



HAL
open science

Homogénéisation des interfaces ondulées dans les composites

Huy Toan Le

► **To cite this version:**

Huy Toan Le. Homogénéisation des interfaces ondulées dans les composites. Autre. Université Paris-Est, 2011. Français. NNT : 2011PEST1096 . tel-00647889

HAL Id: tel-00647889

<https://theses.hal.science/tel-00647889>

Submitted on 3 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS EST

ANNÉE 2011

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS EST

Discipline : Génie Civil

présentée par

LE Huy Toan

Titre :

Homogénéisation des interfaces ondulées dans les composites

soutenue le 15 Mars 2011 devant le jury composé de

M. RAMTANI Salah	Président
M. GANGHOFFER Jean-François	Rapporteur
M. MICHELITSCH Thomas	Rapporteur
M. LE QUANG Hung	Examineur
M. HE Qi-Chang	Directeur de thèse

Remerciements

Ce travail de thèse a été effectué au sein du laboratoire de Modélisation et Simulation Multi-Echelle (MSME) - UMR 8208 CNRS.

J'exprime toute ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse, Monsieur Qi Chang HE, pour les trois années que j'ai passées à ses côtés. Il m'a témoigné de son aide scientifique et de sa patience tout au long du travail de thèse. Par sa compétence et son expérience, il m'a transmis, pas à pas, sa passion pour la recherche. Sans lui, cette thèse n'aurait sûrement jamais vu le jour.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur Hung LE QUANG pour sa gentillesse et sa disponibilité. J'ai particulièrement apprécié ses conseils clairs et avisés qui m'ont toujours permis d'avancer dans mes recherches.

Je remercie chaleureusement Messieurs Jean-François GANGHOFFER et Thomas MICHELITSCH qui m'ont fait l'honneur de prendre connaissance de ce travail et d'en être rapporteurs. Leurs conseils et leurs suggestions m'ont aidé à améliorer mon manuscrit.

Je tiens également à remercier Monsieur Salah RAMTANI pour avoir accepté de présider le jury.

D'autre part, j'exprime mes remerciements au directeur du laboratoire MSME, Monsieur Christian SOIZE, pour m'avoir accueilli dans de bonnes conditions de travail et pour m'avoir offert un environnement de recherche exceptionnel.

Je voudrais adresser un remerciement particulier à tous les membres du laboratoire MSME pour l'ambiance chaleureuse de travail qu'ils maintiennent au quotidien, et pour les beaux moments inoubliables passés avec eux.

Mes remerciements vont également à mes amis vietnamiens pour les grands moments passés en leur compagnie et notamment pour nos week-ends de "décompression".

Enfin, j'exprime du fond de mon coeur mes sincères remerciements à ma famille et à mon amie qui m'ont toujours soutenu avec leurs encouragements et leur amour.

Champs sur Marne, le 17 Mars 2011.

Résumé

Les surfaces et interfaces rugueuses sont rencontrées dans de nombreuses situations en mécanique et physique des solides. En particulier, une surface ou interface considérée comme lisse à une échelle donnée se révèle souvent rugueuse à une autre échelle plus petite. Ce travail étudie les interfaces planes et courbées dont la rugosité peut être raisonnablement décrite comme des ondulations périodiques. Il a pour objectif de modéliser ces interfaces dans des composites et de déterminer leurs effets sur les propriétés effectives élastiques et conductrices des composites concernés. L'approche élaborée pour atteindre cet objectif consiste d'abord à utiliser l'analyse asymptotique pour modéliser une zone d'interface rugueuse comme une interphase hétérogène uniquement suivant son épaisseur et ensuite à faire appel à des schémas micromécaniques pour quantifier les influences de cette interphase sur les propriétés effectives. Ce travail considère trois types de composites dans lesquels des interfaces périodiquement ondulées sont présentes : composites stratifiés, fibreux et à inclusions. Les résultats obtenus pour ces composites contribuent au développement de la micromécanique et apportent des solutions à des problèmes d'intérêt pratique rencontrés en physique et mécanique des matériaux hétérogènes.

Mots-clés : homogénéisation, micromécanique, interfaces rugueuses, propriétés effectives, analyse asymptotique, matériaux composites.

Abstract

Rough surfaces and interfaces are encountered in many situations in mechanics and physics of solids. In particular, a surface or interface considered smooth at a given scale turns out often to be rough at another smaller scale. This work studies the flat and curved interfaces whose roughness can be reasonably described as periodic undulations. It aims to model these interfaces in composites and to determine their effects on the effective elastic and conductive properties of the composites in question. The approach elaborated to achieve this objective consists first in using asymptotic analysis to model a zone of rough interface as an interphase being heterogeneous only along its thickness direction and then in resorting to some micromechanical schemes to quantify the influences of the interphase on the effective properties. This work considers three types of composites in which periodically corrugated interfaces are present : laminated, fibrous and particulate composites. The results obtained for these composites contribute to the development of micromechanics and provide solutions to problems of practical interest encountered in physics and mechanics of heterogeneous materials.

Keywords : homogenization, micromechanics, rough interfaces, effective properties, asymptotic analysis, composite materials.

Table des matières

Introduction	11
1 Interfaces élastiques planes ondulées dans une seule direction	15
1.1 Equations fondamentales du problème local	15
1.2 Homogénéisation de la zone d'interface rugueuse	17
1.2.1 Conjecture sur le tenseur de rigidité effectif	17
1.2.2 Analyse asymptotique et preuve pour la conjecture	19
1.3 Homogénéisation des matériaux multicouches avec interfaces rugueuses	24
1.4 Exemple numérique	26
2 Interfaces planes thermiques ondulées dans une seule direction	31
2.1 Lois constitutives locales	31
2.2 Homogénéisation de la zone d'interface rugueuse	32
2.3 Homogénéisation d'un composite multicouche	36
2.4 Exemple numérique	38
3 Interfaces élastiques cylindriques ondulées suivant la direction circonférentielle	41
3.1 Homogénéisation de la zone d'interface rugueuse	41
3.1.1 Equations de base	41
3.1.2 Homogénéisation de la zone d'interface rugueuse	44
3.2 Homogénéisation d'un composite avec l'interface cylindrique en dent de scie par une approche rigoureuse	48
3.2.1 Lois de comportement locale et macroscopique	48
3.2.2 Résolution des problèmes auxiliaires	50
3.2.3 Détermination des modules macroscopiques k^* et l^*	55
3.2.4 Détermination du module macroscopique G^*	58
3.2.5 Détermination du module macroscopique n^*	59
3.3 Homogénéisation d'un composite avec l'interface cylindrique périodiquement ondulée par une méthode approximative	60

3.3.1	Loi de comportement locale	60
3.3.2	Solutions pour les problèmes auxiliaires	61
3.3.3	Modules élastiques effectifs	65
3.4	Exemple numérique	75
4	Interfaces thermiques cylindriques ondulées suivant la direction circonférentielle	79
4.1	Formulation du problème	79
4.2	Homogénéisation asymptotique de la zone d'interface rugueuse	80
4.3	Homogénéisation d'un composite avec l'interface ondulée en dent de scie par une ap- proche rigoureuse	84
4.3.1	Solution du problème auxiliaire	85
4.3.2	Détermination des conductivités effectives par le schéma auto-cohérent généralisé	87
4.3.3	Exemple numérique	90
4.4	Homogénéisation d'un composite avec l'interface périodiquement ondulée par une mé- thode approximative	93
5	Interfaces élastiques planes ondulées suivant deux directions	99
5.1	Formulation du problème	99
5.2	Homogénéisation de la zone d'interface rugueuse	101
5.3	Interface ondulées entre deux phases élastiques isotropes	106
5.3.1	Problème 1	107
5.3.2	Problème 2	108
5.3.3	Problème 3	109
5.4	Homogénéisation d'une plaque tri-phasique suivante la direction d'épaisseur	113
	Conclusion et perspectives	115
	Bibliographie	117

Introduction

Les surfaces et interfaces rugueuses sont omniprésentes dans la nature. D'une façon générale, même si une surface ou interface est nominale lisse à une échelle donnée, elle se révèle souvent rugueuse à une autre échelle plus petite. La prise en compte de la rugosité surfacique ou interfaciale est nécessaire dans une multitude de situations en mécanique et en physique. Par exemple, ceci est le cas, quand on étudie la propagation des ondes à travers une frontière rugueuse (Zaki and Neureuther, 1971 ; Waterman, 1975 ; Belyaev et al., 1992 ; Abboud and Ammari, 1996 ; Bao and Bonnetier, 2001) ou une interface ondulée (Talbot et al., 1990 ; Singh and Tomar, 2007, 2008), quand on traite une plaque avec des renforts densément espacés (Cheng and Olhoff, 1981), quand on est concerné par les vibrations d'une structure mince dont la surface présente des oscillations géométriques (Belyaev et al., 1998) ou lorsqu'on s'intéresse à l'écoulement d'un fluide sur une paroi rugueuse (Achdou et al., 1998).

Les problèmes dans lesquels interviennent des surfaces ou interfaces rugueuses sont classiquement analysés par l'utilisation de certaines techniques de perturbation. Cette approche n'est valable que si l'amplitude de la rugosité est beaucoup plus petite par rapport à sa période. Par contre, quand l'amplitude de la rugosité est beaucoup plus large en comparaison avec sa période, une autre approche devient indispensable. Dans ce dernier cas, la méthode d'homogénéisation initiée d'abord par Kohler et al. (1981) et développée ensuite par un bon nombre de chercheurs (Kohn et Vogelius, 1984 ; Nevard et Keller, 1997 ; Chechkin et al., 1999 ; Fyrrillas et Pozrikidis, 2001 ; Amirat et al., 2004, 2007, 2008 ; Kristensson, 2005 ; Blanchard et al., 2007 ; Madureira et Valentin, 2007 ; Melnik et al., 2009 ; Vinh et Tung, 2010, 2010a) a fait preuve d'efficacité. Basée sur l'analyse asymptotique mathématique (voir, par exemple, Bensoussan et al., 1978 ; Sanchez-Palencia, 1980 ; Bakhvalov et Panasenko, 1989 ; Persson et al., 1993 ; Zhikov et al., 1994 ; Pecullan et al., 1999 ; Pinho-da-Cruz et al., 2009), cette méthode d'homogénéisation suppose que les surfaces ou interfaces oscillent rapidement et périodiquement.

Ce travail de thèse étudie les interfaces planes et courbées avec des ondulations rapides et périodiques. Il a pour double objectif de modéliser ces interfaces dans des composites et de déterminer leurs effets sur les propriétés effectives élastiques et conductrices des composites concernés. L'approche élaborée pour atteindre cet double objectif consiste d'abord à utiliser l'analyse asymptotique pour modéliser une zone d'interface rugueuse comme une interphase hétérogène uniquement suivant son épaisseur et ensuite à faire appel à des schémas micromécaniques pour quantifier les influences de cette interphase sur

les propriétés effectives. Ce travail considère trois types de composites, à savoir les composites stratifiés, fibreux et à inclusions, dans lesquels des interfaces périodiquement et fortement ondulées sont présentes.

Une originalité de ce travail réside dans la combinaison de l'analyse asymptotique mathématique avec certains schémas micromécanique pour aboutir à une approche nouvelle et complète qui permet de traiter un grand nombre de problèmes d'homogénéisation qui restent jusqu'à présent sans solutions. Une autre originalité de ce travail par rapport aux travaux existants est que les phases entre lesquelles se trouve une interface ondulée ne sont pas nécessairement isotropes. Le traitement des anisotropies des phases est grandement aidé par l'introduction d'un certain nombre d'opérateurs d'interface indépendants de tout système des coordonnées. Une caractéristique de ce travail est que les résultats analytiques dérivés sont systématiquement comparés avec les résultats numériques obtenus par la méthode des éléments finis.

La présentation du travail de thèse est structurée en 5 chapitres.

Dans le chapitre 1, nous étudions une interface qui est entre deux phases élastiques et qui ondule autour d'un plan et dans une seule direction. En effectuant une analyse asymptotique, nous montrons que la zone d'interface ondulée peut être modélisée comme une interphase hétérogène suivant son épaisseur mais homogène le long de tout plan transverse. Nous démontrons également que les propriétés élastiques de cette interphase équivalente correspondent à celles obtenues par l'homogénéisation du stratifié 2D associé. Les effets de cette interphase sur les modules élastiques effectifs du composite multicouche sont analytiquement déterminés par la théorie classique d'homogénéisation des composites stratifiés. Les résultats analytiques sont finalement validés en les comparant avec des résultats numériques obtenus par la méthode des éléments finis.

Le chapitre 2 est consacré l'étude d'une interface entre deux phases thermiques et ondulée autour d'un plan et dans une seule direction. Pour modéliser la zone d'interface ondulée et déterminer les effets de cette zone sur les propriétés conductrices du composite en question, nous utilisons la même approche que celle élaborée dans le chapitre 1. L'intérêt de ce chapitre est d'obtenir les contreparties thermiques des résultats élastiques dérivés dans le chapitre 1, qui sont également directement applicables aux autres phénomènes de transport mathématiquement analogues, tels que la conduction électrique et la diffusion.

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons à une interface entre deux phases élastiques et ondulée autour d'une surface cylindrique circulaire et suivant la direction circonférentielle. En utilisant un système des coordonnées cylindriques, le problème de modéliser la zone d'interface cylindrique ondulée comme une interphase équivalente peut être résolu en développant une approche similaire à celle présentée dans le chapitre 1. Par contre, le traitement du problème de déterminer les effets de l'interphase équivalente sur les propriétés élastiques du composite fibreux en question nécessite l'utilisation de certains schémas micromécanique tels que la méthode auto-cohérente généralisée. Un exemple numérique est donné pour illustration et comparaison.

Le chapitre 4 est dédié à l'homogénéisation d'une interface entre deux phases thermiques et oscillant autour d'une surface cylindrique circulaire et suivant la direction circonférentielle. L'approche élaborée

pour résoudre ce problème est similaire à celle présentée dans le chapitre 3. Encore une fois, les résultats obtenus sont non seulement valables pour la conduction thermique mais aussi pour les autres phénomènes de transport mathématiquement identiques.

Dans le chapitre 5, nous sommes concernés par une interface entre deux phases élastiques et ondulée autour d'un plan mais dans deux directions. Par une analyse asymptotique, nous démontrons que la zone d'interface ondulée peut être remplacée par une interphase hétérogène suivant son épaisseur mais homogène le long de tout plan transverse. La détermination des propriétés de cette interphase équivalente nécessite la résolution d'un problème d'homogénéisation 2D périodique paramétré. Pour ce problème, nous proposons une méthode de résolution approximative basée sur la méthode auto-cohérente. Les effets de l'interphase équivalente sur les propriétés élastiques effectives du composite multicouche sont ensuite déterminés par méthode des éléments finis. Les résultats ainsi obtenus sont comparés avec ceux directement issus de la méthode des éléments finis en considérant une plaque constituée du composite en question, encastrée sur un côté et soumise à une charge répartie.

La présentation du travail de thèse se termine par une conclusion générale et des perspectives.

Chapitre 1

Interfaces élastiques planes ondulées dans une seule direction

1.1 Equations fondamentales du problème local

Un domaine Ω dans un espace Euclidien tridimensionnel (3D) R^3 est constitué de deux sous-domaines $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$. La frontière de Ω est désignée par $\partial\Omega$, et celle de $\Omega^{(p)}$ ($p = 1$ ou 2) par $\partial\Omega^{(p)}$. L'interface entre $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ est dénotée par $\Gamma = \partial\Omega^{(1)} \cap \partial\Omega^{(2)}$. Nous nous intéressons au cas où Γ est une interface plane ondulée dans une seule direction. Plus précisément, dans le système des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) associées à une base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, l'interface Γ est définie par

$$\Gamma = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid x_3 = h(x_1)\} \quad (1.1)$$

où $h(x_1)$ est une fonction *périodique* de période ϵ dont la valeur minimale est égale à $-H^{(0)}$ avec $H^{(0)} > 0$ et la valeur maximale est égale à zéro (Figs. 1.1 et 1.2). Si la période ϵ de $h(x_1)$ est très faible par rapport à $H^{(0)}$, c'est-à-dire que $0 < \epsilon \ll H^{(0)}$, l'interface Γ est dite très rugueuse. On note par $\Omega^{(0)}$ la zone d'interface rugueuse déterminée par

$$\Omega^{(0)} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid -H^{(0)} < x_3 < 0 \right\}, \quad (1.2)$$

et par $\pi(x_3)$ le plan défini par

$$\pi(x_3) = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega^{(0)} \mid x_3 = x_3^0 \right\}, \quad (1.3)$$

où x_3^0 est un paramètre dont la valeur est dans l'intervalle $(-H^{(0)}, 0)$. Les dimensions de $\pi(x_3)$ suivant x_1 et x_2 sont respectivement $l_1(x_3)$ et $l_2(x_3)$. Il conviendra de définir les sous-domaines

$$\Omega^{(1)} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega^{(1)} \mid x_3 < -H^{(0)} \right\}, \quad (1.4)$$

$$\Omega^{(2)} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega^{(2)} \mid x_3 > 0 \right\}, \quad (1.5)$$

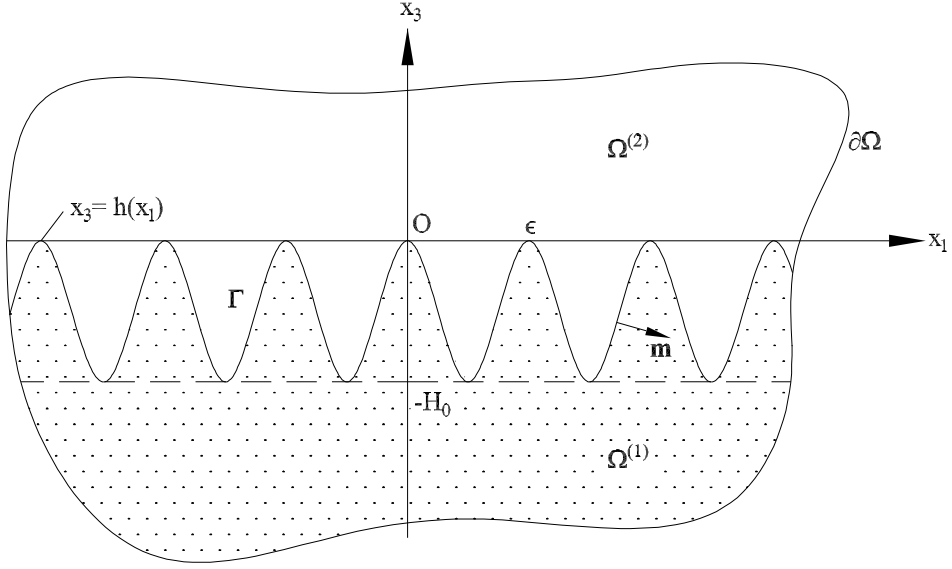


FIGURE 1.1: Le domaine tridimensionnel Ω est constitué de deux sous-domaines $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$. L'interface Γ entre $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$, caractérisée par $x_3 = h(x_1)$, est une interface plane ondulée périodiquement suivant la direction x_1 et oscille entre les plans $x_3 = -H_0$ et $x_3 = 0$.

et de désigner par Γ_p l'interface entre $\Omega^{(0)}$ et $\Omega^{(p)}$ avec $p = 1$ ou 2 .

Par hypothèse, les matériaux constituant les deux sous-domaines, $\Omega^{(1)}$ and $\Omega^{(2)}$, sont linéairement élastiques et homogènes suivant la direction x_2 mais peuvent être hétérogènes dans les directions x_1 et x_3 . A un instant t donné, les tenseurs de déformations infinitésimales et de contraintes de Cauchy, $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ et $\sigma(\mathbf{x}, t)$, sont liés par la loi de Hooke :

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbb{C}(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{x}, t) \quad (1.6)$$

où le tenseur de rigidité local $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ s'exprime par :

$$\mathbb{C}(\mathbf{x}) = \chi^{(1)}(\mathbf{x})\mathbb{C}^{(1)}(x_1, x_3) + \chi^{(2)}(\mathbf{x})\mathbb{C}^{(2)}(x_1, x_3), \quad (1.7)$$

où $\chi^{(p)}(\mathbf{x})$ est la fonction caractéristique du sous-domaine $\Omega^{(p)}$ définie par $\chi^{(p)}(\mathbf{x}) = 1$ si $\mathbf{x} \in \Omega^{(p)}$ et $\chi^{(p)}(\mathbf{x}) = 0$ si $\mathbf{x} \notin \Omega^{(p)}$; $\mathbb{C}^{(p)}(x_1, x_3)$ est le tenseur de rigidité du matériau formant $\Omega^{(p)}$. Les composantes $C_{ijkl}(\mathbf{x})$ de $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ ont les symétries mineure et majeure suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}. \quad (1.8)$$

Le tenseur de déformations infinitésimales locales $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ est lié au champ de déplacements local $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ par la relation

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]. \quad (1.9)$$

Le tenseur de contraintes $\sigma(\mathbf{x}, t)$ doit vérifier les équations du mouvement :

$$\nabla \cdot \sigma(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (1.10)$$

où $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ est la force volumique et $\ddot{\mathbf{u}}$ représente la dérivée seconde de \mathbf{u} par rapport au temps t .

En substituant (1.6) dans (1.10) et en tenant compte de (1.8)-(1.9), les équations du mouvement (1.10) s'écrivent sous la forme

$$(\mathbf{A}^{(hk)} \mathbf{u}_{,k})_{,h} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{ou} \quad (A_{ij}^{(hk)} u_{j,k})_{,h} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1.11)$$

avec $i, j, k, h = 1, 2$ ou 3 . Dans (1.11), $\mathbf{A}^{(hk)}(\mathbf{x})$ est la matrice 3×3 dont les composantes $A_{ij}^{(hk)}(\mathbf{x})$ sont définies par

$$A_{ij}^{(hk)} = C_{ihjk}. \quad (1.12)$$

En particulier, on a

$$A_{ij}^{(p)(hk)}(x_1, x_3) = C_{ihjk}^{(p)}(x_1, x_3) \quad (1.13)$$

pour le sous-domaine $\Omega^{(p)}$. Du fait que l'interface Γ entre les deux sous-domaines est supposée parfaite, le vecteur de déplacements et le vecteur de contraintes sont continus à travers Γ , à savoir

$$[[\mathbf{u}]]_{\Gamma} = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad [[\mathbf{A}^{(hk)} \mathbf{u}_{,k} m_h]]_{\Gamma} = \mathbf{0}, \quad (1.14)$$

où $[[\bullet]]_{\Gamma} = \bullet^{(2)} - \bullet^{(1)}$ signifie le saut de \bullet à travers Γ et m_h représente une composante du vecteur unitaire \mathbf{m} normal à Γ .

Le problème à résoudre consiste à homogénéiser la zone d'interface rugueuse $\Omega^{(0)}$ suivant la direction d'ondulation x_1 . Après cette homogénéisation, la zone d'interface rugueuse $\Omega^{(0)}$ est remplacée par une zone étant homogène dans le plan x_1 - x_2 mais hétérogène selon la direction x_3 . En conséquence, pour une valeur donnée de $x_3 \in (-H, 0)$, la loi de comportement macroscopique s'exprime par

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbb{C}}(x_3) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t). \quad (1.15)$$

Ici, \mathbf{S} et \mathbf{E} sont les tenseur de contraintes et de déformations macroscopiques et $\bar{\mathbb{C}}(x_3)$ est le tenseur de rigidité effectif de la zone d'interface rugueuse.

1.2 Homogénéisation de la zone d'interface rugueuse

1.2.1 Conjecture sur le tenseur de rigidité effectif

Afin de déterminer le tenseur de rigidité effectif $\bar{\mathbb{C}}(x_3)$ pour la zone d'interface rugueuse décrite dans le paragraphe précédent, on remarque que pour une valeur donnée de $x_3 \in (-H, 0)$, la microstructure du plan $\pi(x_3)$ se présente sous la forme d'un matériau stratifié bi-phasique dont le vecteur normal du plan des stratifiés est $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_1$. Cette observation nous conduit à la conjecture suivante sur le tenseur de rigidité effectif $\bar{\mathbb{C}}(x_3)$ pour la zone d'interface rugueuse :

Si l'interface Γ est très rugueuse, c'est-à-dire que $0 < \epsilon \ll H^{(0)}$, le tenseur de rigidité effectif $\bar{\mathbb{C}}(x_3)$ pour une valeur donnée de $x_3 \in (-H, 0)$ est égale à celui du matériau stratifié bi-phasique dont la direction de la stratification correspond à $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_1$.

Le tenseur de rigidité effectif d'un matériau stratifié peut être obtenu de façon analytique (Postma, 1955 ; Backus, 1962 ; Chou et al., 1972 ; Pagano, 1974 ; Dumontet, 1982 ; Norris, 1990). La méthode de résolution est basée sur le fait fondamental que la partie dans le plan du tenseur de déformations et la partie hors-plan du tenseur de contraintes sont uniformes dans les stratifiés. Ces propriétés restent vraies même quand un matériau stratifié est hétérogène suivant la direction de la stratification. En particulier, si les couches d'un matériau stratifié sont individuellement homogènes, les tenseurs de déformations et de contraintes sont uniformes dans chaque stratifié.

