



HAL
open science

Invariants analytiques des difféomorphismes et multizêtas

Olivier Bouillot

► **To cite this version:**

Olivier Bouillot. Invariants analytiques des difféomorphismes et multizêtas. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris Sud - Paris XI, 2011. Français. NNT : 2011PA112224 . tel-00647909

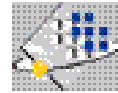
HAL Id: tel-00647909

<https://theses.hal.science/tel-00647909>

Submitted on 13 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre:

UNIVERSITE PARIS-SUD
FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

THESE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE PARIS XI

Spécialité : Mathématiques

par

Olivier Bouillot

INVARIANTS ANALYTIQUES
DES DIFFÉOMORPHISMES ET MULTIZÉTAS.

Soutenue le 19 octobre 2011 devant la commission d'examen :

M. Xavier Buff	
M. Jacky Cresson	(Rapporteur)
M. Jean Ecalle	(Directeur de thèse)
M. Adam Epstein	(Rapporteur)
M. Frédéric Menous	
M. Joël Merker	(Président)

Résumé / Abstract

Ce travail comprends deux parties indépendantes, mais intimement liées.

La première partie concerne le calcul et l'évaluation numérique des invariants holomorphes des difféomorphismes tangents à l'identité, dans le cas-type. On y expose notamment trois méthodes de calculs numériques, dont l'une est basée sur une formule explicite des invariants. Celle-ci résulte de l'évaluation de l'application de cornes π^+ , dont les ingrédients de base sont des rationnels, des coefficients de Taylor du difféomorphisme étudié et des multitangentes.

La seconde partie concerne l'étude des multitangentes et des relations les liant entre elles. Il s'agit de fonctions 1-périodiques, généralisant les séries d'Eisenstein, et définissant un moule symétr \underline{e} l. D'autres relations existent, tels la réduction en monotangentes qui indique un lien profond entre les multitangentes et les multizêtas. Des propriétés et conjectures de nature purement algébrique, arithmétique ou analytique sont ensuite exposées.

Mots clés :

invariants holomorphes, invariants analytiques, difféomorphisme tangent à l'identité, cas-type, application de corne, résurgence, dérivées étrangères, itérateur direct, itérateur réciproque, resommation de Borel, multitangentes, multizêtas, calcul moulien, séries d'Eisenstein, réduction en monotangentes, nettoyage des 1, caractère exponentiellement plat.

.....

This work contains two independent parts, which are deeply very closed.

The first part deals with the calculation and the numerical evaluation of the holomorphic invariants of tangent to identity diffeomorphisms, in the type-case. In particular, we display here three methods of numerical computation whose the last is based on an explicit formula of invariants. These result of calculation of the horn map π^+ , whose basic components are some rationals, some Taylor coefficients of the diffeomorphism which is studied and multitangents.

The second part deals with a general study of multitangents and relations between them. They are 1-periodic functions, generalizing Eisenstein series and defining a symetr \underline{e} l mould. There are others relations, like the reduction into monotangents which point out to us a profound link between multitangents and multizetas values. Properties and conjectures of purely algebraic, arithmetical or analytical kind are then explain.

Keys words :

holomorphic invariants, analytic invariants, tangent to identity diffeomorphism, type-case, horn map, resurgence, alien derivation, direct iterator, inverse iterator, Borel summability, multitangents, multizêtas, mould calculus, Eisenstein series, reduction into monotangents, cleansing of the 1, exponentially flat character.

Remerciements

Lorsqu'on en arrive à écrire les remerciements, c'est que l'on touche enfin au but. Pourtant, je me retrouve de nouveau devant une page blanche, face à des objectifs que je ne cerne qu'approximativement, exactement comme au début de la thèse, ou face à l'éternelle question, pourtant posée une bonne centaine de fois par des non-mathématiciens, "ça porte sur quoi, en gros, ta thèse ?" La difficulté est toujours présente, même plusieurs années après. Ici, je vois deux objectifs principaux : en premier, évidemment, remercier ; mais aussi écrire suffisamment pour que les non mathématiciens venus gentiment assister à ma soutenance aient de quoi lire pendant l'exposé et les questions du jury.

Je peux déjà vous dire que, lors de ces remerciements, le second objectif ne sera pas atteint : j'ai déjà suffisamment écrit pour la thèse en elle-même ! Cependant, pour ceux qui auront besoin de s'occuper pendant la soutenance, je vous propose un petit jeu : il y a un parallèle musical à trouver au milieu de toutes ces mathématiques. Pour vous aider, il se trouve aux environs du milieu de la thèse. A vous de jouer.

Pour ce qui est des remerciements, il y a en a de nombreux à faire. Je vais commencer par mon directeur de thèse, Jean Ecalle. Son oeil critique et compétent m'a été très précieux pour structurer ce travail et pour améliorer la qualité des différentes sections. Merci de m'avoir initié à vos travaux et de m'avoir dirigé dans mes recherches avec autant de souplesse. Cela n'a pas été toujours simple pour moi de vous comprendre, mais aujourd'hui, je suis ravi de pouvoir prétendre comprendre plusieurs aspects de vos travaux.

Je tiens à remercier tous les membres de mon jury. Je suis très sensible à la présence dans ce jury, dû à l'intérêt qu'ils portent à mes travaux, de Xavier Buff et d'Adam Epstein (qui est aussi rapporteur) . Merci à Jacquy Cresson d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse, ainsi qu'à Joël Merker pour avoir accepté d'être le président du jury. Je n'oublierai évidemment pas Frédéric Menous, qui est co-organisateur d'un groupe de travail ainsi que de plusieurs conférences qui m'ont permis de mieux appréhender mon cadre de recherche et de rencontrer d'autres mathématiciens utilisant les mêmes objets. Je remercie aussi vivement les autres co-organiseurs de ces événements marquants de ma thèse : David Sauzin et Frédéric Fauvet.

Je voudrais aussi remercier tout particulièrement mes parents. Merci Papa, pour toute la relecture de mise en page et typographique que tu as faite, la correction des fautes d'orthographe et le temps passé. Cela représente au moins deux lectures intégrales du manuscrit, voir trois ou quatre pour certains passages : je ne préfère même pas essayer de compter le nombre d'heures que cela a pris... Sans contestation possible, sans toi, la lecture de cette thèse aurait été nettement plus difficile et l'exposition moins claire. Merci Maman pour ton aide, tes encouragements et l'aide pratique que tu m'as toujours apportée.

Je voudrais aussi remercier mon amie, Zoé, qui elle aussi a relu de nombreux passages, mais aussi pour son soutien de tous les jours, son réconfort ainsi que sa patience. Je sais bien que ce n'est pas toujours facile de supporter quotidiennement un thésard : à certains moments, les résultats ne se présentent pas comme on le souhaiterait, et cela joue inéluctablement sur l'humeur... Malheureusement, tu ne pourras pas être là le jour J, mais je sais que ton amour sera suffisamment présent et fort pour m'aider ce jour là.

Beaucoup de personnes m'ont aidé à différents degrés et à différents moments. Je pense particulièrement à une amie de longue date, Cécile Frinault, qui m'a très gentiment proposé de corriger des fautes d'orthographe.

Je n'oublierai pas non plus mon ancien colocataire, Grégory Briens, qui m'a aussi supporté (dans tous les sens du terme) pendant les deux premières années de cette thèse.

Je pense aussi à tous les collègues formateurs B.A.F.A. de l'association d'éducation populaire S.T.A.J. P.E.R.I.S.-Coop., avec qui j'ai pu avoir de longues et passionnantes discussions de pédagogie, particulièrement avec André Lemeunier et Anne Roudeault, mais aussi avec qui j'ai pu discuter de qualité d'expressions écrites ou orales, notamment avec Mathieu Duval. Cela m'a énormément appris en tant qu'enseignant bien sûr, mais aussi pour la préparation et la réalisation de conférences (comme la soutenance d'aujourd'hui) .

Je voudrais remercier Jean Pierre Kahane, qui m'a toujours adressé ses encouragements depuis la fin de mon mémoire de licence sur la transcendance du nombre e . C'est grâce à sa manière de me diriger dans ce mémoire que j'ai pris le goût de la recherche, que j'ai commencé à structurer ma pensée mathématique face à l'inconnu. A la veille de commencer ma thèse, il m'avait prédit que ces années seraient "difficiles mais passionnantes" ; il avait raison, et j'en suis aujourd'hui ravi.

Cette liste de remerciements serait incomplète si j'oubliais les personnes venues me manifester leurs encouragements en ce mercredi 19 octobre 2011. Je suis particulièrement touché par cette marque d'amitié.

Last, but not least, malgré les relectures et les relecteurs nombreux (Jean Ecalle, mon père bien sur, Zoé aussi, Cécile et Ethel), il reste évidemment des coquilles... J'en suis le seul responsable.

Table des matières

Résumé / Abstract	1
Remerciements	3
Introduction	13
1 Quelques rappels sur la sommation de Borel et la théorie de la résurgence.	14
1.1 Sommation de Borel.	14
1.2 Rappels sur la résurgence.	18
2 Multizêtas et multitangentes.	20
2.1 Les multizêtas.	20
2.2 Les multitangentes.	22
2.3 Multizêtas et multitangentes colorés.	23
3 Autour du calcul des invariants holomorphes d'un germe de difféomorphisme de \mathbb{C} tangent à l'identité.	23
3.1 Etude d'une équation aux différences.	23
3.2 Notion d'itérateur direct et d'itérateur réciproque.	25
3.3 L'équation du pont, porteuse des invariants analytiques.	26
3.4 Des objets complexes, mais explicitement calculables.	27
4 Méthodologie.	28
4.1 Projet initial.	28
4.2 Liens entre les deux parties.	29
4.3 Démarche.	30
5 Les résultats obtenus.	30
5.1 Résultats obtenus autour du calcul des invariants holomorphes.	30
5.2 Résultats obtenus autour de l'étude des multitangentes.	31
I Algorithmes de calculs des invariants holomorphes.	35
1 Introduction.	37
1.1 Germe de difféomorphisme tangent à l'identité.	37
1.2 Classe de conjugaison formelle.	38
1.3 Résurgence des itérateurs direct et réciproque.	40
1.4 Applications de corne.	40

1.5	Notations.	41
2	Des développements mouliens.	41
2.1	Des opérateurs de substitution.	41
2.2	Deux opérateurs linéaires agissant sur les opérateurs de substitution.	42
2.3	Remarques sur les notations.	43
2.4	Expressions de F^*	43
2.4.1	Une expression de F^* à priori non licite.	43
2.4.2	Une première expression de F^* , sous forme de développement moulien.	44
2.4.3	Trois autres développements mouliens de F^*	45
2.5	Expressions de *F	46
2.6	Expressions des opérateurs de substitution F_+^* , F_-^* , ${}^*F_+$ et ${}^*F_-$	46
2.7	Expressions des opérateurs de substitution Π^+ et Π^-	49
3	Expression des invariants holomorphes en série de multizêtas et de l'application de corne π^+ en série de multitangentes.	50
3.1	Evaluation de $\Gamma_\bullet^+(id_{\mathbb{C}})$	51
3.1.1	Description de l'action de Γ_\bullet^+	51
3.1.2	Evaluation de $\Gamma_\bullet^+(id_{\mathbb{C}})$	53
3.1.3	Introduction de notations mouliennes.	54
3.1.4	Expression moulienne de $\Gamma_\bullet^+(id_{\mathbb{C}})$	55
3.2	Quelques majorations intermédiaires.	55
3.2.1	Estimation du comoule \mathcal{A}_\bullet	55
3.2.2	Estimation d'un coefficient combinatoire.	56
3.2.3	Rappels sur les coefficients de Fourier des multitangentes.	57
3.2.4	Etude des coefficients de Fourier de τ^\bullet	58
3.3	Evaluation des invariants holomorphes.	61
3.4	Evaluation de l'application de corne π^+	65
3.5	Rappels des notations et énoncé du résultat.	66
3.5.1	Notations.	66
3.5.2	Énoncé du résultat.	68
4	Majoration des invariants holomorphes.	69
4.1	Majoration de f_+^* sur un demi plan.	69
4.1.1	Une expression de f^*	69
4.1.2	Expression de $\widehat{f^*} = \mathcal{B}(f^*)$ dans le plan de Borel.	70
4.1.3	Majoration de $\widehat{f^*}$ dans un secteur du plan de Borel du type $]\theta_1; \theta_2[\subset]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$	71
4.1.4	Majoration de f_+^* sur un demi plan.	74
4.2	Inverse dans $z + \mathbb{C} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ z \end{smallmatrix} \right]$	74
4.2.1	Expression de l'inverse dans $z + \mathbb{C} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ z \end{smallmatrix} \right]$: démonstration de la formule (29).	75
4.2.2	Application à une majoration dans le plan de Borel.	76

4.3	Une majoration de $*f_-$ sur un demi-plan.	77
4.4	Majoration de π^+	79
4.4.1	Domaine de définition de π^+	79
4.4.2	Majoration de π^+ sur un demi-plan supérieur.	81
4.5	Majoration des invariants holomorphes.	82
5	Une estimation conjecturale du moule τ^\bullet	83
5.1	Premières remarques sur le moule τ^\bullet	83
5.2	Estimations conjecturales.	84
5.3	Les implications des conjectures 1 et 2.	86
5.4	Deux nouvelles expressions de τ^\bullet	89
5.4.1	Multitangentes démultipliées.	89
5.4.2	Le moule τ^\bullet , vu comme une perturbation d'une multitangente.	89
5.4.3	Une seconde expression de τ^\bullet	90
5.4.4	Comparaison des deux expressions obtenues.	92
5.5	Etude des moules β^\bullet et $\tilde{\beta}^\bullet$	92
5.5.1	Estimation de $\tilde{\beta}^\bullet$ et quasi-optimalité de l'estimation.	93
5.5.2	Quasi-optimalité de l'estimation de β^\bullet	94
5.5.3	Une nouvelle écriture du moule β^\bullet	95
5.6	Quelques cas particuliers de la conjecture 2.	95
5.7	Manipulations éventuelles sur des multitangentes en vue de la conjecture 1.	98
6	Algorithme de calculs des invariants holomorphes.	99
6.1	Méthode 1, issue de l'asymptotique des coefficients.	99
6.2	Méthode 2, issue de l'analyse résurgente dans le plan de Borel.	99
6.3	Méthode 3, utilisant les multizêtas.	100
6.3.1	Idée générale de l'algorithme.	100
6.3.2	Evaluation du reste.	102
6.3.3	Description de l'algorithme.	102
6.3.4	Exemples.	103
6.4	Comparaison des différentes méthodes.	104
6.5	Ce qui change hors du cas-type.	104

II Etude des multitangentes, sous des aspects analytique, algébrique et arithmétique . 109

1	Introduction.	111
2	Définition des multitangentes, et premières propriétés.	115
2.1	Un lemme sur les moules symétriels.	115
2.2	Application : définition des multitangentes.	119
2.3	Premières propriétés des multitangentes.	119
3	Expression des multitangentes en fonction des multizêtas et des monotangentes.	119
3.1	Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.	120

3.2	Expression des multitangentes en fonction des monotangentes et des multizêtas.	120
3.3	Etablissement des tables de multitangentes convergentes.	121
4	Etude du prolongement symétr <u>e</u> l des multitangentes à $\text{seq}(\mathbb{N}^*)$	122
4.1	Rappel sur le prolongement du moule $\mathcal{Z}e^\bullet$ à $(\mathbb{N}^*)^*$	123
4.2	Première difficulté.	125
4.3	Factorisation moulienne du moule $\mathcal{T}e^\bullet$ et conséquences.	125
4.4	Multizêtas de Hurwitz formels, multitangentes formelles.	127
4.5	Propriétés du prolongement du moule $\mathcal{T}e^\bullet$ à $(\mathbb{N}^*)^*$	131
4.6	Deuxième difficulté et fonction génératrice de Te^\bullet	134
4.7	Contractions et seconde expression de Tig^\bullet	137
4.8	Réduction en monotangentes des multitangentes divergentes.	142
5	Calcul de quelques multitangentes particulières.	146
5.1	Calcul de $\mathcal{T}e^{1[r]}(z)$ pour $r \in \mathbb{N}$	146
5.2	Calcul de $\mathcal{T}e^{n[k]}(z)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$	148
5.2.1	Une propriété liant symétr <u>e</u> lité et équation différentielle formelle.	148
5.2.2	Application au moule $\text{Te}^\bullet(X)$	150
5.2.3	Nouveau développement en série formelle de T_n	151
5.2.4	Quelques exemples.	153
5.2.5	Un calcul de multizêtas.	154
5.3	Des multitangentes nulles.	154
5.4	Quelques calculs de multitangentes particulières.	155
5.4.1	Calcul de $\mathcal{T}e^{2,1[p],2}$, pour $p \in \mathbb{N}$	156
5.4.2	Calcul de $\mathcal{T}e^{2,1[p],3,1[p],2}$, pour $p \in \mathbb{N}$	156
5.4.3	Calcul de $\mathcal{T}e^{3,1^{2p+1},3}$, pour $p \in \mathbb{N}$	157
5.4.4	Calcul de $\mathcal{T}e^{\{3,1\}^{[p]},3}$, pour $p \in \mathbb{N}$	157
5.4.5	Calcul de $\mathcal{T}e^{2,1[p],3}$ et $\mathcal{T}e^{3,1[p],2}$, pour $p \in \mathbb{N}$	157
6	Elimination des 1.	158
6.1	La conjecture.	158
6.2	Réduction de la conjecture.	159
6.3	Quelques exemples de “nettoyage” générique.	162
6.4	Une dernière série de conjectures.	164
6.5	Nettoyage des multitangentes divergentes.	165
7	Propriétés analytiques.	165
7.1	Majoration des multitangentes.	165
7.1.1	Deux majorations géométriques.	165
7.1.2	Des conjectures.	167
7.2	Développement en série de Fourier des multitangentes convergentes.	168
7.2.1	Développement en série de Fourier.	168
7.2.2	Majoration des coefficients de Fourier des multitangentes convergentes.	169
7.3	Caractère exponentiellement plat.	170

8	Propriétés arithmétiques.	172
8.1	Indépendance linéaire des monotangentes.	172
8.2	Transcendance des multitangentes.	173
8.3	Absence conjecturale de \mathbb{Q} -relations linéaires entre multitangentes de poids différents.	173
9	Sur l'éventuelle dimorphie de l'espace des multizêtas retrouvés par les multitangentes.	175
9.1	Un premier diagramme commutatif : deux moyens pour multiplier deux multitangentes entre elles.	175
9.1.1	Autour des relations de symétr <u>e</u> lité des multitangentes.	176
9.1.2	Obtention d'autres relations que celles de symétr <u>e</u> lité.	177
9.1.3	Passage aux séries génératrices.	178
9.2	Un second diagramme commutatif : deux manières de dériver une multitangente.	178
9.3	Quelques relations de symétr <u>a</u> lité.	181
9.3.1	Retour sur l'absence de composante $\mathcal{T}e^1$ dans les relations de réduction.	181
9.3.2	Retour sur la conjecture des multitangentes nulles.	185
9.3.3	Quelles relations de symétr <u>a</u> lité sont obtenues ?	187
9.3.4	Contraste.	188
9.4	Un autre procédé pour multiplier les multitangentes.	189
9.4.1	Notion d'intégrale itérée.	189
9.4.2	Un moule symétr <u>a</u> l.	190
9.4.3	Multiplication des multitangentes.	192
9.4.4	Equivalent du moule $\mathcal{I}a^\bullet$, au voisinage de 0, dans certains cas particuliers.	193
9.4.5	Relations de symétr <u>a</u> lité des multizêtas.	194
9.5	Etude de l'espace de multizêtas, retrouvé par la connaissance des multitangentes.	196
9.5.1	Relations obtenues entre multizêtas de poids 4.	196
9.5.2	Relations obtenues entre multizêtas de poids 5.	197
9.5.3	Relations obtenues entre multizêtas de poids 6.	197
10	Conclusion et questions ouvertes.	198

Annexes. 201

A Rappels et notations :

séries formelles, polynômes non commutatifs et calcul moulien. 203

1	Séries formelles et familles formellement sommables.	203
2	Polynômes non commutatifs.	205
3	Éléments de calcul moulien.	207

4	Quelques notations.	210
B	Feuilles de calculs Maple.	211
1	Procédures préliminaires.	211
1.1	Ouverture des packages nécessaires.	211
1.2	Trois procédures.	211
1.3	Exemples.	212
2	Evaluation des multizêtas en des multi-entiers, par l'algorithme de Richard Crandall.	212
2.1	Notations.	212
2.2	Ouverture des packages nécessaires.	213
2.3	Calcul préalable des valeurs de $f(n; r; \lambda)$	213
2.4	Evaluation de $Z(r_1; \dots; r_j; \lambda)$	213
2.5	Fonctions auxiliaires pour le calcul de Y	214
2.6	Evaluation de $Y(s_1; \dots; s_r; q; \lambda)$	214
2.7	Evaluation des multizêtas.	215
2.8	Exemples	217
3	Procédures autour des partitions d'entiers.	217
3.1	Ouverture des packages nécessaires.	217
3.2	Procédure déterminant toutes les partitions d'un entier de longueur et de valuation données.	217
3.3	D'autres procédures.	218
4	Produits de battage et de battage contractant.	220
4.1	Objectifs.	220
4.2	Ouverture des packages nécessaires.	220
4.3	Manière de représenter une séquence, et loi de semi-groupe de \mathbb{N}	220
4.4	Produits de battage, première version.	221
4.4.1	Les procédures.	221
4.4.2	Exemple.	222
4.5	Simplification de la réponse obtenue.	222
4.6	Produits de battage, seconde version.	224
4.7	Exemples.	225
5	Réductions des multitangentes en monotangentes.	225
5.1	Objectif.	225
5.2	Ouverture des packages et fichiers .mpl nécessaires.	226
5.3	Procédures préliminaires.	226
5.3.1	Sur les partitions.	226
5.3.2	Sur les séquences.	227
5.4	Calcul du coefficient combinatoire ${}^i E_{\bullet}$	227
5.5	La réduction en monotangente, sans utilisation de la symétréité des multizêtas.	228
5.5.1	Le calcul du tenseur de structure \mathcal{Z}	228

5.5.2	La procédure de réduction.	229
5.5.3	Exemples.	229
6	Algorithme de calcul des invariants holomorphes.	231
6.1	Objectif	231
6.2	Rappels des notations.	231
6.2.1	Alphabets.	231
6.2.2	Séquences.	231
6.2.3	Notations intermédiaires.	232
6.2.4	Moules	232
6.2.5	Comoules	233
6.3	Expression des applications de cornes et des invariants holomorphes.	233
6.4	Description de l'algorithme.	233
6.5	Ouverture des packages et fichiers ".mpl" nécessaires.	234
6.6	Procédures préliminaires.	234
6.6.1	Détermination des séquences de sommation.	234
6.6.2	Détermination des triangles nécessaires.	235
6.6.3	Procédures concernant les notations intermédiaires, les moules et les comoules.	238
6.7	La procédure de calcul de la somme partielle des invariants.	240
6.8	Exemple.	240
C	Liens entre les différentes conjectures énoncées.	241
1	La multitangente attitude.	241
2	Les énoncés des conjectures.	242
2.1	Les conjectures de type analytique.	243
2.2	Les conjectures de type arithmétique.	243
2.2.1	Autour du nettoyage des 1.	243
2.2.2	Absence conjecturale de \mathbb{Q} -relations linéaires entre multitangentes de poids différents.	244
2.2.3	Autour d'une caractérisation des multitangentes convergentes paires, impaires ou nulles.	245
2.3	Diagramme résumant l'ensemble des liens entre les conjectures.	245
D	Autour du nettoyage des 1 dans les multitangentes.	247
E	Quelques relations de symétralité pour les multizêtas, retrouvées à partir des multitangentes.	251
F	Table des multitangentes.	253
1	Table des monotangentes, pour les petits poids.	253
2	Tables des multitangentes convergentes, pour les petits poids.	253
2.1	Poids 4.	253
2.2	Poids 5.	254

2.3 Poids 6.	254
2.4 Poids 7.	254
2.5 Poids 8.	255
3 Tables des multitangentes divergentes, pour les petits poids.	257
3.1 Poids 2.	257
3.2 Poids 3.	257
3.3 Poids 4.	257
3.4 Poids 5.	258
3.5 Poids 6.	258
3.6 Poids 7.	260
3.7 Poids 8.	262
4 Exemples de valeurs génériques de multitangentes.	269
G Rappels des principales notations	271
1 Autours du calcul des invariants holomorphes.	271
1.1 Alphabets.	271
1.2 Séquences.	271
1.3 Notations intermédiaires.	271
1.4 Moules	272
1.5 Comoules	273
2 Autours des multitangentes.	273
2.1 Les principaux alphabets utilisés.	273
2.2 Les moules, bimoules et moules formels liés aux multizêtas.	273
2.2.1 Les moules.	273
2.2.2 Bimoules.	275
2.2.3 Les moules et bimoules formels.	276
2.3 La réduction en monotangentes.	276
2.4 Autour des séries génératrices des multizêtas et des multitangentes.	277
2.5 Des algèbres.	278
Bibliographie	279

Introduction

Le texte présenté ici comporte deux parties à la fois distinctes et indépendantes, mais qui sont aussi étroitement liées. La première, de nature analytique, concerne le calcul effectif en séries de multizêtas des invariants holomorphes d'un difféomorphisme local f de \mathbb{C} dans le cas-type, ayant l'origine pour point fixe. La seconde partie, de nature plus algébrique, traite des fonctions multitangentes.

Ce travail, dans son ensemble, comprend à la fois de l'analyse complexe (théorie de la résurgence, dynamique holomorphe et théorie des singularités) et de la théorie des nombres (recherche de relations algébriques liant des nombres entre eux). La méthode employée, dans les deux parties, relève du calcul moulien.

L'objectif de la première partie de ce travail est de convaincre que les invariants holomorphes sont des objets calculables à haute précision, mais aussi que l'on connaît leur structure interne (à savoir des rationnels, des multizêtas et des coefficients de Taylor). Alors que les invariants holomorphes ont la réputation d'être très compliqués à calculer, voir même incalculables, on se propose de montrer la possibilité de leur calcul par différentes méthodes. Précisément, dans cette partie, on exposera une formule explicite à la base d'un des algorithmes de calcul.

Cette étude des invariants nous a amené à considérer la classe des multitangentes dont l'étude fait l'objet de la seconde partie de cette thèse : on y trouvera des propriétés générales des multitangentes, mais aussi un certain nombre de conjectures. Notamment, on y verra un lien profond entre multitangentes et multizêtas.

Un certain nombre d'idées et méthodes seront utilisées dans l'une ou l'autre des parties, voir les deux. Dans cette introduction, nous allons motiver ces idées dans des contextes simples et introduire les objets nécessaires à la lecture des deux parties.

Avant d'introduire la notion d'invariants, nous présenterons brièvement les rudiments techniques nécessaires à leur calcul (section 1) . Ensuite, nous introduirons deux objets apparentés (section 2) : les multizêtas (qui sont des nombres) et les multitangentes (qui sont des fonctions) . Il s'agit des deux types de briques élémentaires des invariants holomorphes : les multitangentes interviennent naturellement dans leur calcul, alors que les multizêtas permettent leur calcul.

Viendra alors notre première problématique : le calcul des invariants holomorphes. A travers l'étude d'une équation aux différences (section 3.1) , nous expliquerons comment le procédé de sommation de Borel permet d'arriver au prototype des résultats que l'on obtiendra. Nous introduirons ensuite la notion d'invariants et expliquerons leur complexité (sections 3.2 à 3.4) .

Enfin, nous pourrons décrire davantage le projet initial (section 4.1), son devenir ainsi que les liens entre les deux parties (section 4.2), la démarche utilisée (section 4.3) puis les résultats obtenus (section 5) .

1 Quelques rappels sur la sommation de Borel et la théorie de la résurgence.

1.1 Sommation de Borel.

Transformation de Borel formelle.

La transformation \mathcal{B} de “Borel formelle” est une opération agissant sur $\frac{1}{z}\mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$, à valeurs dans $\mathbb{C}[[\zeta]]$. Essentiellement, l’application de cette transformation affecte le $n^{\text{ième}}$ coefficient dans une division par $n!$:

$$\mathcal{B} : \frac{1}{z}\mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] \longrightarrow \mathbb{C}[[\zeta]]$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{z^{n+1}} \longmapsto \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{n!} \zeta^n .$$

Pour ce qui est des notations, nous signalerons le caractère formel d’une série par un tilda ($\tilde{}$) surmontant le nom de cette série, tandis que sa transformation formelle de Borel aura un nom possédant un accent circonflexe ($\hat{}$).

Ainsi, nous simplifierons les notations en écrivant : $\hat{\varphi} = \mathcal{B}(\tilde{\varphi})$.

Appliquer cette transformation sera une étape-clé dans le procédé de resommation des séries divergentes dû à Borel. Celui-ci permettra d’associer une somme satisfaisante à certaines séries divergentes. Nous dirons donc que la division par le facteur $n!$ “rétablit” la convergence de certaines séries formelles.

Nous pouvons aussi appliquer cette transformation à une série convergente. Il est alors clair que si $\tilde{\varphi}(z) \in \frac{1}{z}\mathbb{C}\left\{\frac{1}{z}\right\}$ (i. e. si $\tilde{\varphi}$ a un rayon de convergence¹ R non nul), alors $\hat{\varphi} = \mathcal{B}(\tilde{\varphi})$ définit une fonction entière de type exponentiel dans chaque direction :

$$\forall \tau > R^{-1} , \exists C > 0 , \forall \zeta \in \mathbb{C} , |\hat{\varphi}(\zeta)| \leq Ce^{\tau|\zeta|} .$$

Enfin, nous disposons de plusieurs propriétés calculatoires simples :

Propriétés : Soit $(\tilde{\varphi}; \tilde{\psi}) \in \left(\frac{1}{z}\mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]\right)^2$.

- Alors :
1. $\mathcal{B}(\partial_z \tilde{\varphi})(\zeta) = -\zeta \hat{\varphi}(\zeta)$.
 2. Si $l : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est la translation unité (i.e. $l(z) = z + 1$), alors $\mathcal{B}(\tilde{\varphi} \circ l)(\zeta) = e^{-\zeta} \hat{\varphi}(\zeta)$.
 3. $\mathcal{B}(\tilde{\varphi} \cdot \tilde{\psi})(\zeta) = (\hat{\varphi} \star \hat{\psi})(\zeta)$.

¹ Par analogie avec les séries entières en 0, si $\tilde{\varphi}(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{z^n} \in \mathbb{C}\left\{\frac{1}{z}\right\}$, nous appelons rayon

Ici, \circ , \cdot et ∂_z désignent respectivement la composition, la multiplication et la dérivation par rapport à z . Il s'agit d'opérations formelles.

La convolution formelle \star de deux séries formelles mérite plus de détails. Elle est définie par l'égalité :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \zeta^n \right) \star \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} \zeta^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left(\sum_{p=0}^n a_p b_{n-p} \right) \zeta^{n+1}.$$

De plus, si A et B définissent des séries entières, alors cette convolution formelle coïncide avec la convolution intégrale : $(A \star B)(\zeta) = \int_0^\zeta A(z)B(\zeta - z) dz$.

Transformation de Laplace.

La transformation (formelle) de Borel possède un inverse (formel à ce stade) : en effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re e(z) > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{\zeta^n}{n!} e^{-z\zeta} d\zeta = \frac{1}{z^{n+1}}$. Il s'agit de la transformation de Laplace \mathcal{L}^θ , qui est un opérateur linéaire, défini sur l'ensemble des fonctions φ vérifiant les conditions suivantes :

$$\zeta \mapsto \varphi(\zeta) \text{ est analytique sur un ouvert de } \mathbb{C} \text{ contenant } \{\zeta \in \mathbb{C} ; \arg \zeta = \theta\}. \quad (1)$$

$$\exists C > 0, \exists \tau > 0, \forall r > 0, |\varphi(re^{i\theta})| \leq Ce^{\tau r}. \quad (2)$$

L'expression analytique de cette transformation est donnée par l'égalité :

$$\mathcal{L}^\theta(\varphi)(z) = \int_0^{e^{i\theta}\infty} \varphi(\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta.$$

En effet, si $\tilde{\varphi}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}$ alors $\hat{\varphi}(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n!} \zeta^n$. On obtient alors formellement :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\theta(\hat{\varphi})(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{c_n}{n!} \int_0^{e^{i\theta}\infty} \zeta^n e^{-z\zeta} d\zeta \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{c_n e^{i(n+1)\theta}}{n!} \int_0^{+\infty} \zeta^n e^{-e^{i\theta}z\zeta} d\zeta \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n e^{i(n+1)\theta}}{(e^{i\theta}z)^{n+1}} = \tilde{\varphi}(z). \end{aligned}$$

Si la fonction $\hat{\varphi}$ provient de la transformation de Borel d'une série convergente, c'est-à-dire si $\hat{\varphi} = \mathcal{B}(\tilde{\varphi})$ où $\tilde{\varphi} \in \frac{1}{z}\mathbb{C}\left\{\frac{1}{z}\right\}$ est de rayon de convergence $R > 0$, alors on constate aisément que l'intégration terme à terme est justifiée dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} ; \Re e(e^{i\theta}z) > R^{-1}\}$.

Par ailleurs, le théorème d'holomorphicité sous le signe intégral montre que si φ vérifie les conditions (1) et (2) (ce qui définit une constante τ), alors $\mathcal{L}^\theta(\varphi)$ est holomorphe dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} ; \Re e(e^{i\theta}z) > \tau\}$.

de convergence de $\tilde{\varphi}$ le nombre $R \in]0; +\infty[$ défini par $R = \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}$.

Ainsi, lorsque $|z| \geq R^{-1}$, $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{z^n}$ converge absolument.

Procédé de sommation de Borel.

Les propriétés des transformations de Borel et de Laplace montrent que si $\tilde{\varphi}$ est convergente et de rayon de convergence $R > 0$, alors $\hat{\varphi} = \mathcal{B}(\tilde{\varphi})$ vérifie les conditions (1) et (2). On retrouve alors $\tilde{\varphi}$ en appliquant la transformée de Laplace à $\hat{\varphi}$ sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} ; \Re(e^{i\theta}z) > \tau\}$ (cf. la figure 1, page 17, pour une illustration) .

C'est aussi le cas pour une série $\tilde{\varphi}$ divergente dont la transformée $\hat{\varphi}$ se prolonge analytiquement au voisinage de la demi-droite $e^{i\theta}\mathbb{R}_+$. Notons alors Θ l'ensemble des $\theta \in]-\pi; \pi]$ pour lesquels un tel prolongement analytique de $\hat{\varphi}$ est possible. On obtient alors :

$$\forall \theta \in \Theta , \forall z \in \mathbb{C} , \Re(e^{i\theta}z) > R^{-1} , \tilde{\varphi}(z) = \mathcal{L}^\theta(\mathcal{B}(\tilde{\varphi}))(z) .$$

Nous avons donc obtenu un prolongement analytique de $\tilde{\varphi}$ à un demi-plan de \mathbb{C} , en lui appliquant la transformation de Borel formelle, puis la transformation de Laplace. Le procédé est général et s'appelle procédé de sommation de Borel :

Définition : Etant donné $\theta \in \mathbb{R}$, nous dirons que $\tilde{\varphi} \in \frac{1}{z}\mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$ est Borel-sommable dans la direction θ , et nous noterons $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}_{\mathcal{B},\theta}$, lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\hat{\varphi} = \mathcal{B}(\tilde{\varphi})$ se prolonge analytiquement sur un voisinage Ω de $e^{i\theta}\mathbb{R}_+$.
2. $\exists C > 0 , \exists \tau > 0 , \forall \zeta \in \Omega , |\hat{\varphi}(\zeta)| \leq Ce^{\tau|\zeta|}$.

Dans ce cas, la somme de Borel correspondante, notée $S^\theta(\tilde{\varphi})$, est définie par :

$$S^\theta(\tilde{\varphi}) = \mathcal{L}^\theta(\mathcal{B}(\tilde{\varphi})) .$$

Une telle somme est alors automatiquement analytique sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} ; \Re(e^{i\theta}z) > \tau\}$.

Remarquons que ce procédé sommatoire est satisfaisant, au sens où :

1. Si $\tilde{\varphi} \in \mathbb{C}\left\{\frac{1}{z}\right\}$ est définie sur un voisinage Ω de l'infini, alors les sommes de Borel $S^\theta(\tilde{\varphi})$ coïncident avec $\tilde{\varphi}$ sur Ω , pour toute direction $\theta \in \mathbb{R}$.
2. $S^\theta : \mathcal{S}_{\mathcal{B},\theta} \longrightarrow \mathbb{C}\left\{\frac{1}{z}\right\}$ est un homomorphisme d'algèbres injectif qui commute avec la dérivation.
3. Si $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}_{\mathcal{B},\theta}$ alors $S^\theta(\tilde{\varphi})$ admet $\tilde{\varphi}$ comme développement asymptotique à l'infini.

En résumé, on obtient le diagramme de la figure 2 (cf. page 17) .

Resommation sectorielle.

On dit qu'une série formelle $\tilde{\varphi}$ est uniformément Borel-sommable dans l'intervalle de direction $[\theta_1; \theta_2]$ lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

1. $\hat{\varphi}$ se prolonge analytiquement sur un voisinage de $\Omega = \{z \in \mathbb{C} ; \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\}$.
2. $\exists(C; \tau) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 , \forall \zeta \in \Omega , |\hat{\varphi}(\zeta)| \leq Ce^{\tau|\zeta|}$.

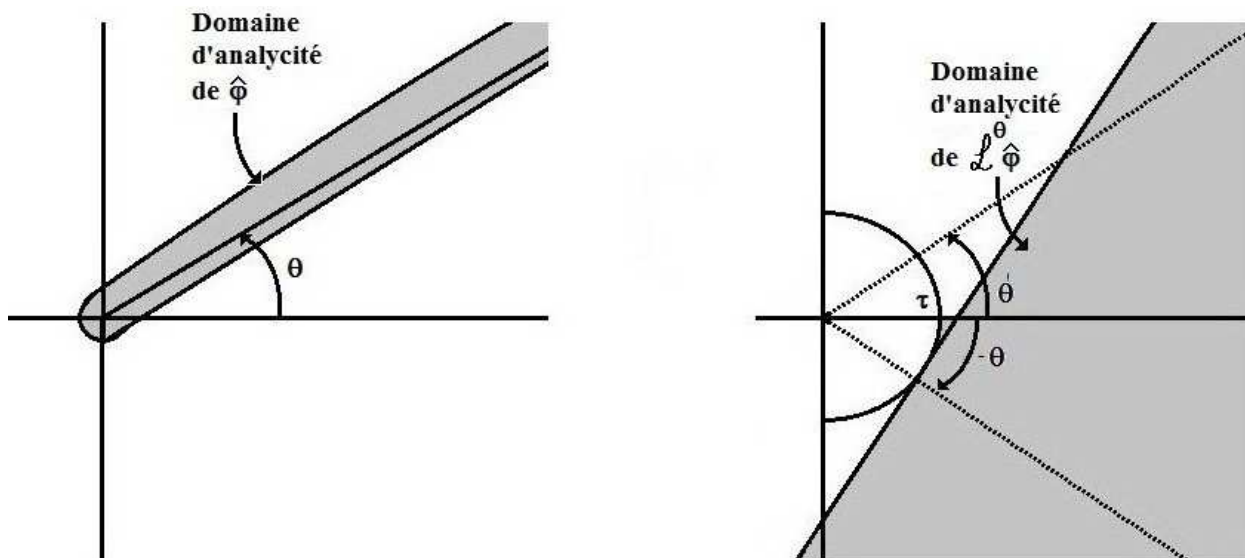


Figure 1 : Devenir du domaine d'analyticité, après transformation de Laplace.

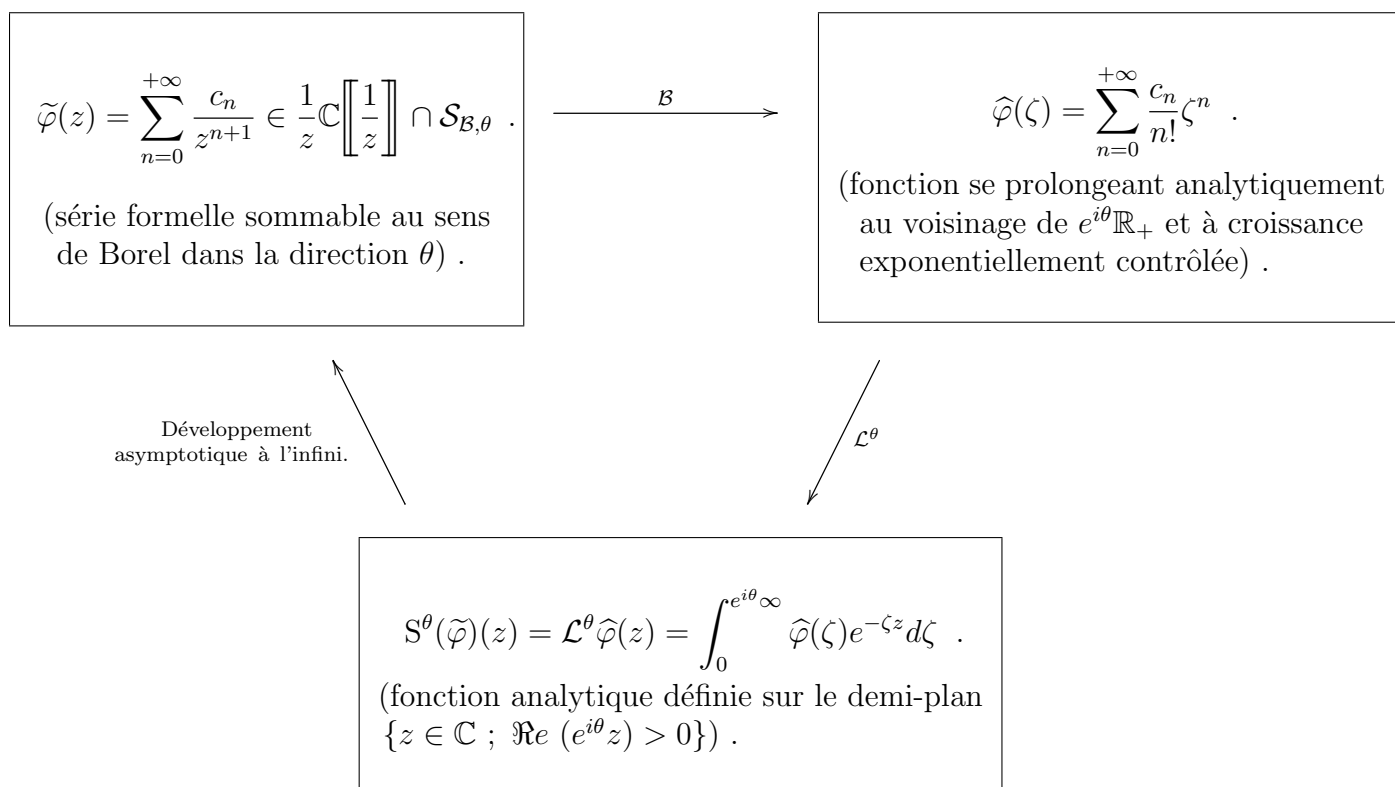


Figure 2 : Procédé de sommation de Borel dans la direction θ .

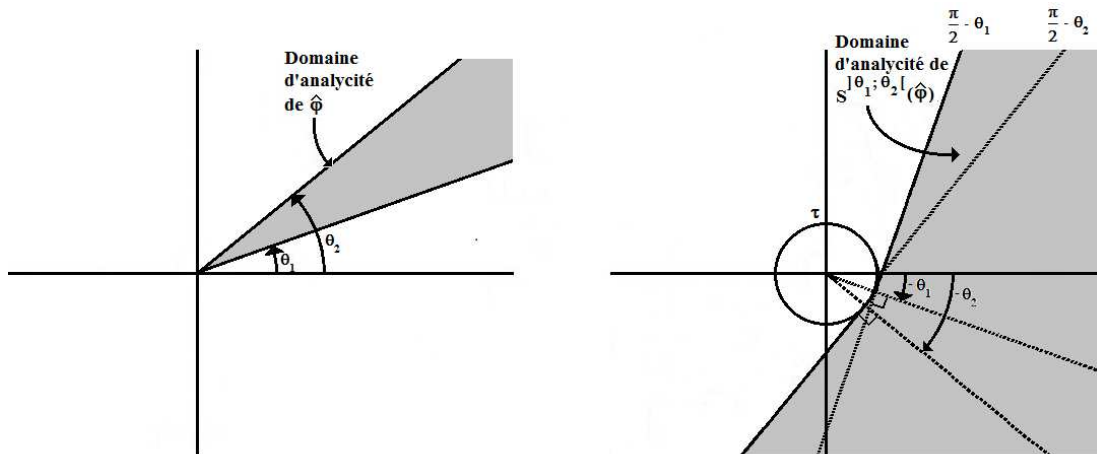


Figure 3 : **Resommation sectorielle.**

Pour une telle série formelle, il est possible de faire varier la direction de sommation entre θ_1 et θ_2 dans l'application du procédé de Borel. Il est alors naturel de se demander quels liens existent entre les sommes de Borel correspondantes. Le théorème des r sидus permet de répondre : elles se prolongent analytiquement l'une et l'autre.²

Ainsi, en recollant les différentes sommes de Borel obtenues en faisant varier θ entre θ_1 et θ_2 , on définit une somme de Borel, notée $S^{[\theta_1; \theta_2]}$, définie sur le secteur angulaire $\left\{ z \in \mathbb{C} ; -\theta_2 - \frac{\pi}{2} < \arg z < -\theta_1 + \frac{\pi}{2} \right\}$. On obtient la figure 3 (cf. page 18).

Ceci vaut tant que $\hat{\varphi}$ ne possède pas de singularité sur le secteur angulaire Ω . Sinon, le théorème des r sидus montre que la différence entre $\mathcal{L}^\theta(\hat{\varphi})$ et $\mathcal{L}^{\theta'}(\hat{\varphi})$ n'est jamais nulle. En fait, les sommes de Borel avant et après la traversée d'une singularité ne coïncident plus : c'est l'apparition du phénomène de Stokes.

1.2 Rappels sur la résurgence.

Nous venons de voir que comparer les resomm es sectorielles d'une série divergente $\tilde{\varphi}$ uniformément Borel-sommable (dans un intervalle) nécessite d'avoir une connaissance précise des singularités de $\hat{\varphi} = \mathcal{B}(\tilde{\varphi})$.

De manière générale, l'une des idées phare de la théorie de la résurgence est de dire que les séries divergentes provenant de problèmes naturels (i.e. issues de l'étude d'équations aux différences, d'équations différentielles, de dynamique holomorphe, \dots) possèdent des transformées de Borel dont les singularités sont "analysables" et apparentées. Pour mieux comprendre ces singularités, Jean Ecalle a alors développé, à la fin des années 1970, un calcul différentiel sur une certaine classe de fonctions : le calcul différentiel étranger agissant sur l'algèbre des fonctions résurgentes.

Puisque dans tout le travail qui suit, nous n'aurons affaire qu'à des fonctions résurgentes simples, nos rappels se limiteront à ce cas. Pour un exposé plus complet, nous renvoyons le lecteur aux textes de Jean Ecalle (les trois volumes de [15]), ou aux textes introductifs [44] et [10].

² Notons que ce ne serait plus le cas en l'absence de majoration exponentielle uniforme de $\hat{\varphi}$.

Singularités simples.

Nous dirons qu'une fonction $\tilde{\varphi}$, définie et holomorphe sur un disque ouvert D , possède une singularité simple en un point ω adhérent à D lorsque $\tilde{\varphi}$ se représente au voisinage de $\omega \in \mathbb{C}$ sous la forme de la somme d'une singularité logarithmique en ω , d'un pôle simple en ω et d'une partie régulière. Il existe donc $C \in \mathbb{C}$, ainsi que deux germes de fonctions holomorphes $\hat{\Phi}$ et reg tels qu'au voisinage de ω , l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\hat{\varphi}(\zeta) \underset{(\zeta \rightarrow \omega)}{=} \frac{C}{2i\pi(\zeta - \omega)} + \frac{1}{2i\pi} \hat{\Phi}(\zeta - \omega) \log(\zeta - \omega) + reg(\zeta - \omega) .$$

Nous noterons cette égalité plus simplement sous la forme :

$$\text{sing}_\omega \hat{\varphi} = C\delta + \hat{\Phi} \in \mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\{\zeta\} .$$

Ici, l'opérateur sing_ω désigne la prise de développement asymptotique au voisinage du point ω , tandis que δ désigne un Dirac qui joue le rôle d'unité abstraite de l'algèbre de convolution.

Fonctions S-résurgentes, dans le modèle convolutif.

Nous dirons qu'un germe φ de fonction holomorphe en 0 se prolonge sans fin sur \mathbb{C} lorsque, pour toute ligne brisée finie L , il existe un ensemble fini $\Omega_L \subset L$ de singularités tel que φ se prolonge analytiquement le long de tous les chemins possibles obtenus en suivant L et en contournant chaque point de Ω_L soit à gauche, soit à droite.

Dans le modèle convolutif, les fonctions S-résurgentes sont alors les germes en 0 de fonctions holomorphes se prolongeant sans fin sur \mathbb{C} et à singularités simples.

Dans le modèle formel, les fonctions S-résurgentes³ sont les séries formelles de $\frac{1}{z} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$ dont la transformée de Borel est une fonction S-résurgente dans le modèle convolutif.

Nous noterons $\widehat{\text{RES}}^{\text{simple}}$ et $\widehat{\text{RES}}^{\text{simple}}$ les ensembles de fonctions résurgentes simples dans les modèles formel et convolutif.

Dérivées étrangères.

Nous nous plaçons désormais dans le cas particulier où $\Omega = 2i\pi\mathbb{Z}^*$.

• Pour tout $\omega \in \Omega$, nous allons définir un opérateur linéaire “mesurant” les singularités au voisinage de Ω : $\Delta_\omega : \widehat{\text{RES}}^{\text{simple}} \longrightarrow \widehat{\text{RES}}^{\text{simple}}$.

Pour expliciter cela, fixons-nous $\omega = 2im\pi \in \Omega$.

³ Les fonctions S-résurgentes, dans le modèle formel, sont nécessairement des séries 1-Gevrey :

$$\tilde{\varphi}(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}$$

est dite 1-Gevrey lorsque : $\exists (C_0; C_1) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|c_n| \leq C_0 C_1^n n!$.

Pour $\varepsilon = (\varepsilon_{\pm 1}; \dots; \varepsilon_{\pm(m-1)}) \in \{+1; -1\}^{|m|-1}$, définissons le chemin $\gamma(\varepsilon)$ qui suit le segment $]0; \omega[$ en contournant les singularités intermédiaires $2ik\pi$, $\pm k \in \llbracket 1; |m| - 1 \rrbracket$, par des demi-cercles centrés en ces singularités, le k -ième disque étant orienté sur le côté gauche de l'axe des ordonnées lorsque $\varepsilon_k = -1$, et orienté sur le côté droit lorsque $\varepsilon_k = +1$. L'action de la dérivée étrangère Δ_ω sur $\widehat{\varphi} \in \widehat{\text{RES}}^{\text{simple}}$ est alors définie par la formule :

$$\Delta_\omega(\widehat{\varphi}) = \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_{\pm 1}; \dots; \varepsilon_{\pm(m-1)}) \in \{+1; -1\}^{|m|-1}} \frac{p(\varepsilon)! q(\varepsilon)!}{m!} \text{sing}_\omega(\text{cont}_{\gamma(\varepsilon)} \widehat{\varphi}) .$$

Ici, $p(\varepsilon)$ et $q(\varepsilon)$ désignent respectivement le nombre de signes $+$ et $-$ dans ε . De plus, $\text{cont}_{\gamma(\varepsilon)}$ désigne le prolongement analytique de $\widehat{\varphi}$ le long du chemin $\gamma(\varepsilon)$.

Remarquons que cette définition est cohérente au sens suivant : la valeur de $\Delta_\omega(\widehat{\varphi})$ n'est pas modifiée si l'on introduit de "fausses" singularités à contourner (nécessairement en nombre fini). En effet, si $\gamma(\varepsilon)$ est un chemin ne contenant que les vraies singularités de $\widehat{\varphi}$ et si $\gamma(\tilde{\varepsilon})$ est identique à $\gamma(\varepsilon)$ mais contenant en plus une "fausse" singularité, alors les prolongements analytiques de $\widehat{\varphi}$ le long des chemins $\gamma(\varepsilon)$ et $\gamma(\tilde{\varepsilon})$ coïncident. Il en est alors de même de leur développement asymptotique au voisinage de ω .

- Dans le modèle formel, nous définissons aussi l'opérateur linéaire Δ_ω (avec la même notation, le contexte permettant simplement de distinguer les deux opérateurs) par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\text{RES}}^{\text{simple}} & \xrightarrow{\Delta_\omega} & \widehat{\text{RES}}^{\text{simple}} \\ \mathcal{B} \uparrow & & \uparrow \mathcal{B} \\ \widetilde{\text{RES}}^{\text{simple}} & \xrightarrow{\Delta_\omega} & \widetilde{\text{RES}}^{\text{simple}} \end{array}$$

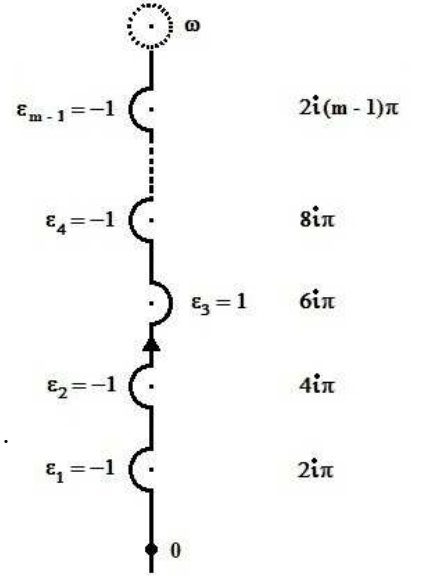
- La définition précise de la dérivée étrangère Δ_ω est, certes, compliquée, mais il est clair qu'elle agit trivialement sur une fonction régulière en ω . L'autre point important est qu'il s'agit bien d'une dérivation relativement au produit de convolution (si l'on est dans le modèle convolutif), ou relativement au produit des séries formelles (si l'on est dans le modèle formel) .

2 Multizêtas et multitangentes.

2.1 Les multizêtas.

Les multizêtas sont les nombres définis, pour les séquences $(s_1; \dots; s_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$, $r \in \mathbb{N}^*$, vérifiant $s_1 \geq 2$, par les sommes suivantes :

$$\mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_r} = \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} .$$



Lorsque $r = 1$, ces nombres sont simplement les valeurs de la fonction ζ de Riemann appliquée aux entiers. Leur première introduction remonte à l'année 1775 lorsqu'Euler étudia le cas des multizêtas de longueur 2, dans son article désormais célèbre [25]. Dans ce travail, il a notamment démontré plusieurs relations remarquables entre ces nombres, comme $\mathcal{Z}e^{2,1} = \mathcal{Z}e^3$ ou plus généralement :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* , \sum_{k=1}^{p-1} \mathcal{Z}e^{p+1-k,k} = \mathcal{Z}e^{p+1} \cdot \mathcal{Z}e^{p+1} .$$

Bien qu'apparaissant ensuite de manière sporadique dans la littérature, aussi bien en mathématiques qu'en physique, nous pouvons dire que ces nombres sont tombés dans l'oubli au XIX^{ème} siècle, ainsi que dans la majeure partie du XX^{ème} siècle. Vers la fin des années 1970, ils ont notamment été réintroduits à propos de l'étude des invariants holomorphes par Jean Ecalle. Ces coefficients lui servaient d'auxiliaires pour construire des objets géométriques et analytiques, des solutions d'équations différentielles, avec des propriétés dynamiques. Puis, à la fin des années 1980, les multizêtas sont apparus dans plusieurs contextes mathématiques différents : ils furent l'objet d'un énorme regain d'intérêt, qui fut massif et décisif. Ces nombres commencèrent alors à être étudié pour eux-mêmes.

Aujourd'hui, les multizêtas interviennent dans des branches des mathématiques aussi variées que :

1. La théorie des nombres (recherche de relations entre les multizêtas, pour étudier l'indépendance algébrique des valeurs de la fonction ζ de Riemann appliquée aux entiers ; dimorphie arithmétique) : cf. [18], [49], [54] par exemple.
2. Les groupes quantiques, la théorie des noeuds ou la physique mathématique (à travers l'associateur de Drinfeld, dont les coefficients sont les multizêtas) : cf. [5], [6], [29] ou [31].
3. La théorie de la résurgence et des invariants holomorphes (dans beaucoup de cas, les invariants s'expriment sous forme de séries de multizêtas) : cf. la première partie de ce travail.
4. L'étude des diagrammes de Feynman : cf. [5], [6] ou [31].
5. L'étude de $\mathbb{P}^1 - \{0; 1; \infty\}$ (à travers le programme de Grothendieck-Ihara) : cf. [28], [30], [37] par exemple.
6. L'étude du "groupe de Galois absolu" : cf. [29] par exemple.

Actuellement, l'une des questions importantes est la compréhension des relations entre ces nombres. Il en existe de nombreuses, issues notamment de leur écriture⁴. Les plus importantes sont les relations de symétralité et de symétrélité (provenant respectivement

⁴ Etant données les 1-formes différentielles $\omega_0 = \frac{dt}{t}$ et $\omega_1 = \frac{dt}{1-t}$, l'intégrale itérée $\mathcal{W}a^{\alpha_1, \dots, \alpha_r} = \int_{0 < t_1 < \dots < t_r < 1} \omega_{\alpha_1} \dots \omega_{\alpha_r}$ est correctement définie lorsque $(\alpha_1; \dots; \alpha_r) \in \{0; 1\}^r$ vérifie $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_r = 0$. Cela permet de définir un moule symétral.

Les moules $\mathcal{Z}e^\bullet$ et $\mathcal{W}a^\bullet$ sont alors liés par la relation :

$$\forall r \in \mathbb{N}^* , \forall (s_1; \dots; s_r) \in (\mathbb{N}^*)^r , s_1 \geq 2 , \mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_r} = \mathcal{W}a^{1, 0^{[s_r-1]}, \dots, 1, 0^{[s_1-1]}} .$$

de la symétralité⁵ du moule $\mathcal{W}a^\bullet$ et de la symétrelité⁶ du moule $\mathcal{Z}e^\bullet$. Ces deux types de relations permettent d'écrire (de manières différentes) le produit de deux multizêtas sous la forme d'une \mathbb{Q} -combinaison linéaire de multizêtas. On conjecture qu'elles engendrent algébriquement toutes les autres relations liant les multizêtas entre eux (cf. [49] ou [54]). Cette conjecture, hors de portée aujourd'hui, permettrait notamment de montrer l'absence de relation entre multizêtas de poids différents, et donc la transcendance de chacun des $\zeta(s)$, $s \geq 2$.

Bien que pouvant donner l'impression d'être du domaine du folklore mathématique, l'étude des relations entre multizêtas est donc un problème important.

2.2 Les multitangentes.

Les multitangentes sont les fonctions définies, pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, par les sommes :

$$\mathcal{T}e^{s_1, \dots, s_r}(z) = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{(n_1 + z)^{s_1} \cdots (n_r + z)^{s_r}}.$$

Ici, $(s_1; \dots; s_r) \in \mathcal{S}^* = \{\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^* ; s_1 \geq 2 \text{ et } s_r \geq 2\}$.

Les multitangentes sont, en fait, une généralisation à plusieurs variables des séries d'Eisenstein (tout comme les multizêtas en sont une pour la fonction ζ de Riemann), définies par :

$$E_k(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n + z)^k}, \quad k \in \mathbb{N} - \{0; 1\}, \quad z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}.$$

Les multitangentes semblent être apparues en théorie de la résurgence pour la première fois dans un texte de J. Ecalle. A notre connaissance, elles n'avaient jusque là jamais été étudiées systématiquement pour elles-mêmes, alors qu'il s'agit d'un objet mathématique intéressant et tout à fait naturel.

Il nous a donc semblé utile de revenir sur cette étude, à la fois d'un point de vue analytique (pour appliquer les résultats obtenus au calcul des invariants), mais aussi avec un regard algébrique. Il y a deux raisons à cela :

⁵ Un moule M^\bullet , défini sur un alphabet Ω^* , est dit symétral lorsque :

$$\forall(\underline{\alpha}; \underline{\beta}) \in (\Omega^*)^2, \quad M^\alpha M^\beta = \sum_{\underline{\gamma} \in sh_a(\underline{\alpha}; \underline{\beta})} M^\gamma.$$

Ici, $sh_a(\underline{\alpha}; \underline{\beta})$ désigne le produit de battage des séquences $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$.

⁶ Un moule M^\bullet , défini sur un alphabet Ω^* possédant une structure de semi-groupe, est dit symétrel lorsque :

$$\forall(\underline{\alpha}; \underline{\beta}) \in (\Omega^*)^2, \quad M^\alpha M^\beta = \sum_{\underline{\gamma} \in sh_e(\underline{\alpha}; \underline{\beta})} M^\gamma.$$

Ici, $sh_e(\underline{\alpha}; \underline{\beta})$ désigne le produit de battage contractant des séquences $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$.

1. Ces fonctions apparaissent naturellement dans la première partie de ce travail. Nous avons besoin de leur développement en séries de Fourier pour calculer les invariants, mais aussi de les majorer, d'où une partie de l'étude analytique.
2. Ces fonctions sont intimement liées aux multizêtas, comme nous allons le voir. Il était donc naturel d'entreprendre, comme pour les multizêtas, une recherche systématique des relations liant les multitangentes entre elles.

2.3 Multizêtas et multitangentes colorés.

Classiquement, on associe aux multizêtas précédemment définis des "multizêtas colorés", définis pour toute bi-séquence $\left(\frac{\underline{\varepsilon}}{\underline{s}}\right) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)^*$ de longueur $r \in \mathbb{N}^*$, par ⁷ :

$$\mathcal{Z}e\left(\frac{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}{s_1, \dots, s_r}\right) = \sum_{1 < n_r < \dots < n_1} \frac{e_1^{n_1} \dots e_r^{n_r}}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}, \text{ avec } e_k = e^{2i\varepsilon_k \pi}, k \in \llbracket 1; r \rrbracket.$$

Cela sert à rigidifier la situation, tout en permettant aux structures de flexions de jouer pleinement leur rôle à travers l'algèbre de Lie ARI, et son groupe GARI (cf. [18], [19], [49] par exemple).

Nous ferons de même avec les multitangentes pour définir les multitangentes colorées. Pour toute bi-séquence $\left(\frac{\underline{\varepsilon}}{\underline{s}}\right) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)^*$ de longueur $r \in \mathbb{N}^*$, celles-ci sont définies par ⁸ :

$$\mathcal{T}e\left(\frac{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}{s_1, \dots, s_r}\right)(z) = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{e_1^{n_1} \dots e_r^{n_r}}{(n_1 + z)^{s_1} \dots (n_r + z)^{s_r}}.$$

On pose ici, comme toujours : $e_k = e^{2i\varepsilon_k \pi}$, $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$.

3 Autour du calcul des invariants holomorphes d'un germe de difféomorphisme de \mathbb{C} tangent à l'identité.

3.1 Etude d'une équation aux différences.

Dans tout ce paragraphe, fixons-nous un germe de fonction holomorphe $a \in \frac{1}{z^2} \mathbb{C} \left\{ \frac{1}{z} \right\}$ et étudions l'équation aux différences dont l'inconnue est la série formelle $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi}(z+1) - \tilde{\varphi}(z) = a(z). \tag{3}$$

La résolution de cette équation va produire des fonctions S-résurgentes, qui seront particulièrement simples. Qui plus est, la méthode mise en oeuvre dans cet exemple, convenablement itérée, nous sera à nouveau utile pour calculer les invariants holomorphes des difféomorphismes tangents à l'identité et établira un premier lien entre ce calcul et

⁷ Plus précisément, l'expression est valable lorsque $(\varepsilon_1; s_1) \neq (0; 1)$; dans le cas contraire, on régularise la série divergente par 0.

⁸ Plus précisément, l'expression est valable lorsque $(\varepsilon_1; s_1) \neq (0; 1)$ et $(\varepsilon_r; s_r) \neq (0; 1)$; dans le cas contraire, on régularise la série divergente en utilisant le théorème 4 énoncé page 32.

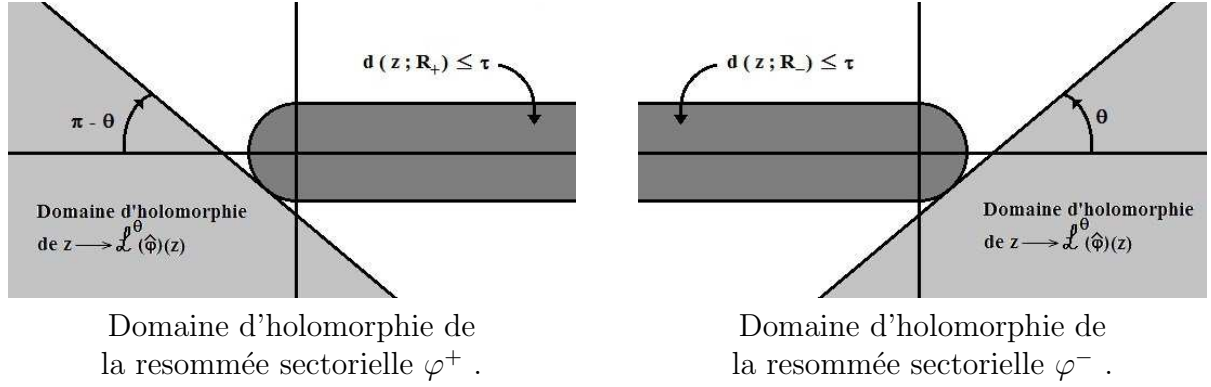


Figure 4 : Illustration des complémentaires de \mathcal{D}^- et \mathcal{D}^+ .

les multitangentes.

- Une solution de (3) vérifiera naturellement, en notant $\widehat{\varphi} = \mathcal{B}(\widetilde{\varphi})$:

1. $e^{-\zeta}\widehat{\varphi}(\zeta) - \widehat{\varphi}(\zeta) = \widehat{a}(\zeta)$, d'où $\widehat{\varphi}(\zeta) = \frac{\widehat{a}(\zeta)}{e^{-\zeta} - 1}$.

2. $\widehat{\varphi}$ définit une fonction méromorphe sur \mathbb{C} dont les pôles ne peuvent être situés qu'en $2i\pi\mathbb{Z}^*$, puisque \widehat{a} est une fonction entière s'annulant à l'origine et de type exponentiel dans toutes les directions.

Ainsi, l'équation (3) possède une unique solution dans $\frac{1}{z}\mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$: $\widetilde{\varphi} = \mathcal{B}^{-1}\left(\frac{\widehat{a}(\zeta)}{e^{-\zeta} - 1}\right)$.

Celle-ci est donc S-résurgente, et vérifie : $\Delta_\omega\widehat{\varphi} = -\widehat{a}(\omega) = (1 - e^{-\omega})\widehat{\varphi}(\omega)$, pour $\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*$. Ainsi, $\widehat{\varphi}$ "resurgit" en la singularité ω .

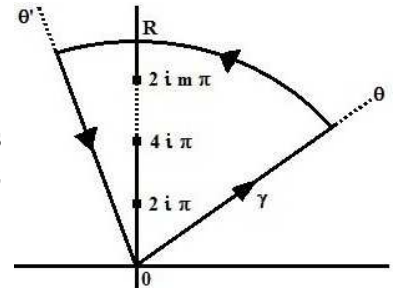
- De plus, $\widetilde{\varphi}$ est sommable au sens de Borel dans les directions $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$.

Le principe de resommation sectorielle donne donc deux fonctions analytiques, φ^+ et φ^- , solutions de (3) et définies par :

$$\varphi^+ = \mathcal{L}^\theta\left(\frac{\widehat{a}(\zeta)}{e^{-\zeta} - 1}\right), \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{et} \quad \varphi^- = \mathcal{L}^\theta\left(\frac{\widehat{a}(\zeta)}{e^{-\zeta} - 1}\right), \theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[.$$

En tenant compte des propriétés de la transformation de Laplace, et en notant $d(z; \Omega)$ la distance de $z \in \mathbb{C}$ à l'ensemble Ω , on obtient deux solutions de l'équation (3), toujours notées φ^+ et φ^- . Il existe alors une constante $\tau > 0$ telle que celles-ci soient analytiques sur les domaines \mathcal{D}^+ et \mathcal{D}^- (cf. figure 4) définis par $\mathcal{D}^+ = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} ; d(z; \mathbb{R}_-) \leq \tau\}$ et $\mathcal{D}^- = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} ; d(z; \mathbb{R}_+) \leq \tau\}$.

Mais, puisque $\mathcal{D}^+ \cap \mathcal{D}^-$ possède deux composantes connexes, à savoir $\{z \in \mathbb{C} ; \Im m z > \tau\}$ et $\{z \in \mathbb{C} ; \Im m z < -\tau\}$, nous pouvons calculer la différence $\varphi^+ - \varphi^-$ dans chacune de ces deux composantes connexes. Le théorème des résidus fournit alors, si γ est le chemin d'intégration ci-contre :



$$\int_{\gamma} \widehat{\varphi}(\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta = \sum_{k=1}^m 2i\pi \operatorname{Res} \left(z \mapsto \frac{\widehat{a}(\zeta) e^{-\omega z}}{e^{-\zeta} - 1} ; 2ik\pi \right) = - \sum_{k=1}^m 2i\pi \widehat{a}(2ik\pi) e^{-2ik\pi z} .$$

Par ailleurs, il n'est pas difficile de constater que l'intégrale sur l'arc de cercle converge vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$. La convergence de la série $\sum_k 2i\pi \widehat{a}(2ik\pi) e^{-2ik\pi z}$ est aussi acquise si $\Im m z < -\tau$. Ainsi, lorsque R tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \Im m z < -\tau, \varphi^+(z) - \varphi^-(z) = - \sum_{\omega \in 2i\pi\mathbb{N}^*} 2i\pi \widehat{a}(\omega) e^{-\omega z} .$$

En procédant de façon identique, mais avec un chemin d'intégration symétrique par rapport à l'axe des abscisses, on obtient :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \Im m z > \tau, \varphi^+(z) - \varphi^-(z) = - \sum_{\omega \in -2i\pi\mathbb{N}^*} 2i\pi \widehat{a}(\omega) e^{-\omega z} .$$

- Enfin, on peut remarquer que $\varphi^+(z) = - \sum_{k=0}^{+\infty} a(z+k)$ et $\varphi^-(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a(z-k)$.

Alors, si $a(z) = \frac{1}{z^p}$ pour $p \geq 2$, on retrouve une monotangente et son développement en série de Fourier :

$$\forall z \in \mathcal{D}^+ \cap \mathcal{D}^-, \mathcal{T}e^p(z) = \varphi^-(z) - \varphi^+(z) = \begin{cases} - \frac{(-2i\pi)^p}{(p-1)!} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{p-1} e^{2ik\pi z} & , \text{ si } \Im m z > \tau . \\ \frac{(2i\pi)^p}{(p-1)!} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{p-1} e^{-2ik\pi z} & , \text{ si } \Im m z < -\tau . \end{cases}$$

3.2 Notion d'itérateur direct et d'itérateur réciproque.

On sait que tout difféomorphisme local f de \mathbb{C} , ayant l'origine pour point fixe, est formellement conjugué à un difféomorphisme du type $f_{p,\rho} = \exp(X_{p,\rho}) \cdot \operatorname{Id}$. Après avoir effectué pour des raisons techniques le changement de variable $z = x^{-1}$ envoyant l'origine à l'infini, le champ de vecteurs $X_{p,\rho}$ devient (en notant toujours ∂_z la dérivée ordinaire par rapport à la variable z) :

$$X_{p,\rho} = \frac{1}{p} \frac{z^{-p}}{1 + \rho z^{-p}} z \partial_z .$$

On vérifie facilement que l'équation de conjugaison $f \circ u = u \circ f_{p,\rho}$, d'inconnue u , admet alors une unique solution formelle du type $u(z) = z + \varphi(z)$, où $\varphi \in \frac{1}{z} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$. Celle-ci s'appelle itérateur réciproque de f , elle est notée $*f$ et vérifie par construction :

$$f \circ *f = *f \circ f_{p,\rho} . \quad (4)$$

De même, appelons aussi itérateur direct de f , et notons f^* , l'inverse de $*f$. Il s'agit

donc de l'unique série formelle du type $v(z) = z + \psi(z)$, où $\psi \in \frac{1}{z}\mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$, vérifiant $v \circ f = f_{p,\rho} \circ v$.

Les itérateurs⁹ $*f$ et f^* tirent leur nom d'un fait simple. L'itérée d'ordre $w \in \mathbb{C}$, notée f^w , est l'unique série formelle solution de l'équation $f \circ f^w = f^w \circ f$ s'écrivant sous la forme $f^w(z) = z + w + u(z)$, où $u \in \frac{1}{z}\mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$. Celle-ci vérifie en fait : $f^w = *f \circ l^w \circ f^*$, où $l^w(z) = z + w$. Autrement dit, l'itérateur direct de f conjugue la translation l^w à l'itérée d'ordre w , ce qui justifie la terminologie.

Le cas-type correspond au cas où le champ de vecteur $X_{p,\rho}$ est le plus simple possible : c'est obtenu lorsque $(p; \rho) = (1; 0)$. Dans ce cas, $f_{p,\rho}$ devient alors : $f_{p,\rho}(z) = z + 1 = l(z)$. Son nom provient du fait qu'il est représentatif de ce qui se passe pour les autres classes de conjugaison formelle. Dorénavant, nous nous placerons dans ce cas.

L'équation (4) se réécrit alors sous la forme :

$$\tilde{\varphi}(z+1) - \tilde{\varphi}(z) = a(z + \tilde{\varphi}(z)), \text{ où } a(z) = f(z) - (z+1). \quad (5)$$

On est alors dans une situation similaire à celle de l'équation aux différences (3). En effet, en développant a , le second membre de (5) s'interprète comme une perturbation du second membre de (3). De même que précédemment, on peut appliquer le processus de sommation de Borel à φ . On montre l'itérateur direct et l'itérateur réciproque (qui sont génériquement des séries divergentes) sont des fonctions S-résurgentes dans le modèle formel. Le calcul différentiel étranger permet alors d'analyser leurs singularités.

3.3 L'équation du pont, porteuse des invariants analytiques.

Tout comme dans le cas de l'équation (3), on observe encore l'existence d'une relation simple entre la fonction S-résurgente $*f$ et ses dérivées étrangères. Il s'agit de l'"équation du pont", qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{dans le modèle formel :} \quad & \Delta_\omega *f(z) = \mathbb{A}_\omega *f(z), \text{ pour tout } \omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*. \\ \text{dans le modèle convolutif :} \quad & \Delta_\omega *\hat{f}(z) = \mathbb{A}_\omega \left(\delta - \zeta *\hat{f}(z) \right), \text{ pour tout } \omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*. \end{aligned}$$

Ici, pour tout $\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*$, \mathbb{A}_ω est un opérateur différentiel d'ordre 1, de la forme $\mathbb{A}_\omega = A_\omega \partial_z$ où $A_\omega \in \mathbb{C}$; δ désigne toujours un Dirac jouant le rôle d'unité abstraite de l'algèbre de convolution.

Une telle relation exprime qu'une fonction résurgente réapparaît, légèrement modifiée, en chacune des singularités de son prolongement analytique. C'est un phénomène très générique qui justifie, après coup, le terme "résurgent".

Cette équation crée un pont entre le calcul différentiel ordinaire et le calcul différentiel étranger, mais aussi entre l'aspect "phénomène de Stokes" (qui fait obstacle à une

⁹ Puisque les itérateurs sont des séries formelles dont on utilisera leur transformé de Borel, nous devrions à priori les noter $*\tilde{f}$ et \tilde{f}^* respectivement. Exceptionnellement, nous transgresserons la règle que l'on s'était imposée, à savoir indiquer le caractère formel par un tilde. Nous noterons donc l'itérateur direct et l'itérateur réciproque par : f^* et $*f$.

resommation globale et oblige à se contenter d’une resommation sectorielle, du fait de singularité(s) des transformées de Borel) et l’aspect “résurgence” (à travers les dérivations étrangères et l’analyse des singularités).

L’importante suite scalaire des $(A_\omega)_{\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*}$ est une suite d’invariants. Par invariance, on entend conjugaison du difféomorphisme local f par un autre difféomorphisme local¹⁰.

De plus, cette suite forme un système complet d’invariants. Cela signifie qu’elle permet d’énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que deux difféomorphismes soient analytiquement conjugués : deux difféomorphismes de \mathbb{C} tangents à l’identité, d’invariants $(A_\omega^1)_{\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*}$ et $(A_\omega^2)_{\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*}$ respectivement, sont analytiquement conjugués si et seulement s’il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*$, on ait : $A_\omega^2 = e^{-\omega c} A_\omega^1$.

Enfin, cette suite forme un système libre d’invariants : la suite $(A_\omega)_{\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*}$ cesse d’être un système complet dès qu’on lui retire un élément quelconque.

S’agissant de *fonctions*, les qualificatifs “holomorphe” et “analytique” sont presque synonymes. S’agissant d’*invariants*, on va leur donner une qualification bien distinctes :

1. Un invariant sera dit *analytique* (par opposition à *formel*) s’il est invariant relativement aux changements de cartes, ou conjugaison analytique (par opposition à la conjugaison formelle).
2. Un invariant sera dit *holomorphe* s’il est fonction holomorphe du difféomorphisme f , c’est-à-dire de l’infinité des coefficients de Taylor¹¹.

Par exemple, lorsque le multiplicateur $f'(0)$ vaut 1 ou une racine de l’unité (ce qui est presque la même chose), f possède des systèmes complet et libre d’invariants analytiques et holomorphes. C’est donc le cas des invariants $(A_\omega)_{\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*}$. L’analyticité est acquise par un simple calcul de dérivée étrangère (cf. [15] par exemple), tandis que le caractère holomorphe des invariants était déjà essentiellement connu de Fatou et Julia.

Au contraire, lorsque le multiplicateur est $e^{2i\pi\theta}$, avec θ liouvillien, f possède bien des invariants analytiques nombreux et non triviaux, mais aucun qui soit holomorphe.

Pour résumer la situation, la suite $(A_\omega)_{\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^*}$ est une suite d’invariants analytiques et holomorphes, générant un système complet et libre.

3.4 Des objets complexes, mais explicitement calculables.

Au regard de la propriété précédente, de nombreux dynamiciens posent régulièrement la question : «Peux-t-on calculer ces invariants ?» Ils ont idée que cela n’est pas possible, mais ils y attachent beaucoup d’importance et seraient très heureux d’être capables de les calculer. En effet, ces nombres codent complètement la dynamique du difféomorphisme. Pouvoir les calculer numériquement, avec autant de décimales que l’on veut, permettrait alors de faire avancer beaucoup plus vite certaines questions.

Malheureusement, ces invariants holomorphes ont la réputation infondée d’être pour certains incalculables, pour d’autres très difficiles à calculer. Une première explication tient aux différentes causes de divergence en dynamique holomorphe. Il y en a trois :

¹⁰ Dont la valuation est strictement plus grande que celle de f , pour être précis.

¹¹ A l’exclusion du premier coefficient non nul.

la présence de petits diviseurs liouvilliens, la présence de petits diviseurs mécaniques ou encore notre contexte. Dans les deux premières classes, la situation est sans espoir. Dans la troisième classe, la situation est toute autre : le calcul explicite est possible, mais coûteux (à l'exception des deux premiers invariants) . Une autre explication de cette réputation est liée aux méthodes géométriques que les dynamiciens utilisent, pourtant très performantes, mais assez mal adaptées dans ce contexte.

Bien entendu, même si dans notre cadre, ces nombres sont calculables, ils n'en sont pas moins très compliqués. Il ne peut en être autrement puisque les objets auxquels ils sont liés (les ensembles de Julia ou de Mandelbrot), ainsi que leurs ingrédients, les multizêtas, sont tous très complexes. Mais, par définition même, ils sont parfaitement calculables. La réalisation explicite de ce calcul est l'objet central de toute la première partie de ce travail.

4 Méthodologie.

4.1 Projet initial.

Le projet initial de cette thèse était le suivant :

1. Calculer les invariants holomorphes d'un difféomorphisme tangent à l'identité dans le cas-type.
2. Produire un algorithme de calcul effectif avec évaluation du coût de la n -ième décimale.
3. Etudier ce qui se passe lorsqu'on passe du cas-type aux autres cas, c'est-à-dire lorsqu'on passe de la classe $(p; \rho) = (1; 0)$ à la classe de conjugaison générale $(p; \rho)$.
4. Ebaucher une étude de l'asymptotique des invariants holomorphes, où les invariants seront perçus comme des fonctions autarques¹² des coefficients de Taylor du difféomorphisme de base.

Finalement, le projet initial n'a pas été suivi intégralement. En effet, on s'est rapidement rendu compte que les multitangentes possédaient des propriétés similaires à celles que vérifient les multizêtas. Il était alors intéressant d'étudier cette classe de

¹² Les fonctions autarques sont, grosso modo, des fonctions entières $\varphi(z)$

(i) présentant des comportements asymptotiques simples à l'infini sur leur divers secteurs fondamentaux S_i , e.g. $\varphi(z) \sim e^{\alpha_i z} \varphi_i(z)$, $\varphi_i(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$

(ii) avec des séries asymptotiques $\varphi_i(z)$ généralement divergentes mais résurgentes et resommables et dont les dérivées étrangères $\Delta_{\omega_j} \varphi_i$ engendrent, collectivement, une algèbre de résurgence *finie*.

Cette dernière propriété de *clôture* ou d'*autarcie* confère aux fonctions autarques comme un parfum algébrique. Bien que transcendantes, elles ne présentent aucun aspect chaotique et se prêtent à une formalisation sans faille. Leur prototype est la fonction $1/\Gamma(z)$. Inversement, le prototype des fonctions *non autarques* est la fonction zeta de Riemann, dont le comportement dans la bande critique semble défier toute tentative de formalisation.

Notons enfin que si l'on renonçait à imposer aux fonctions autarques d'être *entières*, en autorisant pôles, ramifications etc, la notion engloberait la plupart des *fonctions spéciales* usuelles. Etendue au cas de plusieurs variables, la notion couvre aussi toutes les constantes de Stokes des systèmes linéaires finis (envisagées comme fonctions des coefficients de Taylor) ainsi probablement que les invariants holomorphes $A_{\omega}(f)$ des difféomorphismes tangents à l'identité, même si, pour ces derniers, la chose reste à prouver.

fonctions pour deux raisons : pour leurs liens avec les multizêtas et pour leur apparition naturelle dans le calcul des invariants holomorphes.

Cela produit a donc abouti à deux parties indépendantes, une première qui ne couvre que la première moitié du projet initial et une seconde qui le dépasse.

4.2 Liens entre les deux parties.

Bien que la première partie soit plutôt de la dynamique holomorphe alors que la seconde plutôt de l'algèbre (voir de l'arithmétique), elles sont malgré tout intimement liées. Précisons cela :

Tout d'abord, les deux parties utilisent les mêmes outils : essentiellement le calcul moulien pour les notations et l'analyse résurgente pour la substance.

Ensuite, le calcul effectif des invariants holomorphes d'un difféomorphisme tangent à l'identité, fait intervenir des résultats analytiques importants sur les multitangentes : caractère exponentiellement plat à l'infini, majoration géométrique sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}$, emploi du développement en série de Fourier des fonctions 1-périodiques $\mathcal{T}e^{s_1, \dots, s_r}$. Précisément, le moule des multitangentes définit quasiment le moule intervenant dans l'importante contraction moule-comoule donnant l'expression des applications de corne. Cela fait des multitangentes l'ingrédient de base des invariants analytiques. Avec ce regard, la seconde partie de ce travail apparaît donc comme une longue annexe de la première partie.

D'un autre point de vue, l'arithmétique des multizêtas a livré plusieurs de ses secrets au début des années 2000, notamment dans certains travaux de Jean Ecalle. Ces avancées ont été réalisées grâce à des techniques issues de la théorie de la résurgence : l'algèbre de Lie ARI et son groupe associé GARI y avaient déjà été introduit, ainsi que les structures de flexions. En ce qui concerne le calcul effectif des invariants, ces derniers outils étaient inévitablement présents en trame de fond. Comme nous venons de le voir, l'étude des invariants a nécessité l'étude des multitangentes sous des aspects analytiques ; il était donc tout à fait naturel de faire une étude arithmétique des multitangentes, cette fois vues comme objets algébriques.

Enfin, les invariants se lisent, dans le plan de Borel, au dessus de $2i\pi\mathbb{Z}$, et peuvent être calculés par déformation de contour intégral, car ce sont essentiellement les singularités de l'itérateur réciproque du difféomorphisme de base. Cette idée induit des propriétés (fonctionnelles) sur les multizêtas. Par ailleurs, l'arithmétique des multizêtas se traduit simplement sur les multitangentes ; à l'inverse, de manière nouvelle mais ne permettant d'apprendre rien de nouveau sur les multizêtas, l'arithmétique des multitangentes entraîne, elle aussi, une partie de l'arithmétique des multizêtas. Dès que l'on s'est rendu compte de ce dernier point, il était évident qu'il fallait explorer cette approche systématiquement afin d'élucider si les relations quadratiques entre multizêtas étaient retrouvées par l'étude des relations entre multitangentes.

C'est donc à travers l'origine historique de certains outils utilisés et de leur utilisation en arithmétique, mais aussi par l'application des résultats d'une partie dans l'autre, ou encore par des motivations, des outils et méthodes communes, que les deux parties de ce travail trouvent leur unité.

4.3 Démarche.

Les résultats obtenus dans les deux parties utilisent, de près ou de loin, le calcul moulien. Il s'agit d'un outil de calcul développé par Jean Ecalle au début des années 1980, pour les besoins de sa théorie de la résurgence. Un moule est "une fonction à un nombre variable de variables", ou si l'on préfère une fonction définie sur un monoïde. Le calcul moulien consiste en un système de notations commodes, muni d'un catalogue d'opérations/phénomènes de stabilité de propriétés que l'on pourrait qualifier de "mode d'emploi des moules".

Le prototype des résultats démontrés à l'aide de cet outil est ce que l'on appelle une "contraction moule-comoule" ou encore un "développement moulien" : il s'agit d'écrire une certaine quantité F sous la forme d'une somme sur tous les éléments d'un monoïde libre :

$$F = \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{\underline{\omega}=(\omega_1;\dots;\omega_r)\in\Omega^r} M^{\omega_1,\dots,\omega_r} \Gamma_{\omega_1,\dots,\omega_r} .$$

Dans cette somme, notée plus simplement $F = \sum_{\underline{\omega}\in\Omega^*} M^{\underline{\omega}} \Gamma_{\underline{\omega}}$ ou même $F = \sum_{\bullet} M^{\bullet} \Gamma_{\bullet}$,

M^{\bullet} et Γ_{\bullet} désignent des fonctions définies sur un même monoïde libre Ω^* . Celles-ci seront à valeurs dans une \mathbb{C} -algèbre commutative \mathbb{A} et une \mathbb{A} -algèbre, potentiellement non commutative. Cette dernière sera souvent $\mathcal{L}(\mathbb{A})$.

Le calcul moulien est un outil extrêmement commode. Nous pouvons voir à cela au moins trois raisons. Tout d'abord, il permet de poursuivre les calculs là où c'est impossible avec les notations habituelles. Ensuite, il permet aussi d'obtenir des expressions explicites, sous forme de développements mouliens. Celles-ci sont souvent inattendues et d'écriture resserrée. Enfin, le calcul moulien permet de travailler dans des contextes hautement non-commutatifs de manière tout à fait similaire à un contexte commutatif.

En plus d'obtenir des expressions condensées, souvent difficiles voire impossibles à obtenir autrement, le calcul moulien permet aussi de mieux comprendre la structure interne des objets étudiés : il permet d'identifier naturellement leurs briques élémentaires, les apparie les unes aux autres et isole les difficultés (les causes de divergence, par exemple).

5 Les résultats obtenus.

5.1 Résultats obtenus autour du calcul des invariants holomorphes d'un difféomorphisme local de \mathbb{C} fixant l'origine.

De même que dans le cas de l'équation (3), l'itérateurs direct et l'itérateur réciproque sont Borel-sommables et à chacun d'eux correspondent une vraie fonction. Cela permet de contruire les applications de corne π^+ et π^- , définies pour $z \in \{\zeta \in \mathbb{C}; |\Im m \zeta| > C\}$, où $C \in \mathbb{R}^+$. Celles-ci sont 1-périodiques et leurs coefficients de Fourier sont très simplement liés aux invariants holomorphes.

Notre travail a consisté, non seulement à calculer, dans le cas particulier du cas-type, les invariants holomorphes grâce au lien évoqué avec les applications de corne, mais aussi

à donner un algorithme de calcul numérique effectif du n -ième invariant à la précision voulue, ou encore à étudier la dépendance des invariants par rapport aux coefficients de Taylor du difféomorphisme f . L'approche utilisée ici repose évidemment sur l'outil moulien qui a permis d'obtenir un développement moulien des applications de corne et donc d'en déduire l'expression explicite des invariants à travers le théorème suivant :

Théorème 1 : Soit f un difféomorphisme tangent à l'identité, s'exprimant à l'infini sous la forme

$$f(z) = z + 1 + \sum_{n \geq 3} \frac{a_n}{z^{n-1}} .$$

Donnons nous $(C_0; C_1) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que : $\forall n \geq 3$, $|a_n| \leq C_0 C_1^n$.
Notons aussi : $\mathbb{N}_3 = \{n \in \mathbb{N}; n \geq 3\}$.

\mathbf{A}_\bullet défini sur $\text{seq}(\mathbb{N}_3)$ par :

$$\forall \underline{s} = (s_1; \dots; s_r) \in \mathcal{N}^*, \mathbf{A}_{\underline{s}} = a_{s_1} \cdots a_{s_r} .$$

\mathbf{A}_\bullet défini sur $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ par :

$$\forall \underline{\mathbf{S}} = (\underline{s}^1; \dots; \underline{s}^r) \in \Omega^*, \mathbf{A}_{\underline{\mathbf{S}}} = \mathbf{A}_{s_1^1} \cdots \mathbf{A}_{s_r^r} .$$

Alors :

1. Il existe un moule τ^\bullet , complètement explicite, défini sur $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, à valeurs dans l'algèbre $\mathcal{MTGF} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}^*}$ tel que :

$$\pi^+ = \sum_{\underline{\mathbf{S}} \in \Omega^*} \tau^{\underline{\mathbf{S}}} \mathbf{A}_{\underline{\mathbf{S}}} .$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, il existe un moule $\hat{\tau}_n^\bullet$, explicite, défini sur $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ à valeurs dans l'algèbre $\mathcal{MZV} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}(2i\pi)}(\mathcal{Z}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}_+^*}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, A_n = \sum_{\underline{\mathbf{S}} \in \Omega^* - \{\emptyset\}} \hat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}} \mathbf{A}_{\underline{\mathbf{S}}} .$$

Rappelons que $\mathcal{S}^* = \{\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*; s_1 \geq 2 \text{ et } s_r \geq 2\}$ et $\mathcal{S}_+^* = \{\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*; s_1 \geq 2\}$.

Cette expression des invariants holomorphes est à l'origine d'un algorithme de calcul numérique des invariants holomorphes d'un difféomorphisme tangent à l'identité. Celui-ci constitue notre principal résultat.

5.2 Résultats obtenus autour de l'étude analytique et algébrique des multitangentes.

La première des propriétés prouvées concernant les multitangentes est élémentaire, mais essentielle. Il s'agit de vérifier que $\mathcal{MTGF} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}^*}$ est bien une algèbre et de donner les relations les plus naturelles liant entre elles les multitangentes :

Propriété 1 : 1. La fonction $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ est correctement définie pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$ et est holomorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$; elle converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ et vérifie, pour tout $(s_1; \dots; s_r) \in \mathcal{S}^*$ et tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$:

$$\frac{\partial \mathcal{T}e^{s_1, \dots, s_r}}{\partial z}(z) = - \sum_{i=1}^{l(\underline{s})} s_i \mathcal{T}e^{s_1, \dots, s_{i-1}, s_i+1, s_{i+1}, \dots, s_{l(\underline{s})}}(z) .$$

2. $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \forall \underline{s} \in \mathcal{S}^*, \mathcal{T}e^{\underline{s}}(-z) = (-1)^{l(\underline{s})} \mathcal{T}e^{\overleftarrow{\underline{s}}}(z) .$
3. Pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \mathcal{T}e^\bullet(z)$ est un moule symétriel, ie :
 $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \forall (\underline{\alpha}; \underline{\beta}) \in (\mathcal{S}^*)^2, \mathcal{T}e^\alpha(z) \mathcal{T}e^\beta(z) = \sum_{\gamma \in she(\underline{\alpha}, \underline{\beta})} \mathcal{T}e^\gamma(z) .$

L'autre type de relation entre multitangentes est la relation de réduction. Elle permet d'écrire toute multitangente comme \mathbb{Q} -combinaison linéaire de produits de multizêtas et de monotangentes (i.e. de multitangentes de longueurs 1) :

Théorème 2 : Pour toute séquence $\underline{s} = (s_1; \dots; s_r) \in (\mathbb{N}^*)^*$, il existe une famille $(r_k^{\underline{s}})_{k \in [0; M]} \in \left(\text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}e^{\underline{\alpha}})_{\underline{\alpha} \in \mathcal{S}_+^*} \right)^{M+1}$ explicite, avec $M = \max_{i \in [1; r]} s_i$, telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) = r_0^{\underline{s}} + \sum_{k=1}^{\max(s_1; \dots; s_r)} r_k^{\underline{s}} \mathcal{T}e^k(z) .$$

De plus : si $\underline{s} \neq 1^{[r]}, r \in \mathbb{N}^*$, alors $r_0^{\underline{s}} = r_1^{\underline{s}} = 0$.
Dans le cas où $\underline{s} = 1^{[r]}, r \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{cases} r_1^{\underline{s}} = 0 & \text{si } r \in 2\mathbb{N} . \\ r_0^{\underline{s}} = 0 & \text{si } r \notin 2\mathbb{N} . \end{cases}$$

Par ailleurs, une renormalisation des multitangentes colorées a été effectuée lorsqu'elles sont divergentes, i.e. pour des bi-séquences $\left(\begin{smallmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{s} \end{smallmatrix} \right) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)^*$ telles que $(\varepsilon_1; s_1) = (0; 1)$ ou $(\varepsilon_r; s_r) = (0; 1)$. Cette renormalisation utilise les notations liées aux structures de flexions ainsi que la "factorisation moulienne" de la fonction génératrice $\mathcal{Z}ig^\bullet$ du moule $\mathcal{Z}e^\bullet$.

Théorème 3 : Notons $\mathcal{Q}ig^\bullet(z)$ et δ^\bullet , les bimoules à valeurs dans $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbb{Z})$ et \mathbb{C} respectivement définis par :

$$\mathcal{Q}ig \left(\begin{smallmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{smallmatrix} \right) (z) = \begin{cases} -\mathcal{T}e \binom{u_1}{1}(v_1 - z), & \text{si } r = 1 . \\ 0, & \text{si } r \neq 1 . \end{cases}$$

$$\delta\left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } r = 0 \text{ ou est impair.} \\ \frac{(i\pi)^r}{r!} & , \text{ si } r \text{ est pair non nul.} \end{cases}$$

Considérons aussi les séries génératrices $\mathcal{Z}ig^\bullet$ et $\mathcal{T}ig^\bullet$ des bimoules colorés $\mathcal{Z}e^\bullet$ et $\mathcal{T}e^\bullet$. On a alors l'égalité moulienne :

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \mathcal{T}ig^\bullet(z) = \mathcal{R}ig^\bullet + \mathcal{Z}ig^{\bullet|} \times \mathcal{Q}ig^{|\bullet|}(z) \times \mathcal{Z}ig_{-}^{\bullet}.$$

Nous avons montré plusieurs propriétés analytiques de ces fonctions :

1. Majoration du type $|\mathcal{T}e^{\mathfrak{s}}(z)| \leq |f(z)|^{\|\mathfrak{s}\|}$ sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$, où f tend vers 0 à l'infini.
2. Caractère exponentiellement plat à l'infini.
3. Calcul des coefficients de Fourier des multitangentes.

D'un point de vue algébrique, nous disposons :

1. D'un calcul de $\mathcal{T}e^{n^{[p]}}$ explicite pour tout $(n; p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
2. Du calcul de quelques autres multitangentes.
3. De propriétés arithmétiques simples comme la transcendance des multitangentes non nulles, l'indépendance linéaire des monotangentes.
4. De méthodes pour traduire toute relation entre multizêtas en des relations entre multitangentes.

Quant à la question de savoir si les relations quadratiques entre multizêtas peuvent être retrouvées par l'étude des relations entre multitangentes, la réponse est négative. Nous avons le résultat suivant, montrant que la réponse négative à cette question provient des nombreuses relations de symétralité manquantes.

Propriété 2 : L'absence de composante $\mathcal{T}e^1$ dans la réduction en monotangentes et le diagramme commutatif suivant entraînent la symétrélité du moule $\mathcal{Z}e^\bullet$ ainsi que des traces de son codage symétral.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}TGF \times \mathcal{M}TGF & \xrightarrow{\text{multiplication}} & \mathcal{M}TGF \\ \text{réduction} \otimes \text{réduction} \downarrow & \text{symétr} \underline{é} \text{le} & \downarrow \text{réduction} \\ \mathcal{M}TGF \times \mathcal{M}TGF & & \mathcal{M}TGF \\ \text{multiplication} \downarrow & & \downarrow \text{réduction} \\ \mathcal{M}TGF & \xrightarrow{\text{réduction}} & \mathcal{M}TGF \\ \text{symétr} \underline{é} \text{le} & & \end{array}$$

Enfin, des conjectures concernant une caractérisation des multitangentes convergentes nulles, l'expression des multitangentes comme \mathbb{Q} -combinaison linéaire de multitangentes sans 1, ou encore une autre majoration analytique des multitangentes convergentes ont été énoncées.

Partie I

Algorithmes de calculs des invariants holomorphes.

1 Introduction.

Considérons $\mathbb{T} = \{f \in \mathbb{C}\{x\} ; f(x) = \lambda x + \mathcal{O}(x^2) \text{ où } \lambda \in \mathbb{C}^*\}$. C'est le groupe (pour la composition) des transformations analytiques localement inversibles admettant 0 comme point fixe. L'une des questions classiques de dynamique complexe est la description des classes de conjugaison de \mathbb{T} .

Trois cas se présentent alors, en fonction du multiplicateur $\lambda = f'(0)$:

1. **Cas trivial.** Lorsque $|\lambda| \notin \{0; 1\}$ (cas hyperbolique), il est bien connu depuis Kœnigs que $f \in \mathbb{G}$ est holomorphiquement conjugué à $x \mapsto \lambda x$ (cf. [38], p. 77)
2. Il s'agit du cas où $|\lambda| = 1$ et $\lambda = e^{2i\pi\theta}$ n'est pas une racine de l'unité i.e. $\theta \notin \mathbb{Q}$ (cas elliptique). C'est dans ce cas que la notion de petits diviseurs entre en jeu.

Petits diviseurs : conditions suffisantes. Siegel a montré que $f \in \mathbb{T}$ est holomorphiquement conjugué à sa partie linéaire si θ n'est pas liouvillien, c'est-à-dire lorsque θ n'approche pas très vite les rationnels (cf. [47].) : ceci est dû à la présence de petits diviseurs.

Pour les champs de vecteurs, Brunyo a donné une condition diophantienne de linéarisation suffisante, plus précise que celle de Siegel et valable en toutes dimensions. Peu de temps après, Rüssman a étendu cette condition suffisante aux difféomorphismes.

Petites diviseurs : conditions nécessaires. Yoccoz a ensuite démontré que la condition de Brunyo était suffisante pour la linéarisation des difféomorphismes en dimension 1 (cf. [51]) Lui-même et Perez-Marco, peu après, ont montré qu'elle était aussi suffisante pour les champs de vecteurs en dimension 2 (cf. [52]).

3. Lorsque $\lambda = e^{2i\pi\frac{p}{q}}$ est une racine de l'unité (cas parabolique), i.e. λ est résonnant, f n'est pas conjugué à sa partie linéaire $z \mapsto \lambda z$ (à moins que f ne soit d'ordre fini, i.e. $f^q = id$).

Le troisième cas est de nature différente. On se propose alors de rappeler ici la classification dans le cas parabolique. Cela permettra de donner une définition précise de la notion d'invariants analytiques d'un difféomorphisme. L'approche sera résurgente ; les références sont [15] (Vol. 2), [21], [33], et [44].

Ces rappels seront aussi l'occasion de fixer les notations nécessaires aux sections suivantes.

1.1 Germe de difféomorphisme tangent à l'identité.

Pour simplifier, on ne s'intéressera dans la suite qu'au cas où $\lambda = 1$. Il s'agit de la classe des germes f de $\mathbb{C}\{x\}$ tangents à l'identité. On la restreindra, sans perte de généralité, en supposant que $f''(0) = 2$.

En effet, un calcul simple montre que la propriété $f''(0) \neq 0$ est invariante par conjugaison. Quitte à conjuguer $f(x) = x + ux^2 + a(x)$, avec $u \in \mathbb{C}^*$ et $a \in x^3\mathbb{C}\{x\}$, par $\varphi(x) = ux$, on peut donc bien supposer que $f''(0) = 2$.

Cela nous conduit à la définition suivante :

Définition : On appelle **germe de difféomorphisme tangent à l'identité à l'origine** tout germe $f \in \mathbb{C}\{x\}$ de la forme $f(x) = x + x^2 + \mathcal{O}(x^3)$.

On appelle **germe de difféomorphisme tangent à l'identité à l'infini** toute application $f : z \mapsto f(z)$ conjuguée à un germe de difféomorphisme tangent à l'identité à l'origine par $z \mapsto -\frac{1}{z}$.

Pour faire plus court, nous abrégons souvent ces noms en “difféomorphisme tangent à l'identité”. La variable x sera réservée à un travail au voisinage de 0 tandis que la variable z sera réservée au voisinage de l'infini.

Remarquons alors qu'un difféomorphisme tangent à l'identité s'écrira à l'infini sous la forme $f(z) = z + 1 + a(z)$, avec $a \in \frac{1}{z}\mathbb{C}\left\{\frac{1}{z}\right\}$. Notons \mathbb{G} l'ensemble de ces germes :

$$\mathbb{G} = \left\{ z \mapsto z + 1 + a(z) ; a(z) \in \frac{1}{z}\mathbb{C}\left\{\frac{1}{z}\right\} \right\}.$$

Il est alors clair que \mathbb{G} est un groupe pour la composition.

Les six incarnations de ce groupe se présentant fréquemment sont, pour $f \in \mathbb{G}$:

Type de représentation	Difféomorphisme	Difféomorphisme réciproque
A l'origine	$f : x \mapsto x \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \right) .$	$f^{-1} : x \mapsto x \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n \right) .$
A l'infini	$f : z \mapsto z + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n} .$	$f^{-1} : z \mapsto z - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{z^n} .$
Exponentielle	$f : t \mapsto t + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{nt} .$	$f^{-1} : t \mapsto t + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{nt} .$

En pratique, toutes ces représentations sont aussi importantes les unes que les autres. Néanmoins, c'est la représentation à l'infini que l'on sera amené à privilégier le plus souvent, car, dans le cas le plus simple (que nous appellerons dans un instant le cas-type) f et f^{-1} seront conjugués à $l : z \mapsto z + 1$ et $l^{-1} \mapsto z - 1$ respectivement.

1.2 Classe de conjugaison formelle.

Rappelons que nous nous intéressons au problème de la classification par conjugaison analytique des difféomorphismes tangents à l'identité : étant donné $(f; g) \in \mathbb{G}^2$, à quelles conditions existe-t-il $\varphi \in \mathbb{C}\left\{\frac{1}{z}\right\}$ tel que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = g$?

Commençons par traiter le problème plus simple de la conjugaison formelle : étant donné $(f; g) \in \mathbb{G}^2$, à quelles conditions existe-t-il $\varphi \in \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$ tel que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = g$?

Pour répondre à cette question, il sera commode de considérer la représentation à l'origine :

Propriété : Soit $(f; g) \in \mathbb{G}^2$.

$$\text{Ecrivons } \begin{cases} f(x) = x + x^2 + x^3 a(x) , \text{ où } a \in \mathbb{C}[[x]] . \\ g(x) = x + x^2 + x^3 b(x) , \text{ où } b \in \mathbb{C}[[x]] . \end{cases}$$

$$\text{Alors : } \exists \varphi \in \mathbb{C}[[x]] , \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = g \text{ dans } \mathbb{C}[[x]] \iff a(0) = b(0) .$$

Remarquons que, dans cet énoncé, nous utilisons un abus de notation : on note de la même manière l'ensemble des difféomorphismes tangents à l'identité à l'origine et l'ensemble des difféomorphismes tangents à l'identité à l'infini.

Démonstration : Ecrivons f et g sous forme développée : soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n x^n$.

Fixons aussi $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n x^n = x + \sum_{n=2}^{+\infty} \varphi_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$. φ est alors inversible pour la composition, de sorte que l'égalité $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = g$ dans $\mathbb{C}[[x]]$ est équivalente à :

$$\forall n \geq 3 , \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k \geq 1 \\ p_1 + \dots + p_k = n}} \varphi_k f_{p_1} \cdots f_{p_k} = \sum_{k=2}^n \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k \geq 1 \\ p_1 + \dots + p_k = n}} g_k \varphi_{p_1} \cdots \varphi_{p_k} . \quad (6)$$

On peut alors montrer par récurrence que l'égalité donnée par la condition (6) entraîne :

$$\forall p \in \mathbb{N} , p \geq 2 , (p-2)\varphi_p \in \mathbb{C}[\varphi_2] .$$

Ainsi, pour toute valeur de φ_2 , les égalités données par la condition (6) (lorsque $n \geq 4$) détermine une unique famille $(\varphi_p)_{p \geq 2}$ et donc une unique série formelle φ . Par conséquent, (6) est équivalente à l'égalité obtenue par la condition (6) lorsque $n = 3$, c'est-à-dire à $f_3 = g_3$. □

Cette propriété permet d'énoncer qu'un difféomorphisme tangent à l'identité possède un seul invariant formel. Il est simple de voir que si le difféomorphisme s'écrit à l'origine sous la forme $f(x) = x + x^2 + ax^3 + o(x^3)$, alors à l'infini, $f(z) = z + 1 + \frac{1-a}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$. Le coefficient $1-a$ s'appelle le **résidu itératif** du difféomorphisme tangent à l'identité. C'est l'unique invariant formel. La classification formelle se réécrit alors à l'infini : deux difféomorphismes tangents à l'identité sont formellement conjugués si et seulement s'ils ont même résidu itératif.

Ainsi, la classe de conjugaison la plus simple est celle où le résidu itératif est nul : tout difféomorphisme du type $f(z) = z + 1 + a(z)$, avec $a(z) \in \frac{1}{z^2} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$, est formellement conjugué à la translation $l : z \mapsto z + 1$. On dira qu'on est dans le **cas-type** lorsqu'on est dans cette situation. Bien qu'étant la classe la plus simple, celle-ci résume parfaitement ce qui se passe dans le cas des autres classes de conjugaison (éventuellement à quelques difficultés techniques près) .

On travaillera désormais uniquement dans le cas-type.

1.3 Résurgence des itérateurs direct et réciproque.

Soit f un difféomorphisme tangent à l'identité dont le résidu itératif est nul, défini par : $f(z) = z + 1 + a(z)$, avec $a(z) \in \frac{1}{z^2}\mathbb{C}\left\{\frac{1}{z}\right\}$.

Le difféomorphisme f est alors formellement conjugué à l . Plus précisément, il existe deux séries formelles uniques $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in \frac{1}{z}\mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$ définissant les itérateurs direct et réciproque par :
$$\begin{cases} {}^*f(z) &= z + \tilde{\varphi}(z) . \\ f^*(z) &= z + \tilde{\psi}(z) . \end{cases}$$

Le théorème suivant (cf. [15], Vol. 2, p. 321-322) indique qu'il est alors possible d'appliquer le processus de sommation de Borel aux séries formelles $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ et que ces dernières sont des fonctions résurgentes.

Théorème : Soit f un difféomorphisme tangent à l'identité dont le résidu itératif est nul, défini par : $f(z) = z + 1 + a(z)$, où $a(z) \in \frac{1}{z^2}\mathbb{C}\left\{\frac{1}{z}\right\}$.

Alors,

1. Les itérateurs direct et réciproque définissent des fonctions résurgentes dans le modèle formel.
2. Pour chaque direction $\theta \in]0; \pi[\cup]\pi; 2\pi[$, il existe une infinité de germes à l'infini notés φ vérifiant
$$\begin{cases} \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi &= l . \\ \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} &= l . \end{cases}$$
3. Pour $\theta = 0$ (resp $\theta = \pi$), il existe un unique germe à l'infini, noté φ_+ (resp. φ_-) vérifiant
$$\begin{cases} \varphi_+^{-1} \circ f \circ \varphi_+ &= l \\ \varphi_- \circ f \circ \varphi_-^{-1} &= l \end{cases}$$
 et ayant pour développement asymptotique à l'infini $\tilde{\varphi}$ (resp. $\tilde{\psi}$).

Le troisième cas définit les itérateurs sectoriels, que l'on note plus classiquement \mathbf{f}_+^* , \mathbf{f}_-^* , ${}^*\mathbf{f}_+$ et ${}^*\mathbf{f}_-$. Leurs représentant formels f^* et *f sont résurgents, et vérifient les équations du pont (cf. §3.3) :

$$\begin{cases} \forall \omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^* , \Delta_\omega f^* = -A_\omega e^{-\omega(f^*-id)} . \\ \forall \omega \in 2i\pi\mathbb{Z}^* , \Delta_\omega {}^*f = A_\omega \partial_z . \end{cases}$$

1.4 Applications de corne.

On définit les applications de corne π^+ et π^- par :
$$\begin{cases} \pi^+ = \mathbf{f}_+^* \circ {}^*\mathbf{f}_- . \\ \pi^- = \mathbf{f}_-^* \circ {}^*\mathbf{f}_+ . \end{cases}$$

Celles-ci sont toutes deux définies sur tout \mathbb{C} privé d'une bande contenant l'axe des abscisses (cf. §4.4.1). Il est aisé de voir que $\pi^+ - id$ est une fonction 1-périodique dont les coefficients de Fourier sont les invariants holomorphes de f .

Précisément, il ne s'agit pas des invariants holomorphes $A_\omega(f)$, mais de $A_\omega^+(f)$. Ces derniers sont définis par l'équation du pont $\Delta_\omega^+ f^* = -A_\omega^+ e^{-\omega(f^*-id)}$ où Δ_ω^+ est

la dérivée étrangère définie comme Δ_ω , mais en utilisant un seul chemin : celui qui contourne les singularités par la droite.

Cette nuance technique n'est pas de grande importance puisque l'on sait que les $A_\omega(f)$ s'expriment polynomialement en fonction des $A_\omega^+(f)$. Dans un soucis d'alléger les écriture, on écrira dorénavant A_ω pour désigner $A_\omega^+(f)$.

1.5 Notations.

Désormais, et ce jusqu'à la fin de la première partie de ce travail, on considère un difféomorphisme f tangent à l'identité dont le résidu itératif est nul. Exprimons le à l'infini sous la forme :

$$f(z) = z + 1 + \gamma^+(z) , \text{ où } \gamma^+(z) = \sum_{n \geq 3} \frac{a_n}{z^{n-1}} .$$

On suppose que la série définissant γ^+ est convergente au voisinage de $+\infty$, ce qui s'exprime par :

$$\exists (C_0; C_1) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 , |a_n| \leq C_0 C_1^n .$$

Notons aussi $g(z) = f(z) - 1 = z + \gamma^+(z)$, de sorte que : $f = l \circ g$.

2 Des développements mouliens.

L'objectif de cette section est d'établir une propriété ancienne (cf. le second volume de [15], p. 422 et p. 427-428). Nous en redonnons tout de même la preuve, puisqu'elle est centrale dans la suite de ce travail. Il s'agit d'établir une première expression des applications de corne π^+ et π^- , à savoir les formules suivantes :

$$\pi^+(z) = \sum_{\bullet} U \bullet \Gamma_{\bullet}^+ \cdot z = z + \sum_{r \geq 1} \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \Gamma_{n_1, \dots, n_r}^+ \cdot z \quad .$$

$$\pi^-(z) = \sum_{\bullet} V \bullet \Gamma_{\bullet}^- \cdot z = z + \sum_{r \geq 1} \sum_{-\infty < n_1 < \dots < n_r < +\infty} \Gamma_{n_1, \dots, n_r}^- \cdot z \quad .$$

Les notations nécessaires à ces formules seront expliquées au fur et à mesure.

