite relancé le problème pour des segments et les petits carrés.

Jeu sur des segments et des petits carrés (l. 805) Les élèves ne se souviennent pas des résultats qu'ils avaient trouvés concernant les segments ou des petits carrés. Ils ont commencé par jouer sur un segment de longueur 9. La stratégie qu'ils ont employée est coins puis milieux. Ils ont ensuite joué sur un carré 2×2, puis sur le 3×3. La stratégie employée était de jouer 3 coins (à chaque fois le donneur avait donné 2 couleurs différentes).

Commentaire 78 : Comme précédemment, au cours de ces parties, le donneur aurait pu faire effectuer des interrogations supplémentaires au chercheur en donnant la couleur noire à certaines cases. Les élèves semblent donc continuer avec la conception,« il ne faut jamais dire noir », même s'ils ont vu précédemment que parfois il est plus intéressant de dire noir.

Le groupe a ensuite continué (l. 835) à jouer sur des 2×2, puis ils sont passés au 5×5. La première partie qu'ils ont jouée sur le 5×5 (l. 845) a commencé de cette manière :



Le donneur a alors hésité entre rouge et bleu pour la case a, il s'est alors mis à compter le nombre de frontière restantes s'il donnait bleu et s'il donnait rouge. Il trouve 4 avec rouge et 5 avec bleu. (En ralité c'est 5 avec rouge et 6 avec bleue)

Commentaire 79 : Le fait que le donneur se trompe sur le nombre de frontières, pose la question de savoir s'il compte la frontière vide comme une frontière possible.

Intervention du gestionnaire (l. 850) Le gestionnaire intervient et leur demande ce qu'ils ont trouvé pour le 2×2. Ils répondent 4. Le gestionnaire demande alors s'ils peuvent faire avec moins. Il y a alors le dialogue suivant :

Il faut au moins faire les 4 coins pour être sûr...
Pourquoi tu voudrais faire les 4 coins ?
Pour être sûr qu'elle est pas à l'extérieur.
Parce que si par exemple, la frontière il n'y en a pas, il faut combien de coup pour le savoir ?
4, de toute façon, quoi qu'il arrive Il faut au moins 4 coups pour n'importe quel taille. Sauf pour la ligne.
Pour la ligne, il en faut combien ?
Au moins 2.

Ensuite, les élèves disent que :« Pour la suite, on ne sait pas combien il faut de coups parce qu'une fois qu'on a fait les coins... », ce à quoi le gestionnaire a rétorqué :

> En fait la meilleur stratégie n'est pas forcémment de faire les 4 coins. Simplement tu sais qu'il faut au moins 4 coups dans le cas où l'autre te donne tout bleu.

L'élève a répondu :

> De toute façon, on fait 3 coups et si sur les 3, il y en a 2 de couleurs différentes, on sait que la frontière n'est pas extérieure. Il vaut mieux donner les 3 même.

Commentaire 80 : Les élèves ont commencé à justifier qu'il fallait au moins 4 interrogations, par le caractère nécessaire d'interroger les 4 coins pour être sûr que la frontière soit à l'extérieur. Ils ont donc raisonné au pire des cas par rapport à une frontière. Par contre la phrase de l'élève peut porter à confusion sur le fait qu'il soit obligatoire d'interroger les 4 coins à chaque partie, le gestionnaire a levé cette confusion en disant que ce n'était pas forcémment nécessaire,

Après la phase de mise en commun (l. 1005) Durant la phase de mise en commun, il a été prouvé qu'il fallait au moins 4 interrogations pour trouver la frontière sur des carrés ou des rectangles. Il a aussi été prouvé, par une preuve par exhaustivité des cas, qu'il est possible de déterminer la frontière en 4 interrogations sur le carré de 2 cases de côté. À la suite de la phase de mise en commun, le gestionnaire a demandé aux élèves de travailler sur le segment.

Un élève en jouant a dit ceci :

> On doit ajouter un carré toutes les 2 cases. Si c'est 5, cela fait 2.5 donc 3. Si on fait sur une figure de 2 cases, il faut 2 coups. Sur une ligne de 3, il faut 2 coups.

Les élèves ont aussi formulé le résultat suivant suite à une intervention du gestionnaire :

> Si n est impair, le nombre de coup c'est $\frac{n+1}{2}$ et si n est pair, c'est $\frac{n+2}{2}$.

Le gestionnaire a alors dit :« Cela veut dire que si je prens une ligne de taille 100, il me faut à peu près 50 coups. Tu penses qu'on peut faire mieux sur une ligne de taille 100 ? »

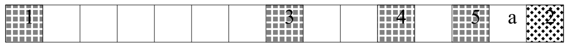
L'élève a répondu :

> En fait, à chaque fois faut diviser par 2 et quand c'est impair plus 1. En fait il faut diviser par 2 pleins de fois

Le gestionnaire demande alors si ce nombre c'est le minimum ou si c'est le nombre de coups avec lequel ils arrivent à trouver la frontière. L'élève a répondu que c'est le minimum. Puis il a dit :

> En fait, ce n'est pas n divisé par 2 si c'est pair et $n+1$ divisé par 2 si c'est impair. A chaque fois, on divise par 2.

Le gestionnaire a alors demandé un exemple sur un segment de longueur 9. L'élève a annoncé 6, en utilisant la stratégie coins puis milieux il trouve la frontière en 5 interrogations. À la suite de cela, ils jouent avec des segments de plus en plus longs en notant le nombre de coups que leur algorithme effectue à chaque fois (l. 1030). Voici un exemple de partie :



À la fin de la séance, le gestionnaire lui a posé la question suivante :

> Tu pourrais te demander par rapport à la façon dont tu joues, le prochain nombre pour lequel il faudra 6 coups.

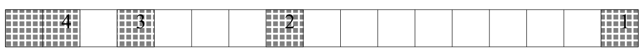
Commentaire 81 : Il semble y avoir une confusion chez ces élèves entre le minimum et le nombre d'interrogations utilisées par leur algorithme au pire. En effet, lorsque le gestionnaire demande à l'élève s'il parle de minimum ou du nombre de coups avec lequel ils sont sûr de trouver la frontière, l'élève répond le minimum. Mais ensuite, les actions qu'il conduit, rechercher le nombre d'interrogations avec lequel la stratégie coins puis milieux trouve la frontière avec différentes longueurs de segment, montrent qu'il y a une confusion. En fait cela peut s'interpréter par les théorèmes-en-acte suivants :
- l'algorithme coins puis « division par 2 » est optimal ;
- Le nombre d'interrogations au pire utilisées par l'algorithme coins puis « division par 2 » est l'optimum
- Pour déterminer le nombre d'interrogations au pire utilisées, il suffit de faire jouer l'algorithme de recherche contre un algorithme de défense localement optimal.

3.2.4. *Séance 4.* Pour cette séance, ce groupe était composé d'un élève, E_1, présent lors des séances précédentes et de 3 élèves qui n'étaient pas là lors de la séance 3.

Les nouveaux élèves ont demandé à E_1 (l. 1050) de leur montrer ce qu'il avait fait. Il a construit un segment de longueur 16, les autres élèves lui ont alors demandé pourquoi, il a répondu :

> Il faut trouver en combien de coups on peut faire. Il faut trouver une relation entre le nombre de cases...

L'élève a commencé à jouer de cette manière :



Le gestionnaire a demandé à l'élève ce qu'il essayait de faire. Il a répondu qu'il essayait de déterminer le nombre d'interrogations pour trouver la frontière en fonction du nombre de cases de la ligne. Puis il a dit :

> Et puis après il faut voir suivant n suivant le nombre de cases en combien de coups on peut le faire. Le nombre de coups c'est $2n + 1$.

E_1 dit aussi que ce qu'il cherche c'est le nombre minimum d'interrogations. Le gestionnaire demande pourquoi c'est le minimum. L'élève répond :« parce qu'on réduit par 2 à chaque fois ». Le gestionnaire répète sa question l'élève répond alors :

> Parce que là on met la première, on est obligé de la mettre. Ensuite on met au milieu, je crois que cela fait le même nombre de chances on met la couleur qu'on veut, bleu par exemple. Puis, ensuite encore au milieu. Au milieu. Et après il reste là ou dehors, on met une case. Ca fait 5 et je ne vois pas comment on pourrait faire moins. (il a placé les cases comme précédemment.

Commentaire 82 : E_1 considère que son algorithme est optimal car à chaque interrogation il « divise par 2 » le nombre de frontières. Une première interprétation est qu'il considère qu'une optimalité par étape en terme de frontières éliminées entraîne une optimalité au pire des cas.

Une seconde interprétation est la suivante : à chaque étape, il n'est pas possible de faire mieux que de « diviser par 2 » le nombre de frontières restantes, à chaque étape la stratégie « divise par 2 » le nombre de frontières restantes donc mon algorithme est optimal.

Nous verrons que dans la suite de la séance, la deuxième interprétation est correcte.

Le gestionnaire demande à E_1 pourquoi est ce qu'il ne peut pas faire mieux. Il répond parce qu'à chaque fois on divise par 2. Il complète son argument en disant que dans le cas de la ligne, les frontières sont seulement verticales Le gestionnaire dit alors qu'il est d'accord que quand il joue, il divise toujours par 2 et lui demande en quoi cela est la « meilleur manière de jouer ». E_1 répond :

> Parce qu'on ne peut pas diviser par plus de 2 avec une pièce.

Commentaire 83 : Nous avons donc la confirmation que c'est la seconde interprétation qui est la bonne. L'argumentation de E_1 est la suivante. Pour la première interrogation, « on est obligé de la mettre », ensuite, la stratégie interroge une case permettant de « diviser par 2 » le nombre de frontières restantes à chaque étape. Comme il n'est pas possible de faire mieux que de « diviser par 2 », l'algorithme est optimal.

Pour transformer cette argumentation en preuve, il doit formaliser la notion de « diviser par 2 » ainsi que montré que son algorithme est bien capable de « diviser par 2 ».

Ici, l'élève établit la relation suivante entre $P_{cherc./2}$, *construire un algorithme qui divise par 2 le nombre de frontière à chaque étape*, et $P_chercheur$ qui est la suivante : $P_{cherc./2} \rightarrow P_{chercheur}$. Cette relation est correcte, par contre la réciproque est fausse.

Minimum et division en zones Le gestionnaire demande alors aux autres élèves du groupe s'ils ont compris ce que E_1 venait de dire, un élève dit que diviser par 2, c'est 50 pour cent de chance de trouver et diviser par

3, c'est 30 pour cent de chance. Ce même élève dit ensuite que « si on divise par 3, cela va faire plus de couche ».

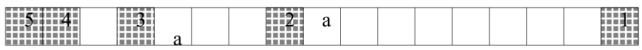
E_1 dit alors que pour diviser par 3, il faudrait 2 pièces.

Il y a ensuite un dialogue dans lequel un autre élève de ce groupe dit que : « le minimum c'est 2 si la frontière est en dehors, tu joues à chaque extrémité ». E_1 répond que le minimum est 1 si t'as noir tout de suite.

Commentaire 84 : Il y a ici une confusion sur les minimum, pour certains élèves du groupe le minimum est le plus petit nombre d'interrogations qu'il est possible d'utiliser pour trouver **une** frontière.

De plus, nous pouvons remarquer que certains élèves du groupe, ne voit pas la division en terme de frontière mais en terme de zones.

Sur le segment de longueur 16 E_1 a joué de cette manière :



Avant de jouer sur la case 2, E_1 a hésité entre cette case et la case a. Puis il a dit :

> Il faut prendre dehors parce qu'il y a une chance.

Et il a choisit la case 2.

Commentaire 85 : Ici, nous pouvons considérer que E_1 a pris en compte la frontière vide.

Quand est ce qu'on passe à 6 interrogations ? E_1 dit :

> On va jusqu'à ce que cela change. Quand on ne peut pas faire en moins de 6 coups

Un élève répond : « jusqu'à 17 tu dis ? », E_1 répond « même jusqu'à 18, on fait en 5 coups. ». Les élèves commencent par chercher le nombre d'interrogations sur effectuée sur le segment de longueur 17, ils trouvent 5, ils augmentent alors progressivement la longueur du segmet afin de déterminer le premier segment pour lequel ils utiliseront 6 interrogations. Ils sont allés jusqu'à 26 cases, ils y arrivent aussi en 5 interrogations à 26. Un élève propose alors de le faire avec 50 cases. E_1 dit : « 50, on ne peut pas essayer. On ne peut pas essayer 50. » (l. 1195). Un élève propose alors d'utiliser des feuilles. Au cours de cette période, le gestionnaire est intervenu pour demander si les élèves ne pouvaient pas prévoir le nombre de coups sans jouer. Il n'y a pas eut de réponse.

Resserage de l'intervalle Sur un segment de 50 cases, ils trouvent la frontière en 7 interrogations, ils décident alors de réduire la taille du segment à 40 cases. Ils trouvent 6 mais E_1 dit que ce qu'il faut c'est le moment exact. Un élève propose 39, un autre élève dit que 39 c'est trop. Finalement ils jouent sur un segment de 35 cases. E_1 dit alors que cela serait bien si pour ce dernier, « cela fasse 5 ». Sur le segment de 35 cases, ils trouvent la frontière en 6 interrogations. Ensuite ils font à 31 et 32, ils trouvent 5 à 31 et 6 à 32 cases. Ils décident ensuite de déterminer le moment où cela passe à 7.

Commentaire 86 : Les résulats énoncés par les élèves sont corrects sauf pour 50, où normalement leur algorithme doit déterminer la frontière en, au pire, 6 interrogations.

Quand est ce que cela passe à 7 ? Ils jouent avec un segment de 42 cases, ils trouvent la frontière en 6 interrogations. Un élève joue alors avec un segment de 43 cases.

E_1 dit la chose suivante :

> Quand tu décales d'un seul. faut que tu trouves pile poile le nombre par exemple 32 je crois, on trouve pile poil le nombre à chaque fois, il y a toujours un carreau au milieu. C'est... quand t'augmentes cela d'un nombre ben cela donne (inaudible)

Commentaire 87 : Comme ils se sont trompés avec 50, cela les induit en erreur sur les nombres de cases à considérer pour déterminer le moment où cela passe à 7 interrogations.

E_1 a remarqué que dans le cas où il y a un changement, à chaque interrogation, il y a une casse qui laisse autant de possibilité que l'on lui donne la couleur bleue ou la couleur rouge. Ce qui est vrai.

Intervention du gestionnaire (l. 1320) : vers une formalisation du résultat Le gestionnaire intervient en leur demandant ce qu'ils cherchent. Un élève répond :

> J'essayes de chercher une équation pour trouver, pour qu'on puisse savoir sans faire le dessin papier.

Le gestionnaire dit alors qu'une question qu'ils peuvent se poser est combien de coups je vais faire avec 5000 cases. Puis il leur demande s'ils ont trouvé quelque chose d'un peu général.

Un élève répond qu'ils ont juste trouvé « la manière » en divisant par 2 jusqu'à trouver la frontière. Le gestionnaire demande alors ce que cela va donner si la ligne fait n. E_1 répond :

> Deux puissances n moins 1 moins 1

Le gestionnaire lui dit que cela fait deux puissances n moins 2. L'élève rétorque, non deux puissances n moins 1 le tout moins 1.

Le gestionnaire dit alors que 2^{25} ou 2^{26}, ce sont des gros chiffres donc il y a peu de risque que cela soit ça. E_1 dit alors :

> Non ce n'est pas ça, n c'est le nombre de coups. C'est dans l'autre sens en fait, n cela serait le nombre de coups c'est l'inverse, c'est en fonction du nombre de coups qu'on trouve le nombre de cases.

Commentaire 88 : E_1 approche la notion de fonction inverse.

Le gestionnaire appelle alors c le nombre de coups et dit :

> Donc en fait ce que tu dis. Tu dis si jamais je fais c coups j'ai 2^{c-1} cases ?

E_1 rajoute -1. Le gestionnaire dit alors que pourtant avec 5 coups il y a plusieurs possibilités de longueur de segment. E_1 dit que :« ça c'est le maximum. Le maximum de coups. Pour ça, on trouve le maximum de n ».

Le gestionnaire et les élèves essayent de vérifier cela avec le segment de 31 cases (dernier segment où il est possible de faire moins de 5 interrogations). 2^4 ne marche pas, E_1 propose alors $2^5 - 1$ ce qui marche. C'est alors le gestionnaire qui énonce le résultat.

> En fait, là tu sais qu'il faut... si t'as un nombre de cases, si t'as deux puissance c moins une case, tu sais qu'il te faut c coups.

Le gestionnaire demande alors à E_1, pour $c-1$ coup quel est le maximum de case du segment. E_1 répond que ce serait le n d'avant diviser par 2. Le gestionnaire donne ensuite la réponse $2^{c-1} - 1$ et lui demande quel est le nombre de coups que l'on fait lorsque on est entre $2^c - 1$ et $2^{c-1} - 1$. L'élève répond que c'est le même nombre de coups et que c'est c ou $c + 1$, il ne se souvient plus. Le gestionnaire demande alors à l'élève ce que représente $2^c - 1$ l'élève répond :

> C'est le nombre de case maximum quand c c'est le nombre de coups. Le nombre de cases ce serait $2^{c-1} - 1$. Entre le nombre de coups $c - 1$ et le nombre de coups c, le nombre de cases c'est $2^{c-1} - 1$.

Commentaire 89 : Le gestionnaire a permis à l'élève de formuler correctement sa pensée en introduisant la lettre c pour coups. De plus, il l'a aidé à établir le bon résultat en lui demandant de réfléchir sur un exemple.

Lorsque le gestionnaire demande à l'élève quel est le maximum pour $c - 1$ coups, il veut obtenir de l'élève un encadrement du nombre de case pour lequel il faut c interrogations. Quand E_1 répond que cela serait le n d'avant diviser par 2, il n'utilise pas sa formule mais l'idée de la formule.

Explication aux autres membres du groupe (l.1418) Sous l'impulsion du gestionnaire, E_1 essaye d'expliquer aux autres élèves du groupe ce résultat.

Au cours de l'explication, le gestionnaire intervient, E_1 dit qu'il n'est pas complétement sûr de la justesse de la formule. Le gestionnaire dit qu'alors, effectivement, la question est de savoir si elle est juste et de le démontrer.

Commentaire 90 : Ce moment est intéressant, car nous aurions pu penser que lors de la séquence précédente le gestionnaire a implicitement validé la formule de E_1, nous pouvons voir que cela n'a pas été le cas.

Essais sur des exemples Les élèves essaient sur des exemples, le premier avec $c = 10$ puis avec $c = 3$, pour $c = 3$ E_1 dit qu'il y a une erreur, car normalement le maximum est 5 (avec la formule il doit trouver 7).

Commentaire 91 : Nous verrons que la formule est correcte, le contre-exemple énoncé par E_1 n'en est pas un, car il est possible de faire le segment de 7 cases avec seulement 3 interrogations. E_1 s'est trompé lorsqu'il a cherché la frontière sur ce segment. À la suite de la mise en commum portant sur la présentation des conjectures, le gestionnaire a expliqué à E_1 d'où provenait son erreur.

4. Déroulement effectif Groupe 2

4.1. Résumé court du groupe 2.

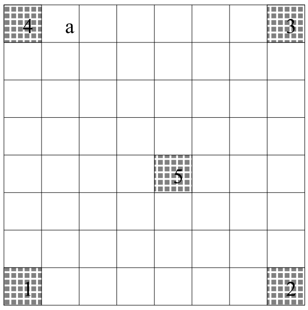
4.2. Résumé long du groupe 2.

4.2.1. *Séance 1.* Ce groupe est composé de 2 élèves qui ont joué sur un plateau 7×7.

Le gestionnaire est intervenu pour rappeler aux élèves que le donneur pouvait bouger la frontière. Le chercheur en jouant contre la frontière vide a effectué 14 coups avant de conclure. Le donneur, après avoir donné une couleur incohérente, a dit :

> J'ai changé plusieurs fois la frontière de place et du coup je me suis désorienté.

Ils ont joué la partie suivante :



Commentaire 92 : Le chercheur n'a pas remarqué que la frontière était en dehors avant la 5^{e} interrogation.

Ils ont encore joué une partie avec une première interrogation au « centre » puis les 4 coins.

Intervention du gestionnaire (l. 120) Le gestionnaire est intervenu en demandant s'ils avaient une stratégie particulière pour jouer. Pour le donneur, la stratégie énoncée était inaudible, pour le chercheur ils ont répondu :

> Et pour trouver la frontière, on fait chaque coin. Et puis après le milieu enfin...

Commentaire 93 : Ce qui est surprenant c'est que les élèves n'ont pas utilisé cette stratégie de recherche au cours des parties qu'ils ont jouées avant.

Le gestionnaire a alors demandé pourquoi jouer sur les 4 coins, les élèves ont répondu :

> Parce que s'il y a les 4 coins de la même couleur cela veut dire qu'elle est dehors.

Nouvelles parties. À la suite du départ du gestionnaire, les élèves ne jouent toujours pas avec la stratégie de recherche qu'ils ont donnée au gestionnaire. Le chercheur interroge le centre puis les 4 coins. Ils ont joué les parties représentées par les figures XIV.3 et XIV.4

Les élèves continuent ensuite à effectuer des parties dans lesquelles les 3 premières interrogations sont des coins avant de ne commencer par interroger 1 coin puis ensuite 2 coins. Une fois les coins interrogés, les élèves ne semblent pas avoir mis en place de stratégie structurée.

Intervention du gestionnaire (l. 170) Le gestionnaire est intervenu en demandant comment ils donnaient les couleurs, un élève a répondu :

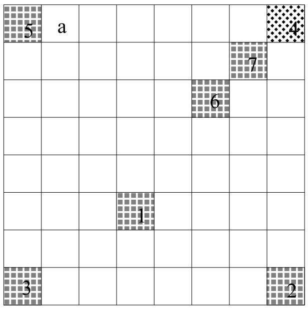


FIG. XIV.3

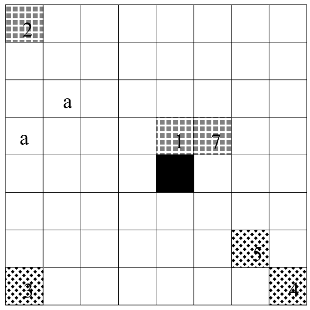


FIG. XIV.4

> J'essaye de faire... Déjà si elle me demande les 4 coins, le dernier coin, elle a trois essais à faire avant. Si je lui donnais le blanc tout de suite en premier c'est trop facile.

L'élève veut dire qu'il donne la couleur bleue au 3 premiers coins puis qu'il donne la couleur rouge au dernier coin.

Commentaire 94 : L'élève a développé une stratégie de défense locale.

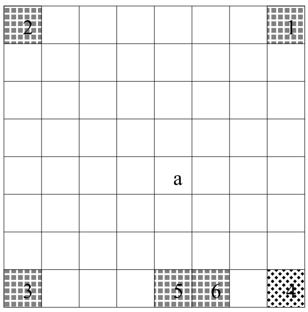
Le gestionnaire aurait pu demandé à l'élève comment il faisait une fois les 4 coins interrogés. Il aurait aussi pu lui demander de quelle manière est ce qu'il joué contre quelqu'un n'interogeant pas les coins.

4.2.2. *Séance 2.* Ce groupe est composé des 2 mêmes élèves que lors de la séance 1.

Lors des premières parties, les élèves utilisent une stratégie coins. Le gestionnaire intervient pour prendre des renseignements sur ce qu'ils font. Les élèves répondent :

> C'est-à-dire on place toujours d'abord les coins. Et si par exemple tout est de la même couleur cela veut dire que c'est en dehors. Si il y en a deux de la même couleur à côté et deux en face de la même couleur, ça veut dire qu'elle est horizontale. Et après il faut faire le moins de coups possible pour trouver la limite.

Les élèves jouent la partie suivante pour illustrer leur technique :



Le chercheur dit alors que la frontière est la diagonale passant entre les cases 4 et 6.

Commentaire 95 : Il semble donc que les élèves utilisent le théorème coins-direction.

Le gestionnaire demande alors comment le donneur joue, il répond :

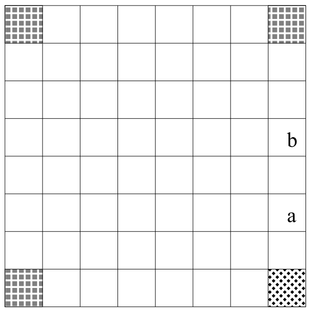
> J'essaye de la déplacer au maximum

Nouvelle intervention du gestionnaire (l. 575) Les élèves ont conjecturé qu'en 6 coups maximum il était possible de trouver la frontière, le gestionnaire leur demande de prouver ce résultat. Un élève répond :

> On a essayé plusieurs fois et c'est toujours la même chose.

Le gestionnaire dit alors que ce n'est pas un argument valable et laisse réfléchir les élèves.

Nouvelle intervention du gestionnaire (l. 600) Le gestionnaire demande aux élèves où ils en sont, ils répondent qu'ils n'ont pas avancé. Le gestionnaire leur demande alors de lui rappeler la manière dont ils jouent. Il s'intéresse en particulier à la manière dont ils jouent une fois les 4 coins interrogés. Les élèves disent qu'ils jouent sur les cases a et ensuite b, comme illustrée sur la figure suivante :



Le gestionnaire pose alors des questions sur la couleur que le donneur va donner en fonction de la position de la case, les élèves répondent qu'ils donneraient bleu car cela laisse plus de possibilité de frontières.

Le gestionnaire leur demande alors la couleur qu'il donnerait si un joueur interrogeait la case situé entre a et b. Les élèves répondent :

> Rouge. Parce que si c'est bleu, il y a encore 2 possibilités alors que si c'est rouge il y a encore 3 possibilités.

Il y a alors le dialogue suivant entre les élèves et le gestionnaire :

O :

> Ok. Et donc celui qui cherche, il a intérêt à ce qu'il y ait le moins de possibilités ou le plus ?

E :

> Le moins mais cela dépend de la personne qu'il y a en face car elle va essayer de faire le plus de coups

O :

> Oui mais par exemple, si je demande cette case là (case a). Si tu me dis bleu, il m'en reste 4. Alors que si je joue là (case b), si tu me dis bleu il m'en reste 2 et si tu me dis rouge, il m'en reste 3. Donc là il m'en reste moins que si je joue là.

Commentaire 96 : Le gestionnaire a essayé dans un premier temps de faire expliciter leur stratégie de défense aux élèves, ce qui nous a permis voir qu'ils utilisaient localement une stratégie de maximisation du nombre de frontières possibles.

Il nous semble que l'objectif du gestionnaire lors de cette séquence était de montrer aux élèves que le chercheur devait interroger la case qui minimise le nombre frontières restantes dans le pire des cas. Il y a eut un effet topaze.

Après la mise en commun. Nous rappelons que lors de cette mise en commun, le théorème coins direction a été démontré, les stratégies des élèves énoncées et que le gestionnaire a demandé aux élèves de travailler sur des petits carrés et sur le segment.

Ce groupe a commencé par jouer sur un 2×2 en interrogeant les coins, le chercheur a dit :« c'est trop facile ! ». Le donneur de couleur a dit que ce n'était pas de sa faute. Les élèves ont conclu qu'il était possible de déterminer la frontière en 4 interrogations.

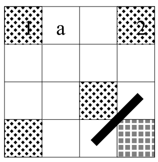
Le gestionnaire intervient pour leur demander ce qu'ils font, ils répondent qu'ils vont jouer sur le 1×1, le 2×2 et le 3×3.

Les élèves ont ensuite joué une partie sur le 3×3, ils ont commencé par interroger les 4 coins et ils ont trouvé la frontière en 5 interrogations. La séquence suivante s'est déroulée :

O est alors intervenu :

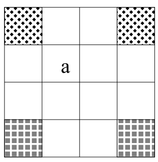
> Pourquoi ? Comment tu termines ? elle est où la frontière ?

Le chercheur montre alors cette ligne :

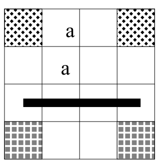


Le chercheur dit alors :

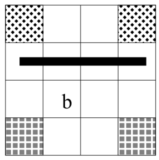
> Mais si elle avait fait comme ça :



> Je lui demande celui là (case a) et alors la frontière est là (montrant la droite)



Le chercheur dit alors :



Ou alors le contraire, je demande là (case b) et la frontière est là. Donc c'est en 5 coups.

Le 4 fois 4 cela se fait en 5 coups.

Commentaire 97 : Les élèves ont donc traité tous les cas possibles sauf la frontière vide concernant le 3×3. Les élèves sont très proche d'une preuve du fait qu'il est possible de trouver la frontière en moins de 5 interrogations.

À la suite de cela les élèves ont eu une discussion avec le gestionnaire, mais il semble qu'ils n'ont pas reconnu dans les arguments qu'ils ont énoncés précédemment une preuve de ce résultat. En particulier, les élèves semblaient vouloir se contenter de résumer cela par, on a fait tous les cas. Le gestionnaire leur a demandé d'expliciter leur raisonnement.

5. Phase de mise en commun.

5.1. Mise en commun de la séance 2. Cette mise en commun avait pour but de faire un bilan des stratégies utlisées par les élèves. Tous les groupes avaient utilisées des stratégies coins. Les groupes qui ont joué sur des carrés avaient le théorème coins-directions. Le gestionnaire a dans un premier temps essayé de faire remarquer aux élèves que le théorème coins-directions n'était pas valable pour les rectangles. Le gestionnaire a essayé de faire comprendre pourquoi il y avait cette différence aux élèves.

Le gestionnaire a écrit au tableau les stratégies utilisées par les élèves :

Stratégie pour trouver la frontière : Je joue les coins et ensuite je joue au « milieu » lorsque j'ai 2 couleurs différentes sur une même ligne.

Stratégie du donneur : Laisser le pus de possibilités : je compte le nombre de frontières possibles si je joue bleu, j'appelle ce nombre b. Idem si rouge, j'appelle ce nombre r. Si $b > r$ je donne la couleur bleu. Si $r > b$, je donna la couleur rouge.

Concernant la stratégie du donneur, le gestionnaire a alors demandé ce qu'on faisait lorsque $b = r$. Un élève a répondu que cela n'avait pas d'importance. Le gestionnaire a rajouté au tableau : *si $b = r$, cela n'a pas d'importance.*

Le gestionnaire, après avoir dit que nous ne savons pas si les stratégies que nous venons d'énoncer sont optimales, a proposé aux élèves de jouer sur des objets plus simples qui pourraient nous donner des « idées » pour résoudre le problème sur des objets plus complexes.

5.2. Mise en commun de la séance 3. L'objectif de cette mise en commun était la preuve qu'il faut au moins 4 interrogations pour trouver la frontières sur un carré. Ce résultat est un résultat qui avait été trouvé par certains groupes. Le gestionnaire a commencé par demander aux élèves de justifier ce résultat. Un élève du groupe 1 a dit que :

Il faut 4 coups quelque soit le carré pour savoir si la frontière est à l'intérieur ou à l'extérieur.

Le gestionnaire demande alors à la classe s'il est possible de conclure que la frontière est dehors avec 3 interrogations. Le même élève répond :

> Non, parce que cela peut toujours être un coin, donc il faut faire les 4 coins.

Le gestionnaire a ensuite expliqué que c'est un résultat intéressant, car il est valable pour tous les carrés et aussi pour les rectangles. Le même élève du groupe 1 a dit que cela n'était pas valable pour une ligne.

Ensuite, le gestionnaire a traité le cas 2×2. Il a demandé aux élèves en combien d'interrogations ils trouvaient la frontière, ils ont répondu 4. Il a ensuite demandé aux élèves comment ils faisaient. Ils ont répondu les coins. Le gestionnaire a alors demandé aux élèves pourquoi avec 4 interrogations on trouvait la frontière. Un élève commence par dire que si les 4 coins sont bleus alors cela veut dire que la frontière est à l'extérieur. Cet élève continue en disant que s'il y a 1 rouge et 3 bleus alors la frontière est diagonale. Puis que si l'on a 2 rouges et 2 bleus, la frontière est horizontale. Le gestionnaire a alors demandé pourquoi est ce qu'on ne fait pas 3 rouges et 1 bleu, l'élève a répondu qu'on l'avait déjà fait.

Le gestionnaire a ensuite expliqué que les 2 résultats que nous venions de voir permettait de prouver que l'optimum est 4 sur le 2×2. Il a enfin demandé aux élèves de jouer exclusivement sur des segments.

5.3. Mise en commun de la séance 4 : Présentation des résultats des groupes.

5.3.1. *Le groupe 2.* Le groupe 2 a présenté le résultat suivant :

$$\textit{Nombre de coups} \rightarrow 2 \times n + 1$$

La formule s'interprète de cette manière d'après un élève du groupe 2 :

> Pour 18 carrés, Il faut 6 coups. Donc après, tu fais 18 fois 2 égal 36. Plus un égal 37. Donc pour 37 cases, il faut 7 coups. Et après, si on fait 36...

Ils continuent en disant $36 \times 2 = 72$, $72 + 1 = 73$ donc pour 73 cases, il faut 8 coups.

Un élève dit alors que pour 18 carrés, on peut le faire en 5 coups. Il joue une partie contre un élève du groupe 2 pour le montrer.

Commentaire 98 : La stratégie pour prévoir le nombre d'interrogations du groupe 2 est vraie puisque lorsqu'on double le nombre de cases et qu'on rajoute une case, on rajoute une interrogation.

5.3.2. *Groupe 3.* Un élève du groupe 3 a écrit sur le tableau :

Pour 10 cases, il faut 5 coups.
Quand on multiplie par 10, il faut ajouter 3 coups.
$100 \rightarrow 8$ *coups*
$1000 \rightarrow$ *11 coups*

Les élèves du groupe 3 considèrent que lorsqu'on multiplie le nombres de case d'un segment par 10 alors on doit rajouter 3 interrogations.

Commentaire 99 : Ce résultat n'est pas vrai de manière générale mais est vrai sur certains cas particuliers par exemple 4 cases et 40 cases. Le résultat est faux pour 7 cases et 70 cases.

5.3.3. *Groupe 1.* Le groupe 1 a présenté sa formule :

$$c\text{=}nbre\ de\ coups$$
$$nmax\text{=}2^c - 1$$

Mais ils croyaient qu'elle était fausse, car ils avaient un contre-exemple.

Commentaire 100 : Le contre-exemple était en réalité faux.

CHAPITRE XV

Analyse de la deuxième situation expérimentale

Nous avons plus particulièrement porté notre attention sur les différences avec la première situation.

1. Dévolution

En donnant $P_{donneur}$ en même temps que $P_{checheur}$ lors de la première séance, nous nous attendions à ce que les élèves développent la problématique associée à $P_{donneur}$, ce qui n'a pas été le cas. Cela pose la question d'une prédominance de $P_{chercheur}$ sur $P_{donneur}$.

2. Démarche expérimentale

Nous n'avons rien noté de nouveaux sur la pratique de la démarche expérimentale, les élèves ont effectué les actions caractéristiques d'une telle démarche.

2.1. Nouveaux problèmes et modélisation.

2.1.1. *Optimalité choisie.* Idem que pour la première expérimentation, sans la définir les élèves ont implicitement utilisé une optimalité au pire.

2.1.2. *Problèmes issus de l'expérimental.* Une première différence par rapport à la première expérimentation est que les problèmes du type : *si X coins sont bleus et Y sont rouges, quel est le nombre minimum d'interrogations que je vais utiliser ?* ne sont pas apparus, nous expliquons cela par le fait que les élèves n'ont pas essayé de prouver qu'un algorithme de type coin termine en au plus X interrogations sauf sur des petits carrés. Ce changement est dû à la gestion de la situation, nous n'avons pas laissé assez de temps aux élèves sur le problème du carré 7×7 pour qu'ils puissent obtenir des résultats « convaincants ». En effet, nous avons dès le milieu de la deuxième séance demandé aux élèves de jouer sur des petits carrés et sur le segment.

En contre partie, la problématique du segment et des petits carrés s'est développée. Sur des segments la structuration de la stratégie a amené les élèves du groupe 1 a compté la frontière vide lors des phases de recherche de milieu.

Une troisième différence provient du fait que les élèves n'ont pas identifié la frontière vide comme une variable pertinente du problème, le problème associé : *que se passe-t'il lorsque la frontière vide n'est pas autorisée ?* n'a pas été formulé.

2.1.3. *Instances du problèmes.* Le fait de donner des plateaux de différentes tailles aux groupes a amené certains élèves à travailler sur d'autres plateaux pour « voir » ce que leurs stratégies données. Toutefois, les élèves n'ont pas cherché à travailler sur des instances différentes de celles induites par les plateaux.

Concernant les segments, une fois que nous leur avons donné le problème général, les élèves n'ont pas hésité à modifier la longueur des segments. La variable longueur des segments à donc était une variable de recherche. Ce qui n'a pas été le cas de la variable type de frontière.

2.1.4. *Questions.* Idem, la variable de recherche portant sur les questions a été effective, par exemple avec la question suivante posée par le groupe 1 : *quelle est la longeur de segment maximale qu'il est possible de faire avec X interrogations ?*

Les questions posées ont été différentes, notamment parce que la problématique des segments a été développée lors de la deuxième situation expérimentale.

2.1.5. *Modèles.* Le groupe 1 a développé un modèle-frontières de la situation avec la problématique associée (au moins pour les segments). C'est le groupe qui le plus développé le sous espace problème associé à $P^{fr}_{opt.etp.}$. Cela leur a permis d'obtenir des argumentations (« proches » d'une preuve) pour montrer que l'algorithme qu'ils utilisaient sur des segments est optimal ainsi que pour déterminer le nombre d'interrogations au pire utilisé par cet algorithme.

Le groupe 2 est resté dans un modèle géométrique de la situation et n'ont utilisé qu'une stratégie locale de maximisation du nombre de frontières possibles.

Par contre, contrairement à ce qu'il s'était passé lors de la première expérimentaion, aucun groupe n'a posé de problème portant sur la convexité. Cela peut s'expliquer par le fait que, dans cette situation, nous n'avons pas introduit le problème de l'enveloppe convexe.

2.2. axiomes, conjectures, théorèmes et argumentation. Il y a eut des différences dans cette sous-section au niveau des résultats obtenus par les élèves du fait qu'ils n'ont pas cherché à résoudre les mêmes sous-problèmes.

2.2.1. *Axiomes.* Au niveau des axiomes, il n'y a pas de grandes différences sauf que les axiomes AX5[1] et AX6[2] ne sont pas apparus.

Mis à par ces axiomes, nous retrouvons ceux mentionnés dans le tableau XIII.1 page 293.

2.2.2. *Théorème et preuves.* Au niveau des théorèmes, nous n'avons pas noté de grandes différences, celles-ci se situant au niveau des résultats argumentés. En commun, nous retrouvons les résultats du tableau XV.1.

`TH1` et `TH2` : Les élèves du groupe 2 ont justifié l'intérêt d'uiliser une stratégie coins par le fait qu'interroger les coins permet de savoir si la frontière est à l'extérieur.

> Parce que s'il y a les 4 coins de la même couleur cela veut dire qu'elle est dehors.

[1]il n'y a que deux types de stratégies possibles : celles commençant par interroger les bords et celles commençant par interroger le « centre ».

[2]Deux points ne permettent pas d'engendrer un carré

TH1	la couleur des 4 coins d'un carré 7×7, donne l'orientation de la frontière.
TH2	sur un carré 7×7, il suffit d'interroger les coins pour déterminer la frontière vide.
TH5	sur les carrés 1×1, 2×2 et 7×7, il faut au moins 4 interrogations pour trouver la frontière.
TH7	sur un carré 1×1, l'optimum est 4.
TH7'	sur un carré 2×2, l'optimum est 4.

TAB. XV.1. Tableau des théorèmes.

TH5 : Lors de la mise en commun de la séance 3, le gestionnaire a amené les élèves à établir ce résultat pour tous les carrés. Néanmoins, ce résultat avait été prouvé par les élèves du groupe 1 avec l'aide du gestionnaire avant la mise en commun. Pour obtenir la preuve des élèves le gestionnaire a posé la question suivante : *comment joueriez vous face à quelqu'un qui vous dit qu'il trouve la frontière en 3 interrogations ?* Les élèves ont alors répondu qu'ils donneraient tout bleu et que de ce fait le chercheur devait encore interroger la dernière case pour déterminer la frontière. C'est une preuve par algorithme de défense.

TH7 et TH7' : Ces résultats ont été obtenus par les élèves en utilisant d'une part la stratégie coins pour trouver la frontière en 4 interrogations et d'autre part, TH2 pour montrer qu'on ne pouvait pas faire mieux. Le résultat TH7' a aussi été démontré au cours de la mise en commun de la séance 3.

Concernant le résultat TH7, les élèves du groupe avaient, dans un premier temps, conjecturé que l'optimum est 3. Il a fallu l'intervention du gestionnaire pour qu'ils remarquent qu'ils avaient oublié le cas de la frontière coin, ils ont alors conjecturé TH7. Puis, ils l'ont partiellement demontré en prouvant TH5 ; nous ne pouvons pas considérer que les élèves ont produit une preuve complète, car ils n'ont pas expliqué pourquoi il est possible de trouver la frontière en 4 interrogations.

2.2.3. *Résultats argumentés.* Nous notons de grosses différences au niveau des résultats argumentés, contrairement aux élèves de la première expérimentation, ceux de la seconde n'ont développé que très peu de résultats sur le carré 7×7, ce qui est, comme nous l'avons déjà mentionné, dû aux choix de gestion. En contrepartie, ils ont obtenu un grand nombre de réponses à $P_{segment}$.

Sur le carré 7×7, ils n'ont obtenus que le résultat RA2 (voir tableau XIII.3 page 299). Ce résultat n'a pas été véritablement argumenté par les élèves, il a été énoncé par des élèves du groupe 1 (l. 250).

> C'est toujours pareil, on fait toujours 6

Toutefois, les élèves du groupe 1 n'ont pas semblé cherché à le justifier.

Concernant le problème $P_{segment}$, les élèves ont obtenu les résultats argumentés mentionnés dans le tableau XV.2.

RA8 et RA9 : nous n'avons pas assez de données pour expliquer la génèse de ces résultats. Nous n'avons que les données de la phase de mise en commun de la séance 4.

`RA8`	Quand on multiplie par 10 le nombre de cases d'un segment, il faut ajouter 3 au nombre d'interrogations
`RA9`	Soit n le nombre de case composant un segment et soit c l'optimum du nombre d'interrogations pour ce segment alors pour un segment composé de $2n+1$ cases, l'optimum est $c+1$.
`RA10`	si c est le nombre de coups, alors le segment composé de $2^c - 1$ cases est le plus grand segment qu'il est possible de faire en utilisant c interrogations au pire.
`RA11`	Pour des segments dont le nombre de case est entre $2^{c-1} - 1$ et $2^c - 1$, il faut utiliser c interrogations
`RA12`	Sur un segment, l'algorithme qui interroge un coin puis « divise par 2 » le nombre de frontières restantes est optimal.
`RA13`	sur un 3×3, il est possible de trouver la frontière en 5 interrogations au pire.

Tab. XV.2. Tableau des résultats argumentés de la deuxième expérimentation.

`RA10` : Ce résultat a été essentiellement construit par un élève du groupe 1, E_1, qui cherchait une formule reliant le nombre d'interrogations et le nombre de cases d'un segment. Son idée est d'utiliser le fait « qu'on divise par 2 » le nombre de frontières restantes. Sur des segments, E_1 a développé la stratégie de recherche suivante :

– Interroger les coins ;

– interroger la case qui « divise par 2 » le nombre de frontières restantes ;

Nous notons cette stratégie, $S^1_{E_1}$.

Puis au début de la séance 4, sans que l'on sache pourquoi, il a utilisé la stratégie suivante :

– interroger un coin ;

– interroger la case qui « divise par 2 » le nombre de frontières restantes ;

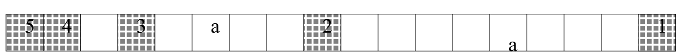
Nous notons cette stratégie, $S^2_{E_1}$

Il a utilisé ces stratégies pour déterminer l'optimum pour des segments. Le théorème-en-acte qu'il utilisait est le suivant : *le nombre d'interrogations au pire utilisées par l'une de ces stratégies est l'optimum.*

Pour déterminer, l'optimum sur un segment composé de n cases, E_1 jouait donc en utilisant les stratégies S_{E_1} contre un algorithme de défense localement optimal. Le nombre d'interrogations utilisées est alors l'optimum sur le segment. Chronologiquement, il a utilisé $S^1_{E_1}$ lors de la séance 3, c'est-à-dire pour $n < 16$. Puis $S^2_{E_1}$ dès le début de la séance 4, pour faire $n \geq 16$.

La stratégie $S^1_{E_1}$ n'est pas généralement optimale. De ce fait, le théorème-en-acte appliquée avec $S^1_{E_1}$ est faux. Par contre, $S^2_{E_1}$ est optimale, et de ce fait le théorème-en-acte appliqué avec $S^2_{E_1}$ est vrai. L'élève considérait $S^2_{E_1}$ comme optimale et l'a justifié avec une argumentation proche d'une preuve.

Voici un exemple avec $S^2_{E_1}$ sur un segment de 18 cases :



Cet élève a d'abord proposé les formules suivantes au cours de la séance 3 :

> Si n est impair, le nombre de coup c'est $\frac{n+1}{2}$ et si n est pair, c'est $\frac{n+2}{2}$.

Il est possible que cette formule soit induite par les optima supposés concernant les segments composés de 3, 4 ou 5 cases.

Cette formule a rapidement était invalidée par le gestionnaire qui a fait remarqué que dans le cas d'un segment composé de 100 cases, il faut à peu près 50 interrogations. L'élève a alors dit :

> En fait, à chaque fois faut diviser par 2 et quand c'est impair plus 1. En fait, il faut diviser par 2 pleins de fois

Pour trouver la formule, E_1 a décidé de déterminer le nombre d'interrogations minimal pour plusieurs longeurs de segments, il a essayé de construire un tableau pour des segments composés de 1 à 20 cases. Il a donc cherché à utiliser une « méthode inductive ».

Lors de la séance 4, le tableau était complet jusqu'à des segments composé de 16 cases, E_1 a alors proposé une nouvelle formule :

> Et puis après il faut voir suivant n suivant le nombre de cases en combien de coups on peut le faire. Le nombre de coups c'est $2n + 1$.

Ensuite cette formule n'est plus réapparue, nous ne savons pas pourquoi. Toutefois, ce que nous pouvons remarquer est que l'origine de cette formule ne nous semble pas provenir des données qu'il a recueillies, en effet, cette formule est contradictoire avec celles-ci. De plus, cette formule stipule qu'on doit utiliser un nombre d'interrogations supérieur au nombre de cases composant le segment.

L'élève a ensuite décidé de chercher le problème suivant : *quelle est la longeur de segment maximale pour laquelle il est possible de trouver la frontière en 6 interrogations ?* (introduit par le gestionnaire à la fin de la séance 3) Les élèves du groupe 1 ont alors effectué des expérimentations génératives pour résoudre ce problème, ils ont par exemple déterminé le nombre d'interrogations optimal pour des segments composés de 17, 18, 19, ou 50 cases. Finalement, ils ont résussi à resserer l'intervalle pour déterminer que le saut se faisait entre 31 et 32 cases (ce qui est vrai).

Les élèves ont ensuite cherché à répondre au problème : *quelle est la longeur de segment maximale pour laquelle il est possible de trouver la frontière en 7 interrogations ?* Ils ont utilisé le même procédé que précédemment, sauf que, comme ils se sont trompés lorsqu'ils ont fait le segment de 50 cases, ils n'ont pas cherché dans le « bon » intervalle.

Au cours de cette recherche, E_1 a dit :

> Quand tu décales d'un seul. faut que tu trouves pile poile le nombre par exemple 32 je crois, on trouve pile poil le nombre à chaque fois, il y a toujours un carreau au milieu. C'est... quand t'augmentes cela d'un nombre ben cela donne (inaudible)

Ensuite, le gestionnaire intervient pour leur demander ce que cela donne si le segment est composé de n cases, E_1 répond :

> $2^{n-1} - 1$

Puis que :

> Non ce n'est pas ça, n c'est le nombre de coups. C'est dans l'autre sens en fait, n cela serait le nombre de coups c'est l'inverse, c'est en fonction du nombre de coups qu'on trouve le nombre de cases.

Le gestionnaire formule alors cela de la manière suivante :

> Donc en fait ce que tu dis. Tu dis si jamais je fais c coups j'ai 2^{c-1} cases ?

E_1 rajoute -1. Le gestionnaire lui dit que pour 5 coups, il y a plusieurs possibilités de longueurs de segments, ce à quoi E_1 répond :

> ça c'est le maximum. Le maximum de coups. Pour ça, on trouve le maximum de n

Ensuite, le gestionnaire et E_1 essayent de vérifier la formule pour le segment de 31 cases, ce qui amène E_1 a modifié la formule. La formule générale est alors formulée par le gestionnaire.

Toutefois, même si la formule est vraie, E_1 l'a considérée comme fausse à cause d'un contre-exemple portant sur le segmetn composé de 7 cases. En effet, E_1 croyait que l'optimum pour un segment composé de 7 cases est 4, ce qui est faux car l'optimum est 3. Cette erreur est dûe au fait que E_1 a déterminé la valeur de cet optimum avec $S^1_{E_1}$ qui n'est pas optimale pour un segment composé de 7 cases.

il nous semble que le moment clé est la détermination des endroits où les sauts s'effectuent puisque c'est l'étude de ces moments qui a permis à E_1 de remarquer qu'à chaque fois qu'il y a un saut les interrogations que nous faisons permettent toujours de séparer « pile poil » en 2. Cela mène à considérer des puissances de 2. La formule énoncée par E_1 n'est donc pas une formule soutenue par un raisonnement inductif sur les optima mais est basée sur un argument de nature plus « structurelle ».

`RA11` : ce résultat a était induit par le gestionnaire. La réciproque du résultat est aussi vraie, mais nous ne savons pas si l'élève a connaissance de cela.

`RA12` : ce résultat a été argumenté par E_1. L'argumentation de E_1 est la suivante :

> Parce que là on met la première, on est obligé de la mettre. Ensuite on met au milieu, je crois que cela fait le même nombre de chances on met la couleur qu'on veut, bleu par exemple. Puis, ensuite encore au milieu. Au milieu. Et après il reste là ou dehors, on met une case. Ca fait 5 et je ne vois pas comment on pourrait faire moins.

Le gestionnaire demande à E_1 pourquoi est ce qu'il ne peut pas faire mieux. Il répond que c'est parce qu'à chaque fois on divise par 2. Il complète son argument en disant que dans le cas de la ligne, les frontières sont seulement verticales Le gestionnaire dit alors qu'il est d'accord que quand il joue, il divise toujours par 2 et lui demande en quoi cela est la « meilleur manière de jouer ». E_1 répond :

> Parce qu'on ne peut pas diviser par plus de 2 avec une pièce.

L'argumentation de E_1 est la suivante. Pour la première interrogation, « on est obligé de la mettre », ensuite, la stratégie interroge une case permettant de « diviser par 2 » le nombre de frontières restantes à chaque étape. Comme il n'est pas possible de faire mieux que de « diviser par 2 », l'algorithme est optimal.

Pour transformer cette argumentation en preuve, il doit formaliser la notion de « diviser par 2 » ainsi que montré que son algorithme est bien capable de « diviser par 2 ».

`RA13` : Ce résultat a été trouvé par les élèves du groupe 2 qui l'ont justifié par une tentative de preuve par exhaustivité des cas en fonction de la couleur des coins. L'argumentation est incomplète, car il manque le cas de la frontière vide.

2.3. Type de preuves. Au niveau du type de preuves, les élèves ont effectué les mêmes que ceux de la première expérimentation. Toutefois, ils n'ont pas effectué de preuve par l'absurde (1 seule groupe lors de la première expérimentation).

2.4. Exemples. Par rapport à la première expérimentation, les mêmes phénomènes se sont produits. Sauf que, comme les élèves ont formulé des résultats généraux sur les segments, il se peut que les exemples ait servis de bases à ces résultats. Cela n'a pas été le cas pour le groupe 1, par contre il est possible que les groupes 2 et 3 aient utilisé un raisonnement inductif basé sur les optima pour obtenir les résultats qu'ils ont énoncés à la fin de la séance 4.

De plus, il nous semble que la technique utilisé par le groupe 1 pour déterminer l'optima sur un segment, utilise un exemple générique : l'algorithme localement optimal contre S_{E_1}.

2.5. Nouveaux objets. Nous retrouvons les mêmes nouveaux objets à l'exception de ceux liées au concept de « territoire ». Un nouvel objet est le concept de « diviser par 2 ». Ce concept a été utilisé par le groupe 1 mais n'a jamais était défini. Une définition de cette notion est nécessaire pour prouver que la stratégie $S^2_{E_1}$ est optimale.

Dans ce qui suit nous allons construire la conception du groupe 1, nous ne construirons pas la conception du groupe 2, car nous n'avons pas assez de données permettant de construire une conception « fiable ».

3. Conception du groupe 1

Plus que de conception du groupe 1, nous pourrions parler de la conception de l'élève E_1 de ce groupe.

3.1. Espace problèmes. Nous avons identifié les problèmes suivants : $P_{chercheur}, P_{donneur}, P_{evalC}, P_{+}, P_{-}, P_{petits\ carrés}, P_{segments}, P^{fr}_{opt.etp.}, P_{nombreC}$.

De plus, nous avons aussi identifié les problèmes suivants :

- $P_{seg.max.}$: quelle est la longeur maximale d'un segment pour lequel la frontière peut être trouvée avec X interrogations au pire ?
- $P_{formule}$: Quelle est la formule liant le nombre d'interrogations au nombre de cases sur un segment ?
- $P_{>/2}$: Est-il possible de faire mieux que de « diviser par 2 » le nombre de frontières ?
- $P_{cherc./2}$: construire un algorithme de recherche qui « divise par 2 » le nombre de frontière à chaque étape.

Nous avons, en particulier, identifié les relations suivantes :

- $(P_{cherc./2}, P_{nombreC}) \to P_{segments}$;
- $P_{seg.max} \to P_{nombreC}$;
- La réponse à $P_{>/2}$ est un argument justifiant l'optimalité de $S^2_{E_1}$ [3] ;
- $P_{formule} \to P_{segment}$

3.2. Invariants.

3.2.1. *Objets.* Nous avons identifié les objets suivants : frontière possibles, carré, ligne, rectangles, stratégie de défense de maximisation du nombre de frontières restantes, $S^1_{E_1}$ et $S^2_{E_1}$.

3.2.2. *Résultats.*

- théorème coins-direction (suite à la mise en commun de la séance 2)
- stratégie de défense de maximisation du nombre de frontières restantes
- $S^1_{E_1}$ [4]et $S^2_{E_1}$
- Pour un carré 1×1, l'optimum est 4 ;
- Pour un carré 2×2, l'optimum est 4 ;
- Il n'est pas possible de faire mieux que de « diviser par 2 » le nombre de frontières possibles ;
- $S^2_{E_1}$ est optimal ;
- Pour un segment composé de 7 cases, il faut 4 interrogations au pire.
- Si c est le nombre de coups, alors le segment composé de $2^c - 1$ cases est le plus grand segment qu'il est possible de faire en utilisant c interrogations au pire.
- Pour des segments dont le nombre de case est entre $2^{c-1} - 1$ et $2^c - 1$, il faut utiliser c interrogations
- stratégie en acte de réponse à $P_{nombreC}$: pour évaluer le nombre d'interrogation au pire d'un algorithme, je le fais jouer contre un algorithme de défense localement optimal ;

3.2.3. *Exemples.* Nous avons identifiés les exemples

- Différents exemples de valeurs d'optimum pour les segments (1 à 20 cases),
- Le segment à 31 cases.
- Exemple où la stratégie de défense de maximisation du nombre de frontières possibles n'est pas localement optimale

[3]La stratégie consiste à interroger un coin puis à interroger une case qui « divise par 2 » le nombre de frontières.

[4]Interroger les 2 coins du segments puis jouer sur une case qui « divise en 2 » le nombre frontières possibles

– Contre-exemple à `RA11`.

3.2.4. *Conceptions.* Nous avons les conceptions suivantes :

– le nombre d'interrogations croît avec le nombre de cases d'un segment ;
– lorsqu'il y a autant de possibilité de frontières, cela n'a pas d'importance ;
– il ne faut jamais dire noir ;

3.2.5. *Types de preuves.* Nous avons identifié les types de preuve suivant :

– Preuve par algorithme de défense ;
– Argument des 4 coins ;
– Le type de preuve que l'on pourrait associée à la preuve, incomplète, d'optimalité de $S^2_{E_1}$ donnée faîte par E_1 ;

3.3. Représentations. Représentations géométriques et en terme de frontières. Nombres, puissances de 2, nombres pairs et impairs.

3.4. Obstacles, difficultés, problèmes ou représentations manquants pour le groupe 1. Nous n'avons pas identifié d'obstacle dans la conception des élèves. Il y a par contre des difficultés et des problèmes ou représentations manquants.

3.4.1. *Difficultés.* Comme pour les autres groupes, les élèves n'ont pas relié $P_{donneur}$ à $P_{chercheur}$. Cela a eut des conséquences « moins » importantes que pour les autres groupes, car le développement de la problématique frontière a permis d'obtenir des arguments d'optimalités.

3.4.2. *Problèmes ou représentations manquants.* Comme pour les autres groupes, la problématique du donneur n'a pas été développée, mais les élèves ont quand même résussi à faire une quasi-preuve de l'optimalité d'une stratégie de recherche sur tous les segments en utilisant le fait qu'il n'est pas possible de faire mieux que de diviser le nombre de frontières restantes par 2. Le développement de la problématique frontière a donc, en quelque sorte, compenser le non développement de la problématique donneur sur les segments.

Toutefois, et en rapport avec la preuve de l'optimalité de $P^2_{E_1}$, le problème d'existence d'un algorithme réalisant $S^2_{E_1}$ n'a pas été posé par les élèves. Sur tous les exemples de segments qu'ils ont traités, ils ont réussi à mettre en place cette stratégie, nous faisons l'hypothèse que c'est ce qui a empêché les élèves de se poser cette question pour les segments.

Les élèves ont aussi cherché à diviser par 2 le nombre de frontières sur des rectangles mais seulement après avoir intérrogé les coins, ils n'ont pas cherché à construire une stratégie globale divisant le nombre frontière par 2 à chaque interrogations, ce qui les aurait amené à poser le problème de l'existence d'un tel algorithme.

L'absence de la notion de fonction logarithmique en base 2 a entraîné l'élève a passé par sa fonction inverse en utilisant des puissances de 2.

CHAPITRE XVI

Conclusion sur les situations expérimentales

1. De manière générale sur les situations

De manière générale par rapport aux situations expérimentales conduites, nous pouvons dire que le problème est accessible à des élèves de niveau de seconde. Les élèves ont produit des stratégies de recherche et de défense, mais ils ont seulement étudié les stratégies de recherche. Sur des objets « simples », la découverte des résultats , la formulation de conjectures et la mise en place de preuves sont accessibles à des élèves de niveau seconde.

1.1. Les 2 situations expérimentales. Le fait d'avoir expérimenté deux situations distinctes, nous a permis de voir les conséquences des choix que nous avons fait. Le choix d'introduire le problème du donneur en même temps que celui du chercheur n'a pas permis de développer la problématique du donneur.

Nous avons laisser plus de temps aux élèves de la deuxième situation sur le problème avec des « objets simples »[1]. Ce choix a permis à ces élèves de développer des résultats intéressants sur $P_{segments}$. L'objectif était de laisser les élèves travailler sur des objets plus « simples » pour qu'ils développent des résultats qu'ils auraient alors pu réutiliser pour résoudre le problème des rectangles mais les 4 séances ont été insuffisantes. En réalité, les 4 séances ne suffisent pas à traiter complètement le problème $P_{segment}$, puisque bien qu'un groupe ait trouvé la solution du problème, il n'a pas eut le temps de tenter de prouver ce résultat[2]. La complexité de la situation exige donc de prévoir plus de séances.

Nous allons maintenant présenter les résultats concernant les conceptions des élèves.

1.2. Conceptions des élèves.

1.2.1. *Prédominance du problème du chercheur.* Les élèves n'ont cherché, d'eux-mêmes, qu'à résoudre le problème du chercheur, il a semblé que leur objectif principal était de trouver l'algorithme de recherche le plus efficace. Ce problème a « éclipsé » le problème du donneur dont la problématique ne s'est pas développée. Il a donc été attribué un poid important au problème du chercheur.

[1]Les élèves de la première expérimentation ne s'étant jamais autorisé à changer de territoire.

[2]Le manque de temps est d'autant plus dommageable que compte tenu des conjectures émises par les autres groupes sur les segments, ils auraient été intéressants que les élèves aient la possibilité de les étudier et de les relier au résultat du groupe 1.

Nous avions fait l'hypothèse à la fin de la première expérimentation que cela était dûe à l'introduction du problème du chercheur avant celui du donneur. Il s'est avéré que cette hypothèse est fausse.

Les élèves ont tout de même développé des stratégies pour donner des couleurs mais n'ont jamais étudié celles-ci. Plutôt que de parler d'une non-dévolution de $P_{donneur}$, il nous semble qu'il est préférable de parler d'une non-dévolution de la problématique du donneur, c'est-à-dire du problème et des sous-problèmes qu'ils engendrent.

Nous pouvons expliquer cela par différentes raisons :

- relation manquante : les élèves ne se sont pas rendu compte du caractère dual de ce problème par rapport au problème du chercheur ;
- incertitude trop élevée : étant donné la complexité du problème, nous avons toujours l'impression qu'il est possible d'améliorer l'algorithme de recherche ;
- intérêt ludique : le problème du chercheur apparaît comme plus « concret » et « ludique » que le problème du donneur.

Les conséquences de la non-dévolution de la problématique du donneur est de priver les élèves de l'aspect « dual » du problème et, en particulier, d'isoler le problème de minoration dans la conception.

1.2.2. *Problèmes ou représentations manquants.* Nous avons pu voir que la problématique du donneur n'a pas été dévoluée, de même, mis à part pour le groupe 1 de la seconde expérimentation, la problématique associée à $P^{fr}_{opt.etp.cherc}$ n'a pas été développée par les élèves. Ce que le groupe 1 de la seconde expérimentation a réalisé avec ce problème, montre que l'étude cette problématique est accessible et pertinente pour la résolution du problème.

1.2.3. *Prédominance de la recherche d'algorithmes.* Les élèves ont émis des hypothèses sur le nombre minimum d'interrogations. Le gestionnaire proposait alors aux élèves de choisir entre l'un des problèmes suivants :

- chercher un algorithme qui trouve la frontière en X interrogations ;
- montrer qu'il n'est pas possible de trouver la frontière en X interrogations

Nous avons observé que les élèves choisissaient à chaque fois de déterminer un algorithme en X interrogations. Nous avions l'impression, avant l'intervention du gestionnaire, qu'ils étaient « relativement » convaincus de l'impossibilité de trouver un algorithme qui termine en X interrogations. Nous faisons les hypothèses suivantes concernant ce phénomène :

- contrat didactique : le fait que le gestionnaire propose de chercher un algorithme plus efficace est interprété par les élèves de la manière suivante : il existe un algorithme plus efficace.
- absence d'heuristiques de preuve : les élèves ne voient pas comment montrer qu'il est impossible de trouver la frontière en C interrogations : même après que la preuve par algorithme de défense ait été introduite, les élèves n'ont pas essayé de la réutiliser ici ;
- matériel : le problème de la recherche d'algorithme est favorisé par le matériel, de plus ce problème peut sembler plus facile à résoudre de manière expérimentale en utilisant le matériel donné ;

– l'incertitude élevée la situation, due à son caractère dynamique, fait que les élèves ont toujours l'impression qu'il est possible d'améliorer les algorithmes de recherche ;

1.2.4. *Un seul algorithme de recherche utilisé.* Les élèves n'ont développé qu'un seul algorithme de recherche sur les rectangles : interroger les 4 coins puis les milieux. Nous faisons l'hypothèse que cet algorithme a été le seul utilisé car :

(1) il a été rapidement trouvé (séance 1) par les élèves à cause des exemples de frontières vides et coins ;
(2) il est difficile de trouver des algorithmes de recherche plus efficaces ;
(3) les élèves ont privilégié une contruction « action » à une construction « modèle » ;
(4) les élèves n'ont étudié le problème, *comment éliminer le plus de frontière ?*, que de manière locale ;
(5) les élèves n'ont pas proposé les problèmes suivant : c*omment éliminer le plus de points à chaque interrogations ?*
(6) l'algorithme doit être capable de jouer contre la frontière coin ou la frontière vide.