Si la conjecture précédente concernant l'homogénéisation est prouvée, alors le tenseur de rigidité effectif pour la zone d'interface rugueuse correspond à celui d'un matériau stratifié qui est donné par (voir, par exemple, Norris, 1990)

$$\bar{\mathbb{C}}(x_3) = \langle \mathbb{L} \rangle_\pi + \langle \mathbb{C}\mathbb{M} \rangle_\pi \langle \mathbb{M} \rangle_\pi^{-1} \langle \mathbb{M}\mathbb{C} \rangle_\pi. \quad (1.16)$$

Dans cette expression, les deux tenseurs du quatrième ordre \mathbb{M} et \mathbb{L} sont définis par

$$\mathbb{M} = (\mathbb{P}_2 \mathbb{C} \mathbb{P}_2)^{-1}, \quad \mathbb{L} = (\mathbb{P}_1 \mathbb{C}^{-1} \mathbb{P}_1)^{-1} \quad (1.17)$$

tels que $\mathbb{M}(\mathbb{P}_2 \mathbb{C} \mathbb{P}_2) = (\mathbb{P}_2 \mathbb{C} \mathbb{P}_2)\mathbb{M} = \mathbb{P}_2$ et $\mathbb{L}(\mathbb{P}_1 \mathbb{C}^{-1} \mathbb{P}_1) = (\mathbb{P}_1 \mathbb{C}^{-1} \mathbb{P}_1)\mathbb{L} = \mathbb{P}_1$ avec \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 étant les deux opérateurs de projection orthogonale complémentaire :

$$\mathbb{P}_1 = \mathbb{I} - \mathbb{P}_2 = (\mathbb{I} - \mathbf{N}) \bar{\otimes} (\mathbb{I} - \mathbf{N}). \quad (1.18)$$

Dans cette formule, le produit de Kronecker $\bar{\otimes}$ est défini par $(\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = \frac{1}{2}(A_{ik}B_{jl} + A_{il}B_{jk})$ pour deux tenseurs d'ordre 2 \mathbf{A} et \mathbf{B} (He and Curnier, 1995), $\mathbf{N} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$, \mathbb{I} est le tenseur d'identité d'ordre 2 et $\mathbb{I} = \mathbf{I} \bar{\otimes} \mathbf{I}$ est le tenseur d'identité d'ordre 4. Dans (1.16), $\langle \bullet \rangle_\pi$ désigne la moyenne sur le plan $\pi(x_3)$:

$$\langle \bullet \rangle_\pi = \frac{1}{l_1(x_3)} \int_0^{l_1(x_3)} \bullet dx_1. \quad (1.19)$$

Dans le cas particulier où $\Omega^{(0)}$ est formé de deux matériaux individuellement homogènes et isotropes, le tenseur de rigidité local $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ s'écrit alors

$$\mathbb{C}(\mathbf{x}) = (3\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \mathbb{J} + 2\mu(\mathbf{x}) \mathbb{K}, \quad (1.20)$$

où $\mathbb{J} = \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$, $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ et

$$\lambda(\mathbf{x}) = \chi^{(1)}(\mathbf{x})\lambda^{(1)} + \chi^{(2)}(\mathbf{x})\lambda^{(2)}, \quad \mu(\mathbf{x}) = \chi^{(1)}(\mathbf{x})\mu^{(1)} + \chi^{(2)}(\mathbf{x})\mu^{(2)} \quad (1.21)$$

avec $\lambda^{(p)}$ et $\mu^{(p)}$ ($p = 1$ ou 2) étant les constantes de Lamé de $\Omega^{(p)}$. Il déduit de (1.16) l'expression suivante du tenseur de rigidité élastique effectif $\bar{\mathbb{C}}(x_3)$:

$$\bar{\mathbb{C}}(x_3) = \bar{n} \mathbb{E}_L + 2\bar{k} \mathbb{J}_T + \sqrt{2} \bar{l} \mathbb{F} + 2\bar{m} \mathbb{K}_T + 2\bar{G} \mathbb{K}_L. \quad (1.22)$$

Dans cette expression, $\bar{n}(x_3)$, $\bar{k}(x_3)$, $\bar{m}(x_3)$, $\bar{G}(x_3)$ et $\bar{l}(x_3)$ sont les cinq modules élastiques effectifs de Hill (1964) déterminés par

$$\begin{aligned}\bar{n}(x_3) &= \langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle_\pi^{-1}, & \bar{G}(x_3) &= \langle 1/\mu \rangle_\pi^{-1}, & \bar{m}(x_3) &= \langle \mu \rangle_\pi, \\ \bar{l}(x_3) &= \langle \lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle_\pi \langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle_\pi^{-1}, \\ \bar{k}(x_3) &= \langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle_\pi^{-1} \langle \lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle_\pi^2 + \langle \mu(3\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu) \rangle_\pi.\end{aligned}\quad (1.23)$$

Dans le cas où les matériaux constitutifs sont individuellement homogènes, l'opérateur de moyenne sur le plan $\pi(x_3)$ défini par Eq. (1.19) se réduit à

$$\langle \bullet \rangle_\pi = c_1 \bullet^{(1)} + c_2 \bullet^{(2)}, \quad (1.24)$$

où $c_p(x_3)$ est la fraction surfacique de la composante p dans $\pi(x_3)$. Dans (1.22), \mathbb{E}_L , \mathbb{J}_T , \mathbb{F} , \mathbb{K}_T et \mathbb{K}_L forment un ensemble complet des tenseurs générateurs à isotropie transverse par rapport à la direction \mathbf{n} normale aux couches et ils sont définis par

$$\mathbb{E}_L = \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}, \quad \mathbb{J}_T = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{N}) \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{N}), \quad \mathbb{K}_T = \mathbb{P}_1 - \mathbb{J}_T, \quad (1.25)$$

$$\mathbb{F} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\mathbf{I} - \mathbf{N}) \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{N})], \quad (1.26)$$

$$\mathbb{K}_L = \mathbb{K} - \mathbb{K}_T - \mathbb{K}_E, \quad \mathbb{K}_E = \frac{1}{6}[(\mathbf{I} - 3\mathbf{N}) \otimes (\mathbf{I} - 3\mathbf{N})]. \quad (1.27)$$

1.2.2 Analyse asymptotique et preuve pour la conjecture

On s'intéresse maintenant à la zone d'interface rugueuse $\Omega^{(0)}$ définie par (1.2). On observe que $\Omega^{(0)}$ résulte de la distribution périodique d'une cellule de base Y suivant la direction x_1 (Fig. 2). Pour déterminer le tenseur de rigidité élastique effectif $\bar{\mathbb{C}}(x_3)$ de $\Omega^{(0)}$, on utilise la méthode d'analyse asymptotique présentée dans Bensoussan et al. (1978), Sanchez-Palencia (1980), Bakhvalov et Panasenko (1989), Persson et al. (1993) et Zhikov et al. (1994). Selon cette méthode, après avoir introduit une nouvelle variable $y = x_1/\epsilon$ associé à Y , appelée la variable microscopique ou rapide, le champ de déplacements s'exprime en fonction non seulement de variable \mathbf{x} , appelé la variable macroscopique ou lente, mais aussi de la variable microscopique y , c'est-à-dire que

$$\mathbf{u}_\epsilon(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, y, \epsilon, t). \quad (1.28)$$

Ensuite, on effectue l'expansion asymptotique de $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, y, \epsilon, t)$ comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, y, \epsilon, t) &= \mathbf{U} + \epsilon(\mathbf{N}^{(1)}\mathbf{U} + \mathbf{N}^{(11)}\mathbf{U}_{,1} + \mathbf{N}^{(12)}\mathbf{U}_{,2} + \mathbf{N}^{(13)}\mathbf{U}_{,3}) \\ &+ \epsilon^2(\mathbf{N}^{(2)}\mathbf{U} + \mathbf{N}^{(21)}\mathbf{U}_{,1} + \mathbf{N}^{(22)}\mathbf{U}_{,2} + \mathbf{N}^{(23)}\mathbf{U}_{,3}) \\ &+ \mathbf{N}^{(211)}\mathbf{U}_{,11} + \mathbf{N}^{(212)}\mathbf{U}_{,12} + \mathbf{N}^{(213)}\mathbf{U}_{,13} \\ &+ \mathbf{N}^{(222)}\mathbf{U}_{,22} + \mathbf{N}^{(223)}\mathbf{U}_{,23} + \mathbf{N}^{(233)}\mathbf{U}_{,33}) \\ &+ \mathbf{O}(\epsilon^3).\end{aligned}\quad (1.29)$$

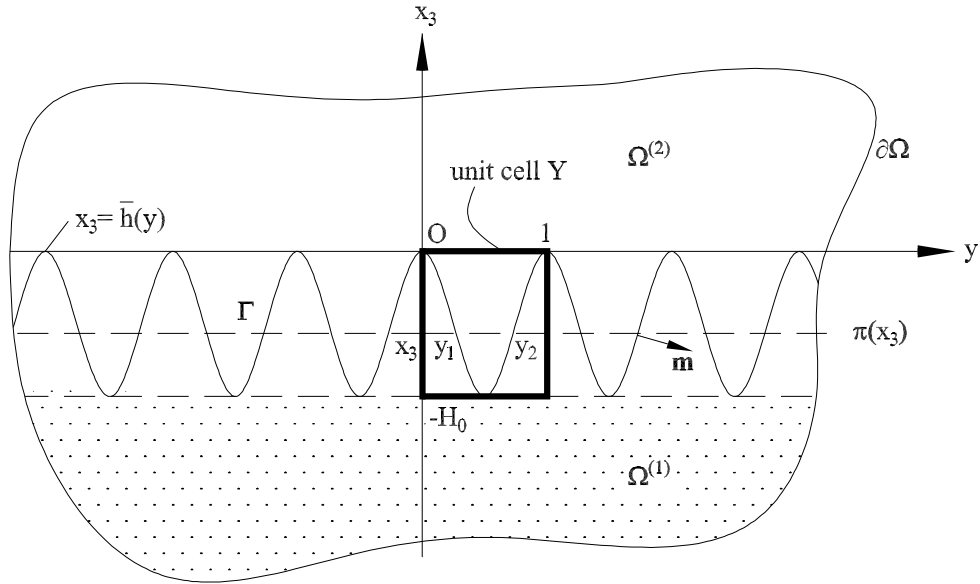


FIGURE 1.2: L'interface rugueuse Γ entre $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ se présente également par $x_3 = \bar{h}(y) = h(x_1/\epsilon)$ avec $\bar{h}(y)$ étant une fonction périodique de période 1 en $y = x_1/\epsilon$.

Dans cette expression, $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x_1, x_2, x_3, t)$ est une fonction indépendante de la variable microscopique y , et correspond donc au champ de déplacements macroscopique ; le symbole $\bullet_{,i}$ signifie la dérivée de \bullet par rapport à x_i ; les matrices 3×3 , $\mathbf{N}^{(\bullet)} = \mathbf{N}^{(\bullet)}(y, x_2, x_3)$, dont les composantes sont en fonction de y, x_2 et x_3 , sont à déterminer à partir des équations du mouvement (1.11) et des conditions de continuité (1.14) des vecteurs de déplacements et de contraintes à travers l'interface Γ .

En rappelant que Γ est caractérisée par la fonction $x_3 = h(x_1)$ ou bien $x_3 = \bar{h}(y)$, avec $y = x_1/\epsilon$, périodique dans Y de période 1, la normale vers l'extérieur à Γ de $\Omega^{(2)}$, \mathbf{m} , est donc donnée par

$$\mathbf{m} = \frac{1}{(1 + \epsilon^{-2} \bar{h}_{,y}^2)^{1/2}} (\epsilon^{-1} \bar{h}_{,y}, 0, -1)^T$$

où le symbole $\bullet_{,y}$ signifie la dérivée de \bullet par rapport à y . Du fait que $y = x_1/\epsilon$, il est immédiat que

$$\mathbf{u}_{\epsilon,1} = \mathbf{u}_{,1} + \epsilon^{-1} \mathbf{u}_{,y}, \quad \mathbf{u}_{\epsilon,2} = \mathbf{u}_{,2}, \quad \mathbf{u}_{\epsilon,3} = \mathbf{u}_{,3}. \quad (1.30)$$

En substituant (1.30) avec (1.29) et (1.30) dans les équations du mouvement (1.11) et dans les conditions de continuité (1.14) et en posant chaque coefficient associé à ϵ^{-1} égal à zéro, on obtient les équations pour déterminer $\mathbf{N}^{(1)}$, $\mathbf{N}^{(11)}$, $\mathbf{N}^{(12)}$ et $\mathbf{N}^{(13)}$:

$$[\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(1)}]_{,y} = 0, \quad 0 < y < 1, \quad y \neq y_1, y_2, \quad (1.31)$$

$$[\mathbf{A}^{(11)}(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(1)})]_{,y} = 0, \quad 0 < y < 1, \quad y \neq y_1, y_2, \quad (1.32)$$

$$[\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(12)} + \mathbf{A}^{(12)}]_{,y} = 0, \quad 0 < y < 1, \quad y \neq y_1, y_2, \quad (1.33)$$

$$[\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(13)} + \mathbf{A}^{(13)}]_{,y} = 0, \quad 0 < y < 1, \quad y \neq y_1, y_2, \quad (1.34)$$

$$[[\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(1)}]] = 0, \quad [[\mathbf{N}^{(1)}]] = 0 \text{ pour } y_1, y_2, \quad \mathbf{N}^{(1)}|_{y=0} = \mathbf{N}^{(1)}|_{y=1}, \quad (1.35)$$

$$[[\mathbf{A}^{(11)}(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(1)})]] = 0, \quad [[\mathbf{N}^{(1)}]] = 0 \text{ pour } y_1, y_2, \quad \mathbf{N}^{(1)}|_{y=0} = \mathbf{N}^{(1)}|_{y=1}, \quad (1.36)$$

$$[[\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(12)} + \mathbf{A}^{(12)}]] = 0, \quad [[\mathbf{N}^{(12)}]] = 0 \text{ pour } y_1, y_2, \quad \mathbf{N}^{(12)}|_{y=0} = \mathbf{N}^{(12)}|_{y=1}, \quad (1.37)$$

$$[[\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(13)} + \mathbf{A}^{(13)}]] = 0, \quad [[\mathbf{N}^{(13)}]] = 0 \text{ pour } y_1, y_2, \quad \mathbf{N}^{(13)}|_{y=0} = \mathbf{N}^{(13)}|_{y=1}. \quad (1.38)$$

Dans ces équations, y_1 et y_2 avec $0 < y_1 < y_2 < 1$ sont les deux solutions de l'équation $\bar{h}(y) = x_3$ avec $x_3 \in (-H_0, 0)$.

En utilisant (1.31)-(1.38), les expressions de $\mathbf{N}_{,y}^{(1)}$, $\mathbf{N}_{,y}^{(11)}$, $\mathbf{N}_{,y}^{(12)}$ et $\mathbf{N}_{,y}^{(13)}$ sont choisies de telle façon que

$$\mathbf{N}_{,y}^{(1)}(y, x_2, x_3) = \mathbf{0}, \quad (1.39)$$

$$\mathbf{N}_{,y}^{(11)}(y, x_2, x_3) = [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1} \left\langle [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1} \right\rangle_Y^{-1} - \mathbf{I}, \quad (1.40)$$

$$\mathbf{N}_{,y}^{(12)}(y, x_2, x_3) = [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1} \left[\left\langle [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1} \mathbf{A}^{(12)} \right\rangle_Y - \mathbf{A}^{(12)} \right], \quad (1.41)$$

$$\mathbf{N}_{,y}^{(13)}(y, x_2, x_3) = [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1} \left[\left\langle [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1} \mathbf{A}^{(13)} \right\rangle_Y - \mathbf{A}^{(13)} \right]. \quad (1.42)$$

On remarque que quand $x_3 = \bar{h}(y)$ est une fonction périodique en y de période 1, le calcul de la moyenne $\langle \bullet \rangle$ définie par (1.19) peut se réduire au calcul de la valeur moyenne sur une cellule de base Y , désignée par $\langle \bullet \rangle_Y$ avec

$$\langle \bullet \rangle_Y = \int_0^1 \bullet \, dy. \quad (1.43)$$

En particulier, lorsque les deux composantes de $\Omega^{(0)}$ sont individuellement homogènes dans le plan $x_1 - x_2$ mais hétérogènes selon la direction x_3 , le calcul moyen $\langle \bullet \rangle_Y$ devient

$$\langle \bullet \rangle_Y = (1 - y_2 + y_1) \bullet^{(1)} + (y_2 - y_1) \bullet^{(2)}. \quad (1.44)$$

Ensuite, en introduisant Eq. (1.30) avec (1.29) et (1.30) dans les équations du mouvement (1.11) et en mettant chaque coefficient relatif à ϵ^0 égal à zéro, on obtient

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(2)} + \mathbf{A}^{(12)}\mathbf{N}_{,2}^{(1)} + \mathbf{A}^{(13)}\mathbf{N}_{,3}^{(1)}]_{,y}\mathbf{U} \\
& + [\mathbf{A}^{(11)}(\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}_{,y}^{(21)}) + \mathbf{A}^{(12)}\mathbf{N}_{,2}^{(11)} + \mathbf{A}^{(13)}\mathbf{N}_{,3}^{(11)}]_{,y}\mathbf{U}_{,1} \\
& + [\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(22)} + \mathbf{A}^{(12)}(\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}_{,2}^{(12)}) + \mathbf{A}^{(13)}\mathbf{N}_{,3}^{(12)}]_{,y}\mathbf{U}_{,2} \\
& + [\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(23)} + \mathbf{A}^{(13)}(\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}_{,3}^{(13)}) + \mathbf{A}^{(12)}\mathbf{N}_{,2}^{(13)}]_{,y}\mathbf{U}_{,3} \\
& + \left\{ \mathbf{A}^{(11)}[\mathbf{N}^{(11)} + \mathbf{N}_{,y}^{(211)}]_{,y} + \mathbf{A}^{(11)}(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(11)}) \right\} \mathbf{U}_{,11} \\
& + \left\{ [\mathbf{A}^{(11)}(\mathbf{N}^{(13)} + \mathbf{N}_{,y}^{(213)}) + \mathbf{A}^{(13)}\mathbf{N}^{(11)}]_{,y} + \mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(13)} + \mathbf{A}^{(13)} \right\} \mathbf{U}_{,13} \\
& + \left\{ [\mathbf{A}^{(11)}(\mathbf{N}^{(12)} + \mathbf{N}_{,y}^{(212)}) + \mathbf{A}^{(12)}\mathbf{N}^{(11)}]_{,y} + \mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(12)} + \mathbf{A}^{(12)} \right\} \mathbf{U}_{,12} \\
& + \left\{ [\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(223)} + \mathbf{A}^{(12)}\mathbf{N}^{(13)} + \mathbf{A}^{(13)}\mathbf{N}^{(12)}]_{,y} + \mathbf{A}^{(23)} \right\} \mathbf{U}_{,23} \\
& + \left\{ [\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(222)} + \mathbf{A}^{(12)}\mathbf{N}^{(12)}]_{,y} + \mathbf{A}^{(22)} \right\} \mathbf{U}_{,22} + [\mathbf{A}^{(32)}\mathbf{U}_{,2}]_{,3} \\
& + [\mathbf{A}^{(21)}(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(11)})\mathbf{U}_{,1} + \mathbf{A}^{(21)}\mathbf{N}_{,y}^{(12)}\mathbf{U}_{,2} + \mathbf{A}^{(21)}\mathbf{N}_{,y}^{(13)}\mathbf{U}_{,3}]_{,2} \\
& + [\mathbf{A}^{(31)}(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(11)})\mathbf{U}_{,1} + \mathbf{A}^{(31)}\mathbf{N}_{,y}^{(13)}\mathbf{U}_{,3} + \mathbf{A}^{(31)}\mathbf{N}_{,y}^{(12)}\mathbf{U}_{,2}]_{,3} \\
& + [\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(233)} + \mathbf{A}^{(13)}\mathbf{N}^{(13)}]_{,y}\mathbf{U}_{,33} + [\mathbf{A}^{(33)}\mathbf{U}_{,3}]_{,3} + \mathbf{f} - \rho\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{0}. \tag{1.45}
\end{aligned}$$

Pour vérifier les conditions de continuité (1.14), on choisit les matrices $\mathbf{N}^{(2)}$, $\mathbf{N}^{(21)}$, $\mathbf{N}^{(22)}$, $\mathbf{N}^{(23)}$, $\mathbf{N}^{(211)}$, $\mathbf{N}^{(222)}$, $\mathbf{N}^{(222)}$, $\mathbf{N}^{(213)}$, $\mathbf{N}^{(223)}$ et $\mathbf{N}^{(212)}$ dont les composantes sont les fonctions périodiques en y qui sont continues à $y = 1$ et $y = 0$ et satisfont les conditions de continuité en $y = y_1$ et $y = y_2$. Ces conditions de continuité, obtenues en substituant (1.30) avec Eqs. (1.29) et (1.30) dans Eq. (1.14) et en mettant chaque coefficient associé à ϵ^0 égal à 0, s'expriment par

$$[[\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(2)} + \mathbf{A}^{(12)}\mathbf{N}_{,2}^{(1)} + \mathbf{A}^{(13)}\mathbf{N}_{,3}^{(1)}]] = \mathbf{0}, \tag{1.46}$$

$$[[\mathbf{A}^{(11)}(\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}_{,y}^{(21)}) + \mathbf{A}^{(12)}\mathbf{N}_{,2}^{(11)} + \mathbf{A}^{(13)}\mathbf{N}_{,3}^{(11)}]] = \frac{1}{\bar{h}_{,y}}[\mathbf{A}^{31}(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(11)})], \tag{1.47}$$

$$[[\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(22)} + \mathbf{A}^{(12)}(\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}_{,2}^{(12)}) + \mathbf{A}^{(13)}\mathbf{N}_{,3}^{(12)}]] = \frac{1}{\bar{h}_{,y}}[\mathbf{A}^{31}\mathbf{N}_{,y}^{(12)} + \mathbf{A}^{(32)}], \tag{1.48}$$

$$[[\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(23)} + \mathbf{A}^{(13)}(\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}_{,3}^{(13)}) + \mathbf{A}^{(12)}\mathbf{N}_{,2}^{(13)}]] = \frac{1}{\bar{h}_{,y}}[\mathbf{A}^{31}\mathbf{N}_{,y}^{(13)} + \mathbf{A}^{(33)}], \tag{1.49}$$

$$[[\mathbf{A}^{(11)}[\mathbf{N}^{(11)} + \mathbf{N}_{,y}^{(211)}]]] = \mathbf{0}, \tag{1.50}$$

$$[[\mathbf{A}^{(11)}(\mathbf{N}^{(13)} + \mathbf{N}_{,y}^{(213)}) + \mathbf{A}^{(13)}\mathbf{N}^{(11)}]] = \mathbf{0}, \tag{1.51}$$

$$[[\mathbf{A}^{(11)}(\mathbf{N}^{(12)} + \mathbf{N}_{,y}^{(212)}) + \mathbf{A}^{(12)}\mathbf{N}^{(11)}]] = \mathbf{0}, \tag{1.52}$$

$$[[\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(223)} + \mathbf{A}^{(12)}\mathbf{N}^{(13)} + \mathbf{A}^{(13)}\mathbf{N}^{(12)}]] = \mathbf{0}, \tag{1.53}$$

$$[[\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(222)} + \mathbf{A}^{(12)}\mathbf{N}^{(12)}]] = \mathbf{0}, \tag{1.54}$$

$$[[\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(233)} + \mathbf{A}^{(13)}\mathbf{N}^{(13)}]] = \mathbf{0}. \tag{1.55}$$

Le calcul moyen en Y de (1.45) nous mène à

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{A}}^{(11)}\mathbf{U}_{,11} + \bar{\mathbf{A}}^{(21)}\mathbf{U}_{,12} + \bar{\mathbf{A}}^{(12)}\mathbf{U}_{,21} + \bar{\mathbf{A}}^{(23)}\mathbf{U}_{,32} + \bar{\mathbf{A}}^{(22)}\mathbf{U}_{,22}, \\ & + \bar{\mathbf{A}}^{(13)}\mathbf{U}_{,13} + (\bar{\mathbf{A}}^{(32)}\mathbf{U}_{,2})_{,3} + (\bar{\mathbf{A}}^{(31)}\mathbf{U}_{,1})_{,3} + (\bar{\mathbf{A}}^{(33)}\mathbf{U}_{,3})_{,3} + \bar{\mathbf{f}} = \bar{\rho}\ddot{\mathbf{U}}, \end{aligned} \quad (1.56)$$

où

$$\bar{\mathbf{A}}^{(11)}(x_3) = \left\langle \mathbf{A}^{(11)}(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(11)}) \right\rangle_Y, \quad \bar{\mathbf{A}}^{(13)}(x_3) = \left\langle \mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(13)} + \mathbf{A}^{(13)} \right\rangle_Y, \quad (1.57)$$

$$\bar{\mathbf{A}}^{(12)}(x_3) = \left\langle \mathbf{A}^{(11)}\mathbf{N}_{,y}^{(12)} + \mathbf{A}^{(12)} \right\rangle_Y, \quad \bar{\mathbf{A}}^{(21)}(x_3) = \left\langle \mathbf{A}^{(21)}(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(11)}) \right\rangle_Y, \quad (1.58)$$

$$\bar{\mathbf{A}}^{(31)}(x_3) = \left\langle \mathbf{A}^{(31)}(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(11)}) \right\rangle_Y, \quad \bar{\mathbf{A}}^{(23)}(x_3) = \left\langle \mathbf{A}^{(21)}\mathbf{N}_{,y}^{(13)} + \mathbf{A}^{(23)} \right\rangle_Y, \quad (1.59)$$

$$\bar{\mathbf{A}}^{(32)}(x_3) = \left\langle \mathbf{A}^{(31)}\mathbf{N}_{,y}^{(12)} + \mathbf{A}^{(32)} \right\rangle_Y, \quad \bar{\mathbf{A}}^{(22)}(x_3) = \left\langle \mathbf{A}^{(21)}\mathbf{N}_{,y}^{(12)} + \mathbf{A}^{(22)} \right\rangle_Y, \quad (1.60)$$

$$\bar{\mathbf{A}}^{(33)}(x_3) = \left\langle \mathbf{A}^{(31)}\mathbf{N}_{,y}^{(13)} + \mathbf{A}^{(33)} \right\rangle_Y, \quad (1.61)$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \langle \mathbf{f} \rangle_Y, \quad \bar{\rho} = \langle \rho \rangle_Y. \quad (1.62)$$

Les équations dans (1.56) sont donc les équations du mouvement macroscopiques pour la zone d'interface rugueuse $\Omega^{(0)}$. En substituant (1.40)-(1.42) dans (1.57)-(1.61) et en tenant compte de (1.43), on trouve

$$\bar{\mathbf{A}}^{(11)}(x_3) = \left\langle [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1} \right\rangle_Y^{-1}, \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}^{(22)}(x_3) &= \left\langle \mathbf{A}^{(22)} - \mathbf{A}^{(21)}[\mathbf{A}^{(11)}]^{-1}\mathbf{A}^{(12)} \right\rangle_Y \\ &+ \left\langle \mathbf{A}^{(21)}[\mathbf{A}^{(11)}]^{-1} \right\rangle_Y \left\langle [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1}\mathbf{A}^{(12)} \right\rangle_Y, \end{aligned} \quad (1.64)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}^{(33)}(x_3) &= \left\langle \mathbf{A}^{(33)} - \mathbf{A}^{(31)}[\mathbf{A}^{(11)}]^{-1}\mathbf{A}^{(13)} \right\rangle_Y \\ &+ \left\langle \mathbf{A}^{(31)}[\mathbf{A}^{(11)}]^{-1} \right\rangle_Y \left\langle [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1}\mathbf{A}^{(13)} \right\rangle_Y, \end{aligned} \quad (1.65)$$

$$\bar{\mathbf{A}}^{(12)}(x_3) = (\bar{\mathbf{A}}^{(21)})^T(x_3) = \left\langle [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1}\mathbf{A}^{(12)} \right\rangle_Y, \quad (1.66)$$

$$\bar{\mathbf{A}}^{(13)}(x_3) = (\bar{\mathbf{A}}^{(31)})^T(x_3) = \left\langle [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1}\mathbf{A}^{(13)} \right\rangle_Y, \quad (1.67)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}^{(23)}(x_3) &= (\bar{\mathbf{A}}^{(32)})^T(x_3) = \left\langle \mathbf{A}^{(23)} - \mathbf{A}^{(21)}[\mathbf{A}^{(11)}]^{-1}\mathbf{A}^{(13)} \right\rangle_Y \\ &+ \left\langle \mathbf{A}^{(21)}[\mathbf{A}^{(11)}]^{-1} \right\rangle_Y \left\langle [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle [\mathbf{A}^{(11)}]^{-1}\mathbf{A}^{(13)} \right\rangle_Y. \end{aligned} \quad (1.68)$$

D'une façon analogue, en effectuant la moyenne en Y pour la loi constitutive locale (1.6) et pour (1.7), (1.9), (1.12) et (1.29), on trouve la loi de comportement macroscopique suivante :

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbb{C}}(x_3)\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \quad (1.69)$$

où $\bar{\mathbb{C}}(x_3)$ est le tenseur de rigidité effectif dont les composantes sont données par $\bar{C}_{ihjk}(x_3) = \bar{A}_{ij}^{(kh)}(x_3)$

et le tenseur de déformations macroscopiques $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ est calculé par

$$E_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}[U_{i,j}(\mathbf{x}, t) + U_{j,i}(\mathbf{x}, t)].$$

Les composantes $\bar{A}_{ij}^{(hk)}(x_3)$ sont celles de $\bar{\mathbf{A}}(x_3)$ obtenue par Eq. (1.68).

Finalement, on peut vérifier que le tenseur de rigidité élastique effectif $\bar{\mathbb{C}}(x_3)$ obtenu par l'utilisation de la méthode d'analyse asymptotique et représenté par les matrices $\bar{\mathbf{A}}^{(kh)}(x_3)$ dans Eqs. (1.63)-(1.68) est identique à celui du matériau stratifié bi-phasique fourni par (1.16). Ainsi, notre conjecture a été prouvée.

1.3 Homogénéisation des matériaux multicouches avec interfaces rugueuses

Dans cette section, le domaine Ω décrit ci-dessus est constitué de deux couches planes parallèles, $\omega^{(1)}$ et $\omega^{(2)}$, et d'une zone d'interface rugueuse $\Omega^{(0)}$ entre elles, qui est homogénéisée suivant la direction x_1 . On désigne par $H^{(1)}$ et $H^{(2)}$ les épaisseurs de $\omega^{(1)}$ et $\omega^{(2)}$ et par l_1 et l_2 les dimensions dans les directions x_1 et x_2 de Ω . Par conséquent, le domaine occupé par Ω est donc défini par $\Omega =]0, l_1[\times]0, l_2[\times] - H^{(0)} - H^{(1)}, H^{(2)}[$. Les matériaux constituant Ω sont homogène dans le plan x_1 - x_2 mais hétérogène dans la direction x_3 .