2.1 Des opérateurs de substitution.

Lorsqu'on étudie un groupe, il est naturel de le faire par le biais de l'étude de ses endomorphismes. L'idée d'étudier un objet en étudiant des applications qui lui sont attachées peut aussi être valable pour étudier un élément particulier. On peut notamment considérer l'endomorphisme $\varphi_{g_0} : g \mapsto gg_0$.

Puisque $G = z + \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] = \left\{ z + \varphi ; \varphi \in \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] \right\}$ est un groupe pour la composition, l'étude de $u \in G$ nous amène à considérer l'endomorphisme U de G défini pour $g \in G$ par $U(g) = g \circ u$.

Pour des raisons techniques, nous préférons oublier la partie linéaire pour ne garder que la série formelle à l'infini. Cela permet de considérer les opérateurs de substitution :

Définition : On dit que $U \in \text{End}_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]\right)$ est un **opérateur de substitution** associé à la série formelle $u \in z + \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$ lorsque U vérifie :

$$\forall \varphi \in \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right], U \cdot \varphi = \varphi \circ u.$$

Remarquons que si $u \in z + \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$, la composition $\varphi \circ u$ ci-dessus est correctement définie dans l'algèbre des séries formelles grâce à la formule de Taylor : elle s'interprète comme étant $\varphi(z) + \frac{(u(z) - z)^1}{1!} \varphi'(z) + \dots + \frac{(u(z) - z)^k}{k!} \varphi^{(k)}(z) + \dots$ puisque la famille $\left(\frac{(u(z) - z)^k}{k!} \varphi^{(k)}(z)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est formellement sommable.

Les germes de difféomorphismes étant notés par des lettres minuscules, on notera avec une lettre majuscule l'opérateur de substitution associé. Cela permet de noter les opérateurs de substitution associés à f, g, l, f^* et $*f$ de la manière suivante :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] & \longrightarrow & \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array}, \quad G : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] & \longrightarrow & \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ g \end{array}, \quad L : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] & \longrightarrow & \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ l \end{array}$$

$$F^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] & \longrightarrow & \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f^* \end{array}, \quad *F : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] & \longrightarrow & \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ *f \end{array}.$$

On notera aussi Id l'opérateur de substitution associé à la fonction identité définie par :

$$\forall \varphi \in \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right], \text{Id} \cdot \varphi = \varphi.$$

2.2 Deux opérateurs linéaires agissant sur les opérateurs de substitution.

Pour obtenir au calcul qui va suivre une expression de F^* , on aura besoin de considérer temporairement deux opérateurs agissant sur les opérateurs de substitution. Il s'agit de \mathcal{L} et \mathcal{G} définis sur $\mathcal{L}\left(\mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]\right)$ par :

$$\mathcal{L}: \begin{array}{ccc} \mathcal{L} \left(\mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right] \right) & \longrightarrow & \mathcal{L} \left(\mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right] \right) \\ \text{A} & \longmapsto & \text{L} \circ \text{A} \circ \text{L}^{-1} \end{array} , \quad \mathcal{G}: \begin{array}{ccc} \mathcal{L} \left(\mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right] \right) & \longrightarrow & \mathcal{L} \left(\mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right] \right) \\ \text{A} & \longmapsto & (\text{G} - \text{Id}) \circ \text{A} \end{array} .$$

Remarquons que \mathcal{L} est de valuation 0, tandis que \mathcal{G} est de valuation 3, car $\text{Val}(\gamma^+) = 2$.

Enfin, il sera commode de considérer l'identité de $\mathcal{L} \left(\mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right] \right)$, notée $\mathcal{I}d$.

2.3 Remarques sur les notations.

Jusqu'ici, on a parlé de trois sortes d'objets :

1. Les fonctions test, qui sont des séries formelles à l'infini.
2. Les opérateurs de substitution, qui sont des endomorphismes formellement continus sur l'algèbre des séries formelles.
3. Les opérateurs sur les opérateurs, qui sont des endomorphismes formellement continus de $\mathcal{L} \left(\mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right] \right)$.

Pour distinguer simplement la nature de ces objets, on ne notera pas de la même manière un même type d'opération selon le niveau sur lequel il agit. Tout d'abord, on note avec une majuscule caligraphiée les opérateurs sur les opérateurs, tandis que l'on note avec une simple majuscule les opérateurs de substitution et avec une minuscule (romaine ou grecque) les fonctions tests. La composition sera aussi notée \circ ou \bullet suivant qu'il s'agit de la composition des opérateurs de substitution ou de la composition des opérateurs sur les opérateurs. On note tout de même la composition des fonctions tests de manière traditionnelle, i.e. \circ car le contexte sera alors toujours clair. Enfin, l'évaluation d'un opérateur O sur une fonction test φ sera notée $O \cdot \varphi$ alors $\mathcal{O}(O)$ désignera l'évaluation de l'opérateur sur les opérateurs \mathcal{O} sur l'opérateur O .

2.4 Expressions de F^* .

2.4.1 Une expression de F^* à priori non licite.

Nous disposons de relations simples liant entre eux les opérateurs de substitution. Celles-ci ne font que traduire celles liant les fonctions associées à ces opérateurs. Notons que l'ordre de composition est alors inversé. Par exemple, nous avons :

$$F = G \circ L . \tag{7}$$

$$F \circ F^* = F^* \circ L . \tag{8}$$

En injectant (7) dans (8), cela permet d'écrire de nouvelles égalités. Nous y faisons apparaître la conjugaison de F^* par L , i.e. $\mathcal{L}(F^*)$, ainsi que l'opérateur $G - Id$ pour pouvoir traduire (8) uniquement en termes d'opérateurs sur les opérateurs de substitution.

On a alors successivement :

$$G \circ L \circ F^* \circ L^{-1} = F^* .$$

$$(G - Id) \circ (L \circ F^* \circ L^{-1}) = F^* - L \circ F^* \circ L^{-1} .$$

$$\begin{aligned}
(G - \text{Id}) \circ \mathcal{L}(F^*) &= F^* - \mathcal{L}(F^*) . \\
\mathcal{G} \cdot \mathcal{L}(F^*) &= (F^* - \text{Id}) - (\mathcal{L}(F^*) - \text{Id}) = (\mathcal{L}^{-1} - \text{Id})(\mathcal{L}(F^*) - \text{Id}) . \\
(\mathcal{L}^{-1} - \text{Id})^{-1} \cdot \mathcal{G} \cdot \mathcal{L}(F^*) &= \mathcal{L}(F^*) - \text{Id} . \\
(\text{Id} - (\mathcal{L}^{-1} - \text{Id})^{-1} \cdot \mathcal{G})(\mathcal{L}(F^*)) &= \text{Id} .
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$F^* = \mathcal{L}^{-1} \cdot (\text{Id} - (\mathcal{L}^{-1} - \text{Id})^{-1} \cdot \mathcal{G})^{-1} (\text{Id}) .$$

Dans ce calcul, nous avons introduit l'inverse de $\mathcal{L}^{-1} - \text{Id}$, donc implicitement l'inverse de $\text{Id} - \mathcal{L}$. Mais, ce dernier opérateur n'est pas inversible dans $\mathcal{L}\left(\mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]\right)$. En effet, $\mathcal{L}(A)$ conjuguant A par l'opérateur de translation L , on se doute que celui ci sera de "norme" 1, et donc que $\mathcal{L}^{-1} - \text{Id}$ ne sera pas inversible.

Néanmoins, l'opérateur \mathcal{G} augmentant de trois unités la valuation des objets sur lesquels il agit, $(\mathcal{L}^{-1} - \text{Id})^{-1} \circ \mathcal{G}$ sera de "norme" plus petite que 1. Cela nous invite à poursuivre tout de même le calcul en développant formellement $(\text{Id} - (\mathcal{L}^{-1} - \text{Id})^{-1} \cdot \mathcal{G})^{-1}$ en série de puissances, comme si $(\mathcal{L}^{-1} - \text{Id})^{-1} \cdot \mathcal{G}$ était correctement défini, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
F^* &= \mathcal{L}^{-1} \cdot \left(\sum_{r \geq 0} ((\mathcal{L}^{-1} - \text{Id})^{-1} \cdot \mathcal{G})^r \right) (\text{Id}) \\
&= \text{Id} + \mathcal{L}^{-1} \cdot \left(\sum_{r \geq 1} \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 1} \mathcal{L}^{n_r} \cdot \mathcal{G} \cdot \dots \cdot \mathcal{L}^{n_1} \cdot \mathcal{G} \right) (\text{Id}) .
\end{aligned}$$

d'où finalement l'expression formelle :

$$F^* = \text{Id} + \sum_{r \geq 1} \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 1} \mathcal{L}^{n_r-1} \cdot \mathcal{G} \cdot \dots \cdot \mathcal{L}^{n_1} \cdot \mathcal{G} (\text{Id}) . \quad (9)$$

Rappelons à nouveau qu'à ce stade, l'expression obtenue n'est pas justifiée.

Cependant, lorsqu'on veut retrouver f^* , on applique id à cette égalité et l'on démontre (cf. p. 69) que l'expression obtenue a non seulement un sens dans $z + \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$, mais aussi qu'elle détermine bien f^* . Cette expression sera utile pour écrire f^* , puis majorer ses coefficients.

2.4.2 Une première expression de F^* , sous forme de développement moulien.

On peut aussi remarquer que \mathcal{L} est un automorphisme de $\mathcal{L}\left(\mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]\right)$.

En notant, pour $n \in \mathbb{Z}$, $\Gamma_n^+ = \mathcal{L}^n(G - \text{Id})$ ainsi que pour $\underline{n} = (n_1; \dots; n_r) \in \text{seq}(\mathbb{Z})$, $\Gamma_{\underline{n}}^+ = \Gamma_{n_r}^+ \circ \dots \circ \Gamma_{n_1}^+$, on obtient alors successivement :

$$\begin{aligned}
F^* &= Id + \sum_{r \geq 1} \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 1} \mathcal{L}^{n_{r-1}} \cdot \mathcal{G} \cdot \dots \cdot \mathcal{L}^{n_1} \cdot \mathcal{G}(Id) \\
&= Id + \sum_{r \geq 1} \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 1} \mathcal{L}^{n_{r-1}} \left((G - Id) \circ (\mathcal{L}^{n_{r-1}} \cdot \mathcal{G} \cdot \dots \cdot \mathcal{L}^{n_1} \cdot \mathcal{G}(Id)) \right) \\
&= Id + \sum_{r \geq 1} \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 1} \mathcal{L}^{n_{r-1}} \left((G - Id) \right) \circ (\mathcal{L}^{n_{r-1}+n_{r-1}} \cdot \mathcal{G} \cdot \mathcal{L}^{n_{r-2}} \cdot \mathcal{G} \cdot \dots \cdot \mathcal{L}^{n_1} \cdot \mathcal{G}(Id)) \\
&= Id + \sum_{r \geq 1} \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 1} \Gamma_{n_{r-1}}^+ \circ (\mathcal{L}^{n_{r-1}+n_{r-1}} \cdot \mathcal{G} \cdot \mathcal{L}^{n_{r-2}} \cdot \mathcal{G} \cdot \dots \cdot \mathcal{L}^{n_1} \cdot \mathcal{G}(Id)) \\
&\quad \vdots \\
&= Id + \sum_{r \geq 1} \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 1} \Gamma_{n_{r-1}}^+ \circ \Gamma_{n_{r-1}+n_{r-1}}^+ \circ \dots \circ \Gamma_{n_1+\dots+n_{r-1}+n_{r-1}}^+ \\
&= Id + \sum_{r \geq 1} \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 1} \Gamma_{n_1+\dots+n_{r-1}+n_{r-1}, \dots, n_{r-1}+n_{r-1}, n_{r-1}}^+ .
\end{aligned}$$

$$D'o\grave{u} : F^* = Id + \sum_{r \geq 1} \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ 0 \leq n_r < \dots < n_1}} \Gamma_{\underline{n}}^+ .$$

Cela permet d'annoncer :

Lemme : Considérons le moule U_+^\bullet et le comoule Γ_\bullet^+ définis sur $\text{seq}(\mathbb{Z})$ respectivement par :

$$U_+^{\underline{n}} = \begin{cases} 1, & \text{si } \underline{n} = \emptyset . \\ 1, & \text{si la séquence } \underline{n} = (n_1; \dots; n_r) \text{ vérifie } 0 \leq n_r < \dots < n_1 . \\ 0, & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

$$\Gamma_{\underline{n}}^+ = \begin{cases} \mathcal{L}^{n_r}(G - Id) \circ \dots \circ \mathcal{L}^{n_1}(G - Id) & , \text{ si } \underline{n} \neq \emptyset . \\ Id & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors, l'opérateur de substitution F^* admet le développement moulien :

$$F^* = \sum_{\underline{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z})} U_+^{\underline{n}} \Gamma_{\underline{n}}^+ .$$

2.4.3 Trois autres développements moliens de F^* .

Lorsqu'on a trouvé l'expression (9), on a développé en série de puissances positives l'opérateur $(\mathcal{L}^{-1} - Id)^{-1}$. Il est aussi possible de le développer en série de puissances négatives par l'expression $(\mathcal{L}^{-1} - Id)^{-1} = - \sum_{k \geq 0} \mathcal{L}^{-k}$.

Ce nouveau développement peut remplacer l'ancien. Cela permet d'obtenir un autre

développement moulien de F^* , relativement au comoule $\Gamma_{\bullet}^+ : F^* = \sum_{\bullet} (U_{\bullet}^+)^{\times-1} \Gamma_{\bullet}^+$,

$$\text{où : } U_{\bullet}^{\mathbf{n}} = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{n} = \emptyset . \\ 1, & \text{si la séquence } \mathbf{n} = (n_1; \dots; n_r) \text{ vérifie } n_r < \dots < n_1 < 0 \\ 0, & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

En suivant la même méthodologie que précédemment, on peut considérer un autre comoule :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{Z}, \Gamma_n^- = \mathcal{L}^n(G^{-1} - \text{Id}) . \\ \forall \mathbf{n} = (n_1; \dots; n_r) \in \text{seq}(\mathbb{Z}), \Gamma_{\mathbf{n}}^- = \Gamma_{n_r}^- \circ \dots \circ \Gamma_{n_1}^- . \end{cases}$$

Cela mène à considérer les deux moules suivants :

$$V_{\bullet}^+ \text{ défini par : } \forall \mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z}), V_{\bullet}^{\mathbf{n}} = U_{\bullet}^{\mathbf{n}} .$$

$$V_{\bullet}^- \text{ défini par : } \forall \mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z}), V_{\bullet}^{\mathbf{n}} = U_{\bullet}^{\mathbf{n}} .$$

Finalement, on obtient les quatre développements mouliens suivant :

$$\begin{aligned} F^* &= \sum_{\bullet} U_{\bullet}^+ \Gamma_{\bullet}^+ &= \sum_{\bullet} (V_{\bullet}^+)^{\times-1} \Gamma_{\bullet}^- \\ &= \sum_{\bullet} (U_{\bullet}^-)^{\times-1} \Gamma_{\bullet}^+ &= \sum_{\bullet} V_{\bullet}^- \Gamma_{\bullet}^- . \end{aligned}$$

2.5 Expressions de *F .

La relation $f^* \circ {}^*f = id$ se traduit aussi en termes d'opérateurs de substitution en renversant l'ordre : ${}^*F \circ F^* = Id$. Ainsi, F^* et *F sont inverses pour la composition. Puisque Γ_{\bullet}^+ et Γ_{\bullet}^- sont des comoules multiplicatifs¹³, nous déduisons des expressions précédentes les développements mouliens de *F :

$$\begin{aligned} {}^*F &= \sum_{\bullet} (U_{\bullet}^+)^{\times-1} \Gamma_{\bullet}^+ &= \sum_{\bullet} (V_{\bullet}^+) \Gamma_{\bullet}^- \\ &= \sum_{\bullet} (U_{\bullet}^-) \Gamma_{\bullet}^+ &= \sum_{\bullet} (V_{\bullet}^-)^{\times-1} \Gamma_{\bullet}^- . \end{aligned}$$

2.6 Expressions des opérateurs de substitution $F_{\bullet}^*, F_{\bullet}^*, {}^*F_{\bullet}^+$ et ${}^*F_{\bullet}^-$.

On a jusqu'ici considéré des opérateurs de substitution associés à des séries formelles. On peut aussi considérer ceux qui sont associés à de vraies fonctions, notamment les fonctions $f_{\bullet}^*, f_{\bullet}^-, {}^*f_{\bullet}^+$ et ${}^*f_{\bullet}^-$ obtenues en appliquant le procédé de sommation de Borel à f^* et *f :

¹³ Rappelons qu'un comoule Γ_{\bullet} , défini sur Ω^* , est dit **multiplicatif** lorsque :

$$\forall (\underline{\omega}^1; \underline{\omega}^2) \in (\Omega^*)^2, \Gamma_{\underline{\omega}^1} \Gamma_{\underline{\omega}^2} = \Gamma_{\underline{\omega}^2, \underline{\omega}^1} .$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_+^* : \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] &\longrightarrow \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] & , & \quad \mathbf{F}_-^* : \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] \longrightarrow \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] & , \\
\varphi &\longmapsto \varphi \circ \mathbf{f}_+^* & & \quad \varphi &\longmapsto \varphi \circ \mathbf{f}_-^* \\
{}^*\mathbf{F}_+ : \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] &\longrightarrow \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] & , & \quad {}^*\mathbf{F}_- : \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] \longrightarrow \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] & . \\
\varphi &\longmapsto \varphi \circ {}^*\mathbf{f}_+ & & \quad \varphi &\longmapsto \varphi \circ {}^*\mathbf{f}_-
\end{aligned}$$

Dans les calculs menés précédemment avec f^* , on a développé l'opérateur $(\mathcal{L}^{-1} - \mathcal{I}d)^{-1}$ de deux manières différentes :

$$(\mathcal{L}^{-1} - \mathcal{I}d)^{-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{L}^k \quad \text{ou} \quad (\mathcal{L}^{-1} - \mathcal{I}d)^{-1} = - \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{L}^{-k} .$$

C'est le choix de cette expression qui donnera les expressions des opérateurs que l'on vient d'introduire.

Occupons nous en détail du cas de \mathbf{F}_+^* :

On sait que \mathbf{f}_+^* est obtenue à partir de f^* en appliquant le procédé de sommation de Borel dans la direction de l'axe réel positif. Le calcul mené précédemment pour \mathbf{F}^* permet aussi d'exprimer \mathbf{F}_+^* . Il suffit de choisir de manière adéquate si l'on développe les inverses d'opérateurs en série de puissances positives ou négatives. Dans le cas de \mathbf{F}_+^* , seules les séries de puissances positives sont licites. Effectivement, pour $k \in \mathbb{Z}$, l'opérateur $\mathcal{L}^k(\mathbb{G}^\pm - \text{Id})$ "translate" vers la droite la singularité 0 de γ^\pm de $-k$ unités ; mais puisque la fonction \mathbf{f}_+^* est définie sur l'axe réel positif¹⁴, il ne peut y avoir de singularités sur celui-ci, d'où nécessairement $k \geq 0$.

On obtient alors deux expressions résultant du choix du comoule :

1. Pour le comoule Γ_\bullet^+ , le développement de l'opérateur $(\mathcal{L}^{-1} - \mathcal{I}d)^{-1}$ en série de puissances positives fait apparaître le moule U_+^\bullet , d'où :

$$\mathbf{F}_+^* = \sum_\bullet U_+^\bullet \Gamma_\bullet^+ .$$

2. Pour le comoule Γ_\bullet^- , le développement de l'opérateur $(\mathcal{L} - \mathcal{I}d)^{-1}$ en série de puissances positives fait apparaître le moule $(V_+^\bullet)^{\times-1}$, d'où :

$$\mathbf{F}_+^* = \sum_\bullet (V_+^\bullet)^{\times-1} \Gamma_\bullet^- .$$

Finalement, en menant l'intégralité des calculs, on trouve les expressions suivantes :

¹⁴ Sauf dans un voisinage de 0 .

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_+^* &= \sum_{\bullet} U_+^{\bullet} \Gamma_{\bullet}^+ &= \sum_{\bullet} (V_+^{\bullet})^{\times-1} \Gamma_{\bullet}^- \quad . \\
\mathbf{F}_-^* &= \sum_{\bullet} (U_-^{\bullet})^{\times-1} \Gamma_{\bullet}^+ &= \sum_{\bullet} V_-^{\bullet} \Gamma_{\bullet}^- \quad . \\
{}^* \mathbf{F}_+ &= \sum_{\bullet} (U_+^{\bullet})^{\times-1} \Gamma_{\bullet}^+ &= \sum_{\bullet} V_+^{\bullet} \Gamma_{\bullet}^- \quad . \\
{}^* \mathbf{F}_- &= \sum_{\bullet} U_-^{\bullet} \Gamma_{\bullet}^+ &= \sum_{\bullet} (V_-^{\bullet})^{\times-1} \Gamma_{\bullet}^- \quad .
\end{aligned}$$

En particulier, on en déduit les expressions de l'itérateur sectoriel direct et de l'itérateur sectoriel réciproque, la seule chose à faire étant d'étudier la convergence des séries :

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_+^* &= \sum_{\bullet} U_+^{\bullet} \Gamma_{\bullet}^+ \cdot z &= \sum_{\bullet} (V_+^{\bullet})^{\times-1} \Gamma_{\bullet}^- \cdot z \quad . \\
\mathbf{f}_-^* &= \sum_{\bullet} (U_-^{\bullet})^{\times-1} \Gamma_{\bullet}^+ \cdot z &= \sum_{\bullet} V_-^{\bullet} \Gamma_{\bullet}^- \cdot z \quad . \\
{}^* \mathbf{f}_+ &= \sum_{\bullet} (U_+^{\bullet})^{\times-1} \Gamma_{\bullet}^+ \cdot z &= \sum_{\bullet} V_+^{\bullet} \Gamma_{\bullet}^- \cdot z \quad . \\
{}^* \mathbf{f}_- &= \sum_{\bullet} U_-^{\bullet} \Gamma_{\bullet}^+ \cdot z &= \sum_{\bullet} (V_-^{\bullet})^{\times-1} \Gamma_{\bullet}^- \cdot z \quad .
\end{aligned}$$

On étudiera la convergence de $\mathbf{f}_+^* = \sum_{\bullet} U_+^{\bullet} \Gamma_{\bullet}^+ \cdot z$ à la section (cf. §4.1.2) sur un domaine du type de \mathcal{D}^+ . Voici le principe de la majoration :

1. On constate que : $\forall \underline{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z})$, $\Gamma_{\underline{n}}^+ \cdot z = L^{n_r-1} \circ (G - \text{Id}) \circ \dots \circ L^{n_1} \circ (G - \text{Id})(id)$.
2. En reprenant la résolution de l'équation aux différences finies $\varphi(z+1) - \varphi(z) = a(z)$, où $a \in \frac{1}{z^2} \mathbb{C} \left\{ \frac{1}{z} \right\}$ (cf. p. 23), on obtient deux solutions φ^+ et φ^- respectivement, holomorphes sur \mathcal{D}^+ et \mathcal{D}^- , s'écrivant sous la forme :

$$\begin{aligned}
\varphi^+(z) &= - \sum_{k=0}^{+\infty} a(z+k) = \left(- \sum_{k=0}^{+\infty} L^k \right) \cdot a(z) \quad . \\
\varphi^-(z) &= \sum_{k=1}^{+\infty} a(z-k) = \left(\sum_{k<0} L^k \right) \cdot a(z) \quad .
\end{aligned}$$

3. En notant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n^+ = \frac{(\gamma^+)^n}{n!} \partial_z^n \circ \left(- \sum_{k=0}^{+\infty} L^k \right)$, on réécrit \mathbf{f}_+^* sous la forme :

$$\mathbf{f}_+^* = id + (\text{Id} - L)^{-1} \circ \sum_{r \geq 0} \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 1} H_{n_1}^+ \circ \dots \circ H_{n_r}^+ \cdot \gamma^+ \quad .$$

4. Le procédé de sommation sectoriel de Borel s'applique. Si Ω_θ est un voisinage de $e^{i\theta}\mathbb{R}$, suffisamment petit, alors on a :

$$\forall \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, \exists (C_0(\theta); C_1(\theta)) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 , \forall \zeta \in \Omega_\theta , \left| \widehat{\mathbf{f}}_+^*(\zeta) \right| \leq C_0(\theta) e^{C_1(\theta)|\zeta|} .$$

Cela permet de justifier la convergence de la série $\mathbf{f}_+^* = \sum_{\bullet} U_+^\bullet \Gamma_\bullet^+ \cdot z$, mais aussi des sept autres séries donnant les itérateurs sectoriels.

2.7 Expressions des opérateurs de substitution Π^+ et Π^- .

L'un des intérêts des calculs précédents est de permettre d'exprimer les applications de corne π^+ et π^- comme fonction entières des coefficients a_3, a_4, \dots du difféomorphisme f . Pour obtenir ces expressions, continuons sur notre lancée en utilisant les deux opérateurs de substitution :

$$\begin{array}{ccc} \Pi^+ : \mathbb{C} \left[\begin{array}{c} 1 \\ z \end{array} \right] & \longrightarrow & \mathbb{C} \left[\begin{array}{c} 1 \\ z \end{array} \right] \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ \pi^+ \end{array} , \quad \begin{array}{ccc} \Pi^- : \mathbb{C} \left[\begin{array}{c} 1 \\ z \end{array} \right] & \longrightarrow & \mathbb{C} \left[\begin{array}{c} 1 \\ z \end{array} \right] \\ \varphi^- & \longmapsto & \varphi^- \circ \pi^- \end{array} .$$

Les applications de corne sont définies par : $\pi^+ = \mathbf{f}_+^* \circ {}^* \mathbf{f}_-$ et $\pi^- = \mathbf{f}_-^* \circ {}^* \mathbf{f}_+$. Ceci donne alors la factorisation des opérateurs Π^+ et Π^- :

$$\Pi^+ = {}^* \mathbf{F}_- \circ \mathbf{F}_+^* , \quad \Pi^- = {}^* \mathbf{F}_+ \circ \mathbf{F}_-^* .$$

Puisque Γ_\bullet^+ et Γ_\bullet^- sont des comoules multiplicatifs, on en déduit alors les développements mouliens suivant :

$$\begin{aligned} \Pi^+ &= {}^* \mathbf{F}_- \circ \mathbf{F}_+^* = \left(\sum_{\bullet} U_-^\bullet \Gamma_\bullet^- \right) \circ \left(\sum_{\bullet} U_+^\bullet \Gamma_\bullet^+ \right) = \sum_{\bullet} (U_-^\bullet \times U_+^\bullet) \Gamma_\bullet^+ . \\ \Pi^- &= {}^* \mathbf{F}_+ \circ \mathbf{F}_-^* = \left(\sum_{\bullet} V_+^\bullet \Gamma_\bullet^+ \right) \circ \left(\sum_{\bullet} V_-^\bullet \Gamma_\bullet^- \right) = \sum_{\bullet} (V_-^\bullet \times V_+^\bullet) \Gamma_\bullet^- . \end{aligned}$$

Définissons deux moules sur $\text{seq}(\mathbb{Z})$ par $U^\bullet = U_+^\bullet \times U_-^\bullet$ et $V^\bullet = V_-^\bullet \times V_+^\bullet$, c'est-à-dire :

$$U^{\mathbf{n}} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \mathbf{n} = \emptyset \\ 1 & , \text{ si } \mathbf{n} = (n_1; \dots; n_r) \in \text{seq}(\mathbb{Z}) \text{ vérifie } n_r < \dots < n_1 . \\ 0 & , \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

$$V^{\mathbf{n}} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \mathbf{n} = \emptyset \\ 1 & , \text{ si } \mathbf{n} = (n_1; \dots; n_r) \in \text{seq}(\mathbb{Z}) \text{ vérifie } n_1 < \dots < n_r . \\ 0 & , \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

On obtient alors les développements mouliens des opérateurs de substitution Π^+ et Π^- , associés aux applications de corne π^+ et π^- :

$$\Pi^+ = \sum_{\bullet} U^\bullet \Gamma_\bullet^+ , \quad \Pi^- = \sum_{\bullet} V^\bullet \Gamma_\bullet^- .$$

On peut finalement énoncer la propriété suivante :

Propriété : Les applications de corne π^+ et π^- sont données par les expressions suivantes :

$$\pi^+(z) = \sum_{\bullet} U^{\bullet} \Gamma_{\bullet}^+ \cdot z = z + \sum_{r \geq 1} \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \Gamma_{n_1, \dots, n_r}^+ \cdot z \quad (10)$$

$$\pi^-(z) = \sum_{\bullet} V^{\bullet} \Gamma_{\bullet}^- \cdot z = z + \sum_{r \geq 1} \sum_{-\infty < n_1 < \dots < n_r < +\infty} \Gamma_{n_1, \dots, n_r}^- \cdot z \quad (11)$$

Ici, la notation $\Gamma \cdot z$ désigne l'application de l'opérateur Γ sur la fonction identité.

Démonstration : Les applications de corne sont caractérisées par :

1. $\exists c > 0$, $\exists ! \pi^+ \in \mathcal{H}(\Im m z > c)$ vérifiant $\begin{cases} \pi^+(z+1) = \pi^+(z) + 1 \\ \pi^+ \circ \mathbf{f}_-^* = \mathbf{f}_+^* \end{cases}$.
2. $\exists c > 0$, $\exists ! \pi^- \in \mathcal{H}(\Im m z > c)$ vérifiant $\begin{cases} \pi^-(z+1) = \pi^-(z) + 1 \\ \pi^- \circ \mathbf{f}_+^* = \mathbf{f}_-^* \end{cases}$.

• Les égalités de composition résultent évidemment des développements mouliens précédents :

$$\begin{cases} \pi^+ \circ \mathbf{f}_-^*(z) = \mathbf{F}_-^* \circ \Pi^+ \cdot z = \mathbf{F}_-^* \circ \mathbf{F}_- \circ \mathbf{F}_+^* \cdot z = \mathbf{F}_+^* \cdot z = \mathbf{f}_+^*(z) \\ \pi^- \circ \mathbf{f}_+^*(z) = \mathbf{F}_+^* \circ \Pi^- \cdot z = \mathbf{F}_+^* \circ \mathbf{F}_+ \circ \mathbf{F}_-^* \cdot z = \mathbf{F}_-^* \cdot z = \mathbf{f}_-^*(z) \end{cases}$$

• La 1-périodicité de $\pi^{\pm} - id_{\mathbb{C}}$ résulte de la somme sur $\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z})$, où $n_r < \dots < n_1$, ce qui autorise à décaler tous les indices de sommation d'un pas. Ce décalage d'indice provient de : $\Gamma_{n_1, \dots, n_r}^{\pm} \cdot (z+1) = \Gamma_{n_1+1, \dots, n_r+1}^{\pm} \cdot z$, pour $(n_1; \dots; n_r) \in \mathbb{Z}^r$.

En effet, les questions de sommabilité formelle étant simples à vérifier ici, la formule de Taylor permet d'écrire, dans $\mathcal{L}\left(\mathbb{C} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ z \end{smallmatrix} \right] \right)$: $G - Id = \sum_{n \geq 1} \frac{(\gamma^+)^n}{n!} \partial_z^n$, d'où la relation annoncée.

Le calcul s'effectue de la même manière pour Γ_{\bullet}^- , en notant $g^{-1}(z) = z + \gamma^-(z)$.

• L'holomorphicité, le seul point nécessitant réellement des explications, résulte de la convergence des séries donnant les itérateurs sectoriels. La méthode a déjà été renseignée précédemment (cf. p. 48) et sera détaillée plus tard (cf. p. 71).

On montre en fait que la convergence des séries est normale sur les demi-plans du type $\mathcal{P}_+(C) = \{\zeta \in \mathbb{C} ; \Im m \zeta > C\}$ ou $\mathcal{P}_-(C) = \{\zeta \in \mathbb{C} ; \Im m \zeta < -C\}$, pour $C > 0$ suffisamment grand. □

3 Expression des invariants holomorphes en série de multizêtas et de l'application de corne π^+ en série de multitangentes.

A partir de maintenant, on notera $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{N} ; n \geq p\}$.

Ecalte a déjà indiqué (cf. le second volume de [15] p. 428-429) comment de l'expression de π^+ , on en déduit celle des invariants holomorphes. Il s'agit de reprendre l'expression (10), de développer l'expression de $\Gamma_{n_1, \dots, n_r}^+ \cdot z$ puis de permuter les sommes pour faire apparaître des multitangentes.

On obtient typiquement le résultat suivant :

Théorème : Considérons la famille de rationnels $H_{\underline{s}}^{\underline{n}}$, où $(\underline{s}; \underline{n}) \in \text{seq}(\mathbb{N}_3) \times \text{seq}(\mathbb{N}_2)$, définie récursivement par :

$$H_{\underline{s}, s_{l+1}}^{\underline{n}} = \sum_{\substack{(\underline{n}'; \underline{n}'') \in (\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})^2 \\ \underline{s}' \in \text{seq}(\mathbb{N}_2) \\ \underline{n}' \cdot \underline{n}'' = \underline{n}, \underline{s}' \leq \underline{s} \\ \|\underline{s}'\| + l(\underline{n}'') = \|\underline{s}\| \\ s_{l+1} + l(\underline{n}'') = \|\underline{n}''\|}} (-1)^{\|\underline{s}\| - \|\underline{s}'\|} H_{\underline{s}'}^{\underline{n}'} \left(\prod_{k=1}^{l(\underline{s})} \binom{s_k - 1}{s'_k - 1} \right) .$$

Notons aussi A_{\bullet} le comoule défini sur $\text{seq}(\mathbb{N}_2)$ par :

$$\forall \underline{n} \in \text{seq}(\mathbb{N}_2), A_{\underline{n}} = a_{n_1} \cdots a_{n_r} .$$

Alors, l'application de corne π^+ est donnée par les expressions suivantes :

$$\pi^+ = \sum_{\substack{(\underline{s}; \underline{n}) \in \text{seq}(\mathbb{N}_2) \times \text{seq}(\mathbb{N}_3) \\ l(\underline{n}) \geq l(\underline{s}) \\ \|\underline{n}\| = \|\underline{s}\| + 1}} A_{\underline{n}} H_{\underline{s}}^{\underline{n}} \mathcal{T}e^{\underline{s}} \quad (12)$$

$$= \sum_{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}_2)} H e_{\underline{s}} \mathcal{T}e^{\underline{s}} \quad (13)$$

$$= \sum_{\underline{n} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3)} A_{\underline{n}} \mathcal{T}^{\underline{n}} . \quad (14)$$

Ici, les expressions (13) et (14) se déduisent de (12) après regroupement des séquences $\underline{n} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3)$ et $\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}_2)$ respectivement. Remarquons que (13) est une contraction moule-comoule.

On se propose de détailler les calculs pour obtenir l'expression (14) .

Nous savons que les invariants de f sont les coefficients de Fourier de $\pi^+ - id_{\mathbb{C}}$. Avant d'aborder la question de leur expression, on explicitera l'action de $\Gamma_{\underline{n}}^+$ sur une fonction d'épreuve. On pourra alors reprendre l'expression (10) pour en déduire une expression des invariants, l'expression (14) .

3.1 Evaluation de $\Gamma_{\bullet}^+(id_{\mathbb{C}})$.

3.1.1 Description de l'action de Γ_{\bullet}^+ .

Lemme : Notons $\mathfrak{g}_{d,n,j} = \partial^d \left((L^n(\gamma^+))^j \right)$ pour tout $(d; n; j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Notons aussi, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice $\underline{\mathbf{i}} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{N})$ triangulaire inférieure :

$$\text{diag}_p^{\mathbf{i}} = \begin{cases} \sum_{k=p+1}^r i_{k,k-p}, & \text{si } 0 \leq p \leq r-1. \\ 0, & \text{si } p = r. \end{cases}$$

Alors, pour tout $\underline{\mathbf{n}} \in \text{seq}(\mathbb{Z})$, de longueur $r \in \mathbb{N}^*$ et pour toute fonction d'épreuve $\varphi \in \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$, on a :

$$\Gamma_{\underline{\mathbf{n}}}^+(\varphi) = \sum_{j_1, \dots, j_r \geq 1} \sum_{\substack{i_{1,1}=j_1 \\ i_{2,1}+i_{2,2}=j_2 \\ \vdots \\ i_{r,1}+\dots+i_{r,r}=j_r}} \left(\prod_{p=1}^r \frac{\mathfrak{g}_{\text{diag}_p^{\mathbf{i}}, n_p, j_p}}{p \prod_{q=1}^p i_{p,q}!} \right) \cdot \left(\partial^{\text{diag}_0^{\mathbf{i}}} \varphi \right). \quad (15)$$

La démonstration est très simple et s'effectue par récurrence sur l'entier r . Bien qu'elle ne présente pas de difficulté, nous en donnons les grandes lignes pour se convaincre de la justesse de l'expression, mais surtout pour se familiariser avec les premières notations.

Notons aussi qu'ici, l'expression s'obtient naturellement en sommant sur les lignes de la matrice triangulaire inférieure \mathbf{i} , mais il pourra être utile de modifier l'ordre de sommation afin d'effectuer la somme sur les diagonales de \mathbf{i} (i.e. sommer à $\text{diag}_1^{\mathbf{i}}, \dots, \text{diag}_r^{\mathbf{i}}$ constants).

Démonstration : **Initialisation :** Pour $r = 1$, la somme donnant $\Gamma_{\underline{\mathbf{n}}}(\varphi)$ se réduit à :

$$\sum_{j_1 \geq 1} \frac{\mathfrak{g}_{0, n_1, j_1}}{j_1!} (\partial^{j_1} \varphi) = \sum_{j_1 \geq 1} \frac{(\mathbb{L}^{n_1}(\gamma^+))^{j_1}}{j_1!} (\partial^{j_1} \varphi),$$

ce qui est exactement l'expression de $\Gamma_{n_1}^+(\varphi)$ donnée par la formule de Taylor, dans $\mathcal{L}\left(\mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]\right)$, de $G - \text{Id}$:

$$G - \text{Id} = \sum_{j_1 \geq 1} \frac{(\gamma^+)^{j_1}}{j_1!} \partial_z^{j_1}.$$

Hérédité : Celle-ci résulte de l'application de la formule de Leibniz généralisée exprimant les dérivées successives d'un produit de fonctions.

Supposons que l'expression (15) donnant $\Gamma_{\underline{\mathbf{n}}}(\varphi)$ soit vraie pour les séquences de $\text{seq}(\mathbb{Z})$ de longueur $r \in \mathbb{N}^*$ fixée. Considérons $\underline{\mathbf{n}} \in \text{seq}(\mathbb{Z})$ de longueur r , $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$ et $\varphi \in \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$. Pour tout $j_{r+1} \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} & \partial^{j_{r+1}}(\Gamma_{\underline{\mathbf{n}}}^+(\varphi)) \\ &= \sum_{i_{r+1,1}+\dots+i_{r+1,r+1}=j_{r+1}} \sum_{j_1, \dots, j_r \geq 1} \sum_{\substack{i_{1,1}=j_1 \\ i_{2,1}+i_{2,2}=j_2 \\ \vdots \\ i_{r,1}+\dots+i_{r,r}=j_r}} \left(\prod_{p=1}^r \frac{1}{i_{r+1,r+1-p}!} \partial^{i_{r+1,r+1-p}} \left(\mathfrak{g}_{\text{diag}_p^{\mathbf{i}}, n_p, j_p} \right) \right) \\ & \quad \times \frac{1}{i_{r+1,r+1}!} \left(\partial^{i_{r+1,r+1} + \text{diag}_0^{\mathbf{i}}} \varphi \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j_1, \dots, j_r \geq 1} \sum_{\substack{i_{1,1}=j_1 \\ i_{2,1}+i_{2,2}=j_2 \\ \vdots \\ i_{r,1}+\dots+i_{r,r}=j_r \\ i_{r+1,1}+\dots+i_{r+1,r+1}=j_{r+1}}} \frac{1}{i_{r+1,r+1}!} \left(\prod_{p=1}^r \frac{1}{i_{r+1,r+1-p}!} \frac{\partial^{i_{r+1,r+1-p}} \left(\mathfrak{g}_{\text{diag}_{\mathfrak{S}_p}^{\mathbf{i}^{\leq r}}} \right)}{\prod_{q=1}^p i_{p,q}!} \right) \times \left(\partial^{\text{diag}_0^{\mathbf{i}}} \varphi \right).$$

Remarquons que l'on a désigné par $\mathbf{i}^{\leq r}$ la matrice extraite de \mathbf{i} définie par :

$$\mathbf{i}^{\leq r} = (i_{p,q})_{(p;q) \in \llbracket 1; r \rrbracket^2}.$$

On démontre alors sans peine l'hérédité voulue en utilisant $\Gamma_{\mathbf{n}, \mathbb{N}}^+(\varphi) = \Gamma_{\mathbb{N}}^+ \circ \Gamma_{\mathbf{n}}^+(\varphi)$, puis la définition de $\Gamma_{\mathbb{N}}^+$ et enfin en regroupant les termes de même nature. \square

3.1.2 Evaluation de $\Gamma_{\bullet}^+(id_{\mathbb{C}})$.

Remarquons tout de suite que l'évaluation de $\Gamma_{\mathbf{n}}^+(id_{\mathbb{C}})$ nécessite des détails seulement dans le cas où $\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z}) - \{\emptyset\}$. En effet, par définition de Γ_{\bullet}^+ , on a : $\Gamma_{\emptyset}^+(id_{\mathbb{C}}) = id_{\mathbb{C}}$.

Nous supposons donc désormais que $\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z}) - \{\emptyset\}$.

En partant du lemme précédent, il ne reste alors que deux choses à faire pour obtenir une expression de $\Gamma_{\mathbf{n}}^+(id_{\mathbb{C}})$, où $\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z}) - \{\emptyset\}$:

1. Expliciter la fonction $\mathfrak{g}_{d,n,j}$ pour obtenir une expression de π^+ écrite sous forme moulienne.
2. Appliquer $id_{\mathbb{C}}$ à $\Gamma_{\mathbf{n}}^+$, i.e. décréter que $\text{diag}_0^{\mathbf{i}} = 1$.

Effectuons ces deux choses successivement :

1. On note de manière moulienne :

$$\begin{cases} \forall \underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3), A_{\underline{\mathbf{s}}} = a_{s_1} \cdots a_{s_r}. \\ \forall \underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3), \forall d \in \mathbb{N}, b_d^{\underline{\mathbf{s}}} = \binom{\|\underline{\mathbf{s}}\| - l(\underline{\mathbf{s}}) + d - 1}{d}. \end{cases}$$

Pour ce qui est de $\mathfrak{g}_{d,n,j}$, l'expression $\gamma^+(z) = \sum_{n \geq 3} \frac{a_n}{z^{n-1}}$ donne alors immédiatement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{d!} \partial^d ((\gamma^+)^j) &= (-1)^d \sum_{s_1, \dots, s_j \geq 3} \binom{s_1 + \dots + s_j - j + d - 1}{d} \frac{a_{s_1} \cdots a_{s_j}}{z^{s_1 + \dots + s_j - j + d}} \\ &= (-1)^d \sum_{\substack{\underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3) \\ l(\underline{\mathbf{s}}) = j}} b_d^{\underline{\mathbf{s}}} \frac{A_{\underline{\mathbf{s}}}}{z^{\|\underline{\mathbf{s}}\| - l(\underline{\mathbf{s}}) + d}}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathfrak{g}_{d,n,j}(z) = (-1)^d \sum_{\substack{\underline{\mathfrak{s}} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3) \\ l(\underline{\mathfrak{s}})=j}} \frac{d! b_d^{\underline{\mathfrak{s}}} A_{\underline{\mathfrak{s}}}}{(z+n)^{\|\underline{\mathfrak{s}}\|-l(\underline{\mathfrak{s}})+d}} . \quad (16)$$

2. L'application de l'identité à Γ_{\bullet}^+ donne alors, si $\underline{\mathfrak{n}} \in \text{seq}(\mathbb{Z})$ est de longueur $r \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\underline{\mathfrak{n}}}^+(id_{\mathbb{C}})(z) &= \sum_{j_1, \dots, j_r \geq 1} \sum_{\substack{i_{1,1}=j_1 \\ i_{2,1}+i_{2,2}=j_2 \\ \vdots \\ i_{r,1}+\dots+i_{r,r}=j_r}} \left(\prod_{p=1}^r \frac{\mathfrak{g}_{\text{diag}_p^i, n_p, j_p}(z)}{p} \right) \cdot \left(\partial^{\text{diag}_0^i} id_{\mathbb{C}} \right)(z) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_r \geq 1} \sum_{\substack{i_{1,1}=j_1=1 \\ i_{2,1}=j_2 \\ \vdots \\ i_{r,1}+\dots+i_{r,r-1}=j_r}} \left(\prod_{p=1}^r \frac{\mathfrak{g}_{\text{diag}_p^i, n_p, j_p}(z)}{p-1} \right) \\ &= \sum_{\substack{j_1=1 \\ j_2, \dots, j_r \geq 1}} \sum_{\substack{i_{2,1}=j_2 \\ \vdots \\ i_{r,1}+\dots+i_{r,r-1}=j_r}} \prod_{p=1}^r \left(\frac{(-1)^{\text{diag}_p^i}}{p-1} \sum_{\substack{\underline{\mathfrak{s}}^p \in \text{seq}(\mathbb{N}_3) \\ l(\underline{\mathfrak{s}}^p)=j_p}} \frac{\text{diag}_p^i! b_{\text{diag}_p^i}^{\underline{\mathfrak{s}}^p} A_{\underline{\mathfrak{s}}^p}}{(z+n_p)^{\|\underline{\mathfrak{s}}^p\|-l(\underline{\mathfrak{s}}^p)+\text{diag}_p^i}} \right) . \end{aligned}$$

D'où :

$$\Gamma_{\underline{\mathfrak{n}}}^+(id_{\mathbb{C}})(z) = \sum_{\substack{j_1=1 \\ j_2, \dots, j_r \geq 1}} \sum_{\substack{(\underline{\mathfrak{s}}^1, \dots, \underline{\mathfrak{s}}^r) \in (\text{seq}(\mathbb{N}_3))^r \\ l(\underline{\mathfrak{s}}^1)=j_1, \dots, l(\underline{\mathfrak{s}}^r)=j_r}} \sum_{\substack{i_{2,1}=j_2 \\ \vdots \\ i_{r,1}+\dots+i_{r,r-1}=j_r}} \prod_{p=1}^r \left(\frac{(-1)^{\text{diag}_p^i}}{p-1} \frac{\text{diag}_p^i! b_{\text{diag}_p^i}^{\underline{\mathfrak{s}}^p} A_{\underline{\mathfrak{s}}^p}}{(z+n_p)^{\|\underline{\mathfrak{s}}^p\|-l(\underline{\mathfrak{s}}^p)+\text{diag}_p^i}} \right) . \quad (17)$$

3.1.3 Introduction de notations mouliennes.

Pour simplifier l'écriture de la formule (17), le calcul moulien nous sera une fois de plus utile.

Pour cela, considérons l'alphabet $\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}$. Nous désignerons les séquences de $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ par une lettre majuscule, les composantes seront numérotées en exposant et notées avec la lettre minuscule correspondante. Par exemple, on écrira $\underline{\mathbf{S}} = (\underline{\mathfrak{s}}^1; \dots; \underline{\mathfrak{s}}^r)$ pour $\underline{\mathfrak{s}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ de longueur r .

La longueur de $\underline{\mathfrak{s}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ sera notée traditionnellement $l(\underline{\mathfrak{s}})$; le poids de $\underline{\mathbf{S}}$ sera donné par $||| \underline{\mathbf{S}} ||| = \sum_{i=1}^{l(\underline{\mathbf{S}})} \|\underline{\mathfrak{s}}^i\| - 1$.

Introduisons désormais deux moules intermédiaires¹⁵, définis par :

$$\text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{cases} (-1)^{l(\underline{\mathfrak{s}}^2)+\dots+l(\underline{\mathfrak{s}}^r)} & , \text{ si } l(\underline{\mathbf{S}}) \geq 2 . \\ 1 & , \text{ si } l(\underline{\mathbf{S}}) \in \{0; 1\} . \end{cases}$$

¹⁵ Plus précisément, un moule et un comoule.

$$\mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{cases} A_{\underline{\mathbf{S}}^1} \cdots A_{\underline{\mathbf{S}}^r} = \prod_{p=1}^{l(\underline{\mathbf{S}})} \prod_{q=1}^{l(\underline{\mathbf{S}}^p)} a_{\underline{\mathbf{S}}_q^p} & , \text{ si } l(\underline{\mathbf{S}}) \in \mathbb{N}^* . \\ 1 & , \text{ si } l(\underline{\mathbf{S}}) = 0 . \end{cases}$$

Nous noterons plus simplement l'ensemble de sommation portant sur les entiers $i_{2,1}, i_{3,1}, i_{3,2}, \dots, i_{r,r-1}$ à l'aide de la notation ensembliste :

$$\text{triangle}(\underline{\mathbf{S}}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ i_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ i_{r,1} & \cdots & i_{r,r-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{N}) ; \forall k \in \llbracket 2; r \rrbracket , \sum_{l=1}^{k-1} i_{k,l} = l(\underline{\mathbf{S}}^k) \right\} .$$

Enfin, pour toute matrice $\mathbf{i} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{N})$ triangulaire inférieure, de diagonale nulle et pour toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ de longueur $r \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\mathcal{B}^{\underline{\mathbf{S}}, \mathbf{i}} = \prod_{p=1}^r \frac{\text{diag}_{\mathcal{S}_p}^{\mathbf{i}}! b_{\text{diag}_p^{\mathbf{i}}}^{\underline{\mathbf{S}}^p}}{p-1 \prod_{q=1} i_{p,q}!} = \prod_{k=1}^{l(\underline{\mathbf{S}})} \frac{(\|\underline{\mathbf{S}}^k\| - l(\underline{\mathbf{S}}^k) + \text{diag}_k^{\mathbf{i}} - 1)!}{\left(\prod_{p=k+1}^r i_{p,p-k}! \right) (\|\underline{\mathbf{S}}^k\| - l(\underline{\mathbf{S}}^k) - 1)!} .$$

Lorsque $\underline{\mathbf{S}}$ est réduit à la séquence nulle, on pose $\mathcal{B}^{\underline{\mathbf{S}}, \mathbf{i}} = 1$.

3.1.4 Expression moulienne de $\Gamma_{\bullet}^+(id_{\mathbb{C}})$.

L'ensemble des notations précédemment introduites permet de réécrire l'égalité (17) beaucoup plus simplement. Rappelons qu'ici $\underline{\mathbf{n}} \in \text{seq}(\mathbb{Z})$ est de longueur $r \in \mathbb{N}^*$. Ainsi :

$$\Gamma_{\underline{\mathbf{n}}}^+(id_{\mathbb{C}})(z) = \sum_{\substack{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\underline{\mathbf{S}}) = l(\underline{\mathbf{n}}) \\ l(\underline{\mathbf{S}}^1) = 1}} \text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \left(\sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\underline{\mathbf{S}})} \mathcal{B}^{\underline{\mathbf{S}}, \mathbf{i}} \left(\prod_{p=1}^r \frac{1}{(z + n_p)^{\|\underline{\mathbf{S}}^p\| - l(\underline{\mathbf{S}}^p) + \text{diag}_p^{\mathbf{i}}}} \right) \right) \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}} . \quad (18)$$

Notons que cette expression est analytique, puisqu'elle résulte de la formule (15) et de la permutation de la somme (16) donnant l'expression de $\mathfrak{g}_{d,n,j}$ avec la somme finie portant sur $\text{triangle}(\underline{\mathbf{S}})$.

3.2 Quelques majorations intermédiaires.

3.2.1 Estimation du comoule \mathcal{A}_{\bullet} .

Rappelons que l'hypothèse de convergence faite sur le difféomorphisme f défini par $f(z) = z + 1 + \sum_{n \geq 3} \frac{a_n}{z^{n-1}}$ implique l'existence de deux constantes C_0 et C_1 , strictement positives, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} , |a_n| \leq C_0 C_1^n .$$

La remarque élémentaire $\forall \underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) , 3l(\underline{\mathbf{S}}) \leq \|\underline{\mathbf{S}}\|$ permet d'obtenir le lemme suivant :

Lemme : $\forall \underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, $|\mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}}| \leq \left(C_0^{\frac{1}{3}} C_1\right)^{1+\|\underline{\mathbf{S}}\|}$.

Démonstration : • Si $\underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}$ est de longueur r , on a :

$$|\mathcal{A}_{\underline{\mathbf{s}}}| \leq C_0 C_1^{s_1} \cdots C_0 C_1^{s_r} = C_0^r C_1^{\|\underline{\mathbf{s}}\|}.$$

• Soit $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ de longueur r .

Alors : $|\mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}}| = |\mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}^1}| \cdots |\mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}^r}|$

$$\leq C_0^{l(\underline{\mathbf{S}}^1)} C_1^{\|\underline{\mathbf{S}}^1\|} \cdots C_0^{l(\underline{\mathbf{S}}^r)} C_1^{\|\underline{\mathbf{S}}^r\|} = C_0^{l(\underline{\mathbf{S}}^1) + \cdots + l(\underline{\mathbf{S}}^r)} C_1^{1+\|\underline{\mathbf{S}}\|}$$

$$\leq \left(C_0^{\frac{1}{3}}\right)^{1+\|\underline{\mathbf{S}}\|} C_1^{1+\|\underline{\mathbf{S}}\|} = \left(C_0^{\frac{1}{3}} C_1\right)^{1+\|\underline{\mathbf{S}}\|}.$$

□

3.2.2 Estimation d'un coefficient combinatoire.

On aura besoin d'estimer le nombre de séquences non vides de $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, de longueur l et de poids p donné :

Lemme : 1. $\forall (p; l) \in \mathbb{N}^2$, $\#\{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) ; \|\underline{\mathbf{S}}\| = p \text{ et } l(\underline{\mathbf{S}}) = l\} \leq 2^p$.

2. $\forall p \in \mathbb{N}$, $\#\{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) ; \|\underline{\mathbf{S}}\| = p\} \leq p 2^p$.

Démonstration : 1. On a successivement :

$$\begin{aligned} & \#\{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) ; \|\underline{\mathbf{S}}\| = p \text{ et } l(\underline{\mathbf{S}}) = l\} \\ &= \#\left\{((\underline{\mathbf{s}}^1; \cdots; \underline{\mathbf{s}}^l) \in (\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})^l ; \sum_{k=1}^l \|\underline{\mathbf{s}}^k\| = p + 1\right\} \\ &= \sum_{\substack{r_1, \dots, r_l \geq 1 \\ r_1 + \dots + r_l \leq \frac{p+1}{3}}} \#\{\underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3) ; l(\underline{\mathbf{s}}) = r_1 + \cdots + r_l, \|\underline{\mathbf{s}}\| = p + 1\} \\ &= \sum_{L=l}^{\frac{p+1}{3}} \sum_{\substack{r_1, \dots, r_l \geq 1 \\ r_1 + \dots + r_l = L}} \#\{\underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\} ; l(\underline{\mathbf{s}}) = L, \|\underline{\mathbf{s}}\| = p + 1\} \\ &= \sum_{L=l}^{\frac{p+1}{3}} \sum_{\substack{r_1, \dots, r_l \geq 1 \\ r_1 + \dots + r_l = L}} \#\{(s_1; \cdots; s_L) \in \mathbb{N}^L ; s_1 + \cdots + s_L = p - 3L + 1\} \\ &= \sum_{L=l}^{\frac{p+1}{3}} \binom{L+l-1}{l-1} \binom{p-2L}{L-1} \leq \sum_{L=l}^{\frac{p+1}{3}} 2^{L+l-1} 2^{p-2L} \leq 2^p. \end{aligned}$$

2. On a aussi, puisque $p \geq 2$:

$$\begin{aligned} & \#\{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\} ; \|\underline{\mathbf{S}}\| = p\} \\ &= \sum_{l=1}^{\frac{p+1}{3}} \#\{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\} ; \|\underline{\mathbf{S}}\| = p, l(\underline{\mathbf{S}}) = l\} \leq p 2^p. \end{aligned}$$

□

3.2.3 Rappels sur les coefficients de Fourier des multitangentes.

Rappelons que les multitangentes sont des fonctions définies par les sommes :

$$\mathcal{T}e^{s_1, \dots, s_r}(z) = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{(n_1 + z)^{s_1} \cdots (n_r + z)^{s_r}},$$

où $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ et $(s_1; \dots; s_r) \in \mathcal{S}^* = \{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}_1) ; s_1 \geq 2 \text{ et } s_r \geq 2\}$.

1. Coefficients de Fourier des multitangentes convergentes.

Le développement en série de Fourier de $z \mapsto \frac{\pi}{\tan(\pi z)}$ est classique. On en déduit celui des multitangentes convergentes (cf. §7.2 pour les calculs) en appliquant la réduction en monotangentes (cf. p. 121 pour la première version, ou p. 145 pour la seconde version).

On note :

$${}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}} = \left(\prod_{l=1}^{i-1} (-1)^{k_l} \right) \left(\prod_{l=i+1}^r (-1)^{s_l} \right) \left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^r \binom{s_l + k_l - 1}{s_l - 1} \right),$$

$$\mathcal{Z}_{i,k}^{\underline{s}} = \sum_{\substack{k_j \geq 0, j \neq i \\ \sum_{j \neq i} k_j = k}} {}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}} \mathcal{Z}e^{s_r + k_r, \dots, s_{i+1} + k_{i+1}} \mathcal{Z}e^{s_1 + k_1, \dots, s_{i-1} + k_{i-1}},$$

$$\widehat{\mathcal{T}}_n^{\underline{s}} = 2i\pi \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=2}^{s_j} \frac{(-2in\pi)^{k-1}}{(k-1)!} \mathcal{Z}_{j, s_j - k}^{\underline{s}} \right).$$

On a :

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S}^*, \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) = \begin{cases} \sum_{n < 0} \widehat{\mathcal{T}}_n^{\underline{s}} e^{2in\pi z}, & \text{si } \Im m z < 0. \\ -\sum_{n > 0} \widehat{\mathcal{T}}_n^{\underline{s}} e^{2in\pi z}, & \text{si } \Im m z > 0. \end{cases}$$

On notera ce résultat de manière abrégée sous la forme :

$$\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) = \varepsilon \sum_{n \varepsilon > 0} \widehat{\mathcal{T}}_n^{\underline{s}} e^{2in\pi z}, \text{ où } \varepsilon = \text{sg}(\Im m z).$$

2. Majoration des coefficients de Fourier des multitangentes.

On dispose aussi de la majoration $|\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z)| \leq \frac{4l(\underline{s})}{|\Im m z|^{\|\underline{s}\| - l(\underline{s}) - 1}}$, où $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$ et $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

En procédant de la même manière que pour la majoration effectuée à la page 169, cela permet aussi d'obtenir :

$$\forall c > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \underline{s} \in \mathcal{S}^*, \left| \widehat{\mathcal{T}}_n^{\underline{s}} \right| \leq \frac{4l(\underline{s})}{c^{\|\underline{s}\| - l(\underline{s}) - 1}} e^{2c|n|\pi}. \quad (19)$$

3. Le moule $\mathcal{T}e_{\text{module}}^\bullet$.

Modifions légèrement la définition des multitangentes :

$$\forall \underline{\mathbf{s}} \in \mathcal{S}^* , \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z} , \mathcal{T}e_{\text{module}}^{s_1, \dots, s_r}(z) = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{|n_1 + z|^{s_1} \dots |n_r + z|^{s_r}} .$$

$\mathcal{T}e_{\text{module}}^\bullet$ définit un moule de fonction 1-périodique, vérifiant les même inégalités que celles vérifiées par les fonctions $\mathcal{T}e^{\underline{\mathbf{s}}}$. En particulier :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{\mathbf{s}} \in \mathcal{S}_{\geq 2}^* , \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z} , |\mathcal{T}e_{\text{module}}^{\underline{\mathbf{s}}}(z)| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{|\Im m z|}} \right)^{\underline{\mathbf{s}}} . \\ \forall c > 0 , \forall n \in \mathbb{Z} , \forall \underline{\mathbf{s}} \in \mathcal{S}^* , \left| \widehat{\mathcal{T}}_{\text{module}, n}^{\underline{\mathbf{s}}} \right| \leq \frac{4l(\underline{\mathbf{s}})}{c^{||\underline{\mathbf{s}}|| - l(\underline{\mathbf{s}}) - 1}} e^{2c|n|\pi} . \end{array} \right.$$

3.2.4 Etude des coefficients de Fourier de τ^\bullet .

La formule (18) et l'expression de π^+ obtenue au paragraphe précédent (cf. p. 50) font naturellement apparaître, c'est-à-dire par simple permutation de sommes, le moule τ^\bullet défini sur $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ par :

$$\tau^{\underline{\mathbf{s}}} = \begin{cases} id_{\mathbb{C}} & , \text{ si } \underline{\mathbf{s}} = \emptyset \\ \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\underline{\mathbf{s}})} \mathcal{B}^{\underline{\mathbf{s}}, \mathbf{i}} \mathcal{T}e^{\sigma(\underline{\mathbf{s}}; \mathbf{i})} & , \text{ si } l(\underline{\mathbf{s}}^1) = 1 \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} ,$$

où pour toute séquence $\underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ et toute matrice $\mathbf{i} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{N})$ triangulaire inférieure, on note $\sigma(\underline{\mathbf{s}}; \mathbf{i}) = \left(||\underline{\mathbf{s}}^k|| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_k^{\mathbf{i}} \right)_{1 \leq k \leq r}$.

Pour tout $\underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, $\tau^{\underline{\mathbf{s}}}$ est une fonction 1-périodique, holomorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$. L'étude de ses coefficients de Fourier est nécessaire à l'évaluation des invariants holomorphes. En fait, seul le cas où $\underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ vérifie $\underline{\mathbf{s}} \neq \emptyset$ et $l(\underline{\mathbf{s}}^1) = 1$ est nécessaire : le cas où $\underline{\mathbf{s}} = \emptyset$ n'est pas à prendre en compte et lorsque $l(\underline{\mathbf{s}}) \geq 2$, $\tau^{\underline{\mathbf{s}}}$ est nulle...

Fixons nous désormais $\underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\}$ vérifiant $l(\underline{\mathbf{s}}) = 1$.

1. Coefficients de Fourier de $\tau^{\underline{\mathbf{s}}}$.

Le développement en série de Fourier de $\mathcal{T}e^\bullet$ donne, toujours en notant $\varepsilon = \text{sg}(\Im m(z))$:

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z} , \forall \underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) , \tau^{\underline{\mathbf{s}}}(z) &= \varepsilon \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\underline{\mathbf{s}})} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}^{\underline{\mathbf{s}}, \mathbf{i}} \widehat{\mathcal{T}}_n^{\sigma(\underline{\mathbf{s}}; \mathbf{i})} e^{2in\pi z} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon \left(\sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\underline{\mathbf{s}})} \mathcal{B}^{\underline{\mathbf{s}}, \mathbf{i}} \widehat{\mathcal{T}}_n^{\sigma(\underline{\mathbf{s}}; \mathbf{i})} \right) e^{2in\pi z} . \end{aligned}$$

Cela permet d'affirmer que les coefficients de Fourier de $\tau^{\underline{\mathbf{S}}}$ sont, au signe près, les $\widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}}$:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\}, \widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}} = \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\underline{\mathbf{S}})} \mathcal{B}^{\underline{\mathbf{S}}, \mathbf{i}} \widehat{\mathcal{T}}_n^{\sigma(\underline{\mathbf{S}}; \mathbf{i})}.$$

Donc :

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \forall \underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\}, l(\underline{\mathbf{S}}^1) = 1 \implies \tau^{\underline{\mathbf{S}}}(z) = \varepsilon \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}} e^{2in\pi z}.$$

2. Majoration d'un second coefficient combinatoire.

Esquisons ici l'étude d'un coefficient combinatoire qui apparaît naturellement lorsqu'on cherche à montrer directement la convergence de la série moulienne $\sum_{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})} \text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \tau^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}}$

ou lorsqu'on cherche à majorer le coefficient de Fourier $\widehat{\tau}_n^{\bullet}$. Il s'agit du moule β^{\bullet} défini sur $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ par :

$$\forall \underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}), \beta^{\underline{\mathbf{S}}} = \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\underline{\mathbf{S}})} \mathcal{B}^{\underline{\mathbf{S}}, \mathbf{i}}.$$

Notons qu'a priori ce coefficient combinatoire ne dépend que des valeurs de $\|\underline{\mathbf{s}}^1\|, \dots, \|\underline{\mathbf{s}}^{r-1}\|, l(\underline{\mathbf{s}}^1), \dots, l(\underline{\mathbf{s}}^{r-1})$.

Fixons $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\}$, de longueur r . Nous allons tout d'abord calculer la série génératrice :

$$F_r(x_2; \dots; x_r) = \sum_{l_2, \dots, l_r \geq 0} \left(\sum_{\substack{i_{2,1}=l_2 \\ i_{3,1}+i_{3,2}=l_3 \\ \vdots \\ i_{r,1}+\dots+i_{r,r-1}=l_r}} \mathcal{B}^{\underline{\mathbf{S}}, \mathbf{i}} \right) x_2^{l_2} \dots x_r^{l_r}.$$

Pour cela, il suffit de reprendre à l'envers les opérations effectuées lors du calcul de $\Gamma_{\underline{\mathbf{n}}}^+(id_{\mathbb{C}})$ qui nous ont amené à considérer la notation ensembliste $\text{triangle}(\underline{\mathbf{S}})$. On obtient une fonction analytique, en les variables x_2, \dots, x_r sur le polydisque $B\left(0; \frac{1}{r}\right)^{r-1}$; les inégalités de Cauchy permettront de conclure quant à une estimation du coefficient de $x_2^{l(\underline{\mathbf{s}}^2)} \dots x_r^{l(\underline{\mathbf{s}}^r)}$, i.e. de $\beta^{\underline{\mathbf{S}}}$.

Notons qu'ici, \mathbf{i} désigne toujours une matrice triangulaire inférieure, à diagonale nulle, dont les coefficients sont les indices de sommation $i_{2,1}, i_{3,1}, i_{3,2}, \dots, i_{r,r-1}$. Cette série génératrice s'apparente quasiment à celle du moule β^{\bullet} , à longueur fixée.

Voici l'estimation obtenue :

Lemme : $\forall \underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}), 0 \leq \beta^{\underline{\mathbf{S}}} \leq \frac{l(\underline{\mathbf{S}})^{\|\underline{\mathbf{S}}\|}}{l(\underline{\mathbf{S}})!}.$

Démonstration : Soit $\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$. Notons aussi $r = l(\mathbf{S})$.

Avant toute chose, rappelons que les coefficients multinomiaux sont définis par :

$$\binom{s_1 + \dots + s_r}{s_1, \dots, s_{r-1}} = \frac{(s_1 + \dots + s_r)!}{s_1! \dots s_r!}.$$

Ceux-ci apparaissent dans la formule du multinôme qui est la clé du calcul qui va suivre.

• Commençons par calculer la série génératrice $F_r(x_2; \dots; x_r)$.

Tout d'abord, la famille $(\mathcal{B}^{\mathbf{S}, \mathbf{i}} x_2^{i_{2,1}} x_3^{i_{3,1}+i_{3,2}} \dots x_r^{i_{r,1}+\dots+i_{r,r-1}})_{i_{2,1}, i_{3,1}, \dots, i_{r,r-1} \geq 0}$ est formellement sommable. Cela permet d'écrire successivement :

$F_r(x_2; \dots; x_r)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l_2, \dots, l_r \geq 0} \left(\sum_{\substack{i_{2,1}=l_2 \\ i_{3,1}+i_{3,2}=l_3 \\ \vdots \\ i_{r,1}+\dots+i_{r,r-1}=l_r}} \mathcal{B}^{\mathbf{S}, \mathbf{i}} \right) x_2^{l_2} \dots x_r^{l_r} \\ &= \sum_{i_{2,1}, i_{3,1}, \dots, i_{r,r-1} \geq 0} \prod_{k=1}^{r-1} \frac{(\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_{\mathbf{s}_k}^{\mathbf{i}} - 1)!}{\left(\prod_{p=k+1}^r i_{p,p-k}! \right) (\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) - 1)!} \\ &\quad \times x_2^{i_{2,1}} x_3^{i_{3,1}+i_{3,2}} \dots x_r^{i_{r,1}+\dots+i_{r,r-1}} \\ &= \sum_{d_1, \dots, d_{r-1} \geq 0} \sum_{\substack{i_{2,1}+\dots+i_{r,r-1}=d_1 \\ \vdots \\ i_{r-1,1}+i_{r,2}=d_{r-2} \\ i_{r,1}=d_{r-1}}} \left(\prod_{k=1}^{r-1} \binom{\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + d_k - 1}{i_{k+1,1}, \dots, i_{r,r-k}} \right) \times \\ &\quad \left(\prod_{k=1}^{r-1} x_{k+1}^{i_{k+1,1}} \dots x_r^{i_{r,r-k}} \right) \\ &= \sum_{d_1, \dots, d_{r-1} \geq 0} \prod_{k=1}^{r-1} \left(\sum_{i_{k,1}+\dots+i_{r,r-k}=d_k} \binom{\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + d_k - 1}{i_{k+1,1}, \dots, i_{r,r-k}} x_{k+1}^{i_{k+1,1}} \dots x_r^{i_{r,r-k}} \right) \\ &= \sum_{d_1, \dots, d_{r-1} \geq 0} \prod_{k=1}^{r-1} \left[\binom{\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + d_k - 1}{d_k} \times \right. \\ &\quad \left. \sum_{i_{k,1}+\dots+i_{r,r-k}=d_k} \binom{d_k}{i_{k+2,2}, \dots, i_{r,r-k}} x_{k+1}^{i_{k+1,1}} \dots x_r^{i_{r,r-k}} \right] \\ &= \sum_{d_1, \dots, d_{r-1} \geq 0} \prod_{k=1}^{r-1} \binom{\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + d_k - 1}{d_k} (x_{k+1} + \dots + x_r)^{d_k} \\ &= \prod_{k=1}^{r-1} \left(\sum_{d_k \geq 0} \binom{\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + d_k - 1}{d_k} (x_{k+1} + \dots + x_r)^{d_k} \right). \end{aligned}$$

On trouve finalement :

$$F_r(x_2; \dots; x_r) = \prod_{k=1}^{r-1} \frac{1}{(1 - (x_{k+1} + \dots + x_r))^{\|\underline{s}^k\| - l(\underline{s}^k)}} .$$

- Notons $\mathcal{R} = \{(r_2 \dots; r_r) \in (\mathbb{R}_+)^{r-1}; r_2 + \dots + r_r < 1\}$.

Puisque la fonction F_r est analytique sur $\bigcup_{(\mathbf{R}_2; \dots; \mathbf{R}_r) \in \mathcal{R}} D(0; \mathbf{R}_2) \times \dots \times D(0; \mathbf{R}_r)$, nous pouvons utiliser les inégalités de Cauchy sur un polydisque $D(0; \mathbf{R}_2) \times \dots \times D(0; \mathbf{R}_r)$.

Pour tout $(x_2; \dots; x_r) \in D(0; \mathbf{R}_2) \times \dots \times D(0; \mathbf{R}_r)$, on dispose de la majoration :

$$|F_r(x_2; \dots; x_r)| \leq \prod_{k=2}^r \frac{1}{(1 - (\mathbf{R}_k + \dots + \mathbf{R}_r))^{\|\underline{s}^k\| - l(\underline{s}^k)}} .$$

D'où :

$$\forall \underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}), 0 \leq \beta^{\underline{\mathbf{S}}} \leq \frac{1}{\mathbf{R}_2^{l(\underline{s}^2)} \dots \mathbf{R}_r^{l(\underline{s}^r)}} \prod_{k=2}^r \frac{1}{(1 - (\mathbf{R}_k + \dots + \mathbf{R}_r))^{\|\underline{s}^k\| - l(\underline{s}^k)}} .$$

- Le choix de $\mathbf{R}_2 = \dots = \mathbf{R}_r = \frac{1}{r}$ donne les inégalités :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}), 0 \leq \beta^{\underline{\mathbf{S}}} &\leq r^{l(\underline{s}^2) + \dots + l(\underline{s}^r)} \prod_{k=2}^r \frac{1}{\left(\frac{k-1}{r}\right)^{\|\underline{s}^k\| - l(\underline{s}^k)}} \\ &\leq r^{\|\underline{s}^2\| + \dots + \|\underline{s}^r\|} \prod_{k=2}^r \frac{1}{(k-1)^{\|\underline{s}^k\| - l(\underline{s}^k)}} \\ &\leq r^{\|\underline{\mathbf{S}}\| + 1 - \|\underline{s}^1\|} \prod_{k=2}^r \frac{1}{(k-1)^2} \\ &\leq \frac{r^{\|\underline{\mathbf{S}}\| + 3 - \|\underline{s}^1\|}}{r!^2} \leq \frac{r^{\|\underline{\mathbf{S}}\|}}{r!^2} . \end{aligned}$$

□

3. Majoration des coefficients de Fourier de $\tau^{\underline{\mathbf{S}}}$

La majoration des coefficients de Fourier $\widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}}$ fournit si $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\}$:

$$\begin{aligned} \forall c > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, |\widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}}| &\leq \beta^{\underline{\mathbf{S}}} \frac{4l(\underline{\mathbf{S}})}{c^{\|\underline{\mathbf{S}}\| - l(\underline{\mathbf{S}}) - 1}} e^{2c|n|\pi} \\ &\leq 4 \frac{l(\underline{\mathbf{S}})^{\|\underline{\mathbf{S}}\| + 1}}{l(\underline{\mathbf{S}})!^2} \frac{e^{2c|n|\pi}}{c^{\|\underline{\mathbf{S}}\| - l(\underline{\mathbf{S}}) - 1}} . \end{aligned} \tag{20}$$

3.3 Evaluation des invariants holomorphes.

Rappelons que les invariants holomorphes d'un difféomorphisme tangent à l'identité sont les coefficients de Fourier des applications de corne. Ayant l'expression (10) à notre

disposition, il s'agit d'évaluer ces coefficients de Fourier. Pour cela, nous pouvons utiliser la formule intégrale.

Fixons $n \in \mathbb{Z}$. La convergence de la série (10) étant normale sur les demi-plans $\mathcal{P}_+(C)$ et $\mathcal{P}_-(C)$, on en déduit que, pour tout $z \in \mathcal{P}_{\text{sg}(n)}(C)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{[z; z+1]} (\pi^+(\zeta) - \zeta) e^{-2in\pi\zeta} d\zeta &= \int_{[z; z+1]} \left(\sum_{\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z})} U^{\mathbf{n}} \Gamma_{\mathbf{n}}^+(id_{\mathbb{C}})(\zeta) e^{-2in\pi\zeta} \right) d\zeta \\ &= \sum_{r \geq 1} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z}) \\ l(\mathbf{n})=r}} \int_{[z; z+1]} U^{\mathbf{n}} \Gamma_{n_1, \dots, n_r}^+(id_{\mathbb{C}})(\zeta) e^{-2in\pi\zeta} d\zeta. \end{aligned} \quad (21)$$

La quantité $\sum_{\substack{\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z}) \\ l(\mathbf{n})=r}} \int_{[z; z+1]} U^{\mathbf{n}} \Gamma_{n_1, \dots, n_r}^+(id_{\mathbb{C}})(\zeta) e^{-2in\pi\zeta} d\zeta$ se calcule à l'aide du lemme suivant :

Lemme : Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $C > 16r^2 C_0^{\frac{2}{3}} C_1$.

Alors, la fonction $\sum_{\substack{\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z}) \\ l(\mathbf{n})=r}} U^{\mathbf{n}} \Gamma_{\mathbf{n}}^+(id_{\mathbb{C}})$ se développe en série de Fourier de

la manière suivante, où l'on note toujours $\varepsilon = \text{sg}(\Im z)$:

$$\forall z \in \mathcal{P}_{\pm}(C), \quad \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z}) \\ l(\mathbf{n})=r}} U^{\mathbf{n}} \Gamma_{\mathbf{n}}^+(id_{\mathbb{C}})(z) = \sum_{n\varepsilon > 0} \left(\sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{S})=r}} \varepsilon \text{sg}^{\mathbf{S}} \widehat{\tau}_n^{\mathbf{S}} \mathcal{A}_{\mathbf{S}} \right) e^{2in\pi z}.$$

Démonstration : Notons $\gamma^{\mathbf{S}, \mathbf{n}}(\zeta) = U^{\mathbf{n}} \text{sg}^{\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\mathbf{S})} \mathcal{B}^{\mathbf{S}, \mathbf{i}} \left(\int_{[z; z+1]} \frac{e^{-2in\pi\zeta}}{\prod_{p=1}^r (\zeta + n_p)^{|\mathbf{s}^p| - l(\mathbf{s}^p) + \text{diag}_{\mathbf{i}}^{\frac{1}{p}}}} d\zeta \right) \mathcal{A}_{\mathbf{S}}$

pour $(\mathbf{S}; \mathbf{n}) \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \times \text{seq}(\mathbb{N}_3)$ et $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$.

Vérifions tout d'abord que la famille $(\gamma^{\mathbf{S}, \mathbf{n}}(z))_{\substack{(\mathbf{n}; \mathbf{S}) \in \text{seq}(\mathbb{N}_3) \times \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{n})=l(\mathbf{S})=r}}$ est uniformément sommable sur $\mathcal{P}_+(C)$ et $\mathcal{P}_-(C)$ pour tout $C > 16r^2 C_0^{\frac{2}{3}} C_1^2$:

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{(\mathbf{S}; \mathbf{n}) \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \times \text{seq}(\mathbb{N}_3) \\ l(\mathbf{S})=l(\mathbf{n})=r \\ l(\mathbf{s}^1)=1}} |\gamma^{\mathbf{S}, \mathbf{n}}(z)| \\ &\leq \sum_{\substack{(\mathbf{S}; \mathbf{n}) \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \times \text{seq}(\mathbb{N}_3) \\ l(\mathbf{S})=l(\mathbf{n})=r \\ l(\mathbf{s}^1)=1 \\ n_r < \dots < n_1}} \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\mathbf{S})} \mathcal{B}^{\mathbf{S}, \mathbf{i}} \left(\int_0^1 \frac{e^{2n\pi(\Re z + t)}}{\prod_{p=1}^r |z + t + n_p|^{|\mathbf{s}^p| - l(\mathbf{s}^p) + \text{diag}_{\mathbf{i}}^{\frac{1}{p}}}} dt \right) |\mathcal{A}_{\mathbf{S}}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{S})=r \\ l(\mathbf{s}^1)=1}} \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\mathbf{S})} \beta^{\mathbf{S}, \mathbf{i}} \left(\int_0^1 e^{2n\pi (\Re e(z)+t)} \mathcal{T} e_{\text{module}}^{\sigma(\mathbf{S}; \mathbf{i})}(z+t) dt \right) |\mathcal{A}_{\mathbf{S}}| \\
&\leq \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{S})=r \\ l(\mathbf{s}^1)=1}} \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\mathbf{S})} \beta^{\mathbf{S}, \mathbf{i}} \left(\int_0^1 e^{2n\pi (\Re e(z)+t)} \left(\frac{2}{\sqrt{\Im m z}} \right)^{\|\mathbf{S}\|} dt \right) |\mathcal{A}_{\mathbf{S}}| \\
&\leq \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{S})=r}} \beta^{\mathbf{S}} \left(\frac{2}{\sqrt{\Im m z}} \right)^{\|\mathbf{S}\|} |\mathcal{A}_{\mathbf{S}}| \left(\int_0^1 e^{2n\pi (\Re e(z)+t)} dt \right) \\
&\leq \sum_{p \geq 3r-1} \left(\sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{S})=r \\ \|\mathbf{S}\|=p}} 1 \right) \frac{r^p}{r!^2} \left(\frac{2}{\sqrt{\Im m z}} \right)^p (C_0^{\frac{1}{3}} C_1)^{p+1} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 e^{2n\pi (\Re e(z)+t)} dt \right) \\
&\leq \frac{C_0^{\frac{1}{3}} C_1}{r!^2} \left(\sum_{p \geq 3r-1} \left(\frac{4r C_0^{\frac{1}{3}} C_1}{\sqrt{\Im m z}} \right)^p \right) \left(\int_0^1 e^{2n\pi (\Re e(z)+t)} dt \right) \\
&\leq \frac{C_0^{\frac{1}{3}} C_1}{r!^2} \left(\sum_{p \geq 3r-1} \left(\frac{4r C_0^{\frac{1}{3}} C_1}{\sqrt{C}} \right)^p \right) \left(\int_0^1 e^{2n\pi (\Re e(z)+t)} dt \right) \\
&< +\infty .
\end{aligned}$$

Remarquons que nous avons démontré en même temps, pour $\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3)$ de longueur r et $C > 16r^2 C_0^{\frac{2}{3}} C_1^2$, la convergence normale sur tout demi-plan $\mathcal{P}_+(C)$ ou $\mathcal{P}_-(C)$ de $\Gamma_{\mathbf{n}}^+(id_{\mathbb{C}})$.

Calculons désormais la quantité $\sum_{\substack{\mathbf{n} \in \text{seq}(z) \\ l(\mathbf{n})=r}} \int_{[z; z+1]} U^{\mathbf{n}} \Gamma_{n_1, \dots, n_r}^+(id_{\mathbb{C}})(\zeta) e^{-2in\pi\zeta} d\zeta$, pour $z \in \mathcal{P}_+(C)$ ou $z \in \mathcal{P}_-(C)$ lorsque $C > 16r^2 C_0^{\frac{2}{3}} C_1^2$. Pour cela, nous utiliserons successivement les faits suivant :

1. La convergence normale de $\Gamma_{\mathbf{n}}(id_{\mathbb{C}})$ sur $\mathcal{P}_{\pm}(C)$, pour intervertir les symboles sommes et intégrales une première fois.
2. La sommabilité de la famille $(\gamma^{\mathbf{S}, \mathbf{n}})_{\substack{(\mathbf{n}; \mathbf{S}) \in \text{seq}(\mathbb{N}_3) \times \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{n})=l(\mathbf{S})=r}}$ pour $z \in \mathcal{P}_+(C)$ ou $z \in \mathcal{P}_-(C)$, pour justifier une permutation de sommes.
3. La convergence normale de $\mathcal{T}e^{\mathbf{S}}$ sur $\mathcal{P}_{\pm}(0)$, pour $\mathbf{S} \in \mathcal{S}^*$, pour intervertir à nouveau une somme et une intégrale.
4. La définition des coefficients de Fourier afin de reconnaître un coefficient de Fourier d'une multitangente.
5. L'expression des coefficients de Fourier de $\tau^{\mathbf{S}}$.

Ces différentes étapes permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z}) \\ l(\mathbf{n})=r}} \int_{[z; z+1]} U^{\mathbf{n}} \Gamma_{n_1, \dots, n_r}^+(id_{\mathbb{C}})(\zeta) e^{-2in\pi\zeta} d\zeta \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z}) \\ l(\mathbf{n})=r}} \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{S})=r, l(\underline{\mathbf{S}}^1)=1}} \left(U^{\mathbf{n}} \text{sg}^{\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\mathbf{S})} \mathcal{B}^{\mathbf{S}, \mathbf{i}} \left(\int_{[z; z+1]} \frac{e^{-2in\pi\zeta}}{\prod_{p=1}^r (\zeta + n_p)^{\|\underline{\mathbf{S}}^p\| - l(\underline{\mathbf{S}}^p) + \text{diag}_p^{\frac{1}{2}}}} d\zeta \right) \mathcal{A}_{\mathbf{S}} \right) \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{S})=r, l(\underline{\mathbf{S}}^1)=1}} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z}) \\ l(\mathbf{n})=r}} \left(U^{\mathbf{n}} \text{sg}^{\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\mathbf{S})} \mathcal{B}^{\mathbf{S}, \mathbf{i}} \left(\int_{[z; z+1]} \frac{e^{-2in\pi\zeta}}{\prod_{p=1}^r (\zeta + n_p)^{\|\underline{\mathbf{S}}^p\| - l(\underline{\mathbf{S}}^p) + \text{diag}_p^{\frac{1}{2}}}} d\zeta \right) \mathcal{A}_{\mathbf{S}} \right) \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{S})=r, l(\underline{\mathbf{S}}^1)=1}} \left(\text{sg}^{\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\mathbf{S})} \mathcal{B}^{\mathbf{S}, \mathbf{i}} \left(\int_{[z; z+1]} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z}) \\ l(\mathbf{n})=r}} \frac{U^{\mathbf{n}} e^{-2in\pi\zeta}}{\prod_{p=1}^r (\zeta + n_p)^{\|\underline{\mathbf{S}}^p\| - l(\underline{\mathbf{S}}^p) + \text{diag}_p^{\frac{1}{2}}}} d\zeta \right) \mathcal{A}_{\mathbf{S}} \right) \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{S})=r, l(\underline{\mathbf{S}}^1)=1}} \left(\text{sg}^{\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\mathbf{S})} \mathcal{B}^{\mathbf{S}, \mathbf{i}} \left(\int_{[z; z+1]} \mathcal{T}e^{\sigma(\mathbf{S}; \mathbf{n})}(\zeta) e^{-2in\pi\zeta} d\zeta \right) \mathcal{A}_{\mathbf{S}} \right) \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{S})=r, l(\underline{\mathbf{S}}^1)=1}} \left(\text{sg}^{\mathbf{S}} \left(\sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\mathbf{S})} \varepsilon \mathcal{B}^{\mathbf{S}, \mathbf{i}} \widehat{\mathcal{T}}_n^{\sigma(\mathbf{S}; \mathbf{n})} \right) \mathcal{A}_{\mathbf{S}} \right), \\
&\quad \text{où } \varepsilon = \begin{cases} \text{sg}(\Im m z) & , \text{ si } n \neq 0 \text{ et } \text{sg}(\Im m z) = \text{sg}(n) . \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases} \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{S})=r, l(\underline{\mathbf{S}}^1)=1}} \varepsilon \text{sg}^{\mathbf{S}} \widehat{\mathcal{T}}_n^{\mathbf{S}} \mathcal{A}_{\mathbf{S}} = \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{S})=r}} \varepsilon \text{sg}^{\mathbf{S}} \widehat{\mathcal{T}}_n^{\mathbf{S}} \mathcal{A}_{\mathbf{S}} .
\end{aligned}$$

Ainsi, ayant calculé les coefficients de Fourier de $\sum_{\substack{\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z}) \\ l(\mathbf{n})=r}} U^{\mathbf{n}} \Gamma_{\mathbf{n}}^+(id_{\mathbb{C}})$, on en déduit son développement en série de Fourier :

$$\forall z \in \mathcal{P}_{\pm}(\mathbb{C}), \quad \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z}) \\ l(\mathbf{n})=r}} U^{\mathbf{n}} \Gamma_{\mathbf{n}}^+(id_{\mathbb{C}})(z) = \sum_{n \varepsilon > 0} \left(\sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{S})=r}} \varepsilon \text{sg}^{\mathbf{S}} \widehat{\mathcal{T}}_n^{\mathbf{S}} \mathcal{A}_{\mathbf{S}} \right) e^{2in\pi z} .$$

□

Notons que le choix de la période d'intégration des coefficients de Fourier, i.e. de z , a été crucial dans la transformation d'écriture qui vient d'être faite. Mais, ce choix dépend à priori de r ... L'indépendance des coefficients de Fourier vis-à-vis de la période d'intégration permettra d'utiliser ce lemme dans l'expression (21) .

Finalement, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
\int_{[z; z+1]} (\pi^+(\zeta) - \zeta) e^{-2in\pi\zeta} d\zeta &= \sum_{r \geq 1} \sum_{\underline{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z})} \int_{[z; z+1]} U^{\underline{n}} \Gamma_{n_1, \dots, n_r}^+(id_{\mathbb{C}})(\zeta) e^{-2in\pi\zeta} d\zeta \\
&= \varepsilon \sum_{r \geq 1} \sum_{\substack{\underline{s} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\underline{s}) = r}} \text{sg}^{\underline{s}} \widehat{\tau}_n^{\underline{s}} \mathcal{A}_{\underline{s}} \\
&= \varepsilon \sum_{\underline{s} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\}} \text{sg}^{\underline{s}} \widehat{\tau}_n^{\underline{s}} \mathcal{A}_{\underline{s}} .
\end{aligned}$$

Remarquons que $\widehat{\tau}_0^{\bullet}$ est le moule nul, ce qui réduit la somme à 0 si $n = 0$.

On a alors la propriété suivante :

Propriété : A l'aide des notations précédentes, les invariants holomorphes de f sont donnés sous forme d'une contraction moule-comoule :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, A_{2i\pi n} = \text{sg}(n) \sum_{\underline{s} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\}} \text{sg}^{\underline{s}} \widehat{\tau}_n^{\underline{s}} \mathcal{A}_{\underline{s}} . \quad (22)$$

3.4 Evaluation de l'application de corne π^+ .

Gardons les notations introduites précédemment. En plus de celles-ci, notons, pour $r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_r = \sum_{\substack{\underline{s} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\underline{s}) = r}} \text{sg}^{\underline{s}} \tau^{\underline{s}} \mathcal{A}_{\underline{s}}$ et $\mathcal{C} = \sum_{r \geq 0} \mathcal{C}_r = \sum_{\underline{s} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})} \text{sg}^{\underline{s}} \tau^{\underline{s}} \mathcal{A}_{\underline{s}}$.

Remarquons que des majorations du même type que celles effectuées à la section précédente permettent de donner les coefficients de Fourier de \mathcal{C}_r :

Lemme : En notant $\varepsilon = \text{sg}(\Im z)$, pour $r \in \mathbb{N}^*$ et $C > 2rC_0^{\frac{1}{3}}C_1$, on a :

$$\forall z \in \mathcal{P}_{\pm}(C), \mathcal{C}_r(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\substack{\underline{s} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\underline{s}) = r}} \varepsilon \text{sg}^{\underline{s}} \widehat{\tau}_n^{\underline{s}} \mathcal{A}_{\underline{s}} \right) e^{2in\pi z} .$$

Démonstration : Montrons que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{\underline{s} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\underline{s}) = r}} \text{sg}^{\underline{s}} \widehat{\tau}_n^{\underline{s}} \mathcal{A}_{\underline{s}} e^{2in\pi z}$ converge normalement sur $\mathcal{P}_+(C)$ et $\mathcal{P}_-(C)$, dès que $C > 2rC_0^{\frac{1}{3}}C_1$:

Etant donné $C > 2rC_0^{\frac{1}{3}}C_1$, on fixe $c \in]2rC_0^{\frac{1}{3}}C_1; C[$. Nous utiliserons cette valeur c dans la majoration (20) de $\widehat{\tau}_n^{\underline{s}}$. Les estimations données à la section précédente permettent alors d'écrire successivement :

$$\begin{aligned}
\left| \text{sg}^{\underline{s}} \widehat{\tau}_n^{\underline{s}} \mathcal{A}_{\underline{s}} e^{2in\pi z} \right| &\leq 4 \frac{r^{||\underline{s}||+1}}{r!^2} \frac{e^{2c|n|\pi}}{c^{||\underline{s}||-r-1}} \left(C_0^{\frac{1}{3}} C_1 \right)^{||\underline{s}||+1} e^{-2|n|\pi|\Im z|} \\
&\leq \frac{4r}{r!^2} c^{r+1} C_0^{\frac{1}{3}} C_1 \left(\frac{rC_0^{\frac{1}{3}}C_1}{c} \right)^{||\underline{s}||} e^{-2|n|\pi(|\Im z| - c)} \\
&\leq \frac{4r}{r!^2} c^{r+1} C_0^{\frac{1}{3}} C_1 \left(\frac{rC_0^{\frac{1}{3}}C_1}{c} \right)^{||\underline{s}||} e^{-2|n|\pi(C-c)} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Or : } & \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{S})=r}} \frac{4r}{r!^2} c^{r+1} C_0^{\frac{1}{3}} C_1 \left(\frac{r C_0^{\frac{1}{3}} C_1}{c} \right)^{||\mathbf{S}||} e^{-2|n|\pi(C-c)} \\
& = \frac{4r}{r!^2} c^{r+1} C_0^{\frac{1}{3}} C_1 \sum_{p \geq 3r-1} \left(\sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{S})=r, ||\mathbf{S}||=p}} 1 \right) \left(\frac{r C_0^{\frac{1}{3}} C_1}{c} \right)^p e^{-2|n|\pi(C-c)} \\
& = \frac{4r}{r!^2} c^{r+1} C_0^{\frac{1}{3}} C_1 \sum_{p \geq 3r-1} \left(\frac{2r C_0^{\frac{1}{3}} C_1}{c} \right)^p e^{-2|n|\pi(C-c)} \\
& < +\infty .
\end{aligned}$$

Cette dernière majoration montre bien la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \varepsilon > 0} \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{S})=r}} \varepsilon \text{sg}^{\mathbf{S}} \widehat{\tau}_n^{\mathbf{S}} \mathcal{A}_{\mathbf{S}} e^{2in\pi z}$. Ainsi, on a bien le développement de Fourier suivant :

$$\forall r \geq 1, \forall z \in \mathcal{P}_{\pm}(C), \mathcal{C}_r(z) = \sum_{n \varepsilon > 0} \left(\sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{S})=r}} \varepsilon \text{sg}^{\mathbf{S}} \widehat{\tau}_n^{\mathbf{S}} \mathcal{A}_{\mathbf{S}} \right) e^{2in\pi z} .$$

□

On constate alors que, $r \in \mathbb{N}^*$ étant fixé, les fonctions \mathcal{C}_r et $\sum_{\substack{\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z}) \\ l(\mathbf{n})=r}} U^{\mathbf{n}} \Gamma_{\mathbf{n}}^+(id_C)$ ont

les même coefficients de Fourier. Nécessairement, ces deux fonctions coïncident donc sur l'intersection de leur ensemble de définition. Puisqu'elles sont toutes les deux holomorphes, et définie sur des demi-plans du type $\mathcal{P}_{\pm}(C)$, le principe du prolongement analytique permet, si nécessaire, de les prolonger.

Ainsi, on en déduit que :

Corollaire : 1. $\forall r \geq 1, \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z}) \\ l(\mathbf{n})=r}} U^{\mathbf{n}} \Gamma_{\mathbf{n}}^+(id_C) = \mathcal{C}_r = \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ l(\mathbf{S})=r}} \text{sg}^{\mathbf{S}} \tau^{\mathbf{S}} \mathcal{A}_{\mathbf{S}} .$

2. $\pi^+ - id_C = \sum_{\mathbf{n} \in \text{seq}(\mathbb{Z}) - \{\emptyset\}} U^{\mathbf{n}} \Gamma_{\mathbf{n}}^+(id_C) = \sum_{r \geq 1} \mathcal{C}_r = \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\}}} \text{sg}^{\mathbf{S}} \tau^{\mathbf{S}} \mathcal{A}_{\mathbf{S}} .$

3.5 Rappels des notations et énoncé du résultat.

Rappelons l'ensemble des notations introduites dans les sections précédentes et nécessaires pour comprendre la formule donnant l'application de corne π^+ et celle donnant les invariants holomorphes. Il s'agit de notations concernant les alphabets, les séquences, les moules et comoules.

3.5.1 Notations.

Alphabets. Nous considérons les deux alphabets suivant :

$$\mathbb{N}_3 = \{n \in \mathbb{N} ; n \geq 3\} , \quad \text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\} .$$

Séquences. Une séquence de $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ est notée par une lettre majuscule grasse et soulignée. Ses composantes sont notées en lettres minuscules grasses soulignées et numérotées en exposant. Ainsi, pour $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, on écrit : $\underline{\mathbf{S}} = (\underline{\mathbf{s}}^1; \dots; \underline{\mathbf{s}}^r)$.

Voici d'autres notations relatives aux séquences, où $\underline{\mathbf{S}}$ est notée comme précédemment.

1. Lorsque $\underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3)$ ou $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, $l(\underline{\mathbf{s}})$ et $l(\underline{\mathbf{S}})$ désignent les longueurs de $\underline{\mathbf{s}}$ et $\underline{\mathbf{S}}$ respectivement.
2. Le poids de $\underline{\mathbf{s}} = (s_1; \dots; s_r) \in \text{seq}(\mathbb{N}_3)$ est $\|\underline{\mathbf{s}}\| = s_1 + \dots + s_r$.
3. Le poids de $\underline{\mathbf{S}} = (\underline{\mathbf{s}}^1; \dots; \underline{\mathbf{s}}^r) \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ est $\|\underline{\mathbf{S}}\| = \sum_{k=1}^{l(\underline{\mathbf{S}})} \|\underline{\mathbf{s}}^k\| - 1$.

Notations intermédiaires. Avant d'en arriver à définir les moules utiles, voici quelques notations intermédiaires :

1. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice $\underline{\mathbf{i}} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{N})$ triangulaire inférieure :

$$\text{diag}_p^{\underline{\mathbf{i}}} = \begin{cases} \sum_{k=p+1}^r i_{k,k-p} & , \text{ si } 0 \leq p \leq r-1 . \\ 0 & , \text{ si } p = r . \end{cases}$$

2. Pour toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, de longueur r :

$$\text{triangle}(\underline{\mathbf{S}}) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ i_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ i_{r,1} & \cdots & i_{r,r-1} & 0 \end{array} \right) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{N}) ; \forall k \in \llbracket 2; r \rrbracket , \sum_{l=1}^{k-1} i_{k,l} = l(\underline{\mathbf{s}}^k) \right\} .$$

3. Pour toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ et pour toute matrice $\underline{\mathbf{i}} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{N})$ triangulaire inférieure :

$$\sigma(\underline{\mathbf{S}}; \underline{\mathbf{i}}) = \left(\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_k^{\underline{\mathbf{i}}} \right)_{1 \leq k \leq r} .$$

4. Pour toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ et pour toute matrice $\underline{\mathbf{i}} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{N})$ triangulaire inférieure :

$$\mathcal{B}^{\underline{\mathbf{S}}, \underline{\mathbf{i}}} = \prod_{k=1}^{l(\underline{\mathbf{S}})} \frac{(\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_k^{\underline{\mathbf{i}}} - 1)!}{\left(\prod_{p=k+1}^r i_{p,p-k}! \right) (\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) - 1)!} .$$

Remarquons que les matrices triangulaires inférieures sont notées comme des séquences. Il y a deux raisons à cela :

1. Ces matrices sont apparues comme des indices de sommations, comme c'est le cas pour les séquences dans une contraction moule/comoule.
2. Ces matrices agissent à travers la quantité diag_k^{\bullet} qui se comporte exactement comme la séquence $(\text{diag}_1^{\underline{\mathbf{s}}}; \dots; \text{diag}_r^{\underline{\mathbf{s}}})$ lorsque $\underline{\mathbf{s}}$ est de longueur r .

Moules Il s'agit de moules, à valeurs respectivement dans $\{+1 ; -1\}$ et $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbb{Z})$, définis sur $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ par :

$$\forall \underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) , \text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} = (-1)^{l(\underline{\mathbf{S}}^2) + \dots + l(\underline{\mathbf{S}}^{l(\underline{\mathbf{S}})})} .$$

$$\forall \underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) , \tau^{\underline{\mathbf{S}}} = \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\underline{\mathbf{S}})} \mathcal{B}^{\underline{\mathbf{S}}, \mathbf{i}} \mathcal{T}e^{\sigma(\underline{\mathbf{S}}, \mathbf{i})} .$$

Nous considérons aussi des moules qui sont les coefficients de Fourier des moules 1-périodiques $\mathcal{T}e^\bullet$ et τ^\bullet :

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et toute séquence $\underline{\mathbf{s}} \in \mathcal{S}^*$:

$$\widehat{\mathcal{T}}_n^{\underline{\mathbf{s}}} = 2i\pi \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=2}^{s_j} \frac{(-2in\pi)^{k-1}}{(k-1)!} \mathcal{Z}_{j, s_j - k}^{\underline{\mathbf{s}}} \right) .$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$:

$$\widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{cases} \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\underline{\mathbf{S}})} \mathcal{B}^{\underline{\mathbf{S}}, \mathbf{i}} \widehat{\mathcal{T}}_n^{\sigma(\underline{\mathbf{S}}, \mathbf{i})} & , \text{ si } l(\underline{\mathbf{S}}^1) = 1 . \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

Comoules On définit enfin deux comoules par :

1. Pour toute séquence $\underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3)$, de longueur r : $A_{\underline{\mathbf{s}}} = a_{s_1} \cdots a_{s_r}$.
2. Pour toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, de longueur r : $\mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}} = A_{\underline{\mathbf{S}}^1} \cdots A_{\underline{\mathbf{S}}^r}$.

3.5.2 Enoncé du résultat.

Ainsi, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème : Soit f un difféomorphisme tangent à l'identité s'exprimant à l'infini sous la forme : $f(z) = z + 1 + \gamma^+(z)$, où la série $\gamma^+(z) = \sum_{n \geq 3} \frac{a_n}{z^{n-1}}$ est convergente au voisinage de $+\infty$, ce qui s'exprime par :

$$\exists (C_0 ; C_1) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 , |a_n| \leq C_0 C_1^n .$$

Les notations précédentes permettent d'écrire :

1. La fonction π^+ s'écrit comme une contraction moule-comoule :

$$\pi^+ = \sum_{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})} \text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \tau^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}} .$$

2. Les invariants holomorphes de f admettent l'expression moulienne suivante :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^* , A_{2in\pi} = \text{sg}(n) \sum_{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\}} \text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}} .$$

4 Majoration des invariants holomorphes.

Nous allons désormais mettre en oeuvre le programme esquissé lors de l'étude de la convergence du développement moulien de f_+^* , p. 48. Cela nous permettra de donner une majoration des invariants holomorphes. Pour cela, on reprends les majorations effectuées dans le second volume de [15] (cf. p. 313-317) en ayant le soucis d'optimiser les constantes qui s'y trouve.

Cela sera essentiel pour la mise en place de l'algorithme de calcul des invariants proposé à la section 6.3.

4.1 Majoration de f_+^* sur un demi plan.

4.1.1 Une expression de f^* .

Les questions de sommabilité formelle étant simples à vérifier, la formule de Taylor permet d'écrire, dans $\mathcal{L}\left(\mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]\right)$: $G - Id = \sum_{n \geq 1} \frac{(\gamma^+)^n}{n!} \partial_z^n$. On en déduit alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, que : $(G - Id) \circ L^n(id) = (G - Id)(id)$.

Ainsi, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout $(n_1; \dots; n_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$, on a :

$$\mathcal{L}^{n_r-1} \cdot \mathcal{G} \cdot \dots \cdot \mathcal{L}^{n_1} \cdot \mathcal{G}(Id) \cdot id = L^{n_r-1} \circ (G - Id) \circ \dots \circ L^{n_1} \circ (G - Id) \cdot id. \quad (23)$$

Par ailleurs, nous avons vu dans l'introduction que l'équation aux différences $L(\tilde{\varphi}) - \tilde{\varphi} = a$ (i.e. sous forme développée $\tilde{\varphi}(z+1) - \tilde{\varphi}(z) = a(z)$), avec $a \in \frac{1}{z^2} \mathbb{C} \left\{ \frac{1}{z} \right\}$, admet une unique solution dans $\frac{1}{z} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$, à savoir $\tilde{\varphi} = \mathcal{B}^{-1} \left(\frac{\hat{a}(\zeta)}{e^{-\zeta} - 1} \right)$.

Lorsque nous affaiblissons l'hypothèse en $a \in \frac{1}{z^2} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]_1$, cette équation aux différences admet toujours une unique solution dans $\frac{1}{z} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]_1$, s'écrivant encore $\tilde{\varphi} = \mathcal{B}^{-1} \left(\frac{\hat{a}(\zeta)}{e^{-\zeta} - 1} \right)$. En effet, puisqu'avec cette nouvelle hypothèse \hat{a} est analytique dans un voisinage de 0 et s'annule en 0, $\zeta \mapsto \frac{\hat{a}(\zeta)}{e^{-\zeta} - 1}$ est aussi analytique dans un voisinage de 0, ce qui justifie bien le caractère 1-Gevrey de l'unique solution formelle obtenue.

Par conséquent, l'opérateur $Id - L : \frac{1}{z^2} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]_1 \longrightarrow \frac{1}{z} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]_1$ est inversible.

On va pouvoir injecter l'égalité (23) dans l'expression (9), puis utiliser le fait que $G - Id$ augmente la valuation d'au moins 3 et que $Id - L$ est ici inversible (car γ^+ est analytique au voisinage de 0). Pour finir, on écrira $G - Id$ à l'aide de la formule de Taylor. On en déduit donc, dans $\mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$, les égalités suivantes exprimant $f^* = F^*(id)$:

$$\begin{aligned} f^* &= id + \sum_{r \geq 1} \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 1} L^{n_r-1} \circ (G - Id) \circ \dots \circ L^{n_1} \circ (G - Id) \cdot id \\ &= id + \sum_{r \geq 1} L^{-1} \circ \left(\sum_{n_1 \geq 1} L^{n_r} \right) \circ (G - Id) \circ \dots \circ \left(\sum_{n_1 \geq 1} L^{n_1} \right) \circ (G - Id) \cdot id \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= id + \sum_{r \geq 1} L^{-1} \circ \underbrace{(L^{-1} - Id)^{-1} \circ (G - Id) \circ \cdots \circ (L^{-1} - Id)^{-1} \circ (G - Id)}_{r \text{ fois}} \cdot id \\
&= id + (Id - L)^{-1} \circ \sum_{r \geq 1} \left((G - Id) \circ (L^{-1} - Id)^{-1} \right)^{r-1} \circ (G - Id) \cdot id \\
&= id + (Id - L)^{-1} \circ \sum_{r \geq 1} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(\gamma^+)^n}{n!} \partial_z^n \circ (L^{-1} - Id)^{-1} \right)^{r-1} \cdot \gamma^+ \\
&= id + (Id - L)^{-1} \circ \sum_{r \geq 0} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(\gamma^+)^n}{n!} \partial_z^n \circ (L^{-1} - Id)^{-1} \right)^r \cdot \gamma^+ \\
&= id + (Id - L)^{-1}(\gamma^+) + (Id - L)^{-1} \circ \sum_{r \geq 1} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(\gamma^+)^n}{n!} \partial_z^n \circ (L^{-1} - Id)^{-1} \right)^r \cdot \gamma^+ .
\end{aligned}$$

On obtient donc le lemme suivant :

Lemme : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H_n^+ : \frac{1}{z^2} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right]_1 \right] \longrightarrow \frac{1}{z^2} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right]_1 \right]$
 $\varphi \longmapsto \frac{(\gamma^+)^n}{n!} \partial_z^n \circ (L^{-1} - Id)^{-1} .$

Alors, l'expression de f^* est donnée dans $z + \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right]_1 \right]$ par :

$$f^* = id + (Id - L)^{-1}(\gamma^+) + (Id - L)^{-1} \circ \sum_{r \geq 1} \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 1} H_{n_1}^+ \circ \cdots \circ H_{n_r}^+ \cdot \gamma^+ . \quad (24)$$

4.1.2 Expression de $\widehat{f^*} = \mathcal{B}(f^*)$ dans le plan de Borel.

Rappelons que lorsque $a \in \frac{1}{z^2} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right]_1 \right]$, $(Id - L)^{-1}(a)$ est l'unique solution de l'équation aux différences $\varphi(z) - \varphi(z + 1) = a(z)$, dont l'inconnue est $\varphi \in \frac{1}{z^2} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right]_1 \right]$. Ainsi, par passage à la transformée de Borel, on obtient $\mathcal{B}((Id - L)^{-1}(a))(\zeta) = \frac{\widehat{a}(\zeta)}{1 - e^{-\zeta}}$ pour tout $a \in \frac{1}{z^2} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right]_1 \right]$.

De même, $\mathcal{B}((L^{-1} - Id)^{-1}(a))(\zeta) = \frac{e^{-\zeta}}{1 - e^{-\zeta}} \widehat{a}(\zeta) = \frac{\widehat{a}(\zeta)}{e^\zeta - 1}$ pour tout $a \in \frac{1}{z^2} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right]_1 \right]$.

Enfin, en utilisant les propriétés de la transformation de Borel¹⁶, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varphi \in \frac{1}{z^2} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right]_1 \right]$: $\mathcal{B}(H_n^+(\varphi))(\zeta) = \left(\frac{(\widehat{\gamma^+})^{*n}}{n!} \star \mathcal{B}(\partial_z^n \circ (L^{-1} - Id)^{-1}(\varphi)) \right) (\zeta)$
 $= \left(\frac{(\widehat{\gamma^+})^{*n}}{n!} \star \left(\frac{(-\zeta)^n}{e^\zeta - 1} \widehat{\varphi} \right) \right) (\zeta) .$

¹⁶ φ^{*n} désignera toujours la puissance de convolution, c'est-à-dire la fonction $\underbrace{\varphi \star \cdots \star \varphi}_{n \text{ fois}}$.

Ces trois faits regroupés permettent d'écrire :

Lemme : Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n^+(\zeta) = \frac{(-\zeta)^n}{n!} \frac{1}{e^\zeta - 1}$ la fonction définie sur $\mathbb{C} - 2i\pi\mathbb{Z}$.
On considère aussi l'opérateur \widehat{H}_n^+ défini sur $\zeta\mathbb{C}\{\zeta\}$ par :

$$\widehat{H}_n^+(\varphi) = (\widehat{\gamma^+})^{*n} \star (E_n^+ \cdot \varphi)$$

Alors, pour tout $\zeta \in \mathbb{C} - 2i\pi\mathbb{Z}^*$, on a :

$$\widehat{f^*}(\zeta) = \delta'(\zeta) + \frac{\widehat{\gamma^+}(\zeta)}{1 - e^{-\zeta}} + \frac{1}{1 - e^{-\zeta}} \sum_{r \geq 1} \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 1} \widehat{H}_{n_1}^+ \circ \dots \circ \widehat{H}_{n_r}^+(\widehat{\gamma^+})(\zeta). \quad (25)$$

Remarquons tout de suite que la convolution, à priori formelle, apparaissant dans la définition de l'opérateur \widehat{H}_n^+ peut être remplacée par la convolution intégrale : toutes les fonctions en jeu définissent des séries entières en 0 .

4.1.3 Majoration de $\widehat{f^*}$ dans un secteur du plan de Borel du type $]\theta_1; \theta_2[\subset]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

On suit ici la même démarche celle exposée dans le second volume de [15] (cf. p. 313-317), avec le soucis d'optimiser les constantes.

Pour déduire du lemme précédent une majoration de $|\widehat{f^*}(\zeta) - \delta'(\zeta)|$, il nous suffit d'obtenir une majoration du module de chacun des termes dans la somme définissant $\widehat{f^*}(\zeta)$.

Pour cela, soit $(\theta_1; \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$. Soit aussi $\zeta \in \mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}$ où $\mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}$ désigne le secteur angulaire d'extrémité 0 et délimité par les angle θ_1 et θ_2 , c'est-à-dire $\theta = \arg \zeta \in]\theta_1; \theta_2[$. Enfin, dans tout ce paragraphe, fixons $\zeta \in \mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}$ et notons $\theta = \arg \zeta$.

En vue d'une approximation des invariants holomorphes, nous supposons aussi que γ^+ s'écrit sous la forme :

$$\gamma^+(z) = \sum_{n \geq n_0} \frac{a_n}{z^{n-1}}, \text{ où } n_0 \in \mathbb{N} \text{ vérifie } n_0 \geq 3.$$

- On sait que la fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ est décroissante et majorée par 1 sur \mathbb{R}^+ .

Ainsi, on a :

$$\left| \frac{\zeta}{1 - e^{-\zeta}} \right| \leq \frac{|\zeta|}{1 - e^{-\Re \zeta}} = \frac{1}{\cos \theta} \frac{|\zeta| \cos \theta}{1 - e^{-|\zeta| \cos \theta}} \leq \frac{1}{\cos \theta} e^{|\zeta| \cos \theta}.$$

Par définition de γ^+ , on a $\widehat{\gamma^+}(\zeta) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_{n+n_0}}{(n+n_0-2)!} \zeta^{n+n_0-2}$. Alors, en utilisant

la majoration géométrique des coefficients a_n exprimant le fait que f est convergent, on obtient : $\left| \widehat{\gamma^+}(\zeta) \right| = C_0 C_1^{n_0} \frac{|\zeta|^{n_0-2}}{(n_0-2)!} \sum_{n \geq 0} \frac{C_1^n |\zeta|^n}{n!} \leq C_0 C_1^{n_0} \frac{|\zeta|^{n_0-2}}{(n_0-2)!} e^{C_1 |\zeta|}$.

Ainsi, on en déduit : $\left| \frac{\widehat{\gamma^+}(\zeta)}{1 - e^{-\zeta}} \right| \leq \frac{C_0 C_1^{n_0}}{\cos \theta} \frac{|\zeta|^{n_0-3}}{(n_0-3)!} e^{(C_1 + \cos \theta) |\zeta|}$.