1.3. Absence des obstacles épistémologiques prévus. Dans l'analyse didactique de la situation nous avions identifié des obstacles épistémologiques qui ne sont pas apparus, nous pouvons alors nous demander pourquoi. La cause principale de la non apparition de ces obstacles est l'absence de relations entre $P_{chercheur}$ et $P_{donneur}$, $P^{fr}_{opt.etp.cherc}$ et $P_{chercheur}$ et, $P^{fr}_{opt.etp.don}$ et $P_{donneur}$.

Nous n'avions pas prévu que la problématique de $P_{donneur}$ et de $P^{fr}_{opt.etp.}$ ne soit pas développée.

Un groupe a tout de même développé la problématique $P^{fr}_{opt.etp.cherc}$, mais n'a pas commis d'erreur quand à sa relation avec $P_{chercheur}$.

De plus, nous avions fait l'hypothèse que des obstacles apparaîtraient en lien avec P_{loc}[3] notamment avec le problème de comparaison de 2 algorithmes. Ce problème n'est pas apparu (sauf pour un groupe) puisque, comme nous l'avons vu, un algorithme a prédominé dans la conception des élèves.

Le groupe pour lequel le problème de comparaison est apparu a relativement vite tranché du fait de l'efficacité de la stratégie coins puis milieux par rapport à la stratégie d'interroger le milieu. Les élèves ont tranché après des expérimentations sur les frontiètes vides ou coins. Nous pourrions y voir un signe d'optimalité locale, mais la stratégie milieu est tellement « mauvaise » contre une frontière coin ou vide, que cette interprétation ne nous semble pas pertinente.

1.4. Rôle du gestionnaire. Nous avons pu observer qu'à chaque fois qu'il y a eut des avancées « significatives » dans la résolution du problème, le gestionnaire a joué un rôle déterminant soit en introduisant un nouveau problème soit en aidant les élèves à formuler leurs réponses soit en validant ou invalidant certains arguments (avec des contre-exemples) soit en forçant

[3]Est ce que mon algorithme est optimal contre cet algorithme ?

les élèves à justifier leurs résultats. Les actions identifiées ici, ne sont pas au même « niveau », il apparaît donc comme pertinent d'étudier plus finement le résultat de ces différents types d'actions sur l'activité des élèves. En particulier, le gestionnaire a, dans cette situation, été à l'origine d'un grand nombre de phases de tentative de preuves.

Dans ce qui suit, nous allons faire une synthèse des résultats que nous avons obtenus par rapport à nos hypothèses de recherche.

2. Au niveau de l'expérimental

2.1. Pratique de la démarche expérimentale. Les élèves ont pratiqué la démarche expérimentale telle que nous la définissons. Cette pratique a généré de nouveaux problèmes, la formulation de conjectures et des tentatives de preuves. Elle a aussi participé au développement de la conception des élèves sur le problèmes. La sous-section suivante est consacrée à la relation entre le développement de la conception et à l'avancée dans la résolution du problème.

Les élèves ont donc pratiqué la démarche expérimentale telle que nous l'entendons. Cependant, la démarche qu'ils ont pratiqué ne nous ait pas apparue comme « complète » notamment au niveau de l'action tentative de prouver.

Ces expérimentations que nous avons menées ont montré que élèves formulent des conjectures et sont capables de les étudier, de les affiner et de les réfuter en étudiant les exemples produits par leurs expérimentations, celle-ci est même source d'arguments locaux. Une fois que la conjecture est affinée, nous avons pu remarquer que la démarche des élèves est soit de continuer à expérimenter pour améliorer encore la conjecture (alors qu'ils semblent convaincu de sa véracité) soit de considérer que la conjecture est vraie et de passer à la résolution d'un autre problème. Les élèves ne vont pas essayer de prouver que la conjecture est vraie. Nous avons ainsi pu observer que ce sont les interventions du gestionnaire qui ont initiées les tentatives de preuves « positives ». De ce fait, cela nous amène à différencier 2 types de tentatives de preuves :

– les *tentatives de preuves positives* qui consistent à vouloir montrer qu'un résultat est vrai ;
– les *tentatives de preuves négative*s qui consistent à vouloir montrer qu'un résultat est faux.

Les expérimentations que nous avons menées, nous font faire l'hypothèse suivante :

Hypothèse

> *La pratique de la démarche expérimentale permet aux élèves d'effectuer des tentatives de preuve négatives de manière adidactique. Pour obtenir des tentatives de preuves positives de manière adidactique, il est nécessaire que les élèves aient une « certaine » expérience de l'activité de recherche en mathématiques.*

2.2. Avancée dans la résolution du problème. Nous allons dans cette sous-section, voir en quoi la démarche expérimentale à permis le développement de la conception des élèves sur le problème.

2.2.1. *Premiers problèmes et résultats.* Les expérimentations génératives que les élèves ont menées leur ont permis d'obtenir leurs premiers résultats concernant le problème. En particulier, grâce aux confrontations avec les problèmes de structuration de la stratégie et de validation du produit de la stratégie. Un problème important, issu de l'observation, est : *comment jouer contre une frontière coin (ou vide) ?* Ce problème est à l'origine des stratégies coins mises en place par les élèves.

2.2.2. *La génération d'exemples.* L'expérimental a permis aux élèves de produire des exemples de parties, de frontières, de stratégies... L'apport de l'expérimental peut donc se voir à travers les différents rôles que les exemples ont joué au cours de la recherche (voir sous-sous-section 2.6.1 page 306).

2.2.3. *Formulation-Affinement-Réfutation de conjectures.* L'expérimental a été utilisé par les élèves pour évaluer des stratégies de recherche ou des conjectures. Les élèves ont ainsi été amené à affiner les conjectures qu'ils ont énoncées, c'est particulièrement le cas du groupe 2 de la première expérimentation. Ce groupe a dans un premier temps était convaincu que lorsque la frontière vide est absente, il est possible de trouver la frontière en 5 interrogations, pour finalement se rendre compte que cela ne marchait que dans le cas où deux coins opposés étaient de même couleur. Ce groupe a été confronté à un problème d'étude du domaine de validité : *quels sont les cas où notre algorithme termine en 5 interrogations ?* Les élèves ont alors utilisé les cas négatifs (contre-exemple) et les cas positifs (exemples) pour faire évoluer la conjecture en lui rajoutant des hypothèses qui selon eux permettent de déterminer la frontière en 5 interrogations.

L'expérimental a ainsi participé à la construction de preuve par contre-exemple.

2.2.4. *Mise en place d'un plan de preuve.* Lors de la première expérimentation, nous avons pu voir que l'expérimental avait entraîné la mise en place d'un plan de preuve par exhaustivité des cas. Les élève observant que les différents cas à traiter dépendaient de la couleur des coins, ils ont résolus des problèmes du type : *si les coins sont de cette couleurs, combien d'interrogations supplémentaires me faut-il ?*

2.2.5. *Non-expérimentation sur des cas triviaux.* Nous avons aussi observer, au cours des différentes expérimentations validatives que les élèves ont menées, qu'ils ne testaient pas certains cas, car, selon nous, ces cas sont jugés comme « triviaux » par les élèves. Par exemple, cela s'est produit lorsque les élèves n'ont pas testé le cas où le donneur donne la couleur noire à la première interrogation. Ceci peut être pertinent expérimentalement (expérimenter sur des cas non-triviaux), toutefois nous avons pu observer que ce phénomène était aussi présent lorsqu'ils justifiaient la validité d'un résultat à travers une preuve par exhaustivité des cas. Nous retrouvons aussi ce phénomène lorqu'il s'agit de décrire les stratégies qu'ils utilisent : les cas triviaux sont absents de leur domaine d'application.

La différence entre l'expérimentation validative et la preuve par exhaustivité des cas se situe à ce niveau, une preuve par exhaustivité des cas va prendre en comptes les cas « triviaux » alors qu'une expérimentation validative a tout intérêt à être réalisé sur des cas non-triviaux voir générique, en référence à (Perrin, 2007). La compétence en jeu ici se situe donc au niveau de la compréhension de ce qu'est une preuve mathématiques.

2.2.6. *Validation du produit de la stratégie.* Pour ces situations, la validtion du produit de la stratégie n'a posé problème que lorsque les élèves du groupe 1 ont effectué une expérimentation validative concernant le résultat `RA11`[4]. Ils ont alors cru que ce résultat était faux, car ils avaient trouvé un optimum faux pour les segments de 7 cases.

[4] si c est le nombre de coups, alors le segment composé de $2^c - 1$ cases est le plus grand segment qu'il est possible de faire en utilisant c interrogations au pire.

Conclusion et perspectives de recherche

Conclusion sur la recherche effectuée

Démarche expérimentale. Nos expérimentations ont confirmé qu'il est possible de faire pratiquer la démarche expérimentale à des élèves lorsque les conditions didactiques et épistémologiques, que nous avons identifiées, sont réunies. De plus, cette pratique permet d'enrichir la conception des élèves sur le problème. Cependant, la démarche pratiquée par les élèves n'est pas aussi complète que nous l'aurions souhaitée, notamment au niveau de l'action de tenter de prouver. Nous avons ainsi fait l'hypothèse (partie 3, chapitre XVI page 350) suivante concernant la pratique de la démarche expérimentale par les élèves :

Hypothèse

La pratique de la démarche expérimentale permet aux élèves d'effectuer des tentatives de preuve négatives de manière adidactique. Pour obtenir des tentatives de preuves positives de manière adidactique, il est nécessaire que les élèves aient une « certaine » expérience de l'activité de recherche en mathématiques.

Cette hypothèse nécessite pour être vérifiée de nouvelles expérimentations mettant en jeu des élèves ayant une « certaine » expérience de l'activité de recherche en mathématiques.

Une approche expérimentale de notre situation a entraîné la prédominance d'un algorithme. Nous faisons l'hypothèse que pour pouvoir inventer de nouvelles stratégies de recherche, il faut se détacher de l'expérimental pour se mettre à rechercher de nouvelles stratégies de recherche.

Enfin, le matériel est apparu comme un frein à l'utilisation de variables de recherche, les élèves se restreignant à expérimenter sur le matériel disponible. Cette difficulté n'a pu être levée que lorsque nous avons proposé aux élèves de travaillé sur des problèmes généraux comme celui portant sur les segments. Le fait que les élèves ne s'autorisent pas modifier les variables du problème est un frein au développement de la conception, cela réduit les exemples et les contre-exemples disponibles et ne permet pas le développement de résultats généraux. Les résultats généraux sont intéressants, car la production de ceux-ci peut amener à étudier les objets d'un point de vue « structurel » (comme nous avons pu le voir avec le groupe 1 de la deuxième situation) et ainsi à ne pas rester dans une argumentation de type « expérimentaux répétitifs » ou « expérimentaux validatifs » (voir page 208).

Concept-problème. Le concept-problème a été une aide à la construction de l'analyse a priori de la situation *Chercher la frontière* et à l'identification d'obstacles transversaux, de difficultés et de problèmes ou représentations manquants possibles. Toutefois, nous n'avons pas retrouver les obstacles transversaux identifiés dans l'analyse a posteriori. D'une certaine manière nous devrions nous réjouir de cela, mais en y regardant de plus près l'absence des obstacles transversaux identifiés est lié à la présence d'une difficulté, qui a entraîné le non-développement d'une problématique. Pour résumer, une difficulté a empêché l'apparition des obstacles transversaux.

De ce fait, l'analyse de la situation à l'aide du concept-problème que nous avons établie a été défaillante, il ne faut pas seulement considérer les relations entre 2 problèmes mais prendre aussi en compte les problématiques ou sous-espace problèmes, c'est-à-dire, ne pas traité les problèmes comme des problèmes « isolés » pour l'identification des obstacles transversaux.

Chercher la frontière. La situation *Chercher la frontière* qui, a priori, est complexe a été accessible aux élèves qui ont réussis à construire des stratégies de recherche et de défense. Les élèves ont obtenus des résultats intéréssants notamment sur les segments. Toutefois, dans la conception des élèves, un problème a été prédominant, ce qui a empêché le développement d'une problématique intéressante pour la résolution du problème ainsi qu'au niveau des connaissances en jeu. À l'heure actuelle, une solution que nous envisageons pour introduire cette problématique, est de « pointer du doigt » sa relation avec $P_{chercheur}$ (le problème prédominant).

Pour finir, le temps que nous avions proposé (4 séances d'1h30) nous a obligé à interrompre la situation alors que des choses intéressantes étaient en cours. La complexité de la situation exige donc un temps plus important.

Perspective de recherche

Nos perspectives de recherche concernent le rôle que peut jouer la démarche expérimentale dans le franchissement d'obstacle, l'effacement de difficultés ou encore l'apparition de problèmes ou représentations manquants.

L'expérimental peut-il aider à franchir un obstacle transversal ? Le concept-probème nous a amené à idenfier ce que nous avons dénommé obstacle transversal qui sont dûs à l'établissement d'une relation erronée entre 2 problèmes.

A priori, l'expérimental, à travers la production d'exemples et de contre-exemples, peut être une aide à l'étude d'une de ces relations. Par exemple, considérons l'obstacle transversal que nous avons identifié dans le groupe 1 de la première expérimentation : $(P_{terr.coins}, P_{terri.carac}, P_{def.fr.}) \rightarrow P_{-}$.

EXEMPLE XVI.1. Nous rappelons qu'un territoire est une notion développée par les élèves du groupe 1 qu'ils n'ont pas réussi à définir, $P_{terr.coins}$ est le problème détermination du nombre de « coins » d'un territoire, $P_{terri.carac}$ est le problème de caractérisation d'un territoire et $P_{def.fr.}$ est le problème de caractérisation d'une frontière. L'argumentation des élèves est, selon nous, la suivante :

(1) au début, 4 coups pour déterminer le territoire ;

(2) une fois le territoire déterminé, 2 coups pour trouver la frontière, car une droite est engendrée par 2 points.

Les élèves auraient pu se rendre compte que cette relation était erronée en faisant varier la forme du terrain. En effet, sur un carré 2×2, ils auraient pu se rendre compte, qu'on n'avait seulement besoin de 4 interrogations ce qui auraient pu les interroger sur la présence de $P_{def.fr}$. Ils auraient pu aussi remarquer cela avec un carré 3×3 ou 1×1. Ce qui aurait aussi amené les élèves à obtenir une meilleure compréhension du phénomène.

La question qui se pose est : *est ce qu'en faisant varier la forme du terrain sans intention d'étudier la validité de l'arguments proposé, il est possible de s'apercevoir de leur non-validité ?* Nous faisons l'hypothèse qu'il est fortement probable qu'il soit nécessaire de s'être posé la question pour pouvoir faire cette observation. Mais surtout ce qui nous semble fondamental, c'est la question du domaine de validité de l'argument. Pour nous, cet argument s'il est vrai, devrait être vrai pour tous les carrés.

La compétence la plus importante à maîtriser pour le franchissement des obstacles transversaux transervaux est, selon nous, de se poser la question du domaine de validité des arguments qu'on énonce. L'expérimental peut alors être une aide à l'étude de ce domaine.

Nous nous posons ainsi les questions suivantes :

(1) Quelles sont les connaissances à maîtriser pour être capable de porter un regard réflexif sur les arguments que nous émettons ?

(2) Quelles sont les connaissances nécessaires à l'étude du domaine de validité d'un argument ?

(3) Quelles sont les conditions didactiques et épistémologiques d'une situation d'apprentisage de ces connaissances ?

Il nous semble qu'un élément de réponses partiel de la question 2, se trouve dans la notion de variable de recherche(Godot, 2005 ; Grenier et Payan, 2002).

Des travaux relatifs à l'argumentation et en liens avec ces questions ont déjà été réalisés. Nous pouvons citer Jahnke (2007) et Durand-Guerrier (2003, 2008).

Durand-Guerrier (2003) propose pour enseigner l'implication d'en étendre la notion usuelle à l'aide des « *open sentences* » de Tarski. Cela consiste à confronter des élèves à des implications qui comportent une ou plusieurs variables libres afin qu'ils en étudient le domaine de validité.

Dans (Durand-Guerrier, 2008), l'auteur observe aussi que des élèves en situation d'étude de la validité d'un « *general statement* » ($\forall n \ldots$) hésite à dire qu'il est faux, car il existe des cas où il est vrai. L'auteur considère alors que les élèves ont travaillé avec un « *open statement* ».

Ces *open statement* sont intéressants pour l'étude de l'argumentation dans les situations de recherche. Par exemple, un argument courant concernant la situation de la chasse à la bête avec un plateau carré de 5 cases de côté est le suivant : « Le jardin est composé de 25 cases, la bêtes fait 3 cases, $\frac{25}{3} = 8$ donc la solution est 8 ».

Cet argument est en fait un cas particulier de l'argument : « Le jardin est composé de x cases, la bête est composée y cases donc la solution est

$\frac{x}{y}$ ». Une question qui se pose alors est de savoir si l'élève a conscience que son argument est un cas particulier d'un argument plus général, nous pouvons penser que non et une question qui se pose est alors de comment lui permettre d'identifier l'argument général. La réponse se trouve peut-être dans la gestion de la situation. Généralement, face à cet argument, nous proposons à l'élève un contre-exemple en faisant varier la forme du jardin. Mais peut-être qu'une autre façon de gérer ce cas, serait de le traiter avec un *open statement* et ainsi d'amener les élèves vers un problème de recherche de domaine de validité et peut être une réflexion sur la nature de son argument.

Il nous semble donc que cela pose des questions concernant la gestion des situations de recherche au niveau des exemples et des contre-exemples à un argument.

Remarque : Ce type de raisonnement, identification de l'argument général, est aussi intéressant dans les situations de recherche, notamment par rapport aux variables de recherche, nous pouvons penser qu'avant d'utiliser des variables du problème, encore faut-il les identifier. Cela nous amène à nous interroger sur la nature de la différence et des similitudes entre problème et arguments. Cela nous interroge aussi sur les connaissances nécessaires à l'identification des variables d'un problème.

L'expérimental et l'effacement des difficultés. Une difficulté correspond à l'absence d'un lien dans la conception des élèves sur le problème. La question est alors : est ce que l'expérimental peut être une aide à l'effacement d'une difficulté ?

Par rapport aux expérimentations de cette thèse, nous avons pu observer que les élèves n'ont pas établis de relation entre $P_{donneur}$ et $P_{chercheur}$, nous serions donc tenté de dire non. Toutefois, lorsqu'un problème est du type validation du produit de la stratégie ou structuration de la stratégie, la relation semble s'établir. Il est donc intéressant de déterminer quels sont les types de difficultés que l'expérimental peut aider à effacer.

L'expérimental peut-il aider à faire apparaître problème/représentation manquant ? Dans le cas où le problème/représentation manquant est « trop loin » des problèmes connus, par exemple dans le cas d'un changement de représentation, nous faisons l'hypothèse que l'expérimental ne peut pas être une aide. Une conséquence directe de cette hypothèse est que l'apparition de ces problèmes ne pourra se faire qu'à l'aide du gestionnaire ou d'une mise en place de la situation construite pour faire apparaître la représentation/problème absent à travers un jeu sur les variables didactiques ou d'une « illumination » d'un des élèves.

Cela pose alors des questions relatives à la gestion d'une situation recherche lorsqu'un problème ou une représentation est manquant.

Étude plus fine des conceptions des élèves. Nous avons établit des conceptions d'élève de manière statique (à la fin de la situation), il pourrait être intéressant de prendre en compte le processus dynamique de développement d'une conception notamment pour étudier plus finement l'évolution de l'espace problème et des relations qui s'y crées ainsi que les relations entre l'espace problème et les invariants.

En particulier, une étude plus dynamique des conceptions des élèves pourrait nous permettre de mieux discerner les rétro-actions entre la conception et l'expérimental.

Existe-t'il « un contexte d'évidences et d'habitudes » dans l'enseignement des mathématiques ? Dans le chapitre 3.3 page 103, nous mentionnons cette piste de recherche. Elle consiste à déterminer un ensemble d'habitudes dans l'enseignement des mathématiques. Cela pourraient nous aider à comprendre pourquoi la démarche expérimentale n'est' pas proposée par l'institution scolaire.

Analogies entre l'enseignement des mathématiques et des sciences expérimentales. C'est aussi une piste que nous donnons dans le chapitre 3.3 page 103. Nous avons remarqué que certains phénomènes didactiques observés dans les sciences expérimentales sont aussi présents en mathématiques. Cela pose la question de savoir si cela est dû à une conception commune de la démarche expérimentale ou à des raisons didactiques de « contrôle » des actions.

Quelle progression ? Notre objectif est l'apprentissage de la démarche expérimentale ce qui pose des questions sur la pratique de la démarche expérimentale lors de situation traditionnel d'enseignement. En effet, après avoir pratiqué la démarche expérimentale lors d'une ou plusieurs situations de recherche, est ce que les élèves pratiquent la démarche expérimentale en situation ordinaire ?

Cela pose ainsi des questions sur le nombre de situation de recherche, sur le contrat didactique ainsi que sur les caractéristiques des situations ordinaires.

[4] Par ordinaire, nous entendons situation qui n'a pas été spécialement conçu pour favoriser la pratique de la démarche expérimentale.

Ahou ! Ahou ! Ahou !

ANNEXE A

Convexité de Chercher la Frontière

1. Préliminaires

Définition A.1 (Ensemble des directions). Nous appelons D_8 l'ensemble qui contient les 8 vecteurs de $\mathbb{Z}^2$ suivant : $(1,0),(1,1),(0,1),(-1,1),(-1,0),(-1,-1),(0,-1),($

Définition A.2. Nous utilisons la distance d_1 définie par : soit $z = (x,y) \in \mathbb{Z}^2$ et $z' = (x',y') \in \mathbb{Z}^2$ alors $d_1(z,z') = \mid x - x' \mid + \mid y - y' \mid$.

Soit $z_0 \in \mathbb{Z}^2$ et $r \in \mathbb{N}$, nous posons $C(z_0,r) = \{z \in \mathbb{Z}^2, d_1(z_0,z) = r\}$ et $B(z_0,r) = \{z \in \mathbb{Z}^2, d_1(z_0,z) \leq r\}$

1.1. D_8-convexité.

Définition A.3 (D_8-droite). Nous disons que d est un D_8-*droite* si

$$\exists u \in D_8, \exists a \in \mathbb{Z}, d = \{z \in \mathbb{Z}^2, \langle z,u\rangle = a\}$$

Nous appelons D_8-*demi-plan* les ensembles suivants : $d^+ = \{z \in \mathbb{Z}^2, \langle z,u\rangle \geq a\}$ et $d^- = \{z \in \mathbb{Z}^2, \langle z,u\rangle \leq a\}$

Définition A.4 (D_8 convexe). Nous disons que C est D_8-convexe si C est une intersection de D_8-demi-plan.

Définition A.5 (Droite séparatrice). Soit $P \subset \mathbb{Z}^2$ et $Q \subset \mathbb{Z}^2$ alors nous disons que d une D_8-droite sépare P et Q si :
- $P \cap Q = \emptyset$,
- $P \subset d^+$,
- $Q \subset d^-$.

1.2. 2-connexité.

Définition A.6 (Arc 2-connexe). Soit z_1 et z_2 des points de Z^2 et p un entier, nous disons que $\alpha = \{\alpha_0, \cdots, \alpha_p\} \in (\mathbb{Z}^2)^{p+1}$ est un *arc 2-connexe joignant* z_1 *à* z_2, si il existe $(u_1,u_2) \in (D_8)^2$ et $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que :

a) $\alpha_0 = z_1$,

b) $\alpha_p = z_2$,

c) $d_1(u_1 - u_2) = 1$,

d) $\forall i \in \{0,p\},\ \alpha_{i+1} - \alpha_i \in \{u_1,u_2\}$

Nous notons $\mathcal{A}(z_1,z_2)$ l'ensemble des arcs 2-connexes joignant z_1 à z_2.

Proposition A.7

Soit $(z_1,z_2) \in (\mathbb{Z}^2)^2$ *alors il existe un arc 2-connexe joignant* z_1 *à* z_2.

Démonstration : $z_2 - z_1 = (n,p)$, supposons que $|p| \leq |n|$, nous allons construire un arc joignant z_1 à z_2. On pose pour cela :

– $\forall i \in \{0, \cdots, |p|\}, \alpha_i = z_1 + i(sgn(n), sgn(p))$,
– $\forall i \in \{|p|+1, \cdots, |n|\}, \alpha_i = \alpha_{|p|} + (i - |p|)(sgn(n), 0)$.
Si $|n| < |p|$ alors on pose :
– $\forall i \in \{0, \cdots, |n|\}, \alpha_i = z_1 + i(sgn(n), sgn(p))$,
– $\forall i \in \{|n|+1, \cdots, |p|\}, \alpha_i = \alpha_{|p|} + (i - |p|)(0, sgn(p))$. ■

DÉFINITION A.8 (2-connexité par arc). Soit $\Gamma \subset Z^2$, nous disons que Γ est 2-connexe par arc si :

$$\forall (z_1, z_2) \in \Gamma^2, \forall \alpha \in \mathcal{A}(z_1, z_2), \alpha \subset \Gamma$$

.

Proposition A.9

L'intersection d'ensemble 2-connexe par arc est 2-connexe par arc.

Ici, nous allons montrer que la convexité définie par les D_8-droite est équivalente à la connexité par arc 2-connexes.

2. Equivalence

2.1. Un D_8-convexe est 2-connexe par arcs.

Lemme A.10

Soit $(z_1, z_2) \in (\mathbb{Z}^2)^2$ et $z_2 - z_1 = (n, p)$ alors :

(1) Soit $\alpha = \{\alpha_0, \cdots, \alpha l\} \in \mathcal{A}(z_1, z_2)$ on a :
- *Si $|p| \leq |n|$, $\forall i \in \{0, \cdots, l-1\}, (\alpha_{i+1} - \alpha_i = (sgn(n), sgn(p))) \vee (\alpha_{i+1} - \alpha_i = (sgn(n), 0))$,*
- *Si $|n| \leq |p|$, $\forall i \in \{0, \cdots, l-1\}, (\alpha_{i+1} - \alpha_i = (sgn(n), sgn(p))) \vee (\alpha_{i+1} - \alpha_i = (0, sgn(p)))$.*

(2) si $|p| \leq |n|$, $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}(z_1,z_2)} \alpha = \{z_1 + ((k+t)sgn(n), ksgn(p)), (k,t) \in \{0, \cdots, |p|\} \times \{0, \cdots, |n| - |p|\}\}$.

(3) si $|n| \leq |p|$, $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}(z_1,z_2)} \alpha = \{z_1 + (ksgn(n), (k+t)sgn(p)), (k,t) \in \{0, \cdots, |n|\} \times \{0, \cdots, |p| - |n|\}\}$.

Démonstration : On peut supposer $z_1 = (0, 0)$.

(1) Il existe u_1 et u_2 éléments de D_8 tels que $\forall i \in \{0, \cdots, n-1\}, (\alpha_{i+1} - \alpha_i = u_1) \vee (\alpha_{i+1} - \alpha_i = u_2)$. On pose $U_j = \{i, \alpha_{i+1} - \alpha_i = u_j\}$ pour $j = 1, 2$ et $m_j = card(U_j)$.
- Si $|p| \leq |n|$, comme $(u_1, u_2) \in (D_8)^2$ et $d_1(u_1 - u_2) = 1$ alors on peut supposer que $u_1 = (\epsilon_1, 0)$ ou $(0, \epsilon_2)$ et $u_2 = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ avec $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ pour i=1,2.
  Donc $(n, p) = ((m_1 + m_2)\epsilon_1, m_2\epsilon_2)$ ou $(n, p) = (m_2\epsilon_1, (m_1 + m_2)\epsilon_2)$ or $|p| \leq |n|$, donc $(n, p) = ((m_1 + m_2)\epsilon_1, m_2\epsilon_2)$. On en déduit : $\epsilon_1 = sgn(n)$, $\epsilon_2 = sgn(p)$, $u_1 = (sgn(n), 0)$ et $u_2 = (sgn(n), sgn(p))$;
- Idem si $|n| \leq |p|$.
- Si $|p| \leq |n|$. On pose $G = \{z_1 + ((k+t)sgn(n), ksgn(p)), (k,t) \in \{0, \cdots, |p|\} \times \{0, \cdots, |n| - |p|\}\}$. On va montrer les deux inclusions.

a) Soit $z_0 = ((k_0+t_0)sgn(n), k_0 sgn(p)) \in G$, on va exhiber un arc α joignant z_1 et z_2 et contenant z_0. On pose :
   – $\forall i \in \{0, \cdots, |k_0|\}, \alpha_i = i(sgn(n), sgn(p))$,
   – $\forall i \in \{|k_0|, \cdots, |k_0|+|t_0|\}, \alpha_i = \alpha_{|k_0|} + (i-|k_0|)(sgn(n), 0)$,
   – $\forall i \in \{|k_0|+|t_0|, \cdots, |t_0|+|p|\}, \alpha_i = \alpha_{|k_0|+|t_0|} + (i-|k_0|-|t_0|)(sgn(n), sgn(p))$,
   – $\forall i \in \{|t_0|+|p|, \cdots, |n|\}, \alpha_i = \alpha_{|t_0|+|p|} + (i-|t_0|-|p|)(sgn(n), 0)$.

   Cet arc 2-connexe convient car $\alpha_0 = (0,0)$, $\alpha_{|k_0|+|t_0|} = z_0$, $\alpha_n = z_2$ et $d_1((sgn(n), sgn(p)), (sgn(n), 0) = 1$. Donc $G \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}(z_1,z_2)} \alpha$.

b) Réciproquement, soit $\alpha = \{\alpha_0, \cdots, \alpha_l\} \in \mathcal{A}(z_1, z_2)$. Alors $\alpha_{i+1} - \alpha_i = (sgn(n), sgn(p))$ ou $\alpha_{i+1} - \alpha_i = (sgn(n), 0)$ d'après 1). On pose $u_1 = (sgn(n), sgn(p))$, $u_2 = (sgn(n), 0)$ et $m_1 = card\{i, \alpha_{i+1} - \alpha_i = u_1\}$ et $m_2 = card\{i, \alpha_{i+1} - \alpha_i = u_2\}$.
   On a alors : $\forall i \in \{0, \cdots, m_1+m_2\}, \exists (x_1, x_2) \in \{0, \cdots, m_1\} \times \{0, \cdots, m_2\}$ $\alpha_i = x_1 u_1 + x_2 u_2$. D'où $\alpha_i = ((x_1+x_2)sgn(n), x_1 sgn(p))$
   De plus, on a $(n,p) = ((m_1+m_2)sgn(n), m_1 sgn(p))$. Donc $m_1 = |p|$ et $m_2 = |n|-|p|$. On en déduit $\alpha_i \in G$.

(2) On traite le cas $|n| \leq |p|$ avec une démonstration identique à 2). ■

Proposition A.11

Soit H un D_8-droite alors H^+ et H^- sont 2-connexes.

Démonstration : Il suffit de faire la preuve pour H^+. On a $H = \{z \in \mathbb{Z}^2, \langle z, u\rangle = a\}$

Soit $(z_1, z_2)^2 \in (H^+)^2$ alors d'après le lemme A.10, on a :

(1) si $|p| \leq |n|$, $\mathcal{A}(z_1, z_2) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}(z_1,z_2)} \alpha = \{z_1 + ((k+t)sgn(n), ksgn(p)), (k,t) \in \{0, \cdots, |p|\} \times \{0, \cdots, |n|-|p|\}\}$.
(2) si $|n| \leq |p|$, $\mathcal{A}(z_1, z_2) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}(z_1,z_2)} \alpha = \{z_1 + (ksgn(n), (k+t)sgn(p)), (k,t) \in \{0, \cdots, |n|\} \times \{0, \cdots, |p|-|n|\}\}$.

On va montrer que $\mathcal{A}(z_1, z_2) \subset H^+$. On peut supposer $z_1 = (0,0)$

(1) Soit $z \in \mathcal{A}(z_1, z_2)$ alors il existe $(k,t) \in \{0, \cdots, |p|\} \times \{0, \cdots, |n|-|p|\}$ tel que $z = ((k+t)sgn(n), ksgn(p))$.
   De plus, comme nous avons z_1 et z_2 éléments de H^+, $nx + py = |n|sgn(n)x + |p|sgn(p)y \geq a$ et comme $z_1 = (0,0)$, on a $a \leq 0$.
   Nous avons trois possibilités pour la valeur de $sgn(n)x$: 0, 1 ou -1.

   a) Si $sgn(n)x = -1$. Alors considérons les différentes valeurs possibles pour $sgn(p)y$:

      i) Si $sgn(p)y = 1$ alors nous avons : $\langle z, u\rangle = -t$, or $\langle z_2, u\rangle = -|n| + |p| \geq a$ et $0 \geq t \geq |n| - |p|$ d'où $\langle z, u\rangle \geq a$.
      ii) Si $sgn(p)y = -1$ alors nous avons : $\langle z, u\rangle = -(2k+t)$ or $0 \leq 2k + t \leq |n| + |p|$ et $\langle z_2, u\rangle = -|n| - |p| \geq a$ d'où $\langle z, u\rangle \geq a$.

iii) Si $sgn(p)y = 0$ alors nous avons $p = 0$ donc $k = 0$ d'où : $\langle z, u\rangle = -t \geq -|n|$, or $\langle z_2, u\rangle = -|n| \geq a$.

b) Si $sgn(n)x = 1$. Alors considérons les différentes valeurs possibles pour $sgn(p)y$:

i) Si $sgn(p)y = 1$, nous avons $\langle z, u\rangle = 2k + t$ et $2k + t \geq 0$ donc $\langle z, u\rangle \geq 0$.

ii) Si $sgn(p)y = -1$, nous avons $\langle z, u\rangle = t$ et $t \geq 0$.

iii) Si $sgn(p)y = 0$, nous avons $\langle z, u\rangle = t$.

c) Si $sgn(n)x = 0$ alors $n = 0$ or $|n| \geq |p|$ donc $p = 0$ donc $z_1 = z_2$.

Conclusion : si z_1 et z_2 sont dans le cas 1) alors $G \subset H^+$.

(2) Par une même démonstration, on montre que si z_1 et z_2 sont dans le cas 2) alors $G \subset H^+$. ■

Ce lemme et la proposition A.9 donne le théorème suivant :

Théorème A.12

Un D_8-convexe est 2-connexe par arcs.

2.2. Un 2-connexe par arcs est D_8-convexe. Pour montrer la réciproque, nous utiliserons les lemmes suivants :

Lemme A.13

Soit $z_0 \in \mathbb{Z}^2$ et $r \in \mathbb{N}$ alors :

(1) $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{Z}^2, -r \leq \langle z - z_0, (1, -1)\rangle \leq r$ et $-r \leq \langle z - z_0, (1, 1)\rangle \leq r\}$

(2) $C(z_0, r) = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ avec :
- $C_1 = \{z_0 + (r, 0) + i(-1, -1), i \in \{0, \cdots, r\}\}$,
- $C_2 = \{z_0 + (r, 0) + i(-1, 1), i \in \{0, \cdots, r\}\}$,
- $C_3 = \{z_0 + (-r, 0) + i(1, 1), i \in \{0, \cdots, r\}\}$,
- $C_4 = \{z_0 + (-r, 0) + i(1, -1), i \in \{0, \cdots, r\}\}$.

Démonstration : On peut supposer $z_0 = (0, 0)$;

(1) Soit $z = (x, y) \in G = \{z \in \mathbb{Z}^2, -r \leq \langle z, (1, -1)\rangle \leq r$ *et* $-r \leq \langle z, (1, 1)\rangle \leq r\}$ alors $-r \leq x - y \leq r$ et $-r \leq x + y \leq r$ donc si x et y de même signe alors $|x| + |y| \leq r$ sinon $|x| + |y| = |x - y| \leq r$. Donc $G \subset B(z_0, r)$.

Réciproquement, soit $z = (x, y) \in B(z_0, r)$ alors $|x| + |y| \leq r$.
- Si x et y de même signe, $-r \leq x + y \leq r$. De plus, nous avons $|x| \leq r$ et $|y| \leq r$ d'où $|x - y| = ||x| - |y|| \leq r$.
- Si x et y sont de signe contraire alors $|x| + |y| = |x - y|$ d'où $|x - y| \leq r$. De plus, nous avons $|x| \leq r$ et $|y| \leq r$ donc $|x + y| = ||x| - |y|| \leq r$.

(2) Les C_j sont à distance r de z_0 car $|r - i| + |i| = r$ si $i \in \{0, \cdots, r\}$.

Réciproquement, supposons que $z = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est à distance r de $(0, 0)$ alors $|x| + |y| = r$ d'où $|x| \leq r$ et $|y| \leq r$ et nous avons $|x| = r - |y|$ d'où $z = ((r - |y|)sgn(x), |y|sgn(y)) = (rsgn(x), 0) + |y|(-sgn(x), sgn(y))$. Donc z est dans un C_j.

■

Lemme A.14

Soit $z_0 \in \mathbb{Z}^2$ et $r \in \mathbb{N}$ alors $B(z_0, r)$ est 2-connexe.

Démonstration : D'après le lemme A.13 alors $B(z_0, r)$ est une intersection de D_8-demi-plans or d'après le théorème A.12 une intersection de D_8-demi-plans est 2-connexe donc $B(z_0, r)$ est 2-connexe. ■

Lemme A.15

Soit $\Gamma \subset \mathbb{Z}^2$ un 2-connexe par arcs et $z_0 \in Z^2$ tel que $z_0 \notin \Gamma$ alors il existe une D_8-droite qui sépare $\{z_0\}$ et Γ.

Démonstration : On pose $m = min\{d_1(z, z_0), z \in \Gamma\}$.

(1) Supposons qu'il existe $(z_1, z_2) \in \Gamma^2$, $z_1 \neq z_2$ tels que $m = d_1(z_1, z_0) = d_1(z_2, z_0)$. Nous allons montrer que z_1 et z_2 sont sur une même D_8-droite qui sépare Γ et $\{z\}$.

Comme $m = d_1(z_1, z_0) = d_1(z_2, z_0)$ alors $(z_1, z_2) \in C(z_0, m)^2$ or $C(z_0, m) = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ d'après le lemme A.13. Supposons que z_1 et z_2 n'appartiennent pas au même C_i. Soit $\alpha \in \mathcal{A}(z_1, z_2)$ alors $\alpha \subset \Gamma$.

Nous allons montrer qu'un point de α est plus proche de z_0. D'après le lemme A.13 alors $\alpha \subset B(z_0, m)$. α ne peut être inclus dans un C_i car z_1 et z_2 sont dans des C_i différents. Donc α ne peut être inclus dans $C(z_0, m)$, en effet $d_1((1, 1)(1, -1)) = d_1((-1, 1)(-1, -1)) = d_1((-1, -1)(1, -1)) = d_1((1, -1)(1, 1) = 2$. Donc α admet un point qui est dans $B(z_0, m) \setminus C(z_0, m)$. Ce point est à une distance strictement inférieure à m de z_0. D'où une contradiction. Nous avons donc z_1 et z_2 qui sont sur un même D_8-droite qui contient l'un des C_i.

Nous allons montrer que la D_8-droite D engendrée par z_1 et z_2 sépare Γ et $\{z_0\}$. Nous pouvons supposer (quitte à effectuer une rotation de centre z_0) que $D = \{z \in \mathbb{Z}^2, \langle z_0 - z, (-1, 1)\rangle = -m\}$ alors nous allons montrer que $\Gamma \subset D^-$.

Premièrement, nous pouvons remarquer que $B(z_0, m) \subset D^+$ car d'après le lemme A.13 $B(z_0, m) = \{z \in \mathbb{Z}^2, -m \leq \langle z - z_0, (-1, 1)\rangle \leq m \text{ et } -m \leq \langle z - z_0, (1, 1)\rangle \leq m\}$.

Nous allons maintenant distinguer 2 cas :

a) $m > 1$,
b) $m = 1$.

Nous distinguons ces cas, car dans le cas où $m > 1$, les segments C_i possèdent un point intérieur ce qui n'est pas le cas lorsque $m = 1$.

a) Nous remarquerons que comme z_1 et z_2 sont différents et sur un même C_{i_0} alors un point intérieur de C_{i_0} est dans Γ. Nous appelerons ce point z_3.

Soit $z_4 \in H^+ \backslash H$. Nous allons montrer qu'il existe $\alpha \in \mathcal{A}(z_1, z_4)$ tel que $\alpha \cap B(z_0, m) \setminus C(z_0, m) \neq \emptyset$. Pour cela, nous allons « découper » D^+ en 3 zones. Supposons que $z_3 = (0, 0)$ et considérons la droite orthogonale à D passant par z_3 alors cette droite définie 2 demi-plans : $D^{\perp}_{+} = \{(n,p), |n| \geq |p|\}$ et $D^{\perp}_{+} = \{(n,p), |p| \geq |n|\}$. Les 3 zones que nous considérons sont les suivantes :

- zone 1 : $D^{\perp}_{+} \cap D_{+} \setminus D^{\perp}$,
- zone 2 : $D^{\perp}_{-} \cap D_{+} \setminus D^{\perp}$,
- zone 3 : $D^{\perp} \cap D_{+}$.

Nous allons montrer que si z_4 appartient à la :

- zone 1, alors il existe un arc 2-connexe contenant le point $A = z_3 + (-1,0)$ et joignant z_3 et z_4,
- zone 2, alors il existe un arc 2-connexe contenant le point $B = z_3 + (1,0)$ et joignant z_3 et z_4,
- zone 3, alors il existe un arc 2-connexe contenant le point $C = z_3 + (-1,1)$ et joignant z_3 et z_4

Cette situation peut s'illustrer par la figure A.1.

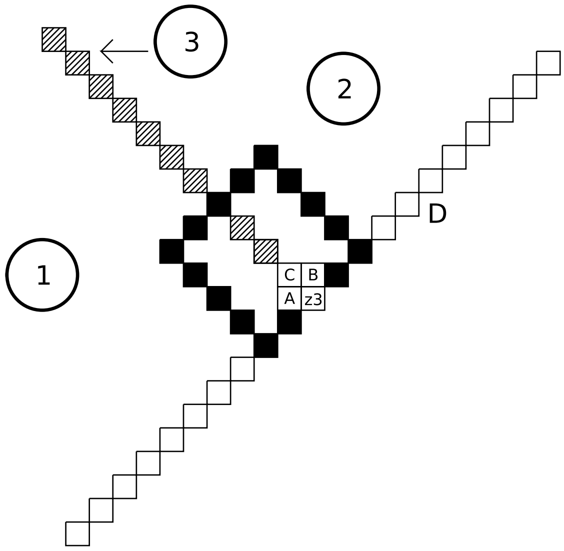


FIG. A.1. Découpage lorsque $m > 1$

Si $z_4 = (n,p)$ est situé dans la zone 1 alors $|n| > |p|$. Donc d'après le lemme A.10, il existe arc 2-connexe joignant z_3 à z_4 et passant par A.

Idem si z_4 est situé dans la zone 2 alors $|p| > |n|$. Donc d'après le lemme A.10, il existe un arc 2-connexe joignant z_3 à z_4 et passant par A.

Si z_4 est situé dans la zone 3 alors $|n| = |p|$ donc le seul arc 2-connexe joignant z_3 et z_4 passe par C.

Comme $z_3 \in \Gamma$, $z_4 \in \Gamma$ et Γ est 2-connexe, les points A, B et C sont dans Γ. De plus, ils sont situés dans $B(z_0, m) \setminus C(z_0, m)$. D'où une contradiction. Les points de Γ sont donc tous situés dans D^{-}.

b) Dans le cas où $m = 1$, nous appelerons $D^{\perp}$ la droite orthogonale à D passant par z_0 et supposerons que $z_1 \in D^{\perp}_{-}$ et $z_2 \in D^{\perp}_{+}$ nous découpons D_{+} de la manière suivante :

– zone 1 : $D_+ \cap D_+^\perp$,
– zone 2 : $D_+ \cap D_-^\perp$.

La figure A.2 illustre ce découpage.

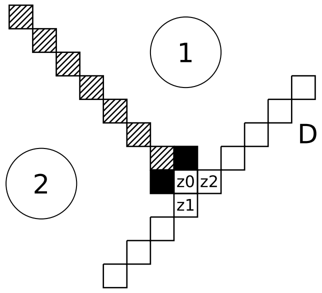


Fig. A.2. Découpage lorsque $m = 1$

Nous allons d'abord montrer que : pour tout point situé dans la zone 1, il existe un arc 2-connexes le reliant à z_1 en passant par z_0. Nous allons supposer que $z_1 = (0, 0)$ alors les points situés dans la zone 1 sont des points de $\{(n, p), |n| \leq |p|\}$. Donc d'après le lemme A.10, pour tout point z situé dans la zone 1, il existe un arc 2-connexe joignant z_1 à z et passant par z_0.

Par une preuve analogue, nous montrons la même chose concernant les points de la zone 2 et z_2.

Nous pouvons donc en conclure que D sépare Γ et z_0.

(2) Si il existe un unique z_1 tel que $d_1(z_1, z_0) = m$. Nous pouvons supposer que $z_1 = (0, 0)$. D'après le lemme A.13, z_1 est situé sur l'un des C_i composant $C(z_0, m)$. Nous notons ce C_i : C_{i_0}. Nous distinguerons 2 cas :
– z_1 est un point intérieur de C_{i_0}.
– z_1 est une extrémité de C_{i_0}.

Dans le cas où z_1 est un point intérieur, ce qui a été fait précédemment nous permet de montrer que la droite engendrée par C_{i_0} sépare z_0 et Γ. Il ne nous reste donc qu'à traiter le cas où z_1 est une extrémité de C_{i_0}. Nous sommes alors dans le cas où z_0 et z_1 sont reliés par un unique arc 2-connexes qui reste sur une D_8-droite D. Nous appelons $D^\perp$ la droite orthogonale à D passant par z_0. Nous allons montrer que $D^\perp$ sépare z_0 et Γ.

Nous pouvons dans un premier temps remarquer que $B(z_0, m)$ est inclus dans un demi-plan engendré par $D^\perp$ que nous noterons $D_+^\perp$.

De plus, comme z_1 est une extrémité de $B(z_0, m)$, z_1 est l'intersection de deux C_i qui composent $C(z_0, m)$: C_1 et C_2. Soit D_1 et D_2 les droites engendrées respectivement par C_1 et C_2. Nous dirons que D_{i+} correspond au demi-plan engendré par D_i qui contient $B(z_0, m)$.

Nous allons diviser $D_+^\perp$ en 3 zones :
– zone 1 : $D_{1+} \cap D_{2+} \cap D_+^\perp \setminus D^\perp \cup D_1 \cup D_2$,
– zone 2 : $D_{1-} \cap D_+^\perp \setminus D^\perp$,
– zone 3 : $D_{2-} \cap D_+^\perp \setminus D^\perp$.

La figure A.3 illustre ce découpage.

Quitte à effectuer une rotation nous pouvons nous ramener au cas où D est une droite de vecteur directeur $(0, 1)$. En effet, les extrémités

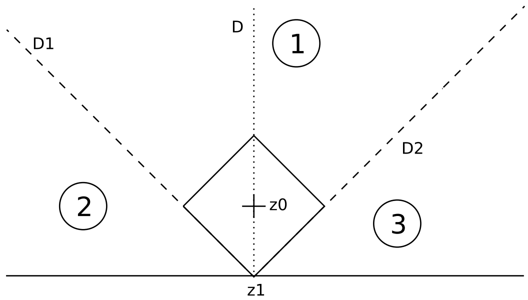


FIG. A.3. Découpage en 3 zones

d'une boule sont reliées aux centre de la boule par des arcs horizontaux ou verticaux.

Nous allons montrer que Γ est inclus dans $D_{-}^{\perp}$ en prouvant qu'il est impossible qu'un point de Γ soit dans l'une des 3 zones définies précédemment.

Supposons que $z_1 = (0,0)$. Considérons la zone 1, alors pour tous les points de la zone 1 sont inclus dans $\{(n,p), |n| < p\}$. Donc, d'après le lemme A.10, pour tous les points de la zone 1, il existe un arc 2-connexe le joignant à z_1 en passant par $z_1 + (0,1)$. Donc aucun point de Γ n'est situé dans la zone 1.

Considérons maintenant la zone 2, l'ensemble des points de la zone 2 est inclus dans $\{(n,p), -n \geq p \geq 0\}$. Donc, d'après le lemme A.10, pour tous les points de la zone 2, il existe un arc 2-connexe le joignant à z_1 et passant par $z_1 + (-1,1)$. Ce point ne peut être dans Γ car il est dans $C(z_0, m)$.

Concernant la zone 3, une preuve analogue à celle de la zone 2 permet de conclure.

Finalement, nous avons donc montrer que $\Gamma \subset D_{-}^{\perp}$ donc que D^{perp} sépare Γ et z_0. ■

Théorème A.16

Soit $\Gamma \subset \mathbb{Z}^2$ alors Γ est 2-connexe par arcs si et seulement si Γ est D_8-convexe.

Démonstration : D'après le théorème A.12, un D_8-convexe est 2-connexe par arcs.

Réciproquement, posons U l'ensemble des demi-plans qui contiennent Γ et $K = \bigcap_{P \in U} P$. Alors $\Gamma \subset K$. Supposons qu'il existe $z \in K$ tel que $z \notin \Gamma$ alors d'après A.14, il existe un D_8-hyperplan qui sépare z et Γ d'où $z \notin K$, contradiction.

Donc $\Gamma = \bigcap_{P \in U} P$. Donc Γ est un D_8-convexe. ■

3. Quelques propriétés de cette convexité

3.1. Intérieur et bord.

DÉFINITION A.17 (Intérieur d'un D_8-convexe). Soit C un D_8-convexe, nous appelons *intérieur* de C l''ensemble $\overset{\circ}{C} = \{z \in C, B(z,1) \subset C\}$

Remarque : L'intérieur d'un D_8-convexe peut être vide, c'est le cas d'une ligne horizontale. De plus, contrairement au cas réel, l'égalité des intérieurs n'implique pas l'égalité des convexes.

DÉFINITION A.18 (Bord d'un D_8-convexe). Soit C un D_8-convexe, nous appelons *bord* de C l'ensemble : $C \setminus \overset{\circ}{C}$

Proposition A.19

Soit C un D_8-convexe alors $\overset{\circ}{C}$ est un D_8-convexe

Démonstration : Soit z_1 et z_2 des éléments de $\overset{\circ}{C}$, soit $\alpha \in \mathcal{A}(z_1, z_2)$ et z un point de α. Comme C est 2-connexe, nous savons que $\alpha \subset C$. Soit $u \in \{(1,0), (-1,0), (0,1)(0,-1)\}$ nous allons montrer que $z+u$ est dans C.

$z_1 + u$ et $z_2 + u$ sont dans C car z_1 et z_2 sont dans $\overset{\circ}{C}$. Alors l'arc $\beta = \alpha + u$ joint $z_1 + u$ et $z_2 + u$ en passant par $z+u$ donc $z+u$ est dans C.

Donc $B(z,1)$ est dans C. Donc $\overset{\circ}{C}$ est un D_8-convexe. ■

Remarque : Une preuve n'utilisant pas la connexité est aussi possible, il faut d'abord remarquer que comme $C = \bigcap_{i=1}^{n} P_i$ où les P_i sont des demi-plans alors $z \in \overset{\circ}{C}$ est équivalent à $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $z \in \overset{\circ}{P}_i$. De plus, comme $P_i = d_i \sqcup \overset{\circ}{P}_i$ alors $\overset{\circ}{P}_i$ est aussi un D_8-demi-plan donc $\overset{\circ}{C}$ est aussi une intersection de demi-plan donc un convexe.

Proposition A.20

Soit C un D_8-convexe alors le bord de C est $\emptyset$ si et seulement si $C = \mathbb{Z}^2$ ou $C = \emptyset$.

Démonstration : Si $C = \mathbb{Z}^2$ alors comme $\forall z \in \mathbb{Z}^2$ $B(z,1) \subset \mathbb{Z}^2$, la frontière de $\mathbb{Z}^2$ est $\emptyset$.

Réciproquement, si C est un convexe non vide tel que $\forall z \in C$, $B(z,1) \subset C$. Soit $z_0 \in C$. Nous allons montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $B(z_0, n) \subset C$. Nous appelons P_n la propriété : $B(z_0, n) \subset C$.

- P_0 est vraie.
- Supposons que P_n est vraie. Alors $B(z_0, n) \subset C$. Donc nous avons $\forall z \in C(z_0, n)$, $\forall u \in T = \{(1,0), (-1,0)(0,1), (0,-1)\}$, $z + u \in C$ or en utilisant le lemme A.13, nous avons $C(z_0, n) + T = C(z_0, n+1)$ donc $B(z_0, n+1) \subset C$.
- Nous avons donc $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n vraie.

Donc, $C = \mathbb{Z}^2$. ■

Cette proposition nous permet de dire que tout D_8-convexe fini a un bord non vide.

3.2. Ensemble de points extrémal.

DÉFINITION A.21 (Ensemble de points générateur). Soit C un D_8-convexe alors nous dirons que $G \subset C$ est un ensemble de points générateur de C si $conv(G) = C$.

Remarque : Il existe des ensembles générateurs minimal mais non minimum. Par exemple avec les figures A.4 et A.5.

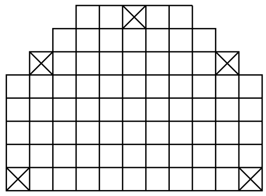


FIG. A.4. Un ensemble de 5 points générateur minimal

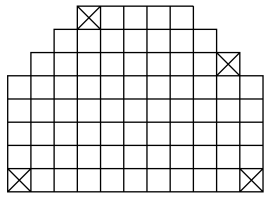


FIG. A.5. Un ensemble de 4 points générateur minimal

DÉFINITION A.22 (Ensemble de points extrémal). Soit C un D_8-convexe alors nous dirons que $E \subset F$ est un ensemble de points extrémal de C si E est un ensemble générateur de C de cardinal minimum. C'est à dire pour tout ensemble de points générateur G, nous avons $card(G) \geq card(E)$.

Remarque : Généralement, il n'y a pas unicité des ensembles de points extrémaux. Par exemple sur la figure A.6. Nous ne pouvons donc pas parler comme dans la convexité usuelle réelle de points extrémaux. Nous devons considérer un ensemble de point extrémal.

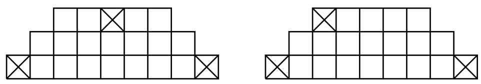


FIG. A.6. Deux ensembles de points extrémaux d'un même D_8-convexe

Dans ce qui suit, nous allons montrer que tout D_8-convexe fini admet un ensemble de points extrémal de cardinalité inférieure ou égale à 4. Pour ce faire, nous allons exhiber l'ensemble des D_8-convexes. Dans un premier temps, nous allons montrer que tout ensemble de points extrémal est sur le bord du convexe.

Lemme A.23

Soit C un D_8-convexe fini alors tout ensemble de point extrémal est sur le bord de C.

Démonstration : Soit $E = \{z_1, \ldots, z_p\}$ un ensemble de point extrémal de C. Nous posons $C' = conv(E \setminus \{z_1\})$ alors comme E est un ensemble point extrémal, nous avons $z_1 \notin C'$. Donc comme C est une intersection de demi-plan et que C est fini, il existe une D_8-droite d séparant C' et z_1. Donc il existe un demi-plan P' engendré par d qui contient C'. Considérons maintenant la droite d' parallèle à d passant par z_1. Alors l'un des demi-plan engendré par d contient P' donc contient C'. Il existe donc un demi-plan P contenant E et tel que z_1 soit sur le bord de P. Or comme C est l'intersection des demi-plans contenant E, z_1 ne peut pas appartenir à l'intérieur de C. ■

DÉFINITION A.24 (Traces et extrémités). Soit C un D_8-convexe fini, considérons le plus petit rectangle contenant C. Nous définissons H_1, H_2, V_1 et V_2 comme les droites d'appui suivantes de ce rectangle :

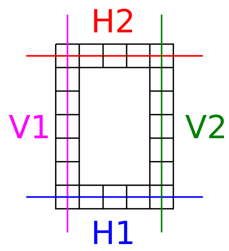


FIG. A.7. Droites d'appui d'un rectangle

Nous appelerons trace les ensembles suivants : $C_{V_i} = V_i \cap C$, $C_{H_i} = H_i \cap C$.

Par connexité, les traces sont des segments (éventuellement de longeur nulle mais non vide). Comme ce sont des segments, ils admettent des extrémités (dans le cas où le segment est de longueur nulle, nous considérerons que les extrémités sont confondues). Pour les traces horizontales, nous appelons l'extrémité gauche : h_{i1} et la droite h_{i2}. Pour les traces verticales, nous appelons l'extrémité la plus basse v_{i1} et l'extrémité la plus haute v_{i2}.

Lemme A.25

Soit C un D_8-convexe fini qui ne soit pas un bout de droite et $(i, j) \in \{1, 2\}^2$. Si $h_{ij} \neq v_{ji}$, h_{ij} et v_{ji} sont reliés par un arc de vecteur directeur $(1, 1)$ ou $(-1, 1)$.

Démonstration : Comme $h_{ij} \neq v_{ji}$ alors $(h_{ij}, v_{ji}) \notin H_i^2$ et $(h_{ij}, v_{ji}) \notin V_j^2$.

D'après le lemme A.10, si h_{ij} et v_{ji} ne sont pas sur la même D_8-droite alors h_{ij} n'est pas une extrémité de C_{H_i} ou v_{ji} n'est pas une extrémité de C_{V_j} (il suffit de considérer l'un des arcs extrémaux qui les relient). Donc h_{ij} et v_{ji} sont sur une même D_8-droite qui n'est pas horizontale ou verticale. Donc ces points sont sur une droite diagonale ou anti-diagonale. ■

Lemme A.26

Soit C et K des D_8-convexes finis tels que $C \subset K$ et $Fr(K) \subset Fr(C)$ alors $C = K$.

Démonstration : En effet, d'après la proposition A.23, si E est un ensemble de points extrémaux de K alors les points de E appartiennent à $Fr(K)$ donc ils appartiennent aussi à $Fr(C)$ donc $conv(E) \subset C$ donc $K \subset C$. ■

Théorème A.27

Soit C un D_8-convexe fini qui ne soit pas un segment alors l'ensemble contenant les extrémités des traces de C est un ensemble générateur. En d'autres terme :

$$conv(C_{V_1} \cup C_{V_2} \cup C_{H_1} \cup C_{H_2}) = C$$

.

Démonstration : D'après la proposition A.25, si $h_{ij} \neq v_{ji}$ alors alors h_{ij} et v_{ji} sont reliées par une droite de vecteur directeur $(1,1)$ ou $(-1,1)$. Nous appelerons cette droite D_{ij}. Nous allons d'abord montrer que C est inclus dans un demi-plan engendré par D_{ij}. Nous appelons R le plus petit rectanble contenant C.

Nous faisons la démonstration dans le cas où $i = 2$ et $j = 2$, nous pouvons alors donner l'illustration suivante :

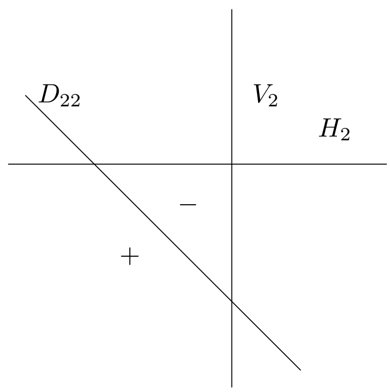


FIG. A.8. Zoom sur un coin

Soit z_1, un point appartenant à D_{22}^-. Alors z_1 appartient à $R \cap D_{22}^-$. Soit D_1 la droite de vecteur directeur $(-1,1)$ passant par z_1. Alors d'après le lemme A.10, $D_1 \cap R$ est inclus dans C. Donc $D_1 \cap R = D_{22} \cap R$, sinon h_{22} et v_{22} ne sont pas des points extrémaux des traces. Donc z_1 est sur D_{22}. Donc C est inclus dans un demi-plan engendré par D_{22}.

En faisant des démonstrations analogues, nous montrons qu'il existe des demi-plans engendrés par les D_{ij} qui contiennent C. Nous notons ces demi-plans D_{ij}^+.

Nous pouvons maintennant considérer $K = R \cap D_{11}^+ \cap D_{12}^+ \cap D_{21}^+ \cap D_{22}^+$. Nous avons $C \subset K$. De plus le bord de K est $\bigcup_{(i,j)\in\{1,2\}} [h_{i,j}, v_{j,i}] \cup [h_{1,1}, h_{1,2}] \cup [h_{2,1}, h_{2,2}] \cup [v_{1,1}, v_{1,2}] \cup [v_{2,1}, v_{2,2}]$. Or les h_{ij} et les v_{ij} sont des points de C et C est 2-connexe donc ces segments sont inclus dans C. Nous en déduisons que le bord de K est inclus dans la frontière de C. Donc d'après le lemme A.26, $C = K$.

En appliquant la proposition A.23, nous en déduisons que C est engendré par les extrémités des traces. ■

Corollaire A.28

Soit C un D_8-convexe alors $\bigcup_{(i,j)\in\{1,2\}} [h_{i,j}, v_{j,i}] \cup [h_{1,1}, h_{1,2}] \cup [h_{2,1}, h_{2,2}] \cup [v_{1,1}, v_{1,2}] \cup [v_{2,1}, v_{2,2}]$ *est le bord de C.*

Définition A.29 (Traces coins). Soit C un D_8-convexe fini qui ne soit pas un segment alors nous appelerons *traces coins* les segments suivants : $[h_{ij}, v_{ji}]$, $(i, j) \in \{1, 2\}$.

Définition A.30 (Forme d'un segment). Nous dirons que 2 D_8-segments ont la même *forme* si ils sont tous les deux de longueur non nulle et ont la même direction ; ou si ils sont de longueur nulle.

Définition A.31 (Forme d'un D_8-convexe). Nous dirons que 2 D_8-convexe ont même *forme* si leurs segments traces (rectangulaire et coins) ont même forme.

Exemple A.32. Tous les rectangles ont même forme.

Nous allons maintenant montrer que les formes des D_8-convexes qui ne sont pas des segments sont celles de la figure A.9. Ce théorème est un corollaire du théorème A.27.

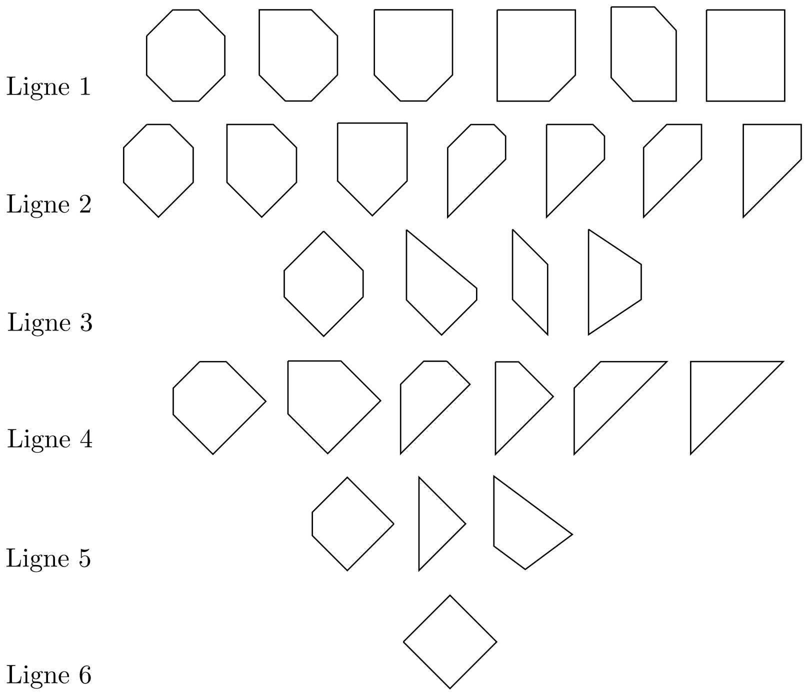


Fig. A.9. Formes des D_8-convexes non segments

Théorème A.33

Les formes D_8-convexes non segments sont celles la figure A.9.