Dans la suite, afin de déterminer le tenseur de rigidité élastique effectif, désigné par \mathbb{C}^* , du matériau composite multicouche Ω , la zone d'interface rugueuse $\Omega^{(0)}$ est remplacée par la couche équivalente d'épaisseur $H^{(0)}$ dont le tenseur de rigidité élastique effectif $\bar{\mathbb{C}}(x_3)$ est donné par Eqs. (1.16). L'interface Γ_1 entre $\Omega^{(0)}$ et $\omega^{(1)}$ et celle entre $\Omega^{(0)}$ et $\omega^{(2)}$ sont parfaites. Finalement, en appliquant la méthode d'homogénéisation classique au composite multicouche Ω dont les trois couches $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ et $\Omega^{(0)}$ sont homogènes dans le plan des couches mais hétérogènes dans la direction normale au plan des couches, on obtient l'expression suivante pour le tenseur de rigidité élastique effectif :

$$\mathbb{C}^* = \langle \mathbb{L}^\perp \rangle_\Omega + \langle \mathbb{C} \mathbb{M}^\perp \rangle_\Omega \langle \mathbb{M}^\perp \rangle_\Omega^{-1} \langle \mathbb{M}^\perp \mathbb{C} \rangle_\Omega \quad (1.70)$$

où

$$\mathbb{C}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbb{C}^{(1)}(x_3), & \text{si } -(H^{(0)} + H^{(1)}) \leq x_3 \leq -H^{(0)}, \\ \bar{\mathbb{C}}(x_3), & \text{si } -H^{(0)} < x_3 < 0, \\ \mathbb{C}^{(2)}(x_3), & \text{si } 0 \leq x_3 \leq H^{(2)}, \end{cases} \quad (1.71)$$

et les tenseurs \mathbb{M}^\perp et \mathbb{L}^\perp sont définis par

$$\mathbb{M}^\perp = (\mathbb{P}_2^\perp \mathbb{C} \mathbb{P}_2^\perp)^{-1}, \quad \mathbb{L}^\perp = (\mathbb{P}_1^\perp \mathbb{C}^{-1} \mathbb{P}_1^\perp)^{-1}, \quad (1.72)$$

tels que $\mathbb{L}^\perp (\mathbb{P}_1^\perp \mathbb{C}^{-1} \mathbb{P}_1^\perp) = (\mathbb{P}_1^\perp \mathbb{C}^{-1} \mathbb{P}_1^\perp) \mathbb{L}^\perp = \mathbb{P}_1^\perp$ et $\mathbb{M}^\perp (\mathbb{P}_2^\perp \mathbb{C} \mathbb{P}_2^\perp) = (\mathbb{P}_2^\perp \mathbb{C} \mathbb{P}_2^\perp) \mathbb{M}^\perp = \mathbb{P}_2^\perp$ avec les projecteurs \mathbb{P}_1^\perp et \mathbb{P}_2^\perp donnés par

$$\mathbb{P}_1^\perp = \mathbb{I} - \mathbb{P}_2^\perp = (\mathbf{I} - \mathbf{N}^\perp) \underline{\otimes} (\mathbf{I} - \mathbf{N}^\perp). \quad (1.73)$$

Ici, $\mathbf{N}^\perp = \mathbf{n}^\perp \otimes \mathbf{n}^\perp$ avec $\mathbf{n}^\perp = \mathbf{e}_3$. L'opérateur de moyenne $\langle \bullet \rangle_\Omega$ dans (1.70) est défini par

$$\langle \bullet \rangle_\Omega = \frac{1}{H} \left(\int_{-(H^{(0)}+H^{(1)})}^{-H^{(0)}} \bullet^{(1)} dx_3 + \int_{-H^{(0)}}^0 \bar{\bullet} dx_3 + \int_0^{H^{(2)}} \bullet^{(2)} dx_3 \right), \quad (1.74)$$

avec $H = H^{(0)} + H^{(1)} + H^{(2)}$.

Lorsque les deux matériaux constituant le composite initial sont linéairement élastiques et isotropes, le matériau multicouche homogénéisé est donc élastique orthotrope dont le tenseur de rigidité élastique effectif \mathbb{C}^* est obtenu par (1.70). Dans la suite, on considère le cas particulier où l'interface Γ est en dent de scie. En conséquence, l'expression de $y_2 - y_1$ dans (1.44) s'écrit simplement par

$$y_1 - y_2 = 1 + \frac{x_3}{H_0}. \quad (1.75)$$

Finalement, les composantes non-nulles de \mathbb{C}^* ont les expressions suivantes :

$$C_{3333}^* = [v_0\alpha_{11} + \langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle]^{-1}, \quad C_{1133}^* = [v_0\beta_{11} + \langle \lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle] C_{3333}^*, \quad (1.76)$$

$$C_{2233}^* = [v_0\beta_{12} + \langle \lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle] C_{3333}^*, \quad C_{2323}^* = [2v_0\alpha_{22} + \langle 1/\mu \rangle]^{-1}, \quad (1.77)$$

$$C_{1313}^* = [2v_0\alpha_{33} + \langle 1/\mu \rangle]^{-1}, \quad C_{1212}^* = \langle \mu \rangle + \frac{1}{2}v_0\Gamma_{33}, \quad (1.78)$$

$$\begin{aligned} C_{1111}^* &= \langle 4\mu(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu) \rangle \langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle C_{3333}^* + \langle \lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle^2 C_{3333}^* \\ &\quad - v_0^2\beta_{11}^2 C_{3333}^* + 4v_0\alpha_{11} \langle (\lambda + \mu)\mu/(\lambda + 2\mu) \rangle C_{3333}^* + 2\beta_{11}v_0 C_{1133}^* \\ &\quad + v_0(\Gamma_{11} - \eta_{11}), \end{aligned} \quad (1.79)$$

$$\begin{aligned} C_{2222}^* &= \langle 4\mu(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu) \rangle \langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle C_{3333}^* + \langle \lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle^2 C_{3333}^* \\ &\quad - v_0^2\beta_{12}^2 C_{3333}^* + 4v_0\alpha_{11} \langle (\lambda + \mu)\mu/(\lambda + 2\mu) \rangle C_{3333}^* + 2\beta_{12}v_0 C_{1133}^* \\ &\quad + v_0(\Gamma_{22} - \eta_{22}), \end{aligned} \quad (1.80)$$

$$\begin{aligned} C_{1122}^* &= \langle 2\mu\lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle \langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle C_{3333}^* + \langle \lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle^2 C_{3333}^* \\ &\quad - v_0^2\beta_{12}^2 C_{3333}^* + v_0(\Gamma_{12} - \eta_{12}) + v_0(\beta_{12} + \beta_{11})C_{2233}^* \\ &\quad + 2v_0\alpha_{11} \langle \mu\lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle C_{3333}^*. \end{aligned} \quad (1.81)$$

où $v_i = H^{(i)}/H$ avec $i = 0, 1, 2$; $\langle \bullet \rangle = v_1 \bullet^{(1)} + v_2 \bullet^{(2)}$; $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \beta_{11}, \beta_{12}, \Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_{22}, \Gamma_{33}, \eta_{11}, \eta_{22}$ et η_{33} sont définis par :

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= k_{11} \ln \varphi_1 + k_{12} \ln \varphi_2, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)^{-1} \ln(\mu_1/\mu_2), \\ \alpha_{33} &= \frac{1}{4}c_0(\mu_1 + \mu_2)\mu_1^{-1}\mu_2^{-1}, \quad \beta_{11} = k_{21} \ln \varphi_1 + k_{22} \ln \varphi_2, \\ \beta_{12} &= k_{33} + k_{31} \ln \varphi_1 + k_{32} \ln \varphi_2, \quad \gamma_{33} = 2\mu_1\mu_2(\mu_1 - \mu_2)^{-1} \ln(\mu_1/\mu_2), \\ \Gamma_{11} &= c_4 \ln \varphi_3, \quad \gamma_{12} = k_{41} + c_4 k_{42} \ln \varphi_3, \quad \gamma_{22} = -\frac{1}{2}k_{53} + k_{51} + c_4 k_{52} \ln \varphi_3, \\ \eta_{11} &= h_6(k_{61} \ln \varphi_1 + k_{62} \ln \varphi_2 + k_{63} \ln \varphi_3), \\ \eta_{12} &= k_{74} + h_7(k_{71} \ln \varphi_1 + k_{72} \ln \varphi_2 + k_{73} \ln \varphi_3), \\ \eta_{22} &= -\frac{1}{2}k_{84} + k_{85} + h_8(k_{81} \ln \varphi_1 + k_{82} \ln \varphi_2 + k_{83} \ln \varphi_3), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{\sqrt{(\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2)(\mu_1 + \lambda_1 + \mu_2)}}{\sqrt{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_2)}} \right), \quad \xi_2 = -1 - \xi_1, \\
\xi_3 &= -\frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)}{\lambda_1 + 2\mu_1 - \lambda_2 - 2\mu_2}, \quad \varphi_1 = \frac{\xi_1}{\xi_1 + 1}, \quad \varphi_2 = \frac{\xi_2}{\xi_2 + 1}, \quad \varphi_3 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_2 + 2\mu_2}, \\
a_4 &= 2(\lambda_2\mu_1 - \mu_2\lambda_1), \quad b_4 = \lambda_2(\lambda_1 + 2\mu_1), \quad c_4 = (\lambda_1 + 2\mu_1 - \lambda_2 - 2\mu_2)^{-1}, \\
d_4 &= (\lambda_1 + 2\mu_1), \quad a_5 = (\mu_1 - \mu_2)^{-1}(\mu_1 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_2)^{-1}, \quad a_1 = -\frac{1}{4}a_5c_4^{-1}, \\
b_1 &= -\frac{1}{4}d_4a_5, \quad a_2 = -\frac{1}{4}a_4a_5, \quad b_2 = -\frac{1}{4}\lambda_2d_4a_5, \quad a_3 = -\frac{1}{4}a_4a_5, \quad a_6 = a_4^2, \\
b_3 &= -\frac{1}{8}d_4a_5^2(2\lambda_2\mu_1 - 2\mu_2\lambda_1 + \lambda_2\lambda_1 - \lambda_2^2)(\mu_1 - \mu_2), \quad b_6 = 2a_4b_4, \quad c_6 = b_4^2, \\
k_{11} &= -\frac{a_1\xi_1 + b_1}{\xi_2 - \xi_1}, \quad k_{12} = \frac{a_1\xi_2 + b_1}{\xi_2 - \xi_1}, \quad k_{21} = -\frac{a_2\xi_1 + b_2}{\xi_2 - \xi_1}, \quad k_{22} = \frac{a_2\xi_2 + b_2}{\xi_2 - \xi_1}, \\
k_{31} &= -\frac{a_3\xi_1 + b_3}{\xi_2 - \xi_1}, \quad k_{32} = \frac{a_3\xi_2 + b_3}{\xi_2 - \xi_1}, \quad k_{33} = \frac{1}{2}a_5(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2), \\
k_{41} &= a_4c_4, \quad k_{42} = b_4 - k_{41}d_4, \quad k_{51} = 4c_4^2a_5^{-1}(\lambda_2 + 2\mu_2), \quad d_8 = -4a_5^{-1}(c_4^{-1} + d_4), \\
k_{52} &= d_4c_4^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_2 + 2\mu_2), \quad f_7 = -d_4[4a_5^{-1} - (\lambda_2 + 2\mu_2)c_4^{-1}], \\
k_{85} &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)[c_4(3\lambda_2\mu_1 - 2\mu_2\lambda_1 - \lambda_2\mu_2) - a_4c_4^2(\mu_1 - \mu_2)]}{\mu_1 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_2}, \quad k_{74} = a_4c_4k_{33}, \\
a_7 &= -2b_4(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_1 - \lambda_2) - 2a_4(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 - 2\lambda_2\mu_1) + 4k_{74}a_5^{-1}(c_4^{-1} + d_4), \\
b_7 &= -2b_4(\lambda_1\mu_1 - 3\lambda_2\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \mu_2\lambda_1) - f_7k_{74}, \quad k_{53} = -4c_4a_5^{-1}, \\
c_7 &= d_4^2[\lambda_2^2 - (\lambda_2 + 2\mu_2)k_{74}], \quad k_{84} = -c_4a_5(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\mu_1 - \mu_2)^2, \\
a_8 &= -\lambda_2(6\mu_1 + \lambda_1)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2)^2 - f_7k_{84} - k_{85}d_8, \\
b_8 &= -4b_4(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 - 2\lambda_2\mu_1) - d_4^2(\lambda_2 + 2\mu_2)k_{84} + f_7k_{85}, \\
c_8 &= d_4^2[\lambda_2^2 - (\lambda_2 + 2\mu_2)k_{85}], \quad h_6 = h_7 = h_8 = -\frac{1}{4}c_4a_5, \\
\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \xi_2 + \xi_3 & \xi_1 + \xi_3 & \xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2\xi_3 & \xi_1\xi_3 & \xi_1\xi_2 \end{bmatrix}, \\
[k_{61} & k_{62} & k_{62}]^T &= \mathbf{K}^{-1} [a_6 & -b_6 & c_6]^T, \\
[k_{71} & k_{72} & k_{72}]^T &= \mathbf{K}^{-1} [a_7 & -b_7 & c_7]^T, \\
[k_{81} & k_{82} & k_{82}]^T &= \mathbf{K}^{-1} [a_8 & -b_8 & c_8]^T.
\end{aligned}$$

1.4 Exemple numérique

Pour illustrer numériquement les résultats obtenus ci-dessus, le rapport des modules d'Young et les coefficients de Poisson de deux phases sont choisis comme suit :

$$E_1/E_2 = 10, \quad \nu_1 = 0, 3, \quad \nu_2 = 0, 2.$$

A titre d'exemple, l'interface entre ces deux couches est supposée en dent de scie.

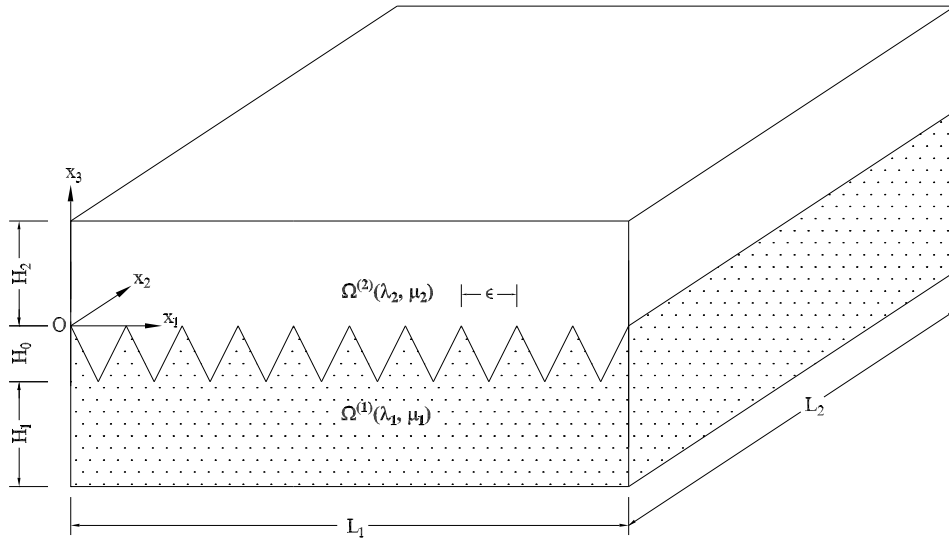


FIGURE 1.3: Plaque bi-phasique avec l'interface très rugueuse en dent de scie.

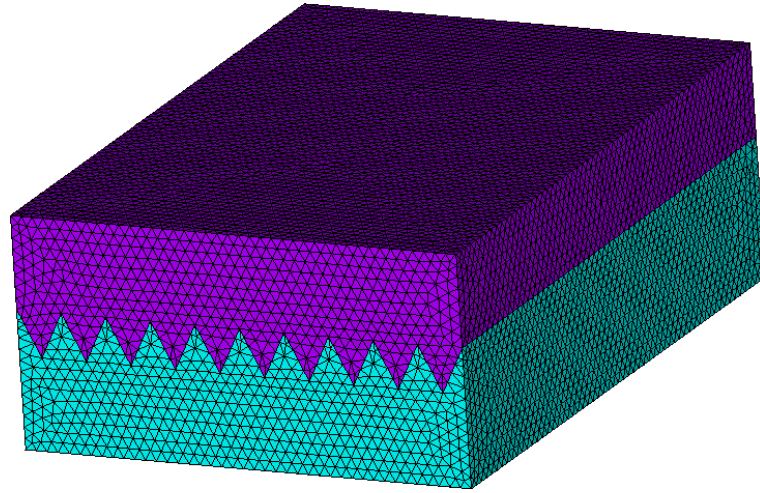


FIGURE 1.4: Maillage de la plaque bi-phasique avec l'interface très rugueuse en dent de scie.

Tout d'abord, afin d'étudier l'effet de la zone d'interface rugueuse sur les propriétés élastiques effectives du matériau composite, on considère le cas où l'épaisseur H_0 de la zone d'interface rugueuse varie de 0 à $1m$ tandis que la période ϵ de la rugosité de l'interface, les épaisseurs H_1 et H_2 ainsi la longueur L_1 et la largeur L_2 du composite multicouche sont fixées à $\epsilon = 0,1m$, $H_1 = H_2 = 0,5m$ et $L_1 = L_2 = 10m$. Les propriétés effectives normalisées C_{1111}^*/E_2 , C_{2222}^*/E_2 et C_{3333}^*/E_2 calculées par (1.79), (1.80) et (1.76) sont tracées dans la figure (1.5) en fonction de l'épaisseur de la zone d'interface rugueuse. Puis, les valeurs des propriétés effectives sont comparées à celles obtenues par la méthode des éléments finis

(FEM). On constate qu'il y a une très bonne concordance entre la solution analytique et la solution numérique obtenue par FEM pour les propriétés élastiques effectives. De plus, dans la figure 5, on observe que le module effectif C_{1111}^* diminue tandis que C_{2222}^* reste quasiment constant. De plus, C_{3333}^* augmente quand l'épaisseur de la zone de l'interface rugueuse augmente.

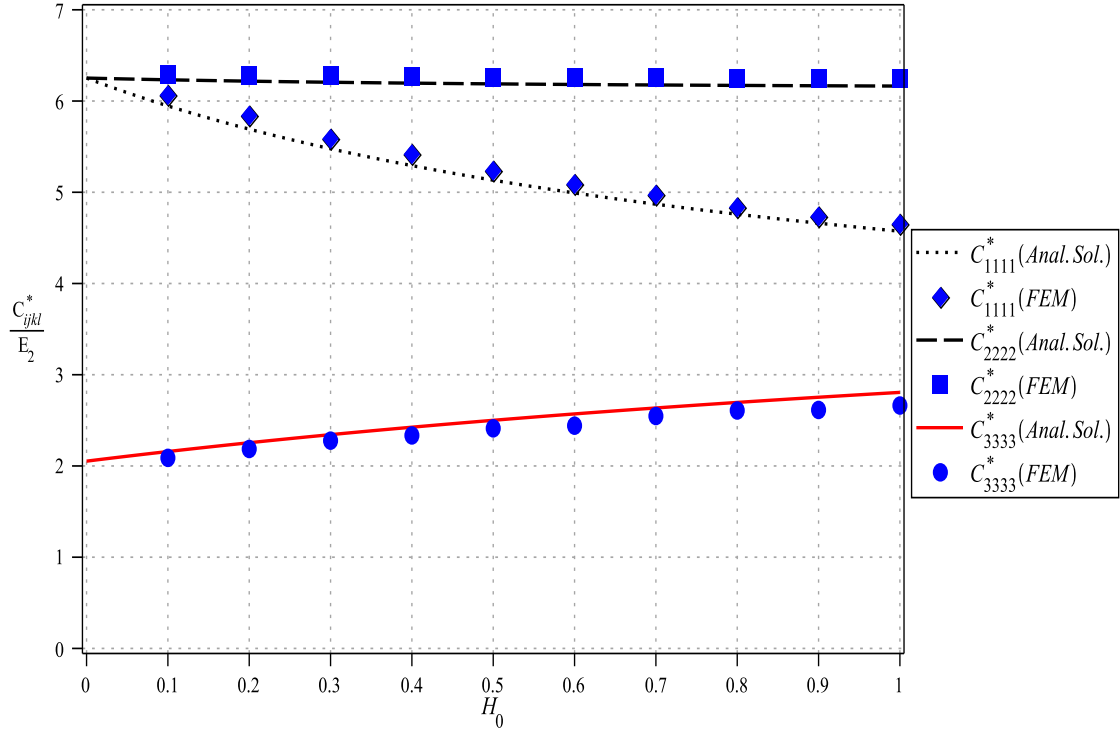


FIGURE 1.5: Propriétés effectives normalisées C_{1111}^*/E_2 , C_{2222}^*/E_2 et C_{3333}^*/E_2 en fonction de l'épaisseur H_0 de la zone d'interface très rugueuse.

D'autre part, pour étudier l'effet de la période ϵ de la rugosité sur les propriétés élastiques effectives, on considère un deuxième exemple où les épaisseurs H_1 , H_2 et H_0 , la longueur L_1 et la largeur L_2 sont constantes, à savoir $H_1 = H_2 = H_0 = 0,5m$ et $L_1 = L_2 = 10m$, et la période ϵ de la rugosité varie de $0,1m$ à $1m$. Dans la figure 1.6, le rapport entre la valeur de C_{1111}^* calculée par FEM et la valeur de C_{1111}^* obtenue par la solution analytique est présenté en fonction de $1/\epsilon$ avec $H_0 = 0,2m$. D'une manière analogue, les rapports entre les valeurs de C_{2222}^* et de C_{3333}^* obtenues par FEM et celles données par les solution analytiques sont présentés dans les figure 1.7 et 1.8 en fonction de $1/\epsilon$ avec $H_0 = 0,1m$. On remarque que la solution analytique s'approche d'avantage de la valeur obtenue par FEM quand la valeur de ϵ diminue. Ceci confirme la validité des expressions analytiques (1.76)-(1.81) des composantes du tenseur de rigidité élastique effectif.

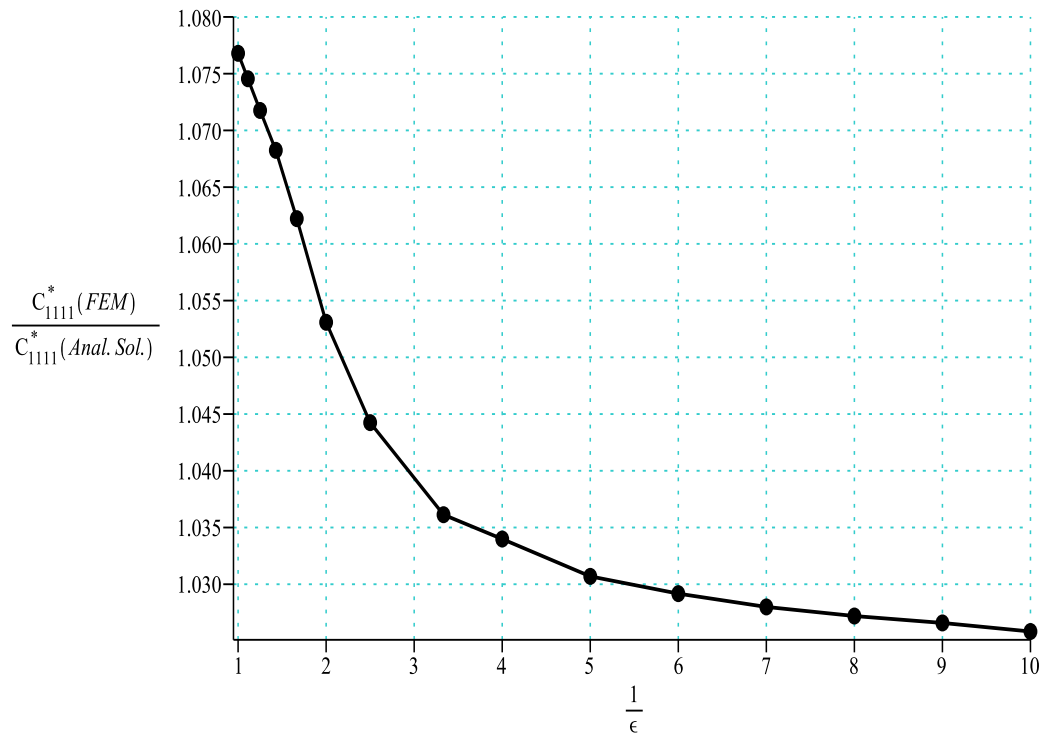


FIGURE 1.6: Module effectif normalisé de C_{1111}^* en fonction de $1/\epsilon$ avec $H_0 = 0.2$.

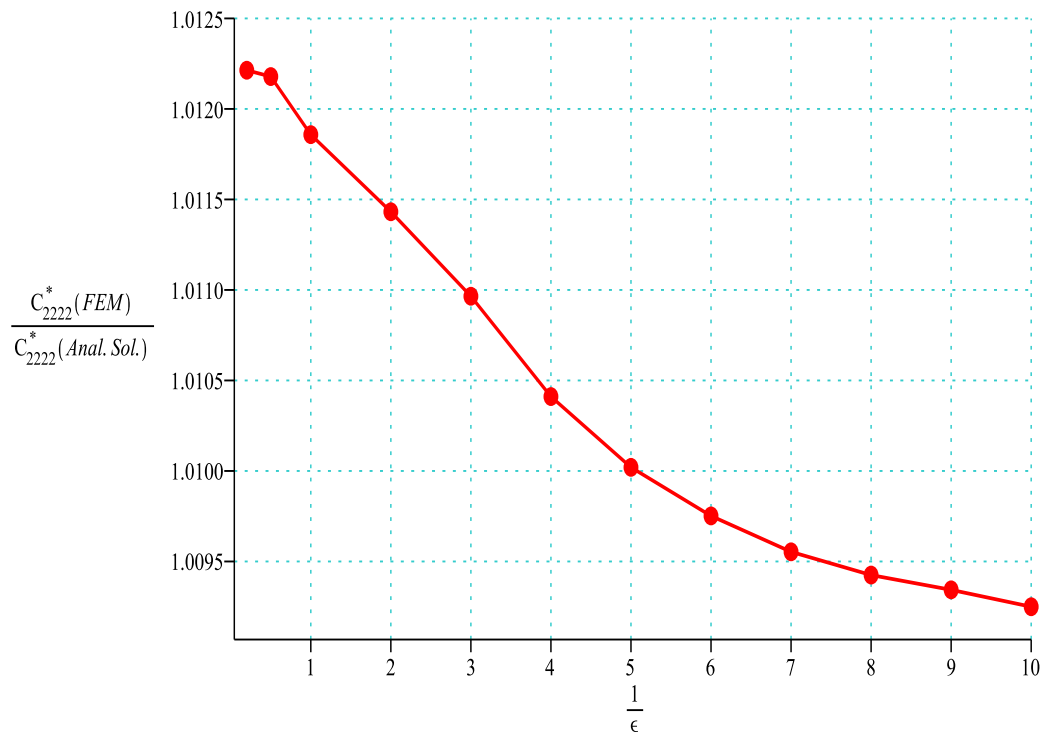


FIGURE 1.7: Module effectif normalisé de C_{2222}^* en fonction de $1/\epsilon$ avec $H_0 = 0.1$.