• D'autre part, il est clair que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{n!} \frac{x^n}{e^x - 1} \leq 1$. On en déduit les majorations suivantes concernant la fonction E_n^+ :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |E_n^+(\zeta)| \leq \frac{|\zeta|^n}{n!} \left| \frac{1}{e^\zeta - 1} \right| \leq \frac{|\zeta|^n}{n!} \frac{1}{e^{\Re \zeta} - 1} \leq \frac{1}{\cos^n \theta} \cdot \frac{1}{n!} \frac{(|\zeta| \cos \theta)^n}{e^{\Re \zeta} - 1} \leq \frac{1}{\cos^n \theta}.$$

• Il n'est pas difficile de voir, par récurrence, que si φ est une fonction définie dans le secteur angulaire $\mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}$ pour laquelle il existe $(\alpha; \beta; n_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{N}$ tel que pour tout $\zeta \in \mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}$, $|\varphi(\zeta)| \leq \alpha \frac{|\zeta|_0^n}{n_0!} e^{\beta|\zeta|}$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \zeta \in \mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}, |\varphi^{*n}(\zeta)| \leq \alpha^n \frac{|\zeta|^{nn_0+n-1}}{(nn_0+n-1)!} e^{\beta|\zeta|}.$$

Il est tout aussi immédiat que si $(n_1; \dots; n_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$, alors :

$$\widehat{H}_{n_1}^+ \circ \dots \circ \widehat{H}_{n_r}^+(\varphi)(\zeta) = \int_{0 < z_r < \dots < z_1 < \zeta} \widehat{\gamma}^{*n_1}(\zeta - z_1) E_{n_1}^+(z_1) \left(\prod_{k=2}^r \widehat{\gamma}^{*n_k}(z_{k-1} - z_k) E_{n_k}^+(z_k) \right) \varphi(z_r) dz_1 \dots dz_r.$$

Ici, chaque variable d'intégration z_k désigne un nombre complexe du type $t_k e^{i\theta}$, avec $\theta = \arg \zeta$. En paramétrant le domaine d'intégration pour nous ramener à un domaine d'intégration réel, puis en injectant les majorations obtenues précédemment dans cette expression, on obtient (en utilisant les notations condensées¹⁷) :

$$\left| \widehat{H}_{n_1}^+ \circ \dots \circ \widehat{H}_{n_r}^+(\widehat{\gamma}^+)(\zeta) \right| \leq \frac{(C_0 C_1^{n_0})^{1+n_1 \dots r} |\zeta|^{n_1 \dots r (n_0-1) + n_0 - 2}}{(\cos \theta)^{n_1 \dots r}} \frac{(n_0 - 2)!^{n_1 \dots r}}{\prod_{i=1}^r (n_i (n_0 - 1) - 1)!} \times e^{C_1 |\zeta|} \frac{J_{n_1(n_0-1), \dots, n_r(n_0-1)}}{(n_0 - 2)!}, \quad (26)$$

où l'on a posé : $J_{n_1, \dots, n_r} = \int_{0 < t_r < \dots < t_1 < 1} (1 - t_1)^{n_1-1} (t_1 - t_2)^{n_2-1} \dots (t_{r-1} - t_r)^{n_r-1} dt_1 \dots dt_r$.

Cette dernière intégrale se calcule aisément, car on dispose d'une relation de récurrence simple :

$$\begin{aligned} J_{n_1, \dots, n_{r+1}} &= \int_0^1 (1 - t_1)^{n_1-1} \left(\int_{0 < t_{r+1} < \dots < t_2 < t_1} (t_1 - t_2)^{n_2-1} \dots (t_r - t_{r+1})^{n_{r+1}} dt_2 \dots dt_{r+1} \right) dt_1 \\ &= J_{n_2, \dots, n_{r+1}} \cdot \int_0^1 (1 - t_1)^{n_1-1} t_1^{n_2 \dots (r+1)} dt_1 \\ &= \frac{(n_1 - 1)! (n_2 + \dots + n_{r+1})!}{(n_1 + \dots + n_{r+1})!} J_{n_2, \dots, n_{r+1}}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \forall r \in \mathbb{N}^*, \forall (n_1; \dots; n_r) \in (\mathbb{N}^*)^r, J_{n_1, \dots, n_r} = \frac{(n_1 - 1)! \dots (n_r - 1)!}{(n_1 + \dots + n_r)!}.$$

¹⁷ C'est-à-dire en notant $n_{1 \dots r} = n_1 + \dots + n_r$.

Finalement, en reportant ceci dans l'inégalité (26), on obtient, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout $(n_1; \dots; n_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$:

$$\left| \widehat{H}_{n_1}^+ \circ \dots \circ \widehat{H}_{n_r}^+(\widehat{\gamma}^+)(\zeta) \right| \leq \frac{|\zeta|^{n_0-2} C_0 C_1^{n_0} e^{C_1|\zeta|}}{(n_0-2)! \left((n_1 + \dots + n_r)(n_0-1) \right)!} \left(\frac{C_0 C_1^{n_0} |\zeta|^{n_0-1}}{\cos \theta} \right)^{n_1 + \dots + n_r}.$$

• De ces majorations, on déduit successivement :

$$\begin{aligned} & \frac{C_0 C_1^{n_0} |\zeta|^{n_0-2} e^{C_1|\zeta|}}{(n_0-2)! |1 - e^{-\zeta}|} \sum_{r \geq 1} \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 1} \left(\frac{C_0 C_1^{n_0} |\zeta|^{n_0-1}}{\cos \theta} \right)^{n_1 + \dots + n_r} \frac{1}{\left((n_1 + \dots + n_r)(d-1) \right)!} \\ & \leq C_0 C_1^{n_0} \frac{|\zeta|^{n_0-3}}{(n_0-2)!} e^{C_1|\zeta|} \frac{|\zeta|}{|1 - e^{-\zeta}|} \sum_{r \geq 1} \sum_{s \geq r} \left[\left(\frac{C_0 C_1^{n_0} |\zeta|^{n_0-1}}{\cos \theta} \right)^s \frac{1}{(s(n_0-1))!} \right. \\ & \quad \left. \times \left(\sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ n_1 + \dots + n_r = s}} 1 \right) \right] \\ & \leq \frac{C_0 C_1^{n_0} e^{(C_1 + \cos \theta)|\zeta|}}{\cos \theta} \frac{|\zeta|^{n_0-3}}{(n_0-2)!} \sum_{s \geq 1} \sum_{r=1}^s \left(\binom{s-1}{r-1} \left(\frac{C_0 C_1^{n_0} |\zeta|^{n_0-1}}{\cos \theta} \right)^s \frac{1}{(s(n_0-1))!} \right) \\ & \leq \frac{C_0 C_1^{n_0} e^{(C_1 + \cos \theta)|\zeta|}}{2 \cos \theta} \frac{|\zeta|^{n_0-3}}{(n_0-2)!} \sum_{s \geq 1} \left(\frac{2 C_0 C_1^{n_0} |\zeta|^{n_0-1}}{\cos \theta} \right)^s \frac{1}{(s(n_0-1))!} \\ & \leq \frac{C_0 C_1^{n_0} e^{(C_1 + \cos \theta)|\zeta|}}{2 \cos \theta} \frac{|\zeta|^{n_0-3}}{(n_0-2)!} \left[\exp \left(\left(\frac{2 C_0 C_1^{n_0}}{\cos \theta} \right)^{\frac{1}{n_0-1}} |\zeta| \right) - 1 \right] \\ & \leq \frac{C_0 C_1^{n_0} e^{(C_1 + \cos \theta)|\zeta|}}{\cos \theta} \frac{|\zeta|^{n_0-3}}{(n_0-2)!} \left[\exp \left(\left(\frac{2 C_0 C_1^{n_0}}{\cos \theta} \right)^{\frac{1}{n_0-1}} |\zeta| \right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

Finalement, de toutes ces majorations, on déduit celle de $\left| \widehat{f}^*(\zeta) - \delta'(\zeta) \right|$:

$$\left| \widehat{f}^*(\zeta) - \delta'(\zeta) \right| \leq \frac{C_0 C_1^{n_0}}{\cos \theta} \frac{|\zeta|^{n_0-3}}{(n_0-3)!} e^{(C_1 + \cos \theta)|\zeta|} \exp \left(\left(\frac{2 C_0 C_1^{n_0}}{\cos \theta} \right)^{\frac{1}{n_0-1}} |\zeta| \right).$$

On peut donc énoncer le lemme suivant :

Lemme : Supposons que le difféomorphisme f vérifie :

$$f(z) - z - 1 = \gamma^+(z) = \sum_{n \geq n_0} \frac{a_n}{z^{n-1}}, \text{ où } n_0 \in \mathbb{N} \text{ vérifie } n_0 \geq 3.$$

Considérons alors $(\theta_1; \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$.

Notons $\mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}$ le secteur angulaire d'extrémité 0 délimité par les angles θ_1 et θ_2 .

Enfin, posons pour $\theta \in]\theta_1; \theta_2[$:

$$\alpha(\theta) = \frac{C_0 C_1^{n_0}}{\cos \theta}, \quad \beta^+(\theta) = C_1 + \cos \theta + \left(\frac{2 C_0 C_1^{n_0}}{\cos \theta} \right)^{\frac{1}{n_0-1}}.$$

Alors, pour tout $\zeta \in \mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}$ vérifiant $\arg \zeta = \theta$, on a :

$$\left| \widehat{f^*}(\zeta) - \delta'(\zeta) \right| \leq \alpha(\theta) \frac{|\zeta|^{n_0-3}}{(n_0-3)!} e^{\beta^+(\theta)|\zeta|}. \quad (27)$$

4.1.4 Majoration de f_+^* sur un demi plan.

D'une manière générale, on notera $\mathcal{P}_{\theta, C} = \{\zeta \in \mathbb{C} ; \Re e(\zeta e^{i\theta}) > C\}$ pour $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et $C > 0$.

Pour retrouver f_+^* , il suffit d'appliquer la transformation de Laplace à $\widehat{f^*}$ pour une direction $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. L'estimation (27) fournit alors immédiatement :

Corollaire : Pour tout $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et tout $z \in \mathcal{P}_{\theta, \beta^+(\theta)}$, on a :

$$\left| f_+^*(z) - z \right| \leq \frac{\alpha(\theta)}{(\Re e(z e^{i\theta}) - \beta^+(\theta))^{n_0-2}}. \quad (28)$$

4.2 Inverse dans $z + \mathbb{C} \left[\begin{array}{c} 1 \\ - \\ z \end{array} \right]$.

Rappelons que $z + \mathbb{C} \left[\begin{array}{c} 1 \\ - \\ z \end{array} \right] = \left\{ z + \varphi ; \varphi \in \mathbb{C} \left[\begin{array}{c} 1 \\ - \\ z \end{array} \right] \right\}$ est un groupe pour la composition.

Notre principale motivation pour tenter d'exprimer l'inverse d'un élément de ce groupe est la nécessité de majorer les applications de corne $\pi^+ = f_+^* \circ f_-^*$ et $\pi^- = f_-^* \circ f_+^*$. Pour cela, nous aurons besoin de majorer les coefficients de l'inverse d'un élément générique de $id + \frac{1}{z} \mathbb{C} \left[\begin{array}{c} 1 \\ - \\ z \end{array} \right]$, donc de $id + \mathbb{C} \left[\begin{array}{c} 1 \\ - \\ z \end{array} \right]$. Cela pourrait se faire coefficient à coefficient en utilisant la formule de récurrence régissant les coefficients. Il sera plus commode de le faire globalement. La réciproque de $z + h(z)$, pour $h \in \mathbb{C} \left[\begin{array}{c} 1 \\ - \\ z \end{array} \right]$, sera donné par :

$$z + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} \partial^{n-1}(h^n). \quad (29)$$

Puisqu'il s'agit d'une variante de la formule de Lagrange, il s'agit d'une formule probablement classique de combinatoire. Néanmoins, aucune référence n'a été trouvée¹⁸

Indiquons succinctement comment cette formule a été conjecturée :

Rappelons que dans $\mathbb{C}[[X]]$, l'inverse pour la composition de $X - H$, avec $H \in X^2\mathbb{C}[[X]]$ est donné par la série de Von Neumann :

$$(X - H)^{-1} = X + H \circ \left(X + H \circ (X + \dots) \right).$$

¹⁸ Comme J. Cresson me l'a fait remarquer, [27] est une référence possible.

Notons aussi qu'un analogue pour l'inverse multiplicatif est donné par la méthode d'évaluation des polynômes de Hölder. Si $H \in \mathbb{X}\mathbb{C}[[X]]$, cela s'écrit :

$$(1 - H)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} H^n = 1 + H(1 + H(1 + \dots)) .$$

Dans ces deux cas, l'égalité provient de la résolution par point fixe d'une des équations régissant l'inverse.

Notre contexte est globalement similaire à ceux rappelés ci-dessus puisque nous avons uniquement envoyé le point fixe des difféomorphismes à l'infini, à travers le changement de variables $x = \frac{1}{z}$. Ici, les équations régissant l'inverse $z + k(z)$ de $z + h(z)$ sont :

$$k(z) + h(z + k(z)) = 0 , \quad (30)$$

$$h(z) + k(z + h(z)) = 0 . \quad (31)$$

L'équation (30) se prête bien à une méthode de point fixe pour l'application contractante $\Phi : \varphi(z) \mapsto -h(z + \varphi(z))$. Malheureusement, il n'est pas facile de décrire la limite de manière exploitable. Cependant, par approximations successives, l'équation (30) permet de poser une conjecture raisonnable, à savoir l'égalité (29). L'idée maîtresse, dans l'application de la formule de Taylor formelle donnant les approximations, est de regrouper les séries formelles de même valuation (comme on le fait souvent avec des composantes homogènes). C'est alors l'équation (31) qui va permettre de démontrer que l'expression conjecturée est correcte.

Le prochain paragraphe est consacré à une démonstration de la formule (29).

4.2.1 Expression de l'inverse dans $z + \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$: démonstration de la formule (29).

On commence par énoncer un lemme, qui est aussi une variante non usuelle de la formule d'inversion de Lagrange :

Lemme : Soit $f(x) = x + \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série formelle de $\mathbb{C}[[X]]$.

Notons, pour $p \in \mathbb{Z}$, $(f(x))^p = \sum_{q \geq p} f_{p,q} x^q$.

Alors, avec des notations similaires pour $g \in \mathbb{C}[[x]]$:

$$f \circ g(x) = x \implies f_{p,q} = \frac{p}{q} g_{-q,-p} .$$

Démonstration : Il suffit de démontrer le cas où $f \in \mathbb{C}\{x\}$, ce qui permet alors d'utiliser la formule de Cauchy. On a alors successivement :

$$\begin{aligned} f_{p,q} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0;r)} (f(x))^p \frac{dx^{-q}}{-q} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0;r)} x^p(x) \frac{d(g(x))^{-q}}{-q} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0;r)} \frac{(g(x))^{-q}}{q} x^p = \frac{p}{q} g_{-q,-p} \end{aligned}$$

□

On peut alors démontrer la formule (29) :

Lemme : Soit $(f ; g) \in \mathbb{C}[x]^2$, que l'on écrit $\begin{cases} f(x) = x + a(x) , & \text{avec } a \in x^2\mathbb{C}[x] . \\ g(x) = x + b(x) , & \text{avec } b \in x^2\mathbb{C}[x] . \end{cases}$
Si $f \circ g(x) = x$, alors on a :

$$a(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} \partial^{n-1}(b^n(x)) .$$

Démonstration : Considérons $\varphi_n : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$ l'extraction du n -ième coefficient d'une série formelle.

Transformons l'égalité $f_{1,q} = \frac{1}{q} g_{-q,-1}$ donnée par le lemme précédent, pour $q \geq 2$. Elle s'écrit successivement :

$$\begin{aligned} P_q \cdot a(x) &= \frac{1}{q} * P_{-1}(x + b(x))^{-q} = \frac{1}{q} P_{-1} x^{-q} \left(1 + \frac{b(x)}{x}\right)^{-q} \\ &= \sum_{n \geq 0} P_{-1} \cdot x^{-q-n} \frac{(n+q-1)!}{q!n!} (-b(x))^n \\ &= \sum_{n \geq 0} P_{n+q-1} \cdot \frac{(n+q-1)!}{q!n!} (-b(x))^n \\ &= \sum_{n \geq 1} P_q \cdot \frac{\partial^n}{n!} (-b(x))^n \end{aligned}$$

Finalement, on trouve $P_q \cdot a(x) = P_q \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{\partial^n}{n!} (-b(x))^n$ pour tout $q \geq 2$. C'est donc que la formule annoncée est démontrée. \square

4.2.2 Application à une majoration dans le plan de Borel.

Dans tout ce paragraphe, étant donné $h \in \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$, on notera $k = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} \partial^{n-1}(h^n)$.

Un élément générique de $z + \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$ sera toujours noté $u = id + h$, de sorte que son inverse soit $u^{-1} = id + k$.

On veut majorer $\widehat{v} - \delta'$ sur un secteur angulaire $\mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}$.

Le corollaire précédent permet d'atteindre cet objectif, moyennant la connaissance d'une majoration de \widehat{h} sur le même secteur angulaire. Avec les notations précédentes, on a : $\widehat{u}^{-1} - \delta' = \widehat{k}$. En utilisant les propriétés de la transformation de Borel formelle (cf. p. 14) et le corollaire précédent, on obtient alors facilement :

$$\widehat{k}(\zeta) = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \zeta^{n-1} \widehat{h}^{*n}(\zeta) .$$

Cela permet d'énoncer la propriété suivante :

Propriété : Soit $(\theta_1; \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\theta_1 < \theta_2$ et $\mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2} = \left\{ z \in \mathbb{C} ; \arg \zeta \in]\theta_1; \theta_2[\right\}$.

Donnons nous aussi $u = id + h \in z + \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]$ vérifiant :

$$\exists (\alpha; \beta; n_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{N}, \forall \zeta \in \mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}, |\widehat{u}(\zeta) - \delta'(\zeta)| \leq \alpha \frac{|\zeta|^{n_0}}{n_0!} e^{\beta|\zeta|}.$$

$$\text{Alors : } \forall \zeta \in \mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}, \left| \widehat{u^{-1}}(\zeta) - \delta'(\zeta) \right| \leq \alpha \frac{|\zeta|^{n_0}}{n_0!} \exp \left(\left(2\alpha \frac{1}{n_0^{1+2}} + \beta \right) |\zeta| \right).$$

Démonstration : Il suffit de majorer l'expression de \widehat{k} sur $\mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}$. Pour ce faire, rappelons la majoration élémentaire de \widehat{h}^{*n} sur un secteur. Si h vérifie la majoration $|h(\zeta)| \leq \alpha \frac{|\zeta|^{n_0}}{n_0!} e^{\beta|\zeta|}$, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \zeta \in \mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}, \left| \widehat{h}^{*n}(\zeta) \right| \leq \alpha^n \frac{|\zeta|^{nn_0+n-1}}{(nn_0+n-1)!} e^{\beta|\zeta|}.$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors successivement : } |\widehat{k}(\zeta)| &\leq \sum_{n \geq 1} \alpha^n \frac{|\zeta|^{n(n_0+2)-2}}{n!(nn_0+n-1)!} e^{\beta|\zeta|} \\ &\leq \alpha \frac{|\zeta|^{n_0}}{n_0!} \sum_{n \geq 0} \alpha^n |\zeta|^{n(n_0+2)} \frac{\binom{n(n_0+2)}{n}}{(n(n_0+2))!} e^{\beta|\zeta|} \\ &\leq \alpha \frac{|\zeta|^{n_0}}{n_0!} \sum_{n \geq 0} \alpha^n 2^{n(n_0+2)} \frac{|\zeta|^{n(n_0+2)}}{(n(n_0+2))!} e^{\beta|\zeta|}. \end{aligned}$$

On obtient alors immédiatement le résultat annoncé :

$$\forall \zeta \in \mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}, \left| \widehat{k}(\zeta) \right| \leq \alpha \frac{|\zeta|^{n_0}}{n_0!} \exp \left(\left(2\alpha \frac{1}{n_0^{1+2}} + \beta \right) |\zeta| \right).$$

□

4.3 Une majoration de $*f_-$ sur un demi-plan.

L'expression (24) est l'aboutissement d'un calcul mené à l'aide du comoule Γ_\bullet^+ . Nous pouvons mener le même calcul en partant, non plus du développement moulien $F^* = \sum_\bullet U_\bullet^+ \Gamma_\bullet^+$ mais de $F^* = \sum_\bullet V_\bullet^- \Gamma_\bullet^-$. Cela aura pour conséquence de remplacer tous les “+” par des “-” dans les notations de γ^+ , E_n^+ , H_n^+ et \widehat{H}_n^{-+} .

Pour cela, notons :

$$g^{-1}(z) = z + \gamma^-(z), \text{ ce qui autorise à écrire : } G^{-1} - Id = \sum_{n \geq 1} \frac{(\gamma^-)^n}{n!} \partial_z^n.$$

$$E_n^-, \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*, \text{ la fonction définie sur } \mathbb{C} - 2i\pi\mathbb{Z} \text{ par : } E_n^-(\zeta) = \frac{(-\zeta)^n}{n!} \frac{1}{e^{-\zeta} - 1}.$$

$$H_n^-(\varphi) = \frac{(\gamma^-)^n}{n!} \partial_z^n \circ (L - Id)^{-1}, \text{ pour } \varphi \in \frac{1}{z^2} \mathbb{C} \left[\left[\frac{1}{z} \right] \right]_1.$$

$$\widehat{H}_n^- \text{ l'opérateur défini sur } \zeta \mathbb{C}\{\zeta\} \text{ par } \widehat{H}_n^-(\varphi) = (\widehat{\gamma^-})^{*n} \star (E_n^- \cdot \varphi).$$

Ainsi, après calculs, on obtient les deux expressions suivantes :

$$f^* = id + (L - Id)^{-1}(\gamma^-) + (L - Id)^{-1} \circ \sum_{r \geq 1} \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 1} H_{n_1}^- \circ \dots \circ H_{n_r}^-(\gamma^-) .$$

$$\forall \zeta \in \mathbb{C} - 2i\pi\mathbb{Z}^* , \widehat{f^*}(\zeta) = \delta'(\zeta) + \frac{\widehat{\gamma^-}(\zeta)}{e^{-\zeta} - 1} + \frac{1}{e^{-\zeta} - 1} \sum_{r \geq 1} \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 1} \widehat{H}_{n_1}^- \circ \dots \circ \widehat{H}_{n_r}^-(\widehat{\gamma^-})(\zeta) .$$

La propriété précédente (cf. p. 77) permet d'écrire, lorsque $\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \frac{3\pi}{2}$:

$$\forall \zeta \in \mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2} , \left| \widehat{\gamma^-}(\zeta) \right| \leq C_0 C_1^{n_0} \frac{|\zeta|^{n_0-2}}{(n_0-2)!} \exp \left(\left(2(C_0 C_1^{n_0})^{\frac{1}{n_0}} + C_1 \right) |\zeta| \right) ,$$

$$\text{puisque : } \forall \zeta \in \mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2} , \left| \widehat{\gamma^+}(\zeta) \right| \leq C_0 C_1^{n_0} \frac{|\zeta|^{n_0-2}}{(n_0-2)!} e^{C_1 |\zeta|} .$$

Les majorations précédentes s'appliquent alors à l'identique. Si $\mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}$ est un secteur angulaire, où $\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \frac{3\pi}{2}$, on obtient, pour tout $\zeta \in \mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}$ tel que $\arg \zeta = \theta$:

$$\left| \widehat{f^*}(\zeta) - \delta'(\zeta) \right| \leq \frac{C_0 C_1^{n_0}}{|\cos \theta|} \frac{|\zeta|^{n_0-3}}{(n_0-3)!} e^{\widetilde{\beta}^-(\theta) |\zeta|} , \text{ où } \widetilde{\beta}^-(\theta) = C_1 + 2 \left(C_0 C_1^{n_0} \right)^{\frac{1}{n_0}} + \left(\frac{2C_0 C_1^{n_0}}{|\cos \theta|} \right)^{\frac{1}{n_0-1}} . \quad (32)$$

La propriété précédente (cf. p. 77) permet de déduire de (32), pour tout $\zeta \in \mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}$ vérifiant $\arg \zeta = \theta$:

$$\left| \widehat{f}(\zeta) - \delta'(\zeta) \right| \leq \frac{C_0 C_1^{n_0}}{|\cos \theta|} \frac{|\zeta|^{n_0-3}}{(n_0-3)!} \exp \left(\left(2 \left(\frac{C_0 C_1^{n_0}}{|\cos \theta|} \right)^{\frac{1}{n_0-1}} + \widetilde{\beta}^-(\theta) \right) |\zeta| \right) .$$

La transformation de Laplace permet alors d'avoir :

Lemme : Supposons que le difféomorphisme f vérifie :

$$f(z) - z - 1 = \gamma^+(z) = \sum_{n \geq n_0} \frac{a_n}{z^{n-1}} , \text{ où } n_0 \in \mathbb{N} \text{ vérifie } n_0 \geq 3 .$$

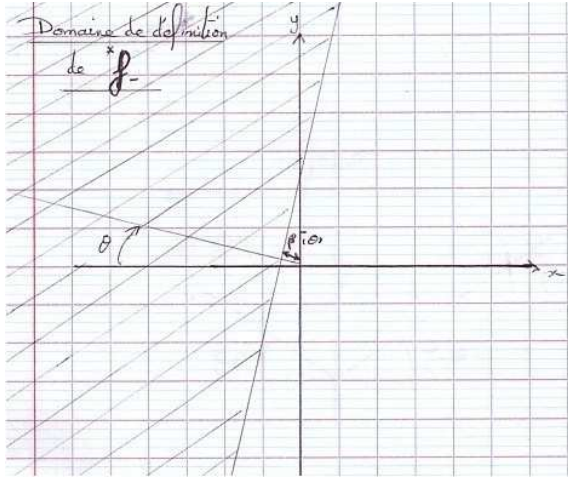
Fixons $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$ et posons :

$$\alpha(\theta) = \frac{C_0 C_1^{n_0}}{|\cos \theta|} .$$

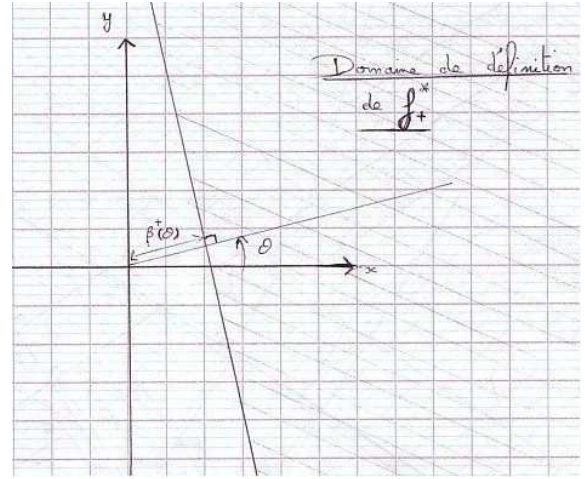
$$\beta^-(\theta) = C_1 + 2 \left(C_0 C_1^{n_0} \right)^{\frac{1}{n_0}} + 2 \left(\frac{C_0 C_1^{n_0}}{|\cos \theta|} \right)^{\frac{1}{n_0-1}} + \left(\frac{2C_0 C_1^{n_0}}{|\cos \theta|} \right)^{\frac{1}{n_0-1}} .$$

Alors, pour tout $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$ et tout $z \in \mathcal{P}_{\theta, \beta^-(\theta)}$, on a :

$$\left| {}^*f_-(z) - z \right| \leq \frac{\alpha(\theta)}{(\Re(z e^{i\theta}) - \beta^-(\theta))^{n_0-2}} . \quad (33)$$



Domaine de définition
de l'itérateur sectoriel f_-^* .



Domaine de définition
de l'itérateur sectoriel f_+^* .

Figure 5 : Illustration de domaine de définition des itérateurs sectoriels

4.4 Majoration de π^+ .

4.4.1 Domaine de définition de π^+ .

Rappelons que les domaines de définitions de f_+^* et f_-^* , obtenus après transformation de Laplace d'angle $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$, sont les demi-plans $\mathcal{P}_{\theta, \beta^+(\theta)}$ et $\mathcal{P}_{\pi-\theta, \beta^-(\theta)}$ (cf. figure 5).

Il est maintenant grand temps de donner une raison (parmi de nombreuses) au fait que la fonction π^+ est correctement définie. Lorsque $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et $C > \max(\beta^+(\theta); \beta^-(\theta))$, on déduit de l'inégalité (33) :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathcal{P}_{\pi-\theta, C} \cap \mathcal{P}_{\theta, C}, \quad \Re (*f_-(z)e^{i\theta}) &= \Re ((*f_-(z) - z)e^{i\theta}) + \Re (ze^{i\theta}) \\ &\geq -|*f_-(z) - z| + \Re (ze^{i\theta}) \\ &\geq -\frac{\alpha(\pi - \theta)}{(\Re (ze^{i(\pi-\theta)}) - \beta^-(\pi - \theta))^{n_0-2}} + \Re (ze^{i\theta}) \\ &\geq -\frac{\alpha(\theta)}{(C - \beta^-(\theta))^{n_0-2}} + C. \end{aligned}$$

On peut trouver $C > \max(\beta^+(\theta); \beta^-(\theta))$ tel que $-\frac{\alpha(\theta)}{(C - \beta^-(\theta))^{n_0-2}} + C > \beta^+(\theta)$.

Pour une telle constante C , on aura : $\forall z \in \mathcal{P}_{\pi-\theta, C} \cap \mathcal{P}_{\theta, C}, \quad \Re (*f_-(z)e^{i\theta}) > \beta^+(\theta)$.

Non seulement cela montre que π^+ est correctement définie sur l'intersection des demi-plans $\mathcal{P}_{\pi-\theta, C}$ et $\mathcal{P}_{\theta, C}$ (cf. figure 6), mais cela permet aussi de retrouver π^+ sur un demi-plan supérieur du type $\mathcal{P}_+(c) = \{\zeta \in \mathbb{C}; \Im \zeta > c\}$ par 1-périodicité : en effet, il existe une bande verticale de largeur 1, du type $\{\zeta \in \mathbb{C}; \Im \zeta > A, B_- < \Re \zeta < B_+\}$, contenue dans $\mathcal{P}_{\pi-\theta, C} \cap \mathcal{P}_{\theta, C}$ dans laquelle la composition $(f_+^* - id) \circ *f_-^*$ est correctement définie (cf. figure 7).

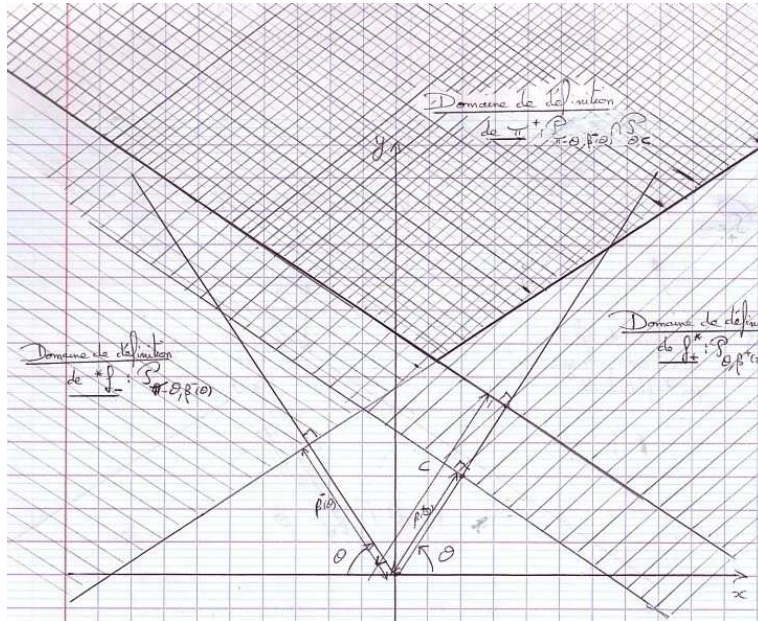


Figure 6 : Domaine de définition de l'application de corne π^+

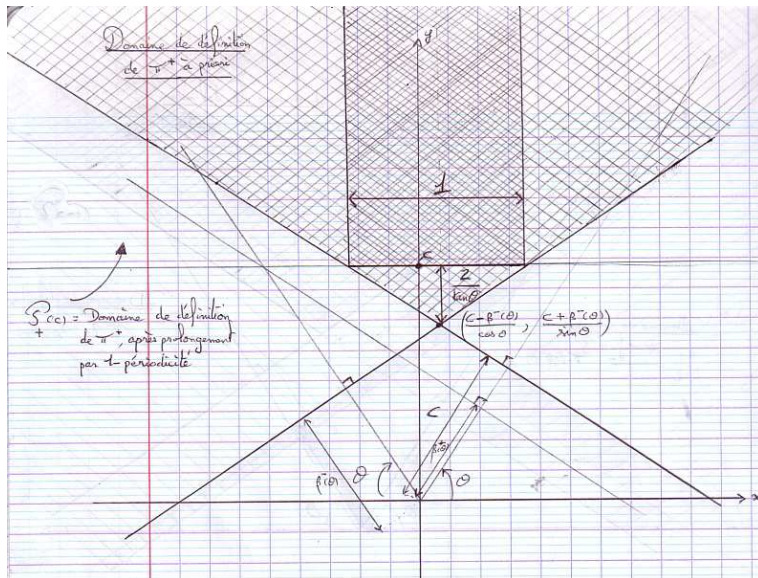


Figure 7 : Prolongement par 1-périodicité de π^+ à $P_+(c)$

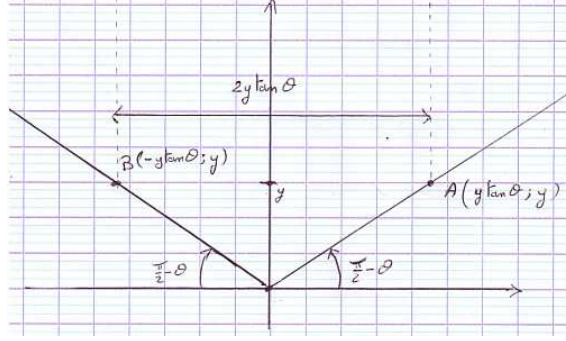


Figure 8 : **Construction de la bande de largeur 1 contenue dans $\mathcal{P}_{\pi-\theta, \beta^-(\theta)} \cap \mathcal{P}_{\theta, C}$**

Une petite étude géométrique (cf. figure 8) montre alors que pour $c \geq \frac{2C + \cos \theta}{2 \sin \theta}$, on peut calculer π^+ sur le demi-plan $\mathcal{P}_+(c)$ par l'égalité :

$$\pi^+ = \mathbf{f}_+^* \circ \mathbf{f}_- = (\mathbf{f}_+^* - id_{\mathbb{C}}) \circ \mathbf{f}_- + \mathbf{f}_- . \quad (34)$$

En considérant $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right]$, on retrouve de même π^+ sur un demi-plan du type $\mathcal{P}_-(c) = \{\zeta \in \mathbb{C} ; \Im m \zeta < -c\}$, si $c > 0$.

4.4.2 Majoration de π^+ sur un demi-plan supérieur.

Fixons $\theta \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$.

Par croissance de la fonction $x \mapsto x - \frac{\alpha(\theta)}{(x - \beta^-(\theta))^{n_0-2}}$, on vérifie aisément l'existence et l'unicité d'une solution, notée $C_0(\theta)$ de l'équation :

$$x - \frac{\alpha(\theta)}{(x - \beta^-(\theta))^{n_0-2}} = \beta^+(\theta) .$$

Celle-ci vérifie : $C_0(\theta) > \max(\beta^-(\theta); \beta^+(\theta))$. La minoration précédente permet alors d'écrire :

$$\forall z \in \mathcal{P}_{\pi-\theta, C_0(\theta)} \cap \mathcal{P}_{\theta, C_0(\theta)} , \Re e (*\mathbf{f}_-(z)e^{i\theta}) \geq -\frac{\alpha(\theta)}{(C - \beta^-(\theta))^{n_0-2}} + \Re e (ze^{i\theta}) .$$

Alors, en partant de (34), cela donne une majoration de $\pi^+ - id_{\mathbb{C}}$ sur le secteur angulaire $\mathcal{P}_{\pi-\theta, C} \cap \mathcal{P}_{\theta, C}$ si $C > C_0(\theta)$. Plus précisément, pour $C > C_0(\theta)$ et $z \in \mathcal{P}_{\pi-\theta, C} \cap \mathcal{P}_{\theta, C}$, on a alors :

$$\begin{aligned} |\pi^+(z) - z| &\leq \frac{\alpha(\theta)}{(\Re e (*\mathbf{f}_-(z)e^{i\theta}) - \beta^+(\theta))^{n_0-2}} + \frac{\alpha(\theta)}{(\Re e (ze^{i(\pi-\theta)}) - \beta^-(\theta))^{n_0-2}} \\ &\leq \frac{\alpha(\theta)}{(\Re e (ze^{i\theta}) - C_0(\theta))^{n_0-2}} + \frac{\alpha(\theta)}{(C - \beta^-(\theta))^{n_0-2}} \\ &\leq \frac{\alpha(\theta)}{(C - C_0(\theta))^{n_0-2}} + \frac{\alpha(\theta)}{(C - C_0(\theta))^{n_0-2}} . \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall C > C_0(\theta), \forall z \in \mathcal{P}_{\pi-\theta, C} \cap \mathcal{P}_{\theta, C}, |\pi^+(z) - z| \leq \frac{2\alpha(\theta)}{(C - C_0(\theta))^{n_0-2}}. \quad (35)$$

4.5 Majoration des invariants holomorphes.

Puisque les invariants holomorphes de f sont les coefficients de Fourier de $\pi^+ - id_{\mathbb{C}}$, l'inégalité (35) permet d'en déduire une majoration des invariants holomorphes. Lorsque $z \in \mathcal{P}_{\pi-\theta, C} \cap \mathcal{P}_{\theta, C}$ est tel que $z + 1 \in \mathcal{P}_{\pi-\theta, C} \cap \mathcal{P}_{\theta, C}$, où $C > C_0(\theta)$, on en déduit alors que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, |A_{2in\pi}| \leq \frac{2\alpha(\theta)}{(C - C_0(\theta))^{n_0-2}} e^{2n\pi \Im m z}. \quad (36)$$

Il ne reste plus qu'à optimiser cette majoration pour obtenir :

Propriété : Pour tout $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et tout $n \in \mathbb{Z}^*$, on a :

$$|A_{2in\pi}| \leq 2\alpha(\theta) \exp\left(n\pi \left(\frac{2C_0(\theta) + \cos \theta}{\sin \theta}\right)\right) \left(\frac{2en\pi}{(n_0 - 2)\sin \theta}\right)^{n_0-2}. \quad (37)$$

Démonstration : Nous allons effectuer plusieurs optimisations de l'inégalité (36), à savoir :

1. Sur $z \in \mathcal{P}_{\pi-\theta, C} \cap \mathcal{P}_{\theta, C}$ tel que $z + 1 \in \mathcal{P}_{\pi-\theta, C} \cap \mathcal{P}_{\theta, C}$.
2. Sur $C > C_0(\theta)$.

- Fixons tout d'abord $C > C_0(\theta)$ et $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

Le choix de z minimisant la majoration (36) est celui minimisant $\Im m z$. Les figures 7 et 8 permettent de choisir :

$$z = i \frac{C}{\sin \theta} + \frac{i}{2 \tan \theta} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + i \frac{2C + \cos \theta}{2 \sin \theta}.$$

On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, |A_n| \leq \frac{2\alpha(\theta)}{(C - C_0(\theta))^{n_0-2}} \exp\left(n\pi \left(\frac{2C + \cos \theta}{\sin \theta}\right)\right).$$

- Optimisons désormais sur $C > C_0(\theta)$, toujours avec $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

Si $(a; b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, la fonction $x \mapsto \frac{e^{bx}}{(x-a)^{n_0}}$ atteint son minimum sur $]a; +\infty[$ en $a + \frac{n_0}{b}$. Ainsi, le choix de $C = C_0(\theta) + \frac{(n_0 - 2)\sin \theta}{2n\pi}$ donne, pour $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et $n \in \mathbb{Z}^*$:

$$|A_n| \leq 2\alpha(\theta) \exp\left(n\pi \left(\frac{2C_0(\theta) + \cos \theta}{\sin \theta}\right)\right) \left(\frac{2en\pi}{(n_0 - 2)\sin \theta}\right)^{n_0-2}.$$

□

5 Une estimation conjecturale du moule τ^\bullet .

Commençons par rappeler la définition du moule τ^\bullet . Pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ et toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ on a :

$$\begin{aligned} \tau^{\underline{\mathbf{S}}}(z) &= \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\underline{\mathbf{S}})} \mathcal{B}^{\underline{\mathbf{S}}, \mathbf{i}} \mathcal{T}e^{\sigma(\underline{\mathbf{S}}, \mathbf{i})}(z) \\ &= \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\underline{\mathbf{S}})} \mathcal{B}^{\underline{\mathbf{S}}, \mathbf{i}} \left(\sum_{\substack{\underline{\mathbf{n}} \in \mathbb{Z}^\bullet \\ l(\underline{\mathbf{n}}) = l(\underline{\mathbf{S}})}} \prod_{p=1}^r \frac{U^{\underline{\mathbf{n}}}}{(z + n_p)^{\|\underline{\mathbf{s}}^p\| - l(\underline{\mathbf{s}}^p) + \text{diag}_p^{\mathbf{i}}}} \right). \end{aligned}$$

On verra (cf. §7.1.1, page 166) que, pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ et toute séquence $\underline{\mathbf{s}} \in \mathcal{S}_{\geq 2}^*$, on a :

$$|\mathcal{T}e^{\underline{\mathbf{s}}}(z)| \leq \frac{4l(\underline{\mathbf{s}})}{|\mathfrak{S}m z|^{\|\underline{\mathbf{s}}\| - l(\underline{\mathbf{s}})}}.$$

Puisque, pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, $|\tau^{\underline{\mathbf{S}}}(z)| \leq \frac{4l(\underline{\mathbf{S}})\beta^{\underline{\mathbf{S}}}}{|\mathfrak{S}m z|^{\|\underline{\mathbf{S}}\| - l(\underline{\mathbf{S}})}}$, cela entraîne la majoration simple suivante :

Lemme : $\forall \underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, $|\tau^{\underline{\mathbf{S}}}(z)| \leq \frac{4l(\underline{\mathbf{S}})}{l(\underline{\mathbf{S}})!^2} \frac{l(\underline{\mathbf{S}})^{\|\underline{\mathbf{S}}\|}}{|\mathfrak{S}m z|^{\|\underline{\mathbf{S}}\| - l(\underline{\mathbf{S}})}}$.

Comme nous allons le voir, cette majoration est grossière. L'objectif de cette section est d'étudier une conjecture donnant une estimation plus fine que celle tout juste énoncée. Nous verrons comment elle permet de retrouver les expressions des invariants et de l'application de corne π^+ ; mais nous verrons aussi comment elle permet d'estimer la vitesse de convergence de la série moulienne correspondante. Enfin, nous donnerons de nouvelles expressions de $\tau^{\underline{\mathbf{S}}}$, pour $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ afin d'étudier des cas particuliers de cette conjecture.

5.1 Premières remarques sur le moule τ^\bullet .

Commençons cette section par quelques remarques simples sur le moule τ^\bullet . Nous reviendrons sur la dernière d'entre elles :

1. Le moule τ^\bullet ne possède pas de symétrie, ce qui explique l'absence de voyelle dans son nom. En effet, ce moule est défini non pas sur un alphabet simple comme le sont les moules symétr $\underline{\mathbf{a}}/\underline{\mathbf{e}}\mathbf{s}$, mais sur un alphabet dont les lettres sont des mots construits sur un autre alphabet. Un tel alphabet pourrait être qualifié de seconde espèce.

Néanmoins, il est possible de multiplier $\tau^{\underline{\mathbf{S}}^1}$ et $\tau^{\underline{\mathbf{S}}^2}$ entre eux, par symétr $\underline{\mathbf{e}}\mathbf{l}$ ité de $\mathcal{T}e^\bullet$.

2. Les multitangentes apparaissant dans le moule τ^\bullet sont de valuation¹⁹ supérieure à 2. Cela signifie qu'elles sont du type $\mathcal{T}e^{\underline{\mathbf{s}}}$, avec $s_i \geq 2$, pour tout $i \in \llbracket 1; l(\underline{\mathbf{s}}) \rrbracket$.

En particulier, celles-ci sont donc toutes convergentes.

3. Les multitangentes apparaissant dans le moule τ^\bullet sont toutes de même poids. Cela permet de définir le poids de $\tau^{\underline{\mathbf{S}}}$ comme étant l'entier $||| \underline{\mathbf{S}} ||| = \sum_{k=1}^{l(\underline{\mathbf{S}})} ||S_k|| - 1$, mais aussi de justifier à posteriori la notation $||| \cdot |||$.
4. Si $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ est de longueur $r \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\tau^{\underline{\mathbf{S}}}$ apparaît comme une perturbation de la multitangente $\mathcal{T}e^{||\underline{\mathbf{s}}^1|| - l(\underline{\mathbf{s}}^1), \dots, ||\underline{\mathbf{s}}^r|| - l(\underline{\mathbf{s}}^r)}$. Nous verrons plusieurs expressions de τ^\bullet allant dans ce sens.

5.2 Estimations conjecturales.

Rappelons qu'on a démontré l'égalité $\pi^+ = \sum_{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})} \text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \tau^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}}$ (cf. §3.4), ce qui garantit automatiquement la convergence de cette série.

Notons d'ores et déjà qu'établir directement cette convergence est délicat. Cela nécessite d'avoir une majoration fine du moule τ^\bullet , donc des multitangentes.

Les estimations données au paragraphe précédent ne permettent pas de redémontrer sa convergence normale sur un demi-plan du type $\mathcal{P}_\pm(C)$, pour une constante $C > 0$. En effet, ces estimations ne peuvent pas faire mieux que d'affirmer la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ ||| \underline{\mathbf{S}} ||| = p, l(\underline{\mathbf{S}}) = r}} |\text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \tau^{\underline{\mathbf{S}}}(z) \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}}| &\leq \sum_{\substack{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ ||| \underline{\mathbf{S}} ||| = p, l(\underline{\mathbf{S}}) = r}} \frac{l(\underline{\mathbf{S}})^{||| \underline{\mathbf{S}} |||}}{l(\underline{\mathbf{S}})!^2} \frac{4l(\underline{\mathbf{S}})}{|\Im z|^{||| \underline{\mathbf{S}} ||| - l(\underline{\mathbf{S}}) - 1}} \left(C_0^{\frac{1}{3}} C_1\right)^{1+||| \underline{\mathbf{S}} |||} \\ &\leq \frac{r^{p+1}}{r!^2} \frac{2}{C^{p-r-1}} \left(2C_0^{\frac{1}{3}} C_1\right)^{p+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mais : } \sum_{p \geq 2} \sum_{r=1}^{\frac{p+1}{3}} \frac{r^{p+1}}{r!^2} \frac{2}{C^{p-r-1}} \left(2C_0^{\frac{1}{3}} C_1\right)^{p+1} &= \sum_{r \geq 1} \sum_{p \geq 3r-1} \frac{r^{p+1}}{r!^2} \frac{2}{C^{p-r-1}} \left(2C_0^{\frac{1}{3}} C_1\right)^{p+1} \\ &\geq \sum_{r \geq 1} \sum_{p=3r} \frac{r^{p+1}}{r!^2} \frac{2}{C^{p-r-1}} \left(2C_0^{\frac{1}{3}} C_1\right)^{p+1} \\ &= \sum_{r \geq 1} \frac{r^{3r+1}}{r!^2} \frac{2}{C^{2r-1}} \left(2C_0^{\frac{1}{3}} C_1\right)^{3r+1} \\ &= +\infty \dots \end{aligned}$$

¹⁹ Rappelons que $\mathcal{MTGF} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}e^{\underline{\mathbf{S}}})_{\underline{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}^\bullet}$ est naturellement muni d'une structure d'anneau, issue de la symétrélicité des multitangentes.

On définit alors une pseudo-valuation ν sur \mathcal{MTGF} en posant :

$$\nu \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathcal{T}e^{\underline{\mathbf{S}}^i} \right) = \inf \{ ||\underline{\mathbf{S}}^i|| ; i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, a_i \neq 0 \}.$$

Bien évidemment, cela ne remet pas en question ce qui a été fait à la section §3. Simplement, cela montre bien que les estimations données sont loin d'être optimales. Le terme créant la divergence ici est la puissance r^p , provenant de l'estimation du moule β^\bullet . Cette puissance est au coeur même de la majoration du moule τ^\bullet dont l'on dispose pour le moment.

L'apparition inopinée de ce terme r^p est limpide. Il y a deux raisons principales à cela.

Nous avons majoré le module d'une somme de nombres complexes par la somme de leurs modules. Evidemment, une telle majoration a un coût, même si les majorations effectuées après sont fines et quasi-optimales. Par exemple, on sait que :

$$|\mathcal{T}e^2(z)| = \left| \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} \right| = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi \Re z) + \operatorname{sh}^2(\pi \Im z)} \leq \frac{\pi^2}{\operatorname{sh}^2(\pi \Im z)} .$$

Pourtant, on a utilisé la majoration nettement plus grossière $|\mathcal{T}e^2(z)| \leq \frac{4}{|\Im z|} \dots$ Pour obtenir des majorations plus précises, il s'agira donc de majorer les nombres complexes globalement, et non plus terme à terme comme nous l'avons fait.

De même, nous savons qu'il existe une multitude de relations entre multitangentes. Ainsi, dans une somme de multitangentes, il peut y avoir de nombreuses compensations, au point que la somme peut même éventuellement être nulle ! Pour bénéficier de ces compensations au niveau des multitangentes, il s'agira aussi de majorer τ^\bullet , non pas termes à termes comme nous l'avons fait, mais globalement.

Ces deux raisons laissent à penser qu'il doit être possible d'obtenir une estimation beaucoup plus précise de $\mathcal{T}e^\bullet$ et de τ^\bullet , (cf. §7.1.2 pour des estimations conjecturales de $\mathcal{T}e^\bullet$). Ce qui nous intéresse ici, c'est le moule τ^\bullet directement. Voici donc une conjecture le concernant :

Conjecture 1 : *Estimation du moule τ^\bullet , version 1*

Pour toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \operatorname{seq}(\operatorname{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ et tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, on a :

$$|\Im z| \geq 1 \implies |\tau^{\underline{\mathbf{S}}}(z)| \leq \left(\frac{2}{|\Im z|} \right)^{\|\underline{\mathbf{S}}\|} . \quad (38)$$

On peut aussi affaiblir cette estimation (sans perte de résultats théoriques, mais avec perte de résultats numériques) en :

Conjecture 2 : *Estimation du moule τ^\bullet , version 2*

Pour toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \operatorname{seq}(\operatorname{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ et tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, on a :

$$|\Im z| \geq 1 \implies |\tau^{\underline{\mathbf{S}}}(z)| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{|\Im z|}} \right)^{\|\underline{\mathbf{S}}\|} .$$

Evidemment, la version 1 entraîne la version 2. Indiquons immédiatement que la version 2 de cette conjecture est vérifiée pour les séquences $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ de longueur 1, 2 et 3, mais aussi pour toutes les séquences $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ de poids au plus 27 .

Avant de continuer, rappelons encore une fois que cette conjecture est certes intéressante pour redémontrer indépendamment les résultats de la section précédente, mais n'est pas utile pour les établir.

5.3 Les implications des conjectures 1 et 2.

Répondre par l'affirmative à l'une des deux conjectures précédentes permettrait en particulier de :

1. Trouver explicitement $C > 0$ dépendant uniquement de C_0 et de C_1 telle que $\sum_{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})} \text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \tau^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}}$ soit normalement convergente sur les demi-plans $\mathcal{P}_+(C)$ et $\mathcal{P}_-(C)$.
2. Recalculer les coefficients de Fourier de $\sum_{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})} \text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \tau^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}}$ par simple permutation de somme .
3. Retrouver une majoration du reste de la série définissant les coefficients de Fourier en fonction du poids.

En supposant vraie la seconde conjecture, on obtient directement la propriété suivante, affinant légèrement le théorème que l'on vient de démontrer (cf. p. 68) :

Propriété : Supposons que, pour toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$:

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, |\Im m z| \geq 1 \implies |\tau^{\underline{\mathbf{S}}}(z)| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{|\Im m z|}} \right)^{\|\underline{\mathbf{S}}\|} .$$

Alors, si $C > \max\left(4C_0^{\frac{1}{3}}C_1; 1\right)$, on a :

1. La série de fonctions $\pi^+ = \sum_{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})} \text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \tau^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}}$ converge normalement sur les demi-plans $\mathcal{P}_+(C)$ et $\mathcal{P}_-(C)$.
2. Le développement en série de Fourier de $\pi^+ - id_{\mathbb{C}}$ est donné par :

$$\forall z \in \mathcal{P}_{\pm}(C), \pi^+(z) - z = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n > 0} \left(\sum_{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})} \varepsilon \text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \hat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}} \right) e^{2in\pi z},$$

où l'on note toujours $\varepsilon = \text{sg}(\Im m z)$.

Démonstration : Soit $C > \max\left(4C_0^{\frac{1}{3}}C_1; 1\right)$ et $z \in \mathcal{P}_+(C)$ ou $\mathcal{P}_-(C)$, i.e. tel que $|\Im m z| > C$. Nous noterons toujours $\varepsilon = \text{sg}(\Im m z)$.

- Montrons que la famille $\left(\varepsilon \operatorname{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}} e^{2in\pi z} \right)_{\substack{\underline{\mathbf{S}} \in \operatorname{seq}(\operatorname{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\} \\ n \in \mathbb{N}^*}}$ est sommable.

Lorsque $\underline{\mathbf{S}} \in \operatorname{seq}(\operatorname{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\}$, $n \in \mathbb{Z}^*$ et $c \in \left] \left(4C_0^{\frac{1}{3}}C_1\right)^2 ; C^2 \right[$, on a :

$$\begin{aligned} |\varepsilon| &= 1 & , & & |\operatorname{sg}^{\underline{\mathbf{S}}}| &= 1 & , \\ |\mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}}| &\leq \left(C_0^{\frac{1}{3}}C_1\right)^{\|\underline{\mathbf{S}}\|+1} & , & & |e^{2in\pi z}| &\leq e^{-2|n|C\pi} & , \\ c_p &= \sum_{\substack{\underline{\mathbf{S}} \in \operatorname{seq}(\operatorname{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ \|\underline{\mathbf{S}}\| = p}} 1 \leq p 2^p & , & & |\widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}}| &\leq \left(\frac{2}{\sqrt{c}}\right)^{\|\underline{\mathbf{S}}\|} e^{2c|n|\pi} & . \end{aligned}$$

En notant $\alpha = \frac{4C_0^{\frac{1}{3}}C_1}{\sqrt{c}}$ et $\beta = 2\pi(C - c)$, de sorte que $\begin{cases} \alpha \in]0; 1[\\ \beta \geq 2\pi(\sqrt{C} - c) > 0 \end{cases}$, on obtient la suite de majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{\mathbf{S}} \in \operatorname{seq}(\operatorname{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\}} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |\varepsilon \operatorname{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}} e^{2in\pi z}| &\leq C_0^{\frac{1}{3}}C_1 \left(\sum_{\substack{\underline{\mathbf{S}} \in \operatorname{seq}(\operatorname{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\} \\ \|\underline{\mathbf{S}}\| = p}} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\|\underline{\mathbf{S}}\|} \right) \\ &\quad \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-|n|\beta} \right) \\ &\leq C_0^{\frac{1}{3}}C_1 \left(\sum_{p \geq 2} c_p \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p \right) \left(\sum_{n > 0} e^{-n\beta} \right) \\ &\leq C_0^{\frac{1}{3}}C_1 \left(\sum_{p \geq 2} p \alpha^p \right) \left(\sum_{n > 0} e^{-n\beta} \right) \quad (39) \\ &< +\infty . \end{aligned}$$

Donc, la famille $\left(\varepsilon \operatorname{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}} e^{2in\pi z} \right)_{\substack{\underline{\mathbf{S}} \in \operatorname{seq}(\operatorname{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\} \\ n \in \mathbb{N}^*}}$ est sommable.

- Tout d'abord, la sommabilité de cette famille se traduit par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |\Im m z| > C, \mathcal{C}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{\substack{\underline{\mathbf{S}} \in \operatorname{seq}(\operatorname{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\} \\ \|\underline{\mathbf{S}}\| = p}} \varepsilon \operatorname{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}} \right) e^{2in\pi z} .$$

Dans un second temps, la sommabilité précédente implique nécessairement la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{\underline{\mathbf{S}} \in \operatorname{seq}(\operatorname{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})} \operatorname{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}}$ vers π^+ sur $\mathcal{P}_+(C)$ et $\mathcal{P}_-(C)$.

Ainsi, les coefficients de Fourier de $\pi^+ - id_{\mathbb{C}}$ sont bien :

$$\sum_{\substack{\underline{\mathbf{S}} \in \operatorname{seq}(\operatorname{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\} \\ \|\underline{\mathbf{S}}\| = p}} \varepsilon \operatorname{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}} .$$

□

Il nous reste à trouver une majoration du reste de la série donnant les invariants holomorphes :

Propriété : 1. Supposons la conjecture 1 vraie, alors :

$$\forall p_0 \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ \|\mathbf{S}\| \geq p_0}} \text{sg}^{\mathbf{S}} \widehat{\tau}_n^{\mathbf{S}} \mathcal{A}_{\mathbf{S}} \right| \leq C_0^{\frac{1}{3}} C_1 \sum_{p \geq p_0} c_p \left(\frac{4e|n|\pi C_0^{\frac{1}{3}} C_1}{p} \right)^p.$$

2. Supposons la conjecture 2 vraie, alors :

$$\forall p_0 \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ \|\mathbf{S}\| \geq p_0}} \text{sg}^{\mathbf{S}} \widehat{\tau}_n^{\mathbf{S}} \mathcal{A}_{\mathbf{S}} \right| \leq C_0^{\frac{1}{3}} C_1 \sum_{p \geq p_0} c_p \left(\frac{8e|n|\pi C_0^{\frac{2}{3}} C_1^2}{p} \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Démonstration : Démontrons seulement le premier point. Le second est identique au premier, seule la majoration des coefficients de Fourier $|\widehat{\tau}_n^{\mathbf{S}}|$ change.

Si $\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, on sait que : $|\widehat{\tau}_n^{\mathbf{S}}| \leq \left(\frac{2}{c}\right)^{\|\mathbf{S}\|} e^{2c|n|\pi}$, pour tout $c > 0$. On peut choisir la valeur de c minimisant le membre de droite, c'est-à-dire $c = \frac{\|\mathbf{S}\|}{2|n|\pi}$. Ainsi, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}), |\widehat{\tau}_n^{\mathbf{S}}| \leq \left(\frac{4e|n|\pi}{\|\mathbf{S}\|} \right)^{\|\mathbf{S}\|}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) \\ \|\mathbf{S}\| \geq p_0}} \text{sg}^{\mathbf{S}} \widehat{\tau}_n^{\mathbf{S}} \mathcal{A}_{\mathbf{S}} \right| \\ & \leq C_0^{\frac{1}{3}} C_1 \sum_{p \geq p_0} \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\} \\ \|\mathbf{S}\| = p}} \left(\frac{4e|n|\pi C_0^{\frac{1}{3}} C_1}{\|\mathbf{S}\|} \right)^{\|\mathbf{S}\|} \\ & \leq C_0^{\frac{1}{3}} C_1 \sum_{p \geq p_0} c_p \left(\frac{4e|n|\pi C_0^{\frac{1}{3}} C_1}{p} \right)^p. \end{aligned}$$

□

5.4 Deux nouvelles expressions de τ^\bullet .

5.4.1 Multitangentes démultipliées.

Pour pouvoir majorer aisément le moule $\tau^\bullet(z)$, on commencera par introduire une classe légèrement plus importante que celle des multitangentes. Ceci étant très proche de ce qui est fait pour les multitangentes elles-même dans la seconde partie, nous n'entrerons pas dans les détails.

Définition : Considérons le moule $\mathcal{T}_{\text{démultiplié}}^\bullet$ défini par :

$$\mathcal{T}_{\text{démultiplié}}^{\underline{\mathbf{s}}}(\underline{\mathbf{z}}) = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{(n_1 + z_1)^{s_1} \cdots (n_r + z_r)^{s_r}} .$$

où $(\underline{\mathbf{s}}; \underline{\mathbf{z}}) \in \text{seq}(\{n \in \mathbb{N} ; n \geq 2\} \times (\mathbb{C} - \mathbb{Z}))$.

On dispose de la majoration suivante :

Lemme : $\forall (\underline{\mathbf{s}}; \underline{\mathbf{z}}) \in \text{seq}(\{n \in \mathbb{N} ; n \geq 2\} \times (\mathbb{C} - \mathbb{Z}))$, $|\mathcal{T}_{\text{démultiplié}}^{\underline{\mathbf{s}}}(\underline{\mathbf{z}})| \leq \frac{4^r}{\prod_{i=1}^r |\Im m z_i|^{s_i-1}}$.

La démonstration de cette inégalité étant identique à la première majoration obtenue des multitangentes, nous ne la reproduisons pas ici.

Corollaire : Considérons l'opérateur différentiel défini pour $\underline{\mathbf{n}} \in \text{seq}(\mathbb{N})$ de longueur r par :

$$D^{\underline{\mathbf{n}}} = \frac{1}{n_1! \cdots n_r!} \frac{\partial^{n_1}}{\partial z_1^{n_1}} \cdots \frac{\partial^{n_r}}{\partial z_r^{n_r}} .$$

Pour tout $(\underline{\mathbf{s}}; \underline{\mathbf{z}}; \underline{\mathbf{p}}) \in \text{seq}(\{n \in \mathbb{N} ; n \geq 2\} \times \mathbb{C} - \mathbb{Z} \times \mathbb{N})$, on a alors :

$$|D^{\underline{\mathbf{p}}}(\mathcal{T}_{\text{démultiplié}}^{\underline{\mathbf{s}}})(\underline{\mathbf{z}})| \leq 4^r \frac{2^{||\underline{\mathbf{s}}|| + ||\underline{\mathbf{p}}||}}{\prod_{i=1}^r |\Im m z_i|^{s_i + p_i}} .$$

5.4.2 Le moule τ^\bullet , vu comme une perturbation d'une multitangente.

Les multitangentes démultipliées vont permettre d'exprimer le moule τ^\bullet comme une perturbation d'une multitangente. Puisque chaque variable agit indépendamment des autres, on dispose de l'expression suivante :

Lemme : Soit $\underline{\mathbf{S}} = (\underline{\mathbf{s}}^1; \dots; \underline{\mathbf{s}}^r) \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ et $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$.
Considérons l'opérateur différentiel défini pour $\underline{\mathbf{n}} \in \text{seq}(\mathbb{N})$ de longueur r par :

$$D^{\underline{\mathbf{n}}} = \frac{1}{n_1! \cdots n_r!} \frac{\partial^{n_1}}{\partial z_1^{n_1}} \cdots \frac{\partial^{n_r}}{\partial z_r^{n_r}} .$$

Alors :

$$\tau^{\underline{\mathbf{S}}}(z) = \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\underline{\mathbf{S}})} \left(\prod_{k=1}^{r-1} \frac{\text{diag}_{\mathbf{S}_k}^{\mathbf{i}_k!}}{r} \right) D^{\text{diag}_{\mathbf{S}_1}^{\mathbf{i}_1}, \dots, \text{diag}_{\mathbf{S}_r}^{\mathbf{i}_r}} \left(\mathcal{T}_{\text{démultiplié}}^{||\underline{\mathbf{s}}^1||-l(\underline{\mathbf{s}}^1), \dots, ||\underline{\mathbf{s}}^r||-l(\underline{\mathbf{s}}^r)} \right) \underbrace{(z; \dots; z)}_{r \text{ fois}} .$$

Démonstration : Fixons nous une séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ de longueur r ainsi que $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$. (40)

Puisque $\mathcal{T}_{\text{démultiplié}}^{\underline{\mathbf{S}}}$ est une série de fonctions holomorphes à plusieurs variables, convergeant normalement sur tout compact de $(\mathbb{C} - \mathbb{Z})^r$, il est immédiat que :

$$\begin{aligned} & D^{\text{diag}_{\mathbf{S}_1}^{\mathbf{i}_1}, \dots, \text{diag}_{\mathbf{S}_r}^{\mathbf{i}_r}} \left(\mathcal{T}_{\text{démultiplié}}^{||\underline{\mathbf{s}}^1||-l(\underline{\mathbf{s}}^1), \dots, ||\underline{\mathbf{s}}^r||-l(\underline{\mathbf{s}}^r)} \right) (z_1; \dots; z_r) \\ &= \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \prod_{k=1}^r \frac{\left(||\underline{\mathbf{s}}^k|| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_{\mathbf{S}_k}^{\mathbf{i}_k} - 1 \right)}{(z_k + n_k)^{||\underline{\mathbf{s}}^k|| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_{\mathbf{S}_k}^{\mathbf{i}_k}}} \\ &= \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \prod_{k=1}^r \frac{b_{\text{diag}_{\mathbf{S}_k}^{\mathbf{i}_k}}^{\underline{\mathbf{s}}^k}}{(z_k + n_k)^{||\underline{\mathbf{s}}^k|| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_{\mathbf{S}_k}^{\mathbf{i}_k}} . \end{aligned}$$

En reprenant la définition de $\mathcal{B}^{\underline{\mathbf{S}}, \mathbf{i}}$, où $\mathbf{i} \in \text{triangle}(\underline{\mathbf{S}})$, on en déduit :

$$\tau^{\underline{\mathbf{S}}}(z) = \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\underline{\mathbf{S}})} \left(\prod_{k=1}^{r-1} \frac{\text{diag}_{\mathbf{S}_k}^{\mathbf{i}_k!}}{r} \right) D^{\text{diag}_{\mathbf{S}_1}^{\mathbf{i}_1}, \dots, \text{diag}_{\mathbf{S}_r}^{\mathbf{i}_r}} \left(\mathcal{T}_{\text{démultiplié}}^{||\underline{\mathbf{s}}^1||-l(\underline{\mathbf{s}}^1), \dots, ||\underline{\mathbf{s}}^r||-l(\underline{\mathbf{s}}^r)} \right) \underbrace{(z; \dots; z)}_{r \text{ fois}} .$$

□

5.4.3 Une seconde expression de τ^\bullet .

On obtient aussi une autre expression de $\tau^{\underline{\mathbf{S}}}$ sans avoir à faire agir la démultiplication des variables. La démonstration est tout aussi simple que celle qui vient d'être effectuée. Elle repose sur la même propriété différentielle, ainsi que sur l'application de la formule de Leibniz généralisée. D'une certaine manière, elle reprend à l'envers les opérations effectuées lors du calcul de $\Gamma_\bullet^+(id_{\mathbb{C}})$.

Propriété : Notons, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{N}^*$, $f_n^s : z \mapsto \frac{1}{(z+n)^s}$.

Considérons aussi l'opérateur différentiel $D_l = \frac{1}{l!} \frac{\partial^l}{\partial z^l}$, pour $l \in \mathbb{N}^*$.

Alors, pour tout $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, de longueur $r \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\tau^{\underline{\mathbf{S}}} = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} f_{n_r}^{\Sigma^r} D_{l(\underline{\mathbf{S}}^r)} \left(f_{n_{r-1}}^{\Sigma^{r-1}} D_{l(\underline{\mathbf{S}}^{r-1})} \left(\dots f_{n_2}^{\Sigma^2} D_{l(\underline{\mathbf{S}}^2)} \left(f_{n_1}^{\Sigma^1} \right) \dots \right) \right) , \quad (41)$$

où $\Sigma^k = ||\underline{\mathbf{s}}^k|| - l(\underline{\mathbf{s}}^k)$ pour $k \in \llbracket 1; l(\underline{\mathbf{S}}) \rrbracket$.

Démonstration : Fixons $\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$.

• Si $\mathbf{i} \in \text{triangle}(\mathbf{S})$, on a :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i_{r,1} + \dots + i_{r,r-1} = l(\underline{\mathbf{s}}^r)} \prod_{k=1}^{r-1} \left(\frac{\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_{\mathbf{i}}^k - 1}{i_{r,r-k}} \right) \frac{1}{(z + n_k)^{\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_{\mathbf{i}}^k}} \\
&= \sum_{i_{r,1} + \dots + i_{r,r-1} = l(\underline{\mathbf{s}}^k)} \prod_{k=1}^{r-1} \left(\frac{1}{i_{r,k}!} \frac{\partial^{i_{r,r-k}}}{\partial z^{i_{r,r-k}}} \left(\frac{1}{(z + n_k)^{\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_{\mathbf{i}}^k} \right) \right) \\
&= \frac{1}{l(\underline{\mathbf{s}}^r)!} \frac{\partial^{l(\underline{\mathbf{s}}^r)}}{\partial z^{l(\underline{\mathbf{s}}^r)}} \left(\prod_{k=1}^{r-1} \frac{1}{(z + n_k)^{\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_{\mathbf{i}}^k} \right) \\
&= D_{l(\underline{\mathbf{s}}^r)} \left(\prod_{k=1}^{r-1} f_{n_k}^{\Sigma^k + \text{diag}_{\mathbf{i}}^k} (z) \right) .
\end{aligned}$$

• D'un autre côté, les coefficients multinomiaux s'écrivent évidemment en fonction des coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}
\beta^{\mathbf{S}, \mathbf{i}} &= \prod_{k=1}^{r-1} \binom{\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_{\mathbf{i}}^k - 1}{i_{k+1,1}, \dots, i_{r,r-k}} = \prod_{k=1}^{r-1} \prod_{l=k+1}^r \binom{\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_{\mathbf{i}}^k - 1}{i_{l,l-r}} \\
&= \prod_{l=2}^r \prod_{k=1}^{l-1} \binom{\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_{\mathbf{i}}^k - 1}{i_{l,l-r}} .
\end{aligned}$$

Ici, nous avons noté, pour $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$ et $l \in \llbracket k; r \rrbracket$, $\text{diag}_{\mathbf{i}}^k \leq l = i_{k+1,1} + \dots + i_{l,l-k}$.

• En permutant la somme infinie $\sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty}$ avec la somme finie

$\sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\mathbf{S})}$, puis en appliquant le calcul précédent successivement pour la $r^{\text{ième}}$ ligne, puis la $r-1^{\text{ième}}$ ligne, \dots , on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
\tau^{\mathbf{S}}(z) &= \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \sum_{\substack{i_{2,1}=l_2 \\ i_{3,1}+i_{3,2}=l_3 \\ \vdots \\ i_{r,1}+\dots+i_{r,r-1}=l_r}} \left[\prod_{l=2}^r \prod_{k=1}^{l-1} \binom{\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_{\mathbf{i}}^k - 1}{i_{l,l-r}} \right] \\
&\quad \left[\prod_{p=1}^r \frac{1}{(z + n_p)^{\|\underline{\mathbf{s}}^p\| - l(\underline{\mathbf{s}}^p) + \text{diag}_{\mathbf{i}}^p}} \right] \\
&= \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{(z + n_r)^{\|\underline{\mathbf{s}}^r\| - l(\underline{\mathbf{s}}^r)}} \times \\
&\quad \frac{1}{l(\underline{\mathbf{s}}^r)!} \frac{\partial^{l(\underline{\mathbf{s}}^r)}}{\partial z^{l(\underline{\mathbf{s}}^r)}} \left(\sum_{\substack{i_{2,1}=l_2 \\ i_{3,1}+i_{3,2}=l_3 \\ \vdots \\ i_{r-1,1}+\dots+i_{r-1,r-2}=l_{r-1}} \left[\prod_{l=2}^{r-1} \prod_{k=1}^{l-1} \binom{\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_{\mathbf{i}}^k - 1}{i_{l,l-r}} \right] \right. \\
&\quad \left. \left[\prod_{p=1}^{r-1} \frac{1}{(z + n_p)^{\|\underline{\mathbf{s}}^p\| - l(\underline{\mathbf{s}}^p) + \text{diag}_{\mathbf{i}}^p} \right] \right) \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

$$= \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{(z + n_r)^{||\underline{s}^r|| - l(\underline{s}^r)}} \frac{1}{l(\underline{s}^r)!} \frac{\partial^{l(\underline{s}^r)}}{\partial z^{l(\underline{s}^r)}} \left(\frac{1}{(z + n_{r-1})^{||\underline{s}^{r-1}|| - l(\underline{s}^{r-1})}} \left(\dots \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{1}{l(\underline{s}^2)!} \frac{\partial^{l(\underline{s}^2)}}{\partial z^{l(\underline{s}^2)}} \frac{1}{(z + n_1)^{||\underline{s}^1|| - l(\underline{s}^1)}} \right) \dots \right).$$

Ainsi, avec les notations introduites, on en déduit :

$$\tau^{\underline{S}} = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} f_{n_r}^{\Sigma^r} D_{l(\underline{s}^r)} \left(f_{n_{r-1}}^{\Sigma^{r-1}} D_{l(\underline{s}^{r-1})} \left(\dots f_{n_2}^{\Sigma^2} D_{l(\underline{s}^2)} \left(f_{n_1}^{\Sigma^1} \right) \dots \right) \right).$$

□

5.4.4 Comparaison des deux expressions obtenues.

Remarquons que l'expression (40) du moule τ^\bullet ne prend pas véritablement en compte les multitangentes globalement. En effet, le coefficient combinatoire en facteur devant l'opérateur différentiel est similaire à β^\bullet . Cependant, l'avantage de cette expression est de séparer les variables. Cela permet d'écrire facilement une formule de Cauchy, pour ensuite la majorer.

A contrario, l'expression (41) semble considérer les multitangentes globalement. En fait, il n'en est rien. L'écriture de la formule de Cauchy force l'apparition d'une séparation des variables. On se retrouve finalement au même stade qu'en appliquant (40) ...

Ainsi, les expressions (40) et (41) sont similaires.

Malheureusement, ces expressions n'évident pas les difficultés pour majorer le moule τ^\bullet (exposées à la section 5.2). Cependant, elles permettront tout de même de démontrer la conjecture 2 dans les cas particuliers où $l(\underline{S}) \in \{1; 2; 3\}$.

5.5 Etude des moules β^\bullet et $\tilde{\beta}^\bullet$.

Succinctement, l'étude du coefficient combinatoire β^\bullet va être abordée. L'objectif est de montrer que l'on ne pourra pas aboutir à une démonstration générale des conjectures 1 ou 2 par la méthode de majoration mise en oeuvre précédemment, ni par les expressions (40) et (41).

En effet, on justifiera que l'estimation de la page 59 est quasi-optimale, c'est-à-dire : $0 \leq \beta^{\underline{S}} \leq \frac{l(\underline{S})^{||\underline{S}||}}{l(\underline{S})!^2}$, où $\underline{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$. On donnera aussi une autre expression de β plus simple (surtout d'un point de vue algorithmique).

Voici maintenant une variante du coefficient combinatoire β^\bullet : il s'agit du coefficient combinatoire apparaissant en regard de l'opérateur $D^{\text{diag}_1^{\dot{1}}, \dots, \text{diag}_r^{\dot{1}}}$ dans l'expression (40). Cela définit un moule $\tilde{\beta}^\bullet$ sur $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ par :

$$\forall \underline{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}), \tilde{\beta}^{\underline{S}} = \sum_{\underline{i} \in \text{triangle}(\underline{S})} \left(\prod_{k=1}^{r-1} \frac{\text{diag}_{\mathbb{S}_k}^{\dot{1}}!}{\prod_{p=k+1}^r i_{p,p-k}!} \right).$$

5.5.1 Estimation de $\tilde{\beta}^\bullet$ et quasi-optimalité de l'estimation.

Fixons $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ de longueur r .

On va travailler avec une variante de la série génératrice introduite pour démontrer l'estimation rappelée ci-dessus :

$$F_r(x) = \sum_{l_2, \dots, l_r \geq 0} \left(\sum_{\substack{i_{2,1}=l_2 \\ i_{3,1}+i_{3,2}=l_3 \\ \vdots \\ i_{r,1}+\dots+i_{r,r-1}=l_r}} \left(\prod_{k=1}^{r-1} \frac{\text{diag}_k^{i!}}{r \prod_{p=k+1}^r i_{p,p-k}!} \right) \right) x^{l_2+\dots+l_r}.$$

• Puisque la famille $\left(\prod_{k=1}^{r-2} \binom{i_{k+1,1} + \dots + i_{r,r-k}}{i_{k+1,1}, \dots, i_{r-1,r-k-1}} x^{i_{2,1}+i_{3,1}+i_{3,2}+\dots+i_{r,1}+\dots+i_{r,r-1}} \right)_{\substack{i_{2,1} \in \mathbb{N} \\ (i_{3,1}; i_{3,2}) \in \mathbb{N}^2 \\ \vdots \\ (i_{r,1}; \dots; i_{r,r-1}) \in \mathbb{N}^{r-1}}}$

est formellement sommable, on a formellement :

$$\begin{aligned} F_r(x) &= \sum_{l_2, \dots, l_r \geq 0} \sum_{\substack{i_{2,1}=l_2 \\ i_{3,1}+i_{3,2}=l_3 \\ \vdots \\ i_{r,1}+\dots+i_{r,r-1}=l_r}} \prod_{k=1}^{r-2} \binom{i_{k+1,1} + \dots + i_{r,r-k}}{i_{k+1,1}, \dots, i_{r-1,r-k-1}} x^{l_2+\dots+l_r} \\ &= \sum_{\substack{i_{2,1} \in \mathbb{N} \\ (i_{3,1}; i_{3,2}) \in \mathbb{N}^2 \\ \vdots \\ (i_{r,1}; \dots; i_{r,r-1}) \in \mathbb{N}^{r-1}}} \prod_{k=1}^{r-2} \binom{i_{k+1,1} + \dots + i_{r,r-k}}{i_{k+1,1}, \dots, i_{r-1,r-k-1}} x^{i_{2,1}+i_{3,1}+i_{3,2}+\dots+i_{r,1}+\dots+i_{r,r-1}} \\ &= \sum_{d_1, \dots, d_{r-1} \geq 0} \sum_{\substack{i_{2,1}+\dots+i_{r,r-1}=d_1 \\ i_{3,1}+\dots+i_{r,r-2}=d_2 \\ \vdots \\ i_{r,1}=d_{r-1}}} \prod_{k=1}^{r-2} \binom{i_{k+1,1} + \dots + i_{r,r-k}}{i_{k+1,1}, \dots, i_{r-1,r-k-1}} x^{d_1+\dots+d_{r-1}}. \end{aligned}$$

La formule du multinôme donne alors :

$$\begin{aligned} F_r(x) &= \sum_{d_1, \dots, d_{r-1} \geq 0} ((r-1)x)^{d_1} ((r-2)x)^{d_2} \dots x^{d_{r-1}} \\ &= \frac{1}{(1-x)(1-2x)\dots(1-(r-1)x)}. \end{aligned}$$

• Le calcul formel précédent permet de montrer que F_r est analytique sur $D(0; \frac{1}{r-1})^{r-1}$. En particulier, les inégalités de Cauchy permettent donc de retrouver l'estimation déjà démontrée de $\beta^{\underline{\mathbf{S}}}$, en majorant les coefficients de Taylor de cette fonction.

En effet, si $x \in D(0; \frac{1}{r})$, on a : $|F_r(x)| \leq \frac{r^{r-1}}{(r-1)!}$.

On retrouve alors l'estimation :

$$\forall (l_2; \dots; l_r) \in \mathbb{N}^r, 0 \leq \sum_{\substack{i_{2,1}=l_2 \\ i_{3,1}+i_{3,2}=l_3 \\ \vdots \\ i_{r,1}+\dots+i_{r,r-1}=l_r}} \prod_{k=1}^{r-2} \binom{i_{k+1,1} + \dots + i_{r,r-k}}{i_{k+1,1}, \dots, i_{r,r-k}} \leq r^{l_2+\dots+l_r} \frac{r^{r-1}}{(r-1)!}.$$

• Rappelons un théorème de transfert dû à Flajolet et Sedgewick (cf. [23], p. 392) :

Théorème : Soit f une fonction analytique définie sur un domaine du type $\Delta(\mathbb{R}; \theta)$ par $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n z^n$, où $\mathbb{R} > 0$, $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et

$$\Delta(\mathbb{R}; \theta) = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \mathbb{R} \text{ et } |\text{Arg}(z-1)| \leq \theta\}.$$

S'il existe $\alpha \in \mathbb{C} - \{0; -1; -2; \dots\}$ tel que $f(z) \underset{z \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{(z-1)^\alpha}$,

$$\text{alors : } f_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Dans le cas de F_r , le théorème s'applique. On trouve alors automatiquement :

$$\sum_{\substack{l_2, \dots, l_r \geq 0 \\ l_2 + \dots + l_r = n}} \sum_{\substack{i_{2,1}=l_2 \\ i_{3,1}+i_{3,2}=l_3 \\ \vdots \\ i_{r,1}+\dots+i_{r,r-1}=l_r}} \prod_{k=1}^{r-2} \binom{i_{k+1,1} + \dots + i_{r,r-k}}{i_{k+1,1}, \dots, i_{r,r-k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (r-1)^n \frac{(r-1)^{r-1}}{(r-1)!}.$$

5.5.2 Quasi-optimalité de l'estimation de β^\bullet .

Le théorème de transfert utilisé précédemment s'applique aussi dans le cas du moule β^\bullet . Il est facile de voir que l'estimation obtenue est aussi quasi-optimale. La conclusion de ceci est qu'il ne faut pas compter sur les expressions (40) et (41) pour obtenir des résultats généraux sur les conjectures 1 ou 2. Cependant, pour de petites longueurs, il est possible d'en tirer des informations.

Voyons quelle modification il faut effectuer. Cette fois, on pose :

$$F_r(x) = \sum_{l_2, \dots, l_r \geq 0} \left(\sum_{\substack{i_{2,1}=l_2 \\ i_{3,1}+i_{3,2}=l_3 \\ \vdots \\ i_{r,1}+\dots+i_{r,r-1}=l_r}} \prod_{k=1}^{l(\underline{\mathbf{s}})} \frac{(\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_{\mathbf{s}_k}^i - 1)!}{\left(\prod_{p=k+1}^r i_{p,p-k}! \right) (\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) - 1)!} \right) x^{l_2+\dots+l_r}.$$

On trouve alors :

$$F_r(x) = \prod_{k=1}^{r-1} \frac{1}{(1 - (r-k)x)^{\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k)}}.$$

5.5.3 Une nouvelle écriture du moule β^\bullet .

On dispose d'une variante de la formule combinatoire de Vandermonde :

$$\sum_{i_1+\dots+i_r=n} \binom{a_1+i_1}{a_1} \dots \binom{a_r+i_r}{a_r} = \binom{a_1+\dots+a_r+n+r-1}{n},$$

où $r \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1; \dots; a_r) \in \mathbb{N}^r$.

En appliquant ceci, on obtient :

Propriété : Pour tout $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ vérifiant $l(\underline{\mathbf{s}}^1) = 1$, on a :

$$\beta^{\underline{\mathbf{S}}} = \prod_{k=1}^{l(\underline{\mathbf{S}})-1} \binom{\|\underline{\mathbf{s}}^1\| + \dots + \|\underline{\mathbf{s}}^k\| + l(\underline{\mathbf{s}}^{k+1}) - 2}{l(\underline{\mathbf{s}}^{k+1})}. \quad (42)$$

Démonstration : On peut écrire, pour $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ de longueur r , vérifiant $l(\underline{\mathbf{s}}^1) = 1$:

$$\begin{aligned} \beta^{\underline{\mathbf{S}}} &= \sum_{\substack{i_{2,1}=l(\underline{\mathbf{s}}^2) \\ i_{3,1}+i_{3,2}=l(\underline{\mathbf{s}}^3) \\ \vdots \\ i_{r,1}+\dots+i_{r,r-1}=l(\underline{\mathbf{s}}^r)}} \prod_{k=1}^{l(\underline{\mathbf{S}})-1} \frac{(\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_k^i - 1)!}{\left(\prod_{p=k+1}^r i_{p,p-k}! \right) (\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) - 1)!} \\ &= \sum_{\substack{i_{2,1}=l(\underline{\mathbf{s}}^2) \\ i_{3,1}+i_{3,2}=l(\underline{\mathbf{s}}^3) \\ \vdots \\ i_{r-1,1}+\dots+i_{r-1,r-2}=l(\underline{\mathbf{s}}^{r-1})}} \sum_{i_{r,1}+\dots+i_{r,r-1}=l(\underline{\mathbf{s}}^r)} \left(\prod_{k=1}^{l(\underline{\mathbf{S}})-2} \frac{\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_k^{i^{<r}} - 1!}{\left(\prod_{p=k+1}^r i_{p,p-k}! \right) (\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) - 1)!} \right) \\ &\quad \times \left(\prod_{k=1}^{l(\underline{\mathbf{S}})-1} \binom{\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_k^i - 1!}{i_{p,p-k}} \right) \\ &= \beta^{\underline{\mathbf{S}}^{<l(\underline{\mathbf{S}})}} \times \left(\sum_{i_{r,1}+\dots+i_{r,r-1}=l(\underline{\mathbf{s}}^r)} \prod_{k=1}^{l(\underline{\mathbf{S}})-1} \binom{\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_k^i - 1!}{i_{p,p-k}} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la variante de la formule de Vandermonde, on obtient la formule de récurrence :

$$\text{Si } \underline{\mathbf{S}} \text{ est de longueur } r \text{ alors } \beta^{\underline{\mathbf{S}}} = \binom{\|\underline{\mathbf{s}}^1\| + \dots + \|\underline{\mathbf{s}}^{r-1}\| + l(\underline{\mathbf{s}}^r) - 2}{l(\underline{\mathbf{s}}^r)} \beta^{\underline{\mathbf{S}}^{\leq r-1}}.$$

Il ne reste plus qu'à donner la condition initiale de la récurrence : $\beta^{\underline{\mathbf{s}}^1} = 1$. □

5.6 Quelques cas particuliers de la conjecture 2.

Cas des séquences de poids inférieur à 14. On sait que :

$$\forall \underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}), \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, |\tau^{\underline{\mathbf{S}}}(z)| \leq \frac{4l(\underline{\mathbf{S}}) \beta^{\underline{\mathbf{S}}}}{|\mathfrak{S}m z|^{\|\underline{\mathbf{S}}\| - l(\underline{\mathbf{S}}) - 2}}.$$

De plus, pour $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\Im z| \geq 1$, on a²⁰ :

$$|\Im z|^{\|\underline{\mathbf{s}}\| - l(\underline{\mathbf{s}}) - 2} \geq \sqrt{|\Im z|^{2\|\underline{\mathbf{s}}\| - 2l(\underline{\mathbf{s}}) - 4}} \geq \sqrt{|\Im z|^{\|\underline{\mathbf{s}}\|}} .$$

Ainsi : $|\tau^{\underline{\mathbf{s}}}(z)| \leq \frac{4l(\underline{\mathbf{s}})\beta^{\underline{\mathbf{s}}}}{\sqrt{|\Im z|^{\|\underline{\mathbf{s}}\|}}}$. La formule (42) est maintenant utilisable pour vérifier

des cas particuliers de la conjecture 2. Celle-ci est facilement implémentable à l'aide de Maple. Voici ce qu'on obtient :

$$\begin{cases} \forall \underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) , \|\underline{\mathbf{s}}\| \leq 14 \implies 0 \leq 4l(\underline{\mathbf{s}})\beta^{\underline{\mathbf{s}}} \leq 2^{\|\underline{\mathbf{s}}\|} . \\ \forall \underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) , \|\underline{\mathbf{s}}\| \leq 25 \implies 0 \leq \beta^{\underline{\mathbf{s}}} \leq 2^{\|\underline{\mathbf{s}}\|} . \end{cases}$$

Ainsi, la conjecture 2 est vraie jusqu'au poids 14. De plus, elle est "presque" vraie jusqu'au poids 25 :

$$\forall \underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) , \|\underline{\mathbf{s}}\| \leq 25 \implies |\tau^{\underline{\mathbf{s}}}(z)| \leq 4l(\underline{\mathbf{s}}) \left(\frac{2}{\sqrt{|\Im z|}} \right)^{\|\underline{\mathbf{s}}\|} .$$

Cas des séquences de longueur 1. On sait que si $\underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ est de longueur 1, alors $\tau^{\underline{\mathbf{s}}} = \mathcal{T}e^{\|\underline{\mathbf{s}}\|}$. De plus, on sait que, lorsque $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ est fixé, $\mathcal{T}ig^y(z)$ est définie sur $\mathbb{C}(0; |\Im z|)$ et vérifie (cf. p. 141) :

$$\mathcal{T}ig^y(z) = \sum_{k \geq 2} \mathcal{T}e^k(z) y^{k-1} = \mathcal{T}e^1(z - y) = \frac{\pi}{\tan(\pi(z - y))} .$$

Les inégalités de Cauchy permettent à nouveau d'obtenir pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \forall r \in]0; 1[, |\mathcal{T}e^k(z)| &= \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}(0; r|\Im z|)} \frac{\mathcal{T}ig^\zeta(z)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi r^k |\Im z|^k} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\text{th}(\pi \Im(z - r|\Im z|e^{i\theta}))} d\theta \\ &\leq \frac{1}{r^k} \frac{1}{|\Im z|^k} \frac{\pi}{\text{th}(\pi \Im(z)(1 - r))} . \end{aligned}$$

Si $|\Im z| \geq 1$, en choisissant $r = \frac{9}{10}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall k \geq 4 , |\mathcal{T}e^k(z)| &\leq \frac{1}{|\Im z|^k} \left(\frac{10}{9} \right)^k \frac{\pi}{\text{th}\left(\frac{\pi \Im(z)}{10}\right)} \\ &\leq \frac{10.4}{|\Im z|^k} \left(\frac{10}{9} \right)^k \leq \left(\frac{2}{|\Im z|} \right)^k . \end{aligned}$$

²⁰ Sauf pour quelques cas très particuliers vérifiables à la main :

$$\underline{\mathbf{s}} \in \{((3)); ((4)); ((5)); ((3), (4)); ((4), (3)); ((3), (3), (3))\} .$$

Les cas particuliers de $\mathcal{T}e^2$ et $\mathcal{T}e^3$ se traitent directement par leurs expressions et sont immédiats.

Ainsi, on a montré la conjecture 1 dans le cas des séquences de longueur 1.

Cas des séquences de longueur 2. Ecrivons l'expression (40) dans le cas des séquences de longueur 2. Considérons donc $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ s'écrivant $\underline{\mathbf{S}} = ((\underline{\mathbf{s}}^1, \underline{\mathbf{s}}^2)$, avec²¹ $l(\underline{\mathbf{s}}^1) = 1$. On a alors, d'après la formule de Cauchy, pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ et $r \in]0; 1[$:

$$\begin{aligned}
|\tau^{\underline{\mathbf{S}}}(z)| &= \left| D^{l(\underline{\mathbf{s}}^2), 0} \left(\mathcal{T}_{\text{démultiplié}}^{||\underline{\mathbf{s}}^1||-l(\underline{\mathbf{s}}^1), ||\underline{\mathbf{s}}^2||-l(\underline{\mathbf{s}}^2)} \right) (z; z) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z;r|\Im z|)} \frac{\mathcal{T}_{\text{démultiplié}}^{||\underline{\mathbf{s}}^1||-l(\underline{\mathbf{s}}^1), ||\underline{\mathbf{s}}^2||-l(\underline{\mathbf{s}}^2)}(\zeta; z)}{(\zeta - z)^{l(\underline{\mathbf{s}}^2)+1}} d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(r|\Im z|)^{l(\underline{\mathbf{s}}^2)}} \int_0^{2\pi} \left| \mathcal{T}_{\text{démultiplié}}^{||\underline{\mathbf{s}}^1||-l(\underline{\mathbf{s}}^1), ||\underline{\mathbf{s}}^2||-l(\underline{\mathbf{s}}^2)}(z + r|\Im z|e^{i\theta}; z) \right| d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(r|\Im z|)^{l(\underline{\mathbf{s}}^2)}} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\pi^2}{4}}{|\Im(z + r|\Im z|e^{i\theta})|^{||\underline{\mathbf{s}}^1||-l(\underline{\mathbf{s}}^1)-1} |\Im z|^{||\underline{\mathbf{s}}^2||-l(\underline{\mathbf{s}}^2)-1}} d\theta \\
&\leq \frac{\frac{\pi^2}{4}}{|\Im z|^{||\underline{\mathbf{S}}||-2} r^{l(\underline{\mathbf{s}}^2)} (1-r)^{||\underline{\mathbf{s}}^1||-2}} .
\end{aligned}$$

Le choix de $r = \frac{1}{2}$ donne alors : $\frac{\pi^2}{r^{l(\underline{\mathbf{s}}^2)}(1-r)^{||\underline{\mathbf{s}}^1||-2}} = \frac{\pi^2}{16} 2^{||\underline{\mathbf{s}}^1||+l(\underline{\mathbf{s}}^2)} \leq 2^{||\underline{\mathbf{s}}^1||+l(\underline{\mathbf{s}}^2)} \leq 2^{||\underline{\mathbf{S}}||}$.

D'où : $\forall \underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, $l(\underline{\mathbf{S}}) = 2$, $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, $|\tau^{\underline{\mathbf{S}}}(z)| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{|\Im z|}} \right)^{||\underline{\mathbf{S}}||}$.

Ainsi, la conjecture 2 est vraie pour les séquences de longueur 2.

Cas des séquences de longueur 3. En partant cette fois de l'expression (41), la même méthode donne pour une séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ de longueur 3 et vérifiant $l(\underline{\mathbf{s}}^1) = 1$:

$$\forall (u_2; u_3) \in]0; 1[^2, \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, |\tau^{\underline{\mathbf{S}}}(z)| \leq \frac{U(u_2; u_3)}{|\Im z|^{||\underline{\mathbf{S}}||-3}},$$

$$\text{où } U(u_2; u_3) = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{u_2^{l(\underline{\mathbf{s}}^2)} u_3^{l(\underline{\mathbf{s}}^3)} (1-u_2-u_3)^{||\underline{\mathbf{s}}^1||-2} (1-u_2)^{||\underline{\mathbf{s}}^2||-l(\underline{\mathbf{s}}^2)-1}} .$$

²¹ En effet, si $l(\underline{\mathbf{s}}^1) = 1$, alors $\tau^{\underline{\mathbf{S}}} = 0$.

Le choix de $u_2 = u_3 = \frac{1}{4}$ donne : $U(u_2; u_3) \leq 2^{\|\underline{s}^1\| - 1} \left(\frac{4}{3^{\frac{2}{3}}}\right)^{\|\underline{s}^2\|} 2^{\|\underline{s}^3\|} \leq 2^{\|\underline{s}\|}$. On a donc :

$$\forall \underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}), l(\underline{\mathbf{S}}) = 3, \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, |\tau^{\underline{\mathbf{S}}}(z)| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{|\text{Sm } z|}}\right)^{\|\underline{\mathbf{S}}\|}.$$

Ainsi, la conjecture 2 est vraie pour les séquences de longueur 3.

5.7 Manipulations éventuelles sur des multitangentes en vue de la conjecture 1.

On a vu que la conjecture 2 est vraie pour toute séquence de $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ de poids inférieur à 14. Au poids 15, seule une séquence pourrait être le sujet d'une objection : $\underline{\mathbf{S}} = ((3), (3), (3), (3), (3))$. En effet : $4l(\underline{\mathbf{S}})\beta^{\underline{\mathbf{S}}} = 17600 > 16384 = 2^{\|\underline{\mathbf{S}}\|}$. Puisque les majorations effectuées ne sont pas optimales, il s'agit de les affiner sensiblement pour montrer la conjecture 2. Cela est évidemment possible si l'on ne tient pas compte de la majoration $\mathcal{Z}e^{2,1,\dots,1} \leq 2$ au cours de la première majoration des multitangentes (cf. p. 166). On obtient alors :

$$(\mathcal{Z}e^{2,1,\dots,1})^2 l(\underline{\mathbf{S}})\beta^{\underline{\mathbf{S}}} = 4400(\mathcal{Z}e^{l(\underline{\mathbf{S}})+1})^2 \leq 4554.$$

Cette amélioration est substantielle : la conjecture 2 devient vraie jusqu'au poids 20.

Néanmoins, cela ne permet toujours pas de faire des regroupements de multitangentes, ce qui est à priori la bonne idée pour obtenir des estimations plus précises. Observons ce qui se passe au niveau de $\tau^{\underline{\mathbf{S}}}$, où $\underline{\mathbf{S}}$ est la première séquence qui a semblé mettre en défaut la conjecture 2, à savoir : $\underline{\mathbf{S}} = ((3), (3), (3), (3), (3))$:

$$\begin{aligned} \tau^{\underline{\mathbf{S}}} = & 120\mathcal{T}e^{6,2,2,2,2} + 144\mathcal{T}e^{5,3,2,2,2} + 96\mathcal{T}e^{5,2,3,2,2} + 48\mathcal{T}e^{5,2,2,3,2} + 108\mathcal{T}e^{4,4,2,2,2} + \\ & 96\mathcal{T}e^{4,3,3,2,2} + 48\mathcal{T}e^{4,3,2,3,2} + 36\mathcal{T}e^{4,2,4,2,2} + 24\mathcal{T}e^{4,2,3,3,2} + 48\mathcal{T}e^{3,5,2,2,2} + \\ & 48\mathcal{T}e^{3,4,3,2,2} + 24\mathcal{T}e^{3,4,2,3,2} + 24\mathcal{T}e^{3,3,4,2,2} + 16\mathcal{T}e^{3,3,3,3,2}. \end{aligned}$$

Cette combinaison de multitangentes peut se réécrire en faisant apparaître des dérivées de multitangentes (cf. p. ?? pour les propriétés élémentaires des multitangentes). C'est un excellent moyen de regrouper des multitangentes entre elles. On obtient par exemple :

$$\begin{aligned} \tau^{\underline{\mathbf{S}}} = & -\frac{\partial}{\partial z} (24\mathcal{T}e^{5,2,2,2,2} + 24\mathcal{T}e^{4,3,2,2,2} + 12\mathcal{T}e^{4,2,3,2,2} + 12\mathcal{T}e^{3,4,2,2,2} + 8\mathcal{T}e^{3,3,3,2,2}) \\ & + 24\mathcal{T}e^{4,2,3,2,3} - 48\mathcal{T}e^{5,2,2,2,3} - 48\mathcal{T}e^{4,3,2,2,3} - 48\mathcal{T}e^{4,2,3,2,3} - 24\mathcal{T}e^{3,4,2,2,3} - 16\mathcal{T}e^{3,3,3,2,3}. \end{aligned}$$

Il reste à majorer la dérivée d'une multitangente. La formule de Cauchy pourrait être utilisée, mais l'estimation obtenue n'est malheureusement pas assez précise. Il faudrait travailler directement au niveau des multitangentes...

6 Algorithmes de calculs des invariants holomorphes.

On a déjà rappelé que les invariants holomorphes ont la réputation infondée d'être pour certains incalculables, pour d'autres très difficiles à calculer. Cela ne peut être vrai puisque ce sont des coefficients de Fourier. Ceux-ci sont donc exprimables à l'aide d'une intégrale dans le plan multiplicatif :

$$A_{2i\pi n} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{z_0}^{z_0+1} (l^{o(-p)} \circ f^{o(2p)} \circ l^{o(-p)}(z) - z) e^{-2in\pi z} dz .$$

On appellera cette méthode la méthode 0, car celle n'est pas véritablement exploitable. Du moins, ce sera la plus mauvaise des méthodes.

Avant de présenter trois autres méthodes pour les calculer, on renvoie le lecteur à l'article [16] qui explique en détail la différence qui existe entre les méthodes géométriques et la méthode résurgente quant aux invariants. On renvoie aussi le lecteur vers les articles [35] et [36] pour les méthodes géométriques.

6.1 Méthode 1, issue de l'asymptotique des coefficients.

Considérons un germe $\widehat{\varphi}$ de fonction holomorphe en 0, prolongeable sur un disque de rayon $r = |\omega|$, où ω est une singularité de $\widehat{\varphi}$ supposée unique²². Exprimons $\widehat{\varphi}$ sous la forme :

$$\widehat{\varphi}(\zeta) = \sum_{n \geq 0} J(n) \zeta^n .$$

Le principe consiste à déterminer cette singularité à partir de la connaissance de l'asymptotique des coefficients de $\widehat{\varphi}$. Supposons que les coefficients $J(n)$ admettent le développement asymptotique : $J(n) = e^{-n\nu_0} J_{\nu_0}(n) + o(e^{-n\nu_0} J_{\nu_0}(n))$, où $J_{\nu_0}(n) \in \mathbb{C} \left[\frac{1}{n} \right]$.

En écrivant $J_{\nu_0}(n) = \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha_k}{n^k}$, on peut alors considérer la transformation de Borel de J_{ν_0} . Celle-ci est reliée à $\widehat{\varphi}$ par :

$$\widehat{\varphi}(\zeta) = \widehat{J}_{\nu_0} \left(\log \left(1 + \frac{\zeta}{\zeta_0} \right) \right) .$$

Il s'agit d'une méthode simple et très utile.

Cela permet donc de calculer la première paire d'invariants holomorphes. Par exemple, pour $f(z) = z + 1 + \frac{1}{10z^2}$, on trouve :

$$A_1 \approx -14.91351103557842215407015963733918802397 \\ -7.429352270694850476346650109888076885387i .$$

6.2 Méthode 2, issue de l'analyse résurgente dans le plan de Borel.

On sait qu'il existe un isomorphisme entre le demi-plan de Poincaré \mathcal{H} et $\mathbb{C} - 2i\pi\mathbb{Z}$. Celui-ci est explicite et est donné par $z \rightarrow -\ln(1-\lambda(z))$, où λ est la fonction automorphe

²² Cette hypothèse d'unicité de la singularité n'est pas restrictive.

classique. Plus précisément, cet isomorphisme est :

$$z \longrightarrow -\ln(1 - \lambda(z)) = 16 \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \mu_n e^{2in\pi z}, \text{ où } \mu_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} d.$$

On dispose alors de trois homographies dans le demi-plan de Poincaré :

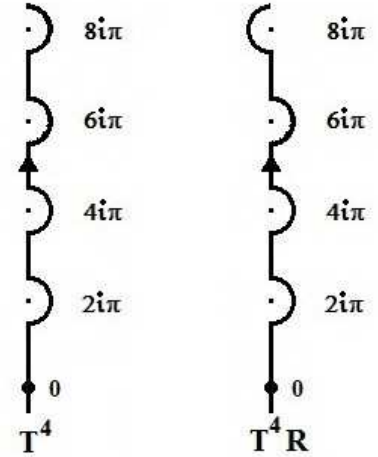
$$R(z) = z + 2, \quad S(z) = \frac{z}{-2z + 1}, \quad T(z) = \frac{z - 2}{2z - 3}.$$

Leurs images dans $\mathbb{C} - \widetilde{2i\pi\mathbb{Z}}$ correspondent respectivement à la rotation d'angle π autour de 0, la translation de pas $-2i\pi$ et enfin la translation de pas $2i\pi$.

Alors, on voit que $RST = id$.

Ainsi, pour connaître la valeur de $A_{2in\pi}$, il suffit de connaître les valeurs limites en $2i\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)$ par la droite et par la gauche.

On transforme le chemin suivi pour calculer usuellement les dérivées étrangères.



Par exemple, en suivant les deux chemins ci-dessus à droite, on évalue T^4 et $T^4 R$.

Un exemple de transformation conforme serait possible. Il s'agit de celle représentée sur la figure 9. Son attrait est clair : on peut lire toutes les équations de résurgence, si l'on n'est pas limité par la puissance de calcul. Malheureusement, ses coefficients sont certainement moins sympathiques que ceux de $z \longrightarrow -\ln(1 - \lambda(z)) \dots$

6.3 Méthode 3, utilisant les multizêtas.

Contrairement aux deux méthodes précédentes, la méthode que nous allons décrire maintenant permet non seulement de calculer tous les invariants, mais surtout elle décrit leur structure interne : cette méthode n'est pas opaque.

6.3.1 Idée générale de l'algorithme.

On a vu que le n -ième invariant holomorphe d'un difféomorphisme f s'exprime par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, A_{2in\pi} = \text{sg}(n) \sum_{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\}} \text{sg}^{\mathbf{S}} \widehat{\tau}_n^{\mathbf{S}} \mathcal{A}_{\mathbf{S}}. \quad (43)$$

L'algorithme de calcul numérique des invariants holomorphes d'un difféomorphisme tangent à l'identité va reposer sur cette expression. En faisant apparaître le poids des séquences dans la série (43), il est aisé d'en effectuer une somme partielle :

$$\text{sg}(n) \sum_{p=2}^{p_0} \sum_{\substack{\mathbf{S} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\} \\ \|\mathbf{S}\| = p}} \text{sg}^{\mathbf{S}} \widehat{\tau}_n^{\mathbf{S}} \mathcal{A}_{\mathbf{S}} \xrightarrow{p_0 \rightarrow +\infty} A_{2in\pi}. \quad (44)$$

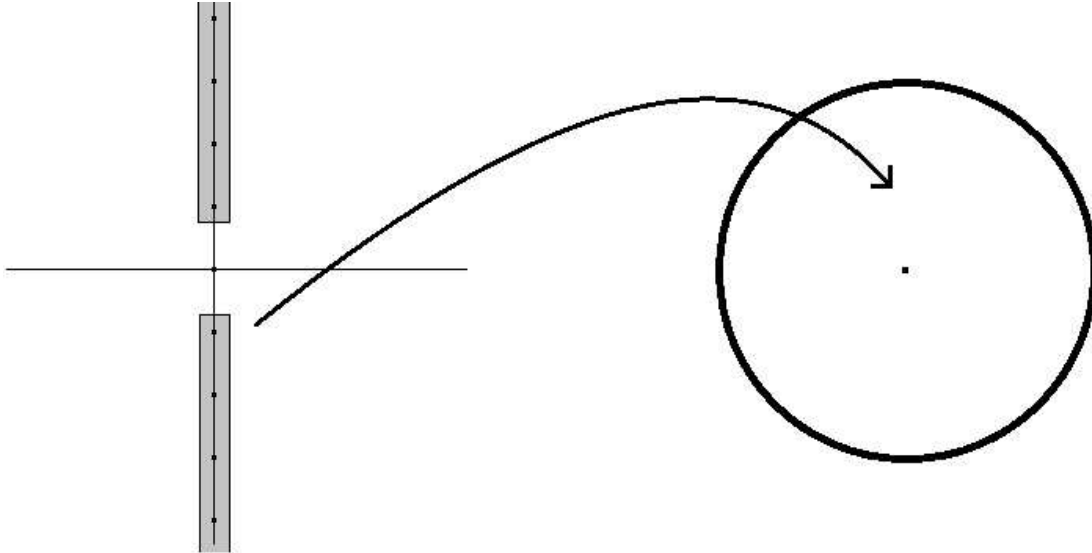


Figure 9 : Un autre exemple de transformation conforme.

Pour effectuer ces sommes partielles, de nombreux calculs sont nécessaires. En l'état actuel de la puissance de calcul des ordinateurs, avoir à les effectuer à chaque utilisation empêcherait purement et simplement de pouvoir choisir $p_0 \geq 25$ à plus ou moins quelques unités. On a donc opté pour un pré-enregistrement de leur valeurs. Ces calculs préliminaires au calcul de la somme partielle sont :

1. La détermination des séquences de $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ de poids donné.
2. La constitution d'une base de données (à haute précision numérique) des multizêtas de valuation supérieure à 2 et de poids donné.
3. La constitution d'une base de données du moule τ^\bullet , évalué sur les séquences de $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ de poids donné.

A ce jour, les multizêtas ont été calculés jusqu'au poids 30, avec une centaine de décimales exactes, par l'algorithme de Crandall (cf. [13] pour l'algorithme en lui-même et l'annexe 2 pour l'implémentation Maple). Cela représente une base de donnée d'environ 1 300 000 calculs pré-enregistrés et plusieurs mois de calculs.

Chaque évaluation du moule τ^\bullet a été effectuée de manière exacte, puis sauvegardée après réduction en monotangentes. Pour le moment, la base de données du moule τ^\bullet n'a pu être effectuée que jusqu'au poids 27, ce qui représente tout de même plus de 200 000 évaluations.

Actuellement, ces banques de données ne permettent de faire que $p_0 \leq 27$, ce qui est relativement peu... Néanmoins, ces calculs sont en constante évolution et il ne s'agit que d'être patient pour augmenter le nombre d'entrées des bases de données.

Notons que nous avons opté pour une méthode à priori non optimale, mais certaine d'aboutir : nous avons calculé tous les multizêtas de valuation supérieure à 2 et de poids donné.

6.3.2 Evaluation du reste.

Pour que le calcul de la somme partielle de la série (43) soit effectif, la question essentielle est la vitesse de convergence de la limite (44). Comme on peut le remarquer élémentairement, celle-ci est géométrique :

$$\exists(K_0; K_1) \in \mathbb{R}_+^* \times]0; 1[, \forall p_0 \in \mathbb{N}, \left| \sum_{p > p_0} \sum_{\substack{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\} \\ \|\underline{\mathbf{S}}\| = p}} \text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}} \right| \leq K_0 K_1^{p_0}. \quad (45)$$

Rappelons-le encore une fois, cette estimation est élémentaire et peu précise : elle ne repose que sur les estimations déjà énoncées. Malheureusement, lorsque K_0 est très grand et K_1 proche de 1, si l'on veut obtenir d décimales correctes, alors p_0 est nécessairement très grand... On a besoin d'effectuer énormément de calculs avant d'entrer dans le domaine de convergence, mais une fois celui-ci atteint, les nouvelles décimales sont faciles à obtenir.

D'après la section 4, on dispose d'une estimation beaucoup plus précise :

$$\exists(K_0; K_1) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall p_0 \in \mathbb{N}, \left| \sum_{p > p_0} \sum_{\substack{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\} \\ \|\underline{\mathbf{S}}\| = p}} \text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}} \right| \leq K_0 e^{2K_1|n|\pi} \left(\frac{2e|n|\pi}{p_0} \right)^{p_0}. \quad (46)$$

6.3.3 Description de l'algorithme.

L'algorithme de calcul des invariants holomorphes, basé sur la formule (43) se divise en trois étapes :

1. L'augmentation de la valuation de f .
2. La troncature de f pour négliger ses derniers termes.
3. Le calcul de la somme partielle.

Augmentation de la valuation. Rappelons que la valuation d'un difféomorphisme f tangent à l'identité, s'écrivant sous la forme $f(z) = z + 1 + \sum_{n \geq p+1} \frac{a_{n+1}}{z^n}$, est le plus petit entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_{p+1} \neq 0$. Celle-ci sera notée $\text{val}(f)$.

Voici une remarque simple : plus la valuation de f est grande, moins il y a de séquences de $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ apportant une contribution à l'expression (43). En effet, si $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ contient un entier n tel que $n < \text{val}(f)$, alors $\mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}} = 0$.

Puisque deux difféomorphismes tangents à l'identité et conjugués ont les mêmes invariants, on souhaite donc choisir un difféomorphisme conjugué à f ayant la valuation la plus grande possible : cela minimisera le nombre de calculs à effectuer. Ce choix du conjugué se fait très simplement :

Lemme²⁴ : Considérons $\varphi_c(z) = z \left(1 + \frac{c}{z^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p-1}}$, où $c = \frac{p-1}{p-2}a_p$.

Alors : 1. $\varphi_c \circ f \circ \varphi_c^{-1}(z) = z + 1 + \sum_{n \geq p+1} \frac{\alpha_n}{z^{n-1}} = z + 1 + o\left(\frac{1}{z^{p-1}}\right)$.

Plus précisément : $\text{val}(f) = p \implies \text{val}(\varphi_c \circ f \circ \varphi_c^{-1}) = p + 1$.

2. $\exists(\gamma_0; \gamma_1) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\alpha_n| \leq \gamma_0 \gamma_1^n$.

Les valeurs de γ_0 et γ_1 sont données par :

$$\begin{cases} \gamma_0 = 2uvw \\ \gamma_1 = 2w(1+u) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u = \max(1; 2C_1) \\ v = \max\left(\frac{C_0 C_1}{p-2}; \frac{C_0}{(p-1)u}\right) \\ w = \max\left(1; 2C_1; C_1 e^{\frac{C_0 C_1}{p-2}}; \frac{C_0}{p-1}; C_0 C_1\right) \end{cases}.$$

Le choix du conjugué est alors simple et rapide :

1. On augmente de 1 la valuation de f en calculant $\varphi_c \circ f \circ \varphi_c^{-1}$.
2. On regarde si l'ordre de troncature de la série (43) pour f est supérieur à celui pour $\varphi_c \circ f \circ \varphi_c^{-1}$.
Si oui, on remplace f par $\varphi_c \circ f \circ \varphi_c^{-1}$; si non, on ne modifie pas f .
3. On effectue les étapes 1 et 2 jusqu'à avoir eu à conserver f à l'étape 2.