Démonstration : D'après le théorème A.27, nous savons qu'un D_8-convexe est engendré par les extrémités des segments traces. Chaque H_i ou V_i ne

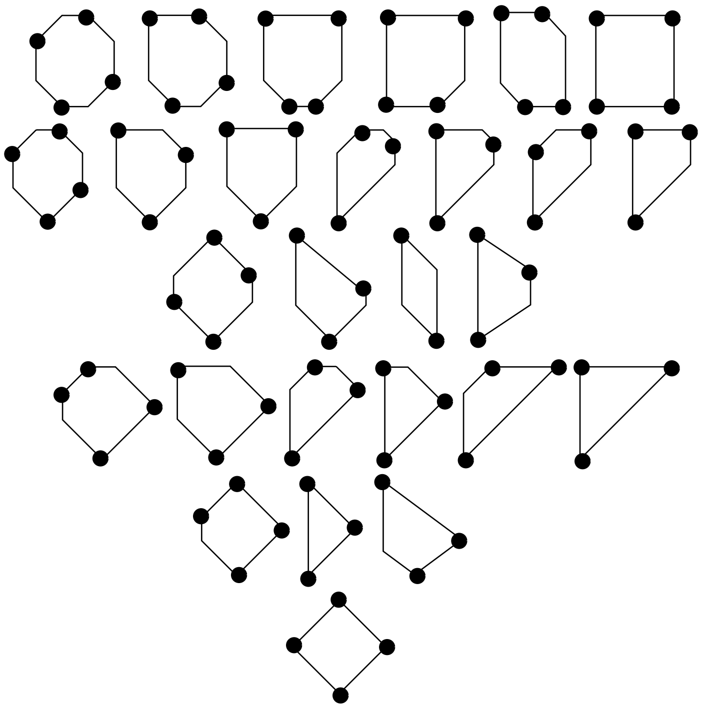


FIG. A.10. Ensembles générateurs

peut pas contenir plus de 2 extrémités et moins d'une seule extrémité. Nous dirons que *abcd* signifie : *a* extrémités sur V_1, *b* extrémités sur V_2, *c* extrémité sur H_2 et *d* extrémités sur H_2. Ceci nous donne donc, les cas suivants à traiter :

(1) 2222 : En considérant, le nombre de coins admis du rectangle présent sur le convexe nous obtenons les formes de la ligne 1 de la figure A.9.
(2) 2221 : Nous obtenons les formes de la ligne 2 de la ligne de la figure A.9.
(3) Les formes du type 2212, 2122 et 1222 sont identiques à celles de 2221 à rotation près.
(4) 2211 et 1122 : Nous obtenons les formes de la ligne 3.
(5) 2121 et 2112 : Nous obtenons les formes de la ligne 4.
(6) 2111 : Nous obtenons les formes de la ligne 5.
(7) 1111 : Nous obtenons les formes de la ligne 6. ■

Corollaire A.34

Tout ensemble extrémal d'un D_8-convexe fini est de cardinal inférieur à 4.

Démonstration : Il suffit de remarquer que les points rond noir de la figure A.10 page 374 engendrent $C_{V_1} \cup C_{V_2} \cup C_{H_1} \cup C_{H_2}$. ■

ANNEXE B

Chercher la frontière sur des convexes

1. Calcul d'une borne inférieure en fonction du nombre de frontières

DÉFINITION B.1 (Nombre de frontières passant par un convexe). Soit C un D_8-convexe fini, nous dirons que 2 droites D et D' sont C-equivalentes lorsque l'une des 2 conditions suivantes est réalisées :

$$(1)\ C \cap D^+ = C \cap D'^-$$

$$(2)\ C \cap D^+ = C \cap D'^-$$

Nous dirons que le nombre de frontière passant par C est le nombre de classe d'équivalence et nous appelerons frontière vide, la classe d'équivalence qui contient les droites D telles que $C \cap D^+ = C \cap D'^- = \emptyset$.

Remarque : Deux droites équivalentes ne sont pas forcément issues de la même droite :

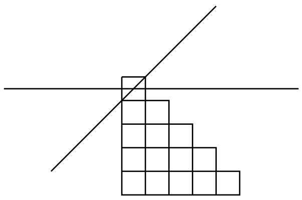


FIG. B.1. Exemple d'un convexe où 2 droites différentes engendrent la même frontière.

De plus, deux droites D et D' telles que $D \cap C = D' \cap C$ ne sont pas forcémment équivalente :

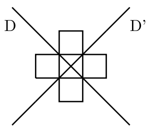


FIG. B.2. Deux droites qui intersectent un convexe en un même point mais qui ne sont pas équivalentes.

Lemme B.2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et F_n le nombre de frontières possibles après n coups alors :

(1) $F_1 \geq F_0 - 4$.

(2) Si $n > 1$, F suit le tableau B.1 page 377.

Démonstration : (1) Après un coup les seules frontières éliminées sont celles qui passent par la case jouée et comme en une case, il peut passer au plus 4 frontières, nous avons $F_1 \geq F_0 - 4$.

(2) Soit c un point de couleur indéterminée. Soit F^R_{n+1}, F^B_{n+1} et F^N_{n+1} le nombre de frontières possibles si c est de couleur B, R et N. Alors nous avons : $F_n = F^R_{n+1} + F^B_{n+1} + F^N_{n+1}$. En appliquant le principe de la cage au pigeon, nous obtenons le tableau précédent pour $F_n \leq 10$. Dans le cas où $F_n > 10$ alors, comme en un point il ne peut pas passer plus de 4 frontières, si le point c est de couleur N, alors $F_{n+1} \leq 4$.

F_n	F_{n+1}
4	≥ 2
5	≥ 2
6	≥ 2
7	≥ 3
8	≥ 3
9	≥ 3
10	≥ 4
> 10	$\geq \left\lceil \frac{F_n-4}{2} \right\rceil$

TAB. B.1. Nombre de frontières possibles après n coups

De plus, comme $F_{n+1}^R + F_{n+1}^B = F_n - F_{n+1}^N \geq F_n - 4$ alors $F_{n+1}^R \geq \left\lceil \frac{F_n-4}{2} \right\rceil$ ou $F_{n+1}^B \geq \left\lceil \frac{F_n-4}{2} \right\rceil$.
Et comme : si $F_n > 10$, $\left\lceil \frac{F_n-4}{2} \right\rceil \geq 4$, nous avons le résultat. ■

DÉFINITION B.3. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $(\varphi_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
- $\varphi_0(k) = k$,
- Si $\varphi_n(k) > 10$ alors $\varphi_{n+1}(k) = \left\lceil \frac{\varphi_n(k)-4}{2} \right\rceil$
- Sinon, $\varphi_n(k)$ suit le tableau B.2 page 377 :

$\varphi_n(k)$	$\varphi_{n+1}(k)$
2	1
3	1
4	2
5	2
6	2
7	3
8	3
9	3
10	4

TAB. B.2. Comportement pour les nombres ≤ 10

Lemme B.4

Soit k et k' des entiers alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $(k \leq k') \Rightarrow (\varphi_n(k) \leq \varphi_n(k'))$.

Démonstration : Vrai pour $n = 0$. De plus,
- Si $\varphi_n(k') \geq \varphi_n(k) > 10$ alors comme $\varphi_{n+1} = \left\lceil \frac{\varphi_n-4}{2} \right\rceil$, $\varphi_{n+1}(k') \geq \varphi_n(k)$.
- Si $\varphi_n(k') \geq 10 \geq \varphi_n(k)$, nous avons $\varphi_{n+1}(k') \geq \varphi_{n+1}(k)$. En effet, soit x un entier tel que $\varphi_n(x) \geq 10$ alors $\varphi_n(x) \geq 4$, car $\left\lceil \frac{11-4}{2} \right\rceil = 4$ et le point précédent nous dit que ceci est vrai pour tout entier supérieur à 11.
- Si $\varphi_n(k) \leq \varphi_n(k') \leq 10$ alors d’après le tableau B.2, nous avons $\varphi_{n+1}(k) \leq \varphi_{n+1}(k')$.

Par récurrence, nous avons donc que si $k \leq k'$, $\varphi_n(k) \leq \varphi_n(k')$ pour tout entier n. ■

Théorème B.5

Soit p un entier alors si $k \in \{2^p \times 13 - 3, \cdots, 2^{p+1} \times 13 - 4\}$ nous avons $\min\{n \in \mathbb{N}, \varphi_n(k) = 1\} = p + 3$.

Démonstration : D'après le lemme B.4, $\varphi_n(2^p \times 13 - 3) \leq \varphi_n(k) \leq \varphi_n\left(2^{p+1} \times 13 - 4\right)$ il nous suffit donc de montrer que :

(1) si $x_0 = 2^p \times 13 - 3$, $\min\{n \in \mathbb{N}, \varphi_n(x_0) = 1\} = p + 3$,
(2) si $x_1 = 2^p \times 13 - 4$, $\min\{n \in \mathbb{N}, \varphi_n(x_1) = 1\} = p + 2$.

Si $p = 0$ alors $2^p \times 13 - 3 = 10$ et $2^p \times 13 - 4 = 9$ et d'après le tableau B.2, $\min\{n \in \mathbb{N}, \varphi_n(10) = 1\} = 3$ et $\min\{n \in \mathbb{N}, \varphi_n(9) = 1\} = 2$

Si $p \geq 1$,

(1) nous avons $\varphi_1(x_0) = 2^{p-1} \times 13 - 3$. En effet, comme $p \geq 0$, $\varphi_0(x_0) \geq 10$ donc $\varphi_1(x_0) = \left\lceil \frac{2^p \times 13 - 3 - 4}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2^p \times 13 - 7}{2} \right\rceil = 2^{p-1} \times 13 - 3$.
Donc $\varphi_p(x_0) = 2^0 \times 13 - 3 = 10$ ce qui implique que $\min\{n \in \mathbb{N}, \varphi_n(2^p \times 13 - 3) = 1\} = p + 3$.
(2) nous avons $\varphi_1(x_1) = 2^{p-1} \times 13 - 4$. En effet, $\varphi_0(x_1) \geq 10$ donc $\varphi_1(x_1) = \left\lceil \frac{2^p \times 13 - 4 - 4}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2^p \times 13 - 8}{2} \right\rceil = 2^{p-1} \times 13 - 4$.
Donc $\varphi_p(x_0) = 2^0 \times 13 - 4 = 9$ ce qui implique que $\min\{n \in \mathbb{N}, \varphi_n(2^p \times 13 - 4) = 1\} = p + 2$. ■

Corollaire B.6

Soit $M(F_0) = \min(n \in \mathbb{N}, F_n = 1)$ *alors :*

(1) si $F_0 \geq 14$, $M(F_0) \geq \left\lfloor \log_2\left(\frac{F_0 - 1}{13}\right) \right\rfloor + 4$.
(2) si $F_0 \in \{8, 13\}$, $M(F_0) \geq 3$.
(3) si $F_0 \in \{6, 7\}$, $M(F_0) \geq 2$.

Démonstration : Cela se démontre en utilisant le lemme B.2 et en utilisant le théorème B.5. ■

Remarque : Dans certains cas, le nombre maximum de frontières pouvant passer par un point n'est pas 4, c'est par exemple le cas de la ligne où le nombre de frontières pouvant passer par un point est 2. Dans ce cas, cela va nous permettre d'améliorer la borne inférieure sur de tels convexes.

Il nous suffit donc de déterminer le nombre de frontières passant par un convexe pour en calculer une borne inférieure.

2. Calcul du nombre de frontières sur un convexe

Les résultats de la section précédente, nous permet de donner une borne inférieure en fonction du nombre de frontières pouvant passer par un convexe. Dans cette section, nous nous attacherons à compter le nombre de frontière passant par un convexe .

Nous rappelons que les ensembles de points extrémaux des D_8-convexe admettent au plus 4 points extrémaux qui peuvent se numéroter en partant du point le plus à gauche le plus en bas et en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre sur $\bigcup\limits_{(i,j)\in\{1,2\}} [h_{i,j}, v_{j,i}] \cup [h_{1,1}, h_{1,2}] \cup [h_{2,1}, h_{2,2}] \cup [v_{1,1}, v_{1,2}] \cup [v_{2,1}, v_{2,2}]$. Nous allons calculer le nombre de frontières passant un D_8 convexe en fonction du nombre de points extrémaux qu'il admet et de leurs positions.

Convexe avec 2 points extrémaux.

Théorème B.7 (*2 points extrémaux*)

Soit C un D_8-convexe fini qui admet 2 points extrém
si $z_2 - z_1 = (n, p)$, le nombre de frontières sur C est é

(1) si $0 < |n| < |p|$: $|n| + 3|p| + 3$,
(2) si $0 < |p| < |n|$: $|p| + 3|n| + 3$,
(3) si $0 < |n| = |p|$: $2|n| + 3$,
(4) si $n = 0$: $|p| + 3$,
(5) si $p = 0$: $|n| + 3$.

Démonstration : Comptons par type de frontières :

(1) Si $0 < |n| < |p|$
- Verticales : $n + 1$,
- Horizontales : $p + 1$,
- Diagonale $(1, 1)$: $p - n + 1$,
- Diagonale $(-1, 1)$: $n + p + 1$,
- vide : 1.
- Sans points : 0

De plus, l'intersection entre les frontières horizontales et diagonale $(-1, 1)$ est égale à 2. Il y a donc $n + 3p + 3$ frontières possibles.

(2) Si $0 < |p| < |n|$, identique en échangeant p et n

(3) Si $0 < |n| = |p|$, alors C est un segment diagonal.

(4) Si $n = 0$, alors C est un segment vertical.

(5) Si $p = 0$, alors C est un segment horizontal. ■

Convexe avec 3 ou 4 points extrémaux. Nous allons dans un premier temps compter le nombre de frontière d'un rectangle en fonction de ses dimensions :

Lemme B.8

Soit C un rectangle de de dimension $L \times l$ alors C admet $3l + 3L + 5$ frontières.

Démonstration : Supposons que l soit la longueur des côtés verticaux et L la longueur des côtés horizontaux. Alors, il y a $l + 1$ frontières horizontales, $L + 1$ frontières verticales, $l + L + 1$ frontières diagonales, $l + L + 1$ anti-diagonales et 1 frontière vide. Donc il y a $3l + 3L + 5$ frontières. ■

Pour compter le nombre de frontières sur un convexe ayant 3 ou 4 points extrémaux, nous allons considérer le plus petit rectangle le contenant. La technique s'illustre par le dessin ci-dessous :

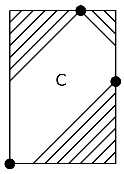


FIG. B.3

Nous allons compter le nombre de frontières qui sont sur le rectangle et pas sur C. Elles correspondent aux frontières des «coins». Comme il est facile de déterminer la taille du rectangle, une soustraction nous donnera alors le résultat.

Pour cela, nous allons utiliser le résultat concernant la numérotation des points extrémaux. Nous pouvons les numéroter de z_1, z_2, z_3, z_4 en partant du plus bas le plus à gauche et en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre sur la frontière de C. Nous posons $u_i = z_{i+1} - z_i = (n_i, p_i)$. Alors

– si $|n_i| < |p_i|$, nous devons enlever $|n_i|$ frontières,
– si $|p_i| < |n_i|$, nous devons enlever $|p_i|$ frontières,
– si $|n_i| = |p_i|$, nous devons enlever $|n_i|$ diagonales

Démonstration : Il suffit de remarquer que si $0 < n < p$:

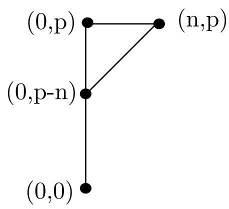


FIG. B.4

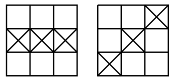
■

De plus, il nous faut étudier si toutes les droites restantes engendrent des frontières disjointes. Des droites ne peuvent engendrer la même frontière non vide que lorsque leurs frontières sont un même point. De plus, dire que 2 droites sont équivalentes est équivalent à dire que nous ne pouvons pas identifier ces droites lorsque nous connaissons la couleur des points du convexe.

Supposons que 2 droites aient la même frontière sur un convexe alors soit le convexe est celui de la figure B.2, soit le point frontière est un point du bord de C car sinon la frontière comporte plus d'un point.

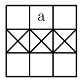
Dans le cas où le point frontière est le centre de la figure B.2 alors nous pouvons déterminer l'orientation de la frontière en fonction de la couleur des autres points.

Dans le cas où le point frontière est un point du bord, supposons que ce point n'est pas une extrémité d'une droite d'appui alors nous sommes dans l'un des 2 cas suivants où les croix représentes des points du bord du convexe et le point central le point frontière :



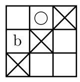
Dans les deux cas, si aucun des 6 points sans croix n'est un point de C, alors C est un segment de droite. Donc C n'a pas 3 ou 4 points extrémaux.

Dans le cas où une des cases blanches appartient à C alors si nous nous retrouvons dans ce cas là :



Alors nous pouvons déterminer grâce à a l'orientation de toute frontière passant par le point du milieu. Donc si un coin est un point de C, alors la connexité nous impose que la case a soit aussi dans C et dans ce cas elle détermine l'orientation de toute frontière passant par la case du milieu.

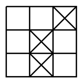
Reste à traiter le cas diagonal, si le point b devient un point de C, le point rond devient aussi un point de C :



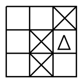
Dans ce cas, l'orientation de toutes les frontières peut être déterminée.

Nous en déduisons donc que si 2 droites admettent une frontière commune alors le point de la frontière est l'intersection de 2 droites d'appui.

Supposons que ce point soit tel qu'il existe un arc D_8-connexe permettant de passer de l'un des droites d'appui à l'autre. Alors nous sommes dans le cas suivant :

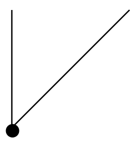


Cela implique que la case triangle est dans C :

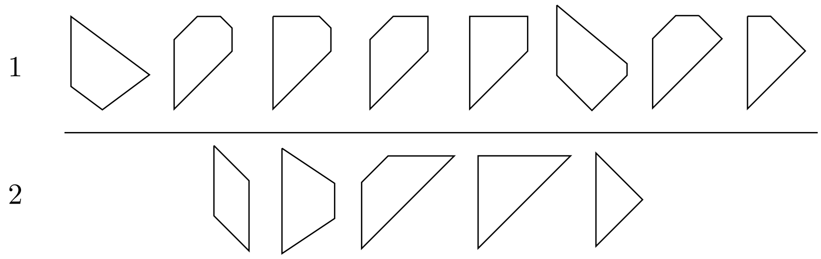


Il est alors possible de déterminer l'orientation de la frontière. Donc les extrémités de droites d'appui qui peuvent être point frontière commun à 2 droites ne peuvent être que les intersections de droites d'appui tels qu'il n'existe pas d'arc D_8-connexe permettant de passer de l'un à l'autre.

De plus, si les droites d'appui sont orthogonales, nous pouvons aussi montrer par une preuve analogue que nous pouvons déterminer l'orientation de la frontière. Donc les seuls intersections de droites d'appui tels qu'il n'existe pas d'arc D_8-connexe permettant de passer de l'un à l'autre sont les intersections de droites d'appui de ce type :



En étudiant la liste des convexes, nous pouvons en conclure que ce nombre est nul pour tout convexe ayant 4 points extrémaux. Sinon, nous avons la liste suivante pour les convexes avec 3 points extrémaux :



Nous pouvons alors remarquer qu'aucun de ces convexes n'admet plus de 2 intersections du type précédent.

Nous pouvons en déduire les théorèmes suivant :

Théorème B.9

*Soit C un D_8-convexe fini admettant un ensemble de point extrémal de taille 4 : z_1, z_2, z_3 et z_4 numérotés dans l'ordre. Nous posons $z_i = (x_i, y_i)$ et $u_i = z_{i+1} - z_i = (n_i, p_i)$ alors le nombre de frontières passant par C est **égal** à :*

$$3(\max_{1\leq i\leq 4}(x_i) - \min_{1\leq i\leq 4}(x_i)) + 3(\max_{1\leq i\leq 4}(y_i) - \min_{1\leq i\leq 4}(y_i)) + 5 - \sum_{i=1}^{4} \min(|n_i|, |p_i|)$$

Théorème B.10

*Soit C un D_8-convexe fini admettant un ensemble de point extrémal de taille 3 : z_1, z_2, z_3 numérotés dans l'ordre. Nous posons $z_i = (x_i, y_i)$ et $u_i = z_{i+1} - z_i = (n_i, p_i)$ alors le nombre de frontières passant par C est **supérieur** à :*

$$3(\max_{1\leq i\leq 3}(x_i) - \min_{1\leq i\leq 3}(x_i)) + 3(\max_{1\leq i\leq 3}(y_i) - \min_{1\leq i\leq 3}(y_i)) + 3 - \sum_{i=1}^{3} \min(|n_i|, |p_i|)$$

3. Deux points extrémaux

Cas des segments de droites. Sur un segment horizontal, vertical ou diagonal, le nombre de frontières pouvant passer par un point est égal à 2 : tout le segment est la frontière ou seulement une case est la frontière.

Si notre première interrogation nous renvoit la couleur N alors nous trouvons la frontière en 2 coups. Si notre premier coup nous renvoit une couleur R ou B alors nous pouvons éliminer le cas « tout le segment est la frontière ».

Ceci nous permet de trouver une borne inférieure plus fine que celle donnée dans le cas général. Pour cela, nous allons étudier cette suite :

Définition B.11. Soit $(s_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
– $k \in \mathbb{N}$,
– $s_0(k) = k$,
– $s_{n+1}(k) = \left\lceil \frac{s_n(k)-1}{2} \right\rceil$.

Comme pour le cas général, cette suite va nous permettre de trouver une borne inférieure concernant le nombre d'interrogations nécessaire pour trouver la frontière sur un segment horizontal ou vertical.

Lemme B.12

Soit p un entier alors si $k \in \{2^p, \ldots, 2^{p+1} - 1\}$, nous avons $\min(n \in \mathbb{N} | s_n(k) = 1) = p$.

Démonstration : Comme $s_{n+1}(k) = \left\lceil \frac{s_n(k)-1}{2} \right\rceil$, par récurrence nous avons que si $k \leq k'$ alors $s_n(k) \leq s_n(k')$ pour tout n.

Il nous suffit donc de montrer que pour un p quelconque :

– si $x_0 = 2^p$, $\min\{n \in \mathbb{N}, s_n(x_0) = 1\} = p$

– si $x_1 = 2^p - 1$, $\min\{n \in \mathbb{N}, s_n(x_1) = 1\} = p - 1$

Comme nous avons que $s_n(x_0) = 2^{p-n}$ si $n \leq p$ nous pouvons en conclure que le premier terme de la suite égal à 1 est au rang p.

De plus, comme nous avons que $s_n(x_1) = 2^{p-n} - 1$ si $n \leq p$, le premier terme de la suite égal à 1 est $p - 1$. ■

Théorème B.13

Pour un segment horizonal, vertical ou diagonal de longueur l, il faut au moins :

$$\lfloor \log_2(l+1) \rfloor + 1$$

interrogations pour trouver la frontière.

Démonstration : En effet, sur un segment de longueur l, il y a $l+3$ frontières distinctes et le premier coup élimine 2 frontières. ■

3.0.1. *Un algorithme.*

Définition B.14 (Sous-segment). Soit S un D_8-segment, nous dirons que S' est un sous-segment de S lorsque :

– S' est un D_8-segment,
– $S' \subset S$.

Définition B.15. Nous dirons que S un D_8-segment est de :

– type 1, noté T_1, lorsque nous ne connaissons que la couleur d'une extrémité de S.
– type 2, noté T_2, lorsque les 2 extrémités de S sont de couleur différentes et non N.

Nous dirons que de tels segments sont irréductibles s'ils ne contiennent pas de sous-segment strict de même type.

Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme B.16

Soit S un D_8-segment dont on sait que la frontière n'est pas le segment alors la frontière se trouve sur un sous segment S' de S de type T_1 ou T_2 irréductible.

L'idée de l'algorithme est d'effectuer une dichotomie sur la longueur, le problème est que cette dichotomie sur la longueur n'effectue pas une dichotomie sur le nombre de frontière. C'est en particulier le cas sur cet exemple :

B				

En effet, en jouant sur la case situé à distance 2 de la première case, nous n'effectuons pas une dichotomie sur le nombre de frontière, pour cela il faut jouer sur la case située à distance 3. Il faurdra donc prendre en compte ceci en utilisant 2 sortes de dichotomie. Les 2 types de dichotomies que nous effecturons dépendront de la nature du segment :

Définition B.17 (Dichotomies). Soit a et b les extrémités d'un D_8-segment S, nous posons $\epsilon_x = sgn(b-a)_x$ et $\epsilon_y = sgn(b-a)_y$. Nous définissons les 2 types de dichotomies suivantes :

– Si S est T_1 :
$$a + \left(\epsilon_x \left(\left\lfloor \frac{|(b-a))_x|}{2} \right\rfloor + 1\right), \epsilon_y \left(\left\lfloor \frac{|(b-a)_x|}{2} \right\rfloor + 1\right)\right)$$
Nous appelerons cette dichotomie $D_1(S)$ ou $D_1(a, b)$.

– Si S est T_2 :
$$a + \left(\epsilon_x \left\lfloor \frac{|(b-a)_x|}{2} \right\rfloor, \epsilon_y \left\lfloor \frac{|(b-a)_y|}{2} \right\rfloor\right)$$
Nous appelerons cette dichotomie $D_2(S)$ ou $D_2(a, b)$.

Ceci va nous permettre de définir l'algorithme de recherche sur des segments. Cet algorithme va commencer par interroger une des extrémités du segment ce qui nous permettra après chaque interrogations de toujours nous ramener à la recherche d'une frontière sur un segment de longueur inférieure de type 1 ou 2.

Définition B.18 (Algorithme de recherche sur des segments). Soit z_0 et z_1 les extrémités d'un D_8-segment S, nous appelons $\mathcal{A}_S$ l'algorithme 1 page 405.

Exemple B.19. Nous allons voir un exemple du fonctionnement de $\mathcal{A}_S$ sur un segment de longueur 9.

Horizontal et Vertical. Nous allons maintenant montrer l'optimalité de $\mathcal{A}_S$ pour les segments horizontaux et verticaux.

Lemme B.20

Soit S un D_8-segment horizontal ou vertical de longueur l, alors :
- *Si S est T_1 irréductible alors le nombre de frontière pouvant passer par S est $l+1$.*
- *Si S est T_2 irréductible alors le nombre de frontière pouvant passer par S est $l-1$.*

Les lemmes suivants sont des corollaires du lemme B.20 :

R									

Fig. B.5. 1$^{\text{er}}$ coup.

R					R				

Fig. B.6. 2$^{\text{e}}$ coup. D_0

R					R			B	

Fig. B.7. 3$^{\text{e}}$ coup. D_0

R					R		B	B	

Fig. B.8. 4$^{\text{e}}$ coup. D_1

Lemme B.21

Soit S un segment T_1 irréductible de longueur l horizontal ou vertical. Après avoir interrogé $D_1(S)$, il nous reste au plus $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil$ frontières possibles.

Démonstration : Nous notons a et b les extrémités du segment et nous pouvons supposer que a est de couleur R. D'après le lemme B.20, il y a $l-1$ frontières sur S avant l'interrogation de $D_1(S)$. Distinguons les différentes possibilités pour la couleur de $D_1(S)$:

- N : La frontière est $D_1(S)$.
- R : Par connexité, tous les points du segment $[a, D_1(S)]$ sont R. Donc ceci élimine $d(D_1(S), a) = \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor + 1$ frontières. Or il y avait sans connaître la couleur de $D_1(S)$, $l+1$ frontières possibles, il reste donc au plus $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil$ frontières possibles.
- B : Par convexité, tous les points du segment $[D_1(S), b]$ sont B. Cela élimine donc $d(D_1(S), b)$ frontières non vide plus la frontière vide. Nous en déduisons donc qu'il reste au plus $\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor$ frontières possibles. ■

Lemme B.22

Soit S un segment T_2 irréductible de longueur l horizontal ou vertical. Après avoir interrogé $D_2(S)$, il nous reste au plus $\left\lceil \frac{l-2}{2} \right\rceil$ frontières possibles.

Démonstration : Nous notons a et b les extrémités du segment et nous pouvons supposer que a est de couleur R. Distinguons les différentes possibilités pour la couleur de $D_2(S)$:

- N : La frontière est $D_2(S)$,
- R : Par connexité, tous les points du segment $[a, D_2(S)]$ sont R. Cela élimine donc $d(a, D_2(S)) = \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor$ frontières possibles. Il reste donc au plus $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil - 1 = \left\lceil \frac{l-2}{2} \right\rceil$.
- B : Par connexité, tous les points du segment $[D_2(S), b]$ sont de couleur B.Ceci élimine donc $d(D_2(S), b) = \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil$ frontières possibles. Il reste donc au plus $\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1$ frontières. ■

Théorème B.23

Au pire $\mathcal{A}_S(z_1, z_2)$ trouve la frontière sur le segment horizontal ou vertical $[z_1, z_2]$ en :

$$\lfloor \log_2 (d(z_2 - z_1) + 1) \rfloor + 1$$

Cet algorithme est optimal.

Démonstration : On note $l = d(z_1, z_2)$. D'après les lemmes B.21 et B.22, nous avons pour $n \geq 1$: $A_{n+1} \leq \left\lceil \frac{A_n - 1}{2} \right\rceil$ où A_n représente le nombre de frontières restantes après n coups de l'algorithme donc pour $n \geq 0$, $A_{n+1} \leq s_n(l+1)$ pour tout n. De plus, d'après le théorème B.13, il est impossible de trouver un algorithme permettant de déterminer la frontière en moins de $\lfloor \log_2 (l+1) \rfloor + 1$ interrogations donc cet algorithme trouve la frontière sur un segment en un maximum de $\lfloor \log_2 (l+1) \rfloor + 1$ coups. Il est donc optimal. ∎

Diagonal. Pour les segments diagonals, les lemmes B.21et B.22 ne sont plus vrais car il n'est pas possible de trouver un algorithme qui à chaque coup effectue une dichotomie « parfaite » sur le nombre de frontières. En effet, dans le cas suivant (figure B.9) :

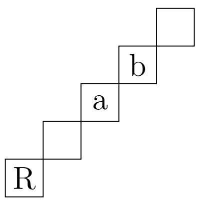


FIG. B.9. Impossibilité d'une dichotomie « parfaite »

L'une des extrémités est de couleur R, il reste 9 frontières. En jouant sur la case a :

– si a est de couleur R : il reste 5 frontières possibles,
– si a est de couleur B : il reste 3 frontières possibles.

En jouant sur b, nous obtenons le même résultat. Donc il est impossible d'effectuer une dichotomie « parfaite » dans ce cas là. Nous pouvons donc nous demander si l'algorithme est optimal ou non. Nous allons montrer son optimalité en remarquant qu'il effectue une dichotomie sur le nombre de points inconnus.

Nous allons maintenant donner les analogues des lemmes B.20, B.21 et B.20.

Lemme B.24

Soit S un D_8-segment de longueur l diagonal alors :

– *Si S est T_1 irréductible : le nombre de points dont on ne connaît pas la couleur est $\frac{l}{2}$.*
– *Si S est T_2 irréductible : le nombre de points dont on ne connaît pas la couleur est $\frac{l}{2} - 1$.*

Lemme B.25

Soit S un D_8-segment de longueur l diagonal T_1 irréductible. Après avoir interrogé $D_1(S)$, il nous reste au plus $\left\lceil \frac{\frac{l}{2}-1}{2} \right\rceil$ points inconnus.

Démonstration : Nous notons a et b les extrémités du segment et nous pouvons supposer que a est de couleur R. Distinguons les différentes possibilités pour la couleur de $D_1(S)$:

- N : La frontière est $D_1(S)$.
- R : Par connexité, tous les points du segment $[a, D_1(S)]$ sont R. Donc ceci nous permet de connaître la couleur de $\frac{d(D_1(S),a)}{2} = \left\lfloor \frac{l}{4} \right\rfloor + 1$ points . Or il y avait au départ, $\frac{l}{2}$ points inconnus, il reste donc au plus $\left\lceil \frac{l}{4} \right\rceil - 1$ points inconnus.
- B : Par convexité, tous les points du segment $[D_1(S), b]$ sont B. Cela nous permet donc de connaître la couleur de $\frac{d(D_1(S),b)}{2} = \left\lceil \frac{l}{4} \right\rceil$ points supplémentaires. Nous en déduisons donc qu'il reste au plus $\left\lfloor \frac{l}{4} \right\rfloor$ points possibles.

Or si n entier, nous avons $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$. D'où le résultat. ■

Lemme B.26

Soit S un D_8-segment de longueur l diagonal T_2 irréductible. Après avoir interrogé $D_2(S)$, il nous reste au plus $\left\lceil \frac{\frac{l}{2}-2}{2} \right\rceil$ points inconnus.

Démonstration : Preuve analogue à celle du lemme B.25 ■

Des lemmes B.25 et B.26, nous pouvons en déduire que si I est le nombre de points inconnus sur un segment S diagonal T_i alors après avoir interrogé le point $D_i(S)$, le nombre de points inconnus est inférieur à $\left\lceil \frac{I-1}{2} \right\rceil$. Ce qui nous donne le lemme suivant :

Lemme B.27

Soit z_2 et z_1 des points d'un segment diagonal situé à distance l. On pose I_n le nombre de points inconnus après n interrogations de $\mathcal{A}_S(z_1, z_2)$ alors $I_0 = \frac{l}{2} + 1$, $I_1 = \frac{l}{2}$ et $\forall n > 1,\ I_{n+1} \leq \left\lceil \frac{I_n - 1}{2} \right\rceil$.

Théorème B.28

Sur un segment diagonal d'extrémité z_1 et z_2, $\mathcal{A}_S$ trouve la frontière en un maximum de $\lfloor \log_2 (d(z_2, z_1) + 1) \rfloor + 1$ coups. Cet algorithme est optimal.

Démonstration : Soit $l = d(z_1, z_2)$. D'après le lemme B.27, nous avons pour $n > 1$, $I_{n+1} \leq \left\lceil \frac{I_n - 1}{2} \right\rceil$ et $I_1 = \frac{l}{2}$. Donc pour tout $n \geq 0$, $0 \leq I_{n+1} \leq s_n\left(\frac{l}{2}\right)$. En appliquant le lemme B.12, si $n = \left\lfloor \log_2\left(\frac{l}{2}\right) \right\rfloor + 2$ alors $I_n = 0$.

De plus, nous pouvons poser $l = 2k$ car nous travaillons sur un segment diagonal. Nous allons montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lfloor \log_2(k) \rfloor + 2 = \lfloor \log_2(2k+1) \rfloor + 1$.

Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que $k \in \{2^p, \cdots, 2^{p+1} - 1\}$ alors $2k + 1 \in \{2^{p+1} + 1, \cdots, 2^{p+2} - 1\}$. D'où l'égalité.

Comme d'après le théorème B.13, l'algorithme de peut pas finir en moins de $\lfloor \log_2 (l+1) \rfloor + 1$ et qu'il finit en au plus $\lfloor \log_2 (l+1) \rfloor + 1$ alors nous pouvons en conclure que cet algorithme finit en un maximum de $\lfloor \log_2 (l+1) \rfloor + 1$ interrogations et qu'il est optimal ■

Cas général. Dans le cas général, les convexes engendrés par 2 points sont de la forme suivante :

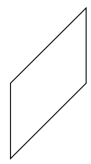


FIG. B.10. Convexe engendré par 2 points.

Comme dans les cas précédents, nous allons faire une dichotomie sur la distance entre les points extrémaux. Cette dichotomie va se faire sur l'un des arcs extrémal joignant les points extrémaux. En effet, toute frontière séparant le convexe sépare l'arc extrémal en 2 régions de couleurs différentes. De plus, si l'arc extrémal est d'une même couleur alors les points extrémaux sont de la même couleur donc le convexe n'est composé que d'une seule couleur.

Dans un premier temps, nous allons voir un algorithme pour trouver la frontière sur un arc extrémal.

Arc extrémal. Nous allons dans un premier temps définir l'analogue des segments T_1 et T_2 pour des arcs extrémaux.

DÉFINITION B.29 (Sous-arc). Soit α un arc extrémal, nous dirons que α' est un sous arc extrémal de α lorsque :
- α' est un arc extrémal,
- $\alpha' \subset \alpha$.

DÉFINITION B.30. Soit α un arc extrémal alors nous dirons que :
- α est T_1, lorsque nous ne connaissons que la couleur d'une extrémité de a.
- α est T_2, lorsque les 2 extrémités de S sont de couleurs différentes et non N.

Nous dirons qu'un arc extrémal est irréductible, s'il ne contient pas de sous-arc strict de même type.

Nous définissons maintenant, des dichotomies pour des arcs extrémaux composés d'un segment vertical. Pour les arcs extrémaux composés d'un segment horizontal, il nous suffira de faire une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

DÉFINITION B.31 (Dichotomies). Soit a et b les extrémités d'un arc extrémal α telles que a **soit l'extrémité située sur le segment vertical de l'arc**. Nous posons $b-a=(n,p)$, nous posons $\epsilon_x = sgn(n)$ et $\epsilon_y = sgn(p)$. Nous définissons les 2 types de dichotomies suivantes :

(1) Si α est T_1 et a l'extrémité dont la couleur est connue :

– Si $|n| = |p|$ ou $n = 0$:

$$D_1(a,b) = a + \left(\epsilon_x \left(\left\lfloor \frac{|n|}{2} \right\rfloor + 1\right), \epsilon_y \left(\left\lfloor \frac{|n|}{2} \right\rfloor + 1\right)\right)$$

– Si $|p| - |n| \geq \left\lfloor \frac{|n|+|p|}{2} \right\rfloor$:

$$D_1(a,b) = a + \left(0, \epsilon_y \left(\left\lfloor \frac{|n| + |p|}{2} \right\rfloor + 1\right)\right)$$

– Sinon :

$$D_1(a,b) = a + f(a,b) + (1,1)$$

où

$$f(a,b)_x = \epsilon_x \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{|n|+|p|}{2} \right\rfloor - (|p| - |n|)}{2} \right\rfloor$$

.

$$f(a,b)_y = \epsilon_y \left(|p| - |n| + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{|n|+|p|}{2} \right\rfloor - (|p| - |n|)}{2} \right\rfloor \right)$$

(2) Si α est T_2 :

– Si $|n| = |p|$ ou $n = 0$ ou $p = 0$:

$$D_2(a,b) = a + \left(\epsilon_x \left(\left\lfloor \frac{|n|}{2} \right\rfloor\right), \epsilon_y \left(\left\lfloor \frac{|n|}{2} \right\rfloor\right)\right)$$

– Si $|p| - |n| \geq \lfloor \frac{|n|+|p|}{2} \rfloor$:

$$D_2(a,b) = a + \left(0, \epsilon_y \left(\left\lfloor \frac{|n| + |p|}{2} \right\rfloor\right)\right)$$

– Sinon :

$$D_2(a,b) = a + f(a,b)$$

Nous dirons qu'un arc extrémal est strict s'il n'est pas un segment.

Définition B.32 (Algorithme pour jouer sur un arc extrémal strict.). Soit α un arc extrémal, nous appelons $\mathcal{A}_{arcext}$ l'algorithme 2 page 406. z_I est le point d'intersection du segment vertical et du segment diagonal, si ce point n'existe pas z_I est un point intérieur du segment.

Remarque : Cet algorithme appliquer à des segments est identique à $\mathcal{A}_S$

Exemple B.33. Nous allons voir un exemple du fonctionnement de cet algorithme :

Nous allons maintenant étudier l'optimalité de $\mathcal{A}_{arcext}$. Premièrement, essayons de trouver une borne inférieure :

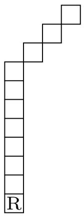


FIG. B.11. 1er coup.

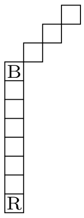


FIG. B.12. 2e coup.

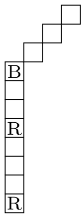


FIG. B.13. 3e coup.

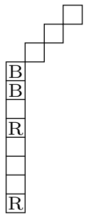


FIG. B.14. 4e coup.

Lemme B.34

Soit z_1 et z_2 des points de $\mathbb{Z}^2$ tels que $z_2 - z_1 = (n, p)$ alors sur un arc extrémal joignant z_1 et z_2, il y a : $|p| + |n| + 4$ frontières.

Démonstration : Si $|n| < |p|$, comptons le nombre de frontières différentes :

- Horizontales : $p + 1$
- Verticales dont la frontière est disjointe de horizontale : 1
- Diagonale disjointe de horizontale : 1
- Anti-diagonale disjointe de horizontale : n
- Vide : 1

Le cas $|p| < |n|$ se traite de manière analogue. ■

REMARQUES B.35. Nous allons d'abord effectuer les observations suivantes :

(1) Un arc extrêmal est composé d'un segment horizontal ou vertical avec un segment diagonal ou anti-diagonal. Le nombre de frontières pouvant passer par le point d'intersection z_I de ces segments est égal à 3. Le nombre de frontières pouvant passer par tous les autres points de l'arc est 2.

(2) Si nous interrogeons un point de l'arc qui n'est pas z_I alors le nombre de frontières pouvant passer par z_I est inférieur ou égal à 2.

(3) Dès qu'un point d'un segment est de couleur différente de noir alors le nombre de frontières pouvant passer par les autres points du segment est inférieur ou égal à 1 sauf pour z_I où ce nombre est inférieur ou égal à 2.

(4) Si nous commençons par interroger z_I alors il y a 2 zones possibles concernant l'endroit où se trouve la frontière. Il faut alors au moins 1 coup pour identifier dans quelle zone se trouve la frontière.

(5) Dans le cas où la frontière est un point du segment diagonal, nous sommes obligés d'interroger un point du segment diagonal.

Soit z_1 et z_2 des points de $\mathbb{Z}^2$ qui ne sont pas sur la même droite. Soit F_0 le nombre de frontières sur un arc extrémal joignant z_1 à z_2. Dans un premier temps, nous allons traiter le cas où le premier point interrogé est z_I.

Si z_I est de couleur N alors il reste 3 frontières possibles : segment diagonal, segment vertical ou z_I.

Si z_I n'est pas de couleur N alors il reste : $F_0 - 3$ frontières possibles. D'après les remarques précédentes, si un point inconnu est de couleur noir alors il n'y a qu'une frontière possible. Il nous faut donc, d'après le lemme B.12, au moins $\lfloor \log_2 (F_0 - 3) \rfloor$ interrogations pour trouver la frontière une fois que nous avons joué sur z_I.

Etudions maintenant le cas où la première case interrogée n'est pas z_I. En utilisant les remarques précédentes, cela nous amène à étudier la famille de suites suivantes :

Définition B.36. Soit k et f des entiers, nous définissons la suite $(\alpha_{k,n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ par :

- $\alpha_{k,0}(f) = f$,
- $\forall n \in \mathbb{N}^\star \setminus \{k\}$ $\alpha_{k,n}(q) = \left\lceil \frac{\alpha_{k,n-1}(f)-1}{2} \right\rceil$,
- $\alpha_{k,k}(f) = \left\lceil \frac{\alpha_{k,k-1}(f)-2}{2} \right\rceil$

$\alpha_{k,k}(f)$ modélise le moment où pour la première fois l'algorithme interroge une case du segment diagonal. Donc nous devons avoir $k \leq \log_2(f)$. Nous obtenons le lemme suivant :

Lemme B.37

Lorsque $k \leq \log_2(f)$, *nous trouvons* $\min(n \in \mathbb{N}, \alpha_{k,n}(f) = 1) = \left\lfloor \log_2 \left(f - 2^{k-1}\right) \right\rfloor$.

Démonstration : Si $f \in \{2^p + 2^{k-1}, \cdots, 2^{p+1} + 2^{k-1} - 1\}$ alors nous avons : $2^{p-k} \leq \alpha_{k,k}(f) \leq 2^{p-k+1} - 1$. ∎

De ce lemme, nous pouvons en déduire que :

$$\min\left(\left\lfloor \log_2 \left(f - 2^{k-1}\right)\right\rfloor, k \in \{1, \cdots, \lfloor \log_2(f) \rfloor\}\right) = \left\lfloor \log_2 \left(f - 2^{\lfloor \log_2(f) \rfloor - 1}\right)\right\rfloor = \lfloor \log_2(f) - 1 \rfloor$$

.

Nous obtenons donc :

- Si nous jouons le premier coup sur z_I alors il faut au minimum $1 + \lfloor \log_2(F_0 - 3) \rfloor$ interrogation pour trouver la frontière.
- Sinon, il faut : $\lfloor \log_2(F_0 - 2) \rfloor$ interrogations.

Or nous avons $1 + \lfloor \log_2(F_0 - 3) \rfloor \geq \lfloor \log_2(F_0 - 2) \rfloor$.

Ceci plus le lemme B.34, nous donne alors le théorème suivant :

Théorème B.38

Soit z_1 et z_2 des points de $\mathbb{Z}^2$ qui ne sont pas sur une même droite tels que $z_2 - z_1 = (n, p)$ alors pour trouver la frontière sur un des arcs extrémaux joignant z_1 à z_2, il faut au moins $\lfloor \log_2(d(z_1, z_2) + 2) \rfloor = \lfloor \log_2(|n| + |p| + 2) \rfloor$ *interrogations.*

Il nous reste maintenant à évaluer le nombre d'interrogations (au pire) qu'il faut à notre algorithme pour trouver la frontière.

Définition B.39. Soit k un entier et $(a_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite a valeur dans $\mathbb{N}$ défnie par :

– $a_0(k) = k$,
– $\forall n \in \mathbb{N}$, lorsque $a_n \geq 4$, $a_{n+1}(k) = \left\lfloor \frac{a_n(k)-1}{2} \right\rfloor + 1$,
– si $a_n(k) \leq 3$ alors $a_{n+1}(k) = 1$.

Lemme B.40

Soit α un arc extrémal de longeur l. Alors :
– *Si α est T_1 irréductible, il y a au plus $l+2$ frontières possibles.*
– *Si α est T_2 irréductible, il y a $l-1$ frontières possibles.*

Démonstration : Nous allons différencier les possibilités pour α :

(1) Si l'arc extrémal est horizontal ou vertical alors ce résultat correspond au lemme B.20.
(2) Si l'arc extrémal est diagonal. S'il est de nature T_1, alors il y a $l+1$ frontières possibles et s'il est de nature T_2, il y a $l-1$ frontières possibles.
(3) Si l'arc extrémal n'est pas un D_8-segment, d'après le lemme B.34, nous avons sur un arc extrémal vierge, $l+4$ frontières possibles. Donc sur un arc extrémal T_1, nous devons enlever la fronière segment vertical ou segment diagonal et la frontière passant uniquement par une extrémité.
Sur un arc extrémal T_2, nous devons enlever la frontière segment vertical et la frontière segment horizontal, la frontière vide et les frontières passant uniquement par les extrémités. ∎

Lemme B.41

Soit F_n le nombre de frontières possibles après n interrogations de $\mathcal{A}_{arcext}$ alors $F_{n+1} \leq a_n(F_0 - 2)$.

Démonstration : L'algorithme commence par interroger une extrémité de l'arc, il peut passer 2 frontières par ce point. Donc après la première interrogation, il reste $F_0 - 2$ frontières.

Ensuite, il nous suffit de montrer que pour un arc T_1 ou T_2, contenant f frontières alors après avoir appliqué D_1 ou D_2, il reste au plus $\left\lceil \frac{f-1}{2} \right\rceil + 1$ frontières.

(1) Si α est T_1 irréductible et a de couleur R :
– Si $|n| = |p|$ ou $n = 0$, l'algorithme interroge le point :

$$D_1(a,b) = a + \left(\epsilon_x\left(\left\lfloor \frac{|p|}{2} \right\rfloor + 1\right), \epsilon_y\left(\left\lfloor \frac{|p|}{2} \right\rfloor + 1\right)\right)$$

a) Si $n = 0$, il y a $l+1$ frontières possible sur α. Donc nous devons montrer que le nombre de frontière restant après avoir interrogé $D_1(a,b)$ est $\leq \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + 1$
De plus, il nous reste au plus $\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor$ frontières possibles et $\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor \leq \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{f-1}{2} \right\rceil + 1$.
b) Si $|n| = |p|$. Il y a $l + 1 = 2|p| + 1$ frontières possibles sur α. Donc nous devons montrer que le nombre de frontière restant est $\leq |p| + 1$.

Si ce point est R alors la frontière se trouve sur un arc T_1 irréductible de longeur $2\left(\left\lceil\frac{|p|}{2}\right\rceil - 1\right)$. Donc d'après le lemme B.40, il nous reste au plus $2\left\lceil\frac{|p|}{2}\right\rceil$ frontières possibles. Or $\left\lceil\frac{2|p|-1}{2}\right\rceil + 1 = |p| + 1$ car $|p|$ entier et $2\left\lceil\frac{|p|}{2}\right\rceil \leq |p| + 1$.

c) Si $|n| = |p|$. Si ce point est B alors la frontière se trouve sur un arc T_2 irréductible de longeur $2\left\lfloor\frac{|p|}{2}\right\rfloor + 2$, il nous reste donc, d'après le lemme B.40, $2\left\lfloor\frac{|p|}{2}\right\rfloor + 1$ frontières possibles. Or $2\left\lfloor\frac{|p|}{2}\right\rfloor + 1 \leq |p| + 1$.

d) Si $|n| = |p|$. Si ce point est N alors la frontière est ce point.

– Si $|p| - |n| \geq \left\lfloor\frac{|n|+|p|}{2}\right\rfloor$, l'algorithme interroge le point :

$$D_1(a,b) = a + \left(0, \epsilon_y\left(\left\lfloor\frac{|n|+|p|}{2}\right\rfloor + 1\right)\right)$$

Le nombre de frontière sur α est $l + 2$ d'après le lemme B.40. Donc nous devons montrer que le nombre de frontières restant est $\leq \left\lceil\frac{l-1}{2}\right\rceil + 1$.

a) Si $D_1(a,b)$ est R alors la frontière se trouve sur un arc T_1 irréductible de longueur $\left\lceil\frac{|n|+|p|}{2}\right\rceil - 1$. D'après le lemme B.40, il reste donc au plus $\left\lceil\frac{|n|+|p|}{2}\right\rceil + 1 = \left\lceil\frac{f-2}{2}\right\rceil + 1$ frontières possibles.

b) Si $D_1(a,b)$ est B alors la frontière se trouve sur un arc T_2 irréductible de longueur $\left\lfloor\frac{|n|+|p|}{2}\right\rfloor + 1$. D'après le lemme B.40, il reste donc $\left\lfloor\frac{|n|+|p|}{2}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{f-2}{2}\right\rfloor$ frontières possibles.

c) Si $D_1(a,b)$ est N alors si $D_1(a,b)$ est différent de z_I point d'intersection du segment diagonal et vertical alors la frontière est $D_1(a,b)$. Si $D_1(a,b)$ est z_I alors il nous faut interroger un autre point du segment diagonal pour conclure. Il nous reste donc au plus 2 frontières possibles. Or si $z_I = a + \left(0, \epsilon_y\left(\left\lfloor\frac{|n|+|p|}{2}\right\rfloor + 1\right)\right)$,le plus petit arc extrémal qui vérifie cette propriété est l'arc extrémal joignant $(0,0)$ à $(1,2)$ sur lequel peuvent passer 5 frontières si il est T_1.

– Sinon, l'algorithme interroge le point :

$$D_1(a,b) = a + f(a,b) + (1,1)$$

où

$$f(a,b)_x = \epsilon_x\left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{|n|+|p|}{2}\right\rfloor - (|p| - |n|)}{2}\right\rfloor$$

.

$$f(a,b)_y = \epsilon_y\left(|p| - |n| + \left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{|n|+|p|}{2}\right\rfloor - (|p| - |n|)}{2}\right\rfloor\right)$$

Le nombre de frontière sur α est $l+2$ d'après le lemme B.40. Donc nous devons montrer que le nombre de frontières restant est $\leq \lceil \frac{l-1}{2} \rceil + 1$.

a) Si $D_1(a,b)$ est R alors la frontière se trouve sur un arc T_1 irréductible de longueur $l' = l - \left(|p| - |n| + 2 \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{|n|+|p|}{2} \right\rfloor - (|p|-|n|)}{2} \right\rfloor + 2 \right)$.
Or si n est entier, nous avons $2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n$ ou $n-1$ suivant la parité de n. Nous avons donc $l' \leq \left\lceil \frac{|n|+|p|}{2} \right\rceil - 1$. Si $l' = \left\lceil \frac{|n|+|p|}{2} \right\rceil - 1$ alors d'après le lemme B.40, il reste au plus $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + 1$ frontières possible, ce qui est inférieur à $\left\lceil \frac{l+1}{2} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{f-1}{2} \right\rceil + 1$.

b) Si $D_1(a,b)$ est B alors la frontière se trouve sur un arc T_2 irréductible de longueur $l' = |p| - |n| + 2 \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{|n|+|p|}{2} \right\rfloor - (|p|-|n|)}{2} \right\rfloor + 2$.
Nous avons donc $l' \leq \left\lfloor \frac{|n|+|p|}{2} \right\rfloor + 2$. Donc, d'après le lemme B.40, il reste au plus $\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor + 1$ frontières possibles.

c) Si $D_1(a,b)$ est N alors il reste 2 frontières possibles. Or α est au moins de taille 3 donc s'il est T_1, il contient 5 frontières.

(2) Le cas où α est T_2 se traite de manière analogue.
– Si $|n| = |p|$ ou $n = 0$, l'algorithme interroge le point :

$$D_2(a,b) = a + \left(\epsilon_x \left(\left\lfloor \frac{|p|}{2} \right\rfloor \right), \epsilon_y \left(\left\lfloor \frac{|p|}{2} \right\rfloor \right) \right)$$

Si $n = 0$ alors le nombre de frontière restante est inférieur à $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil$.
Sinon, ce point sépare α en 2 arcs T_2 de longueur $l' = 2\left\lfloor \frac{|p|}{2} \right\rfloor$ et $l'' = 2\left\lceil \frac{|p|}{2} \right\rceil$. Il nous suffit de considérer l''. Sur l'arc T_2 de longueur l'', il reste $2\left\lceil \frac{|p|}{2} \right\rceil - 1$ frontières possibles. Or $2\left\lceil \frac{|p|}{2} \right\rceil - 1 \leq |p|$ et $|p| = \left\lceil \frac{2|p|-1}{2} \right\rceil$ car $|p|$ entier.

– Si $|p| - |n| \geq \lfloor \frac{|n|+|p|}{2} \rfloor$, l'algorithme interroge le point :

$$D_2(a,b) = a + \left(0, \epsilon_y \left(\left\lfloor \frac{|n|+|p|}{2} \right\rfloor \right) \right)$$

Le nombre de frontière sur α est $l-1$, nous devons donc montrer que le nombre de frontière restant sera $\leq \left\lceil \frac{l-2}{2} \right\rceil + 1$.
Ce point sépare α en 2 arcs T_2 de longueur $l' = \left\lceil \frac{|n|+|p|}{2} \right\rceil$ et $l'' = \left\lfloor \frac{|n|+|p|}{2} \right\rfloor$. Donc le nombre de frontières restantes est inférieur à $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil - 1$ or sur α, il y avait $l-1$ frontières et $\left\lceil \frac{l-2}{2} \right\rceil + 1 \geq \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil - 1$.

– Sinon :

$$D_2(a,b) = a + f(a,b)$$

Le nombre de frontière sur α est $l-1$, nous devons donc montrer que le nombre de frontière restant sera $\leq \left\lceil \frac{l-2}{2} \right\rceil + 1$.
Ce point sépare α en 2 arcs T_2 de longueur $l' = |p| - |n| + 2 \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{|n|+|p|}{2} \right\rfloor - (|p|-|n|)}{2} \right\rfloor$ et $l'' = l - l'$. Or $l' = \left\lfloor \frac{|n|+|p|}{2} \right\rfloor$ ou $l' = \left\lfloor \frac{|n|+|p|}{2} \right\rfloor - 1$ donc $l'' \leq$

$\left\lceil \frac{|n|+|p|}{2} \right\rceil + 1$. Donc le nombre de frontières restant est $\leq \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{l-2}{2} \right\rceil + 1$.

■

Lemme B.42

Soit $p > 0$ un entier et $k \in \{2^p + 2^{p-1} + 1, \cdots, 2^{p+1} + 2^p\}$. Alors :

$$\min\left(n \in \mathbb{N}, a_n(k) = 1\right) = p + 1$$

Démonstration : Si $k = 2^{p+1} + 2^p$ alors $\forall n \leq p\ a_n(k) = 2^{p+1-k} + 2^{p-k}$ d'où $a_p(k) = 3$ donc $\min\left(n \in \mathbb{N}, a_n(k) = 1\right) = p + 1$.

De plus, si $k = 2^p + 2^{p-1} + 1$ alors $\forall n \leq p - 1$, $a_n(k) = 2^{p-k} + 2^{p-k-1} + 1$ d'où $a_{p-1}(k) = 4$ donc $a_p(k) = 2$ donc $\min\left(n \in \mathbb{N}, a_n(k) = 1\right) = p + 1$.

Enfin, si $k \in \{2^p + 2^{p-1} + 1, \cdots, 2^{p+1} + 2^p\}$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n\left(2^p + 2^{p-1} + 1\right) \leq a_n(k) \leq a_n\left(2^{p+1} + 2^p\right)$ d'où le résulat. ■

Nous déduisons des lemmes précédents le théorème suivant :

Théorème B.43

Soit z_1 et z_2 des points de $\mathbb{Z}^2$ qui ne sont pas sur une même droite et tels que $z_2 - z_1 = (n, p)$ L'algorithme $\mathcal{A}_{arcext}$ appliqué à un arc extrémal joignant z_1 à z_2 trouve la frontière en moins de $1 + \left\lceil \log_2\left(\frac{|n|+|p|+2}{3}\right) \right\rceil$ interrogations.

Corollaire B.44

Soit z_1 et z_2 des points de $\mathbb{Z}^2$ qui ne sont pas sur une même droite. Nous avons l'encadrement suivant sur le nombre d'interrogations $I\left(Arcext(z_1, z_2)\right)$ qu'il faut pour trouver la frontière sur un arc extrémal joignant z_1 et z_2 :

$$\lfloor \log_2\left(d(z_1, z_2) + 2\right) \rfloor \leq I\left(Arcext(z_1, z_2)\right) \leq 1 + \left\lceil \log_2\left(\frac{d(z_1, z_2) + 2}{3}\right) \right\rceil$$

De plus, $1 + \left\lceil \log_2\left(\frac{d(z_1,z_2)+2}{3}\right) \right\rceil - \lfloor \log_2\left(d(z_1, z_2) + 2\right) \rfloor \leq 1$

Démonstration : En effet, nous avons : $\left\lceil \log_2\left(\frac{X+2}{3}\right) \right\rceil = \lceil \log_2(X + 2) - \log_2(3) \rceil$ et $\log_2(3) > 1$. Donc $\left\lceil \log_2\left(\frac{X+2}{3}\right) \right\rceil \leq \lceil \log_2(X + 2) \rceil - 1 \leq \lfloor \log_2(X + 2) \rfloor$ ■

Convexe à 2 points extrémaux. Nous allons maintenant nous interressé aux convexes possédant 2 points extrémaux. Le théorème suivant nous donne une borne inférieure :

Théorème B.45

Soit z_1 et z_2 des points de $\mathbb{Z}^2$ qui ne sont pas sur une même droite. Soit $(n,p) = z_2 - z_1$ alors :
- *Si $|p| > |n|$ et $|p| + |3n| + 3 \geq 14$: $M\left(conv\left(z_1, z_2\right)\right) \geq 4 + \left\lfloor \log_2 \left(\frac{|p|+3|n|+2}{13}\right)\right\rfloor$*
- *Si $|n| < |p|$ et $|n| + 3|p| + 3 \geq 14$: $M\left(conv\left(z_1, z_2\right)\right) \geq 4 + \left\lfloor \log_2 \left(\frac{3|p|+|n|+2}{13}\right)\right\rfloor$*

Démonstration : Corollaire B.6 et théorème B.7. ■

Remarque : Ici, nous ne pouvons pas améliorer la borne inférieure comme dans le cas des segments lignes ou diagonales car en certains points du convexe passe 4 frontières différentes.

Nous allons maintenant voir sur un exemple de comment en connaissant la frontière sur un arc extrémal, nous pouvons en une interrogation trouver la frontière sur le convexe.

Une première remarque que nous pouvons faire est que si z_1 et z_2 sont des points extrémaux du convexe alors :
- Si le convexe est de même couleur alors tout arc joignant z_1 à z_2 est de cette couleur.
- Si le convexe est composé de 2 couleurs différentes alors comme z_1 et z_2 sont les points extrémaux du convexe, il sont aussi de couleur différente. Donc tout arc joignant z_1 à z_2 est aussi composé de 2 couleurs.

Réciproquement, si l'arc extrémal joignant z_1 à z_2 est de même couleur alors le convexe est tout entier de cette couleur. Sinon, le convexe est composé d'au moins 2 couleurs.

Ceci nous donne le théorème de correspondance suivant :

Théorème B.46 (*Théorème de correspondance*)

Nous définissons sur l'arc extrémal (si ils existent) les points suivants : $i_0 = \min(i, \alpha_i$ est de couleur différente de $z_1)$ et $i_1 = \max(i, \alpha_i$ est de la même couleur que $z_1)$.

(1) Frontière vide sur l'arc extrémal ⇔ Frontière vide sur le convexe,

(2) Frontière segment issue de la droite d sur l'arc extrémal ⇔ Frontière segment issue de la droite d sur le convexe,

(3) Frontière point z sur l'arc extrémal ⇔ Frontière issue d'une droite passant par le point z sur le convexe,

(4) Frontière sans point milieu de $[a, b]$ sur l'arc extrémal ⇔ Frontière issue d'une droite de vecteur directeur $(a-b)^{\perp}$ passant par le point du convexe 4-adjacent à a et b.

Seul le cas (3) ne permet pas de déterminer la frontière sur le convexe. Il nous reste donc à voir comment traiter ce cas. Nous sommes dans l'un des cas suivants :

a) Le point frontière n'est pas un point extrémal et est sur un segment horizontal ou vertical (voir figure B.15 page 397). Il peut alors passer 3 frontières par ce point (voir figure B.16 page 397).

Si le segment où se trouve le point est horizontal, nous interrogeons le point de C verticalement adjacent au point noir.

Si le segment est vertical, nous interrogeons le point de C horizontalement adjacent.

Nous pouvons alors conclure en fonction de la couleur de ce point. (Voir figure B.17 page 397)

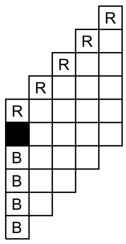


FIG. B.15. Frontière point sur un segment vertical

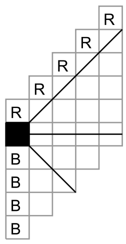


FIG. B.16. Frontières possibles

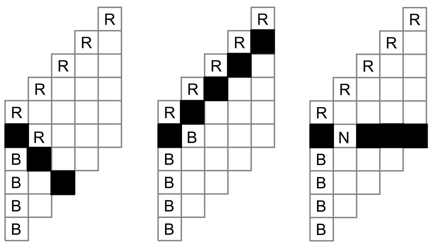


FIG. B.17. Frontières en fonction de la couleur du point horizontalement adjacent

b) Le point frontière n'est pas une extrémité et est sur un segment diagonal ou anti-diagonal(voir figure B.18 page 398). Alors il peut passer 3 frontières par ce point (voir figure B.19 page 398). Dans ce cas, nous interrogeons le point de C diagonalement adjacent au point frontière. Nous pouvons alors conclure en fonction de la couleur de ce point (voir figure B.20 page 398)

c) Si le point frontière est le point extrémal situé sur le segment horizontal ou vertical d'un arc extrémal. Alors il y a 2 frontières possibles passant par ce point. En interrogeant le point de C diagonalement adjacent à ce point alors nous pouvons conclure.

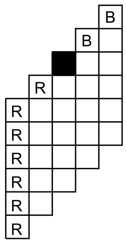


FIG. B.18. Trace point sur un segment diagonal

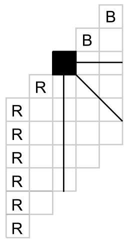


FIG. B.19. Frontières possibles

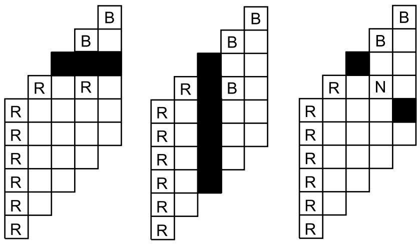


FIG. B.20. Frontières en fonction de la couleur du point diagonalement adjacent

d) Si le point frontière est le point extrémal situé sur le segment diagonal ou antidiagonal. Il nous suffit d'interroger le point de C horizontalement ou verticalement adjacent à ce point.

Ce qui précède nous permet de trouver la frontière sur un convexe engendré par 2 points en utilisant $\mathcal{A}_{Arcext}$.

DÉFINITION B.47. Soit z_1 et z_2 des points de $\mathbb{Z}^2$. Nous appelons a_1 et a_2 les arcs extrémaux.

Soit $\mathcal{A}_{2pts}$ l'algorithme 3 page 407.