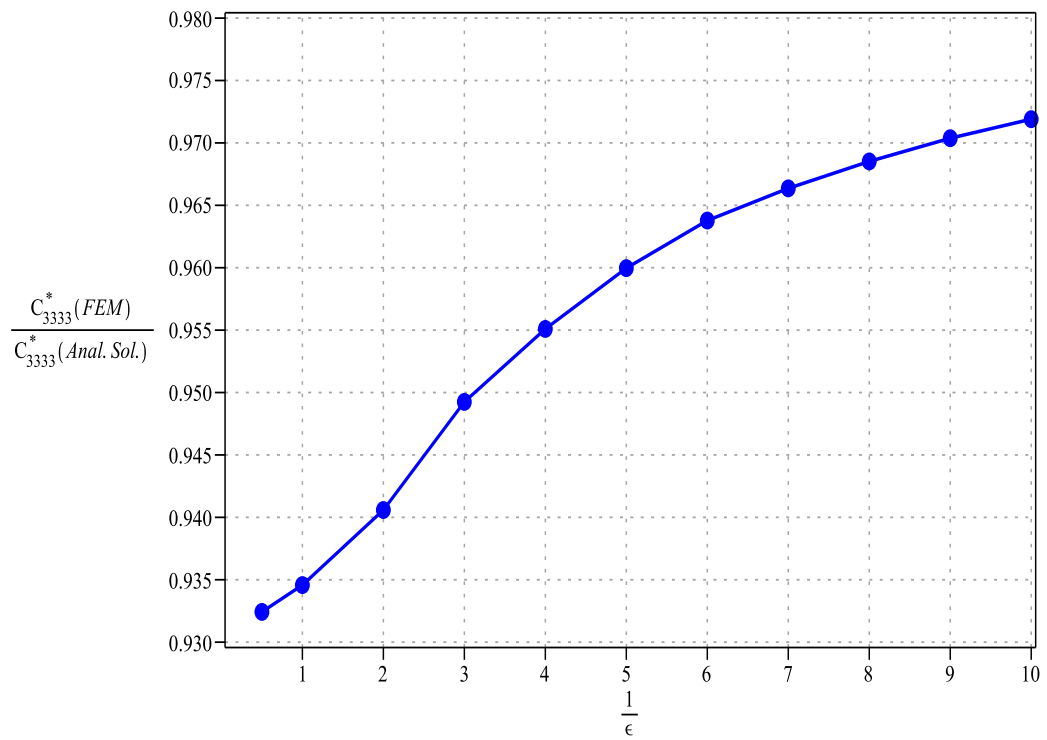


FIGURE 1.8: Module effectif normalisé de C_{3333}^* en fonction de $1/\epsilon$ avec $H_0 = 0.1$.

Chapitre 2

Interfaces planes thermiques ondulées dans une seule direction

2.1 Lois constitutives locales

On considère un domaine Ω constitué de deux sous-domaines, Ω^+ et Ω^- , dans un espace Cartésien tridimensionnel (3D) (Fig. 2.1). Les deux matériaux (ou phases) formant Ω^+ et Ω^- sont différents et supposés individuellement homogènes. L'interface Γ entre ces deux matériaux est périodiquement rugueuse selon la direction Ox_1 et se présente par la fonction

$$x_3 = h(y) = h\left(\frac{x_1}{\epsilon}\right) \quad (2.1)$$

où ϵ la période de Γ . Sans perte de généralité, les valeurs maximale et minimale de la fonction $h(y)$ sont respectivement dénotées par 0 et $-H_0$ avec $H_0 > 0$. On suppose que l'interface Γ est très rugueuse, c'est à dire que $0 < \epsilon \ll H_0$.

Le phénomène physique étudié dans ce chapitre concerne la conduction thermique. On adopte la loi de Fourier :

$$\mathbf{q}^{(i)} = -\mathbf{K}^{(i)} \nabla T^{(i)} \quad (2.2)$$

où $\mathbf{q}^{(i)}$, $\mathbf{K}^{(i)}$ et $T^{(i)}$ sont respectivement le vecteur flux de chaleur, le tenseur de conductivité et la température dans la phase $i = 1$ ou 2. Le tenseur $\mathbf{K}^{(i)}$ est un tenseur symétrique et défini positif du deuxième ordre. Le vecteur flux de chaleur $\mathbf{q}^{(i)}$ doit vérifier l'équation de la chaleur :

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^{(i)} + P = \rho_c^{(i)} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.3)$$

où $\rho_c^{(i)}$ est la chaleur spécifique volumique de la phase i en $J.K^{-1}.m^{-3}$ et P représente une source de chaleur en $W.m^{-3}$. En introduisant (2.2) dans (2.3), on obtient

$$-K_{jk}^{(i)} T_{,kj} + P = \rho_c^{(i)} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.4)$$

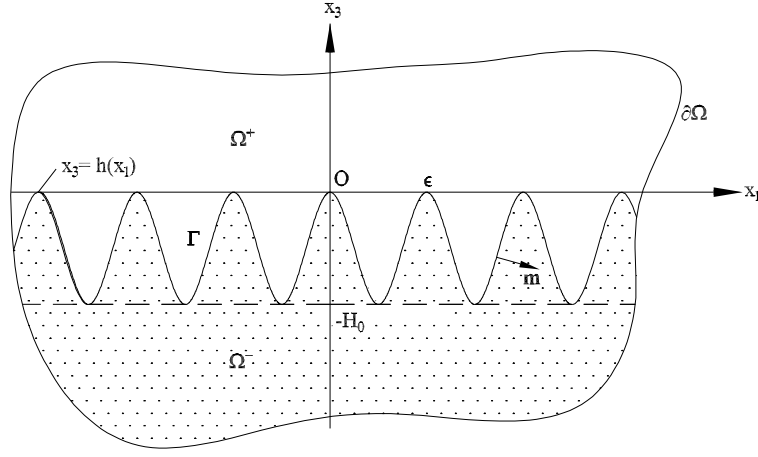


FIGURE 2.1: L'interface rugueuse Γ entre les deux sous-domaines Ω^+ et Ω^- est périodiquement rugueuse selon la direction Ox_1 et se présente par la fonction $x_3 = h(x_1)$

Comme l'interface Γ entre les deux phases est supposée parfaite, la température et la composante normale du flux de chaleur doivent être continus à travers elle. On peut écrire ces conditions de continuité sous la forme

$$[\mathbf{q}\mathbf{m}]_{\Gamma} = 0, \quad (2.5)$$

$$[T]_{\Gamma} = 0, \quad (2.6)$$

où $[\cdot]_{\Gamma}$ signifie le saut à travers l'interface Γ et le vecteur unitaire \mathbf{m} normal à l'interface Γ est déterminé par

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{1 + (h_{,y}/\epsilon)^2}} \left(\frac{1}{\epsilon} h_{,y}, 0, -1 \right)^T. \quad (2.7)$$

Ici et dans la suite, $(\cdot)_{,y}$ symbolise la dérivée par rapport à y . En introduisant (2.7) dans (2.5) et en tenant compte de (2.2), (2.5) devient

$$\epsilon^{-1} [h_{,y} K_{1j} T_{,j}]_{\Gamma} - [K_{3j} T_{,j}]_{\Gamma} = 0. \quad (2.8)$$

2.2 Homogénéisation de la zone d'interface rugueuse

Pour homogénéiser la zone d'interface rugueuse, on utilise la méthode d'analyse asymptotique présentée dans le chapitre précédent. Plus précisément, on développe la température $T_{\epsilon}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathfrak{T}(x_1, x_2, x_3, y, \epsilon, t)$ en fonction de ϵ comme suit :

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} = & V + \epsilon \left(N^{(1)}V + N^{(11)}V_{,1} + N^{(12)}V_{,2} + N^{(13)}V_{,3} \right) \\ & + \epsilon^2 \left(N^{(2)}V + N^{(21)}V_{,1} + N^{(22)}V_{,2} + N^{(23)}V_{,3} + N^{(211)}V_{,11} + N^{(212)}V_{,12} \right. \\ & \left. + N^{(213)}V_{,13} + N^{(222)}V_{,22} + N^{(223)}V_{,23} + N^{(233)}V_{,33} \right) + 0(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (2.9)$$

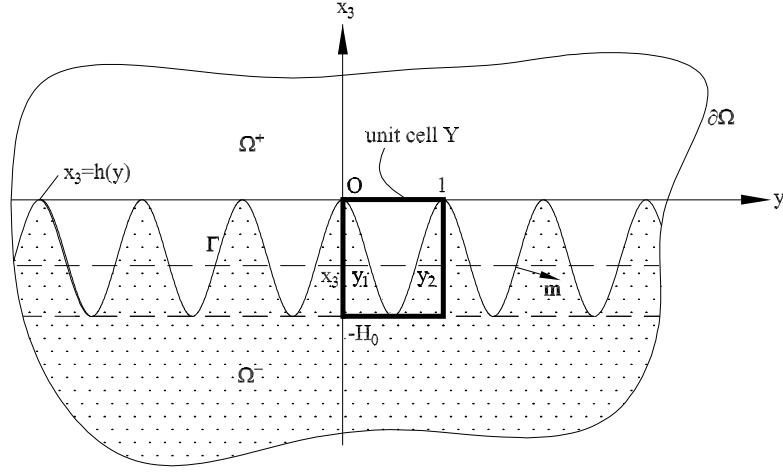


FIGURE 2.2: L'interface Γ peut se récrire par la fonction $x_3 = h(y_1)$

où $V = V(x_1, x_2, x_3, t)$ est indépendant de y ; $N^{(1)}, N^{(11)}, N^{(12)}, N^{(13)}, N^{(2)}, N^{(21)}, N^{(22)}, N^{(23)}, N^{(211)}, N^{(212)}, N^{(213)}, N^{(222)}$ et $N^{(223)}$ sont des fonctions de y, x_2 et x_3 , mais indépendantes de x_1 et du temps t .

Puisque $y = x_1/\epsilon$, les dérivées de la température par rapport aux variables spatiales sont données par

$$T_{,1} = \mathfrak{T}_{,1} + \epsilon^{-1}\mathfrak{T}_{,y}, \quad T_{,2} = \mathfrak{T}_{,2}, \quad T_{,3} = \mathfrak{T}_{,3}.$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} T_{,1} &= V_{,1} + \epsilon \left(N^{(1)}V_{,1} + N^{(11)}V_{,11} + N^{(12)}V_{,21} + N^{(13)}V_{,31} \right) \\ &+ \epsilon^2 \left(N^{(2)}V_{,1} + N^{(21)}V_{,11} + N^{(22)}V_{,21} + N^{(23)}V_{,31} + N^{(211)}V_{,111} + N^{(212)}V_{,121} \right. \\ &+ \left. N^{(213)}V_{,131} + N^{(222)}V_{,221} + N^{(223)}V_{,231} + N^{(233)}V_{,331} \right) + N_{,y}^{(1)}V + N_{,y}^{(11)}V_{,1} \\ &+ N_{,y}^{(12)}V_{,2} + N_{,y}^{(13)}V_{,3} + \epsilon \left(N_{,y}^{(2)}V + N_{,y}^{(21)}V_{,1} + N_{,y}^{(22)}V_{,2} + N_{,y}^{(23)}V_{,3} + N_{,y}^{(211)}V_{,11} \right. \\ &+ \left. N_{,y}^{(212)}V_{,12} + N_{,y}^{(213)}V_{,13} + N_{,y}^{(222)}V_{,22} + N_{,y}^{(223)}V_{,23} + N_{,y}^{(233)}V_{,33} \right), \\ T_{,2} &= V_{,2} + \epsilon \left([N^{(1)}V]_{,2} + [N^{(11)}V_{,1}]_{,2} + [N^{(12)}V_{,2}]_{,2} + [N^{(13)}V_{,3}]_{,2} \right) \\ &+ \epsilon^2 \left([N^{(2)}V]_{,2} + [N^{(21)}V_{,1}]_{,2} + [N^{(22)}V_{,2}]_{,2} + [N^{(23)}V_{,3}]_{,2} + [N^{(211)}V_{,11}]_{,2} \right. \\ &+ \left. [N^{(212)}V_{,12}]_{,2} + [N^{(213)}V_{,13}]_{,2} + [N^{(222)}V_{,22}]_{,2} + [N^{(223)}V_{,23}]_{,2} + [N^{(233)}V_{,33}]_{,2} \right), \\ T_{,3} &= V_{,3} + \epsilon \left([N^{(1)}V]_{,3} + [N^{(11)}V_{,1}]_{,3} + [N^{(12)}V_{,2}]_{,3} + [N^{(13)}V_{,3}]_{,3} \right) \\ &+ \epsilon^2 \left([N^{(2)}V]_{,3} + [N^{(21)}V_{,1}]_{,3} + [N^{(22)}V_{,2}]_{,3} + [N^{(23)}V_{,3}]_{,3} + [N^{(211)}V_{,11}]_{,3} \right. \\ &+ \left. [N^{(212)}V_{,12}]_{,3} + [N^{(213)}V_{,13}]_{,3} + [N^{(222)}V_{,22}]_{,3} + [N^{(223)}V_{,23}]_{,3} + [N^{(233)}V_{,33}]_{,3} \right). \end{aligned}$$

En introduisant ces équations dans (2.4), (2.5) et (2.6), alors la méthode d'analyse asymptotique demande que les coefficients associés à la variable ϵ soient égaux au zéro.

D'abord, en égalisant es coefficients liés à ϵ^{-1} au zéro, on a

$$\left[K_{11} N_{,y}^{(1)} \right]_{,y} V + \left[K_{11} N_{,y}^{(11)} \right]_{,y} V_{,1} + \left[K_{11} N_{,y}^{(12)} \right]_{,y} V_{,2} + \left[K_{11} N_{,y}^{(13)} \right]_{,y} V_{,3} = 0 \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} & \left[K_{11} N_{,y}^{(1)} V \right]_{\Gamma} + \left[K_{11} \left(1 + N_{,y}^{(11)} \right) V_{,1} \right]_{\Gamma} + \left[\left(K_{12} + K_{11} N_{,y}^{(12)} \right) V_{,2} \right]_{\Gamma} \\ & + \left[\left(K_{13} + K_{11} N_{,y}^{(13)} \right) V_{,3} \right]_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Pour vérifier les équations dernières, on choisit les fonctions $N^{(1)}$, $N^{(11)}$, $N^{(12)}$ et $N^{(13)}$ telles que

$$\begin{aligned} & \left[K_{11} N_{,y}^{(1)} \right]_{,y} = 0, \quad 0 < y < 1, y \neq y_1, y_2, \\ & \left[K_{11} \left(1 + N_{,y}^{(11)} \right) \right]_{,y} = 0, \quad 0 < y < 1, y \neq y_1, y_2, \\ & \left[K_{12} + K_{11} N_{,y}^{(12)} \right]_{,y} = 0, \quad 0 < y < 1, y \neq y_1, y_2, \\ & \left[K_{13} + K_{11} N_{,y}^{(13)} \right]_{,y} = 0, \quad 0 < y < 1, y \neq y_1, y_2, \\ & \left[K_{11} N_{,y}^{(1)} \right]_{\Gamma} = 0, \left[N^{(1)} \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \quad N^{(1)}(0) = N^{(1)}(1), \\ & \left[K_{11} \left(1 + N_{,y}^{(11)} \right) \right]_{\Gamma} = 0, \left[N^{(11)} \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \quad N^{(11)}(0) = N^{(11)}(1), \\ & \left[K_{12} + K_{11} N_{,y}^{(12)} \right]_{\Gamma} = 0, \left[N^{(12)} \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \quad N^{(12)}(0) = N^{(12)}(1), \\ & \left[K_{13} + K_{11} N_{,y}^{(13)} \right]_{\Gamma} = 0, \left[N^{(13)} \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \quad N^{(13)}(0) = N^{(13)}(1), \end{aligned} \quad (2.12)$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions dans l'intervalle $(0, 1)$ de l'équation $h(y) = x_3$. Il résulte de (2.12) que $N_{,y}^{(1)} = 0$. De plus, pour que le coefficient associé à ϵ^0 dans l'équation de continuité à l'interface soit égal au zéro, il faut que

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{ h_{,y} \left[K_{11} \left(N^{(1)} + N_{,y}^{(21)} \right) + K_{12} N_{,2}^{(11)} + K_{13} N_{,3}^{(11)} \right]_{\Gamma} - \left[K_{13} + K_{13} N_{,y}^{(11)} \right]_{\Gamma} \right\} V_{,1} \\ &+ \left\{ h_{,y} \left[K_{11} N_{,y}^{(22)} + K_{12} \left(N^{(1)} + N_{,2}^{(12)} \right) + K_{13} N_{,3}^{(12)} \right]_{\Gamma} - \left[K_{23} + K_{13} N_{,y}^{(12)} \right]_{\Gamma} \right\} V_{,2} \\ &+ \left\{ h_{,y} \left[K_{11} N_{,y}^{(23)} + K_{12} N_{,2}^{(13)} + K_{13} \left(N^{(1)} + N_{,3}^{(13)} \right) \right]_{\Gamma} - \left[K_{33} + K_{13} N_{,y}^{(13)} \right]_{\Gamma} \right\} V_{,3} \\ &+ h_{,y} \left[K_{11} \left(N^{(11)} + N_{,y}^{(211)} \right) \right]_{\Gamma} V_{,11} + h_{,y} \left[K_{11} \left(N^{(12)} + N_{,y}^{(212)} \right) + K_{12} N^{(11)} \right]_{\Gamma} V_{,12} \\ &+ h_{,y} \left[K_{11} \left(N^{(13)} + N_{,y}^{(213)} \right) + K_{13} N^{(11)} \right]_{\Gamma} V_{,13} + h_{,y} \left[K_{11} N_{,y}^{(222)} + K_{12} N^{(12)} \right]_{\Gamma} V_{,22} \\ &+ h_{,y} \left[K_{11} N_{,y}^{(223)} + K_{12} N^{(13)} + K_{13} N^{(12)} \right]_{\Gamma} V_{,23} \\ &+ h_{,y} \left[K_{11} N_{,y}^{(233)} + K_{13} N^{(13)} \right]_{\Gamma} V_{,33} + h_{,y} \left[K_{11} N_{,y}^{(2)} + K_{12} N_{,2}^{(1)} + K_{13} N_{,3}^{(1)} \right]_{\Gamma} V. \end{aligned} \quad (2.13)$$

A partir de l'équation ci-dessus, les fonctions sont choisies telles que :

$$\begin{aligned} & \left[K_{11} N_{,y}^{(2)} + K_{12} N_{,2}^{(1)} + K_{13} N_{,3}^{(1)} \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \\ & \left[K_{11} \left(N^{(1)} + N_{,y}^{(21)} \right) + K_{12} N_{,2}^{(11)} + K_{13} N_{,3}^{(11)} \right]_{\Gamma} = \frac{1}{h_{,y}} \left[K_{13} + K_{13} N_{,y}^{(11)} \right]_{\Gamma} \text{ à } y_1, y_2, \\ & \left[K_{11} N_{,y}^{(22)} + K_{12} \left(N^{(1)} + N_{,2}^{(12)} \right) + K_{13} N_{,3}^{(12)} \right]_{\Gamma} = \frac{1}{h_{,y}} \left[K_{23} + K_{13} N_{,y}^{(12)} \right]_{\Gamma} \text{ à } y_1, y_2, \\ & \left[K_{11} N_{,y}^{(23)} + K_{12} N_{,2}^{(13)} + K_{13} \left(N^{(1)} + N_{,3}^{(13)} \right) \right]_{\Gamma} = \frac{1}{h_{,y}} \left[K_{33} + K_{13} N_{,y}^{(13)} \right]_{\Gamma} \text{ à } y_1, y_2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
\left[K_{11} \left(N^{(11)} + N_{,y}^{(211)} \right) \right]_{\Gamma} &= 0 \text{ à } y_1, y_2, \\
\left[K_{11} \left(N^{(12)} + N_{,y}^{(212)} \right) + K_{12} N^{(11)} \right]_{\Gamma} &= 0 \text{ à } y_1, y_2, \\
\left[K_{11} \left(N^{(13)} + N_{,y}^{(213)} \right) + K_{13} N^{(11)} \right]_{\Gamma} &= 0 \text{ à } y_1, y_2, \\
\left[K_{11} N_{,y}^{(223)} + K_{12} N^{(13)} + K_{13} N^{(12)} \right]_{\Gamma} &= 0 \text{ à } y_1, y_2, \\
\left[K_{11} N_{,y}^{(222)} + K_{12} N^{(12)} \right]_{\Gamma} &= 0 \text{ à } y_1, y_2 \\
\left[K_{11} N_{,y}^{(233)} + K_{13} N^{(13)} \right]_{\Gamma} &= 0 \text{ à } y_1, y_2.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Ensuite, en prescrivant que le coefficient devant ϵ^0 soit nul dans l'équation de la chaleur, on trouve

$$\begin{aligned}
-\rho_c \dot{V} &= -P + \left[K_{11} N_{,y}^{(2)} + 2K_{12} N_{,2}^{(1)} + 2K_{13} N_{,3}^{(1)} \right]_{,y} V \\
&+ \left[K_{11} \left(2N^{(1)} + N_{,y}^{(21)} \right) + 2K_{12} N_{,2}^{(11)} + 2K_{13} N_{,3}^{(11)} \right]_{,y} V_{,1} \\
&+ \left[K_{11} N_{,y}^{(22)} + 2K_{12} \left(N^{(1)} + N_{,2}^{(12)} \right) + 2K_{13} N_{,3}^{(12)} \right]_{,y} V_{,2} \\
&+ \left[K_{11} N_{,y}^{(23)} + 2K_{12} N_{,2}^{(13)} + 2K_{13} \left(N^{(1)} + N_{,3}^{(13)} \right) \right]_{,y} V_{,3} \\
&+ \left[K_{11} + K_{11} \left(2N^{(11)} + N_{,y}^{(211)} \right) \right]_{,y} V_{,11} \\
&+ \left[2K_{12} + K_{11} \left(2N^{(12)} + N_{,y}^{(212)} \right) + 2K_{12} N^{(11)} \right]_{,y} V_{,12} \\
&+ \left[2K_{13} + K_{11} \left(2N^{(13)} + N_{,y}^{(213)} \right) + 2K_{13} N^{(11)} \right]_{,y} V_{,13} \\
&+ \left[2K_{23} + K_{11} N_{,y}^{(223)} + 2K_{12} N^{(13)} + 2K_{13} N^{(12)} \right]_{,y} V_{,23} \\
&+ \left[K_{22} + K_{11} N_{,y}^{(222)} + 2K_{12} N^{(12)} \right]_{,y} V_{,22} + \left[K_{33} + K_{11} N_{,y}^{(233)} + 2K_{13} N^{(13)} \right]_{,y} V_{,33}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

En intégrant l'équation précédente par rapport à y de 0 à 1, on arrive à l'équation

$$\begin{aligned}
-\langle \rho_c \rangle_Y \dot{V} &= -\langle P \rangle_Y + \left\langle K_{11} + K_{11} N_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y V_{,11} + \left\langle K_{11} N_{,y}^{(12)} + K_{12} \left(2 + N_{,y}^{(11)} \right) \right\rangle_Y V_{,12} \\
&+ \left\langle K_{11} N_{,y}^{(13)} + K_{13} \left(2 + N_{,y}^{(11)} \right) \right\rangle_Y V_{,13} + \left\langle K_{22} + K_{12} N_{,y}^{(12)} \right\rangle_Y V_{,22} \\
&+ \left\langle 2K_{23} + K_{12} N_{,y}^{(13)} + K_{13} N_{,y}^{(12)} \right\rangle_Y V_{,23} + \left\langle K_{33} + K_{13} N_{,y}^{(13)} \right\rangle_Y V_{,33} \\
&+ \left\langle \left[K_{12} N_{,2}^{(11)} + K_{13} N_{,3}^{(11)} \right]_{,y} \right\rangle_Y V_{,1} + \left\langle \left[K_{12} N_{,2}^{(12)} + K_{13} N_{,3}^{(12)} \right]_{,y} \right\rangle_Y V_{,2} \\
&+ \left\langle \left[K_{12} N_{,2}^{(13)} + K_{13} N_{,3}^{(13)} \right]_{,y} \right\rangle_Y V_{,3}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

où

$$\langle f \rangle_Y = (y_2 - y_1) f_+ + (1 - y_2 + y_1) f_- \tag{2.18}$$

avec f_+ et f_- étant respectivement les valeurs d'une fonction f dans le domaine supérieur constitué du matériau 1 et dans le domaine inférieur constitué du matériau 2.

Maintenant, après avoir déterminé les fonctions $N_{,y}^{(11)}$, $N_{,y}^{(12)}$ et $N_{,y}^{(13)}$ par les conditions (2.12), on les

insère dans l'équation (2.17), ce qui donne que

$$\begin{aligned}
K_{11}^{(r)} &= \left\langle K_{11} + K_{11} N_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y = \left\langle K_{11}^{-1} \right\rangle_Y^{-1}, \\
K_{22}^{(r)} &= \left\langle K_{22} + K_{12} N_{,y}^{(12)} \right\rangle_Y = \left\langle K_{22} \right\rangle_Y + \left\langle K_{12} K_{11}^{-1} \right\rangle_Y^2 \left\langle K_{11}^{-1} \right\rangle_Y^{-1} - \left\langle K_{12}^2 K_{11}^{-1} \right\rangle_Y, \\
K_{33}^{(r)} &= \left\langle K_{33} + K_{13} N_{,y}^{(13)} \right\rangle_Y = \left\langle K_{33} \right\rangle_Y + \left\langle K_{13} K_{11}^{-1} \right\rangle_Y^2 \left\langle K_{11}^{-1} \right\rangle_Y^{-1} - \left\langle K_{13}^2 K_{11}^{-1} \right\rangle_Y, \\
K_{23}^{(r)} &= K_{32}^{(r)} = \left\langle K_{23} + \frac{1}{2} K_{12} N_{,y}^{(13)} + \frac{1}{2} K_{13} N_{,y}^{(12)} \right\rangle_Y \\
&= \left\langle K_{23} + K_{13} N_{,y}^{(12)} \right\rangle_Y = \left\langle K_{23} + K_{12} N_{,y}^{(13)} \right\rangle_Y \\
&= \left\langle K_{23} \right\rangle_Y + \left\langle K_{13} K_{11}^{-1} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle K_{11}^{-1} K_{12} \right\rangle_Y - \left\langle K_{13} K_{11}^{-1} K_{12} \right\rangle_Y, \\
K_{13}^{(r)} &= K_{31}^{(r)} = \left\langle \frac{1}{2} K_{11} N_{,y}^{(13)} + K_{13} \left(1 + \frac{1}{2} N_{,y}^{(11)} \right) \right\rangle_Y = \left\langle K_{13} + K_{11} N_{,y}^{(13)} \right\rangle_Y \\
&= \left\langle K_{13} + K_{13} N_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y = \left\langle K_{13} K_{11}^{-1} \right\rangle_Y \left\langle K_{11}^{-1} \right\rangle_Y^{-1}, \\
K_{12}^{(r)} &= K_{21}^{(r)} = \left\langle \frac{1}{2} K_{11} N_{,y}^{(12)} + K_{12} \left(1 + \frac{1}{2} N_{,y}^{(11)} \right) \right\rangle_Y = \left\langle K_{12} + K_{11} N_{,y}^{(12)} \right\rangle_Y \\
&= \left\langle K_{12} + K_{12} N_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y = \left\langle K_{11}^{-1} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle K_{11}^{-1} K_{12} \right\rangle_Y. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Comme l'interface Γ est périodiquement rugueuse suivant Ox_1 , on peut écrire l'équation de la chaleur macroscopique sous la forme :

$$- \left(K_{ij}^{(r)} V_{,j} \right)_{,i} + \langle P \rangle_Y = \langle \rho_c \rangle_Y \dot{V}. \tag{2.20}$$

Les résultats obtenus précédemment montrent que, comme dans le cas élastique, on peut remplacer la zone d'interface rugueuse par une couche équivalente dont les composantes du tenseur de conductivité sont déterminées par (2.19).

2.3 Homogénéisation d'un composite multicouche

Dans cette partie, on étudie un domaine Ω composé de trois couches perpendiculaires à l'axe Ox_3 . La couche supérieure d'épaisseur H_1 est constituée du matériau 1 alors que la couche inférieure d'épaisseur H_2 est composée du matériau 2. La couche intermédiaire d'épaisseur H_0 est formée du matériau équivalent de la zone d'interface rugueuse dont ses propriétés thermiques effectives sont donc déterminées par (2.19). L'épaisseur totale du composite tri-couche est $H = H_1 + H_0 + H_2$.