Troncature de f . Une fois de plus, pour accélérer le calcul de la somme partielle de la série (43), on va négliger les derniers termes de f . En effet, l'inégalité (37) permet de négliger les termes a_n lorsque $n_0 \in \mathbb{N}$ est choisi pour que le second membre de (37) soit aussi petit que souhaité.

Cela aura le mérite de ne pas avoir à considérer les séquences contenant des entiers n vérifiant $n \geq n_0$. Donc, cela accélérera légèrement l'algorithme pour les poids importants.

Calcul de la somme partielle. Rappelons qu'une grande quantité de calculs doit être pré-enregistrée. Il s'agit des séquences de $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ de poids donné, des multizêtas évalués numériquement à haute précision et enfin de l'évaluation de τ^\bullet .

6.3.4 Exemples.

Un invariant nul. Par définition, les invariants de $f(z) = z + 1$ sont nuls. Cela se voit immédiatement sur la formule (43). Par contre, f et $\varphi_{\frac{1}{2}} \circ f \circ \varphi_{\frac{1}{2}}^{-1}$ ont les mêmes invariants.

Bien que cela ne se lise pas sur (43), les invariants de $\varphi_{\frac{1}{2}} \circ f \circ \varphi_{\frac{1}{2}}^{-1}$ sont donc nuls.

On a commencé la vérification de ce fait pour le premier invariant. Le calcul de la somme partielle a été mené jusqu'au poids 27 intégralement, et partiellement jusqu'au poids 28. Les figures (10) à (12) donnent respectivement les approximations successives obtenues de la partie réelle, de la partie imaginaire et du module de cet invariant.

²⁴ Ce lemme résulte d'un calcul élémentaire de développement asymptotique et de calculs immédiats pour exprimer $\varphi_c \circ f \circ \varphi_c^{-1}$ et majorer ses coefficients.

Cas de $f(z) = z + 1 + \frac{a}{z^2}$.

6.4 Comparaison des différentes méthodes.

- La première méthode (par l'asymptotique des coefficients) permet de calculer les deux premiers invariants rapidement et avec une précision extrême (une centaine de décimale en une heure de calculs Maple) . De plus, elle est peu sensible à la taille des coefficients de f .

Elle pourrait aussi s'étendre (théoriquement et via la synthèse des difféomorphismes) aux paires successives d'invariants. Mais là, elle deviendrait beaucoup moins performante.

- La seconde méthode (par transformation conforme et les équations de résurgence) est elle aussi peu sensible à la taille des coefficients de f , mais de moins en moins efficace lorsque les indices ω croissent.

- La troisième méthode (par les multizêtas) est la plus satisfaisante théoriquement car elle fournit l'expression exacte des invariants holomorphes en fonction des coefficients de Taylor de f et du seul ingrédient transcendant, qui sont les multizêtas.

A l'inverse de la seconde méthode, elle est peu sensible à la taille de ω , mais en revanche très sensible à la taille de f .

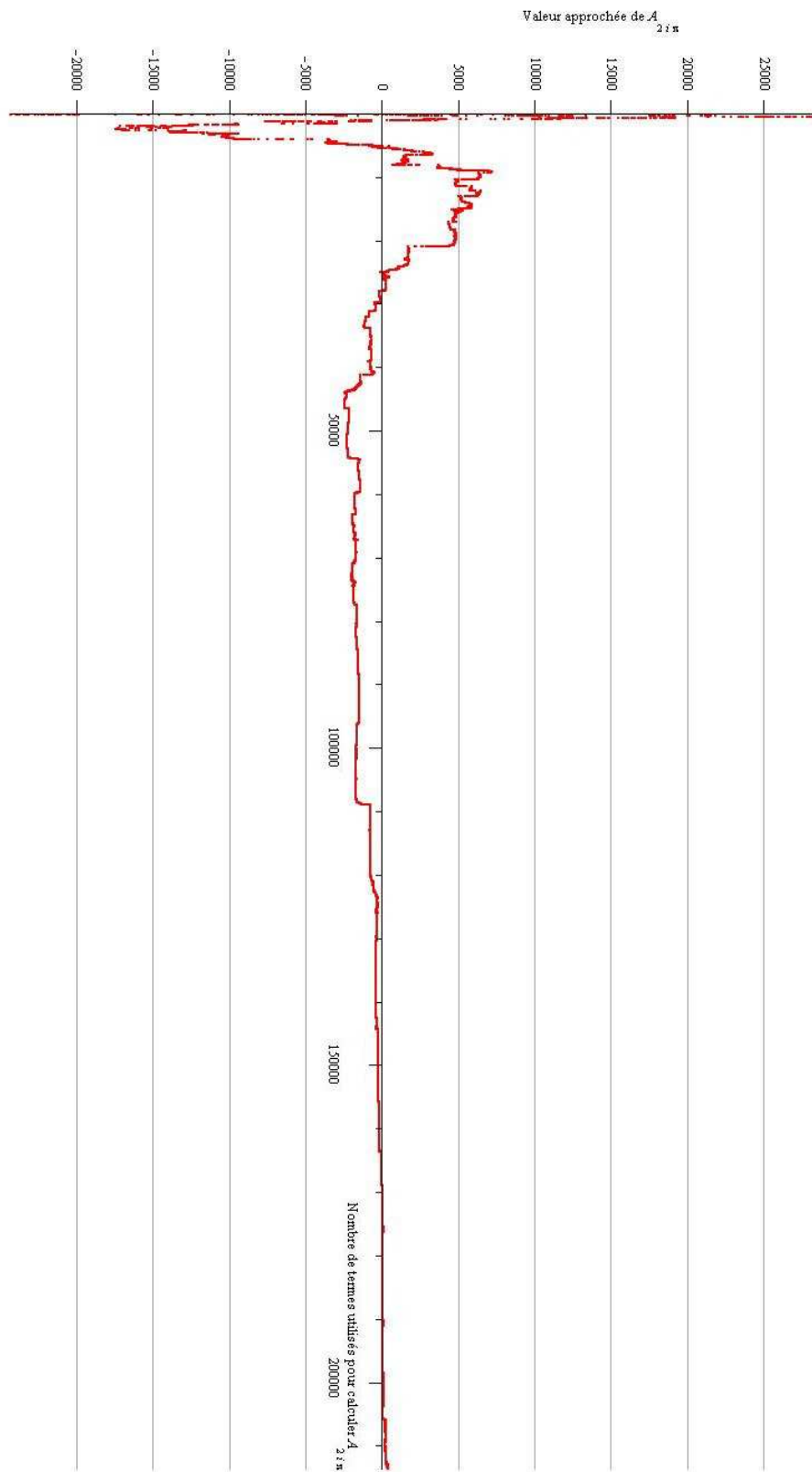
- Pour des f et ω "grands", ou même "moyens", les méthodes 2 et 3 se valent à peu près. Ni l'une ni l'autre n'est très performante. La méthode 3 a l'avantage de l'universalité : elle vaut pour tous les f , mais nécessite la tabulation préalable de nombreux multizêtas. La méthode 2 fait l'économie de cette tabulation, mais nécessite le calcul de plusieurs centaines de coefficients de Taylor.

6.5 Ce qui change hors du cas-type.

Lorsque $p = 1$ mais $\rho \neq 0$, les méthodes 1, 2 et 3 restent inchangées pratiquement.

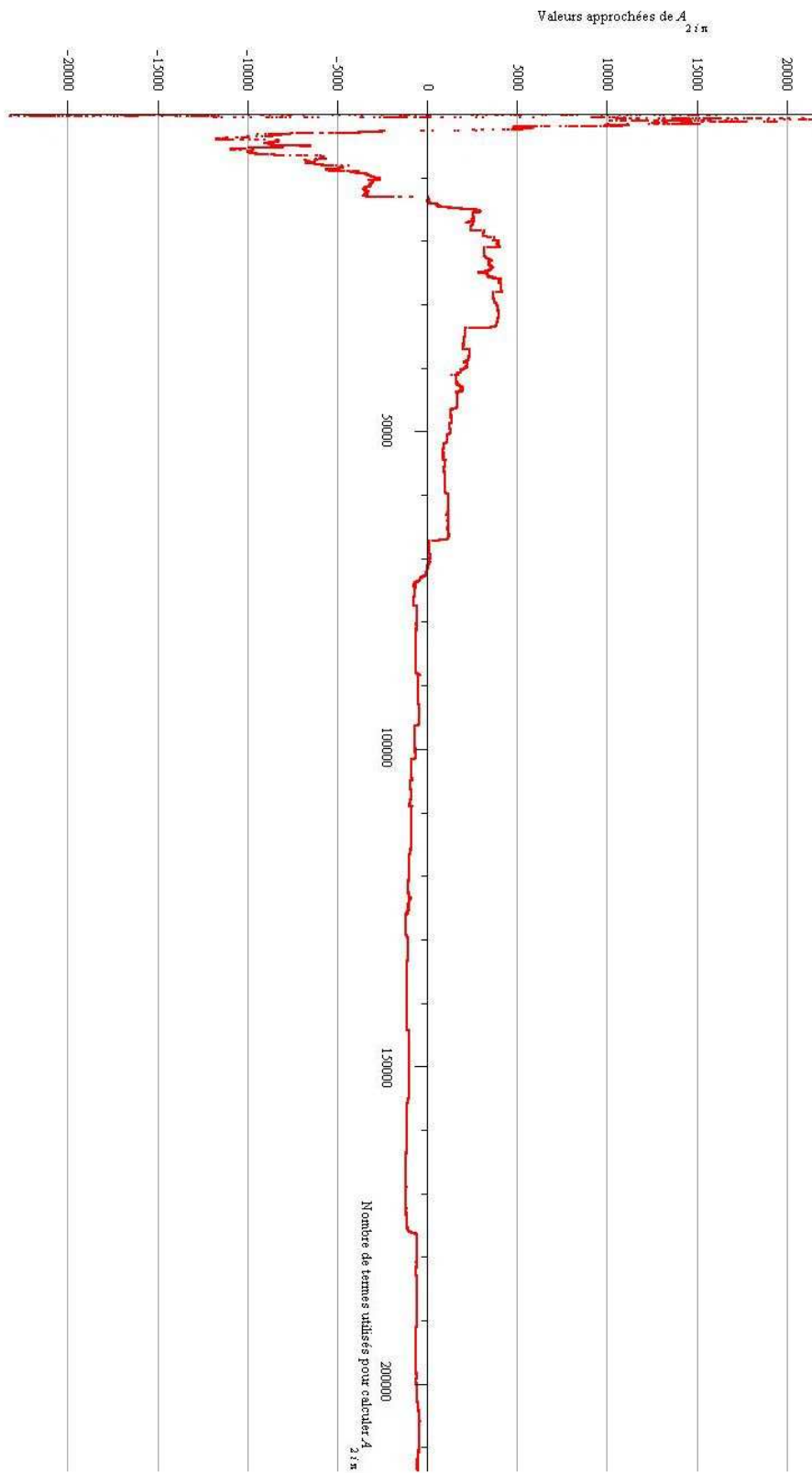
Lorsqu' $p \geq 2$, il y a des ramifications. La première méthode fonctionne sans changement, si ce n'est qu'elle fournit les $2p$ invariants les plus proches. En dehors de la ramification, la méthode de la transformation conforme ne change pas. Quant à la troisième méthode, il faut distinguer :

1. L'expression de π^+ , qui demeure valable, mais avec des multitangentes ramifiées.
2. L'expression des invariants, qui change : il devrait y avoir des multizêtas ramifiées. Les changements sont sérieux.



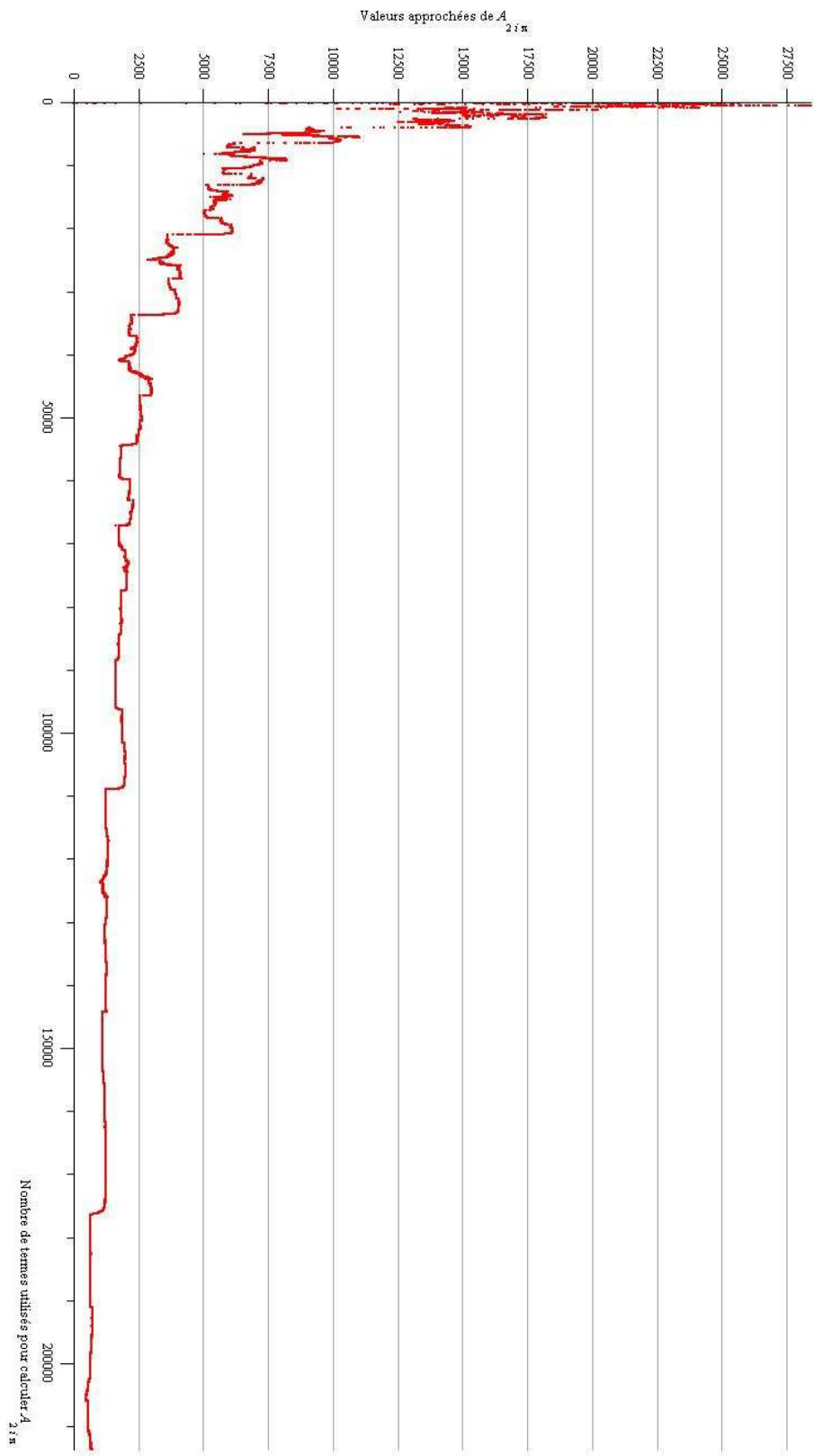
Puisque cet invariant est nul, on doit obtenir une courbe qui tend vers 0 .

Figure 10 : Calcul jusqu'au poids 27 de la partie réelle du premier invariant du difféomorphisme $\varphi_{\frac{1}{2}} \circ f \circ \varphi_{\frac{1}{2}}^{-1}$.



Puisque cet invariant est nul, on doit obtenir une courbe qui tend vers 0 .

Figure 11 : Calcul jusqu'au poids 27 de la partie imaginaire du premier invariant du difféomorphisme $\varphi_{\frac{1}{2}} \circ f \circ \varphi_{\frac{1}{2}}^{-1}$.



Puisque cet invariant est nul, on doit obtenir une courbe qui tend vers 0 .

Figure 12 : Calcul jusqu'au poids 27 du module du premier invariant du diffeomorphisme $\varphi_{\frac{1}{2}} \circ f \circ \varphi_{\frac{1}{2}}^{-1}$.

Partie II

Etude des multitangentes, sous
des aspects analytique,
algébrique et arithmétique .

1 Introduction.

Toute cette partie sera consacrée aux multitanentes, étudiée pour elles-mêmes.

Symétrisation de l'espace de sommation. On sait que l'un des objets essentiels du calcul explicite de $\zeta(2n)$, où $n \in \mathbb{N}$, est le développement de la cotangente. Celui-ci est obtenue par dérivation logarithmique du produit eulérien du sinus :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) \implies \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \frac{\pi}{\tan(\pi z)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z+k}.$$

Une fois ceci constaté, le fait de chercher à effectuer une sommation sur un ensemble symétrique devient naturel.

En effet, cette relation permet, par dérivation, de sommer les séries d'Eisenstein $\varepsilon_k(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+m)^k}$ ainsi que les séries de Dirichlet $\sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \frac{f(m)}{m^r}$, où $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction p -périodique s'annulant en 0 :

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \frac{f(m)}{m^r} = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{f(k)}{p^r} \varepsilon_r \left(\frac{k}{p} \right) \right).$$

Ainsi, par symétrisation de l'ensemble de sommation (i.e. par passage de \mathbb{N}^* à \mathbb{Z}^*), on sait calculer de nombreuses sommes du type $\sum_{m \in \mathbb{N}^*} \frac{\omega^{mr}}{m^r}$, où ω est une racine n -ième de l'unité.

Il est donc naturel de vouloir symétriser le simplexe $\{(n_1; \dots; n_r) ; 1 \leq n_1 < \dots < n_r\}$ sur lequel s'effectue la sommation des multizêtas.

Passage par des développements de Fourier. Fixons des polynômes P_1, \dots, P_N de degré 1, à coefficients rationnels et à r indéterminées. Lorsque \mathcal{N} est l'ensemble des r -uplets d'entiers relatifs dont les composantes ne sont pas racine de P_1, \dots, P_N ,

Zagier a suggéré (cf. [53], p. 507) de remplacer la somme $\mathcal{S} = \sum_{(m_1; \dots; m_r) \in \mathcal{N}} \frac{1}{\prod_{i=1}^N P(m_1; \dots; m_r)}$ par $\sum_{(m_1; \dots; m_r) \in \mathcal{N}} \frac{e^{2i\pi(m_1 x_1 + \dots + m_r x_r)}}{\prod_{i=1}^N P(m_1; \dots; m_r)}$, pour pouvoir la calculer et y faire $x_1 = \dots = x_r = 0$.

Il en déduit que \mathcal{S} est alors un multiple rationnel de π^N .

Dans cette méthode se cachent deux idées, qu'il serait bon de mettre en oeuvre pour les multizêtas :

1. Travailler avec des nombres impose une rigidité certaine, alors que pouvoir travailler avec des fonctions, dont on particularisera ensuite l'évaluation, donne énormément de souplesse.
2. Avoir des fonctions périodiques permet d'avoir accès à tout un panel de méthodes.

Introduction des multitangentes. Afin de retrouver des résultats sur les multizêtas de manière élémentaire, nous allons chercher à introduire un modèle fonctionnel.

La suggestion la plus simple est de considérer les multizêtas de Hurwitz :

$$z \mapsto \mathcal{H}e_+^{s_1, \dots, s_r}(z) = \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{(n_1 + z)^{s_1} \dots (n_r + z)^{s_r}} .$$

L'avantage de ces fonctions est d'avoir un lien très simple avec les multizêtas :

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \forall (s_1; \dots; s_r) \in (\mathbb{N}^*)^r, s_1 \geq 2 \implies \mathcal{H}e_+^{s_1, \dots, s_r}(0) = \mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_r} .$$

Malheureusement, ce choix ne semble pas judicieux au regard des remarques précédentes : ces fonctions ne sont pas périodiques et l'ensemble de sommation n'est pas symétrique.

Nous sommes contraints à modifier légèrement le modèle en considérant les fonctions :

$$z \mapsto \sum_{-\infty < n_1 < \dots < n_r < +\infty} \frac{1}{(n_1 + z)^{s_1} \dots (n_r + z)^{s_r}} .$$

Celles-ci sont bien 1-périodiques et l'espace de sommation est bien symétrique. Ce qui est gagné d'un côté est évidemment perdu de l'autre : le lien avec les multizêtas n'est plus aussi évident. Cependant, il existe et en sera d'autant plus fort (cf. §3 et §4.8) .

Nous appellerons ces fonctions des “***fonctions multitangentes***”. Le préfixe “multi” caractérisera l'ensemble de sommation comme étant à plusieurs variables ; le suffixe “tangentes” provient de leur lien avec les séries d'Eisenstein et donc avec la fonction cotangente.

Une généralisation des séries d'Eisenstein. Nous avons déjà rappelé (cf. p. 111) que les séries qu'Eisenstein a considéré dans son célèbre article de 1847, pour les besoins de sa théorie des fonctions trigonométriques, sont définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \varepsilon_k(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z + m)^k} .$$

Comme il le dit lui-même, “les propriétés fondamentales de ces fonctions périodiques simples se révèlent d'elles-mêmes en considérant une identité simple” (cf. [24]) :

$$\frac{1}{p^2 q^2} = \frac{1}{(p + q)^2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) + \frac{2}{(p + q)^3} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) .$$

De là, il en tirera des identités, non triviales à première vue, reliant ces séries entre elles. André Weil ira même jusqu'à comparer son travail à l'une des oeuvres les plus ardues, encore aujourd'hui, de la dernière période de création de Beethoven : les variations Il s'agit d'une oeuvre issue du thème le plus anodin qui soit et qui, au cours des différentes variations se succédant, engendrera un univers musical prodigieux, extrêmement riche, plein de finesse, mais aussi de virtuosité à la fois pianistique et compositionnelle. Le parallèle pour montrer la beauté des résultats obtenus par Eisenstein est limpide.

Au cours de ses “variations”, Eisenstein obtiendra entre autres les relations suivantes :

$$\varepsilon_2^2(z) = \varepsilon_4(z) + 4\zeta(2)\varepsilon_2(z) . \quad (47)$$

$$\varepsilon_3(z) = \varepsilon_1(z)\varepsilon_2(z) . \quad (48)$$

$$3\varepsilon_4(z) = \varepsilon_2(z)^2 + 2\varepsilon_1(z)\varepsilon_3(z) . \quad (49)$$

Eisenstein a aussi montré que chacune de ses séries est en fait un polynôme à coefficients réels en ε_1 .

Les multitangentes sont, bien sûr, une généralisation multi-dimensionnelle des séries d’Eisenstein, tout comme les multizêtas en sont une vis-à-vis des valeurs de la fonction ζ de Riemann.

Les relations (47) , (48) et (48) peuvent s’obtenir directement nous obtiendrons ces relations de manière indépendante d’Eisenstein. Celles-ci seront des cas particuliers de relations plus générales : la relation (47) est un mixte des relations de symétrelité des multitangentes (cf. §2) et de réduction des multitangentes en monotangentes (cf. §3), alors que les relations (48) et (49) sont l’archétype des relations de symétrelité des multitangentes divergentes (cf. §4) .

Plan. Après avoir vérifié la définition des multitangentes (cf. §2) et des propriétés simples mais fondamentales, nous effectuerons une décomposition en éléments simples pour exprimer, un peu à la manière de la relation (47), toute multitangente convergente comme une combinaison linéaire de monotangentes à coefficients dans la \mathbb{Q} -algèbre des multizêtas (cf. §3) : ce sera le lien fondamental entre multitangentes et multizêtas. A la section suivante, nous étendrons ce résultat aux multitangentes divergentes, après les avoir renormalisées.

Quelques calculs explicites seront effectués à la section 5.

Nous étudierons ensuite une propriété conjecturale des multitangentes : le nettoyage des 1. Il s’agit de la possibilité d’écrire toute multitangente comme une \mathbb{Q} -combinaison linéaire de multitangentes dont les arguments sont des entiers supérieurs à deux.

Aux paragraphes 7 et 8, nous étudierons les multitangentes respectivement sous leurs aspects analytique et arithmétique. Nous prouverons en particulier, en ce qui concerne l’aspect analytique, des majorations géométriques et le caractère exponentiellement plat de ces fonctions. Pour l’aspect arithmétique, après avoir vérifié la \mathbb{Q} -indépendance linéaire des monotangentes ou la transcendance des multitangentes non nulles, nous montrerons que l’absence conjecturale de \mathbb{Q} -relations linéaires entre multizêtas de poids différents est équivalente au même résultat concernant les multitangentes.

La dernière section concerne l’étude de l’algèbre des multizêtas soumis à la partie des relations quadratiques retrouvées par l’étude des multitangentes. Nous obtenons ainsi une algèbre secondaire soumise à la symétrelité et à des traces de symétralité.

Enfin, en annexe, nous donnons des tables de valeurs des monotangentes ainsi que des réductions en monotangentes des multitangentes convergentes et divergentes. Nous les donnons jusqu’au poids 10 .

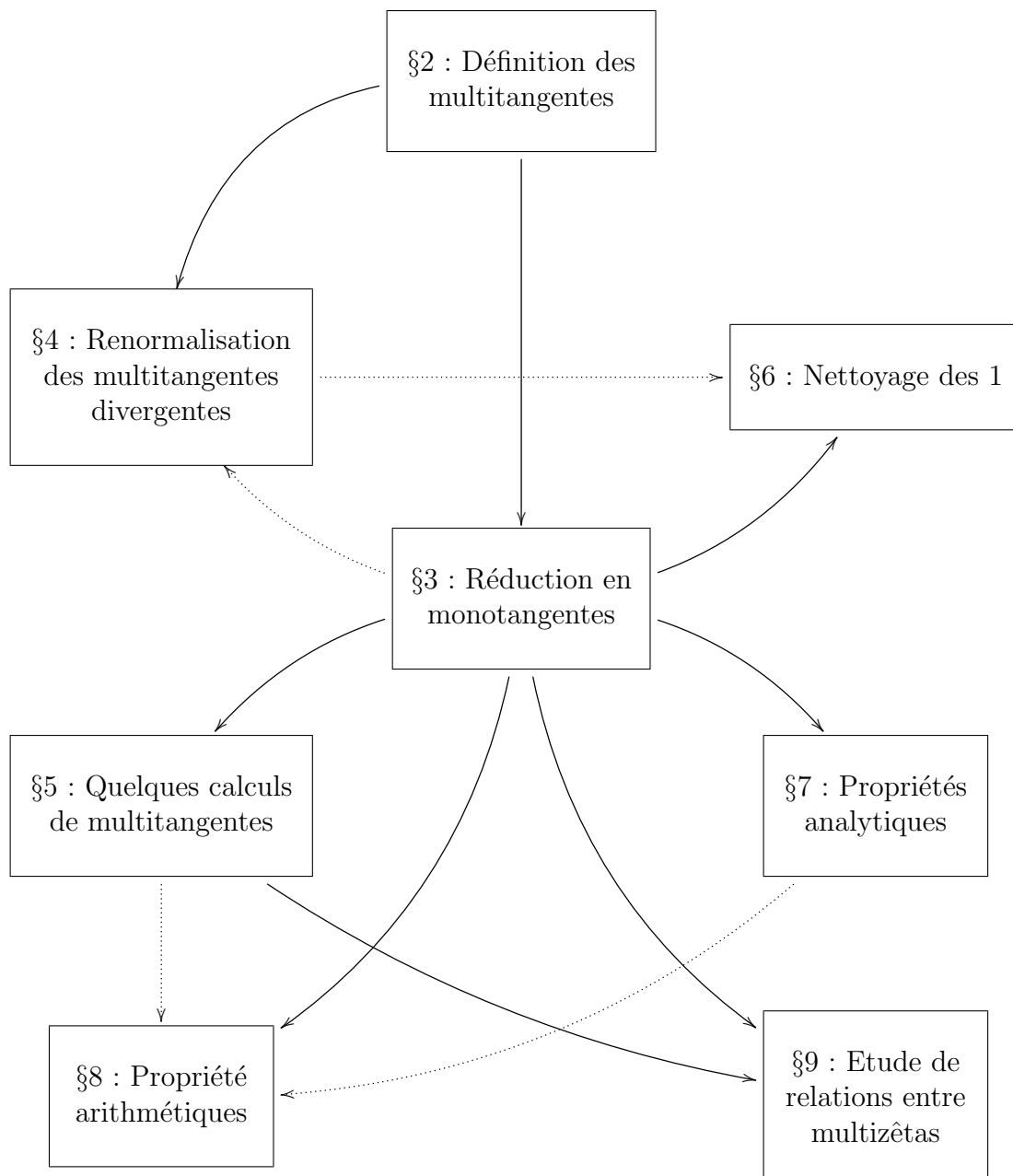
La figure suivante explicite les liens entre les différentes sections.

Figure 13 : **Plan schématique de la seconde partie.**

Une flèche en traits pleins, allant de la section p à la section q , indique que la lecture de la section p est indispensable à la section q .

Une flèche en pointillés, allant de la section p à la section q , indique que la lecture de la section q nécessite des résultats de la section p ; des renvois ou rappels sont fait pour rendre autant que possible la section q indépendante de la section p .

Enfin, l'absence de flèche entre les sections p et q indique que celles-ci sont indépendantes.



2 Définition des multitangentes, et premières propriétés.

Commençons cette section avec un lemme général permettant de montrer, sous certaines hypothèses, qu'un moule²⁵ s'écrivant comme une somme infinie de fonctions holomorphes est un moule symétr \underline{e} ²⁵, à valeurs dans un espace de fonctions holomorphes. Cela nous permettra immédiatement de pouvoir définir correctement les multitangentes, mais aussi, plus loin dans le texte, les multizêtas de Hurwitz ou encore de retrouver la condition bien connue de convergence des multizêtas.

Comme conséquence de ce lemme, nous obtiendrons immédiatement des propriétés simples des multitangentes.

2.1 Un lemme sur les moules symétr \underline{e} s.

Voici une première version de ce lemme, pour des sommes classiques (i.e. l'indice de sommation varie de N à $+\infty$, $N \in \mathbb{N}$) :

Lemme 1 : Définition des moules symétr \underline{e} s, version 1.

Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} , $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in (\mathcal{H}(\mathcal{U}))^{\mathbb{Z}}$ et $N \in \mathbb{N}$.

On suppose que : pour tout compact K de \mathcal{U} , $\|f_n\|_{\infty, K} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Alors, pour toute séquence $\underline{s} \in \mathbb{C}^* - \{\emptyset\}$, de longueur r , vérifiant

$$\begin{cases} \Re(s_1) > 1, \\ \vdots \\ \Re(s_1 + \dots + s_r) > r, \end{cases} \quad (50)$$

on a :

1. La fonction $F_N^{\underline{s}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \sum_{N < n_r < \dots < n_1 < +\infty} (f_{n_1}(z))^{s_1} \dots (f_{n_r}(z))^{s_r}$
est correctement définie sur \mathcal{U} .

2. $\forall N \in \mathbb{N}$, $F_N^{\underline{s}} \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ et :

$$\forall z \in \mathcal{U}, (F_N^{\underline{s}})'(z) = \sum_{N < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \left(\prod_{i=1}^r (f_{n_i})^{s_i} \right)'.$$

3. Pour tout compact K de \mathcal{U} , il existe une constante $C_{K, \underline{s}} > 0$
telle que $\|F_N^{\underline{s}}\|_{\infty, K} \leq \frac{C_{K, \underline{s}}}{N^{\Re(\|\underline{s}\|) - r}}$.

De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$, F_N^{\bullet} définit un moule symétr \underline{e} sur l'ensemble des séquences $\underline{s} \in \mathbb{C}^*$ vérifiant (50), à valeurs dans $\mathcal{H}(\mathcal{U})$, si l'on pose $F_N^{\emptyset} = 1$.

²⁵ Cf. annexe "Preliminaires", p. 207-210 pour des rappels concernant les notations mouliennes et sa terminologie.

La convergence des séries de ce lemme est souvent évidente ; l'intérêt de ce lemme réside dans l'obtention, à la fois du caractère holomorphe, mais surtout du caractère symétr \underline{e} l. Ce lemme, tout comme sa version suivante, nous permettra donc d'affirmer qu'un moule possède la symétrie "symétr \underline{e} l" de manière générique par des vérifications élémentaires (dont on ne parle d'ailleurs pas souvent dans la littérature).

Nous nous autoriserons donc dans le reste de l'article de juste affirmer la propriété de symétrie sans plus d'éléments de démonstration qu'une simple référence à ce lemme (ou la version suivante, selon les cas).

Ainsi, seule la conclusion de symétr \underline{e} lité du moule F_N^\bullet est cruciale dans ce lemme.

Dans la démonstration qui va suivre, nous nous contenterons d'indiquer en un mot la convergence des sommes considérées, ainsi que l'holomorphie de la fonction $F_N^{\underline{s}}$. Par contre, en ce qui concerne la symétr \underline{e} lité, bien qu'elle soit tout aussi élémentaire que la convergence et l'holomorphie, nous en effectuerons la démonstration en détail.

Démonstration : • Les points 1., 2. et 3. se démontrent simultanément par récurrence sur la longueur de la séquence \underline{s} , en utilisant le théorème de Weierstrass sur l'holomorphie d'une somme de fonctions holomorphes, une comparaison avec intégrale permettant d'affirmer :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x > 1, \sum_{n>N} \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{x-1} \frac{1}{N^{x-1}}$$

et enfin l'hypothèse :

$$\forall K \subset \subset \mathcal{U}, \exists M_K > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^*, \|f_n\|_{\infty, K} \leq \frac{M_K}{|n|}.$$

• Soit $N \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathcal{U}$.

Nous allons montrer la symétr \underline{e} lité du moule $F_N^\bullet(z)$ par récurrence : à savoir, montrer la relation $F_N^{\underline{s}^1}(z)F_N^{\underline{s}^2}(z) = \sum_{\gamma \in sh\underline{e}(\underline{s}^1; \underline{s}^2)} F_N^\gamma(z)$, lorsque les séquences \underline{s}^1 et \underline{s}^2 de \mathbb{C}^* vérifient (50). La récurrence a lieu sur l'entier $l(\underline{s}^1) + l(\underline{s}^2)$.

Avant de commencer celle-ci, rappelons que, si $\underline{s} \in \mathbb{C}^*$ vérifie (50), alors, par définition du moule F_N^\bullet , on a la relation de récurrence :

$$F_N^{\underline{s}} = \sum_{p>N} (f_p)^{s_k} F_p^{\underline{s}^{<r}}$$

Initialisation : Soit $(\underline{u}; \underline{v}) \in (\mathbb{C}^*)^2$ vérifiant (50) et telles que $l(\underline{u}) = l(\underline{v}) = 1$.

Notons $\underline{u} = (u)$ et $\underline{v} = (v)$. On a alors successivement, pour $N \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} F_N^{\underline{u}}(z) F_N^{\underline{v}}(z) &= \left(\sum_{p>N} (f_p(z))^u \right) \left(\sum_{q>N} (f_q(z))^v \right) \\ &= \sum_{p>q>N} (f_p(z))^u (f_q(z))^v + \sum_{p=q>N} (f_p(z))^u (f_q(z))^v \\ &\quad + \sum_{q>p>N} (f_p(z))^u (f_q(z))^v \\ &= \sum_{q>N} (f_q(z))^v F_q^u(z) + F_N^{u+v}(z) + \sum_{p>N} (f_p(z))^u F_p^v(z) \end{aligned}$$

$$= F_N^{u,v}(z) + F_N^{u+v}(z) + F_N^{v,u}(z) = \sum_{\mathbf{w} \in \text{sh}\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}; \mathbf{v})} F_N^{\mathbf{w}}(z).$$

Ainsi, la propriété est initialisée.

Hérédité : Supposons le résultat établi pour toutes séquences \mathbf{u} et \mathbf{v} de \mathbb{C}^* vérifiant (50) et telles que $l(\mathbf{u}) + l(\mathbf{v}) \geq 2$. Soit aussi $z \in \mathcal{U}$.

En procédant exactement de la même manière que dans le cas des longueurs 1, et en utilisant l'hypothèse de récurrence, si \mathbf{u} et \mathbf{v} sont de longueurs k et l respectivement, on a successivement²⁶:

$$\begin{aligned} F_N^{\mathbf{u}}(z) F_N^{\mathbf{v}}(z) &= \sum_{p>q>N} (f_p(z))^{u_k} (f_q(z))^{v_l} F_p^{\mathbf{u}^{\leq k-1}}(z) F_q^{\mathbf{v}^{\leq l-1}}(z) + \\ &\quad \sum_{p=q>N} (f_p(z))^{u_k} (f_q(z))^{v_l} F_p^{\mathbf{u}^{\leq k-1}}(z) F_q^{\mathbf{v}^{\leq l-1}}(z) + \\ &\quad \sum_{q>p>N} (f_p(z))^{u_k} (f_q(z))^{v_l} F_p^{\mathbf{u}^{\leq k-1}}(z) F_q^{\mathbf{v}^{\leq l-1}}(z) \\ &= \sum_{q>N} (f_q(z))^{v_l} F_q^{\mathbf{v}^{\leq l-1}}(z) F_q^{\mathbf{u}}(z) + \sum_{n>N} (f_n(z))^{u_k+v_l} F_n^{\mathbf{u}^{\leq k-1}}(z) F_n^{\mathbf{v}^{\leq l-1}}(z) + \\ &\quad \sum_{p>N} (f_p(z))^{u_k} F_p^{\mathbf{u}^{\leq k-1}}(z) F_p^{\mathbf{v}}(z) \\ &= \sum_{\mathbf{w} \in \text{sh}\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}; \mathbf{v}^{\leq l-1})} \left(\sum_{q>N} (f_q(z))^{v_l} F_q^{\mathbf{w}}(z) \right) + \sum_{\mathbf{w} \in \text{sh}\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}^{\leq k-1}; \mathbf{v}^{\leq l-1})} \left(\sum_{n>N} (f_n(z))^{u_k+v_l} F_n^{\mathbf{w}}(z) \right) \\ &\quad + \sum_{\mathbf{w} \in \text{sh}\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}^{\leq k-1}; \mathbf{s})} \left(\sum_{p>N} (f_p(z))^{u_k} F_p^{\mathbf{w}}(z) \right) \\ &= \sum_{\mathbf{w} \in \text{sh}\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}; \mathbf{v}^{\leq l-1}) \cdot v_l} F_N^{\mathbf{w}}(z) + \sum_{\mathbf{w} \in \text{sh}\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}^{\leq k-1}; \mathbf{v}^{\leq l-1}) \cdot (u_k+v_l)} F_N^{\mathbf{w}}(z) + \sum_{\mathbf{w} \in \text{sh}\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}^{\leq k-1}; \mathbf{v}) \cdot u_k} F_N^{\mathbf{w}}(z) \\ &= \sum_{\mathbf{w} \in \text{sh}\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{u}; \mathbf{v})} F_N^{\mathbf{w}}(z). \end{aligned}$$

Ainsi, le principe de récurrence permet d'affirmer que pour toutes séquences \mathbf{s}^1 et \mathbf{s}^2 de \mathbb{C}^* vérifiant (50), on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathcal{U}, F_N^{\mathbf{s}^1}(z) F_N^{\mathbf{s}^2}(z) = \sum_{\boldsymbol{\gamma} \in \text{sh}\underline{\mathbf{e}}(\mathbf{s}^1; \mathbf{s}^2)} F_N^{\boldsymbol{\gamma}}(z).$$

Autrement dit, pour tous $z \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathbb{N}$, le moule $F_N^{\bullet}(z)$ est symétré. \square

On obtient alors, comme corollaire, la version suivante pour des sommes indexées sur l'ensemble \mathbb{Z} :

²⁶ Rappelons que si $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$, la notation $\mathbf{s}^{\leq k}$ désigne la séquence (s_1, \dots, s_k) des k premiers termes de la séquence \mathbf{s} .

Lemme 2 : Définition des moules symétriels, version 2.

Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} et $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in (\mathcal{H}(\mathcal{U}))^{\mathbb{Z}}$.

On suppose que : pour tout compact K de \mathcal{U} , $\|f_n\|_{\infty, K} \underset{n \rightarrow \pm\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{|n|}\right)$.

1. Alors, pour toute séquence $\underline{s} \in \mathbb{C}^* - \{\emptyset\}$, de longueur r , vérifiant

$$\forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket, \begin{cases} \Re(s_1 + \dots + s_k) > k, \\ \Re(s_r + \dots + s_{r-k+1}) > k, \end{cases} \quad (51)$$

la fonction $F^{\underline{s}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} (f_{n_1}(z))^{s_1} \dots (f_{n_r}(z))^{s_r}$$

est correctement définie sur \mathcal{U} , est holomorphe sur \mathcal{U} , et vérifie :

$$\forall z \in \mathcal{U}, (F^{\underline{s}})'(z) = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \left(\prod_{i=1}^r (f_{n_i}(z))^{s_i} \right)'.$$

2. De plus, F^{\bullet} définit un moule symétriel sur l'ensemble des séquences $\underline{s} \in \mathbb{C}^*$ vérifiant (58), à valeurs dans $\mathcal{H}(\mathcal{U})$, si l'on pose $F_N^{\emptyset} = 1$.

Démonstration : Le lemme de définition des moules symétriels, version 1, a plusieurs conséquences :

- Le moule F^{\bullet} peut se factoriser sous la forme $F^{\bullet}(z) = F_+^{\bullet}(z) \times F_-^{\bullet}(z)$, (pour plus de détails, cf. §4.3 dans le cas particulier qui nous intéresse) où, pour $\underline{s} \in \mathbb{C}^*$ vérifiant (51), les fonctions $F_+^{\underline{s}}$ et $F_-^{\underline{s}}$ sont définies sur \mathcal{U} par :

$$F_+^{\underline{s} \leq k}(z) = \sum_{0 < n_k < \dots < n_1 < +\infty} \left(\prod_{i=1}^k (f_{n_i}(z))^{s_i} \right).$$

$$F_-^{\underline{s} \geq k}(z) = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_k \leq 0} \left(\prod_{i=k}^r (f_{n_i}(z))^{s_i} \right).$$

En effet, puisque si $\underline{s} \in \mathbb{C}^*$ vérifie (51) alors \underline{s} et $\overleftarrow{\underline{s}}$ vérifient alors (50), le lemme de définition des moules symétriels, version 1, permet de montrer que, non seulement, les fonctions $F_+^{\underline{s} \leq k}$ et $F_-^{\underline{s} \geq k}$ sont définies sur \mathcal{U} , mais aussi qu'elles sont holomorphes sur \mathcal{U} , de dérivées leurs dérivées termes à termes respectivement. Ainsi, $F^{\underline{s}}$ est correctement définie sur \mathcal{U} , holomorphe sur \mathcal{U} et de dérivée sa dérivée termes à termes.

- De plus, il n'est pas difficile de voir que $(F_N^{\underline{s}})_{N \in \mathbb{Z}}$ converge uniformément vers F sur tout compact K de \mathcal{U} , lorsque $N \rightarrow -\infty$ (cf. la définition de F_N^{\bullet} dans la version 1 de ce lemme).

Ainsi, si $n \in \mathbb{Z}$ et $(\underline{\alpha}; \underline{\beta}) \in (\mathbb{C}^*)^2$ sont deux séquences vérifiant (50), la symétréilité du moule F_n^{\bullet} entraîne successivement :

$$\begin{aligned} F^{\underline{\alpha}} F^{\underline{\beta}} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} F_N^{\underline{\alpha}} F_N^{\underline{\beta}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{\underline{\gamma} \in \text{sh}\underline{e}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})} F_N^{\underline{\gamma}} \right) = \sum_{\underline{\gamma} \in \text{sh}\underline{e}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})} \lim_{N \rightarrow +\infty} F_N^{\underline{\gamma}} \\ &= \sum_{\underline{\gamma} \in \text{sh}\underline{e}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})} F^{\underline{\gamma}}. \end{aligned}$$

Donc, F^{\bullet} définit pour tout $z \in \mathcal{U}$ un moule symétriel. □

2.2 Application : définition des multitangentes.

Considérons $\mathcal{U} = \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ et les fonctions $f_n : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

$$z \mapsto \frac{1}{n+z}$$

Il est clair que, pour tout compact K de $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$, $\|f_n\|_{\infty, K} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{|n|}\right)$. Le lemme de définition des moules symétr \underline{e} ls, version 2, permet donc de définir correctement un moule symétr \underline{e} l, noté $\mathcal{T}e^\bullet$, et défini par :

$$\mathcal{T}e^{\underline{s}} : \mathbb{C} - \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{(n_1+z)^{s_1} \dots (n_r+z)^{s_r}} .$$

Ce moule, qu'on appellera **moule des fonctions multitangentes**, est défini pour des séquences $\underline{s} \in \mathcal{S}^* = \{\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*); s_1 \geq 2 \text{ et } s_{l(\underline{s})} \geq 2\}$ et à valeurs dans l'espace des fonctions holomorphes définies sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$.

2.3 Premières propriétés des multitangentes.

Voici quelques propriétés élémentaires des multitangentes, résultant du lemme 2, ou d'un simple changement d'indice dans les sommations (quatrième point) :

Propriété 1 :

1. La fonction $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ est correctement définie pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$.
2. La fonction $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$, elle converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$, et vérifie, pour tout $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$ et tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$:

$$\frac{\partial \mathcal{T}e^{\underline{s}}}{\partial z}(z) = - \sum_{i=1}^{l(\underline{s})} s_i \mathcal{T}e^{s_1, \dots, s_{i-1}, s_i+1, s_{i+1}, \dots, s_{l(\underline{s})}}(z) .$$

3. Pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, $\mathcal{T}e^\bullet(z)$ est un moule symétr \underline{e} l, i.e. :
 $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, $\forall (\underline{\alpha}; \underline{\beta}) \in (\mathcal{S}^*)^2$, $\mathcal{T}e^{\underline{\alpha}}(z) \mathcal{T}e^{\underline{\beta}}(z) = \sum_{\underline{\gamma} \in \text{sh}\underline{e}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})} \mathcal{T}e^{\underline{\gamma}}(z)$.
4. $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, $\forall \underline{s} \in \mathcal{S}^*$, $\mathcal{T}e^{\underline{s}}(-z) = (-1)^{\|\underline{s}\|} \mathcal{T}e^{\overleftarrow{\underline{s}}}(z)$.

Nous parlerons respectivement de **propriété de différentiabilité** et de **propriété de parité** des multitangentes pour nous référer à la formule du second point ainsi qu'à celle du quatrième point.

3 Expression des multitangentes en fonction des multizêtas et des monotangentes.

L'objectif de cette section est de démontrer un second type de relations liant les multitangentes entres elles, le premier type de relations dont nous disposons pour

le moment étant les relations de symétries. Plus précisément, nous allons montrer comment il est possible d'exprimer une multitangente en fonction des multizêtas et des monotangentes. Pour cela, nous allons procéder classiquement, c'est-à-dire décomposer en éléments simples le sommant définissant $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$, par rapport à la variable z , puis sommer à nouveau en regroupant les termes différemment.

Pour cela, nous allons mettre en oeuvre l'idée indiquée dans le second volume de [15] (cf. p. 429).

3.1 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Considérons deux familles $\underline{s} = (s_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $\underline{a} = (a_i)_{1 \leq i \leq r}$ d'entiers naturels, où les a_i sont distincts deux à deux. Considérons aussi la fraction rationnelle définie par :

$$F_{\underline{a}, \underline{s}}(X) = \frac{1}{(X + a_1)^{s_1} \cdots (X + a_r)^{s_r}}.$$

Nous savons que la décomposition en éléments simples de $F_{\underline{a}, \underline{s}}(X)$ s'écrit :

$$F_{\underline{a}, \underline{s}}(X) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{s_i-1} \frac{1}{j!} \frac{(F_{\underline{a} \leq i-1, \underline{a} \geq i+1, \underline{s} \leq i-1, \underline{s} \geq i+1})^{(j)}(-a_i)}{(X + a_i)^{s_i-j}}.$$

Un calcul élémentaire montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toutes séquences d'entiers $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $(s_i)_{1 \leq i \leq r}$, de mêmes longueurs, les a_i étant distincts deux à deux, on a :

$$\frac{(-1)^k}{k!} F_{\underline{a}, \underline{s}}^{(k)}(X) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_r \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_r = k}} \frac{\binom{s_1 + n_1 - 1}{s_1 - 1} \cdots \binom{s_r + n_r - 1}{s_r - 1}}{(X + a_1)^{s_1 + n_1} \cdots (X + a_r)^{s_r + n_r}}.$$

D'où $F_{\underline{a}, \underline{s}}(X) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{s_i-1} \sum_{\substack{k_j \geq 0, j \neq i \\ \sum_{j \neq i} k_j = k}} \frac{1}{(X + a_i)^{s_i - k}} \frac{{}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}}}{{}^i D_{\underline{k}}^{\underline{s}}(\underline{a})}$, où l'on a noté :

$${}^i D_{\underline{k}}^{\underline{s}}(\underline{a}) = \left(\prod_{l=1}^{i-1} (a_i - a_l)^{s_l + k_l} \right) \left(\prod_{l=i+1}^r (a_l - a_i)^{s_l + k_l} \right),$$

$${}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}} = \left(\prod_{l=1}^{i-1} (-1)^{k_l} \right) \left(\prod_{l=i+1}^r (-1)^{s_l} \right) \left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^r \binom{s_l + k_l - 1}{s_l - 1} \right).$$

3.2 Expression des multitangentes en fonction des monotangentes et des multizêtas.

En injectant le dernier développement dans l'expression d'une multitangente, nous pouvons permuter la somme multiple infinie avec les sommes finies, car les séries convergent absolument, puis sommer à nouveau en décomposant la somme multiple en trois sommes. Cela donne successivement²⁷, si $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$:

²⁷ Dans tout ce calcul, et ce qui suivra, la notation indicielle $k_j \geq 0, j \neq i$ et $\sum_{j \neq i} k_j = k$ désigne un $(r-1)$ -uplet $\underline{k} = (k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_r)$ dont la somme des éléments vaut k .

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) &= \left(\sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{s_i-1} \sum_{\substack{k_j \geq 0, j \neq i \\ \sum_{j \neq i} k_j = k}} \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \right) \left(\frac{1}{(z+n_i)^{s_i-k}} \frac{{}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}}}{{}^i D_{\underline{k}}^{\underline{s}}(\underline{a})} \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{s_i-1} \sum_{\substack{k_j \geq 0, j \neq i \\ \sum_{j \neq i} k_j = k}} \sum_{\substack{n_i \in \mathbb{Z} \\ n_i < n_{i-1} < \dots < n_1}} \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_{i-1}) \in \mathbb{Z}^{i-1} \\ n_r < \dots < n_{i+1} < n_i}} \sum_{(n_{i+1}, \dots, n_r) \in \mathbb{N}^{r-i}} \right) \left(\frac{1}{(z+n_i)^{s_i-k}} \frac{{}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}}}{{}^i D_{\underline{k}}^{\underline{s}}(\underline{a})} \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{s_i-1} \sum_{\substack{k_j \geq 0, j \neq i \\ \sum_{j \neq i} k_j = k}} \right) \left({}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}} \times \sum_{n_i \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{(z+n_i)^{s_i-k}} \left[\sum_{\substack{(n_{i+1}, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}^{r-i} \\ -\infty \leq n_r < \dots < n_{i+1} < n_i}} \frac{1}{{}^i D_{\underline{k}}^{\underline{s} \geq i}(\underline{a})} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left[\sum_{\substack{(n_1, \dots, n_{i-1}) \in \mathbb{Z}^{i-1} \\ n_i < n_{i-1} < \dots < n_1 \leq +\infty}} \frac{1}{{}^i D_{\underline{k}}^{\underline{s} \leq i}(\underline{a})} \right] \right) \right).
\end{aligned}$$

D'où la relation suivante :

$$\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{s_i-1} \left(\sum_{\substack{k_j \geq 0, j \neq i \\ \sum_{j \neq i} k_j = k}} {}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}} \mathcal{Z}e^{s_r+k_r, \dots, s_{i+1}+k_{i+1}} \mathcal{Z}e^{s_1+k_1, \dots, s_{i-1}+k_{i-1}} \right) \mathcal{T}e^{s_i-k}(z).$$

Cette relation fait apparaître la multitangente divergente $\mathcal{T}e^1 : z \mapsto \frac{\pi}{\tan(\pi z)}$. Cependant, il n'est pas difficile de voir que toute multitangente convergente est exponentiellement plate (cf. §7.3). Le coefficient de $\mathcal{T}e^1$ est donc nécessairement nul. On peut aussi linéariser les multizêtas par symétralité dans le coefficient de $\mathcal{T}e^1$ afin de se rendre compte qu'il est nul (cf. §9.3.1). On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 1 : Réduction en monotangentes, version 1

$$\begin{aligned}
\text{Notons : } {}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}} &= \left(\prod_{l=1}^{i-1} (-1)^{k_l} \right) \left(\prod_{l=i+1}^r (-1)^{s_l} \right) \left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^r \binom{s_l + k_l - 1}{s_l - 1} \right). \\
\mathcal{Z}_{i,k}^{\underline{s}} &= \sum_{\substack{k_j \geq 0, j \neq i \\ \sum_{j \neq i} k_j = k}} {}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}} \mathcal{Z}e^{s_r+k_r, \dots, s_{i+1}+k_{i+1}} \mathcal{Z}e^{s_1+k_1, \dots, s_{i-1}+k_{i-1}}.
\end{aligned}$$

Alors, pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$, on a :

$$\forall z \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}, \mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=2}^{s_i} \mathcal{Z}_{i, s_i-k}^{\underline{s}} \mathcal{T}e^k(z).$$

3.3 Etablissement des tables de multitangentes convergentes.

Ce dernier théorème nous sera utile pour effectuer des calculs théoriques de multitangentes (cf. §5.4). Par contre, en vue d'étudier plus loin une conjecture, il sera bon de linéariser les multizêtas utilisés ici, par symétralité du moule $\mathcal{Z}e^\bullet$ dans l'expression :

$$\mathcal{Z}_{i,k}^{\underline{s}} = \sum_{\substack{k_j \geq 0, j \neq i \\ \sum_{j \neq i} k_j = k}} {}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}} \mathcal{Z}e^{s_r+k_r, \dots, s_{i+1}+k_{i+1}} \mathcal{Z}e^{s_1+k_1, \dots, s_{i-1}+k_{i-1}}.$$

Ces notations permettent facilement d'obtenir, pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, une séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$ de longueur r :

$$\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) = \sum_{k=2}^{\max(s_1; \dots; s_r)} \sum_{r'=1}^{r-1} \sum_{\substack{\underline{\sigma}=(\sigma_1; \dots; \sigma_{r'}) \in (\mathbb{N}^*)^* \\ \sigma_1 \geq 2, l(\underline{\sigma})=r' \\ \|\underline{\sigma}\| = \|\underline{s}\| - k}} {}^k \mathcal{R}_{\underline{\sigma}}^{\underline{s}} \mathcal{Z}e^{\underline{\sigma}} \mathcal{T}e^k(z),$$

où²⁸: ${}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}} = \left(\prod_{l=1}^{i-1} (-1)^{k_l} \right) \left(\prod_{l=i+1}^r (-1)^{s_l} \right) \left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^r \binom{s_l + k_l - 1}{s_l - 1} \right)$.

$${}^k \mathcal{R}_{\underline{\sigma}}^{\underline{s}} = \sum_{\substack{i \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ k \leq s_i}} \sum_{\substack{k_j \geq 0, j \neq i \\ \sum_{j \in \llbracket 1; r \rrbracket - \{i\}} k_j = s_i - k}} \left\langle sh\underline{e} \left((\underline{s} + \underline{k})^{\leq i-1}; \overleftarrow{(\underline{s} + \underline{k})}^{\geq i+1} \right) \mid \underline{\sigma} \right\rangle {}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}}.$$

Après avoir calculé les tables des multizêtas, on peut alors exprimer systématiquement toutes les multitangentes. En utilisant un algorithme de calcul numérique des multizêtas (cf. Annexe C), on peut aussi calculer numériquement les multitangentes. Cela peut être utile pour de dessiner les courbes des multitangentes à argument constant, ou bien pour utiliser un algorithme de reconnaissance de relations entières (cf. [32] pour l'article original donnant l'algorithme *LLL*, [12] pour une autre présentation de *LLL*, [1] pour l'algorithme *PSLQ*, ainsi que [4] pour les applications de ces algorithmes).

Cela nous conduit à la table présentée à l'annexe 2.

4 Etude du prolongement symétriel des multitangentes à $\text{seq}(\mathbb{N}^*)$.

Nous nous proposons dans cette section de renormaliser l'expression de $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ si $\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}^*) - \mathcal{S}^*$.

Le théorème énoncé page 121 fait apparaître de nombreux de coefficients du binôme en regard de chaque monotangente. En vue de simplifier et de condenser les écritures, travailler avec une série génératrice des multitangentes semble donc adéquat à notre situation.

Cependant, nous voulons tout de même garder les propriétés essentielles vérifiées par les multitangentes. Il s'agit de :

1. La symétrélie du moule $\mathcal{T}e^\bullet(z)$ prolongé.

2. La propriété de différentiabilité : $\forall \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*, \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \frac{\partial \mathcal{T}e^{\underline{s}}}{\partial z}(z) = - \sum_{i=1}^{l(\underline{s})} s_i \mathcal{T}e^{\underline{s} + e_i}(z)$,
où $e_i = \underbrace{(0; \dots; 0)}_{i-1 \text{ fois}}; 1; 0; \dots; 0$ pour $i \in \llbracket 1; l(\underline{s}) \rrbracket$.

3. La propriété de parité : $\forall \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*, \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \mathcal{T}e^{\underline{s}}(-z) = (-1)^{\|\underline{s}\|} \mathcal{T}e^{\overleftarrow{\underline{s}}}(z)$.

4. La propriété de réduction en monotangente : $\forall \underline{s} \in \mathcal{S}^*, \mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=2}^{s_i} \mathcal{Z}_{i, s_i - k}^{\underline{s}} \mathcal{T}e^k(z)$.

²⁸ Rappelons que la notation $sh\underline{e}(\ , \)$ désigne le produit de battage contractant pour les séquences et est défini page 208 à l'annexe concernant les rappels. Enfin, $\langle P | \underline{s} \rangle$ désigne le coefficient (ou nombre d'occurrence) de la séquence \underline{s} dans P (cf. p. 206).

Il s'agit donc de définir $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ pour $\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$ vérifiant $s_1 = 1$ ou $s_r = 1$, voire même lorsque $s_1 = s_r = 1 \dots$

4.1 Rappel sur le prolongement du moule $\mathcal{Z}e^\bullet$ à $(\mathbb{N}^*)^*$.

Le moule $\mathcal{Z}e^\bullet$ étant symétriel, et ne possédant qu'une seule source de divergence (la présence de 1 à gauche), on peut récursivement rejeter à droite tous les 1 débutant la séquence $\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$. Si l'on note $\mathcal{M}ZV_{CV} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}} \left((\mathcal{Z}e^{\underline{s}})_{\substack{\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^* \\ s_1 \geq 2}} \right)$ le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les multizêtas convergents, on obtient, comme simple application de cet algorithme, la nature précise de l'ensemble $\mathcal{M}ZV$ de tous les multizêtas (cf. [49]) :

$$\forall \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*, \mathcal{Z}e^{\underline{s}} \in \mathcal{M}ZV_{CV}[\mathcal{Z}e^1], \text{ i.e. } \mathcal{M}ZV = \mathcal{M}ZV_{CV}[\mathcal{Z}e^1]$$

$$\text{Par exemple : } \mathcal{Z}e^{1,1} = \frac{1}{2} ((\mathcal{Z}e^1)^2 - \mathcal{Z}e^2).$$

$$\mathcal{Z}e^{1,s} = \mathcal{Z}e^1 \mathcal{Z}e^s - \mathcal{Z}e^{s,1} - \mathcal{Z}e^{s+1} \text{ si } s \geq 2.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}e^{1,2,1} &= \mathcal{Z}e^1 \mathcal{Z}e^{2,1} - 2\mathcal{Z}e^{2,1,1} - \mathcal{Z}e^{3,1} - \mathcal{Z}e^{2,2} \\ &= \mathcal{Z}e^1 \mathcal{Z}e^3 - \frac{6}{5} (\mathcal{Z}e^2)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}e^{1,1,2} &= \frac{1}{2} (\mathcal{Z}e^1 \mathcal{Z}e^{1,2} - \mathcal{Z}e^{1,2,1} - \mathcal{Z}e^{2,2} - \mathcal{Z}e^{1,3}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{Z}e^1)^2 \mathcal{Z}e^2 - 2\mathcal{Z}e^1 \mathcal{Z}e^3 + \frac{7}{10} (\mathcal{Z}e^2)^2. \end{aligned}$$

Précisons cela. Considérons classiquement l'alphabet $Y = \{y_1; \dots; y_n; \dots\}$, supposons le muni d'une loi de semi-groupe $y_i + y_j = y_{i+j}$ et "codons" la séquence $\underline{s} = (s_1; \dots; s_r) \in (\mathbb{N}^*)^*$ par le mot $y_{\underline{s}} = y_{s_1} \dots y_{s_r} \in Y^*$. Notons aussi $(y_{\underline{s}})^{\star k}$ le polynôme non commutatif $\underbrace{y_{\underline{s}} \star \dots \star y_{\underline{s}}}_{k \text{ fois}}$ ²⁹.

En procédant alors par récurrence sur le nombre de 1 débutant les séquences, l'algorithme de rejet des 1 à droite entraîne, pour toute séquence $\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$, l'existence d'une unique famille $(\underline{s}^k)_{k \in \llbracket 0; l(\underline{s}) \rrbracket}$ de séquences de $(\mathbb{N}^*)^*$ vides ou vérifiant $s_1^k \geq 2$, ainsi qu'une unique famille de rationnels $(s_k)_{k \in \llbracket 0; l(\underline{s}) \rrbracket}$ tels que l'on ait :

$$y_{\underline{s}} = \sum_{k=0}^{l(\underline{s})} s_k y_{\underline{s}^k} \star (y_1)^{\star k}.$$

Une telle écriture sera appelée "**écriture de l'algorithme de rejet des 1 vers la droite pour la séquence $\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$** ". Enfin, définissons l'application de spécialisation

\mathcal{Z} , par $\mathcal{Z}(y_{\underline{s}}) = \sum_{k=0}^{l(\underline{s})} s_k \mathcal{Z}(y_{\underline{s}^k}) \mathcal{Z}(y_1)^k$, si $y_{\underline{s}}$ est donné par l'algorithme de rejet des 1 pour

²⁹ La loi de semi-groupe n'apparaît plus dans ce qui suit, mais est implicitement utilisé dans le battage contractant \star .

la séquence $\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$, $\mathcal{Z}(y_{\underline{s}}) = \mathcal{Z}e^{\underline{s}}$ si $\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$ vérifie $s_1 \geq 2$ ou est vide. Etendons \mathcal{Z} , par linéarité, à tout $\mathbb{Q}\langle Y \rangle$.

Pour toute séquence $\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$, $\mathcal{Z}e^{\underline{s}} = \mathcal{Z}(y_{\underline{s}})$ est alors un polynôme en l'indéterminée $\mathcal{Z}e^1$ sur l'algèbre \mathcal{MZV}_{CV} . Pour chaque choix de valeur de $\mathcal{Z}e^1$, cela permet de définir un prolongement de $\mathcal{Z}e^\bullet$ à $(\mathbb{N}^*)^*$, et ce de manière unique. Bien que la valeur $\mathcal{Z}e^1 = \gamma$ (où γ est la constante d'Euler) semblerait aussi naturelle, on choisit³⁰ traditionnellement $\mathcal{Z}e^1 = 0$.

Il reste à voir la symétréité du moule $\mathcal{Z}e^\bullet$ prolongé. Il suffit de montrer que \mathcal{Z} est un morphisme de $(\mathbb{Q}\langle Y \rangle, \star)$ dans (\mathbb{C}, \cdot) . En effet, si tel est le cas, on a alors pour $(\underline{u}; \underline{v}) \in ((\mathbb{N}^*)^*)^2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}e^{\underline{u}}\mathcal{Z}e^{\underline{v}} &= \mathcal{Z}(y_{\underline{u}})\mathcal{Z}(y_{\underline{v}}) &= \mathcal{Z}(y_{\underline{u}} \star y_{\underline{v}}) &= \mathcal{Z}\left(\sum_{\underline{\omega} \in Y^*} \langle y_{\underline{u}} \star y_{\underline{v}} | \underline{\omega} \rangle \underline{\omega}\right) \\ &= \sum_{\underline{\omega} \in Y^*} \langle y_{\underline{u}} \star y_{\underline{v}} | \underline{\omega} \rangle \mathcal{Z}(\underline{\omega}) &= \sum_{\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*} \langle sh\mathbf{e}(\underline{u}; \underline{v}) | \underline{s} \rangle \mathcal{Z}e^{\underline{s}} &= \sum_{\underline{s} \in sh\mathbf{e}(\underline{u}; \underline{v})} \mathcal{Z}e^{\underline{s}}. \end{aligned}$$

Rappelons que si $y_{\underline{s}} = \sum_{k=0}^{l(\underline{s})} u_k y_{\underline{u}^k} \star (y_1)^{s^k}$, on a : $\mathcal{Z}(y_{\underline{s}}) = \sum_{k=0}^{l(\underline{s})} s_k \mathcal{Z}(y_{\underline{s}^k}) \mathcal{Z}(y_1)^k$. Soit alors \underline{u} et \underline{v} deux séquences de $(\mathbb{N}^*)^*$ dont l'algorithme de rejet des 1 s'écrit sous la forme :

$$y_{\underline{u}} = \sum_{k=0}^{l(\underline{u})} u_k y_{\underline{u}^k} \star (y_1)^{u^k}, \quad , \quad y_{\underline{v}} = \sum_{k=0}^{l(\underline{v})} v_k y_{\underline{v}^k} \star (y_1)^{v^k}.$$

Sachant que $\mathcal{Z}e^\bullet$ est symétréel sur $\mathcal{S}_+^* = \{\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^* ; s_1 \geq 2 \text{ ou } \underline{s} = \emptyset\}$, alors : $\mathcal{Z}(y_{\underline{s}^1})\mathcal{Z}(y_{\underline{s}^2}) = \mathcal{Z}e^{\underline{s}^1}\mathcal{Z}e^{\underline{s}^2} = \sum_{\underline{s} \in sh\mathbf{e}(\underline{s}^1; \underline{s}^2)} \mathcal{Z}e^{\underline{s}} = \mathcal{Z}(y_{\underline{u}} \star y_{\underline{v}})$.

On obtient alors successivement :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(y_{\underline{u}})\mathcal{Z}(y_{\underline{v}}) &= \left(\sum_{k=0}^{l(\underline{u})} u_k \mathcal{Z}(y_{\underline{u}^k}) \mathcal{Z}(y_1)^k \right) \left(\sum_{l=0}^{l(\underline{v})} v_l \mathcal{Z}(y_{\underline{v}^l}) \mathcal{Z}(y_1)^l \right) \\ &= \sum_{k=0}^{l(\underline{u})} \sum_{l=0}^{l(\underline{v})} u_k v_l \mathcal{Z}(y_{\underline{u}^k}) \mathcal{Z}(y_{\underline{v}^l}) \mathcal{Z}(y_1)^{k+l} = \sum_{k=0}^{l(\underline{u})} \sum_{l=0}^{l(\underline{v})} u_k v_l \mathcal{Z}(y_{\underline{u}^k} \star y_{\underline{v}^l}) \mathcal{Z}(y_1)^{k+l} \\ &= \mathcal{Z}(y_{\underline{u}} \star y_{\underline{v}}). \end{aligned}$$

Ainsi, \mathcal{Z} est bien un morphisme de $(\mathbb{Q}\langle Y \rangle, \star)$ vers (\mathbb{C}, \cdot) , ce qui redémontre enfin l'énoncé suivant :

Lemme 3 : Pour tout $\theta \in \mathbb{C}$, il existe une unique extension symétréelle du moule $\mathcal{Z}e^\bullet$ à $(\mathbb{N}^*)^*$, telle que $\mathcal{Z}e^1 = \theta$.

³⁰ Si l'on note $\mathcal{Z}e_\theta^\bullet$ l'unique extension du moule $\mathcal{Z}e^\bullet$ vérifiant $\mathcal{Z}e_\theta^1 = \theta$, on dispose alors de la formule de passage : $\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2$, $\mathcal{Z}e_{\alpha-\beta}^\bullet = Ne_{\alpha-\beta}^\bullet \times \mathcal{Z}e_\beta^\bullet$, où le moule symétréel Ne_γ^\bullet est défini pour $\gamma \in \mathbb{C}$

$$\text{et } \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^* \text{ par : } Ne_\gamma^\bullet = \begin{cases} \frac{\gamma^r}{r!} & , \text{ si } \underline{s} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{r \text{ fois}}. \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

4.2 Première difficulté.

Le problème du prolongement des multitangentes est une situation beaucoup plus compliquée. En effet, si l'on cherche formellement un prolongement du moule $\mathcal{T}e^\bullet(z)$ soumis à la seule condition de symétréilité et à la connaissance de $\mathcal{T}e^{1[r]}(z)$, $r \in \mathbb{N}^*$ (ce sont les conditions que l'on impose quant au prolongement de $\mathcal{Z}e^\bullet$), on ne peut déterminer toutes les multitangentes divergentes : les 1 qui débutent ou finissent la séquence \underline{s} et qui créent la divergence de $\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z)$ se trouvent envoyés respectivement en fin de séquence et en début de séquence.

L'exemple suivant de relation de symétréilité illustre la difficulté dans le cas de la multitangente divergente la plus simple :

$$\mathcal{T}e^{1,2}(z) = \underbrace{\mathcal{T}e^1(z)}_{\text{connu par hypothèse}} \times \underbrace{\mathcal{T}e^2(z)}_{\text{muitangente convergente}} - \underbrace{\mathcal{T}e^{2,1}(z)}_{\substack{\text{problématique} \\ = \text{non connu}}} - \underbrace{\mathcal{T}e^3(z)}_{\text{muitangente convergente}} .$$

Si l'on ajoute la condition de parité $\mathcal{T}e^{\underline{s}}(-z) = (-1)^{|\underline{s}|} \mathcal{T}e^{\overleftarrow{\underline{s}}}(z)$, on obtient alors $\mathcal{T}e^{2,1}(z) = -\mathcal{T}e^{1,2}(-z)$, d'où :

$$\text{Partie impaire de } \mathcal{T}e^{1,2} = \frac{1}{2} (\mathcal{T}e^1(z)\mathcal{T}e^2(z) - \mathcal{T}e^3(z)) .$$

Ainsi, rien ne permet ici de déterminer complètement $\mathcal{T}e^{2,1}$.

La difficulté provient de la gestion conjointe de la divergence créée simultanément à gauche et à droite. Pour la surmonter, il nous serait agréable de pouvoir séparer le traitement de la divergence gauche de celui de la divergence droite. Une factorisation du moule $\mathcal{T}e^\bullet(z)$ pourrait alors être utile, si elle ne faisait apparaître que des termes ayant une seule source de divergence.

4.3 Factorisation moulienne du moule $\mathcal{T}e^\bullet$ et conséquences.

Lors de la démonstration du lemme de définition des moules symétréils (cf. p. 118), nous avons presque donné la factorisation moulienne voulue, en écrivant : $F^\bullet = F_+^\bullet \times F_-^\bullet$. Comme annoncé, nous allons donner précisément la démonstration de cette factorisation dans le cas particulier suivant, le cas général étant quasiment identique.

Voici donc la factorisation :

Lemme 4 : Soit $\mathcal{S}^* = \{\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^* ; s_1 \geq 2 \text{ et } s_r \geq 2\}$.

Considérons les moules symétréils $\mathcal{H}e_+^\bullet$, $\mathcal{H}e_-^\bullet$ et $\mathcal{C}e^\bullet$ à valeurs dans $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbb{Z})$ définis pour $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$ par :

$$\mathcal{H}e_+^{\underline{s}}(z) = \sum_{0 < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{(n_1 + z)^{s_1} \dots (n_r + z)^{s_r}} \text{ et } \mathcal{H}e_+^\emptyset(z) = 1 .$$

$$\mathcal{H}e_-^{\underline{s}}(z) = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < 0} \frac{1}{(n_1 + z)^{s_1} \dots (n_r + z)^{s_r}} \text{ et } \mathcal{H}e_-^\emptyset(z) = 1 .$$

$$\mathcal{C}e^{\underline{s}}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{s} = \emptyset . \\ \frac{1}{z^{\underline{s}}} & \text{si } l(\underline{s}) = 1 . \\ 0 & \text{si } l(\underline{s}) > 1 . \end{cases}$$

Alors : $\mathcal{T}e^\bullet = \mathcal{H}e_+^\bullet \times \mathcal{C}e^\bullet \times \mathcal{H}e_-^\bullet$.

Ici, $\mathcal{H}e_+^\bullet$ désigne le moule des multizêtas de Hurwitz ; $\mathcal{C}e^\bullet$ va jouer le rôle d'une correction, car il ne prend en compte que les indices de sommation nuls dans l'expression de $\mathcal{T}e^\bullet$, et enfin, $\mathcal{H}e_-^\bullet$ est l'exact analogue du moule $\mathcal{Z}e_-^\bullet$ (défini à la page 129) vis-à-vis du moule $\mathcal{Z}e^\bullet$. La symétrélicité de ces moules, due aux lemmes (cf. p. 115) de définition des moules symétréls dans les cas de $\mathcal{H}e_+^\bullet$ et $\mathcal{H}e_-^\bullet$, explique la présence de la lettre “e” dans leur nom.

Démonstration : Notons momentanément $\mathcal{H}e_{+0}^{\underline{s}}(z) = \sum_{0 \leq n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{(n_1 + z)^{s_1} \dots (n_r + z)^{s_r}}$, pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ et $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$.

Le lemme de définition des moules symétréls permet d'affirmer que les moules $\mathcal{H}e_+^\bullet(z)$, $\mathcal{H}e_-^\bullet(z)$, $\mathcal{H}e_{+0}^\bullet(z)$ sont bien à valeurs dans $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbb{Z})$ et symétréls. Le moule $\mathcal{C}e^\bullet(z)$ vérifie les mêmes propriétés.

En isolant l'indice de sommation n_r lorsqu'il est nul, dans la définition de $\mathcal{H}e_+^\bullet(z)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}e_{+0}^{\underline{s}}(z) &= \sum_{0=n_r < n_{r-1} < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{(n_1 + z)^{s_1} \dots (n_r + z)^{s_r}} \\ &+ \sum_{0 < n_r < n_{r-1} < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{(n_1 + z)^{s_1} \dots (n_r + z)^{s_r}} \\ &= \frac{1}{z^{s_r}} \mathcal{H}e_+^{\underline{s} \leq r-1}(z) + \mathcal{H}e_+^{\underline{s}}(z) \\ &= (\mathcal{H}e_+^\bullet(z) \times \mathcal{C}e^\bullet(z))^{\underline{s}}. \end{aligned}$$

De même, on montre que $\mathcal{T}e^\bullet(z) = \mathcal{H}e_{+0}^\bullet(z) \times \mathcal{H}e_-^\bullet(z)$, d'où le résultat. \square

Première conséquence. Notons que $\mathcal{C}e^\bullet(z)$ est déjà correctement défini sur $(\mathbb{N}^*)^*$. La factorisation $\mathcal{T}e^\bullet = \mathcal{H}e_+^\bullet \times \mathcal{C}e^\bullet \times \mathcal{H}e_-^\bullet$ a le mérite de bien séparer les sources de divergence. En effet, si les moules $\mathcal{H}e_+^\bullet$ et $\mathcal{H}e_-^\bullet$ sont prolongés à $(\mathbb{N}^*)^*$, on aura alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}e^{2,1}(z) &= (\mathcal{H}e_+^\bullet(z) \times \mathcal{C}e^\bullet(z) \times \mathcal{H}e_-^\bullet(z))^{2,1} \\ &= \mathcal{H}e_+^{2,1}(z) + \mathcal{H}e_+^2(z) (\mathcal{C}e^1(z) + \mathcal{H}e_-^1(z)) + \mathcal{C}e^{2,1}(z) + \mathcal{C}e^2(z) \mathcal{H}e_-^1(z) + \mathcal{H}e_-^{2,1}(z) \\ &= \mathcal{H}e_+^{2,1}(z) + \mathcal{H}e_+^2(z) \left(\frac{1}{z} + \mathcal{H}e_-^1(z) \right) + \frac{1}{z^2} \mathcal{H}e_-^1(z) + \mathcal{H}e_-^{2,1}(z). \end{aligned}$$

On observe, sur ce calcul, que la divergence de $\mathcal{T}e^{2,1}$, qui a lieu au niveau de $-\infty$, se traduit sur la factorisation uniquement par des termes divergents du moule $\mathcal{H}e_-^\bullet$.

Deuxième conséquence. Cette factorisation nous permet aussi de prolonger le moule $\mathcal{T}e^\bullet(z)$ à $(\mathbb{N}^*)^*$ tout entier dès que l'on saura étendre la définition de $\mathcal{H}e_+^\bullet$ et $\mathcal{H}e_-^\bullet$ à $(\mathbb{N}^*)^*$. Naturellement, d'après le lemme de définition des moules symétréls, les moules $\mathcal{H}e_+^\bullet$ et $\mathcal{H}e_-^\bullet$ sont définis sur $\mathcal{S}_+^* = \{\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*; s_1 \geq 2\}$ et $\mathcal{S}_-^* = \{\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*; s_r \geq 2\}$ respectivement.

Leurs prolongements à $(\mathbb{N}^*)^*$ sont en tout point similaires à celui du moule $\mathcal{Z}e^\bullet$ à $(\mathbb{N}^*)^*$ (cf. p. 124) .

On obtient donc le résultat suivant :

Lemme 5 : Soit $(\Phi_+; \Phi_-) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbb{Z})^2$.
Les moules $\mathcal{H}e_+^\bullet$ et $\mathcal{H}e_-^\bullet$ admettent un unique prolongement symétr \underline{e} l à $(\mathbb{N}^*)^*$ vérifiant respectivement $\mathcal{H}e_+^1 = \Phi_+$ et $\mathcal{H}e_-^1 = \Phi_-$.

Démonstration : La démonstration est identique à celle du lemme 3 page 124, à la modification près du morphisme de spécialisation en :

$$\mathcal{H}(y_{\underline{s}}) = \sum_{k=0}^{l(\underline{s})} s_k \mathcal{H}(y_{\underline{s}^k}) \mathcal{H}(y_1)^k, \text{ si } y_{\underline{s}} = \sum_{k=0}^{l(\underline{u})} u_k y_{\underline{u}^k} \star (y_1)^{\star k}, \text{ où } \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^* \text{ et } s_1 = 1 .$$

$$\mathcal{H}(y_{\underline{s}}) = \mathcal{H}e_+^{\underline{s}}(z) \text{ ou } \mathcal{H}e_-^{\underline{s}}(z), \text{ suivant le cas, si } \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*, \text{ avec } s_1 \geq 2 .$$

□

Ainsi, on peut prolonger symétr \underline{e} lement les deux moules $\mathcal{H}e_+^\bullet$ et $\mathcal{H}e_-^\bullet$ à $(\mathbb{N}^*)^*$. La trifactorisation $\mathcal{T}e^\bullet = \mathcal{H}e_+^\bullet \times \mathcal{C}e^\bullet \times \mathcal{H}e_-^\bullet$ permet alors de prolonger $\mathcal{T}e^\bullet$ à $(\mathbb{N}^*)^*$.

De plus, les prolongements de $\mathcal{H}e_+^\bullet$ et $\mathcal{H}e_-^\bullet$ étant symétr \underline{e} ls, tout comme $\mathcal{C}e^\bullet(z)$, on en déduit que le moule $\mathcal{T}e^\bullet$ se prolonge à $(\mathbb{N}^*)^*$ en un moule symétr \underline{e} l, comme produit de moules symétr \underline{e} ls. Ceci permet donc d'énoncer le corollaire suivant :

Corollaire : Soit $(\Phi_+; \Phi_-) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbb{Z})^2$.
Le moule $\mathcal{T}e^\bullet$ admet un prolongement symétr \underline{e} l à $(\mathbb{N}^*)^*$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \mathcal{T}e^1(z) = \Phi_+(z) + \frac{1}{z} + \Phi_-(z) . \\ \forall \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*, \mathcal{T}e^{\underline{s}} = (\mathcal{H}e_+^\bullet \times \mathcal{C}e^\bullet \times \mathcal{H}e_-^\bullet)^{\underline{s}} . \end{cases}$$

4.4 Multizêtas de Hurwitz formels, multitangentes formelles.

1. Moule $\mathcal{H}e_+^\bullet(X)$. En vue de simplifier les démonstrations suivantes, nous allons momentanément travailler dans l'anneau des séries formelles, en introduisant la notion de multizêtas de Hurwitz formels.

Pour mieux distinguer si l'on travaille analytiquement ou dans l'anneau des séries formelles, sans avoir à préciser systématiquement, on adopte deux types de notations : le caractère formel sera noté avec une majuscule droite, contrairement au caractère analytique qui sera toujours écrit avec une majuscule cursive (comme depuis le début).

Nous allons donc définir ces multizêtas formels de Hurwitz par la série de Taylor des "vrais" multizêtas de Hurwitz. En effet, si $\underline{s} \in \mathcal{S}_+^*$, $\mathcal{H}e_+^{\underline{s}}$ est une série normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$, ce qui permet de dériver terme à terme. La formule de Leibniz généralisée et la formule de Taylor formelle permettent alors d'écrire :

Définition 1 : Les multizêtas formels de Hurwitz sont définis par $\mathcal{H}e_+^\emptyset(X) = 1$ et pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}_+^*$ de longueur $r \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\mathcal{H}e_+^{\underline{s}}(X) = \sum_{k \geq 0} \sum_{k_1 + \dots + k_r = k} \prod_{i=1}^r \binom{s_i + k_i - 1}{k_i} \mathcal{Z}e^{s_1 + k_1, \dots, s_r + k_r} (-X)^k .$$

$\text{He}_+^\bullet(X)$ est alors un moule, à valeurs dans $\mathbb{C}[[X]]$, défini sur $\mathcal{S}_+^* = \{\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^* ; s_1 \geq 2\}$. Celui-ci est, bien évidemment, symétrel.

En remplaçant stricto-sensu les majuscules cursives par des majuscules droites lors de la démonstration de l'existence d'un unique prolongement symétrel du moule He_+^\bullet à $(\mathbb{N}^*)^*$, on obtient évidemment le résultat suivant :

Lemme 6 : Soit $S \in \mathbb{C}[[X]]$.

Alors, il existe un unique prolongement symétrel du moule $\text{He}_+^\bullet(X)$ à $(\mathbb{N}^*)^*$ vérifiant $\text{He}_+^1(X) = S(X)$.

Il nous reste à définir $\text{He}_+^1(X)$ pour définir complètement les multizêtas de Hurwitz formels. La définition du moule $\text{He}_+^\bullet(X)$ sur \mathcal{S}_+^* nous invite naturellement à poser, et c'est en fait la seule possibilité convenable de prolongement du moule $\text{He}_+^\bullet(z)$ à $(\mathbb{N}^*)^*$:

$$\text{He}_+^1(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{Z} e^{k+1} (-X)^k .$$

Vérifions alors que l'expression donnant $\text{He}_+^{\underline{s}}(X)$ pour $\underline{s} \in \mathcal{S}_+^*$ est en fait valable en toute généralité. Cette situation se représentera lorsque nous étudierons la réduction en monotangentes des multitangentes divergentes (cf. p. 142) .

Propriété 2 : Pour toute séquence $\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$:

$$\text{He}_+^{\underline{s}}(X) = \sum_{k \geq 0} \sum_{k_1 + \dots + k_r = k} \prod_{i=1}^r \binom{s_i + k_i - 1}{k_i} \mathcal{Z} e^{s_1 + k_1, \dots, s_r + k_r} (-X)^k .$$

Démonstration : Au vu de la propriété précédente, il nous suffit de démontrer que le moule $\widetilde{\text{He}}_+^{\underline{s}}(X)$, défini comme étant le second membre de l'égalité précédente, vérifie :

1. $\widetilde{\text{He}}_+^{\underline{s}}(X)$ prolonge la définition de $\text{He}_+^{\underline{s}}(X)$ à $(\mathbb{N}^*)^*$.
2. $\widetilde{\text{He}}_+^1(X) = \text{He}_+^1(X)$.
3. $\widetilde{\text{He}}_+^\bullet(X)$ est symétrel.

Seul le troisième point nécessite quelques explications. Pour ce faire, notons M_k^\bullet le k -ième coefficient de $\widetilde{\text{He}}_+^{\underline{s}}(X)$. Pour montrer la symétrelité de $\widetilde{\text{He}}_+^{\underline{s}}(X)$, il suffit de vérifier que l'on a :

$$\forall (\underline{s}^1; \underline{s}^2) \in (\mathbb{N}^*)^* \times (\mathbb{N}^*)^*, \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^p M_k^{\underline{s}^1} M_{p-k}^{\underline{s}^2} = \sum_{\gamma \in \text{sh}\underline{e}(\underline{s}^1; \underline{s}^2)} M_p^\gamma .$$

Or, pour $(\underline{s}^1; \underline{s}^2) \in (\mathbb{N}^*)^* \times (\mathbb{N}^*)^*$ et $p \in \mathbb{N}$, en notant $l(\underline{s}^1) = r$ et $l(\underline{s}^2) = r'$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p M_k^{\underline{s}^1} M_{p-k}^{\underline{s}^2} &= \sum_{k=0}^p \sum_{k_1 + \dots + k_r = k} \sum_{k_{r+1} + \dots + k_{r+r'} = p-k} \mathcal{Z} e^{s_1^1 + k_1, \dots, s_r^1 + k_r} \mathcal{Z} e^{s_1^2 + k_{r+1}, \dots, s_{r'}^2 + k_{r+r'}} \\ &\quad \times \left(\prod_{i=1}^r \binom{s_i^1 + k_i - 1}{k_i} \right) \\ &\quad \times \left(\prod_{i=1}^{r'} \binom{s_i^2 + k_{i+r} - 1}{k_{i+r}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k_1 + \dots + k_{r+r'} = k} \left(\prod_{i=1}^r \binom{s_i^1 + k_i - 1}{k_i} \right) \left(\prod_{i=1}^{r'} \binom{s_i^2 + k_{i+r} - 1}{k_{i+r}} \right) \\
&\quad \times \mathcal{Z} e^{s_1^1 + k_1, \dots, s_r^1 + k_r} \mathcal{Z} e^{s_1^2 + k_{r+1}, \dots, s_{r'}^2 + k_{r'}} \\
&= \sum_{k_1 + \dots + k_{r+r'} = k} \left(\prod_{i=1}^r \binom{s_i^1 + k_i - 1}{k_i} \right) \left(\prod_{i=1}^{r'} \binom{s_i^2 + k_{i+r} - 1}{k_{i+r}} \right) \\
&\quad \times \left(\sum_{\underline{\gamma} \in \text{sh}\underline{e}(\underline{s}^1 + \underline{k}^{\leq r}; \underline{s}^2 + \underline{k}^{> r})} \mathcal{Z} e^{\underline{\gamma}} \right),
\end{aligned}$$

où $\underline{s}^1 + \underline{k}^{\leq r}$ et $\underline{s}^2 + \underline{k}^{> r}$ désignent respectivement $(s_1^1 + k_1; \dots; s_r^1 + k_r)$ et $(s_1^2 + k_{r+1}; \dots; s_{r'}^2 + k_{r+r'})$.

Deux cas se présentent :

1. $\underline{\gamma}$ est un simple mélange de $\underline{s}^1 + \underline{k}^{\leq r}$ et $\underline{s}^2 + \underline{k}^{> r}$:

Alors, quitte à réordonner les k_i , le terme produit vaut $M_{\underline{p}}^{\tilde{\underline{\gamma}}}$, où $\tilde{\underline{\gamma}}$ est déduit de $\underline{\gamma}$ en annulant tous les k_i .

2. $\underline{\gamma}$ contient une ou plusieurs contractions de $\underline{s}^1 + \underline{k}^{\leq r}$ et $\underline{s}^2 + \underline{k}^{> r}$:

On peut alors séparer les indices n'agissant pas sur les contractions des autres. Notons les : \underline{s}_i^1 et \underline{s}_j^2 . Cela produit des sommes de coefficients

du binôme du type : $\sum_{k_i + k_j = K} \binom{s_i^1 + k_i - 1}{k_i} \binom{s_j^2 + k_j - 1}{k_j}$, valant précisément $\binom{s_i^1 + s_j^2 + K - 1}{K}$, ie le coefficient binomial que l'on souhaite avoir.

Ainsi, le terme produit vaut de nouveau $M_{\underline{p}}^{\tilde{\underline{\gamma}}}$, où $\tilde{\underline{\gamma}}$ est déduit de $\underline{\gamma}$ en annulant tous les k_i .

En remarquant que lorsque $\underline{\gamma}$ parcourt l'ensemble $\text{sh}\underline{e}(\underline{s}^1 + \underline{k}^{\leq r}; \underline{s}^2 + \underline{k}^{> r})$, $\tilde{\underline{\gamma}}$ parcourt l'ensemble $\text{sh}\underline{e}(\underline{s}^1; \underline{s}^2)$, avec les bonnes multiplicités ; on en déduit donc bien l'égalité voulue :

$$\sum_{k=0}^p M_k^{\underline{s}^1} M_{p-k}^{\underline{s}^2} = \sum_{\underline{\gamma} \in \text{sh}\underline{e}(\underline{s}^1; \underline{s}^2)} M_{\underline{p}}^{\underline{\gamma}}.$$

Ceci démontre alors la symétréité du moule $\widetilde{\text{He}}_+^{\underline{s}}(X)$, et par suite l'égalité $\widetilde{\text{He}}_+^{\bullet}(X) = \text{He}_+^{\bullet}(X)$. □

2. Moule $\text{He}_-^{\bullet}(X)$. Faisons de même un passage de l'analytique vers le formel pour le moule $\mathcal{H}e_-^{\bullet}(z)$, en utilisant une “pseudo-relation” de parité :

Définition 2 : Les multizêtas formels négatifs de Hurwitz sont définis par l'égalité : $\forall \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$, $\text{He}_-^{\underline{s}}(X) = (-1)^{\|\underline{s}\|} \text{He}_+^{\underline{s}}(-X)$.

Pour finir ce paragraphe, rappelons qu'en effectuant les changements d'indices $p_i = -n_i$ dans l'expression de $\mathcal{Z} e^{s_1, \dots, s_r}$, on obtient :

$$\mathcal{Z} e^{s_1, \dots, s_r} = \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} = \sum_{p_1 < \dots < p_r \leq -1} \frac{(-1)^{\|\underline{s}\|}}{p_r^{s_1} \dots p_1^{s_r}}.$$

Cela conduit à poser $\mathcal{Z}e_-^{s_1, \dots, s_r} = \sum_{p_r < \dots < p_1 < 0} \frac{1}{p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r}}$, afin d'avoir :

$$\forall \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*, s_r \geq 2, \mathcal{Z}e_-^{\underline{s}} = (-1)^{\|\underline{s}\|} \mathcal{Z}e_-^{\overleftarrow{\underline{s}}}.$$

Cette relation bien connue, et similaire à celle de “pseudo-parité” donnée ci-dessus, permet évidemment d'étendre de manière unique le moule $\mathcal{Z}e_-^{\bullet}$ en un moule symétrel vérifiant $\mathcal{Z}e_-^1 = 0$. Ceci permet de donner une expression de $\text{He}_-^{\bullet}(X)$ similaire à celle de $\text{He}_+^{\bullet}(X)$ sur tout $(\mathbb{N}^*)^*$:

$$\forall \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*, \text{He}_-^{\underline{s}}(X) = \sum_{k \geq 0} \sum_{k_1 + \dots + k_r = k} \prod_{i=1}^r \binom{s_i + k_i - 1}{k_i} \mathcal{Z}e_-^{s_1 + k_1, \dots, s_r + k_r} (-X)^k.$$

3. Moule $\text{Te}^{\bullet}(X)$. Nous venons de voir qu'étant donné $(\Phi_+; \Phi_-) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbb{Z})^2$, il est possible de prolonger le moule $\mathcal{T}e^{\bullet}$ à $(\mathbb{N}^*)^*$ de sorte qu'il vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}e^{\bullet} \text{ est symétrel.} \\ \mathcal{T}e^{\bullet} = \mathcal{H}e_+^{\bullet} \times \mathcal{C}e^{\bullet} \times \mathcal{H}e_-^{\bullet}. \\ \mathcal{T}e^1(z) = \mathcal{H}e_+^1(z) + \frac{1}{z} + \mathcal{H}e_-^1(z), \text{ pour tout } z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Cela nous invite à considérer le moule formel $\text{Te}^{\bullet}(X)$ défini par la relation :

$$\text{Te}^{\bullet}(X) = \text{He}_+^{\bullet}(X) \times \mathcal{C}e^{\bullet}(X) \times \text{He}_-^{\bullet}(X), \text{ où } \mathcal{C}e^{\underline{s}}(X) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } l(\underline{s}) = 0. \\ X^{-s} & , \text{ si } l(\underline{s}) = 1. \\ 0 & , \text{ si } l(\underline{s}) \geq 2. \end{cases}$$

Alors, $\text{Te}^{\bullet}(X)$ est un moule symétrel défini sur $(\mathbb{N}^*)^*$, et à valeurs dans $\mathbb{C}((X))$.

Déterminons désormais une somme formelle de $\text{Te}^1(X + Y)$ dans $\mathbb{C}[[X]]((Y))$, pour préparer la suite.

Pour cela, commençons par exprimer $\text{Te}^1(X)$ dans $\mathbb{C}((X))$ en rappelant que les nombres de Bernoulli $(b_k)_{k \geq 0}$ sont définis par le développement en série formelle :

$$\frac{X}{e^X - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k!} X^k.$$

Cette relation permet d'obtenir, après substitution de $2iX$ à l'indéterminée X , dans $\mathbb{C}((X))$: $\frac{X}{\tan(X)} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} 2Ze^{2k} \left(\frac{X}{\pi}\right)^{2k}$.

$$\text{Ainsi : } \text{Te}^1(X) = \text{He}_+^1(X) + \mathcal{C}e^1(X) + \text{He}_-^1(X) = \frac{1}{X} \left(1 - \sum_{k \geq 1} 2Ze^{2k} X^{2k} \right).$$

Donc, dans $\mathbb{C}((X))$, $\text{Te}^1(X) = \frac{\pi}{\tan(\pi X)}$. En fait, de manière plus générale, nous avons évidemment, dans $\mathbb{C}((X))[[Y]]$: $\text{Te}^1(X + Y) = \frac{\pi}{\tan(\pi(X + Y))}$. En effet, la suite

de polynômes définie par $\begin{cases} P_0 = \pi \\ P_{n+1} = \pi(1 + X^2)(XP'_n - (n+1)P_n) \end{cases}$ est définie de manière unique, et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{(Y)} \circ D_{(Y)}^n \left(\frac{\pi}{\tan(\pi X + \pi Y)} \right) = \frac{P_n(\tan(\pi X))}{\tan^{n+1}(\pi X)} = D_{(X)}^n \left(\frac{\pi}{\tan(\pi X)} \right).$$

Rappelons que l'on note classiquement $D_{(Y)}$ la dérivation par rapport à l'indéterminée Y , ainsi que $S_{(Y)} : \mathbb{A}[[Y]] \rightarrow \mathbb{A}$ l'application définie par $S_{(Y)}(T) = T(0)$, où \mathbb{A} est un anneau quelconque.

Ainsi, la formule de Taylor formelle donne, dans $\mathbb{C}((X))[[Y]]$:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\tan(\pi X + \pi Y)} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} S_{(Y)} \circ D_{(Y)}^k \left(\frac{\pi}{\tan(\pi X + \pi Y)} \right) Y^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D_{(X)}^k \left(\frac{\pi}{\tan(\pi X)} \right) Y^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D_{(X)}^k (Te^1(X)) Y^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k Te^{k+1}(X) Y^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} S_{(Y)} \circ D_{(Y)}^k (Te^1(X + Y)) Y^k = Te^1(X + Y). \end{aligned}$$

4.5 Propriétés du prolongement du moule $\mathcal{T}e^\bullet$ à $(\mathbb{N}^*)^*$.

Les multizêtas de Hurwitz convergents $\mathcal{H}e_+^\bullet$ et $\mathcal{H}e_-^\bullet$ vérifient des propriétés semblables à celles des multitangentes convergentes :

1. Les moules $\mathcal{H}e_+^\bullet$ et $\mathcal{H}e_-^\bullet$ sont symétrels.

2. $\forall \underline{s} \in \mathcal{S}_\pm^*$, $\frac{\partial \mathcal{H}e_\pm^{\underline{s}}}{\partial z} = - \sum_{i=1}^{l(\underline{s})} s_i \mathcal{H}e_\pm^{\underline{s} + e_i}$, où $e_i = \underbrace{(0; \dots; 0)}_{i-1 \text{ fois}}; 1; 0; \dots; 0$ pour $i \in \llbracket 1; l(\underline{s}) \rrbracket$.

3. $\forall \underline{s} \in \mathcal{S}_\pm^*$, $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}e_+^{\underline{s}}(-z) = (-1)^{\|\underline{s}\|} \mathcal{H}e_-^{\underline{s}}(z)$.

Nous voulons que les moules $\mathcal{H}e_+^\bullet$ et $\mathcal{H}e_-^\bullet$, prolongés à $(\mathbb{N}^*)^*$, vérifient les mêmes propriétés. La symétrelité est déjà acquise, d'après le lemme précédent. Les propriétés de différentiabilité et de parité vont dépendre uniquement des choix de $\Phi_+ = \mathcal{H}e_+^1$ et $\Phi_- = \mathcal{H}e_-^1$. Si elles sont vraies, ces propriétés imposent nécessairement que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_\pm}{\partial z} = -\mathcal{H}e_\pm^2. \\ \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \Phi_+(z) = -\Phi_-(z). \end{cases}$$

Choisissons alors pour Φ_+ (respectivement Φ_-), et c'est le seul choix possible, une primitive de $-\mathcal{H}e_+^2$ (resp. $-\mathcal{H}e_-^2$). Cela ne permet de définir Φ_+ et Φ_- qu'à une constante près :

$$\mathcal{H}e_+^1(z) = C_+ + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right), \quad C_+ \in \mathbb{C}.$$

$$\mathcal{H}e_-^1(z) = C_- + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-z} \right), \quad C_- \in \mathbb{C}.$$

Déterminons les constantes C_+ et C_- convenables :

Nous voulons aussi que les séries de Taylor en 0 de Φ_+ et Φ_- soit égales respectivement à $\text{He}_+^1(X)$ et $\text{He}_-^1(X)$. Les deux séries précédentes étant normalement convergentes sur tout compact de $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$, elles peuvent être dérivées terme à terme. Ainsi, la série de Taylor de Φ_+ (resp. Φ_-) vaut $C_+ + \text{He}_+^1(X)$ (resp. $C_- + \text{He}_-^1(X)$) .

Il nous suffit donc de choisir les primitives qui s'annulent en 0, d'où les expressions analytiques :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}e_+^1(z) &= \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right) . \\ \mathcal{H}e_-^1(z) &= \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-z} \right) .\end{aligned}$$

Considérons désormais les moules $\mathcal{H}e_+^\bullet$ et $\mathcal{H}e_-^\bullet$ prolongés à $(\mathbb{N}^*)^*$ à l'aide des valeurs précédentes. Ceux-ci sont symétrels, et possèdent les propriétés suivantes :

Lemme 7 :

1. $\forall \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$, $\frac{\partial \mathcal{H}e_\pm^{\underline{s}}}{\partial z} = - \sum_{i=1}^{l(\underline{s})} s_i \mathcal{H}e_\pm^{s_i+e_i}$.
2. $\forall \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$, $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}e_+^{\underline{s}}(-z) = (-1)^{\|\underline{s}\|} \mathcal{H}e_-^{\overleftarrow{\underline{s}}}(z)$.

Démonstration : • Commençons par raisonner sur les multizêtas de Hurwitz formels.

Nous disposons de l'égalité suivante, élémentaire, mais centrale dans ce qui va suivre :

$$\forall (s; k) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad k \binom{s+k-1}{k} = s \binom{s+k-1}{k-1} .$$

Ainsi, pour tout $\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$, nous avons successivement, si D désigne la dérivation de $\mathbb{C}[[X]]$:

$$\begin{aligned}D(\text{He}_+^{\underline{s}})(X) &= - \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_r = k}} k \left(\prod_{i=1}^r \binom{s_i + k_i - 1}{k_i} \right) \mathcal{Z}e^{s_1+k_1, \dots, s_r+k_r} (-X)^{k-1} \\ &= - \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_r = k+1}} \sum_{p=1}^r k_p \left(\prod_{i=1}^r \binom{s_i + k_i - 1}{k_i} \right) \mathcal{Z}e^{s_1+k_1, \dots, s_r+k_r} (-X)^k \\ &= - \sum_{p=1}^r \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \geq 0 \\ k_p \geq 1 \\ k_1 + \dots + k_r = k+1}} s_p \left(\prod_{i \in \llbracket 1; r \rrbracket - \{p\}} \binom{s_i + k_i - 1}{k_i} \right) \binom{s_p + k_p - 1}{k_p - 1} \\ &\quad \times \mathcal{Z}e^{s_1+k_1, \dots, s_r+k_r} (-X)^k \\ &= - \sum_{p=1}^r \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_r = k}} s_p \left(\prod_{i \in \llbracket 1; r \rrbracket - \{p\}} \binom{s_i + k_i - 1}{k_i} \right) \binom{s_p + k_p}{k_p} \\ &\quad \times \mathcal{Z}e^{s_1+k_1, \dots, s_{p-1}+k_{p-1}, s_p+1+k_p, s_{p+1}+k_{p+1}, \dots, s_r+k_r} (-X)^k \\ &= - \sum_{p=1}^r \text{He}_+^{s_1, \dots, s_{p-1}, s_p+1, s_{p+1}, \dots, s_r}(X) .\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'égalité $\mathcal{H}e_+^{\underline{s}}(-X) = (-1)^{\|\underline{s}\|} \mathcal{H}e_-^{\overleftarrow{\underline{s}}}(X)$ est valable pour toute séquence $\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$, par définition des moules formels $\mathcal{H}e_+^{\bullet}(X)$ et $\mathcal{H}e_-^{\bullet}(X)$.

• Etudions le passage du formel à l'analytique :

Il est bien connu que l'on a : $0 \leq \mathcal{Z}e^{\underline{s}} \leq 2$ (resp. $0 \leq \mathcal{Z}e_-^{\underline{s}} \leq 2$) pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}_+^*$ (resp. $\underline{s} \in \mathcal{S}_-^*$). Ainsi, les série formelles $\mathcal{H}e_+^{\underline{s}}(X)$ et $\mathcal{H}e_-^{\underline{s}}(X)$ définissent en fait des séries entières, car leur rayon de convergence est supérieur à $\frac{1}{2}$.

Ainsi, les égalités $\frac{\partial \mathcal{H}e_{\pm}^{\underline{s}}}{\partial z} = - \sum_{i=1}^{l(\underline{s})} s_i \mathcal{H}e_{\pm}^{\underline{s}+e_i}$ et $\mathcal{H}e_+^{\underline{s}}(-z) = (-1)^{\|\underline{s}\|} \mathcal{H}e_-^{\overleftarrow{\underline{s}}}(z)$ sont valables pour toute séquence $\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$ et tout nombre complexe $z \in D\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Nous savons, d'après le lemme de la page 115 de définition des moules symétrels que, si $\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$, les fonctions $\mathcal{H}e_+^{\underline{s}}$ et $\mathcal{H}e_-^{\underline{s}}$ sont holomorphes sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Le principe du prolongement analytique s'applique alors et permet donc de conclure la démonstration. □

Les propriétés précédentes vont se transmettre au moule $\mathcal{T}e^{\bullet}$ prolongé à $(\mathbb{N}^*)^*$:

Théorème 2 : Il existe un prolongement symétrel du moule $\mathcal{T}e^{\bullet}$ à $(\mathbb{N}^*)^*$, à valeurs dans $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbb{Z})$, vérifiant $\mathcal{T}e^{\bullet} = \mathcal{H}e_+^{\bullet} \times \mathcal{C}e^{\bullet} \times \mathcal{H}e_-^{\bullet}$ et $\mathcal{T}e^1(z) = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$.

Il possède les propriétés suivantes :

1. $\forall \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$, $\frac{\partial \mathcal{T}e^{\underline{s}}}{\partial z} = - \sum_{i=1}^{l(\underline{s})} s_i \mathcal{T}e^{\underline{s}+e_i}$.
2. $\forall \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$, $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, $\mathcal{T}e^{\underline{s}}(-z) = (-1)^{\|\underline{s}\|} \mathcal{T}e^{\overleftarrow{\underline{s}}}(z)$.

Démonstration : Etant données Φ_+ et Φ_- deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$, nous avons déjà montré l'existence d'un prolongement symétrel du moule $\mathcal{T}e^{\bullet}$ à $(\mathbb{N}^*)^*$ vérifiant :

$$\begin{cases} \mathcal{T}e^{\bullet} = \mathcal{H}e_+^{\bullet} \times \mathcal{C}e^{\bullet} \times \mathcal{H}e_-^{\bullet} . \\ \mathcal{T}e^1(z) = \Phi_+(z) + \frac{1}{z} + \Phi_-(z) \text{ pour tout } z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z} . \end{cases}$$

Il reste donc à démontrer la relation $\mathcal{T}e^1(z) = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}$, ainsi que les propriétés de différentiabilité et de parité :

1. La relation classique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n+z} = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}$, valable pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, permet d'obtenir comme souhaité $\mathcal{T}e^1$ par la relation

$$\mathcal{T}e^1(z) = \mathcal{H}e_+^1(z) + \mathcal{C}e^1(z) + \mathcal{H}e_-^1(z) .$$

2. La trifactorisation va permettre le calcul suivant, où $\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{T}e^{\underline{s}}}{\partial z} &= \sum_{\underline{s}^1, \underline{s}^2, \underline{s}^3 = \underline{s}} \left(\frac{\partial \mathcal{H}e_+^{\underline{s}^1}}{\partial z} \mathcal{C}e^{\underline{s}^2} \mathcal{H}e_-^{\underline{s}^3} + \mathcal{H}e_+^{\underline{s}^1} \frac{\partial \mathcal{C}e^{\underline{s}^2}}{\partial z} \mathcal{H}e_-^{\underline{s}^3} + \mathcal{H}e_+^{\underline{s}^1} \mathcal{C}e^{\underline{s}^2} \frac{\partial \mathcal{H}e_-^{\underline{s}^3}}{\partial z} \right) \\
&= - \sum_{\substack{\underline{s}^1, \underline{s}^2, \underline{s}^3 = \underline{s} \\ l(\underline{s}^2)=1}} \left[\left(\sum_{i=1}^{l(\underline{s}^1)} s_i \mathcal{H}e_+^{\underline{s}^1 + \tilde{\mathbf{e}}_i} \mathcal{C}e^{\underline{s}^2} \mathcal{H}e_-^{\underline{s}^3} \right) + s_{l(\underline{s}^1)+1} \mathcal{H}e_+^{\underline{s}^1} \mathcal{C}e^{\underline{s}^2+1} \mathcal{H}e_-^{\underline{s}^3} \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{i=l(\underline{s}^1)+2}^{l(\underline{s})} s_i \mathcal{H}e_+^{\underline{s}^1} \mathcal{C}e^{\underline{s}^2} \mathcal{H}e_-^{\underline{s}^3 + \tilde{\mathbf{e}}_{i-l(\underline{s}^1)-1}} \right) \right] \\
&\quad \text{où } \begin{cases} \tilde{\mathbf{e}}_i = (0^{[i-1]}, 1; 0^{l(\underline{s}^1)-i}) \\ \tilde{\mathbf{e}}_i = (0^{[i-1]}, 1; 0^{l(\underline{s}^3)-i}) \end{cases} \\
&= - \sum_{i=1}^{l(\underline{s})} \sum_{\substack{\underline{s}^1, \underline{s}^2, \underline{s}^3 = \underline{s} \\ l(\underline{s}^2)=1}} s_i \mathcal{H}e_+^{\underline{s}^1 + \mathbf{e}_i^{\leq l(\underline{s}^1)}} \mathcal{C}e^{\underline{s}^2 + \mathbf{e}_i^{l(\underline{s}^1) < \cdot < l(\underline{s}^1) + l(\underline{s}^2)}} \mathcal{H}e_-^{\underline{s}^3 + \mathbf{e}_i^{> l(\underline{s}^1) + l(\underline{s}^2)}} \\
&\quad \text{où } \mathbf{e}_i = (0^{[i-1]}, 1; 0^{l(\underline{s})-i}) \\
&= - \sum_{i=1}^{l(\underline{s})} \left(s_i \sum_{\substack{\underline{s}^1, \underline{s}^2, \underline{s}^3 = \underline{s} + \mathbf{e}_i \\ l(\underline{s}^2)=1}} \mathcal{H}e_+^{\underline{s}^1} \mathcal{C}e^{\underline{s}^2} \mathcal{H}e_-^{\underline{s}^3} \right) \\
&= - \sum_{i=1}^{l(\underline{s})} s_i \mathcal{T}e^{\underline{s} + \mathbf{e}_i} .
\end{aligned}$$

3. La propriété de passage des $\mathcal{H}e_+^\bullet$ aux $\mathcal{H}e_-^\bullet$ entraîne bien la propriété de parité du moule $\mathcal{T}e^\bullet$. En effet, si $\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$ et $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, on a successivement :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}e^{\underline{s}}(-z) &= \sum_{\underline{s}^1, \underline{s}^2, \underline{s}^3 = \underline{s}} \mathcal{H}e_+^{\underline{s}^1}(-z) \mathcal{C}e^{\underline{s}^2}(-z) \mathcal{H}e_-^{\underline{s}^3}(-z) \\
&= \sum_{\underline{s}^1, \underline{s}^2, \underline{s}^3 = \underline{s}} \left((-1)^{\|\underline{s}^1\|} \mathcal{H}e_-^{\overleftarrow{\underline{s}^1}}(z) \right) \left((-1)^{\|\underline{s}^2\|} \mathcal{C}e^{\overleftarrow{\underline{s}^2}}(z) \right) \left((-1)^{\|\underline{s}^3\|} \mathcal{H}e_+^{\overleftarrow{\underline{s}^3}}(z) \right) \\
&= (-1)^{\|\underline{s}\|} \sum_{\underline{s}^1, \underline{s}^2, \underline{s}^3 = \underline{s}} \mathcal{H}e_+^{\overleftarrow{\underline{s}^3}}(z) \mathcal{C}e^{\overleftarrow{\underline{s}^2}}(z) \mathcal{H}e_-^{\overleftarrow{\underline{s}^1}}(z) \\
&= (-1)^{\|\underline{s}\|} \mathcal{T}e^{\overleftarrow{\underline{s}}}(z) .
\end{aligned}$$

□

4.6 Deuxième difficulté et fonction génératrice de $\mathcal{T}e^\bullet$.

Un calcul déjà effectué (cf. p. 125) montre que la multitangente divergente $\mathcal{T}e^{2,1}(z)$ vaut :

$$\mathcal{T}e^{2,1}(z) = \mathcal{H}e_+^{2,1}(z) + \mathcal{H}e_+^2(z) \left(\frac{1}{z} + \mathcal{H}e_-^1(z) \right) + \frac{1}{z^2} \mathcal{H}e_-^1(z) + \mathcal{H}e_-^{2,1}(z) .$$

Ce résultat, certes valide, n'est guère satisfaisant : on souhaiterait pouvoir exprimer les multitangentes divergentes en fonction des multitangentes convergentes, et non en fonction des multizêtas de Hurwitz... En effet, les multitangentes sont facilement calculables explicitement en les réduisant en monotangentes, alors que les multizêtas

de Hurwitz ne sont pas aussi facilement exprimables...

Comme annoncé dans le préambule de cette section, la réponse à cette difficulté va être apportée par le calcul de la fonction génératrice de $Te^\bullet(X) = He_+^\bullet(X) \times Ce^\bullet(X) \times He_-^\bullet(X)$. En effet, l'avantage de ce calcul va être de synthétiser et de concentrer les propriétés du moule $Te^\bullet(X)$ des multitangentes formelles, prolongé à $(\mathbb{N}^*)^*$. Cela est d'autant plus naturel que cette fonction génératrice va faire apparaître la fonction génératrice des multizêtas de Hurwitz qui eux aussi font apparaître de nombreux coefficients du binôme. Cela simplifiera et condensera donc bien les écritures.

Les moules $\mathcal{Z}e^\bullet$, $Te^\bullet(X)$, $He_+^\bullet(X)$, $He_-^\bullet(X)$ et $Ce^\bullet(X)$ étant symétrels, nous allons pouvoir considérer leurs séries génératrices, notées respectivement $\mathcal{Z}ig^\bullet$, $Tig^\bullet(X)$, $Hig_+^\bullet(X)$, $Hig_-^\bullet(X)$ et $Cig^\bullet(X)$. Nous allons donner un sens formel à ces moules dans les sections suivantes, ce qui explique les majuscules droites et non cursives dans les notations.