En utilisant le théorème B.43, nous optenons alors :

Théorème B.48

Soit z_1 et z_2 des points de $\mathbb{Z}^2$ qui ne sont pas sur la même droite alors $\mathcal{A}_{2pts}$ trouve la frontière sur $conv(z_1, z_2)$ en au pire : $2+\left\lceil \log_2\left(\frac{d(z_1,z_2)+2}{3}\right)\right\rceil$ interrogations.

Corollaire B.49

Soit z_1 et z_2 des points de $\mathbb{Z}^2$ qui ne sont pas sur la même droite et tels que $z_2 - z_1 = (n, p)$ alors nous avons l'encadrement suivant sur le nombre d'interrogation $I(conv(z_1, z_2))$ qu'il faut pour trouver la frontière sur $conv(z_1, z_2)$:

– *Si* $|p| > |n|$:

$$4 + \left\lfloor \log_2 \left(\frac{|p| + 3|n| + 2}{13} \right) \right\rfloor \leq I(conv(z_1, z_2)) \leq 2 + \left\lceil \log_2 \left(\frac{|n| + |p| + 2}{3} \right) \right\rceil$$

De plus,

$$\left\lceil \log_2 \left(\frac{|n| + |p| + 2}{3} \right) \right\rceil - \left\lfloor \log_2 \left(\frac{|p| + 3|n| + 2}{13} \right) \right\rfloor - 2 \leq 2$$

– *Si* $|n| > |p|$:

$$4 + \left\lfloor \log_2 \left(\frac{|n| + 3|p| + 2}{13} \right) \right\rfloor \leq I(conv(z_1, z_2)) \leq 2 + \left\lceil \log_2 \left(\frac{|n| + |p| + 2}{3} \right) \right\rceil$$

De plus,

$$\left\lceil \log_2 \left(\frac{|n| + |p| + 2}{3} \right) \right\rceil - \left\lfloor \log_2 \left(\frac{3|p| + |n| + 2}{13} \right) \right\rfloor - 2 \leq 2$$

Démonstration : Pour les encadrements du nombre d'interrogations, il nous suffit d'appliquer B.45 avec le théorème précédent.

Pour la différence entre le majorant et le minorant : il nous suffit de montrer que

$$A = \left\lceil \log_2 \left(\frac{x + y + 2}{3} \right) \right\rceil - \left\lfloor \log_2 \left(\frac{x + 3y + 2}{13} \right) \right\rfloor \leq 4$$

Nous avons $\lceil \log_2 \left(\frac{x+y+2}{3} \right) \rceil \leq \log_2 \left(\frac{x+y+2}{3} \right) + 1$ et $\lfloor \log_2 \left(\frac{x+3y+2}{13} \right) \rfloor \geq \log_2 \left(\frac{x+3y+2}{13} \right) - 1$.

Donc $A \leq \log_2 \left(\frac{x+y+2}{3} \right) - \log_2 \left(\frac{x+3y+2}{13} \right) + 2 = \log_2 \left(\frac{13x+13y+26}{3x+9y+6} \right) + 2$.

Or $\frac{13x+13y+26}{3x+9y+6} < 8$ d'où $\log_2 \left(\frac{13x+13y+26}{3x+9y+6} \right) < 5$. Donc $A < 5$ or A est entier donc $A \leq 4$. ■

Remarque : Nous ne pouvons pas faire mieux que 2 comme différence car pour $p = 50000$ et $n = 1000$, la différence entre le majorant et le minorant est égale à 2.

4. Trois points extrémaux

Recherche d'une borne inférieure. Le théorème B.10 couplé avec le corollaire B.6 nous permet d'obtenir la borne inférieure suivante :

Théorème B.50

Soit C un D_8-convexe fini admettant un ensemble de point extrémal de taille 3 : z_1, z_2, z_3 numérotés dans l'ordre. Nous posons $z_i = (x_i, y_i)$ et $u_i = z_{i+1} - z_i = (n_i, p_i)$ alors nous avons :

$$I(conv(z_1, z_2, z_3)) \geq \left\lfloor \log_2 \left(\frac{3 \max\limits_{1 \leq i \leq 3} (|n_i|) + 3 \max\limits_{1 \leq i \leq 3} (|p_i|) + 2 - \sum\limits_{i=1}^{3} \min(|n_i|, |p_i|)}{13} \right) \right\rfloor + 4$$

Un algorithme et une borne supérieure. L'algorithme que nous allons utiliser interroge 2 points extrémaux puis en fonction du résultat effectue une dichotomie sur un arc extrémal.

Nous allons d'abord définir un nouvel algorithme : $\mathcal{A}_{arcext'}$. Cet algorithme nous permettra de jouer sur des arcs extrémaux dont on connaît la couleur des extrémités. Il sera utilisé lorsque les couleurs des 2 points extrémaux interrogés au début seront de couleurs différentes.

DÉFINITION B.51. Nous appelons $\mathcal{A}_{arcext'}$ l'algorithme 4 page 407.

Proposition B.52

$\mathcal{A}_{arcext'}$ trouve sur un segment horizontal ou vertical dont de longeur est l et dont on connaît la couleur des extrémités la frontière en (au pire) $\lfloor \log_2(l-1) \rfloor$ interrogations

$\mathcal{A}_{arcext'}$ trouve sur un segment diagonal ou anti-diagonal de longeur l et dont on connaît la couleur des extrémités la frontière en $\left\lfloor \log_2(\frac{l}{2}-1) \right\rfloor + 1$

Démonstration : Pour les segments horizontaux ou verticaux, il suffit d'utiliser les lemmes B.22 et B.12. Pour les segments diagonaux, il suffit d'utiliser les lemmes B.26 et B.12. ■

Lemme B.53

Soit α un arc extrémal alors : sSoit F_n le nombre de frontières possibles après n interrogations de $\mathcal{A}_{arcext'}$ sur α alors $F_{n+1} \leq a_n\,(F_0 - 5)$.

Démonstration : Identique à celle du lemme B.41 ■

Proposition B.54

L'algorithme $\mathcal{A}_{arcext'}$ trouve la frontière sur un arc extrémal strict de longueur l dont on connait les couleurs des extrémités en moins de $\left\lceil \log_2\left(\frac{l-1}{3}\right) \right\rceil$

Nous pouvons maintenant définir $\mathcal{A}_{2pts'}$ comme l'algorithme analogue à $\mathcal{A}_{2pts}$ mais utilisant $\mathcal{A}_{Arcext'}$ à la place de $\mathcal{A}_{Arcext}$

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème B.55

Soit z_1 et z_2 des points de $\mathbb{Z}^2$ qui sont de couleurs différentes non N alors $\mathcal{A}_{2pts'}$ trouve la frontière sur $conv(z_1, z_2)$ en moins de $1 + \lfloor \log_2(d(z_1, z_2) - 1) \rfloor$ interrogations.

Démonstration : Nous avons $1 + \lfloor \log_2(\frac{l}{2} - 1) \rfloor = 1 + \lfloor \log_2(l-2) - 1 \rfloor = \lfloor \log_2(l-2) \rfloor \leq \lfloor \log_2(l-1) \rfloor$. De plus, $\left\lceil \log_2\left(\frac{l-1}{3}\right) \right\rceil = \lceil \log_2(l-1) - \log_2(3) \rceil \leq \lceil \log_2(l-1) \rceil - 1 \leq \lfloor \log_2(l-1) \rfloor$. ■

Nous définissons aussi l'algorithme $\mathcal{A}^{-}_{arcext}$ qui permet de jouer sur un arc extrémal dont seule la couleur d'une extrémité est connue. Mais avant, nous pouvons remarquer que dans le cas où l'arc est un arc extrémal strict, l'extrémité connue se trouve sur un arc extrémal.

DÉFINITION B.56. Nous appelons l'algorithme permettant de jouer sur un arc extrémal dont on connaît la couleur d'une extrémité $\mathcal{A}^{-}_{arcext}$, c'est l'algorithme 5 page 408.

Nous pouvons maintenant définir l'algorithme $\mathcal{A}^{-}_{2pts}$ comme l'algorithme analogue à $\mathcal{A}_{2pts}$ mais utilisant $\mathcal{A}^{-}_{Arcext}$ à la place de $\mathcal{A}_{Arcext}$.

Théorème B.57

Soit α un arc extrémal de longueur l dont la couleur d'une extrémité est connue alors $\mathcal{A}^{-}_{2pts}$ trouve la frontière en moins de :
- *Si α est un segment : $1 + \lfloor \log_2(l+1) \rfloor$ interrogations.*
- *Sinon, $1 + \left\lceil \log_2 \left(\frac{l+2}{3}\right) \right\rceil$ interrogations.*

Donc pour un arc extrémal de longueur l, $\mathcal{A}^{-}_{2pts}$ trouve la frontière en moins de $1 + \lfloor \log_2(l+1) \rfloor$ interrogations.

Démonstration : Il suffit de remarquer que $\mathcal{A}^{-}_{Arcext}$ fait les même interrogations que $\mathcal{A}_{Arcext}$ sans faire le premier coup.

De plus, nous avons $\left\lceil \log_2 \left(\frac{l+2}{3}\right) \right\rceil \leq \lfloor \log_2(l+1) \rfloor$. En effet, $\lfloor \log_2(l+1) \rfloor = p \Leftrightarrow l \in \{2^p - 1, \ldots, 2^{p+1} - 2\}$. Or si $l = 2^{p+1} - 2$ alors $\left\lceil \log_2 \left(\frac{l+2}{3}\right) \right\rceil = p$ d'où le résultat car les fonctions sont croissantes en fonctions de l. ■

L'algorithme que nous allons utiliser pour trouver la frontière va utiliser $\mathcal{A}_{2pts}$, $\mathcal{A}_{2pts'}$, $\mathcal{A}^{-}_{2pts}$. L'idée de l'algorithme est d'interroger des points extrémaux puis (si nous en avons besoin) de faire une dichotomie sur un arc extrémal joignant 2 points extrémaux. Nous allons donc interroger les points extrémaux de façon à éviter de faire la dichotomie sur l'arc extrémal le plus long.

DÉFINITION B.58 (Algorithme de recherche sur un convexe comportant 3 points extrémaux). Soit z_1, z_2 et z_3 un ensemble de points extrémaux numérotés dans le bon ordre. Nous appelons l_i la distance entre z_{i+1} et z_i. Soit l_g la plus grande distance, l_p la plus petite et l_m la moyenne. Nous appelons par $\mathcal{A}_{3pts}$ l'algorithme 6 page 409.

Nous allons maintenant évaluer le nombre d'interrogation dont cet algorithme a besoin. Cet algorithme nécessite 2 interrogations sur l_m puis $\max\{\lfloor \log_2(l_p+1) \rfloor + 1, 1 + \lfloor \log_2(l_m - 1) \rfloor\}$

Donc nous avons le théorème suivant :

Théorème B.59

L'algorithme trouve la frontière en moins de $3 + \lfloor \log_2(l_m+1) \rfloor$ interrogations.

Comparaison de la borne inférieure avec la borne supérieure. Pour effectuer la comparaison avec la borne inférieure, nous allons essayer de la minorer en faisant apparaître la longueur l_m.

La borne inférieure est donnée par le théorème B.50 :

Soit C un D_8-convexe fini admettant un ensemble de point extrémal de taille 3 : z_1, z_2, z_3 numérotés dans l'ordre. Nous posons $z_i = (x_i, y_i)$ et $u_i = z_{i+1} - z_i = (n_i, p_i)$ alors nous avons :

$$I(conv(z_1,z_2,z_3)) \geq \left\lfloor \log_2 \left(\frac{3 \max\limits_{1\leq i\leq 3}(|n_i|) + 3 \max\limits_{1\leq i\leq 3}(|p_i|) + 2 - \sum\limits_{i=1}^{3} \min(|n_i|,|p_i|)}{13} \right) \right\rfloor + 4$$

Nous allons minorer cette borne inférieure en faisant apparaître l_m.

Nous avons $3 \max\limits_{1\leq i\leq 3}(|n_i|) + 3 \max\limits_{1\leq i\leq 3}(|p_i|) \geq 3l_g$ et $\sum\limits_{i=1}^{3} \min(|n_i|,|p_i|) = (l_p + l_m + l_g) - \sum\limits_{i=1}^{3} \max(|n_i|,|p_i|) \leq \dfrac{l_p + l_m + l_g}{2} \leq \frac{3}{2} l_g$.

Donc $I(conv(z_1,z_2,z_3)) \geq \left\lfloor \log_2 \left(\frac{\frac{3}{2}l_g + 2}{13} \right) \right\rfloor + 4 \geq \left\lfloor \log_2 \left(\dfrac{3l_m + 4}{26} \right) \right\rfloor + 4$.

Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème B.60

Soit z_1, z_2, z_3 des points de $\mathbb{Z}^2$ indépendants et soit l_p, l_m, l_g les distances entre ces points tels que $l_p \leq l_m \leq l_g$ alors nous avons :

$$\left\lfloor \log_2 \left(\frac{3l_m + 4}{26} \right) \right\rfloor + 4 \leq I(conv(z_1,z_2,z_3)) \leq 3 + \lfloor \log_2(l_m + 1) \rfloor$$

De plus, nous avons : $3 + \lfloor \log_2(l_m+1) \rfloor - (\left\lfloor \log_2 \left(\frac{3l_m+4}{26} \right) \right\rfloor + 4) \leq 3$.

Démonstration : Il reste à montrer que $\lfloor \log_2(l_m+1) \rfloor \leq \left\lfloor \log_2 \left(\frac{3l_m+4}{26} \right) \right\rfloor + 4$ or $\left\lfloor \log_2 \left(\frac{3l_m+4}{26} \right) \right\rfloor + 4 = \lfloor \log_2(3l_m+4) + 4 - \log_2(26) \rfloor = \lfloor \log_2(l_m + \frac{4}{3}) + 4 + \log_2(3) - \log_2(26) \rfloor$ or $4 + \log_2(3) - \log_2(26) \geq 0$ d'où l'inégalité. ■

5. Quatre points extrémaux

Recherche d'une borne inférieure. Du théorème B.9 et du corollaire B.6, nous déduisons le théorème suivant :

Théorème B.61

Soit C un D_8-convexe fini admettant un ensemble de point extrémal de taille 4 : z_1, z_2, z_3 et z_4 numérotés dans l'ordre. Nous posons $z_i = (x_i, y_i)$ et $u_i = z_{i+1} - z_i = (n_i, p_i)$ alors nous avons :

$$I(conv(C)) \geq \left\lfloor \log_2 \left(\frac{3(\max\limits_{1\leq i\leq 4}(x_i) - \min\limits_{1\leq i\leq 4}(x_i)) + 3(\max\limits_{1\leq i\leq 4}(y_i) - \min\limits_{1\leq i\leq 4}(y_i)) + 4 - \sum\limits_{i=1}^{4} \min(|n_i|,|p_i|)}{13} \right.\right.$$

Recherche d'une borne supérieure et d'un algorithme. Comme pour les convexes avec 3 points extrémaux, nous allons utiliser un algorithme qui va utiliser les algorithmes précédemment définis :

DÉFINITION B.62. Nous définissons l'algorithme $\mathcal{A}_{4pts}$ par :

Nous pouvons alors évaluer le nombre d'interrogations au pire dont cet algorithme a besoin, c'est $max\{A,B,C\}$ où :

$$A = 1+\max\left\{\left\lceil\log_2\left(\frac{l_{m_2}-1}{3}\right)\right\rceil, \lfloor\log_2(l_{m_2}-1)\rfloor+1, \left\lfloor\log_2\left(\frac{l_{m_2}}{2}-1\right)\right\rfloor+2\right\}$$

$$B = 2+\max\left\{\left\lceil\log_2\left(\frac{l_{m_1}-1}{3}\right)\right\rceil, \lfloor\log_2(l_{m_1}-1)\rfloor+1, \left\lfloor\log_2\left(\frac{l_{m_1}}{2}-1\right)\right\rfloor+2\right\}$$

$$C = 3+\max\left\{1+\left\lceil\log_2\left(\frac{l_{m_1}+2}{3}\right)\right\rceil, \lfloor\log_2(l_{m_1}+1)\rfloor+1\right\}$$

Or $\lfloor\log_2(X+1)\rfloor \geq \left\lceil\log_2\left(\frac{X+2}{3}\right)\right\rceil$ donc $C = 4+\lfloor\log_2(l_{m_1}+1)\rfloor$.

De plus, $\lfloor\log_2(X-1)\rfloor+1 \geq 2+\left\lfloor\log_2\left(\frac{X}{2}-1\right)\right\rfloor$ et $\lfloor\log_2(X-1)\rfloor+1 \geq \left\lceil\log_2\left(\frac{X-1}{3}\right)\right\rceil$ d'où $B = 3+\lfloor\log_2(l_{m_1}-1)\rfloor$ et $A = 2+\lfloor\log_2(l_{m_1}-1)\rfloor$.

Donc nous avons $\max\{A,B,C\} \leq 4+\lfloor\log_2(l_{m_2}+1)\rfloor$.

Ceci nous donne le théorème suivant :

Théorème B.63

Soit z_1, z_2, z_3 et z_4 des points de $\mathbb{Z}^2$ indépendants et les distances successives entre ces points $l_p \leq l_{m_1} \leq l_{m_2} \leq l_g$ alors $\mathcal{A}_{4pts}$ trouve la frontière en moins de $4+\lfloor\log_2(l_{m_2}+1)\rfloor$ interrogations.

Comparaison de la borne inférieure avec la borne supérieure. Comme précédemment nous allons essayer de minorer la borne inférieure en faisant intervenir l_{m_2}. Nous rappelons que le théorème B.61 donne le résultat suivant :

Soit C un D_8-convexe fini admettant un ensemble de point extrémal de taille 4 : z_1, z_2, z_3 et z_4 numérotés dans l'ordre. Nous posons $z_i = (x_i, y_i)$ et $u_i = z_{i+1} - z_i = (n_i, p_i)$ alors nous avons :

$$I(C) \geq \left\lfloor \log_2\left(\frac{3(\max\limits_{1\leq i\leq 4}(x_i) - \min\limits_{1\leq i\leq 4}(x_i)) + 3(\max\limits_{1\leq i\leq 4}(y_i) - \min\limits_{1\leq i\leq 4}(y_i)) + 4 - \sum\limits_{i=1}^{4}\min(|n_i|,|p_i|)}{13}\right)\right\rfloor + 4$$

Nous avons : $3(\max\limits_{1\leq i\leq 4}(x_i) - \min\limits_{1\leq i\leq 4}(x_i)) + 3(\max\limits_{1\leq i\leq 4}(y_i) - \min\limits_{1\leq i\leq 4}(y_i)) \geq 3l_g$. De plus, $\sum\limits_{i=1}^{4}\min(|n_i|,|p_i|) = l_p+l_{m_1}+l_{m_2}+l_g - \sum\limits_{i=1}^{4}\max(|n_i|,|p_i|) \leq \frac{l_p+l_{m_1}+l_{m_2}+l_g}{2} \leq 2l_g$

Donc $I(C) \geq \left\lfloor\log_2\left(\frac{l_g+4}{13}\right)\right\rfloor + 4 \geq \left\lfloor\log_2\left(\frac{l_{m_2}+4}{13}\right)\right\rfloor + 4$

Nous obtenons donc le résultat suivant :

Théorème B.64

Soit C un D_8-convexe fini admettant un ensemble de point extrémal de taille 4 : z_1, z_2, z_3 et z_4 numérotés dans l'ordre et les distances successives entre ces points $l_p \leq l_{m_1} \leq l_{m_2} \leq l_g$ alors :

$$4 + \left\lfloor \log_2 \left(\frac{l_{m_2} + 4}{13} \right) \right\rfloor \leq I(C) \leq 4 + \lfloor \log_2(l_{m_2} + 1) \rfloor$$

De plus nous avons, $\lfloor \log_2(l_{m_2} + 1) \rfloor - \left\lfloor \log_2 \left(\frac{l_{m_2}+4}{13} \right) \right\rfloor \leq 4$

Démonstration : Il nous reste à prouver que $\lfloor \log_2(l_{m_2}+1) \rfloor - \left\lfloor \log_2 \left(\frac{l_{m_2}+4}{13} \right) \right\rfloor \leq 4$.

Nous avons si $A \geq B \geq 0$: $\lfloor A \rfloor - \lfloor B \rfloor \leq \lceil A - B \rceil$ et $\left\lfloor \log_2 \left(\frac{l_{m_2}+4}{13} \right) \right\rfloor = \lfloor \log_2(l_{m_2} + 4) - \log_2(13) \rfloor$ or $\log_2(13) < 4$ d'où le résultat. ■

6. Un cas particulier le carré.

Nous allons voir que l'algorithme $\mathcal{A}_{4pts}$ est "assez" efficace sur un carré, puisqu'il est optimal à 2 coups prêt.

Proposition B.65

Soit C un carré de côté c, alors C contient $6c + 5$ frontières différentes.

Démonstration : Comptons les frontières selon leur type :

- Horizontale : $c + 1$;
- Verticale : $c + 1$;
- Diagonale : $2c + 1$;
- Anti-diagonale : $2c + 1$;
- Vide : 1

De plus, comme un carré a 4 points extrémaux, 2 droites qui engendrent une frontière non vide, engendrent des frontières différentes. ■

Corollaire B.66

Il nous faut donc au moins $\left\lfloor \log_2(\frac{6c+4}{13}) \right\rfloor + 4$ interrogations pour trouver la frontière sur un carré de côté c.

L'algorithme $\mathcal{A}_{4pts}$ trouve la frontière en moins de $4+\log_2(c-1)$. En effet, le cas qui engendre le plus d'interrogations est celui où nous devons interroger 3 points extrémaux. Si les 3 points extrémaux sont de la même couleur alors dans ce cas, l'algorithme trouve la frontière en au plus $3 + \log_2(c + 1)$ (car dans ce cas si la frontière est non vide son orientation est unique). Si 2 points extrémaux sont de couleur différentes alors l'algorithme trouve la frontière en au plus $4 + \log_2(c - 1)$ interrogations. Or $4 + \log_2(c - 1) \geq 3 + \log_2(c + 1)$ d'où le résultat.

Nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème B.67

Sur un carré C de côté c, nous avons :

$$\left\lfloor \log_2\left(\frac{6c+4}{13}\right)\right\rfloor + 4 \leq I(C) \leq 4 + \lfloor \log_2(c-1)\rfloor$$

De plus :

$$\lfloor \log_2(c-1)\rfloor - \left\lfloor \log_2\left(\frac{6c+4}{13}\right)\right\rfloor \leq 2$$

Démonstration : Il nous reste à montrer que $\lfloor \log_2(c-1)\rfloor - \left\lfloor \log_2\left(\frac{6c+4}{13}\right)\right\rfloor \leq 2$.

Nous avons si $A \geq B \geq 0$: $\lfloor A\rfloor - \lfloor B\rfloor \leq \lceil A-B\rceil$ et $\log_2(c-1) - \log_2\left(\frac{6c+4}{13}\right) = \log_2\left(\frac{c-1}{6c+4}\right) + \log_2(13) \leq \log_2\left(\frac{1}{6}\right) + \log_2(13) = \log_2\left(\frac{13}{6}\right) \leq 2$. D'où le résultat. ∎

Algorithme 1 : Algorithme de recherche dichotomique sur un segment

```
begin
    Interroger z_0;
    case z_0 est noir
        Interroger z_1;
        if z_1 est noir then
            return La frontière est le segment S;
        else
            return La frontière est z_0.
        end
    end
    case z_0 n'est pas noir
        while [Pas de point N] et [couleur de z_1 inconnue ou
        différente de z_0] do
            if La frontière est contenue dans un sous-segment T_1;
            then
                Considérer le plus grand sous-segment irréductible S'
                de S de nature T_1;
                Interroger D_1(S);
            end
            if La frontière est contenue dans un sous-segment T_2;
            then
                Considérer le plus petit sous-segment S' de S de
                nature T_2;
                if l(S') > 2;
                then
                    Interroger D_2(S');
                else
                    return La frontière est le milieu de S'.
                end
            end
        end
        if Un point est de couleur noir then
            return La frontière est ce point.
        end
        if z_1 est de la même couleur que z_0 then
            return La frontière est vide.
        end
    end
end
```

Algorithme 2 : Algorithme de recherche dichotomique sur un arc extrémal strict.

```
   Données : α un arc extrémal.
   Résultat : Frontière
1  begin
2      if α est un segment diagonal then
3          Les extrémités sont appelées z_0 et z_1;
4          Interroger z_0 et passer à la ligne 9;
5      else
6          Identifier une extrémité se trouvant sur le segment vertical,
           nous l'appelerons z_0, l'autre extrémité sera appelée z_1;
7          Interroger z_0 et passer à la ligne 9;
8      end
9      case z_0 est noir
10         Interroger z_I;
11         if z_I est N then
12             return La frontière est le segment vertical.
13         else
14             La frontière est z_0.
15         end
16     end
17     case z_0 n'est pas N
18         while [Pas de point N] et [couleur de z_1 inconnue ou
           différente de z_0] do
19             if La frontière est contenue dans un sous-arc T_1 then
20                 Considérer le plus grand sous-segment irréductible α'
                   de α de nature T_1;
21                 Interroger D_1(S);
22             end
23             if La frontière est contenue dans un sous-arc T_2 then
24                 Considérer le plus petit sous-arc α' de α de nature T_2;
25                 if l(S') > 2 then
26                     Interroger D_2(S');
27                 else
28                     return La frontière est le milieu de α'.
29                 end
30             end
31         end
32         if Un point z_2 est de couleur noir then
33             if Ce point est sur le segment vertical then
34                 return La frontière est z_2.
35             end
36             if z_2 est sur le segment diagonal then
37                 if La couleur d'un autre point du segment diagonal est
                   connue then
38                     if Ce point est de couleur différente de N then
39                         return La frontière est z_2.
40                     else
41                         return La frontière est le segment diagonal.
42                     end
43                 else
44                     Interroger un autre point du segment diagonal;
45                 end
46             end
```

Algorithme 3 : Algorithme de recherche sur les convexes a 2 points extrémaux

begin
  if a_1 *est un segment* **then**
    Utiliser $\mathcal{A}_{arcext}$ pour trouver la frontière.
  else
    Utiliser $\mathcal{A}_{arcext}$ pour trouver la frontière sur a_1;
    if *la frontière n'est pas point* **then**
      Utiliser le théorème B.46 pour trouver la frontière
    end
    if *la frontière est un point* **then**
      Identifier si nous sommes dans le cas a, b, c ou d et interroger le point adjacent correspondant.
    end
  end
end

Algorithme 4 : Recherche dichotomique sur un arc extrémal dont les extrémités sont connues

Données : α un arc extrémal dont les extrémités sont de couleurs différentes non N.
Résultat : Frontière.
begin
  while *Pas de points* N **do**
    Considérer le plus petit sous-segment α' T_2;
    if $l(\alpha') \neq 2$ **then**
      Interroger $D_2(\alpha')$
    else
      return *La frontière est le milieu de* α'
    end
  end
  return *La frontière est le point* N
end

Algorithme 5 : Algorithme de recherche sur un arc extrémal dont on connaît la couleur d'une extrémité

Données : α arc extrémal d'extrémités z_0 et z_1 dont on connaît la couleur (non N) d'une extrémité z_0 située sur un segment vertical ou horizontal s'il existe.

Résultat : Frontière

```
begin
  while [Pas de point N] et [couleur de z1 inconnue ou différente
  de z0] do
    if La frontière est contenue dans un sous-arc T1;
    then
      Considérer le plus grand sous-arc irréductible α' de α de
      nature T1;
      Interroger D1(S);
    end
    if La frontière est contenue dans un sous-arc T2;
    then
      Considérer le plus petit sous-arc α' de α de nature T2;
      if l(S') > 2;
      then
        Interroger D2(S');
      else
        return La frontière est le milieu de α'.
      end
    end
  end
  if Un point z2 est de couleur noir then
    if Ce point est sur le segment vertical then
      return La frontière est z2.
    end
    if z2 est sur le segment diagonal then
      if La couleur d'un autre point du segment diagonal est
      connue then
        if Ce point est de couleur différente de N then
          return La frontière est z2.
        else
          return La frontière est le segment diagonal.
        end
      else
        Interroger un autre point du segment diagonal;
      end
    end
  end
  if z1 est de la même couleur que z0 then
    return La frontière est vide.
  end
end
```

Algorithme 6 : Algorithme de recherche pour les convexes a 3 points extrémaux.

Données : z_1, z_2, z_3 et les longueurs l_p, l_m et l_g
Résultat : Frontière
begin
  Interroger les extrémités de l_m;
  if *Une seule des 2 extrémités est de couleur N* **then**
    Interroger le point qui permet de dire si la frontière est un segment de l'arc
  end
  if *Les 2 extrémités sont N* **then**
    La frontière est le segment qui joint ces 2 extrémités.
  end
  if *Les extrémités sont de même couleurs non N;*
  then
    Appliquer $\mathcal{A}^{-}_{2pts}$ sur l'arc de longueur l_p;
  end
  if *Les extrémités sont de couleurs différentes non N* **then**
    Appliquer $\mathcal{A}_{2pts'}$ sur l'arc de longueur l_m;
  end
end

Algorithme 7 : Algorithme de recherche de la frontière pour les convexes à 4 points extrémaux

Données : z_1, z_2, z_3, z_4 numérotés dans le bon ordre
Résultat : Frontière
for $i = 1$ **to** 4 **do**
  $l_i = d(z_{i+1} - z_i)$;
end
Classer les l_i du plus petit au plus grand;
Renommer les l_i, $l_p, l_{m_1}, l_{m_2}, l_g$ tels que $l_p \leq l_{m_1} \leq l_{m_2} \leq l_g$;
Interroger les extrémités de l'arc de longueur l_{m_2};
if *Les extrémités sont de couleurs différentes* **then**
  if *Les extrémités sont sur la même droite* **then**
    Appliquer $\mathcal{A}_{S'}$ à ce segment;
  else
    Appliquer $\mathcal{A}_{2pts'}$ à l'arc;
  end
else
  if *L'arc identifié par la longueur l_{m_1} a une extrémité commune avec l'arc l_{m_2}* **then**
    Interroger l'extrémité de l'arc l_{m_1} inconnue;
    if *Les extrémités de l'arc l_{m_1} sont de couleurs différentes* **then**
      if *Les extrémités sont sur la même droite* **then**
        Appliquer $\mathcal{A}_{S'}$ à ce segment;
      else
        Appliquer $\mathcal{A}_{2pts'}$ à l'arc;
      end
    else
      if *L'arc l_p est un segment* **then**
        Appliquer $\mathcal{A}_S^-$ sur l_p
      else
        Appliquer $\mathcal{A}_{2pts}^-$ sur l_p
      end
    end
  else l_{m_2} a une extrémité commune avec l'arc l_p
    Interroger l'extrémité de l'arc l_p inconnue;
    if *Les extrémités de l'arc l_p sont de couleurs différentes* **then**
      if *Les extrémités sont sur la même droite* **then**
        Appliquer $\mathcal{A}_{S'}$ à ce segment;
      else
        Appliquer $\mathcal{A}_{2pts'}$ à l'arc;
      end
    else
      if *L'arc l_{m_1} est un segment* **then**
        Appliquer $\mathcal{A}_S^-$ sur l'arc l_{m_1}
      else
        Appliquer $\mathcal{A}_{2pts}^-$ sur l'arc l_{m_1}
      end
    end
  end
end
if *Un point frontière est renvoyé* **then**
  Utiliser le théorème de correspondance pour trouver quel point interrogé et l'interrogé;
  Déduire la frontière de la couleur de ce point;
end

ANNEXE C

Fiche descriptive de la première expérimentation

1. Première séance (1h)

1.1. Présentation du problème : La présentation est faite oralement, nous réunissons les élèves autour d'un plateau que nous utilisons pour faire des exemples : *Vous avez un plateau composé de cases. Sur ce plateau, il y a une frontière qui sépare les cases en deux couleurs différentes. La frontière peut soit être horizontale, verticale, diagonale ou absente.* →Exemple sur le plateau de frontières possibles.
Ce jeu se joue à 2 joueurs, un des joueurs choisit une frontière que l'autre joueur doit essayer de trouver. Pour cela, il a le droit de lui demander la couleur de n'importe quelle case du plateau. Le but du jeu est de trouver la frontière en un minimum de coups. Un coup correspondant à une question sur une case. → Avec Michèle, nous jouons sur le plateau une partie.

Remarque : Ici, nous ne demandons pas au joueur qui choisit la frontière de "maximiser" le nombre de coups du joueur en position de chercheur. Nous l'introduirons lors de la troisième séance. Cependant, si un élève se met à "tricher" en déplaçant la frontière lors d'une séance qui précède ce moment, nous lui demandons de passer au tableau afin qu'il explique aux autres comment il "triche" et dans quel but il le fait. Nous utiliserons alors la remarque de cet élève pour faire évoluer le rôle du "placeur" de frontière.

1.2. Organisation des groupes : Les groupes sont composés de 3 élèves. Dans chaque groupe, il y a un plateau et des carrés de 3 couleurs différentes. Nous les faisons jouer tous les 3 en même temps en demandant à 2 élèves de jouer le rôle du chercheur tour à tour (l'un pose une question, ensuite c'est au tour de l'autre et ainsi de suite) et au troisième élève de choisir la frontière et de donner les couleurs. Nous leur demandons aussi de changer de rôle à chaque partie.

1.3. Fin de séance : Rédaction. A 10-15 minutes de la fin de la séance, nous posons les questions suivantes aux élèves et leur demandons d'en rédiger les réponses sur une feuille :

(1) Quelles sont les stratégies que vous avez adoptées ?
(2) En combien de coups êtes-vous sûr de trouver la frontière ?
(3) Avez-vous trouvé d'autres résultats ? Si oui lesquels ?

A la fin de la séance, nous ramassons les feuilles et nous leur demandons de justifier chez eux leurs résultats, s'ils ne l'ont pas encore fait.

2. Deuxième séance (1h30) :

2.1. Début de la séance : Récapitulatif. Nous faisons un récapitulatif (10 mn) des différentes stratégies et résultats que nous avons pu trouver sur leurs feuilles. Si un résultat trouvé par les élèves lors de la première séance n'est pas présent sur les fiches réponses, nous le signalons et nous l'utilisons pour leur montrer ce qu'est un "résultat" mathématique. En particulier, cela peut nous amener à parler de convexité.

Une fois le récapitulatif terminé, nous les laissons continuer à chercher sur le plateau 8×8.

2.2. Milieu de la séance : Intervention. Vers le milieu de la séance, nous intervenons pour généraliser le problème en leur disant qu'on peut non seulement jouer sur des plateaux carrés mais aussi sur des plateaux rectangulaires ou encore d'autres formes moins régulières. Le but de cette intervention est aussi de montrer aux élèves ce que peut faire un chercheur pour "simplifier" un problème lorsqu'il est bloqué. Ici, nous leur posons la question suivante : *Comment simplifieriez-vous le problème du Chercheur de frontière ?*.

Nous leur demandons ensuite d'expérimenter avec certaines formes et valeurs qu'ils ont émises. En particulier, nous pouvons faire l'hypothèse que les idées de lignes et de carrés plus petits vont être émises. Si ce n'est pas le cas, nous en parlons afin de les faire chercher sur une ligne de taille quelconque et sur le carré 2×2.

2.3. Fin de la séance : Rédaction. A 15 minutes de la fin de la séance, nous posons les questions suivantes aux élèves et nous leur demandons d'en rédiger les réponses sur une feuille :

(1) Quelles sont les stratégies que vous avez adoptées ?
(2) En combien de coups êtes-vous sûr de trouver la frontière ?
(3) Avez-vous trouvé d'autres résultats ? Si oui, lesquels ?

A la fin de la séance, nous ramassons les feuilles et nous leur demandons de justifier chez eux les résultats qu'ils ont trouvés, s'ils ne l'ont pas encore fait.

3. Troisième séance (1h30) :

3.1. Début de la séance : Récapitulatif ou Recherche.

Récapitulatif. Si dans les feuilles réponses de la deuxième séance, les élèves ont obtenu des résultats prouvés, selon eux, sur la ligne et sur le carré 2×2, nous faisons un récapitulatif des résultats et des preuves obtenus en demandant à l'ensemble de la classe leurs avis sur les preuves et les résultats. Si dans les preuves que nous avons relevées et après discussion avec les élèves, aucune preuve satisfaisante (pour nous) n'est produite, nous leur en donnons une pour le carré 2×2.

A la fin du bilan, nous introduisons l'évolution dans le rôle du "placeur" de frontière (si cela n'a pas déjà été fait) en lui demandant de chercher à maximiser le nombre de coups du chercheur. Nous demandons alors aux élèves de jouer (avec les nouvelles règles) sur le 3×3. Nous leur demandons aussi de rédiger les stratégies et les éventuels résultats ou preuves qu'ils obtiendraient en leur disant que nous ramasserons leurs productions en fin de séance. Nous leur rappelons que maintenant, il faut trouver des stratégies pour trouver la frontière en un minimum de coups mais aussi trouver des stratégies pour maximiser le nombre de coups du chercheur.

Recherche. Dans le cas, où les élèves n'aient pas produit de résultats ou très peu de résultats, nous les laissons continuer à chercher (30-45 mn). Durant cette période de recherche, nous envoyons un élève au tableau dès qu'il trouve un résultat (prouvé ou pas ?) pour qu'il l'explique à la classe.

Après la période de recherche, en faisant l'hypothèse qu'ils auront obtenu des résultats sur le 2×2 et la ligne, en particulier la dichotomie. Nous introduisons l'évolution dans le rôle du "placeur" de frontière et nous leur demandons de jouer sur le 3×3. Le même travail de rédaction que dans le "Récapitulatif" est demandé.

3.2. Reste de la séance : Nous laissons les élèves chercher sur le 3×3 avec les nouvelles règles.

4. Quatrième séance (1h30) :

4.1. Début de la séance : Récapitulatif. Nous commençons cette dernière séance par un bilan des stratégies et des résultats que les élèves ont produits sur le 3×3, en particulier cette fois-ci, nous sommes amenés à parler des stratégies du "placeur" de frontière. Ensuite, nous les relançons sur le 8×8.

4.2. A 30 mn de la fin : A 30 minutes de la fin, nous demandons aux élèves de faire par groupe un poster sur les résultats, les stratégies et les preuves qu'ils ont faits afin de le présenter à la classe ou de l'afficher dans la salle. Nous laissons aux élèves 15-20 mn pour faire le poster. Ensuite, nous demandons à certains groupes d'exposer leurs posters aux autres élèves. FIN

ANNEXE D

Fiche descriptive de la deuxième expérimentation

1. Première séance (1h) Groupe 2

1.1. Présentation du problème : La présentation est faîte oralement à l'aide du tableau sur lequel nous dessinons une grille non régulière. : *Vous avez un plateau composé de cases. Sur ce plateau, il y a une frontière qui sépare les cases en deux couleurs différentes. La frontière peut soit être horizontale, verticale, diagonale ou absente.* →Exemple au tableau de frontières possibles.
Ce jeu se joue à 2 joueurs, le premier joueur a pour but de trouver la frontière en un minimum de coups. Un coup correspondant à une question sur la couleur d'une case. Le second joueur donnera les couleurs. Cependant, il devra essayer de les donner en cherchant à faire poser le plus de questions possibles au premier joueur. Le premier joueur a donc pour but de trouver la frontière en un minimum de coups alors que le second joueur a pour but de retarder le plus possible sa découverte. → Avec Michèle, nous jouons sur le tableau une partie.

1.2. Organisation des groupes et matériel : Les groupes sont composés de 3 élèves. Chaque groupe a un plateau différent. Un groupe a pour plateau un carré 8×8, un autre un rectangle 7×8 et le troisième groupe un rectangle 5×10 Nous les faisons jouer tous les 3 en même temps en demandant à 2 élèves de jouer le rôle du donneur de couleur tour à tour (l'un donne une couleur, ensuite c'est au tour de l'autre et ainsi de suite) et au troisième élève de chercher la frontière en interrogeant les cases. Nous leur demandons aussi de changer de rôle à chaque partie.

2. Deuxième séance (1h30) :

2.1. Début de la séance : Recherche (30 mn). Lors de la première séance, une alarme incendie a retardé la séance d'une quinzaine de minutes. Nous avons estimé que les élèves n'avaient pas eu suffisamment de temps pour chercher et nous avons donc décidé de leur laisser 30 minutes de recherche supplémentaire en début de séance. Cependant, le groupe qui travaillait sur le 7×6 a demandé à jouer sur un autre plateau pour tester sa stratégie. Le groupe qui travaillait sur le 10×5 a aussi fait cette requête car ils trouvaient cela trop compliqué sur le 5×10. Nous avons donc décidé d'intervertir les plateaux entre ces groupes.

2.2. Intervention/Bilan-Synthèse à 30 minutes. Nous intervenons au bout de 30 minutes pour faire un récapitulatif des stratégies que les élèves ont utilisées que cela soit dans le but de trouver la frontière ou de maximiser le nombre de questions du chercheur de frontière.

Suite à ce bilan, nous disons aux élèves : *Le problème que nous vous avons posé lors de la première séance est un problème difficile. C'est un problème ouvert, c'est à dire que personne ne connait la solution du problème général. Ce que peut faire un chercheur lorsqu'il est confronté à un problème difficile, c'est de le simplifier. Par exemple, il peut essayer de travailler sur des objets plus simples. Quels sont les objets sur lesquels vous voudriez travailler et qui selon vous «simplifient»le problème ?*

Nous faisons, ici, l'hypothèse que des objets comme de plus petits rectangles et carrés vont être proposés. En particulier, la ligne. Nous leur demandons alors de chercher à résoudre le problème sur la ligne ou des petits carrés ou rectangles.

3. Troisième séance (1h30) :

3.1. Début de la séance : Recherche. Nous demandons aux élèves de continuer leurs recherches sur les petits carrés et la ligne, en leur récapitulant les résultats qu'ils avaient trouvés. Nous leur demandons alors s'ils peuvent faire mieux. Nous les laissons continuer à chercher 30 minutes.

3.2. Intervention/Bilan : Si nous nous apercevons que les élèves travaillent sur la ligne, nous n'intervenons pas et les laissons continuer à chercher. Si les élèves travaillent essentiellement sur les carrés alors nous intervenons pour faire un bilan de ce qu'ils ont fait. Nous faisons alors l'hypothèse qu'ils auront fait des preuves par énumérations sur certains petits carrés. Nous leur disons alors que sur des grands objets, ces preuves par énumérations risquent d'être très compliquées à faire. Nous leur demandons alors de chercher sur la ligne en leur disant que cela pourrait leur donner des idées pour des grands carrés ou rectangles. Nous les laissons continuer à chercher jusqu'à la fin de la séance.

4. Quatrième séance (1h30) :

4.1. Début de séance : Lors de la dernière séance, ils n'ont pas cherché très longtemps sur la ligne (20-30 minutes), c'est pourquoi nous commençons la séance par leur demander de continuer à chercher sur la ligne.

4.2. Intervention/Bilan : Si les élèves obtiennent des résultats (bornes inférieures et bornes supérieures) sur la ligne, nous intervenons pour en faire un récapitulatif collectif. Puis, nous leur demandons de quelle manière ils pourraient réinvestir les résultats et les idées qu'ils ont eus pour des carrés ou des rectangles. Nous pouvons alors à ce moment là, s'ils ne voient vraiment pas de lien "simplifier" le problème en jouant sur les frontières qu'on autorise, c'est à dire, leur demander ce qu'il se passe si les seules frontières autorisées sont verticales, puis verticales et horizontales...

4.3. A 20-30 minutes de la fin. A 20-30 minutes de la fin, nous demandons aux élèves de faire par groupe un poster sur les résultats, les stratégies et le preuves qu'ils ont faits afin de le présenter à l'autre groupe de la classe ou de l'afficher dans la salle.

Si des élèves n'ont pas fini leur poster à la fin de la séance, nous leur demandons de le finir chez eux.

ANNEXE E

Transcription de la première expérimentation

Notes d'observation du groupe 1

20 octobre 2011

1 Séance 1

Il y a avait 7 élèves présents, répartis en trois groupes. 2 groupes de 2 élèves et un groupe de 3 élèves. Le jeu a été présenté de la manière suivante :

> Vous avez devant vous un plateau sur lequel se trouve une frontière. Qu'est ce qu'une frontière ? une frontière est une droite horizontale (exemple sur le plateau) ou verticale (exemple sur le plateau) ou diagonale (exemple sur le plateau de plusieurs diagonale dont la diagonale "coin"). La frontière peut aussi être absente, c'est à dire qu'elle est en dehors du plateau. La frontière sépare le plateau en deux zones de couleurs différentes une bleue et une blanche (exemple sur le plateau).
> Le but du jeu est de trouver la frontière en un minimum de coup.
> Le jeu se joue à deux joueurs ou trois joueurs pour le groupe de 3. Un joueur choisit la frontière et l'autre essaye de la trouver en un minimum de coup. Pour cela, il a le droit de demander la couleur de n'importe quelle case du plateau.
> Dans le groupe 3, il y aura deux personnes qui joueront le rôle du chercheur. Vous jouez à tour de rôle chacun un coup. Vous changez les rôles à la fin de chaque partie.
> Dans les groupes de 2 aussi, vous échangez les rôles.

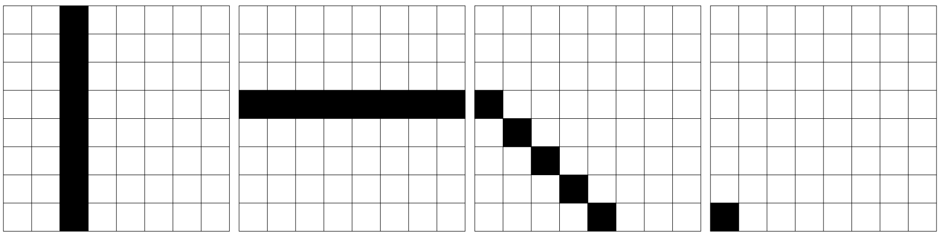


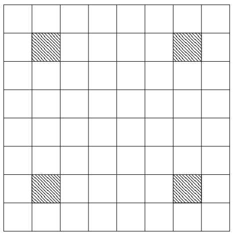
Fig. 1 – Les exemples de frontières que nous avons présentés

1.1 Groupe 1

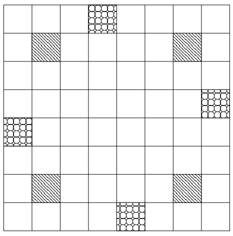
Le groupe 1 se compose de 2 élèves (que nous appellerons E_1 et E_2) qui changent de rôle à la fin de chaque partie. Un des élèves notait sur sa feuille l'état du plateau à la fin de chaque partie, c'est à dire la couleur des cases demandées et la frontière. Pour cela, sur sa feuille grand carreau, il entourait un carré de côté 8 carreaux. il coloriait les cases bleues et mettait un B dans les cases blanches. La frontière était symbolisée par une droite.

Les élèves de ce groupe changeait de rôle à la fin de chaque partie.

Les élèves de ce groupe ont commencé par jouer sur les coins d'un carré intérieur plus petit, ce sont les coins hachurés de la figure suivante :

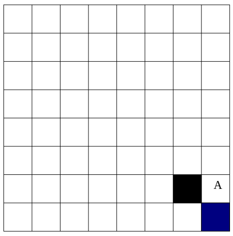


Ensuite, ils semblaient jouer sur les cases "cercles" :



Nous appellerons cette stratégie, la stratégie $S^1_{g_1}$.

Ce groupe a observé que dans le cas suivant :



Plusieurs frontières étaient possibles. E_2 a alors demandé la couleur de la case A. Ce groupe est arrivé à cette configuration car le chercheur E_2 est d'abord tombé sur une case frontière et a ensuite demandé la couleur de la case coin, modifiant ici la stratégie $S^1_{g_1}$.

E_1 a dit à E_2 qui cherchait la frontière :

> T'aurais économisé 2 coups en jouant les coins. Les coins, c'est plus stratégique.

Le groupe s'es ensuite posé la question suivante :

> Est ce qu'il reste des frontières à faire ?
> Non, il me semble qu'on a fait tous les types

E_1, qui notait toutes les parties jouées, regarde alors dans son cahier et dit :

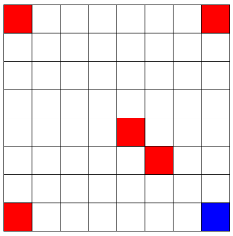
> Il en reste une qu'on a pas faîte. Poses-moi une question.
> Je sais celle qu'on a pas faîte c'est celle là.

E_2 montre alors un des coins du plateau. E_1 a alors dit :

> Maintenant, il faut trouver une stratégie.

Les élèves se mettent alors à chercher sur le plateau comment peuvent être les diagonales en fonction de la couleur des coins. Ils semblent adopter une stratégie qui consistent à interroger les 4 coins en premier.

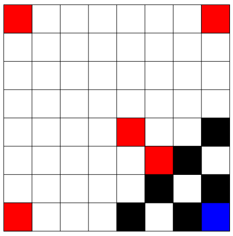
E_2 a fait une erreur sur le cas suivant :



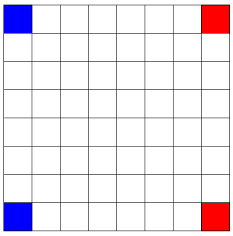
E_2 a dit en mettant son doigt sur la case non interrogée contenue diagonalement entre une bleue et une rouge que c'était cette diagonale, cela a entraîné le dialogue suivant :

La frontière, c'est cette diagonale
Non, ce n'est pas celle là.
Si, c'est celle là. Je ne vois pas où elle pourrait être sinon.

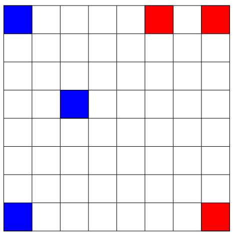
E_2 s'est alors rendu compte qu'on pouvait aussi avoir ces frontières :



E_2 a commencé par interroger les 4 coins. Il s'est trouvé face à la configuration suivante :



Il a, ensuite, interrogé ces deux cases :



E_2 a montré deux lignes verticales et dit :

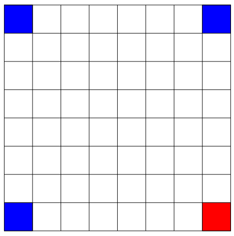
La frontière peut être comme ça ou comme ça.

Le groupe a aussi fait les observations suivantes :

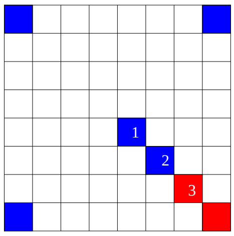
C'est une question de chance, si on tombe tout de suite dessus

En faisant les coins, on peut trouver tout bleu en 4 coups.

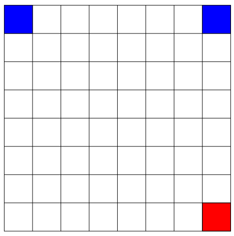
E_1 a aussi observé que dans le cas suivant :



La frontière était une diagonale. E_1 a ensuite joué de cette manière :



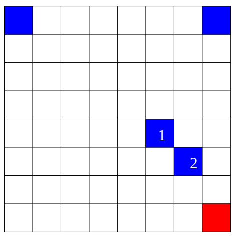
Face au cas suivant :



E_2 a dit :

La frontière est horizontale ou diagonale.

E_2 a alors joué :



Puis E_2 a interrogé E_1 et dit :

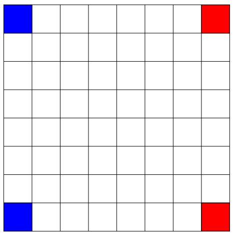
C'est celle là ?
Non
Alors celle là ?
Oui.

Un observateur est alors intervenu pour leur rappeler qu'ils avaient seulement le droit de poser des questions sur la couleur des cases.

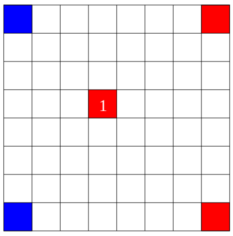
Par rapport à la partie précédente, E_1 a dit à E_2 :

Si t'avais joué ce coin, t'aurais trouvé la frontière plus vite.

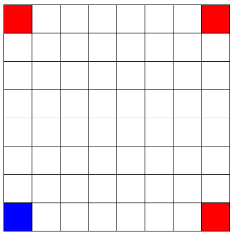
Lors d'une nouvelle partie, face au cas suivant :



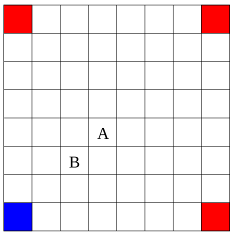
E_1 a alors joué sur la case suivante :



Dans une nouvelle partie lorsque E_1 s'est retrouvé avec la configuration suivante :



E_1 a d'abord voulu jouer sur la case A, puis a réfléchit et à jouer sur la case B :



E_1 a justifié ceci en disant :

C'est mieux de jouer ici (B) car après en 1 coup on trouve la frontière

Nous appellerons la stratégie qui consiste à faire les 4 coins puis à jouer sur les "milieux", la stratégie S^2_{g1}

1.1.1 Production écrite des élèves

Dans cette partie, nous présenterons les productions des élèves que nous avons ramassées, en réponse aux questions suivantes :

1. Quelles sont les stratégies que vous avez adoptées ?
2. En combien de coups êtes-vous sûr de trouver la frontière ?
3. Avez-vous trouvé d'autres résultats ? Si oui lesquels ?

Sur les feuilles présentées par le groupe 1, nous trouvons une preuve partielle du fait que 6 coups suffisent pour trouver la frontière.

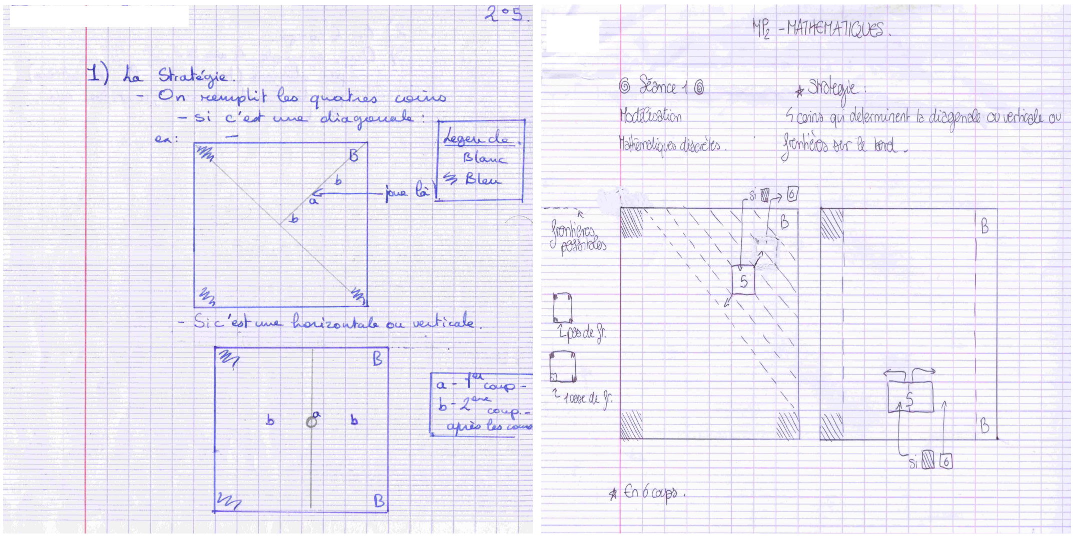


FIG. 2 – Réponse des élèves du groupe 1 à la question 1

Un seul des élèves a répondu aux questions 2 et 3, il semble qu'il veuille faire remarquer que l'on peut faire moins avec de la "chance" et que la stratégie qu'il donne permet de conclure en 4 coups dans le cas où il n'y a pas de frontière.

Cet élève a aussi remarqué que sa stratégie lui permettait de toujours finir en 6 coups.

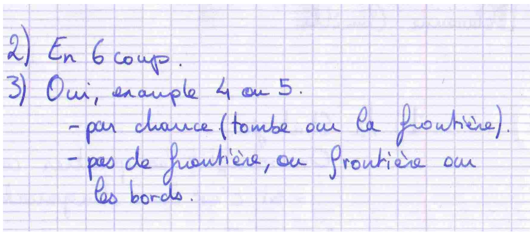


FIG. 3 – Réponse des élèves du groupe 1 aux questions 2 et 3

1.2 Groupe 2

Le groupe 2 était composé de 3 élèves. 2 élèves cherchaient la frontière pendant qu'un troisième donnait les couleurs. Comme dans le groupe 1, ils changeaient de rôle à la fin de chaque partie.

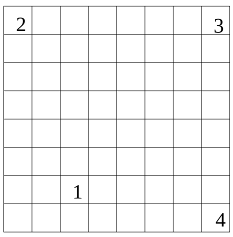
Deux élèves cherchaient la frontière, après que l'un est joué un coup l'autre lui a dit :

> C'était sûr que c'était bleu. Ce n'était pas la peine de jouer là.

Lorsqu'un des élèves du groupe a choisit le cas où il n'y avait pas de frontière, un des élèves croyait que ce n'était pas un cas possible :

> J'avais pas entendu.

Le groupe a utilisé cette stratégie :



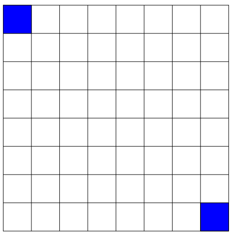
Un élève justifie cette stratégie de la manière suivante :

Un plus trois coins opposés, on en tire la direction de la diagonale

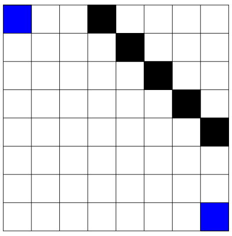
Mais un élève rajoute :

La stratégie, elle change beaucoup, ça dépend des réponses.

En jouant, face à cette configuration :



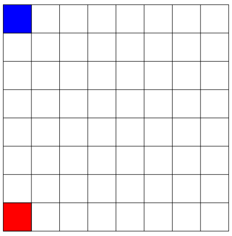
Un élève (en position de chercheur) a dit que la frontière était cette diagonale :



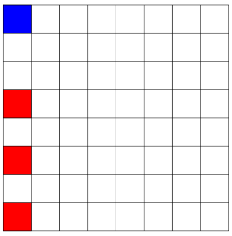
L'élève qui devait placer la frontière a répondu :

Oui.

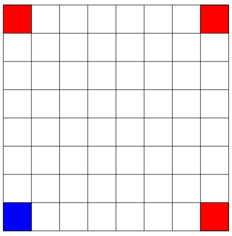
Face à la configuration suivante :



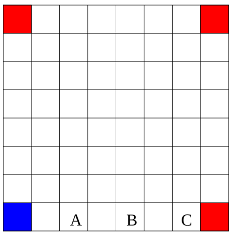
Les élèves ont ensuite joué ceci :



Par rapport à cette configuration :



Un élève du groupe semblait jouer ensuite sur les cases A, B et C :



1.2.1 Productions écrites

Ce groupe a répondu aux mêmes questions que le groupe 1. Tous les élèves du groupe semblent avoir le même début de stratégie : Commencer par les 4 coins.

Toutefois, seulement un élève E_1 a écrit une stratégie complète qui selon lui trouve la frontière en un maximum de 7 coups :

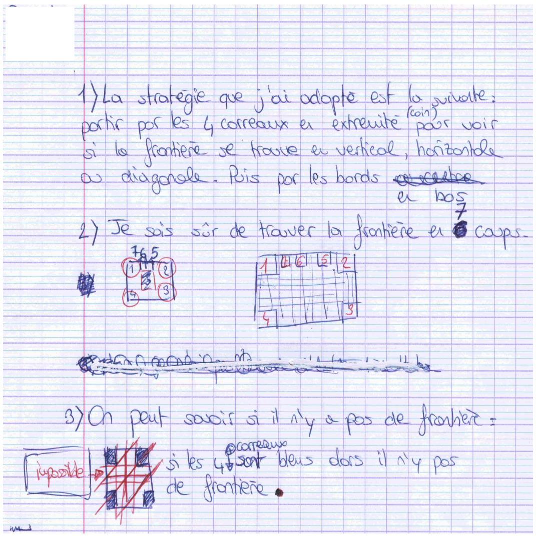


FIG. 4 – Réponses d'un des élèves du groupe 2 aux questions 1, 2 et 3

Nous retrouvons sur sa feuille en réponse à la question 3, le résultat suivant : *Si les 4 coins sont bleus alors il n'y a pas de frontière.* Il semble justifier ce résultat par le dessin en bas à gauche où il semble dire que si les 4 coins sont bleus alors il n'y a pas de frontière possible.

Ce résultat est aussi noté sur les feuilles des autres élèves du groupe mais n'est pas justifié.

Un autre élève E_2 du groupe applique la stratégie de E_1 sur un cas particulier sans donner de stratégie complète :

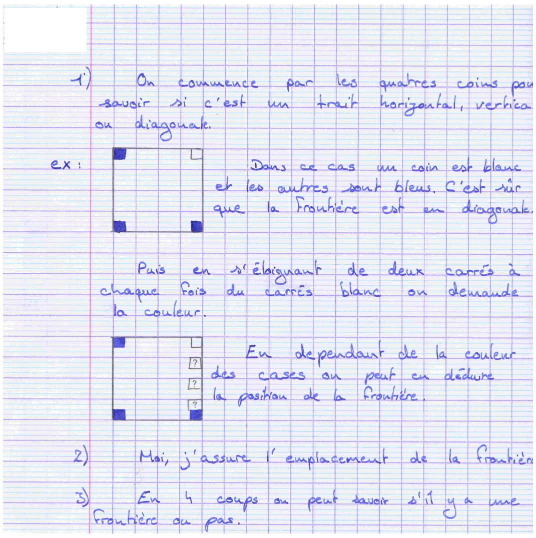
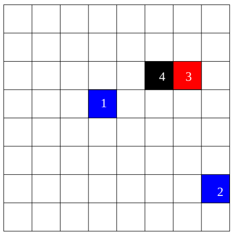

1) On commence par les quatres coins pou
savoir si c'est un trait horizontal, vertica
ou diagonale.
ex : Dans ce cas un coin est blanc
et les autres sont bleus. C'est sûr
que la frontière est en diagonale.
Puis en s'éloignant de deux carrés à
chaque fois du carrés blanc on demande
la couleur.
En dependant de la couleur
des cases on peut en déduire
la position de la frontière.
2) Moi, j'assure l'emplacement de la frontièr
3) En 4 coups on peut savoir s'il y a une
frontière ou pas.

FIG. 5 – Réponses d'un des élèves du groupe 2 aux questions 1, 2 et 3

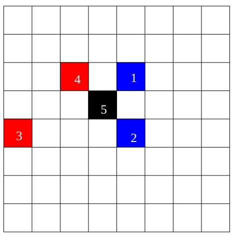
1.3 Groupe 3

Ce groupe était composé de 2 élèves.
Les élèves ont joué une partie de cette manière :

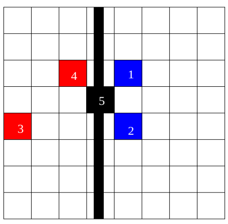


La frontière est comme ça en passant son doigt sur la diagonale.

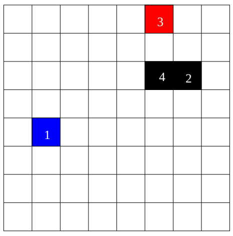
Ensuite, échangeant les rôles, ils ont joué de cette manière :

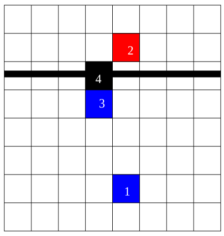


Le chercheur passe son doigt sur la ligne suivante et dit que c'est la frontière, ce que confirme le placeur de frontière.



Ils ont joué une nouvelle partie de cette manière :

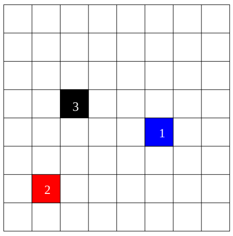




Le chercheur a alors passé sa main sur la ligne horizontale et le dialogue suivant a eut lieu :

La frontière est là.
Non, elle n'est pas là.
Ah oui. Elle peut être là ou là. Donc c'est la diagonale.

Les élèves ont joué de cette manière.



L'élève qui cherchait la frontière a alors dit en montrant une diagonale :

C'est cette diagonale

Auquel l'autre élève a répliqué :

Cela aurait pu être celle là aussi.

2 Séance 2

Les mêmes 7 élèves étaient présents. Les groupes étaient les mêmes qu'à la première séance. Nous devons signaler qu'il semble que certains élèves ont continué leurs recherches chez eux.