Les composantes du tenseur de conductivité effective du composite multicouche en question peuvent être calculée selon les formules suivantes (Milton, 2002) :

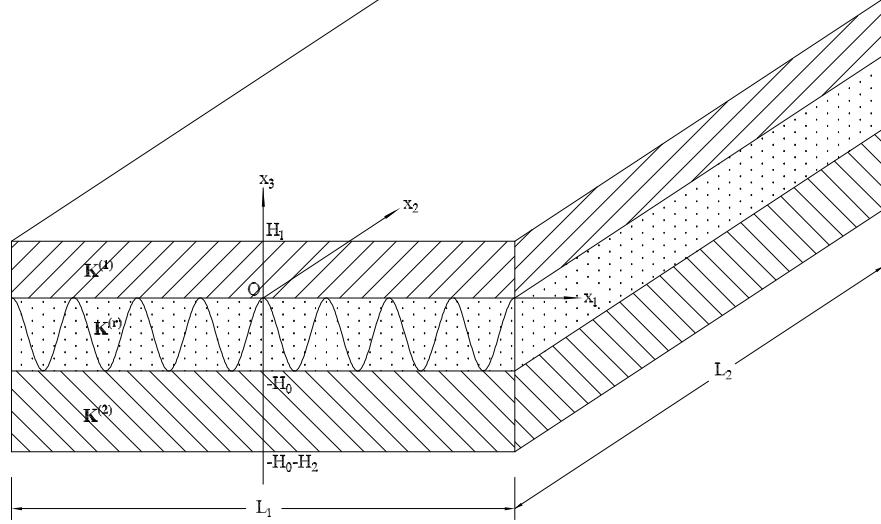


FIGURE 2.3: Plaque composite composée de 3 couches

$$K_{33}^* = \langle K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}^{-1}, \quad (2.21)$$

$$K_{22}^* = \langle K_{22} \rangle_{\Omega} + \langle K_{23} K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}^2 \langle K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}^{-1} - \langle K_{23}^2 K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}, \quad (2.22)$$

$$K_{11}^* = \langle K_{11} \rangle_{\Omega} + \langle K_{13} K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}^2 \langle K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}^{-1} - \langle K_{13}^2 K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}, \quad (2.23)$$

$$K_{12}^* = \langle K_{12} \rangle_{\Omega} + \langle K_{13} K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega} \langle K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}^{-1} \langle K_{33}^{-1} K_{23} \rangle_{\Omega} - \langle K_{13} K_{33}^{-1} K_{23} \rangle_{\Omega}, \quad (2.24)$$

$$K_{13}^* = \langle K_{13} K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega} \langle K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}^{-1}, \quad (2.25)$$

$$K_{23}^* = \langle K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}^{-1} \langle K_{33}^{-1} K_{23} \rangle_{\Omega}, \quad (2.26)$$

où l'opérateur de moyenne $\langle \bullet \rangle_{\Omega}$ est, comme dans le chapitre précédent, défini par

$$\langle \bullet \rangle_{\Omega} = \frac{1}{H} \left(\int_{-(H_0+H_1)}^{-H_0} \bullet^{(1)} dx_3 + \int_{-H_0}^0 \bullet^{(r)} dx_3 + \int_0^{H_2} \bullet^{(2)} dx_3 \right). \quad (2.27)$$

Dans la suite, on étudie en détail le cas où le composite est constitué de deux phases orthotropes dont les tenseurs de conductivité sont :

$$K^{(i)} = \begin{bmatrix} \kappa_{11}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

avec $i = 1, 2$. En plus, l'interface entre les deux phases est en dent de scie. Dans le cas considéré, les termes intervenant dans la définition de l'opérateur de moyenne (2.18) sont donnés par

$$y_2 - y_1 = \frac{x_3 + H_0}{H_0}; \quad 1 - y_2 + y_1 = \frac{-x_3}{H_0}. \quad (2.29)$$

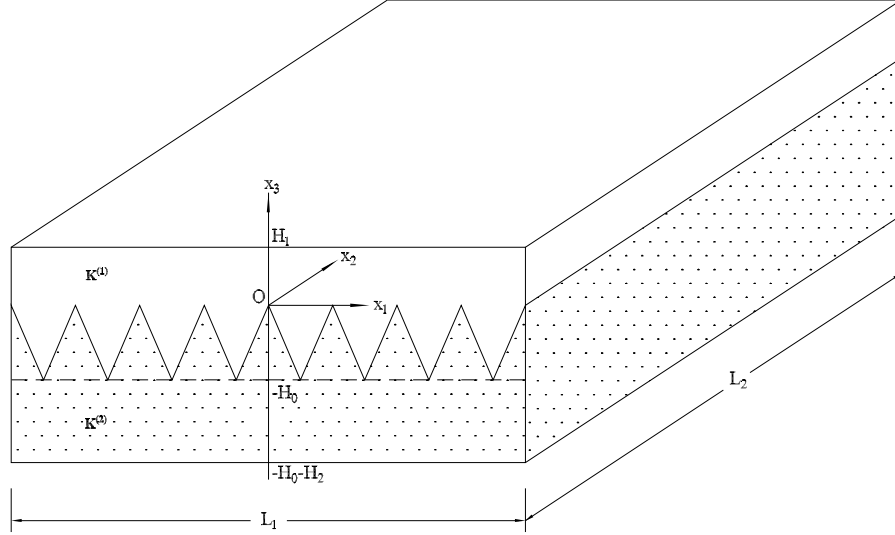


FIGURE 2.4: Plaque composite biphassée avec l'interface rugueuse en dent de scie

En substituant (2.28) et (2.18) dans (2.19), on obtient les composantes non-nulles du tenseur de conductivité de la couche équivalente de la zone d'interface rugueuse :

$$\begin{aligned}
 \kappa_{11}^{(r)} &= \frac{\kappa_{11}^{(1)} \kappa_{11}^{(2)}}{\kappa_{11}^{(2)} + \frac{x_3}{H_0} (\kappa_{11}^{(2)} - \kappa_{11}^{(1)})}, \\
 \kappa_{22}^{(r)} &= \kappa_{22}^{(1)} + \frac{x_3}{H_0} (\kappa_{22}^{(1)} - \kappa_{22}^{(2)}), \\
 \kappa_{33}^{(r)} &= \kappa_{33}^{(1)} + \frac{x_3}{H_0} (\kappa_{33}^{(1)} - \kappa_{33}^{(2)}).
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Les composantes du tenseur de conductivité effective peuvent être calculées par les formules (2.21) à (2.26) avec l'opérateur de moyenne (2.27) :

$$\kappa_{11}^{(*)} = f_1 \kappa_{11}^{(1)} + f_2 \kappa_{11}^{(2)} + f_r \frac{\kappa_{11}^{(1)} \kappa_{11}^{(2)}}{\kappa_{11}^{(1)} - \kappa_{11}^{(2)}} \ln \frac{\kappa_{11}^{(1)}}{\kappa_{11}^{(2)}}, \tag{2.31}$$

$$\kappa_{22}^{(*)} = f_1 \kappa_{22}^{(1)} + f_2 \kappa_{22}^{(2)} + f_r \frac{\kappa_{22}^{(1)} + \kappa_{22}^{(2)}}{2}, \tag{2.32}$$

$$\kappa_{33}^{(*)} = \left(\frac{f_1}{\kappa_{33}^{(1)}} + \frac{f_2}{\kappa_{33}^{(2)}} + \frac{f_r}{\kappa_{33}^{(1)} - \kappa_{33}^{(2)}} \ln \frac{\kappa_{33}^{(1)}}{\kappa_{33}^{(2)}} \right)^{-1} \tag{2.33}$$

avec $f_1 = H_1/H$, $f_2 = H_2/H$ et $f_r = H_0/H$.

2.4 Exemple numérique

Dans cette section, on illustre numériquement les résultats analytiques obtenus ci-dessus concernant le tenseur de conductivité effectif d'un composite multicouche avec interfaces rugueuses. Par simplicité, on prend deux phases isotropes. Les conductivités des deux phases ont le rapport $\kappa_1/\kappa_2 = 10$. Les

dimensions du composite sont : $H_1 = H_2 = 0,5m$ et $L_1 = L_2 = 10m$ où L_1 et L_2 sont respectivement la longueur et la largeur.

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'influence de la zone d'interface rugueuse sur les valeurs des conductivités thermiques effectives lorsque l'épaisseur H_0 de la zone d'interface rugueuse varie de 0 à 1m. Les propriétés effectives normalisées $\kappa_{11}^{(*)}/\kappa_2$ et $\kappa_{33}^{(*)}/\kappa_2$ sont tracées dans la figure 2.5 en fonction de l'épaisseur H_0 de la zone d'interface rugueuse. Ensuite, on les compare avec les résultats numériques calculés par FEM. On trouve une bonne coïncidence entre eux. En plus, dans la figure 2.5, on constate que, quand la valeur de H_0 augmente, la valeur de $\kappa_{11}^{(*)}$ diminue et la valeur de $\kappa_{33}^{(*)}$ augmente. En même temps, la valeur de $\kappa_{22}^{(*)}$ reste quasiment constante. Dans un deuxième temps, on étudie l'effet

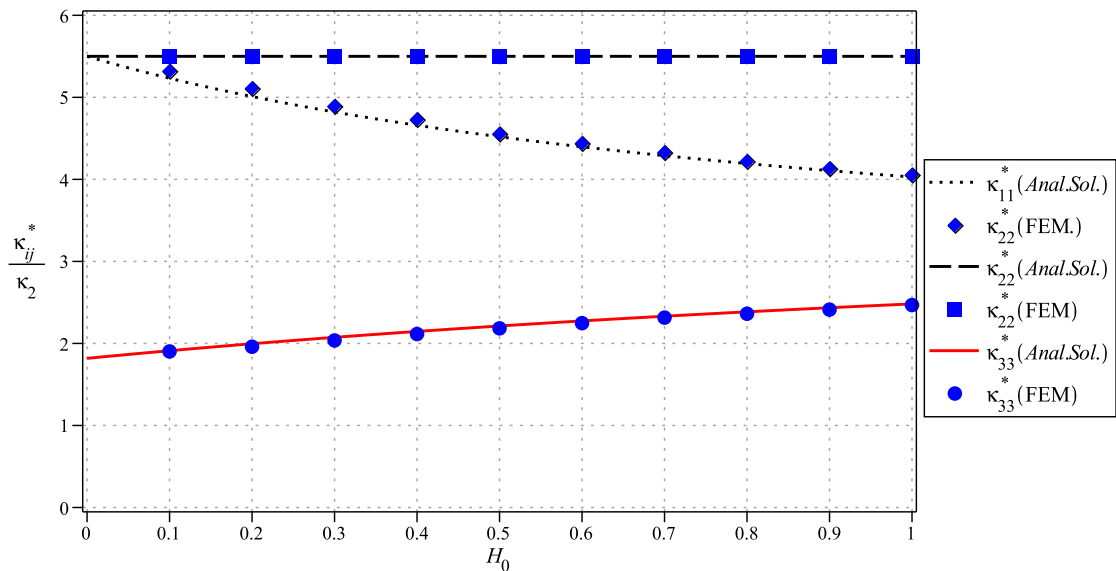


FIGURE 2.5: Conductivité effective normalisées $\kappa_{ij}^{(*)}/\kappa_2$ en fonction de l'épaisseur H_0 de la zone d'interface rugueuse

de la période de rugosité sur les valeurs des conductivités thermiques effectives. La hauteur de la zone d'interface rugueuse est maintenue constante alors que la période de rugosité varie de 0,1m à 1m. Les rapports entre les valeurs de $\kappa_{11}^{(*)}$ et de $\kappa_{33}^{(*)}$ obtenues par (2.31) et (2.33) et celles calculées par FEM sont tracés dans la figure 2.6 en fonction de $1/\epsilon$ avec $H_0 = 0,5m$ pour $\kappa_{11}^{(*)}$ et $H_0 = 0,1m$ pour $\kappa_{33}^{(*)}$.

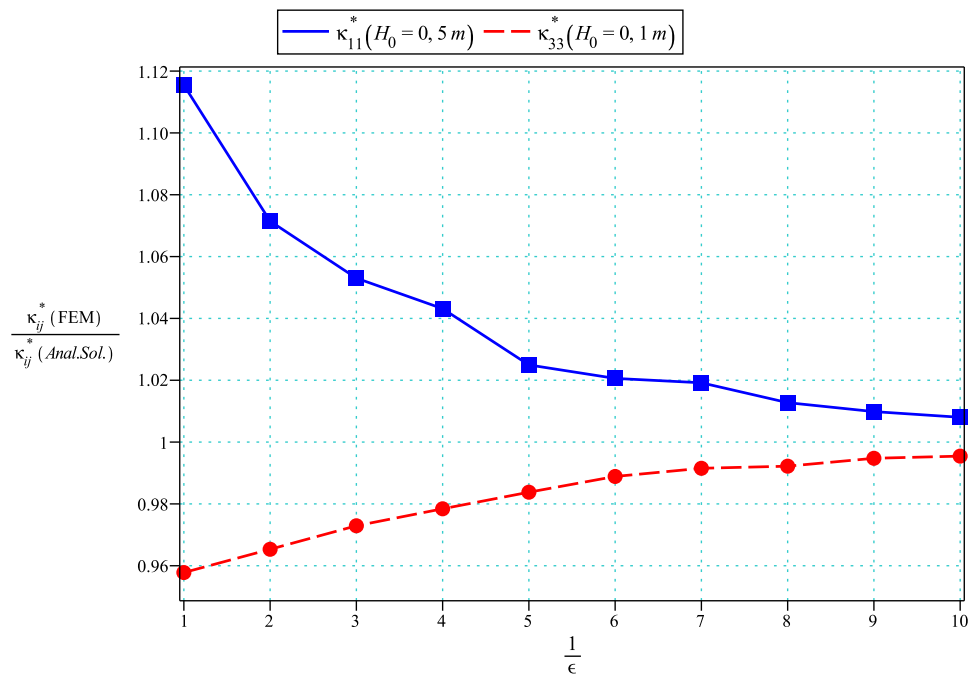


FIGURE 2.6: Conductivité effective normalisée de $\kappa_{ij}^{(*)}/\kappa_2$ en fonction de $1/\epsilon$ avec l'épaisseur H_0 de la zone d'interface rugueuse constante

Chapitre 3

Interfaces élastiques cylindriques ondulées suivant la direction circonférentielle

3.1 Homogénéisation de la zone d'interface rugueuse

3.1.1 Equations de base

On considère un composite cylindrique à base circulaire, constitué de deux phases linéairement élastiques, anisotropes et cylindriquement homogènes (Fig. 1). L'interface Γ entre ces deux phases est supposée périodiquement ondulée suivant la direction circonférentielle et décrite par

$$r = h(y) = h\left(\frac{\theta}{\epsilon}\right) \text{ avec } y = \frac{\theta}{\epsilon}$$

où θ est l'angle du système des coordonnées cylindriques (r, θ, z) et ϵ est la période angulaire $y = \theta/\epsilon$. La valeur minimale de $h(y)$ est désignée par R_1 et la valeur maximale est notée par $R_1 + \delta$. En particulier, on suppose que $0 < \epsilon \ll 1$, ce qui signifie que l'interface Γ est très rugueuse. Le domaine intérieur constitué de la phase 1 et le domaine extérieur formé de la phase 2 sont représentés respectivement par Ω_i et Ω_e . Dans un problème élastique tridimensionnel, les composantes du vecteur de déplacements dans un système des coordonnées cylindriques (r, θ, z) sont

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3$$

avec $x_1 = r$, $x_2 = \theta$ et $x_3 = z$.

La loi de comportement des deux matériaux (ou phases) est la loi de Hooke :

$$\sigma = \mathbb{C}\varepsilon \tag{3.1}$$

où σ et ε sont respectivement les tenseurs de contraintes et de déformations locales. En utilisant la

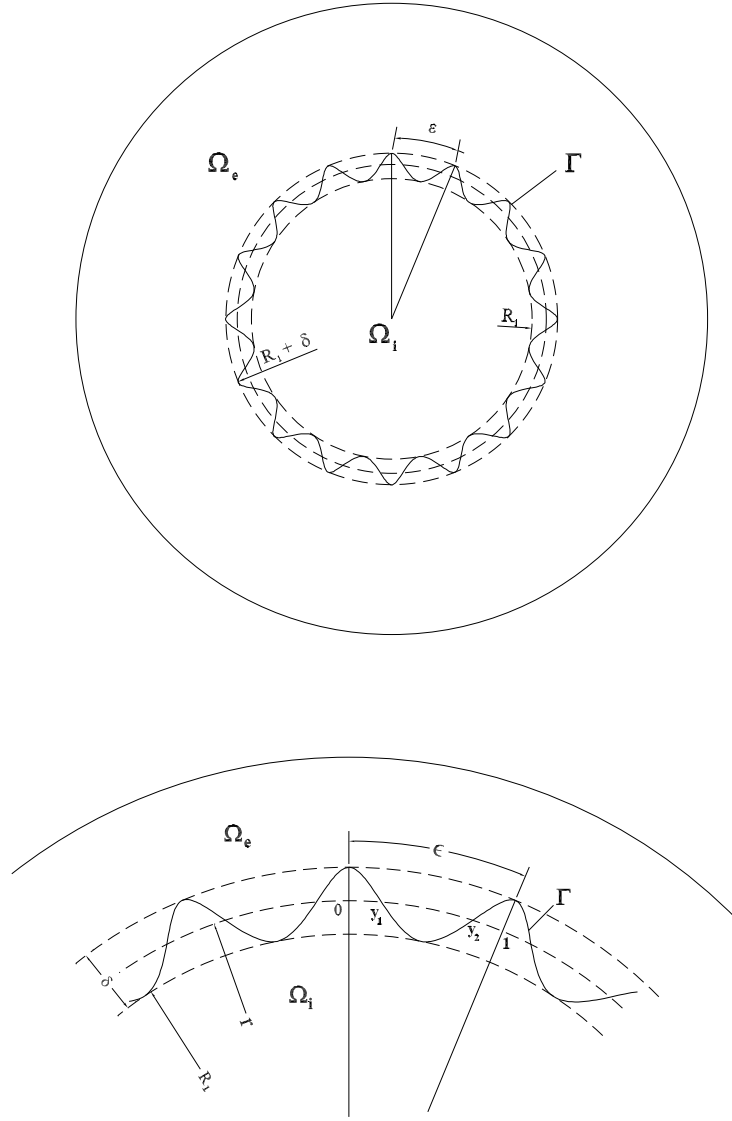


FIGURE 3.1: Modèle d'interface rugueuse

notation de Voigt, on peut écrire (3.1) sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

où les indices sont définis par $1 = r$, $2 = \theta$ et $3 = z$. Le tenseur de déformations est lié au vecteur de

déplacements par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= u_{r,r}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{r}(u_{\theta,\theta} + u_r), \quad \varepsilon_{33} = u_{z,z}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(u_{\theta,z} + \frac{1}{r}u_{z,\theta}\right), \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2}(u_{r,z} + u_{z,r}), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(u_{\theta,r} + \frac{1}{r}u_{r,\theta} - \frac{1}{r}u_\theta\right).\end{aligned}\quad (3.3)$$

L'équation du mouvement s'écrit

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (3.4)$$

Cette équation s'exprime explicitement dans les coordonnées cylindriques par

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \frac{1}{r}\sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{r} + f_1 = \rho \ddot{u}_1, \\ \sigma_{12,1} + \frac{1}{r}\sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} + \frac{2\sigma_{12}}{r} + f_2 = \rho \ddot{u}_2, \\ \sigma_{13,1} + \frac{1}{r}\sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} + \frac{\sigma_{13}}{r} + f_3 = \rho \ddot{u}_3, \end{cases} \quad (3.5)$$

où f_1 , f_2 et f_3 sont les composantes de la force volumique \mathbf{f} , (\bullet) est la dérivée par rapport au temps. En introduisant la loi de comportement local (3.2) dans (3.5), on obtient

$$\left(\mathbf{A}^{(hk)}\mathbf{u}_k\right)_{,h} + \frac{1}{r}\mathbf{A}^{(1k)}\mathbf{u}_k + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.6)$$

où

$$(\bullet)_{,1} = (\bullet)_{,r}, \quad (\bullet)_{,2} = \frac{1}{r}(\bullet)_{,\theta}, \quad (\bullet)_{,3} = (\bullet)_{,z}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T, \quad \mathbf{f} = [f_1 \quad f_2 \quad f_3]^T, \quad (3.8)$$

les indices h et k prennent les valeurs de 1 à 3 et les matrices $\mathbf{A}^{(hk)}$ sont définies par $A_{ij}^{(hk)} = C_{ihjk}$. Les expressions explicites de $\mathbf{A}^{(hk)}$ sont

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{(11)} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{16} & C_{15} \\ C_{16} & C_{66} & C_{56} \\ C_{15} & C_{56} & C_{55} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(12)} = \begin{bmatrix} C_{16} & C_{12} & C_{14} \\ C_{66} & C_{26} & C_{46} \\ C_{56} & C_{25} & C_{45} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(13)} = \begin{bmatrix} C_{15} & C_{14} & C_{13} \\ C_{56} & C_{46} & C_{36} \\ C_{55} & C_{45} & C_{35} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}^{(21)} &= \begin{bmatrix} C_{16} & C_{66} & C_{56} \\ C_{12} & C_{26} & C_{25} \\ C_{14} & C_{46} & C_{45} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(22)} = \begin{bmatrix} C_{66} & C_{26} & C_{46} \\ C_{26} & C_{22} & C_{24} \\ C_{46} & C_{24} & C_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(23)} = \begin{bmatrix} C_{56} & C_{46} & C_{36} \\ C_{25} & C_{24} & C_{23} \\ C_{45} & C_{44} & C_{34} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}^{(31)} &= \begin{bmatrix} C_{15} & C_{56} & C_{55} \\ C_{14} & C_{46} & C_{45} \\ C_{13} & C_{36} & C_{35} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(32)} = \begin{bmatrix} C_{56} & C_{25} & C_{45} \\ C_{46} & C_{24} & C_{44} \\ C_{36} & C_{23} & C_{34} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(33)} = \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} & C_{35} \\ C_{45} & C_{44} & C_{34} \\ C_{35} & C_{34} & C_{33} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (3.9)$$

En supposant que l'interface rugueuse entre les deux phases est parfaite, le vecteur de déplacements et le vecteur de contraintes sont donc continus à travers Γ . La continuité du vecteur de contraintes se traduit par

$$\begin{aligned}[\mathbf{t}]_\Gamma &= \left[\left(\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{u}_1 + \mathbf{A}^{(12)}\mathbf{u}_2 + \mathbf{A}^{(13)}\mathbf{u}_3 \right) n_1 + \left(\mathbf{A}^{(21)}\mathbf{u}_1 + \mathbf{A}^{(22)}\mathbf{u}_2 + \mathbf{A}^{(23)}\mathbf{u}_3 \right) n_2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\mathbf{A}^{(31)}\mathbf{u}_1 + \mathbf{A}^{(32)}\mathbf{u}_2 + \mathbf{A}^{(33)}\mathbf{u}_3 \right) n_3 \right]_\Gamma = 0,\end{aligned}\quad (3.10)$$

où $[\cdot]_\Gamma$ signifie le saut d'une quantité à travers de Γ , n_i avec i de 1 à 3 sont les composantes du vecteur normal unitaire de l'interface Γ , à savoir

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (h_{,y}/\epsilon)^2}} \left[-1, \frac{1}{\epsilon} h_{,y}, 0 \right]^T.$$

Finalement, l'équation de continuité prend la forme

$$[\mathbf{t}]_\Gamma = \epsilon^{-1} \left[h_{,y} \left(\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{u}_{,1} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{u}_{,2} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{u}_{,3} \right) \right]_\Gamma - \left[\mathbf{A}^{(11)} \mathbf{u}_{,1} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{u}_{,2} + \mathbf{A}^{(13)} \mathbf{u}_{,3} \right]_\Gamma = 0. \quad (3.11)$$

3.1.2 Homogénéisation de la zone d'interface rugueuse

D'abord, on fait l'hypothèse que $\mathbf{u}_\epsilon(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{U}(x_1, x_2, x_3, y, \epsilon, t)$. Ensuite, on effectue le développement asymptotique suivant de $\mathbf{U}(x_1, x_2, x_3, y, \epsilon, t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{V} + \epsilon \left(\mathbf{N}^{(1)} \mathbf{V} + \mathbf{N}^{(11)} \mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}^{(12)} \mathbf{V}_{,2} + \mathbf{N}^{(13)} \mathbf{V}_{,3} \right) \\ &+ \epsilon^2 \left(\mathbf{N}^{(2)} \mathbf{V} + \mathbf{N}^{(21)} \mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}^{(22)} \mathbf{V}_{,2} + \mathbf{N}^{(23)} \mathbf{V}_{,3} + \mathbf{N}^{(211)} \mathbf{V}_{,11} + \mathbf{N}^{(212)} \mathbf{V}_{,12} \right. \\ &+ \left. \mathbf{N}^{(213)} \mathbf{V}_{,13} + \mathbf{N}^{(222)} \mathbf{V}_{,22} + \mathbf{N}^{(223)} \mathbf{V}_{,23} + \mathbf{N}^{(233)} \mathbf{V}_{,33} \right) + 0(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ici, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x_1, x_2, x_3, t)$ est indépendant de y , $\mathbf{N}^{(1)}$, $\mathbf{N}^{(11)}$, $\mathbf{N}^{(12)}$, $\mathbf{N}^{(13)}$, $\mathbf{N}^{(2)}$, $\mathbf{N}^{(21)}$, $\mathbf{N}^{(22)}$, $\mathbf{N}^{(23)}$, $\mathbf{N}^{(211)}$, $\mathbf{N}^{(212)}$, $\mathbf{N}^{(213)}$, $\mathbf{N}^{(222)}$ et $\mathbf{N}^{(223)}$ sont des matrices 3x3 dont les composantes sont des fonctions de y , x_1 et x_3 mais indépendantes de x_2 et du temps t . Les matrices $\mathbf{N}^{(\bullet)}$ sont à déterminer par l'utilisation des équations du mouvement et des équations de continuité.