Calcul de $Hig_+^\bullet(X)$. Nous pouvons désormais effectuer le calcul de la série génératrice de $He_+^\bullet(X)$:

Lemme 8 : La série génératrice du moule $He_+^\bullet(X)$, notée $Hig_+^\bullet(X)$ et à valeurs dans l'algèbre commutative $\mathbb{C}[[X]][[(Y_r)_{r \in \mathbb{N}^*}]] \simeq \mathbb{C}[[X; Y_1; Y_2; \dots]]$, vaut :

$$Hig_+^{Y_1, \dots, Y_r}(X) = \mathcal{Z}ig^{Y_1-X, \dots, Y_r-X}.$$

Un tel résultat est attendu, car les multizêtas de Hurwitz $\mathcal{H}e_+^\bullet(z)$ ne sont rien d'autre qu'une translation de $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ des multizêtas. Il est donc tout à fait naturel que cette propriété se traduise et se lise au niveau des séries génératrices.

Démonstration : Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

Commençons par rappeler la formule de Taylor pour les séries formelles à r indéterminées, à coefficients dans l'anneau \mathbb{A} :

En notant D_{Y_i} la dérivation de l'algèbre $\mathbb{A}[[Y_1; \dots; Y_r]]$ par rapport à Y_i et $S(F)$ le terme constant de $F \in \mathbb{A}[[Y_1; \dots; Y_r]]$, on a :

$$F = \sum_{k_1, \dots, k_r \geq 0} \frac{1}{k_1! \dots k_r!} S\left(D_{(Y_1)}^{k_1} \circ \dots \circ D_{(Y_r)}^{k_r}(F)\right) Y_1^{k_1} \dots Y_r^{k_r}.$$

Pour appliquer ce résultat à la série formelle $\mathcal{Z}ig^{Y_1-X, \dots, Y_r-X}$ de $\mathbb{C}[[X]][[Y_1; \dots; Y_r]] \simeq \mathbb{C}[[X; Y_1; \dots; Y_r]]$, nous avons, pour tout $(k_1; \dots; k_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$, le calcul suivant :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k_1! \dots k_r!} S\left(D_{(Y_1)}^{k_1} \circ \dots \circ D_{(Y_r)}^{k_r}(\mathcal{Z}ig^{Y_1-X, \dots, Y_r-X})\right) \\ &= S\left(\sum_{p_1, \dots, p_r \geq 0} \mathcal{Z}e^{p_1+k_1+1, \dots, p_r+k_r+1} \left(\prod_{i=1}^r \binom{p_i+k_i}{k_i} (Y_i-X)^{p_i}\right)\right) \\ &= \sum_{p_1, \dots, p_r \geq 0} \mathcal{Z}e^{p_1+k_1+1, \dots, p_r+k_r+1} \binom{p_1+k_1}{k_1} \dots \binom{p_r+k_r}{k_r} (-X)^{p_1+\dots+p_r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p \geq 0} \sum_{p_1 + \dots + p_r = p} \mathcal{Z}e^{p_1 + k_1 + 1, \dots, p_r + k_r + 1} \binom{p_1 + k_1}{k_1} \dots \binom{p_r + k_r}{k_r} (-X)^p \\
&= \text{He}_+^{k_1 + 1, \dots, k_r + 1}(X) .
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Taylor pour les séries formelles à plusieurs indéterminées, on obtient dans $\mathbb{C}[[X; Y_1; \dots; Y_r]]$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}ig^{Y_1 - X, \dots, Y_r - X} &= \sum_{k_1, \dots, k_r \geq 0} \text{He}_+^{k_1 + 1, \dots, k_r + 1}(X) Y_1^{k_1} \dots Y_r^{k_r} \\
&= \sum_{k_1, \dots, k_r \geq 1} \text{He}_+^{k_1, \dots, k_r}(X) Y_1^{k_1 - 1} \dots Y_r^{k_r - 1} \\
&= \text{Hig}_+^{Y_1, \dots, Y_r}(X) .
\end{aligned}$$

□

Calcul de $\text{Hig}_-^\bullet(X)$. Rappelons que le moule $\mathcal{Z}e_-^\bullet$ vérifie :

$$\forall \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*, \quad s_r \geq 2, \quad \mathcal{Z}e_-^{\underline{s}} = (-1)^{\|\underline{s}\|} \mathcal{Z}e_-^{\overleftarrow{\underline{s}}} .$$

Cela permettra de définir la série génératrice $\mathcal{Z}ig_-^\bullet$ de ce dernier moule. Celle-ci va vérifier automatiquement :

$$\mathcal{Z}ig_-^{Y_1, \dots, Y_r} = (-1)^r \mathcal{Z}ig_-^{-Y_r, \dots, -Y_1} .$$

On a alors la propriété suivante :

Lemme 9 : La série génératrice du moule $\text{He}_-^\bullet(X)$, notée $\text{Hig}_-^\bullet(X)$ et à valeurs dans l'algèbre commutative $\mathbb{C}[[X]][(Y_r)_{r \in \mathbb{N}^*}] \simeq \mathbb{C}[[X; Y_1; Y_2; \dots]]$, vaut :

$$\text{Hig}_-^{Y_1, \dots, Y_r}(X) = \mathcal{Z}ig_-^{Y_1 - X, \dots, Y_r - X} .$$

Première expression de $\text{Tig}^\bullet(X)$. La trifactorisation, valable pour le moule $\mathcal{T}e^\bullet(z)$, mais aussi pour $\text{Te}^\bullet(X)$, va alors nous permettre de calculer $\text{Tig}^\bullet(X)$:

Lemme 10 : Notons $\mathcal{Z}ig^\bullet(X)$ et $\mathcal{Z}ig_-^\bullet(X)$ les moules à valeurs dans l'algèbre $\mathbb{C}[[X]][(Y_r)_{r \in \mathbb{N}^*}] \simeq \mathbb{C}[[X; Y_1; Y_2; \dots]]$ définis respectivement par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}ig^{Y_1, \dots, Y_r}(X) &= \mathcal{Z}ig^{Y_1 - X, \dots, Y_r - X} . \\
\mathcal{Z}ig_-^{Y_1, \dots, Y_r}(X) &= \mathcal{Z}ig_-^{Y_1 - X, \dots, Y_r - X} .
\end{aligned}$$

Alors, dans $\mathbb{C}((X))[(Y_r)_{r \in \mathbb{N}^*}]$, on a l'égalité :

$$\text{Tig}^\bullet(X) = \mathcal{Z}ig^\bullet(X) \times \text{Cig}^\bullet(X) \times \mathcal{Z}ig_-^\bullet(X) .$$

Démonstration : Rappelons que les moules $\mathcal{C}e^\bullet$ et $\text{Ce}^\bullet(X)$ sont définis, pour $z \in \mathbb{C}^*$, par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}e^\bullet(z) = 1 \\ \mathcal{C}e^s(z) = \frac{1}{z^s} \\ \mathcal{C}e^{\underline{s}}(z) = 0 \end{array} \right. , \text{ si } \begin{array}{l} s \in \mathbb{N}^* \\ l(\underline{s}) \geq 2 \end{array} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ce}^\bullet(X) = 1 . \\ \text{Ce}^s(X) = X^{-s} \\ \text{Ce}^{\underline{s}}(X) = 0 \end{array} \right. , \text{ si } \begin{array}{l} s \in \mathbb{N}^* \\ l(\underline{s}) \geq 2 . \end{array}$$

La série génératrice $Cig^\bullet(X)$, du moule $Ce^\bullet(X)$, vaut alors :

$$\begin{cases} Cig^0(X) = 1 . \\ Cig^Y(X) = \frac{1}{X - Y} . \\ Cig^{Y_1, \dots, Y_r}(X) = 0 , \quad \text{si } r \geq 2 . \end{cases}$$

La trifactorisation du moule $Te^\bullet(X)$ s'écrit, dans $\mathbb{C}((X))$, de manière semblable à celle du moule $\mathcal{T}e^\bullet : Te^\bullet(X) = He_+^\bullet(X) \times Ce^\bullet(X) \times He_-^\bullet(X)$. Celle-ci se traduit sur la série génératrice $Tig^\bullet(X)$.

En effet, pour $r \in \mathbb{N}^*$, on a alors successivement :

$$\begin{aligned} Tig^{Y_1, \dots, Y_r}(X) &= \sum_{s_1, \dots, s_r \geq 1} \sum_{\substack{(i;j) \in \llbracket 0; r \rrbracket^2 \\ i \leq j}} He_+^{s_1, \dots, s_i}(X) Ce^{s_{i+1}, \dots, s_j}(X) He_-^{s_{j+1}, \dots, s_r}(X) \\ &\quad \times Y_1^{s_1} \dots Y_r^{s_r} \\ &= \sum_{\substack{(i;j) \in \llbracket 0; r \rrbracket^2 \\ i \leq j}} \left(\sum_{s_1, \dots, s_i \geq 1} He_+^{s_1, \dots, s_i}(X) Y_1^{s_1} \dots Y_i^{s_i} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{s_{i+1}, \dots, s_j \geq 1} Ce^{s_{i+1}, \dots, s_j}(X) Y_{i+1}^{s_{i+1}} \dots Y_j^{s_j} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{s_{j+1}, \dots, s_r \geq 1} He_-^{s_{j+1}, \dots, s_r}(X) Y_{j+1}^{s_{j+1}} \dots Y_r^{s_r} \right) \\ &= \sum_{\substack{(i;j) \in \llbracket 0; r \rrbracket^2 \\ i \leq j}} Hig_+^{Y_1, \dots, Y_i}(X) Cig^{Y_{i+1}, \dots, Y_j}(X) Hig_-^{Y_{j+1}, \dots, Y_r}(X) \\ &= (Hig_+^\bullet(X) \times Cig^\bullet(X) \times Hig_-^\bullet(X))^{Y_1, \dots, Y_r} . \end{aligned}$$

Sachant aussi que $Hig_+^0(X) \times Cig^0(X) \times Hig_-^0(X) = 1 = Tig^0(X)$, les calculs précédents permettent alors de conclure quant à l'égalité voulue. \square

4.7 Contractions et seconde expression de Tig^\bullet .

La trifactorisation du moule $Tig^\bullet(X)$ ne permet pas encore de lever la deuxième difficulté. Par ailleurs, le théorème de la page 133 n'indique pas si l'on peut étendre les relations de réduction en monotangentes aux multitangentes divergentes.

Pour répondre à ces deux questions, nous allons utiliser la même démarche que lors de la démonstration de la réduction en monotangentes dans le cas des multitangentes convergentes : on utilisera une décomposition en éléments simples. Ici, pour synthétiser et simplifier les résultats, n'oublions pas que nous travaillons sur les séries génératrices. L'écriture du résultat nécessite des notations et notions introduites par Jean Écalle dans son étude des structures de flexions (cf. [17], [18], [19] [20]).

Contractions. Les quatre contractions $\lfloor \cdot \rfloor$, $\lceil \cdot \rceil$ et $\lrcorner \cdot \lrcorner$ agissent sur des factorisations de (bi)séquences.

Donnons-nous deux alphabets Ω_1 et Ω_2 et considérons l'alphabet produit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$; considérons aussi une séquence $\underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{w}}^1 \cdots \underline{\mathbf{w}}^r \in \Omega^*$.

Le contracteur \lfloor va agir sur $\underline{\mathbf{w}}^i$ en soustrayant à chaque élément inférieur de $\underline{\mathbf{w}}^i$ l'élément inférieur droit de $\underline{\mathbf{w}}^{i-1}$. Le contracteur \lceil va agir sur $\underline{\mathbf{w}}^i$ en ajoutant à l'élément supérieur gauche de $\underline{\mathbf{w}}^i$ la somme des éléments supérieurs de $\underline{\mathbf{w}}^{i-1}$.

De même, le contracteur \rfloor va agir sur $\underline{\mathbf{w}}^i$ en soustrayant à chaque élément inférieur de $\underline{\mathbf{w}}^i$ l'élément inférieur gauche de $\underline{\mathbf{w}}^{i+1}$. Le contracteur \rceil va agir sur $\underline{\mathbf{w}}^i$ en ajoutant à l'élément supérieur droit de $\underline{\mathbf{w}}^i$ la somme des éléments supérieurs de $\underline{\mathbf{w}}^{i+1}$.

En fait, à travers ces contractions, les éléments de Ω_1 vont s'additionner les uns avec les autres, alors que les éléments de Ω_2 vont se soustraire.

Voici un exemple. Si $\underline{\mathbf{w}} = \cdots \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}} \cdots = \cdots \begin{pmatrix} u_6 & , \cdots , & u_{10} \\ v_6 & , \cdots , & v_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & , \cdots , & u_{15} \\ v_{11} & , \cdots , & v_{15} \end{pmatrix} \cdots$, alors on a :

$$\begin{aligned} \lfloor \underline{\mathbf{b}} &= \begin{pmatrix} u_{11} & , \cdots , & u_{15} \\ v_{11} - v_{10} & , \cdots , & v_{15} - v_{10} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lceil \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} u_6 + \cdots + u_{11} & , & u_{12} & , \cdots , & u_{15} \\ & v_{11} & , & v_{12} & , \cdots , & v_{15} \end{pmatrix} . \\ \underline{\mathbf{a}} \rfloor &= \begin{pmatrix} u_6 & , \cdots , & u_{10} \\ v_6 - v_{11} & , \cdots , & v_{10} - v_{11} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{a}} \rceil = \begin{pmatrix} u_6 & , \cdots , & u_9, & u_{10} + \cdots + u_{15} \\ v_6 & , \cdots , & v_9, & v_{10} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Couleurs. Pour pouvoir donner la seconde expression de Tig^\bullet de manière sûre, nous allons redéfinir les moules que nous considérons en des bimoules, i.e. avec des couleurs. Cela nous évitera de passer à côté de structures des flexions présentes. Nous n'utiliserons ensuite plus ces couleurs.

Commençons par considérer le bimoule des multizêtas colorés défini sur $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)^*$ par :

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \mathcal{Z}e_{\binom{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}{s_1, \dots, s_r}} = \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{e_1^{n_1} \cdots e_r^{n_r}}{n_1^{s_1} \cdots n_r^{s_r}} \text{ où } e_k = e^{-2i\pi\varepsilon_k}, \text{ pour } k \in \llbracket 1; n \rrbracket .$$

La série génératrice $\mathcal{Z}ig^\bullet$ définit alors un bimoule symétrisé sur $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times (V_i)_{i \in \mathbb{N}^*})^*$. Cela permet aussi de définir le bimoule $\mathcal{Z}ig_-^\bullet$ par :

$$\mathcal{Z}ig_-^{\binom{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}{V_1, \dots, V_r}} = (-1)^r \mathcal{Z}ig^{\binom{\varepsilon_r, \dots, \varepsilon_1}{-V_r, \dots, -V_1}} .$$

De même, nous pouvons définir les multizêtas de Hurwitz colorés et les multitangentes colorées, qu'il s'agisse de moules analytiques ou formels. Ce sont des bimoules à valeurs dans $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbb{Z})$ ou $\mathbb{C}[[X]]$.

En prenant $\binom{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}{s_1, \dots, s_r} \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)^* - \{\emptyset\}$ et en notant toujours $e_k = e^{-2i\pi\varepsilon_k}$, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, ceux-ci sont respectivement définis par :

$$\mathcal{H}e_+^{\binom{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}{s_1, \dots, s_r}}(z) = \sum_{0 < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{e_1^{n_1} \cdots e_r^{n_r}}{(n_1 + z)^{s_1} \cdots (n_r + z)^{s_r}} ,$$

$$\mathcal{H}e_+^{\binom{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}{s_1, \dots, s_r}}(X) = \sum_{k \geq 0} \sum_{k_1 + \dots + k_r = k} \left[\prod_{i=1}^r \binom{s_i + k_i - 1}{k_i} \right] \mathcal{Z}e_{\binom{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}{s_1 + k_1, \dots, s_r + k_r}} (-X)^k ,$$

$$\mathcal{T}e^{\binom{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}{s_1, \dots, s_r}}(z) = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{e_1^{n_1} \dots e_r^{n_r}}{(n_1 + z)^{s_1} \dots (n_r + z)^{s_r}},$$

$$\mathcal{T}e^{\binom{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}{s_1, \dots, s_r}}(X) = \sum_{\binom{\underline{\varepsilon}^1}{\underline{s}^1} \cdot \binom{\underline{\varepsilon}^2}{\underline{s}^2} \cdot \binom{\underline{\varepsilon}^3}{\underline{s}^3} = \binom{\underline{\varepsilon}}{\underline{s}}} \text{He}_+^{\binom{\underline{\varepsilon}^1}{\underline{s}^1}}(X) \text{Ce}^{\binom{\underline{\varepsilon}^2}{\underline{s}^2}}(X) \text{He}_-^{\binom{\underline{\varepsilon}^3}{\underline{s}^3}}(X).$$

Evidemment, ces définitions demandent à être renormalisées dans les cas divergents, c'est-à-dire lorsque $(\varepsilon_1; s_1) = (0; 1)$ dans le cas des multizêtas de Hurwitz, et lorsque $(\varepsilon_1; s_1) = (0; 1)$ ou $(\varepsilon_r; s_r) = (0; 1)$ dans le cas des multitangentes. Ceci se fait à travers la renormalisation de la série génératrice $\mathcal{Z}ig^\bullet$, et donc du lemme désormais bien connu (cf. [18] p. 5 et [20] p. 6) :

Lemme : Soit $\mu^{n_1, \dots, n_r} = \frac{1}{r_1! \dots r_n!}$ où la séquence $\underline{n} = (n_1; \dots; n_r) \in (\mathbb{N}^*)^*$ atteint r_1 fois sa valeur la plus élevée, r_2 fois la valeur suivante, etc. Pour $(u_p)_{p \in \llbracket 1; r \rrbracket} \in \mathbb{C}^r$ et $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, notons toujours $e_k = e^{-2iu_k \pi}$.

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, considérons les moules $do\mathcal{Z}ig_k^\bullet$ et $co\mathcal{Z}ig_k^\bullet$, définis pour tout $\binom{u_1, \dots, u_r}{v_1, \dots, v_r} \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times (\mathbb{V}_i)_{i \in \mathbb{N}^*})^*$ par :

$$do\mathcal{Z}ig_k^{\binom{u_1, \dots, u_r}{v_1, \dots, v_r}} = \begin{cases} \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1 < k} \frac{e_1^{n_1} \dots e_r^{n_r}}{(n_1 - v_1) \dots (n_r - v_r)} & , \text{ si } r \neq 0 . \\ 1 & , \text{ si } r = 0 . \end{cases}$$

$$co\mathcal{Z}ig_k^{\binom{u_1, \dots, u_r}{v_1, \dots, v_r}} = \begin{cases} (-1)^r \sum_{1 \leq n_r \leq \dots \leq n_1 < k} \frac{\mu^{n_1, \dots, n_r}}{n_1 \dots n_r} & , \text{ si } \underline{u} \neq \underline{0} . \\ 0 & , \text{ si } \underline{u} = \underline{0} . \end{cases}$$

Alors, le moule $\mathcal{Z}ig$ admet la “factorisation” suivante :

$$\mathcal{Z}ig^\bullet = \lim_{n \rightarrow +\infty} (co\mathcal{Z}ig_n^\bullet \times do\mathcal{Z}ig_n^\bullet).$$

Notons que dans cette “factorisation”, le moule $do\mathcal{Z}ig_k^\bullet$ donne les termes dominants de la série $\mathcal{Z}ig^\bullet$, alors que le moule $co\mathcal{Z}ig_k^\bullet$ joue le rôle de correction permettant de rétablir la convergence de la série divergente $\sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1 < k} \frac{e_1^{n_1} \dots e_r^{n_r}}{(n_1 - v_1) \dots (n_r - v_r)}$.

De nouveaux moules. Notons δ l'indicatrice de $\{0\}$. Considérons aussi les bimoules formels Qig^\bullet et δ^\bullet sur $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times (\mathbb{V}_i)_{i \in \mathbb{N}^*})^*$ par :

$$\begin{cases} Qig^\emptyset = 0 . \\ Qig \binom{u_1}{V_1} = -Te \binom{u_1}{1} (V_1) . \\ Qig \binom{u_1, \dots, u_r}{V_1, \dots, V_r} = 0 , \text{ si } r \geq 2 . \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta^\emptyset = 0 . \\ \delta \binom{u_1, \dots, u_r}{V_1, \dots, V_r} = \begin{cases} \frac{(i\pi)^r}{r!} \delta(u_1) \cdots \delta(u_r) , & \text{si } r \text{ est pair.} \\ 0 & \text{si } r \text{ est impair.} \end{cases} \end{cases}$$

Seconde expression de Tig^\bullet . Dans la première expression de Tig^\bullet , appliquons le lemme précédent permettant d'exprimer Zig^\bullet . Cela permettra de décomposer en éléments simples les fractions rationnelles en l'indéterminée X . Automatiquement, on obtient le théorème suivant :

Théorème 3 : Notons $Qig^\bullet(X)$ le bimoule à valeurs dans l'algèbre commutative $\mathbb{C}[[X]][(V_r)_{r \in \mathbb{N}^*}] \simeq \mathbb{C}[[X; V_1; V_2; \dots]]$, lequel est défini par :

$$Qig^{V_1, \dots, V_r}(X) = Qig^{V_1 - X, \dots, V_r - X} .$$

Alors, dans $\mathbb{C}[[X]][(V_r)_{r \in \mathbb{N}^*}]$, on a l'égalité :

$$Tig^\bullet(X) = \delta^\bullet + Zig^{\bullet \downarrow} \times Qig^{\lceil \bullet \rceil}(X) \times Zig_{-}^{\bullet} .$$

Démonstration : De manière désormais traditionnelle, posons :

$$doZig_N \binom{u_1, \dots, u_r}{V_1, \dots, V_r}(X) = doZig_N \binom{u_1, \dots, u_r}{V_1 - Y, \dots, V_r - Y} .$$

$$coZig_N \binom{u_1, \dots, u_r}{V_1, \dots, V_r}(X) = coZig_N \binom{u_1, \dots, u_r}{V_1 - Y, \dots, V_r - Y} .$$

$$doZig_{-, N} \binom{u_1, \dots, u_r}{V_1, \dots, V_r}(X) = (-1)^r doZig_{-, N} \binom{-u_r, \dots, -u_1}{-V_r, \dots, -V_1}(X) .$$

$$coZig_{-, N} \binom{u_1, \dots, u_r}{V_1, \dots, V_r}(X) = (-1)^r coZig_{-, N} \binom{-u_r, \dots, -u_1}{-V_r, \dots, -V_1}(X) .$$

- Soit $\binom{u_1, \dots, u_r}{V_1, \dots, V_r} \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times (V_i)_{i \in \mathbb{N}^*})^*$.

Le lemme de la page 136 permet d'écrire $Tig^\bullet(X) = Zig^\bullet(X) \times Cig^\bullet(X) \times Zig_{-}^\bullet(X)$. En injectant dans cette égalité l'expression de Zig^\bullet donnée par le lemme précédent ainsi que celle de Zig_{-}^\bullet déduite immédiatement du même lemme, on obtient :

$$Tig^\bullet(X) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (coZig_N^\bullet \times Tig_N^\bullet(X) \times coZig_{-, N}^\bullet) ,$$

où $Tig_N^\bullet(X) = doZig_N^\bullet(X) \times Cig^\bullet(X) \times doZig_{-, N}^\bullet(X)$.

Il n'est pas difficile de remplacer chacun des termes apparaissant dans l'expression développée du produit moulien Tig_N^\bullet pour obtenir :

$$\text{Tig}_N \binom{u_1, \dots, u_r}{V_1, \dots, V_r} = \sum_{-N < n_r < \dots < n_1 < N} \frac{e_1^{n_1} \dots e_r^{n_r}}{(n_1 - V_1 + X) \dots (n_r - V_r + X)}. \quad (52)$$

• Il s'agit désormais d'effectuer la décomposition en éléments simples annoncée :

$$\text{Tig}_N \binom{u_1, \dots, u_r}{V_1, \dots, V_r} = \sum_{k=1}^r \sum_{-N < n_r < \dots < n_1 < N} \left(\prod_{\substack{j \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ j \neq k}} \frac{e_j^{n_j}}{(n_j - n_k + V_k - V_j)} \right) \frac{e_k^{n_k}}{n_k - V_k + X}.$$

En reportant cette décomposition en éléments simples dans l'expression (52), après calculs, on obtient dans $\mathbb{C}[[X]][[(V_r)_{r \in \mathbb{N}^*}]]$, l'égalité :

$$\text{Tig}^\bullet(X) = \delta^\bullet + \text{Zig}^{\bullet \downarrow} \times \text{Qig}^{\lceil \bullet \rceil}(X) \times \text{Zig}^{\bullet \downarrow}.$$

□

Pour finir ce paragraphe, remarquons que le moule $\text{Qig}^\bullet(X)$ ne s'exprime qu'en fonction des monotangentes. En effet, seule la composante $\text{Qig}^Y(X)$ est non nulle et vaut $-\text{Te}^1(Y - X)$. La formule de Taylor formelle permet alors d'affirmer que dans $\mathbb{C}[[X]][[Y]]$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Qig}^Y(X) &= -\text{Te}^1(Y - X) \\ &= -\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \text{Te}^{k+1}(-X) Y^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \text{Te}^{k+1}(X) Y^k \\ &= \text{Tig}^Y(X). \end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité algébrique $\text{Tig}^\bullet(X) = \delta^\bullet + \text{Zig}^{\bullet \downarrow} \times \text{Qig}^{\lceil \bullet \rceil}(X) \times \text{Zig}^{\bullet \downarrow}$, ou encore $\text{Tig}^\bullet(X) = \delta^\bullet + \text{Zig}^{\bullet \downarrow} \times \text{Qig}^\bullet(X) \times \text{Zig}^{\bullet \downarrow}$ si l'on revient aux simples moules, permet d'exprimer les multitangentes divergentes en fonction des multitangentes convergentes ; mais aussi, elle permet, plus généralement, d'exprimer toute multitangente, convergente ou non, en fonction des monotangentes.

Cette expression contient donc, en particulier, la réduction des multitangentes convergentes en monotangentes.

Passage du formel à l'analytique. Notons que la dernière formule donne l'expression de la série génératrice des multitangentes formelles.

Il n'est pas difficile d'obtenir une estimation analytique des monotangentes permettant de prouver que $y_1 \mapsto \text{Qig}^{y_1}(z)$ est correctement définie sur un voisinage de 0 dans \mathbb{C} (cf. §7.1.1 pour une majoration de $\mathcal{T}e^{\mathfrak{s}}$). Ainsi, $\text{Qig}^\bullet(z)$ est lui aussi correctement défini sur un voisinage de 0 dans \mathbb{C}^* .

Par ailleurs, les séries génératrices Zig^\bullet et $\text{Zig}^{\bullet \downarrow}$ sont aussi des séries entières définies sur $D(0; 1)^*$. En effet, on a : $|\mathcal{Z}e^{\mathfrak{s}}| \leq 4^r r!$ pour toute séquence $\mathfrak{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$ de longueur r .

L'estimation est, certes, grossière mais suffisante. Elle repose sur l'expression de $\#sh\mathbf{e}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})$ ainsi que sur l'algorithme de rejet des 1 à droite :

$$\text{si } |\mathcal{Z}e^{1^{[k]}\cdot\mathbf{s}}| \leq 2^{k+1} \frac{(l(\mathbf{s}) + k - 1)!}{(l(\mathbf{s}) - 1)!},$$

$$\begin{aligned} \text{alors } |\mathcal{Z}e^{1^{[k+1]}\cdot\mathbf{s}}| &\leq \left| \mathcal{Z}e^1 \mathcal{Z}e^{1^{[k]}\cdot\mathbf{s}} - \sum_{\mathbf{u} \in sh\mathbf{e}(1^{[k]}\cdot\mathbf{s}; 1) - \{1^{[k+1]}\cdot\mathbf{s}\}} \mathcal{Z}e^{\mathbf{u}} \right| \\ &\leq 2^{k+1} \frac{(l(\mathbf{s}) + k - 1)!}{(l(\mathbf{s}) - 1)!} (\#sh\mathbf{e}(1; 1^{[k]}\cdot\mathbf{s}) - 1) \\ &\leq 2^{k+2} \frac{(l(\mathbf{s}) + k)!}{(l(\mathbf{s}) - 1)!}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute séquence $\mathbf{s} \in \mathcal{S}_+^*$, on a :

$$|\mathcal{Z}e^{1^{[k]}\cdot\mathbf{s}}| \leq 2^{k+1} \frac{(l(\mathbf{s}) + k - 1)!}{l(\mathbf{s}) - 1)!} \leq 2^{2k+l(\mathbf{s})} (k!) \leq 4^{k+l(\mathbf{s})} (k!) \leq 4^{k+l(\mathbf{s})} (k + l(\mathbf{s}))!.$$

Cela permet de construire un voisinage de 0 dans \mathbb{C}^* où $\mathcal{Z}ig^{\bullet\downarrow} \times \mathcal{Q}ig^{\bullet}(X) \times \mathcal{Z}ig_-^{\bullet}$ est une série entière, donc analytique. Le principe du prolongement analytique permet alors d'en déduire :

Théorème 4 : Notons $\mathcal{Q}ig^{\bullet}$, le moule à valeurs dans $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbb{Z})$ défini par :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \quad \mathcal{Q}ig^{y_1, \dots, y_r}(z) &= \mathcal{Q}ig^{y_1 - z, \dots, y_r - z} \\ &= \begin{cases} -\mathcal{T}e^1(y_1 - z) & , \text{ si } r = 1. \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On a alors l'égalité, pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{T}ig^{\bullet}(z) = \delta^{\bullet} + \mathcal{Z}ig^{\bullet\downarrow} \times \mathcal{Q}ig^{\bullet}(z) \times \mathcal{Z}ig_-^{\bullet}.$$

Notons que dans ce théorème où nous définissons le moule $\mathcal{Q}ig^{\bullet}(z)$, nous fixons d'abord $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, puis nous choisissons un ensemble de séquences de \mathbb{C}^* avec $|y_i|$, $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, suffisamment petit pour que $y_i - z \notin \mathbb{Z}$. Nous pouvons faire le contraire : choisir d'abord comme ensemble de séquences l'ensemble $(\mathbb{C} - \mathbb{Z})^*$, puis ensuite choisir $z \in \mathbb{C}$ de sorte que $y_i - z \notin \mathbb{Z}$ pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$. Cette seconde méthode autorise alors d'annuler le nombre complexe z dans la formule précédente.

4.8 Réduction en monotangentes des multitangentes divergentes.

Réduction en monotangentes. Reprenons l'expression moulienne de $\mathcal{T}ig^{\bullet}(z)$ tout juste obtenue pour en déduire un résultat sur les multitangentes et pouvoir étendre notre résultat de réduction en monotangentes aux multitangentes divergentes. Pour cela, redéveloppons en série formelle (ou plutôt en série entière...) $\mathcal{T}ig^{\bullet}$.

$$\text{On a : } \mathcal{T}ig^{y_1, \dots, y_r}(z) = \delta^{y_1, \dots, y_r} + \sum_{k=1}^r \mathcal{Z}ig^{y_1 - y_k, \dots, y_{k-1} - y_k} \mathcal{Q}ig^{y_k}(z) \mathcal{Z}ig_-^{y_{k+1} - y_k, \dots, y_r - y_k}.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}ig^{y_1-y_k, \dots, y_{k-1}-y_k} &= \sum_{s_1, \dots, s_{k-1} \geq 1} \mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_{k-1}} (y_1 - y_k)^{s_1-1} \dots (y_{k-1} - y_k)^{s_{k-1}-1} \\
&= \sum_{s_1, \dots, s_{k-1} \geq 1} \sum_{\substack{l_1 \in [0; s_1-1] \\ \vdots \\ l_{k-1} \in [0; s_{k-1}-1]}} \mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_{k-1}} \left[\prod_{i=1}^{k-1} \binom{s_i-1}{l_i} \right] \\
&\quad \times y_1^{l_1} \dots y_{k-1}^{l_{k-1}} (-y_k)^{\|\underline{s}^{<k}\| - \|\underline{l}^{<k}\| - (k-1)} \\
&= \sum_{l_1, \dots, l_{k-1} \geq 0} \sum_{\substack{s_1 \geq l_1 \\ \vdots \\ s_{k-1} \geq l_{k-1}}} \mathcal{Z}e^{s_1+1, \dots, s_{k-1}+1} \left[\prod_{i=1}^{k-1} \binom{s_i}{l_i} \right] \\
&\quad \times y_1^{l_1} \dots y_{k-1}^{l_{k-1}} (-y_k)^{\|\underline{s}^{<k}\| - \|\underline{l}^{<k}\|} \\
&= \sum_{l_1, \dots, l_{k-1} \geq 0} \sum_{s_1, \dots, s_{k-1} \geq 0} \mathcal{Z}e^{s_1+l_1+1, \dots, s_{k-1}+l_{k-1}+1} \left[\prod_{i=1}^{k-1} \binom{s_i+l_i}{l_i} \right] \\
&\quad \times y_1^{l_1} \dots y_{k-1}^{l_{k-1}} (-y_k)^{\|\underline{s}^{<k}\|} \\
&= \sum_{l_1, \dots, l_k \geq 0} \sum_{\substack{s_1, \dots, s_{k-1} \geq 0 \\ s_1 + \dots + s_{k-1} = l_k}} \mathcal{Z}e^{s_1+l_1+1, \dots, s_{k-1}+l_{k-1}+1} \left[\prod_{i=1}^{k-1} \binom{s_i+l_i}{l_i} \right] \\
&\quad \times y_1^{l_1} \dots y_{k-1}^{l_{k-1}} (-y_k)^{l_k} \\
&= \sum_{\substack{l_1, \dots, l_{k-1} \geq 1 \\ l_k \geq 0}} \sum_{\substack{s_1, \dots, s_{k-1} \geq 0 \\ s_1 + \dots + s_{k-1} = l_k}} \mathcal{Z}e^{s_1+l_1, \dots, s_{k-1}+l_{k-1}} \left[\prod_{i=1}^{k-1} \binom{s_i+l_i-1}{l_i-1} \right] \\
&\quad \times y_1^{l_1-1} \dots y_{k-1}^{l_{k-1}-1} (-y_k)^{l_k} .
\end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}ig_-^{y_{k+1}-y_k, \dots, y_r-y_k} &= (-1)^{r-k} \mathcal{Z}ig^{y_r-y_k, \dots, y_{k+1}-y_k} \\
&= \sum_{\substack{l_{k+1}, \dots, l_r \geq 1 \\ l_k \geq 0}} \sum_{\substack{s_{k+1}, \dots, s_r \geq 0 \\ s_{k+1} + \dots + s_r = l_k}} (-1)^{l_{k+1} + \dots + l_r} \mathcal{Z}e^{s_r+l_r, \dots, s_{k+1}+l_{k+1}} \left[\prod_{i=k+1}^r \binom{s_i+l_i-1}{l_i-1} \right] \\
&\quad \times y_k^{l_k} y_{k+1}^{l_{k+1}-1} \dots y_r^{l_r-1} .
\end{aligned}$$

Ainsi : $\mathcal{Z}ig^{y_1-y_k, \dots, y_{k-1}-y_k} \mathcal{Z}ig_-^{y_{k+1}-y_k, \dots, y_r-y_k}$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{l_1, \dots, l_k, \dots, l_r \geq 1 \\ l_k^1 \geq 0, l_k^2 \geq 0}} \sum_{\substack{s_1, \dots, s_{k-1} \geq 0 \\ s_1 + \dots + s_{k-1} = l_k^1}} \sum_{\substack{s_{k+1}, \dots, s_r \geq 0 \\ s_{k+1} + \dots + s_r = l_k^2}} (-1)^{l_k^1 + l_{k+1} + \dots + l_r} \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^r \binom{s_i+l_i-1}{l_i-1} \right] \\
&\quad \times \mathcal{Z}e^{s_1+l_1, \dots, s_{k-1}+l_{k-1}} \mathcal{Z}e^{s_r+l_r, \dots, s_{k+1}+l_{k+1}} \\
&\quad \times y_1^{l_1-1} \dots y_{k-1}^{l_{k-1}-1} y_k^{l_k^1+l_k^2} y_{k+1}^{l_{k+1}-1} \dots y_r^{l_r-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{l_1, \dots, \widehat{l_k}, \dots, l_r \geq 1 \\ l_k \geq 0}} \sum_{l_k=0}^{l_k} \sum_{\substack{s_1, \dots, s_{k-1} \geq 0 \\ s_1 + \dots + s_{k-1} = l_k}} \sum_{\substack{s_{k+1}, \dots, s_r \geq 0 \\ s_{k+1} + \dots + s_r = l_k - l_k}} (-1)^{l_k + l_{k+1} + \dots + l_r} \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^r \binom{s_i + l_i - 1}{l_i - 1} \right] \\
&\quad \times \mathcal{Z} e^{s_1 + l_1, \dots, s_{k-1} + l_{k-1}} \mathcal{Z} e^{s_r + l_r, \dots, s_{k+1} + l_{k+1}} \\
&\quad \times y_1^{l_1 - 1} \dots y_{k-1}^{l_{k-1} - 1} y_k^{l_k} y_{k+1}^{l_{k+1} - 1} \dots y_r^{l_r - 1} \\
&= \sum_{\substack{l_1, \dots, \widehat{l_k}, \dots, l_r \geq 1 \\ l_k \geq 0}} \sum_{\substack{s_j \geq 0, j \neq k \\ \sum_{j \neq k} s_j = l_k}} (-1)^{s_1 + \dots + s_{k-1} + l_{k+1} + \dots + l_r} \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^r \binom{s_i + l_i - 1}{l_i - 1} \right] \\
&\quad \times \mathcal{Z} e^{s_1 + l_1, \dots, s_{k-1} + l_{k-1}} \mathcal{Z} e^{s_r + l_r, \dots, s_{k+1} + l_{k+1}} \\
&\quad \times y_1^{l_1 - 1} \dots y_{k-1}^{l_{k-1} - 1} y_k^{l_k} y_{k+1}^{l_{k+1} - 1} \dots y_r^{l_r - 1} \\
&= \sum_{\substack{l_1, \dots, \widehat{l_k}, \dots, l_r \geq 1 \\ l_k \geq 0}} \sum_{\substack{s_j \geq 0, j \neq k \\ \sum_{j \neq k} s_j = l_k}} k E_{\mathbb{S}}^1 \mathcal{Z} e^{s_1 + l_1, \dots, s_{k-1} + l_{k-1}} \mathcal{Z} e^{s_r + l_r, \dots, s_{k+1} + l_{k+1}} \\
&\quad \times y_1^{l_1 - 1} \dots y_{k-1}^{l_{k-1} - 1} y_k^{l_k} y_{k+1}^{l_{k+1} - 1} \dots y_r^{l_r - 1} \\
&= \sum_{\substack{l_1, \dots, \widehat{l_k}, \dots, l_r \geq 1 \\ l_k \geq 0}} \mathcal{Z}_{k, l_k}^1 y_1^{l_1 - 1} \dots y_{k-1}^{l_{k-1} - 1} y_k^{l_k} y_{k+1}^{l_{k+1} - 1} \dots y_r^{l_r - 1}.
\end{aligned}$$

En conséquence :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}ig^{y_1, \dots, y_r}(z) &= \delta^{y_1, \dots, y_r} + \sum_{k=1}^r \mathcal{Z}ig^{y_1 - y_k, \dots, y_{k-1} - y_k} \mathcal{Q}ig^{y_k}(z) \mathcal{Z}ig_-^{y_{k+1} - y_k, \dots, y_r - y_k} \\
&= \delta^{y_1, \dots, y_r} + \sum_{k=1}^r \left(\sum_{\substack{l_1, \dots, \widehat{l_k}, \dots, l_r \geq 1 \\ u \geq 0}} \mathcal{Z}_{k, u}^1 y_1^{l_1 - 1} \dots y_{k-1}^{l_{k-1} - 1} y_k^u y_{k+1}^{l_{k+1} - 1} \dots y_r^{l_r - 1} \right) \\
&\quad \times \left(\sum_{v \geq 1} \mathcal{T}e^v(z) y_k^{v-1} \right) \\
&= \delta^{y_1, \dots, y_r} + \sum_{k=1}^r \sum_{l_1, \dots, \widehat{l_k}, \dots, l_r \geq 1} \sum_{l_k \geq 1} \sum_{j=1}^{l_k} \mathcal{Z}_{k, l_k - j}^1 \mathcal{T}e^j(z) y_1^{l_1 - 1} \dots y_r^{l_r - 1} \\
&= \delta^{y_1, \dots, y_r} + \sum_{l_1, \dots, l_r \geq 1} \left(\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{l_k} \mathcal{Z}_{k, l_k - j}^1 \mathcal{T}e^j(z) \right) y_1^{l_1 - 1} \dots y_r^{l_r - 1}.
\end{aligned}$$

On en déduit alors la généralisation de la relation de réduction en monotangentes aux multitangentes divergentes :

Théorème 5 : réduction en monotangentes, version 2

$$\begin{aligned} \text{Notons : } {}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}} &= \left(\prod_{l=1}^{i-1} (-1)^{k_l} \right) \left(\prod_{l=i+1}^r (-1)^{s_l} \right) \left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^r \binom{s_l + k_l - 1}{s_l - 1} \right) . \\ \mathcal{Z}_{i,k}^{\underline{s}} &= \sum_{\substack{k_j \geq 0, j \neq i \\ \sum_{j \neq i} k_j = k}} {}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}} \mathcal{Z} e^{s_r + k_r, \dots, s_{i+1} + k_{i+1}} \mathcal{Z} e^{s_1 + k_1, \dots, s_{i-1} + k_{i-1}} . \\ \delta^{\underline{s}} &= \begin{cases} \frac{(i\pi)^r}{r!} & , \text{ si } \underline{s} = 1^{[r]} \text{ et si } r \text{ est pair.} \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Alors, pour toute séquence $\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$, on a :

$$\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) = \delta^{\underline{s}} + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{s_i} \mathcal{Z}_{i,s_i-k}^{\underline{s}} \mathcal{T}e^k(z) .$$

De plus, si $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$, alors la somme portant sur l'indice k commence à 2 .

Ce théorème permet d'établir des tables de multitangentes divergentes, comme nous en avons établis pour les multitangentes convergentes (cf. Annexe 3) . On y voit que les multitangentes divergentes $\mathcal{T}e^{2,1}$ et $\mathcal{T}e^{1,2}$ sont nulles. Ce fait remarquable montre que la relation de symétrie $\mathcal{T}e^2 \mathcal{T}e^1 = \mathcal{T}e^{2,1} + \mathcal{T}e^{1,2} + \mathcal{T}e^3 = \mathcal{T}e^3(z)$ permet de retrouver la plus simple des relations entre séries d'Eisenstein.

De nombreuses autres multitangentes divergentes sont nulles (cf. la table présentée à l'annexe 3) .

Relations entre multizêtas. Rappelons que dans la seconde expression de $\mathcal{T}ig^\bullet$, nous pouvons annuler le nombre complexe z (cf. p. 142) . De même que pour la seconde expression de $\mathcal{T}ig^\bullet$, la première expression (cf. p. 136) a un sens analytique. On peut aussi y annuler z à condition de ne considérer que des séquences $\underline{y} \in \mathbb{C}^*$ non vides telles que $y_1 \neq 0$.

Lorsqu'on égale ces deux expressions de $\mathcal{T}ig^\bullet$ en $z = 0$, on obtient la relation suivante :

Lemme : Pour toute séquence $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} u_1, \dots, u_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix}$ de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times (\mathbb{C} - \mathbb{Z}))^\bullet$, on a :

$$\sum_{\underline{\omega}^1 \cdot \underline{\omega}^2 \cdot \underline{\omega}^3 = \underline{\omega}} \mathcal{Z}ig^{\omega^1} \mathcal{C}ig^{\omega^2} \mathcal{Z}ig^{\omega^3} = \left(\delta^\bullet + \mathcal{Z}ig^{\bullet,1} \times \mathcal{Q}ig^{[1]} \times \mathcal{Z}ig^{[1]} \right)^\omega . \quad (53)$$

Nous avons démontré cette relation en égalant les deux expressions connues de $\mathcal{T}ig^\bullet$. En fait, la formule trigonométrique est équivalente à l'égalité de ces deux expressions :

Lemme : La formule (53) est vraie si et seulement si on a égalité entre les deux expressions de $\mathcal{T}ig^\bullet$, c'est-à-dire si l'on dispose de la réduction d'une multitangente (convergente ou non) en monotangentes.

Démonstration : Si $\left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times (\mathbf{v}_i)_{i \in \mathbb{N}^*})^*$, l'application de l'égalité (53) donne successivement :

$$\begin{aligned}
\text{Tig}\left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right) &= \sum_{\substack{(\mathbf{u}^1) \cdot (\mathbf{u}^2) \cdot (\mathbf{u}^3) = (\mathbf{u}) \\ \delta\left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right)}} \mathcal{Zig}\left(\frac{\mathbf{u}^1}{\mathbf{v}^1}\right) \Big|_{(X)} \text{Qig}\left[\frac{\mathbf{u}^2}{\mathbf{v}^2}\right] \Big|_{(X)} \mathcal{Zig}_-\left[\frac{\mathbf{u}^3}{\mathbf{v}^3}\right] \Big|_{(X)} \\
&= \sum_{\substack{(i,j) \in [0;r]^2 \\ i \leq j}} \mathcal{Zig}\left(\frac{u_1, \dots, u_i}{v_1 - X, \dots, v_i - X}\right) \Big|_{(X)} \text{Qig}\left[\frac{u_{i+1}, \dots, u_j}{v_{i+1} - X, \dots, v_j - X}\right] \\
&\quad \times \mathcal{Zig}_-\left[\frac{u_{j+1}, \dots, u_r}{v_{j+1} - X, \dots, v_r - X}\right] \\
&\quad + \delta\left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right) \\
&= \sum_{\substack{(i,j) \in [0;r]^2 \\ i \leq j}} \mathcal{Zig}\left(\frac{u_1, \dots, u_i}{v_1 - v_{i+1}, \dots, v_i - v_{i+1}}\right) \\
&\quad \times \text{Qig}\left(\frac{u_1 + \dots + u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{j-1}, u_j + \dots + u_r}{v_{i+1} - X, v_{i+2} - X, \dots, v_{j-1} - X, v_j - X}\right) \\
&\quad \times \mathcal{Zig}_-\left(\frac{u_{j+1}, \dots, u_r}{v_{j+1} - v_j, \dots, v_r - v_j}\right) \\
&\quad + \delta\left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right) \\
&= \sum_{\substack{(i,j) \in [0;r]^2 \\ i \leq j}} \mathcal{Zig}\left(\frac{u_1, \dots, u_i}{v_1 - v_{i+1}, \dots, v_i - v_{i+1}}\right) \\
&\quad \times \text{Qig}\left(\frac{u_1 + \dots + u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{j-1}, u_j + \dots + u_r}{v_{i+1} - X, v_{i+2} - X, \dots, v_{j-1} - X, v_j - X}\right) \\
&\quad \times \mathcal{Zig}_-\left(\frac{u_{j+1}, \dots, u_r}{v_{j+1} - v_j, \dots, v_r - v_j}\right) \\
&\quad + \delta\left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right) \\
&= \delta\left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right) + \sum_{\substack{(\mathbf{u}^1) \cdot (\mathbf{u}^2) \cdot (\mathbf{u}^3) = (\mathbf{u}) \\ \delta\left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right)}} \mathcal{Zig}\left(\frac{\mathbf{u}^1}{\mathbf{v}^1}\right) \Big|_{(X)} \text{Qig}\left[\frac{\mathbf{u}^2}{\mathbf{v}^2}\right] \Big|_{(X)} \mathcal{Zig}_-\left[\frac{\mathbf{u}^3}{\mathbf{v}^3}\right] \Big|_{(X)}.
\end{aligned}$$

□

5 Calcul de quelques multitangentes particulières.

Avant d'effectuer des calculs de multitangentes, rappelons que si $\underline{\alpha}$ est une séquence quelconque alors $\underline{\alpha}^{[r]}$ désignera la séquence $\underbrace{\underline{\alpha} \cdot \dots \cdot \underline{\alpha}}_{r \text{ fois}}$, où la séquence $\underline{\alpha}$ est concaténée à elle-même k fois. En particulier, la notation $n^{[k]}$, désormais classique, désigne la séquence $(n; \dots; n)$, où l'entier n est répété k fois.

5.1 Calcul de $\mathcal{T}e^{1^{[r]}}(z)$ pour $r \in \mathbb{N}$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\text{Te}^{1^{[r]}}(z)$ est le terme constant de $\text{Tig}^{Y_1, \dots, Y_r}$, d'où :

$$\text{Te}^{1^{[r]}}(X) = \begin{cases} \frac{(i\pi)^r}{r!}, & \text{si } r \in 2\mathbb{Z} \\ 0, & \text{si } r \notin 2\mathbb{Z} \end{cases} + \left(\sum_{k=0}^{r-1} \mathcal{Zig}^{0^{[k]}} \mathcal{Zig}_-^{0^{[r-1-k]}} \right) \text{Te}^1(X).$$

Il nous reste à calculer $\sum_{k=0}^n \mathcal{Z}ig^{0[k]} \mathcal{Z}ig_-^{0[n-k]}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Pour cela, calculons le produit $\mathcal{Z}_+ \mathcal{Z}_-$, puis développons le en série formelle, où :

$$\begin{cases} \mathcal{Z}_+ = \sum_{n \geq 0} \mathcal{Z}ig^{0[n]} X^n = \sum_{n \geq 0} \mathcal{Z}e^{1[n]} X^n . \\ \mathcal{Z}_- = \sum_{n \geq 0} \mathcal{Z}ig_-^{0[n]} X^n = \sum_{n \geq 0} \mathcal{Z}e_-^{1[n]} X^n . \end{cases}$$

Les moules $\mathcal{Z}e^\bullet$ et $\mathcal{Z}e_-^\bullet$ étant symétr_els, on obtient automatiquement les équations différentielles (cf. la propriété 4 de la page 148) :

$$\begin{cases} D\mathcal{Z}_+ = \mathcal{Z}_+ \times \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n \mathcal{Z}e^{n+1} X^n \right) = \mathcal{Z}_+ \text{He}_+^1 . \\ D\mathcal{Z}_- = \mathcal{Z}_- \times \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n \mathcal{Z}e_-^{n+1} X^n \right) = \mathcal{Z}_- \text{He}_-^1 . \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } D(\mathcal{Z}_+ \mathcal{Z}_-) = \mathcal{Z}_+ \text{He}_+^1(X) \mathcal{Z}_- + \mathcal{Z}_+ \text{He}_-^1(X) \mathcal{Z}_- = \mathcal{Z}_+ \mathcal{Z}_- (\text{He}_+^1 + \text{He}_-^1)$$

$$= -2\mathcal{Z}_+ \mathcal{Z}_- \left(\sum_{n \geq 0} \mathcal{Z}e^{2n+2} X^{2n+1} \right) = -2\mathcal{Z}_+ \mathcal{Z}_- \left(\sum_{n \geq 1} \mathcal{Z}e^{2n} X^{2n-1} \right) .$$

D'où, en notant Exp l'exponentielle formelle :

$$\mathcal{Z}_+ \mathcal{Z}_- = \text{Exp} \left(- \sum_{n \geq 1} \frac{\mathcal{Z}e^{2n}}{n} X^{2n} \right) .$$

$$\text{Par ailleurs, dans } \mathbb{C}((X)) : \text{He}_+^1(X) + \text{He}_-^1(X) = \text{Te}^1(X) - X^{-1} = \pi \frac{\cos(\pi X)}{\sin(\pi X)} - \frac{1}{X} .$$

En fait, cette relation est dans $\mathbb{C}[X]$, d'où : $\text{He}_+^1(X) + \text{He}_-^1(X) = D \left(\text{Log} \left(\frac{\sin(\pi X)}{\pi X} \right) \right)$; ce qui se traduit immédiatement par :

$$\mathcal{Z}_+ \mathcal{Z}_- = \text{Exp} \left(- \sum_{n \geq 1} \frac{\mathcal{Z}e^{2n}}{n} X^{2n} \right) = \frac{\sin(\pi X)}{\pi X} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(\pi X)^{2n}}{(2n+1)!} .$$

Finalement, on obtient :

$$\text{Te}^{1[r]}(X) = \begin{cases} \frac{(i\pi)^r}{r!} , & \text{si } r \in 2\mathbb{Z} \\ 0 , & \text{si } r \notin 2\mathbb{Z} \end{cases} + \begin{cases} 0 , & \text{si } r \in 2\mathbb{Z} \\ \frac{(i\pi)^{r-1}}{(2r-1)!} , & \text{si } r \notin 2\mathbb{Z} \end{cases} \times \text{Te}^1(X)$$

D'où l'égalité analytique :

$$\forall r \in \mathbb{N} , \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z} , \mathcal{T}e^{1[r]}(z) = \begin{cases} (-1)^p \frac{\pi^{2p}}{(2p)!} , & \text{si } r = 2p . \\ (-1)^p \frac{\pi^{2p}}{(2p+1)!} \mathcal{T}e^1(z) , & \text{si } r = 2p + 1 . \end{cases}$$

5.2 Calcul de $\mathcal{T}e^{n^{[k]}}(z)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.

Nous allons calculer les multitangentes de la forme $\mathcal{T}e^{n^{[k]}}(z)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, en fonction des monotangentes et des multizêtas en établissant la propriété suivante :

Propriété 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.

Notons aussi E , la fonction partie entière et définissons les fonctions $t_{k,n}$ pour $(k; n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, t_{k,n}(x) = \begin{cases} \cos^{(n-1)}(x) & , \text{ si } k \text{ est impair.} \\ \sin^{(n-1)}(x) & , \text{ si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

Considérons les moules sg^\bullet , e^\bullet , s^\bullet à valeurs dans \mathbb{C} et définis sur l'alphabet $\Omega = \{1; -1\}$ pour tout $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n) \in \Omega^*$ par :

$$sg^{\underline{\varepsilon}} = \prod_{k=1}^n \varepsilon_k, \quad s^{\underline{\varepsilon}} = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k, \quad e^{\underline{\varepsilon}} = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k e^{(2k-1)\frac{i\pi}{n}}.$$

Alors, pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, on a :

$$\mathcal{T}e^{n^{[k]}}(z) = \frac{(-1)^{n-1+E(\frac{kn+1}{2})} \pi^{kn}}{(kn)!(2 \sin(\pi z))^n} \sum_{\underline{\varepsilon}=(\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n) \in \Omega^n} sg^{\underline{\varepsilon}} (e^{\underline{\varepsilon}})^{kn} t_{kn,n}(s^{\underline{\varepsilon}} \pi z).$$

Pour démontrer cela, nous allons utiliser une théorie élémentaire des séries formelles à une indéterminée. Le point central est l'utilisation du lemme suivant. Celui-ci donne une équation différentielle formelle satisfaite automatiquement par la série génératrice de la famille de multitangentes que l'on cherche à calculer. Il ne restera alors plus qu'à effectuer un nouveau développement en série formelle des solutions de cette équation.

5.2.1 Une propriété liant symétréité et équation différentielle formelle.

Propriété 5 : Considérons une algèbre commutative \mathbb{A} , un semi-groupe $(\Omega; +)$ et un moule symétréel $Se^\bullet \in \mathcal{M}_{\mathbb{A}}^{\bullet}(\Omega)$.

Notons, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$F_{\omega} = \sum_{p=0}^{+\infty} Se^{\omega^{[p]}} X^p, \quad G_{\omega} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p Se^{(p+1)\omega} X^p.$$

Etant donné $\omega \in \Omega$, la série formelle F_{ω} vérifie l'équation différentielle :

$$DY = YG_{\omega}.$$

La démonstration de cette propriété repose sur l'algorithme de rejet à droite des $\omega \in \Omega$ commençant la séquence d'évaluation du moule Se^\bullet ; elle repose donc sur la notion même

de symétréilité. Cet algorithme se traduit récursivement par la formule :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega, \text{Se}^{\omega^{[p]}} \text{Se}^\omega = (p+1) \text{Se}^{\omega^{[p+1]}} + \sum_{k=0}^{p-1} \text{Se}^{\omega^{[k]}, 2\omega, \omega^{[p-k-1]}} .$$

Démonstration : Fixons $\omega \in \Omega$ et définissons $u_{p,l}$ pour $(p;l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ par :

$$u_{p,l} = (-1)^l \sum_{k=0}^p \text{Se}^{\omega^{[k]}, l\omega, \omega^{[p-k]}} .$$

Alors, par symétréilité, pour $(p;l) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a :

$$\begin{aligned} (-1)^l \text{Se}^{\omega^{[p]}} \text{Se}^{l\omega} &= (-1)^l \sum_{k=0}^p \text{Se}^{\omega^{[k]}, l\omega, \omega^{[p-k]}} - (-1)^{l+1} \sum_{k=0}^{p-1} \text{Se}^{\omega^{[k]}, (l+1)\omega, \omega^{[p-1-k]}} \\ &= u_{p,l} - u_{p-1,l+1} . \end{aligned}$$

Cela implique, pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{p-1} (-1)^l \text{Se}^{\omega^{[p-l]}} \text{Se}^{(l+1)\omega} &= - \sum_{l=1}^p (-1)^l \text{Se}^{\omega^{[p+1-l]}} \text{Se}^{l\omega} \\ &= - \sum_{l=1}^p (u_{p-(l+1),l} - u_{p-l,l+1}) \\ &= u_{0,p+1} - u_{p,1} \\ &= (-1)^{p+1} \text{Se}^{(p+1)\omega} + (p+1) \text{Se}^{\omega^{[p+1]}} . \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \forall p \in \mathbb{N}^*, (p+1) \text{Se}^{\omega^{[p+1]}} = \sum_{l=0}^p (-1)^l \text{Se}^{\omega^{[p-1]}} \text{Se}^{(l+1)\omega} .$$

Puisque l'égalité précédente est aussi vraie pour $p = 0$, cela se traduit par l'égalité entre séries formelles :

$$D\text{F}_\omega = \text{F}_\omega \text{G}_\omega .$$

□

En utilisant le fait que deux séries formelles ayant même dérivée formelle ne diffèrent que par leur terme constant, il n'est pas difficile de voir que, si \mathbb{A} est un anneau et si $\varphi \in \mathbb{A}[[X]]$, alors les séries formelles vérifiant $DY = YD\varphi$ sont définies par :

$$Y(X) = C \text{Exp}(\varphi(X) - \varphi(0)), \quad C \in \mathbb{A} .$$

Ici, Exp désigne la série formelle de l'exponentielle. La résolution d'une telle équation différentielle se ramène donc à un problème d'expression de primitive formelle. La constante C est déterminée comme étant le terme constant de Y .

Comme conséquence élémentaire, remarquons que ce lemme donne une démonstration de la relation :

$$\sum_{r \geq 0} \mathcal{Z} e^{1[r]} X^r = \text{Exp} \left(\sum_{r \geq 1} (-1)^{r-1} \frac{\mathcal{Z} e^r}{r} X^r \right) .$$

En effet, comme nous l'avons déjà annoncé lors du calcul de $\text{Te}^{1,\dots,1}(X)$ (cf. p. 146), par symétrélicité de $\mathcal{Z}e^\bullet$, la série formelle $\mathcal{Z}_+ = \sum_{r \geq 0} \mathcal{Z}e^{1[r]}X^r$ vérifie l'équation différentielle formelle :

$$D\mathcal{Z}_+ = \mathcal{Z}_+ \left(\sum_{p \geq 0} (-1)^p \mathcal{Z}e^{p+1}X^p \right) = \mathcal{Z}_+ \text{He}_+^1 .$$

5.2.2 Application au moule $\text{Te}^\bullet(X)$.

Rappelons que le moule $\text{Te}^\bullet(X)$ a été prolongé de manière symétrélice à $(\mathbb{N}^*)^*$ à la section précédente. Ainsi, le lemme précédent s'applique : si l'on note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \text{Te}^{n[p]}(X)Y^p$ et $U_n = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \text{Te}^{n(p+1)}(X)Y^p$, on a alors dans $\mathbb{C}((X))[[Y]]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, DT_n = T_n U_n .$$

Il s'agit donc de pouvoir exprimer simplement une primitive formelle de U_n pour pouvoir calculer $\text{Te}^{n[p]}(X)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Pour cela, considérons $V_n \in \mathbb{C}((X))[[Y]]$ définie par $V_n(X; Y) = U_n(X; Y^n)$. Une permutation des symboles de sommes des séries formelles (à priori non licite dans l'anneau des séries formelles...), suivie d'une décomposition en éléments simples, suggèrent que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, nY^{n-1}V_n(X; Y) = - \sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)\frac{i\pi}{n}} \text{Te}^1 \left(X - e^{(2k+1)\frac{i\pi}{n}} Y \right) .$$

Rappelons qu'ici S et $D_{(Y)}$ désignent respectivement la prise de terme constant et la dérivée formelle par rapport à l'indéterminée. La formule de Taylor formelle permet alors effectivement de démontrer cette relation dans l'anneau des séries formelles $\mathbb{C}((X))[[Y]]$. Si $l \in \mathbb{N}$ et si W_n désigne le membre de droite de l'égalité précédente, on a successivement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{l!} S(D_{(Y)}^l W_n) &= S \left(- \sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)(l+1)\frac{i\pi}{n}} \text{Te}^{l+1} \left(X - e^{(2k+1)\frac{i\pi}{n}} Y \right) \right) \\ &= - \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)(l+1)\frac{i\pi}{n}} \right) \text{Te}^{l+1}(X) \\ &= \begin{cases} 0 & , \text{ si } l+1 \not\equiv 0[n] . \\ n(-1)^{q+1} \text{Te}^{qn}(X) & , \text{ si } l+1 = qn . \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } W_n &= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{l!} S(D_{(Y)}^l W_n) Y^l = \sum_{q=1}^{+\infty} n(-1)^{q+1} \text{Te}^{qn}(X) Y^{qn-1} \\ &= nY^{n-1} \sum_{q=0}^{+\infty} (-1)^q \text{Te}^{n(q+1)}(X) Y^{qn} \\ &= nY^{n-1} V_n(X; Y) . \end{aligned}$$

$$\text{Dans } \mathbb{C}((X))[[Y]], \text{ on a donc : } nY^{n-1}V_n(X; Y) = - \sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)\frac{i\pi}{n}} \text{Te}^1 \left(X - e^{(2k+1)\frac{i\pi}{n}} Y \right) .$$

Le morphisme d'anneau $\varphi_n : \mathbb{C}((X))[[Y]] \longrightarrow \mathbb{C}((X))[[Y^{1/n}]]$ défini par $\varphi_n(Y) = Y^{1/n}$ est continu pour la topologie de la convergence formelle ; on constate alors que si P est un polynôme sur $\mathbb{C}((X))$, alors $\varphi(P(X+Y)) = P(X+Y^{1/n})$. Ceci s'étend aux séries formelles de $\mathbb{C}((X))[[Y]]$, par continuité de φ_n et densité des polynômes.

Transposée dans $\mathbb{C}((X))[[Y^{1/n}]]$ à l'aide du morphisme φ_n , la relation calculant $V_n(X; Y)$ devient alors dans $\mathbb{C}((X))((Y^{1/n})) \simeq \mathbb{C}((X; Y^{1/n}))$:

$$U_n(X; Y) = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)\frac{i\pi}{n}} \text{Te}^1 \left(X - e^{(2k+1)\frac{i\pi}{n}} Y^{\frac{1}{n}} \right) Y^{\frac{1}{n}-1} .$$

A priori, cette dernière égalité est dans $\mathbb{C}((X; Y^{1/n}))$, alors que par définition même, $U_n \in \mathbb{C}((X))[[Y]]$. Nous pouvons donc raisonner composante par composante dans l'anneau $\mathbb{C}((X))[[Y]]$, les éventuels termes créés s'annulant puisque

$$\text{Te}^1 \left(X - e^{(2k+1)\frac{i\pi}{n}} Y^{\frac{1}{n}} \right) Y^{\frac{1}{n}-1} \in \mathbb{C}((X; Y^{1/n})) .$$

Pour d'exprimer T_n en utilisant la formule générale de résolution d'une équation différentielle formelle linéaire du premier ordre, il nous suffit de déterminer l'exponentielle de la primitive (en Y), sans terme constant, de $\omega \text{Te}^1(X + \omega Y)$ dans $\mathbb{C}((X))[[Y]]$ (en fait, à priori, dans $\mathbb{C}((X; Y))$...)

Pour cela, rappelons que nous avons démontré, page 131, dans $\mathbb{C}[[X]]((Y))$, la relation $\text{Te}^1(X + Y) = \frac{\pi}{\tan(\pi X + \pi Y)}$. Alors, pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \text{Te}^1(X + \omega Y) \in \mathbb{C}((X))[[Y]]$. Ainsi, la primitive en Y de $\omega \text{Te}^1(X + \omega Y)$, pour $\omega \in \mathbb{C}$, sans terme constant, est donnée par $\text{Log} \left(\frac{\sin(\pi(X + \omega Y))}{\sin(\pi X)} \right)$. De même, dans $\mathbb{C}((X))[[Y^{\frac{1}{n}}]]$, la primitive en Y sans terme constant de $\frac{\omega}{n} \text{Te}^1 \left(X + \omega Y^{\frac{1}{n}} \right) Y^{\frac{1}{n}-1}$ est $\text{Log} \left(\frac{\sin(\pi(X + \omega Y^{\frac{1}{n}}))}{\sin(\pi X)} \right)$. Ainsi, par intégration de l'équation différentielle formelle dans $\mathbb{C}((X))[[Y^{1/n}]]$, on en déduit alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \text{Te}^{n[p]}(X) Y^p = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \sin \left(\pi \left(X - e^{(2k+1)\frac{i\pi}{n}} Y^{\frac{1}{n}} \right) \right)}{\sin^n(\pi X)} .$$

Insistons sur le fait que, bien qu'ayant l'air d'être une relation dans $\mathbb{C}((X))[[Y^{1/n}]]$, à priori, cette égalité est bien une égalité dans l'algèbre des séries formelles $\mathbb{C}((X))[[Y]]$, par définition de T_n .

5.2.3 Nouveau développement en série formelle de T_n .

Pour pouvoir calculer $\text{Te}^{n[p]}(X)$ pour $(n; p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, nous avons besoin de développer T_n en série formelle autrement que par sa série formelle de définition. Il s'agit donc de développer un produit de sinus.

Il n'est pas difficile de vérifier, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que dans $\mathbb{C}[[X_1; \dots; X_n]]$:

$$\prod_{k=1}^n \sin(X_k) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n) \in \{+1; -1\}^n} (-1)^{\#\{k \in [1; n] ; \varepsilon_k = -1\}} \sin^{(n-1)} \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k X_k \right) .$$

Considérons les moules sg^\bullet , e^\bullet , s^\bullet , à valeurs dans \mathbb{C} et définis pour toute séquence $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n) \in \Omega^*$ de l'alphabet $\Omega = \{1; -1\}$ par $sg^\underline{\varepsilon} = \prod_{k=1}^n \varepsilon_k = (-1)^{\#\{i \in [1; n] ; \varepsilon_i = -1\}}$,

$$s^\underline{\varepsilon} = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \text{ et } e^\underline{\varepsilon} = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k e^{(2k-1)\frac{i\pi}{n}}.$$

Notons aussi E la fonction partie entière et $t_{k,n}(X) = \begin{cases} \cos^{(n-1)}(X) & , \text{ si } k \text{ est impair} \\ \sin^{(n-1)}(X) & , \text{ si } k \text{ est pair} \end{cases}$ pour tout $(k; n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{(2 \sin(\pi X))^n} \sum_{\underline{\varepsilon}=(\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n) \in \Omega^n} sg^\underline{\varepsilon} \sin^{(n-1)} \left(s^\underline{\varepsilon} \pi X + e^\underline{\varepsilon} \pi Y \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(2 \sin(\pi X))^n} \sum_{\underline{\varepsilon}=(\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n) \in \Omega^n} \left(sg^\underline{\varepsilon} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{E(\frac{k+1}{2})} (e^\underline{\varepsilon} \pi)^k}{k!} t_{k,n}(s^\underline{\varepsilon} \pi X) Y \frac{k}{n} \right), \\ &\quad \text{car } \sin^{(n-1)}(X + Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{E(\frac{k+1}{2})}}{k!} t_{k,n}(X) Y^k \text{ dans } \mathbb{C}[[X; Y]] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1+E(\frac{k+1}{2})} \pi^{kn}}{k! (2 \sin(\pi X))^n} \sum_{\underline{\varepsilon}=(\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n) \in \Omega^n} sg^\underline{\varepsilon} (e^\underline{\varepsilon})^k t_{k,n}(s^\underline{\varepsilon} \pi X) Y \frac{k}{n} \right). \end{aligned}$$

Notons que la dernière somme provient du fait que Ω^n est un ensemble fini.

Comme nous l'avons déjà indiqué, à la fin du paragraphe précédent, on a, par définition même de T_n : $T_n \in \mathbb{C}((X))[[Y]]$. Cela impose la nullité des coefficients de $Y \frac{k}{n}$ si $n \nmid k$ dans l'égalité précédente. Donc :

$$T_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1+E(\frac{kn+1}{2})} \pi^{kn}}{(kn)! (2 \sin(\pi X))^n} \sum_{\underline{\varepsilon}=(\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n) \in \Omega^n} sg^\underline{\varepsilon} (e^\underline{\varepsilon})^{kn} t_{kn,n}(s^\underline{\varepsilon} \pi X) Y^k \right).$$

Ainsi, nous avons bien l'égalité formelle annoncée dans l'énoncé de la propriété (cf. p. 153) que nous démontrons actuellement :

$$\forall (n; k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \quad T e^{n[k]} = \frac{(-1)^{n-1+E(\frac{kn+1}{2})} \pi^{kn}}{(kn)! (2 \sin(\pi X))^n} \sum_{\underline{\varepsilon}=(\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n) \in \Omega^n} sg^\underline{\varepsilon} (e^\underline{\varepsilon})^{kn} t_{kn,n}(s^\underline{\varepsilon} \pi X).$$

Pour conclure ce calcul, il ne nous reste plus qu'à justifier le passage du formel à l'analytique. Cela est clair, car chaque multitangente (convergente ou non) est une série de Laurent en 0, donnée exactement par l'expression de la multitangente formelle associée. Dans l'égalité coefficients par coefficients tout juste obtenue, on peut donc remplacer, les majuscules droites par des majuscules cursives afin d'obtenir la propriété voulue :

Propriété 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.

Notons aussi E , la fonction partie entière et définissons les fonctions $t_{k,n}$ pour $(k; n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, t_{k,n}(x) = \begin{cases} \cos^{(n-1)}(x) & , \text{ si } k \text{ est impair.} \\ \sin^{(n-1)}(x) & , \text{ si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

Considérons les moules sg^\bullet , e^\bullet , s^\bullet à valeurs dans \mathbb{C} et définis sur l'alphabet $\Omega = \{1; -1\}$ pour tout $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n) \in \Omega^\bullet$ par :

$$sg^{\underline{\varepsilon}} = \prod_{k=1}^n \varepsilon_k, \quad s^{\underline{\varepsilon}} = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k, \quad e^{\underline{\varepsilon}} = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k e^{(2k-1)\frac{i\pi}{n}}.$$

Alors, pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, on a :

$$\mathcal{T}e^{n[k]}(z) = \frac{(-1)^{n-1+E(\frac{kn+1}{2})}\pi^{kn}}{(kn)!(2\sin(\pi z))^n} \sum_{\underline{\varepsilon}=(\varepsilon_1;\dots;\varepsilon_n) \in \Omega^n} sg^{\underline{\varepsilon}} (e^{\underline{\varepsilon}})^{kn} t_{kn,n}(s^{\underline{\varepsilon}}\pi z).$$

5.2.4 Quelques exemples.

1. Pour $n = 1$, ce résultat donne, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{T}e^{1[k]}(z) = \frac{(-1)^{E(\frac{k+1}{2})}\pi^k}{2 k! \sin(\pi z)} ((-1)^k t_{k,1}(\pi z) - t_{k,1}(-\pi z)).$$

En distinguant la parité de k et en utilisant le fait que $\mathcal{T}e^1(z) = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}$, cela permet de retrouver (cf. p. 146) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \mathcal{T}e^{1[k]}(z) = \begin{cases} \frac{(-1)^p \pi^{2p}}{(2p)!} & , \text{ si } k = 2p. \\ \frac{(-1)^p \pi^{2p}}{(2p+1)!} \mathcal{T}e^1(z) & , \text{ si } k = 2p+1. \end{cases}$$

2. De même, pour $n = 2$, sachant que $\mathcal{T}e^2(z) = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$, ce résultat donne, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{T}e^{2[k]}(z) = \frac{(-1)^{k+1}\pi^{2n}}{(2k)!(2\sin(\pi z))^2} (-(-2i)^{2k} t_{2k,2}(0) - (2i)^{2k} t_{2k,2}(0)),$$

c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \mathcal{T}e^{2[k]}(z) = \frac{2^{2k-1}\pi^{2k-2}}{(2k)!} \mathcal{T}e^2(z).$$

3. L'annexe D donne d'autres résultats explicites provenant de cette propriété.

5.2.5 Un calcul de multizêtas.

On peut noter que la réduction en monotangentes entraîne l'égalité :

$$\mathcal{T}e^{2[p]} = \left(\sum_{i=1}^p \mathcal{Z}e^{2[p-i]} \mathcal{Z}e^{2[i-1]} \right) \mathcal{T}e^2(z) . \quad (54)$$

En notant $\mathcal{Z}_2 = \sum_{p \geq 0} \mathcal{Z}e^{2[p]} X^p$ et $\mathcal{T}_2(z) = \sum_{p \geq 0} \mathcal{T}e^{2[p]}(z) X^p$, l'égalité (54) se traduit par une autre égalité entre séries formelles de $\mathbb{C}[[X]]$:

$$\mathcal{T}_2(z) = 1 + X \mathcal{Z}_2^2 \mathcal{T}e^2(z) . \quad (55)$$

D'un autre côté, le calcul précédent de $\mathcal{T}e^{2[p]}$ permet d'écrire dans $\mathbb{C}[[\sqrt{X}]]$:

$$\mathcal{T}_2(z) = 1 + \left(\sum_{k \geq 1} \frac{2^{2k-1} \pi^{2k-2}}{(2k)!} X^k \right) \mathcal{T}e^2(z) = 1 + \frac{\text{ch}(2\pi\sqrt{X}) - 1}{2\pi^2} \mathcal{T}e^2(z) .$$

D'où :

$$\mathcal{T}_2(z) = 1 + \frac{\text{sh}^2(\pi\sqrt{X})}{\pi^2} \mathcal{T}e^2(z) . \quad (56)$$

En égalant les relations (55) et (56), on obtient alors immédiatement :

$$\mathcal{Z}_2 = \frac{\text{sh}^2(\pi\sqrt{X})}{\pi\sqrt{X}} .$$

Ainsi, le calcul de $\mathcal{T}e^{2[p]}$, $p \in \mathbb{N}$, permet de retrouver les valeurs des multizêtas $\mathcal{Z}e^{2[p]}$. Malheureusement, la situation ne semble pas se généraliser simplement pour les autres multizêtas...

5.3 Des multitangentes nulles.

1. Il existe des multitangentes convergentes qui sont nulles (cf. annexe 1). La première d'entre elles est $\mathcal{T}e^{2,1,2}$. C'est très simple à voir : la réduction en monotangente impose à $\mathcal{T}e^{2,1,2}$ d'être \mathbb{C} -liée à $\mathcal{T}e^2$, donc d'être paire ; pourtant, la propriété de parité nous indique que $\mathcal{T}e^{2,1,2}$ est aussi une fonction impaire. Nécessairement, la multitangente $\mathcal{T}e^{2,1,2}$ est donc nulle.

Le même raisonnement permet d'énoncer le lemme suivant :

Lemme 12 : Soit $\underline{s} \in \mathcal{S}^* \cap \{1;2\}^*$, symétrique (i.e. $\overleftarrow{\underline{s}} = \underline{s}$), de poids impair et de longueur supérieure à 2.
Alors, $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ est identiquement nulle.

2. Au regard des calculs de multitangentes convergentes effectués jusqu'au poids 14, il semble que la réciproque soit vraie :

Conjecture 1 : *Caractérisation des multitangentes nulles.*

Les multitangentes convergentes identiquement égales à zéro sont exactement les multitangentes $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ avec $\underline{s} \in \mathcal{S}^* \cap \{1; 2\}^*$, symétrique, de poids impair et de longueur supérieure à 2.

Nous verrons, à la page 187, que cette conjecture est vraie en longueur 3 et qu'on pourrait l'étudier en toute généralité selon le programme suivant (avec les notations introduites au paragraphe 9.3.1) :

1. \underline{s} est symétrique (en montrant successivement que si $s_i = m_k$, alors $s_{r+1-i} = m_k$, où $m_1 > \dots > m_p$ est la suite décroissante des valeurs que prends la séquence \underline{s}) .
2. $m_1 = 2$.
3. $\|\underline{s}\| \notin 2\mathbb{N}$.

3. Notons que les composantes paires d'une multitangente impaire sont naturellement nulles ; de même, les composantes impaires d'une multitangente paire sont elles aussi naturellement nulles. Il est alors intéressant de se poser la question suivante : “ Si $\overleftarrow{\underline{s}} = \underline{s}$, peut-il y avoir une composante $\mathcal{T}e^k$, $k \in \llbracket 2; \max(s_1; \dots; s_r) \rrbracket$, qui n'apparaisse pas dans la réduction en monotangentes de $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$?”

Il semble que la réponse soit non, sauf si la multitangente qui ne contient pas cette composante est paire ou impaire.

Une autre question est aussi : “ Si $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ est paire ou impaire, a-t-on nécessairement $\overleftarrow{\underline{s}} = \underline{s}$?” Il semble cette fois-ci que la réponse soit oui. La réciproque est d'ores et déjà acquise, d'après la propriété de parité.

Cela se synthétise en la conjecture suivante (qui implique évidemment la précédente) :

Conjecture 1' : *Caractérisation des multitangentes paires ou impaires.*

Soit $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$.

1. Si la composante $\mathcal{T}e^k$, $k \in \llbracket 2; \max(s_1; \dots; s_r) \rrbracket$, n'apparaît pas dans la réduction en monotangentes de $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$, alors $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ est de même parité que k (et donc éventuellement nulle) .
2. La multitangente $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ est paire ou impaire si et seulement si $\overleftarrow{\underline{s}} = \underline{s}$.

5.4 Quelques calculs de multitangentes particulières.

La réduction des multitangentes convergentes en monotangentes (cf. §3.2) permet aussi d'effectuer quelques calculs explicites de multitangentes. Pour mémoire, rappelons cette réduction (cf. p. 121) :

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S}^*, \quad \mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) = \sum_{i=1}^{l(\underline{s})} \sum_{k=2}^{s_i} \mathcal{Z}_{i, s_i - k}^{\underline{s}} \mathcal{T}e^k(z) .$$

On a noté ici :

$${}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}} = \left(\prod_{l=1}^{i-1} (-1)^{k_l} \right) \left(\prod_{l=i+1}^r (-1)^{s_l} \right) \left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^r \binom{s_l + k_l - 1}{s_l - 1} \right).$$

$$\mathcal{Z}_{i,k}^{\underline{s}} = \sum_{\substack{k_j \geq 0, j \neq i \\ \sum_{j \neq i} k_j = k}} {}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}} \mathcal{Z} e^{s_r + k_r, \dots, s_{i+1} + k_{i+1}} \mathcal{Z} e^{s_1 + k_1, \dots, s_{i-1} + k_{i-1}}.$$

Pour pouvoir appliquer cette réduction simplement, voici quelques remarques élémentaires :

1. Seuls les indices i vérifiant $s_i \geq 2$ apportent une contribution à l'expression de la réduction.
2. Si $\underline{s} \in \mathcal{S}^* \cap \{1; 2; 3\}^*$ est symétrique (ie $\overleftarrow{\underline{s}} = \underline{s}$) de poids pair, seule la monotangente $\mathcal{T}e^2$ entre en compte ; cela veut dire que seuls les indices $k = s_i - 2$ apportent une contribution à la réduction.
3. Si $\underline{s} \in \mathcal{S}^* \cap \{1; 2; 3\}^*$ est symétrique de poids impair, seule la monotangente $\mathcal{T}e^3$ entre en compte ; cela veut dire que seuls les indices $k = s_i - 3$ apportent une contribution à la réduction.

5.4.1 Calcul de $\mathcal{T}e^{2,1^{[p]},2}$, pour $p \in \mathbb{N}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la séquence $(2; 1^{[p]}; 2)$ est symétrique avec un poids de même parité que p . Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}e^{2,1^{[p]},2}(z) &= \left(\mathcal{Z}_{1,0}^{2,1^{[p]},2} + \mathcal{Z}_{p+2,0}^{2,1^{[p]},2} \right) \mathcal{T}e^2(z) = \left({}^1 E_{0,\dots,0}^{2,1^{[p]},2} + {}^{p+2} E_{0,\dots,0}^{2,1^{[p]},2} \right) \mathcal{Z} e^{2,1^{[p]}} \mathcal{T}e^2(z) \\ &= (1 + (-1)^p) \mathcal{Z} e^{2,1^{[p]}} \mathcal{T}e^2(z). \end{aligned}$$

Or, le théorème de dualité sur les multizêtas impose $\mathcal{Z} e^{2,1^{[p]}} = \mathcal{Z} e^{p+2}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Donc :

Lemme 13 : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}e^{2,1^{[p]},2} = (1 + (-1)^p) \mathcal{Z} e^{p+2} \mathcal{T}e^2$.

On retrouve en particulier que $\mathcal{T}e^{2,1^{[p]},2}$ est nulle lorsque p est impair. En procédant de même, on obtient :

Lemme 14 : Pour tout $(p; q) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$\mathcal{T}e^{2,1^{[p]},2,1^{[q]},2} = \left((-1)^{p+q} \mathcal{Z} e^{p+2,q+2} + (-1)^q \mathcal{Z} e^{p+2} \mathcal{Z} e^{q+2} + \mathcal{Z} e^{q+2,p+2} \right) \mathcal{T}e^2.$$

5.4.2 Calcul de $\mathcal{T}e^{2,1^{[p]},3,1^{[p]},2}$, pour $p \in \mathbb{N}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la séquence $(2; 1^{[p]}; 3; 1^{[p]}; 2)$ est symétrique de poids impair.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } \mathcal{T}e^{2,1^{[p]},3,1^{[p]},2}(z) &= \mathcal{Z}_{p+2,0}^{2,1^{[p]},3,1^{[p]},2} \mathcal{T}e^3(z) = {}^{p+2} E_{0,\dots,0}^{\underline{s}} (\mathcal{Z} e^{2,1^{[p]}})^2 \mathcal{T}e^3(z) \\ &= (-1)^p (\mathcal{Z} e^{p+2})^2 \mathcal{T}e^3(z). \end{aligned}$$

Donc :

Lemme 15 : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}e^{2,1^{[p]},3,1^{[p]},2} = (-1)^p (\mathcal{Z} e^{p+2})^2 \mathcal{T}e^3$.

5.4.3 Calcul de $\mathcal{T}e^{3,1^{[2p+1]},3}$, pour $p \in \mathbb{N}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la séquence $(3; 1^{[2p+1]}; 3)$ est symétrique de poids impair. Ainsi : $\mathcal{T}e^{3,1^{[2p+1]},3}(z) = \left(\mathcal{Z}_{1,0}^{3,1^{[2p+1]},3} + \mathcal{Z}_{2p+3,0}^{3,1^{[2p+1]},3} \right) \mathcal{T}e^3(z)$
 $= \left({}^1E_{0,\dots,0}^{3,1^{[2p+1]},3} + {}^{2p+3}E_{0,\dots,0}^{3,1^{[2p+1]},3} \right) \mathcal{Z}e^{3,1^{[p]}} \mathcal{T}e^3(z) = 2\mathcal{Z}e^{3,1^{[p]}} \mathcal{T}e^3(z)$.

Donc :

Lemme 16 : $\forall p \in \mathbb{N}, \mathcal{T}e^{3,1^{[2p+1]},3} = 2\mathcal{Z}e^{3,1^{[p]}} \mathcal{T}e^3$.

5.4.4 Calcul de $\mathcal{T}e^{\{3,1\}^{[p]},3}$, pour $p \in \mathbb{N}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la séquence³¹ $(\{3,1\}^{[p]}, 3)$ est symétrique de poids impair. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}e^{\{3,1\}^{[p]},3}(z) &= \sum_{i=0}^p \mathcal{Z}_{2i+1,0}^{\{3,1\}^{[p]},3} \mathcal{T}e^3(z) = \sum_{i=0}^p {}^{2i+1}E_{0,\dots,0}^{\{3,1\}^{[p]},3} \mathcal{Z}e^{s_{2p+1}, \dots, s_{2i+2}} \mathcal{Z}e^{s_1, \dots, s_{2i}} \mathcal{T}e^3(z) \\ &= \sum_{i=0}^p \mathcal{Z}e^{\{3,1\}^{p-i}} \mathcal{Z}e^{\{3,1\}^i} \mathcal{T}e^3(z). \end{aligned}$$

En considérant les séries formelles $\mathcal{T} = \sum_{p=0}^{+\infty} \mathcal{T}e^{\{3,1\}^{[p]},3}(z) X^{4p}$ et $\mathcal{Z} = \sum_{p=0}^{+\infty} \mathcal{Z}e^{\{3,1\}^{[p]}} X^{4p}$,

la dernière relation s'écrit alors plus simplement : $\mathcal{T} = \mathcal{Z}^2 \mathcal{T}e^3(z)$.

L'égalité $\mathcal{Z}e^{\{3,1\}^p} = \frac{2\pi^{4p}}{(4p+2)!}$ se synthétise en $\mathcal{Z} = \frac{\text{ch}(\pi X) - \cos(\pi X)}{(\pi X)^2}$ (cf. [2], [3], [54]).

Un calcul élémentaire donne alors le développement en série formelle de \mathcal{Z}^2 , d'où :

Lemme 17 : $\forall p \in \mathbb{N}, \mathcal{T}e^{\{3,1\}^{[p]},3} = (2^{4p+4} - 2(-4)^{p+1}) \frac{\pi^{4p}}{(4p+4)!} \mathcal{T}e^3$.

5.4.5 Calcul de $\mathcal{T}e^{2,1^{[p]},3}$ et $\mathcal{T}e^{3,1^{[p]},2}$, pour $p \in \mathbb{N}$.

L'application à la séquence $(2; 1^{[p]}; 3)$ de la réduction en monotangentes donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}e^{2,1^{[p]},3}(z) &= \mathcal{Z}_{1,0}^{2,1^{[p]},3} \mathcal{T}e^{2,1^{[p]},3} + \mathcal{Z}_{p+2,1}^{2,1^{[p]},3} \mathcal{T}e^2(z) + \mathcal{Z}_{p+2,0}^{2,1^{[p]},3} \mathcal{T}e^3(z) \\ &= {}^1E_{0,\dots,0}^{2,1^{[p]},3} \mathcal{Z}e^{3,1^{[p]}} \mathcal{T}e^2(z) + \sum_{\substack{(k_1; \dots; k_{p+1}) \in \mathbb{N}^{p+1} \\ k_1 + \dots + k_{p+1} = 1}} {}^{p+2}E_{k_1, \dots, k_{p+1}}^{2,1^{[p]},3} \mathcal{Z}e^{((2,1^{[p]},3) + e_{\mathbf{k}})^{\leq p+1}} \mathcal{T}e^2(z) \\ &\quad + {}^{p+3}E_{0,\dots,0}^{2,1^{[p]},3} \mathcal{Z}e^{2,1^{[p]}} \mathcal{T}e^3(z) \\ &= (-1)^{p+3} \mathcal{Z}e^{3,1^{[p]}} \mathcal{T}e^2(z) - \sum_{j=1}^{p+1} s_j \mathcal{Z}e^{(2,1^{[p]}) + e_j} \mathcal{T}e^2(z) + \mathcal{Z}e^{2,1^{[p]}} \mathcal{T}e^3(z) \\ &= ((-1)^{p+1} - 1) \mathcal{Z}e^{3,1^{[p]}} \mathcal{T}e^2(z) - \left(\sum_{j=1}^{p+1} \mathcal{Z}e^{(2,1^{[p]}) + e_j} \right) \mathcal{T}e^2(z) + \mathcal{Z}e^{2,1^{[p]}} \mathcal{T}e^3(z). \end{aligned}$$

³¹ La séquence $(\{3,1\}^{[p]}, 3)$ désigne la concaténation des p répétition de $\{3,1\}$ avec la séquence 3. Par exemple, si $p = 2$, elle vaut $(3, 1, 3, 1, 3)$.

D'après le théorème de dualité sur les multizêtas, ainsi que les relations d'Ohno liant les multizêtas entres eux, on obtient :

$$\mathcal{T}e^{2,1^{[p]},3}(z) = - \left(((-1)^p + 1) \mathcal{Z}e^{p+2,1} + \mathcal{Z}e^{p+3} \right) \mathcal{T}e^2 + \mathcal{Z}e^{p+2} \mathcal{T}e^3 .$$

Enfin, la relation de parité permet d'écrire :

Lemme 18 : 1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathcal{T}e^{2,1^{[p]},3} = - \left(((-1)^p + 1) \mathcal{Z}e^{p+2,1} + \mathcal{Z}e^{p+3} \right) \mathcal{T}e^2 + \mathcal{Z}e^{p+2} \mathcal{T}e^3 .$$

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathcal{T}e^{3,1^{[p]},2} = \left(((-1)^p + 1) \mathcal{Z}e^{p+2,1} + (-1)^p \mathcal{Z}e^{p+3} \right) \mathcal{T}e^2 + (-1)^p \mathcal{Z}e^{p+2} \mathcal{T}e^3 .$$

6 Elimination des 1.

6.1 La conjecture.

Appelons valuation d'une séquence d'entiers, le plus petit des entiers la composant. En suivant [20], nous savons que tout nombre multizêta, même divergent, peut s'exprimer comme \mathbb{Q} -combinaison linéaire de multizêtas de valuation supérieure à 2, de même poids et de longueur possiblement moindre. De plus, cette écriture est unique aux relations de symétréilité près. Pour une démonstration, voir le récent article [?]. L'exemple le plus célèbre de telles relations est celui du à Euler : $\mathcal{Z}e^{2,1} = \mathcal{Z}e^3$.

Un tel résultat peut être qualifié de "nettoyage des 1".

Notons $\mathcal{S}_{\geq 2}^* = \{ \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^* ; \forall i \in [1; l(\underline{s})], s_i \geq 2 \} = (\mathbb{N}^* - \{1\})^*$.

Nous conjecturons un résultat similaire quant aux multitangentes. En notant $\mathcal{MTGF}_2 = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}_{\geq 2}^*}$, l'espace vectoriel des multitangentes convergentes de valuation supérieure à 2, et $\mathcal{MTGF}_{2,p} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}e^{\underline{s}})_{\substack{\underline{s} \in \mathcal{S}_{\geq 2}^* \\ \|\underline{s}\|=p}}$, le sous-espace vectoriel des multitangentes convergentes, de valuation supérieure à 2 et de poids p , cela s'écrit :

Conjecture 2 : Nettoyage des 1.

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S}^*, \mathcal{T}e^{\underline{s}} \in \mathcal{MTGF}_{2,\|\underline{s}\|} .$$

Par exemple, la multitangente convergente la plus simple non nettoyée et non nulle est $\mathcal{T}e^{2,1,3}$. Son nettoyage est donné par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}e^{2,1,3} &= \frac{1}{4} \mathcal{T}e^{4,2} - \frac{1}{4} \mathcal{T}e^{2,4} + \frac{1}{6} \mathcal{T}e^{3,3} \\ &= \frac{1}{4} \mathcal{T}e^{4,2} - \frac{1}{4} \mathcal{T}e^{2,4} - \frac{1}{4} \mathcal{T}e^{2,2,2} \\ &= \frac{1}{4} \mathcal{T}e^{4,2} - \frac{1}{4} \mathcal{T}e^{2,4} + \frac{1}{15} \mathcal{T}e^{3,3} - \frac{3}{20} \mathcal{T}e^{2,2,2} . \end{aligned}$$

Comme le montre cet exemple de nettoyage, il n'y a pas unicité de l'expression nettoyée. Cela est dû à la quantité de relations liant entre elles les multitangentes. Ici, il s'agit de la relation $3\mathcal{T}e^{2,2,2} + 2\mathcal{T}e^{3,3} = 0$, prototype d'une relation plus générale liant des multitangentes entre elles : $3\mathcal{T}e^{2^{[3k]}} + (-1)^k 2\mathcal{T}e^{3^{[2k]}} = 0$. Cette relation est obtenue immédiatement par les relations de réduction en monotangentes (cf. Annexe 2), ou encore, tout aussi simplement, par les calculs précédents de $\mathcal{T}e^{n^{[p]}}$ (cf. Annexe 4).

Pour d'autres exemples de nettoyage de multitangentes, nous renvoyons le lecteur au tableau de la page 247 .

6.2 Réduction de la conjecture.

1. La nouvelle conjecture. Rappelons que $\mathcal{S}_+^* = \{\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^* ; \underline{s} = \emptyset \text{ ou } s_1 \geq 2\}$. Voici une autre conjecture :

Conjecture 3 : $\forall \underline{\sigma} \in \mathcal{S}_+^* , \mathcal{Z}e^{\underline{\sigma}}\mathcal{T}e^2 \in \mathcal{MTGF}_{2, \|\underline{\sigma}\|+2}$.

Les conjectures 2 et 3 sont très probablement équivalentes. Ce qui est certain, et simple à montrer, est l'implication suivante. Elle va nous permettre de réduire sensiblement l'étude de la conjecture 2.

Propriété : La conjecture 3 entraîne la conjecture 2.

Démonstration : Soit $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$.

D'après la conjecture 3, on sait écrire chacun des termes de la forme $\mathcal{Z}e^{\underline{\sigma}}\mathcal{T}e^2$, $\underline{\sigma} \in \mathcal{S}_+^*$, dans \mathcal{MTGF}_2 .

La propriété de différentiabilité entraîne alors qu'on sait écrire chacun des termes de la forme $\mathcal{Z}e^{\underline{\sigma}}\mathcal{T}e^k$, $\underline{\sigma} \in \mathcal{S}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, dans \mathcal{MTGF}_2 .

Après linéarisation des multizêtas, la réduction en monotangentes de $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ s'écrit sous la forme (cf. p. 121) :

$$\mathcal{T}e^{\underline{s}} = \sum_{k=2}^{\max(s_1; \dots; s_r)} \left(\sum_i c_i \mathcal{Z}e^{\underline{\sigma}_{i,k}} \right) \mathcal{T}e^k , \text{ avec } \underline{\sigma}_{i,k} \in \mathcal{S}_+^* .$$

Elle permet donc d'écrire $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ comme \mathbb{Q} -combinaison linéaire de multitangentes de valuations supérieures à 2. □

2. Comment exprimer pratiquement $\mathcal{Z}e^{\underline{\sigma}}\mathcal{T}e^2$ dans $\mathcal{MTGF}_{2, \|\underline{\sigma}\|+2}$? Il s'agit de procéder par récurrence sur le poids p de $\underline{\sigma}$. Supposons donc que l'on sache écrire $\mathcal{Z}e^{\underline{s}}\mathcal{T}e^2$ dans $\mathcal{MTGF}_{2, p+2}$ pour toute séquence \underline{s} de poids $p < \|\underline{\sigma}\|$. Alors, la propriété de différentiabilité permet d'écrire $\mathcal{Z}e^{\underline{s}}\mathcal{T}e^{|\underline{\sigma}| - \|\underline{s}\| + 2}$ dans $\mathcal{MTGF}_{2, \|\underline{\sigma}\|+2}$.

La réduction en monotangentes de $\mathcal{T}e^{\underline{s} \cdot 2}$ s'écrit, pour tout séquences $\underline{s} \in \mathcal{S}_{\geq 2}^*$ de poids $\|\underline{\sigma}\| + 2$, sous la forme :

$$\left(\sum_{i \in \mathbb{E}(\underline{s})} \mathcal{Z}e^{\underline{s}^i} \right) \mathcal{T}e^2 + \dots .$$

Ici, l'ensemble $E(\underline{s})$ est fini et ne contient que des séquences de \mathcal{S}_+^* de poids $\|\underline{\sigma}\|$; les pointillés désignent, eux, des éléments de $\mathcal{MTGF}_{2,\|\underline{\sigma}\|+2}$. Pour pouvoir exprimer $\mathcal{Z}e^{\underline{\sigma}}\mathcal{T}e^2$ dans $\mathcal{MTGF}_{2,\|\underline{\sigma}\|+2}$, il s'agit de trouver une relation linéaire à coefficients rationnels entre les sommes $\sum_{i \in E(\underline{s})} \mathcal{Z}e^{s^i}$ valant $\mathcal{Z}e^{\underline{\sigma}}$.

3. Quelques exemples. Exprimons $\mathcal{Z}e^{\underline{s}}\mathcal{T}e^2$ dans $\mathcal{MTGF}_{2,\|\underline{s}\|+2}$, pour $\|\underline{s}\| \leq 5$:

L'annexe 2 donne directement $\mathcal{Z}e^2\mathcal{T}e^2 = \frac{1}{2}\mathcal{T}e^{2,2}$.

Par ailleurs, on sait que tous multizêtas de poids 3 et 4 s'écrivent respectivement en fonction de $\mathcal{Z}e^3$ et $(\mathcal{Z}e^2)^2$. Ainsi, il suffit de savoir exprimer $\mathcal{Z}e^3\mathcal{T}e^2$ et $(\mathcal{Z}e^2)^2\mathcal{T}e^2$ dans $\mathcal{MTGF}_{2,5}$ et $\mathcal{MTGF}_{2,6}$ respectivement.

L'annexe 2 donne les expressions en monotangentes des multitangentes de poids 5 et 6. On peut, par exemple, choisir :

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}e^3\mathcal{T}e^2 &= \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{3,2} - \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{2,3} . \\ (\mathcal{Z}e^2)^2\mathcal{T}e^2 &= -\frac{5}{12}\mathcal{T}e^{3,3} .\end{aligned}$$

Le cas $\|\underline{s}\| = 5$ est légèrement plus délicat. En effet, on conjecture que le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les multizêtas de poids 5 est de dimension 2, et qu'une base est $(\mathcal{Z}e^5; \mathcal{Z}e^2\mathcal{Z}e^3)$. Ce qui est certain, c'est que sa dimension est majorée par 2. Il suffit donc d'exprimer $\mathcal{Z}e^5\mathcal{T}e^2$ et $\mathcal{Z}e^2\mathcal{Z}e^3\mathcal{T}e^2$ dans $\mathcal{MTGF}_{2,7}$. L'annexe 2 permet de choisir les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}e^5\mathcal{T}e^2 &= \frac{1}{30}(\mathcal{T}e^{2,5} + 2\mathcal{T}e^{3,4} - 2\mathcal{T}e^{4,3} - \mathcal{T}e^{5,2}) . \\ \mathcal{Z}e^2\mathcal{Z}e^3\mathcal{T}e^2 &= \frac{1}{12}\mathcal{T}e^{3,2,2} - \frac{1}{12}\mathcal{T}e^{2,2,3} + \frac{1}{24}\mathcal{T}e^{2,5} + \frac{1}{12}\mathcal{T}e^{3,4} - \frac{1}{12}\mathcal{T}e^{4,3} - \frac{1}{24}\mathcal{T}e^{5,2} .\end{aligned}$$

Pour d'autres exemples d'écriture de $\mathcal{Z}e^{\underline{\sigma}}\mathcal{T}e^2$ dans $\mathcal{MTGF}_{2,\|\underline{\sigma}\|+2}$, nous renvoyons le lecteur au tableau D de la page 248.

4. Formalisation abstraite de la méthode. Rappelons que les multizêtas de poids n s'expriment \mathbb{Q} -linéairement en fonction d'un nombre fini d'entre eux, appelés les multizêtas irréductibles. Notons alors c_n le nombre d'irréductibles de poids n .

Un théorème de Goncharov-Terasoma affirme que si $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite définie par
$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ d_2 = d_3 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, d_{n+3} = d_{n+1} + d_n \end{cases}$$
, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n \leq d_n$. Une conjecture dûe à Zagier³² affirme que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie exactement la même récurrence, ie :

$$\begin{cases} c_1 = 0 . \\ c_2 = c_3 = 1 . \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+3} = c_{n+1} + c_n . \end{cases}$$

Soit $\underline{\sigma} \in \mathcal{S}_+^*$, de poids p . Notre but est d'exprimer $\mathcal{Z}e^{\underline{\sigma}}\mathcal{T}e^2$ dans $\mathcal{MTGF}_{2,p+2}$.

Pour cela, commençons par écrire les réductions en monotangentes de toutes les multitangentes de poids $p + 2$ et de valuations supérieures à 2. Ensuite, isolons d'un même côté du signe = les composantes $\mathcal{T}e^2$; puis exprimons chaque multizêta apparaissant en fonction des c_p multizêtas irréductibles. Puisque chaque terme $\mathcal{Z}e^{\underline{\sigma}}\mathcal{T}e^k$, $k \geq 3$, apparaissant dans une réduction en monotangentes est exprimable par récurrence dans $\mathcal{MTGF}_{2,p+2}$, nous aurons écrit des équations linéaires liant entre elles des termes du type $\mathcal{Z}e^{\underline{\sigma}}\mathcal{T}e^2$, dont les seconds membres sont éléments de $\mathcal{MTGF}_{2,p+2}$.

Cela nous donne un système linéaire à résoudre, à f_{n+2} équations³³ et c_n inconnues; le problème est ramené à un calcul de rang de matrice.

Voici un exemple : pour $p = 4$, tout multizêta de poids 4 s'écrit en fonction de $\mathcal{Z}e^4$. On obtient alors le système :

$$\begin{cases} 4\mathcal{Z}e^4\mathcal{T}e^2 = \mathcal{T}e^{2,4} + 2\mathcal{Z}e^3\mathcal{T}e^3 - \mathcal{Z}e^2\mathcal{T}e^4 . \\ -6\mathcal{Z}e^4\mathcal{T}e^2 = \mathcal{T}e^{3,3} . \\ 4\mathcal{Z}e^4\mathcal{T}e^2 = \mathcal{T}e^{4,2} - 2\mathcal{Z}e^3\mathcal{T}e^3 - \mathcal{Z}e^2\mathcal{T}e^4 . \\ 4\mathcal{Z}e^4\mathcal{T}e^2 = \mathcal{T}e^{2,4} + 2\mathcal{Z}e^3\mathcal{T}e^3 - \mathcal{Z}e^2\mathcal{T}e^4 . \end{cases}$$

Ce système est relié à la matrice colonne ${}^t(4; -6; 4; 4)$, qui est de rang 1. Il nous suffit de choisir l'équation que nous allons utiliser. Evidemment, ce sera la seconde qui est la plus simple, et donc produira les relations les plus simples possibles lorsque nous aurons besoin de la dériver.

La première difficulté est de savoir la dimension de la matrice que l'on doit considérer. Cela revient à devoir répondre à la conjecture de Zagier sur le nombre d'irréductibles de poids n ... Nous pouvons contourner cette difficulté en traitant toutes les valeurs de c_n possibles, ie $1, \dots, d_n$, ce qui n'est guère satisfaisant. Néanmoins, on sait que si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{Q})$ est de rang p et de vecteurs colonnes a_1, \dots, a_q alors la matrice dont les colonnes sont $a_1 - ra_2, a_3, \dots, a_r$, $r \in \mathbb{Q}$, est de rang $p - 1$. En appliquant ce principe à notre matrice (éventuellement plusieurs fois), il suffit de considérer le cas où $c_n = d_n$, ie de supposer la conjecture de Zagier vraie.

La deuxième difficulté est, en supposant vraie la conjecture de Zagier, d'évaluer le rang de la matrice, de taille $f_{p+2} \times c_p$. Voir page 249 pour observer les matrices obtenue pour les poids $p \in \llbracket 4; 7 \rrbracket$. Celles ci sont respectivement de rang $1 = c_4$, $2 = c_5$, $2 = c_6$, $3 = c_7$, sous l'hypothèse que la conjecture de Zagier est vraie. L'annexe 2 permet de vérifier facilement que ceci reste vrai pour $n \in \llbracket 8; 10 \rrbracket$. En fait, des calculs de tables de multitangentes ont été fait jusqu'au poids 15; ceux-ci montre que cela est encore vrai jusqu'à $p = 15$.

Cela conduit à penser que :

Conjecture 4 : Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} c_1 = 0, c_2 = c_3 = 1 . \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+3} = c_{n+1} + c_n . \end{cases}$

Si $p \geq 2$, la matrice, de taille $f_{p+2} \times c_p$, obtenue par le procédé ci-dessus pour les séquences de poids p , est de rang c_p .

³² Concernant cette conjecture, désormais bien connue, nous renvoyons le lecteur aux travaux de P. Deligne et A. B. Goncharov ([14]), de T. Terasoma ([48]) ainsi qu'au récent travaux de F. Brown ([7] et [8]).

³³ Ici, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne la classique suite de Fibonacci.

Sur cette nouvelle conjecture, commençons par dire qu'elle est équivalente à la conjecture 3, donc elle entraîne la conjecture 2.

Voici un argument quantitatif pour nous convaincre du bien fondé de cette quatrième conjecture :

Les premières matrices obtenues contiennent de nombreux 0. Cela permet de dire qu'elles sont "hautement" de rang c_n ; nous sous-entendons par "hautement", le fait que si les vecteurs-colonnes sont indépendants, cela n'est pas dû au hasard. Cela provient du grand nombre d'équations, et du petit nombre d'inconnues (en comparaison l'un de l'autre), mais aussi de la répartition d'un grand nombre de zéros qui force les vecteurs-colonnes à être linéairement indépendants.

Par ailleurs, on sait que :

$$f_{p+2} \approx 0,28 \times 1,62^{p+2} \quad , \quad c_p \approx 0,41 \times 1,32^p .$$

Ainsi, plus p sera grand, plus il y aura de chances de trouver quelques lignes, bien choisies, qui seront linéairement indépendantes. Ainsi, la conjecture sera d'autant plus vraie.

6.3 Quelques exemples de "nettoyage" générique.

1. Expression de $\mathcal{Z}e^n \mathcal{T}e^2$ dans $\mathcal{MTGF}_{2,n+2}$. On sait que, dans la réduction en monotangentes de $\mathcal{T}e^{s_1, s_2}$, $(s_1; s_2) \in (\mathbb{N}^* - \{1\})^2$, le coefficient de $\mathcal{T}e^2$ vaut :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \mathcal{Z}_{i, s_i-2}^{s_1, s_2} &= ({}^1E_{s_1-2}^{s_1, s_2} + {}^2E_{s_2-2}^{s_1, s_2}) \mathcal{Z}e^{s_1+s_2-2} \\ &= (-1)^{s_2} \left(\binom{s_1 + s_2 - 3}{s_1 - 1} + \binom{s_1 + s_2 - 3}{s_2 - 1} \right) \mathcal{Z}e^{s_1+s_2-2} . \end{aligned}$$

A partir de là, plusieurs expressions dans $\mathcal{MTGF}_{2,n+2}$ sont possibles. Toutes nécessitent de procéder par récurrence sur n .

La première solution consiste à dire que $\mathcal{T}e^{n,2} = n(-1)^n \mathcal{Z}e^n \mathcal{T}e^2 + \dots$, où les pointillés désignent toujours des termes écrits dans $\mathcal{MTGF}_{2,p+2}$, $p < n$, i.e. :

$$\mathcal{Z}e^n \mathcal{T}e^2 = \frac{(-1)^n}{n} \mathcal{T}e^{n,2} + \dots .$$

La deuxième solution consiste à essayer de garder une certaine symétrie. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}e^{p+1, p+1} &= 2(-1)^{p+1} \binom{2p-1}{p} \mathcal{Z}e^{2p} \mathcal{T}e^2 + \dots . \\ \mathcal{T}e^{p+1, p+2} - \mathcal{T}e^{p+2, p+1} &= 2(-1)^p \left(\binom{2p}{p} + \binom{2p}{p+1} \right) \mathcal{Z}e^{2p+1} \mathcal{T}e^2 + \dots . \end{aligned}$$

d'où aussi l'expression possible sous la forme :

$$\mathcal{Z}e^n \mathcal{T}e^2 = \begin{cases} \frac{(-1)^{p+1}}{2} \frac{1}{\binom{2p-1}{p}} \mathcal{T}e^{p+1,p+1} + \dots & , \text{ si } n = 2p . \\ \frac{(-1)^p}{2} \frac{1}{\binom{2p}{p} + \binom{2p}{p+1}} (\mathcal{T}e^{p+1,p+2} - \mathcal{T}e^{p+2,p+1}) + \dots & , \text{ si } n = 2p + 1 . \end{cases}$$

2. Expression de $\mathcal{Z}e^p \mathcal{Z}e^q \mathcal{T}e^2$ dans $\mathcal{MTGF}_{2,p+q+2}$, si $q \in 2\mathbb{N}$. Notons $q = 2r$. Alors, la réduction en monotangentes, couplée avec la propriété de parité entraîne qu'il existe une famille de rationnels $(r_k)_{k \in [2;r]}$ telle que :

$$\mathcal{T}e^{r+1,r+1} = 2(-1)^{r+1} \binom{2r-1}{r} \mathcal{Z}e^{2r} \mathcal{T}e^2 + \sum_{k=1}^{E(\frac{r-1}{2})} r_k \mathcal{Z}e^{2r-2k} \mathcal{T}e^{2k+2} .$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}e^p \mathcal{Z}e^q \mathcal{T}e^2 &= \frac{(-1)^{r+1}}{2(-1)^{r+1} \binom{2r-1}{r}} \left(\mathcal{Z}e^p \mathcal{T}e^{r+1,r+1} - \sum_{k=1}^{E(\frac{r-1}{2})} r_k \mathcal{Z}e^p \mathcal{Z}e^{2r-2k} \mathcal{T}e^{2k+2} \right) \\ &= \frac{(-1)^{r+1}}{2(-1)^{r+1} \binom{2r-1}{r}} \left(\mathcal{Z}e^p \mathcal{T}e^{r+1,r+1} - \frac{\partial^{2k}}{\partial z^{2k}} \sum_{k=1}^{E(\frac{r-1}{2})} \frac{r_k}{(2k-1)!} \mathcal{Z}e^p \mathcal{Z}e^{2r-2k} \mathcal{T}e^2 \right) . \end{aligned}$$

Pour pouvoir exprimer $\mathcal{Z}e^p \mathcal{Z}e^q \mathcal{T}e^2$ dans $\mathcal{MTGF}_{2,p+q+2}$, avec $q \in 2\mathbb{Z}$, en procédant par récurrence, il s'agit d'être capable d'exprimer $\mathcal{Z}e^p \mathcal{T}e^{r+1,r+1}$ dans $\mathcal{MTGF}_{2,p+q+2}$.

La symétréité de $\mathcal{T}e^\bullet$, la propriété de différentiabilité et le paragraphe précédent entraînent immédiatement ce calcul :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}e^p \mathcal{T}e^{r+1,r+1} &= \frac{1}{2} \mathcal{Z}e^p \left((\mathcal{T}e^{r+1})^2 - \mathcal{T}e^{2r+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{Z}e^p \mathcal{T}e^{r+1}) \mathcal{T}e^{r+1} - \frac{1}{(2r+1)!} \frac{\partial^q (\mathcal{Z}e^p \mathcal{T}e^2)}{\partial z^q} . \end{aligned}$$

Le paragraphe précédent permet d'exprimer $\mathcal{Z}e^p \mathcal{T}e^{r+1}$ dans $\mathcal{MTGF}_{2,p+r+1}$, puis par symétréité, $\mathcal{Z}e^p (\mathcal{T}e^{r+1})^2$ s'exprime dans $\mathcal{MTGF}_{2,p+q+2}$.

De même, $\mathcal{Z}e^p \mathcal{T}e^2$ s'exprime simplement dans $\mathcal{MTGF}_{2,p+2}$, puis en utilisant la propriété de différentiabilité, on obtient une expression de $\frac{\partial^q (\mathcal{Z}e^p \mathcal{T}e^2)}{\partial z^q}$ dans $\mathcal{MTGF}_{2,p+q+2}$.