2.1 Début de séance : Présentation d'un résultat, débat et introduction d'une nouvelle consigne :

2.1.1 Présentation d'un résultat :

Nous avons commencé la séance en leur disant qu'en regardant les feuilles qu'ils nous avaient rendues la semaine dernière, nous avons pu remarquer que 2 groupes avaient utilisé le résultat suivant que nous avons écrit au tableau :

2.1 Résultat. *La couleur des 4 coins donne l'orientation de la frontière.*

Nous avons alors demandé aux élèves leurs avis sur ce résultat, est ce qu'il pensait qu'il était vrai ? pourquoi ?

Groupe 2 :

C'est sûr.

Observateur :

Est ce que vous trouvez que dire c'est sûr cela suffit ? Il faut que vous puissiez convaincre ceux qui n'ont pas trouvé

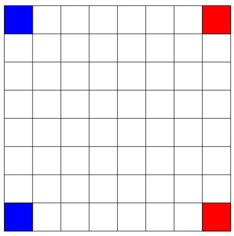
Groupe 1 :

Cela permet d'avoir une idée de où sont placées les frontières parce que comme c'est les coins, c'est quand même le territoire, donc c'est des bouts de territoires. Et sachant de quelles couleurs ils sont cela donne une idée globale, plus que sans.

Observateur :

Pourquoi est ce que c'est vrai à votre avis ? Par exemple si j'ai deux coins bleus et deux coins blancs, comment est la frontière.

Observateur dessine cette grille au tableau.



G2 :

Là, elle est verticale.

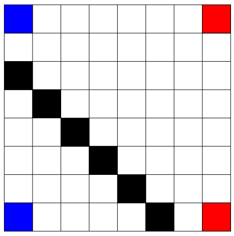
G1 :

Cela dépend des règles que vous nous avez données. Tout ça c'est de la logique. On ne peut pas avoir... si on a une diagonale un côté rouge et un côté bleu. Si vous tracez n'importe quelle diagonale, il y aurait au moins un des coins que vous avez marqués qui seraient faux parce que vous auriez un bleu et un rouge dans un même territoire ce qui n'est pas possible. Un territoire cela ne contient qu'une couleur.

O :

Si par exemple je trace cette diagonale.

Observateur trace une diagonale :



G1 :

Vous vous retrouverez toujours avec un problème parce que vous auriez toujours d'un côté 2 couleurs alors que vous avez dit qu'un territoire, ce n'est qu'une couleur.

O :

Alors là, oui effectivement cette diagonale n'est pas possible.

G1 :

C'est la même chose pour toutes les diagonales.

O :

Donc ici vous dîtes que si on a 2 bleus et 2 rouges, on ne peut pas placer de...

G1 :

frontière diagonale et de frontière horizontale.

O :

Parce que là, elle fait quoi la diagonale ?

G2 :

Elle sépare le terrain en 2 couleurs différentes.

G1 :

Elle sépare un coin des 3 autres.

G2 :

Ou sinon, il y a 2 coins qui sont frontières.

O :

Donc vous dîtes qu'il y a le cas où on a 2 coins qui sont frontières et celui où 3 coins sont de la même couleur et un autre d'une couleur différente. Et si on a un coin d'une couleur et 3 autres d'une couleur différente ?

G1-G2 :

C'est une diagonale.

O :

C'est sûr que c'est une diagonale ?

G2 :

Oui, parce qu'une horizontale coupe en 2 coins car cela va d'un bout et d'un autre. Et la même chose pour une verticale.

O :

Donc là, cela ne peut pas être le cas où il n'y a pas de frontière. Parce que ?

G2 :

Il y a deux couleurs.

O :

Donc les choix que vous avez c'est soit horizontale, verticale ou diagonale.

G1-G2 :

Là, c'est diagonale.

O :

Donc ce résultat maintenant que tout le monde est convaincu, en fait ce que vous avez dit cela permet de faire une preuve du fait que quand on a les 4 coins, cela donne l'orientation. En effet, si les 4 coins sont rouges alors il ne peut pas y avoir de frontière car si il y a une frontière une case sera d'une couleur différente. Et si on en a deux rouges et deux bleus, la seule frontière qui donne deux coins rouges et deux coins bleus est l'horizontale ou la verticale. Et pareil pour la diagonale, c'est la seule frontière qui donne trois coins de la même couleur et un coin d'une couleur différente. Donc ce résultat maintenant, on peut dire qu'il est vrai : c'est un théorème. Et puis il y a aussi les cas où on a directement 2 noirs dans les coins.

G1-G2 :

Alors dans ce cas, c'est la ligne qui passe par ces points.

2.1.2 Nouvelle consigne :

Nous avons introduit une nouvelle consigne de la manière suivante :
O :

Par rapport à la semaine dernière, nous allons rajouter une deuxième consigne pour le second joueur. Le deuxième joueur est celui qui place la frontière. Il va avoir un but dans le jeu, il va devoir chercher à maximiser le nombre de coups du chercheur de frontière. C'est à dire, il doit retarder le plus possible la découverte de la frontière. Pour cela, il aura le droit de déplacer la frontière en même temps que l'autre joue. L'autre fois, on vous demandait de choisir la frontière au début et elle était fixée. Maintenant vous pouvez la changer de place en jouant.

G1 :

Si on change la frontière, cela doit être cohérent avec ce que l'on a ?

O :

Oui cela doit rester cohérent. Si votre case est bleue, elle doit rester bleue une fois que vous avez changé la place de la frontière. La couleur des cases que vous donnez avant ne change pas quand vous changez la frontière.

G3 :

On peut ne pas choisir la frontière dès le début.

G2 entre eux :
G2 :

Cela ne change pas grand chose, cela fait 7 coups.

G2 :

Non, cela fait 6.

O :

Donc maintenant, il y a deux questions : Comment trouver la frontière en un minimum de coups et comment faire pour que l'autre fasse le maximum de coups.

2.2 Groupe 1

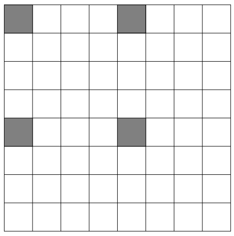
Le groupe 1 est toujours composé des élèves E_1 et E_2.
E_1 et E_2 jouent avec la stratégie S^2_{g1}

Cela ne change rien puisque de toute façon tu te fais piéger.
La nouvelle règle ne change rien, notre stratégie est infaillible.
En s'orientant, on force l'autre à être de plus en plus précis
Cela ne change rien à ce que l'on faisait avant.

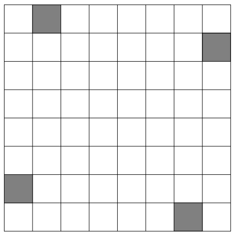
E_1 et E_2 utilise la même stratégie : S^2_{g1}. Mais E_1 a dit :

J'ai entendu parler de cette stratégie

E_1 montre alors à E_2 cette stratégie (Elle joue sur les cases grises) :



G1 essaye alors la stratégie suivante :



Ils disent alors :

La frontière peut toujours être dans les coins.

O leur pose la question suivante :

Pourquoi est ce que vous y arrivez toujours en 6 coups ?

E_1 répond :

A cause de ce qu'on a écrit sur la feuille (FIG. 2). On ne change pas parce qu'on le piège.

O :

Est ce que vous pouvez faire mieux que 6 ? Existe-t'il d'autres stratégies en moins de 6 coups ?

E_1 :

Non, je ne vois pas. On a cherché, non. Les coins ça limite parce que ça orientent.

O :

mieux de jouer sur le bord ou à l'intérieur ?

G1 :

Oui. Jouer sur les bords restreint les positions pour les frontières

Ils essaient alors de trouver la frontière en jouant seulement à l'intérieur. Mais ils abandonnent assez vite. Les élèves discutent ensuite avec un observateur des raisons de poser des questions sur les cases "centrales" dans la stratégie S_{g1}^2 et rédigent ensuite pourquoi est ce que la nouvelle règle ne change pas le minimum du nombre de coups.

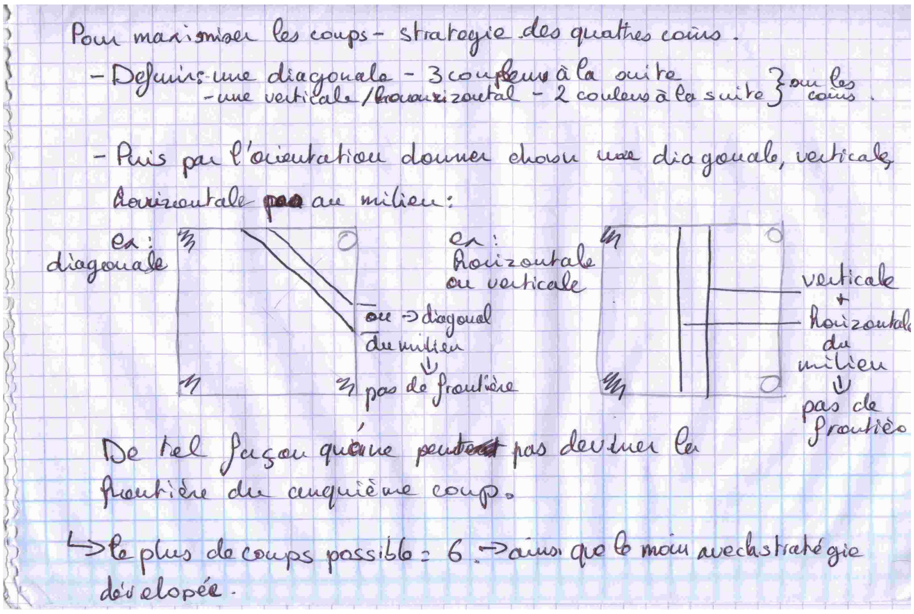


FIG. 6 – Ce qu'a écrit E_1

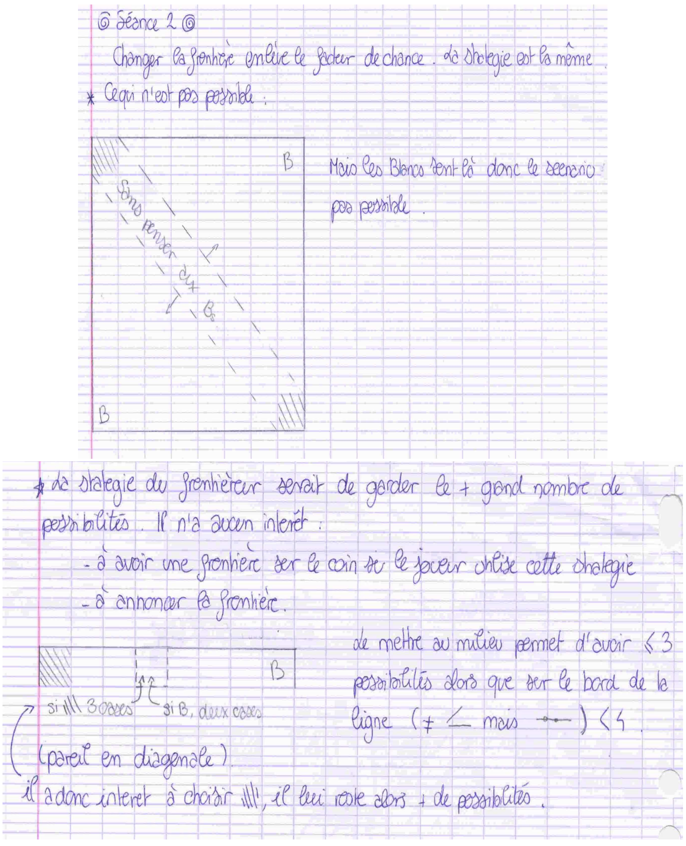


FIG. 7 – Ce qu'a écrit E_2

O pose de nouvelles questions au groupe 1 :

Est ce qu'on peut trouver la frontière en 5 coups ? Est ce que c'est possible en 1 ou 2 coups ?

E_1 répond :

Si il y a une frontière, on peut faire en 5 coups.

E_2 a écrit cela en réponse à la dernière question de O :

2.3 Groupe 3

Lors de la séance 1, ce groupe n'avait pas mentionné ni utilisé le résultat des 4 coins.

Ce groupe, lors de cette séance, a utilisé la même stratégie que G1 : S^2_{g1}. Pour eux, cette stratégie consiste à interroger le bord et faire toujours au milieu.

Ce groupe s'est interrogé sur la possibilité de faire en 4 coups. Ils sont persuadés qu'en moins de 4 coups, on n'y arrive pas.

Voici ce que les élèves du groupe 3 ont répondu à nos questions :

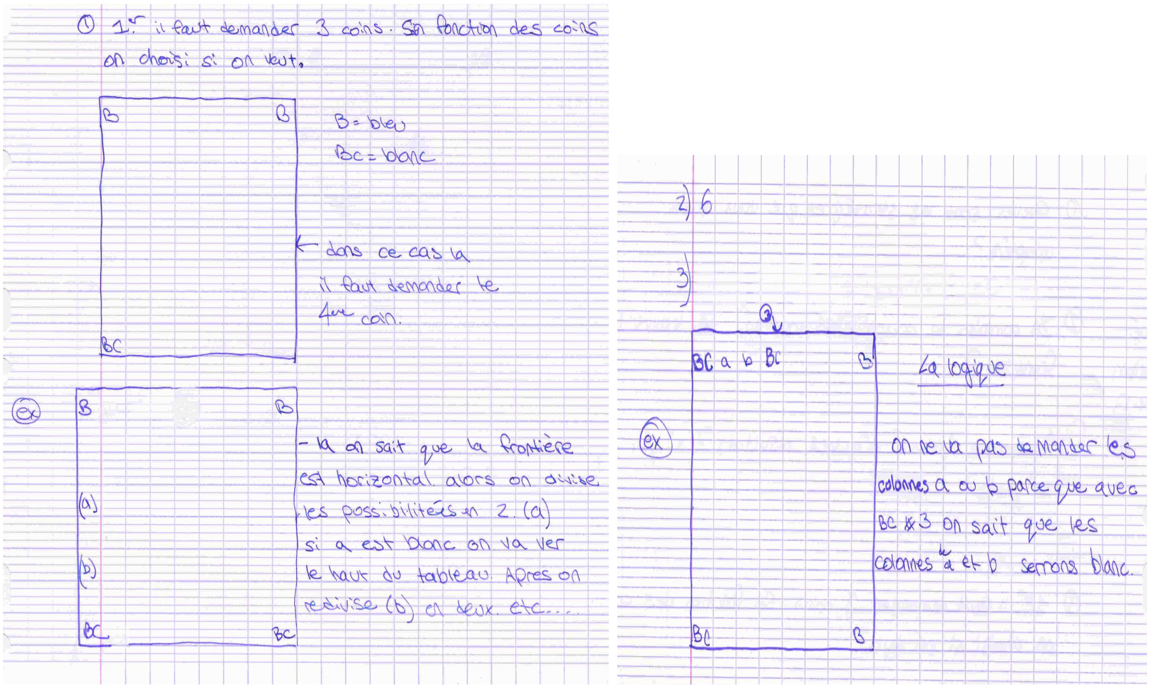


FIG. 8 – Réponses d'un élève du groupe 3

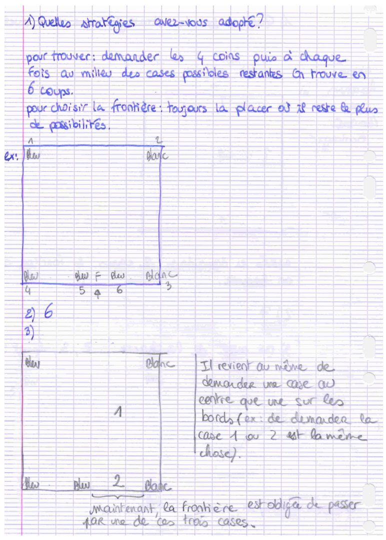
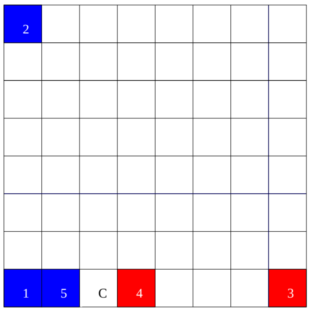


FIG. 9 – Réponses de l'autre élève du groupe 3

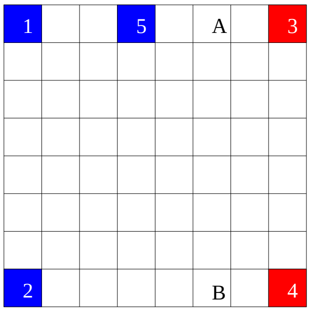
2.4 Groupe 2

Ce groupe commence par jouer de cette manière :



Les chercheurs concluent alors que la frontière est diagonale passant par la case *c*. (En fait ils croient que le dernier coin du carré est de couleur bleu car ils ont oublié d'enlever le jeton qui se trouvait dessus.) Le donneur leur dit alors que non et leur dit qu'ils n'ont pas interrogé le dernier coin, ils l'interrogent alors. Le donneur lui donne la couleur rouge. Ils concluent que la frontière est horizontales passant par la case *c*.

Ils jouent alors la partie suivante :



puis pour le coup 6, ils hésitent entre la case A et B :

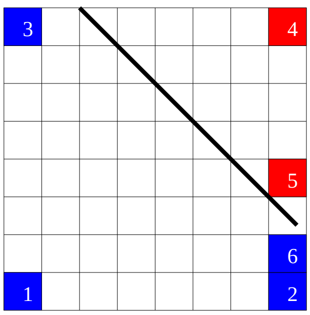
Franchement, ça change.

Non, ça ne change rien.

Et il joue la case B. Ils hésitent alors entre une frontière diagonale et verticale puis se mettent d'accord sur la verticale. Un des élèves dit alors :

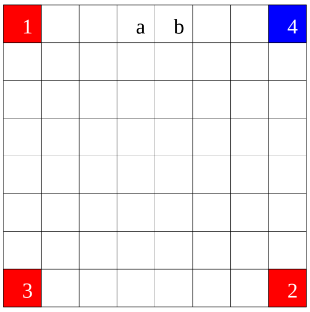
Cela revient au même, on a 6 coups.

Ils continuent en jouant la partie suivante :



Ils concluent que la frontière est la droite diagonale en passant le doigt dessus.

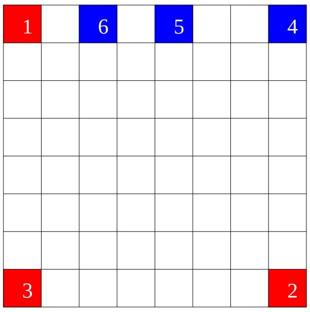
Ils jouent la partie suivante :



Ils hésitent entre la case a et la case b, un chercheur dit alors :

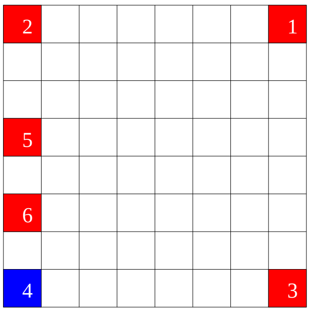
Ouè, c'est pareil.

Ils jouent finalement sur la case b :



On a encore fait 6.

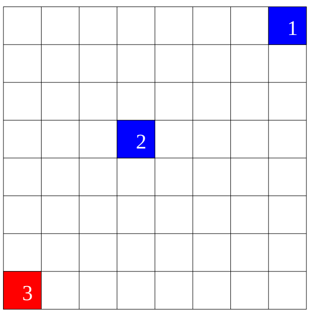
Ils jouent ensuite la partie suivante :



Tout le temps 6.

On peut pas changer, c'est impossible avec les techniques.

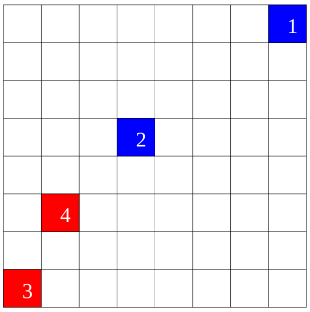
Ils commencent à jouer de cette manière :



Puis, un des élèves dit alors :

> Cela marche en fait.

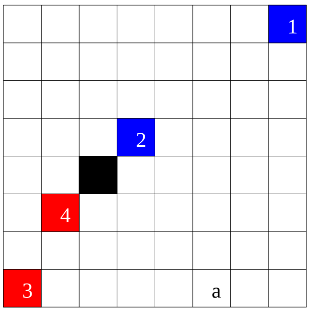
Ils jouent ensuite le coup suivant :



Les élèves semblent alors avoir une la discussion sur est ce que la frontière est verticale ou diagonale en passant leurs doigts plusieurs fois dessus (son pas assez bon pour retranscrire la discussion). Ils concluent alors que la frontière est diagonale. Le donneur dit alors :

> Vous n'avez pas trouvé.

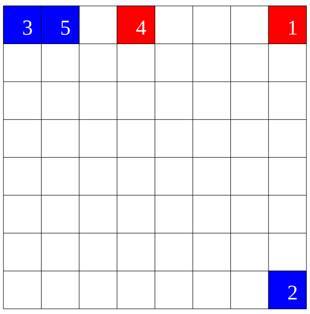
Les chercheurs jouent alors de cette manière :



Ils interrogent ensuite la case a, ce qui leur permet de conclure. Un des élèves dit alors :

> 1, 2, 3, 4, 5, 6, tu ne peux pas trouver plus

Ils jouent une nouvelle partie de cette manière :



Avant de jouer le coup 4, ils ont la discussion suivante :

> Si on avait à choisir cela ne changerait rien (en montrant la case a et 4)

Après avoir trouvé la frontière, un des élèves demande :

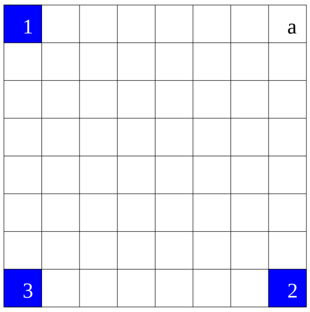
> Combien de coups ?

> 5.

> Ouais mais c'était un coup de chance. Si là c'était bleu...(en montrant la case 1), on aurait pas fait 5.

C'est impossible.

Ils jouent une nouvelle partie de cette manière :



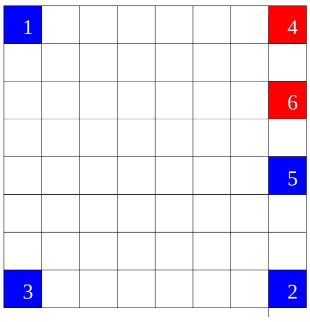
Ils interrogent ensuite la casse a, un chercheur dit :

rouge ?

Le donneur répond :

Si je dis bleu, il n'y a pas de frontière.

Ils finissent la partie en jouant de cette manière :



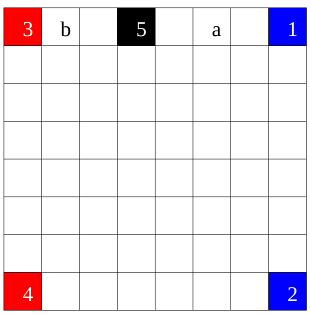
Ils ont alors la discussion suivante :

Encore 6, c'est pas possible même si tu changes de frontière c'est impossible avec la technique des 4 coins.

Tu peux pas la changer après le quatrième.

Mais si tu changes la frontière après tu peux pas, car après les 4 coins, tu peux pas changer de couleur.

Ils jouent la partie suivante :



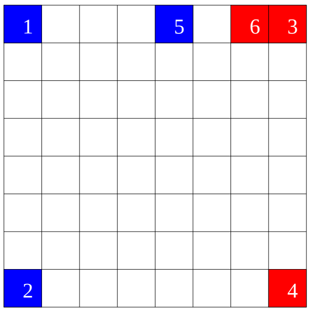
Ils ont alors le dialogue suivant :

5 coups.

Si t'as pas trouvé la frontière ici (case noire), tu mets là (case a) ou là (case b).

Il faut toujours commencer dans le milieu

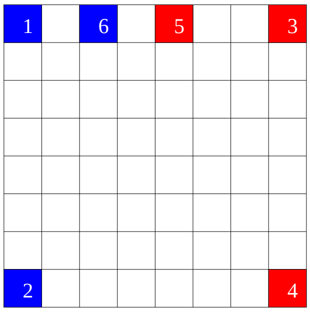
Ils jouent la partie suivante :



Un des élèves dit :

Encore 6 et si c'était rouge ? (En pointant la case 5)

Ils jouent de cette manière :



On fait encore 6, impossible.

6 coups, ça marche à chaque fois.

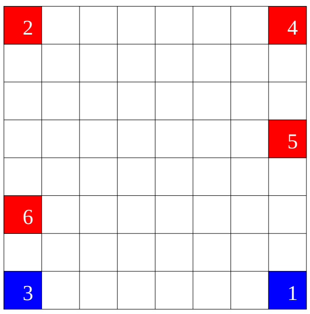
Tu te rappelles, tout à l'heure j'ai trouvé en 1 coup.

Non, 2 coups

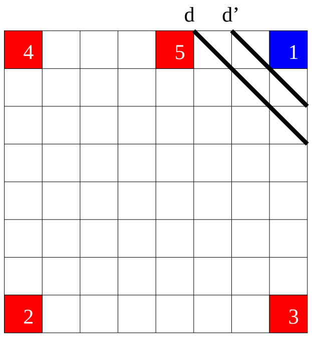
C'était que de la chance. On a fait ça, ça, c'est bon y'a pas de frontière

---

Ils jouent la partie suivante :



Puis la partie suivante :



Le chercheur après le coup 5, dit alors que la frontière est d. Les donneurs de couleur disent alors que non c’est la diagonale d'.

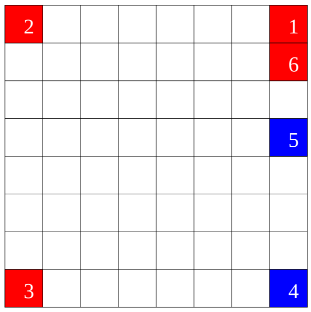
Le chercheur dit :

On a fait en 5 coups.

Les donneurs répondent :

Non, 6.

Ils jouent ensuite la partie suivante :



O :

Alors vous en êtes où ?

E :

Même si on change, on va tout le temps trouver en 6.

O :

Donc vous trouvez tout le temps en 6 même en changeant ?

E :

Oui

O :

Donc qu’est ce que cela à changer de changear ?

E :

Et ben rien, en fait après les 4 coups du début dans les 4 coins, cela peut pas être dans un autre sens que celui où elle était déjà.

O :

C’est à dire votre stratégie avant elle marche encore. Mais est ce que c’est la meilleure, est ce qu’on peut pas faire 5 ?

E :

Pas avec ce qu’on trouve.

E :

Avec un coup de chance peut être.

E :

Oui avec des coups de chances on peut. Si on tombe sur des frontières.

O :

Vous dîtes qu'avec des coups de chance c'est possible même si l'autre joue...

E :

Si il change, sinon non.

E :

Si il change ce sera toujours en 6 coups.

O :

Si il change, c'est toujours 6, si il change pas on peut faire moins, c'est ça que vous dîtes ?

E :

Oui

O :

Et ça vous savez le prouver que 6 c'est le minimum ?

E :

oui

O :

Et tu fais comment pour le prouver ?

E :

...

O :

C'est quoi ta preuve ? Comment tu me convaincrais qu'on ne peut pas faire mieux que 6 ?

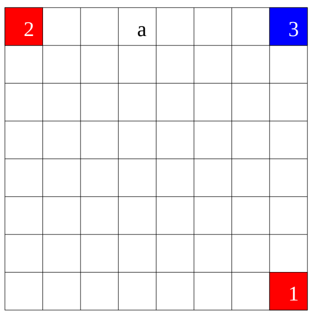
E :

Faudrait le montrer en jouant.

O :

Ben vas y. Jouer

Ils jouent de la manière suivante :



Un des chercheurs va pour interroger le quatrième coin quand l'autre chercheur lui dit :

Attends.

O :

Donc là vous avez 3 coins...

Le donneur :

Là ils peuvent le faire en 5 coups. Parce que là ça sert rien (en montrant le quatrième coins).

O :

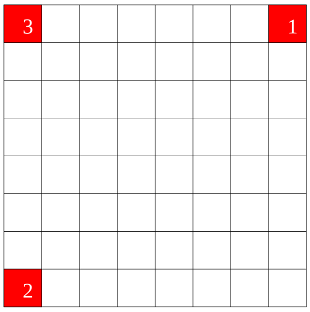
En 5 coups ? Comment vous faîtes ?

Un des élèves pointes la case a.

E :

Attends on recommence

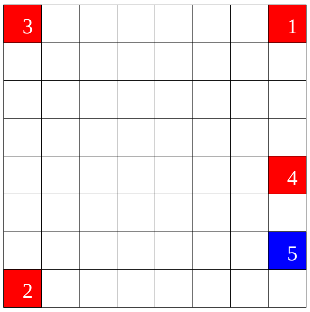
Ils jouent alors de cette manière :



Puis un des chercheurs dit :

Là en fait, tu ne fais pas le coin, tu commences tout de suite.

Ils jouent alors de cette manière :



E :

On a trouvé en 5 coups.

O :

En 5 coups alors, tu ne peux pas le faire faire en 6 ?

E :

Ben non. Parce que [pas compris]

E' :

Si il y avait eut trois rouges.

E :

Oui mais j'aurais su que c'était là. (en montrant le coin non interrogé)

O :

Ben non, pas forcément. Si c'est tout blanc.

E' :

Soit y'a pas de frontière, soit elle est là (en montrant le coin)

O :

Il y a le cas où il n'y a pas de frontière.

E :

Ah ouais.

Ils remplacent alors la case 5 bleue par une case rouge.

E :

S'il n'y a pas de frontière, on peut le faire en 4.

O :

Attends, tu me dis quoi là ?

E :

Si il y a une frontière on peut le faire en 5.

O :

Si t'es sûr qu'il y a une frontière en gros, on peut le faire en 5.

E :

Si celui qui met la frontière, il leur met, il la laisse pas en dehors, c'est sûr on peut faire en 5 coups.

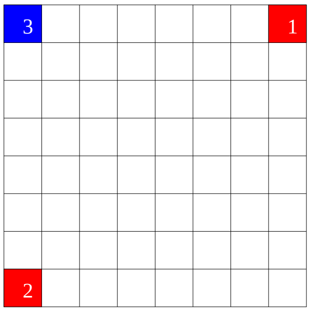
O :

Et tu vas faire comment ?

E :

On commence par les 2 coins opposés. Puis on interroge un autre coin par exemple celui-ci.

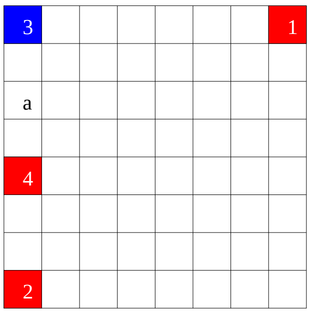
Ils font la manipulation suivante :



E :

Là on sait déjà que c'est diagonal. Et donc on commence au milieu là.

Ils jouent de cette manière :



Avant de jouer sur la case a, E dit :

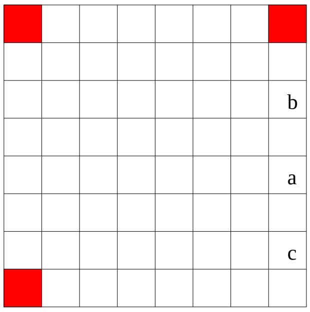
De toute façon c'est soit frontière, rouge ou bleue et...

Le donneur donne alors la couleur bleue à cette case. Ce qui leur permet de conclure.

O :

Ok, donc là vous avez terminé en 5. Et maintenant, si celui là il est rouge (en montrant la case 3)

Ils se retrouvent avec la configuration suivante :



E :

Si on est sûr qu'il y a la frontière, s'il ne l'a pas sortie du terrain. On commence toujours au milieu (case a). Si il est bleu, on sur celui du milieu (case b)

E' :

Et si tu mets blanc (en montrant la case a)

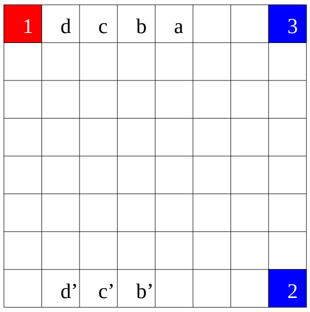
E :

C'est là qu'on va le mettre(case c)

O :

Donc là vous m'avez convaincu, que s'il y a forcément une frontière, on le fait en 5 coups. Ce serait bien si vous pouviez écrire ça.

Le groupe essaye alors de jouer de cette manière :



E_1 :

Et il y a une frontière ?

E_2 :

Oui il ya une fronritère ben c'est sûr qu'il y a une frontière.

E_1 passe son doigt sur une colonne du quadrillage.
E_2 dit :

Elle peut être en diagonale aussi.

E_3 :

Elle peut être diagonale et verticale.

E_2 :

Si ça c'est bleu (en montrant la case a)

E_1 :

Si c'est bleu c'est diagonal mais on ne le sait pas.

Ils donnent alors la couleur bleu à la case a.
E_3 :

Et ben voilà, soit là, soit là et là (en montrant les cases b, d et$d$)

E_1 :

Mais alors comment on sait si elle est diagonale ou verticale.

E_3 :

Il faut savoir celle là (en montrant les cases b',c' et d')

E_2 :

On peut pas faire en 5, tout à l'heure on a eut de la chance parce que toutes les 3 elles étaient blanches.

E_1 :

Si on a de la chance et que les 2 opposés ils sont blancs.

E_2 :

Il faut qu'il y ait les 3.

E_1 :

Non (montre une configuration avec les 2 coins opposés de même couleur et un troisième coin de couleur différente), elle est diagonale.

E_1 :

En fait, il faut que les coins opposés soient de même couleur.

O :

Qu'est ce que vous faîtes ?

E_2 :

En fait, on a donné un contre-exemple

O :

Pourquoi on peut pas faire en 5 ?

E_2 :

En fait, si on a de la chance et si on sait que les 2 sont rouges (en montrant 2 coins opposés) et que de l'autre côté (en montrant un autre coin) il est d'une autre couleur, on peut savoir si elle est diagonale, on peut le faire théoriquement. Mais si la couleur elle est pas même pour les opposés, cela peut être soit verticale soit diagonale.

O :

Mais ceci c'est par rapport à votre stratégie c'est pas par rapport à n'importe quelle stratégie c'est à dire quelqu'un peut venir et vous le faire en 5 peut être ?

E :

C'est sûr en 6.

O :

C'est sûr cette stratégie fait en 6, mais est ce qu'on peut faire mieux ?

Les élèves rédigent ce qu'ils ont fait.

Reprise de la recherche.

O :

Est ce que vous avez fini d'écrire ?

E :

Oui

O :

Alors la question que je vous pose maintenant est : est ce qu'on peut faire en 5 ?

E :

Pas d'après ce qu'on a trouvé.

O :

Votre stratégie ne permet pas de trouver en 5, mais est ce que d'autres stratégies le permettraient ?

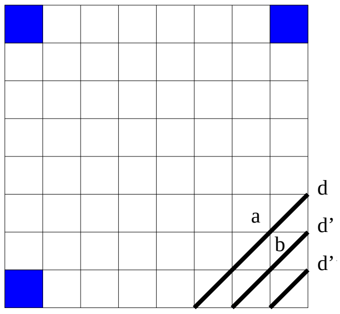
E :

Je crois pas.

O :

Donc si vous croyez que c'est possible de trouver une stratégie en 5, il faut en chercher une.Puis si vous pensez vraiment que c'est impossible, ce qu'il faut poser comme question c'est pourquoi ce n'est pas possible en 5.

Ils jouent alors de la manière suivante mais sans les rôles. Ils construisent la configuration suivante :



E_2 :

Mais toujours le problème c'est s'il y a un bleu là.

E_3 :

Si là c'est bleu (case a)

E_2 :

C'est là, là ou là (en passant son doigt sur d, d' et d'')

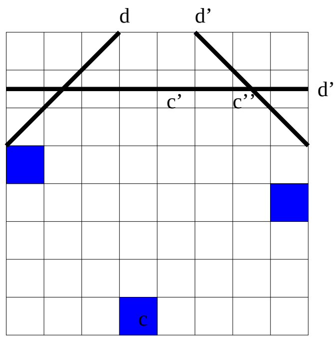
E_3 :

Après on y met ici (case b)

E_2 :

Mais il y a toujours le problème de quand il n'y a pas de frontière.

E_3 essaye alors cette configuration :



E_1 :

Elle peut être en diagonale comme ça (d), comme ça (d') ou comme ça(d'')

Moment où il ne se passe rien de 30 secondes.

E_1 :

T'as pas besoin de celui là (il enlève le jeton se trouvant sur la case c)

E_3 :

Attends, attends, pourquoi ?

E_1 :

Parce que c'est sûr qu'elle est de ce côté. (en montrant la partie supérieure du carré.)

E_3 :

Ah oui.

E_2 :

Elle peut être là (en montrant la partie inférieure du carré.)

E_3 :

Non...

E_1 :

Ah si.

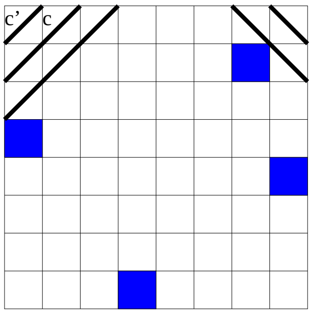
E_3 redonne la couleur bleue à la case c.
E_3 :

Si là c'est bleu... (case c)

E_2 :

C'est pas là (partie inférieure du carré), c'est là (partie supérieure)

E_2 donne alors la couleur bleue à la case c'.
Puis ils enlèvent la couluer bleue à la case c'. E_1 donne alors la couleur bleue à la case c".
Ils se retrouvent avec cette configuraton :



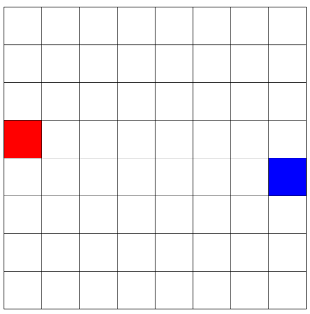
E_1 :

Parce que là t'as des diagonales (coin supérieure droit) [inaudible], cela ne peut plus être que ça ça (coin supérieur gauche en passant son doigt sur les diagonales) ou ça (montre le coin supérieur droit.)

E_1 :

Là tu demandes (en montrant la case c), si elle est bleue c'est pareil.

E_1 donne alors la couleur bleue à la case c'. Puis E_2 l'enlève.
Ils jouent alors avec la configuration suivante :



E_2 elle peut être comme ça ou comme ça. (en baalyant le carré horizontalement avec la main.)
O :

Alors là vous faîtes quoi ?

E :

On cherche une stratégie en 5.

O :

Et alors ?

E :

Cela donne tout le temps la même chose.

0 :

Cela veut dire quoi ?

E :

6 coups, toutjours le problème s'il y a pas de frontière.

O :

Alors en 5 c'est possible ou pas ?

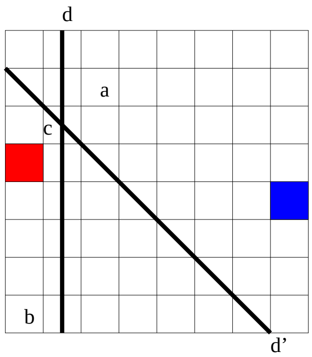
E :

Pas encore.

O :

Ok je vous laisse chercher.

Ils continuent alors la partie qu'ils avaient commencé précédemment. E_1 et E_2 veulent interroger la case a, E_3 la case b :



Finalement, ils donnent la couleur bleu à la case a.

E_1 :

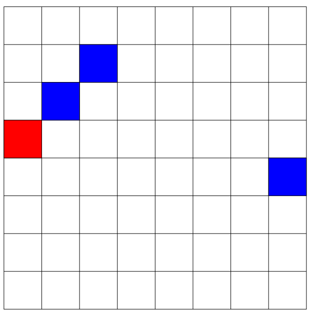
Cela ne peut être que diagonale ou horizontale

E_2 montre les droites d et d'

E_1 :

Là tu demandes celui là (en montrant la case c)

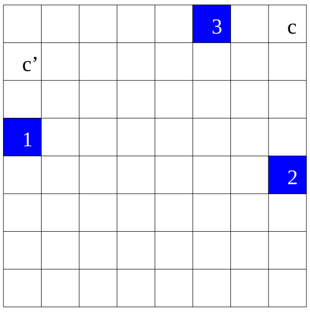
Ils se retrouvent avec la configuration suivante :



E_1 :

Vas y on réessaye.

Ils jouent alors une partie avec un donneur et un chercheur de la manière suivante :



Discussion sur les zones où la frontière pourrait être.

E_3 :

et si tu mets là (déplace le jeton de la case 3 sur c) là c'est impossible en montrant le coin supérieur droit.

E_2 :

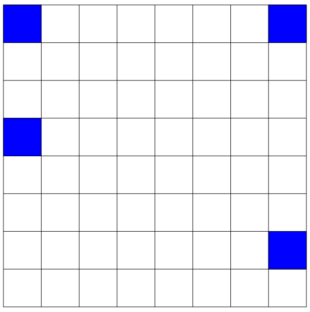
Mais là c'est obligé que cela soit ce côté (partie inférieure) ou là (partie supérieure gauche.)

E_3 déplace alors le jeton bleu de la case 1 sur la case c'. Et dit :

Si tu le mets là, comme ça ce côté... (partie inférieure)

Ils recommencent une partie mais nous n'arrivons pas à voir les coups qu'ils jouent car un élève est devant la caméra mais il semble jouer sans mettre les jetons sur les coins.

Nous pouvons apercevoir à la fin la configuration suivante :



E_2 dit alors :

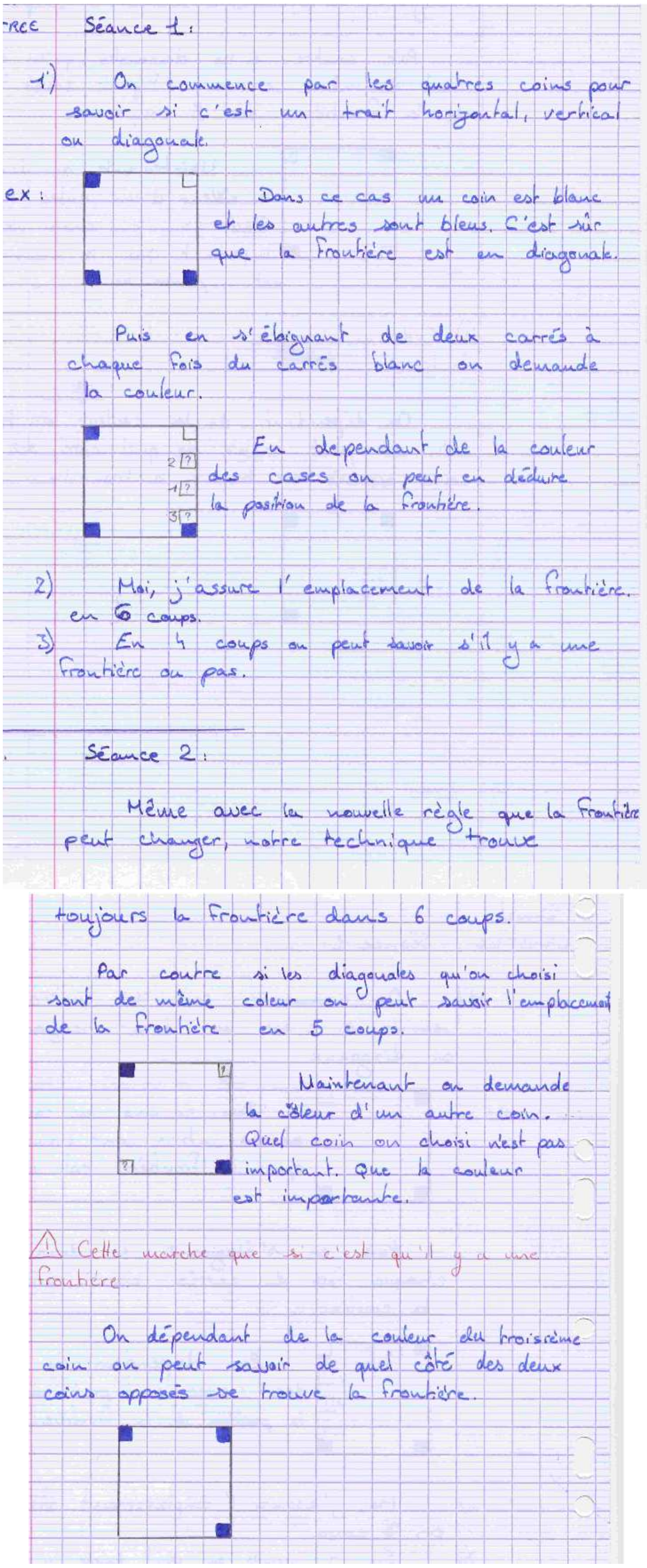
Elle ne peut pas être ici (partie supérieure), c'est obligé qu'elle soit là, (partie inférieure)

E_1 :

Mais ça change tout. Vous changez tout à chaque fois, il faut recommencer.

FIN DE LA SEANCE.

2.4.1 Ce qu'ils ont écris sur leurs feuilles :



Séance 1 :

1) On commence par les quatres coins pour savoir si c'est un trait horizontal, vertical ou diagonale.

ex : Dans ce cas un coin est blanc et les autres sont bleus. C'est sûr que la frontière est en diagonale.

Puis en s'éloignant de deux carrés à chaque fois du carrés blanc on demande la couleur.

En dependant de la couleur des cases on peut en déduire la position de la frontière.

2) Moi, j'assure l'emplacement de la frontière en 6 coups.

3) En 4 coups on peut savoir s'il y a une frontière ou pas.

Séance 2 :

Même avec la nouvelle règle que la frontière peut changer, notre technique trouve toujours la frontière dans 6 coups.

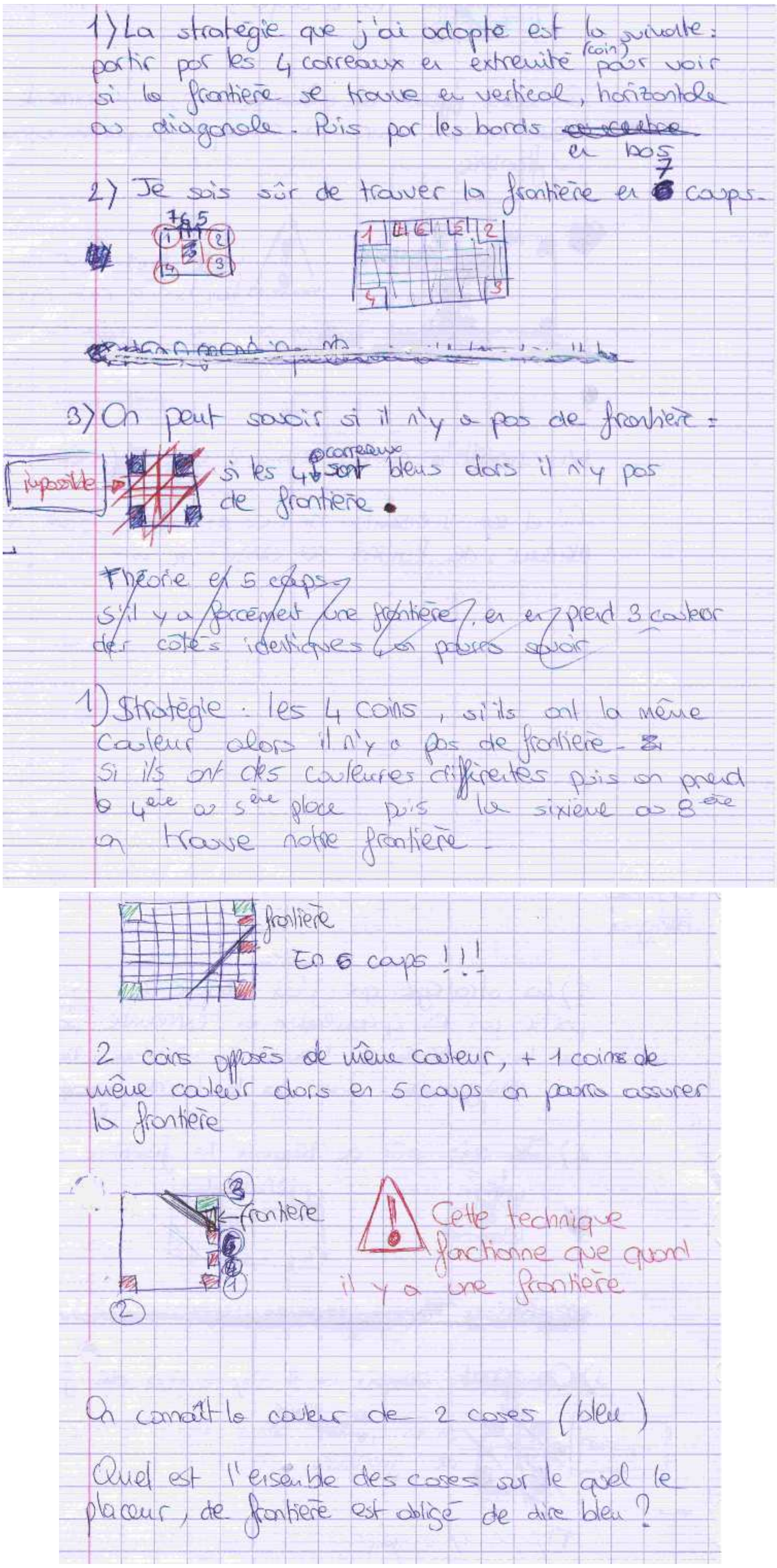
Par contre si les diagonales qu'on choisi sont de même coleur on peut savoir l'emplacement de la frontière en 5 coups.

Maintenant on demande la côleur d'un autre coin. Quel coin on choisi n'est pas important. Que la couleur est importante.

⚠ Cette marche que si c'est qu'il y a une frontière.

On dépendant de la couleur du troisième coin on peut savoir de quel côté des deux coins opposés se trouve la frontière.

Fig. 10 – Un élève


1) La stratégie que j'ai adopté est la suivante : partir par les 4 carreaux en extrémité (coin) pour voir si la frontière se trouve en vertical, horizontale ou diagonale. Puis par les bords en bas

2) Je suis sûr de trouver la frontière en ~~6~~ 7 coups.

3) On peut savoir si il n'y a pas de frontière : si les 4 carreaux sont bleus alors il n'y pas de frontière.

impossible

Théorie en 5 coups : s'il y a forcément une frontière, on prend 3 couleur des côtés identiques on pourra savoir

1) Stratégie : les 4 coins, s'ils ont la même couleur alors il n'y a pas de frontière. Si ils ont des couleurs différentes puis on prend la 4ème ou 5ème place puis la sixième ou 8ème on trouve notre frontière.

frontière

En 6 coups !!!

2 coins opposés de même couleur, + 1 coins de même couleur alors en 5 coups on pourra assurer la frontière

frontière

Cette technique fonctionne que quand il y a une frontière

On connaît la couleur de 2 cases (bleu)

Quel est l'ensemble des cases sur le quel le placeur, de frontière est obligé de dire bleu ?

Fig. 11 – Un autre élève


J Seance 1

1) La stratégie que j'ai adopté et de commencer par les coins comme ça on peut voir à peu près où se trouve la frontière; et si on trouve un des quatre coin blanc on rajoute deux carreaux max trois et on trouve la frontière

2) ON E 6 ; 7 max je trouve la frontière . et si il n'y a pas de frontière je la trouve en quatre coup

Seance 2:

1) C'est la même chose ; on commence par les quatre coins comme ça on peut savoir la position de la frontière (verticale, horizontal ou diagonale. puis on rajoute deux carreaux max pour trouver la frontière.

2) en 6 coup j'en suis sûr de trouver la frontière.

3) ON a trouvé une autre solution: on commence par les trois coins; si les trois coins ont la même couleur, on rajoute deux carreaux puis on trouve la frontière en 5 coups mais ça si il existe une frontière par contre si il n'y a pas de frontière, on la trouve en 6 coups

Fig. 12 – Le dernier élève du groupe

3 Séance 3

Nous avons commencé la séance par une mise en commun :

O :

La dernière fois, je ne sais pas si vous vous souvenez mais on vous avait posé une question ?

E :

Oui

O :

Vas y lis le.

E :

Quelle est l'ensemble des cases sur lequel le placeur de frontière est obligé de dire bleu si il y a 2 cases bleues ?

O :

Est ce que vous y avez réfléchi ?

E :

Oui

O :

Et c'est quoi votre réponse ?

E_{g_1} :

Ben on fait des zones. Ca dépend, entre 2 trucs on peut faire des zones par rapport aux diagonales dans lesquelles ils sont et les verticales et donc l'endroit délimité par les 4 zones et par... en bout... si on donne un exemple...

O :

J'ai rien entendu tu peux redire ?

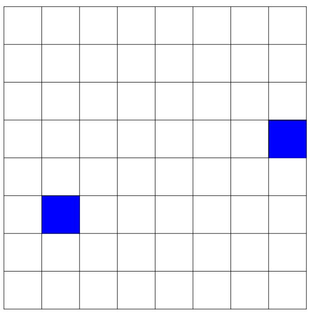
E_{g_1} :

Ca dépend de quand on a 2 points bleus il y a toujours des diagonales... enfin on peut faire passer des diagonales et des verticales ou des horizontales par là et...donc par ces diagonales, on définit, il y a un seul endroit qui compromet ben vraiment, entre les différentes diagonales horizontales ou verticales et donc ça comprend une zone.

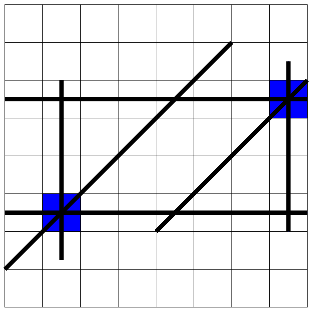
O :

Ouais tu veux pas venir, par exemple si je coloris ces 2 cases, tu fais comment ?

O fait le dessin suivant :



Un des élèves du groupe 1 E1 vient compléter le dessin de la façon suivante :



O :

Et donc qu'est ce que t'as fait ?

E1 :

On trace toutes les verticales, enfin on peut aussi tracer ces diagonales là mais elles servent un peu à rien car elles délimitent autre chose et les diagonales qui vont dans la même direction et puis on prend ce qu'il y a entre les horizontales et les diagonales.

O :

Pourquoi tu fais ça ?

E1 :

Parce qu'on est sur que dans cette zone là c'est toujours bleu.

O :

Pourquoi t'es sûr que dans cette zone là, il ne pourrait pas y avoir un rouge ?

E1 :

Parce que si y'avait un rouge là, dans n'importe quelle frontière qu'il serait autour, y'a un problème parce que les 2 seraient d'un même côté de la frontière et ce n'est pas possible.

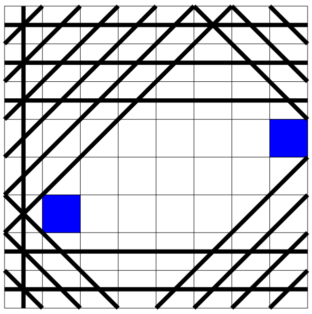
O :

Ouais, ouais en fait...

E1 :

Ce qu'on fait c'est qu'on prend un endroit, avec les verticales on définit une zone qui a pas, dans laquelle sont compris, à partir de là, je ne sais pas comment l'expliquer c'est de la logique, cela permet de comprendre tout ce que, toutes les zones qui sont pas...

L'autre élève du groupe 1, E2, passe au tableau. Et fait le dessin suivant :



O :

tu fais comment ?

E2 :

Là je vois que..., on fait toutes les frontières... on dit que les carrés bleus sont les extrémités de la zone, on fait toutes les frontières possibles qu'elles soient horizontales ou verticales et ensuite il y a celles là. Donc là on est sûr par exemple...

E1 :

C'est le même principe sauf que le mien, je pars de l'intérieur et elle part de l'extérieur.

O :

C'est juste que elle prend ces frontières qu'elle fait passer, elle dit quand je passe sur cette frontière là...

E2 :

En fait on cherche à mettre toutes les frontières possibles, donc on met que les extrémités dans celle là

O :

Tu prends tes points et tu regardes toutes tes frontières possibles et ça ça va déterminer une zone où t'es sûr que les points sont bleus.Et vous qu'est ce que vous en pensez ? est ce que vous pensez que c'est vrai

E :

Ben c'est vrai

O :

Pourquoi ?

E :

Ben c'est juste.

O :

Ouais mais pourquoi ?

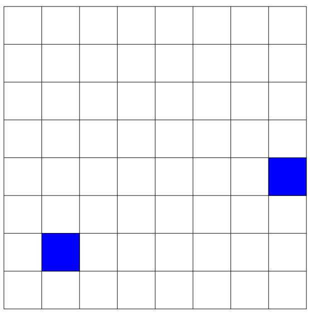
E1 :

C'est vrai parce que comme cela délimite les frontières possibles... quand on délimite, le seul endroit qui comprend toutes les... les autres frontières peuvent pas passer par des frontières... toutes les frontières impossibles peuvent pas passer outre les frontières, elles peuvet pas rentrer dans les frontières impo... Je ne sais pas comment faire avec ça mais c'est un peu l'idée que comme on a des frontières impossibles parce qu'elle passe par un bleu ça ne peut pas être une frontière donc comme on est obligatoirement un côté bleu et un côté blanc. Si ben, ces frontières impossibles elles délimitent un endroitou bien si là elles délimitent un endroit, il y a un obligatoirement un côté bleu et un côté rouge. Et donc du côté où il y a les carrés bleus c'est obligatoirement bleu.

O :

Oui c'est ça. C'est que... pourquoi ça marche. Quand vous mettez vos 2 cases là et là.

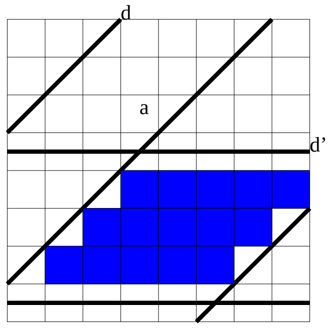
O fait le dessin suivant :



O :

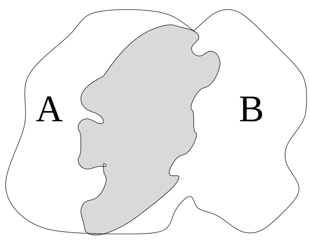
Si je prends cette case et cette case. Donnc je dis : il se peut que j'ai une frontière qui soit comme ça, par exemple cette diagonale là (dessine d). Donc ce que je sais c'est que si j'ai cette frontière forcémment comme ici il y a un bleu, tout ce qui est de ce côté va être bleu et tout ce qui va être de l'autre côté va être rouge. Donc pareil si je prends cette frontière là (dessine d'), c'est une frontière possible. Tout ce qui est ici va être bleu tout ce qui est en haut va être bleu et tout ce qui est en bas va être rouge. Donc ça ça nous délimite en fait une intersection parce que je peux mettre cette frontière là et cette frontière là. Je sais que ... par exemple ce point là (a) pour cette frontière là. Ce point là il peut être bleu mais cette frontière là me dit que ce point là n'est pas forcémment bleu car je pourrais tracer une frontière comme ça qui fait que ce point là est rouge. Donc en fait ce que je fais c'est que je prends à chaque fois les frontières que je peux placer sur mon quadrillage. Donc en fait c'est toute cette zone là qui est bleue car je ne peux pas placer d'autres frontières possiles

O colorie la zone :

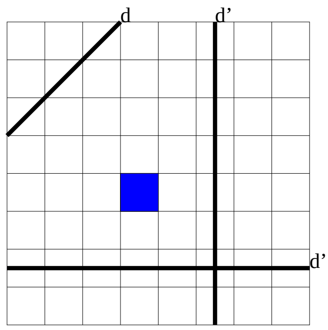


O :

Donc en fait, ça on peut dire que cette zone, c’est quand vous avez une frontière, elle délimite votre zone en 2 parties A et B et donc en gros une droite dans le plan. Vous savez ce que c’est le plan ? Le plan c’est le tableau mais infini, donc si je trace une droite sur le tableau elle me sépare le tableau en 2 parties. C’est ce qu’on appelle des demi-plans, ce qu’il se passe ici c’est qu’une frontière vous sépare votre quadrillage en 2 demi-plans ce qui fait qu’on prend l’intersection des demi-plans. Donc l’intersection c’est quand j’ai une boule A et... l’intersection de 2 ensembles c’est ce truc là et donc si je rajoutes un ensemble c’est ce truc là.

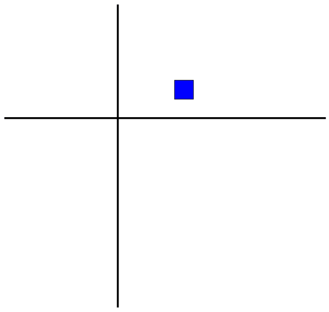


Puis O dessine la figure suivante :



O :

Donc ici par exemple, je sais que si je trace une frontière (d) comme ça une frontière comme ça (d’) et une frontière comme ça (d”), je sais que tout ce qui va être par rapport à cette droite là est bleu tout ce qui est en haut de cette droite est bleu et donc tout ce qui est en haut de cette droite bleu et donc l’intersection c’est ça, c’est tout ce qu’il y a là. Par exemple, si j’ai un demi-plan comme ça et un autre demi-plan comme ça l’intersection cela va être quoi ?

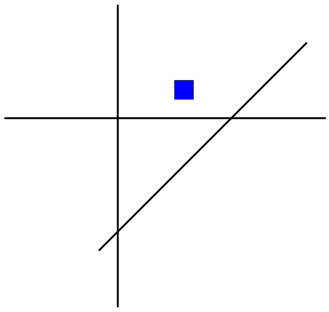


E :

Le quart qu'il y a à droite

O :

Et si je rajoute une troisième droite comme ça et que je dis que c'est tout ça qui est bleu,ce la va être



E :

Toute la partie d'en haut.

O :

Voilà, c'est ce qu'elles ont fait avec leurs frontières, elles prenaient à chaque fois l'intersection des demi-plans délimités par les frontières possibles. Vous avez des questions ? est ce que vous sauriez réexpliquer cela ?

E2 :

J'aurais du mal à réexpliquer mais j'ai compris.

O :

Je prends mes frontières possibles et je regarde quelles sont les couleurs par rapport à ces frontières et je prends l'intersection de tout ce qu'il va être bleu si j'ai du bleu. Donc ça c'est aussi un résultat sur le jeu, donc qu'est ce qu'il se passe. Si je dis bleu là et bleu là, qu'est ce que le chercheur de frontière n'a pas intérêt à faire ?

E :

Ben a demandé une de ces cases dans cette zone là.

O :

Donc il a pas intérêt à demander une case dans cette zone là et par contre le placeur de frontière qu'est ce qu'il doit faire si il demande une case là ?

E :

Il doit dire bleu.

O :

Voilà, il est obligé de dire bleu parce que s'il ne dit pas bleu on voit qu'il a triché, il n'y aura pas de frontière possible. Donc voilà. La semaine dernière vous avez cherché comment trouver la frontière en 5 coups. Vous aviez tous une stratégie qui marchait en 6 coups et vous cherchiez une stratégie en 5 coups.

E_{G_2} :

Si c'est sûr qu'il y a une frontière on peut le faire en 5.

O :

Tu peux venir nous expliquer ?

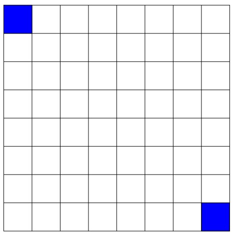
Ils préfèrent réviser.

3.1 Groupe 2

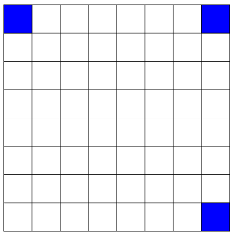
Ce groupe a commencé par essayer de répondre à la question que nous avons posé :

> Est ce que vous êtes sûrs que si l'on sait qu'il y a une frontière sur le plateau alors on peut la trouver en 5 coups ?

Ce groupe a commencé par jouer de cette manière :



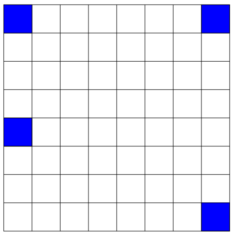
Puis a fait ceci :



Ils ont alors dit :

> Si on est sûr qu'il y a une frontière alors elle est diagonale ici.

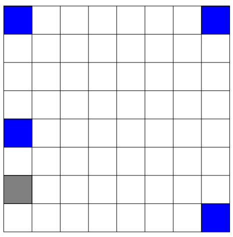
Ils jouaient ensuite sur cette case avec cette couleur :



Puis, ils ont dit :

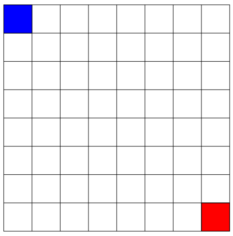
> Un coup suffit pour trouver la frontière.