Comme

$$\mathbf{u}_{,1} = \mathbf{u}_{,1}, \quad \mathbf{u}_{,2} = \mathbf{u}_{,2} + \epsilon^{-1} \mathbf{u}_{,y}, \quad \mathbf{u}_{,3} = \mathbf{u}_{,3},$$

on peut calculer les dérivées

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{,1} &= \mathbf{V}_{,1} + \epsilon \left(\left[\mathbf{N}^{(1)} \mathbf{V} \right]_{,1} + \left[\mathbf{N}^{(11)} \mathbf{V}_{,1} \right]_{,1} + \left[\mathbf{N}^{(12)} \mathbf{V}_{,2} \right]_{,1} + \left[\mathbf{N}^{(13)} \mathbf{V}_{,3} \right]_{,1} \right) \\ &+ \epsilon^2 \left(\left[\mathbf{N}^{(2)} \mathbf{V} \right]_{,1} + \left[\mathbf{N}^{(21)} \mathbf{V}_{,1} \right]_{,1} + \left[\mathbf{N}^{(22)} \mathbf{V}_{,2} \right]_{,1} + \left[\mathbf{N}^{(23)} \mathbf{V}_{,3} \right]_{,1} + \left[\mathbf{N}^{(211)} \mathbf{V}_{,11} \right]_{,1} \right. \\ &+ \left. \left[\mathbf{N}^{(212)} \mathbf{V}_{,12} \right]_{,1} + \left[\mathbf{N}^{(213)} \mathbf{V}_{,13} \right]_{,1} + \left[\mathbf{N}^{(222)} \mathbf{V}_{,22} \right]_{,1} + \left[\mathbf{N}^{(223)} \mathbf{V}_{,23} \right]_{,1} + \left[\mathbf{N}^{(233)} \mathbf{V}_{,33} \right]_{,1} \right), \\ \mathbf{U}_{,2} &= \mathbf{V}_{,2} + \epsilon \left(\mathbf{N}^{(1)} \mathbf{V}_{,2} + \mathbf{N}^{(11)} \mathbf{V}_{,12} + \mathbf{N}^{(12)} \mathbf{V}_{,22} + \mathbf{N}^{(13)} \mathbf{V}_{,32} \right) \\ &+ \epsilon^2 \left(\mathbf{N}^{(2)} \mathbf{V}_{,2} + \mathbf{N}^{(21)} \mathbf{V}_{,12} + \mathbf{N}^{(22)} \mathbf{V}_{,22} + \mathbf{N}^{(23)} \mathbf{V}_{,32} + \mathbf{N}^{(211)} \mathbf{V}_{,112} + \mathbf{N}^{(212)} \mathbf{V}_{,122} \right. \\ &+ \left. \mathbf{N}^{(213)} \mathbf{V}_{,132} + \mathbf{N}^{(222)} \mathbf{V}_{,222} + \mathbf{N}^{(223)} \mathbf{V}_{,232} + \mathbf{N}^{(233)} \mathbf{V}_{,332} \right) + \mathbf{N}_{,y}^{(1)} \mathbf{V} + \mathbf{N}_{,y}^{(11)} \mathbf{V}_{,1} \\ &+ \mathbf{N}_{,y}^{(12)} \mathbf{V}_{,2} + \mathbf{N}_{,y}^{(13)} \mathbf{V}_{,3} + \epsilon \left(\mathbf{N}_{,y}^{(2)} \mathbf{V} + \mathbf{N}_{,y}^{(21)} \mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}_{,y}^{(22)} \mathbf{V}_{,2} + \mathbf{N}_{,y}^{(23)} \mathbf{V}_{,3} + \mathbf{N}_{,y}^{(211)} \mathbf{V}_{,11} \right. \\ &+ \left. \mathbf{N}_{,y}^{(212)} \mathbf{V}_{,12} + \mathbf{N}_{,y}^{(213)} \mathbf{V}_{,13} + \mathbf{N}_{,y}^{(222)} \mathbf{V}_{,22} + \mathbf{N}_{,y}^{(223)} \mathbf{V}_{,23} + \mathbf{N}_{,y}^{(233)} \mathbf{V}_{,33} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{,3} &= \mathbf{V}_{,3} + \epsilon \left(\left[\mathbf{N}^{(1)} \mathbf{V} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(11)} \mathbf{V}_{,1} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(12)} \mathbf{V}_{,2} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(13)} \mathbf{V}_{,3} \right]_{,3} \right) \\
&+ \epsilon^2 \left(\left[\mathbf{N}^{(2)} \mathbf{V} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(21)} \mathbf{V}_{,1} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(22)} \mathbf{V}_{,2} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(23)} \mathbf{V}_{,3} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(211)} \mathbf{V}_{,11} \right]_{,3} \right. \\
&\left. + \left[\mathbf{N}^{(212)} \mathbf{V}_{,12} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(213)} \mathbf{V}_{,13} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(222)} \mathbf{V}_{,22} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(223)} \mathbf{V}_{,23} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(233)} \mathbf{V}_{,33} \right]_{,3} \right).
\end{aligned}$$

En introduisant ces dans les équations de mouvement et de continuité et en demandant que le coefficient de ϵ^{-1} soit égal au zéro, on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(1)} \right]_{,y} \mathbf{V} + \left[\mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(11)} \right]_{,y} \mathbf{V}_{,1} + \left[\mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(12)} \right]_{,y} \mathbf{V}_{,2} \\
&+ \left[\mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(13)} \right]_{,y} \mathbf{V}_{,3},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(1)} \mathbf{V} \right]_{\Gamma} + \left[\left(\mathbf{A}^{(21)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(11)} \right) \mathbf{V}_{,1} \right]_{\Gamma} + \left[\mathbf{A}^{(22)} \left(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(12)} \right) \mathbf{V}_{,2} \right]_{\Gamma} \\
&+ \left[\left(\mathbf{A}^{(23)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(13)} \right) \mathbf{V}_{,3} \right]_{\Gamma},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

où \mathbf{I} est le tenseur d'identité d'ordre 2.

On choisit ensuite les fonction $\mathbf{N}^{(1)}$, $\mathbf{N}^{(11)}$, $\mathbf{N}^{(12)}$ et $\mathbf{N}^{(13)}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(1)} \right]_{,y} &= 0, \quad 0 < y < 1, y \neq y_1, y_2, \\
\left[\mathbf{A}^{(21)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(11)} \right]_{,y} &= 0, \quad 0 < y < 1, y \neq y_1, y_2, \\
\left[\mathbf{A}^{(22)} \left(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(12)} \right) \right]_{,y} &= 0, \quad 0 < y < 1, y \neq y_1, y_2, \\
\left[\mathbf{A}^{(23)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(13)} \right]_{,y} &= 0, \quad 0 < y < 1, y \neq y_1, y_2, \\
\left[\mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(1)} \right]_{\Gamma} &= 0, \left[\mathbf{N}^{(1)} \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \mathbf{N}^{(1)}(0) = \mathbf{N}^{(1)}(1), \\
\left[\mathbf{A}^{(21)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(11)} \right]_{\Gamma} &= 0, \left[\mathbf{N}^{(11)} \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \mathbf{N}^{(11)}(0) = \mathbf{N}^{(11)}(1), \\
\left[\mathbf{A}^{(22)} \left(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(12)} \right) \right]_{\Gamma} &= 0, \left[\mathbf{N}^{(12)} \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \mathbf{N}^{(12)}(0) = \mathbf{N}^{(12)}(1), \\
\left[\mathbf{A}^{(23)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(13)} \right]_{\Gamma} &= 0, \left[\mathbf{N}^{(13)} \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \mathbf{N}^{(13)}(0) = \mathbf{N}^{(13)}(1),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

où $y_1 \in (0, 1)$ et $y_2 \in (0, 1)$ sont deux solutions de l'équation $h(y) = R = cte$. On peut montrer que $\mathbf{N}_{,y}^{(1)} = 0$. D'une façon analogue, en exigeant que le coefficient associé à ϵ^0 dans l'équation de continuité soit nul, il vient que

$$\begin{aligned}
0 &= h_{,y} \left[\mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(2)} + \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,1}^{(1)} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}_{,3}^{(1)} \right]_{\Gamma} \mathbf{V} \\
&+ \left\{ h_{,y} \left[\mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(21)} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}_{,3}^{(11)} + \mathbf{A}^{(21)} \left(\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}_{,1}^{(11)} \right) \right]_{\Gamma} - \left[\mathbf{A}^{(11)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y}^{(11)} \right]_{\Gamma} \right\} \mathbf{V}_{,1} \\
&+ \left\{ h_{,y} \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,1}^{(12)} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}_{,3}^{(12)} + \mathbf{A}^{(22)} \left(\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}_{,y}^{(22)} \right) \right]_{\Gamma} - \left[\mathbf{A}^{(12)} \left(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(12)} \right) \right]_{\Gamma} \right\} \mathbf{V}_{,2} \\
&+ \left\{ h_{,y} \left[\mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(23)} + \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,1}^{(13)} + \mathbf{A}^{(23)} \left(\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}_{,3}^{(13)} \right) \right]_{\Gamma} - \left[\mathbf{A}^{(13)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y}^{(13)} \right]_{\Gamma} \right\} \mathbf{V}_{,3} \\
&+ h_{,y} \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}^{(11)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(211)} \right]_{\Gamma} \mathbf{V}_{,11} + h_{,y} \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}^{(12)} + \mathbf{A}^{(22)} \left(\mathbf{N}^{(11)} + \mathbf{N}_{,y}^{(212)} \right) \right]_{\Gamma} \mathbf{V}_{,12} \\
&+ h_{,y} \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}^{(13)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(213)} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}^{(11)} \right]_{\Gamma} \mathbf{V}_{,13} + h_{,y} \left[\mathbf{A}^{(22)} \left(\mathbf{N}^{(12)} + \mathbf{N}_{,y}^{(222)} \right) \right]_{\Gamma} \mathbf{V}_{,22} \\
&+ h_{,y} \left[\mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}^{(12)} + \mathbf{A}^{(22)} \left(\mathbf{N}^{(13)} + \mathbf{N}_{,y}^{(223)} \right) \right]_{\Gamma} \mathbf{V}_{,23} \\
&+ h_{,y} \left[\mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}^{(13)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(233)} \right]_{\Gamma} \mathbf{V}_{,33}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Pour satisfaire cette équation, on choisit les fonctions $\mathbf{N}^{(\bullet)}$ telles que

$$\begin{aligned}
& \left[\mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(2)} + \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,1}^{(1)} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}_{,3}^{(1)} \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \\
& \left[\mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(21)} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}_{,3}^{(11)} + \mathbf{A}^{(21)} \left(\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}_{,1}^{(11)} \right) \right]_{\Gamma} = \frac{1}{h_{,y}} \left[\mathbf{A}^{(11)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y}^{(11)} \right]_{\Gamma} \text{ à } y_1, y_2, \\
& \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,1}^{(12)} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}_{,3}^{(12)} + \mathbf{A}^{(22)} \left(\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}_{,y}^{(22)} \right) \right]_{\Gamma} = \frac{1}{h_{,y}} \left[\mathbf{A}^{(12)} \left(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(12)} \right) \right]_{\Gamma} \text{ à } y_1, y_2, \\
& \left[\mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(23)} + \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,1}^{(13)} + \mathbf{A}^{(23)} \left(\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}_{,3}^{(13)} \right) \right]_{\Gamma} = \frac{1}{h_{,y}} \left[\mathbf{A}^{(13)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y}^{(13)} \right]_{\Gamma} \text{ à } y_1, y_2, \\
& \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}^{(11)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(211)} \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \\
& \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}^{(12)} + \mathbf{A}^{(22)} \left(\mathbf{N}^{(11)} + \mathbf{N}_{,y}^{(212)} \right) \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \\
& \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}^{(13)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(213)} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}^{(11)} \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \\
& \left[\mathbf{A}^{(22)} \left(\mathbf{N}^{(12)} + \mathbf{N}_{,y}^{(222)} \right) \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \\
& \left[\mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}^{(12)} + \mathbf{A}^{(22)} \left(\mathbf{N}^{(13)} + \mathbf{N}_{,y}^{(223)} \right) \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \\
& \left[\mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}^{(13)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(233)} \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

De plus, en mettant le coefficient de ϵ^0 dans l'équation de mouvement égal à zéro, on a

$$\begin{aligned}
& \left[\mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(2)} + \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,1}^{(1)} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}_{,3}^{(1)} \right]_{,y} \mathbf{V} \\
& + \left[\mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(21)} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}_{,3}^{(11)} + \mathbf{A}^{(21)} \left(\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}_{,1}^{(11)} \right) \right]_{,y} \mathbf{V}_{,1} \\
& + \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,1}^{(12)} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}_{,3}^{(12)} + \mathbf{A}^{(22)} \left(\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}_{,y}^{(22)} \right) \right]_{,y} \mathbf{V}_{,2} \\
& + \left[\mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(23)} + \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,1}^{(13)} + \mathbf{A}^{(23)} \left(\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}_{,3}^{(13)} \right) \right]_{,y} \mathbf{V}_{,3} \\
& + \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}^{(11)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(211)} \right]_{,y} \mathbf{V}_{,11} + \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}^{(12)} + \mathbf{A}^{(22)} \left(\mathbf{N}^{(11)} + \mathbf{N}_{,y}^{(212)} \right) \right]_{,y} \mathbf{V}_{,12} \\
& + \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}^{(13)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(213)} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}^{(11)} \right]_{,y} \mathbf{V}_{,13} + \left[\mathbf{A}^{(22)} \left(\mathbf{N}^{(12)} + \mathbf{N}_{,y}^{(222)} \right) \right]_{,y} \mathbf{V}_{,22} \\
& + \left[\mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}^{(12)} + \mathbf{A}^{(22)} \left(\mathbf{N}^{(13)} + \mathbf{N}_{,y}^{(223)} \right) \right]_{,y} \mathbf{V}_{,23} + \left[\mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}^{(13)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(233)} \right]_{,y} \mathbf{V}_{,33} \\
& + \left[\left(\mathbf{A}^{(11)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y}^{(11)} \right) \mathbf{V}_{,1} + \mathbf{A}^{(12)} \left(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(12)} \right) \mathbf{V}_{,2} + \left(\mathbf{A}^{(13)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y}^{(13)} \right) \mathbf{V}_{,3} \right]_{,1} \\
& + \left(\mathbf{A}^{(21)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(11)} \right) \mathbf{V}_{,21} + \mathbf{A}^{(22)} \left(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(12)} \right) \mathbf{V}_{,22} + \left(\mathbf{A}^{(23)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(13)} \right) \mathbf{V}_{,23} \\
& + \left[\left(\mathbf{A}^{(31)} + \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{N}_{,y}^{(11)} \right) \mathbf{V}_{,1} + \mathbf{A}^{(32)} \left(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(12)} \right) \mathbf{V}_{,2} + \left(\mathbf{A}^{(33)} + \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{N}_{,y}^{(13)} \right) \mathbf{V}_{,3} \right]_{,3} \\
& + \frac{1}{r} \left(\mathbf{A}^{(11)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y}^{(11)} \right) \mathbf{V}_{,1} + \frac{1}{r} \mathbf{A}^{(12)} \left(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(12)} \right) \mathbf{V}_{,2} \\
& + \frac{1}{r} \left(\mathbf{A}^{(13)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y}^{(13)} \right) \mathbf{V}_{,3} + \mathbf{F} - \rho \ddot{\mathbf{V}} = 0.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

En intégrant l'équation ci-dessus suivant $y \in (0, 1)$, on obtient finalement

$$\begin{aligned}
& \left[\left\langle \mathbf{A}^{(11)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y \mathbf{V}_{,1} + \left\langle \mathbf{A}^{(12)} \left(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(12)} \right) \right\rangle_Y \mathbf{V}_{,2} + \left\langle \mathbf{A}^{(13)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y}^{(13)} \right\rangle_Y \mathbf{V}_{,3} \right]_{,1} \\
& + \left\langle \mathbf{A}^{(21)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y \mathbf{V}_{,21} + \left\langle \mathbf{A}^{(22)} \left(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(12)} \right) \right\rangle_Y \mathbf{V}_{,22} + \left\langle \mathbf{A}^{(23)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(13)} \right\rangle_Y \mathbf{V}_{,23} \\
& + \left[\left\langle \mathbf{A}^{(31)} + \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{N}_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y \mathbf{V}_{,1} + \left\langle \mathbf{A}^{(32)} \left(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(12)} \right) \right\rangle_Y \mathbf{V}_{,2} + \left\langle \mathbf{A}^{(33)} + \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{N}_{,y}^{(13)} \right\rangle_Y \mathbf{V}_{,3} \right]_{,3} \\
& + \frac{1}{r} \left\langle \mathbf{A}^{(11)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y \mathbf{V}_{,1} + \frac{1}{r} \left\langle \mathbf{A}^{(12)} \left(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(12)} \right) \right\rangle_Y \mathbf{V}_{,2} \\
& + \frac{1}{r} \left\langle \mathbf{A}^{(13)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y}^{(13)} \right\rangle_Y \mathbf{V}_{,3} \\
& + \langle \mathbf{F} \rangle_Y = \langle \rho \rangle_Y \ddot{\mathbf{V}}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

où

$$\langle f \rangle_Y = (y_2 - y_1) f_e + (1 - y_2 + y_1) f_i \tag{3.20}$$

avec f_e et f_i étant les valeurs de la fonction f dans les domaines extérieur et intérieur.

Après avoir déterminé les fonctions $\mathbf{N}_{,y}^{(11)}$, $\mathbf{N}_{,y}^{(12)}$ et $\mathbf{N}_{,y}^{(13)}$, on les remplace dans l'équation (3.19) et obtient

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{A}}^{(11)} &= \left\langle \mathbf{A}^{(11)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y \\
&= \left\langle \mathbf{A}^{(11)} - \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \mathbf{A}^{(21)} \right\rangle_Y + \left\langle \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \right\rangle_Y \left\langle \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \mathbf{A}^{(21)} \right\rangle_Y, \\
\bar{\mathbf{A}}^{(12)} &= \left\langle \mathbf{A}^{(12)} \left(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(12)} \right) \right\rangle_Y = \left\langle \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \right\rangle_Y \left\langle \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \right\rangle_Y^{-1}, \\
\bar{\mathbf{A}}^{(13)} &= \left\langle \mathbf{A}^{(13)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y}^{(13)} \right\rangle_Y \\
&= \left\langle \mathbf{A}^{(13)} - \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \mathbf{A}^{(23)} \right\rangle_Y + \left\langle \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \right\rangle_Y \left\langle \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \mathbf{A}^{(23)} \right\rangle_Y, \\
\bar{\mathbf{A}}^{(21)} &= \left\langle \mathbf{A}^{(21)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y = \left\langle \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \mathbf{A}^{(21)} \right\rangle_Y, \\
\bar{\mathbf{A}}^{(22)} &= \left\langle \mathbf{A}^{(22)} \left(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(12)} \right) \right\rangle_Y = \left\langle \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \right\rangle_Y^{-1}, \\
\bar{\mathbf{A}}^{(23)} &= \left\langle \mathbf{A}^{(23)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y}^{(13)} \right\rangle_Y = \left\langle \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \mathbf{A}^{(23)} \right\rangle_Y, \\
\bar{\mathbf{A}}^{(31)} &= \left\langle \mathbf{A}^{(31)} + \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{N}_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y \\
&= \left\langle \mathbf{A}^{(31)} - \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \mathbf{A}^{(21)} \right\rangle_Y + \left\langle \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \right\rangle_Y \left\langle \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \mathbf{A}^{(21)} \right\rangle_Y, \\
\bar{\mathbf{A}}^{(32)} &= \left\langle \mathbf{A}^{(32)} \left(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,y}^{(12)} \right) \right\rangle_Y = \left\langle \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \right\rangle_Y \left\langle \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \right\rangle_Y^{-1}, \\
\bar{\mathbf{A}}^{(33)} &= \left\langle \mathbf{A}^{(33)} + \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{N}_{,y}^{(13)} \right\rangle_Y = \left\langle \mathbf{A}^{(33)} - \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \mathbf{A}^{(23)} \right\rangle_Y \\
&+ \left\langle \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \right\rangle_Y \left\langle \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle \mathbf{A}^{(22)^{-1}} \mathbf{A}^{(23)} \right\rangle_Y.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Comme l'interface Γ est périodiquement rugueuse, on peut écrire l'équation du mouvement macroscopique sous la forme :

$$\left(\bar{\mathbf{A}}^{(hk)} \mathbf{V}_{,k} \right)_{,h} + \frac{1}{r} \bar{\mathbf{A}}^{(1k)} \mathbf{V}_{,k} + \bar{\mathbf{F}} = \bar{\rho} \ddot{\mathbf{V}}. \tag{3.22}$$

Au vu des résultats obtenus ci-dessus, deux remarques importantes s'imposent :

- Nos résultats montrent que le domaine d’interface rugueuse ($R_1 < r < R_1 + \delta$) peut être remplacé par un domaine constitué d’un matériau anisotrope équivalent dont la matrice de rigidité est déterminée par (3.21).
- Les expressions des propriétés effectives du matériau équivalent de la zone d’interface rugueuse coïncident en fait avec celles d’un composite multicouche (voir par exemple Milton, 2002) constitué du matériau 1 de fraction volumique $1 - y_2 + y_1$ et du matériaux 2 de fraction volumique $y_2 - y_1$. Ce résultat n’est par évident du fait que les couches en question sont circulaires au lieu d’être planes.

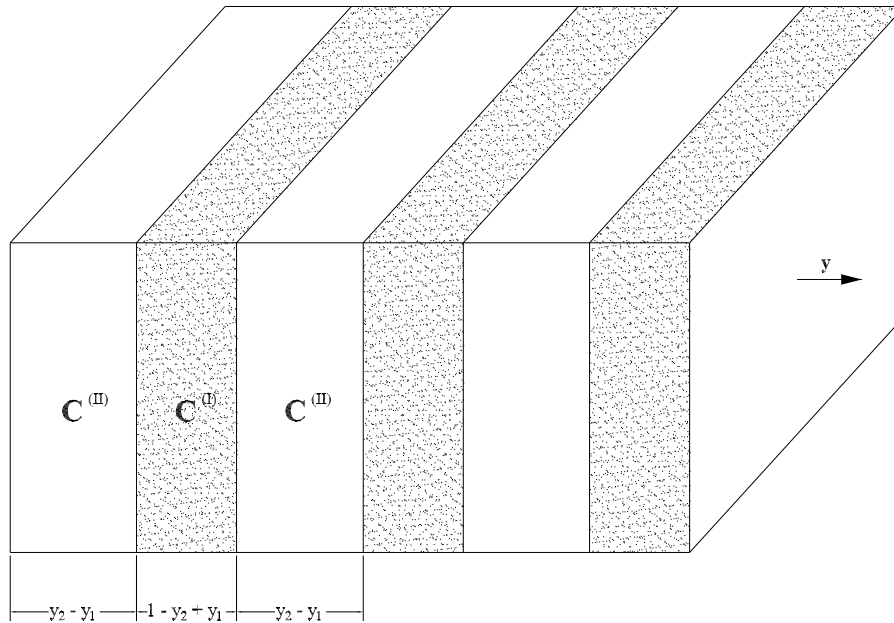


FIGURE 3.2: Modèle des matériaux stratifiés

3.2 Homogénéisation d’un composite avec l’interface cylindrique en dent de scie par une approche rigoureuse

3.2.1 Lois de comportement locale et macroscopique

Dans la partie précédente, on a montré que la zone d’interface rugueuse cylindrique peut être remplacée par une interphase homogénéisée suivant la direction circonférentielle. De plus, les formules d’homogénéisation des matériaux stratifiés peuvent être utilisées pour calculer les propriétés effectives de l’interphase équivalente. Cependant, comme les fractions surfaciques $1 - y_2 + y_1$ et $y_2 - y_1$ intervenant dans l’opérateur de moyenne (3.20) varient dans la direction radiale, les propriétés équivalentes de l’interphase sont non seulement anisotropes mais aussi dépendantes du rayon r .

Dans cette section, on considère un composite à microstructure cylindrique composé de la phase 1 dans la partie intérieure et de la phase 2 dans la partie extérieure. Les surfaces latérale, supérieure et inférieure

sont dénotées respectivement par Γ_l , Γ_s et Γ_i . On se propose d'homogénéiser ce composite. Comme la complexité du problème en question est remarquable, on commence par le cas le plus simple où les phases 1 et 2 sont isotropes. Ainsi, les phases sont caractérisées par les constantes de Lamé λ_1 , μ_1 , λ_2 , et μ_2 . De plus, l'interface Γ entre les deux phases est supposée en dent de scie et illustrée sur la figure (3.3). On suppose que l'interface Γ est très rugueuse, c'est-à-dire que la période ϵ est suffisamment petite.

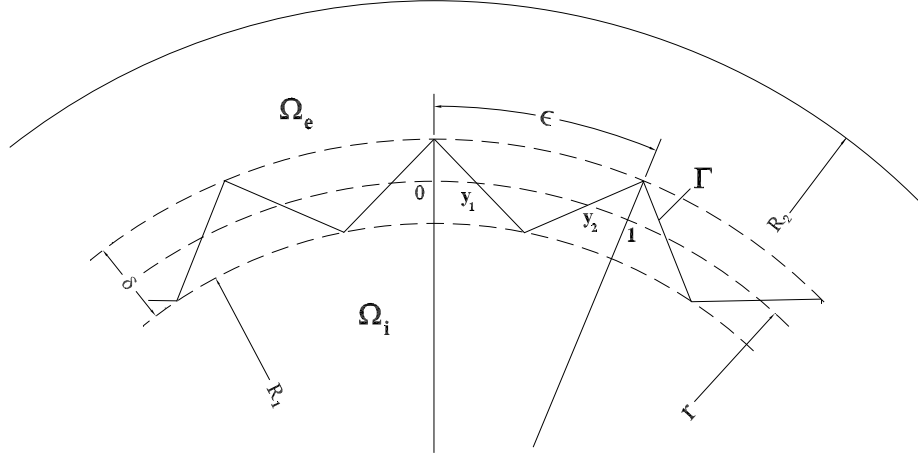


FIGURE 3.3: Interface en dent de scie

Comme Γ est en dent de scie, on a simplement

$$y_2 - y_1 = \frac{r - R_1}{\delta} \text{ avec } r \in (R_1, R_1 + \delta). \quad (3.23)$$

Ensuite, on étudie un assemblage des cylindres composites constitués de 3 couches : la couche I , la couche II et l'interphase occupant respectivement les zones définies par $0 < r < R_1$, $R_1 < r < R_1 + \delta$ et $R_1 + \delta < r < R_2$. Parmi ces couches, l'interphase $\mathbf{C}^{(r)}$ est composée du matériau élastique équivalent qui est cylindriquement isotrope transverse. En utilisant l'opérateur de moyenne défini par (3.20), la matrice de rigidité de l'interphase équivalente est donnée par

$$\mathbf{C}^{(r)} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(r)} & C_{12}^{(r)} & C_{13}^{(r)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(r)} & C_{22}^{(r)} & C_{23}^{(r)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^{(r)} & C_{23}^{(r)} & C_{33}^{(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_{44}^{(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{55}^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{66}^{(r)} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

où

$$\begin{aligned}
C_{11}^{(r)} &= C_{33}^{(r)} = \langle 4\mu(\lambda + \mu) / (\lambda + 2\mu) \rangle_Y + \langle 1 / (\lambda + 2\mu) \rangle_Y^{-1} \langle \lambda / (\lambda + 2\mu) \rangle_Y^2, \\
C_{22}^{(r)} &= \langle 1 / (\lambda + 2\mu) \rangle_Y^{-1}, C_{44}^{(r)} = C_{66}^{(r)} = \langle 1 / \mu \rangle_Y^{-1}, C_{55}^{(r)} = \langle \mu \rangle_Y, \\
C_{12}^{(r)} &= C_{23}^{(r)} = \langle \lambda / (\lambda + 2\mu) \rangle_Y \langle 1 / (\lambda + 2\mu) \rangle_Y^{-1}, \\
C_{13}^{(r)} &= \langle 2\mu\lambda / (\lambda + 2\mu) \rangle_Y + \langle 1 / (\lambda + 2\mu) \rangle_Y^{-1} \langle \lambda / (\lambda + 2\mu) \rangle_Y^2.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Il est clair que le comportement élastique homogénéisé du cylindre multicouche en question est également isotrope transverse. Il est caractérisé par

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \\ \sqrt{2}\Sigma_4 \\ \sqrt{2}\Sigma_5 \\ \sqrt{2}\Sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^* + m^* & k^* - m^* & l^* & 0 & 0 & 0 \\ k^* - m^* & k^* + m^* & l^* & 0 & 0 & 0 \\ l^* & l^* & n^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \sqrt{2}E_4 \\ \sqrt{2}E_5 \\ \sqrt{2}E_6 \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

Les parties suivantes sont consacrées à la détermination des modules effectifs dans la matrice de rigidité effective de la formule (3.26).

3.2.2 Résolution des problèmes auxiliaires

Chargement axisymétrique

Dans ce paragraphe, on considère le cas où les déplacements axisymétriques suivants sont imposés sur les surfaces du cylindre composite :

$$\begin{aligned}
u_x^0(\mathbf{x}) &= \varepsilon_T x, \quad u_y^0(\mathbf{x}) = \varepsilon_T y, \quad u_z^0(\mathbf{x}) = \varepsilon_A z, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_l, \\
t_x^0(\mathbf{x}) &= 0, \quad t_y^0(\mathbf{x}) = 0, \quad u_z^0(\mathbf{x}) = \varepsilon_A z, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_s \cup \Gamma_i,
\end{aligned}$$

où ε_T et ε_A sont des constantes. Ces conditions aux limites s'écrivent dans la base cylindrique :

$$\begin{aligned}
u_r^0(\mathbf{x}) &= \varepsilon_T r, \quad u_\theta^0(\mathbf{x}) = 0, \quad u_z^0(\mathbf{x}) = \varepsilon_A z, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_l \\
u_z^0(\mathbf{x}) &= \varepsilon_A z, \quad \sigma_4^0(\mathbf{x}) = \sigma_5^0 = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_s \cup \Gamma_i.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

On sait que les champs de déplacements dans les couches *I* et *II* sont donnés par (voir par exemple Le Quang, 2007)

$$u_r^{(i)}(\mathbf{x}) = A_1^{(i)} r + \frac{A_2^{(i)}}{r}, \quad u_\theta^{(i)}(\mathbf{x}) = 0, \quad u_z^{(i)}(\mathbf{x}) = \varepsilon_A z, \quad \text{avec } i = I, II. \tag{3.28}$$

Dans cette formule, $A_1^{(i)}$ et $A_2^{(i)}$ sont deux constantes à déterminer par les conditions aux limites et les conditions de continuité $[\mathbf{u}]_\Gamma = 0$, $[\sigma \mathbf{n}]_\Gamma = 0$.