Pour clarifier l'algorithme, voici un exemple :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}e^2\mathcal{Z}e^3\mathcal{T}e^2 &= \frac{1}{2}\mathcal{Z}e^3\mathcal{T}e^{2,2} = \frac{1}{4}\mathcal{Z}e^3\left((\mathcal{T}e^2)^2 - \mathcal{T}e^4\right) \\
&= \frac{1}{4}(\mathcal{Z}e^3\mathcal{T}e^2)\mathcal{T}e^2 - \frac{1}{24}\frac{\partial^2(\mathcal{Z}e^3\mathcal{T}e^2)}{\partial z^2} \\
&= \frac{1}{24}(\mathcal{T}e^{3,2} - \mathcal{T}e^{2,3})\mathcal{T}e^2 - \frac{1}{144}\frac{\partial^2(\mathcal{T}e^{3,2} - \mathcal{T}e^{2,3})}{\partial z^2} \\
&= \frac{1}{24}(2\mathcal{T}e^{3,2,2} - 2\mathcal{T}e^{2,2,3} - \mathcal{T}e^{5,2} - 2\mathcal{T}e^{4,3} + 2\mathcal{T}e^{3,4} + \mathcal{T}e^{2,5}) .
\end{aligned}$$

Remarquons que l'on retrouve par cet algorithme une relation déjà indiquée. Remarquons aussi que cet algorithme permet d'écrire dans $\mathcal{MTGF}_{2,p+q_1+\dots+q_r+2}$ tout produit du type $\mathcal{Z}e^p\mathcal{Z}e^{q_1}\dots\mathcal{Z}e^{q_r}\mathcal{T}e^2$, où $(q_1;\dots;q_r)$ sont des nombres pairs. En effet, il existe $C \in \mathbb{Q}$ explicite tel que $\mathcal{Z}e^{q_1}\dots\mathcal{Z}e^{q_r} = C\mathcal{Z}e^{q_1+\dots+q_r}$.

3. Expression de $\mathcal{Z}e^p\mathcal{Z}e^q\mathcal{T}e^2$ dans $\mathcal{MTGF}_{2,p+q+2}$, si p et q sont impairs. Ici, la situation semble beaucoup plus compliquée que précédemment. En effet, il s'agit d'être capable d'exprimer dans $\mathcal{MTGF}_{2,p+2r+1}$ la quantité $\mathcal{Z}e^p(\mathcal{T}e^{r,r+1} - \mathcal{Z}e^{r+1,r})$.

Malheureusement, la symétrie élité de $\mathcal{T}e^\bullet$ ne semble pas être d'une grande aide... Pourtant, nous avons une relation simple : $(\mathcal{Z}e^3)^2\mathcal{T}e^2 = -\frac{1}{9}\mathcal{T}e^{3,2,3} + \frac{10}{27}\mathcal{T}e^{2,2,2} \dots$.

6.4 Une dernière série de conjectures.

Nous dirons que $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$, $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$, est de valuation supérieure à 2 lorsque $s_i \geq 2$ pour tout $i \in \llbracket 1; l(\underline{s}) \rrbracket$.

Pour pouvoir généraliser les majorations (cf. §7.1.1) des multitangentes de valuation supérieure à 2 à toutes les multitangentes, nous énonçons trois nouvelles conjectures concernant la taille des coefficients rationnels apparaissant dans les nettoyages des 1.

Conjecture A : Si $S_t(\underline{s})$ désigne la somme des valeurs absolues des coefficients dans un nettoyage de $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$, alors :
il existe $C > 0$ tel que pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$, il existe un nettoyage de $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ vérifiant $S_t(\underline{s}) \leq C^{\|\underline{s}\|}$.

Conjecture B : Si $S_z(\underline{s})$ désigne la somme des valeurs absolues des coefficients d'une combinaison linéaire exprimant $\mathcal{Z}e^{\underline{s}}\mathcal{T}e^k$, alors :
il existe $C > 0$ tel que pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$ et pour tout entier $k \geq 2$, il existe une combinaison linéaire exprimant $\mathcal{Z}e^{\underline{s}}\mathcal{T}e^k$ vérifiant $S_z(\underline{s}) \leq C^{\|\underline{s}\|}$.

Conjecture C : Si $S_z(\underline{s})$ désigne la somme des valeurs absolues des coefficients d'une combinaison linéaire exprimant $\mathcal{Z}e^{\underline{s}}\mathcal{T}e^2$, alors :
il existe $C > 0$ tel que pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$, il existe une combinaison linéaire exprimant $\mathcal{Z}e^{\underline{s}}\mathcal{T}e^2$ vérifiant $S_z(\underline{s}) \leq C^{\|\underline{s}\|}$.

Il n'est pas difficile de démontrer que la conjecture B entraîne la conjecture A et qu'elle est aussi équivalente à la conjecture C. On peut même conjecturer que ces trois conjectures sont équivalentes...

En particulier, la conjecture C, couplée avec la proposition de la page 166 entraîne :

$$\exists C > 0, \forall \underline{s} \in \mathcal{S}^* - \emptyset, \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, |\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z)| \leq \frac{1}{r!} \left(\frac{2C}{\sqrt{|\Im m z|}} \right)^{\|\underline{s}\|}.$$

6.5 Nettoyage des multitangentes divergentes.

Finissons cette section en rappelant que toute multitangente divergente a été renormalisée en une \mathbb{Q} -combinaison linéaire de multitangentes convergentes. Ceci envoie au milieu les 1 situés en début et fin de séquences. Il ne reste plus qu'à nettoyer les uns dans les multitangentes convergentes obtenues.

Ainsi, nous pouvons généraliser la conjecture 2 en :

Conjecture 2' : Nettoyage des 1.

$$\forall \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*, \mathcal{T}e^{\underline{s}} \in \mathcal{MTGF}_{2, \|\underline{s}\|}.$$

7 Propriétés analytiques.

7.1 Majoration des multitangentes.

7.1.1 Deux majorations géométriques.

Nous allons voir que les multitangentes vont converger très vite vers 0 lorsque z tendra vers l'infini hors de l'axe des abscisses. Il s'agit du caractère exponentiellement plat des multitangentes convergentes. Mais la majoration obtenue n'est pas vraiment fonction du poids de la séquence \underline{s} . Nous allons déterminer deux majorations géométriques (ou presque) dont la puissance sera le poids de la multitangente considérée.

Pour commencer, pour toute multitangente convergente, montrons la majoration suivante :

Lemme 17 : $\forall \underline{s} \in \mathcal{S}^*, \forall z \in \mathbb{C}, \arg z \notin \{0; \pi\} \implies |\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z)| \leq \frac{4l(\underline{s})}{|\Im m z|^{\|\underline{s}\| - l(\underline{s}) - 1}}.$

Démonstration : Soient $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\begin{cases} \arg z \notin \{0; \pi\} \\ |\Im m z| > 1 \end{cases}.$

Notons $f^{\underline{s}}$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$f^{\underline{s}}(x; y) = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{((n_1 + x)^2 + y^2)^{\frac{s_1}{2}} \dots ((n_r + x)^2 + y^2)^{\frac{s_r}{2}}}.$$

On a alors : $|\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z)| \leq f^{\underline{s}}(\Re z; |\Im m z|)$. De plus, en procédant de même qu'à la page 125, on obtient la factorisation : $f^{\bullet}(x; y) = f_+^{\bullet}(x; y) \times \mathbf{I}^{\bullet}(x; y) \times f_-^{\bullet}(x; y)$, où les fonctions f_+^{\bullet} , f_-^{\bullet} et \mathbf{I}^{\bullet} sont définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\begin{aligned}
f_+^{\underline{s}}(x; y) &= \sum_{-\mathbb{E}(x) < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{((n_1 + x)^2 + y^2)^{\frac{s_1}{2}} \dots ((n_r + x)^2 + y^2)^{\frac{s_r}{2}}} \cdot \\
f_-^{\underline{s}}(x; y) &= \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < -\mathbb{E}(x)} \frac{1}{((n_1 + x)^2 + y^2)^{\frac{s_1}{2}} \dots ((n_r + x)^2 + y^2)^{\frac{s_r}{2}}} \cdot \\
\mathbb{I}^{\underline{s}}(x; y) &= \begin{cases} 0 & , \text{ si } l(\underline{s}) \neq 1. \\ ((x - \mathbb{E}(x))^2 + y^2)^{-\frac{s}{2}} & , \text{ si } l(\underline{s}) = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

On a alors successivement :

$$\begin{aligned}
f_+^{\underline{s}}(x; y) &= \sum_{0 < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{((n_1 + x - \mathbb{E}(x))^2 + y^2)^{\frac{s_1}{2}} \dots ((n_r + x - \mathbb{E}(x))^2 + y^2)^{\frac{s_r}{2}}} \\
&\leq \frac{1}{(y^2)^{\frac{s_1-2}{2}} (y^2)^{\frac{s_2-1}{2}} \dots (y^2)^{\frac{s_r-1}{2}}} f_+^{2,1,\dots,1}(x - \mathbb{E}(x); 0) \\
&\leq \frac{1}{y^{s_1-2} y^{s_2-1} \dots y^{s_r-1}} \sum_{0 < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{n_1^2 n_2 \dots n_r} \\
&= \frac{\mathcal{Z}e^{2,1,\dots,1}}{y^{\|\underline{s}\| - l(\underline{s}) - 1}} \\
&\leq \frac{2}{y^{\|\underline{s}\| - l(\underline{s}) - 1}} \cdot
\end{aligned}$$

De même, on a : $f_-^{\underline{s}}(x; y) \leq \frac{2}{y^{\|\underline{s}\| - l(\underline{s}) - 1}}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z)| &\leq \sum_{k=1}^{l(\underline{s})} f_+^{\underline{s} < k}(\Re z; |\Im z|) \times \mathbb{I}^{s_k}(\Re z; |\Im z|) \times f_-^{\underline{s} > k}(\Re z; |\Im z|) \\
&\leq \sum_{k=1}^{l(\underline{s})} \frac{2}{|\Im z|^{\|\underline{s} < k\| - (k-1) - 1}} \times \frac{1}{|\Im z|^{s_k}} \times \frac{2}{|\Im z|^{\|\underline{s} > k\| - (l(\underline{s}) - k) - 1}} \\
&= \sum_{k=1}^{l(\underline{s})} \frac{4}{|\Im z|^{\|\underline{s}\| - l(\underline{s}) - 1}} \\
&= \frac{4l(\underline{s})}{|\Im z|^{\|\underline{s}\| - l(\underline{s}) - 1}} \cdot
\end{aligned}$$

□

Voici désormais la seconde majoration. La démonstration utilise les mêmes notations et en partie les même faits que la première.

Lemme : $\forall \underline{s} \in \mathcal{S}_{\geq 2}^* - \emptyset$, $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, $|\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z)| \leq \frac{1}{l(\underline{s})!} \left(\frac{2}{\sqrt{|\Im z|}} \right)^{\|\underline{s}\|}$.

Démonstration : Soient $\underline{s} \in \mathcal{S}_{\geq 2}^*$ de longueur r , et $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Considérons toujours $f^{\underline{s}}$, $f_+^{\underline{s}}$, $f_-^{\underline{s}}$ et $\mathbb{I}^{\underline{s}}$ comme dans la démonstration précédente.

Dans les majorations qui suivent, puisque $\underline{s} \in \mathcal{S}_{\geq 2}^* \subset \mathcal{S}^*$, on dispose de la première majoration. Les autres étapes résultent d'une simple comparaison avec intégrale :

$$\begin{aligned}
f_+^{\underline{s}}(x; y) &= \sum_{0 < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \prod_{i=1}^r \left(\frac{1}{((n_i + x - \mathbb{E}(x))^2 + y^2)^{\frac{s_i}{2}}} \right) \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ i \neq j \Rightarrow n_i \neq n_j}} \prod_{i=1}^r \left(\frac{1}{((n_i + x - \mathbb{E}(x))^2 + y^2)^{\frac{s_i}{2}}} \right) \\
&\leq \frac{1}{r!} \prod_{i=1}^r \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{((n + x - \mathbb{E}(x))^2 + y^2)^{\frac{s_i}{2}}} \right) \\
&\leq \frac{1}{r!} \prod_{i=1}^r \left(\int_1^{+\infty} \frac{dt}{((t + x - \mathbb{E}(x))^2 + y^2)^{\frac{s_i}{2}}} \right) \leq \frac{1}{r!} \frac{1}{y^{\|\underline{s}\| - 2r}} \left(\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2 + y^2} \right)^r \\
&\leq \frac{1}{r!} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^r}{y^{\|\underline{s}\| - r}}.
\end{aligned}$$

De même, on a : $f_-^{\underline{s}}(x; y) \leq \frac{1}{r!} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^r}{y^{\|\underline{s}\| - r}}$.

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi : } |\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z)| &\leq \sum_{k=1}^r f_+^{\underline{s} < k}(\Re z; |\Im z|) \times I^{s_k}(\Re z; |\Im z|) \times f_-^{\underline{s} > k}(\Re z; |\Im z|) \\
&\leq \sum_{k=1}^r \left(\frac{1}{(k-1)! |\Im z|^{\|\underline{s} < k\| - (k-1)}} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1}} \right) \times \left(\frac{1}{|\Im z|^{s_k - 1}} \right) \times \\
&\quad \left(\frac{1}{(r-k)! |\Im z|^{\|\underline{s} > k\| - (r-k)}} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-k}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-k}} \right) \\
&\leq \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-1}}{|\Im z|^{\|\underline{s}\| - r}} \sum_{k=1}^r \frac{1}{(k-1)!} \frac{1}{(r-k)!} \leq \frac{2^{r-1}}{(r-1)!} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-1}}{|\Im z|^{\|\underline{s}\| - r}} \\
&\leq \frac{\pi^{r-1}}{(r-1)!} \frac{1}{|\Im z|^{\|\underline{s}\| - r}} \leq \frac{4^r}{r!} \frac{1}{|\Im z|^{\|\underline{s}\| - r}}.
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à constater que pour $\underline{s} \in \mathcal{S}_{\geq 2}^*$, on a $\|\underline{s}\| \geq 2l(\underline{s})$. On en déduit donc enfin la majoration recherchée :

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, \forall \underline{s} \in \mathcal{S}_{\geq 2}^*, |\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z)| \leq \frac{1}{r!} \left(\frac{2}{\sqrt{|\Im z|}} \right)^{\|\underline{s}\|}.$$

□

7.1.2 Des conjectures.

1. Première généralisation. Il semble que nous disposions de la seconde majoration géométrique pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$ et non uniquement pour les séquences de $\mathcal{S}_{\geq 2}^*$:

Conjecture 5 : $\forall \underline{s} \in \mathcal{S}^*, \forall z \in \mathbb{C}, \arg z \notin \{0; \pi\} \Rightarrow |\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z)| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{|\Im z|}} \right)^{\|\underline{s}\|}$.

Celle-ci a été vérifiée numériquement dans toutes les directions $\theta = i \times \frac{2\pi}{2400}$, $i = \llbracket 1; 2399 \rrbracket$, pour les poids $p \in \llbracket 2; 15 \rrbracket$. Numériquement, cette majoration est donc certaine.

2. Seconde généralisation : un intermédiaire entre la majoration géométrique précédente et le caractère exponentiellement plat. Nous verrons dans un instant le caractère exponentiellement plat des multitangentes (cf. p. 170). La majoration précédente est une majoration géométrique ; elle sera utile pour montrer des convergences de séries faisant apparaître des multitangentes.

Il semblerait qu'on dispose d'une autre majoration, intermédiaire entre les deux précédentes. Elle aurait pour fonctions de redonner le caractère exponentiellement plat des multitangentes convergentes, mais aussi d'avoir une dépendance géométrique relativement au poids de la multitangente considérée :

Conjecture 6 : Pour tout $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\Im m z| > 1$, on a :

$$|\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z)| \leq \left(\frac{1}{|\Im m z|} \right)^{\|\underline{s}\|} \frac{\pi^2}{\text{sh}^2(\pi \Im m z)}.$$

Une telle majoration semble licite (vérification numérique à l'appui, pour $\theta = \arg z$ variant entre 0 et 2π par pas de $\frac{1}{2400}$, pour toutes les multitangentes de poids inférieur à 10).

7.2 Développement en série de Fourier des multitangentes convergentes.

Il est clair que toute multitangente convergente définit une fonction 1-périodique sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Il est donc intéressant de connaître le développement en série de Fourier des multitangentes convergentes. Nous en déduisons ensuite les coefficients de Fourier des multitangentes, pour enfin en obtenir une majoration.

Toute cette section est centrale pour le calcul explicite des invariants holomorphes d'un difféomorphisme tangent à l'identité.

7.2.1 Développement en série de Fourier.

Rappelons le développement en série de Fourier de $\mathcal{T}e^1$ (cf. [46]) :

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \mathcal{T}e^1(z) = \frac{\pi}{\tan(\pi z)} = \begin{cases} i\pi + 2i\pi \sum_{n < 0} e^{2in\pi z}, & \text{si } \Im m z < 0. \\ -i\pi - 2i\pi \sum_{n > 0} e^{2in\pi z}, & \text{si } \Im m z > 0. \end{cases} \quad (57)$$

Puisque la convergence de $\mathcal{T}e^1$ est normale sur $\{\zeta \in \mathbb{C} ; \Im m \zeta < -c\}$ et $\{\zeta \in \mathbb{C} ; \Im m \zeta > c\}$, pour tout $c > 0$, l'expression (57) est bien le développement en série de Fourier de $\mathcal{T}e^1$. La propriété de différentiabilité entraîne alors :

$$\forall \sigma \in \mathbb{N} - \{0; 1\}, \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \mathcal{T}e^\sigma(z) = \begin{cases} 2i\pi \sum_{n < 0} \frac{(-2in\pi)^{\sigma-1}}{(\sigma-1)!} e^{2in\pi z}, & \text{si } \Im m z < 0. \\ -2i\pi \sum_{n > 0} \frac{(-2in\pi)^{\sigma-1}}{(\sigma-1)!} e^{2in\pi z}, & \text{si } \Im m z > 0. \end{cases}$$

On peut reporter ce développement en série de Fourier dans l'expression donnant la réduction des multitangentes en monotangentes (cf. §3.2) pour obtenir, lorsque $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=2}^{s_j} \mathcal{Z}_{j,s_j-k}^{\underline{s}} \mathcal{T}e^k(z) \\ &= \begin{cases} 2i\pi \sum_{n < 0} \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=2}^{s_j} \frac{(-2in\pi)^{k-1}}{(k-1)!} \mathcal{Z}_{j,s_j-k}^{\underline{s}} \right) e^{2in\pi z}, & \text{si } \Im m z < 0. \\ -2i\pi \sum_{n > 0} \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=2}^{s_j} \frac{(-2in\pi)^{k-1}}{(k-1)!} \mathcal{Z}_{j,s_j-k}^{\underline{s}} \right) e^{2in\pi z}, & \text{si } \Im m z > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

La convergence des séries précédentes étant normale sur $\{\zeta \in \mathbb{C}; \Im m \zeta < -c\}$ et $\{\zeta \in \mathbb{C}; \Im m \zeta > c\}$, pour tout $c > 0$, on obtient bien le développement en série de Fourier des multitangentes :

Lemme : Notons³⁴ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$:

$$\widehat{\mathcal{T}}_n^{\underline{s}} = 2i\pi \sum_{j=1}^{l(\underline{s})} \left(\sum_{k=2}^{s_j} \frac{(-2in\pi)^{k-1}}{(k-1)!} \mathcal{Z}_{j,s_j-k}^{\underline{s}} \right).$$

Alors :

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S}^*, \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) = \begin{cases} \sum_{n < 0} \widehat{\mathcal{T}}_n^{\underline{s}} q^n, & \text{si } \Im m z < 0. \\ -\sum_{n > 0} \widehat{\mathcal{T}}_n^{\underline{s}} q^n, & \text{si } \Im m z > 0. \end{cases}$$

7.2.2 Majoration des coefficients de Fourier des multitangentes convergentes.

Commençons par majorer les coefficients de Fourier d'une multitangente de valuation supérieure à 2. Fixons-nous alors une séquence \underline{s} de $\mathcal{S}_{\geq 2}^*$ et $c > 0$.

Considérons aussi les fonctions $\mathcal{T}_+^{\underline{s}}$ et $\mathcal{T}_-^{\underline{s}}$ définies par $\mathcal{T}_+^{\underline{s}}(z) = \sum_{n > 0} \widehat{\mathcal{T}}_n^{\underline{s}} z^n$ et

³⁴ Remarquons que le moule $\widehat{\mathcal{T}}_n^\bullet$ ne peut être symétriel : Par exemple, on a :

$$\begin{cases} 2\widehat{\mathcal{T}}_1^{2,2} + \widehat{\mathcal{T}}_1^4 = 2 \times \frac{4}{3}\pi^4 - \frac{8}{3}\pi^4 = 0. \\ (\widehat{\mathcal{T}}_1^2)^2 = 16\pi^4. \end{cases}$$

Ceci explique l'absence de la lettre e dans son nom.

$T_{-}^{\underline{s}}(z) = \sum_{n < 0} \widehat{\mathcal{T}}_n^{\underline{s}} z^n$. Celles-ci sont définies et holomorphes sur $\{\zeta \in \mathbb{C} ; 0 < |\zeta| < e^{-2\pi c}\}$ et $\{\zeta \in \mathbb{C} ; |\zeta| > e^{2\pi c}\}$ respectivement.

Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| = e^{-2\pi r}$ (resp. $|z| = e^{2\pi r}$) avec $r > c$, on peut écrire : $z = e^{-2\pi r + 2i\theta\pi}$ (resp. $z = e^{2\pi r + 2i\theta\pi}$) pour $\theta \in [0; 1[$. D'où en utilisant la majoration que nous avons démontré à la page 166 :

$$\left\{ \begin{array}{l} |T_{+}^{\underline{s}}(z)| = |\mathcal{T}e^{\underline{s}}(\theta + ir)| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{r}}\right)^{\|\underline{s}\|} \\ |T_{-}^{\underline{s}}(z)| = |\mathcal{T}e^{\underline{s}}(\theta - ir)| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{r}}\right)^{\|\underline{s}\|} \end{array} \right. \text{i.e. } \forall r > c, \left\{ \begin{array}{l} \sup_{|z|=e^{-2\pi r}} |T_{+}^{\|\underline{s}\|}(z)| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{r}}\right)^{\|\underline{s}\|} \\ \sup_{|z|=e^{2\pi r}} |T_{-}^{\|\underline{s}\|}(z)| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{r}}\right)^{\|\underline{s}\|} \end{array} \right. .$$

Les inégalités de Cauchy donnent alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \underline{s} \in \mathcal{S}_{\geq 2}^*, \forall r > c, |\widehat{\mathcal{T}}e_n^{\underline{s}}| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{r}}\right)^{\|\underline{s}\|} e^{2\varepsilon r n \pi}, \text{ avec } \varepsilon = sg(n).$$

Ainsi, par passage à la limite lorsque $r \rightarrow c$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \underline{s} \in \mathcal{S}_{\geq 2}^*, \forall c > 0, |\widehat{\mathcal{T}}e_n^{\underline{s}}| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{c}}\right)^{\|\underline{s}\|} e^{2c|n|\pi} .$$

En procédant de même pour n'importe quelle multitangente, c'est-à-dire en utilisant la majoration de la page 165 plutôt que celle de la page 166, on obtient une autre inégalité des coefficients de Fourier. Ces deux inégalités se trouvent énoncée dans le lemme suivant :

Lemme : Notons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$:

$$\widehat{\mathcal{T}}_n^{\underline{s}} = 2i\pi \sum_{j=1}^{l(\underline{s})} \left(\sum_{k=2}^{s_j} \frac{(-2in\pi)^{k-1}}{(k-1)!} \mathcal{Z}_{j, s_j-k}^{\underline{s}} \right) .$$

Alors :

1. $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \underline{s} \in \mathcal{S}^*, \forall c > 0, |\widehat{\mathcal{T}}e_n^{\underline{s}}| \leq \frac{4l(\underline{s})}{c^{\|\underline{s}\| - l(\underline{s}) - 1}} e^{2c|n|\pi} .$
2. $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \underline{s} \in \mathcal{S}_{\geq 2}^*, \forall c > 0, |\widehat{\mathcal{T}}e_n^{\underline{s}}| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{c}}\right)^{\|\underline{s}\|} e^{2c|n|\pi} .$

7.3 Caractère exponentiellement plat.

Nous avons déjà annoncé, lors de l'étude de la réduction des multitangentes en monotangentes, le caractère exponentiellement plat des multitangentes. Nous allons en donner trois courtes démonstrations.

1. Par la transformée de Borel. La transformation de Borel est un argument permettant de justifier que les multitangentes sont exponentiellement plates, car

cette transformation ne “repère” pas de telles fonctions.

Rappelons que la transformée de Borel \mathcal{B} est définie pour les séries formelles du type $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{z^n}$ par : $\mathcal{B} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{z^{n+1}} \right) (\zeta) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} \zeta^n$. Si $L : \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$ est définie par $L(f)(z) = f(z+1)$, alors on a : $\mathcal{B}(L(f))(\zeta) = e^{-\zeta} \mathcal{B}(f)(\zeta)$; donc, $\mathcal{B} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} L^p(f) \right) (\zeta) = 0$.

Alors, comme annoncé lors de l’expression des multitangentes en monotangentes, on en déduit le caractère exponentiellement plat des multitangentes convergentes, mais de manière non explicite. Bien que l’explicite est ici possible, nous n’aborderons pas cette question.

2. Par les séries de Fourier. Nous venons de voir que :

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S}^*, \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) = \begin{cases} \sum_{n < 0} \widehat{\mathcal{T}}_n^{\underline{s}} e^{2in\pi z}, & \text{si } \Im m z < 0. \\ -\sum_{n > 0} \widehat{\mathcal{T}}_n^{\underline{s}} e^{2in\pi z}, & \text{si } \Im m z > 0. \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \underline{s} \in \mathcal{S}^*, \forall c > 0, \left| \widehat{\mathcal{T}}_n^{\underline{s}} \right| \leq \frac{4l(\underline{s})}{c^{||\underline{s}|| - l(\underline{s}) - 1}} e^{2c|n|\pi}.$$

Ainsi, pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ et $c = \frac{|\Im m z|}{2}$ et si la notation $n \leq 0$ désigne $n > 0$ lorsque $\Im m z > 0$, et $n < 0$ sinon, on obtient alors :

$$|\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z)| \leq \frac{4l(\underline{s})}{c^{||\underline{s}|| - l(\underline{s}) - 1}} \sum_{n \leq 0} e^{-n\pi \Im m z} \leq \frac{4l(\underline{s})}{c^{||\underline{s}|| - l(\underline{s}) - 1}} \frac{e^{-\pi |\Im m z|}}{1 - e^{-\pi |\Im m z|}}.$$

Cette dernière inégalité prouve le caractère exponentiellement plat des multitangentes convergentes.

3. Par la formule de Cauchy. Puisque $|\mathcal{T}e^2(z)| = \left| \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} \right| \leq \left| \frac{\pi^2}{\text{sh}^2(\pi \Im m z)} \right|$, pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, la formule de Cauchy et la propriété de différentiabilité permettent d’obtenir, pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, et tout $s \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}e^s(z)| &\leq \left| \frac{(-1)^{s-2}}{(s-1)!} \frac{\partial^{s-2}}{\partial z^{s-2}} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(z, \frac{\Im m z}{2})} \frac{\mathcal{T}e^2(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \mathcal{T}e^2 \left(z + \frac{\Im m z}{2} e^{i\theta} \right) \left(\frac{\Im m z}{2} \right)^{-(s-2)} d\theta \right| \\ &\leq \left(\frac{2}{\Im m z} \right)^{s-2} \frac{\pi^2}{\text{sh}^2 \left(\frac{\pi \Im m z}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ vérifie $|z| \geq \frac{1}{2}$, la réduction en monotangentes donne à nouveau :

$$|\mathcal{T}e^{\mathfrak{s}}(z)| \leq \sum_{j=1}^r \sum_{k=2}^{s_j} |\mathcal{Z}_{j,k}^{\mathfrak{s}}| |\mathcal{T}e^k(z)| \leq \sum_{j=1}^r \sum_{k=2}^{s_j} \frac{2^{\|\mathfrak{s}\|+k-s_j+1} \pi^2}{\text{sh}^2(\pi \Im m z)} \leq \frac{r 2^{\|\mathfrak{s}\|} \pi^2}{\text{sh}^2(\pi \Im m z)}.$$

En effet, il n'est pas difficile de prouver que $|\mathcal{Z}_{i,k}^{\mathfrak{s}}| \leq 2^{\|\mathfrak{s}\|+k-s_i-1}$. Cela prouve encore le caractère exponentiellement plat des multitangentes, de manière explicite.

8 Propriétés arithmétiques.

8.1 Indépendance linéaire des monotangentes.

Les multitangentes convergentes vérifient de nombreuses relations les liant entre elles : la propriété de dérivabilité, les relations de symétrie, ou encore des relations obtenues par réduction en monotangentes. Néanmoins, on dispose de la propriété suivante, très simple et d'une grande utilité :

Propriété : Les monotangentes sont linéairement indépendantes.

Plusieurs preuves sont possibles, utilisant la propriété de différentiabilité, le recours aux coefficients de Fourier précédemment calculés, en regardant les pôles... En voici une :

Démonstration : Supposons que la famille $(\mathcal{T}e^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit liée.

Alors, on disposerait d'un entier $r \geq 2$, d'un r -uplet $(n_1; \dots; n_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ vérifiant $n_1 < \dots < n_r$ et d'un r -uplet $(\lambda_{n_1}; \dots; \lambda_{n_r}) \in \mathbb{C}^r - \{(0; \dots; 0)\}$ tels que :

$$\sum_{k=1}^r \lambda_{n_k} \mathcal{T}e^{n_k} = 0.$$

En utilisant la propriété de différentiabilité des multitangentes, on obtient :

$$\sum_{k=1}^r \frac{(-1)^{n_k-1} \lambda_{n_k}}{(n_k - 2)!} \frac{\partial^{n_k-1} \mathcal{T}e^1}{\partial z^{n_k-1}} = 0.$$

Ainsi, $\mathcal{T}e^1$ vérifierait une équation linéaire à coefficients constants, et s'écrirait donc sous la forme d'une \mathbb{C} -combinaison linéaire d'exponentielles polynômes. Cela permettrait de prolonger analytiquement $\mathcal{T}e^1$ à tout \mathbb{C} . Puisque ce prolongement entre en contradiction avec l'expression-même de $\mathcal{T}e^1$, nous venons de démontrer le fait que les monotangentes sont linéairement indépendantes. \square

Vu le nombre de relations liant les multitangentes entre elles, nous savons qu'elles ne sont ni algébriquement, ni linéairement indépendantes. Nous avons déjà retrouvé, lors de la renormalisation de $\mathcal{T}e^\bullet$ (cf. p. 145), la plus simple des relations liant entre elles les séries d'Eisenstein : $\mathcal{T}e^2(z) \mathcal{T}e^1(z) = \mathcal{T}e^3(z)$. En dérivant cette relation, puis en la multipliant par $\mathcal{T}e^2$, on obtient alors : $2(\mathcal{T}e^3)^2 = 3\mathcal{T}e^2 \mathcal{T}e^4 - (\mathcal{T}e^2)^3$. Ceci montre que même si l'on se restreint aux monotangentes convergentes, ces dernières ne sont pas algébriquement indépendantes.

8.2 Transcendance des multitangentes.

Il est souvent agréable, pour mettre en place une méthode de transcendance, de savoir si telle ou telle fonction est transcendante. Nous entendons, ici, par fonction transcendante, un élément de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{C})$ transcendant sur $\mathbb{C}[X]$. Nous disposons alors d'un résultat très simple pour les multitangentes convergentes :

Lemme : Toute multitangente convergente non nulle est transcendante.

Notons d'ores et déjà que pour espérer pouvoir rendre ce lemme utile, il est nécessaire de caractériser les multitangentes nulles, i.e. de répondre à la conjecture donnée page 155.

Démonstration : Soit $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$ telle que $\mathcal{T}e^{\underline{s}} \neq 0$.

Supposons que $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ soit algébrique, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X; Y]$ tel $P(z; \mathcal{T}e^{\underline{s}}(z)) \equiv 0$. Considérons le plus petit degré possible d'un tel polynôme, noté d . Notons ce polynôme sous forme développée, de sorte que :

$$\exists (P_0; \dots; P_d) \in \mathbb{C}[X]^{d+1} - \{(0; \dots; 0)\}, \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \sum_{i=0}^d P_i(z) (\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z))^i = 0.$$

Le caractère exponentiellement plat des multitangentes convergentes entraîne, lorsque z tend vers l'infini sans passer par l'axe des réels :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \forall \underline{s} \in \mathcal{S}^*, P(z) \mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) \rightarrow 0.$$

Ainsi : $\sum_{i=1}^d P_i(z) (\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z))^i \rightarrow 0$. La nullité de la fonction $\sum_{i=0}^d P_i (\mathcal{T}e^{\underline{s}})^i$ entraîne que $P_0(z) \rightarrow 0$, d'où P_0 est identiquement nul. Ainsi, la non-nullité de $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ entraîne :

$$\sum_{i=1}^d P_i(z) (\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z))^{i-1} = \sum_{i=0}^{d-1} P_{i+1}(z) (\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z))^i \equiv 0.$$

Ceci entre en contradiction avec la minimalité de d ...

On a donc bien montré la transcendance de toute multitangente convergente non nulle. □

Sachant que l'on dispose de la relation $\mathcal{T}e^{2,2} = 2\mathcal{Z}e^2\mathcal{T}e^2$, ainsi que de la relation de duplication :

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \mathcal{T}e^2(pz) = \frac{1}{p^2} \sum_{k=0}^{p-1} \mathcal{T}e^2\left(z + \frac{k}{p}\right),$$

la mise en application de la méthode de Mahler pourrait être envisagée pour obtenir une nouvelle démonstration de la transcendance du nombre $\mathcal{Z}e^2$. Ceci permettrait d'ouvrir des pistes pour étudier l'arithmétique des multizêtas.

8.3 Absence conjecturale de \mathbb{Q} -relations linéaires entre multitangentes de poids différents.

De nombreuses conjectures sont émises pour les multizêtas. Celles-ci sont profondes, et hors de portée à ce jour. Nous disposons notamment de celle-ci, de nature transcendante :

Conjecture 7 : Notons $\mathcal{Z}_k = \begin{cases} \mathbb{Q} & , \text{ si } k = 0 . \\ \{0\} & , \text{ si } k = 1 . \\ \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}e^{\underline{s}})_{\substack{\underline{s} \in \mathcal{S}_+^* \\ \|\underline{s}\|=k}} & , \text{ si } k \geq 2 . \end{cases}$

Il n'existe pas de relation entre multizêtas de poids différents :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_k = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_k .$$

Cette conjecture entraîne notamment la transcendance des nombres $\mathcal{Z}e^s$, $s \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, mais ne suffit pas pour affirmer directement, par exemple, que : $\frac{\mathcal{Z}e^5}{\mathcal{Z}e^2 \mathcal{Z}e^3} \notin \mathbb{Q}$.

Nous pouvons conjecturer un résultat analogue pour les multitangentes :

Conjecture 8 : Notons $\mathcal{T}_k = \begin{cases} \mathbb{Q} & , \text{ si } k = 0 . \\ \{0\} & , \text{ si } k = 1 . \\ \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}e^{\underline{s}})_{\substack{\underline{s} \in \mathcal{S}_+^* \\ \|\underline{s}\|=k}} & , \text{ si } k \geq 2 . \end{cases}$

Il n'existe pas de relation entre multizêtas de poids différents :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{T}_k = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{T}_k .$$

Rappelons que nous avons conjecturé : $\forall \underline{\sigma} \in \mathcal{S}_+^*$, $\mathcal{Z}e^{\underline{\sigma}} \mathcal{T}e^2 \in \mathcal{T}_{\|\underline{\sigma}\|+2}$ (cf. conjecture 3, p. 159) . Cette conjecture a été vérifiée pour tous les multizêtas de poids inférieur à 12. On peut alors remarquer que la conjecture 6 entraîne alors : $\frac{\mathcal{Z}e^5}{\mathcal{Z}e^2 \mathcal{Z}e^3} \notin \mathbb{Q}$ (cf. Annexe 2) .

La propriété suivante explique le lien entre les conjectures 7 et 8.

Propriété : 1. La conjecture 7 entraîne la conjecture 8.
2. Les conjectures 3 et 8 entraînent la conjecture 7.

Démonstration : 1. Raisonnons par contraposée.

Supposons qu'il existe une \mathbb{Q} -combinaison linéaire nulle liant entre elles des multitangentes de poids différents :

$$\text{il existe } I \subset \mathbb{N} \text{ fini pour lequel il existe } (t_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i \text{ tel que } \sum_{i \in I} t_i = 0 .$$

Chaque t_i est une \mathbb{Q} -combinaison linéaire, que l'on peut supposer non nulle, de multitangentes convergentes de poids i . La réduction en monotangentes permet alors d'écrire t_i sous la forme :

$$\forall i \in I, \exists (z_{i,j})_{j \in [1; i]} \in \prod_{j=1}^i \mathcal{Z}_j, t_i = \sum_{k=2}^i z_{i,i-k} \mathcal{T}e^k .$$

Remarquons que pour i fixé dans I , il existe au moins un $z_{i,j} \neq 0$: en effet, sinon t_i serait nul. Ainsi, en notant M le plus grand élément de I , on peut écrire :

$$0 = \sum_{i \in I} t_i = \sum_{i \in I} \sum_{k=2}^i z_{i,i-k} \mathcal{T}e^k = \sum_{k=2}^M \left(\sum_{\substack{i \in I \\ i \geq k}} z_{i,i-k} \right) \mathcal{T}e^k .$$

L'indépendance linéaire des $(\mathcal{T}e^k)_{k \geq 2}$ entraîne alors :

$$\forall k \in \llbracket 2; M \rrbracket, \quad \sum_{i \in I, i \geq k} z_{i, i-k} = 0.$$

Pour chaque valeur de k , nous obtenons alors une \mathbb{Q} -combinaison linéaire nulle de multizêtas dont les poids sont différents et dont les coefficients sont non tous nuls.

$$\text{Ainsi : } \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_k \neq \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_k.$$

Nous avons donc montré que :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{T}_k \neq \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{T}_k \implies \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_k \neq \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_k.$$

2. Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe des relations linéaires nulle, mais non triviales, de multizêtas de poids différents.

Considérons alors une telle relation :

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (\underline{s}^1; \dots; \underline{s}^n) \in \mathcal{S}_+^{n_i}, \exists (c_1; \dots; c_n) \in (\mathbb{Q} - \{0\})^n, \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{Z}e^{\underline{s}^i} = 0, \text{ où}$$

l'application $i \mapsto \|\underline{s}^i\|$ n'est pas constante.

Ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{Z}e^{\underline{s}^i} \mathcal{T}e^2(z) = 0.$$

La conjecture 3 permet d'écrire, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $c_i \mathcal{Z}e^{\underline{s}^i} \mathcal{T}e^2$ sous la forme d'une \mathbb{Q} -combinaison linéaire de multitangentes convergentes de poids $\|\underline{s}^i\| + 2$:

$$\exists n_i \in \mathbb{N}, \exists (\underline{s}^{i,1}; \dots; \underline{s}^{i,n_i}) \in (\mathcal{S}^*)^{n_i}, \exists (c_{i,1}; \dots; c_{i,n_i}) \in \mathbb{Q}^{n_i}, c_i \mathcal{Z}e^{\underline{s}^i} \mathcal{T}e^2 = \sum_{j=1}^{n_i} c_{i,j} \mathcal{T}e^{\underline{s}^{i,j}}.$$

On obtient donc une \mathbb{Q} -combinaison linéaire de multitangentes nulles dont les coefficients sont non tous nuls (sinon tous les c_i seraient nuls) et dont les poids sont différents :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} c_{i,j} \mathcal{T}e^{\underline{s}^{i,j}} = 0.$$

Ceci contredit l'absence de \mathbb{Q} -combinaison linéaire entre multitangentes de poids différents. On a donc montré que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{T}_k = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{T}_k \\ \forall \underline{\sigma} \in \mathcal{S}_+^*, \mathcal{Z}e^{\underline{\sigma}} \mathcal{T}e^2 \in \mathcal{T}_{\|\underline{\sigma}\|+2} \end{array} \right. \implies \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_k = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_k.$$

□

9 Sur l'éventuelle dimorphie de l'espace des multizêtas retrouvés par les multitangentes.

9.1 Un premier diagramme commutatif : deux moyens pour multiplier deux multitangentes entre elles.

Nous disposons de deux faits essentiels :

1. la symétréilité du moule $\mathcal{T}e^\bullet$.
2. la réduction des multitangentes en monotangentes.

Ainsi, nous disposons de deux procédés pour multiplier deux multitangentes entre elles, donnés par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{MTGF} \times \mathcal{MTGF} & \xrightarrow{\text{multiplication symétr}\acute{e}\text{l}\grave{e}} & \mathcal{MTGF} \\
 \text{réduction} \otimes \text{réduction} \downarrow & & \downarrow \text{réduction} \\
 \mathcal{MTGF} \times \mathcal{MTGF} & & \\
 \text{multiplication symétr}\acute{e}\text{l}\grave{e} \downarrow & & \\
 \mathcal{MTGF} & \xrightarrow{\text{réduction}} & \mathcal{MTGF}
 \end{array}$$

Dans ce diagramme commutatif, le mot “réduction” désigne l’extension par linéarité à tout \mathcal{MTGF} de la réduction d’une multitangente en monotangentes ; l’expression “réduction \otimes réduction” désigne le produit tensoriel de “réduction” par elle-même ; enfin l’expression “multiplication symétr \acute{e} l \grave{e} ” désigne l’extension par bilinéarité de la multiplication suivant la loi de symétr \acute{e} l \grave{e} de deux multitangentes.

Bien sûr, ces deux procédés donnent des résultats égaux. Mais, ce qui est intéressant ici, ce sont les différences d’écritures, et donc l’obtention de relations entre multizêtas.

9.1.1 Autour des relations de symétr \acute{e} l \grave{e} des multitangentes.

Tout d’abord, ce double procédé de multiplication des multitangentes permet de retrouver en particulier toutes les relations de symétr \acute{e} l \grave{e} entre multizêtas.

Propriété : La symétr \acute{e} l \grave{e} de $\mathcal{T}e^\bullet$ et le diagramme commutatif précédent entraînent la symétr \acute{e} l \grave{e} de $\mathcal{Z}e^\bullet$.

Démonstration : Fixons-nous deux séquences \underline{s}^1 et \underline{s}^2 de \mathcal{S}^* . Notons M_0 , le plus grand entier apparaissant dans ces deux séquences ; notons enfin $M = M_0 + 1$.

Nous allons calculer le produit $\mathcal{T}e^{\underline{s}^1 \cdot M} \mathcal{T}e^{\underline{s}^2 \cdot M}$ en suivant les deux procédés décrits précédemment de multiplication des multitangentes. Nous ne considérerons, dans les deux résultats obtenus, que la monotangente dont l’argument est le plus grand possible (par indépendance linéaire des monotangentes, cf. §8.1), ie $\mathcal{T}e^{2M}$.

Par symétr \acute{e} l \grave{e} de $\mathcal{T}e^\bullet$, puis en appliquant la définition récursive de l’ensemble sh_e , on a :

$$\mathcal{T}e^{\underline{s}^1 \cdot M} \mathcal{T}e^{\underline{s}^1 \cdot M} = \sum_{\underline{s} \in sh_e(\underline{s}^1; \underline{s}^2 \cdot M) \cup sh_e(\underline{s}^1 \cdot M; \underline{s}^2)} \mathcal{T}e^{\underline{s} \cdot M} + \sum_{\underline{s} \in sh_e(\underline{s}^1; \underline{s}^2)} \mathcal{T}e^{\underline{s} \cdot M} .$$

Ainsi, la composante $\mathcal{T}e^{2M}$ du produit $\mathcal{T}e^{\underline{s}^1 \cdot M} \mathcal{T}e^{\underline{s}^1 \cdot M}$, obtenue par multiplication par symétr \acute{e} l \grave{e} , puis réduction en monotangentes, est : $\sum_{\underline{s} \in sh_e(\underline{s}^1; \underline{s}^2)} \mathcal{Z}e^{\underline{s}}$.

D’un autre côté, dans les réductions en monotangentes de $\mathcal{T}e^{\underline{s}^1 \cdot M}$ et $\mathcal{T}e^{\underline{s}^2 \cdot M}$, seules les composantes $\mathcal{T}e^M$ pourront donner une contribution à la monotangente $\mathcal{T}e^{2M}$. Ces composantes $\mathcal{T}e^M$ sont respectivement $\mathcal{Z}e^{\underline{s}^1} \mathcal{T}e^M$ et $\mathcal{Z}e^{\underline{s}^2} \mathcal{T}e^M$. On en déduit que la composante $\mathcal{T}e^{2M}$ du produit $\mathcal{T}e^{\underline{s}^1 \cdot M} \mathcal{T}e^{\underline{s}^1 \cdot M}$, obtenue par réduction en monotangentes, puis par multiplication par symétr \acute{e} l \grave{e} , et de nouveau par réduction, est : $\mathcal{Z}e^{\underline{s}^1} \mathcal{Z}e^{\underline{s}^2}$.

Par conséquent, on obtient bien la relation de symétrélicité voulue :

$$\mathcal{Z}e^{\mathfrak{s}^1} \mathcal{Z}e^{\mathfrak{s}^2} = \sum_{\mathfrak{s} \in \text{sh}(\mathfrak{s}^1; \mathfrak{s}^2)} \mathcal{Z}e^{\mathfrak{s}} .$$

Cela prouve donc que : $\mathcal{T}e^\bullet$ est symétrélicé $\implies \mathcal{Z}e^\bullet$ est symétrélicé .

□

On peut évidemment se poser la question de la réciproque. La réponse est clair et provient de la factorisation moulienne de $\mathcal{T}e^\bullet$.

Rappelons tout de même que cette propriété ne redémontre aucunement la symétrélicité de $\mathcal{Z}e^\bullet$, car les méthodes employées pour démontrer la symétrélicité de $\mathcal{T}e^\bullet$ et de $\mathcal{Z}e^\bullet$ sont identiques. Cette propriété sera néanmoins utile pour étudier les relations obtenues entre multizêtas (cf. §9.5) à partir de la connaissance des multitangentes.

9.1.2 Obtention d'autres relations que celles de symétrélicité.

Raisonnons par l'absurde.

Supposons que le diagramme de multiplication des multitangentes ne donne que des relations provenant de la symétrélicité des multizêtas.

Effectuons le calcul des deux procédés de multiplication dans le cas le plus simple où le diagramme apporte un résultat.

$$\begin{aligned} 1. \quad \mathcal{T}e^2 \times \mathcal{T}e^{2,2} &= 2\mathcal{Z}e^2 (\mathcal{T}e^2)^2 = 4\mathcal{Z}e^2 \mathcal{T}e^{2,2} + 2\mathcal{Z}e^2 \mathcal{T}e^4 \\ &= 8(\mathcal{Z}e^2)^2 \mathcal{T}e^2 + 2\mathcal{Z}e^2 \mathcal{T}e^4 . \\ 2. \quad \mathcal{T}e^2 \times \mathcal{T}e^{2,2} &= 3\mathcal{T}e^{2,2,2} + \mathcal{T}e^{4,2} + \mathcal{T}e^{2,4} \\ &= \left(3(\mathcal{Z}e^2)^2 + 6\mathcal{Z}e^{2,2} + 8\mathcal{Z}e^4 \right) \mathcal{T}e^2 + 2\mathcal{Z}e^2 \mathcal{T}e^4 . \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'indépendance linéaire des monotangentes, on obtient la relation

$$6\mathcal{Z}e^{2,2} + 8\mathcal{Z}e^4 = 5(\mathcal{Z}e^2)^2 . \quad (58)$$

Or, modulo la symétrélicité des multizêtas, (58) se réécrit ainsi :

$$3\mathcal{Z}e^4 = 4\mathcal{Z}e^{2,2} . \quad (59)$$

Mais, la seule relation de symétrélicité, de poids total 4, est :

$$(\mathcal{Z}e^2)^2 = 2\mathcal{Z}e^{2,2} + \mathcal{Z}e^4 . \quad (60)$$

Si (59) provenait de (60), en utilisant uniquement la symétrélicité de $\mathcal{Z}e^\bullet$, on aurait alors connaissance des valeurs

$$\begin{cases} \mathcal{Z}e^4 = \frac{2}{5}(\mathcal{Z}e^2)^2 . \\ \mathcal{Z}e^{2,2} = \frac{3}{10}(\mathcal{Z}e^2)^2 . \end{cases}$$

Pourtant, pour obtenir ces relations, on a besoin des trois équations suivantes, provenant des trois types de relations décrivant conjecturalement le noyau de ζ :

$$\begin{aligned} (\mathcal{Z}e^2)^2 &= 2\mathcal{Z}e^{2,2} + \mathcal{Z}e^4 . \\ (\mathcal{Z}e^2)^2 &= 2\mathcal{Z}e^{2,2} + 4\mathcal{Z}e^{3,1} . \\ \mathcal{Z}e^4 &= \mathcal{Z}e^{2,2} + \mathcal{Z}e^{3,1} . \end{aligned}$$

Ceci met en évidence une contradiction.

Ainsi, le diagramme commutatif des multiplications des multitangentes apporte d'autres relations que celles de symétrélité. Il s'agit de relations entre multizêtas de troisième espèce, c'est-à-dire des \mathbb{Q} -combinaisons linéaires de relations de symétralité et symétrélité.

9.1.3 Passage aux séries génératrices.

Pour synthétiser les résultats, nous avons tout intérêt à utiliser les séries génératrices. Le diagramme commutatif que l'on vient de considérer se réécrit alors comme suit :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{MTGF}_g \times \mathcal{MTGF}_g & \xrightarrow{\text{multiplication symétréle}} & \mathcal{MTGF}_g \\
 \downarrow \text{réduction} \otimes \text{réduction} & & \downarrow \text{réduction} \\
 \mathcal{MTGF}_g \times \mathcal{MTGF}_g & & \mathcal{MTGF}_g \\
 \downarrow \text{multiplication symétréle} & & \downarrow \text{réduction} \\
 \mathcal{MTGF}_g & \xrightarrow{\text{réduction}} & \mathcal{MTGF}_g
 \end{array}$$

Dans ce diagramme commutatif, le mot “réduction” désigne l'extension par linéarité à tout \mathcal{MTGF}_g de la réduction d'une multitangente en monotangentes (cf. le théorème p. 140) ; l'expression “réduction \otimes réduction” désigne le produit tensoriel de “réduction” par elle-même ; enfin l'expression “multiplication symétréle” désigne l'extension par bilinéarité de la multiplication suivant la loi de symétrélité de deux fonctions génératrices des multitangentes.

9.2 Un second diagramme commutatif : deux manières de dériver une multitangente.

De même que nous disposons de deux procédés pour multiplier deux multitangentes entre elles, nous disposons de deux procédés pour dériver une multitangente. Ceux-ci sont donnés par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{MTGF} & \xrightarrow{\text{dérive}} & \mathcal{MTGF} \\
 \downarrow \text{réduction} & & \downarrow \text{réduction} \\
 \mathcal{MTGF} & \xrightarrow{\text{dérive}} & \mathcal{MTGF}
 \end{array}$$

Ici, le mot “réduction” désigne toujours l'extension par linéarité à tout \mathcal{MTGF} de la réduction d'une multitangente en monotangentes et le mot “dérive” désigne l'extension par linéarité de la dérivation d'une multitangente.

Ce diagramme est naturel et semble pouvoir fournir des relations entre multizêtas. Pourtant, il n'en est rien... En effet, “dérive” va scinder les coefficients du binôme en une somme de coefficients du binôme. Cela ne donnera donc aucun nouveau renseignement sur les multizêtas.

Voyons cela en détail, à travers le lemme suivant :

Lemme : Soient $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$ de longueur r et $k \in \llbracket 2; \max(s_1; \dots; s_r) \rrbracket$.

$$\text{Alors : } \forall j \in \llbracket 1; r \rrbracket, \sum_{\substack{i \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ s_j \geq k - \delta_{i,j}}} s_i \mathcal{Z}_{j, s_j + \delta_{i,j} - k}^{\underline{s} + \mathbf{e}_i} = (k-1) \mathbb{1}_{\llbracket k-1; +\infty \rrbracket}((s_j) \mathcal{Z}_{j, s_j - k + 1}^{\underline{s}}).$$

Démonstration : L'égalité $\sum_{\substack{i \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ s_j \geq k - \delta_{i,j}}} s_i \mathcal{Z}_{j, s_j + \delta_{i,j} - k}^{\underline{s} + \mathbf{e}_i} = (k-1) \mathbb{1}_{\llbracket k-1; +\infty \rrbracket}((s_j) \mathcal{Z}_{j, s_j - k + 1}^{\underline{s}})$ que l'on cherche

à démontrer résulte d'un calcul simple. Celui-ci s'effectue en séparant la première somme en deux : d'un côté les indices $i \neq j$ et de l'autre l'indice $i = j$; puis on effectue un décalage d'indices et enfin on utilise le fait que :

$$\begin{cases} s_i {}^j E_{\underline{k} - \mathbf{e}_i}^{\underline{s} + \mathbf{e}_i} = -k_i {}^j E_{\underline{k}}^{\underline{s}} & , \text{ si } i \neq j. \\ {}^j E_{\underline{k}}^{\underline{s} + \mathbf{e}_i} = {}^j E_{\underline{k}}^{\underline{s}} & , \text{ si } i = j. \end{cases}$$

Alors, on a successivement :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ s_j \geq k - \delta_{i,j}}} s_i \mathcal{Z}_{j, s_j + \delta_{i,j} - k}^{\underline{s} + \mathbf{e}_i} &= \sum_{\substack{i \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ s_j \geq k - \delta_{i,j}}} \sum_{\substack{k_l \geq 0, l \neq j \\ \sum_{l \neq j} k_l = s_j + 1 - k}} s_i {}^j E_{\underline{k}}^{\underline{s} + \mathbf{e}_i} \mathcal{Z}e^{(\underline{s} + \mathbf{k} + \mathbf{e}_i)^{<j}} \mathcal{Z}e^{\overleftarrow{(\underline{s} + \mathbf{k} + \mathbf{e}_i)^{>j}}} \\ &= \sum_{\substack{i \in \llbracket 1; r \rrbracket - \{j\} \\ s_j \geq k}} \sum_{\substack{k_l \geq 0, l \neq j \\ \sum_{l \neq j} k_l = s_j + 1 - k}} s_i \mathbb{1}_{\llbracket 1; +\infty \rrbracket}(k_i) {}^j E_{\underline{k} - \mathbf{e}_i}^{\underline{s} + \mathbf{e}_i} \mathcal{Z}e^{(\underline{s} + \mathbf{k})^{<j}} \mathcal{Z}e^{\overleftarrow{(\underline{s} + \mathbf{k})^{>j}}} \\ &\quad + \sum_{\substack{k_l \geq 0, l \neq j \\ \sum_{l \neq j} k_l = s_j + 1 - k}} s_j \mathbb{1}_{\llbracket k-1; +\infty \rrbracket}((s_j) {}^j E_{\underline{k}}^{\underline{s} + \mathbf{e}_i} \mathcal{Z}e^{(\underline{s} + \mathbf{k})^{<j}} \mathcal{Z}e^{\overleftarrow{(\underline{s} + \mathbf{k})^{>j}}}) \\ &= - \sum_{\substack{i \in \llbracket 1; r \rrbracket - \{j\} \\ s_j \geq k}} \sum_{\substack{k_l \geq 0, l \neq j \\ \sum_{l \neq j} k_l = s_j + 1 - k}} k_i \mathbb{1}_{\llbracket 1; +\infty \rrbracket}(k_i) {}^j E_{\underline{k}}^{\underline{s}} \mathcal{Z}e^{(\underline{s} + \mathbf{k})^{<j}} \mathcal{Z}e^{\overleftarrow{(\underline{s} + \mathbf{k})^{>j}}} \\ &\quad + s_j \mathbb{1}_{\llbracket k-1; +\infty \rrbracket}((s_j) \mathcal{Z}_{j, s_j + 1 - k}^{\underline{s}}) \\ &= \sum_{\substack{k_l \geq 0, l \neq j \\ \sum_{l \neq j} k_l = s_j + 1 - k}} \left(- \sum_{\substack{i \in \llbracket 1; r \rrbracket - \{j\} \\ s_j \geq k}} k_i \mathbb{1}_{\llbracket 0; +\infty \rrbracket}(k_i) \right) {}^j E_{\underline{k}}^{\underline{s}} \mathcal{Z}e^{(\underline{s} + \mathbf{k})^{<j}} \mathcal{Z}e^{\overleftarrow{(\underline{s} + \mathbf{k})^{>j}}} \\ &\quad + s_j \mathbb{1}_{\llbracket k-1; +\infty \rrbracket}((s_j) \mathcal{Z}_{j, s_j + 1 - k}^{\underline{s}}) \\ &= \sum_{\substack{k_l \geq 0, l \neq j \\ \sum_{l \neq j} k_l = s_j + 1 - k}} (s_j + 1 - k) \mathbb{1}_{\llbracket k; +\infty \rrbracket}((s_j) {}^j E_{\underline{k}}^{\underline{s}} \mathcal{Z}e^{(\underline{s} + \mathbf{k})^{<j}} \mathcal{Z}e^{\overleftarrow{(\underline{s} + \mathbf{k})^{>j}}}) \\ &\quad + s_j \mathbb{1}_{\llbracket k-1; +\infty \rrbracket}((s_j) \mathcal{Z}_{j, s_j + 1 - k}^{\underline{s}}) \\ &= \left(s_j \mathbb{1}_{\llbracket k-1; +\infty \rrbracket}((s_j)) - (s_j + 1 - k) \mathbb{1}_{\llbracket k; +\infty \rrbracket}((s_j)) \right) \mathcal{Z}_{j, s_j + 1 - k}^{\underline{s}}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\sum_{\substack{i \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ s_j \geq k - \delta_{i,j}}} s_i \mathcal{Z}_{j, s_j + \delta_{i,j} - k}^{\underline{s} + \mathbf{e}_i} = (k-1) \mathbb{1}_{\llbracket k-1; +\infty \rrbracket}((s_j) \mathcal{Z}_{j, s_j + 1 - k}^{\underline{s}}).$$

□

Nous en déduisons immédiatement le corollaire suivant :

- Corollaire :**
1. Les seules relations entre multizêtas que l'on peut déduire de l'égalité "dérive \circ réduction = réduction \circ dérive" sont exactement les relations de symétr \underline{a} lité obtenues par l'annulation de la composante $\mathcal{T}e^1$ dans la réduction en monotangentes.
 2. L'égalité "dérive \circ réduction = réduction \circ dérive" provient du scindage précédent des coefficients du binôme et ne donne donc aucune nouvelle relation entre multizêtas.

Démonstration : • Rappelons que :

$$\begin{aligned} \text{réduction} \circ \text{dérive} &= - \sum_{k=2}^{\max(s_1; \dots; s_r)+1} \left(\sum_{i=1}^r \sum_{\substack{j \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ s_j \geq k - \delta_{i,j}}} s_i \mathcal{Z}_{j, s_j + \delta_{i,j} - k}^{\mathbf{s} + \mathbf{e}_i} \mathcal{T}e^k \right) . \\ \text{dérive} \circ \text{réduction} &= - \sum_{k=3}^{\max(s_1; \dots; s_r)+1} \left((k-1) \sum_{\substack{j \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ s_j \geq k-1}} \mathcal{Z}_{j, s_j - k + 1}^{\mathbf{s}} \mathcal{T}e^k \right) . \end{aligned}$$

L'indépendance linéaire des multitangentes (cf. p. 172) permet donc de traduire l'égalité "réduction \circ dérive = dérive \circ réduction" en une égalité composante par composante :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r \sum_{\substack{j \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ s_j \geq k - \delta_{i,j}}} s_i \mathcal{Z}_{j, s_j + \delta_{i,j} - k}^{\mathbf{s} + \mathbf{e}_i} = (k-1) \sum_{\substack{j \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ s_j \geq k-1}} \mathcal{Z}_{j, s_j - k + 1}^{\mathbf{s}} \quad , \text{ si } k \geq 3 . \\ \sum_{j \in \llbracket 1; r \rrbracket} \mathcal{Z}_{j, s_j - 1}^{\mathbf{s}} = 0 . \end{cases}$$

- Pour $k \in \llbracket 2; \max(s_1; \dots; s_r) + 1 \rrbracket$, le lemme précédent implique sans peine :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\substack{j \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ s_j \geq k - \delta_{i,j}}} s_i \mathcal{Z}_{j, s_j + \delta_{i,j} - k}^{\mathbf{s} + \mathbf{e}_i} \right) &= \sum_{j=1}^r \left(\sum_{\substack{i \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ s_j \geq k - \delta_{i,j}}} s_i \mathcal{Z}_{j, s_j + \delta_{i,j} - k}^{\mathbf{s} + \mathbf{e}_i} \right) \\ &= \sum_{j=1}^r (k-1) \mathbb{1}_{\llbracket k-1; +\infty \rrbracket}(s_j) \mathcal{Z}_{j, s_j - k + 1}^{\mathbf{s}} \\ &= (k-1) \sum_{\substack{j \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ s_j \geq k-1}} \mathcal{Z}_{j, s_j - k + 1}^{\mathbf{s}} . \end{aligned}$$

- Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 3; \max(s_1; \dots; s_r) + 1 \rrbracket$, on obtient bien :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{\substack{j \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ s_j \geq k - \delta_{i,j}}} s_i \mathcal{Z}_{j, s_j + \delta_{i,j} - k}^{\mathbf{s} + \mathbf{e}_i} = (k-1) \sum_{\substack{j \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ s_j \geq k-1}} \mathcal{Z}_{j, s_j - k + 1}^{\mathbf{s}} .$$

Pour conclure quant à l'égalité "réduction \circ dérive = dérive \circ réduction", il reste à remarquer que la quantité $\sum_{\substack{j \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ s_j \geq k-1}} \mathcal{Z}_{j, s_j - k + 1}^{\mathbf{s}}$ est nulle lorsque $k = 2$.

Ceci sera fait en détail au paragraphe suivant et résulte de la symétr \underline{a} lité des multizêtas. □

Ainsi, aucun autre diagramme que ceux donnant les deux moyens de multiplication des multitangentes (cf. p. 176) ne pourra donner de résultats sur les multizêtas.

9.3 Quelques relations de symétralité.

9.3.1 Retour sur l'absence de composante $\mathcal{T}e^1$ dans les relations de réduction.

Nous avons vu que les multitangentes convergentes sont exponentiellement plates (cf. §7.3). Cela implique l'absence de la composante $\mathcal{T}e^1$ dans les relations de réduction précédentes. On en déduit donc des relations entre multizêtas :

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S}^* , \sum_{i=1}^{l(\underline{s})} \sum_{\substack{k_j \geq 0, j \neq i \\ \sum_{j \neq i} k_j = s_i - 1}} {}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}} \mathcal{Z} e^{s_1+k_1, \dots, s_{i-1}+k_{i-1}} \mathcal{Z} e^{s_r+k_r, \dots, s_{i+1}+k_{i+1}} = 0 .$$

D'un autre point de vue, nous pouvons montrer indépendamment ces relations entre multizêtas, ce qui aura immédiatement comme corollaire le caractère exponentiellement plat des multitangentes, mais répondra aussi à la question “*ces relations entre multizêtas sont-elles des conséquences des relations quadratiques ?*”

En fait, ces relations sont uniquement des conséquences des relations de symétralité. Notons $S(r)$ le membre de gauche de l'égalité précédente, i. e. :

$$\forall r \in \mathbb{N}^* , \forall \underline{s} \in \mathcal{S}^* , l(\underline{s}) = r , S(r) = \sum_{i=1}^{l(\underline{s})} \sum_{\substack{k_j \geq 0, j \neq i \\ \sum_{j \neq i} k_j = s_i - 1}} {}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}} \mathcal{Z} e^{s_1+k_1, \dots, s_{i-1}+k_{i-1}} \mathcal{Z} e^{s_r+k_r, \dots, s_{i+1}+k_{i+1}} .$$

Nous allons montrer que la nullité de $S(r)$, pour tout $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$, en linéarisant par symétralité, les produits de multizêtas. Voyons en détail cela :

Tout multizêta admet une représentation intégrale bien connue, due à Goncharov, sous la forme d'une intégrale itérée : nous renvoyons le lecteur à la section 9.4.1, pour des rappels sur les intégrales itérées. Cette représentation intégrale est équivalente à une autre représentation qui est tout aussi connue :

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S}_+^* , \mathcal{Z} e^{\underline{s}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^r (s_i - 1)!} \int_{0 < u_1 < \dots < u_r < +\infty} \frac{u_1^{s_1-1} (u_2 - u_1)^{s_2-1} \dots (u_r - u_{r-1})^{s_r}}{(e^{u_1} - 1) \dots (e^{u_r} - 1)} du_1 \dots du_r .$$

Ainsi, pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$ de longueur r et pour tout $i \in \llbracket 1 ; r \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k_j \geq 0, j \neq i \\ \sum_{j \neq i} k_j = s_i - 1}} {}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}} \mathcal{Z} e^{s_1+k_1, \dots, s_{i-1}+k_{i-1}} \mathcal{Z} e^{s_r+k_r, \dots, s_{i+1}+k_{i+1}} \\ &= \frac{(-1)^{s_{i+1}+\dots+s_r}}{\prod_{p=1}^r (s_p - 1)!} \sum_{\substack{k_j \geq 0, j \neq i \\ \sum_{j \neq i} k_j = s_i - 1}} \frac{(s_i - 1)!}{k_1! \dots \widehat{k_i!} \dots k_r!} \times \\ & \quad \left(\int_{0 < u_1 < \dots < u_{i-1} < +\infty} \prod_{p=0}^{i-2} \frac{(u_{p+1} - u_p)^{s_{p+1}+k_{p+1}-1}}{e^{u_{p+1}} - 1} du_1 \dots du_{i-1} \right) \times \\ & \quad \left(\int_{0 < u_r < \dots < u_{i+1} < +\infty} \prod_{p=i+1}^r \frac{(u_p - u_{p+1})^{s_p+k_p-1}}{e^{u_p} - 1} du_{i+1} \dots du_r \right) , \end{aligned}$$

où $u_0 = 0$ et $u_{r+1} = 0$.

$$= \frac{(-1)^{s_{i+1}+\dots+s_r}}{\prod_{p=1}^r (s_p - 1)!} \int_{\{0 < u_1 < \dots < u_{i-1} < +\infty\} \times \{0 < u_r < \dots < u_{i+1} < +\infty\}} g_i(u_1; \dots; u_r) du_1 \dots \widehat{du_i} \dots du_r ,$$

$$\text{où } g_i(u_1; \dots; u_r) = \left(\prod_{p \in \llbracket 1; r \rrbracket - \{i\}} \frac{(u_p - u_{p-1})^{s_p - 1}}{e^{u_p} - 1} \right) (u_{i+1} - u_{i-1})^{s_i - 1},$$

toujours avec $u_0 = 0$ et $u_{r+1} = 0$.

Pour pouvoir conclure quant à la nullité de $S(r)$, il s'agit désormais d'effectuer le produit de mélange $\{0 < u_1 < \dots < u_{i-1} < +\infty\} \times \{0 < u_r < \dots < u_{i+1} < +\infty\}$. Pour cela, introduisons quelques notations issues de l'approche syntaxique des multizêtas.

Considérons l'alphabet $\Omega_r = \{u_1; \dots; u_r\}$, le polynôme non commutatif

$$e_r = \sum_{i=1}^r (u_1 \dots u_{i-1}) \sqcup\sqcup (u_r \dots u_{i+1})$$

ainsi que l'ensemble $E_r = \{\omega \in \Omega_r^* ; \langle e_r | \omega \rangle \neq 0\}$ des mots de Ω_r^* apparaissant dans ce polynôme, i.e. dans la linéarisation des multizêtas. Enfin, à tout mot $\omega = u_{i_1} \dots u_{i_r}$ de Ω_r^* contenant exactement une fois chaque lettre de l'alphabet Ω_r^* sauf une que nous noterons u_i , associons l'intégrale $I(\omega)$ définie par :

$$I(\omega) = I(u_{i_1} \dots u_{i_r}) = (-1)^{s_{i+1}+\dots+s_r} \int_{0 < u_{i_1} < \dots < u_{i_r} < +\infty} g_i(u_1; \dots; u_r) du_1 \dots \widehat{du_i} \dots du_r .$$

$$\text{Ainsi : } S(r) = \frac{1}{\prod_{p=1}^r (s_p - 1)!} \left(\sum_{\omega \in E_r} I(\omega) \right) .$$

Nous allons calculer la somme apparaissant dans l'égalité précédente en regroupant deux à deux les éléments de E_r , de sorte à décomposer E_r en une famille de couples de mots que nous appellerons **mots associés**.

Définition : Considérons, pour tout $(k; l) \in \llbracket 1; r \rrbracket^2$, le morphisme $\varphi_{k,l}$ de Ω_r^* (pour la concaténation des mots) défini par :

$$\begin{aligned} \varphi_{k,l} : \llbracket 1; r \rrbracket &\longrightarrow \llbracket 1; r \rrbracket \\ u_i &\longmapsto \begin{cases} u_i , & \text{si } i \neq l . \\ u_k , & \text{si } i = l . \end{cases} \end{aligned}$$

On dit que deux mots ω^1 et ω^2 de Ω_r^* sont **associés** lorsque :

$$\exists i \in \llbracket 1; r \rrbracket , \omega^2 = \varphi_{i,i+1}(\omega^1) \text{ ou } \omega^1 = \varphi_{i,i+1}(\omega^2) .$$

On note alors : $\omega^1 \check{\simeq} \omega^2$.

³⁴ Voir page 206 pour la définition du produit de battage de deux polynômes non commutatifs.

Soit $\widetilde{\Omega}_r^*$, l'ensemble des mots de Ω_r^* contenant exactement une fois toutes les lettres de Ω_r , à l'exception d'une lettre n'apparaissant pas. Notons que deux mots de $\widetilde{\Omega}_r^*$ peuvent, bien sûr, ne pas avoir la même lettre manquante. Enfin, à chaque mot $\omega = u_{s_1} \cdots u_{s_{r-1}}$ de $\widetilde{\Omega}_r^*$, associons une permutation σ_ω de $\llbracket 1; r \rrbracket - \{i\}$, où i est l'indice de la lettre manquante de ω , définie par : $\sigma_\omega = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & r \\ s_1 & \cdots & s_{i-1} & s_i & \cdots & s_{r-1} \end{pmatrix}$.

Nous disposons alors des propriétés suivantes, qui ne sont que de simples conséquences des définitions et notations posées :

- Lemme :**
1. $\forall \omega \in E_r, \forall i \in \llbracket 1; r-1 \rrbracket, \sigma_{\varphi_{i,i+1}(\omega)} = \rho_{i,i+1} \circ \sigma_\omega \circ \rho_{i,i+1}^{-1}$, avec $\rho_{i,i+1} : \llbracket 1; r \rrbracket - \{i\} \longrightarrow \llbracket 1; r \rrbracket - \{i+1\}$
 $k \longmapsto \begin{cases} k, & \text{si } k \neq i+1. \\ i, & \text{si } k = i+1. \end{cases}$
 2. $\forall \omega \in E_r, \exists ! \omega' \in E_r - \{\omega\}, \omega \not\propto \omega'$.
 3. $\forall (\omega^1; \omega^2) \in E_r^2, \omega^1 \not\propto \omega^2 \implies I(\omega^1) = -I(\omega^2)$.

Démonstration : 1. Soit $\omega \in E_r$. Notons i , l'indice de la lettre manquante dans le mot ω .

Quant à la permutation σ_ω , deux cas sont alors possibles :
ou bien $\sigma_\omega(i+1) = i+1$,
ou bien $\sigma_\omega(i+1) \neq i+1$.

Premier cas : $\sigma_\omega(i+1) = i+1$.

Alors, le mot $\varphi_{i,i+1}(\omega)$ s'écrit : $\varphi_{i,i+1}(\omega) = \omega^{<i-1} u_i \omega^{>i+1}$. Ainsi :

$$\sigma_{\varphi_{i,i+1}(\omega)} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+2 & \cdots & r \\ \sigma_\omega(1) & \cdots & \sigma_\omega(i-1) & i & \sigma_\omega(i+2) & \cdots & \sigma_\omega(r) \end{pmatrix}.$$

Il n'y a plus qu'à calculer $\rho_{i,i+1} \circ \sigma_\omega \circ \rho_{i,i+1}^{-1}$ pour conclure :

$$\begin{cases} \rho_{i,i+1} \circ \sigma_\omega \circ \rho_{i,i+1}^{-1}(k) = \rho_{i,i+1} \circ \sigma_\omega(k) = \sigma_\omega(k), & \text{si } k \in \llbracket 1; r \rrbracket - \{i, i+1\}. \\ \rho_{i,i+1} \circ \sigma_\omega \circ \rho_{i,i+1}^{-1}(i) = i. \end{cases}$$

Second cas : $\sigma_\omega(i+1) \neq i+1$.

Ce cas se traite comme le premier, après avoir noté $j = \sigma_\omega^{-1}(i+1)$. Ecrivons alors : $\varphi_{i,i+1}(\omega) = \omega^{<i} \cdot \omega^{i \leq \cdot < j} \cdot u_i \cdot \omega^{> j}$ ou $\varphi_{i,i+1}(\omega) = \omega^{< j} \cdot u_i \cdot \omega^{j < \cdot < i} \cdot \omega^{\geq i}$, selon que $i+1 < j$ ou $i+1 > j$.

Ainsi, on a bien : $\sigma_{\varphi_{i,i+1}(\omega)} = \rho_{i,i+1} \circ \sigma_\omega \circ \rho_{i,i+1}^{-1}$.

2. Soit $\omega \in E_r$.

Nécessairement, pour ne pas avoir de lettre apparaissant deux fois, les seuls mots de ω susceptibles d'être éléments de E_r et associés à ω sont ceux où i est l'indice de la lettre manquante de Ω . Nous disposons donc de deux candidats potentiels : $\omega' = \varphi_{i,i+1}(\omega)$ et $\omega' = \varphi_{i-1,i}(\omega)$.

• Si $i = 1$, seul ω' est correctement défini. Plus précisément, on a $\omega = u_r \cdots u_2$ et $\omega' = u_r \cdots u_3 u_1$.

Ainsi, ω' est bien un battage de u_1 et de $u_r \cdots u_3$: donc, c'est un élément de E_r .

- Si $i \in \llbracket 2; r-1 \rrbracket$, puisque ω est un mélange de $u_1 \cdots u_{i-1}$ et $u_r \cdots u_{i+1}$, on a, par définition du mélange des séquences :

$$\begin{cases} \sigma_{\omega}^{-1}(1) < \cdots < \sigma_{\omega}^{-1}(i-1) . \\ \sigma_{\omega}^{-1}(r) < \cdots < \sigma_{\omega}^{-1}(i+1) . \end{cases}$$

Puisque $\sigma_{\varphi_{i,i+1}(\omega)} = \rho_{i,i+1} \circ \sigma_{\omega} \circ \rho_{i,i+1}^{-1}$ et $\sigma_{\varphi_{i,i-1}(\omega)} = \rho_{i,i-1} \circ \sigma_{\omega} \circ \rho_{i,i-1}^{-1}$, d'après le premier point, on montre facilement, par croissance de $\rho_{i,i+1}$ et $\rho_{i,i-1}$, que :

$$\begin{cases} \sigma_{\omega'}^{-1}(1) < \cdots < \sigma_{\omega'}^{-1}(i-1) \\ \sigma_{\omega'}^{-1}(r) < \cdots < \sigma_{\omega'}^{-1}(i+2) < \sigma_{\omega'}^{-1}(i) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma_{\omega''}^{-1}(1) < \cdots < \sigma_{\omega''}^{-1}(i-2) < \sigma_{\omega''}^{-1}(i) . \\ \sigma_{\omega''}^{-1}(r) < \cdots < \sigma_{\omega''}^{-1}(i+1) . \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \omega' \in E_r & \iff \sigma_{\omega'}^{-1}(i-1) < \sigma_{\omega'}^{-1}(i) & \iff \sigma_{\omega}^{-1}(i-1) < \sigma_{\omega}^{-1}(i+1) . \\ \omega'' \in E_r & \iff \sigma_{\omega''}^{-1}(i+1) < \sigma_{\omega''}^{-1}(i) & \iff \sigma_{\omega}^{-1}(i+1) < \sigma_{\omega}^{-1}(i-1) . \end{cases}$$

Ainsi, ω possède exactement un et un seul mot associé dans E_r .

- Si $i = r$, alors en procédant comme dans le cas où $i = 1$, seul ω'' est correctement défini et on a : $\omega'' = u_1 \cdots u_{r-2} u_r \in E_r$. Or $\omega = u_1 \cdots u_{r-1}$, d'où $\omega \not\sim \omega''$.

3. Soient $\omega^1 = u_{k_1} \cdots u_{k_{r-1}}$ et $\omega^2 = u'_{k_1} \cdots u'_{k_{r-1}}$ deux mots associés de E_r .

Notons i , l'indice de la lettre manquante dans ω^1 et $j = \sigma_{\omega^1}^{-1}(i+1)$. Ainsi, $\omega^2 = \omega^1 <^j u_i \omega^1 >^j$.

$$\text{Notons aussi } \begin{cases} D(\omega^1) = \{0 < u_{k_1} < \cdots < u_{k_{j-1}} < u_{i+1} < u_{k_{j+1}} < u_{k_{r-1}} < +\infty\} . \\ D(\omega^2) = \{0 < u_{k_1} < \cdots < u_{k_{j-1}} < u_i < u_{k_{j+1}} < u_{k_{r-1}} < +\infty\} . \end{cases}$$

Effectuons dans $I(\omega^1)$ le changement de nom de variable d'intégration $u_{i+1} \leftrightarrow u_i$:

Dans la définition de la fonction g_i , la variable u_{i+1} n'apparaît au numérateur que dans les facteurs $(u_{i+1} - u_{i-1})^{s_i-1}$ et $(u_{i+1} - u_{i+2})^{s_{i+1}-1}$ et au dénominateur à travers le facteur $e^{u_{i+1}} - 1$.

Ainsi, le changement de nom de variables $u_{i+1} \leftrightarrow u_i$ transforme $g_i(u_1; \cdots; u_r)$ en $(-1)^{s_{i+1}-1} g_{i+1}(u_1; \cdots; u_r)$.

D'un autre côté, le domaine d'intégration $D(\omega^1)$ se trouve transformé en $\{0 < u_{k_1} < \cdots < u_{k_{j-1}} < u_i < u_{k_{j+1}} < u_{k_{r-1}} < +\infty\}$, c'est-à-dire en $D(\omega^2)$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} I(\omega^1) &= \frac{(-1)^{s_{i+1} + \cdots + s_r}}{\prod_{p=1}^r (s_p - 1)!} \int_{D(\omega^1)} g_i(u_1; \cdots; u_r) du_1 \cdots \widehat{du_i} \cdots du_r \\ &= \frac{(-1)^{s_{i+1} + \cdots + s_r}}{\prod_{p=1}^r (s_p - 1)!} \int_{D(\omega^2)} (-1)^{s_{i+1}-1} g_{i+1}(u_1; \cdots; u_r) du_1 \cdots \widehat{du_{i+1}} \cdots du_r \\ &= -I(\omega^2) . \end{aligned}$$

□

Puisque E_r contient 2^{r-1} éléments, comptés avec leur multiplicité d'apparition dans E_r , nous pouvons conclure, du second énoncé du lemme précédent, que E_r se décompose en 2^{r-2} couples de mots associés dans E_r .

Ainsi, nécessairement, d'après le troisième énoncé du lemme précédent, on en déduit enfin : $S(r) = 0$.

Ceci peut donc se réécrire comme suit :

- Propriété :**
1. Le caractère exponentiellement plat des multitangentes convergentes entraîne des relations de symétralité entre multizêtas.
 2. Les relations de symétralité des multizêtas imposent l'absence de composante $\mathcal{T}e^1$ dans la réduction en monotangentes.

9.3.2 Retour sur la conjecture des multitangentes nulles.

Les calculs et notations précédents semblent être utiles pour étudier la conjecture caractérisant les multitangentes nulles (cf. p. 155) . Rappelons son énoncé :

Conjecture 1 : Les multitangentes convergentes identiquement égales à zéro sont exactement les multitangentes $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ avec $\underline{s} \in \mathcal{S}^* \cap \{1; 2\}^*$, symétrique, de poids impair et de longueur supérieure à 2.

1. Une caractérisation des multitangentes convergentes identiquement nulles.

Voyons en quoi les outils précédents pourraient permettre d'étudier en toute généralité la conjecture 1 :

Soit $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$, de longueur $r \in \mathbb{N}^*$.

Notons, pour tout $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$: $e_{k,r}(\underline{s}) = \sum_{\substack{i=1 \\ s_i \geq k}}^r (u_1 \cdots u_{i-1}) \sqcup (u_r \cdots u_{i+1})$.

$$E_{k,r}(\underline{s}) = \{ \omega \in \Omega_r^* ; \langle e_{k,r}(\underline{s}) | \omega \rangle \neq 0 \} .$$

Notons aussi, pour $(k; i) \in \llbracket 1; r \rrbracket^2$ vérifiant $s_i \geq k$ (toujours avec $u_0 = 0$ et $u_{r+1} = 0$) :

$$g_{i,k}^{\underline{s}}(u_1; \cdots; u_r) = \frac{\left(\prod_{p \in \llbracket 1; i-1 \rrbracket} (u_p - u_{p-1})^{s_p-1} \right) (u_{i+1} - u_{i-1})^{s_i-k} \left(\prod_{p \in \llbracket i+1; r \rrbracket} (u_p - u_{p+1})^{s_p-1} \right)}{\prod_{p \in \llbracket 1; r \rrbracket - \{i\}} (e^{u_p} - 1)} ,$$

$$D(\omega) = \{ 0 < u_{i_1} < \cdots < u_{i_{r-1}} < +\infty \} \text{ si } \omega = u_{i_1} \cdots u_{i_{r-1}} \in E_{k,s}(\underline{s}) ,$$

$$I_{i,k}^{\underline{s}}(\omega) = (-1)^{s_{i+1} + \cdots + s_r} \int_{D(\omega)} g_{i,k}^{\underline{s}}(u_1; \cdots; u_r) du_1 \cdots \widehat{du}_i \cdots du_r .$$

Alors, la réduction en monotangentes permet d'écrire l'équivalence suivante :

$$\mathcal{T}e^{\underline{s}} \equiv 0 \iff \forall k \in \llbracket 2; \max(s_1; \cdots; s_r) \rrbracket , \sum_{\omega \in E_{k,r}(\underline{s})} I_{i,k}^{\underline{s}}(\omega) = 0 .$$

2. Quelles sont les multitangentes convergentes nulles et de longueur 3 ?

Soit $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$ de longueur 3, telle que $\mathcal{T}e^{\underline{s}} \equiv 0$ sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Notons alors $m = \max(s_1; s_2; s_3)$.

- Commençons par montrer que nécessairement, on a $m = s_1 = s_3$.

Le calcul déjà effectué de $\mathcal{T}e^{m,m,m}$ montre que l'on ne peut avoir $s_1 = s_2 = s_3 = m$.

Par ailleurs, la trifactorisation du moule $\mathcal{T}e^\bullet$ montre que l'on peut écrire, pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$:

$$0 = \mathcal{H}e_+^{\underline{s}}(z) + \frac{\mathcal{H}e_+^{s_1, s_2}(z)}{z^{s_3}} + \frac{\mathcal{H}e_+^{s_1}(z)\mathcal{H}e_-^{s_3}(z)}{z^{s_2}} + \mathcal{H}e_+^{s_1}(z)\mathcal{H}e_-^{s_2, s_3}(z) + \frac{\mathcal{H}e_-^{s_2, s_3}(z)}{z^{s_1}} + \mathcal{H}e_-^{\underline{s}}(z).$$

Ainsi, si $s_1 = s_2 = m$ (et donc nécessairement $s_3 < m$), on obtiendrait la limite suivante : $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}e_+^{s_1}(z)\mathcal{H}e_-^{s_3}(z) + \mathcal{H}e_-^{s_2, s_3}(z)}{z^{m-s_3}} = -\mathcal{Z}e^{s_1, s_2} = -\mathcal{Z}e^{m, m}$. Alors, nécessairement $\lim_{z \rightarrow 0} (\mathcal{H}e_+^{s_1}(z)\mathcal{H}e_-^{s_3}(z) + \mathcal{H}e_-^{s_2, s_3}(z)) = 0$, ie $\mathcal{Z}e^{s_1} \mathcal{Z}e^{s_3} + (-1)^{s_1-1} \mathcal{Z}e^{s_3, s_1} = 0$.

Ainsi, en utilisant la symétrie de $\mathcal{Z}e^\bullet$, et en distinguant suivant la parité de $s_1 = m$, cela donnerait la nullité d'une somme de termes strictement positifs.

Donc $s_1 = s_2 = m$ et $s_3 < m$ n'est pas possible.

De même, on montre l'impossibilité de $\begin{cases} s_1 < m \\ s_2 = s_3 = m \end{cases}$.

Enfin, si m n'était atteint qu'une seule fois, la réduction en monotangentes permettrait de conclure à la nullité d'un multizêta, ce qui n'est pas...

Par conséquent, si $\mathcal{T}e^{\underline{s}} \equiv 0$ où $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$ est de longueur 3, on a nécessairement :

$$\begin{cases} s_1 = s_3 \\ s_2 < s_1 \end{cases} \text{ Autrement dit, } \underline{s} \text{ est symétrique.}$$

- Le même argument que précédemment donne maintenant :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}e_+^{s_1, s_2}(z) + \mathcal{H}e_-^{s_2, s_3}(z)}{z^{s_1-s_2}} = -\mathcal{Z}e^{s_1} \mathcal{Z}e_-^{s_2}.$$

D'où : $\lim_{z \rightarrow 0} (\mathcal{H}e_+^{s_1, s_2}(z) + \mathcal{H}e_-^{s_2, s_3}(z)) = 0$, c'est-à-dire en utilisant le fait que $s_1 = s_3$: $(1 + (-1)^{s_2+s_3}) \mathcal{Z}e^{s_1, s_2} = 0$. Ainsi, nécessairement $m + s_2 \notin 2\mathbb{Z}$.

Par ailleurs, en désignant par I_1, \dots, I_4 des intégrales de fonctions positives, la caractérisation précédente, appliquée à $k = 2$, s'écrit $(-1)^m (I_1 + I_2 + I_3 + (-1)^{s_2} I_4) = 0$. Donc $s_2 \notin 2\mathbb{Z}$. Comme de plus $m + s_2 \notin 2\mathbb{Z}$, on en déduit que m est nécessairement pair.

- Supposons désormais que $m > 2$.

Si $s_2 = m - 1$, alors dans la réduction en monotangentes de $\mathcal{T}e^{m, m-1, m}$, la nullité de la composante $\mathcal{T}e^{m-1}$ donne : $2m \mathcal{Z}e^{m+1, m-1} + 2(m-1) \mathcal{Z}e^{m, m} = (\mathcal{Z}e^m)^2$. Mais, il n'est pas difficile de voir que cette relation n'est pas possible pour $m > 2$: le membre de gauche se majore aisément par $2m \mathcal{Z}e^{m-1, m-1} + 2(m-1) \mathcal{Z}e^{m, m}$; il est donc strictement plus petit que 1 dès que $m \leq 6$, ce qui n'est pas possible. Les cas particulier $m \in \{3; 4; 5\}$ sont aussi impossible. Ainsi, $s_2 \neq m - 1$, i.e. $s_2 \leq m - 2$.

Alors, dans la réduction en monotangentes de $\mathcal{T}e^{m,s_2,m}$, la composante $\mathcal{T}e^{m-1}$ s'écrit : $I_{3,3}^{m,s_2,m}(u_3u_2) + I_{3,3}^{m,s_2,m}(u_1u_2) = 0$. Mais cela est impossible, car $I_{3,3}^{m,s_2,m}(u_3u_2)$ et $I_{3,3}^{m,s_2,m}(u_1u_2)$ sont deux nombres strictement positifs.

On en déduit que nécessairement $m = 2$, d'où le lemme suivant :

Lemme : La seule multitangente convergente nulle, de longueur 3, est $\mathcal{T}e^{2,1,2}$.

Autrement dit, la conjecture de la page 155 est vraie pour les longueurs 3.

3. Programme pour aborder la conjecture 1. Si l'on regarde les étapes mises en oeuvre pour démontrer que la conjecture caractérisant les multitangentes est vraie pour les longueurs 3, on peut essayer d'établir dans le cas général les résultats suivants, lorsque $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$ est telle que $\mathcal{T}e^{\underline{s}} \equiv 0$:

1. \underline{s} est symétrique (en montrant successivement que si $s_i = m_k$, alors $s_{r+1-i} = m_k$, où $m_1 > \dots > m_p$ est la suite décroissante des valeurs que prend la séquence \underline{s}).
2. $m_1 = 2$.
3. $\|\underline{s}\| \notin 2\mathbb{N}$.

9.3.3 Quelles relations de symétralité sont obtenues ?

Ce qui précède permet de se poser la question suivante :

“Connaissant le caractère exponentiellement plat des multitangentes, ce procédé permet-il de retrouver toutes les relations de symétralité entre multizêtas ? Si la réponse est négative, quelles relations obtenons-nous ?”

La réponse est simple. Une rapide exploration des tables de multitangentes (établies grâce à la réduction des multitangentes, mais sans connaître explicitement les valeurs des multizêtas, et en écrivant la composante $\mathcal{T}e^1$ bien qu'elle soit nulle) donne le tableau de la page 251, résumant les premières relations de symétralités obtenues.

On voit immédiatement que les tables de multitangentes au poids 5 fournissent toutes les relations de symétralité des multizêtas de poids 4. Malheureusement, ce fait n'est pas général, car dès le poids suivant, il manque une relation de symétralité :

$$3\mathcal{Z}e^{2,2,1} + 6\mathcal{Z}e^{3,1,1} + \mathcal{Z}e^{2,1,2} = \mathcal{Z}e^{2,1}\mathcal{Z}e^2. \quad (61)$$

Remarquons que celle-ci est duale de l'autre relation de symétralité obtenue au même poids. De même, au poids 6 (pour les multizêtas, ie provenant des multitangentes de poids 7), certaines relations de symétralité sont manquantes :

$$\mathcal{Z}e^3\mathcal{Z}e^{2,1} = 5\mathcal{Z}e^{3,2,1} + 9\mathcal{Z}e^{4,1,1} + 2\mathcal{Z}e^{3,1,2} + 2\mathcal{Z}e^{2,3,1} + \mathcal{Z}e^{2,2,2} + \mathcal{Z}e^{2,1,3}. \quad (62)$$

$$\mathcal{Z}e^{2,2}\mathcal{Z}e^2 = 3\mathcal{Z}e^{2,2,2} + 4\mathcal{Z}e^{3,1,2} + 4\mathcal{Z}e^{3,2,1} + 4\mathcal{Z}e^{2,3,1}. \quad (63)$$

$$\mathcal{Z}e^{3,1}\mathcal{Z}e^2 = \mathcal{Z}e^{2,3,1} + 4\mathcal{Z}e^{3,2,1} + 9\mathcal{Z}e^{4,1,1} + \mathcal{Z}e^{3,1,2}. \quad (64)$$

$$(\mathcal{Z}e^{2,1})^2 = 2\mathcal{Z}e^{2,1,2,1} + 6\mathcal{Z}e^{2,2,1,1} + 12\mathcal{Z}e^{3,1,1,1}. \quad (65)$$

$$\mathcal{Z}e^2\mathcal{Z}e^{2,1,1} = 4\mathcal{Z}e^{2,2,1,1} + 8\mathcal{Z}e^{3,1,1,1} + 2\mathcal{Z}e^{2,1,2,1} + \mathcal{Z}e^{2,1,1,2}. \quad (66)$$

Parmi elles, certaines sont duales : ce sont (65) et (66), puis il y a celles qui ne peuvent s'obtenir par ce procédé car autoduales. De toutes façons, actuellement, il n'y a pas de procédé connu permettant de retrouver le théorème de dualité des multizêtas à partir des multitangentes, ni même en sens inverse (i.e. permettant de traduire une relation de dualité entre multizêtas en une relation entre multitangentes) .

En fait, sur les premiers exemples indiqués dans le tableau, nous voyons que deux cas se présentent : soit nous obtenons une relation de symétralité, soit nous obtenons une combinaison linéaire de relations de symétralité. Plus précisément, en réduisant une multitangente $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ où $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$, on ne peut obtenir une relation de symétralité par l'annulation de la composante $\mathcal{T}e^1$ que s'il n'y a qu'un seul produit de multizêtas dans l'expression de la réduction en monotangentes de $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$: ce qui ne peut se produire que lorsqu'on réduit une multitangente de longueur 3.

Ceci montre donc qu'on obtient directement toutes les relations de symétralité du type $\mathcal{Z}e^{\underline{s}^1} \mathcal{Z}e^{\underline{s}^2}$ avec \underline{s}^1 et \underline{s}^2 de longueur 1, et uniquement ces relations là.

Cependant, n'oublions pas que nous obtenons légèrement plus : nous obtenons une multitude de \mathbb{Q} -combinaisons linéaires de relations de symétralité.

9.3.4 Contraste.

Notons que, quitte à résoudre quelques systèmes linéaires en partant des expressions données dans les réductions en monotangentes, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}e^2 \mathcal{Z}e^{2,1} \mathcal{T}e^3 &= \frac{1}{4} \mathcal{T}e^2 \mathcal{T}e^{2,1,3} - \frac{1}{4} \mathcal{T}e^2 \mathcal{T}e^{3,1,2} - \frac{1}{24} \mathcal{T}e^{2,3,3} - \frac{1}{8} \mathcal{T}e^{2,2,4} - \frac{1}{8} \mathcal{T}e^{3,1,4} - \frac{1}{4} \mathcal{T}e^{2,1,5} \\ &\quad + \frac{1}{4} \mathcal{T}e^{5,1,2} + \frac{1}{8} \mathcal{T}e^{4,2,2} + \frac{1}{8} \mathcal{T}e^{4,1,3} + \frac{1}{24} \mathcal{T}e^{3,3,2} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3\mathcal{Z}e^{2,2,1} + 6\mathcal{Z}e^{3,1,1} + \mathcal{Z}e^{2,1,2}) \mathcal{T}e^3 &= \frac{3}{2} \mathcal{T}e^{4,1,1,2} - \frac{3}{2} \mathcal{T}e^{2,1,1,4} + 2\mathcal{T}e^{2,2,1,3} - 2\mathcal{T}e^{3,1,2,2} + \mathcal{T}e^{2,3,1,2} \\ &\quad - \mathcal{T}e^{2,1,3,2} + \frac{1}{2} \mathcal{T}e^{2,3,3} - \frac{1}{2} \mathcal{T}e^{3,3,2} + \frac{3}{4} \mathcal{T}e^{2,2,4} - \frac{3}{4} \mathcal{T}e^{4,2,2} \\ &\quad + \frac{11}{24} \mathcal{T}e^{2,6} - \frac{11}{24} \mathcal{T}e^{6,2} + \frac{11}{12} \mathcal{T}e^{3,5} - \frac{11}{12} \mathcal{T}e^{5,3} . \end{aligned}$$

Ainsi, la relation de symétralité (61) est équivalente à la relation entre multitangentes :

$$\begin{aligned} &36\mathcal{T}e^{2,1,1,4} + 6\mathcal{T}e^{2,1,2,3} + 30\mathcal{T}e^{2,1,3,2} + 36\mathcal{T}e^{3,1,2,2} + 9\mathcal{T}e^{4,1,3} + 7\mathcal{T}e^{3,3,2} \\ &+ 21\mathcal{T}e^{4,2,2} + 11\mathcal{T}e^{6,2} + 22\mathcal{T}e^{5,3} \\ &= \\ &36\mathcal{T}e^{4,1,1,2} + 6\mathcal{T}e^{3,2,1,2} + 30\mathcal{T}e^{2,3,1,2} + 36\mathcal{T}e^{2,2,1,3} + 9\mathcal{T}e^{3,1,4} + 7\mathcal{T}e^{2,3,3} \\ &+ 21\mathcal{T}e^{2,2,4} + 11\mathcal{T}e^{2,6} + 22\mathcal{T}e^{3,5} . \end{aligned} \tag{67}$$

De même, (63) est équivalente à la relation entre multitangentes :

$$\begin{aligned}
& 432\mathcal{T}e^{4,2,1,2} + 432\mathcal{T}e^{2,1,2,4} + 648\mathcal{T}e^{3,2,2,2} + 648\mathcal{T}e^{2,2,2,3} + 576\mathcal{T}e^{3,3,1,2} \\
& + 576\mathcal{T}e^{2,1,3,3} + 672\mathcal{T}e^{3,2,1,3} + 672\mathcal{T}e^{3,1,2,3} + 576\mathcal{T}e^{4,1,2,2} + 576\mathcal{T}e^{2,2,1,4} \\
& + 672\mathcal{T}e^{3,1,3,2} + 672\mathcal{T}e^{2,3,1,3} + 432\mathcal{T}e^{2,4,1,2} + 432\mathcal{T}e^{2,1,4,2} + 456\mathcal{T}e^{2,3,2,2} \\
& + 456\mathcal{T}e^{2,2,3,2} - 270\mathcal{T}e^{5,2,2} - 270\mathcal{T}e^{2,2,5} - 135\mathcal{T}e^{2,3,4} - 135\mathcal{T}e^{4,3,2} \\
& - 39\mathcal{T}e^{2,4,3} - 39\mathcal{T}e^{3,4,2} - 519\mathcal{T}e^{4,2,3} - 519\mathcal{T}e^{3,2,4} - 480\mathcal{T}e^{5,1,3} \\
& - 480\mathcal{T}e^{3,1,5} - 240\mathcal{T}e^{2,1,6} - 240\mathcal{T}e^{6,1,2} - 49\mathcal{T}e^{6,3} - 49\mathcal{T}e^{3,6} \\
& - 87\mathcal{T}e^{5,4} - 87\mathcal{T}e^{4,5} - 576\mathcal{T}e^{4,1,4} - 240\mathcal{T}e^{3,3,3} - 30\mathcal{T}e^{2,5,2} \\
& = \\
& + 9\mathcal{T}e^{4,3,2} + 9\mathcal{T}e^{2,3,4} + 9\mathcal{T}e^{3,4,2} + 9\mathcal{T}e^{2,4,3} + 9\mathcal{T}e^{4,2,3} + 9\mathcal{T}e^{3,2,4} \\
& - 15\mathcal{T}e^{6,3} - 15\mathcal{T}e^{3,6} - 45\mathcal{T}e^{5,4} - 45\mathcal{T}e^{4,5} + 18\mathcal{T}e^{3,3,3} .
\end{aligned} \tag{68}$$

Les deux relations (5) et (68), entre multitangentes, peuvent se démontrer en utilisant uniquement des propriétés sur les multitangentes (les relations de symétrélité, la dérivation des multitangentes, les multitangentes nulles, ou encore des propriétés ou évaluations des multizêtas établies uniquement à l'aide des multitangentes). Ceci laisse à penser que même les relations de symétralité qui ne sont pas obtenues par le biais de l'annulation de composantes $\mathcal{T}e^1$ dans les relations de réduction en monotangentes peuvent être obtenues par des propriétés sur les multitangentes.

9.4 Un autre procédé pour multiplier les multitangentes.

Nous allons présenter dans cette section un nouveau procédé pour multiplier entre elles les multitangentes. Cependant, celui-ci aura pour défaut de ne pas être interne à \mathcal{MTGF} . Ce procédé est en tout point similaire à ce que l'on a fait pour les multizêtas : représentation intégrale sous forme d'intégrales itérées et multiplication symétrale liée à cette représentation. Cela permettra de retrouver le codage symétral des multizêtas.

9.4.1 Notion d'intégrale itérée.

Commençons par rappeler la définition des intégrales itérées, due à Chen (cf. [11], p. 833), dans le cas de la droite réelle.

Etant données deux formes différentielles α et β , on définit leur produit $\alpha\#\beta$ par la formule : $\alpha\#\beta = \alpha P$, où $P(t) = \int_0^t \beta$. Ce produit est associatif, mais non commutatif. Nous pouvons alors définir l'intégrale itérée des n formes différentielles $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ par l'expression :

$$\int_0^1 \varphi_1\#\dots\#\varphi_n .$$

Par convention, on donne la valeur 1 à l'intégrale précédente lorsque $n = 0$.

De manière générale, une intégrale itérée désignera une combinaison linéaire de telles intégrales.

Une autre manière de définir l'intégrale itérée, venant de l'associativité du produit des formes différentielles, est la suivante : les 1-formes différentielles φ_i , $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, s'écrivent sous la forme $f_i(t)dt$. L'intégrale itérée des $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ s'écrit alors récursivement sous la forme :

$$\int_0^1 \varphi_1 \# \dots \# \varphi_n = \int_0^1 \left(\int_0^t \varphi_1 \# \dots \# \varphi_{n-1} \right) f_n(t) dt .$$

$$\int_0^1 \varphi_1 = \int_0^1 f_1(t) dt, \text{ où l'intégrale du membre de droite est classique.}$$

Remarquons qu'à l'aide de cette notation l'intégrale itérée des $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ vaut alors :

$$\int_0^1 \varphi_1 \# \dots \# \varphi_n = \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < 1} f_1(t_1) \dots f_n(t_n) dt_1 \dots dt_n .$$

Il est à noter que c'est un cas particulier de la définition de Chen, qui sera suffisant pour la suite.

Enfin, pour finir ces rappels, nous redonnons la propriété importante des intégrales itérées, concernant leur produit :

$$\left(\int_0^1 \varphi_1 \# \dots \# \varphi_k \right) \left(\int_0^1 \varphi_{k+1} \# \dots \# \varphi_n \right) = \int_0^1 (\varphi_1 \# \dots \# \varphi_k) \sqcup \sqcup (\varphi_{k+1} \# \dots \# \varphi_n) .$$

Ici, $(\varphi_1 \# \dots \# \varphi_k) \sqcup \sqcup (\varphi_{k+1} \# \dots \# \varphi_n)$ est à comprendre comme le produit de battage des mots $\varphi_1 \dots \varphi_k$ et $\varphi_{k+1} \dots \varphi_n$ sur l'alphabet $\{\varphi_1; \dots; \varphi_n\}$. Cela signifie qu'ici le symbole $\#$ remplace formellement le produit de concaténation usuel.

9.4.2 Un moule symétral.

Il est désormais classique de considérer les formes différentielles $\omega_0 = \frac{du}{u}$ et $\omega_1 = \frac{du}{1-u}$ pour exprimer les multizêtas sous la forme d'une intégrale itérée (cf. par exemple [17], [18], [19], [49] et [54]) :

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S}_+^*, \mathcal{Z}e^{\underline{s}} = \int_0^1 \left(\underbrace{\omega_0 \# \dots \# \omega_0}_{\text{répété } s_1 - 1 \text{ fois}} \# \omega_1 \right) \# \dots \# \left(\underbrace{\omega_0 \# \dots \# \omega_0}_{\text{répété } s_r - 1 \text{ fois}} \# \omega_1 \right)$$

$$= \int_0^1 (\omega_0 \#^{(s_1-1)} \# \omega_1) \# \dots \# (\omega_0 \#^{(s_r-1)} \# \omega_1) .$$

Ceci va nous guider pour exprimer sous forme intégrale le moule $\mathcal{H}e_{+0}^\bullet$, défini temporairement lors de la démonstration du lemme 4 (cf. §4.3) :

Définition : Considérons les formes différentielles, pour $z \in \{\zeta \in \mathbb{C} ; \Re \zeta \geq 0\}$, définies par :

$$\omega_0(z) = \frac{du}{u} \quad \text{et} \quad \omega_1(z) = \frac{u^{z-1}}{1-u} du .$$

Considérons le sous-ensemble Ω^* de $(\{0; 1\} \times \{\zeta \in \mathbb{C} ; \Re \zeta \geq 0\})^*$ défini par :

$$\Omega^* = \{(\underline{\varepsilon}; \underline{z}) \in (\{0; 1\} \times \{\Re \zeta \geq 0\})^* ; \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_r = 1 \text{ et } \Re z_r > 0\} .$$

On définit alors le moule intégral $\mathcal{I}a^\bullet$ sur Ω^* , à valeurs dans \mathbb{C} , par :

$$\mathcal{I}a \binom{\underline{\varepsilon}}{\underline{z}} = \int_0^1 \omega_{\varepsilon_1}(z_1) \# \cdots \# \omega_{\varepsilon_r}(z_r) .$$

De même que pour les multizêtas, il existe une condition assurant la convergence de l'intégrale itérée les définissant ; il en existe aussi une quant au moule $\mathcal{I}a^\bullet$:

$$\varepsilon_1 = 0 , \varepsilon_r = 1 \text{ et } \Re z_r > 0 .$$

Plus précisément, les conditions $\varepsilon_r = 1$ et $\Re z_r > 0$ assurent que $\omega_r \in L^1(]0; t])$ pour tout $t \in]0; 1[$ et la dernière condition $\varepsilon_1 = 0$ assure que $\omega_{\varepsilon_1}(z_1) \# \cdots \# \omega_{\varepsilon_r}(z_r) \in L^1(]0; 1])$.

Tout comme pour les multizêtas, on a aussi le lemme suivant :

- Lemme :** 1. Le moule $\mathcal{I}a^\bullet$, défini sur Ω^* et à valeurs dans \mathbb{C} , est symétral.
2. Soit $(\underline{\varepsilon}; \underline{z}) \in \Omega^*$.

Alors, il existe $\underline{s} \in \mathcal{S}_+^*$ telle que $\underline{\varepsilon} = (\underbrace{0; \cdots; 0}_{s_1-1 \text{ fois}}; 1; \cdots; \underbrace{0; \cdots; 0}_{s_r-1 \text{ fois}})$.

Avec ces notations, on a :

$$\forall (\underline{\varepsilon}; \underline{z}) \in \Omega^* , \mathcal{I}a \binom{\underline{\varepsilon}}{\underline{z}} = \sum_{0 \leq n_r \leq \cdots \leq n_1} \frac{1}{(n_1 + z_1 + \cdots + z_r)^{s_1} \cdots (n_r + z_r)^{s_r}} .$$

- Démonstration :** 1. Considérons les alphabets infinis $X_0 = \{x_0(z) ; z \in \mathbb{C}, \Re z \geq 0\}$,
 $X_1 = \{x_1(z) ; z \in \mathbb{C}, \Re z \geq 0\}$ et $\Omega_0 = X_0 \cup X_1$.

Considérons aussi $\widetilde{\Omega}_0^\bullet$ l'ensemble des mots de Ω_0 dont la première lettre appartient à X_0 et la dernière lettre appartient à X_1 .

Enfin, l'application $\text{I}a : \widetilde{\Omega}_0^\bullet \rightarrow \mathbb{C}$ est définie pour $\omega = x_{\varepsilon_1}(z_1) \cdots x_{\varepsilon_r}(z_r)$ par :

$$\text{I}a(\omega) = \mathcal{I}a \binom{\underline{\varepsilon}}{\underline{z}} .$$

Celle-ci est prolongée par linéarité à $\mathbb{Q}\langle \widetilde{\Omega}_0 \rangle = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\omega)_{\omega \in \widetilde{\Omega}_0}$.

La multiplication des intégrales itérées donne alors : $\text{I}a(\omega_1)\text{I}a(\omega_2) = \text{I}a(\omega_1 \sqcup \omega_2)$,
pour tout $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{Q}\langle \widetilde{\Omega}_0 \rangle^2$; c'est-à-dire, pour tout $\left(\binom{\underline{\varepsilon}^1}{\underline{z}^1}, \binom{\underline{\varepsilon}^2}{\underline{z}^2} \right) \in (\Omega^*)^2$:

$$\mathcal{I}a \binom{\underline{\varepsilon}^1}{\underline{z}^1} \mathcal{I}a \binom{\underline{\varepsilon}^2}{\underline{z}^2} = \sum_{\binom{\underline{\varepsilon}}{\underline{z}} \in \text{sh}\underline{a} \left(\binom{\underline{\varepsilon}^1}{\underline{z}^1}; \binom{\underline{\varepsilon}^2}{\underline{z}^2} \right)} \mathcal{I}a \binom{\underline{\varepsilon}}{\underline{z}} .$$

Ainsi, $\mathcal{I}a^\bullet$ est symétral.

2. Utilisons des notations abrégées : $n_{i..j}$, $s_{i..j}$ et $z_{i..j}$ désigneront respectivement les quantités $n_i + \dots + n_j$, $s_i + \dots + s_j$ et $z_i + \dots + z_j$ pour tout couple $(i; j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ vérifiant $1 \leq i \leq j \leq n$.

Il s'agit alors de montrer que :

$$\mathcal{I}a \left(\begin{matrix} 0, \dots, 0, 1, \dots, 0, \dots, 0, 1 \\ u_1^1, \dots, u_{s_1-1}^1, z_1, \dots, u_1^2, \dots, u_{s_r-1}^2, z_r \end{matrix} \right) = \sum_{(n_1; \dots; n_r) \in \mathbb{N}^r} \frac{1}{(n_{1\dots r} + z_{1\dots r})^{s_1} \dots (n_r + z_r)^{s_r}} .$$

Cela provient tout simplement des développements en séries de puissances des fonctions $u \mapsto \frac{u^{z-1}}{1-u}$ apparaissant dans l'intégrale, puis de la permutation sommes / intégrales, qui est licite car les conditions ont été posées pour avoir toujours $\omega_{\varepsilon_1}(z_1) \# \dots \# \omega_{\varepsilon_r}(z_r) \in L^1([0; 1])$.

Nous avons alors :

$$\mathcal{I}a \left(\begin{matrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{z} \end{matrix} \right) = \sum_{(n_1; \dots; n_r) \in \mathbb{N}^r} \frac{1}{(n_1 + \dots + n_r + z_1 + \dots + z_r)^{s_1} \dots (n_r + z_r)^{s_r}} .$$

Il ne reste qu'à effectuer un changement d'indices pour obtenir le résultat voulu :

$$\forall (\underline{\varepsilon}; \underline{z}) \in \Omega^*, \mathcal{I}a \left(\begin{matrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{z} \end{matrix} \right) = \sum_{0 \leq n_r \leq \dots \leq n_1} \frac{1}{(n_1 + z_1 + \dots + z_r)^{s_1} \dots (n_r + z_r)^{s_r}} .$$

□

9.4.3 Multiplication des multitangentes.

Nous avons alors tous les outils pour écrire une multitangente comme une intégrale itérée :

Propriété : Soit S_1 et S_2 , les applications de $(\mathbb{N}^*)^* \times \mathbb{C}$ sur $(\{0; 1\} \times \mathbb{C})^*$, définies par :

$$S_1(\underline{s}; z) = \left(\begin{matrix} \overbrace{0, \dots, 0, 1}^{s_1-1 \text{ fois}} & \dots & \overbrace{0, \dots, 0, 1}^{s_r-1 \text{ fois}} \\ 1, \dots, 1, 1 & \dots & 1, \dots, 1, z \end{matrix} \right) .$$

$$S_2(\underline{s}; z) = \left(\begin{matrix} \overbrace{0, \dots, 0, 1}^{s_r-1 \text{ fois}} & \dots & \overbrace{0, \dots, 0, 1}^{s_1-1 \text{ fois}} \\ 1, \dots, 1, 1 & \dots & 1, \dots, 1, 1-z \end{matrix} \right) .$$

Considérons les moules \mathcal{H}_+^\bullet et \mathcal{H}_-^\bullet , à valeurs dans $\mathcal{H}(\{\zeta \in \mathbb{C} ; \Re \zeta > 0\})$ et $\mathcal{H}(\{\zeta \in \mathbb{C} ; \Re \zeta < 1\})$ respectivement et définis sur \mathcal{S}^* par :

$$\mathcal{H}_+^{\underline{s}}(z) = \mathcal{I}a^{S_1(\underline{s}; z)} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_-^{\underline{s}}(z) = (-1)^{\|\underline{s}\|} \mathcal{I}a^{S_2(\underline{s}; z)} .$$

Alors : $\mathcal{T}e_{\{0 < \Re \zeta < 1\}}^\bullet = \mathcal{H}_+^\bullet \times \mathcal{H}_-^\bullet$.

Puisque $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$, remarquons que la première ligne de $S_1(\underline{s}; z)$ et $S_2(\underline{s}; z)$ commencent toutes deux par un 0 et finissent toutes deux par un 1. Si l'on ajoute la condition $z \in \{\zeta \in \mathbb{C}; 0 < \Re \zeta < 1\}$, ceci assure la convergence du moule $\mathcal{I}a^\bullet$ sur toute séquence $S_1(\underline{s}; z)$ et $S_2(\underline{s}; z)$.