Ils jouaient alors sur la case grisée :



> Si elle est bleue alors la frontière est le coin, sinon la frontière passe entre les cases bleues et rouges.

Ensuite, ils ont changé la couleur des 2 premières cases et ont essayé de finir en 5 coups avec cette configuration :



Ils ont alors jouer sur les coins, mais ils n'ont pas réussi à trouver la frontière en 5 coups.
O leur a alors posé la question suivante :

> Pensez-vous encore que l'on peut trouver la frontière en 5 coups si on est sûr que la diagonale est présente ?

Ils ont répondu :

> Lorsque les 2 coins opposés sont de même couleur alors 5 coups, ça marche. Mais lorsque les coins opposés sont de couleurs différentes, nous n'avons pas réussi en 5 coups.

O :

> Est ce que vous pensez que l'on peut trouver la frontière en 5 coups ?

G2 :

> Nous ne savons pas vraiment.

O :

> Si vous pensez que c'est possible alors vous pouvez essayer de trouver une stratégie qui vous permette de trouver la frontière en 5 coups. Sinon, si vous ne croyez pas que c'est possible, vous pouvez essayer de montrer que ce n'est pas possible avec 5.

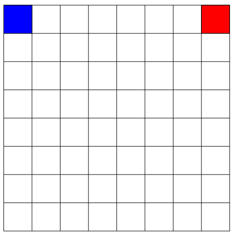
5 minutes après :
O :

> Vous essayez de faire quoi ?

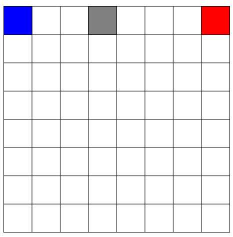
G2 :

> On cherche une stratégie à 5.

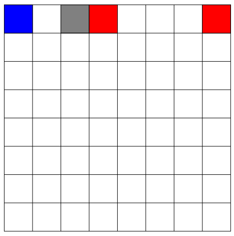
Ce groupe a jouer par moment de cette manière pour trouver une stratégie à 5 :



Ensuite, ils ont joué sur la case grise :



> Si cette case est rouge. On joue ici



Cette case est forcément rouge.

Un des élèves en décrivant les frontières avec un de ses doigts dit :

La frontière est soit comme ça (horizontale), comme ça (diagonale) ou comme ça (diagonale).

Après plusieurs essais, ils n'ont pas réussi à trouver la frontière en 1 coup à partir d'une telle configuration.

Après 1h15 :

O :

Est ce que vous avez trouvé une stratégie qui marche en 5 coups ?

G2 :

Non.

O :

Est ce que vous pensez qu'on peut le faire en 4 coups ?

G2 :

Non, cela ne semble pas possible.

O :

Pourquoi ?

G2 :

On ne sait pas ...

Les élèves ont alors essayé de répondre à cette question.

3.2 Groupe 3 :

Le groupe 3 était toujours composé des 2 mêmes élèves.

Ce groupe a commencé par essayer de trouver quels étaient les 3 ou 4 points de même couleur qui engendraient le plus de points de la même couleur :

O :

Qu'est ce que vous faîtes ?

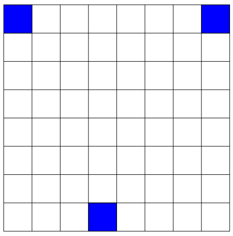
G3 :

On essaye de trouver où mettre des points de la même couleur pour qu'il y est le maximum de cases de cette couleur.

G3 :

Lorsqu'on a 3 points, cela forme un triangle.

Le groupe a alors la configuration suivante devant lui :



O :

Ce n'est pas vraiment un triangle qui est formé.

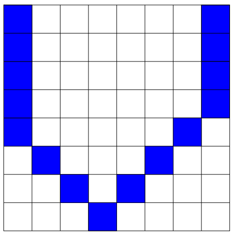
G3 :

Ben si, 3 points forment un triangle.

O :

Ici, ce n'est pas vraiment le cas.

O effectue alors la manipulation suivante :



O :

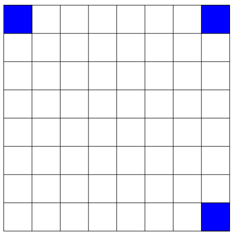
Ce n'est pas vraiment un triangle.

G3 :

Oui mais ce n'est pas grave. Ce qui compte c'est qu'il reste 2 coins. Alors on ne peut pas trouver la frontière avec seulement 2 coups car il y a trop de possibilités.

O :

On peut faire qu'il ne reste qu'un coin en mettant les 3 points ici :



G3 :

Dans ce cas c'est pareil, on n'arrive pas à trouver la frontière en 2 coups car il reste trop de possibilités.

Ce groupe a alors essayé de faire la même chose en utilisant 4 points. Ils se sont rendus compte que le plus grand ensemble que l'on pouvait engendrer avec 4 points était le plateau en entier. Mais ils ont dit :

G3 :

On ne peut pas trouver la frontière avec ces 4 coups car la personne en face ne va pas nous donner les 4 coins de la même couleur.

O :

Ok. Ce que vous venez de dire ne vous permettrez pas de démontrer qu'il faut au moins 4 coups pour trouver la frontière ?

G3 pas de réponses.

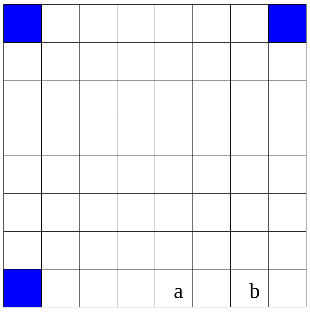
O :

En fait vous avez dit qu'avec 3 points on ne pouvait pas engendrer le plateau entier alors qu'avec 4 c'est possible. Donc il faut au moins 4 points pour conclure qu'il n'y a pas de frontière.

Le groupe a alors essayé durant le reste de la séance de montrer qu'il n'était pas possible de trouver la frontière avec 4 coups. Il semblerait d'après un observateur qui a suivit le groupe qu'ils ont donné des arguments permettant de montrer cela, mais qu'ils n'ont pas vu que ces arguments mis ensemble composaient une preuve du fait que c'était impossible en 4 coups.

3.3 Groupe 1

Début non disponible, la vidéo commence à ce moment là :



Ils ont alors dit :

Si c'est bleu (a) t'es obligé de jouer là (b)

Donc si c'est bleu (a) et si c'est bleu (b) alors la frontière est là (coin) ou il n'y a pas de frontière.

Ouè ben là t'en a 6. Si t'as pas de frontière t'en as 6 et si t'as une frontière t'en as 5.

O :

Vous pensez que c'est possible de trouver en 5 s'il y a forcément une frontière ?

E :

On vient de le vérifier, on fait pareil que l'autre sauf qu'au lieu de mettre 4 coins, on en met que 3.

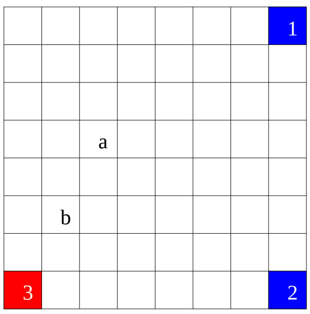
O :

Ouais mais si par exemple...

E :

On va jouer. Quelle couleur le coin là ?

O (donneur) et E (chercheurs) jouent la partie suivante :



E :

A ce moment là, la frontière elle est... Elle peut être comme ça (verticale) et comme ça (diagonale)

E décide de terminer la partie seul et d'interroger la case a :

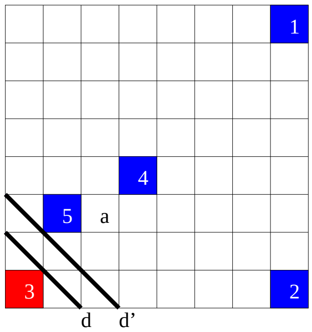
E_1 :

Tu demandes là (a), vas y demandes là (a)

La couleur bleu est donnée à a. Ils donnent alors la couleur bleu à b.

E_1 :

On sait que la frontière est là (d) ou là (d')



E_1 :

T'es obligé de demander, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Zut.

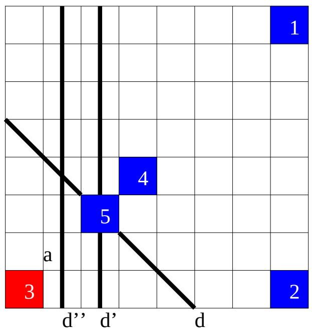
E_2 :

Ca marche pas.

E_1 :

Et si tu joues là (donne la couleur bleu à a).

E_1 utilise alors des crayons pour construire les droites d et d' suivantes :



E_1 :

T'es plus là (d) et plus là (d'). Donc la frontière en truc elle peut être juste là (d"). t'es d'accord avec moi ?

E_1 donne la couleur bleu à la case a.

E_2 :

1, 2, 3, 4, 5, 6

E_1 :

Non pas 6 parce que si elle est là ta frontière (d")...

E_2 :

Si la frontière est là ouais... On a demandé ça (4) et ensuite on a demandé celui là (5) ou celui là (a) ?

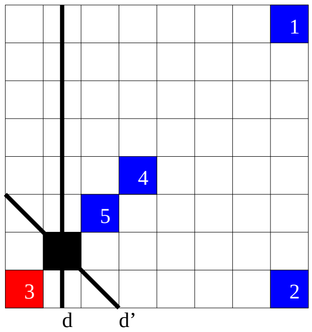
E_2 :

On a d'abord demandé celui là (5).

E_1 :

Ouais tu demandes d'abord celui là (5). Tu demandes d'abord celui parce qu'il délimite ta frontière, ta frontière est obligatoirement là (montre une zone vers le coin). Sinon après il ne te reste plus que les diagonales et tu demandes là (a). T'as ou frontière ou rouge... Non, non en 6 coups parce que si ça fait frontière, il te reste 2 coups.

E_1 donne la couleur noir à la case a, ils ont la configuration suivante sur leur plateau :



E_2 :

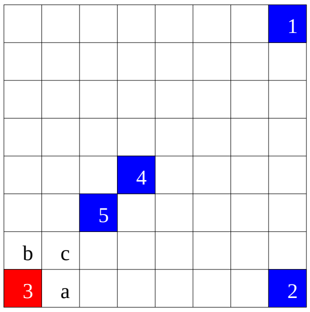
Là c'est frontière, c'est soit là (d) soit là (d').

E_1 :

pas 5

E_2 :

Donc que finalement faire les coins [inaudiable]



E_1 :

Attends, attends, et finalement si tu joues avec ça, si tu joues là (a).

E_2 :

Si tu joues là c'est pareil que de jouer là (b) et là (c). Ces 4 là, cest 3 là (a, b, c), ils sont pareils.

E_1 :

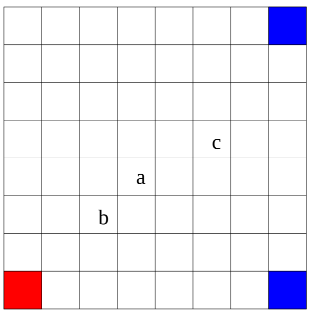
Ouais

E_2 commence à enlever les jetons du plateau.

E_1 :

Attends, attends, on recommence, recommences, recommences recommences. Laisses, laisses, laisses.

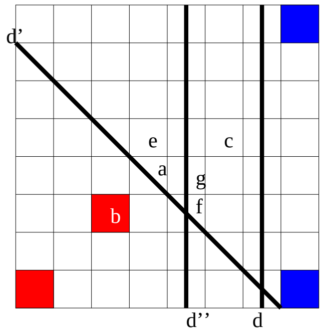
Ils ont alors la configuration suivante devant eux :



E_1 :

Et si au lieu de te poser la question là (a), je te pose la question là (b). Juste une idée mais si tu me dis rouge. Après je demande là (c)

E_1 donne la couleur rouge à la case (c) :



E_2 :

Il ne reste que ça. (d)

E_1 :

Et après t'as 2 possibilités. Par exemple si tu me dis bleu là (c).On va faire les possibilités, on va pousser la frontière petit à petit. Il reste ça (d') et ta frontière là (d'')

E_2 :

Donc ça veut dire que ta frontière elle est là quoi. (e)

E_1 :

Où là.(f)

E_2 :

Oui c'est la même chose...

E_1 :

Non

E_2 :

Non, c'est pas la même chose.

E_1 :

Là c'est l'intersection.

E_1 :

Si ça c'est bleu t'as 1 coup, si ça c'est blanc par contre

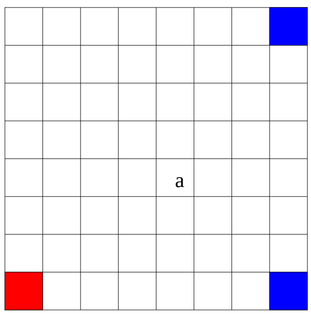
E_2 :

On sait ça ou pas ? (b)

E_1 :

Au début.

E_1 enlève le jeton rouge de la case b.
Ils ont alors la configuration suivante sur leur plateau :



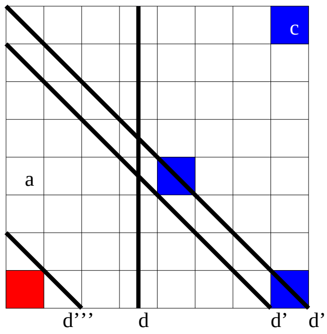
E_1 :

Si ça c'est bleu.(a) Ben tu l'as fait en 1, 2, 3, 4, 5 coups. Si ça c'est rouge (a), par contre...

E_2 :

Attends.

E_2 donne la couleur bleu à la case a et construit les droites d et d' avec des crayons :



E_1 :

Mais moi je m'en fous de ça.

E_2 :

S'il te plait j'essaye de visualiser le truc

E_1 :

Là y'a obligatoirement, c'est plus possible parce que ta frontière elle serait là (d''). Donc t'as juste ça (d). Attends. AH non non ! c'est différent.

E_2 :

Ben non c'est pas possible, parce qu'écoutes ta frontière elle peut toujours être là si t'as envie (d''').

E_1 :

Oui c'est parce que j'étais dans l'idée que si ça c'était blanc. (Semble montrer le coin c.). T'as raison. Mais ça ne te sert à rien.

E_2 :

Ca sert à rien de demander là. Pourquoi est ce qu'on ne demande pas ici au fait (a) ?

E_1 :

Parce que là (a), ça ne te dit rien sur les diagonales. Enfin, ça ne te sert à rien.

E_2 :

Si, si c'est bleu (a).Tu sais que c'est comme ça.

E_1 :

Une verticale.

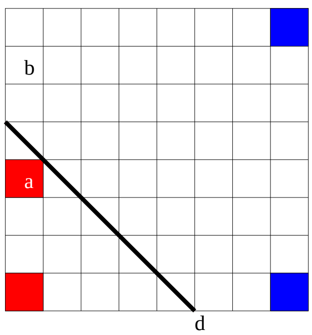
E_2 :

Une diagonale.

E_1 :

Oui et si c'est rouge, tu sais que c'est une verticale.

Ils ont alors le plateau suivant :



E_2 :

Et si c'est rouge, tu sais que c'est une verticale...Non pas obligé, cela peut être ça (d).

E_1 :

Ouais.

E_2 :

Donc là t'es en 4 coups. Attends

E_1 :

Tu la poses là. (déplace le jeton rouge de la case (a) vers le coin.)

E_2 empêche E_1 de déplacer le jeton vers le coin.

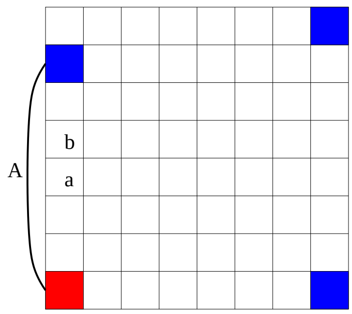
E_1 :

Tu poses là. (b), je te promets tu la poses là (b).

E_2 :

Ah ben oui, oui parce qu'ici t'as plus de diagonale. Ca marche plus. Par contre si elle est bleu, t'es obligé de t'avancer là pour voir si elle est là. (montre la zone A)

Ils ont alors le plateau suivant devant eux :



E_1 :

Après t'en as 4, t'en met un là (place un jeton bleu sur a) 5, 6 (montre b).

E_2 :

Si t'as de la chance tu peux faire en 5 mais que si t'as de la chance.

E_1 :

Pas si tu peux bouger la frontière.

E_2 :

Ouais pas si tu peux bouger la frontière.

30 seconde où il ne se passe rien.

E_2 :

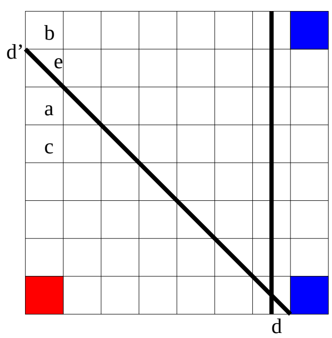
Et si les 3 c'est les même couleur, à ce moment là, t'es sûr de l'avoir en 5 mais...

E_1 :

Attends, je veux juste voir un truc. Ouais y'en a 5, c'est en 6, je le fais pas en 5.

28.30

E_2 configure le plateau de cette manière :



E_2 :

On demande là (a) ou on demande là (b) déjà ?... On demande là (a). Si c'est bleu...

E_2 translate d' sur la case c et enlève d.

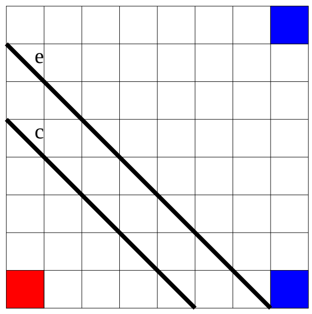
E_1 :

Et c'est peut être pas mal ce que tu viens de faire. Parce que moi j'avais demandé là (e)

E_2 :

Ouais mais en fait là on pouvait pas parce que finalement on avait mal mis notre frontière parceque regarde la frontière elle va là dessus (e).

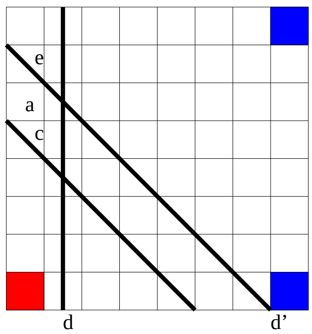
E_2 construit une frontière diagonale partant de e :



E_1 :

Si t'as ça, t'as ça. t'es d'accord avec moi ?

E_1 construit la droite verticale suivante :



En réponse à la question précédente : E_2 :

Non, non si t'es comme ça t'es obligé d'avoir une diagonale.

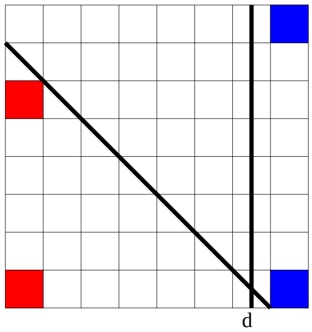
E_1 :

Ouais t'es obligé d'avoir une diagonale. Et si t'es rouge là (a).

E_2 :

Si t'es rouge là, à ce moment là t'as ça (d) ou ça (d'). Mais on fait par rapport au rouge parce que par rapport aux bleus parce que sinon par rapport aux blancs c'est trop compliqué. T'as toujours ça au fait.

Ils ont maintenant la configuration suivante sur le plateau :



E_2 :

Donc là tu poses quoi comme question ?

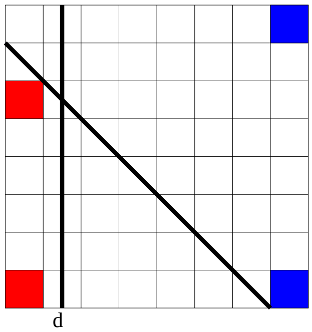
E_1 :

Ou si tu te poses par rapport aux rouges.

E_2 :

C'est là ça change rien, c'est la même chose.

Ils déplacent la droite d :



E_1 :

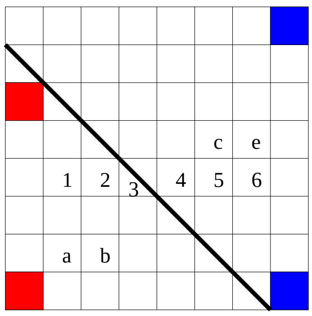
Ouais mais ça on s'en fout.

E_2 :

Non on s'en fout pas parce que...

E_1 :

Attends attends, parce qu'après tu demandes, par exemple tu demandes 1, 2, 3, 4, 5, 6. Après tu demandes là (3). Par exemple c'est bleu là. Ce qui te donne 2 choix (1,2). Là ça te donne 3 choix (4,5,6). Donc tu demandes là (5). 5 coups. Non, attends, 6 coups.



E_2 :

Non, si c'est bleu ici (3) pourquoi tu veux demander là (5) ? parce que là c'est obligé que cela soit bleu.

E_1 :

Non si c'est rouge. Après sinon c'est frontière. Et c'est la diagonale.

E_2 :

Ouais mais ça peut être ça aussi. Après tu dois donner une autre interrogation pour savoir si là (a) c'est frontière.

E_1 :

Si ça c'est frontière (3), ils vont pas faire frontière au début son principe c'est de maximiser le nombre de coups donc il va te faire le rouge et tu fais en 6 coups.

E_2 :

donc là si c'est rouge (3), il y a plus de diagonale, alors cela veut dire que c'est...

E_1 :

Ouais mais même si c'est bleu, il n'y a plus de diagonale. Parce que là, c'est la seule diagonale qui te reste. [inaudible] C'est pour ça que la met là et puis après tu peux le mettre là (a,b) ou là (c,e). Et t'en fais que 2.

E_2 :

Si tu dis frontière...

E_1 :

On cherche 5 coups t'es en 6 coups.

E_2 :

Marche pas. Je ne sais pas si ça existe en 5 coups peut être.

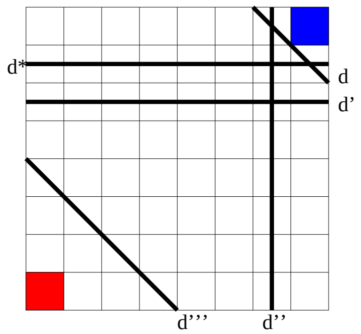
E_1 :

Je pense pas.

E_2 :

Je pense pas non plus.On a fait avec les bords, on a fait avec le centre. Avec 2 trucs, non.

E_2 configure le plateau de cette manière :



En passant son doigt suivant les droites :

E_2 :

Si c'est ça (d),ça (d'), ça (d''), ca peut être comme ça (d), comme ça (d''), comme ça (d*).

E_1 montre les même droites mais du côté du coin rouge : E_1 :

Ca peut être comme ça, comme ça, comme ça.

Il y a un truc qui est bien quand t'as un rouge, c'est que t'es sûr qu'il y a une frontière. C'est déjà ça.

E_2 configure le plateau de cette manière :

E_2 :

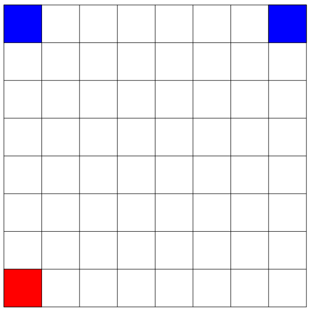
En fait finalement, celle là c'est la mieux, celle avec les bords parce que celle avec le centre, tu peux avoir ta frontière là (pointe un coin) et t'en rendre compte à la fin.

E_1 :

Ben voilà.

E_2 :

Ou t'en as pas et tu trouveras donc jamais.



E_1 :

C'est toujours en 6 coups.

E_2 :

Ouais et la meilleure c'est ça.

O :

Alors vous en êtes où ?

E_2 :

Donc on a pas trouvé de truc en 5

O :

Donc vous pensez qu'en 5 c'est possible ?

E_2 :

Ben en fait on a un peu tout essayé. Enfin, on pense qu'on a tout essayé... parce qu'on a essayé avec les bords et pas avec les centres, ça ne sert à rien.

O :

Ben si vous pensez vraiment que 5 c'est pas possible, cela veut dire que vous pensez que 6 est la solution. Donc dans ce cas là, donc quand il y a un résultat et que vous êtes sûr de lui, on appelle cela une conjecture si il est pas démontré. Donc déjà vous pouvez noter que c'est votre conjecture, c'est à dire que 6 on peut pas faire mieux. Et après, là ce que vous savez c'est que la bonne solution est entre 0 et 6.

E_1 :

Non là on pense que c'est 6 seulement... On sait qu'il y a une possibilité de solution entre 0 et 6.

O :

ce que vous ne savez pas c'est si on peut faire moins que 6. Donc ça veut dire que la seule chose que vous pouvez dire c'est que la solution est entre 0 et 6.

E_2 :

Non parce que 0 c'est pas possible et 1 c'est pas possible.

O :

Pourquoi 1 c'est pas possible ?

E_2 :

Parce qu'il faut 2 points pour déterminer une droite et comme la frontière c'est une droite.

O :

Sauf si en fait je joue sur un carreau, qu'est ce qu'il se passe si je joue sur un carreau ?

E_2 :

Ouè mais elle peut toujours être là et là et on a aucun moyen de savoir.

O :

Non mais si j'ai un seul carreau, si au lieu de jouer sur un plateau 8 par 8 je joue sur un plateau qui fait 1 carreau.

E_2 :

Non mais là on est entrain de parler de conjecture et de résultat sur un plateau 8 par 8.

O :

Mais c'est parce que sur le plateau 8 par 8...

E_1 :

Ouè mais là, il y a une possibilité de mouvement...

E_2 :

Sur un plateau 5 par 5, on aurait pu trouver le résultat en moins de coups.

E_1 :

Après il faut le dire dans la conjecture, sur un plateau 8 par 8.

O :

Voilà, mais c'est juste mais c'est parce que sur le plateau 8 par 8, une frontière est délimitée par 2 points. Et en 2 vous pensez que c'est possible ?

E_2 :

Non c'est que de la chance.

O :

Ouais donc cela veut dire que c'est pas possible si en face il y a quelqu'un qui joue bien ?

E_2 :

Si on a la règle de jeu où le joueur peut déplacer la frontière, 2 n'est pas possibles parce qu'il va jamais dire quand tu, quand on tente un truc il va jamais dire frontière.

O :

Par exemple, imaginons que tu joues contre quelqu'un qui te dit en 2 coups je peux trouver la frontière. Tu vas jouer comment contre lui ?

E_2 :

Ben je vais faire qu'en 2 coups il ne trouve pas la frontière.

O :

Et comment tu vas faire ça ?

E_1 :

Ben par exemple tu fais des bleus.

O :

Si tu fais 2 bleus, qu'est ce qu'il se passe ?

E_1 :

Ben il se retrouve avec une zone et tout le reste ça peut être n'importe quoi.

O :

Ouè et avec 3 ?

E_1 :

Avec 3 cela permet d'ouvrir une autre zone.

O :

Ouè mais est ce qu'en 3 coups on peut trouver la frontière ?

E_2 :

Contre quelqu'un qui joue bien non.

O :

Tu penses pas ?

E_2 :

Moi, je pense pas.

O :

Ben essayez. Soit vous essayez de voir si c'est pas possible ou sinon vous cherchez pourquoi c'est pas possible.

E_2 :

Mais si avec 5 c'est pas possible, avec 3 c'est pas possible.

O :

Vous en êtes où alors ?

E_2 :

On essaye en 5, on a dit que cela ne marchait pas. Qu'on était obligé de le faire en 6. On l'a prouvé expérimentalement.

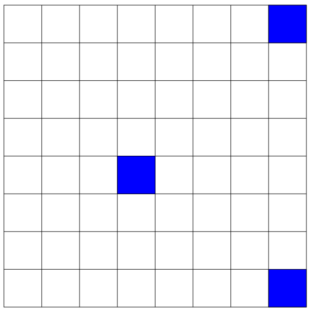
O :

Vous avez fait toutes les possibilités ? avec toutes les couleurs pour chaque pièce et chaque place ?

E_1 :

En fait c'est pas possible en 5 parce que dès qu'il y a un cas où ça marche pas, c'est pas possible. Là on a un cas. (Montre le plateau)

Il y a la configuration suivante sur le plateau :



O :

Non

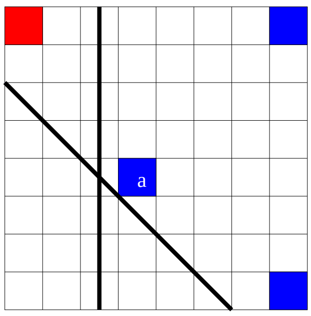
E_1 :

Ah oui parce qu'on a pas...

O :

Oui ça c'est un cas où on aurait pu interroger d'autres cases avant.

Ils construisent les frontières suivantes en utilisant des crayons :



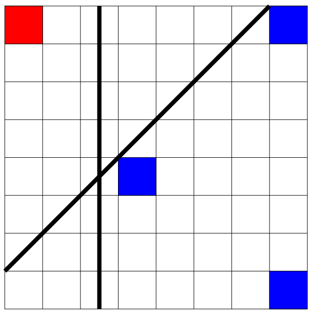
E_2 :

On avait dit quoi après ?

E_1 :

Déjà, c'est pas ça.

E_1 reconfigure le plateau de cette manière :



E_2 :

Ben écoutes, ça peut marcher dans les 2 sens, ah non je suis bête, cela ne marche pas là.

E_1 :

Donc après on travaille, on refait le travail... on retrouve le milieu. Donc si ça c'est bleu (a), on demande celui là (b). Mais après ça dépend du cas de...

E_2 :

Ecoutes, je ne sais plus. Mais en tout cas, cela ne marche pas.

E_1 :

Donc en fait dans chaque cas, il faut qu'on se retrouve avec... on demande les 3 cases là (coins), cela ne marche pas.

O :

Votre stratégie ne marche pas en 5.

E_1 :

Notre stratégie ne marche pas en 5. Après le fait de demander là. De demander autre part. Ca ne délimite pas la possibilité d'une frontière sur les côtés ni une frontière inexistante puisque comme on ne demande pas les 4 coins, On se retrouve avec un périmètre enrouler dans 3, donc on se retrouve toujours avec les 4 coins qui sont sans délimitations.

O :

Ce que tu viens de dire, cela ne te dit pas plus de 3, cela ne te dit pas qu'il faut plus que 4 coups ?

E_1 :

Ouè il faut plus de 4 coups parce quand on délimite, parce qu'on a un terrain avec 4 côtés et quand on prend des points dedans... Dans tous nos cas, notre territoire est toujours défini en 4 coins en comprenant toujours un coin. Le territoire contient au moins un coin et un coin ou 3 cases ou 4 cases.

O :

J'ai pas compris.

E_1 :

Quand on a un territoire, il peut être inexistant ou il est presque inexistant puisque c'est juste un carré c'est pas une frontière, ou on peut avoir une frontière avec un coin, ou sinon 3 cases ou sinon c'est 4 cases.

O :

J'ai pas compris ces histoires de 4 cases là.

E_1 :

4 cases, c'est tout ce qui est horizontale ou verticale. Parce que quand elle est horizontale, on a 1, 2, 3, 4 coins

O :

Ah, d'accord, tu me parles des coins qui ne sont pas frontières.

E_1 :

Donc on a où 3 coins, ou 4 coins ou 2 coins, donc il faut toujours prendre en compte la possibilité minimale. Parce que la plus grande possibilité,quand on a 4 coins, ça veut dire que c'est plus facile pour comprendre où...

O :

Quand il y a 4 coins cela te donne l'orientation de la frontière.

E_1 :

Donc cela veut dire que 4 coins cela permet l'orientation donc t'es obligé d'avoir au moins 4 coups pour avoir une orientation. Mais ça ne définit pas la frontière en quelque sorte. Déjà tu peux pas avoir 3 parce que si une frontière a 4 coins et ben en 3 coups, on arrive pas à déifnir ces 4 coins.

O :

Tu dis qu'en trois coups, on arrive pas à trouver...

E_1 :

Les 4 coins.

O :

Ca y est j'ai compris ce que tu racontes. Tu dis qu'en 3 coups, on ne peut pas savoir la couleur des 4 coins. Tu peux écrire ça pourquoi on ne peut pas faire en 3 coups. Et en 4 coups alors est ce que c'est possible ?

E_2 :

A mon avis si en 5 c'est pas possible, en 4 c'est pas possible.

E_1 :

En 4 cela permet l'orientation mais cela ne permet pas de connaître la grandeur.

O :

Mais tu me parles de en 3 ou en 4 ?

E_1 :

En 3 on peut pas savoir, parce qu'on a pas d'orientation, on ne connaît pas l'orientation.

O :

Tu me dis en 3 on peut pas savoir parce qu'on ne peut pas connaître la couleur des coins. Je veux bien te croire mais il faut...

E_1 :

Je ne parle pas des coins là (coins du carré) mais pas savoir les coins...

E_2 :

Les coins qui délimitent la couleur des territoires.

E_1 :

Voilà.

O :

Est ce que en 3 coups tu peux connaître la couleur des 4 coins ?

E_2 :

Non on ne peut pas. C'est absolument impossible.

O :

Et en 4 coups ? cela ne marche plus parce qu'on peut connaître la couleur des 4 coins.

E_1 :

Et après dans ces 4 coins, il reste toujours plusieurs possibilités de frontière.

O :

Oui mais on pourrait faire 4 coups, qui ne sont pas forcément les 4 coins. Tu pourrais me donner la couleur des...

E_1 :

On est d'accord pour dire que dans chaque territoire on est obligé d'avoir un coup.

O :

C'est quoi un territoire ?

E_2 :

Un territoire, c'est un demi-plan.

E_1 :

Dans chaque demi-plan, on est obligé d'avoir un coup. A part s'il n'y a pas de demi plan. Donc pour définir si un demi-plan a un coin et qu'un coin est là, on est obligé d'utiliser les 4 coins.

O :

Pas forcément, si je dis bleu et bleu là, attends, qu'est ce que tu me disais ?

E_1 :

On a dit que un territoire a obligatoirement, comprend obligatoirement un point a part s'il n'y pas de territoire. Dans notre jeu, on a 2 possibilités un territoire ou pas de territoire, si on a un territoire, ce territoire est obligé de comprendre un coin ou 2 ou 3 ou même 4.

O :

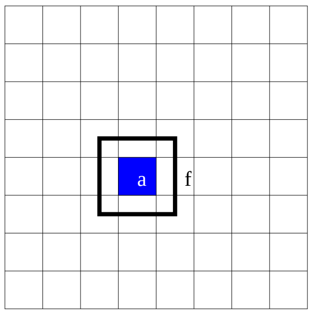
Mais un coin c'est quoi ? Un coin c'est un coin du plateau ?

E_1 :

Oui dans ce cas là, un coin c'est un coin du plateau. Est obligé de comprendre un point du plateau.

E_2 :

Ouais parce que ça ne peut pas être un coin là (a), un coin ici parce qu'on ne peut pas avoir une frontière. Voilà (f)



E_1 :

Mais un territoire, cela peut aussi être un territoire bleu donc s'il n'y a pas de territoire rouge, le territoire bleu il a 4 coins. Donc un territoire peut comprendre 1 coin, 2 coins, 3 coins ou 4 coins.

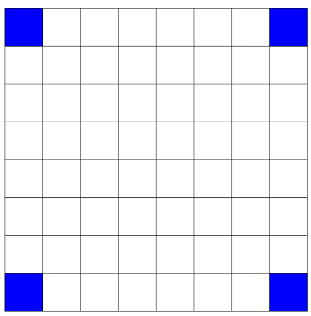
O :

Quand tu dis qu'il n'y a pas de territoire rouge, ça veut dire que tout est bleu.

E_2 :

Alors le territoire bleu à des coins, il en a 4.

E_2 configure le plateau de cette façon :



E_1 :

Un territoire comprend de 0 à 4 coins du plateau, du plan, enfin du plateau plutôt.

O :

[Inaudible]

E_1 :

Un territoire, j'ai jamais dis s'il était bleu ou rouge. Là, pour définir si un territoire a un ou 4 coins, on est obligé de tester tous les coins.

O :

Pour savoir si un territoire à 1 ou 4 coins...

E_1 :

A 0 ou 4 coins, parce qu'il peut comprendre le 0

O :

En fait ce que vous faîtes c'est d'interroger les coins pour savoir leur couleur, mais...

E_1 :

En fait j'essaye par rapport à la définition d'un territoire. Qu'est ce que c'est qu'un territoire ? A partir d'un territoire, en faisant une définition d'un territoire, y'a une obligation... Non un territoire c'est obligatoirement 1 sur notre plateau parce que sinon, il n'y a pas de territoire.

E_2 :

Non 2, parce qu'en même temps, est ce qu'on définir ça comme un territoire ?

O :

Déjà faudrait que vous me disiez ce que vous entendez par territoire.

E_1 :

Un territoire c'est un demi-plan, c'est ce que vous appellez..., un territoire c'est tous les endroits où il y a du bleu ou tous les endroits où il y a du rouge.

O :

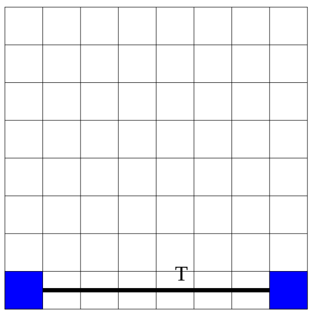
Mais ça peut être...Par exemple...

E_2 :

Ca c'est un territoire, ça c'est le territoire blanc et ça c'est le territoire bleu.

O :

Donc ok, mais si par exemple, j'ai 2 bleus là. Ca vous dîtes que c'est le territoire bleu. (T) Mais pour le reste vous ne savez rien dire.



E_1 :

Pour l'instant, on ne sait rien dire. Mais pour définir, il faut d'abord définir, il faut d'abord avoir une idée de la définition d'un territoire. Donc un territoire, ça peut être d'avoir obligatoirement dans son truc, 0 coins, 1 coins, 3 coins ou 4. ON peut pas avoir 2 points parce que sinon c'est une ligne.

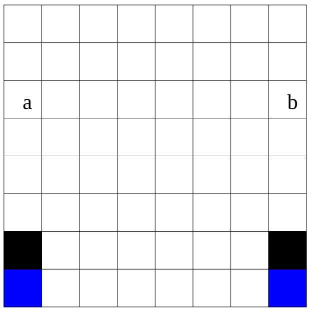
O :

Pourquoi il ne peut pas avoir 2 coins ?

E_2 :

Si il peut avoir 2 points regarde :

E_2 configure le plateau de la manière suivante :



E_1 :

C'est la seule possibilité, donc il peut avoir de 0 à 4 coins.

O :

Mais je peux les mettre là aussi ((a) et (b)).

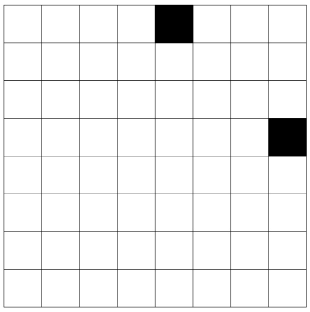
E_2 :

Non dans ce cas là, il y en a 4.

O :

Ah ok, moi je parlais des coins du plateau mais vous vous parlez des coins en général. Ok mais si c'est en diagonale par exemple. Là comme ça.

O configure le plateau de la manière suivante :



E_1 :

3

E_2 :

les 3 coins du triangles

O :

Donc là vous dîtes qu'il y a 3 coins ?

E_1 :

Oui

E_1 :

Et t'es obligé d'avoir 3 coins et touché... au moins 1 coin et obligé d'avoir un à 4 coins par contre... et pareil...En même temps il peut y avoir de 0 à 4 coins du plateau.

E_1 :

Il y a 0 à 4 coins en général et de 0 à 4 coins du plateau.

O :

Pourquoi on peut pas faire en 4 ?

E_1 :

Pourquoi on est obligatoirement au moins obligé de faire en 4 parce qu'il faut définir un territoire, il faut définir ces 4 coins et pour définir ses 4 coins, parce que c'est maximal, le maximum il faut 4 trucs.

O :

Ouais mais là si j'ai ces trois coins, cela me définit le territoire et je sais que le reste est rouge.

E_2 :

Je comprends pas la question là.

O :

Vous me dîtes que pour définir un territoire, il me faut au moins 4 coins.

E_1 :

Oui mais ça on le fait dans les maximums, on est d'accord parce que quand on essaye de prouver une conjecture, on prouve le maximum pas le minimum. Parce que si le maximum... On est entrain de chercher le maximum pas le minimum donc le maximum pour définir le territoire c'est 4 coins.

O :

Il existe des territoires de 4 coins

E_1 :

Donc c'est le maximum pour définir un territoire, on peut pas le définir en 5 en, 6 en 8. Donc on est obligé dès le départ d'avoir 4 points pour définir ce territoire en maximum donc on peut pas faire en dessous de 4. Après prouvé qu'on ne peut pas faire en dessous de 6 c'est autre chose, mais déjà on ne peut pas le faire en dessous de 4.

1h

Durant une phase de rédaction conversation entre les élèves :

E_1 :

Ca marche.

E_1 :

En 3 coups ?

E_1 :

Non, ce qu'il faut dire c'est qu'en 3 coups, tu peux avoir un triangle. Tu peux avoir un triangle en 3 coups, mais c'est pas ça l'idée, l'idée c'est que quand t'as un territoire, t'as obligatoirement 4 coups. Le maximum d'un territoire pour le définir c'est 4 coins.

E_1 :

Mais c'est ça. Comment utiliser notre technique des 4 coins ? c'est une question que je me posais. On utilise les 4 coins pour définir notre territoire plus 2 points pour définir notre frontière.

O :

Pas forcémment, si tu sais que ta frontière est horizontale ou diagonale, 1 coup cela suffit à la trouver. Enfin avec 1 coup, si tu tombes sur la frontière...

E_1 :

Oui mais comme la personne va bouger les pions, si on demande un point, elle va pas dire frontière.

O :

Sauf si des fois, il y a des cas... Tu crois qu'il vaut mieux toujours dire couleur que frontière ?

E_1 :

Au 5ième coup oui, au 6ième coup on peut faire ce qu'on veut puisque de toute façon l'autre a deviné. On a dit que le maximum de coups qu'on peut faire , on a pas dit que c'était le minimum, on a dit qu'on peut trouver en maximum 6 coups. 6 coups pourquoi ? Parce que 6 coups c'est 4 couleur sur notre plateau pour définir notre territoire.

O :

Cela ne définit pas le territoire, cela définit...

E_2 :

la forme du territoire.

O :

Mais pas le territoire. Sinon c'est faux.

E_1 :

Cela définit la forme du territoire et 2 coups pour définir le territoire avec la frontière. 2 coups pourquoi ? parce qu'il y a 2 points, moi je mélange un peu tout là, c'est pas vraiment vrai, je sais ce que je dis c'est un peu faux. Mais on peut presque analoguer 2 points pour la frontière parce que la frontière c'est une ligne ou un point ou y'a pas de frontière donc il y a de 0 à 2 points. Une frontière est définie par de 0 à 2 points sur... qui sont obligatoirements sur le tour du plateau.

O :

Ok donc tu prends les intersections de la frontière avec les bouts de plateaux. Ca fait entre 0 et 2.

E_1 :

On a défini avant qu'un territoire ça comprenait obligatoirement...un territoire ça comprend 4 coins.

O :

Enfin ton plus grand territoire.

E_1 :

Donc pour définir un plus grand territoire, l'idée c'est presque on a 4 coins qui sont le territoire et 2 points qui sont la frontière. Est ce que vous comprenez ? C'est pas vraiment...

O :

Ouais tu me dis je, avec 4 coins je trouve le territoire et il me faut encore 2 points pour trouver la frontière.

E_1 :

C'est pas vraiment vrai mais l'idée c'est qu'on a 4 coins et 2 points.

O :

Oui je comprends ce que tu veux dire mais... on peut faire moins par exemple si je prends...

E_1 :

Oui mais là on cherche le minimum, le minimum pour tous les cas, là t'utilises les maximum, le maximum des cas.

O :

Ouais mais qu'est ce qui te dis que celle là c'était la configuration maximale ?

E_1 :

Pourquoi c'est la configuration maximale parce qu'on prend le maximum de coins possible pour un territoire.

O :

Donc ça ce que tu me dis c'est que quand mon territoire fait 4 coins, à 4 coins je trouve en 6 coups, mais si ton territoire fait 3 coins ?

E_1 :

On trouve toujours en 6 coups parce qu'il faut éliminer la possibilité du territoire en 4 coups.

O :

Il faut éliminer la possibilité du quoi ?

E_1 :

D'un territoire en 4 coups, en 4 coins. Donc en 6 coups.

E_2 :

Parce qu'il faut être sûr qu'il a 3 coups parce que si l'a on en a 6. Là il en a 3, mais il pourrait en avoir 4. La frontière elle pourrait être là et elle pourrait être là aussi.

E_1 :

C'est presque abstrait ce qu'on dit, là si on fait comme ça, là en utilisant mon idée, on a que 5 coups. Y'a même l'idée de la possibilité où s'il y a pas de frontière. On a besoin de 4 coups pour définir le territoire.

O :

Mais déjà, celui là il vous dit quoi ? le cas où il n'y a pas de frontière il vous dit quelque chose quand même ?

E_2 :

Il veut dire qu'il y a pas de territoire rouge. Mais ça c'est évident.

E_1 :

Il nous dit qu'un territoire se définit en 4 coups.

O :

En fait ce cas là ce que ça vous dit, ça vous dit que dans le cas où il n'y a pas de frontière, vous êtes obligés de faire au moins 4 coups. Donc pour faire celui là, il vous faut 4 coups.

E_1 :

Et ça c'est le cas minimum. Pour trouver une frontière qui est en 2 lignes, il faut donc 2 coups de plus.

O :

pas forcémment.

E_1 :

Pace qu'une frontière est définie...

O :

Là ce que tu fais tu cherches ton territoire et ensuite tu cherches la frontière. Mais peut être que ce n'est pas le bon ordre, peut être qu'il faut faire les 2 en même temps, peut être que les étapes ne sont pas comme ça. Je ne sais pas si tu vois ce que je veux dire ?

E_1 :

Oui si si, mais comment est ce qu'on fait pour définir une frontière quand on ne sait pas où est le territoire ?

O est appelé ailleurs.

1h10
Question de O à toute la classe :

En gros pour tout le monde, est ce que en 4 coups c'est possible ?

E :

Non

O :

Vas y fais ta démonstration.

E :

En 4 coups, on ne couvre pas toute la boule.

O :

C'est quoi la boule ?

E :

le plateau.

O dessine un plateau 8 par 7.
O :

Qu'est ce que tu dis ?

E :

En 4 coups, on arrive pas à trouver la frontière

O :

Mais pourquoi ?

E :

Ben parce que si on prend 4 points au hasard et ils sont tous de la même couleur, on sait qu'ils ne sont pas dedans.

O :

Je prends 4 points, je vais mettre des croix pour les points que je prends.Et tu fais quoi

E :

Cela fait une figure, et il y a toujours en dehors enfin tant qu'on demande pas les 4 coins, on est pas sûr que la frontière est sur le plateau.

O s'addressant à un autre élève :

Ca te fait douter cette figure ?

E' :

Ouais mais là, on ne peut toujours pas trouver la frontière, cela ne suffit pas.

O :

Et pourquoi cela ne suffit pas ?

E' :

Y'a toujours pleins de possibilités là

E_1 :

Parce qu'un territoire ou une frontière, à toujours pour origine un coin

O :

Et alors ? Qu'est ce que t'appelle un territoire ?

E_1 :

Un territoire c'est un demi-plan. ça peut être A ou B. A ou B a toujours pour origine un point du... un coin dedans. Donc si on définit pas un coin à l'origine, on peut pas définir l'extension.

O :

Oui mais si je dis ici, si je dis rouge rouge, rouge et ici je dis bleu.

E :

Dans ce cas là, c'est bête parce que vous nous donnez la frontière alors que si vous aviez mis tout d'une même couleur on ne pourrait pas trouver la frontière. Il y aura jamais ce cas de figure...

O :

Ben pas forcémment, je peux pousser l'autre à me donner ce cas de figure là.

E :

Ouais mais dans ce cas là c'est bête parce qu'on a gagné. Alors que si vous aviez mis tout de la même couleur on aurait pas pu la trouver.

O :

Voilà, donc qu'est ce que vous faîtes, vous m'auriez fais jouer tout de la même couleur. T'aurais dit tout bleu. Donc dans ce cas là effectivement si j'ai tout bleu, je ne peux pas gagner.

E :

Quelque soit la figure...[inaudible]

O :

Sauf en 4 coups, si je joue, il y a pas un cas de figure où si je joue les 4 coups bleus je trouve la frontière ?

E :

Si, s'il n'y a pas de frontière.

O :

Donc si je joue les 4 coins bleu...

E' :

Là, il n'y a pas de frontière

E :

Donc on ne jouerai pas ça.

O :

Donc là vous joueriez quoi ?

E :

On en mettrait 1 rouge et 3 bleus ou 3 bleus et 1 rouge.

O :

Donc ici vous me mettriez un rouge.

E_1 :

Donc là on a définit on prend le point d'origine du territoire.

O :

Le point d'origine d'un territoire je sais pas. C'est ça le point d'origine de ton territoire ?

SONNERIE DE FIN DE COURS

E_1 :

Ben c'est un peu l'idée que quand on a un territoire, on a une ville on commence avec une ville et après on a expension du territoire qui est définie par la frontière. Dans notre cas de figure, on a obligatoirement une ville ou on a rien, donc il y a ou un point d'origine ou il n'y en a pas. Donc si on définit le point d'origine d'avant, le coin d'origine, la frontière au début ce qui nous fait 4 coins après on a besoin de 2 autres pour définir la frontière.

O :

Mais bon en fait, je ne sais pas si vous avez remarqué mais bon ça c'est la preuve du fait qu'en 4 coups c'est pas possible. Donc comment cela se rédige, vous pouvez dire simplement si on me donne 4 coups dont un n'est pas un coin, je dis tout bleu et si on me donne 4 coups qui sont tous les coins, je dis 3 bleu et un rouge. Donc ça c'est une preuve qu'on ne peut pas finir en 4 coups. Et donc maintenant il reste 5.

E :

Mais bon ça ne marche pas parce que dans ce cas là, il faut forcémment les 4 coins et après ça ne marche pas il en reste juste 1.

O :

Pas forcémment

FIN DE LA SEANCE

4 Séance 4 :

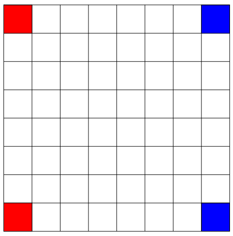
Lors de cette séance, un élève du groupe 1 et un élève du groupe 2 était absent. Le groupe 2 était donc composé lors de cette séance de 2 élèves. Le groupe 1 et le groupe 3 ont fusionné pour donner le groupe 4 qui est donc composé de 3 élèves.

4.1 Preuve d'un résultat (20mn)

O commence la séance avec le discours suivant :

Je ne sais pas si vous vous souvenez. La dernière fois à la fin de la séance, on était arrivé à montrer que le résultat était 5 ou 6 sur le plateau 8×8 pour trouver la frontière. Donc, ça c'est un très bon résultat car à un coup près, on sait quelle est la solution du problème. Maintenant, ce que l'on va vous demandez de faire c'est que ... tous dans ces situations là :

O fait le dessin suivant au tableau :



vous avez tous utilisé comme stratégie, vous jouiez ici sur ce que vous appeliez le milieu. Ce que nous voulons maintenant, c'est que vous nous rédigiez pourquoi c'était plus intéressant de jouer sur ce point là que sur les autres.

Un élève :

On a pas déjà fait ça ?

O :

Je ne pense pas, vous m'avez dit que jouiez au milieu mais je ne crois pas que vous m'avez justifié pourquoi c'était mieux de jouer au milieu.

Un élève :

Cela en élimine plus.

O :

Dans cette configuration, les frontières possibles sont comment ?

E :

Verticales.

O :

Donc ici, il ne nous reste que des frontières verticales, alors pourquoi ici c'est mieux de jouer au milieu ? déjà il est où le milieu ici ?

E :

Ce n'est pas vraiment le milieu, c'est... un côté 3 et d'un côté 4.

O :

En fait, il y a 6 cases au mileu

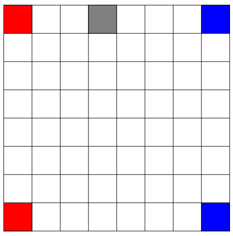
E :

On fait 3 et 2, 3 d'un côté et 2 de l'autre.

O :

Vous jouez sur celle là ?

O interrogeant sur la case grise :



E :

Ou sur l'autre à côté.

O :

Pourquoi vous jouez sur ces cases là ?

E :

Parce que c'est plus rapide que sur un bout, car si on fait sur un bout on est obligé d'avancer à chaque fois alors que là c'est tout de suite · · ·

O :

Qu'est ce que t'appelles un bout ?

E :

Un des bords à côté d'une des cases de couleur. Parce que si on ne demandé pas au milieu, on laisse plus de place à celui qui met la frontière car là c'est où on en laisse le moins pour choisir où il met sa frontière

O :

En gros ce que tu dis c'est qu'en jouant là ou là, il aura moins de possibilité pour ses frontières et pourquoi ?

E :

Parce qu'il reste d'un côté 2 cases et de l'autre 3.

O :

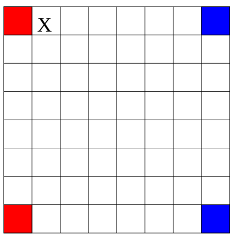
Par exemple, si je joue là (case frise), le placeur de frontière il doit donner quelle couleur ?

E :

Rouge. Comme ça la frontière il reste 3 possibilités.

O :

Vous dîtes qu'à cause de cela c'est plus intéressant de jouer rouge.Et si par exemple au lieu de jouer ici on avait jouer sur ce point là que je note X) ?



E :

Il resterait 5 possibilités.

O :

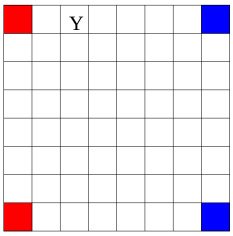
Si on joue quoi ?

E :

Rouge

O :

Ok, donc si X égal rouge, il reste 5 possibilités. De plus on ne peut pas jouer bleu. Et si je joue là maintenant sur Y



E :

Pareil, cela laisse 4 possibilités alors que l'autre en laisse que 3.

O :

Donc si Y égal rouge, cela laisse 4 possibilités. Et si Y égal bleu ?

E :

0 parce qu'après on sait où est la frontière.

O :

En fait, il reste une possibilité puisqu'il reste une frontière

E :

Ouè mais c'est à dire que les possibilités ce sont les possibilités de changement.

O :

Comme il reste une possibilité pour placer la frontière, c'est fini. Mais ce qu'on vient de dire ne dis pas pourquoi c'est plus intéressant de jouer au milieu. Là, c'est intéressant car il reste moins de possibilités mais on pourrait très bien jouer Y ou X et qu'il nous reste un certains nombre de possibilités et ensuite les éliminer après.

E :

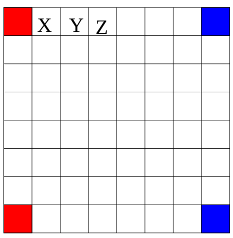
Pas si le but c'est de faire le moins de coups possibles.

E :

On aurait aussi pu demander toutes les cases une par une mais cela faisait plus de coups.

O :

En jouant un coup, effectivement je suis d'accord en jouant Z, on va minimiser le nombre de possibilité restante pour les frontières, c'est là qu'on en aura le minimum. Cependant, on pourrait très bien joué sur Y et avoir rouge. Il nous reste 5 possibilités et ensuite faire qu'il nous reste avec le coup suivant moins de possibilité qu'en jouant sur une autre case.



E :

Non, parce qu'on a trouvé un deuxième coup après.

O :

Comment ça ?

E :

Avec Z, il suffit de rejouer encore un coup et on a trouvé. Si on joue au milieu des 3 cases, on a trouvé la frontière.

O :

Ce point on va l'appeler W.

E :

Alors après on a trouvé la frontière.

O :

Pourquoi ?

E :

Si c'est bleu on a trouvé la frontière. Si c'est rouge on a trouvé la frontière. Alors que si on jouait une autre lettre, cela ne marchait pas en un coup après.

O :

Donc si on a Z égal R et ensuite W égal F, il reste une possibilité. Et si W égal bleu, il reste une possibilité donc on a trouvé la frontière. Et maintenant si au lieu de jouer sur Z je joue sur X, donc X je suis obligé de jouer rouge

E :

On ne peut pas trouver en un coup.

O :

Oui, là il faut montrer qu'on ne peut pas trouver en un coup si vous voulez que cette technique là soit plus efficace.

E :

On peut refaire comme vous faîtes, jouer les cases une par une et voir qu'on ne peut pas.

O :

On pourrait effectivement faire cela. Mais en fait, nous n'avons pas besoin de faire tout ça. Il suffit de dire qu'en jouant sur un autre point que Z, au mieux on fera autant coup qu'avec Z. Donc jouer sur Z est toujours plus intéressant. il suffit de voir qu'en jouant sur X ou Z, on ne finit pas en un coup pour dire que la stratégie de jouer sur X est aussi intéressante que les autres. Ce serait bien que vous rédigiez cela sur vos feuilles.

O :

A la fin de la séance, on va vous laisser 20 minutes pour faire des poster que vous devrez présenter à l'autre groupe dans quelques semaines. On vous demande de choisir un résultat de le présenter avec sa preuve. Celui que vous voulez.

Les élèves essayent ensuite de rédiger ce dont on vient de discuter au tableau.

O :

Là tu dis, mais tu ne dis pas pourquoi.

E :

Il faut réécrire tout ça ?

O :

A toi de voir ce qu'il suffit d'écrire ou s'il faut réécrire tout ça. Il faut que tu te demandes, si quelqu'un lit ça est ce qu'il peut se convaincre que c'est là qu'il faut jouer.

E :

Le seul moyen c'est de prendre toutes les cases.

O :

Pas forcément et en plus cela va vite, il n'y a quand même pas tant de cases que cela.

4.2 Généralisation et travail sur des objets plus "simples" (10mn).

O :

En fait, dans ce problème, travailler sur le 8×8 n'est qu'une partie du problème. Il y a un problème plus général que celui là. Par exemple, on peut se poser la question sur un carré 20×20, 100×100 ou un carré 1000×1000. On peut même travailler sur autre chose que des carrés sur des rectangles. On peut même travailler sur n'importe quelle forme tant que l'on considère toujours nos même types de frontières.

E :

Monsieur, cela sert à quoi de faire cela ?

O :

Ben, en fait des applications pratiques je n'en connais pas. Ce qu'on fait quand on fait des maths c'est qu'on se pose des questions et on essaye d'y répondre. Ce qui est intéressant c'est de se poser un problème et d'essayer d'y répondre.

O :

Là sur le 8×8 on est coincé entre 5 et 6. Donc maintenant ce que l'on peut faire c'est essayer de se simplifier le problème en essayant de chercher sur des formes plus simples. Sur quelle forme auriez-vous envie de chercher ?

E :

Des triangles.

O :

Est ce que vous trouvez que le triangle c'est plus simple ?

E :

Ouais mais dedans, ce ne serait pas des carrés ce serait des triangles.

O :

Non, on garde toujours des carrés. Dans les carrés, il n'y a pas des carrés qui vous semblent plus simples que le 8×8 ?

E :

Le carré 2×2, même le carré 1×1

O :

Oui voilà. Quand on commence un problème, on peut commencer par des petites valeurs. Et est ce que vous n'avez pas d'autre formes plus simples que le carré ?

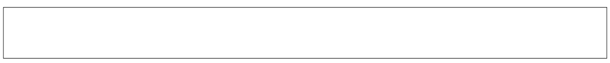
E :

Le rectangle 2×1

O :

Ouais, tu peux aussi faire des rectangles comme ça.

O dessine cela :



O :

Ce rectangle, c'est la ligne. C'est pareil.

E :

Dans ce cas là alors la frontière cela peut être une seule case au milieu. La frontière cela peut être toutes les cases, une case ou y'en a pas.

O :

Là, ce qu'on va vous demander c'est de chercher sur la ligne ou le carré 2×2 ou le carré 3×3. Combien de coups il faut pour trouver la frontière

E :

De quelle longueur la ligne ?

O :

Comme tu veux. De longueur n. Sur la ligne vous pouvez déjà essayer de commencer avec 1 case, 2 cases, 4 cases voir comment cela se passe.

E :

Sur la ligne c'est la même chose que là. (les lignes du carré)

O :

Cela dépend de la manière dont tu joues.

E :

On joue comme ça, si c'est bleu bleu, on a trouvé direct, si c'est bleu blanc noir on a trouvé direct.

O :

Si c'est bleu blanc tu trouves en combien de coups ?

E :

Cela dépend de la ligne

O :

Comment tu joues si ta ligne fait 1000 ?

E :

Comme ça.

O :

Comme ça, ta ligne elle fait 8.

E :

Je fais les coins, je joue au milieu après au milieu et encore au milieu.

O :

Essayes à ce moment là de dire en combien de coups tu vas jouer sur une ligne qui fait 1000 de longueurs.

E :

On ne peut pas prendre 1001 ?

O :

T'as le droit tu fais comme tu veux. Voilà, vous pouvez chercher sur la ligne ou sur les carrés 2×2 et 3×3. On ne vous demande pas de jouer sur le carré $n \times n$ car c'est un problème très difficile. D'ailleurs c'est un problème ouvert, c'est à dire que personne n'a encore trouvé la solution.

4.3 Recherche par groupe

4.3.1 Groupe 4

Nous rappelons que ce groupe est composé d'un élève de G1 et de G3.

Ces élèves se sont plus particulièrement intéressé aux carrés.

Un des élèves a joué sur le carré 2×2, 3×3, 4×4, 5×5 et le 6×6 en utilisant la stratégie des 4 coins puis du milieu. Il notait le nombre de coups qu'il trouvait sur son cahier. O lui a posé la question suivante :

Tu fais quoi ?

J'ai fais le 2×2 puis 3×3 puis 4×4..., ce n'est pas ça qu'il faut faire ?

O :

Ben... si. C'est quoi ce que tu notes ?

E :

C'est le nombre de coups

O : en pointant du doigt un 2×2

Ici tu trouves en 4 coups mais tu peux faire mieux que 4 ?

E :

Je ne sais pas. Ca peut ne peut pas être sur le truc donc il faut les 4 coins.

O :

Cela peut être juste un coin. Donc c'est fini.

E :

Ben oui, il faut les 4 coins.

O :

Voilà donc t'as une preuve qu'il faut 4 coups et pas moins.

E :

On ne l'a pas déjà fait ça ? On l'avait écrit.

O :

Oui mais c'était sur le 8×8

E :

C'est la même chose

O :

Sauf sur le 1×1

E :

Il faut toujours faire les 4 coins.

O :

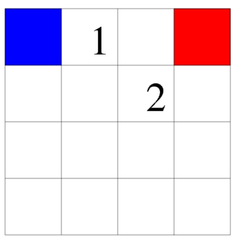
Pas forcément... Ici par exemple t'es forcément obligé de faire les 4 coins. Si par exemple ici t'as bleu et ici t'as blanc.

E :

Je peux continuer et faire les autres coins.

O :

Tu peux faire ça, mais ici il y a une autre stratégie qui te permet de finir aussi vite sans jouer les coins.



O : En montrant les cases 1 et 2.

Tu joues là et là et tu trouves aussi la frontière en 4 coups sans avoir jouer les coins.

E :

Oui, mais ça ne change pas grand chose.

O :

T'as fais le même nombre de coups mais tu n'as pas joué les 4 coins.

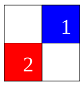
E :

Avec les 4 coins c'est sûr mais on peut trouver en autant ou en plus.

Un autre élève intervient pour lui demander le résultat qu'il a trouvé pour le 3×3. Il répond 4. L'autre élève lui dit alors qu'il a trouvé en 3 coups. Il lui demande ensuite comment il a fait.

4.3.2 Groupe 2

Ce groupe n'est composé que de 2 élèves lors de cette séance.
Ce groupe commence à jouer de cette manière :



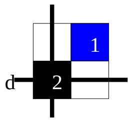
O :

Vous jouez sur quoi ?

E :

Sur un 2 par 2.

Ils jouent ensuite la partie suivante :



E_1 :

La frontière, elle est soit là (d) soit là (d')

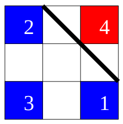
O :

Une frontière peut aussi être juste un carreau. Comme dans le...

E_2 :

On fait le 3.3

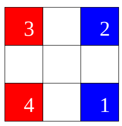
Ils jouent la partie suivante :



E_2 :

Ca fait 4.