En tenant compte de la symétrie cylindrique de la microstructure et des conditions aux limites considérées, le champ de déplacements dans l'interphase prend la forme suivante

$$u_r^{(r)}(\mathbf{x}) = g(r), \quad u_\theta^{(r)}(\mathbf{x}) = 0, \quad u_z^{(r)}(\mathbf{x}) = \varepsilon_A z. \quad (3.29)$$

Les composantes non-nulles des tenseurs de déformations et de contraintes correspondants sont déterminées par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= g'(r), \quad \varepsilon_2 = \frac{g(r)}{r}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_A, \\ \sigma_1 &= C_{11}^{(r)} g_{12}' \frac{g(r)}{r} + C_{13}^{(r)} \varepsilon_A, \quad \sigma_2 = C_{12}^{(r)} g_{22}' \frac{g(r)}{r} + C_{23}^{(r)} \varepsilon_A, \\ \sigma_3 &= C_{13}^{(r)} g_{23}' \frac{g(r)}{r} + C_{33}^{(r)} \varepsilon_A. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Les composantes du tenseur de contraintes ci-dessus doivent vérifier l'équation d'équilibre

$$\sigma_{1,r} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r} = 0. \quad (3.31)$$

En introduisant les expressions de σ_1 et σ_2 dans cette équation, on obtient une équation différentielle du second degré :

$$P(r)g'' + Q(r)g' + M(r)g = N(r) \quad (3.32)$$

où

$$\begin{aligned} N(r) &= -\frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \varepsilon_A}{2(\lambda_1 + \mu_1 - \lambda_2 - \mu_2)} [Q(r) + rM(r)], \\ P(r) &= r^2 (d_{13}r^3 + d_{12}r^2 + d_{11}r + d_{10}), \\ Q(r) &= r (d_{23}r^3 + d_{22}r^2 + d_{21}r + d_{20}), \\ M(r) &= d_{31}r + d_{30}, \end{aligned}$$

avec les coefficients d_{ij} donnés par

$$\begin{aligned} d_{10} &= d_{20} = [(\lambda_2 + 2\mu_2)(R_1 + \delta) - (\lambda_1 + 2\mu_1)R_1], \\ &\quad \left[(\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2)(\mu_1 + \lambda_1 + \mu_2)\delta^2 - (\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_2)(2R_1 + \delta)^2 \right], \\ d_{11} &= -12(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_2)(\lambda_1 + 2\mu_1 - \lambda_2 - 2\mu_2)R_1^2 \\ &\quad - 8(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_2)(2\mu_1 + \lambda_1 - 4\mu_2 - 2\lambda_2)\delta R_1 \\ &\quad + h^2(\lambda_2 + 2\mu_2) \left[(\lambda_1 + 2\mu_1 - \lambda_2 - 2\mu_2)(2\lambda_1 + 4\mu_1 - \lambda_2 - 2\mu_2) - (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \right], \\ d_{12} &= 4(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_2) [(\lambda_1 + 2\mu_1)(3R_1 + \delta) - (\lambda_2 + 2\mu_2)(3R_1 + 2\delta)], \\ d_{13} &= \frac{1}{2}d_{23} = -4(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_2)(\lambda_1 + 2\mu_1 - \lambda_2 - 2\mu_2), \\ d_{21} &= 8(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_2)(2R_1 + \delta) [(\lambda_2 + 2\mu_2)(R_1 + \delta) - (\lambda_1 + 2\mu_1)R_1], \\ d_{22} &= 4(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_2) [(\lambda_1 + 2\mu_1)(5R_1 + \delta) - (\lambda_2 + 2\mu_2)(5R_1 + 4\delta)], \\ d_{30} &= \delta^2(\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + 2\mu_1) [(\lambda_1 + 2\mu_1)R_1 - (\lambda_2 + 2\mu_2)(R_1 + \delta)], \\ d_{31} &= -2\delta^2(\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + 2\mu_1)(\mu_1 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_2). \end{aligned} \quad (3.33)$$

L'équation différentielle (3.32) a une solution particulière :

$$g^*(r) = -\frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \epsilon_A r}{2(\lambda_1 + \mu_1 - \lambda_2 - \mu_2)}. \quad (3.34)$$

Afin de trouver la solution générale pour l'équation différentielle homogène

$$P(r)g'' + Q(r)g' + M(r)g = 0 \quad (3.35)$$

associée à (3.32), on pose d'abord

$$g(r) = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{Q(r)}{P(r)} dr} \eta(r)$$

et introduit ensuite cette expression dans (3.35), ce qui donne

$$r^2 (r - r_1)^2 (r - r_2)^2 (r - r_3)^2 \eta'' + W(r)\eta = 0 \quad (3.36)$$

où $W(r) = k_4 r^4 + k_3 r^3 + k_2 r^2 + k_1 r + k_0$ avec

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{1}{d_{13}^2} \left(\frac{1}{2} d_{10} d_{20} + d_{10} d_{30} - \frac{1}{4} d_{20}^2 \right), \\ k_1 &= \frac{1}{d_{13}^2} \left(d_{10} d_{31} - \frac{1}{2} d_{20} d_{21} + d_{11} d_{30} + d_{11} d_{20} \right), \\ k_2 &= \frac{1}{d_{13}^2} \left(\frac{1}{2} d_{11} d_{21} - \frac{1}{2} d_{10} d_{22} + d_{12} d_{30} - \frac{1}{2} d_{20} d_{22} - \frac{1}{4} d_{21}^2 + \frac{3}{2} d_{12} d_{20} + d_{11} d_{31} \right), \\ k_3 &= \frac{1}{d_{13}^2} \left(d_{13} d_{30} + d_{13} d_{20} + d_{12} d_{31} + d_{12} d_{21} - 2d_{10} d_{13} - \frac{1}{2} d_{21} d_{22} \right), \\ k_4 &= \frac{1}{d_{13}^2} \left(\frac{1}{2} d_{12} d_{22} - \frac{1}{4} d_{22}^2 + d_{12} d_{30} + \frac{1}{2} d_{13} d_{21} - d_{11} d_{13} + d_{13} d_{31} \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dans (3.36), r_1 , r_2 et r_3 sont les trois solutions de l'équation $d_{13}r^3 + d_{12}r^2 + d_{11}r + d_{10} = 0$. En supposant que le matériau de la couche I est plus rigide que le matériau de la couche II , à savoir $\lambda_1 \geq \lambda_2$ et $\mu_1 \geq \mu_2$, on a

$$\begin{aligned} r_1 &= R_1 - \frac{\delta(\lambda_2 + 2\mu_2)}{\lambda_1 + 2\mu_1 - \lambda_2 - 2\mu_2}, \\ r_2 &= R_1 + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \sqrt{\frac{(\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2)(\mu_1 + \lambda_1 + \mu_2)}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_2)}}, \\ r_3 &= R_1 + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} \sqrt{\frac{(\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2)(\mu_1 + \lambda_1 + \mu_2)}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_2)}}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

La solution générale de l'équation (3.36) peut s'exprimer sous la forme :

$$\eta(r) = (r - r_1) \left(\frac{r - r_3}{r - r_1} \right)^{\frac{1}{2}\varsigma} [A_r F_1(r) + B_r F_2(r)] \quad (3.39)$$

où A_r , B_r sont les constantes à déterminer par les équations de continuité et par les conditions aux limites, $F_1(r)$ et $F_2(r)$ sont les fonctions scalaires du rayon r définies par

$$\begin{aligned} F_1(r) &= \left(\frac{r}{r - r_1} \right)^{\frac{\gamma_1}{2}} \left(\frac{r - r_2}{r - r_1} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{\Phi - \Theta + 4\Xi}{2\sqrt{\Theta}\sqrt{2\Theta - 2\Phi - 4\Xi - 4\Upsilon}}} \text{HeunG}_1(a_1, q_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \varsigma_1, z_1), \\ F_2(r) &= \left(\frac{r}{r - r_1} \right)^{\frac{\gamma_2}{2}} \left(\frac{r - r_2}{r - r_1} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{\Phi - \Theta + 4\Xi}{2\sqrt{\Theta}\sqrt{2\Theta - 2\Phi - 4\Xi - 4\Upsilon}}} \text{HeunG}_2(a_2, q_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \varsigma_2, z_2), \end{aligned} \quad (3.40)$$

avec $\text{HeunG}(a, q, \alpha, \beta, \gamma, \varsigma, z)$ étant la solution générale de l'équation différentielle de Heun définie par :

$$\frac{d^2}{dz^2}Y(z) + \left(\frac{\alpha + \beta + 1 - \varsigma - \gamma}{z - a} + \frac{\gamma}{z} + \frac{\varsigma}{z - 1} \right) \frac{d}{dz}Y(z) + \frac{(\alpha\beta z - q)}{z(z-1)(z-a)}Y(z) = 0. \quad (3.41)$$

Si $a \neq 0, \neq 1$ et $z \neq a$, cette équation possède les propriétés suivantes (voir Ronveaux, 1995) :

$$\begin{aligned} \text{HeunG}(a, q, \alpha, \beta, \gamma, \varsigma, z) &= (1 - z)^{1-\delta} \text{HeunG}(a, q - (\varsigma - 1)\gamma a, \beta - \delta + 1, \alpha - \varsigma + 1, \gamma, 2 - \varsigma, z), \\ \text{HeunG}(a, q, \alpha, \beta, \gamma, \varsigma, z) &= (1 - \frac{z}{a})^{-\alpha-\beta+\gamma+\delta} \text{HeunG}\left(\frac{a}{a-1}, \frac{q-\gamma(\alpha+\beta-\gamma-\varsigma)}{a-1}, -\beta+\gamma+\varsigma, -\alpha+\gamma+\varsigma, \gamma, \varsigma, z\right), \\ \text{HeunG}(a, q, \alpha, \beta, \gamma, \varsigma, z) &= (1 - z)^{1-\delta} (1 - \frac{z}{a})^{-\alpha-\beta+\gamma+\delta} \text{HeunG}\left(\frac{a}{a-1}, \frac{q-\gamma((\varsigma-1)a+\alpha+\beta-\gamma-\delta)}{a-1}, -\beta+\gamma+1, -\alpha+\gamma+1, \gamma, 2-\varsigma, z\right), \\ \text{HeunG}(a, q, \alpha, \beta, \gamma, \varsigma, z) &= \text{HeunG}\left(a^{-1}, \frac{q}{a}, \alpha, \beta, \gamma, \alpha+\beta-\gamma-\varsigma+1, \frac{z}{a}\right), \\ \text{HeunG}(a, q, \alpha, \beta, \gamma, \varsigma, z) &= (1 - z)^{-\alpha} \text{HeunG}\left(\frac{a}{a-1}, \frac{-q+\gamma\alpha}{a-1}, \alpha, \alpha-\varsigma+1, \gamma, \alpha-\beta+1, \frac{z}{z-1}\right), \\ \text{HeunG}(a, q, \alpha, \beta, \gamma, \varsigma, z) &= (1 - \frac{z}{a})^{-\alpha} \text{HeunG}\left(1 - a, -q + \gamma\alpha, \alpha, -\beta + \gamma + \varsigma, \gamma, \varsigma, \frac{(1-a)z}{z-a}\right), \\ \text{HeunG}(a, q, \alpha, \beta, \gamma, \varsigma, z) &= (1 - \frac{z}{a})^{-\alpha} \text{HeunG}\left((1 - a)^{-1}, \frac{q-\gamma\alpha}{a-1}, \alpha, -\beta + \gamma + \varsigma, \gamma, \alpha - \beta + 1, \frac{z}{z-a}\right). \end{aligned}$$

La solution régulière à $z = 0$ est fournie par la série de Heun :

$$\text{HeunG}(a, q, \alpha, \beta, \gamma, \varsigma, z) = \text{Hl}(a, q, \alpha, \beta, \gamma, \varsigma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n z^n, \quad (3.42)$$

$$l_0 = 1, \quad l_1 = \frac{q}{\gamma a},$$

$$l_{n+2} = \frac{\left\{ q + (n+1)[\alpha + \beta - \varsigma + (\gamma + \varsigma - 1)a] + (n+1)^2(a+1) \right\} l_{n+1} - (n+\alpha)(n+\beta)l_n}{a(n+2)(n+1+\gamma)}.$$

Les coefficients dans les formules (3.39) et (3.40) sont donnés par

$$\begin{aligned} \Theta &= r_1^2 r_2^2 (r_2 - r_3)^2 (r_1 - r_3)^2 (r_2 - r_1)^2, \\ \Phi &= \wp \sqrt{\Theta} \sqrt{\left[-r_2^2 (r_2 - r_3)^2 + \frac{4W(r_2)}{(r_2 - r_1)^2} \right] \left[-r_1^2 (r_1 - r_3)^2 + \frac{4W(r_1)}{(r_2 - r_1)^2} \right]}, \\ \Xi &= r_1^2 (r_1 - r_3)^2 W(r_2), \quad \Upsilon = r_2^2 (r_2 - r_3)^2 W(r_1) \\ \varpi_1 &= r_1 r_2 r_3 + \sqrt{r_1^2 r_2^2 r_3^2 - 4k_0}, \quad \varpi_2 = r_1 r_2 r_3 - \sqrt{r_1^2 r_2^2 r_3^2 - 4k_0}, \\ a_1 = a_2 &= \frac{-(r_1 - r_3)r_2}{(r_2 - r_1)r_3}, \quad \gamma_i = \frac{\varpi_i}{r_1 r_2 r_3}, \quad \varsigma = \varsigma_1 = \varsigma_2 = 1 + \sqrt{1 - \frac{4W(r_3)}{r_3^2 (r_2 - r_3)^2 (r_1 - r_3)^2}}, \\ q_i &= -\frac{\varpi_i \sqrt{r_3^2 (r_2 - r_3)^2 (r_1 - r_3)^2 - 4W(r_3)}}{2r_1 r_3^3 (r_2 - r_1)(r_2 - r_3)} - \frac{(r_1 r_2 + r_3 r_1 - 2r_3 r_2) \gamma_i}{2r_3 (r_2 - r_1)} \\ &\quad + \frac{2r_2 k_0 + 2r_3 k_0 + k_1 r_3 r_2}{r_1 r_2^2 r_3^3 (r_2 - r_1)} - \frac{\wp \gamma_i (\Phi - \Theta + 4\Xi)}{2\sqrt{\Theta} \sqrt{2\Theta - 2\Phi - 4\Xi - 4\Upsilon}} \\ \beta_i &= \frac{\varpi_i + \varsigma_i}{2} \\ &\quad + \left(\frac{r_1 W(r_3)}{r_2} \left(\frac{1}{(r_2 - r_3)} + \frac{1}{(r_1 - r_3)} \right) + \frac{1}{r_1 r_2^3 (r_1 - r_3)} \left(\Upsilon - \frac{k_4 \Theta}{(r_2 - r_1)^2} \right) \right) \frac{2\wp}{\sqrt{2\Theta - 2\Phi - 4\Xi - 4\Upsilon}}, \\ \alpha_i &= \frac{\wp \sqrt{2\Theta - 2\Phi - 4\Xi - 4\Upsilon}}{2\sqrt{\Theta}} + \frac{\varpi_i + \varsigma_i}{2}, \quad z_1 = z_2 = -\frac{(r_1 - r_3)r}{r_3(r - r_1)}, \quad \wp = \frac{|r_1 - r_3|}{r_1 - r_3}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Finalement, la solution de l'équation différentielle (3.32) est :

$$u_r^{(r)}(\mathbf{x}) = g(r) = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{Q(r)}{P(r)} dr} \eta(r) + g^*(r) \quad (3.44)$$

En utilisant cette formule dans (3.29) et (3.30), on obtient les composantes non-nulles du vecteur de déplacements et du tenseur de contraintes.

Chargement antiplan

Sur les surfaces du cylindre composite, on impose les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u_x^0(\mathbf{x}) = s_0 z, \quad u_y^0(\mathbf{x}) = 0, \quad u_z^0(\mathbf{x}) = s_0 x, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_l, \\ u_x^0(\mathbf{x}) = s_0 z, \quad u_y^0(\mathbf{x}) = 0, \quad t_z(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_s \cup \Gamma_i, \end{aligned} \quad (3.45)$$

où s_0 est une constante non-nulle quelconque.

Dans la base cylindrique, ces conditions aux limites prennent la forme :

$$\begin{aligned} u_r^0(\mathbf{x}) = s_0 z \cos \theta, \quad u_\theta^0(\mathbf{x}) = -s_0 z \sin \theta, \quad u_z^0(\mathbf{x}) = s_0 r \cos \theta, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_l, \\ u_r^0(\mathbf{x}) = s_0 z \cos \theta, \quad u_\theta^0(\mathbf{x}) = -s_0 z \sin \theta, \quad \sigma_3^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_s \cup \Gamma_i. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Les champs de déplacements dans les 3 couches sont à trouver en partant des conditions aux limites (3.46) et l'équation d'équilibre (3.4) dans le cas statique sans forces volumiques.

• Dans les couches I et II :

– champ de déplacements

$$u_r^{(j)}(\mathbf{x}) = s_0 z \cos \theta, \quad u_\theta^{(j)}(\mathbf{x}) = -s_0 z \sin \theta, \quad u_z^{(j)}(\mathbf{x}) = s_0 (A_j r + B_j r^{-1} - r) \cos \theta; \quad (3.47)$$

– champ de déformations

$$\varepsilon_4^{(j)} = -1/2. (A_j + B_j r^{-2}) s_0 \sin \theta, \quad \varepsilon_5^{(j)} = 1/2. (A_j - B_j r^{-2}) s_0 \cos \theta; \quad (3.48)$$

– champ de contraintes

$$\sigma_4^{(j)} = 2\mu_j \varepsilon_4^{(j)}, \quad \sigma_5^{(j)} = 2\mu_j \varepsilon_5^{(j)}. \quad (3.49)$$

Ci-dessus, A_j et B_j sont des constantes à déterminer.

• Dans l'interphase $C^{(r)}$:

– champ de déplacement :

$$u_r^{(r)}(\mathbf{x}) = s_0 z \cos \theta, \quad u_\theta^{(r)}(\mathbf{x}) = -s_0 z \sin \theta, \quad u_z^{(r)}(\mathbf{x}) = -s_0 (W(r) + r) \cos \theta \quad (3.50)$$

où

$$W(r) = \frac{(r + r_1)}{(\mu_1 - \mu_2)^\varpi (r - r_2)^{1+\varpi}} [A_r r^\varpi {}_2F_1(a_1, b_1, c_1, z_1) + B_r r^{-\varpi} {}_2F_1(a_2, b_2, c_2, z_2)] \quad (3.51)$$

avec A_r B_r étant deux constantes et ${}_2F_1$ étant la série hypergéométrique définie par [2]

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!},$$

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1), \quad (a)_0 = 1. \quad (3.52)$$

Les paramètres dans la formule (3.51) sont déterminés par :

$$r_1 = -R_1 + \frac{\mu_2 \delta}{\mu_1 - \mu_2}, \quad r_2 = R_1 + \frac{\mu_1 \delta}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \varpi = \frac{\delta \sqrt{\mu_1 \mu_2}}{(\mu_1 - \mu_2) \sqrt{r_1 r_2}},$$

$$a_1 = 1 + \varpi, \quad b_1 = a_1, \quad c_1 = 1 + 2\varpi, \quad a_2 = 1 - \varpi, \quad b_2 = a_2, \quad c_2 = 1 - 2\varpi, \quad (3.53)$$

$$z_1 = z_2 = \frac{\delta (\mu_1 + \mu_2) r}{(\mu_1 - \mu_2) r_1 (r - r_2)};$$

– champ de déformations :

$$\varepsilon_4^{(r)} = -1/2.W(r)/r s_0 \sin \theta, \quad \varepsilon_5^{(r)} = 1/2.W'(r) s_0 \cos \theta; \quad (3.54)$$

– champ de contraintes :

$$\sigma_4^{(j)} = 2C_{44}^{(r)} \varepsilon_4^{(r)}, \quad \sigma_5^{(j)} = 2C_{55}^{(r)} \varepsilon_5^{(r)}. \quad (3.55)$$

Ci-dessus, $C_{44}^{(r)}$ et $C_{55}^{(r)}$ sont à déterminer par (3.25).

3.2.3 Détermination des modules macroscopiques k^* et l^*

Après avoir trouvé les champs de déplacements, de déformations et de contraintes dans les couches I et II et dans l'interphase, on peut maintenant calculer les propriétés effectives du cylindre composite.

Tout d'abord, on considère un domaine M composé du matériau homogène dont les caractéristiques sont identiques à celles du matériau effectif du cylindre Ω . On impose les conditions (3.27) sur le bord de M .

Puisque le matériau est homogène, les champs sont uniformes dans tout le domaine M :

$$u_r(\mathbf{x}) = \varepsilon_T r, \quad u_\theta(\mathbf{x}) = 0, \quad u_z(\mathbf{x}) = \varepsilon_A z,$$

$$\varepsilon_1(\mathbf{x}) = \varepsilon_2(\mathbf{x}) = \varepsilon_T, \quad \varepsilon_3(\mathbf{x}) = \varepsilon_A, \quad \varepsilon_4(\mathbf{x}) = \varepsilon_5(\mathbf{x}) = \varepsilon_6(\mathbf{x}) = 0,$$

$$\sigma_1(\mathbf{x}) = 2k^* \varepsilon_T + l^* \varepsilon_A, \quad \sigma_2(\mathbf{x}) = 2k^* \varepsilon_T + l^* \varepsilon_A,$$

$$\sigma_3(\mathbf{x}) = 2l^* \varepsilon_T + n^* \varepsilon_A, \quad \sigma_4(\mathbf{x}) = \sigma_5(\mathbf{x}) = \sigma_6(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.56)$$

Ensuite, les propriétés effectives k^* , n^* et l^* doivent être tels que la présence de Ω ne perturbe pas les champs initiaux dans la partie restante de M . Si cette condition est vérifiée, Ω est appelé donc une inclusion neutre. Les composantes non-nulles du vecteur de déplacements et du tenseur de contraintes dans la couche intermédiaire sont définies par (3.29) et (3.30) alors que celles des couches I et II sont fournies dans la partie 3.4.1.

Comme les matériaux dans les couches I et II sont élastiques linéaires isotropes, on a :

– champ de déplacements

$$u_r^{(j)}(\mathbf{x}) = A_j r + B_j r^{-1}, \quad u_z^{(j)}(\mathbf{x}) = \varepsilon_A z; \quad (3.57)$$

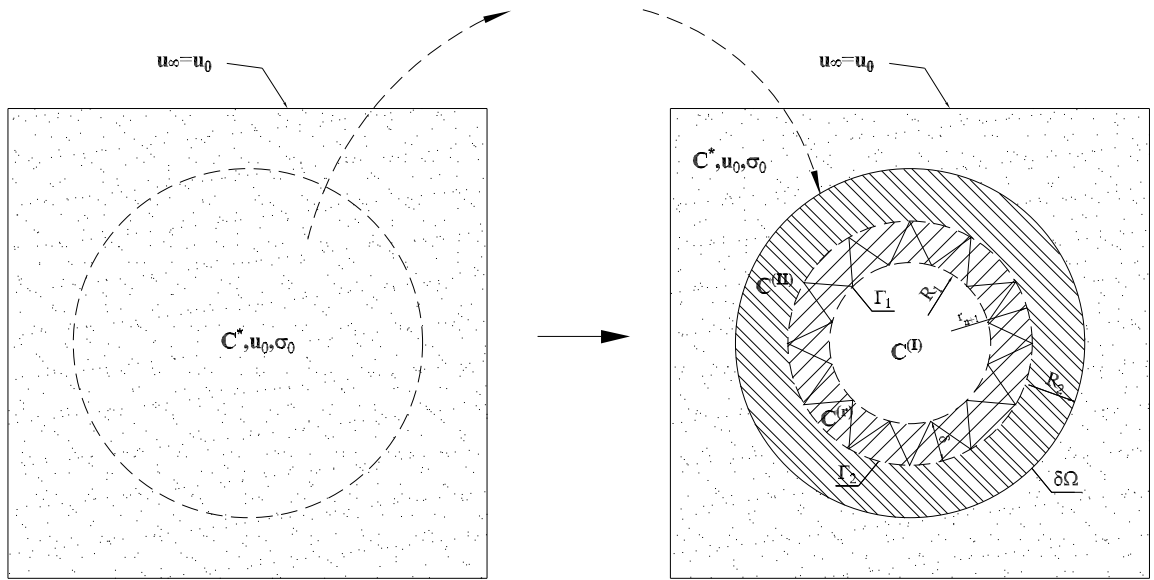


FIGURE 3.4: Inclusion neutre

– champ de déformations

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1^{(j)} &= A_j - B_j r^{-2}, \\
 \varepsilon_2^{(j)} &= A_j + B_j r^{-2}, \\
 \varepsilon_3^{(j)} &= \varepsilon_A;
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

– champ de contraintes

$$\begin{aligned}
 \sigma_1^{(j)} &= 2A_j k_j - 2B_j m_j r^{-2} + l_j \varepsilon_A, \\
 \sigma_2^{(j)} &= 2A_j \psi_j + 2B_j \varrho_j r^{-2} + \phi_j \varepsilon_A, \\
 \sigma_3^{(j)} &= 2A_j \tau_j + B_j \varsigma_j r^{-2} + n_j \varepsilon_A.
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Ci-dessus, $(\bullet)_1$, $(\bullet)_2$ et $(\bullet)_3$ signifient respectivement $(\bullet)_{rr}$, $(\bullet)_{\theta\theta}$ et $(\bullet)_{zz}$, A_j et B_j sont des constantes avec $j = I$ ou II et

$$k_j = \psi_j = \lambda_j + \mu_j, \quad \tau_j = \phi_j = l_j = \lambda_j, \quad \varsigma_j = 0, \quad \text{et} \quad m_j = \varrho_j = \mu_j.$$

Les constantes dans les expressions (3.39), (3.46), (3.47) et (3.48) sont déterminées par les équations de continuités sur les trois interfaces Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , et les conditions aux limites. De plus, pour que le déplacement au centre du cylindre soit fini, il est nécessaire que $B_1 = 0$.