Démonstration : Grâce à la représentation précédente sous forme de sommes, nous pouvons écrire après un changement d'indices, si $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$:

$$\begin{cases} \forall z \in \{\zeta \in \mathbb{C}; \Re \zeta > 0\}, \mathcal{H}_+^{\underline{s}}(z) = \sum_{0 \leq n_r < n_{r-1} < \dots < n_1} \frac{1}{(n_1 + z)^{s_1} \dots (n_r + z)^{s_r}} \cdot \\ \forall z \in \{\zeta \in \mathbb{C}; \Re \zeta < 1\}, \mathcal{H}_-^{\underline{s}}(z) = \sum_{n_r < \dots < n_1 < 0} \frac{1}{(n_1 + z)^{s_1} \dots (n_r + z)^{s_r}} \cdot \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à voir que $\mathcal{H}_+^\bullet \times \mathcal{H}_-^\bullet$ est définie pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$ à valeurs dans $\mathcal{H}(\{\zeta \in \mathbb{C}; 0 < \Re \zeta < 1\})$ pour conclure quant à l'égalité moulienne : $\mathcal{T}e_{\{0 < \Re \zeta < 1\}}^\bullet = \mathcal{H}_+^\bullet \times \mathcal{H}_-^\bullet$. □

Puisque nous savons multiplier les intégrales itérées entre elles, par symétralité du moule $\mathcal{I}a^\bullet$, nous disposons désormais d'un nouveau procédé pour multiplier les multitangentes entre elle. Remarquons que cela ne définit pourtant pas un codage symétral des multitangentes car aucun des deux moules \mathcal{H}_+^\bullet et \mathcal{H}_-^\bullet n'est symétral ni symétral. En effet :

$$\forall z \in \{\zeta \in \mathbb{C}; \Re \zeta > 0\}, \forall (\underline{s}^1; \underline{s}^2) \in (\mathcal{S}^*)^2, \mathcal{H}_+^{\underline{s}^1}(z) \mathcal{H}_+^{\underline{s}^2}(z) = \sum_{\left(\frac{\underline{s}}{\underline{z}}\right) \in \text{sha}(S_1(\underline{s}^1); S_2(\underline{s}^2))} \mathcal{I}a\left(\frac{\underline{s}}{\underline{z}}\right).$$

Dans cette somme, les séquences \underline{z} contiennent deux indices avec un z , et non un seul !

Dans la suite, nous nous référerons à ce procédé de multiplication en l'appelant **multiplication "symétrale"**.

9.4.4 Equivalent du moule $\mathcal{I}a^\bullet$, au voisinage de 0, dans certains cas particuliers.

Nous disposons du lemme suivant, très simple, mais qui sera utile pour ce qui va suivre.

Lemme : Soit $\underline{s} \in \mathcal{S}_+^*$.

Soit $(\varphi_1; \dots; \varphi_r) \in \{z \mapsto z; z \mapsto 1 - z; z \mapsto 1\}^r$, où $r = l(\underline{s})$.

Notons alors : $\underline{\varepsilon} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{s_1-1 \text{ fois}}, 1, \dots, \underbrace{0, \dots, 0}_{s_r-1 \text{ fois}}, 1)$.

$$\underline{z} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{s_1-1 \text{ fois}}, \varphi_1(z), \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{s_r-1 \text{ fois}}, \varphi_r(z)).$$

On suppose que les fonctions φ_k ne sont pas toutes égales à $id_{\mathbb{C}}$.

Alors, en notant $i = \max\{k \in \llbracket 1; r \rrbracket; \varphi_k \neq id_{\mathbb{C}}\}$, on a :

$$\mathcal{I}a\left(\frac{\underline{\varepsilon}}{\underline{z}}\right) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{z^{\|\underline{s}\rangle^i}} \sum_{0 \leq n_i \leq \dots \leq n_1} \frac{1}{\left(n_1 + \sum_{k=1}^r \varphi_k(0)\right)^{s_1} \dots \left(n_i + \sum_{k=i}^r \varphi_k(0)\right)^{s_i}}.$$

Au lemme suivant, nous appliquerons ce résultat dans le cas particulier où il existe $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ tel que $(\varphi_1; \dots; \varphi_i) \in \{z \mapsto 1; z \mapsto 1 - z\}^i$ et $\varphi_{i+1} = \dots = \varphi_r = id_{\mathbb{C}}$. Sous ces conditions, on a alors :

$$\mathcal{I}a\left(\frac{\underline{\epsilon}}{\underline{z}}\right) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{\mathcal{Z}e^{\underline{s} \leq i}}{z^{\|\underline{s} > i\|}} .$$

Démonstration : En utilisant les mêmes techniques que pour le lemme de définition des moules symétrals (cf. p. 115), on montre l'holomorphie sur $\mathbb{C} - \{p \in \mathbb{Z}; p \leq -1\}$

$$\text{de la fonction } z \mapsto \frac{1}{\sum_{0 < n_r \leq \dots \leq n_1} \frac{1}{\left(n_1 + \sum_{k=1}^r \varphi_k(z)\right)^{s_1} \cdots \left(n_r + \sum_{k=r}^r \varphi_k(z)\right)^{s_r}}$$

si $\underline{s} \in \mathcal{S}_+^*$. En particulier, celle-ci est continue en 0.

Ainsi :

$$\mathcal{I}a\left(\frac{\underline{\epsilon}}{\underline{z}}\right) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{z^{s_r}} \sum_{0 \leq n_{r-1} \leq \dots \leq n_1} \frac{1}{\left(n_1 + \sum_{k=1}^r \varphi_k(z)\right)^{s_1} \cdots \left(n_{r-1} + \sum_{k=r-1}^r \varphi_k(z)\right)^{s_{r-1}}} .$$

En itérant $r + 1 - i$ fois ce résultat, on obtient le résultat escompté. \square

9.4.5 Relations de symétralité des multizêtas.

Nous disposons à nouveau de deux faits essentiels : la multiplication ‘‘symétrale’’ du moule $\mathcal{T}e^\bullet$, ainsi que la prise d'équivalents dans certaines intégrales itérées $\mathcal{I}a^\bullet$.

Nous obtenons alors deux procédés pour obtenir un équivalent d'un produit de deux multitangentes : multiplier les équivalents directement ou bien utiliser le procédé de multiplication symétrale des multitangentes, puis déterminer un équivalent de la somme.

Ceci nous permet d'obtenir la propriété suivante :

Propriété : La multiplication ‘‘symétrale’’ des multitangentes entraîne les relations de symétralité des multizêtas.

Démonstration : Fixons-nous deux séquences \underline{s}^1 et \underline{s}^2 de \mathcal{S}^* . Notons M_0 , le plus grand entier apparaissant dans ces deux séquences ; notons enfin $M = M_0 + 1$.

Nous allons déterminer un équivalent de $\mathcal{T}e^{\underline{s}^1 \cdot M}(z)\mathcal{T}e^{\underline{s}^2 \cdot M}(z)$ au voisinage de 0 par deux méthodes distinctes. Cela imposera l'égalité des deux écritures de cet équivalent.

$$\bullet \text{ La réduction en monotangentes impose : } \begin{cases} \mathcal{T}e^{\underline{s}^1 \cdot M}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{\mathcal{Z}e^{\underline{s}^1}}{z^M} . \\ \mathcal{T}e^{\underline{s}^2 \cdot M}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{\mathcal{Z}e^{\underline{s}^2}}{z^M} . \end{cases}$$

Ainsi :

$$\mathcal{T}e^{\underline{s}^1 \cdot M}(z)\mathcal{T}e^{\underline{s}^2 \cdot M}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{\mathcal{Z}e^{\underline{s}^1} \mathcal{Z}e^{\underline{s}^2}}{z^{2M}} .$$

• D'un autre côté, la multiplication "symétrale" des multitangentes permet d'obtenir une autre expression de l'équivalent recherché. En effet, l'expression des multitangentes sous forme d'intégrales itérées, et le lemme donnant un équivalent de $\mathcal{Ia} \left(\begin{smallmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{z} \end{smallmatrix} \right)$ dans certains cas particuliers permettent d'écrire :

$$\mathcal{T}e^{\underline{s}^1 \cdot M}(z) \mathcal{T}e^{\underline{s}^2 \cdot M}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \mathcal{H}_+^{\underline{s}^1 \cdot M}(z) \mathcal{H}_+ e^{\underline{s}^2 \cdot M}(z) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{z} \end{smallmatrix} \right) \in \text{sha}(\mathbb{S}_1(\underline{s}^1 \cdot M); \mathbb{S}_1(\underline{s}^2 \cdot M))} \mathcal{Ia} \left(\begin{smallmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{z} \end{smallmatrix} \right).$$

Les séquences apportant un poids à l'équivalent recherché sont les séquences $\left(\begin{smallmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{z} \end{smallmatrix} \right)$ de $\text{sha}(\tilde{\mathbb{S}}_1(\underline{s}^1); \tilde{\mathbb{S}}_1(\underline{s}^2)) \cdot \text{sha}(\mathbb{S}_1(M); \mathbb{S}_1(M))$, où :

$$\tilde{\mathbb{S}}_1(\underline{s}) = \left(\begin{array}{ccc} \underbrace{0, \dots, 0, 1}_{s_1 - 1 \text{ fois}} & \dots & \underbrace{0, \dots, 0, 1}_{s_r - 1 \text{ fois}} \\ 1, \dots, 1, 1 & \dots & 1, \dots, 1, 1 \end{array} \right).$$

Ainsi :

$$\mathcal{T}e^{\underline{s}^1 \cdot M}(z) \mathcal{T}e^{\underline{s}^2 \cdot M}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{1} \end{smallmatrix} \right) \in \text{sha}(\tilde{\mathbb{S}}_1(\underline{s}^1); \tilde{\mathbb{S}}_1(\underline{s}^2))} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} \underline{\varepsilon}' \\ \underline{z} \end{smallmatrix} \right) \in \text{sha}(\tilde{\mathbb{S}}_1(M); \tilde{\mathbb{S}}_1(M))} \mathcal{Ia} \left(\begin{smallmatrix} \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon}' \\ \underline{1} \cdot \underline{z} \end{smallmatrix} \right).$$

Le lemme donnant un équivalent de $\mathcal{Ia} \left(\begin{smallmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{z} \end{smallmatrix} \right)$ dans certains cas particuliers permet d'écrire, pour toute séquence $\left(\begin{smallmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{1} \end{smallmatrix} \right) \in \text{sha}(\tilde{\mathbb{S}}_1(\underline{s}^1); \tilde{\mathbb{S}}_1(\underline{s}^2))$:

$$\sum_{\left(\begin{smallmatrix} \underline{\varepsilon}' \\ \underline{z} \end{smallmatrix} \right) \in \text{sha}(\tilde{\mathbb{S}}_1(M); \tilde{\mathbb{S}}_1(M))} \mathcal{Ia} \left(\begin{smallmatrix} \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon}' \\ \underline{1} \cdot \underline{z} \end{smallmatrix} \right) = 2 \sum_{k=0}^{M-1} \binom{M+k-1}{k} \mathcal{Ia} \left(\begin{smallmatrix} \underbrace{0, \dots, 0, 1}_{M+k-1 \text{ fois}} \underbrace{0, \dots, 0, 1}_{M-k-1 \text{ fois}} \\ 1, \dots, 1, z, 1, \dots, 1, z \end{smallmatrix} \right) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} 2 \sum_{k=0}^{M-1} \binom{M+k-1}{k} \frac{\mathcal{Z}e^{\underline{s}}}{2^{M+k} z^{2M}}.$$

Si $u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k}$ il n'est pas difficile, en utilisant la relation de Pascal,

de montrer que : $\frac{1}{2} u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^{n+1}} \binom{2n+1}{n+1} - \frac{1}{2^{n+2}} \binom{2n+2}{n+1} = u_n$.

Donc, pour tout entier naturel n : $u_n = 2^n$.

Notons $\mathbb{S}(\underline{s}) = \left(\underbrace{0; \dots; 0; 1}_{s_1 - 1 \text{ fois}} \dots \underbrace{0; \dots; 0}_{s_r - 1 \text{ fois}} \right)$ et $\tilde{\mathbb{S}}(\underline{\varepsilon}) = (s_1; \dots; s_r)$, lorsque

$\underline{\varepsilon} = \left(\underbrace{0; \dots; 0; 1}_{s_1 - 1 \text{ fois}} \dots \underbrace{0; \dots; 0}_{s_r - 1 \text{ fois}} \right)$. Ainsi, pour toute séquence $\left(\begin{smallmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{1} \end{smallmatrix} \right) \in \text{sha}(\tilde{\mathbb{S}}_1(\underline{s}^1); \tilde{\mathbb{S}}_1(\underline{s}^2))$,

ou ce qui revient au même, pour toute séquence $\underline{\varepsilon} \in \text{sha}(\mathbb{S}(\underline{s}^1); \mathbb{S}(\underline{s}^2))$, on a :

$$\sum_{\left(\begin{smallmatrix} \underline{\varepsilon}' \\ \underline{z} \end{smallmatrix} \right) \in \text{sha}(\tilde{\mathbb{S}}_1(M); \tilde{\mathbb{S}}_1(M))} \mathcal{Ia} \left(\begin{smallmatrix} \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon}' \\ \underline{1} \cdot \underline{z} \end{smallmatrix} \right) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{\mathcal{Z}e^{\tilde{\mathbb{S}}(\underline{\varepsilon})}}{z^{2M}}.$$

Donc :

$$\mathcal{T}e^{\mathfrak{s}^1 \cdot M}(z) \mathcal{T}e^{\mathfrak{s}^2 \cdot M}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \sum_{\underline{\varepsilon} \in \text{sh}\mathfrak{a}(\mathbb{S}(\mathfrak{s}^1); \mathbb{S}(\mathfrak{s}^2))} \frac{\mathcal{Z}e^{\tilde{\mathfrak{S}}(\underline{\varepsilon})}}{z^{2M}} .$$

• Par conséquent, on obtient bien la relation de symétralité voulue :

$$\mathcal{Z}e^{\mathfrak{s}^1} \mathcal{Z}e^{\mathfrak{s}^2} = \sum_{\underline{\varepsilon} \in \text{sh}\mathfrak{a}(\mathbb{S}(\mathfrak{s}^1); \mathbb{S}(\mathfrak{s}^2))} \mathcal{Z}e^{\tilde{\mathfrak{S}}(\underline{\varepsilon})} .$$

Cela prouve donc que la multiplication “symétrale” des multitangentes entraîne les relations de symétralité des multizêtas. □

9.5 Etude de l’espace de multizêtas, retrouvé par la connaissance des multitangentes.

Le procédé de multiplication des multitangentes tout juste décrit n’est pas interne, au sens où le résultat obtenu ne s’exprime pas simplement en fonction de multitangentes. Il est même probable que le résultat ne puisse s’exprimer en fonction des multitangentes : c’est une question à étudier. Cela ne fournit donc pas de relations entre multitangentes.

Les seules relations entre multitangentes que nous connaissons sont donc :

1. Les relations de symétrélité.
2. Les relations de réduction en monotangentes.
3. Les relations issues de la propriété différentielle.

Nous avons pour l’instant démontré les implications suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Symétrélité de } \mathcal{T}e^\bullet \\ \text{Réduction en monotangentes.} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{Symétrélité de } \mathcal{Z}e^\bullet \\ \text{Trace de la symétralité de } \mathcal{W}a^\bullet . \end{array} \right.$$

Donnons des dimensions du \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les multizêtas soumis aux seules relations obtenues par la connaissance des multitangentes, pour les poids 4, 5 et 6.

9.5.1 Relations obtenues entre multizêtas de poids 4.

Par le diagramme de multiplication des multitangentes, on obtient :

$$6\mathcal{Z}e^{2,2} + 8\mathcal{Z}e^4 = 5(\mathcal{Z}e^2)^2 .$$

$$2\mathcal{Z}e^{2,2} + \mathcal{Z}e^4 = (\mathcal{Z}e^2)^2 .$$

Par le caractère exponentiellement plat, on obtient aussi :

$$2\mathcal{Z}e^{2,2} + 4\mathcal{Z}e^{3,1} = (\mathcal{Z}e^2)^2 .$$

Cela permet de résoudre le système donnant les multizêtas de poids 4 en fonction de $(\mathcal{Z}e^2)^2$. Ainsi, l’espace des multizêtas retrouvés par les multitangentes de poids 4, est au plus à $4 - 3 = 1$ degré de liberté.

9.5.2 Relations obtenues entre multizêtas de poids 5.

Par le diagramme de multiplication des multitangentes, on obtient :

$$\mathcal{Z}e^{2,3} + \mathcal{Z}e^{3,2} + \mathcal{Z}e^5 = \mathcal{Z}e^2 \mathcal{Z}e^3 . \quad (69)$$

$$\mathcal{Z}e^{2,1,2} + 2\mathcal{Z}e^{2,2,1} + \mathcal{Z}e^{2,3} + \mathcal{Z}e^{4,1} = \mathcal{Z}e^2 \mathcal{Z}e^{2,1} . \quad (70)$$

$$\mathcal{Z}e^{2,1,2} + 2\mathcal{Z}e^{2,2,1} + 2\mathcal{Z}e^{2,3} + 3\mathcal{Z}e^{3,2} + 7\mathcal{Z}e^{4,1} = \mathcal{Z}e^2 (\mathcal{Z}e^3 + \mathcal{Z}e^{2,1}) . \quad (71)$$

$$4\mathcal{Z}e^{2,3} + 6\mathcal{Z}e^{3,2} + 15\mathcal{Z}e^5 = 10\mathcal{Z}e^2 \mathcal{Z}e^3 . \quad (72)$$

Par le caractère exponentiellement plat, on obtient aussi :

$$\mathcal{Z}e^{2,3} + 3\mathcal{Z}e^{3,2} + 6\mathcal{Z}e^{4,1} = \mathcal{Z}e^2 \mathcal{Z}e^3 .$$

Mais cette relation est combinaison linéaire de (70) et (71).

Cela permet de résoudre le système donnant les multizêtas de poids 5 en fonction de $\mathcal{Z}e^5$ et $\mathcal{Z}e^2 \mathcal{Z}e^3$ en particulier : l'espace des multizêtas, retrouvés par les multitangentes de poids 5, est au plus à $7 - 4 = 3$ degrés de liberté.

9.5.3 Relations obtenues entre multizêtas de poids 6.

Le diagramme de multiplication des multitangentes livre sept relations de symétrie, puis quatre autres relations ; le caractère exponentiellement plat en livre quatre. Celles-ci se lisent à travers l'écriture matricielle $A\mathcal{Z}_1 = B\mathcal{Z}_2$, où l'on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 4 & 2 & 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad {}^t\mathcal{Z}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}e^6 \\ \mathcal{Z}e^{2,4} \\ \mathcal{Z}e^{3,3} \\ \mathcal{Z}e^{4,2} \\ \mathcal{Z}e^{5,1} \\ \mathcal{Z}e^{2,1,3} \\ \mathcal{Z}e^{2,2,2} \\ \mathcal{Z}e^{2,3,1} \\ \mathcal{Z}e^{3,1,2} \\ \mathcal{Z}e^{3,2,1} \\ \mathcal{Z}e^{4,1,1} \\ \mathcal{Z}e^{2,1,1,2} \\ \mathcal{Z}e^{2,1,2,1} \\ \mathcal{Z}e^{2,2,1,1} \\ \mathcal{Z}e^{3,1,1,1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad {}^t\mathcal{Z}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}e^2 \mathcal{Z}e^4 \\ (\mathcal{Z}e^3)^2 \\ \mathcal{Z}e^2 \mathcal{Z}e^{3,1} \\ \mathcal{Z}e^2 \mathcal{Z}e^{2,2} \\ \mathcal{Z}e^3 \mathcal{Z}e^{2,1} \\ \mathcal{Z}e^2 \mathcal{Z}e^{2,1,1} \\ \mathcal{Z}e^{2,1} \mathcal{Z}e^{2,1} \\ (\mathcal{Z}e^2)^3 \end{pmatrix}$$

Puisque la matrice A est de rang 12, le sous-espace des multizêtas, retrouvés par les multitangentes de poids 6, est au plus à $15 - 12 = 3$ degrés de liberté.

10 Conclusion et questions ouvertes.

Pour conclure, en plus de diverses propriétés, nous avons démontré deux théorèmes important : la réduction en monotangentes des multitangentes (convergentes ou non) et la renormalisation des multitangentes divergentes.

Ce premier résultat, la réduction en monotangentes, établit un lien profond entre les multizêtas et les multitangentes. Il permet notamment d’esquisser une philosophie des multitangentes : chaque résultats arithmétiques sur les multizêtas semble pouvoir se traduire en un résultat sur les multitangentes, et réciproquement.

La conjecture 3 (cf. p. 159) est un second lien tout aussi fort. Cette conjecture, tout comme les relations de réductions, fait apparaître des mélanges entre les multizêtas et les multitangentes : la réduction en monotangentes exprime une multitangente comme une \mathbb{Q} -combinaison linéaire de produit d’un multizêtas et d’une monotangente ; à l’inverse, la conjecture 3 exprime sous la forme d’une \mathbb{Q} -combinaison linéaire de multitangentes le produit d’un multizêta par une multitangente.

D’une certaine manière, la conjecture 3 est donc une réciproque de la réduction en monotangentes.

D’autre part, nous savions que les séries génératrices Zig^\bullet/Zag^\bullet ont joué un rôle important dans l’étude des multizêtas. Avoir une série génératrice pour les multitangentes est donc important³⁵. Il est notable que celle-ci s’exprime en fonction de Zig^\bullet .

Enfin, puisque nous ne disposons que d’une symétrie, la symétrélité de $\mathcal{T}e^\bullet$, nous ne pouvons pas avoir de dimorphie comme pour les multizêtas. Néanmoins, plusieurs résultats sur les multitangentes entraînent des relations entre multizêtas. Nous avons donc ébauché une étude de l’algèbre des multizêtas que l’on retrouve à partir de l’étude des multitangentes.

Nous avons y montré que les multizêtas considérés sont soumis aux conditions de symétrélité, mais seulement à une partie des conditions de symétralité. Cette algèbre est donc intermédiaire (cf. [18], p. 21 pour la définition précise) .

Essentiellement, les algèbres secondaires connues aujourd’hui vérifient les relations de symétralité et une partie des relations de symétrélité ; ici, c’est le contraire. Il serait donc intéressant de l’identifier. Pour cela, nous avons commencé à déterminer les degrés de liberté pour les poids 4, 5 et 6. La question est encore ouverte.

Au terme de cette étude, de nombreuses questions sont encore ouvertes, notamment toutes les conjectures émises au cours du texte (cf Annexe ?? pour avoir une vision d’ensemble de ses conjectures, et une vision de leurs implications. Voici maintenant, pour finir, une liste de questions à étudier dans un futur proche, ou moins proche (car certaines semblent hors de portée aujourd’hui) :

1. L’étude de la conjecture sur les multitangentes nulles, en toute généralité.

³⁵ Cela est d’autant plus important que notre motivation première à l’étude des multitangentes est le calcul des invariants holomorphes d’un difféomorphisme tangent à l’identité. Dans le cas-type, ce calcul ne fait apparaître que des multitangentes convergentes ; dans le cas général, des multitangentes divergentes apparaissent...

2. Compter le nombre de multitangentes indépendantes de poids et de longueur donnés.

3. Généraliser le calcul de $Z_2 = \sum_{n \geq 0} \mathcal{Z} e^{2[n]} X^n$, obtenue à partir de $T_2 = \sum_{n \geq 0} T e^{2[n]} (X) Y^n$.

L'objectif est d'obtenir une expression de $Z_p = \sum_{n \geq 0} \mathcal{Z} e^{p[n]} X^n$, $p \geq 2$.

4. La conjecture sur le nettoyage des 1 dans les multitangentes, notamment :

- (a) Etude de la conjecture 3.
- (b) Etude de la possible équivalence des conjectures 2 et 3.
- (c) Le calcul du rang de la matrice obtenue par le procédé d'écriture de $\mathcal{Z} e^\sigma \mathcal{T} e^2$ dans \mathcal{MTGF}_2 .
- (d) Même question, en ajoutant à cette matrice les lignes obtenues à partir des multitangentes divergentes.
- (e) La recherche d'une autre méthode, car il semble peut probable que le calcul du rang aboutisse.

5. Réfléchir à la réciproque de l'implication :

$$\sum_{p \geq 0} \mathcal{Z}_p = \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{Z}_p \implies \sum_{p \geq 0} \mathcal{MTGF}_p = \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{MTGF}_p .$$

6. Réfléchir à une démonstration analytique de $\sum_{p \geq 0} \mathcal{MTGF}_p = \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{MTGF}_p$, même si cela semble être hors de portée aujourd'hui.

7. Les relations du type $\mathcal{T} e^{2,2} = 2 \mathcal{Z} e^2 \mathcal{T} e^2$ peuvent-elles donner des informations sur la nature arithmétique des multizêtas ? Elles permettent probablement de démontrer des résultats d'irrationalité.

8. Etudier les multizêtas elliptiques et les multitangentes elliptiques. Il s'agit de familles d'objets, intermédiaires entre la fonction ζ de Riemann et la fonction ρ de Weierstrass, certainement soumises, elles-aussi, à de nombreuses relations.

Annexes.

Rappels et notations :

séries formelles, polynômes non commutatifs et calcul moulien.

Voici les rudiments nécessaires sur les séries formelles et les familles formellement sommables, sur les polynômes non commutatifs et enfin sur le calcul moulien. Pour chacune des sections suivantes, on ne donnera que les notations et résultats qui seront réutilisés dans la suite de ce travail de manière plus ou moins explicite.

Pour une introduction détaillée et pédagogique de la théorie des séries formelles, on lira avec profit l'article [39]. En ce qui concerne les polynômes non commutatifs, le livre [42] s'impose comme une référence. Enfin, pour des précisions sur le calcul moulien, on consultera les livres [15], l'article d'introduction [43], le survol [49] sur les multizêtas, ou encore les articles [17], [18] et [19].

1 Séries formelles et familles formellement sommables.

1. Séries formelles à une indéterminée. Considérons un anneau \mathbb{A} .

On supposera que le lecteur est familier avec la théorie des séries formelles. On ne donnera donc que des notations.

On notera $\mathbb{A}[[X_1; \dots; X_r]]$ l'ensemble des séries formelles d'indéterminée X_1, \dots, X_r à coefficients dans l'anneau \mathbb{A} ; on notera aussi $\mathbb{A}\{x\}$ l'ensemble des séries entières, en la variable x , à coefficients dans l'anneau \mathbb{A} .

La dérivation usuelle des séries formelles sera notée D , ou D_X s'il y a besoin de préciser l'indéterminée par rapport à laquelle on dérive. On notera aussi $S : \mathbb{A}[[X_1; \dots; X_r]] \rightarrow \mathbb{A}$ l'application qui à une série formelle associe son terme constant (ou encore S_X s'il y a besoin de préciser l'indéterminée que l'on annule) .

On rappelle qu'on dispose d'une formule de Taylor pour les séries formelles :

$$F = \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 0} \frac{1}{n_1! \cdots n_r!} S(D_{X_1}^{n_1} \circ \cdots \circ D_{X_r}^{n_r}(F)) X_1^{n_1} \cdots X_r^{n_r} .$$

Enfin, il est clair que $\mathbb{A}[[X_1; \dots; X_r]]$ s'injecte dans $\mathbb{A}[[X_1; \dots; X_{r+1}]]$. On peut donc considérer l'algèbre des séries formelles à une infinité (dénombrable) d'indéterminées en posant :

$$\mathbb{A}[(X_n)_{n \in \mathbb{N}}] = \lim_{r \rightarrow +\infty} \text{ind } \mathbb{A}[[X_1; \dots; X_r]] .$$

Ceci est valable aussi bien d'un point de vue ensembliste que d'un point de vue espace vectoriel topologique.

2. Topologie formelle et famille formellement sommable. Soit \mathbb{A} un anneau, commutatif ou non, muni d'une pseudo-valuation¹ ν .

Pour un tel anneau, l'application $d_\nu : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(a; b) \mapsto 2^{-\nu(a-b)}$ définit une distance sur \mathbb{A} qui est invariante par translation et ultramétrique. Lorsque d_ν définit aussi une topologie complète, nous dirons que $(\mathbb{A}; \nu)$ est un **anneau pseudo-valué complet** et nous appellerons sa topologie **topologie formelle sur \mathbb{A}** .

La complétude de la topologie formelle sur \mathbb{A} permet alors de définir une notion de sommabilité : lorsque I est un ensemble (infini) d'indices, la famille $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments de \mathbb{A} est dite **formellement sommable** lorsque l'ensemble $\{a_i ; i \in \mathbb{N}, \nu(a_i) \leq \delta\}$ est fini pour tout $\delta \in \mathbb{Z}$. La somme de cette famille est alors :

$$\sum_{i \in I} a_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_k} a_i,$$

où $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite exhaustive² de sous-ensembles finis de I . Notons que cette limite ne dépend pas du choix de la suite $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$. En particulier, on peut choisir :

$$I_k = \{a_i ; i \in \mathbb{N}, \nu(a_i) \leq k\}.$$

3. Topologie sur $\mathbb{A}[[X]]$ et $\mathbb{A}((X))$. Le procédé ci-dessus permet de définir une topologie sur un anneau à l'aide d'une valuation. C'est par ce procédé que nous allons munir $\mathbb{A}[[X]]$ d'une topologie. Pour cela, définissons une pseudo-valuation sur $\mathbb{A}[[X]]$, noté Val . Si $A = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$ est une série formelle non-nulle, on dit que A est de valuation³ $p \in \mathbb{N}$,

et on note $\text{Val}(A) = p$, lorsque p est le plus petit entier n tel que $a_n \neq 0$; si A est nulle, on pose $\text{Val}(0) = +\infty$.

Alors, $(\mathbb{A}[[X]] ; \text{Val})$ est un anneau pseudo-valué complet. Cela permet de considérer la topologie formelle de $\mathbb{A}[[X]]$.

On montre alors que $\mathbb{A}[[X]]$ est dense dans $\mathbb{A}((X))$, pour la topologie formelle de $\mathbb{A}[[X]]$.

On peut prolonger Val au corps $\mathbb{A}((X))$, c'est-à-dire au corps des fractions de $\mathbb{A}[[X]]$. Ce corps est le **corps des séries formelles de Laurent** à une indéterminée, à valeurs dans \mathbb{A} . C'est un corps pseudo-valué complet.

4. Endomorphisme ayant une pseudo-valuation. Dans ce paragraphe, on suppose que $(\mathbb{A}; \nu)$ est non seulement un anneau pseudo-valué complet, mais aussi un \mathbb{C} -algèbre

¹ On appelle **pseudo-valuation** d'un anneau \mathbb{A} une application $\nu : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ vérifiant, pour tout $(a; b) \in \mathbb{A}^2$: (1) $\nu(a) = \infty \iff a = 0$.
(2) $\nu(a - b) \geq \min(\nu(a); \nu(b))$.
(3) $\nu(ab) \geq \nu(a) + \nu(b)$.

Cette définition appelle deux remarques : à priori, nous ne supposons pas que \mathbb{A} est intègre et nous n'imposons pas l'égalité dans la troisième condition. C'est ce qui distingue une pseudo-valuation d'une valuation.

² i.e. $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k = I$.

³ On parle traditionnellement de valuation d'une série formelle, alors que l'anneau de base n'est pas nécessairement intègre. On devrait plutôt parler de pseudo-valuation...

unitaire et associative. Ceci permet de définir des endomorphismes sur \mathbb{A} , où \mathbb{A} est alors vu comme un \mathbb{C} -module.

Notons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $A_k = \{a \in \mathbb{A} ; \nu(a) \geq k\}$.

$(A_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ définit une filtration⁴ de \mathbb{A} , compatible avec la structure d'anneau⁵ de \mathbb{A} , exhaustive⁶ et séparée⁷ . On définit alors une pseudo-valuation V sur la sous-algèbre \mathcal{A} de $\text{End}_{\mathbb{C}}\mathbb{A}$ des endomorphismes de \mathbb{A} admettant une valuation⁸ : de tels endomorphismes sont ceux qui vérifient la condition : $\exists n \in \mathbb{Z} , \forall k \in \mathbb{Z} , F(A_k) \subset A_{k+n}$.

Si $F \in \mathcal{A}$ est non nul, on dit que F est de pseudo-valuation $p \in \mathbb{Z}$, et on note $V(F) = p$, lorsque $\{n \in \mathbb{Z} ; \forall k \in \mathbb{Z} , F(A_k) \subset A_{k+n}\}$ est non vide majoré, de borne supérieure p ; si F est nul, on pose $V(F) = +\infty$.

Muni de sa topologie formelle, $(\mathcal{A}; V)$ devient alors un anneau pseudo-valué complet possédant aussi une structure d'algèbre, dont la distance d_V est subordonnée à d_ν :

$$\forall (F; G) \in \mathcal{A}^2 , d_V(F; G) = \sup_{a \in \mathbb{A} - \{0\}} \frac{d_\nu(F(a); G(a))}{d_\nu(a; 0)} .$$

Tout endomorphisme de \mathbb{A} admettant une pseudo-valuation est alors spontanément formellement continu sur \mathbb{A} . En particulier, si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de \mathcal{A} formellement sommable, sa somme est formellement continue.

Nous pourrions appliquer cela lorsque $\mathbb{A} = \mathbb{C}[[X]]$ ou $\mathbb{A} = \mathbb{C}((X))$.

2 Polynômes non commutatifs.

1. Définition et notations. Soit Ω un ensemble fini, appelé **alphabet**. Ses éléments seront appelés **lettres**. On appelle **mot** sur Ω toute suite finie de lettres de Ω . Le **mot vide** sera noté ε , l'ensemble des mots sur Ω sera noté⁹ Ω^* . On munit Ω^* de la concaténation des mots, notée \cdot , ce qui fait que $(\Omega^*; \cdot)$ est le¹⁰ monoïde libre non commutatif sur Ω . Celui-ci s'interprète comme étant :

$$\Omega^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega^n .$$

Etant donné un corps \mathbb{K} , on appelle **polynôme non commutatif** sur Ω , à coefficients dans \mathbb{K} , l'ensemble des combinaisons linéaires finies de mots de Ω^* .

⁴ i.e. une suite décroissante de sous-groupes additifs.

⁵ i.e. $A_k \cdot A_l \subset A_{k+l}$ pour tout $(k; l) \in \mathbb{Z}^2$.

⁶ i.e. $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k = \mathbb{A}$.

⁷ i.e. $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} A_k = \{0\}$.

⁸ De la manière dont on définit les endomorphismes continus dans un espace vectoriel normé.

⁹ On prendra bien soin de distinguer l'étoile \star désignant la construction du monoïde libre, de l'étoile $*$ excluant l'élément 0 d'un ensemble. Cela permettra de considérer, par exemple $(\mathbb{N}^*)^*$.

¹⁰ L'utilisation du pronom 'le' est justifiée par l'unicité à isomorphisme près de l'existence de Ω^* en tant que monoïde libre.

L'ensemble des polynômes non commutatifs sur Ω à coefficients dans \mathbb{K} est alors noté $\mathbb{K}\langle\Omega\rangle$. Un tel polynôme sera noté sous la forme $\sum_{\omega \in \Omega^*} a_\omega \omega$, où $\{a_\omega \in \mathbb{K}; \omega \in \Omega^*\}$ est un ensemble d'éléments de \mathbb{K} à supports finis. Si P est un polynôme non commutatif sur l'alphabet Ω , on note $\langle P|\omega\rangle$ le coefficient du mot $\omega \in \Omega^*$, de sorte que :

$$\forall P \in \mathbb{K}\langle\Omega\rangle, P = \sum_{\omega \in \Omega^*} \langle P|\omega\rangle \omega .$$

Muni de l'addition termes à termes, et de la multiplication issue de la concaténation et étendue par linéarité, $(\mathbb{K}\langle\Omega\rangle, +, \cdot)$ est un anneau unitaire non commutatif.

2. Produit de battage, pour les polynômes non commutatifs. P et Q étant deux polynômes non commutatifs sur un alphabet Ω , on construit le polynôme non-commutatif $P \sqcup Q$ par bilinéarité et récursivité. Lorsque $P = p_1 \cdots p_r$ et $Q = q_1 \cdots q_s$ sont des mots, celui-ci est défini de la manière suivante :

$$\begin{cases} P \sqcup \varepsilon = \varepsilon \sqcup P = P . \\ P \sqcup Q = p_1 \cdot ((p_2 \cdots p_r) \sqcup) + q_1 \cdot (P \sqcup (q_2 \cdots q_r)) . \end{cases}$$

Par exemple, si $P = a \cdot b \in \Omega^*$, et $Q = c \in \Omega^*$, alors : $P \sqcup Q = abc + acb + cab$.

Pour mieux appréhender ce produit de battage, on peut en avoir une représentation visuelle. Le produit de battage des séquences correspond à l'ensemble des résultats possibles lors de l'insertion d'un jeu de cartes dans un autre : c'est le battage classique des jeux de cartes.

Dans certains contextes, nous préférons la notation syntaxique, i.e. sous forme de mots ou de polynômes non commutatifs, à la notation séquentielle (cf. p. 208) . Si $(\Omega; +)$ est isomorphe à $(\mathbb{N}; +)$, nous pourrions noter plus simplement les mots de Ω^* par des séquences. Dans ce contexte, le polynôme $\underline{\alpha} \sqcup \underline{\beta}$ est un analogue non commutatif de l'ensemble $sh\underline{\alpha}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})$ (cf. p. 208) .

3. Produit de battage contractant pour les polynômes non commutatifs. Soit Ω un alphabet muni d'une structure de semi-groupe additif. P et Q étant deux polynômes non commutatifs sur un alphabet Ω , on construit le polynôme non-commutatif $P \star Q$ par bilinéarité et récursivité. Lorsque $P = p_1 \cdots p_r$ et $Q = q_1 \cdots q_s$ sont des mots, celui-ci est défini de la manière suivante :

$$\begin{cases} P \star \varepsilon = \varepsilon \star P = P . \\ P \star Q = p_1 \cdot ((p_2 \cdots p_r) \star Q) + q_1 \cdot (P \star (q_2 \cdots q_r)) + (p_1 + q_1) \cdot ((p_2 \cdots p_r) \star (q_2 \cdots q_r)) . \end{cases}$$

Par exemple, si $P = 1 \cdot 2 \in \mathbb{N}^*$, et $Q = 3 \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$P \star Q = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 2 .$$

De même que pour le produit de battage, on peut avoir une représentation visuelle de ce qu'est un produit de battage contractant. Proposons nous de décrire une analogie

du produit de battage contractant à l'aide d'un mélange fictif de deux jeux de cartes, l'un bleu et l'autre rouge. Celui-ci correspond au battage classique, auquel on ajoute des cartes nouvelles. Ces nouvelles cartes sont hybrides, à savoir mi-rouges, mi-bleues, et découle de la fusion de deux anciennes cartes. Elles sont obtenues lorsque ces dernières sont situées côte à côte dans le battage classique.

Poursuivons avec l'ambiguïté de notations convenant de noter un mot et une séquence de la même manière s'ils ont même longueur et mêmes composantes. Si $(\Omega; +)$ est isomorphe à $(\mathbb{N}; +)$, alors $\underline{\alpha} \star \underline{\beta}$ est un analogue non commutatif de $sh\underline{e}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})$ (cf. p. 208), tout comme $\underline{\alpha} \sqcup \underline{\beta}$ est un analogue non commutatif de $sh\underline{a}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})$.

3 Eléments de calcul moulien.

1. Notion de Moules. Un **moule** est une fonction définie sur un monoïde libre Ω^* (ou éventuellement, sur seulement une partie de Ω^*), à valeurs dans une algèbre \mathbb{A} . Concrètement, cela veut dire qu'“un moule est une fonction à un nombre variable de variables” .

Les moules dépendent donc de séquences $\underline{w} = (w_1; \dots; w_r)$ de longueur r quelconque. Les variables w_i sont éléments de Ω . Comme nous venons de le voir, le monoïde libre Ω^* est, par définition, l'ensemble des mots construits sur Ω , c'est-à-dire des séquences dont les composantes sont éléments de Ω .

De manière générale, nous utiliserons les notations mouliennes :

1. Les séquences seront toujours notées en gras et soulignées, avec indexation supérieure si nécessaire. $l(\underline{w})$ désignera toujours la longueur de la séquence \underline{w} , i.e. le nombre de ses composantes. Sans plus de précision, nous réserverons la lettre r pour désigner la longueur d'une séquence quelconque. Nous noterons aussi $|\underline{w}| = w_1 + \dots + w_r$, la somme des composantes, si Ω est muni d'une structure de semi-groupe additif.
2. Etant donné un moule, noté traditionnellement M comme application de Ω^* dans \mathbb{A} , nous lui préférons la notation M^\bullet . M^ω désignera alors l'évaluation du moule M^\bullet sur la séquence $\underline{\omega}$ de Ω^* .
3. Nous noterons aussi $\mathcal{M}_{\mathbb{A}}^\bullet(\Omega)$, l'ensemble des moules construits sur l'alphabet Ω à valeurs dans l'algèbre \mathbb{A} .

2. Opérations sur les moules. Les moules peuvent être, entre autres, additionnés entre eux, multipliés par des scalaires, mais aussi multipliés, composés entre eux, dérivés, etc. Dans les opérations que nous utiliserons dans ce travail, seule la multiplication mérite d'être définie : si $(A^\bullet; B^\bullet) \in (\mathcal{M}_{\mathbb{A}}^\bullet(\Omega))^2$, alors la multiplication moulienne $M^\bullet = A^\bullet \times B^\bullet$ est définie par :

$$\forall \underline{\omega} \in \Omega^*, M^\omega = \sum_{\substack{(\omega^1; \omega^2) \in (\Omega^*)^2 \\ \omega^1 \cdot \omega^2 = \underline{\omega}}} A^{\omega^1} B^{\omega^2} = \sum_{i=0}^{l(\underline{\omega})} A^{\omega^{\leq i}} B^{\omega^{> i}} .$$

Voici quelques précisions quant aux notations. Pour $\underline{\omega} = (\omega_1; \dots; \omega_r) \in \Omega^*$ et $k \in \llbracket 0; r \rrbracket$, on note :

$$\underline{\omega}^{\leq k} = \begin{cases} \emptyset & , \text{ si } k = 0 \\ (\omega_1; \dots; \omega_k) & , \text{ si } k > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \underline{\omega}^{> k} = \begin{cases} (\omega_{k+1}; \dots; \omega_r) & , \text{ si } k < r \\ \emptyset & , \text{ si } k = r . \end{cases}$$

Remarquons que les deux déconcaténations $\emptyset \cdot \underline{\omega}$ et $\underline{\omega} \cdot \emptyset$ interviennent dans la loi de multiplication moulienne, et correspondent à $i = 0$ et $i = l(\underline{\omega})$ respectivement. Nous noterons souvent, pour alléger l'écriture : $(A^\bullet \times B^\bullet)^\omega = \sum_{\substack{\omega^1 \cdot \omega^2 = \omega}} A^{\omega^1} B^{\omega^2}$.

Enfin, $(\mathcal{M}_{\mathbb{A}}^\bullet(\Omega), +, \cdot, \times)$ est une \mathbb{A} -algèbre associative, unitaire, non commutative, dont les inversibles sont facilement caractérisés : $(\mathcal{M}_{\mathbb{A}}^\bullet(\Omega))^\times = \{M^\bullet \in \mathcal{M}_{\mathbb{A}}^\bullet(\Omega); M^\emptyset \in \mathbb{A}^\times\}$. Nous noterons l'inverse multiplicatif d'un moule M^\bullet , lorsqu'il existe, $(M^\bullet)^{\times^{-1}}$.

3. Produit de battage, pour les séquences. Soit Ω un alphabet de base. Nous allons définir une première opération interne à Ω^* , appelée **produit de battage** :

Pour $(\underline{\alpha}; \underline{\beta}) \in (\Omega^*)^2$, le produit de battage des séquences $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$, noté $sh\underline{\alpha}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})$, est l'ensemble composé des séquences de Ω^* obtenues en mélangeant les éléments de $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$, tout en respectant leur ordre interne.

Lorsque $a \cdot F$ désigne l'ensemble $\{a \cdot \underline{\mathbf{f}}; \underline{\mathbf{f}} \in F\}$, où $a \in \Omega$ et $F \subset \Omega^*$, la définition récursive du produit de battage des séquences $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ de Ω^* , s'écrit :

$$\begin{cases} sh\underline{\alpha}(\emptyset; \underline{\alpha}) = sh\underline{\alpha}(\underline{\alpha}; \emptyset) = \{\underline{\alpha}\} . \\ sh\underline{\alpha}(\underline{\alpha}; \underline{\beta}) = (\alpha_1 \cdot sh\underline{\alpha}(\underline{\alpha}^{\geq 2}; \underline{\beta})) \cup (\beta_1 \cdot sh\underline{\alpha}(\underline{\alpha}; \underline{\beta}^{\geq 2})) . \end{cases}$$

Par exemple, si $\underline{\alpha} = a \cdot b \in \Omega^*$, et $\underline{\beta} = c \in \Omega^*$, alors : $sh\underline{\alpha}(\underline{\alpha}; \underline{\beta}) = \{abc; acb; cab\}$.

4. Produit de battage contractant, pour les séquences. Soit Ω un alphabet de base, que l'on suppose aussi être un semi-groupe additif. Nous allons définir une seconde opération interne à Ω^* , appelée **produit de battage contractant** :

Pour $(\underline{\alpha}; \underline{\beta}) \in (\Omega^*)^2$, le produit de battage contractant des séquences $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$, noté $sh\underline{e}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})$, est l'union de deux ensembles de séquences. Le premier ensemble est composé des séquences de Ω^* obtenues en mélangeant les éléments de $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$, tout en respectant leur ordre interne. Le second ensemble est l'ensemble des séquences obtenues en faisant agir toutes les contractions possibles sur les séquences du premier ensemble. L'opération (commutative) de contraction des éléments a et b , appartenant l'un à la séquence $\underline{\alpha}$, l'autre à la séquence $\underline{\beta}$, sera notée ici $(a; b) \mapsto a \star b$ et est la loi du semi groupe Ω .

Lorsque $a \cdot F$ désigne l'ensemble $\{a \cdot \underline{\mathbf{f}}; \underline{\mathbf{f}} \in F\}$, où $a \in \Omega$ et $F \subset \Omega^*$, la définition récursive du produit de battage contractant des séquences $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ de Ω^* , s'écrit :

$$\begin{cases} sh\underline{e}(\emptyset; \underline{\alpha}) = sh\underline{e}(\underline{\alpha}; \emptyset) = \{\underline{\alpha}\} . \\ sh\underline{e}(\underline{\alpha}; \underline{\beta}) = (\alpha_1 \cdot sh\underline{e}(\underline{\alpha}^{\geq 2}; \underline{\beta})) \cup (\beta_1 \cdot sh\underline{e}(\underline{\alpha}; \underline{\beta}^{\geq 2})) \cup ((\alpha_1 \star \beta_1) \cdot sh\underline{e}(\underline{\alpha}^{\geq 2}; \underline{\beta}^{\geq 2})) . \end{cases}$$

Par exemple, si $\underline{\alpha} = a \cdot b \in \Omega^*$, et $\underline{\beta} = c \in \Omega^*$, alors :

$$sh\underline{e}(\underline{\alpha}; \underline{\beta}) = \{abc; acb; cab; a \cdot (b \star c); (a \star c) \cdot b\} .$$

Notons que si $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ sont des séquences de longueurs a et b respectivement, alors :

$$\#sh\underline{e}(\underline{\alpha}; \underline{\beta}) = \sum_{k=0}^{\min(a;b)} 2^k \binom{a}{a-k} \binom{b}{b-k} .$$

5. Symétréilité. Lorsque Ω désigne toujours l'alphabet de base, muni d'une structure de semi- groupe additif, et \mathbb{A} une algèbre, nous dirons que le moule $Me^\bullet \in \mathcal{M}_{\mathbb{A}}^\bullet(\Omega)$ est symétréil lorsque :

$$\forall(\underline{\alpha}; \underline{\beta}) \in (\Omega^*)^2, Me^{\underline{\alpha}}Me^{\underline{\beta}} = \sum'_{\underline{\gamma} \in she(\underline{\alpha}; \underline{\beta})} Me^{\underline{\gamma}}.$$

Ici, la somme $\sum'_{\underline{\gamma} \in she(\underline{\alpha}; \underline{\beta})} Me^{\underline{\gamma}}$ est une notation abrégée pour noter $\sum_{\underline{\gamma} \in \Omega^*} \text{mult} \left(\begin{array}{c} \underline{\alpha}; \underline{\beta} \\ \underline{\gamma} \end{array} \right) Me^{\underline{\gamma}}$,

où $\text{mult} \left(\begin{array}{c} \underline{\alpha}; \underline{\beta} \\ \underline{\gamma} \end{array} \right)$ désigne le nombre de manières distinctes d'obtenir la séquence $\underline{\gamma}$ par battage contractant des séquences $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$. En fait, ce coefficient vaut $\langle \underline{\alpha} \star \underline{\beta} | \underline{\gamma} \rangle$, avec l'ambiguïté de notation convenant de considérer une séquence comme un mot. Dorénavant, nous allons oublier l'apostrophe de ce symbole pour alléger l'écriture :

$$\forall(\underline{\alpha}; \underline{\beta}) \in (\Omega^*)^2, Me^{\underline{\alpha}}Me^{\underline{\beta}} = \sum_{\underline{\gamma} \in \Omega^*} \langle \underline{\alpha} \star \underline{\beta} | \underline{\gamma} \rangle Me^{\underline{\gamma}} = \sum_{\underline{\gamma} \in she(\underline{\alpha}, \underline{\beta})} Me^{\underline{\gamma}}.$$

La symétréilité impose, à travers une multitude de relations, une grande rigidité. Par exemple, si $(x; y) \in \Omega^2$ et Me^\bullet désigne un moule symétréil, alors on a nécessairement :

$$\begin{aligned} Me^x Me^y &= Me^{x,y} + Me^{y,x} + Me^{x+y} . \\ Me^{x,y} Me^y &= Me^{y,x,y} + 2Me^{x,y,y} + Me^{x+y,y} + Me^{x,2y} . \end{aligned}$$

6. Symétrilité. Si Me^\bullet est un moule symétréil sur $(\mathbb{N}^*)^\bullet$, à valeurs dans une algèbre commutative \mathbb{A} , alors sa fonction génératrice, notée Mig^\bullet , est définie par :

$$\begin{cases} Mig^0 = 1 . \\ Mig^{v_1, \dots, v_r} = \sum_{s_1, \dots, s_r \geq 1} Me^{s_1, \dots, s_r} v_1^{s_1-1} \dots v_r^{s_r-1} \in \mathbb{A}[[v_1; \dots; v_r]] . \end{cases}$$

Le moule Mig^\bullet est alors automatiquement symétréil, c'est à dire qu'il vérifie la relation :

$$Mig^{\underline{v}} Mig^{\underline{w}} = \sum_{\underline{x} \in shi(\underline{v}; \underline{w})} Mig^{\underline{x}} .$$

L'ensemble $shi(\underline{v}; \underline{w})$ est aussi un produit de battage. Si \underline{v} et \underline{w} sont des séquences d'indéterminées, celui-ci est défini par $shi(\underline{v}; \underline{w})$ par récurrence sur $l(\underline{v}) + l(\underline{w})$ par :

$$\begin{cases} shi(\underline{v}; \emptyset) = shi(\emptyset; \underline{v}) = \underline{v} . \\ shi(\underline{v}; \underline{w}) = (v_1 \cdot shi(\underline{v}^{\geq 2}; \underline{w})) \cup (w_1 \cdot shi(\underline{v}; \underline{w}^{\geq 2})) \cup ((v_1 \otimes w_1) \cdot shi(\underline{v}^{\geq 2}; \underline{w}^{\geq 2})) . \end{cases}$$

L'opération \otimes est ici une contraction abstraite définie sur $(\mathbb{N}^*)^2$, remplaçant l'addition dans le cas de la symétréilité. L'évaluation d'un moule Mig^\bullet sur une séquence comportant une telle contraction est alors récursive et donnée par la formule :

$$Mig^{\underline{v} \cdot (x \otimes y) \cdot \underline{w}} = \begin{cases} \frac{Mig^{\underline{v} \cdot x \cdot \underline{w}} - Mig^{\underline{v} \cdot y \cdot \underline{w}}}{x - y}, & \text{si } x \neq y . \\ \frac{\partial Mig^{\underline{v} \cdot x \cdot \underline{w}}}{\partial x}, & \text{si } x = y . \end{cases}$$

7. Quelques exemples de règles. Envisagé comme un simple système de notations, le langage moulien conduit déjà à des formules concises et à l'économie de longue suite d'indices. Mais sa véritable utilité tient aux diverses opérations mouliennes et aux règles qui indiquent comment celles-ci affectent (conservent ou transforment) les symétries de base.

- Ainsi :
1. $\text{altern}\underline{a}l \circ \text{altern}\underline{a}l = \text{altern}\underline{a}l$.
 2. $\text{symétr}\underline{e}l \circ \text{symétr}\underline{e}l = \text{symétr}\underline{e}l$.
 3. $\text{altern}\underline{a}/\underline{e}$ conjugué parsymétr $\underline{a}/\underline{e}$ = $\text{altern}\underline{a}/\underline{e}$.
 4. exponentielle ($\text{altern}\underline{a}/\underline{e}$) = $\text{symétr}\underline{e}l$ = $\text{symétr}\underline{e}l$.
- Etc.

4 Quelques notations.

Remarquons que nous noterons en gras, italique et souligné, dans tout ce travail, l'alternance voyellique indiquant non seulement la symétrie des moules considérés, mais aussi la nature des produits de battages qui apparaîtront. Ainsi, il sera plus aisé de faire la différence entre des moules symétr \underline{a} ls, symétr \underline{e} ls et symétr \underline{i} ls ou entre les ensembles $sh\underline{a}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})$, $sh\underline{e}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})$ et $sh\underline{i}(\underline{\alpha}; \underline{\beta})$.

Les moules que nous allons considérer porteront dans leur nom l'alternance voyellique indiquant immédiatement quelle symétrie ils vérifient. Par exemple, le moule $\mathcal{T}e^\bullet(z)$ est un moule symétr $\underline{e}l$ (cf. p 119), alors que $\mathcal{Z}ig^\bullet$ est symétr $\underline{i}l$ (cf. p 135). L'absence de cette voyelle indiquera aussi que le moule ne vérifie aucune symétrie. Il en est ainsi du moule \mathcal{H}^\bullet (cf. page 192)

Enfin, si $\underline{\alpha} = (\alpha_1; \dots; \alpha_n)$ est une séquence d'un alphabet Ω , on notera respectivement par $\overleftarrow{\underline{\alpha}}$ et $\underline{\alpha}^{[k]}$, la séquence $\underline{\alpha}$ renversée et la séquence $\underline{\alpha}$ répétée k fois :

$$\overleftarrow{\underline{\alpha}} = (\alpha_n; \dots; \alpha_1) , \quad \underline{\alpha}^{[k]} = \underbrace{\underline{\alpha} \cdot \dots \cdot \underline{\alpha}}_{k \text{ fois}} .$$

Feuilles de calculs Maple.

Chacun des paragraphes suivants est consacré à une feuille de calcul Maple.

Celle-ci devra être enregistrée dans un fichier “*.mpl” dont le nom sera le nom donné au paragraphe correspondant.

1 Procédures préliminaires.

1.1 Ouverture des packages nécessaires.

```
with(linalg) :
```

1.2 Trois procédures.

Voici trois procédures qui nous seront utiles dans toutes les feuilles Maple suivantes :

1. La procédure “concatene” permet de concaténer deux listes.
2. La procédure “ajoute en tête e aux listes de E ” permet d’ajouter en tête un élément e à chaque liste de la liste E .

E , ainsi que le résultat de cette procédure, sont des listes de listes.

3. La procédure “ajoute en queue e aux listes de E ” permet d’ajouter, en queue de chaque liste de la liste E , l’élément e .

E , ainsi que le résultat de cette procédure, sont des listes de listes.

Pour la compréhension du code, notons qu’en Maple une liste s’écrit avec des crochets.

```
concatene := proc (L1,L2)
    [op(L1), op(L2)] ;
end :

ajoute_en_tête_e_aux_listes_de_E := proc (e , E)
    if E = []
        then [[e]] ;
        else map (x -> concatene ([e] , x) , E) ;
    end ;
end :

ajoute_en_queue_e_aux_listes_de_E := proc (e , E)
    if E = []
        then [[e]] ;
        else map (x -> concatene (x , [e]) , E) ;
    end ;
end :
```

1.3 Exemples.

Voici quelques définitions de listes :

```
> L1 := [a, b, c] ;
> L2 := [Pi, I, exp(1)] ;
> L3 := concatene (L1,L2) ;
> L := [L1, L2, L3] ;
```

$$L1 := [a, b, c]$$

$$L2 := [\pi, i, e^1]$$

$$L3 := [a, b, c, \pi, i, e^1]$$

$$L := [[a, b, c], [\pi, i, e^1], [a, b, c, \pi, i, e^1]]$$

Maintenant, nous pouvons ajouter aux listes L1, L2, L3 un même élément en tête et en queue :

```
> ajoute_en_tête_e_aux_listes_de_E (tete, L) ;
> ajoute_en_queue_e_aux_listes_de_E (queue, L) ;
```

$$[[tete, a, b, c], [tete, \pi, i, e^1], [tete, a, b, c, \pi, i, e^1]]$$

$$[[a, b, c, queue], [\pi, i, e^1, queue], [a, b, c, \pi, i, e^1, queue]]$$

2 Evaluation des multizêtas en des multi-entiers, par l'algorithme de Richard Crandall.

2.1 Notations.

On programme ici l'algorithme de calcul des multizêtas de Richard Crandall.

La référence est l'article [13] . On ne détaillera pas l'algorithme, celui-ci étant bien documenté dans l'article mentionné : le travail théorique se trouve au début, de nombreux pseudo-codes s'y trouvent, sans oublier que le calcul de complexité y est détaillé.

Voici juste les notations utiles à la lecture du code qui suivra :

$$Y([s_1; \dots; s_r]; q; \lambda) = \int_{0 < u_1 < \dots < u_r < \lambda} u_k^q \prod_{i=1}^k \left(\frac{(u_i - u_{i-1})^{s_i-1}}{e^{u_i} - 1} \frac{du_i}{(s_i - 1)!} \right) .$$

$$Z([s_1; \dots; s_r]; \lambda) = \sum_{m_1, \dots, m_r \geq 0} \int_{\lambda < u_1 < \dots < u_r} \prod_{i=1}^j \left((u_i - u_{i-1})^{s_i-1} e^{-u_i m_i} \frac{du_i}{(s_i - 1)!} \right) .$$

On écrit alors $\zeta(s_1; \dots; s_r)$ comme une somme finie de termes calculables rapidement :

$$\begin{aligned} \zeta([s_1; \dots; s_r]) &= Y([s_1; \dots; s_r]; 0; \lambda) + Z([s_1; \dots; s_r]; \lambda) \\ &+ \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{q=0}^{s_{k+1}-1} \frac{(-1)^q}{q!} Y([s_1; \dots; s_k]; q; \lambda) Z([s_{k+1} - q; s_{k+2}; \dots; s_r]; \lambda) . \end{aligned}$$

2.2 Ouverture des packages nécessaires.

with (linalg) :

2.3 Calcul préalable des valeurs de $f(n; r; \lambda)$.

Ici, $f(n; r; \lambda)$ désigne la fonction définie par : $f(n; r; \lambda) = \left(-\frac{\partial}{\partial n}\right)^{r-1} \left(\frac{e^{-\lambda n}}{n}\right)$.

```
f := proc (L1, rmax, lambda)
  local k, j, i, t0, t1, t2, t3, t4, réponse ;
  réponse := matrix(L1,rmax,0) ;
  t0 := exp(-lambda) ;
  t2 := 1 ;
  for k from 1 to L1 do
    t1 := k * lambda ;
    t2 := t0 * t2 ;
    for j from 1 to rmax do
      t3 := 1 ;
      t4 := 1 ;
      for i from 2 to j do
        t4 := t4 * (j - i + 1) ;
        t3 := t1 * t3 + t4 ;
      end ;
      réponse[k,j] := t2*t3*k^(-j) ;
    end ;
  end ;
  réponse
end proc :
```

2.4 Evaluation de $Z(r_1; \dots; r_j; \lambda)$.

```
Z := proc (r , lambda, L1, F)
```

```
  # r désigne la séquence (s_{j + 1} - q, s_{j + 2}, \cdots, s_r) .
  # lambda est la constante choisie dans l'algorithme de R. Crandall pour écrire
  # Zêta (s) sous forme d'un produit moulien.
  # L1 est l'ordre de troncature de la série donnant Z.
  # F désigne la matrice dont l'entré (i ; j) est f(i ; j ; lambda)
```

```
  local n1, i, l, q, t ;
```

```
  # n1 et i sont des indices de sommation.
  # l et q sont des variables, t est un vecteur de variables.
```

```
  l := vectdim(r) ;
```

```
  q := 0 ;
```

```
  t := Vector(l + 1 , 0) ;
```

```
  t[l + 1] := 1 ;
```

```
  for n1 from l to L1 do
```

```
    q := q + 1 ;
```

```
    for i from 1 to (l - 1) do
```

```
      t[l - i + 1] := t[l - i + 1] + t[l - i + 2] / (q + i - 1)^(r[l + 1 - i]) ;
```

```
    end ;
```

```
    t[1] := t[1] + F[n1,r[1]] * t[2] ; #
```

```
# -
# |
# |--|
# _| |
# |
```



```

end ; # Boucle descendante, donné par <-----|
t[1] / GAMMA(r[1]) ; # le pseudo-code de R. Crandall
end proc :

```

2.5 Fonctions auxiliaires pour le calcul de Y.

Nous donnons ici deux procédures :

1. Celle donnant le produit de convolution acyclique¹ de deux séquences de même longueur.
2. Celle donnant le produit point par point de deux séquences de même longueur.

La première sera noté “pca” pour “produit de convolution acyclique”, la seconde “pppp” pour “produit point par point”.

Pour mémoire, le produit de convolution acyclique de $(u_1; \dots; u_r)$ et $(v_1; \dots; v_r)$ correspond à la suite des coefficients du produit des polynômes $\sum_{i=0}^r u_i X^i$ et $\sum_{i=0}^r v_i X^i$.

```

pca := proc (x, y) # -
  local i, j, convolée, l ; # |
  l := vectdim(x); # |
  convolée := Vector (1 , 0) ; # | # On peut aussi
  for i from 1 to l do # | # utiliser la FFT
    for j from 1 to i do # | # pour accélérer
      convolée[i] := convolée[i] + x[j]*y[i + 1 - j] ;# | # l'algorithmme .
    end ; # |
  end ; # |
  convolée ; # |
end proc : # -

pppp := proc (x, y)
  local i, produit, l ;
  l := vectdim(x);
  produit := Vector (1 , 0) ;
  for i from 1 to l do
    produit[i] := x[i] * y[i] ;
  end ;
  produit ;
end proc :

```

2.6 Evaluation de $Y(s_1; \dots; s_r; q; \lambda)$.

```

Y := proc (s, q, lambda, L2, B, G, S)

  # s désigne la séquence d'entiers sur laquelle on va évaluer le multizêta
  # q désigne un entier.
  # lambda est la constante choisie dans l'algorithmme de R. Crandall pour écrire
  # Zêta (s) sous forme d'un produit moulien.
  # L2 est l'ordre de troncature de la série donnant Y.
  # B désigne les "nombres" de Bernoulli (ou presque...) .
  # G désigne des quotients de factorielles.
  # S désigne des sommes de termes de s.

```

¹ “half cyclic convolution” en anglais.

```

local N, l, X, Y;

# N est un indice de sommation.
# l désigne la longueur de la séquence s.
# X et Y sont des vecteurs

l := vectdim(s) ;
X := B ; # -
for N from 1 to (l - 1) do # | Accélération de Bayley due en partie
  X := pppp (X,row(G,N)) ; # | à l'utilisation de la transformation
  X := pca (X,B) ; # | de Fourier rapide
end ; # -
Y := 0 ;
for N from 0 to L2 do
  Y := Y + lambda^(N + S[l] + q - 1) / (N + S[l] + q - 1) * X[N + 1] ;
end ;
Y / GAMMA(s[1]) ;
end proc ;

```

2.7 Evaluation des multizêtas.

Voici le code de l'algorithme de R. Crandall pour évaluer $\zeta(\underline{s})$. Dans cette première version, les paramètres λ , L1 et L2 sont libres.

```

évalue_zeta_avec_liberté_de_choix_de_lambda_L1_et_L2 :=
proc (s, lambda, L1, L2)

# s désigne la séquence d'entiers sur laquelle on va évaluer le multizêta
# lambda est la constante choisie dans l'algorithme de R. Crandall pour écrire
# Zêta (s) sous forme d'un produit moulien.
# L1 est l'ordre de troncature de la série donnant Z.
# L2 est l'ordre de troncature de la série donnant Y.

local z, k, q, B, S, G, F, d, t, s_max ;

# k et q sont des indices de sommation.
# d, z, t, B, G et S sont des variables : d désigne la dimension de la séquence s.
# z désigne la valeur que l'on obtiendra du multizêta en cours de calcul.
# B désigne les "nombres" de Bernoulli (ou presque...) .
# G désigne des quotients de factorielles.

d := vectdim (s) ;

# Calcul des nombres de Bernoulli, une fois pour toute

B := Vector(L2 + 1, 0) ;
for k from 1 to (L2 + 1) do
  B[k] := bernoulli(k - 1) / GAMMA(k) ;
end ;

# Calcul de la matrice carrée F contenant à la place (i;j) la valeur de f(i;j;lambda)

s_max := s[1] ; # -
for k from 2 to d do # | Détermination de l'élément
  if s[k] > s_max then s_max := s[k] ; # | maximal de la séquence s
end # |

```

```

end ;                                     # -

F := f(L1, s_max, lambda) ; # Calcul de la matrice F

# Calcul des quotients de factorielles, une fois pour toute

S := Vector (d, s[1]) ;
for k from 2 to d do
    S[k] := S[k - 1] + s[k] ;
end ;

G := Matrix (d - 1, L2 + 1, 0) ;
for q from 1 to (d - 1) do
    for k from 1 to (L2 + 1) do
        G[q,k] := GAMMA(k - 1 + S[q] - q) / GAMMA(k - 1 + S[q + 1] - q) ;
    end ;
end ;

# Calcul de la somme donnant zêta(s)

z := Y(s,0,lambda,L2,B,G,S) + Z(s,lambda,L1,F) ;           # termes isolés de zeta(s)
for k from 1 to (d - 1) do                                  #-
    t := s ;                                               # |
    for q from 0 to (s[k + 1] - 1) do                       # | Somme
        z := z + (-1)^q / GAMMA(q + 1) * Y(t[1..k],q,lambda,L2,B,G,S) # | double
        * Z(t[k + 1..d],lambda,L1,F) ;                     # | dans
        t[k + 1] := t[k + 1] - 1 ;                          # | l'expression
    end ;                                                   # | de zêta(s)
end ;                                                       # |
                                                           #-

z ;

end proc :

```

Voici maintenant une seconde version de cet algorithme. Cette fois, les valeurs de λ , $L1$ et $L2$ sont fixes. Mais, la procédure prend directement comme argument la précision voulue dans l'évaluation de $\zeta(\underline{s})$.

```

evaluate_zeta :=
proc (s, d)

# s désigne la séquence d'entiers sur laquelle on va évaluer le multizêta.
# d désigne le nombre de décimales exactes souhaité.

local lambda, epsilon, L1, L2 ;

# epsilon désigne la précision voulue dans le calcul de zêta(s)

lambda := Pi / 5 ;
epsilon := 10^(- (d + 1)) ;
L1 := round (- ln (epsilon) / lambda) ;
L2 := round (ln (epsilon) / ln (lambda / (2*Pi))) ;

evalf (évalue_zeta_avec_liberté_de_choix_de_lambda_L1_et_L2 (s, lambda, L1, L2), d) ;
end :

```

2.8 Exemples .

1. Commençons par constater qu'on a bien $\mathcal{Z}e^{2,1} = \mathcal{Z}e^3$, à 10 décimales près.

Pour cela, demandons à Maple d'afficher 15 décimales :

```
> zeta_2_1 := evalf ( évalue_zeta_avec_liberté_de_choix_de_lambda_L1_et_L2
([2, 1], Pi / 4, 32, 12) , 15) ;
> zeta_3 := evalf ( évalue_zeta_avec_liberté_de_choix_de_lambda_L1_et_L2
([3], Pi / 3, 24, 14) , 15) ;
zeta_2_1 := 1.20205690315807
zeta_3 := 1.20205690315946
```

2. Vérifions l'égalité $\mathcal{Z}e^2 = \frac{\pi^2}{6}$ à 50 décimales près :

```
> evalue_zeta ([2], 50) ;
> evalf (Pi^2 / 6, 50) ;
1.6449340668482264364724151666460251892189499012067
1.6449340668482264364724151666460251892189499012068
```

3 Procédures autour des partitions d'entiers.

3.1 Ouverture des packages nécessaires.

with (linalg) :

3.2 Procédure déterminant toutes les partitions d'un entier de longueur et de valuation données.

Commençons avec la procédure clé de toute cette feuille de calcul Maple. Il s'agit de déterminer tous les r -uplets possibles d'entiers supérieurs à ν et dont la somme vaut '*poids*'. Un tel r -uplet s'appelle une partition² de longueur r et de valuation ν .

La procédure "partitions de valuation longueur et poids donnés" est récursive. Elle consiste à déterminer de la manière suivante les suites de r entiers supérieurs à ν , dont la somme (appelée précédemment '*poids*') vaut p :

1. On note i le premier entier. On complète récursivement les $r - 1$ autres entiers par toutes les suites de $r - 1$ entiers supérieurs à ν et dont la somme vaut $p - i$.
2. On effectue l'étape 1. pour toutes les valeurs possibles de i , c'est-à-dire lorsque $i \in \llbracket \nu ; p - (r - 1)\nu \rrbracket$.

Ce point est fait dans la procédure intermédiaire "partitions intermediaire de valuation longueur et poids donnés" ; le reste de la procédure "partitions de valuation longueur et poids donnés" ne concerne que les conditions initiales à traiter à part.

Voici le code :

² Certains auteurs font une distinction entre partition et composition, une partition désignant un r -uplet d'entiers classés par ordre décroissant, tandis qu'une composition est un r -uplet d'entiers non nécessairement ordonnés.

Nous n'effectuerons pas cette distinction et nous appellerons partition ce que l'on appelle parfois composition.

```

partitions_de_valuation_longueur_et_poids_donnés :=

proc (valuation, longueur, poids) option remember ;

    local reponse, partitions_intermediaire_de_valuation_longueur_et_poids_donnés ;

partitions_intermediaire_de_valuation_longueur_et_poids_donnés :=
    proc (valuation, longueur, poids)
        local i, reponse, reponse_inter ;
        reponse := [] ;
        for i from valuation to (poids - valuation * longueur + valuation) do
            reponse_inter := ajoute_en_tete_e_aux_listes_de_E
                ( i, partitions_de_valuation_longueur_et_poids_donnés
                    (valuation, longueur - 1, poids - i)
                );          # ici apparaît la recursivité
                            # introduite précédemment.
            reponse := concatene (reponse, reponse_inter) ; # regroupe l'ensemble
                                                                # des calculs effectués
                                                                # la variable 'reponse'
        end ;
        reponse ;
    end ;

reponse := [] ;
if longueur = 1 and poids >= valuation      # traitements des conditions initiales
then reponse := [[poids]] ;                 # traitements des conditions initiales
elif longueur = 1 and poids < 2            # traitements des conditions initiales
then reponse := [] ;                       # traitements des conditions initiales
else reponse
    := partitions_intermediaire_de_valuation_longueur_et_poids_donnés
        (valuation, longueur, poids) ;
end ;
reponse ;
end :

```

Maintenant, écrivons une procédure qui donne toutes les partitions dont la valuation et le poids sont fixés à l'avance. Pour cela, il suffit de concaténer les résultats de la recherche de toutes les partitions de valuation, de poids et de longueur donnés lorsque la longueur varie entre 1 et sa valeur maximale autorisée.

```

partitions_de_valuation_et_poids_donnés := proc (valuation, poids)
    local r, reponse ;
    reponse := [] ;
    for r from 1 to (poids / valuation) do
        reponse := concatene ( reponse
                                ,
                                partitions_de_valuation_longueur_et_poids_donnés
                                    (valuation, r, poids)
                            ) ;
    end ;
    reponse ;
end :

```

3.3 D'autres procédures.

Voici maintenant des cas particuliers de cette première procédure. Le titre indique le résultat souhaité, ainsi que le nom des variables choisies.

```

partition_avec_zeros := proc (longueur, poids)
  partitions_de_valuation_longueur_et_poids_donnés (1, longueur, poids)
end :

partition_sans_zeros := proc (poids, longueur)
  partitions_de_valuation_longueur_et_poids_donnés (1, longueur, poids)
end :

partition_de_valuation_supérieur_à_2 := proc (longueur, poids)
  partitions_de_valuation_longueur_et_poids_donnés (2, longueur, poids)
end :

partition_de_valuation_supérieur_à_3 := proc (longueur, poids)
  partitions_de_valuation_longueur_et_poids_donnés (3, longueur, poids)
end :

```

Il s'agit aussi d'être capable de déterminer toutes les partitions de longueur et de poids fixés à l'avance dont le premier élément est supérieur à 2, pour pouvoir considérer des multizêtas convergents. De même, pour considérer des multitangentes convergentes, nous aurons besoin de déterminer les partitions de longueur et de poids fixé à l'avance dont les premier et dernier éléments sont supérieurs à 2.

La première procédure s'appelle "partition commençant par au moins un 2" ; la seconde s'appelle "partition commençant et finissant par au moins 2".

Le principe de ces deux procédures est basique : on écrit toutes les partitions de valuation 1, de longueur et de poids voulus, puis on supprime celles qui ne vérifient pas la condition souhaitée.

```

partition_commençant_par_au_moins_un_2 := proc (poids, longueur)
  local reponse, reponse_intermediaire, i, memoire ;
  reponse_intermediaire := partition_sans_zeros (poids, longueur) ;
  reponse := [] ;
  for i from 1 to (nops (reponse_intermediaire)) do
    memoire := reponse_intermediaire[i] ;
    if (memoire[1] > 1)
      then reponse := concatene (reponse, [memoire]) ;
    end :
  end :
  reponse ;
end :

partition_commençant_et_finissant_par_au_moins_2 := proc (poids, longueur)
  local reponse, reponse_intermediaire, i, memoire ;
  reponse_intermediaire := partition_sans_zeros (poids, longueur) ;
  reponse := [] ;
  for i from 1 to (nops (reponse_intermediaire)) do
    memoire := reponse_intermediaire[i] ;
    if (memoire[1] > 1) and (memoire[nops(memoire)] > 1)
      then reponse := concatene (reponse, [memoire]) ;
    end :
  end :
  reponse ;
end :

```

4 Produits de battage et de battage contractant.

4.1 Objectifs.

Rappelons que la notion de produit de battage (contractant ou non) existe à la fois pour les séquences et pour les polynômes non-commutatifs. Les deux acceptions coïncident via l'identification entre séquences d'un ensemble Ω et polynômes non commutatifs dont l'alphabet est Ω .

Voici la définition de ces deux produits, dans le cas des polynômes non commutatifs :

Lorsque P et Q sont deux polynômes non commutatifs sur un alphabet Ω , on définit les polynômes non-commutatifs $P \sqcup Q$ et $P \star Q$ (lorsque Ω est muni d'une structure de semi-groupe additif) par bilinéarité et récursivement.

Lorsque $P = p_1 \cdots p_r$ et $Q = q_1 \cdots q_s$ sont des mots, l'initialisation s'effectue ainsi :

$$P \sqcup \varepsilon = \varepsilon \sqcup P = P . \quad (1)$$

$$P \sqcup Q = p_1 \cdot ((p_2 \cdots p_r) \star Q) + q_1 \cdot (P \star (q_2 \cdots q_r)) . \quad (2)$$

$$P \star \varepsilon = \varepsilon \star P = P . \quad (3)$$

$$P \star Q = p_1 \cdot ((p_2 \cdots p_r) \star Q) + q_1 \cdot (P \star (q_2 \cdots q_r)) \\ + (p_1 + q_1) \cdot ((p_2 \cdots p_r) \star (q_2 \cdots q_r)) . \quad (4)$$

On se propose ici d'écrire deux procédures, l'une donnant le produit de battage de deux séquences, la seconde donnant le produit de battage contractant de deux séquences. On se restreint volontairement au cas où l'alphabet Ω est une partie de \mathbb{N} .

4.2 Ouverture des packages nécessaires.

with (linalg) :

4.3 Manière de représenter une séquence, et loi de semi-groupe de \mathbb{N} .

On travaillera avec l'alphabet infini des entiers, codé ici par $n \longleftrightarrow x[n]$.

La séquence d'entiers $\underline{s} = (s_1; \cdots; s_r)$ pourrait être représentée traditionnellement en Maple par la liste :

```
s1 := [ s1, s2, ..., sr ] :
```

Pour les procédures à venir, nous préférons à $s1$ une représentation abstraite, donnée aussi sous forme de liste :

```
s := [ seq (x[s1[i]] , i = 1..r) ] :
```

Enfin, on écrit une procédure codant la loi additive de notre semi groupe. Les arguments a et b doivent s'écrire sous la forme $x[k]$ sinon la procédure générera une erreur ou quelque chose d'incompréhensible...

```
plus := (a,b) -> x [op(a) + op(b)] :
```



```

                                ,                # |
                                L2                # |
                                )                # |
                                )[]             # |
                                ,                # |
ajoute_en_tête_e_aux_listes_de_E          # |
  ( L2[1..1] []                # |
                                ,                # | Partie réursive
                                produit_de_battage_contractant_intermédiaire # | basée sur la
                                ( L1            # | formule (1.4)
                                ,
                                subsop(1=NULL,L2)
                                )
                                )[]             # |
                                ,                # |
ajoute_en_tête_e_aux_listes_de_E          # |
  ( plus ( L1[1..1] []         # |
                                ,
                                L2[1..1] []     # |
                                )                # |
                                ,
                                produit_de_battage_contractant_intermédiaire # |
                                ( subsop(1=NULL,L1)
                                ,
                                subsop(1=NULL,L2)
                                )
                                )[]             # |
] ;                                     # -

end ;
reponse ;
end ;

```

4.4.2 Exemple.

Voici un exemple d'application de ces deux procédures :

```

> L1 := [x[2], x[3]] ;
> L2 := [x[3], x[2]] ;
> A := produit_de_battage_intermédiaire (L1, L2) ;
> B := produit_de_battage_contractant_intermédiaire (L1, L2) ;
      A := [[x2, x3, x3, x2], [x2, x3, x3, x2], [x2, x3, x2, x3], [x3, x2, x3, x2],
            [x3, x2, x2, x3], [x3, x2, x2, x3]]
      B := [[x2, x3, x3, x2], [x2, x3, x3, x2], [x2, x3, x2, x3], [x2, x3, x5], [x2, x6, x2],
            [x3, x2, x3, x2], [x3, x2, x2, x3], [x3, x2, x5], [x3, x2, x2, x3], [x3, x4, x3],
            [x5, x3, x2], [x5, x2, x3], [x5, x5]]

```

4.5 Simplification de la réponse obtenue.

D'après l'exemple ci-dessus, la réponse peut comporter plusieurs termes identiques. Le but de la procédure suivante est de simplifier l'écriture pour en obtenir une plus proche de celle d'un polynôme non commutatif sur l'alphabet $(x[k])_{k \in \mathbb{N}}$. Pour cela, nous

allons regrouper les répétitions de séquences identiques dans le résultat obtenu.

Dans un premier temps, nous allons donc écrire une procédure “coefficient” donnant deux réponses :

1. Le coefficient (i.e. le nombre d’occurrences) de m , qui désigne une liste/un mot, dans l’un des deux produits de battage des séquences L1 et L2.
2. Le résultat de l’évaluation du produit de battage choisi sur les séquences L1 et L2, une fois retirée chaque occurrence de la liste/du mot m dans celui-ci

La procédure “coefficient” prend comme argument une séquence m , dont les termes sont du type $x[k]$, ainsi qu’une liste de listes E du même type que m . Le résultat est sous forme de liste, dont le premier élément est le coefficient, le second élément est le reste du produit de battage.

Comment fonctionne le code de “coefficient” ? :

Nous balayons toute la liste E2, copie de la liste E à l’aide du booléen ‘arret’ : une fois arrivé au bout du balayage, ‘arret’ devient vrai. La variable ‘compteur’ est ici un moyen de se repérer dans le balayage de la liste. A chaque position, on regarde si le terme lu est identique au mot m (et dans ce cas, on incrémente c de 1 et on note la position dans ‘place’), puis on supprime ce terme lu de E2, i.e. le premier terme de E2.

Ensuite, nous balayons la liste *place2*, copie de la liste *place* créée lors du balayage précédent et servant de mémoire où sont stockées les positions des mots m dans la liste de départ E. A chaque position lue dans *place2*, on supprime l’élément correspondant dans E3, nouvelle copie de la liste E.

Le résultat est alors $[c, E3]$.

```

coefficient := proc (m , E)
  local arret, compteur, place, place2, c, E2, E3 ;
  arret := false ;                               # -
  compteur := 1 ;                                # | Initialisation
  place := [] ;                                  # | des variables
  E2 := E ;                                      # |
  c := 0 ;                                       # -
  while arret = false do                         # -
    if m = E2[1]                                 # |
      then c := c + 1 ;                          # | Balayage de la liste
           place := concatene ([compteur], place) ; # | E2 pour :
    end ;                                       # |
    E2 := subsop(1=NULL, E2) ;                  # | 1. Compter le nombre
    compteur := compteur + 1 ;                  # | d'occurrences de m
    if E2 = []                                   # | 2. Repérer la place des
      then arret := right ;                      # | occurrences de m
    end ;                                       # |
  end ;                                         # -
  arret := false ;                               # | Initialisation de
  place2 := place ;                             # | nouvelles variables
  E3 := E ;                                      # -
  if place2 = []
    then arret := right ;
  end ;
  while arret = false do                         # -

```

```

E3 := subsop (place2[1]=NULL, E3) ; # |
place2 := subsop (1=NULL, place2) ; # | Balayage de la liste E3 pour
if place2 = [] # | supprimer les occurrences
    then arret := right ; # | de m
end ; # |
end ; # -
[c, E3] ;
end :

```

4.6 Produits de battage, seconde version.

Voici maintenant la seconde étape de la simplification avec les deux procédures voulues qui prendront chacune comme arguments deux listes L1 et L2 (dont les éléments seront de la forme $x[k]$). Le résultat est une liste $L = [[c_1, m_1], \dots, [c_n, m_n]]$, dont les éléments sont des listes à deux éléments, codant le produit de battage choisi des listes L1 et L2. Si i est un indice valide, c_i est tout simplement le coefficient du mot m_i apparaissant dans le produit de battage choisi.

Comment fonctionne le code de ces deux procédures ? :

Nous balayons toute la liste ‘battage’ qui correspond au produit de battage choisi des listes L1 et L2.

On regarde successivement le coefficient, noté ‘c’, du premier mot, noté ‘m’, apparaissant dans ‘battage’ et on le note en mémoire dans la donnée ‘reponse’ sous la forme $[c, m]$. L’appel de la procédure “*coefficient*” donne à la fois le coefficient c , mais nettoie aussi toutes les occurrences du mot ‘m’ dans ‘battage’. On effectue cela tant que ‘battage’ est non vide.

On obtient alors un résultat de la forme $[[c_1, m_1], \dots, [c_n, m_n]]$, où les mots sont aussi des listes de la forme $[x[a_1], \dots, x[a_i]]$.

```

produit_de_battage := proc (L1 , L2)
    local arret, reponse, c, m, battage;
    arret := false ; # -
    reponse := [] ; # |
    c := 0 ; # | Initialisation des variables
    m := [] ; # |
    battage := produit_de_battage_intermédiaire (L1,L2) ; # -
    if battage = []
        then arret := right ;
    end ;
    while arret = false do # -
        m := battage[1] ; # | Balayage de ‘battage’, si
        c, battage := (coefficient (m , battage))[] ; # | nécessaire pour regrouper
        reponse := concatene (reponse, [[c,m]] ) ; # | avec leur nombre d’occurrences
        if battage = [] # | les mots présents dans ‘battage’
            then arret := right ; # |
        end ; # |
    end ; # -
    reponse ;
end :

```

```

produit_de_battage_contractant := proc (L1 , L2)
    local arret, reponse, c, m, battage;

```

```

arret := false ; # -
reponse := [] ; # | Initialisation
c := 0 ; # | des variables
m := [] ; # |
battage := produit_de_battage_contractant_intermediaire (L1,L2) ; # -
if battage = []
  then arret := right ;
end ;
while arret = false do # -
  m := battage[1] ; # |
  c, battage := (coefficient (m , battage))[] ; # | Balayage de 'battage', si
  reponse := concatene (reponse, [[c,m]]) ; # | nécessaire pour regrouper,
  if battage = [] # | avec leur nombre d'occurrences,
    then arret := right ; # | les mots présent dans 'battage'
  end ; # |
end ; # -
reponse ;
end :

```

4.7 Exemples.

Reprenons l'exemple commencé ci-dessus pour appliquer les deux dernières procédures :

```

> L1 := [x[2], x[3]] ;
> L2 := [x[3], x[2]] ;
> A := simplifie_produit_de_battage (L1, L2) ;
> B := simplifie_produit_de_battage_contractant (L1, L2) ;
A := [[2, [x2, x3, x3, x2]], [1, [x2, x3, x2, x3]], [1, [x3, x2, x3, x2]], [2, [x3, x2, x2, x3]]]
B := [[2, [x2, x3, x3, x2]], [1, [x2, x3, x2, x3]], [1, [x2, x3, x5]], [1, [x2, x6, x2]],
      [1, [x3, x2, x3, x2]], [2, [x3, x2, x2, x3]], [1, [x3, x2, x5]], [1, [x3, x4, x3]]
      [1, [x5, x3, x2]], [1, [x5, x2, x3]], [1, [x5, x5]]]

```

5 Réductions des multitangentes en monotangentes.

5.1 Objectif.

L'objectif de cette feuille Maple est d'écrire une procédure permettant de réduire toute multitangente convergente en monotangentes.

Rappelons le théorème obtenu à ce propos :

Théorème : *Réduction en monotangentes, version 1*

$$\text{Notons : } {}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}} = \left(\prod_{l=1}^{i-1} (-1)^{k_l} \right) \left(\prod_{l=i+1}^r (-1)^{s_l} \right) \left(\prod_{l=1}^r \binom{s_l + k_l - 1}{s_l - 1} \right) .$$

$$Z_{i,k}^{\underline{s}} = \sum_{\substack{k_j \geq 0, j \neq i \\ \sum_{j \neq i} k_j = k}} {}^i E_{\underline{k}}^{\underline{s}} Z e^{s_r + k_r, \dots, s_{i+1} + k_{i+1}} Z e^{\binom{s_1 + k_1, \dots, s_{i-1} + k_{i-1}}{l \neq i}} .$$

Alors, pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$, on a :

$$\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=2}^{s_i} Z_{i, s_i - k}^{\underline{s}} \mathcal{T}e^k(z) .$$

Ici, \mathcal{S}^* désigne l'ensemble des séquences de $\text{seq}(\mathbb{N}^*)$ dont le premier et le dernier éléments sont supérieurs à 2 .

Le coeur de la réduction provient évidemment du calcul du tenseur de structure \mathcal{Z} . Pour le calculer, deux possibilités s'offrent à nous selon le but poursuivi :

1. Réduire par symétrelité les produits de multizêtas en une combinaison linéaire de multizêtas, puis calculer \mathcal{Z} .
2. Calculer directement \mathcal{Z} , sans utiliser la symétrelité des multizêtas.

Nous effectuerons uniquement le second cas. Mais avant, nous aurons besoin de quelques procédures préliminaires sur les partitions et sur les séquences.

5.2 Ouverture des packages et fichiers .mpl nécessaires.

```
with (linalg) :
read ("procédures préliminaires.mpl") :
read ("produit de battage.mpl") :
read ("partitions.mpl") :
```

Il est possible d'ouvrir un fichier contenant en mémoire les valeurs des multizêtas jusqu'à un certain poids, que ce soit sous forme de valeur exacte (grâce à la base de Gröebner calculée jusqu'au poids 16 par l'équipe Lilloise, cf. [40]) ou que ce soit sous forme de valeurs approchées (par l'algorithme de R. Crandall, cf. [13]) .

Ici, nous décidons de travailler avec la base de Gröebner.

```
read ("mzv16.m") :
```

5.3 Procédures préliminaires.

5.3.1 Sur les partitions.

Nous avons besoin, pour effectuer la sommation dans \mathcal{Z} de déterminer les partitions de valuation 0, de longueur r et de poids $k \in \mathbb{N}$, ayant à la i -ième position la valeur 0. Ce sera la procédure "partition i", ses arguments seront les deux entiers r et k . Mis à part l'entier 0, les autres sont codés par $n \longleftrightarrow x[n]$.

```
partition_i := proc (i,r,k)
  local reponse, reponse_intermediaire, arret, inter ;
  reponse_intermediaire := partitions_de_valuation_longueur_et_poids_donnés (0, r, k) ;
  reponse_intermediaire := map (L -> map (n -> x[n], L), reponse_intermediaire) ;
  arret := false ;
  reponse := [] ;
  while arret = false do
    inter := reponse_intermediaire[1] ;
    reponse := concatene (reponse , [concatene ( concatene ( inter[1..(i-1)]
                                                    ,
                                                    [0]
                                                    )
                                                    ,
                                                    inter[i..-1]
                                                    )
                                ]
  ]
```

```

        ) ;
    reponse_intermediaire := subsop (1 = NULL, reponse_intermediaire) ;
    if reponse_intermediaire = []
        then arret := right ;
    end ;
end ;
reponse ;
end :

```

5.3.2 Sur les séquences.

Nous avons aussi besoin de deux procédures, très simples, la première renversant l'ordre de lecture de la séquence, la seconde additionnant terme à terme les éléments de deux séquences jusqu'à épuisement de l'une des deux séquences.

```

renverse := proc (n)
    local r, i ;
    r := nops (n) ;
    seq (n[r - i], i = 1..r) ;
end :

```

```

addition := proc (n1, n2)
    local reponse, n1prime, n2prime, arret ;
    reponse := [] ;
    n1prime := n1 ;
    n2prime := n2 ;
    arret := false ;
    if n1prime = [] or n2prime = []
        then arret := right ;
    end ;
    while arret = false do
        reponse := concatene ( reponse
            ,
            [plus(n1prime[1] , n2prime[1])]
        ) ;
        n1prime := subsop (1=NULL, n1prime) ;
        n2prime := subsop (1=NULL, n2prime) ;
        if n1prime = [] or n2prime = []
            then arret := right ;
        end ;
    end ;
    reponse ;
end :

```

5.4 Calcul du coefficient combinatoire ${}^iE_{\mathbf{k}}^{\mathbf{s}}$.

La procédure "E" prend pour argument un entier i , deux séquences d'entiers \mathbf{k} et \mathbf{s} de longueur r (toujours codées comme des listes dont les éléments sont du type $x[k]$) et enfin l'entier r déjà mentionné ; elle donne comme résultat un entier qui est la valeur du coefficient combinatoire ${}^iE_{\mathbf{k}}^{\mathbf{s}}$.

Cet entier est un produit de trois facteurs. Ces derniers sont calculés séparément et stockés en mémoire dans les variables 'memoire1', 'memoire2' et 'memoire3' respectivement ; il ne reste plus qu'à les multiplier entre eux.

```

E := proc (i, k, s)
local l, memoire1, memoire2, memoire3 ;
  memoire1 := 1 ;
  memoire2 := 1 ;
  memoire3 := 1 ;
  r := nops (k) ;
  for l from 1 to (i - 1) do
    memoire1 := memoire1 * (-1)^(op(k[l])) ;
    memoire3 := memoire3 * binomial (op(s[l]) + op(k[l]) - 1 , op(s[l]) - 1) ;
  end ;
  for l from (i + 1) to r do
    memoire2 := memoire2 * (-1)^(op(s[l])) ;
    memoire3 := memoire3 * binomial (op(s[l]) + op(k[l]) - 1 , op(s[l]) - 1) ;
  end ;
  memoire1 * memoire2 * memoire3 ;
end :

```

5.5 La réduction en monotangente, sans utilisation de la symétréité des multizêtas.

5.5.1 Le calcul du tenseur de structure \mathcal{Z} .

Commençons par la procédure permettant de calculer le tenseur de structure \mathcal{Z} . Celle-ci détermine d'abord l'ensemble de sommation, puis les différents sommants et enfin effectue la somme.

Voici le code :

```

Z := proc (s, i, k)
local reponse, Z_intermediaire ;
  Z_intermediaire := proc (s, i, k)
    local k2, j, reponse, partitions, memoire1, memoire2 ;
    reponse := 0 ;
    partitions := partition_i (i, nops(s) - 1, k) ; # Détermine toutes les séquences
                                                    # de sommation nécessaires

    for j from 1 to (nops (partitions)) do
      k2 := partitions[j] ;
      if renverse ( addition ( s[(i + 1)..(-1)]
                            ,
                            k2[(i + 1)..(-1)]
                          )
                  ) <> []
      then memoire1
          := zeta (op (map (op , (renverse
                            ( addition ( s[(i + 1)..(-1)]
                            ,
                            k2[(i + 1)..(-1)]
                          )
                        )
                    )
                )
                )
          )
      else memoire1 := 1
      end ;
      if renverse ( addition ( s[1..(i-1)]
                            ,
                            k2[1..(i-1)]
                          )
                  ) <> []

```

```

        then memoire2
            := zeta(op (map (op, addition ( s[1..(i - 1)]
                                     ,
                                     k2[1..(i - 1)]
                                     ) ) ) )
        else memoire2 := 1
    end ;
    reponse := reponse
        +
        E (i, k2, s, nops(s)) * memoire1 * memoire2 ;
end ;
reponse ;
end :
if nops (s) = 1
    then if k = 0 then reponse := 1
        else reponse := 0
    end
    else reponse := Z_intermediaire (s, i, k)
end ;
reponse ;
end :

```

5.5.2 La procédure de réduction.

Il est maintenant facile de donner la procédure de réduction sans prendre en compte la symétréité des multizêtas :

```

reduction_sans_symetrelite := proc (s)
    local i, k, reponse ;
    reponse := 0 ;
    for i from 1 to nops(s) do
        for k from 2 to s[i] do
            reponse := reponse + (Z (s, i, s[i] - k)) * Te(k) ;
        end ;
    end ;
    reponse ;
end :

```

Bien que la composante de la multitangente $\mathcal{T}e^1$ soit nulle, il peut être intéressant de forcer son écriture. C'est l'objet de la procédure suivante :

```

reduction_sans_symetrelite_avec_composante_1 := proc (s)
    local i, k, reponse ;
    reponse := 0 ;
    for i from 1 to nops(s) do
        for k from 1 to s[i] do
            reponse := reponse + (Z (s, i, s[i] - k)) * Te(k) ;
        end ;
    end ;
    reponse ;
end :

```

5.5.3 Exemples.

1. Premiers exemples simples.

- > Te (2,2) := reduction_sans_symetrelite ([2,2]) ;
- > Te (2,2,2) := reduction_sans_symetrelite ([2,2,2]) ;
- > Te (2,2,2,2) := reduction_sans_symetrelite ([2,2,2,2]) ;

$$\begin{aligned}
Te(2, 2) &:= 2 \zeta(2) Te(2) \\
Te(2, 2, 2) &:= \frac{8}{5} (\zeta(2))^2 Te(2) \\
Te(2, 2, 2, 2) &:= \frac{24}{35} (\zeta(2))^3 Te(2)
\end{aligned}$$

2. Deux exemples autour de la conjecture caractérisant les multitangentes nulles.

$$\begin{aligned}
> Te(2, 1, 2) &:= \text{reduction_sans_symetrelite}([2, 1, 2]) ; \\
&Te(2, 1, 2) := 0 \\
> Te(3, 1, 3) &:= \text{simplify}(\text{reduction_sans_symetrelite}([3, 1, 3])) ; \\
&Te(3, 1, 3) := \frac{1}{5} (\zeta(2))^2 Te(3)
\end{aligned}$$

3. Une relation liant les multitangentes entres elles.

Vérifions une égalité apparue dans la seconde partie de ce travail :

$$\begin{aligned}
&36Te^{2,1,1,4} + 6Te^{2,1,2,3} + 30Te^{2,1,3,2} + 36Te^{3,1,2,2} + 9Te^{4,1,3} + 7Te^{3,3,2} \\
&+ 21Te^{4,2,2} + 11Te^{6,2} + 22Te^{5,3} \\
&= \\
&36Te^{4,1,1,2} + 6Te^{3,2,1,2} + 30Te^{2,3,1,2} + 36Te^{2,2,1,3} + 9Te^{3,1,4} + 7Te^{2,3,3} \\
&+ 21Te^{2,2,4} + 11Te^{2,6} + 22Te^{3,5} .
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
> \text{terme_de_gauche} &:= \text{simplify} (\\
> 36 * \text{reduction_sans_symetrelite} &([2, 1, 1, 4]) + \\
> 6 * \text{reduction_sans_symetrelite} &([2, 1, 2, 3]) + \\
> 30 * \text{reduction_sans_symetrelite} &([2, 1, 3, 2]) + \\
> 36 * \text{reduction_sans_symetrelite} &([3, 1, 2, 2]) + \\
> 9 * \text{reduction_sans_symetrelite} &([4, 1, 3]) + \\
> 7 * \text{reduction_sans_symetrelite} &([3, 3, 2]) + \\
> 21 * \text{reduction_sans_symetrelite} &([4, 2, 2]) + \\
> 11 * \text{reduction_sans_symetrelite} &([6, 2]) + \\
> 22 * \text{reduction_sans_symetrelite} &([5, 3])) ;
\end{aligned}$$

$$\text{terme_de_gauche} := -\frac{452}{35} (\zeta(2))^3 Te(2) + \frac{42}{5} (\zeta(2))^2 Te(4) - 45 (\zeta(3))^2 Te(2) + 11 \zeta(2) Te(6)$$

$$\begin{aligned}
> \text{terme_de_droite} &:= \text{simplify} (\\
> 36 * \text{reduction_sans_symetrelite} &([4, 1, 1, 2]) + \\
> 6 * \text{reduction_sans_symetrelite} &([3, 2, 1, 2]) + \\
> 30 * \text{reduction_sans_symetrelite} &([2, 3, 1, 2]) + \\
> 36 * \text{reduction_sans_symetrelite} &([2, 2, 1, 3]) + \\
> 9 * \text{reduction_sans_symetrelite} &([3, 1, 4]) + \\
> 7 * \text{reduction_sans_symetrelite} &([2, 3, 3]) + \\
> 21 * \text{reduction_sans_symetrelite} &([2, 2, 4]) + \\
> 11 * \text{reduction_sans_symetrelite} &([2, 6]) + \\
> 22 * \text{reduction_sans_symetrelite} &([3, 5])) ;
\end{aligned}$$

$$\text{terme_de_droite} := -\frac{452}{35} (\zeta(2))^3 Te(2) + \frac{42}{5} (\zeta(2))^2 Te(4) - 45 (\zeta(3))^2 Te(2) + 11 \zeta(2) Te(6)$$

4. Une relation de symétrie.

> simplify (reduction_sans_symetrelite_avec_composante_1 ([2,1,2])) ;

$$Te(1) (-4\zeta(3,1) - 2\zeta(2,2) + (\zeta(2))^2)$$

Ainsi :

$$\left(\mathcal{Z}e^2\right)^2 = 4\mathcal{Z}e^{3,1} - 2\mathcal{Z}e^{2,2} .$$

6 Algorithme de calcul des invariants holomorphes.

6.1 Objectif

L'objectif principal est d'écrire une procédure calculant à la précision souhaitée les invariants holomorphes d'un difféomorphisme f , tangent à l'identité, dans le cas-type. Exprimons le à l'infini sous la forme :

$$f(z) = z + 1 + \sum_{n \geq 3} \frac{a_n}{z^{n-1}} = z + 1 + \gamma^+(z) .$$

Nous supposons que la série définissant f est convergente.

6.2 Rappels des notations.

Rappelons l'ensemble des conventions et notations concernant les alphabets, les séquences, les moules et comoules utilisés dans le calcul des invariants holomorphes d'un difféomorphisme tangent à l'identité dans le cas-type.

6.2.1 Alphabets.

Nous considérerons les deux alphabets suivant :

$$\mathbb{N}_3 = \{n \in \mathbb{N} ; n \geq 3\} \quad , \quad \text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\} .$$

6.2.2 Séquences.

Une séquence de $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ se note par une lettre majuscule grasse et soulignée. Ses composantes sont notées en lettres minuscules grasses soulignées et numérotées en exposant. Ainsi, pour $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, on écrit : $\underline{\mathbf{S}} = (\underline{\mathbf{s}}^1; \dots; \underline{\mathbf{s}}^r)$.

Voici d'autres notations relatives aux séquences, où $\underline{\mathbf{S}}$ est notée comme précédemment.

1. Lorsque $\underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3)$ ou $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, $l(\underline{\mathbf{s}})$ et $l(\underline{\mathbf{S}})$ désignent respectivement les longueurs de $\underline{\mathbf{s}}$ et $\underline{\mathbf{S}}$.
2. Le poids de $\underline{\mathbf{s}} = (s_1; \dots; s_r) \in \text{seq}(\mathbb{N}_3)$ est $\|\underline{\mathbf{s}}\| = s_1 + \dots + s_r$.
3. Le poids de $\underline{\mathbf{S}} = (\underline{\mathbf{s}}^1; \dots; \underline{\mathbf{s}}^r) \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ est $\|\underline{\mathbf{S}}\| = \sum_{k=1}^{l(\underline{\mathbf{S}})} \|\underline{\mathbf{s}}^k\| - 1$.

6.2.3 Notations intermédiaires.

Avant d'en arriver à définir les moules utiles, voici quelques notations intermédiaires :

1. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice $\underline{\mathbf{i}} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{N})$ triangulaire inférieure :

$$\text{diag}_p^{\underline{\mathbf{i}}} = \begin{cases} \sum_{k=p+1}^r i_{k,k-p} & , \text{ si } 0 \leq p \leq r-1 . \\ 0 & , \text{ si } p = r . \end{cases}$$

2. Pour toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, de longueur r :

$$\text{triangle}(\underline{\mathbf{S}}) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ i_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ i_{r,1} & \cdots & i_{r,r-1} & 0 \end{array} \right) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{N}) ; \forall k \in \llbracket 2 ; r \rrbracket , \sum_{l=1}^{k-1} i_{k,l} = l(\underline{\mathbf{S}}^k) \right\} .$$

3. Pour toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ et toute matrice $\underline{\mathbf{i}} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{N})$ triangulaire inférieure :

$$\sigma(\underline{\mathbf{S}}, \underline{\mathbf{i}}) = \left(\|\underline{\mathbf{S}}^k\| - l(\underline{\mathbf{S}}^k) + \text{diag}_k^{\underline{\mathbf{i}}} \right)_{1 \leq k \leq r} .$$

4. Pour toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ et toute matrice $\underline{\mathbf{i}} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{N})$ triangulaire inférieure :

$$\mathcal{B}^{\underline{\mathbf{S}}, \underline{\mathbf{i}}} = \prod_{k=1}^{l(\underline{\mathbf{S}})} \frac{(\|\underline{\mathbf{S}}^k\| - l(\underline{\mathbf{S}}^k) + \text{diag}_k^{\underline{\mathbf{i}}} - 1)!}{\left(\prod_{p=k+1}^r i_{p,p-k} ! \right) (\|\underline{\mathbf{S}}^k\| - l(\underline{\mathbf{S}}^k) - 1)!} .$$

Remarquons que les matrices triangulaires inférieures sont notées comme des séquences. Il y a deux raisons à cela :

1. Ces matrices apparaissent comme des indices de sommations, comme c'est le cas pour les séquences dans une contraction moule/comoule.
2. Ces matrices agissent à travers la quantité diag_k^{\bullet} qui se comporte exactement comme la séquence $(\text{diag}_1^{\underline{\mathbf{S}}}; \dots; \text{diag}_r^{\underline{\mathbf{S}}})$ lorsque $\underline{\mathbf{S}}$ est de longueur r .

6.2.4 Moules

Il s'agit de moules définis sur $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, à valeurs respectivement dans $\{+1; -1\}$ et $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbb{Z})$, par :

$$\forall \underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) , \text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} = (-1)^{l(\underline{\mathbf{S}}^2) + \dots + l(\underline{\mathbf{S}}^{l(\underline{\mathbf{S}})})} .$$

$$\forall \underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) , \tau^{\underline{\mathbf{S}}} = \sum_{\underline{\mathbf{i}} \in \text{triangle}(\underline{\mathbf{S}})} \mathcal{B}^{\underline{\mathbf{S}}, \underline{\mathbf{i}}} \mathcal{T}e^{\sigma(\underline{\mathbf{S}}, \underline{\mathbf{i}})} .$$

Nous considérerons aussi des moules qui seront les coefficients de Fourier des moules 1-périodique $\mathcal{T}e^{\bullet}$ et τ^{\bullet} :

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$:

$$\widehat{\mathcal{T}}_n^{\underline{s}} = 2i\pi \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=2}^{s_j} \frac{(-2in\pi)^{k-1}}{(k-1)!} \mathcal{Z}_{j,s_j-k}^{\underline{s}} \right).$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$:

$$\widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{cases} -2i\pi \text{sg}(n) \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\underline{\mathbf{S}})} \mathcal{B}^{\underline{\mathbf{S}}, \mathbf{i}} \widehat{\tau}_n^{\sigma(\underline{\mathbf{S}}, \mathbf{i})} & , \text{ si } l(\underline{\mathbf{S}}) = 1. \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

6.2.5 Comoules

On définit enfin deux comoules respectivement sur $\text{seq}(\mathbb{N}_3)$ et $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ par :

1. Pour toute séquence $\underline{s} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3)$, de longueur r : $A_{\underline{s}} = a_{s_1} \cdots a_{s_r}$.
2. Pour toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, de longueur r : $\mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}} = A_{\underline{\mathbf{S}}_1} \cdots A_{\underline{\mathbf{S}}_r}$.

6.3 Expression des applications de cornes et des invariants holomorphes.

Les notations précédentes donnent des expressions de l'applications de corne π^+ :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \Im m z > \text{Cst} > 0, \pi^+ = \sum_{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})} \text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \tau^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}}.$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \Im m z < -\text{Cst} < 0, \pi^+ = \sum_{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})} \text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \tau^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}}.$$

On dispose aussi d'une expression des coefficients de Fourier de ces deux fonctions, c'est-à-dire des invariants holomorphes $\mathbb{A}_{2in\pi}^+$ pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \mathbb{A}_{2in\pi}^+ = \sum_{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\}} \text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}} = \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{\substack{\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\} \\ ||\underline{\mathbf{S}}||=p}} \text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} \widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}} \mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}}.$$

6.4 Description de l'algorithme.

Dans un premier temps, nous utilisons le fait que l'on peut choisir de calculer les invariants holomorphes d'un difféomorphisme g conjugué à f ayant une valuation strictement plus grande que celle de f .

Ensuite, nous remplacerons le difféomorphisme g par l'une de ses sommes partielles notée \widetilde{g} .

Enfin, nous obtiendrons l'approximation souhaitée de $\mathbb{A}_{2in\pi}^+(f) = \mathbb{A}_{2in\pi}^+(g)$ par une somme partielle de la série définissant $\mathbb{A}_{2in\pi}^+(\widetilde{g})$.

Il faudra donc écrire une procédure calculant la somme partielle de $\mathbb{A}_{2in\pi}^+$. Ce sera la procédure centrale de l'algorithme, appelée "calcul somme partielle n ième invariant".

6.5 Ouverture des packages et fichiers “.mpl” nécessaires.

Nous supposons que nous disposons d'un fichier, appelé *Zeta_numeriques.m* contenant en mémoire la fonction $zeta : \mathcal{S}_{\geq 2}^{\bullet} \mapsto \mathbb{R}$ et donnant une approximation de $\mathcal{Z}e^{\mathfrak{s}}$ avec 100 décimales exactes.

```
with (linalg) :

read "Zeta_numeriques.m" ;
read "Evaluation des multizêtas en des multientiers, par l'algorithme de Crandall.mpl" ;
read "Procédures préliminaires.mpl" :
read "Produit de battage et de battage contractant.mpl" :
read "Réduction des multitangentes en monotangentes.mpl" :
read "Partitions.mpl" :
```

6.6 Procédures préliminaires.

6.6.1 Détermination des séquences de sommation.

Pour déterminer les séquences de Ω^* de poids p , nous allons :

1. Déterminer toutes les séquences de poids p et de valuation supérieure à 3 .
2. Pour chaque séquence \underline{s} obtenue précédemment, déterminer toutes les séquences de poids $l(\underline{s})$.
3. Ecrire toutes les séquences de Ω^* obtenues par le procédé suivant :

Quand $\underline{s} = (s_1; \dots; s_r)$ et $\underline{l} = (l_1; \dots; l_k)$ sont respectivement obtenues aux première et deuxième étapes, on construit $\underline{\mathbf{S}} = (\underline{s}^1; \dots; \underline{s}^k) \in \Omega^*$ en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{s}^1 = (s_1; \dots; s_{l_1}) . \\ \underline{s}^2 = (s_{l_1+1}; \dots; s_{l_1+l_2}) . \\ \vdots \\ \underline{s}^k = (s_{l_1+\dots+l_{k-1}+1}; \dots; s_{l_1+\dots+l_k}) . \end{array} \right.$$

```
determine_sequences_de_omega_point_de_poids_donné := proc (poids)
```

```
local séquences_s, séquences_de_longueur, s, longueur, l, memoire, reponse,
    p, i, j, k ;
```

```
# 'séquences_s' désigne le vecteur dont les éléments sont les séquences obtenues
# par le point 1.
# 'séquences_de_longueur' désigne le vecteur dont le i-ème élément est l'ensemble
# des partitions de l'entier i qui ont pour premier élément 1.
# 's' et 'longueur' désignent chacune une mémoire des séquences utilisées au point 3.
# 'l' désigne une mémoire de la somme des (k - 1) premiers éléments de 'longueur'.
# 'p' désigne une mémoire.
# 'memoire' désigne la séquence obtenue par l'application du point 3.
# 'i', 'j' et 'k' désignent des compteurs.
```

```
#####
```

```

# Initialisation #
#####

séquences_s := partitions_de_valuation_et_poids_donnés # -
              (3, poids) ;                               # | Réalisation du point 1.
                                                         # -

séquences_de_longueur := [seq ([], i = 1..(floor(poids / 3)))] ; #-
for i from 1 to floor (poids / 3) do                       # |
    séquences_de_longueur[i]                               # |
        := ajoute_en_tete_e_aux_listes_de_E               # | Réalisation
              (1, partitions_de_valuation_et_poids_donnés # | du point 2.
              (1, i - 1)                                  # |
              ) ;                                         # |
end ;                                                       #-
reponse := [] ;

#####
# Réalisation du point 3. #
#####

for i from 1 to nops (séquences_s) do
    s := séquences_s [i] ;
    for j from 1 to nops(séquences_de_longueur[nops(s)]) do
        longueur := séquences_de_longueur[nops(s)][j] ;
        memoire := [seq ([], j = 1..nops(longueur))] ; # désigne la séquence qui
                                                         # se crée.

        l := 0 ;
        for k from 1 to nops(longueur) do                 # -
            p := longueur[k] ;                             # | Détermination de
            memoire[k] := s[(l + 1)..(l + p)] ;           # | la séquence 'memoire'
            l := l + p ;                                   # |
        end ;                                             # -
        reponse := concatene (reponse, [memoire]) ;
    end ;
end :
reponse ;
end :

```

Notons que l'application de cette procédure peut être assez longue. On aura donc tout intérêt à stocker les résultats en mémoire par la commande “save”. Dorénavant, on supposera donc que le fichier *sequences_de_omega_point_de_poids_p.m*, où $p \in \mathbb{N}$, contient en mémoire la variable globale ‘sequences’ créée par cette commande Maple :

```

for p from 2 to 29 do
    sequences := determine_sequence_de_sommation_au_poids_p (p) :
    save (sequences, cat ("sequences_de_omega_point_de_poids_", p, ".m")) ;
end ;

```

6.6.2 Détermination des triangles nécessaires.

La seconde étape importante est l'écriture de $\text{triangle}(\underline{\mathbf{S}})$, où $\underline{\mathbf{S}} \in \Omega^*$.

Puisque $\text{triangle}(\underline{\mathbf{S}})$ est un produit cartésien de $r - 1$ séquences³, nous aurons besoin d'une procédure effectuant un tel produit. C'est l'objet de la procédure “produit cartésien de séquences”. En préliminaire à celle-ci, on a écrit une procédure “selectionne” décrivant

³ Il s'agit des partitions de $l(\underline{\mathbf{s}}^k)$, où $k \in \llbracket 2; r \rrbracket$.

les positions des différents éléments à sélectionner dans les séquences qu'on veut multiplier entre-elles.