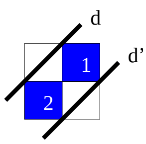
Ils jouent ensuite la partie suivante :



E_2 :

En 4 coups.

Ils jouent ensuite la partie suivante :



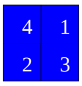
E_2 :

Dans ce cas là, c'est tout le temps 3.

E_1 :

Ben, non y'a là (d) et là (d').

Ils jouent ensuite comme ça :



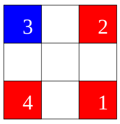
O :

Vous trouvez en combien de coups ?

E_1 :

Si il y a une frontière en 3 coups sinon en 4 coups.

Ils jouent la partie suivante :



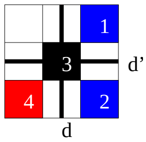
E_1 :

C'est la même chose qu'il y ait une frontière ou qu'il n'y ait pas de frontière

E_1 :

Si il y a une frontière, le minimum c'est 4. Et s'il y a pas de frontière c'est 4 aussi.

Ils jouent ensuite la partie suivante :



E_2 :

Mais tu l'as trouvé là c'est ça (d)

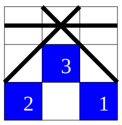
O :

Mais c'est pas obligé.

E_1 :

Donc lui il est trouvé (3) donc elle peut passer soit comme ça (d), soit comme ça (d'). Et là (d') c'est impossible vu que les 2 sont bleus.C'est obligé que cela soit là (d).

Ils jouent ensuite la partie suivante :



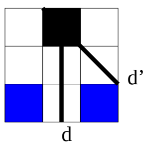
E_1 :

Elle peut être là, là ou là.

E_1 :

Et si je jouais là

Ils ont la configuration suivante :



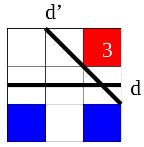
O :

Tu l'as changé ta frontière en cours de route ?

E_2 :

Elle était comme ça au début (d), après comme ça (d') et maintenant comme ça (d'). En fait, je peux changer encore.

Ils jouent la partie suivante :



Le chercheur dit alors :

C'est ça (d) ou ça (d'). Encore 4.

O :

Pourquoi tu lui as dit rouge ?

E_2 :

Parce que la frontière elle est là (d')

O :

Oui mais comment tu fais en fait pour lui dire la couleur ?

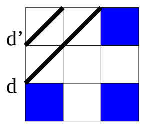
E_2 :

Ca dépend de la frontière, de la position.

O :

Oui mais là, si tu lui avais dit bleu.

Ils reconfigurent le plateau de cette manière :



E_2 :

Si c'est bleu la frontière elle est là (d) ou là (d')

O :

L'objectif c'est que lui il te demande le plus de cases et t'as intérêt à lui dire bleu ou lui dire rouge ?

E_2 :

Cela ne change rien.

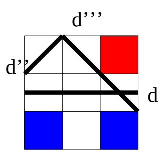
O :

Pourquoi cela ne change rien ?

O :

Qu'est ce qu'il te reste comme possibilité si tu dis bleu ?

Ils reconfigurent le plateau de cette manière :



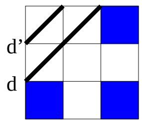
E_1 :

Si c'est rouge, il y a une (d) deux (d') trois(d''') possibilités

O :

Et si c'est bleu ?

Ils reconfigurent le plateau de cette manière :



E_2 :

1 (d), 2 (d') c'est tout.

O :

Donc t'as intérêt à lui dire quoi ?

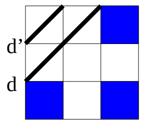
E_2 :

Rouge.

O :

Ben voilà, c'est ça qu'il faut que vous regardiez.

Ils jouent ensuite la partie suivante :



E_1 :

Si je te dis là (a)

E_2 :

Si on dit bleu

Ils donnent alors la couleur bleu à a.

E_1 :

Il n'y a que celle là.

E_2 :

Si tu dis rouge.

E_1 :

La frontière est là.

O :

Donc là, cela ne change rien en fait.

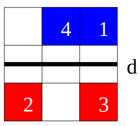
E_2 :

En 4 coups, cela ne change rien.

O :

Au troisième coup ça change et même au deuxième d'ailleur.

Ils jouent la partie suivante :



E_2 :

La frontière elle est là (d).

O :

Pourquoi tu lui as dit blanc au deuxième coup ?

E_2 :

Parce que j'avais choisi la frontière, au début c'était là (d)

O :

Ah oui, en fait tu lui réponds en fonction du choix que t'as fait. Tu ne choisis pas ta frontière en fonction de la case qu'il te demande.

E_2 :

Mais en tout cas, cela ne change rien, c'est tout le temps en 4 coups.

O :

Ca ne change rien ?

E_2 :

C'est tout le temps en 4 coups.

O :

Et pourquoi ? parce que peut être en déplaçant la frontière comme il faut, tu lui ferais faire plus que 4 coups.

O :

A chaque fois qu'il te demande une case, essayes de bouger la frontière de façon à ce qu'il y ait le plus de possibilités, qu'il ne soit pas sûr. Et sur le 2 2 vous avez trouvé quoi ?

E_1 :

S'il y a une frontière en 3 coups et s'il y a une frontière en 4 coups.

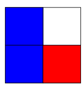
O :

Pourquoi ?

E_1 :

En 4 parce que s'il y a pas de frontière on ne pourra jamais savoir si ils sont de la même couleur les 4. Donc il faut tenter les 4 coups. En 3, ben si on sait les 3 (en montrant 3 coins), on peut savoir l'autre. Si on sait que les 3 sont bleus, c'est obligé qu'il y ait une frontière. Ou s'il y a bleu bleu et blanc, c'est obligé que cela soit là, il y a un truc en dernier qui reste.

O configure le plateau de cette manière :



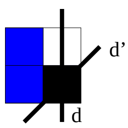
E_1 :

Et ben là... Dans ce cas, il n'y a pas vraiment de frontière.

O :

Ouais là, il n'y a pas de frontière mais si j'ai ça.

O configure alors le plateau de cette manière :



E_1 :

La frontière, elle est là (d)

E_2 :

Ou là (d')

O :

Donc t'es obligé de jouer la case qu'il reste

E_2 :

4

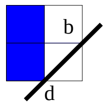
E_1 :

Mais si il y a 2 sur 2, en 3 coups on peut le faire. Si ça ne compte pas ça en fait (montre l'extérieur du carré), la frontière elle est comme ça (d')

O :

Ou elle peut être horizontale. Là tu ne l'as pas trouvé la frontière, donc il te faut plus que 3 coups si le gars...

E_1 reconfigure le plateau de cette manière :



E_1 :

Mais si je demande par exemple la couleur là (b) et si c'est bleu. Là c'est obligé qu'elle soit là

O :

Ouais là c'est fini.

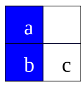
E_1 :

C'est minimum 4 coups

O :

Si on te demande cette case (a), cette case (b) et cette case (cb), t'as intérêt à dire quoi là (c) ?

O configure le plateau :



E_1 :

Ben rouge, si on me demande bleu c'est sûr qu'elle soit là la frontière.

O :

Ouais mais tu dis rouge, y'a pas de frontière, enfin c'est pas possible.

E_1 :

Mais si on dit bleu par contre, c'est sûr qu'elle soit là la frontière.

O :

Ouais mais là tu dois dire quoi ?

E_1 :

Ben bleu puisque rouge cela ne peut pas être.

O :

Ouais mais t'as pas une autre possibilité ?

E_2 :

Si y'a pas de frontière.

E_1 :

Ben tu dis bleu.

O :

Ben en fait dans le cas où t'es sûr qu'il y a une frontière si ici (c) tu dis bleu, tu finis en 3 coups. Si tu dis rouge t'as pas le droit mais par contre si tu veux finir l'autre en 4 coups tu dis quoi ?

E_1 :

Je ne sais pas.

O :

Ici si toi tu joues comme ça moi je te dirais frontière.

E_1 :

Mais la frontière elle peut être soit comme ça soit comme ça ?

E_2 :

On est obligé de jouer là.

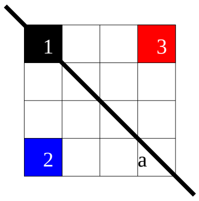
E_1 :

Donc ça fait 4 coups.

O :

Donc ici on est dans un cas, où c'est plus intéressant de dire frontière qu'une couleur. Donc c'est interresant de voir ça.

Ils jouent maintenant sur un carré de taille 4, E_1 donne les couleurs et E_2 cherchent la frontière.



E_2 :

Elle est là la frnotière non ? (d)

E_1 :

Ben ça fait 4 coups.

E_2 :

Ben non 3 coups.

E_1 :

Elle est ici.

E_2 :

Ben non.

E_1 interroge a, E_2 lui donne la couleur bleu.

E_2 :

Ouais mais c'est impossible.

E_1 :

Non (en montrant la case 1)

E_2 :

Ben non

E_1 :

Ben si.

E_2 :

Ah ben si.Attends ça c'est pas possible.

E_1 :

Ah mais non celui là cela doit être bleu (3)

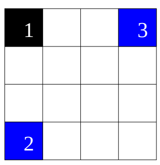
E_2 :

Voilà.

E_1 :

Vas y je te dis bleu.

Ils ont alors la configuration suivante sur le plateau :



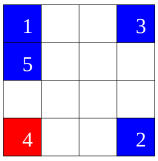
E_2 :

Ben c'est là (1).

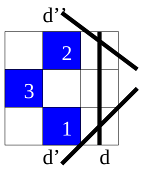
E_2 :

Au début normalement, tu dois dire bleu

Ils jouent alors la partie suivante :



Ils jouent alors la partie suivante :



E_2 :

Elle est là (d).

E_1 :

Je ne sais pas.

E_2 :

Elle est là (d) ?

E_1 :

Non.

E_2 :

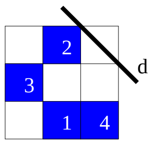
Ah oui ça peut être comme ça (d')

E_1 :

Ou comme ça (d'')

.

Ils jouent alors de cette manière :



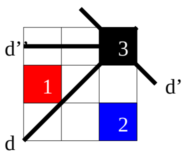
E_2 :

Elle est comme ça (d).

E_1 :

Ouais ça fait 4 coups.

Ils jouent ensuite la partie suivante :



E_2 :

Elle peut être comme ça (d), comme ça (d') ou comme ça (d'').

E_1 :

Non c'est soit comme ça (d), soit comme ça (d')

E_2 :

Non, ah oui... Ca peut être comme ça (d) ou comme ça (d').

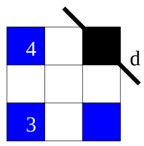
E_1 :

Donc ça fait 4 coups.

E_2 :

Et si je dis là et puis là.

Ils ont maintenant la configuration suivante sur le plateau :



E_2 :

C'est celle là (d)

C'EST L'HEURE DES POSTERS!!!!!!

ANNEXE F

Transcription de la seconde expérimentation

Notes d'observation du deuxième groupe

20 octobre 2011

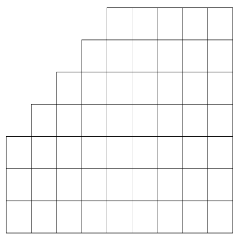
1 Séance 1

Il y avait 10 élèves présents lors de cette séance. Nous leur avons demandé de se répartir en 4 groupes. Deux groupes de 2 élèves et deux groupes de 3 ont été formés. Un groupe de 2 et un groupe de 3 ont travaillé sur un 8×8. L'autre groupe de 2 a travaillé sur un 5×10 et le dernier groupe sur un 7×6.

Le jeu a été présenté de la manière suivante par O :

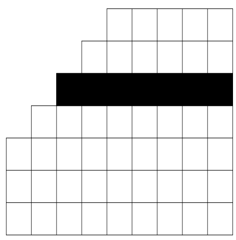
> Aujourd'hui et lors des 3 prochaines séances, nous allons jouer à un jeu. Vous avez tous remarqué que vous avez devant vous des plateaux.

O dessine le dessin suivant au tableau :



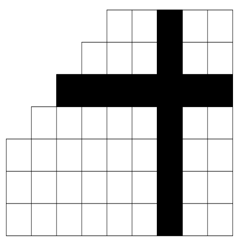
> Nous aurions pu aussi avoir un plateau de ce genre. Sur ces plateaux, il y a une frontière. Une frontière pouvant être horizontale :

O dessine au tableau la frontière suivante :



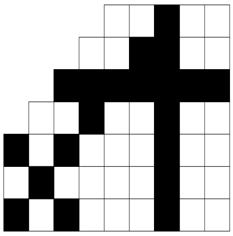
> Elle peut aussi être verticale :

O dessine une frontière verticale :



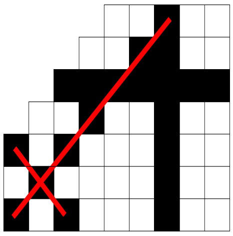
> Elle peut aussi être diagonale :

O dessine les frontières suivantes :



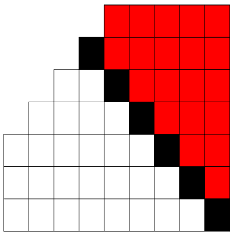
O repasse alors sur ces frontières en disant :

Vous voyez, elles sont comme ça.



Ces frontières séparent le plateau en deux territoires de couleurs différentes. Par exemple, rouge et blanc.

O fait le dessin suiva nt :



Le jeu qu'on vous propose est un jeu à 2 joueurs. Pour les groupes qui sont composés de 3 joueurs, nous vous expliquerons ensuite la manière dont vous jouerez. Au début, le plateau est vide. Un des joueurs aura pour but de trouver la frontière. Pour cela, il aura le droit de demander la couleur de n'importe quelle case du plateau. L'autre joueur devra donc donner la couleur des cases. Cependant, il y a une consigne supplémentaire. Le joueur qui cherche la frontière doit essayer de la trouver en utilisant le moins de questions possibles alors que le joueur qui donne les couleurs devra chercher à maximiser le nombre de coups du chercheur, c'est à dire chercher à lui faire poser le plus de questions possibles. Est ce que vous avez compris le jeu ?

Les élèves :

Oui mais est ce qu'on doit fixer la frontière dès le début ?

O répond :

C'est à vous de voir sachant que vous devez chercher à maximiser le nombre de coups de l'adversaire.

O rajoute :

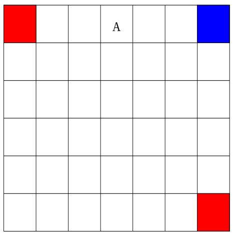
Pour les groupes composés de 3 personnes, il y aura 2 personnes qui seront chargés de donner les couleurs et une personne qui cherchera la frontière. Les 2 élèves qui donnent les couleurs le feront tour à tour, c'est à dire que l'un donne une couleur puis c'est au tour de l'autre et ainsi de suite. Vous changez de rôle à la fin de chaque partie. Est ce que vous avez compris ?

E :

Oui.

1.1 Groupe 1

Ce groupe était composé de 3 élèves qui travaillaient sur un 7×6. Ce groupe a joué sur la case A :



A la question suivante de O :

Pourquoi avez-vous jouer sur cette case ?

Ils ont répondu :

C'est la case qui donne le moins de possibilité pour les frontières car si il dit bleu ça fait 2 et s'il dit rouge ça fait 2 alors que sur un autre point cela peut faire plus.

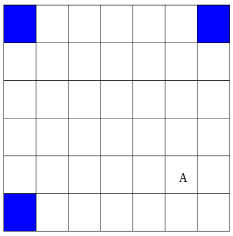
O leur a aussi posé la question suivante ;

Comment est ce que vous jouez quand vous êtes le donneur de couleur ?

Ils ont répondu :

On donne la couleur qui donne le plus de possibilités.

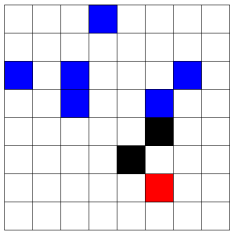
Face à cette configuration, ils ont compté le nombre de frontière possibles qu'ils restaient s'ils jouaient sur la case A en fonction de la couleur de celle-ci :



Ce groupe a aussi demandé a joué sur un autre plateau pour tester ses stratégies.

1.2 Groupe 2 :

Ce groupe était composé de 2 élèves qui jouaient sur un plateau 8×8.
Ce groupe a commencé par jouer de cette manière ;



Puis, ils ont compté le nombre de coups :
Le chercheur :

> 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

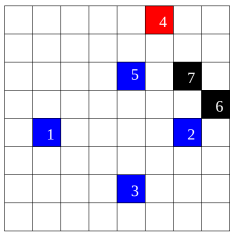
Le donneur de couleur : en montrant une case noire :

> Et 9.

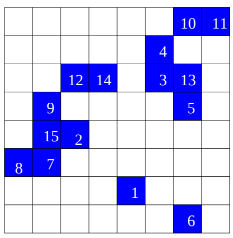
Le chercheur a alors dit :

> Ouais mais je me le disais déjà que tu voulais la mettre ici.

Ils ont alors échangé leur rôle et jouait la partie suivante :



Ils ont alors joué une nouvelle partie de cette manière :



Au 14ième coup, le chercheur a dit :

> Mais c'est pas possible.

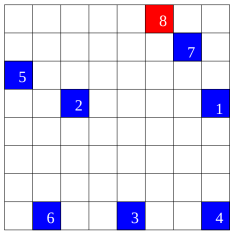
Au 15ième coup, le donneur de couleur a dit que la frontière était là en montrant l'angle supérieur gauche. (Il semble que cela soit dû au fait qu'il n'y avait plus de cases bleues)

O est intervenu au milieu de la partie pour leur dire qu'ils n'étaient pas obligés de fixer la frontière dès le début au onzième coup.

Ensuite, ils ont eut cette conversation avant de commencer une nouvelle partie :

> Cette case là
> Attends, je n'ai pas encore choisi une frontière. Tu la bougeais en jouant ? Au départ elle était où ?
> En dehors.

Puis, ils ont joué de cette manière :



Le donneur de couleur a donné la couleur rouge sur la case 8 puis a dit :

Ah non ! En fait, c'est pas logique ce que je viens de faire.

O est alors intervenu et a dit :

Pourquoi ce n'est pas logique ce que tu viens de faire ?

E :

J'ai changé plusieurs fois la frontière de place et du coup je me suis désorienté.

O :

Et pourquoi t'as pas laissé le rouge ?

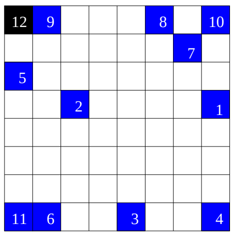
E :

Cela ne va pas aller parce que là y'a des bleus.

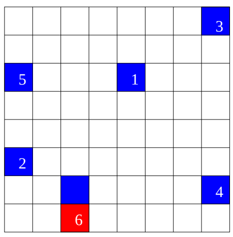
O :

Ouais, après il n'y a plus de frontières.

E a alors changé la couleur de la case 8 en bleu. Ils ont alors continué la partie de cette manière :



Ils ont alors commencé une nouvelle partie :



O est alors intervenu et a dit :

Il n'y a pas un problème là ?

Ah ben si !

Le donneur de couleur a alors transformé la case 6 en une case noire et ils ont enlevé la couleur de la case 7. Ils avaient alors le plateau suivant :

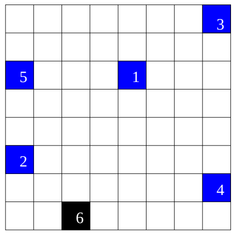
Ils ont ensuite joué de cette manière :

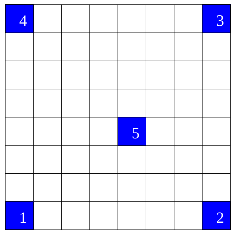
Au coup 5, le donneur de couleur a dit :

En fait, si tu veux là. Au niveau stratégique c'est pas très sensé, comme t'en as déjà mis un là (1) et un là (3), c'est pas très sensé. Celui là (3) fais ça (la droite entre 3 et 4) et celui là fait ça (la droite entre 1 et 4)

Le chercheur a répondu :

Je trouve ça super sensé. Car il y a la ligne là (droite a).



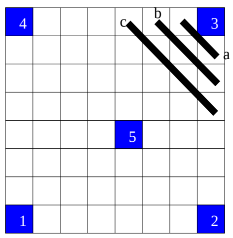


Le donneur a répondu :

Ces deux là (1 et 3), ils font ça (la diagonale joignant 1 et 3), c'est la même ligne.

Le chercheur à répondu :

Mais il y a là et il y a là (droite b et c)



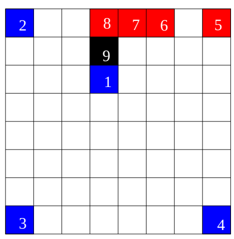
Le donneur a répondu :

Bon bref c'est pas grave. Autre chose ?

Le chercheur a répondu :

Elle est en dehors
Non.
C'est pas en dehors ?
Non.
Ah mais je suis trop bête, ben oui c'est en dehors.

Ils ont ensuite joué la partie suivante :



O a alors demandé :

Vous avez une stratégie particulière pour la trouver ?

Ils ont répondu :

Soit tu la fais la plus petite possible, soit la plus grande possible.

O :

Ca c'est quand tu choisis la frontière ?

E :

Ouais ou alors je la change.

O :

Et donc là tu fais comment ?

E :

Ben là, j'ai essayé de la mettre là parce qu'elle aurait su qu'il y a un côté blanc. Mais tant qu'elle trouve (inaudible)

E :

Et pour trouver la frontière, on fait chaque coin. Et puis après au milieu enfin...

O :

Et pourquoi vous commencez par les coins ?

E :

Parce que si il y a les 4 coins de la même couleur cela veut dire qu'elle est dehors.

O :

Et si les 4 coins ne sont pas de la même couleur ?

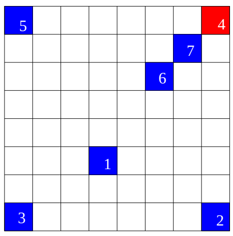
E :

C'est forcément qu'elle est dedans.

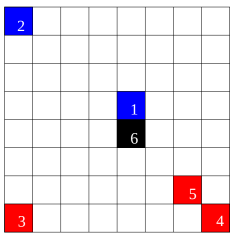
O :

Ok. Ce serait bien que vous notiez les stratégies que vous utilisez. Vous prenez une feuille et vous notez vos stratégies et pourquoi vous les utilisez.

Après, ils ont joué de cette manière :



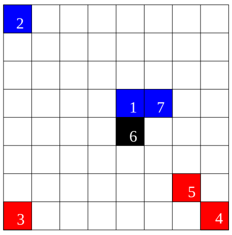
Puis, ils ont commencé de cette manière :



Le chercheur a alors dit en montrant la droite reliant 3 et 6 :

Ben la frontière c'est pas comme ça ?. Ah non, ce n'est pas comme ça.

Le donneur de couleur a alors rajouté la case 7 :



O est intervenu :
O :

Tu n'as pas le droit de poser de questions.

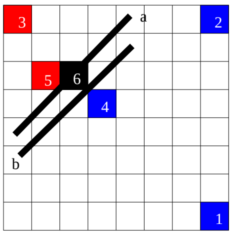
E :

Non mais en fait c'était pas ça que je voulais demander, je me suis gourré dans ma truc. Non ça va pas. La frontière est là (droite horizontale passant par 6)

Le donneur a répliqué :

Voilà, c'est ça.

Ils ont alors commencé une nouvelle partie :



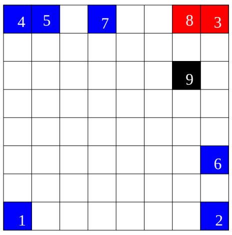
Après le coup 6, le chercheur a montré la droite a avec sont doigt.
Le donneur a répliqué en montrant la droite b :

Cela aurait pu aussi être ça.

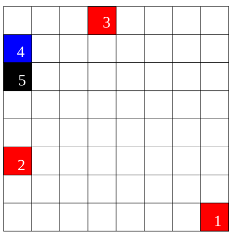
Le chercheur a alors dit :

Non.

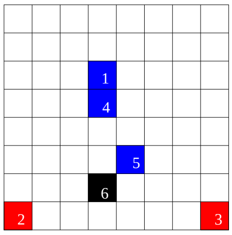
Ils ont alors joué la nouvelle partie suivante :



Puis, ils ont commencé une nouvelle partie :



Ensuite, ils ont joué cette partie :
O est alors intervenu :
O :



Vous avez changé de stratégie là, tout à l'heure vous ne m'aviez pas dit que vous faisiez les 4 coins ?

E :

En fait oui, mais là on n'en met 2.

E :

Et là elle a tout de suite trouvé 2 blancs donc elle s'est dit là.

O :

Et pour donner les couleurs, vous faîtes comment ?

E :

J'essaye de faire... Déjà si elle me demande les 4 coins, le dernier coin, elle a trois essais à faire avant. Si je lui donnais le blanc tout de suite en premier c'est trop facile.

O :

Je ne comprends pas

E :

Je donne le blanc en dernier.

O :

Et avant tu ne donnes que des bleus c'est ça ?

E :

Oui.

O :

Ok.

E :

Et ça va encore être ça à la prochaine séance ?

O :

Oui. Est ce que vous avez la solution ?En combien de coups êtes vous sûr de trouver la frontière ?

E :

En 4.

E :

Non, en plus de 4. Au moins 5.

E :

Disons que je pense qu'en 4 coups on peut avoir une idée de où se trouve la limite.

1.3 Autres observations :

– Dans un groupe, après l'explication de la consigne, ils pensaient qu'on devait choisir la frontière avant : ils ne pensaient pas qu'on avait le droit de la "bouger" :

> On peut tricher aussi.
> Comment ça tricher ?
> Ben la frontière elle évolue. On peut faire ça ?
> Oui, c'est ça. Tu n'est pas obligé de fixer la frontière dés le début.
> Ah ! je croyais.
> Non, non vous avez le droit de bouger la frontière en même temps que vous jouez. Vous n'êtes pas obligés de la fixer dès le départ.

2 Séance 2

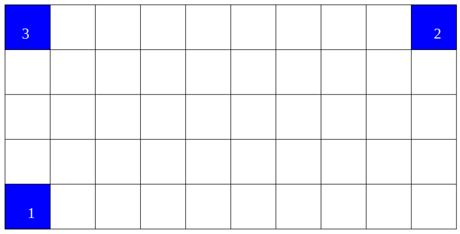
A cause de l'absence de certains élèves nous avons dû changer la disposition des groupes.
La séance a commencé avec le discours de O suivant :

> Pour l'instant, on vous demande de continuer à chercher, certains ont changé de plateau alors que d'autres ont garder les même. Nous allons vous laisser chercher encore un peu sur le problème. Je vous rappelle que vous avez deux choses à chercher : d'abord une stratégie pour trouver la frontière en un minimum de coups et ensuite la stratégie pour faire faire le maximum de coups à celui qui cherche. Nous voudrions aussi que nous notiez les stratégies que vous trouvez sur votre cahier ainsi que les autres résultats qui vous semblent intéressants.

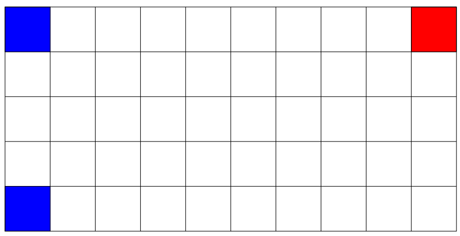
2.1 Groupe 1 : Avant l'intervention

Ce groupe était composé de 2 élèves, un élève qui a joué sur le 8×8 lors de la première séance. Le deuxième élève a joué sur le 7×6 lors de la première séance et avait demandé à changer de plateau à la fin de la séance pour tester sa stratégie.

Ce groupe a commencé par jouer de cette manière :



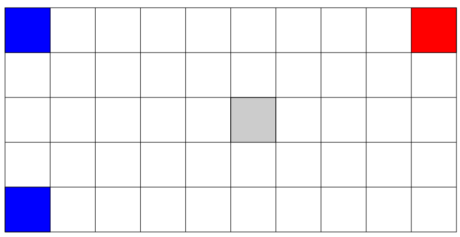
Puis le placeur de frontière a changé la couleur d'une des cases pour avoir la configuration suivante :



Le dialogue suivant a ensuite eut lieu :

> T'as pas le droit de changer.
> Si parce que t'as pas encore joué.
> En fait c'est plus dur que sur mon ancien plateau

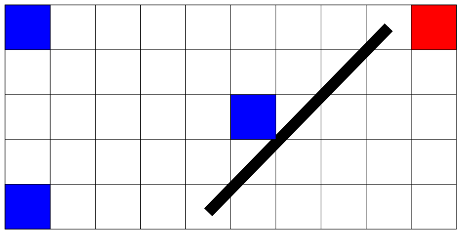
Le chercheur après avoir semblé compté quelque chose a demandé la couleur de la case suivante (grisée) :

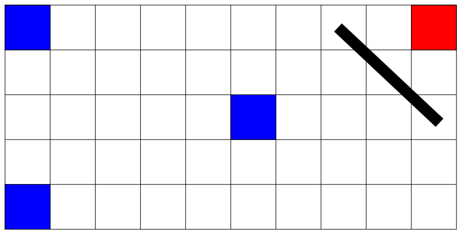


Le donneur de couleur alors compté le nombre de frontières possibles qu'il resterait si il donnait la couleur bleue et ensuite s'il donnait la couleur rouge. Il a trouvé 9 s'il jouait bleu et 8 s'il jouait rouge. Il a alors donné la couleur bleue.

Le chercheur a alors dit :

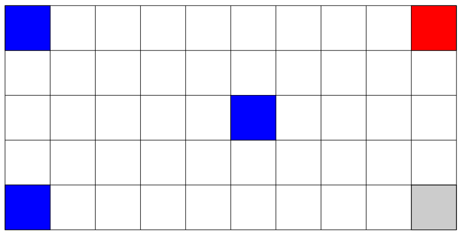
> Ca veut dire qu'elle est là.





Ah ! mais non elle peut être là aussi.

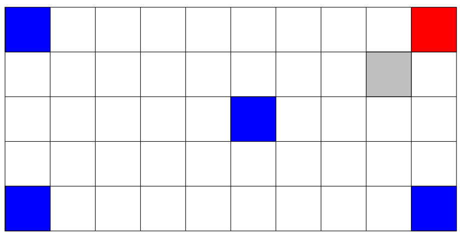
Le chercheur a alors interrogé la case suivante :



Le donneur de couleur a alors compté le nombre de frontières possible qu'ils restaient s'ils donnaient la couleur bleu et ensuite avec la couleur blanche. On appellera cette stratégie C_1. Il a alors dit au chercheur :

Décides. Il y a autant de possibilités que cela soit rouge ou bleu, cela ne change rien.

La chercheur de frontière a décidé de prendre la couleur bleue. Puis, il a décidé d'interroger la case suivante :



Le donneur de couleur a alors dit au chercheur de décider :

Il y a autant de possibilités.

Le chercheur a joué bleu et a dit qu'il lui avait fallu 6 coups.

C'est toujours pareil, on fait toujours 6.

Puis, il a dit :

On joue les angles puis on prend le milieu.

O est alors arrivé et a posé la question suivante :

Vous jouez comment ?

Le chercheur a répondu :

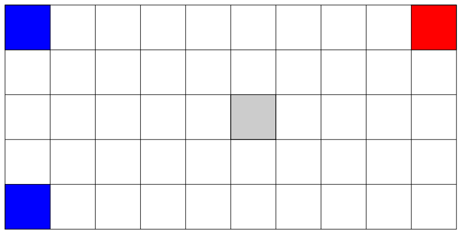
Tous les angles et après la pièce centrale. Après on prend au milieu. Si il me dit bleu je joue de ce côté et s'il me dit blanc je joue de celui là. Après je prends le milieu, enfin je prends les diagonales comme ça, je compte. C'est à dire là j'en laisse 2, là j'en laisse 1 et je sais où il est.

L'autre élève a alors dit :

> Pour trouver, on divise le nombre de possibilité par 2. Pour celui qui cache la frontière, on choisit la couleur suivant le nombre de possibilités qu'il reste si on met blanc ou bleu

O a alors dit :

> Par exemple, pour cette case c'était mieux de mettre bleu ou blanc ?



Le donneur de couleur a alors compté le nombre de frontières s'il donnait bleu puis s'il donnait blanc, il a compté 9 et 8. Donc il a dit :

> Il vaut mieux jouer bleu.

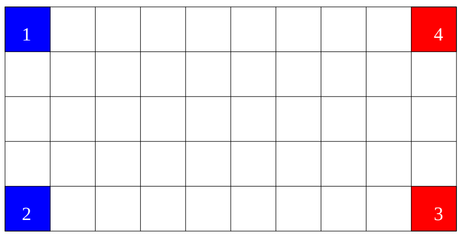
O a alors dit :

> On peut supposer que c'est mieux car cela ne l'est pas forcément. Il serait peut être possible qu'en jouant blanc ensuite le nombre de possibilité descende plus vite que si tu jouait bleu.

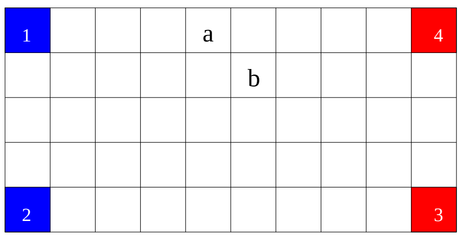
Le donneur a alors répondu :

> Je ne sais pas comment on fait pour dire ça.

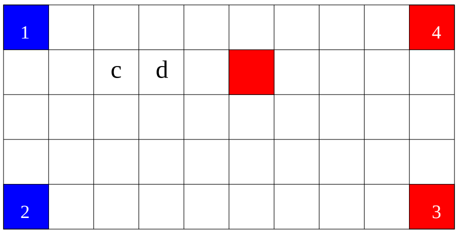
Les rôles ont été inversés. Ils on joué les 4 premiers coups de cette manière :



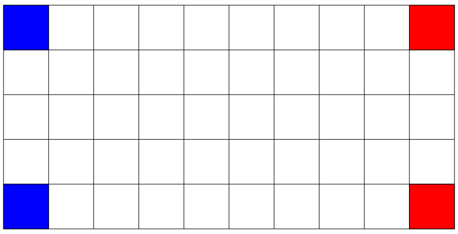
Puis le chercheur de frontière s'est mis à compter le nombre de frontières possibles restantes s'il jouait sur la case *a* puis sur la case *b*. D'abord les verticales, puis les diagonales situées à droite de la jonction des 2 plateaux, puis celles à gauche. Il a alors décidé de choisir la case *b*.



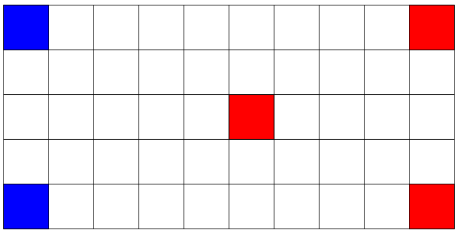
Le donneur de couleur lui a alors donné la couleur rouge. Le chercheur a ensuite compté le nombre de frontière possible s'il jouait sur la case *c*. Le donneur de couleur lui a donné la couleur bleu. Le chercheur a alors demandé la case *d*. Le donneur de couleur lui a encore donné la couleur bleue. Le chercheur a alors cru qu'il avait trouvé la frontière, le donneur lui a dit que non.



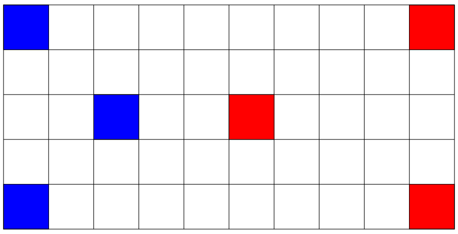
O est arrivé et leur a demandé comment ils jouaient, ils ont montré ceci sur le plateau :



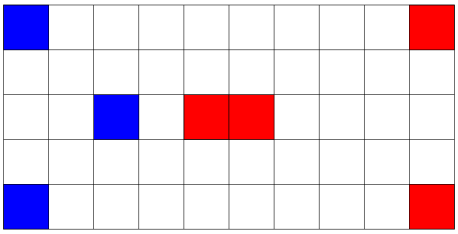
Puis ceci :



Puis ceci :

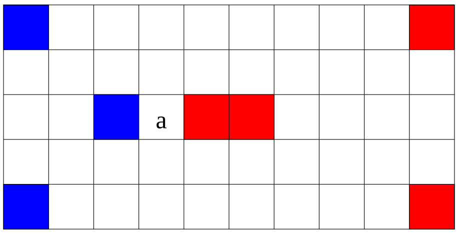


Puis ceci :



Puis le chercheur de frontière a dit que la frontière était diagonale, le donneur de couleur a dit que non.

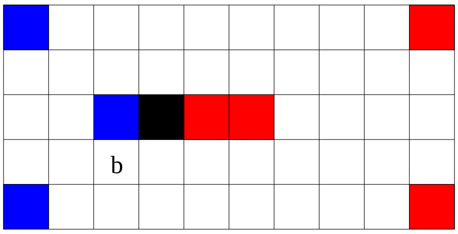
Le chercheur a ensuite demandé la couleur de la case a :



Le donneur de couleur lui a répondu noir.
Le chercheur a alors dit que la frontière était verticale. Le donneur de couleur lui a dit que non. :

C'est celle là.
Non
Si c'est celle là.

Puis, le chercheur s'est rendu compte qu'elle pouvait aussi être diagonale et a demandé la case b :



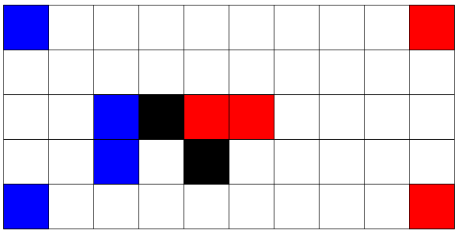
Le donneur de couleur lui a alors dit noir. O est alors intervenu :

Tu n'aurais pas pu lui faire faire des coups en plus ?

Le chercheur a réfléchi et répondu :

Si, je peux mettre bleu, cela fait 10 coups. Je mets bleu, il te reste encore un coup.

Il a alors changé la couleur de cette case en bleu. Et posé le carreau suivant :



Le chercheur a alors dit :

De toute façon, on ne peut rien faire de mieux maintenant.

O :

Quelle est votre technique pour donner les couleurs ?

E :

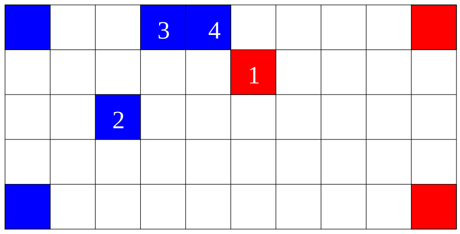
Moi ma technique c'est toujours divisé par 2. Je compte les possibilités à chaque fois en fonction des couleurs. Et je prends la couleur qui donne le maximum de possibilités.

O :

Pourquoi est ce que vous avez donné les 4 coins de cette couleur ?

E :

Parce que cela laisse plus de possibilités.

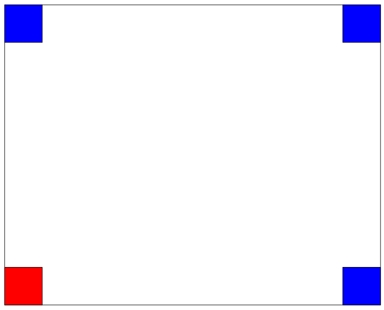


2.2 Intervention

O prend la parole au tableau :

Nous allons nous arrêter maintenant, nous allons faire un bilan des stratégies que vous avez employées. Certains jouaient avec des carrés et d'autres avec des rectangles. Les techniques que vous avez utilisées étaient assez similaires. Vous jouiez d'abord les angles puis ensuite vous essayez de jouer par exemple :

O dessine le dessin suivant au tableau :



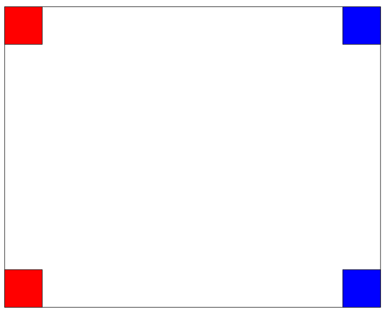
Ils y en avaient qui essayaient de jouer au milieu sur la diagonale et d'autres qui jouaient sur la ligne ici au milieu. Et puis qui ensuite rejouaient au milieu suivant les couleurs. Ca c'est la stratégie que vous avez employée.

O écrit alors au tableau :

La stratégie pour trouver la frontière : Je joue les coins et ensuite je joue au "milieu" lorsque j'ai deux couleurs différentes sur une même ligne.

D'autres quand ils avaient deux couleurs différentes sur une ligne dans ce cas là :

O dessine le dessin suivant :



O :

Ils jouaient au milieu mais sur la case du milieu d'une autre ligne. Dans le fond, que vous jouiez sur cette ligne là ou sur cette ligne là, ça ne change rien.

E^1_{G1} :

Si car il y a aussi les diagonales. Si on le met plus haut, il y a encore une diagonale sur la droite

O :

Et ceux qui ont joué sur le carré, cela change quelque chose qu'on joue sur cette ligne ou sur cette ligne ?

E_{carr} :

Non.

O :

Alors pourquoi est ce que ça change ou ça ne change pas ? Lui il dit que cela change et vous que ça ne change pas.

E_{G1}^{1} ;

Si c'est un carré, c'est égaux.

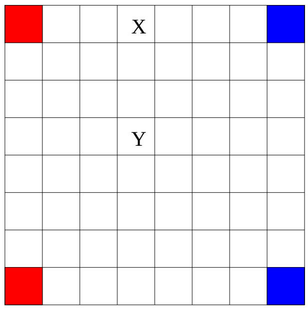
O :

Oui, si c'est un carré les 2 côtés ont même longueur. Pourquoi ça ne change pas ?

E_{G1}^{2} :

Cela ne change pas, il y a autant de possibilités d'un côté comme de l'autre.

O dessine un carré.



O :

La question était : Si je joue sur la case X ou sur la case Y, est ce que cela change quelque chose ?

E_{G1}^{2} :

Ah ben oui cela change.

O :

Toi tu penses que cela change quelque chose et vous ?

E_{carr} :

Non.

O :

Et alors pourquoi ça change ?

E_{G1}^{2} :

Parce qu'au milieu, y'a les diagonales. On peut toujours placer pleins de diagonales. Si on joue en X, on peut mettre plus de diagonale que si on joue en Y après pour la frontière.

O :

Mais est ce que là la frontière peut être diagonale ?

E_{G1}^{2} :

Ben oui.

O s'adressant aux élèves qui avaient joué sur un carré :

Et vous vous dîtes quoi ? A votre avis, est ce que là il peut y avoir une frontière diagonale ?

E_{carr} :

Non, ce n'est pas possible.

O :

Pourquoi ?

E_{carr} :

Les diagonales cela ne marchent pas. Si la frontière est derrière le carré rouge, elle passerait derrière le carré bleu.

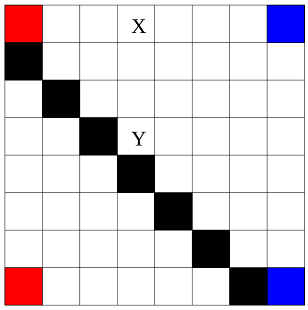
O :

Tu dis si ça c'est un point de la frontière (O montre le point juste en dessous de la case rouge supérieure.) Qu 'est ce qu'il se passe ?

E_{carr} :

Ben cela ne marche pas.

O trace la frontière suivante :



E^1_{G1} :

On sépare les rouges et les bleus.

O :

Il y a un bleu qui est de l'autre côté de la frontière donc effectivement, on ne peut avoir de frontière diagonale comme ça. Et est ce qu'on pourrait en avoir une autre ? Est ce que c'est possible d'en avoir une en diagonale ?

E^1_{G1} :

Non. Sur ce carré là, ça ne marche pas.

O :

Vous en pensez quoi ? Et si je dessine un autre carré, si je dessine un 6×6. Sur celui là, est ce que je peux avoir des diagonales ?

E :

Non.

O :

Vous pensez que non. Est ce que vous avez un argument ? Pour celui là, vous m'avez dit que non mais vous ne m'avez pas dit pourquoi.

E^1_{G1} :

Parce que comme c'est un carré si on fait partir une diagonale plus loin que le premier rouge, elle arrivera plus haut que le deuxième blanc.

O :

Tu dis que par exemple si je fais partir une diagonale de ce point ...

E^1_{G1} :

Là, elle sépare déjà les 2 rouges donc ce n'est pas bon. Donc il faut la faire partir à droite du rouge, elle arrivera forcément entre les deux bleus. La plus proche du rouge qu'on fasse, ça arrivera quand même au dessus du bleu. Si on prend la première case à droite du rouge, ben elle arrivera toujours en haut du bleu.

O s'adressant aux groupes qui avaient joué sur le carré :

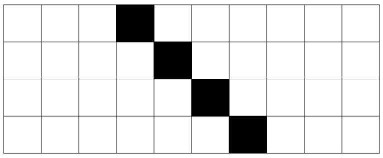
Et vous, vous pensez qu'il a raison ?

E :

Ouais.

O :

Donc voilà ce qu'il se passe, c'est que dans un carré quand on prend une diagonale, elle joint 2 côtés adjacents, c'est à dire des côtés qui se touchent alors que dans un rectangle, si je dessine ce rectangle :



O :

Cette diagonale joint 2 côtés opposés donc ici, je pourrais très bien avoir bleu bleu et rouge rouge, ce que je ne pourrais pas avoir sur un carré. Donc sur un carré, c'est un petit peu plus facile dans le sens où quand on joue les coins, on a plus d'information sur la frontière que quand on joue sur un rectangle. Maintenant, j'aimerais savoir comment est ce que vous jouez pour donner les couleurs de manière générale ?

E^1_{G1} :

En laissant le plus de possibilités à chaque fois.

O :

Cela veut dire quoi ?

E^1_{G1} :

Je regarde si je met bleu combien il reste de possibilités de frontières, si je met rouge combien il m'en reste.

O :

En gros tu comptes le nombre de possibilités qu'il reste.

O écrit :

Stratégie du donneur : Laisser le plus de possibilités : je compte le nombre de frontières possibles si je joue bleu, j'appelle ce nombre b. Idem si rouge, j'appelle ce nombre r.

O dit :

Et ensuite tu donnes quelle couleur ?

E^1_{G1} :

Je prends le plus grand.

O écrit alors :

Si $b > r$ je donne la couleur bleu. Si $r > b$ je donne la couleur rouge.

O :

Et si c'est égal ?

E^1_{G1} :

C'est pareil.

O rajoute sur le tableau :

Si b=r, ça n'a pas d'importance.

O :

Voilà, ce sont vos 2 stratégies pour jouer.

O donne une nouvelle orientation de recherche :

O :

Jusque là, chaque groupe a cherché soit sur un carré de taille 8×8, soit sur un rectangle de taille 10×5 ou 7×6. Nous avons des stratégies pour trouver la frontière et des stratégies pour donner les couleurs mais nous ne savons pas si ces stratégies sont optimales ou non. En fait, le problème qu'on vous a posé est un problème assez difficile, c'est même un problème ouvert, c'est à dire que personne ne connaît encore la réponse. Ce qu'on peut faire lorsqu'on est confronté à un problème difficile, c'est de simplifier les objets sur lesquels on travaille car cela peut donner des idées pour résoudre le problème sur des objets plus complexes. On peut par exemple repérer des régularités sur les objets qui pourraient nous permettre de généraliser les méthodes. Ici, par exemple, quels sont le objets qui vous semblent plus simple ?

E :

Des triangles.

O :

Tu veux dire un plateau en forme de triangle ?

E :

Non, on remplace les carrés par des triangles.

O :

Pourquoi tu penses que c'est plus simple ?

Pas de réponses de E.

O :

Quels sont les objets qui vous semblent plus simples ?

Pas de réponses

O :

On pourrait par exemple penser que carrés plus petits sont des objets plus simples à étudier. Alors ?

E :

Le carré 3×3, le carré 2×2, le carré 1×1

O dessine ces carrés au tableau.

O :

Ok, donc il y a ces petits carrés et vous n'auriez pas d'autre objets à proposer ?

E :

Le rectangle 1.

O :

C'est à dire ?

E :

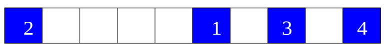
On prend un rectangle de taille 1 en hauteur.

O :

Ok, il peut aussi y avoir ce qu'on appeler la ligne : le rectangle $1 \times n$. Où n peut prendre n'importe quelle valeur. Par exemple, n peut être égal à 200 ou à 10000. Voilà, ce qu'on va vous demander de faire maintenant, c'est de travailler sur ces petits objets c'est à dire les petits carrés ou la ligne. Vous choisissez celui que vous préférez et vous essayez de résoudre le problème dessus, c'est à dire trouver le nombre de coup minimum qu'il faut pour trouver la frontière.

2.3 Groupe 1 : Après l'intervention

Ce groupe a commencé par travailler sur une ligne de taille 10. Ils ont joué la première partie de cette manière, E^1_{G1} donner les couleurs alors que E^2_{G1} chercher la frontière :



O a demandé :

Vous aviez une stratégie en faisant ça ou vous avez essayé comme ça ?

Ils ont répondu :

E^1_{G1} :

On a essayé comme ça.

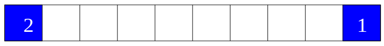
E^2_{G1} :

Si, il y avait une stratégie. Il y a forcément une stratégie.

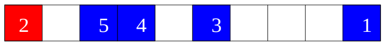
O :

C'est quoi ?

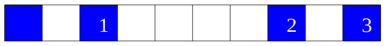
Les élèves montrent alors ceci :



Puis changent la couleur de 2 en rouge. Ils jouent alors comme ceci :



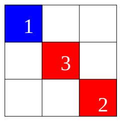
Ils jouent la partie suivante comme ceci :



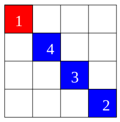
L'élève qui donne les couleurs compte à chaque fois le nombre de possibilités de frontières qu'il reste s'il joue bleu ou rouge.

Suite à un problème technique, nous n'avons pas pu suivre ce qu'il s'est passé après.

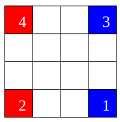
Ils ont joué une parie de cette manière sur le 3×3



Ensuite, ils ont joué sur le 4×4 de la manière suivante :



Ils ont alors joué une nouvelle partie sur le 4×4 :

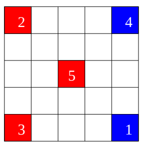


Puis ils ont dit :

On finit en encore un coup.

Ils ont alors changé 4 en bleu. Et montrer les frontières diagonales possibles.

Ils ont alors commencé une nouvelle partie sur le 5×5. Ils l'on joué de cette manière :

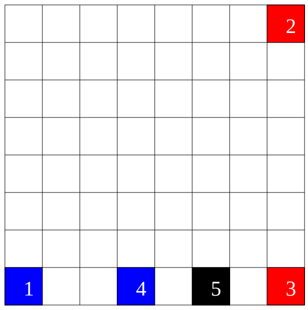


Ils ont ensuite joué sur le 2×2. Ils pensaient qu'on pouvait trouver la frontière en 3 coups car ils n'avaient pas pensé que la frontière pouvait être seulement un coin. C'est une intervention de O qui leur a permis de s'en rendre compte. Ils ont alors continué à jouer puis ils ont dit qu'on ne pouvait pas faire en moins de 4 coups. O leur a alors demandé pourquoi. Ils n'ont pas donné d'explication. O leur a alors posé la question suivante : Est ce qu'on peut le faire avec seulement 3 coups ? Ils n'ont pas répondu. O leur a alors demandé : Comment joueriez-vous face à quelqu'un qui vous dit qu'il peut finir en 3 coups ?. Ils ont répondu qu'il lui donnait toujours la même couleur. O a alors demandé : Est ce qu'il peut conclure dans ce cas ?. Ils ont répondu que non car il devait encore interroger la dernière case. O leur a alors dit que ce qu'il venait de dire contenait tous les arguments pour faire une preuve du fait qu'on ne pouvait pas faire mieux que 4.

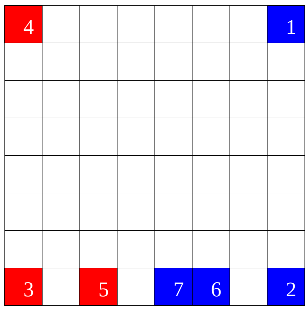
2.4 Groupe 2 : Avant l'intervention

Ce groupe était composé de 2 élèves lors de la première séance et avait travaillé sur le 8×8. Lors de cette séance, les 2 même élèves étaient présents et ils ont travaillé avant l'intervention sur le 8×8.

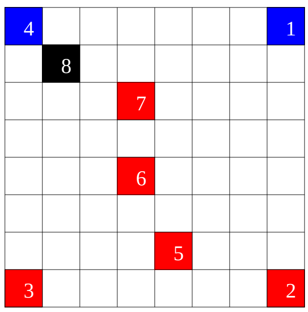
Ils ont commencé par jouer de cette manière.



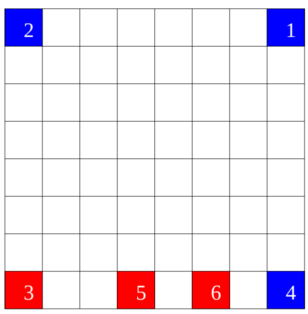
Puis le chercheur de frontière a semblé montré une frontière. Ce que le donneur de couleur a confirmé. O est alors intervenu pour leur dire qu'ici on ne pouvait pas être sûr que la frontière était là. Ils ont ensuite joué de cette manière :



Puis, ils ont joué la nouvelle partie suivante :



Ensuite, ils ont joué la partie suivante :



Le chercheur a alors dit en montrant la case qui se trouve entre 4 et 6 :

Elle est là.

Ce à quoi le donneur de couleur a répliquer :

Elle ne peut pas être autre part de toute façon.

O est ensuite intervenu et leur a demandé :

Alors ?

E :

Ben nous, on fait la même chaque fois maintenant.

O :

Donc la même chose... c'est à dire ?

E :

C'est à dire on place toujours d'abord les coins. Et si par exemple tout est de la même couleur cela veut dire que c'est en dehors. Si il y en a deux de la même couleur à côté et deux en face de la même couleur, ça veut dire qu'elle est horizontale. Et après il faut faire le moins de coups possible pour trouver la limite.

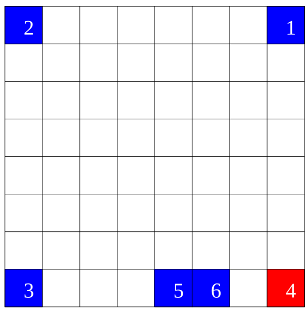
O :

D'accord, montrez moi comment vous jouez.

E :

Il faut essayer de coincer

Les élèves ont ensuite joué de cette manière :



Puis le chercheur a dit que la frontière était la diagonale qui passait entre 4 et 6.
O a alors dit :

Et celui qui donne les couleurs, il joue comment ?

E :

J'essaye de la déplacer au maximum.

O montre la case 5 et dit :
O :

Ici par exemple tu luis a donné bleu.

E :

Ca aurait été plus intelligent de jouer rouge.

O :

Est ce que cela aurait changé quelque chose si t'avais donné rouge ?

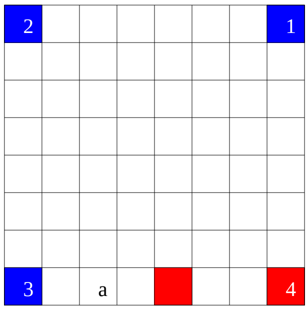
E :

Ouais parce qu'elle aurait fait en plus de coups.

O :

T'es sûr ? Parce que toi t'aurais joué où ?

L'élève qui cherchait la frontière montre la case a :



E :

Cela ne changeait rien en fait.

O :

Effectivement dans ce cas là, cela ne changeait rien. Maintenant, cela serait bien que vous notiez votre stratégie. Ce serait bien que vous trouviez un moyen de noter sur votre feuille les cases sur lesquelles vous jouez en fonction des couleurs et par rapport à celui qui donne les couleurs comment est ce qu'il les donne.

O :

Vous avez écrit votre stratégie ?

Les élèves montrent leur cahier à O. O leur dit alors :

Essayez de trouver une preuve de cela. On fait des mathématiques, l'idée c'est d'arriver à prouver que cela va vous faire faire le moins de coups possibles.

E :

A chaque fois ?

O :

Oui à chaque fois.

E :

On a essayé plusieurs fois et c'est toujours la même chose.

O :

Tu penses que c'est parce que tu vas le faire pleins de fois que tu vas prouver que ça marche à tous les coups ?

E :

Je ne sais pas. En 6 coups maximum on peut trouver la frontière.

O :

Et est ce que vous pouvez faire par exemple en 5 coups ?

E :

Non, je ne crois pas.

O :

Et si vous ne pouvez pas faire en 5 coups pourquoi ? Là maintenant vous avez écrit votre stratégie, il faut aussi donner les raisons pour lesquelles ça marche.

O :

Vous en êtes où ?

E :

Pas très loin.

O :

Vous jouiez comment déjà ? Vous jouez les 4 coins et après ?

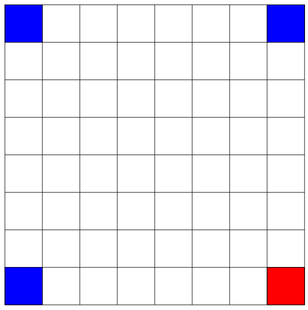
E :

En fait, on arrive soit à 5 coups soit à 6 coups.

O :

Par exemple, vous commencez par les 4 coins et ensuite ?

O met les couleurs suivantes dans les coins :



E :

Déjà, on a une idée de la frontière c'est à dire qu'elle passe par là et là.

E montre les lignes du bord qui contiennent 2 cases de couleurs différentes.

E :

Et il faut trouver avec le moins de coups possibles sur quelle ligne elle est.

O :

Ici, vous avez une information supplémentaire sur le frontière. Est ce qu'elle peut être horizontale ou verticale ?

E :

Déjà, on sait qu'elle est en diagonale.

E :

Après en 2 ou 3 coups de plus...

O :

Donc après, vous jouez comment ?

E :

Un peu au hasard.

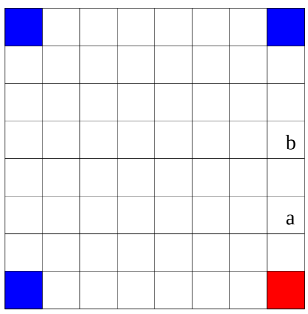
O :

C'est à dire

E montre la case a puis la case b et dit :

E :

On fait ça et ensuite ça.



O :

Vous jouez des points sur la ligne. Et celui qui donne les couleurs, il les donne comment ?

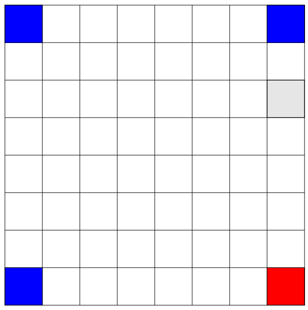
E :

Le plus de coups.

O :

Si par exemple je demande cette case (case grisée), vous allez me dire quoi ?

O montre la case grisée :



E :

Bleu.

O :

pourquoi ?

E :

Ben parce que y'a encore 4 possibilités de frontières.

O :

Alors que si tu m'avais donné blanc ?

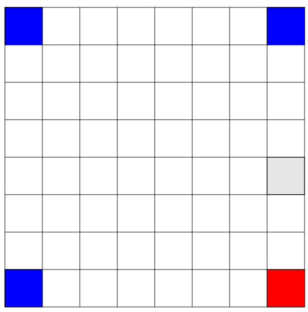
E :

Il y en a une seule.

O :

Et si je joue là ?

O montre la case grisée.



E :

Blanc. Parce que si c'est bleu il y a encore 2 possibilités alors que si c'est rouge il y a encore 3 possibilités.

O :

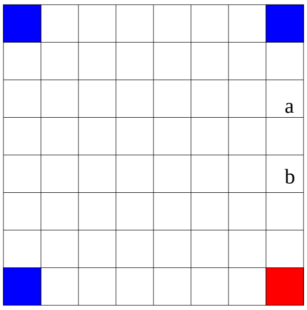
Ok. Et donc celui qui cherche, il a intérêt à ce qu'il y ait le moins de possibilités ou le plus ?

E :

Le moins mais cela dépend de la personne qu'il y a en face car elle va essayer de faire le plus de coups

O :

Oui mais par exemple, si je demande cette case là (case a). Si tu me dis bleu, il m'en reste 4. Alors que si je joue là (case b), si tu me dis bleu il m'en reste 2 et si tu me dis rouge, il m'en reste 3. Donc là il m'en reste moins que si je joue là.

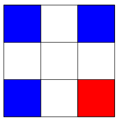


E :

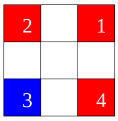
C'est ce qu'on essaye de faire, de jouer à peu près au milieu car si on joue sur les bords, on laisse plus de possibilités.

2.5 Groupe 2 : Après l'intervention.

Ce groupe a joué de cette manière sur le 3×3 :



Puis ensuite, de la manière suivante :



Le chercheur a alors dit :

C'est trop facile !

Le donneur de couleur a répliqué :

Ben, tu veux que je fasse quoi. Si je la mettais comme ça. Elle est comme ça.

L'élève change alors 4 en bleu et montre la frontière. On a ensuite le dialogue suivant :

Ben là on peut dire...
4 coups
Si on met dans les coins.
Evidemment.

On fait du 4 par 4.

O :

Vous faîtes quoi ?

E :

On détermine chaque coup qu'il faut pour chaque cas.

O :

Vous jouez sur quoi ?

E :

1 sur 1, 2 sur 2 et 3 sur 3. Et là on fait 4 par 4.

O :

Vous êtes partis dans les 4 coins. Vous avez essayer autre chose que les 4 coins ?

E :

Oui on avait essayé sur le 3 par 3. T'avais mis au milieu.

O :

Et alors ?

E :

Ca avait fait plus de coups pour trouver la ligne. Si on veut un minimum il faut pas jouer comme ça.

O :

Vous êtes sur de ça ?

E :

Ouais, je crois bien. Mais bon je ne suis pas scientifique.

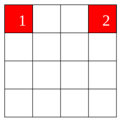
O :

Pourquoi tu dis ça ?

E :

Je n'ai jamais été fort en maths et ni en sciences.

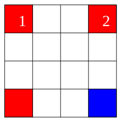
Ils ont ensuite commencé à jouer sur le 4×4 et arrivé à ce moment là :



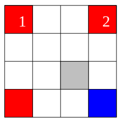
Le chercheur a dit :

Les coins en fait.

Le donner de couleur a alors mis les couleurs suivantes sur les coins restants :



Puis le chercheur a demandé la case grisée :



Le donneur a alors dit avant de jouer :

Juste pour te faire faire un coup de plus...

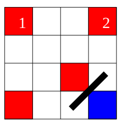
Et a donné la couleur rouge.
Le chercheur a alors dit :

5 coups, ouais c'est 5 coups.

O est alors intervenu :
O :

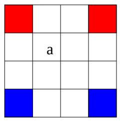
Pourquoi ? Comment tu termines ? elle est où la frontière ?

Le chercheur montre alors cette ligne :

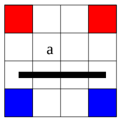


Le chercheur dit alors :

Mais si elle avait fait comme ça :

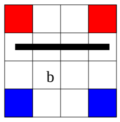


Je lui demande celui là (case a) et alors la frontière est là (montrant la droite)



Le chercheur dit alors :

Ou alors le contraire, je demande là (case b) et la frontière est là. Donc c'est en 5 coups.



Le 4 fois 4 cela se fait en 5 coups.

O :

Est ce que vous pourriez écrire ça. Ca c'est vraiment des mathématiques. Je ne trouve pas que vous n'êtes pas des scientifiques.

E :

Est ce qu'on peut faire... genre 2, 3, 4... Enfin des rectangles. Est ce qu'on peut changer de format en prenant des rectangles comme 2 fois 4 ?

O :

Non, on a parlé de rectangle mais c'était le 1 fois 1, le 2 fois 4 c'est plus compliqué. Ici, ce que vous avez dit c'est plus que ce que vous avez écris. Vous avez étudié différents cas.Ce que vous avez fais ici, c'est ce qu'on appelle un raisonnement par disjonction des cas. Vous avez dis si je met un blanc là alors dans ce cas la frontière et là et si nana et vous avez fais tous les cas. Ce n'est pas ce que vous avez marqué. Vous pouvez faire des dessins. Faut pas croire que quand on écrit une démonstration c'est toujours des textes rédigés.

O :

Ce que vous faisiez là c'était le 3 fois 3. Quand vous dîtes 4 coups dans les coins, vous m'avez prouvé qu'on pouvait pas faire en moins de 4 coups et que de toute façon à tous les coups on en avait 4. A partir du moment où il y avait trois bleus et un blanc. C'est ça qu'il faut écrire, ça ne suffit pas d'écrire ça. En fait ce que vous m'avez dit là, c'est la preuve mais vous ne l'avez pas écrite vous avez écris que le résultat final. Vous avez fais une démonstration sans le savoir, et c'est ça que je vous demande d'écrire.

E :

Une démonstration ?

O :

Oui, c'est ce que vous m'avez dit en disant si elle faisait ça on faisait ça et si elle faisait ça on faisait ça et il y avait pas d'autres cas.

E :

J'écris juste dans tous les cas...

O :

Vous ne voyez pas la différence entre écrire ça et ce que vous m'avez dit ?

E :

heu... ben si, on a pas développé forcément tout ce qu'on a fait.

O :

C'est pas que du développement, vous avez vraiment explicité le raisonnement. Alors que là, je ne le vois pas.

760 E :

On peut essayer.

O :

Ben essayez, c'est ce que je vous demande.

3 Séance 3

Cette séance s'est déroulé deux semaines après la séance 2 à cause des vacances scolaires. Certains élèves étaient aussi absents lors de cette séance alors que des élèves absents lors de la dernière séance sont revenus. Nous avons aussi de nouveaux élèves qui sont arrivés. De plus, une personne du premier groupe, c'est à dire une personne qui avait déjà fait 4 séances avec nous sur la frontière. Nous avons donc décidé de mettre les 2 nouveaux dans le même groupe que cet élève afin qu'il leur explique le jeu.

La séance a commencé par le discours suivant :

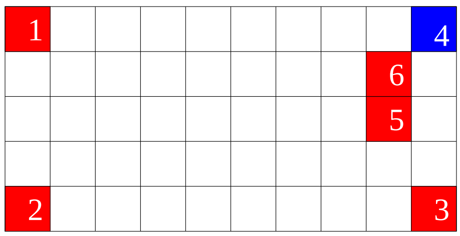
O :

> Aujourd'hui, nous allons continuer ce que nous avons commencé la dernière fois. Les 2 groupes aux extrémités vous allez continuer à chercher sur la ligne ou les petits carrés. Et ce groupe là va découvrir le jeu. Ce serait bien que vous preniez des notes. On va relever ce que vous écrirez durant la séance.

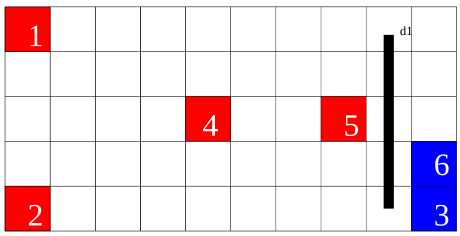
3.1 Groupe 1

Ce groupe était composé de 3 élèves dont les 2 même élèves que lors de la séance 2. Ce groupe avait pour matériel un plateau 5×10 et des carrés de couleurs différentes.

Ce groupe a commencé par jouer de cette manière :



Ils ont ensuite inversé les rôles et joué de cette manière :



Au coup 4, celui qui donnait les couleurs a dit en comptant des frontières :

> Si je mets bleu, il y en a 5. Si je mets blanc, il y en a 1,2,3,4,5,6,7. Donc, Il vaut mieux mettre blanc.

Au coup 5, celui qui donnait les couleurs a une nouvelle fois compté le nombre de frontières. Il a compté 4 frontière s'il mettait bleu et 4 s'il mettait blanc. Il a alors dit :

> Comme tu veux. Décides bleu ou blanc.

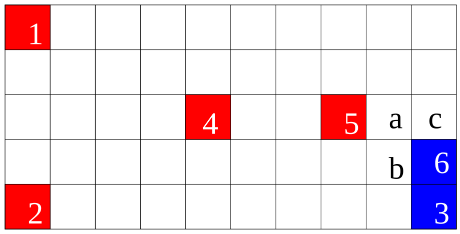
O est intervenu au coup 5 et leur a alors demandé :

> Vous jouez comment ?

Le donneur de couleur a répondu :

> C'est lui qui doit trouver. Moi je fais toujours pareil, j'essaye de laisser le plus de possibilités possibles. Mais après c'est pour chercher, il faut diviser les possibilités par deux mais c'est vrai qu'il peut y avoir des cas où on trouve plus facilement même si il y a plus de possibilités. Enfin, si il y a 5 possibilités on trouve en 2 coups et s'il y en a 4, on trouve en 3 coups. Mais pour l'instant c'est lui qui trouve.

A l'issu du coup 6, le chercheur de frontière a dit que la frontière était d1. Le donneur de couleur a alors dit :



Elle n'est pas forcément là. Tu veux jouer où ?
De toute façon, il me reste encore 2 coups et c'est soit là soit là (en montrant les cases a et b).
Là. (case a)

Le donneur de couleur a donné la couleur rouge.
O est alors intervenu :

Par rapport à cette case t'aurais pas pu lui faire faire un coup de plus ?
Oui j'aurais pu mettre frontière. Et du coup après, elle est soit là, soit là.

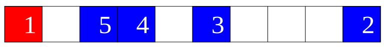
Il place alors sur la case a un carré de couleur noir. Le chercheur interroge alors la case c.
O dit alors :

Mais vous ne jouez plus sur les petits carrés et les lignes ?

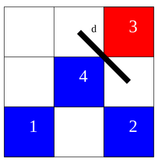
Un des élèves rétorque alors :

Mais on peut faire sur 10 sur 2 lignes ?
Déjà tu peux essayer sur la ligne.
On a déjà fait sur la ligne.
Et sur la ligne vous trouvez quoi ?
Je ne sais plus combien on a fait. On a fait sur 2 fois 2. Sur une ligne je ne sais plus combien on avait fait.
Ben vous pouvez essayer sur une ligne ou faire des plus petits carrés.

Ils ont alors joué sur la ligne de taille 10 de cette manière :



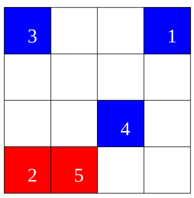
Puis, ils ont joué sur un 3×3 de cette manière :



Au quatrième coup, le chercheur a dit que la frontière était d.
O est intervenu :

Maintenant vous essayez de faire le 3×3 ?
Non, le 4×4.

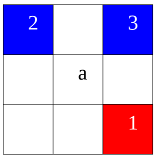
Ils ont alors joué sur le 4×4 de la manière suivante :



O est alors intervenu :

Et sur le 3×3 vous avez trouvé quoi ?
4 coups
Et vous pensez qu'on peut faire mieux que 4 ?
Je ne sais pas .

Le groupe a alors décidé de chercher sur le 3×3 et a joué de cette manière :



Une fois le troisième coup joué. Le chercheur a dit :

Non en fait tu peux dire là (case a) à la place de là (case du coup 2). C'est pour essayer de trouver plus vite.

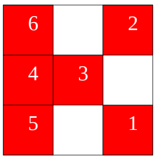
Le donneur de couleur a alors répliqué :

Mais dans ce cas là, je n'aurai pas joué cette couleur là.

Le chercheur dit alors :

Je joue sur celle là comme troisième coup.

Ils recommencent alors du premier coup :



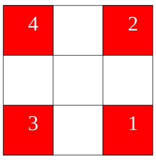
Après le 4ième coup, le chercheur a dit :

Ah, ben elle est dehors.

Le donneur de couleur lui a rétorqué que non. Et lui a montré qu'elle pouvait être un coin. Le chercheur a alors dit :

T'as le droit de mettre juste un trait de frontière ?
Oui.

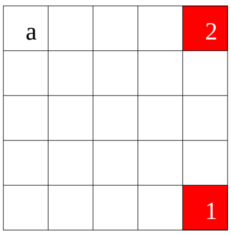
Après cette partie, ils en ont joué une nouvelle de cette manière :



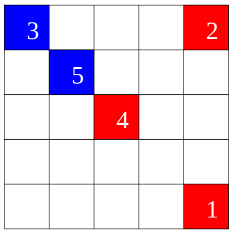
Au coup 4, le donneur de couleur a dit :

C'est la même chose si je joue bleu, tu saurais que la frontière est là.

Ils ont alors décidé de joué sur le 5×5 :



Arrivé à la case a demandé par le chercheur, le donneur de couleur hésite entre bleu et rouge et décide de compter le nombre de frontière s'il joue bleu et celle s'il joue rouge, il trouve 5 frontière en jouant bleu et 4 en jouant rouge. Il choisit de donner bleu. Ensuite, le chercheur interroge la case 4, le donneur compte une nouvelle fois le nombre de possibilités de frontières s'il donne bleu et s'il donne rouge. Il compte 4 et 4.



O intervient :

Donc là, vous avez fais le 5×5 et le 3×3 vous en êtes où ? En combien de coups vous le faîtes ?

4.

Vous pouvez le faire en moins ?

Je ne sais pas.

En 3 coups par exemple ?

Il faut au moins faire les 4 coins pour être sûr...

Pourquoi tu voudrais faire les 4 coins ?

Pour être sûr qu'elle est pas à l'extérieur.

Parce que si par exemple, la frontière y'en a pas, il faut combien de coup pour le savoir ?

4. De toute façon, quoi qu'il arrive il faut au moins 4 coups pour n'importe quel taille. Sauf pour la ligne.
Pour la ligne, il en faut combien ?

Au moins 2.

En fait, là c'est ce que t'as dis, si par exemple toi t'es le donneur de couleur et que tu joues en donnant tout le temps la même couleur, il lui faudra au moins 4 coups pour dire que tout est de la même couleur. On ne peut pas faire moins de 4 coups. Là, vous avez une preuve que sur le 3×3 il faut 4 coups.

Et sur le 2×2 aussi.

Voilà, ce qu'il a dit c'est généralisable à n'importe quel carré ou rectangle, c'est à dire que n'importe quel carré ou rectangle, il faut au moins 4 coups.

Pour la suite, on ne sait pas combien il faut de coups parce qu'une fois qu'on a fait les coins...

En fait, la meilleur stratégie n'est pas forcément de faire les 4 coins. Simplement tu sais qu'il faut au moins 4 coups dans le cas ou l'autre te donne tout bleu.

De toute façon, on fait 3 coups et si sur les 3, il y en a 2 de couleur différente, on sait que la frontière n'est pas extérieure. Il vaut mieux donner les 3 même.

Cela dépend de sur quoi vous jouez. Il y a un autre truc qui est intéressant c'est que c'est vrai pour n'importe quel carré qui contient au moins 4 cases et que c'est vrai pour un rectangle. Donc là, vous avez un résultat qui est vrai pour beaucoup d'objets, toute une classe d'objet. Donc c'est un résultat intéressant.

3.2 Intervention pour toute la classe :

O :

Sur ce qu'on vous avez demandé l'autre fois sur les petits carrés et la ligne. A part ceux qui viennent d'arrivée qui n'ont pas cherché sur les petits carrés. Les groupes ont dit qu'il fallait 4 coups minimum pour le 2×2 alors comment vous justifiez qu'il faut 4 coups minimum sur le 2×2 ?

E_{G1} :

Il faut 4 coups quel que soit le carré pour savoir si la frontière est à l'intérieur ou à l'extérieur.

O :

Et c'est lesquels ces 4 coups ?

E_{G_1} :

Les 4 coins.

O :

Vous avez compris ce que dis votre camarade ? C'est à dire que si je prends un carré, n'importe lequel. Imaginons que le donneur de couleur ait décidé de mettre la frontière en dehors du carré. Donc sur ce carré là, il dit qu'il faut 4 coups pour dire que la frontière est en dehors. En jouant ces 4 coins, on sait que la frontière est en dehors. Est ce qu'on peut avec trois coups montrer que la frontière est en dehors ?

E_{G1} :

Non, parce que cela peut toujours être dans un coin, donc il faut faire les 4 coins.

O :

Là ce que tu viens de dire, c'est l'argument qui permet de dire qu'en trois coups ce n'est pas possible. Là, on a résultat super intéressant parce que c'est un résultat valable pour tous les carrés et qui vous dit que pour n'importe quel carré il vous faudra au moins 4 coups. Comment on peut l'écrire, on peut l'appeler théorème. Cela ne marche que sur des carrés différents du $1{\times}1$. Pour un carré de côté n avec $n \geq 2$, il faut au moins 4 coups pour trouver la frontière.

O écrit au tableau :

3.1 Théorème. *Pour un carré de côté n avec $n \geq 2$, il faut au moins 4 coups pour trouver la frontière.*

O :

Comment vous écririez la preuve de ce résultat ? Comment vous écririez qu'il faut au moins 4 coups pour trouver la frontière dans n'importe quel carré ?

E_{G1} :

Il faut demander au moins les 4 coins pour savoir que la frontière n'est pas dans un coin ou à l'extérieur.

O :

T'as rajouté un autre truc tout à l'heure. Par exemple si je dis rouge et bleu pour les deux premiers coins...

E_{G1} :

Ouais mais c'est si on dit tout le temps bleu.

O :

Oui, en fait c'est si la frontière est en dehors. Si la frontière n'est pas sur le carré alors il me faut 4 coups pour le certifier. Ces 4 coups ce sont les angles. Pourquoi est ce qu'il faut 4 coups pour le certifier ? Il faut au minimum 4 coups car comme tu le disais tout à l'heure. Car si je n'interroge pas tous les coins, cela veut dire qu'un coin au moins n'a pas été interrogé. La frontière pourrait alors être ce coin. Donc voilà. Voilà, là on a la justification qu'il faut au moins 4 coups car si je ne fais pas les 4 coins, la frontière pourrait passer par un coin. Ce qui veut dire que je ne peux jamais trouver la frontière en 3 coups.

O écrit au tableau :

Démonstration. Si la frontière n'est pas sur le carré, il me faut 4 coups pour le certifier. Il faut au minimum 4 coups car si je n'interroge pas tous les coins il y a au moins un coin qui n'a pas été interrogé. La frontière peut alors passer par ce coin.

□

O :

On démontre un résultat plus large que celui là en fait. On pourrait dire que c'est vrai pour un rectangle qui possède au moins 4 cases.

E_{G1} :

Mais il ne faut pas que cela soit une ligne.

O :

C'est compliqué à dire. Il faut dire tels que ses côtés soient de longueurs supérieures ou égales à 2. Donc on peut remplacer carré de côté $n \geq 2$ par ça. Donc cela nous donne encore un résultat plus général.

O :

On a vu que vous aviez beaucoup cherché sur des petits carrés. Mais sur des petits carrés, ce n'étaient pas si simple de faire des preuves pour le minimum. Tiens par exemple, ce théorème, sur le carré 3×3, vous arrivez à trouver la frontière en combien de coups ?

E :

4

O :

Et comment vous faîtes ?

E :

Les coins.

O :

Vous jouez tous les coins sur le 3×3 et comment vous justifiez que vous trouver la frontière en faisant les 4 coins ?

E :

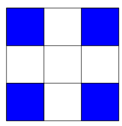
Si par exemple les 4 coins sont bleus, cela veut dire que la frontière est à l'extérieur.

O dessine un carré 3×3 au tableau.

O :

Si on met bleu, bleu, bleu et bleu. Là la frontière est extérieure donc tu l'as trouvé et ensuite ?

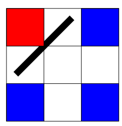
O le colorie de cette manière :



E :

Si on met un point blanc, la frontière est forcément en diagonale.

O dessine un nouveau carré 3×3 et le colorie de cette manière :



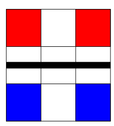
O :

Ensuite ?

E :

Si, on met deux blancs et deux bleus. La frontière est forcément au milieu.

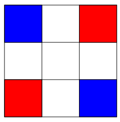
O dessine ceci :



O :

Et puis il y a aussi ce cas là.

O dessine :



E :

C'est impossible

O :

Vous dîtes que ce n'est pas possible. Et pourquoi ?

E :

Il n'y a pas de frontière.

O

Et pourquoi on ne fait pas trois rouges et un bleu ?

E :

On peut aussi, mais on l'a déjà fait.

O :

Finalement ,il y a combien de cas ?

E :

3

O :

Cela s'appelle comment un raisonnement comme ça ? il y a trois cas et on traite les trois cas. C'est un raisonnement par disjonction des cas. Voilà, si vous voulez faire une preuve du fait qu'on peut trouver la frontière en 4 coups sur le 3×3, il faut que vous fassiez ces 4 dessins là. Ceci est une preuve du fait qu'on peut trouver la frontière en 4 coups sur le 3×3. Et en utilisant ce théorème, on sait qu'on ne peut pas faire mieux. En couplant cette preuve avec ce théorème, on sait que sur le 3×3, on ne peut pas faire mieux. La preuve pour le 3×3 c'est ça plus le théorème 1.

O :

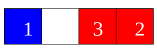
Ce qu'on a vu c'est qu'il était assez difficile d'avoir des preuves sur les carrés, là on en a une pour le 3×3 mais sur le 4×4 et le 5×5... Pourquoi elle marche cette preuve sur le 3×3, c'est parce qu'on a ce théorème général qui nous dit qu'il faut au moins 4 coups pour trouver la frontière. Mais sur le 4×4 ou le 5×5, je ne crois pas que vous arrivez à trouver la frontière en 4 coups. Il nous faudrait donc un autre théorème de ce style qui pourrait nous aider à trouver, à avoir un résultat de ce qu'on appelle une borne inférieure, c'est à dire une valeur il faut au moins. Donc ce qu'on va vous demander maintenant c'est de chercher exclusivement sur la ligne, sur une ligne de taille quelconque. Car on pense que cela pourrait nous aider à résoudre plus de cas que le carré 3×3.

3.3 Après l'intervention :

Les élèves en jouant ont dit ceci :

On doit rajouter un carré toutes les 2 cases. Si c'est 5, cela fait 2,5 donc 3. Si on fait sur une ligne de 2 cases, il faut 2 coups. Sur une ligne de 3, il faut 2 coups.

Un élève du groupe note alors ces résultats, puis il joue tout seul avec une ligne de 4 de la manière suivante :



Puis, il note le résultat. Et écrit sur son cahier. O intervient alors pour lui demander ce qu'il a écrit :

Qu'est ce que t'as écris ?

Si n est impair, le nombre de coup c'est $\frac{n+1}{2}$ et si n est pair c'est $\frac{n+2}{2}$.

Donc ça tu penses que c'est vrai ?

Je pense.

Cela veut dire que si je prends une ligne de taille 100, il me faut à peu près 50 coups. Tu penses qu'on peut faire mieux sur une ligne de taille 100 ?

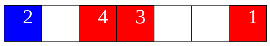
En fait, à chaque fois faut diviser par 2 et quand c'est impair plus 1. En fait, il faut diviser par 2 pleins de fois.

Ce nombre c'est quoi c'est un minimum ou c'est le nombre de coups qu'il vous faut à vous pour trouver la frontière ?

C'est le minimum... En fait, ce n'est pas n divisé par 2 si c'est pair et $n+1$ divisé par 2 si c'est impair. A chaque fois, on le divise par 2.

Par exemple sur la ligne de 10 ?

Un élève du groupe joue alors sur une ligne de taille 7 de la manière suivante :



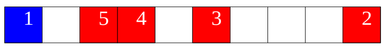
Puis il dit :

Cela marche. C'est bien 4, c'est ce que j'avais dit.

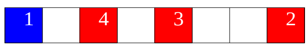
O dit alors :

Et sur une ligne de 10, il en faut combien ?

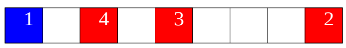
L'élève répond 6 et se met à jouer sur la ligne de taille 10 de cette manière :



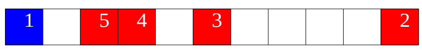
Après un moment de réflexion, il essaye de jouer sur une ligne de 8 :



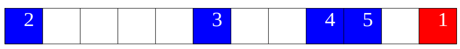
Puis il essaye de jouer sur une ligne de taille 9 :



Il joue ensuite sur une ligne de taille 11, pour cela il utilise un carreau pour allonger le plateau.

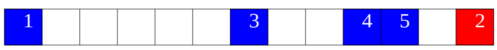


Il note ce résultat et joue ensuite sur une ligne de taille 12, en rajoutant 2 carreaux :

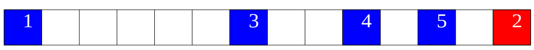


Il note ce résultat puis joue sur une ligne de 13, un des élèves du groupe dit alors :

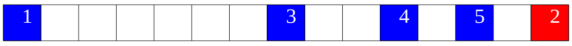
Peut être qu'une fois arrivé à 10, tu peux faire une règle.



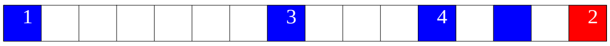
Puis, il rajoute un carreau à sa ligne pour jouer sur une ligne de taille 14.



Ensuite, il continue avec une ligne de 15 :



Il continue avec une ligne de taille 16 :



O :

Tu pourrais te demander par rapport à la façon dont tu joues, le prochain nombre pour lequel il faudra 6 coups.

4 Séance 4

4.1 Groupe 1 :

Ce groupe était composé d'un élève du groupe 1, E_1 de la séance 3 et de 3 élèves qui n'étaient pas là lors de la séance 3. Ce groupe avait à sa disposition un plateau 7×6.

Ils ont commencé la séance par le dialogue suivant :

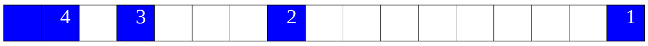
Montre nous.

Il faut que j'en fasse 17 (il construit une ligne de 17 en rajoutant des carrés.)

Pourquoi ? Pour faire quoi ?

Il faut trouver en combien de coups on peut faire. Il faut trouver une relation entre le nombre de cases...

Il a joué de cette manière :



O lui demande alors ce qu'il essaye de faire.

J'avais fait commencer par ça la semaine dernière.

Expliques leur.

Suivant un nombre de case sur une ligne, je voyais en combien de temps on pouvait trouver la frontière et j'essayais avec chaque truc. Donc pour une case c'est un coup, pour deux c'est deux. Pour trois c'est deux etc. Et puis après il faut voir suivant n suivant le nombre de cases en combien de coups on peut le faire. Le nombre de coups c'est $2n + 1$.

Pourquoi tu fais ça ?

C'est juste pour commencer à voir, à trouver jusqu'à 17 combien de coups on fait et puis après voir si on peut faire quelque chose avec ces résultats. C'est le minimum de coups à chaque fois.

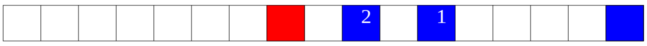
Ce n'est pas forcément le minimum. Si ?

Si parce qu'on réduit par 2 à chaque fois.

Pourquoi tu dis que c'est le minimum ?

Parce que là on met la première, on est obligé de la mettre. Ensuite on met au milieu, je crois que cela fait le même nombre de chances on met la couleur qu'on veut, bleu par exemple. Puis, ensuite encore au milieu. Au milieu. Et après il reste là ou dehors, on met une case. Ca fait 5 et je ne vois pas comment on pourrait faire moins. (il a placé les cases comme précédemment.)

Un autre élève du groupe intervient E_2 alors pour changer la couleur de la case 2 en rouge, puis il joue de cette manière :



E_1 dit alors :

L'autre il va essayer de te faire faire le maximum de coups donc là, il va te faire jouer ici. (L'élève remet la case 2 sur la couleur bleu.)

Le dialogue suivant commence :

On ne peut pas changer ça.

Dès que tu lui demandes, il va mettre bleu ici.

Ben non, parce que c'est déjà là.

Non c'est pas déjà là, tu joues d'abord ça puis après tu demande ici. Et l'autre il va compter (il compte le nombre de possibilités si bleu et si rouge, il trouve 8 et 8.) Donc il joue n'importe quoi, il joue bleu par exemple et après cela fait pareil si il joue blanc. S'il joue blanc ou bleu cela fait pareil. Et puis après cela fait pareil.

Ils se rendent alors compte que tout à l'heure sur la case 1 qu'ils auraient mieux fallu donner la couleur rouge.

O :

Pourquoi tu dis qu'on ne peut faire mieux que ça ?

E_1 :

Parce qu'à chaque fois, on réduit par 2 le nombre de coups. Et comme il n'y a pas l'histoire des diagonales où si on joue ici, on supprime en même temps la diagonale et la droite... et la verticale. C'est toujours des verticales donc on divise par 2 et je pense qu'il n'y a pas d'autre moyen.

O :

Je suis d'accord de la façon dont tu joues tu divises toujours par 2. Mais pourquoi est ce que ce la te donne la meilleur manière de jouer.

E_1 :

Parce qu'on ne peut pas diviser par plus de 2 avec une pièce

O :

Et pourquoi on ne peut pas faire plus que 2 ?

E_1 :

Parce que comme ça, ça c'est une coupure. Je ne vois pas comment on pourrait faire.

O :

Et vous vous avez compris ce qu'il dit ?

E_2 :

Ouè on peut diviser seulement par 2, car on peut pas diviser par -2, on peut pas diviser par 1. Et avec 2 c'est 50 pour cent de chance de trouver. Et diviser par 3, c'est 30 pour cent de chance.

O :

Ce qu'il dit en plus c'est qu'on ne peut pas diviser par 3 par exemple.

E_2 :

Ouè mais si on divise par 3, cela va faire plus de couche.

O :

Non si tu divises par 3, cela t'en fais moins.

E_1 :

IL faudrait 2 pièces pour diviser par 3.

E_2 :

Parce que déjà si tu divises par 2, tu as une chance sur 50 de toruver l'autre. Donc voilà. Si on divise par 3 on a une chance sur 33.

O :

Je ne sais pas ce que t'entends par chance.

E_1 :

Non ce n'est pas une chance c'est des pour cents.

E_1 :

Pour diviser par 2, il faudrait 2 pièces. Et avec 2 pièces on peut diviser par 4.

O :

Essayais de réfléchir à pourquoi on ne peut pas faire mieux que 2.

E_1 :

Parce qu'il n'y a qu'une pièce.

E_3 :

Le minimum c'est 2 si la frontière est en dehors, tu joues à chaque extrémités.

E_1

Le minimum c'est 1, (en montrant un carré), mais le truc c'est que l'autre il essaie de faire faire un maximum de coups sinon évidemment.

E_3 :

Le minimum 1.

E_2 :

Le minimum c'est 0, parce qu'il n'y a pas de truc (enlève les plateaux), voilà c'est où le frontière, c'est quelque part.

E_3 :

Mais on travail seulement sur une ligne ?

E_1 :

Ouè.

E_1 :

On fait sur 18, je veux juste savoir à combien cela change.

E_1 a joué de cette manière (en fait ils ont joué sur une ligne de taille 17) :

5	4		3				2	a								1

Avant de jouer sur la case 2, E_1 a hésité entre cette case et la case a. Puis il a dit :

Il faut prendre dehors parce qu'il y a une chance.

Et il a choisit la case 2.

E_1 :

On va jusqu'à ce que cela change. Quand on ne peut pas faire en moins de 6 coups

E_3 :

Sur le 17 tu dis ?

E_1 :

Même jusqu'à 18, on fait 5 coups.

En comptant les casses sur le plateau E_1 se rend compte qu'il ne viennent pas de faire une ligne de 18 mais une ligne de 17. Il recommence à 18 :

5	4		3					2									1

Ils essayent maintenant à 19 (E_1 joue à la fois le rôle de chercheur et celui de donneur de couleur. Pour trouver le milieu après le premier coup, E_1 part des 2 extrémités de la ligne et fais avancer ses mains en même temps, lorsqu'elles se rejoignent c'est le milieu.)

5	4		3					2										1

Ils recommencent sur une ligne de taille 20, E_1 fait le commentaire suivant :

Il faut aller jusqu'à cela change.

5	4			3					2										1

Ils continuent ensuite avec 21 :

5	4			3					2											1

Il y a ensuite eut le dialogue suivant :

Cela ne change pas.

A 50 il faut plus de 5.

On ne va pas essayer à 50 !

Faut décider de la limite quelque part.

O intervient :

Alors vous en êtes à combien ?

E_1 :

21, cela fait plus de dix que c'est à 5.

O :

Vous avez joué comment ?

E_1 :

Ben pareil, en divisant par 2.

O :

Est ce que tu pourrais prévoir le nombre de coups que tu fais avec ta stratégie sans jouer ? Parce que t'es pas forcément obligé de jouer.

E_2 :

fais un dessin à côté pour que l'on voit qui est quoi.

E_1 met la même couleur pour les lignes qui ont donné le même nombre de coups.
E_3 :

Je suis quand même curieux de savoir quand est ce que cela change à 6.

E_2 :

12, essayes encore 4.

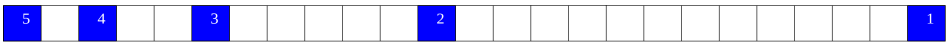
E_1 :

Pourquoi 4 ?

E_2 :

Pour essayer.

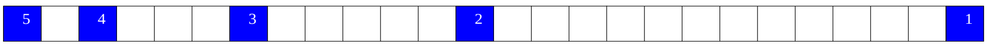
Ils jouent maintenant sur une ligne de 25 :



E_2 :

Encore un.

Ils ont alors joué à 26 :



E_2 :

Bon, ça ça ne marche pas.

E_3 :

Arrêtes de marquer, il faut voir si on essaye à 50.

E_1 :

50, on ne peut pas essayer. On ne peut pas essayer 50.

E_2 :

Attends je prends des feuilles.

Ils sortent des feuilles.
O :

Ce que vous cherchez c'est le moment où cela passe à 6 ; Et pourquoi vous cherchez ça ?

E_1 :

On ne sait pas, c'est peut être parce qu'on est curieux.

E_1 dessine une ligne sur une feuille petits carreaux.

E_3 :

Voilà, on en a combien des petits carreaux ?

E_1 :

50

Ils semblent ensuite joué sur une ligne de taille 50 qu'ils ont dessiné en utilisant les carreaux de la feuille.

E_1 :

7 coups

Ils essayent ensuite sur une ligne de taille 40 :

E_1 :

6 ! Mais il faut trouver le moment exact.

E_2 :

Essayes avec 39.

E_3 :

Non, 39 c'est trop, 30, 35.

E_3 :

T'essayes à combien ?

E_1 :

35.

E_1 :

Ici, cela serait bien que cela fasse 5.

O intervient :

Alors vous trouvez combien vous ?

E_1 :

A 50, on trouve 7. A 40 on trouve 6 et à 35 aussi. Et on cherche le moment où cela change.

D'autres groupes disent avoir fais avec 100 et 10000.

E_1 :

On essaye à combien ?

E_2 :

30.

E_3 :

Ils ont fait 10000, ils ont utilisé un calcul ou quoi ?

E_2 :

Ben oui.

E_1 :

Oh, c'est 5.

E_3 :

Cela change à 36.

E_1 :

Non, 33 ou 32.

E_2 :

35 c'est bien 6 et 30 c'est bien 5.

E_1 :

Je refais à 32.

Il fait sur sa feuille
E_1 :
Attends, là il y a un truc, 6 c'est à 31.
Il continue à faire sur sa feuille.
E_1 :
31 on a 5 et 32 on a 6. Alors on continue comment ?
E_2 :
Jusqu'à... Dès 42, je pense que 42 cela change à 7.
E_1 :
Tu dis que c'est 6 ou 7 ?
E_3 :
Tu dis quoi ?
E_2 :
Je dis que 42 c'est 7.
E_1 :
C'est parti.
E_2 :
J'ai trouvé quelque chose, peut être c'est bon, peut être ce n'est pas bon.
Il joue sur sa feuille
O :
Qu'est ce que vous faîtes ?
E_1 :
On a tout essayé.
E_2 :
J'ai fait une petite expérience dans ma tête pour trouver le prochain et si ça marche ça peut être bien et si ça ne marche pas c'est faux. Ah non, mais mince, cela ne marche pas.
O :
Comment tu fais 42 ? T'as dessiné 42 carreaux ?
E_1 :
Ouè.
E_1 :
6
E_2 :
C'est faux. Mince alors...
E_1 :
Tu veux que je fasse 43 ?
E_2 :
Cela va changer rien je crois, ce n'est pas grave.J'ai vu quelque chose jusqu'à 10 mais après cela ne marche plus.
E_1 :
Cela change à combien déjà pour 6 ?
E_2 :
Le dernier 5 c'est 31, le premier 6 c'est 32.
E_1 :
Mais c'est quand que cela change ? 43 ?.
E_1 joue sur sa feuille
E_3 :

Tu fais lequel là ?

E_1 :

43

E_3 :

Pour voir quand cela change ?

E_1 :

ouè.

E_1 :

1,2,3,4,5,6.

E_2 :

Et si tu rajoutes 1 ?

E_1 :

Non, cela ne va pas changer.Et ça ça fait comme ça.

E_2 :

Combien c'est ?

E_1 :

C'est 31. Quand tu décales d'un seul. faut que tu trouves pile poile le nombre par exemple 32 je crois, on trouve pile poil le nombre à chaque fois, il y a toujours un carreau au milieu. C'est... quand t'augmentes cela d'un nombre ben cela donne (inaudible)

E_2 :

Ben moi je pense qu'il faut trouver une relation entre les nombres.

O :

Vous cherchez quoi là ?

E_2 :

J'essayes de chercher une équation pour trouver, pour qu'on puisse savoir sans faire le dessin sur papier

O :

Une question que vous pouvez vous poser est 5000, combien de coups je vais faire avec 5000.

E_2 :

Je ne sais pas trouver l'équation.

O :

Vous avez réussi à trouver quelque chose d'un peu général ?

E_3 :

Juste la manière pour trouver le nombre de coups. On divise par 2 jusqu'à trouver la frontière.

O :

Et cela va vous donner combien si la ligne fait n ?

E_1 :

Deux puissance n moins 1 moins 1.

O :

Donc deux puissance n moins moins 1, cela fait deux puissance n moins 2, non ?

E_1 :

Non, non, c'est deux puissance n moins 1 et le tout moins 1. Mais j'en sais rien.

O :

Parce que deux puissance 25 ou 26 cela fait un gros chiffre, donc ça m'étonnerait que cela soit ça.

E_1 :

Non ce n'est pas ça. n c'est le nombre de coups. C'est dans l'autre sens en fait, n cela serait le nombre de coups c'est l'inverse, c'est en fonction du nombre de coups qu'on trouve le nombre de cases.

O :

Tu dis si j'ai... appelles le c pour coups.

E_1 :

Et comment on fait l'inverse ?

O :

Donc en fait ce que tu dis. Tu dis si jamais je fais c coups j'ai 2 puissance c moins une case

E_1 :

Et moins un.

O :

Et pourtant quand tu fais 5 coups, t'as plusieurs possibilités sur ton tableau ?

E_1 :

Ca c'est le maximum. Le maximum de coups. Pour ça, on trouve le maximum n.

O :

Donc cela veut dire...

E_1 :

Ce serait 31 là.

O :

Deux puissance quatre moins 1 si c'est ça... Non deux puissance quatre cela fait 16

E_1 :

Ah ben alors c'est deux puissance cinq, c'est pas le moins un, c'est cinq moins un.

E_2 :

Deux puissance cinq cela fait 25...

O :

Non, c'est ça, deux puissance cinq cela fait 32.

E_2 :

Moins un cela fait 31.

E_1 :

Il faut voir encore....

O :

C'est intéressant ce que tu fais, ce que tas c'est que tu dis...

E_1 :

Mais comment on fait l'inverse ?

O :

En fait, là tu sais qu'il faut... si t'as un nombre de cases, si t'as deux puissance c moins une case, tu sais qu'il te faut c coups.

E_1 :

Au maximum.

O :

c coups rapport à ta stratégie quoi. Et donc si t'as deux puissances c moins un moins un, il te faut combien de cops. Parce que là ce que tu dis c'est que c coups c'est deux puissances c moins une case et pour c-1 coups c'est quoi le maximum ?

E_1 :

Ce serait... ben le n d'avant diviser par 2.

O :

Cela ferait deux puissances c moins un moins un. Donc ce que tu sais que quand ton nombre de cases est entre deux puissance c moins un et deux puissances c moins un moins un, tu peux en déduire quoi ?

E_1 :

Il est multiplié par deux... Et ben c'est le même, c'est le même nombre de coups.

O :

Tu fais combien quand c'est entre deux puissance c moins un et deux puissance c moins un moins un ?

E_1 :

Le nombre de coups c'est c ou c+1, je ne sais plus.

O :

Cela représente quoi deux puissance c moins un ?

E_1 :

C'est le nombre de case maximum quand c c'est le nombre de coups. Le nombre de cases ce serait deux puissances c moins un moins un.Entre le nombre de coups c-1 et le nombre de coups c, le nombre de cases c'est deux puissance c-1 moins un.

O :

Non mais ouè, vous avez compris sa formule vous ?

E_2 :

Un peu

O :

Ben expliques leur ce que c'est.

E_1 :

Ben ca c'est en fonction du nombre de coups qu'on appelle c, on en déduit le nombre de cases, c'est deux puissance c moins un.

O :

Et ça c'est quoi ? C'est le nombre...

E_1 :

C'est le nombre maximum de cases pour c. Et pour trouver l'inverse c'est...

O :

Pour l'instant vous n'avez pas les outils pour dire c'est quoi l'inverse mais vous pouvez faire autre chose. C'est à dire vous pouvez dire pour quelle valeur de ligne, j'ai c coups. C'est compris entre quel et quel valeur.

E_1 :

Mais ça, je ne sais pas si c'est juste.

O :

Oui après la question est de savoir si elle est juste et de démontrer si c'est juste. Mais si par exemple, vous prenez c égal 5 ou c égal 10 par exemple. Maintenant tu dis, le nombre de coups est égal à 10. Comment tu vas faire, en utilisant ça, quels vont être les tailles de ligne pour lesquelles il faudra 10 coups ?

E_3 :

Alors elle ne marche pas ta formule ?

E_1 :

Si. Ca marche dis moi pas que ce n'est pas vrai. Je veux voir quelque chose.

E_2 :

Pour que c égal 10,ben alors le nombre bien plus grand que normal.

E_1 utilise sa calculette.

E_1 :

1024 c'est ça. Je veux juste vérifier si on trouve le nombre de coups. Nombre de coups 3, là j'ai trouvé 5.

E_2 :

deux c moins un, cela fait celui qui est plus bas. Ah non, cela ne marche pas ça, deux c moins deux peut-être.

E_1 :

Cela ne marche pas du tout mon truc.

4.2 Présentation des conjectures des groupes :

4.2.1 Groupe 2 :

Un élève du groupe E_{G2} a commencé par écrire ceci au tableau :

$$\textit{Nombre de coups} \rightarrow 2 \times n + 1$$

Un élève du groupe 3, E_{G3} a alors dit :

Si par exemple n, il fait 2 alors cela fait deux fois deux plus un et donc pour 5 carreaux, il te faut 5 coups ?

Il a répondu :

Pour combien ?

E_{G3} :

Pour 5 carreaux, il te faut 5 coups.

E_{G2} :

Ouè mais ça en fait c'est la formule.

O intervient alors :

Je n'ai pas entendu ta réponse.

E_{G2} :

Il n'y en pas de réponses.

E_{G3} :

Ben c'est faux quoi.

E_{G2} :

ouè c'est faux.

O :

Mais vous ne défendez vraiment pas votre truc !

E_{G2} :

J'ai trouvé mais je n'arrive pas à l'écrire. J'ai compris mais je n'arrive pas à l'écrire.

O :

Ben t'as trois collègues qui peuvent t'aider, ils font quoi les trois autres ?

E_{G2} :

Moi je propose qu'ils disent la leur et qu'on compare

O :

Non mais tout à l'heure tu m'as expliqué ça comment ? Tu me disais si ça fait 18, il te faut...

E_{G2} :

Par exemple, à 18 coups il faut 6 coups...

O :

Ecris le. Vous ne savez pas vendre votre marchandise.

E_{G2} :

Je ne veux pas faire vendeur.

O :

Votre marchandise intellectuelle, je parlais. On croirait qu'ils ont rien fait alors que finalement, ils ont fait des trucs intéressants. Mais là, t'as raison de dire... C'est vraiment un contre-exemple, c'est faux.

E_{G2} :

Pour 18 carrés, Il faut 6 coups. Donc après, tu fais 18 fois 2 égal 36. Plus un égal 37. Donc pour 37 cases, il faut 7 coups. Et après, si on fait 36...

E_{G2} écrit en même temps ceci au tableau :

18 cases → 6 coups.
$2 \times 18 = 36 + 1 = 37$ *cases → 7 coups*

O :

Alorss excuses mais l'utilisation du signe égal est assez bizarre dans ce que t'écris.

E_{G2} :

Ben non.

O :

Deux fois 18 éga 36 plus un, je sus désolé, mais deux fois 18 cela fait 36.

E_{G2} effectue alors la correction au tableau.

E_{G2} :

Après on fait 36 fois 2, ça fait combien ?

E :

72

E_{G2} écrit alors ceci sous ce qu'il a écrit précédemment :

$$36 \times 2 = 72 + 1 = 73$$

O intervient alors :

Non à côté 72 plus un, tu ne vas pas écrire...

E_{G2} corrige ce qu'il a écrit pour écrire ceci :

$$36 \times 2 = 72, 72 + 1 = 73 \rightarrow \textit{8 coups}$$

O :

Alors vous voyez ils n'arrivent pas à expliquer ce n, mais ils ont l'impression de faire un deux fois quelque chose plus un.

E_2 :

Mais nous, pour 18 carrés, on a trouvé 5 je crois.

O :

On a bien une règle de 18 pour nous aider à régler ça. Et pourquoi tu commences à 18 ?

E_{G2} :

Parce qu'on aime bien 18.

Un élèves du groupe 1, E_1 joue alors contre E_{G2} sur une ligne de taille 18. E_1 est le chercheur. E_1 joue avec sa méthode habituelle. E_1 trouve la frontière en 5 coups.

O :

Il trouve à chaque fois en 5 coups ou c'est vous qu'avez mal joué.

E :

Ouè ben si ça marche.

O :

T'es convaincu que cela marche.

E :

Ouè

O :

Pourquoi ?

E :

Ben je (inaudible)

E_{G2} :

On avait dit qu'il fallait tout le temps joué les coins

O :

Qui c'est qui a dit ça ?

Conversation inaudible.

E_{G2} :

Bon, ben on peut changer de conjecture alors. Ben vas y, ils sont forts.

O :

Ben en fait, votre truc est peut-être vrai par rapport à la stratégie que vous employez.

E_{G2} :

Mais ça ne marche pas très bien, cela ne marche pas à tous les coups.

4.2.2 Groupe 3 :

Un élève du groupe 3, E_3 écrit ceci au tableau :

Pour 10 cases, il faut 5 coups.
Quand on multiplie par 10, il faut ajouter 5 coups.
$100 \rightarrow 8$ *coups*
$1000 \rightarrow$ *11 coups*

E_{G2} :

Pour 200 coups, alors il faut faire combien ?

E_{G3} :

On a fait pour des multiples de 10 en fait.

O :

Ben elles ne savent pas.

E_{G2} :

Ben c'est pareil, ça ne marche pas alors.

E_{G3} :

Ben si ça marche.

E_{G2} :

Ben nous c'est avec notre technique que ça marche et vous c'est avec 10. C'est pareil.

O :

Ben non, Elles elles affirment un truc sur des puissances de 10. Ce n'est pas la même chose. Vous vous me disiez sans condition. Alors est ce que vous êtes d'accord avec elles. Elles elles ont trouvé un contre exemple ? Vous vous pouvez toujours en trouver un.

4.3 Groupe 1

O :

Bon ben à vous.

E_1 :

Nous on a rien. On avait trouvé un truc mais c'était faux.

O :

Va quand même l'écrire.

E_1 :

Mais on a déjà vérifié que c'était faux.

O :

va écrire ton truc en donnant un contre exemple.

E_1 écrit au tableau :

c=*nbre de coups*
$nmax = 2^c - 1$

O :

Tu devrais peut-être explique ce qu'est nmax.

E_1 :

Pour le nombre de coups et ben, le nombre maximum de cases c'est deux puissance c moins 1. Mais si on prend...

O :

Tu veux dire que si par exemple je prends 5 coups, tu calcule la longueur de la ligne en fonction du nombre de coups, la longueur maximal de la ligne.

E_1 :

Ouè.

Puis il écrit ceci :

$$nmax{=}2^3 - 1 = 8 - 1 = 7 \textit{ Pas bon.}$$

Et dit :

Pour 3 coups, la longueur maximum c'est 5.

O :

Ce que tu veux dire, c'est que quand t'as une ligne de 6, tu vas mettre plus de 3 coups ?

E_1 :

Enfin, là d'après ce qu'on avait trouvé, quand on met 3 coups et ben la longueur maximale de la ligne c'est 7 cases et c'est pas du tout vrai. Car en maximum 5 cases, on arrivait à 3 coups.

O :

Donc à partir de 6 cela augmente alors que cela ne se voit pas là. Et alors il reste un résultat, celui qui est au milieu, il est bon ou il est pas bon ?

E_2 :

Il est bon, mais il est pas très précis.

E_1 :

Qu'est ce t'en sais qu'il est bon ?

E_2 :

Ben j'ai déjà calculé

O :

Ben non parce que pour les puissances de 10, ce qu'elles ont trouvé 3, on ajoute 3 à chaque fois, qui est ce qui trouve un contre exemple ? Pour 10 cases, il faut 5 coups vous êtes d'accord ? Est ce que vous vous pouvez nous expliquer comment vous avez fait pour trouvé le fait que quand on multiplie par 10 on ajoute 3.

E :

En fait, nous notre méthode c'était on commence par les extrémités et ensuite on va au milieu et continue avec le milieu, le milieu, le milieu et ainsi de suite... Nous on a trouvé en 5 coups pour 10 et après on a vérifié... On a fait de tête pour 100 : On a fait 2 pour les extrémités, ensuite cela faisait 50, 25, 12 ou 13, 6 ou 7, 4 et 3, 6 et 4 donc il en faut encore un donc ça fait 8. Et on a vérifié pour 1000 et pour 10000 aussi.

E_{G2} :

Et pour 100000 ça marche ?

E :

On a vérifié jusqu'à 10000.

E_2 :

Pour 2 et 3, cela ne marche pas.

E_1 :

Ce ne sont pas des multiples de 10.

E_2 :

Si elles commencent avec 0... et puis on fait... Il faut 4 coups pour trouver 6 et pas 3, il faut 4 coups pour trouver 7.

O :

Elles n'ont pas dit ça, elles ont dit que pour 10. Elles n'ont rien dit entre les 2. Vous avez trois minutes pour avoir une idée de ce que vous allez présenter dans votre poster.

O :

Lui, il pense que pour 10 cases c'est 4 coups. Viens nous montrer.

Les élèves se regroupent autour d'un plateau, cet élève joue contre un autre.
A la fin, les élèves sont convaincus qu'on peut faire 10 en 4 coups.

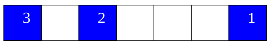
O s'adresse à E_1 :

La ligne de 7, vous ne pouvez pas la faire en moins ? Fais voir comment vous jouer.

E_1 :

Ben pareil.

Il joue ensuite de cette manière :



O :

Je crois que la ligne de 7, on peut la faire en 3.

E_1 :

On avait trop mal calculé ou quoi ?

O :

Donc le contre exemple n'est plus un contre exemple.

4.4 Début d'analyse :

– Un des élèves pour résoudre le cas de la ligne a pour n allant de 1 à 20 expérimenter en utilisant sa stratégie pour trouver le nombre de coups qu'il lui fallait pour trouver la frontière. (On peut se demander si l'une de ses hypothèses de recherche n'est pas que sa stratégie est optimale.) Il a noté dans un tableau ce nombre de coups, puis a cherché a trouvé une formule dépendant de n du nombre de coups. On peut se demander si utilisait la table plutôt que les relations de structures de la stratégie vis à vis de la ligne lui a peut-être empêché de trouver rapidement la bonne formule car cela a pu l'empêcher de reconnaître les relations structurelles qui faisaient que sa stratégie était capable de trouver la frontière en un certain nombre de coups. (focus on recursive numeric patterns in their tables. Students who tried to use tables to find the patterns were often unable to interpret the relationship between the quatities in the problems and were unable to generalize the pattern for n.)*A shematic-theoretic view of problem solving and development of algebraic thinking. D. Steele, D Johannong, ESM 57, p87*))

– Un groupe a conjecturé que lorsque l'on faisait $\times 10$ en partant de 10 alors nous devions rajouter 3 coups. Ce groupe n'a pu faire d'expérimentation validative médiée matériellement car dès 100, cela devenait trop grand. Ce groupe a utilisé des expérimentations validatives médiées mentalement. Pour effectuer cela, ce groupe a utilisé le fait que la stratégie qu'ils employées divisaient par 2 à chaque nouveau coup joué. Les expérimentations qu'ils faisaient consister donc à diviser continuellement par 2 jusqu'à arriver à 1 et à compter le nombre de divisions effectuées. Ce groupe a donc utilisé un algorithme basé sur les observations ou la construction de leur stratégie qu'ils utilisaient pour compter le nombre de coups que demandait leur stratégie. Ici, le problème auquel ils ont cherché à répondre n'est pas quel est le minimum de nombre de coups mais quel est le nombre de coups que notre stratégie donne pour les puissances de 10.
Lors du récapitulatif, lorsque ce groupe a présenté sa conjecture aux autres groupes, un élève a trouvé une stratégie permettant de trouver la frontière en moins de coups que ce groupe sur la ligne de taille 10. Les élèves, même ceux du groupe qui a proposé la conjecture, ont alors considéré que la conjecture était fausse. Cette conjecture, bien qu'énoncé sans le caractère de minimalité, a été rejeté car il semble que pour les élèves ils étaient sous entendu que la conjecture portait sur le nombre minimum de coups.

- Lorsqu'on demande à certains élèves des arguments ou leur stratégies, ils les illustrent sur des exemples spécifiques. (terminologie de Mason Pimm) L'exemple spécifique peut apparaître pour l'élève comme étant un exemple générique (représente une classe entière). Il utilise ainsi l'exemple spécifique avec une valeur générique. Est ce qu'on arrive alors dans la preuve par l'exemple ?
  Pimm et Mason : Lorsque l'on voit dans 6 un exemple spécific ou un exemple générique, nous ne voyons pas les même propriétés de 6. Dans le cas ou nous voyons 6 comme un exemple générique de multiple de 2, nous oublions qu'il est divisible par 3 et que c'est le produit de 2 nombres premiers. (stressing and ignoring some of its features.)
  Ceci peut amener à se demander si lorsqu'on expérimente sur un objet, quelles sont les propriétés de l'objet que nous considérons et quelles sont les propriétés que nous ignorons volontairement lors de l'observation et de l'interprétation. Par exemple, lorsque Polya teste la formule d'Euler sur des polyhèdres avant de trouver un contre-exemple, il ignore leur propriété de convexité, c'est ensuite en observant un contre-exemple qu'il se rend compte que cette propriété est présente avec les polyèdres qui vérifient la conjecture et absente avec celui qui ne la vérifie pas.
  Une interprétation du fait que les élèves est fait des conjectures sur les puissances de 10 et qu'ils ont cherché des liens entre les nombres donc la notion de multiple, ils ont décidé de souligner la décomposition des nombres (mettre en avant plutôt que souligner).
- Lorsque les élèves étudient le nombre de coups qu'une stratégie va donner, la stratégie n'est plus l'outil pour résoudre le problème mais devient le l'objet d'étude : déplacement du problème vers l'étude de la stratégie.
- Le groupe qui a fait la conjecture sur le *10 utilisé une technique algorithmique pour prédire le nombre de coups, il n'avait plus besoin de supports physiques, ils faisaient cela mentalement en divisant par 2 à chaque fois.

Bibliographie

ALDON, G. (2007). « La place des TICE dans une démarche expérimentale en mathématiques ». Dans : *Actes de l'université d'été de Saint-Flour : Expérimentation et démarches d'investigation en Mathématiques.* URL : `http://media.eduscol.education.fr/file/Formation_continue_enseignants/15/3/StFlour2007_Aldon_110153.pdf`.

ARNOLD, V. I. (1998). « Sur l'éducation mathématique ». Dans : *Gazette de la SMF* 78, p. 19–29.

ARSAC, G. et M. MANTE (2007). *Les pratiques du problème ouvert.* IREM de Lyon, SCEREN-CRDP Académie de Lyon.

ARTIGUE, M. (1990). « Épistémologie et didactique ». Dans : *Recherche en Didactique des Mathématiques* 10.2.3, p. 241–286.

ASTOLFI, J.P. (2005). « Construire le savoir scientifique par l'expérimentation ». Dans : *Résonances* 8.

B. O. hors série n°6 28 août 2008.

BALACHEFF, N. (1987). « Processus de preuve et situations de validation ». Dans : *Educationnal Studies in Mathematics* 18.2, p. 147–176.

BARTOLINI BUSSI, M. G. (2009). « Experimental mathematics and the teaching and learning of proof ». Dans : *Proceedings of CERME 6.* URL : `www.inrp.fr/editions/cerme6`.

BELTRAMONE, J.P. et al. (2001). *Déclic Maths Première S.* Hachette Education.

BELTRAMONE, J.P. et al. (2002). *Déclic Maths Terminale S.* Hachette Education.

BERNARD, C. (2008). *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale.* Echo Library.

BLOCH, I. (2000). « L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation. » Thèse de doct. Université Bordeaux 1.

— (2005). « Quelques apports de la théorie des situations a la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur. » Mémoire de Master. Université de Paris 7.

B.O. hors série n°7 30 août 2001.

BOERO, P., R. GARUTI et E. LEMUT (1999). « About the generation of conditionality of statements and its link with proving ». Dans : *Proceedings of PME 23 : Psychology of Mathematics Education 23th International Conference.* T. 2. Haifa, Israel, p. 137–144.

BOERO, P., R. GARUTI et M. MARIOTTI (1996). « Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. » Dans : *Proceedings of PME 20 : Psychology of Mathematics Education 20th International Conference.* T. 2. Valence, Espagne, p. 121–128.

Boero, P. et al. (1996). « Challenging the traditional school approach to theorems : a hypothesis about the cognitive unity of theorems. » Dans : *Proceedings of PME 20 : Psychology of Mathematics Education 20th International Conference*. T. 2. Valence, Espagne, p. 113–120.

Borwein, J. (2005). « The experimental mathematician : the pleasure of discovery and the role of proof ». Dans : *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 10.2, p. 75–108.

Borwein, J. et D. Bailey (2008). *Mathematics by Experiment : plausible reasoning in the 21st century*. 2e éd. A K Peters, Ltd.

Brousseau, G. (1989). « Construction des savoirs : obstacles & conflits, Colloque international obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif, » dans : sous la dir. de N. Bednarz et C. Garnier. Ottawa : Les Editions Agence d'ARC. Chap. Obstacles épistémologiques, conflits sociocognitifs et ingénierie didactique, p. 277–285.

— (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Cai, J. et V. Cifarelli (2005). « The evolution of mathematical explorations in open-ended problem-solving situations ». Dans : *Journal of Mathematical Behavior* 24, p. 302–324.

Cartier, L. (2008). « Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation ». Thèse de doct. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Dahan, J. (2005). « La démarche de découverte expérimentalement médiée par cabri-géomètre en mathématiques ». Thèse de doct. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Deloustal-Jorrand, V. (2004). « L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique ». Thèse de doct. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Dias, T. (2009). « La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage ». Thèse de doct. Lyon : Université Claude Bernard.

Durand-Guerrier, V. (2003). « Which notion of implication is the right one ? From logical considerations to a didactic perspective ». Dans : *Educationnal Studies in Mathematics* 53, p. 5–34.

— (2005). « Retour sur le schéma de validation explicite dans la théorie des situations didactiques à la lumière de la théorie des modèles de Tarski ». Dans : *Actes du colloque Didactiques : quelles références épistémologiques ?*

— (2008). « Truth versus validity in mathematical proof ». Dans : *ZDM Mathematics Education* 40, p. 373–384.

— (2010). « Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école ». Dans : INRP, Cédérom. Chap. La dimension expérimentale en mathématiques. Enjeux épistémologiques et didactiques.

Duroux, A. (1983). « La valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure. » Dans : *Petit x* 3, p. 43–66.

El Bouazzaoui, H. (1988). « Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction. » Thèse de doct. Québec : Université de Laval.

FAN, L. et Y. ZHU (2007). « Representation of problem-solving procedures : A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks ». Dans : *Educationnal Studies in Mathematics* 66, p. 61–75.

GALIANA, D. (1999). « Les pratiques expérimentales dans les manuels scolaires des lycées (1850-1996) ». Dans : *Aster* 28, p. 9–32.

GANDIT, M. (2008). « Etude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation ». Thèse de doct. Grenoble : Université Joseph-Fourier.

GILBERT, R. (1989). *Text analysis and Ideology Critique of Curricular Content*. Sous la dir. de S. CASTELL, A. LUKE et C. LUKE. Falmer Press.

GIORDAN, A. (1999). « Une didactique pour les sciences expérimentales ». Dans : Guide Belin de l'enseignement. Belin. Chap. 2, p. 48–57.

GIROUD, N. (2007). « La démarche expérimentale en mathématiques ». Mémoire de Master. Université Joseph Fourier.

— (2009). « Experimantal and mathematical control in mathematics. » Dans : *Proceedings of CERME 6*. Sous la dir. de V. DURAND-GUERRIER, S. SOURY-LAVERGNE et F. ARZARELLO. Lyon, France : Institut National de Recherche Pédagogique, p. 2406–2416.

GODOT, K. (2005). « Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation ». Thèse de doct. Grenoble : Université Joseph Fourier.

— (2006). « La roue aux couleurs : une situations de recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3 ». Dans : *Grand N* 78, p. 31–52.

GOHAU, G. (1992). « Esprit déductif versus esprit inductif ». Dans : *Aster* 14, p. 11.

GRAHAM, R.L. (1972). « An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set ». Dans : *Information Processing Letters* 1, p. 132–133.

GRENIER, D. et C. PAYAN (1998). « Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématique discrètes ». Dans : *Recherche en Didactique des Mathématiques* 18, p. 59–100.

— (2002). « Situation de recherches « en classe » : essai de caractérisation et proposition de modélisation ». Dans : *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. Sous la dir. de V. DURRAND-GUERRIER et C. TISSERON. IREM de Paris 7, ARDM, p. 189–205.

GRENIER, D. et D. TANGUAY (2010). « Experimentation and proof in a solid geometry teaching situation ». Dans : *For the learning of Mathematics* 30, p. 36–42.

GUY, Bernard (1989). « Réflexion sur la formation des skarns de Costabonne (Pyrénées). La compréhension des événements singuliers. Une épistémologie de la trace. » Dans : *Comité français d'histoire de la géologie* 3.7, p. 65–77.

JAHNKE, H. N. (2007). « Proofs and hypotheses ». Dans : *ZDM Mathematics Education* 39, p. 79–86.

JOSHUA, S. (1989). « Le rapport à l'expérimental dans la physique de l'enseignement secondaire ». Dans : *ASTER* 8, p. 29–53.

KORTENKAMP, U. (2006). « Experimental Mathematics and Proofs in the Classroom ». Dans : *ZDM Mathematics Education* 36.2, p. 61–66.

KUNTZ, G. et al. (2007). *Démarche expérimentale et apprentissage des mathématiques.* Dossier de la veille de l'INRP. URL : http://www.inrp.fr/vst/Dossiers/Demarche_experimentale/sommaire.htm.

LAGRANGE, J.B. (2005). « Curriculum, classroom practices, and tool design in the learning of functions through technology-aided experimental approaches ». Dans : *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 10, p. 143–189.

LEGRAND, M. (1993). « Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse ». Dans : *Repères IREM* 10, p. 123–159.

LITHNER, J. (2000). « Mathematical reasoning in task solving ». Dans : *Educationnal Studies in Mathematics* 41, p. 165–190.

— (2010). « The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use ». Dans : *Educationnal Studies in Mathematics* 75, p. 89–105.

MATHERON, Y. (2010). *« Démarche d'investigation » et Parcours d'Etude et de Recherche en mathématiques : entre injonctions institutionnelles et étude raisonnée des conditions et contraintes de viabilité au sein du système.* IREM de Marseille. URL : http://iremlp.irem.univ-mrs.fr/site/sites/default/files/YMD%C3%A9marche%20d%27investigation.pdf.

MISSET, L. et al. (2001). *Déclic Maths Seconde.* Hachette Education.

OUVRIER-BUFFET, C. (2003). « Construction de définitions/construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques. » Thèse de doct. Grenoble : Université Joseph Fourier.

PAPADOPOULOS, I. et M. IATRIDOU (2010). « Systematic approaches to experimentation : The case of Pick's theorem ». Dans : *The Journal of Mathematical Behavior* 29.4, p. 207–217.

PEDEMONTE, B. (2007). « How can the relationship between argumentation and proof be analysed ? » Dans : *Educationnal Studies in Mathematics* 66, p. 23–41.

PEPIN, B. et L. HAGGARTY (2001). « Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms : a way to understand teaching and learning cultures ». Dans : *ZDM Mathematics Education* 33.5, p. 158–174.

PERRIN, D. (2007). « L'expérimentation en mathématiques. » Dans : *Petit x* 73, p. 6–34.

POLYA, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning.* T. 1 induction and analogy in mathematics. Princeton University Press.

— (1994). *Comment poser et résoudre un problème.* 2e éd. Jacques Gabay.

POPPER, Karl R. (2007). *La logique de la découverte scientifique.* Bibliothèque scientifique. Payot.

RICHSTEIN, J. (2000). « Verifying the Goldblach conjecture up to 4×10^{14} ». Dans : *Mathematics of computation* 70.236, p. 1745–1749.

ROLLAND, J. (1998). « Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication ». Thèse de doct. Grenoble : Université Joseph Fourier.

SCHOENFELD, A. H. (1992). « Handbook for research on mathematics teaching and learning. » Dans : sous la dir. de D. GROUWS. New York : MacMillan. Chap. Learning to think mathematically : Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. P. 334–370.

SINCLAIRE, N., R. ZAZKIS et P. LILJEDAHL (2003). « Number worlds : visual and experimental access to elementary number theory concepts ». Dans : *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 8, p. 235–263.

VERGNAUD, G. (1990). « La théorie des champs conceptuels ». Dans : *Recherche en Didactique des Mathématiques* 10.2.3, p. 133–170.

ZASLAVSKY, O. (2005). « Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics ». Dans : *Educationnal Studies in Mathematics* 60, p. 297–321.

Index

Index des notions

Index des problèmes

Index des algorithmes

Table des matières

RÉSUMÉ

La recherche que nous avons menée s'inscrit dans les projets de l'équipe de recherche Maths à Modeler. En particulier dans celui portant sur les situations de recherche en classe (Grenier et Payan, 2002 ; Ouvrier-Buffet, 2003 ; Godot, 2005 ; Cartier, 2008). Cette étude est centrée sur la démarche de recherche en mathématiques et plus particulièrement sur le rôle de l'expérimental.
Un des postulats fondateur de notre recherche est que savoir faire des mathématiques, c'est savoir résoudre partiellement des problèmes de recherche, la résolution de tels problèmes nécessitant de passer par des phases expérimentales.
Notre problématique porte donc sur la transmission aux élèves du savoir-faire « démarche expérimentale en mathématiques » et sur le rôle que celui-ci joue dans la résolution de problèmes de recherche. Considérant que ce savoir-faire ne peut s'apprendre qu'à travers sa pratique en situation de résolution de problèmes, l'objectif de notre recherche a été la détermination de conditions épistémologiques et didactiques favorisant la mise en pratique de la « démarche expérimentale ». En plus de la construction d'un modèle de situation pour la « démarche expérimentale », nous avons construit, analysé et expérimenté des situations se référant à ce modèle.
Pour mener à bien notre étude, nous avons utilisé le modèle de situation de recherche pour la classe (Grenier et Payan, 2002 ; Godot, 2005), ainsi que des éléments de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998), en particulier validation a-didactique, contrat didactique et milieu. Nous avons aussi défini un modèle de « démarche expérimentale en mathématiques » qui a servi de référant à notre recherche.
Après avoir observé que la « démarche expérimentale en mathématiques », telle que nous l'entendons, n'est pas proposée par l'institution scolaire, les expérimentations et les analyses, que nous avons menées, ont montré que, dans une certaine mesure, il est possible de la faire pratiquer à des élèves. De plus, cette pratique a permis aux élèves de progresser dans la résolution grâce à un enrichissement des conceptions qu'ils portaient sur le problème à résoudre. Ces expérimentations nous ont aussi permis d'affiner les situations que nous avons construites.

MOTS-CLÉS

Démarche expérimentale, résolution de problèmes, situations de recherche pour la classe, concept-problème, milieu, mathématiques discrètes, jeu à 2 joueurs, optimisation, algorithmes.