Le coeur de la procédure est alors “triangle intermediaire”, dont le fonctionnement est simple. On écrit d'abord les partitions de $\underline{s}^2, \dots, \underline{s}^r$, puis on effectue le produit cartésien de ces séquences. La procédure “calcul du triangle” se restreint alors à une conditionnelle différenciant la gestion du cas extraordinaire où $l(\underline{S}) = 1$ du cas ordinaire où $l(\underline{S}) \geq 2$.

```
calcul_du_triangle := proc (S)

# 'S' désigne une séquence de Omega^p, c'est-à-dire une séquence de séquences d'entiers
# supérieurs à 3.
# 'triangle (S)' désigne une matrice triangulaire inférieure, de dimension #S * #S, dont
# la somme de la k-ième ligne vaut le nombre de termes de la k-ième séquence composant 'S'.

local selectionne, produit_cartesien_de_sequences, triangle_intermediaire ;

# 'selectionne' est une procédure interne permettant de sélectionner les éléments
# nécessaires à la réalisation d'un produit cartésien.
# 'produit_cartesien_de_sequences' est une procédure interne permettant de calculer
# le produit cartésien d'un nombre quelconque de séquences.
# 'triangle_intermediaire' est la procédure qui détermine la matrice retournée par
# la procédure 'triangle (S)'.

selectionne :=

#####
# Etant données une séquence s, dont les éléments sont des séquences de séquences
# d'entiers, et une séquence c, dont les éléments sont des séquences d'entiers,
# on sélectionne certains éléments de s : si c = (c_1 , ... , c_r) , on sélectionne
# le c_1-ième élément de s_1, le c_2-ième élément de s_2, ... , le c_r-ième élément
# de s_r . Le résultat est le vecteur contenant les éléments sélectionnés, mis
# côte-à-côte.
#####

proc (s, c)

# 's' désigne une séquence de séquences de séquences d'entiers.
# 'c' désigne une séquence d'entiers. Essentiellement , 'c' donne
# les coefficients de la sélection.

local reponse, i ;
reponse := [] ;
for i from 1 to nops(s) do
    reponse := concatene (reponse, [s[i][c[i]]]) ; # Sélection du c[i]-ième
end ;
reponse ;
end ;

produit_cartesien_de_sequences :=

#####
# Détermine le produit cartésien des séquences S_1, ... , S_k .
#####

proc (S)
```

```

# 'S' désigne une séquence dont les éléments sont les séquences S_1, ... , S_k .
# Pour i, entier compris entre 1 et k, S_i désigne une séquence d'entiers.

local longueur, coefficients, reponse, k ;

# Détermine la suite des coefficients pour effectuer la sélection nécessaire
# au produit cartésien.

longueur := [seq (nops(S[i]), i = 1..nops(S))] ;
coefficients := [seq ([i], i = 1.. longueur[-1])] ;
for k from 2 to nops(longueur) do
    coefficients := [seq ( op(ajoute_en_tete_e_aux_listes_de_E (i, coefficients))
                        ,
                        i = 1..longueur[-k]
                        )
                    ] ;
end ;

# Réalisation du produit cartésien

reponse := [] ;
for k from 1 to nops(coefficients) do
    reponse := concatene (reponse, [selectionne (S, coefficients[k])]) ;
end ;
reponse ;
end :

triangle_intermediaire :=
proc (S)
    local sequences_a_multiplier, k, coefficient, reponse ;

    sequences_a_multiplier := [] ;
    for k from 2 to nops(S) do
        sequences_a_multiplier
            := concatene ( sequences_a_multiplier
                        ,
                        [partitions_de_valuation_longueur_et_poids_donnés
                        (0,k - 1, nops(S[k]))
                        ]
                    ) ;
    end ;

    produit_cartesien_de_sequences (sequences_a_multiplier) ; # Calcul du produit
                                                                    # cartésien

end ;

if nops(S) = 1
    then [[0]] ;
    else triangle_intermediaire (S)
end ;
end :

```

Ici aussi, on aura intérêt à stocker les résultats en mémoire par la commande “save”. En effet, l’application de cette procédure est relativement longue et ne dépend pas du difféomorphisme f dont on calcule les invariants. Pour ce faire, il suffit d’évaluer $\text{triangle}(\underline{S})$ pour toutes les séquences de sommation préenregistrées.

Dorénavant, on supposera que le fichier *memoire_des_triangles_jusqu_au_poids_p.m*, où $p \in \mathbb{N}$, contient en mémoire la variable globale 'triangle' créée par la commande Maple suivante :

```
for p from 2 to 29 do
  read (cat ("sequences_de_omega_point_de_poids_", p, ".m"));
  for k from 1 to nops (sequences) do
    triangle (sequences[k]) := calcul_du_triangle (sequences[k]) ;
  end ;
end ;

save (triangle , "memoire_des_triangles_jusqu_au_poids_29.m") ;
```

6.6.3 Procédures concernant les notations intermédiaires, les moules et les comoules.

Nous pouvons écrire une série de procédures calculant les objets suivants :

$$\text{diag}_k^i, \sigma(\underline{S}, \underline{i}), \mathcal{B}^{\underline{S}, \underline{i}}, \tau^{\underline{S}}, \widehat{\mathcal{T}}_n^{\underline{S}}, \widehat{\tau}_n^{\underline{S}}, \text{sg}^{\underline{S}}, \mathcal{A}^{\underline{S}}.$$

```
diagonale := proc (i,k)
  if k = nops(i) + 1 then 0 else sum (i[p][p - k + 1], p = k..nops(i)) end ;
end :
```

```
sigma := proc (S,i)
  local k, l ;
  [ seq ( sum (S[k][l], l = 1..nops(S[k])) - nops(S[k]) + diagonale (i, k)
    ,
    k = 1..nops(S)
  )
  ] ;
end :
```

```
coefficient_multinomial := proc (n, k)
  factorial (n) / ( (product (factorial(k[p]), p = 1..nops(k)))
    *
    factorial (n - sum (k[r], r = 1..nops(k)))
  ) ;
end :
```

```
B := proc (S, i)
  local diagonales, r, memoire, reponse, k, p, l ;
  diagonales := [seq([seq(i[p][p - k + 1], p = k..nops(i))], k = 1..nops(S))] ;
  memoire := [seq (coefficient_multinomial ( sum(S[k][l], l = 1..nops(S[k]))
    - nops(S[k]) + diagonale (i, k) - 1
    ,
    diagonales[k]), k = 1..nops(S)
  )
  ] ;
  reponse := 1 ;
  for k from 1 to nops(memoire) - 1 do
    reponse := reponse * memoire[k] ;
  end ;
  reponse ;
end :
```

```

tau := proc (S)
  global triangle ;
  local reponse, k, T, i ;
  T := triangle (S) :
  reponse := 0 :
  for k from 1 to nops(T) do
    i := T[k] ;
    reponse := reponse + B(S, T[k]) * Te(op(sigma(S, i))) :
  end :
  reponse ;
end :

coefficient_de_Fourier_de_Te := proc (S, n, d)
  local reponse, j, k, T, i, epsilon ;
  epsilon := n / abs(n) :
  reponse := 0 :
  for j from 1 to nops(S) do
    for k from 2 to S[j] do
      reponse := evalf ( reponse + (-2 * I* Pi)^(k - 1)
                        /
                        (factorial(k - 1)) * Z(S, j, S[j] - k)
                        ,
                        d
                        ) ;
    end ;
  end ;
  simplify (- 2 * I * epsilon * Pi * reponse) ;
end :

coefficient_de_Fourier_de_tau := proc (S, n, d)
  global triangle ;
  local reponse, k, T, i, epsilon ;
  T := triangle (S) :
  epsilon := n / abs(n) :
  reponse := 0 :
  for k from 1 to nops(T) do
    i := T[k] ;
    reponse := evalf ( reponse
                      +
                      B(S, i) * coefficient_de_Fourier_de_Te (sigma(S, i), n, d)
                      ,
                      d
                      ) :
  end :
  simplify (- 2 * I * epsilon * Pi * reponse) ;
end :

signe := proc (S)
  local reponse, i ;
  reponse := 0 ;
  for i from 1 to nops(S) do
    reponse := reponse + nops(S[i]) ;
  end ;
  (-1)^(reponse + 1) ;
end :

A := proc (S, a)

```

```

local reponse, i, j ;
reponse := 1 ;
for i from 1 to nops(S) do
  for j from 1 to nops(S[i]) do
    reponse := reponse * a (S[i][j]) ;
  end ;
end ;
reponse ;
end :

```

6.7 La procédure de calcul de la somme partielle des invariants.

Tous les éléments sont prêts pour effectuer la somme partielle de $\mathbb{A}_{2in\pi}^+$.

Dans la procédure, “calcul somme partielle n ième invariant” :

‘*a*’ désigne une fonction telle que $a(k)$ soit le k -ième coefficient de Taylor de f .

‘*poids*’ désigne l’ordre de troncature de la série définissant $\mathbb{A}_{2in\pi}^+$.

‘*d*’ désigne le nombre de décimales souhaitées pour le calcul.

```

calcul_somme_partielle_n_ième_invariant := proc (a, n, poids, d)
global sequences, triangle ;
local p, lambda, L1, L2, sequences, reponse, i, S ;
read "memoire_des_triangles_jusqu_au_poids_29.m" ;
reponse := 0 ;
for p from 3 to poids do
  print ("début de calcul pour le poids ", p) ;
  read (cat ("sequences_de_omega_point_de_poids_", p, ".m")) ;
  for i from 1 to nops(sequences) do
    S := sequences[i] ;
    reponse := evalf ( reponse + signe (S)
                      *
                      coefficient_de_Fourier_de_tau (S, n, d) * A(S, a)
                      ,
                      d
                    ) ;
    print ("reponse = ", evalf (reponse, d)) ;
  end ;
end ;
evalf (reponse, d) ;
end :

```

6.8 Exemple.

Considérons le difféomorphisme $f : z \mapsto f(z) = z + 1 + \frac{1}{10z^2}$.

On obtient alors la feuille Maple suivante :

Liens entre les différentes conjectures énoncées.

L'objectif de cette annexe est de regrouper entre eux tous les énoncés conjecturaux de la seconde partie de ce travail, mais surtout de synthétiser les liens qui existent entre eux et de faire comprendre comment ces énoncés ont été posés.

Nous commencerons par rappeler un principe philosophique qui nous a guidé dans toute la partie concernant l'étude des multitangentes. Ensuite, les énoncés seront rappelés : ceci ne sera pas fait de manière linéaire, mais plutôt par type de conjectures (de type analytique, de type arithmétique) et par groupement de conjectures. Enfin, nous finirons par un schéma explicitant les liens entre les conjectures.

1 La multitangente attitude.

L'idée générale qui sous-tend toute la seconde partie de ce travail est la suivante :

Il existe des liens très forts entre les multizêtas et les multitangentes : chaque résultat arithmétique sur les multizêtas semble se traduire en un résultat sur les multitangentes, et réciproquement.

Ce principe général nous mène à étudier les importantes conjectures 2 et 8¹.

Les liens entre multizêtas et multitangentes sont aujourd'hui de deux natures :

1. Les relations de réduction en monotangentes (résultat démontré, cf. le théorème 1 p. 121) .
2. Les expressions de $\mathcal{Z}e^{\underline{s}}\mathcal{T}e^2$ dans \mathcal{MTGF} , pour tout $\underline{s} \in \mathcal{S}_+^{\bullet}$ (résultat conjectural) .

La correspondance entre les résultats sur les multizêtas et les multitangentes n'est pas parfaite : les résultats sont souvent du même type, mais pas obligatoirement... Pour illustrer ceci, rappelons schématiquement deux faits.

Autour de l'absence de composante $\mathcal{T}e^1$ dans les relations de réduction.

1. Toute multitangente convergente est exponentiellement plate.
Donc, la composante $\mathcal{T}e^1$, dans la réduction en monotangentes, est nulle.
2. On dispose d'une expression intégrale sur $(\mathbb{R}_+)^{\star}$ pour représenter les multizêtas.

¹ Les conjectures 1 et 1' découlent de l'étude des tables de multitangentes (cf. Annexes 2 et 3) .

Les conjectures 5 et 6 proviennent d'une véritable étude des courbes des fonctions $r \mapsto |\mathcal{T}e^{\underline{s}}(re^{i\theta})|$, où $\theta \in [0; 2\pi]$ et $\underline{s} \in \mathcal{S}^{\star}$.

Les conjectures 3, 4, A, B et C découleront de l'étude de la conjecture 2.

Donc, les multizêtas vérifient les relations de symétralité.

Donc, la composante $\mathcal{T}e^1$, dans la réduction en monotangentes, est nulle.

Ces deux approches se mêlent en l'équivalence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{Résultat analytique}} \\ \underline{\text{sur les multitangentes :}} \\ \\ \text{Caractère exponentiellement plat} \\ \text{des multitangentes (cf. §7.3) .} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{Relations algébriques}} \\ \underline{\text{entre multizêtas :}} \\ \\ \text{Quelques relations} \\ \text{de symétralité (cf. §9.3.1) .} \end{array} \right\}$$

Calculs de $\mathcal{T}e^{2[r]}(z)$ et $\mathcal{Z}e^{2[r]}$.

Deux calculs indépendants donnent :

$$\mathcal{T}_2 = \sum_{r \geq 0} \mathcal{T}e^{2[r]}(z) X^r = \frac{\sin(\pi(z - i\sqrt{X})) \sin(\pi(z + i\sqrt{X}))}{\sin^2(\pi z)} \quad (1)$$

$$\mathcal{Z}_2 = \sum_{r \geq 0} \mathcal{Z}e^{2[r]} X^r = \frac{\text{sh}(\pi\sqrt{X})}{\pi\sqrt{X}} \quad (2)$$

Alors : (1) \iff (2) , car la réduction en monotangente donne :

$$\mathcal{T}_2 = 1 + X\mathcal{Z}_2^2 \mathcal{T}e^2(z) .$$

2 Les énoncés des conjectures.

Pour chaque bloc de conjectures, on donnera, lorsque c'est nécessaire, un diagramme commutatif résumant les implications entre elles. Voici les notations pour comprendre ces diagrammes :

1. $\boxed{p} \longrightarrow \boxed{q}$ signifie que $p \implies q$.
2. $\boxed{p} \cdots \longrightarrow \boxed{q}$ signifie que l'on conjecture l'implication $p \implies q$.
3. $\boxed{p} \implies \boxed{q}$ signifie que $p \implies q'$, où q' est une propriété très proche de q .
4. $\boxed{p} \dashrightarrow \boxed{q}$ signifie que p et q sont deux propriétés liées
5. $\begin{array}{l} \boxed{p} \\ \searrow \\ \boxed{r} \\ \swarrow \\ \boxed{q} \end{array}$ signifie que p et q entraîne r .
6. L'absence de flèche entre les cases \boxed{p} et \boxed{q} signifie qu'il n'y a pas de lien entre les propriétés p et q , a priori.

2.1 Les conjectures de type analytique.

Il s'agit de deux majorations des multitangentes, généralisant celles démontrées à la section 7 :

Conjecture 5 : $\forall \underline{s} \in \mathcal{S}^*, \forall z \in \mathbb{C}, \arg z \notin \{0; \pi\} \implies |\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z)| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{|\Im m z|}} \right)^{\|\underline{s}\|}$.

Conjecture 6 : Pour tout $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\Im m z| > 1$, on a :

$$|\mathcal{T}e^{\underline{s}}(z)| \leq \left(\frac{1}{|\Im m z|} \right)^{\|\underline{s}\|} \frac{\pi^2}{\text{sh}^2(\pi \Im m z)}.$$

Notons que ces deux conjectures semblent abordables.

2.2 Les conjectures de type arithmétique.

2.2.1 Autour du nettoyage des 1.

La conjecture sur le nettoyage des 1 est l'une des plus profondes, avec la conjecture 8.

Conjecture 2 : *Nettoyage des 1 dans les multitangentes, version 1.*

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S}^*, \mathcal{T}e^{\underline{s}} \in \mathcal{MTGF}_{2, \|\underline{s}\|}.$$

Cette conjecture est équivalente à :

Conjecture 2' : *Nettoyage des 1 dans les multitangentes, version 2.*

$$\forall \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*, \mathcal{T}e^{\underline{s}} \in \mathcal{MTGF}_{2, \|\underline{s}\|}.$$

Celles-ci se réduisent à la conjecture 3 qui donne un lien très profond entre multizêtas et multitangentes :

Conjecture 3 : *Second lien² entre multizêtas et multitangentes.*

$$\forall \underline{\sigma} \in \mathcal{S}_+^*, \mathcal{Z}e^{\underline{\sigma}} \mathcal{T}e^2 \in \mathcal{MTGF}_{2, \|\underline{\sigma}\|+2}.$$

On a donné une méthode générale vérifiant les conjectures 2 et 3, pour les petits poids. Celle-ci repose sur :

Conjecture 4 : Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} c_1 = 0, c_2 = c_3 = 1. \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+3} = c_{n+1} + c_n. \end{cases}$
La matrice, de taille $\sharp\{\underline{s} \in (\mathbb{N}^* - \{1\})^*; \|\underline{s}\| = p\} \times c_p$, obtenue par le procédé décrit au paragraphe 6.2 est de rang c_p .

² Le premier lien entre multizêtas et multitangentes est la réduction en monotangentes : celle-ci lie intimement multizêtas et multitangentes entre elles.

Voici les liens entre ces conjectures :

$$\boxed{2'} \iff \boxed{2} \iff \boxed{3} \iff \boxed{4} \implies 5$$

Enfin, les trois conjectures suivantes sont des raffinements des conjectures 2 et 3 :

Conjecture A : Si $S_t(\underline{s})$ désigne la somme des valeurs absolues des coefficients dans un nettoyage de $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$, alors :
il existe $C > 0$ tel que pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$, il existe un nettoyage de $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ vérifiant $S_t(\underline{s}) \leq C^{||\underline{s}||}$.

Conjecture B : Si $S_z(\underline{s})$ désigne la somme des valeurs absolues des coefficients d'une combinaison linéaire exprimant $\mathcal{Z}e^{\underline{s}}\mathcal{T}e^k$, alors :
il existe $C > 0$ tel que pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$ et pour tout entier $k \geq 2$, il existe une combinaison linéaire exprimant $\mathcal{Z}e^{\underline{s}}\mathcal{T}e^k$ vérifiant $S_z(\underline{s}) \leq C^{||\underline{s}||}$.

Conjecture C : Si $S_z(\underline{s})$ désigne la somme des valeurs absolues des coefficients d'une combinaison linéaire exprimant $\mathcal{Z}e^{\underline{s}}\mathcal{T}e^2$, alors :
il existe $C > 0$ tel que pour toute séquence $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$, il existe une combinaison linéaire exprimant $\mathcal{Z}e^{\underline{s}}\mathcal{T}e^2$ vérifiant $S_z(\underline{s}) \leq C^{||\underline{s}||}$.

Nous avons les même liens entre ces conjectures qu'entre les conjectures 2, 3 et 4 :

$$\boxed{A} \iff \boxed{B} \iff \boxed{C}$$

2.2.2 Absence conjecturale de \mathbb{Q} -relations linéaires entre multitangentes de poids différents.

Rappelons une conjecture très profonde sur les multizêtas :

Conjecture 7 : Notons $\mathcal{Z}_k = \begin{cases} \mathbb{Q} & , \text{ si } k = 0 . \\ \{0\} & , \text{ si } k = 1 . \\ \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}e^{\underline{s}})_{\substack{\underline{s} \in \mathcal{S}_+^* \\ ||\underline{s}||=k}} & , \text{ si } k \geq 2 . \end{cases}$

Il n'existe pas de relation entre multizêtas de poids différents :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_k = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_k .$$

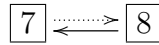
L'analogue semble aussi être vrai pour les multitangentes :

Conjecture 8 : Notons $\mathcal{T}_k = \begin{cases} \mathbb{Q} & , \text{ si } k = 0 . \\ \{0\} & , \text{ si } k = 1 . \\ \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T}e^{\underline{s}})_{\substack{\underline{s} \in \mathcal{S}_+^* \\ ||\underline{s}||=k}} & , \text{ si } k \geq 2 . \end{cases}$

Il n'existe pas de relation entre multizêtas de poids différents :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{T}_k = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{T}_k .$$

Les liens sont simples :



2.2.3 Autour d'une caractérisation des multitangentes convergentes paires, impaires ou nulles.

Il s'agit de deux conjectures posées en lisant les tables de multitangentes établies par réduction en monotangentes (cf. Annexe 2 et 3) et qui ont été vérifiées jusqu'au poids 15.

Conjecture 1 : Caractérisation des multitangentes nulles.

Les multitangentes convergentes identiquement égales à zéro sont exactement les multitangentes $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ avec $\underline{s} \in \mathcal{S}^* \cap \{1; 2\}^*$, symétrique, de poids impair et de longueur supérieure à 2.

Conjecture 1' : Caractérisation des multitangentes paires ou impaires.

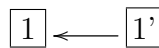
Soit $\underline{s} \in \mathcal{S}^*$.

1. Si la composante $\mathcal{T}e^k$, $k \in \llbracket 2; \max(s_1; \dots; s_r) \rrbracket$, n'apparaît pas dans la réduction en monotangentes de $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$, alors $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ est de même parité que k (et donc éventuellement nulle).
2. La multitangente $\mathcal{T}e^{\underline{s}}$ est paire ou impaire si et seulement si :

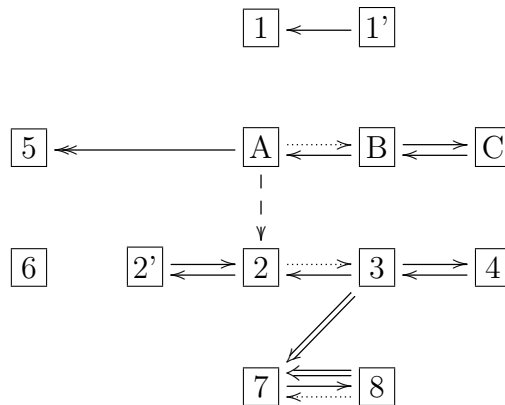
$$\overleftarrow{\underline{s}} = \underline{s}.$$

Notons qu'en longueur 3, la conjecture 1 a été démontrée (cf. p. 185) et qu'un programme d'étude en toute généralité est proposé à la page 187.

Ici, les liens entre les conjectures 1 et 1' sont particulièrement simples :



2.3 Diagramme résumant l'ensemble des liens entre les conjectures.



Autour du nettoyage des 1 dans les multitangentes.

Figure 1 : Quelques exemples de nettoyage des 1, pour les poids 5, 6 et 7.

$\ \underline{s}\ = 5$	$\mathcal{T}e^{2,1,2} = 0$.
$\ \underline{s}\ = 6$	$\mathcal{T}e^{3,1,2} = \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{3,3} + \frac{1}{4}\mathcal{T}e^{2,4} - \frac{1}{4}\mathcal{T}e^{4,2}$. $\mathcal{T}e^{2,1,3} = \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{3,3} - \frac{1}{4}\mathcal{T}e^{2,4} + \frac{1}{4}\mathcal{T}e^{4,2}$. $\mathcal{T}e^{2,1,1,2} = -\frac{1}{3}\mathcal{T}e^{3,3}$.
$\ \underline{s}\ = 7$	$\mathcal{T}e^{4,1,2} = \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{2,2,3} - \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{3,2,2} - \frac{1}{3}\mathcal{T}e^{5,2} + \frac{7}{48}\mathcal{T}e^{4,3} + \frac{23}{48}\mathcal{T}e^{3,4} + \frac{1}{3}\mathcal{T}e^{2,5}$. $\mathcal{T}e^{3,1,3} = \frac{1}{5}\mathcal{T}e^{2,3,2}$. $\mathcal{T}e^{2,1,4} = \frac{1}{3}\mathcal{T}e^{3,2,2} + \frac{1}{3}\mathcal{T}e^{5,2} + \frac{13}{24}\mathcal{T}e^{4,3} + \frac{5}{24}\mathcal{T}e^{3,4} - \frac{1}{3}\mathcal{T}e^{2,5}$. $\mathcal{T}e^{2,1,1,3} = \frac{1}{3}\mathcal{T}e^{3,2,2} + \frac{1}{12}\mathcal{T}e^{5,2} - \frac{1}{48}\mathcal{T}e^{4,3} - \frac{17}{48}\mathcal{T}e^{3,4} - \frac{1}{12}\mathcal{T}e^{2,5}$. $\mathcal{T}e^{2,1,2,2} = \frac{2}{3}\mathcal{T}e^{3,2,2} - \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{5,2} - \frac{5}{24}\mathcal{T}e^{4,3} + \frac{11}{24}\mathcal{T}e^{3,4} + \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{2,5}$. $\mathcal{T}e^{2,2,1,2} = \frac{2}{3}\mathcal{T}e^{3,2,2} + \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{5,2} + \frac{11}{24}\mathcal{T}e^{4,3} - \frac{5}{24}\mathcal{T}e^{3,4} - \frac{1}{6}\mathcal{T}e^{2,5}$. $\mathcal{T}e^{3,1,1,2} = -\frac{1}{3}\mathcal{T}e^{3,2,2} - \frac{1}{12}\mathcal{T}e^{5,2} - \frac{23}{48}\mathcal{T}e^{4,3} - \frac{7}{48}\mathcal{T}e^{3,4} + \frac{1}{12}\mathcal{T}e^{2,5}$. $\mathcal{T}e^{2,1,1,1,2} = 0$.

Figure 2 : Exemples d'écriture de $\mathcal{Z}e^\sigma \mathcal{T}e^2$ dans $\mathcal{MTGF}_{2, \|\underline{s}\|+2}$.

$\ \underline{s}\ = 4$	$\mathcal{Z}e^2 \mathcal{T}e^2 = \frac{1}{2} \mathcal{T}e^{2,2} .$
$\ \underline{s}\ = 5$	$\mathcal{Z}e^3 \mathcal{T}e^2 = \frac{1}{6} \mathcal{T}e^{3,2} - \frac{1}{6} \mathcal{T}e^{2,3} .$ $\mathcal{T}e^{2,1} \mathcal{T}e^2 = \frac{1}{6} \mathcal{T}e^{3,2} - \frac{1}{6} \mathcal{T}e^{2,3} .$
$\ \underline{s}\ = 6$	$\mathcal{Z}e^4 \mathcal{T}e^2 = -\frac{1}{6} \mathcal{T}e^{3,3} .$ $\mathcal{Z}e^{2,2} \mathcal{T}e^2 = -\frac{1}{8} \mathcal{T}e^{3,3} .$ $\mathcal{Z}e^{3,1} \mathcal{T}e^2 = -\frac{1}{24} \mathcal{T}e^{3,3} .$ $\mathcal{Z}e^{2,1,1} \mathcal{T}e^2 = -\frac{1}{6} \mathcal{T}e^{3,3} .$
$\ \underline{s}\ = 7$	$\mathcal{Z}e^5 \mathcal{T}e^2 = -\frac{1}{30} \mathcal{T}e^{5,2} - \frac{1}{15} \mathcal{T}e^{4,3} + \frac{1}{15} \mathcal{T}e^{3,4} + \frac{1}{30} \mathcal{T}e^{2,5} .$ $\mathcal{Z}e^{4,1} \mathcal{T}e^2 = \frac{1}{12} \mathcal{T}e^{2,2,3} - \frac{1}{12} \mathcal{T}e^{3,2,2} - \frac{1}{40} \mathcal{T}e^{5,2} - \frac{1}{20} \mathcal{T}e^{4,3} + \frac{1}{20} \mathcal{T}e^{3,4} + \frac{1}{40} \mathcal{T}e^{2,5} .$ $\mathcal{Z}e^{3,2} \mathcal{T}e^2 = \frac{1}{4} \mathcal{T}e^{3,2,2} - \frac{1}{4} \mathcal{T}e^{2,2,3} + \frac{7}{120} \mathcal{T}e^{5,2} + \frac{7}{60} \mathcal{T}e^{4,3} - \frac{7}{60} \mathcal{T}e^{3,4} - \frac{7}{120} \mathcal{T}e^{2,5} .$ $\mathcal{Z}e^{2,3} \mathcal{T}e^2 = \frac{1}{6} \mathcal{T}e^{2,2,3} - \frac{1}{6} \mathcal{T}e^{3,2,2} - \frac{1}{15} \mathcal{T}e^{5,2} - \frac{2}{15} \mathcal{T}e^{4,3} + \frac{2}{15} \mathcal{T}e^{3,4} + \frac{1}{15} \mathcal{T}e^{2,5} .$ $\mathcal{Z}e^{3,1,1} \mathcal{T}e^2 = \frac{1}{12} \mathcal{T}e^{2,2,3} - \frac{1}{12} \mathcal{T}e^{3,2,2} - \frac{1}{40} \mathcal{T}e^{5,2} - \frac{1}{20} \mathcal{T}e^{4,3} + \frac{1}{20} \mathcal{T}e^{3,4} + \frac{1}{40} \mathcal{T}e^{2,5} .$ $\mathcal{Z}e^{2,2,1} \mathcal{T}e^2 = \frac{1}{4} \mathcal{T}e^{3,2,2} - \frac{1}{4} \mathcal{T}e^{2,2,3} + \frac{7}{120} \mathcal{T}e^{5,2} + \frac{7}{60} \mathcal{T}e^{4,3} - \frac{7}{60} \mathcal{T}e^{3,4} - \frac{7}{120} \mathcal{T}e^{2,5} .$ $\mathcal{Z}e^{2,1,2} \mathcal{T}e^2 = \frac{1}{6} \mathcal{T}e^{2,2,3} - \frac{1}{6} \mathcal{T}e^{3,2,2} - \frac{1}{15} \mathcal{T}e^{5,2} - \frac{2}{15} \mathcal{T}e^{4,3} + \frac{2}{15} \mathcal{T}e^{3,4} + \frac{1}{15} \mathcal{T}e^{2,5} .$ $\mathcal{Z}e^{2,1,1,1} \mathcal{T}e^2 = -\frac{1}{30} \mathcal{T}e^{5,2} - \frac{1}{15} \mathcal{T}e^{4,3} + \frac{1}{15} \mathcal{T}e^{3,4} + \frac{1}{30} \mathcal{T}e^{2,5} .$

Figure 3 : Matrices obtenues, pour les poids $p \in \llbracket 4; 7 \rrbracket$ en appliquant la méthode proposée de nettoyage des 1 dans les multitangentes.

$$\begin{array}{cccc}
 p = 4 : & p = 5 : & p = 6 : & p = 7 : \\
 \left(\begin{array}{c} \frac{8}{5} \\ -\frac{12}{5} \\ \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} \\ -\frac{15}{2} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} -5 & 0 \\ 10 & 0 \\ -10 & 0 \\ 5 & 0 \\ \frac{15}{2} & -6 \\ -\frac{15}{2} & 6 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} \frac{48}{35} & 0 \\ -\frac{24}{7} & 0 \\ \frac{32}{7} & 0 \\ -\frac{24}{7} & 0 \\ \frac{48}{35} & 0 \\ \frac{352}{105} & -6 \\ -\frac{88}{35} & \frac{9}{2} \\ \frac{16}{105} & 3 \\ -\frac{88}{35} & \frac{9}{2} \\ \frac{16}{7} & -9 \\ \frac{16}{105} & 3 \\ \frac{24}{35} & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} -7 & 0 & 0 \\ 21 & 0 & 0 \\ -35 & 0 & 0 \\ 35 & 0 & 0 \\ -21 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 14 & -20 & \frac{16}{5} \\ -14 & 20 & \frac{16}{5} \\ 21 & -10 & \frac{16}{5} \\ -14 & 20 & \frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ -28 & 0 & \frac{48}{5} \\ 14 & -20 & \frac{16}{5} \\ 28 & 0 & -\frac{48}{5} \\ -21 & 10 & \frac{16}{5} \\ -\frac{441}{16} & 15 & 0 \\ \frac{441}{16} & -15 & 0 \\ -\frac{189}{16} & 15 & -\frac{24}{5} \\ \frac{189}{16} & -15 & \frac{24}{5} \end{array} \right)
 \end{array}$$

Quelques relations de symétralité pour les multizêtas, retrouvées à partir des multitangentes.

Figure 1 : Relations de symétralité obtenues, en annulant la composante $\mathcal{T}e^1$
dans les relations de réduction en monotangentes des multitangentes de
poids $p \in \llbracket 4; 9 \rrbracket$:

Poids des muitangentes	Relations entre multizêtas obtenues
4	Aucune.
5	$4Ze^{3,1} + 2Ze^{2,2} = (Ze^2)^2 .$
6	$6Ze^{4,1} + 3Ze^{3,2} + Ze^{2,3} = Ze^3Ze^2 .$
7	$2Ze^{3,3} + 3Ze^{2,4} = 3Ze^4Ze^2 - 2(Ze^3)^2 .$ $12Ze^{5,1} + 6Ze^{4,2} + 2Ze^{3,3} = (Ze^3)^2 .$ $8Ze^{5,1} + 4Ze^{4,2} + Ze^{2,4} + 2Ze^{3,3} = Ze^4Ze^2 .$ $4Ze^{3,1,1,1} + 2Ze^{2,2,1,1} + 2Ze^{2,1,2,1} + 2Ze^{2,1,1,2} = Ze^2Ze^{2,1,1} - (Ze^{2,1})^2 .$ $Ze^{3,2,1} + Ze^{3,1,2} + Ze^{2,1,3} + Ze^{2,2,2} + Ze^{2,3,1} = Ze^3Ze^{2,1} - Ze^{3,1}Ze^2 .$

Table des multitangentes.

1 Table des monotangentes, pour les petits poids.

$$\mathcal{T}e^1(z) = \frac{\pi}{\tan(\pi X)} .$$

$$\mathcal{T}e^2(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi X)} .$$

$$\mathcal{T}e^3(z) = \frac{\pi^3 \cos(\pi X)}{\sin^3(\pi X)} .$$

$$\mathcal{T}e^4(z) = \frac{\pi^4 \cos(2\pi X) + 2}{3 \sin^4(\pi X)} .$$

$$\mathcal{T}e^5(z) = \frac{\pi^5 \cos(3\pi X) + 11 \cos(\pi X)}{12 \sin^5(\pi X)} .$$

$$\mathcal{T}e^6(z) = \frac{\pi^6 \cos(4\pi X) + 26 \cos(2\pi X) + 33}{60 \sin^6(\pi X)} .$$

$$\mathcal{T}e^7(z) = \frac{\pi^7 \cos(5\pi X) + 57 \cos(3\pi X) + 302 \cos(\pi X)}{360 \sin^7(\pi X)} .$$

$$\mathcal{T}e^8(z) = \frac{\pi^8 \cos(6\pi X) + 120 \cos(4\pi X) + 1191 \cos(2\pi X) + 1208}{2520 \sin^8(\pi X)} .$$

$$\mathcal{T}e^9(z) = \frac{\pi^9 \cos(7\pi X) + 247 \cos(5\pi X) + 4293 \cos(3\pi X) + 11651 \cos(\pi X) + 3968}{20160 \sin^9(\pi X)} .$$

$$\mathcal{T}e^{10}(z) = \frac{\pi^{10} \cos(8\pi X) + 502 \cos(6\pi X) + 14608 \cos(4\pi X) + 88234 \cos(2\pi X) + 78095}{181440 \sin^{10}(\pi X)} .$$

2 Tables des multitangentes convergentes, pour les petits poids.

2.1 Poids 4.

$$\mathcal{T}e^{2,2} = 2\zeta(2)\mathcal{T}e^2 .$$

2.2 Poids 5.

$$\mathcal{T}e^{2,3} = -3\zeta(3)\mathcal{T}e^2 + \zeta(2)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,2} = 3\zeta(3)\mathcal{T}e^2 + \zeta(2)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,2} = 0 .$$

2.3 Poids 6.

$$\mathcal{T}e^{2,4} = \frac{8}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 - 2\zeta(3)\mathcal{T}e^3 + \zeta(2)\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,3} = -\frac{12}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{4,2} = \frac{8}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 + 2\zeta(3)\mathcal{T}e^3 + \zeta(2)\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,2,2} = \frac{8}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,3} = -\frac{2}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 + \zeta(3)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,1,2} = -\frac{2}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 - \zeta(3)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,1,2} = \frac{4}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 .$$

2.4 Poids 7.

$$\mathcal{T}e^{2,5} = -5\zeta(5)\mathcal{T}e^2 + \frac{6}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 - 2\zeta(3)\mathcal{T}e^4 + \zeta(2)\mathcal{T}e^5 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,4} = 10\zeta(5)\mathcal{T}e^2 - \frac{4}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 + \zeta(3)\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{4,3} = -10\zeta(5)\mathcal{T}e^2 - \frac{4}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 - \zeta(3)\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{5,2} = 5\zeta(5)\mathcal{T}e^2 + \frac{6}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 + 2\zeta(3)\mathcal{T}e^4 + \zeta(2)\mathcal{T}e^5 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,3,2} = \zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,2,3} = \left(\frac{15}{2}\zeta(5) - 6\zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^2 + \frac{3}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,4} = \left(-\frac{5}{2}\zeta(5) + 2\zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^2 - \frac{1}{2}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 + \zeta(3)\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,2,2} = \left(-\frac{15}{2}\zeta(5) + 6\zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^2 + \frac{3}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,1,3} = \frac{1}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{4,1,2} = \left(\frac{5}{2}\zeta(5) - 2\zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^2 - \frac{1}{2}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 - \zeta(3)\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,2,2} = (10\zeta(5) - 4\zeta(2)\zeta(3)) \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,2,1,2} = (-10\zeta(5) + 4\zeta(2)\zeta(3)) \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,1,3} = (-5\zeta(5) + 2\zeta(2)\zeta(3)) \mathcal{T}e^2 + \frac{2}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,1,1,2} = (5\zeta(5) - 2\zeta(2)\zeta(3)) \mathcal{T}e^2 + \frac{2}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,1,1,2} = 0 .$$

2.5 Poids 8.

$$\mathcal{T}e^{2,6} = \frac{48}{35}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 - 4\zeta(5)\mathcal{T}e^3 + \frac{6}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 - 2\zeta(3)\mathcal{T}e^5 + \zeta(2)\mathcal{T}e^6 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,5} = -\frac{24}{7}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 + 5\zeta(5)\mathcal{T}e^3 - \frac{6}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 + \zeta(3)\mathcal{T}e^5 .$$

$$\mathcal{T}e^{4,4} = \frac{32}{7}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 + \frac{4}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{5,3} = -\frac{24}{7}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 - 5\zeta(5)\mathcal{T}e^3 - \frac{6}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 - \zeta(3)\mathcal{T}e^5 .$$

$$\mathcal{T}e^{6,2} = \frac{48}{35}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 + 4\zeta(5)\mathcal{T}e^3 + \frac{6}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 + 2\zeta(3)\mathcal{T}e^5 + \zeta(2)\mathcal{T}e^6 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,4,2} = \left(\frac{352}{105}\zeta(2)^3 - 6\zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + \zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,3,3} = \left(-\frac{88}{35}\zeta(2)^3 + \frac{9}{2}\zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(\frac{9}{2}\zeta(5) - 3\zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,2,4} = \left(\frac{16}{105}\zeta(2)^3 + 3\zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + (2\zeta(5) - 2\zeta(2)\zeta(3)) \mathcal{T}e^3 + \frac{3}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 .$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}e^{2,1,5} &= \left(\frac{16}{105} \zeta(2)^3 - \frac{3}{2} \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(-\frac{1}{2} \zeta(5) + \zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 \\
&\quad - \frac{1}{2} \zeta(2)^2 \mathcal{T}e^4 + \zeta(3) \mathcal{T}e^5 . \\
\mathcal{T}e^{3,3,2} &= \left(-\frac{88}{35} \zeta(2)^3 + \frac{9}{2} \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(-\frac{9}{2} \zeta(5) + 3 \zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 . \\
\mathcal{T}e^{3,2,3} &= \left(\frac{16}{7} \zeta(2)^3 - 9 \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{3,1,4} &= \left(\frac{3}{2} \zeta(3)^2 - \frac{8}{21} \zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(-\frac{5}{2} \zeta(5) + \zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 + \frac{1}{10} \zeta(2)^2 \mathcal{T}e^4 . \\
\mathcal{T}e^{4,2,2} &= \left(\frac{16}{105} \zeta(2)^3 + 3 \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + (-2 \zeta(5) + 2 \zeta(2)\zeta(3)) \mathcal{T}e^3 + \frac{3}{10} \zeta(2)^2 \mathcal{T}e^4 . \\
\mathcal{T}e^{4,1,3} &= \left(\frac{3}{2} \zeta(3)^2 - \frac{8}{21} \zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(\frac{5}{2} \zeta(5) - \zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 + \frac{1}{10} \zeta(2)^2 \mathcal{T}e^4 . \\
\mathcal{T}e^{5,1,2} &= \left(\frac{16}{105} \zeta(2)^3 - \frac{3}{2} \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(\frac{1}{2} \zeta(5) - \zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 \\
&\quad - \frac{1}{2} \zeta(2)^2 \mathcal{T}e^4 - \zeta(3) \mathcal{T}e^5 . \\
\mathcal{T}e^{2,1,3,2} &= \left(-\frac{19}{105} \zeta(2)^3 + \frac{3}{2} \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + \zeta(2)\zeta(3) \mathcal{T}e^3 . \\
\mathcal{T}e^{2,2,2,2} &= \frac{24}{35} \zeta(2)^3 \mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{2,3,1,2} &= \left(-\frac{19}{105} \zeta(2)^3 + \frac{3}{2} \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 - \zeta(2)\zeta(3) \mathcal{T}e^3 . \\
\mathcal{T}e^{2,1,2,3} &= \left(-\frac{173}{105} \zeta(2)^3 + 3 \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(\frac{9}{2} \zeta(5) - 2 \zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 . \\
\mathcal{T}e^{2,2,1,3} &= \left(\frac{52}{35} \zeta(2)^3 - \frac{9}{2} \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(-\frac{11}{2} \zeta(5) + 3 \zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 . \\
\mathcal{T}e^{2,1,1,4} &= \left(-\frac{3}{2} \zeta(3)^2 + \frac{79}{105} \zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 + (-3 \zeta(5) + \zeta(2)\zeta(3)) \mathcal{T}e^3 + \frac{2}{5} \zeta(2)^2 \mathcal{T}e^4 . \\
\mathcal{T}e^{3,1,2,2} &= \left(\frac{52}{35} \zeta(2)^3 - \frac{9}{2} \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(\frac{11}{2} \zeta(5) - 3 \zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 .
\end{aligned}$$

$$\mathcal{T}e^{3,2,1,2} = \left(-\frac{173}{105} \zeta(2)^3 + 3 \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(-\frac{9}{2} \zeta(5) + 2 \zeta(2) \zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,1,1,3} = \left(3 \zeta(3)^2 - \frac{22}{21} \zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{4,1,1,2} = \left(-\frac{3}{2} \zeta(3)^2 + \frac{79}{105} \zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 + (3 \zeta(5) - \zeta(2) \zeta(3)) \mathcal{T}e^3 + \frac{2}{5} \zeta(2)^2 \mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,1,2,2} = \frac{4}{7} \zeta(2)^3 \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,2,1,2} = -\frac{8}{35} \zeta(2)^3 \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,2,1,1,2} = \frac{4}{7} \zeta(2)^3 \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,1,1,3} = -\frac{8}{35} \zeta(2)^3 \mathcal{T}e^2 + \zeta(5) \mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,1,1,1,2} = -\frac{8}{35} \zeta(2)^3 \mathcal{T}e^2 - \zeta(5) \mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,1,1,1,2} = \frac{16}{35} \zeta(2)^3 \mathcal{T}e^2 .$$

3 Tables des multitangentes divergentes, pour les petits poids.

3.1 Poids 2.

$$\mathcal{T}e^{1,1} = -3 \zeta(2) .$$

3.2 Poids 3.

$$\mathcal{T}e^{1,2} = 0 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1} = 0 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1} = -\zeta(2) \mathcal{T}e^1 .$$

3.3 Poids 4.

$$\mathcal{T}e^{1,3} = -\zeta(2) \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,1} = -\zeta(2) \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,2} = -\frac{1}{2}\zeta(2)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,1} = 0 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,1} = -\frac{1}{2}\zeta(2)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,1} = \frac{3}{2}\zeta(2)^2 .$$

3.4 Poids 5.

$$\mathcal{T}e^{1,4} = \zeta(3)\mathcal{T}e^2 - \zeta(2)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{4,1} = -\zeta(3)\mathcal{T}e^2 - \zeta(2)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,3} = \zeta(3)\mathcal{T}e^2 - \frac{1}{2}\zeta(2)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,2} = -2\zeta(3)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,3,1} = 0 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,2,1} = 2\zeta(3)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,1,1} = -\zeta(3)\mathcal{T}e^2 - \frac{1}{2}\zeta(2)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,2} = \frac{1}{3}\zeta(3)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,2,1} = 0 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,1,1} = 0 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,1,1} = -\frac{1}{3}\zeta(3)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,1,1} = \frac{3}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^1 .$$

3.5 Poids 6.

$$\mathcal{T}e^{1,5} = -\frac{2}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 + \zeta(3)\mathcal{T}e^3 - \zeta(2)\mathcal{T}e^4 .$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}e^{5,1} &= -\frac{2}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 - \zeta(3)\mathcal{T}e^3 - \zeta(2)\mathcal{T}e^4 . \\
\mathcal{T}e^{1,1,4} &= -\frac{1}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 + \zeta(3)\mathcal{T}e^3 - \frac{1}{2}\zeta(2)\mathcal{T}e^4 . \\
\mathcal{T}e^{1,2,3} &= \frac{7}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 - 2\zeta(3)\mathcal{T}e^3 . \\
\mathcal{T}e^{1,3,2} &= -\frac{3}{2}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{1,4,1} &= \zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{2,3,1} &= -\frac{3}{2}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{3,2,1} &= \frac{7}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 + 2\zeta(3)\mathcal{T}e^3 . \\
\mathcal{T}e^{4,1,1} &= -\frac{1}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 - \zeta(3)\mathcal{T}e^3 - \frac{1}{2}\zeta(2)\mathcal{T}e^4 . \\
\mathcal{T}e^{1,1,1,3} &= \frac{1}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 + \frac{1}{3}\zeta(3)\mathcal{T}e^3 . \\
\mathcal{T}e^{1,1,2,2} &= \frac{1}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{1,1,3,1} &= \frac{1}{2}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{1,2,1,2} &= -\frac{6}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{1,2,2,1} &= 0 . \\
\mathcal{T}e^{1,3,1,1} &= \frac{1}{2}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{2,1,2,1} &= -\frac{6}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{2,2,1,1} &= \frac{1}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{3,1,1,1} &= \frac{1}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 - \frac{1}{3}\zeta(3)\mathcal{T}e^3 . \\
\mathcal{T}e^{1,1,1,1,2} &= \frac{1}{40}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 .
\end{aligned}$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,2,1} = 0 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,2,1,1} = \frac{1}{4}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,1,1,1} = 0 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,1,1,1} = \frac{1}{40}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,1,1,1} = -\frac{3}{10}\zeta(2)^3 .$$

3.6 Poids 7.

$$\mathcal{T}e^{1,6} = \zeta(5)\mathcal{T}e^2 - \frac{2}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 + \zeta(3)\mathcal{T}e^4 - \zeta(2)\mathcal{T}e^5 .$$

$$\mathcal{T}e^{6,1} = -\zeta(5)\mathcal{T}e^2 - \frac{2}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 - \zeta(3)\mathcal{T}e^4 - \zeta(2)\mathcal{T}e^5 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,5} = (2\zeta(5) - \zeta(2)\zeta(3))\mathcal{T}e^2 - \frac{1}{2}\zeta(2)\mathcal{T}e^5 - \frac{1}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 + \zeta(3)\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,4} = \left(2\zeta(2)\zeta(3) - \frac{11}{2}\zeta(5)\right)\mathcal{T}e^2 + \frac{7}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 - 2\zeta(3)\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,3,3} = \frac{9}{2}\zeta(5)\mathcal{T}e^2 - \frac{1}{2}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,4,2} = -\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 - 3\zeta(5)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,5,1} = \zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,4,1} = 3\zeta(5)\mathcal{T}e^2 - \zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,3,1} = -\frac{9}{2}\zeta(5)\mathcal{T}e^2 - \frac{1}{2}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{4,2,1} = \left(-2\zeta(2)\zeta(3) + \frac{11}{2}\zeta(5)\right)\mathcal{T}e^2 + \frac{7}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 + 2\zeta(3)\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{5,1,1} = (-2\zeta(5) + \zeta(2)\zeta(3))\mathcal{T}e^2 - \frac{1}{2}\zeta(2)\mathcal{T}e^5 - \frac{1}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 - \zeta(3)\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,4} = \left(2\zeta(5) - \frac{3}{2}\zeta(2)\zeta(3)\right)\mathcal{T}e^2 + \frac{1}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 + \frac{1}{3}\zeta(3)\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,2,3} = \left(\frac{7}{2}\zeta(2)\zeta(3) - \frac{11}{2}\zeta(5) \right) \mathcal{T}e^2 + \frac{7}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,3,2} = \left(-\frac{1}{2}\zeta(5) + \frac{1}{2}\zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^2 - \frac{1}{2}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,4,1} = -\frac{1}{2}\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^2 + \frac{1}{2}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,1,3} = \left(\frac{9}{2}\zeta(5) - \zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^2 - \frac{6}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,2,2} = (-4\zeta(2)\zeta(3) + 2\zeta(5)) \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,3,1} = 2\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,3,1,2} = \left(\zeta(2)\zeta(3) - \frac{1}{2}\zeta(5) \right) \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,3,2,1} = -2\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,4,1,1} = \frac{1}{2}\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^2 + \frac{1}{2}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,3,1} = \left(-\zeta(2)\zeta(3) + \frac{1}{2}\zeta(5) \right) \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,2,2,1} = (4\zeta(2)\zeta(3) - 2\zeta(5)) \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,3,1,1} = \left(\frac{1}{2}\zeta(5) - \frac{1}{2}\zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^2 - \frac{1}{2}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,1,2,1} = \left(-\frac{9}{2}\zeta(5) + \zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^2 - \frac{6}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,2,1,1} = \left(-\frac{7}{2}\zeta(2)\zeta(3) + \frac{11}{2}\zeta(5) \right) \mathcal{T}e^2 + \frac{7}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{4,1,1,1} = \left(-2\zeta(5) + \frac{3}{2}\zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^2 + \frac{1}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 - \frac{1}{3}\zeta(3)\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,1,3} = \left(\zeta(5) - \frac{5}{6}\zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^2 + \frac{1}{40}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,2,2} = \left(\frac{5}{3}\zeta(2)\zeta(3) - 4\zeta(5) \right) \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,3,1} = -\frac{1}{3}\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,2,1,2} = 6\zeta(5)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,2,2,1} = -\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,3,1,1} = \frac{1}{4}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,1,1,2} = -4\zeta(5)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,1,2,1} = 0 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,2,1,1} = \zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,3,1,1,1} = \frac{1}{3}\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,1,2,1} = 4\zeta(5)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,2,1,1} = -6\zeta(5)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,2,1,1,1} = \left(-\frac{5}{3}\zeta(2)\zeta(3) + 4\zeta(5) \right) \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,1,1,1,1} = \left(-\zeta(5) + \frac{5}{6}\zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^2 + \frac{1}{40}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,1,1,2} = \left(\frac{1}{5}\zeta(5) - \frac{1}{6}\zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,1,2,1} = 0 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,2,1,1} = -\frac{1}{6}\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,2,1,1,1} = \frac{1}{6}\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,1,1,1,1} = 0 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,1,1,1,1} = \left(-\frac{1}{5}\zeta(5) + \frac{1}{6}\zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,1,1,1,1} = -\frac{3}{70}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^1 .$$

3.7 Poids 8.

$$\mathcal{T}e^{1,7} = -\frac{8}{35}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 + \zeta(5)\mathcal{T}e^3 - \frac{2}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 + \zeta(3)\mathcal{T}e^5 - \zeta(2)\mathcal{T}e^6 .$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}e^{7,1} &= -\frac{8}{35}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 - \zeta(5)\mathcal{T}e^3 - \frac{2}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 - \zeta(3)\mathcal{T}e^5 - \zeta(2)\mathcal{T}e^6. \\
\mathcal{T}e^{1,1,6} &= \left(-\frac{6}{35}\zeta(2)^3 + \frac{1}{2}\zeta(3)^2\right)\mathcal{T}e^2 + (2\zeta(5) - \zeta(2)\zeta(3))\mathcal{T}e^3 - \frac{1}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 \\
&\quad + \zeta(3)\mathcal{T}e^5 - \frac{1}{2}\zeta(2)\mathcal{T}e^6. \\
\mathcal{T}e^{1,2,5} &= \left(\frac{74}{105}\zeta(2)^3 - \zeta(3)^2\right)\mathcal{T}e^2 + \left(2\zeta(2)\zeta(3) - \frac{11}{2}\zeta(5)\right)\mathcal{T}e^3 + \frac{7}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 \\
&\quad - 2\zeta(3)\mathcal{T}e^5. \\
\mathcal{T}e^{1,3,4} &= \left(\frac{1}{2}\zeta(3)^2 - \frac{52}{35}\zeta(2)^3\right)\mathcal{T}e^2 + \left(\frac{9}{2}\zeta(5) - \zeta(2)\zeta(3)\right)\mathcal{T}e^3 - \frac{1}{2}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4. \\
\mathcal{T}e^{1,4,3} &= \left(\frac{244}{105}\zeta(2)^3 - 2\zeta(3)^2\right)\mathcal{T}e^2 + (2\zeta(2)\zeta(3) - 3\zeta(5))\mathcal{T}e^3. \\
\mathcal{T}e^{1,5,2} &= \left(\frac{5}{2}\zeta(3)^2 - 2\zeta(2)^3\right)\mathcal{T}e^2 - \zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^3 - \zeta(2)^2\mathcal{T}e^4. \\
\mathcal{T}e^{1,6,1} &= \left(\frac{4}{5}\zeta(2)^3 - \zeta(3)^2\right)\mathcal{T}e^2 + \zeta(2)^2\mathcal{T}e^4. \\
\mathcal{T}e^{2,5,1} &= \left(\frac{5}{2}\zeta(3)^2 - 2\zeta(2)^3\right)\mathcal{T}e^2 + \zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^3 - \zeta(2)^2\mathcal{T}e^4. \\
\mathcal{T}e^{3,4,1} &= \left(\frac{244}{105}\zeta(2)^3 - 2\zeta(3)^2\right)\mathcal{T}e^2 + (-2\zeta(2)\zeta(3) + 3\zeta(5))\mathcal{T}e^3. \\
\mathcal{T}e^{4,3,1} &= \left(\frac{1}{2}\zeta(3)^2 - \frac{52}{35}\zeta(2)^3\right)\mathcal{T}e^2 + \left(-\frac{9}{2}\zeta(5) + \zeta(2)\zeta(3)\right)\mathcal{T}e^3 - \frac{1}{2}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4. \\
\mathcal{T}e^{5,2,1} &= \left(\frac{74}{105}\zeta(2)^3 - \zeta(3)^2\right)\mathcal{T}e^2 + \left(-2\zeta(2)\zeta(3) + \frac{11}{2}\zeta(5)\right)\mathcal{T}e^3 + \frac{7}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 \\
&\quad + 2\zeta(3)\mathcal{T}e^5. \\
\mathcal{T}e^{6,1,1} &= \left(-\frac{6}{35}\zeta(2)^3 + \frac{1}{2}\zeta(3)^2\right)\mathcal{T}e^2 + (-2\zeta(5) + \zeta(2)\zeta(3))\mathcal{T}e^3 - \frac{1}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 \\
&\quad - \zeta(3)\mathcal{T}e^5 - \frac{1}{2}\zeta(2)\mathcal{T}e^6. \\
\mathcal{T}e^{1,1,1,5} &= \left(\zeta(3)^2 - \frac{9}{70}\zeta(2)^3\right)\mathcal{T}e^2 + \left(2\zeta(5) - \frac{3}{2}\zeta(2)\zeta(3)\right)\mathcal{T}e^3 + \frac{1}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 \\
&\quad + \frac{1}{3}\zeta(3)\mathcal{T}e^5.
\end{aligned}$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,2,4} = \left(-2\zeta(3)^2 + \frac{1}{6}\zeta(2)^3\right) \mathcal{T}e^2 + \left(-\frac{11}{2}\zeta(5) + 3\zeta(2)\zeta(3)\right) \mathcal{T}e^3 + \frac{7}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,3,3} = \left(\frac{167}{210}\zeta(2)^3 - \frac{3}{2}\zeta(3)^2\right) \mathcal{T}e^2 + \left(\zeta(2)\zeta(3) - \frac{1}{2}\zeta(5)\right) \mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,4,2} = \left(-\frac{10}{21}\zeta(2)^3 + \frac{3}{2}\zeta(3)^2\right) \mathcal{T}e^2 - \frac{1}{2}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,5,1} = \left(\frac{3}{10}\zeta(2)^3 - \zeta(3)^2\right) \mathcal{T}e^2 - \frac{1}{2}\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^3 + \frac{1}{2}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,1,4} = \left(-\frac{1}{2}\zeta(3)^2 - \frac{17}{42}\zeta(2)^3\right) \mathcal{T}e^2 + \left(\frac{9}{2}\zeta(5) - \zeta(2)\zeta(3)\right) \mathcal{T}e^3 - \frac{6}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,2,3} = \left(6\zeta(3)^2 - \frac{31}{70}\zeta(2)^3\right) \mathcal{T}e^2 + (2\zeta(5) - 2\zeta(2)\zeta(3)) \mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,3,2} = \left(-3\zeta(3)^2 + \frac{2}{105}\zeta(2)^3\right) \mathcal{T}e^2 - 2\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,4,1} = \left(2\zeta(3)^2 - \frac{7}{10}\zeta(2)^3\right) \mathcal{T}e^2 + 2\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,3,1,3} = \frac{3}{35}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 - \frac{1}{2}\zeta(5)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,3,2,2} = \left(\frac{17}{210}\zeta(2)^3 - 3\zeta(3)^2\right) \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,3,3,1} = \zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,4,1,2} = \left(-\frac{1}{42}\zeta(2)^3 + \frac{1}{2}\zeta(3)^2\right) \mathcal{T}e^2 + \zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,4,2,1} = \left(2\zeta(3)^2 - \frac{7}{10}\zeta(2)^3\right) \mathcal{T}e^2 - 2\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,5,1,1} = \left(\frac{3}{10}\zeta(2)^3 - \zeta(3)^2\right) \mathcal{T}e^2 + \frac{1}{2}\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^3 + \frac{1}{2}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,1,4,1} = \left(-\frac{1}{42}\zeta(2)^3 + \frac{1}{2}\zeta(3)^2\right) \mathcal{T}e^2 - \zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,2,3,1} = \left(\frac{17}{210}\zeta(2)^3 - 3\zeta(3)^2\right) \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,3,2,1} = \left(-3\zeta(3)^2 + \frac{2}{105}\zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 + 2\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,4,1,1} = \left(-\frac{10}{21}\zeta(2)^3 + \frac{3}{2}\zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 - \frac{1}{2}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,1,3,1} = \frac{3}{35}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 + \frac{1}{2}\zeta(5)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,2,2,1} = \left(6\zeta(3)^2 - \frac{31}{70}\zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 + (-2\zeta(5) + 2\zeta(2)\zeta(3))\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,3,1,1} = \left(\frac{167}{210}\zeta(2)^3 - \frac{3}{2}\zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(-\zeta(2)\zeta(3) + \frac{1}{2}\zeta(5) \right) \mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{4,1,2,1} = \left(-\frac{1}{2}\zeta(3)^2 - \frac{17}{42}\zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(-\frac{9}{2}\zeta(5) + \zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 - \frac{6}{5}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{4,2,1,1} = \left(-2\zeta(3)^2 + \frac{1}{6}\zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(\frac{11}{2}\zeta(5) - 3\zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 + \frac{7}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{5,1,1,1} = \left(\zeta(3)^2 - \frac{9}{70}\zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(-2\zeta(5) + \frac{3}{2}\zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 + \frac{1}{10}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 \\ - \frac{1}{3}\zeta(3)\mathcal{T}e^5 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,1,4} = \left(\frac{5}{6}\zeta(3)^2 - \frac{17}{140}\zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(\zeta(5) - \frac{5}{6}\zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 + \frac{1}{40}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,2,3} = \left(-2\zeta(3)^2 + \frac{149}{420}\zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(-4\zeta(5) + \frac{4}{3}\zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,3,2} = \frac{139}{420}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 + \frac{1}{3}\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,4,1} = \left(-\frac{1}{3}\zeta(3)^2 - \frac{1}{10}\zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 - \frac{1}{3}\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,2,1,3} = \left(-\frac{31}{35}\zeta(2)^3 + \frac{1}{2}\zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(6\zeta(5) - \frac{1}{2}\zeta(2)\zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,2,2,2} = \left(\frac{16}{35}\zeta(2)^3 + 2\zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,2,3,1} = -\frac{9}{20}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 .$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}e^{1,1,3,1,2} &= \left(\frac{1}{5}\zeta(2)^3 - \frac{1}{2}\zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + \frac{1}{2}\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^3 . \\
\mathcal{T}e^{1,1,3,2,1} &= \left(-\frac{7}{20}\zeta(2)^3 + 2\zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 - \zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^3 . \\
\mathcal{T}e^{1,1,4,1,1} &= \left(\frac{1}{10}\zeta(2)^3 - \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + \frac{1}{4}\zeta(2)^2\mathcal{T}e^4 . \\
\mathcal{T}e^{1,2,1,1,3} &= \left(\frac{118}{105}\zeta(2)^3 - \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 - 4\zeta(5)\mathcal{T}e^3 . \\
\mathcal{T}e^{1,2,1,2,2} &= \left(-\frac{12}{5}\zeta(2)^3 + 2\zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{1,2,1,3,1} &= \frac{6}{5}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{1,2,2,1,2} &= \left(-2\zeta(3)^2 + \frac{8}{7}\zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{1,2,2,2,1} &= -4\zeta(3)^2\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{1,2,3,1,1} &= \left(-\frac{7}{20}\zeta(2)^3 + 2\zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + \zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^3 . \\
\mathcal{T}e^{1,3,1,1,2} &= \left(-\frac{82}{105}\zeta(2)^3 + \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{1,3,1,2,1} &= \frac{6}{5}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{1,3,2,1,1} &= -\frac{9}{20}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{1,4,1,1,1} &= \left(-\frac{1}{3}\zeta(3)^2 - \frac{1}{10}\zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 + \frac{1}{3}\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^3 . \\
\mathcal{T}e^{2,1,1,3,1} &= \left(-\frac{82}{105}\zeta(2)^3 + \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{2,1,2,2,1} &= \left(-2\zeta(3)^2 + \frac{8}{7}\zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{2,1,3,1,1} &= \left(\frac{1}{5}\zeta(2)^3 - \frac{1}{2}\zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 - \frac{1}{2}\zeta(2)\zeta(3)\mathcal{T}e^3 . \\
\mathcal{T}e^{2,2,1,2,1} &= \left(-\frac{12}{5}\zeta(2)^3 + 2\zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 .
\end{aligned}$$

$$\mathcal{T}e^{2,2,2,1,1} = \left(\frac{16}{35} \zeta(2)^3 + 2 \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{2,3,1,1,1} = \frac{139}{420} \zeta(2)^3 \mathcal{T}e^2 - \frac{1}{3} \zeta(2) \zeta(3) \mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,1,1,2,1} = \left(\frac{118}{105} \zeta(2)^3 - \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + 4 \zeta(5) \mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,1,2,1,1} = \left(-\frac{31}{35} \zeta(2)^3 + \frac{1}{2} \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(-6 \zeta(5) + \frac{1}{2} \zeta(2) \zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{3,2,1,1,1} = \left(-2 \zeta(3)^2 + \frac{149}{420} \zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(4 \zeta(5) - \frac{4}{3} \zeta(2) \zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{4,1,1,1,1} = \left(\frac{5}{6} \zeta(3)^2 - \frac{17}{140} \zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(-\zeta(5) + \frac{5}{6} \zeta(2) \zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 + \frac{1}{40} \zeta(2)^2 \mathcal{T}e^4 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,1,1,3} = \left(-\frac{3}{56} \zeta(2)^3 + \frac{1}{3} \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 + \left(\frac{1}{5} \zeta(5) - \frac{1}{6} \zeta(2) \zeta(3) \right) \mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,1,2,2} = \left(\frac{83}{140} \zeta(2)^3 - \frac{2}{3} \zeta(3)^2 \right) \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,1,3,1} = -\frac{1}{40} \zeta(2)^3 \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,2,1,2} = -\frac{59}{35} \zeta(2)^3 \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,2,2,1} = \frac{2}{3} \zeta(3)^2 \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,1,3,1,1} = \left(-\frac{1}{3} \zeta(3)^2 - \frac{1}{20} \zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 - \frac{1}{6} \zeta(2) \zeta(3) \mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,2,1,1,2} = \frac{66}{35} \zeta(2)^3 \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,2,1,2,1} = \frac{3}{5} \zeta(2)^3 \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,2,2,1,1} = -\frac{7}{10} \zeta(2)^3 \mathcal{T}e^2 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,1,3,1,1,1} = \left(-\frac{1}{3} \zeta(3)^2 - \frac{1}{20} \zeta(2)^3 \right) \mathcal{T}e^2 + \frac{1}{6} \zeta(2) \zeta(3) \mathcal{T}e^3 .$$

$$\mathcal{T}e^{1,2,1,1,1,2} = -\frac{8}{7} \zeta(2)^3 \mathcal{T}e^2 .$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}e^{1,2,1,1,2,1} &= 0 . \\
\mathcal{T}e^{1,2,1,2,1,1} &= \frac{3}{5}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{1,2,2,1,1,1} &= \frac{2}{3}\zeta(3)^2\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{1,3,1,1,1,1} &= -\frac{1}{40}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{2,1,1,1,2,1} &= -\frac{8}{7}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{2,1,1,2,1,1} &= \frac{66}{35}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{2,1,2,1,1,1} &= -\frac{59}{35}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{2,2,1,1,1,1} &= \left(\frac{83}{140}\zeta(2)^3 - \frac{2}{3}\zeta(3)^2\right)\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{3,1,1,1,1,1} &= \left(-\frac{3}{56}\zeta(2)^3 + \frac{1}{3}\zeta(3)^2\right)\mathcal{T}e^2 + \left(-\frac{1}{5}\zeta(5) + \frac{1}{6}\zeta(2)\zeta(3)\right)\mathcal{T}e^3 . \\
\mathcal{T}e^{1,1,1,1,1,2} &= \left(-\frac{1}{112}\zeta(2)^3 + \frac{1}{18}\zeta(3)^2\right)\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{1,1,1,1,2,1} &= 0 . \\
\mathcal{T}e^{1,1,1,1,2,1,1} &= -\frac{1}{80}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{1,1,1,2,1,1,1} &= -\frac{1}{9}\zeta(3)^2\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{1,1,2,1,1,1,1} &= -\frac{1}{80}\zeta(2)^3\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{1,2,1,1,1,1,1} &= 0 . \\
\mathcal{T}e^{2,1,1,1,1,1,1} &= \left(-\frac{1}{112}\zeta(2)^3 + \frac{1}{18}\zeta(3)^2\right)\mathcal{T}e^2 . \\
\mathcal{T}e^{1,1,1,1,1,1,1,1} &= \frac{9}{280}\zeta(2)^4 .
\end{aligned}$$

4 Exemples de valeurs génériques de multitangentes.

$$\begin{cases} \mathcal{T}e^{1[2k]} = \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k)!} . \\ \mathcal{T}e^{1[2k+1]} = \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k+1)!} \mathcal{T}e^1 . \end{cases}$$

$$\mathcal{T}e^{2[k]} = \frac{2^{2k-1} \pi^{2(k-1)}}{(2k)!} \mathcal{T}e^2 .$$

$$\begin{cases} \mathcal{T}e^{3[2k]} = \frac{3(-1)^k 2^{6k-2} \pi^{6k-2}}{(6k)!} \mathcal{T}e^2 . \\ \mathcal{T}e^{3[2k+1]} = \frac{3(-1)^k 2^{6k+1} \pi^{6k}}{(6k+3)!} \mathcal{T}e^3 . \end{cases}$$

$$\mathcal{T}e^{4[k]} = \frac{2^{4k-1} \pi^{4(k-1)}}{(4k)!} \left((2(-1)^k + 2^{2k-1}) (\mathcal{T}e^2)^2 - 3(-1)^k \mathcal{T}e^4 \right) .$$

$$\begin{cases} \mathcal{T}e^{5[2k]} = \frac{5}{16} \frac{(-1)^k 2^{9k} \pi^{10k-4}}{(10k)!} \left((2^k \cdot 3 + \alpha^k + \bar{\alpha}^k) (\mathcal{T}e^2)^2 - 2^{k+1} \cdot 3 \mathcal{T}e^4 \right) . \\ \mathcal{T}e^{5[2k+1]} = \frac{5(-1)^k 2^{9k} \pi^{10k}}{(10k+5)!} \left(2^{k+3} \cdot 3 \mathcal{T}e^5 + \left(11(\alpha^k + \bar{\alpha}^k - 2^{k+1}) + 5\sqrt{5}(\alpha^k - \bar{\alpha}^k) \right) \mathcal{T}e^1 (\mathcal{T}e^2)^2 \right) . \end{cases}$$

$$\text{où } \begin{cases} \alpha = 123 + 5\sqrt{5} . \\ \bar{\alpha} = 123 - 5\sqrt{5} . \end{cases}$$

$$\mathcal{T}e^{6[k]} = \frac{2^{6k-5} \pi^{6(k-1)}}{(6k)!} \left(360 \mathcal{T}e^6 - 18 (26 + (-27)^k) \mathcal{T}e^2 \mathcal{T}e^4 - (30 - 6(-27)^k - 3 \cdot 2^k) (\mathcal{T}e^2)^3 \right) .$$

Rappels des principales notations

On se propose ici de rappeler les principales notations utilisées tout au long de ce travail. Pour la première partie, elle concerne essentiellement les notations introduites pour le calcul des invariants holomorphes ; pour la seconde partie, les rappels de notations concernent les principaux alphabets utilisés, les principaux moules et bimoules utilisés (analytiques et formels), les notations concernant la réduction en monotangentes ainsi que les notations syntaxique mises en oeuvre pour montrer par le calcul l'absence de composante $\mathcal{T}e^1$ dans ces relations.

Pour les autres notations, le lecteur est invité à se référer à l'index des notations indiquant la page où la notation correspondante est introduite.

1 Autours du calcul des invariants holomorphes.

1.1 Alphabets.

Nous considérons les deux alphabets suivant :

$$\mathbb{N}_3 = \{n \in \mathbb{N} ; n \geq 3\} \quad , \quad \text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\} .$$

1.2 Séquences.

Une séquence de $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ est notée par une lettre majuscule grasse et soulignée. Ses composantes sont notées en lettres minuscules grasses soulignées et numérotées en exposant. Ainsi, pour $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, on écrit : $\underline{\mathbf{S}} = (\underline{\mathbf{s}}^1; \cdots; \underline{\mathbf{s}}^r)$.

Voici d'autres notations relatives aux séquences, où $\underline{\mathbf{S}}$ est notée comme précédemment.

1. Lorsque $\underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3)$ ou $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, $l(\underline{\mathbf{s}})$ et $l(\underline{\mathbf{S}})$ désignent les longueurs de $\underline{\mathbf{s}}$ et $\underline{\mathbf{S}}$ respectivement.
2. Le poids de $\underline{\mathbf{s}} = (s_1; \cdots; s_r) \in \text{seq}(\mathbb{N}_3)$ est $\|\underline{\mathbf{s}}\| = s_1 + \cdots + s_r$.
3. Le poids de $\underline{\mathbf{S}} = (\underline{\mathbf{s}}^1; \cdots; \underline{\mathbf{s}}^r) \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ est $\|\|\underline{\mathbf{S}}\|\| = \sum_{k=1}^{l(\underline{\mathbf{S}})} \|\underline{\mathbf{s}}^k\| - 1$.

1.3 Notations intermédiaires.

Avant d'en arriver à définir les moules utiles, voici quelques notations intermédiaires :

1. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice $\underline{\mathbf{i}} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{N})$ triangulaire inférieure :

$$\text{diag}_p^{\underline{\mathbf{i}}} = \begin{cases} \sum_{k=p+1}^r i_{k,k-p} & , \text{ si } 0 \leq p \leq r-1 . \\ 0 & , \text{ si } p = r . \end{cases}$$

2. Pour toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, de longueur r :

$$\text{triangle}(\underline{\mathbf{S}}) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ i_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ i_{r,1} & \cdots & i_{r,r-1} & 0 \end{array} \right) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{N}) ; \forall k \in \llbracket 2 ; r \rrbracket , \sum_{l=1}^{k-1} i_{k,l} = l(\underline{\mathbf{s}}^k) \right\} .$$

3. Pour toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ et pour toute matrice $\mathbf{i} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{N})$ triangulaire inférieure :

$$\sigma(\underline{\mathbf{S}}; \mathbf{i}) = \left(\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_{\mathbf{s}_k}^{\mathbf{i}} \right)_{1 \leq k \leq r} .$$

4. Pour toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ et pour toute matrice $\mathbf{i} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{N})$ triangulaire inférieure :

$$\mathcal{B}^{\underline{\mathbf{S}}; \mathbf{i}} = \prod_{k=1}^{l(\underline{\mathbf{S}})} \frac{(\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) + \text{diag}_{\mathbf{s}_k}^{\mathbf{i}} - 1)!}{\left(\prod_{p=k+1}^r i_{p,p-k} ! \right) (\|\underline{\mathbf{s}}^k\| - l(\underline{\mathbf{s}}^k) - 1)!} .$$

Remarquons que les matrices triangulaires inférieures sont notées comme des séquences. Il y a deux raisons à cela :

1. Ces matrices sont apparues comme des indices de sommations, comme c'est le cas pour les séquences dans une contraction moule/comoule.
2. Ces matrices agissent à travers la quantité diag_k^\bullet qui se comporte exactement comme la séquence $(\text{diag}_1^{\underline{\mathbf{s}}}; \dots; \text{diag}_r^{\underline{\mathbf{s}}})$ lorsque $\underline{\mathbf{s}}$ est de longueur r .

1.4 Moules

Il s'agit de moules, à valeurs respectivement dans $\{+1 ; -1\}$ et $\mathcal{H}(\mathbb{C} - \mathbb{Z})$, définis sur $\text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$ par :

$$\forall \underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) , \text{sg}^{\underline{\mathbf{S}}} = (-1)^{l(\underline{\mathbf{s}}^2) + \dots + l(\underline{\mathbf{s}}^{l(\underline{\mathbf{S}})})} .$$

$$\forall \underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\}) , \tau^{\underline{\mathbf{S}}} = \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\underline{\mathbf{S}})} \mathcal{B}^{\underline{\mathbf{S}}; \mathbf{i}} \mathcal{T}e^{\sigma(\underline{\mathbf{S}}; \mathbf{i})} .$$

Nous considérons aussi des moules qui sont les coefficients de Fourier des moules 1-périodiques $\mathcal{T}e^\bullet$ et τ^\bullet :

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et toute séquence $\underline{\mathbf{s}} \in \mathcal{S}^*$:

$$\widehat{\mathcal{T}}_n^{\underline{\mathbf{s}}} = 2i\pi \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=2}^{s_j} \frac{(-2in\pi)^{k-1}}{(k-1)!} \mathcal{Z}_{j, s_j - k}^{\underline{\mathbf{s}}} \right) .$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$:

$$\widehat{\tau}_n^{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{cases} \sum_{\mathbf{i} \in \text{triangle}(\underline{\mathbf{S}})} \mathcal{B}^{\underline{\mathbf{S}}, \mathbf{i}} \widehat{\mathcal{T}}_n^{\sigma(\underline{\mathbf{S}}; \mathbf{i})} & , \text{ si } l(\underline{\mathbf{S}}^1) = 1. \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

1.5 Comoules

On définit enfin deux comoules par :

1. Pour toute séquence $\underline{\mathbf{s}} \in \text{seq}(\mathbb{N}_3)$, de longueur r : $A_{\underline{\mathbf{s}}} = a_{s_1} \cdots a_{s_r}$.
2. Pour toute séquence $\underline{\mathbf{S}} \in \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{N}_3) - \{\emptyset\})$, de longueur r : $\mathcal{A}_{\underline{\mathbf{S}}} = A_{\underline{\mathbf{S}}^1} \cdots A_{\underline{\mathbf{S}}^r}$.

2 Autours des multitangentes.

2.1 Les principaux alphabets utilisés.

Quatre alphabets interviendront fréquemment :

$$\mathcal{S}_+^* = \{\underline{\mathbf{s}} \in (\mathbb{N}^*)^* ; s_1 \geq 2\} \quad , \quad \mathcal{S}_-^* = \{\underline{\mathbf{s}} \in (\mathbb{N}^*)^* ; s_r \geq 2\} .$$

$$\mathcal{S}^* = \{\underline{\mathbf{s}} \in (\mathbb{N}^*)^* ; s_1 \geq 2 \text{ et } s_{l(\underline{\mathbf{s}})} \geq 2\} .$$

$$\mathcal{S}_{\geq 2}^* = \{\underline{\mathbf{s}} \in (\mathbb{N}^*)^* ; \forall i \in \llbracket 1 ; l(\underline{\mathbf{s}}) \rrbracket , s_i \geq 2\} = (\mathbb{N}^* - \{1\})^* .$$

2.2 Les moules, bimoules et moules formels liés aux multizêtas.

Les moules des multizêtas, des multizêtas de Hurwitz et des multitangentes admettent chacun une version colorée. Ceux des multizêtas de Hurwitz et des multitangentes, qui sont des fonctions, admettent aussi une version formelle (non colorée et colorée .

Les moules et bimoules analytiques sont notés avec une majuscule cursive tandis que les moules formels sont systématiquement notés avec une majuscule droite.

Nous rappelons ces quatre types de définition, ainsi que leurs différentes écritures.

2.2.1 Les moules.

Les multizêtas. Les multizêtas admettent deux types de représentations, une sous forme de somme, l'autre sous forme d'intégrales itérées. En voici les versions utilisées :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\mathbf{s}} \in \mathcal{S}_+^* , \mathcal{Z}e^{\underline{\mathbf{s}}} &= \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_r^{s_r}} \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^r (s_i - 1)!} \int_{0 < u_1 < \dots < u_r < +\infty} \frac{u_1^{s_1-1} (u_2 - u_1)^{s_2-1} \cdots (u_r - u_{r-1})^{s_r}}{(e^{u_1} - 1) \cdots (e^{u_r} - 1)} du_1 \cdots du_r . \end{aligned}$$

On définit aussi le moule des multizêtas du côté des négatifs par :

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S}_-^* , \mathcal{Z}e_-^{s_1, \dots, s_r} = \sum_{p_r < \dots < p_1 < 0} \frac{1}{p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r}} .$$

Les moules $\mathcal{Z}e^\bullet$ et $\mathcal{Z}e_-^\bullet$ sont régularisés en posant $\mathcal{Z}e^1 = \mathcal{Z}e_-^1 = 0$. Il sont aussi liés entre-eux par une relation de pseudo-parité :

$$\forall \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^* , \mathcal{Z}e_-^{\underline{s}} = (-1)^{\|\underline{s}\|} \mathcal{Z}e_+^{\overleftarrow{\underline{s}}} .$$

Les multizêtas de Hurwitz. Les multizêtas de Hurwitz sont définis comme étant une translation des multizêtas. Pour toute séquence $\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*$, on pose :

$$\forall z \in \mathbb{C} - (-\mathbb{N}^*) , \mathcal{H}e_+^{\underline{s}}(z) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \underline{s} = \emptyset . \\ \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right) & , \text{ si } \underline{s} = (1) . \\ \sum_{0 < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{(n_1+z)^{s_1} \dots (n_r+z)^{s_r}} & , \text{ si } \underline{s} \in \mathcal{S}_+^* . \end{cases}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{N}^* , \mathcal{H}e_-^{\underline{s}}(z) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \underline{s} = \emptyset . \\ \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-z} \right) & , \text{ si } \underline{s} = (1) . \\ \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < 0} \frac{1}{(n_1+z)^{s_1} \dots (n_r+z)^{s_r}} & , \text{ si } \underline{s} \in \mathcal{S}_-^* . \end{cases}$$

Ces deux moules sont liés entre-eux par la relation de pseudo-parité :

$$\forall \underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^* , \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{N}^* , \mathcal{H}e_-^{\underline{s}}(z) = (-1)^{\|\underline{s}\|} \mathcal{H}e_+^{\overleftarrow{\underline{s}}}(-z) .$$

Les multitangentes. La définition des multitangentes est :

$$\forall \underline{s} \in \mathcal{S}^* , \forall z \in \mathbb{C} - (-\mathbb{N}^*) , \mathcal{T}e^{\underline{s}}(z) = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{1}{(n_1+z)^{s_1} \dots (n_r+z)^{s_r}} .$$

Pour des séquences \underline{s} de longueur 1, la somme précédente se réduit à une somme simple ; on retrouve les séries d'Eisenstein :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* , \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z} , \varepsilon_k(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+m)^k} .$$

Les multitangentes s'écrivent naturellement à l'aide des multizêtas de Hurwitz :

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z} , \mathcal{T}e^\bullet(z) = \mathcal{H}e_+^\bullet(z) \times \mathcal{C}e^\bullet(z) \times \mathcal{H}e_-^\bullet(z) ,$$

où $\mathcal{C}e^\bullet(z)$ est un moule symétriel jouant le rôle d'une correction. Il est défini par :

$$\mathcal{C}e^\mathbf{s}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{s} = \emptyset . \\ \frac{1}{z^{\mathbf{s}}} & \text{si } l(\mathbf{s}) = 1 . \\ 0 & \text{si } l(\mathbf{s}) > 1 . \end{cases}$$

2.2.2 Bimoules.

Puisqu'il s'agit de bimoules définis sur $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)^*$, fixons $\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{smallmatrix}\right) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)^*$. Pour simplifier les écritures, nous noterons systématiquement $e_k = e^{-2i\pi\varepsilon_k}$ pour $\varepsilon_k \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Les multizêtas.

$$\mathcal{Z}e^{\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{smallmatrix}\right)} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{smallmatrix}\right) = \emptyset . \\ 0 & , \text{ si } \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \\ \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{e_1^{n_1} \dots e_r^{n_r}}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

Les multizêtas de Hurwitz.

$$\forall z \in \mathbb{C} - (-\mathbb{N}^*) , \mathcal{H}e_+^{\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{smallmatrix}\right)}(z) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{smallmatrix}\right) = \emptyset . \\ \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right) & , \text{ si } \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \\ \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{e_1^{n_1} \dots e_r^{n_r}}{(n_1+z)^{s_1} \dots (n_r+z)^{s_r}} & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{N}^* , \mathcal{H}e_-^{\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{smallmatrix}\right)}(z) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{smallmatrix}\right) = \emptyset . \\ \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-z} \right) & , \text{ si } \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \\ \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1} \frac{e_1^{n_1} \dots e_r^{n_r}}{(n_1+z)^{s_1} \dots (n_r+z)^{s_r}} & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

Les multitangentes. Pour faire court, le bimoule $\mathcal{T}e^\bullet$ peut être défini par factorisation moulienne :

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z} , \mathcal{T}e^\bullet(z) = \mathcal{H}e_+^\bullet(z) \times \mathcal{C}e^\bullet(z) \times \mathcal{H}e_-^\bullet(z) .$$

Le bimoule $\mathcal{C}e^\bullet(z)$ est alors défini par :

$$\forall \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{smallmatrix}\right) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)^* , \mathcal{C}e^{\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{smallmatrix}\right)}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{\varepsilon} = \underline{\mathbf{s}} = \emptyset . \\ \frac{1}{z^{\mathbf{s}}} & \text{si } l(\underline{\varepsilon}) = l(\mathbf{s}) = 1 . \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

On dispose donc d'une expression : pour toute bi-séquence $\begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{pmatrix} \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)^*$ telles que $(\varepsilon_1; s_1) \neq (0; 1)$ et $(\varepsilon_r; s_r) \neq (0; 1)$:

$$\mathcal{T}e_{\begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{pmatrix}}(z) = \sum_{-\infty < n_r < \dots < n_1 < +\infty} \frac{e_1^{n_1} \dots e_r^{n_r}}{(n_1 + z)^{s_1} \dots (n_r + z)^{s_r}} .$$

2.2.3 Les moules et bimoules formels.

Les multizêtas de Hurwitz. Pour toute bi-séquence $\begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{pmatrix} \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)^*$, on pose :

$$\text{He}_+^{\begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{pmatrix}}(\mathbf{X}) = \sum_{k \geq 0} \sum_{k_1 + \dots + k_r = k} \left[\prod_{i=1}^r \binom{s_i + k_i - 1}{k_i} \right] \mathcal{Z}e_{\begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1 + k_1, \dots, s_r + k_r \end{pmatrix}}(-\mathbf{X})^k ,$$

$$\text{He}_-^{\begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{pmatrix}}(\mathbf{X}) = \sum_{k \geq 0} \sum_{k_1 + \dots + k_r = k} \left[\prod_{i=1}^r \binom{s_i + k_i - 1}{k_i} \right] \mathcal{Z}e_{\begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1 + k_1, \dots, s_r + k_r \end{pmatrix}}(-\mathbf{X})^k .$$

Les multitangentes. Le bimoule des multitangentes formelles est encore défini par la trifactorisation :

$$\text{Te}^\bullet(\mathbf{X}) = \text{He}_+^\bullet(\mathbf{X}) \times \text{Ce}^\bullet(\mathbf{X}) \times \text{He}_-^\bullet(\mathbf{X}) .$$

Ici, la correction est définie par :

$$\forall \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{pmatrix} \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)^* , \text{Ce}^{\begin{pmatrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \\ s_1, \dots, s_r \end{pmatrix}}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } l(\underline{\mathbf{s}}) = 0 . \\ \mathbf{X}^{-s} & , \text{ si } l(\underline{\mathbf{s}}) = 1 . \\ 0 & , \text{ si } l(\underline{\mathbf{s}}) \geq 2 . \end{cases}$$

2.3 La réduction en monotangentes.

$${}^i D_{\underline{\mathbf{k}}}^{\underline{\mathbf{s}}}(\underline{\mathbf{a}}) = \left(\prod_{l=1}^{i-1} (a_i - a_l)^{s_l + k_l} \right) \left(\prod_{l=i+1}^r (a_l - a_i)^{s_l + k_l} \right) .$$

$${}^i E_{\underline{\mathbf{k}}}^{\underline{\mathbf{s}}} = \left(\prod_{l=1}^{i-1} (-1)^{k_l} \right) \left(\prod_{l=i+1}^r (-1)^{s_l} \right) \left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^r \binom{s_l + k_l - 1}{s_l - 1} \right) .$$

$${}^k \mathcal{R}_{\underline{\sigma}}^{\underline{\mathbf{s}}} = \sum_{\substack{i \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ k \leq s_i}} \sum_{\substack{k_j \geq 0, j \neq i \\ \sum_{j \in \llbracket 1; r \rrbracket - \{i\}} k_j = s_i - k}} \left\langle \text{she} \left((\underline{\mathbf{s}} + \underline{\mathbf{k}})^{\leq i-1}; \overleftarrow{(\underline{\mathbf{s}} + \underline{\mathbf{k}})^{\geq i+1}} \right) \mid \underline{\sigma} \right\rangle {}^i E_{\underline{\mathbf{k}}}^{\underline{\mathbf{s}}} .$$

2.4 Autour des séries génératrices des multizêtas et des multitangentes.

Série génératrice des multizêtas. Le moule μ^\bullet est défini par : $\mu^{n_1, \dots, n_r} = \frac{1}{r_1! \dots r_n!}$, où la séquence $\mathbf{n} = (n_1; \dots; n_r) \in (\mathbb{N}^*)^*$ atteint r_1 fois sa valeur la plus élevée, r_2 fois la valeur suivante, etc.

Celui-ci intervient dans l'expression de la correction $coZig_k^\bullet$ de la série génératrice Zig^\bullet des multizêtas, son terme dominant est donné par le moule $doZig_k^\bullet$:

$$coZig_k \binom{u_1, \dots, u_r}{V_1, \dots, V_r} = \begin{cases} (-1)^r \sum_{1 \leq n_r \leq \dots \leq n_1 < k} \frac{\mu^{n_1, \dots, n_r}}{n_1 \dots n_r} & , \text{ si } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} . \\ 0 & , \text{ si } \mathbf{u} = \mathbf{0} . \end{cases}$$

$$doZig_k \binom{u_1, \dots, u_r}{V_1, \dots, V_r} = \begin{cases} \sum_{1 \leq n_r < \dots < n_1 < k} \frac{e_1^{n_1} \dots e_r^{n_r}}{(n_1 - V_1) \dots (n_r - V_r)} & , \text{ si } r \neq 0 . \\ 1 & , \text{ si } r = 0 . \end{cases}$$

Alors :

$$Zig^\bullet = \lim_{n \rightarrow +\infty} (coZig_n^\bullet \times doZig_n^\bullet) .$$

On dispose toujours d'une relation de pseudo-parité pour exprimer Zig_-^\bullet :

$$Zig_- \binom{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}{V_1, \dots, V_r} = (-1)^r Zig \binom{\varepsilon_r, \dots, \varepsilon_1}{-V_r, \dots, -V_1} .$$

Série génératrice des multizêtas de Hurwitz. Les séries génératrices $Hig_+^\bullet(X)$ et $Hig_-^\bullet(X)$ traduisent bien le fait que les multizêtas de Hurwitz sont une translation des multizêtas, puisque :

$$Hig_+^{Y_1, \dots, Y_r}(X) = Zig^{Y_1 - X, \dots, Y_r - X} .$$

$$Hig_-^{Y_1, \dots, Y_r}(X) = Zig_-^{Y_1 - X, \dots, Y_r - X} .$$

On note alors :

$$Zig^{Y_1, \dots, Y_r}(X) = Zig^{Y_1 - X, \dots, Y_r - X} .$$

$$Zig_-^{Y_1, \dots, Y_r}(X) = Zig_-^{Y_1 - X, \dots, Y_r - X} .$$

Série génératrice des multitangentes.

Première expression. La série génératrice de la correction Ce^\bullet vaut :

$$\begin{cases} Cig^0(X) = 1 . \\ Cig^Y(X) = \frac{1}{X - Y} . \\ Cig^{Y_1, \dots, Y_r}(X) = 0 , \quad \text{si } r \geq 2 . \end{cases}$$

Alors, dans $\mathbb{C}((X))[[Y_r]_{r \in \mathbb{N}^*}]$, on a :

$$Tig^\bullet(X) = Zig^\bullet(X) \times Cig^\bullet(X) \times Zig_-(X) .$$

Seconde expression. Voici la définition de trois moules :

$$\begin{cases} Qig^0 = 0 . \\ Qig\left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ V_1 \end{smallmatrix}\right) = -Te\left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)(V_1) . \\ Qig\left(\begin{smallmatrix} u_1, \dots, u_r \\ V_1, \dots, V_r \end{smallmatrix}\right) = 0 , \quad \text{si } r \geq 2 . \end{cases}$$

$$\delta\left(\begin{smallmatrix} u_1, \dots, u_r \\ V_1, \dots, V_r \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } r = 0 . \\ \frac{(i\pi)^r}{r!} \delta(u_1) \cdots \delta(u_r) & , \text{ si } r \text{ est pair et non nul.} \\ 0 & , \text{ si } r \text{ est impair.} \end{cases}$$

$$Qig\left(\begin{smallmatrix} u_1, \dots, u_r \\ V_1, \dots, V_r \end{smallmatrix}\right)(X) = Qig\left(\begin{smallmatrix} u_1, \dots, u_r \\ V_1 - X, \dots, V_r - X \end{smallmatrix}\right) .$$

Alors :

$$Tig^\bullet(X) = \delta^\bullet + Zig^{\bullet \downarrow} \times Qig^{\lceil \bullet \rceil}(X) \times Zig_-^{\lceil \bullet \rceil} .$$

Ces deux expressions sont valables d'un point de vue formel, mais aussi analytique : il suffit de remplacer les majuscules droites par des majuscules cursives pour retrouver les définitions des objets en jeux.

2.5 Des algèbres.

On note :

$$\mathcal{MZV} = Vect_{\mathbb{Q}} \left((\mathcal{Z}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*} \right) , \quad \mathcal{MZV}_{CV} = Vect_{\mathbb{Q}} \left((\mathcal{Z}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}_+^*} \right) .$$

$$\mathcal{MTGF} = Vect_{\mathbb{Q}} \left((\mathcal{T}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in (\mathbb{N}^*)^*} \right) , \quad \mathcal{MTGF}_{CV} = Vect_{\mathbb{Q}} \left((\mathcal{T}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in \mathcal{S}} \right) .$$

$$\mathcal{MTGF}_2 = Vect_{\mathbb{Q}} \left((\mathcal{T}e^{\underline{s}})_{\underline{s} \in (\mathbb{N}^* - \{1\})^*} \right) , \quad \mathcal{MTGF}_{2,p} = Vect_{\mathbb{Q}} \left((\mathcal{T}e^{\underline{s}})_{\substack{\underline{s} \in (\mathbb{N}^* - \{1\})^* \\ \|\underline{s}\| = p}} \right) .$$

Bibliographie

- [1] D. H. BAYLEY : *Integer Relation Detection*, Computing in Science and Engineering, vol. 2, n°1, 2000, Jan-Feb, p. 24-28.
- [2] J. BORWEIN, D. BRADLEY, D. J. BROADHURST, P. LISONĚK : *Combinatorial Aspects of Multiple Zeta Values*, Electronic Journal of Combinatorial, **5**, 1998, n°1, #R38.
- [3] J. BORWEIN, D. BRADLEY, D. J. BROADHURST, P. LISONĚK : *Special Values of Multiple Polylogarithms*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 353, 2001, **3**, p. 907-941.
- [4] J. BORWEIN, P. LISONĚK : *Applications of Integer Relation Algorithms*, Discrete Mathematics, vol. **217**, n°1 – 3, p. 65-82, 2000.
- [5] D. J. BROADHURST : *Conjectured Enumeration of irreducible Multiple Zeta Values, from Knots and Feynman Diagrams*, preprint, Physics Dept., Open University Milton Keynes, MK76AA, UK, Nov. 1996.
- [6] D. J. BROADHURST AND D. KREIMER : *Association of Multiple Zeta Values with Positive Knots via Feynman Diagrams up to 9 Loops*, Physics Letters, vol. **B383**, (1997), n°3-4 p. 403-412.
- [7] F. BROWN : *Multiple zeta values and periods of moduli space $\mathcal{M}^{0;n}$* , Ann. Sci. Ecole Normale Supérieure 42 (2009), p. 371-489.
- [8] F. BROWN : *Mixte Tate Motives over \mathbb{Z}* , à paraître dans Annals of Mathematics, 175 (2012) .
- [9] B. CANDELPERGHER : *Une introduction à la résurgence*, Gazette des Mathématiciens, (Soc. math. France), n°42, p. 36-64, 1889.
- [10] B. CANDELPERGHER, J.-C. NOSMAS, F. PHAM : *Approche de la résurgence*, Actualités Math., Hermann, Paris, 1993.
- [11] K. T. CHEN : *Iterated Path Integrals*, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), p. 831-879.
- [12] H. COHEN : *A Course in Computational Algebraic Number Theory*, Graduate Texts in Math., 138, Springer, 1993.
- [13] R. CRANDALL : *Fast Evaluation Of Multiple Zeta Sums*, Mathematics of Computation, Volume 67, Number 223, July 1998, Pages 1163-1172.
- [14] : *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. Ecole Normale Supérieure, 38 (2005), p. 1-56.
- [15] J. ECALLE : *Les fonctions résurgentes*, Publications mathématiques d'Orsay [vol. 1 : 81-05, vol. 2 : 81-06, vol. 3 : 85-05], 1981, 1985.
- [16] J. ECALLE : *Singularités non abordables par la géométrie*, Annales de l'institut Fourier, 42 (1992), n°1 – 2, p. 73-164.

- [17] J. ECALLE : *A Tale of Three Structures : the Arithmetics of Multizetas, the Analysis of Singularities, the Lie Algebra ARI*, in Differential Equations and the Stokes Phenomenon, B. L. J. Braaksma, G. K. Immink, M van der Put, J. Top Eds., World Scient. 2002, vol. 17, p. 89-146.
- [18] J. ECALLE : *ARI/GARI, la dimorphie et l'arithmétique des multizêtas, un premier bilan*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, **15** (2003), n°2, p. 411-478.
- [19] J. ECALLE : *Multizetas, Perinomial Numbers, Arithmetical Dimorphy, and ARI/GARI*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Vol. **13**, n°4, 2004, p. 683 - 708.
- [20] J. ECALLE : *The Flexion Structure and Dimorphy : Flexion Units, Singulators, Generators, and the Enumeration of Multizeta Irreducibles*, in "Asymptotic in dynamics, geometry and PDEs ; generalized Borel summation", Eds. O. Costin, F. Fauvet, F. Menous, D. Sauzin, Publications of the Scuola Normale Superiore, Pisa, 2011, Volume 12, p. 201-218.
- [21] J. ECALLE : *Cinq applications des fonctions résurgentes*, Publications mathématiques d'Orsay 84-62, 1984.
- [22] J. ECALLE : *Twisted Resurgence Monomials and Canonical-Spherical Synthesis*, in "Analysable Functions and Application, Internationnal Workshop on Analysable Functions", Eds. O. Costin, M. D. Kruskal, A. Maintre, A.M.S. publication, 2005 .
- [23] P. FLAJOLET, R. SEDGEWICK : *Analytic combinatorics*, Cambridge, 2008.
- [24] F. G. M. EISENSTEIN : *Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind, und der mit ihnen zusammenhängenden Doppelreihen (als eine neue Begründungsweise der Theorie der elliptischen Functionen, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Analogie zu den Kreisfunctionen)*, Math. Werke **1**, p. 357-478.
- [25] L. EULER : *Meditationes circa singulare serierum genus*, Novi Comm. Acad. Sci. Petropol., **20** (1775), p. 140-186, Reprinted in "Opera Omnia", Ser.1, Vol. 15, B. G. Teubner, Berlin, 1927, p. 217-267.
- [26] S. FISHLER, T. RIVOAL : *Approximants de Padé et séries hypergéométriques équilibrées*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 82 n°10 (203), p. 1369-1394.
- [27] I. M. GESSEL : *A combinatorial proof of the multivariable Lagrange inversion formula*, J. of Comb. Theory, serie A, 45, (1987), p. 178-195.
- [28] Y. IHARA : *The Galois representation arising from $P_1 \times \mathbb{A}^1$ and Tate twists of even degree*, Galois groups over \mathbb{Q} (Berkeley, CA, 1987), Springer, New York, 1989, p. 299-313.
- [29] Y. IHARA : *Braids, Galois groups, and some arithmetic functions*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990) (Tokyo), Math. Soc. Japan, 1991, p. 99-120.
- [30] Y. IHARA, M. MATSUMOTO : *On Galois actions on profinite completions of braid groups*, Recent developments in the inverse Galois problem (Seattle, WA, 1993), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, p. 173-200.
- [31] D. KREIMER : *Knots and feynman diagrams*, Cambridge University Press.

- [32] A. K. LENSTRA, H. W. LENSTRA, L. LOVÁSZ : *Factoring Polynomials with Rational Coefficients*, Math. Ann. **261** (1982), n°4, p. 515-534.
- [33] B. MALGRANGE : *Travaux d'Ecalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques*, Séminaire N. Bourbaki, 1981-1982, exp. n°582, Astérisque 92-93, p. 59-73.
- [34] A. I. MARKUSHEVICH : *Theory of Functions of a Complex Variable*, vol. 3 .
- [35] J. MARTINET, J.-P. RAMIS : *Classification analytique des équations différentielles non-linéaires du premier ordre*, Publ. Math. I.H.E.S., 55 (1982), p. 64-164.
- [36] J. MARTINET, J.-P. RAMIS : *Classification analytique des équations différentielles non-linéaires résonnantes du premier ordre*, Ann. Sci. Ecole Normale Supérieure, 16 (1983), p. 571-621.
- [37] M. MATSUMOTO : *On the Galois image in the derivation algebra of P^1 of the projective line minus three points*, Recent developments in the inverse Galois problem (Seattle, WA, 1993), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, p. 201-213.
- [38] J. MILNOR : *Dynamics in One Complex Variable*, Princeton University Press, Annals of Mathematics Studies, 2006, 160, 303 p.
- [39] I. NIVEN : *Formal Power Series*, The American Mathematical Monthly, Vol. 76, n°8 (Oct., 1969), pp. 871-889.
- [40] M. PETITOT, ... : *Base de Gröebner des multizêtas*, disponible sur le net
- [41] R. REMMERT : *Theory of Complex Functions*, Graduate Texts in Math., 122, Springer, 1990.
- [42] C. REUTENAUER : *Free Lie Algebras*, London Math. Soc. Monographs, News series **7**, Oxford Sciences Publications, Oxford, 1993.
- [43] D. SAUZIN : *Mould Expansion for the Saddle-node and Resurgence Monomials*, in "Renormalization and Galois theories", A. Connes, F. Fauvet, J. P. Ramis. Eds., IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, 15, European Mathematical Society, Zürich, 2009, pp. 83-163.
- [44] D. SAUZIN : *Resurgent functions and splitting problems*, RIMS Kokyuroku **1493**, 2005, p. 48-117
- [45] H. H. SCHAEFER : *Topological Vector Spaces*, vol. 3, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, NY, USA, 1971.
- [46] J. P. SERRE : *Cours d'Arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.
- [47] C. L. SIEGEL : *Iteration of Analytic Functions*, Ann. Math. 43, 607 - 612 (1942) .
- [48] T. TERASOMA : *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. 149, n°2 (2002), p. 339-369.
- [49] M. WALDSCHMIDT : *Valeurs zêta multiples. Une introduction*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, **12** (2000), p. 581-592.
- [50] A. WEIL : *Elliptic Functions According to Eisenstein and Kronecker*, Ergebnisse der Mathematik 88, Springer-Verlag (1976), Heidelberg.
- [51] J.-C. YOCCOZ : *Petits diviseurs en dimension 1*, Astérisques 231, 1995.
- [52] J.-C. YOCCOZ, R. PEREZ-MARCO : *Germes de feuilletages holomorphes à holonomie prescrite*, Astérisque 222, 1994, p. 345-371.

- [53] D. ZAGIER : *Values of Zeta Functions and Their Applications*, in “First European Congress of Mathematics”, Vol. 2, Paris, 1992, Prog. Math., **120**, Birkhäuser, Basel-Boston, 1994, p 497-512.
- [54] V. V. ZUDILIN : *Algebraic relations for multiple zeta values*, Russian Mathematical Surveys, **58**, 2003, p. 1-29.

Index des notations

Symbols

$\frac{1}{z} \mathbb{C} \left\{ \frac{1}{z} \right\}$	3
\emptyset	167
\circ	30
\otimes	192
\bullet	30
\lceil	122
\lfloor	122
\leftarrow	193
$\bullet^{[k]}$	108, 193
\rceil	122
\rfloor	122
$\#$	174
\sqcup	189
\star	189
$\ \bullet\ $	190
$\hat{\sim}$	3
\sim	3
$\bullet^{>k}$	190
$\bullet^{\leq k}$	190

A

\mathcal{A}_\bullet	42
$A_\omega(f)$	28
A_\bullet	40
$\mathbb{A}[[X_1; \dots; X_r]]$	186
$\mathbb{A}\{x\}$	186
$\alpha(\theta)$	60

B

\mathcal{B}	3
$\mathcal{B}^{\mathbf{s},i}$	42
b_d^\bullet	40
$\underline{\beta}^\bullet$	46
$\widetilde{\beta}^\bullet$	79

$\beta^+(\theta)$	60
$\beta^-(\theta)$	65

C

C_0	28
C_1	28
$C_0(\theta)$	68
$\mathcal{C}e^\bullet(X)$	115
$\mathcal{C}e^\bullet(z)$	110
$\mathcal{C}ig^\bullet(X)$	120
$\text{cont}_{\gamma(\varepsilon)}$	9
coZig_k^\bullet	124

D

$D(\omega)$	170
D	135
D	116, 186
${}^i D_{\mathbf{k}}^{\mathbf{s}}(\mathbf{a})$	105
δ	8, 124
δ^\bullet	125, 130
Δ_ω	8
\mathcal{D}^+	13
\mathcal{D}^-	13
diag_p^\bullet	39
doZig_k^\bullet	124

E

E	133, 138
e^\bullet	133, 138
e_k	123
ε_k	97
${}^i E_{\mathbf{k}}^{\mathbf{s}}$	105
$e_{k,r}(\mathbf{s})$	170
$E_{k,r}(\mathbf{s})$	170
E_n^+	58

E_n^-	64
e_r	167
E_r	167

F

F_r	46
f_n	146
f	28
F	29
f_+^*	33
f_-^*	33
$*f_+$	33
$*f_-$	33
F_+^*	34
F_-^*	34
$*F_+$	34
$*F_-$	34
F^*	29
$*F$	29
$f^\bullet(x; y)$	150
$f_+^\bullet(x; y)$	151
$f_-^\bullet(x; y)$	151
F^\bullet	103
$F_+^\bullet(z)$	103
$F_-^\bullet(z)$	103
$F_{\mathbf{a}, \mathbf{s}}(\mathbf{X})$	105
F_N^\bullet	100

G

\mathbb{G}	24, 25
$\mathfrak{g}_{d,n,j}$	38
Γ_+^\bullet	32
Γ_-^\bullet	33
γ^+	28
γ^-	64
g	28
G	29
\mathcal{G}	30
g_i	167
$g_{i,k}^\bullet(u_1; \dots; u_r)$	170

H

\mathcal{H}	86
$\mathcal{H}_+^\bullet(z)$	177

$\mathcal{H}_-^\bullet(z)$	177
H_n^+	57
H_n^-	64
\widehat{H}_n^+	58
\widehat{H}_n^-	64
$He_+^\bullet(\mathbf{X})$	112
$He_-^\bullet(\mathbf{X})$	114, 115
$\mathcal{H}e_+^\bullet(z)$	97, 110, 123
$\mathcal{H}e_+^1(z)$	117
$\mathcal{H}e_-^\bullet(z)$	110
$\mathcal{H}e_-^1(z)$	117
$\mathcal{H}e_{+0}^\bullet(z)$	111
$Hig_+^\bullet(\mathbf{X})$	120
$Hig_-^\bullet(\mathbf{X})$	120, 121

I

$I^\bullet(x; y)$	151
$I(\omega)$	167
$I_{i,k}^{\mathbf{s}}(\omega)$	170
$\mathcal{I}a^\bullet$	176
Id	29
$\mathcal{I}d$	30

K

k	63
$\mathbb{K}\langle\Omega\rangle$	189

L

$l(\mathbf{w})$	190
L	29
\mathcal{L}	30
\mathcal{L}^θ	4

M

$\mathcal{M}_\mathbb{A}^\bullet(\Omega)$	190
$MTGF$	20
$MTGF_2$	143
$MTGF_{2,p}$	143
μ^\bullet	124
MZV	108
MZV_{CV}	108

N

N_p 37

O

$\omega_0(z)$ 175
 $\omega_1(z)$ 175
 Ω 133, 138
 Ω^* 176
 $\widetilde{\Omega}_r$ 167
 $\widetilde{\Omega}_r^*$ 168

P

$p(\varepsilon)$ 9
 $\mathcal{P}_+(C)$ 37
 $\mathcal{P}_+(c)$ 66
 $\mathcal{P}_-(C)$ 37
 $\mathcal{P}_-(c)$ 68
 $\mathcal{P}_{\theta,C}$ 61
 $\varphi_{k,l}$ 167
 Π^+ 36
 Π^- 36

Q

$q(\varepsilon)$ 9
 Qig^\bullet 125
 $Qig^\bullet(X)$ 125
 $Qig^\bullet(z)$ 127

R

r 190
 ${}^k\mathcal{R}_\sigma^s$ 107
 $\widetilde{\text{RES}}_{\text{simple}}$ 8
 $\text{RES}_{\text{simple}}$ 8

S

\underline{s} 108
 $S(r)$ 166
 \underline{S} 41
 s^\bullet 133, 138
 S 116, 135, 186
 \mathcal{S}^* 11, 20, 104
 $S_1(\underline{s}; z)$ 177

$S_2(\underline{s}; z)$ 177
 $S_t(\underline{s})$ 149
 $\mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}$ 58
 $S_z(\underline{s})$ 149
 $\mathcal{S}_{\geq 2}^*$ 143
 \mathcal{S}_+^* 20, 111
 \mathcal{S}_-^* 111
 sg^\bullet 133, 138
 sg^\bullet 41
 $sh\underline{a}$ 11, 191
 $sh\underline{e}$ 11, 191
 $sh\underline{i}$ 192
 $\sigma(\underline{S}; \underline{i})$ 45
 σ_ω 168
 sing_ω 8
 S^θ 5
 $S^{[\theta_1; \theta_2]}$ 7

T

\mathcal{T}_2 139
 \mathcal{T}_k 159
 \mathcal{T}_n 135
 $\widehat{\mathcal{T}}_n^\bullet$ 154
 $\widehat{\mathcal{T}}_{\text{module}, n}^\bullet$ 45
 $t_{k,n}$ 133, 138
 τ^\bullet 45
 $\text{Te}^\bullet(X)$ 124
 $\mathcal{T}e^\bullet$ 11, 104, 124
 $\text{Te}^\bullet(X)$ 115
 $\mathcal{T}e_{\text{module}}^\bullet$ 45
 $\text{Tig}^\bullet(X)$ 120, 121
 $\text{triangle}(\underline{S})$ 42

U

U^\bullet 36
 U_+^\bullet 32
 U_-^\bullet 33
 U_n 135

V

V^\bullet 36
 V_+^\bullet 33
 V_-^\bullet 33
 $V_n(X; Y)$ 135

Val	187
φ^{*n}	57

W

Wa^\bullet	10, 181
--------------------	---------

X

$X_{p,\rho}$	14
--------------------	----

Y

Y	108
$y_{\underline{s}}$	108

Z

Z	108
Z_k	159
$Z_{i,k}^{\underline{s}}$	106
Ze^\bullet	10, 123, 166
Ze_\bullet	115
Zig^\bullet	120, 124
Zig_\bullet	123

Index

A

algorithme de rejet des 1 108
alphabet 188
analytique
 fonction analytique 16
 invariant analytique 16
anneau pseudo-valué complet 187
ARI/GARI 12

B

Borel-sommable 5

C

caractère exponentiellement plat ... 150,
 155
cas elliptique 24
cas hyperbolique 24
cas parabolique 24
cas-type 15, 26
coefficients de Fourier des multitangentes
 154
comoule multiplicatif 33
conjecture de Zagier 145
contractions 122
convolution formelle 4
convolution intégrale 4
corps des séries formelles de Laurent 187
couleurs 123

D

demi-plan de Poincaré 86
diagramme commutatif
 pour dériver une multitangente . 163
 pour multiplier deux multitangentes
 161

difféomorphisme tangent à l'identité
 à l'infini 25
 à l'origine 24
dérivées étrangères 8

E

endomorphismes admettant une valuation
 188
équation du pont 15

F

factorisation moulienne du moule $\mathcal{T}e^\bullet$ 110
famille formellement sommable 187
fonction de type exponentiel 3
fonction transcendante 158
fonctions S-résurgentes 8
formule de Taylor 186

H

holomorphe
 fonction holomorphe 16
 invariant holomorphe 16

I

intégrales itérées 174
inverse multiplicatif d'un moule 191
itérateur direct 14
itérateur réciproque 14
itérée d'ordre w 15

L

lettres 188
LLL 107

M

modèle convolutif	8
modèle formel	8
monoïde libre	188
mot	188
mot vide	188
mots associés	167
moule	190
multiplication moulienne	190
multiplication symétr <u>a</u>	178
multitangentes	97, 104
colorées	123
divergentes	119, 130
nulles	139, 170
paires ou impaires	140
multizêtas	9
colorés	123
de Hurwitz	97, 111
de Hurwitz colorés	123
de Hurwitz formels	112

N

nettoyage des 1	
pour les multitangentes	143, 150
pour les multizêtas	143

O

opérateur de substitution	29
---------------------------	----

P

petits diviseurs	24
phénomène de Stokes	7, 15
poids d'une séquence	139
polynôme non commutatif	188
procédé de sommation de Borel	5
produit de battage	189, 191
produit de battage contractant	189, 191
prolongement sans fin	8
propriété	
de différentiabilité	104
de parité	104
pseudo-relation de parité	114
pseudo-valuation	187

PSLQ	107
------	-----

R

réduction en monotangentes	106, 130, 140
résidu itératif	26

S

singularité logarithmique	8
singularités simples	8
structures de flexions	12, 122
symétr <u>a</u> l	11
symétr <u>e</u> l	11, 192
symétr <u>i</u> l	192
séquence symétrique	139
séries 1-Gevrey	8
séries d'Eisenstein	96, 130
séries formelles	186

T

topologie formelle	187
transformation de Borel	155
transformation de Borel formelle	3
transformation de Laplace	4

V

valuation d'une séquence d'entiers	143
------------------------------------	-----

Z

\mathbb{Z}_2	139
----------------	-----