Les équations de continuité du déplacement et du vecteur de contraintes à travers Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 sont données explicitement ci-près :

– sur Γ_1 :

$$\begin{aligned} A_1 R_1 &= A_r \mathfrak{F}_1(R_1) + B_r \mathfrak{F}_2(R_1) + g^*(R_1), \\ 2A_1 k_1 + l_1 \varepsilon_A &= A_r \mathfrak{G}_1(R_1) + B_r \mathfrak{G}_2(R_1) + g^*(1); \end{aligned} \quad (3.60)$$

– sur Γ_2 :

$$\begin{aligned} A_r \mathfrak{F}_1(R_1 + \delta) + B_r \mathfrak{F}_2(R_1 + \delta) + g^*(R_1 + \delta) &= A_2(R_1 + \delta) + B_2(R_1 + \delta)^{-1}, \\ A_r \mathfrak{G}_1(R_1 + \delta) + B_r \mathfrak{G}_2(R_1 + \delta) + g^*(1) &= 2A_2 k_2 - 2B_2 m_2 (R_1 + \delta)^{-2} + l_2 \varepsilon_A; \end{aligned} \quad (3.61)$$

– sur $\Gamma_3 = \delta\Omega$:

$$\begin{aligned} A_2 R_2 + B_2 R_2^{-1} &= \varepsilon_T R_2, \\ 2A_2 k_2 - 2B_2 m_2 R_2^{-2} + l_2 \varepsilon_A &= 2k^* \varepsilon_T + l^* \varepsilon_A, \end{aligned} \quad (3.62)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1(r) &= e^{-\frac{1}{2} \int \frac{Q(r)}{P(r)} dr} (r - r_1) \left(\frac{r - r_3}{r - r_1} \right)^{\frac{1}{2}\varsigma} F_1(r), \\ \mathfrak{F}_2(r) &= e^{-\frac{1}{2} \int \frac{Q(r)}{P(r)} dr} (r - r_1) \left(\frac{r - r_3}{r - r_1} \right)^{\frac{1}{2}\varsigma} F_2(r), \\ \mathfrak{G}_1(r) &= \frac{\partial \mathfrak{F}_1(r)}{\partial r}, \quad \mathfrak{G}_2(r) = \frac{\partial \mathfrak{F}_2(r)}{\partial r}. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient un système de neuf équations linéaires :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_1 & R_1^{-1} & 0 \\ 2k_1 & -2m_1 R_1^{-2} & l_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \\ \varepsilon_A \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathfrak{F}_1(R_1) & \mathfrak{F}_2(R_1) & \hat{g}^*(R_1) \\ \mathfrak{G}_1(R_1) & \mathfrak{G}_2(R_1) & \hat{g}^*(1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ B_r \\ \varepsilon_A \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \mathfrak{F}_1(R_1 + \delta) & \mathfrak{F}_2(R_1 + \delta) & \hat{g}^*(R_1 + \delta) \\ \mathfrak{G}_1(R_1 + \delta) & \mathfrak{G}_2(R_1 + \delta) & \hat{g}^*(1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ B_r \\ \varepsilon_A \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_1 + \delta & (R_1 + \delta)^{-1} & 0 \\ 2k_2 & -2m_2 (R_1 + \delta)^{-2} & l_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ \varepsilon_A \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} R_2 & R_2^{-1} & 0 \\ 2k_2 & -2m_2 R_2^{-2} & l_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ \varepsilon_A \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_T R_2 \\ 2k^* \varepsilon_T + l^* \varepsilon_A \\ \varepsilon_A \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

avec $\hat{g}^*(r) = g^*(r)/\varepsilon_A$. Ces équations peuvent s'écrire sous la forme

$$\mathbf{J}_{(i)}(r_j) \mathbf{V}^{(i)} = \mathbf{J}_{(i+1)}(r_j) \mathbf{V}^{(i+1)} \quad \text{sur l'interface } \Gamma_j$$

où $\mathbf{V}^{(i)} = [A_i \quad B_i \quad \varepsilon_A]^T$. Ainsi, on obtient

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \\ \varepsilon_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_T R_2 \\ 2k^* \varepsilon_T + l^* \varepsilon_A \\ \varepsilon_A \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

avec

$$\mathbf{Q} = \mathbf{J}_{(II)}(R_2) \mathbf{J}_{(II)}^{-1}(R_1 + \delta) \mathbf{J}_{(r)}(R_1 + \delta) \mathbf{J}_{(r)}^{-1}(R_1) \mathbf{J}_{(I)}(R_1) \quad (3.64)$$

En résolvant (3.63), il vient que

$$\left(\frac{Q_{21} R_2}{Q_{11}} - 2k^* \right) \varepsilon_T + \left(Q_{23} - \frac{Q_{13}}{Q_{11}} - l^* \right) \varepsilon_A = 0. \quad (3.65)$$

Puisque ε_T et ε_A soit quelconques, on déduit de (3.65) que

$$k^* = \frac{Q_{21}R_2}{2Q_{11}}, \quad (3.66)$$

$$l^* = Q_{23} - \frac{Q_{21}Q_{13}}{Q_{11}}, \quad (3.67)$$

Ces deux formules nous permettent de calculer les modules effectifs k^* et l^* .

3.2.4 Détermination du module macroscopique G^*

D'une manière analogue, pour déterminer G^* , le cylindre composite Ω est introduit dans un domaine effectif infini M . L'insertion de Ω ne provoque aucune perturbation des champs dans la partie restante du milieu homogène M . Les composantes non-nulles du vecteur de déplacements, des tenseurs de déformations et de contraintes dans M sont exprimées par :

– champ de déplacements

$$u_r^{(0)}(\mathbf{x}) = s_0 z \cos \theta, \quad u_\theta^{(0)}(\mathbf{x}) = -s_0 z \sin \theta, \quad u_z^{(0)}(\mathbf{x}) = s_0 r \cos \theta; \quad (3.68)$$

– champ de déformations :

$$\varepsilon_4^{(0)} = -s_0 \sin \theta, \quad \varepsilon_5^{(0)} = s_0 \cos \theta; \quad (3.69)$$

– champ de contraintes

$$\sigma_4^{(0)} = -2G^* s_0 \sin \theta, \quad \sigma_5^{(0)} = 2G^* s_0 \cos \theta \quad (3.70)$$

Dans les trois phases du composite cylindrique, les champs sont déterminés par (3.47)-(3.55) avec $B_1 = 0$. Les constantes dans ces formules sont ensuite déterminées par les conditions de continuité à travers les interfaces :

– sur Γ_1 :

$$\begin{aligned} A_1 R_1 &= A_r W_1(R_1) + B_r W_2(R_1), \\ 2A_1 \mu_1 &= A_r W_1'(R_1) + B_r W_2'(R_1); \end{aligned} \quad (3.71)$$

– sur Γ_2 :

$$\begin{aligned} A_r W_1(R_1 + \delta) + B_r W_2(R_1 + \delta) &= A_2(R_1 + \delta) + B_2(R_1 + \delta)^{-1}, \\ A_r W_1'(R_1 + \delta) + B_r W_2'(R_1 + \delta) &= 2A_2 \mu_2 - 2B_2 \mu_2 (R_1 + \delta)^{-2}; \end{aligned} \quad (3.72)$$

– sur $\Gamma_3 = \delta\Omega$:

$$\begin{aligned} A_2 R_2 + B_2 R_2^{-1} &= 2R_2, \\ 2A_2 \mu_2 - 2B_2 \mu_2 R_2^{-2} &= 2G^*. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Ci-dessus,

$$\begin{aligned} W_1(r) &= \frac{(r + r_1)}{(\mu_1 - \mu_2)^\varpi (r - r_2)^{1+\varpi}} r^\varpi {}_2F_1(a_1, b_1, c_1, z_1), \\ W_2(r) &= \frac{(r + r_1)}{(\mu_1 - \mu_2)^\varpi (r - r_2)^{1+\varpi}} r^{-\varpi} {}_2F_1(a_2, b_2, c_2, z_2). \end{aligned}$$

Les équations (3.71) - (3.73) constituent un système de 6 équations à 6 inconnus A_1, A_r, B_r, A_2, B_2 et G^* . Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle comme suit :

$$\mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (3.74)$$

où $\mathbf{X} = [A_1 \ A_r \ B_r \ A_2 \ B_2 \ G^*]^T$, $\mathbf{Y} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2R_2 \ 0]^T$ et :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -R_1 & W_1(R_1) & W_2(R_1) & 0 & 0 & 0 \\ -2\mu_1 & W'_1(R_1) & W'_2(R_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_1(R_1 + \delta) & W_2(R_1 + \delta) & -(R_1 + \delta) & -(R_1 + \delta)^{-1} & 0 \\ 0 & W'_1(R_1 + \delta) & W'_2(R_1 + \delta) & -2\mu_2 & 2\mu_2(R_1 + \delta)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 & R_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 & -\mu_2 R_2^{-2} & -1 \end{bmatrix}.$$

La résolution de (3.74) donne le module effectif G^* .

3.2.5 Détermination du module macroscopique n^*

On revient au cas d'un chargement axisymétrique. Sous les chargements ε_T et ε_A , les tenseurs de déformation s'expriment par

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ij}(\mathbf{x})\varepsilon_T + D_{ij}(\mathbf{x})\varepsilon_A \quad (3.75)$$

où $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ sont les tenseurs de localisation. Après avoir résolu les équations (3.60), (3.61) et (3.62) et déterminé k^* et l^* par (3.66) et (3.67), on peut trouver les paramètres inconnus sous la forme suivante :

$$A_1 = a_{11}\varepsilon_T + a_{21}\varepsilon_A,$$

$$A_r = a_{1r}\varepsilon_T + a_{2r}\varepsilon_A, \quad B_r = b_{1r}\varepsilon_T + b_{2r}\varepsilon_A,$$

$$A_2 = a_{12}\varepsilon_T + a_{22}\varepsilon_A, \quad B_2 = b_{12}\varepsilon_T + b_{22}\varepsilon_A.$$

où a_{1j} et b_{1j} sont les constantes associée à la couche j . Donc, le tenseur $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ pour les couches I et II et pour l'interphase s'exprime par

$$\mathbf{D}^{(I)} = \begin{bmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^{(II)} = \begin{bmatrix} a_{22} - b_{22}r^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} + b_{22}r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{(r)} = \begin{bmatrix} a_{2r}\mathfrak{G}_1 + b_{2r}\mathfrak{G}_2 + \frac{\hat{g}^*}{r} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2r}\frac{\mathfrak{Y}_1}{r} + b_{2r}\frac{\mathfrak{Y}_2}{r} + \frac{\hat{g}^*}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.76)$$

avec $\hat{g}^* = g^*/\varepsilon_A = (\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_1 + \mu_1 - \lambda_2 - \mu_2)/2$.

En substituant (3.56) dans (3.26), on trouve que : $\Sigma_3 = 2l^* \varepsilon_T + n^* \varepsilon_A$. D'autre part, selon la définition de la moyenne volumique, on obtient $\langle \sigma_3(\mathbf{x}) \rangle_Y = 2l^* \varepsilon_T + n^* \varepsilon_A$. En tenant compte de la décomposition (3.75) et de la loi de comportement locale, on a la formule qui nous permet de déterminer n^* :

$$n^* = \langle C_{33kl} D_{kl}(\mathbf{x}) \rangle_Y. \quad (3.77)$$

En substituant (3.76) dans (3.77), on obtient

$$\begin{aligned} n^* &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} C_{33kl} D_{kl} d\Omega, \\ &= \frac{2\pi H}{|\Omega|} \left(\int_0^{R_1} C_{33kl}^{(I)} D_{kl}^{(I)} r dr \int_{R_1+\delta}^{R_2} C_{33kl}^{(II)} D_{kl}^{(II)} r dr + \int_{R_1}^{R_1+\delta} C_{33kl}^{(r)} D_{kl}^{(r)} r dr \right), \\ &= \frac{R_1^2}{R_2^2} (2\lambda_1 a_{21} + \lambda_1 + 2\mu_1) + \frac{R_2^2 - (R_1 + \delta)^2}{R_2^2} (2\lambda_2 a_{22} + \lambda_2 + 2\mu_2) \\ &\quad + \frac{2}{R_2^2} \left[\int_{R_1}^{R_1+\delta} C_{13}^{(r)} \left(a_{2r} \mathfrak{G}_1 + b_{2r} \mathfrak{G}_2 + \frac{\hat{g}^*}{r} \right) r dr \right. \\ &\quad \left. + \int_{R_1}^{R_1+\delta} C_{23}^{(r)} \left(a_{2r} \mathfrak{F}_1 + b_{2r} \mathfrak{F}_2 + \hat{g}^* \right) dr + \int_{R_1}^{R_1+\delta} C_{33}^{(r)} r dr \right] \end{aligned} \quad (3.79)$$

où $C_{13}^{(r)}$, $C_{23}^{(r)}$ et $C_{33}^{(r)}$ sont déterminés par (3.25) et $|\Omega| = \pi R_2^2 H$ est le volume total du cylindre composite avec H la hauteur du cylindre.

3.3 Homogénéisation d'un composite avec l'interface cylindrique périodiquement ondulée par une méthode approximative

3.3.1 Loi de comportement locale

On considère maintenant un domaine cylindrique Ω du rayon R_2 constitué de deux matériaux isotropes. L'interface Γ entre ces deux matériaux est périodiquement rugueuse. Dans la partie 3.1, on a montré que la zone d'interface rugueuse définie par $R_1 < r < R_1 + \delta$ peut être remplacée par une interphase équivalente qui est cylindriquement anisotrope et hétérogène suivant la direction radiale. Dans le cas général où l'interface n'est pas en dent de scie, il est en général impossible de déterminer exactement les champs dans les couches I et II et dans l'interphase. C'est la raison pour laquelle, on propose dans cette section une méthode de calcul approximative qui consiste à discrétiser l'interphase en un nombre fini de couches suivant la direction radiale, dont chacune sont prise comme étant homogène. Par conséquent, le problème d'homogénéisation initial est approché par le problème d'homogénéisation des multicouches cylindriques.

La loi de comportement de la couche k s'écrit

$$\sigma_{ij}^{(k)} = C_{ijkl}^{(k)} \varepsilon_{kl}^{(k)}.$$

où $\sigma_{ij}^{(k)}$ et $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ sont les composantes du tenseur de contraintes de Cauchy et du tenseur de déformations infinitésimales, et $C_{ijkl}^{(k)}$ sont les composantes du tenseur de rigidité. On s'intéresse à 5 classes de symétries : les symétries isotrope, cubique, isotrope transverse, tétraogonale et orthotrope. Ainsi, en coordonnées cylindriques, la loi de comportement de la couche k peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^{(k)} \\ \sigma_2^{(k)} \\ \sigma_3^{(k)} \\ \sqrt{2}\sigma_4^{(k)} \\ \sqrt{2}\sigma_5^{(k)} \\ \sqrt{2}\sigma_6^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & C_{12}^{(k)} & C_{13}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(k)} & C_{22}^{(k)} & C_{23}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^{(k)} & C_{23}^{(k)} & C_{33}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{(k)} \\ \varepsilon_2^{(k)} \\ \varepsilon_3^{(k)} \\ \sqrt{2}\varepsilon_4^{(k)} \\ \sqrt{2}\varepsilon_5^{(k)} \\ \sqrt{2}\varepsilon_6^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (3.80)$$

Dans l'expression ci-dessus, on pose $rr \equiv 1$, $\theta\theta \equiv 2$, $zz \equiv 3$, $\theta z \equiv 4$, $zr \equiv 5$ et $r\theta \equiv 6$. La matrice de rigidité est définie positive si et seulement si

$$\begin{aligned} C_{11}^{(k)} C_{22}^{(k)} C_{33}^{(k)} + 2C_{12}^{(k)} C_{23}^{(k)} C_{13}^{(k)} - C_{22}^{(k)} C_{13}^{(k)2} - C_{33}^{(k)} C_{12}^{(k)2} - C_{11}^{(k)} C_{23}^{(k)2} > 0, \\ C_{11} > 0, C_{11}^{(k)} C_{22}^{(k)} - C_{12}^{(k)2} > 0, C_{44}^{(k)} > 0, C_{55}^{(k)} > 0, C_{66}^{(k)} > 0. \end{aligned} \quad (3.81)$$

On considère un composite cylindrique circulaire Ω_0 de hauteur z_0 , limité par une surfaces latérale Γ_l , une surface supérieure Γ_s et une surface inférieure Γ_i . La partie centrale du cylindre composite est formé du matériau 1 et la couche extérieure est constituée du matériau 2. Entre elles, l'interphase est divisée en n couches d'épaisseur h/n dont les propriétés sont déterminées par (3.21). Les interfaces entre $n + 2$ couches sont notés Γ_i avec $i = 1$ à $n + 1$. La fonction qui définit $y_2 - y_1$ dans l'équation (3.20) dépend de la forme de l'interface rugueuse. En particulier, quand elle est en dent de scie, on a

$$y_2 - y_1 = \frac{n}{\pi} \left\{ \arcsin \left[\frac{(R_1 + \delta) \sin(\pi/n)}{\sqrt{(R_1 + \delta)^2 + R_1^2 - 2R_1(R_1 + \delta) \cos(\pi/n)}} \right] - \arcsin \left[\frac{R_1(R_1 + \delta) \sin(\pi/n)}{r \sqrt{(R_1 + \delta)^2 + R_1^2 - 2R_1(R_1 + \delta) \cos(\pi/n)}} \right] \right\}$$

3.3.2 Solutions pour les problèmes auxiliaires

On a trois problèmes auxiliaires élémentaires à résoudre :

- déformations axisymétriques,
- cisaillement anti-plan,
- cisaillement transversal.

En fait, ces problèmes ont été bien résolus dans le travail de thèse de LE QUANG (2005). Par conséquent, on rappelle ci-dessous simplement les solutions correspondantes.

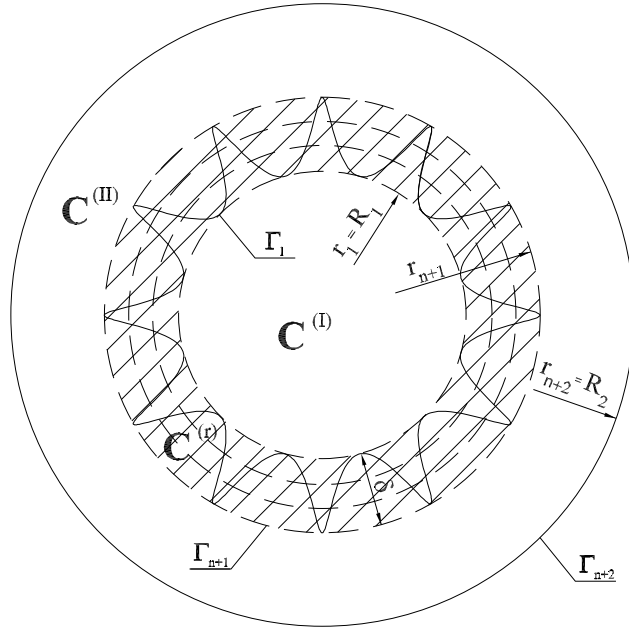


FIGURE 3.5: Modèle de n+2 phases

Déformation axisymétrique

Les conditions aux limites axisymétriques et homogènes sont imposées sur les surfaces d'un cylindre creux et s'écrivent dans la base cylindrique sous la forme :

$$\begin{aligned}
 u_r^0(\mathbf{x}) &= \varepsilon_T^{(a)} r, \quad u_\theta^0(\mathbf{x}) = 0, \quad u_z^0(\mathbf{x}) = \varepsilon_A z, \quad \mathbf{x} \in \partial\Gamma_a, \\
 u_r^0(\mathbf{x}) &= \varepsilon_T^{(b)} r, \quad u_\theta^0(\mathbf{x}) = 0, \quad u_z^0(\mathbf{x}) = \varepsilon_A z, \quad \mathbf{x} \in \partial\Gamma_b, \\
 u_z^0(\mathbf{x}) &= \varepsilon_A z, \quad \sigma_4^0(\mathbf{x}) = \sigma_5^0 = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Gamma_s \cap \Gamma_i
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

On a les expressions des composantes non-nulles du

– champ de déplacements :

$$\begin{aligned}
 u_r(\mathbf{x}) &= Ar^\alpha + Br^{-\alpha} + \omega \varepsilon_A r, \\
 u_\theta(\mathbf{x}) &= 0, \\
 u_z(\mathbf{x}) &= \varepsilon_A z;
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

– champ de déformations :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \alpha Ar^{\alpha-1} - \alpha Br^{-\alpha-1} + \omega \varepsilon_A, \\
 \varepsilon_2 &= Ar^{\alpha-1} + Br^{-\alpha-1} + \omega \varepsilon_A, \\
 \varepsilon_3 &= \varepsilon_A;
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

– champ de contraintes :

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= 2Ak r^{\alpha-1} - 2Bm r^{-(\alpha+1)} + l \varepsilon_A, \\
 \sigma_2 &= 2A\psi r^{\alpha-1} + 2B\varrho r^{-(\alpha+1)} + \phi \varepsilon_A, \\
 \sigma_3 &= 2A\tau r^{\alpha-1} + B\varsigma r^{-(\alpha+1)} + n \varepsilon_A.
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

Les paramètres matériels intervenant dans (3.83)-(3.82) sont définis par

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sqrt{\frac{C_{22}}{C_{11}}} > 0, \quad \omega = \frac{C_{13} - C_{23}}{C_{22} - C_{11}}, \\
k &= \frac{1}{2}(C_{12} + \alpha C_{11}), \quad m = \frac{1}{2}(-C_{12} + \alpha C_{11}), \quad l = \omega(C_{11} + C_{12}) + C_{13}, \\
\tau &= \frac{1}{2}(C_{23} + \alpha C_{13}), \quad \varsigma = C_{23} - \alpha C_{13}, \quad n = \omega(C_{13} + C_{23}) + C_{33}, \\
\psi &= \frac{1}{2}(C_{22} + \alpha C_{12}), \quad m = \frac{1}{2}(C_{22} - \alpha C_{12}), \quad \phi = \omega(C_{12} + C_{22}) + C_{23}.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Cisaillement anti-plan

Les conditions aux limites associé au cisaillement anti-plan s'écrivent dans le système des coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}
u_r^0(\mathbf{x}) &= s_0 z \cos \theta, \quad u_\theta^0(\mathbf{x}) = -s_0 z \sin \theta, \quad u_z^0(\mathbf{x}) = s_0 a \cos \theta, \quad \mathbf{x} \in \partial\Gamma_a, \\
u_r^0(\mathbf{x}) &= s_0 z \cos \theta, \quad u_\theta^0(\mathbf{x}) = -s_0 z \sin \theta, \quad u_z^0(\mathbf{x}) = s_0 b \cos \theta, \quad \mathbf{x} \in \partial\Gamma_b, \\
u_r^0(\mathbf{x}) &= s_0 z \cos \theta, \quad u_\theta^0(\mathbf{x}) = -s_0 z \sin \theta, \quad \sigma_3^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Gamma_s \cap \Gamma_i.
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Les composantes non-nulles des champs de déplacements, de déformations et de contraintes dans le cylindre creux sont données ci-dessous.

– Champ de déplacements :

$$\begin{aligned}
u_r(\mathbf{x}) &= s_0 z \cos \theta, \\
u_\theta(\mathbf{x}) &= -s_0 z \sin \theta, \\
u_z(\mathbf{x}) &= s_0 (Ar^i + Br^{-i} - r) \cos \theta.
\end{aligned} \tag{3.88}$$

– Champ de déformations :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_4 &= -\frac{1}{2} (Ar^{i-1} + Br^{-i-1}) s_0 \sin \theta, \\
\varepsilon_5 &= \frac{1}{2} (Ar^{i-1} - Br^{-i-1}) s_0 i \cos \theta,
\end{aligned} \tag{3.89}$$

– Champ de contraintes :

$$\begin{aligned}
\sigma_4 &= 2C_{44}\varepsilon_4, \\
\sigma_5 &= 2C_{55}\varepsilon_5.
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Ci-dessus,

$$i = \sqrt{\frac{C_{44}}{C_{55}}} > 0. \tag{3.91}$$

Cisaillement transversal

Dans ce cas, les conditions aux limites prennent la forme

$$\begin{aligned}
u_r^0(\mathbf{x}) &= c_a a \cos 2\theta, \quad u_\theta^0(\mathbf{x}) = -c_b a \sin 2\theta, \quad u_z^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Gamma_a, \\
u_r^0(\mathbf{x}) &= c_b b \cos 2\theta, \quad u_\theta^0(\mathbf{x}) = -c_b b \sin 2\theta, \quad u_z^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Gamma_b, \\
u_z^0(\mathbf{x}) &= 0, \quad \sigma_4^0(\mathbf{x}) = \sigma_5^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Gamma_s \cap \Gamma_i.
\end{aligned} \tag{3.92}$$

La solution du problème en déplacements peut s'écrire sous la forme générale comme suit :

$$u_r(\mathbf{x}) = g(r)\cos 2\theta, \quad u_\theta(\mathbf{x}) = h(r)\sin 2\theta, \quad u_z(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.93)$$

Dans cette expression,

$$g(r) = A_1\phi_1 + A_2\phi_2 + A_3\phi_3 + A_4\phi_4,$$

$$h(r) = B_1\phi_1 + B_2\phi_2 + B_3\phi_3 + B_4\phi_4,$$

où $\phi_j(r)$ est la fonction caractéristique associée à ρ_j ($j = 1$ à 4), A_j et B_j sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites. Noter que ces constantes ne sont pas indépendantes. Concrètement, A_1 et A_2 dépendent linéairement de B_1 et B_2 alors A_3 et A_4 sont linéairement liées à B_3 et B_4 . Sans perte de généralité, on peut écrire ces relations sous la forme :

$$A_1 = \delta_1 B_1 + \chi_1 B_2, \quad A_2 = \delta_2 B_2 + \chi_2 B_1, \quad A_3 = \delta_3 B_3 + \chi_3 B_4, \quad A_4 = \delta_4 B_4 + \chi_4 B_3.$$

Il convient d'introduire les paramètres matériels adimensionnels

$$\begin{aligned} p_1 &= \eta_1 + \eta_2 - \beta_1\beta_2, \quad p_2 = \eta_1\eta_2 - \varphi_1\varphi_2 = 9\alpha^2, \\ \beta_1 &= \frac{2(C_{66} + C_{12})}{C_{11}}, \quad \varphi_1 = \frac{-2(C_{66} + C_{22})}{C_{11}}, \quad \eta_1 = \frac{-(4C_{66} + C_{22})}{C_{11}}, \\ \beta_2 &= \frac{-2(C_{66} + C_{12})}{C_{66}}, \quad \varphi_2 = \frac{-2(C_{66} + C_{22})}{C_{66}}, \quad \eta_2 = \frac{-(C_{66} + 4C_{22})}{C_{66}} \end{aligned}$$

Suivant la valeur de $p_1^2 - 4p_2$, on peut distinguer trois cas :

– Cas 1 caractérisé par la condition

$$p_1^2 - 4p_2 > 0.$$

Les fonctions caractéristiques correspondantes sont données sous les formes : $\phi_j = r^{\rho_j}$ avec

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -\frac{1}{2}\sqrt{-2p_1 + 2\sqrt{p_1^2 - 4p_2}}, \quad \rho_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{-2p_1 - 2\sqrt{p_1^2 - 4p_2}}, \\ \rho_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{-2p_1 - 2\sqrt{p_1^2 - 4p_2}}, \quad \rho_4 = \frac{1}{2}\sqrt{-2p_1 + 2\sqrt{p_1^2 - 4p_2}}. \end{aligned}$$

Les expressions des constantes χ_i et δ_i sont obtenues par

$$\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = \chi_4 = 0, \quad \delta_j = \frac{2[(C_{66} + C_{12})\rho_j - C_{66} - C_{22}]}{C_{22} + 4C_{66} - C_{11}\rho_j^2}$$

où $j = 1$ à 4 . Si le matériau est isotrope transverse, cubique ou isotrope, alors $p_1 = -10$ et $p_2 = 9$, ce qui donne $\rho_1 = -3$, $\rho_2 = -1$, $\rho_3 = 1$ et $\rho_4 = 3$. Les expressions de δ_j se réduisent à $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = -(m+k)/m$, $\delta_3 = -1$ et $\delta_4 = (m-k)/(m+2k)$.

– Cas 2 défini par la condition

$$p_1^2 - 4p_2 = 0.$$

Les racines sont données par

$$\rho_1 = \rho_2 = -\Gamma < 0, \rho_3 = \rho_4 = \Gamma > 0$$

où $\Gamma = \sqrt{-p_1/2}$. Alors, les fonctions caractéristiques sont précisées par :

$$\phi_1 = r^{-\Gamma}, \phi_2 = r^{-\Gamma} \ln r, \phi_3 = r^\Gamma, \phi_4 = r^\Gamma \ln r$$

Les constantes δ_i et χ_i sont fournies par :

$$\delta_j = \frac{2[(C_{66} + C_{12})\rho_j - C_{66} - C_{22}]}{C_{22} + 4C_{66} - C_{11}\rho_j^2}, j = 1, 4;$$

$$\chi_3 = \chi_4 = 0, \chi_j = \frac{2(C_{66} + C_{12} + \rho_j\delta_{j+1}C_{11})}{C_{22} + 4C_{66} - C_{11}\rho_j^2}, j = 1, 3.$$

– Cas 3 défini par la condition

$$p_1^2 - 4p_2 < 0.$$

Dans ce cas, les racines sont des nombres complexes conjugués :

$$\rho_1 = -\Gamma - \gamma i, \rho_2 = -\Gamma + \gamma i, \rho_3 = \Gamma - \gamma i, \rho_4 = \Gamma + \gamma i$$

où $i = \sqrt{-1}$, $\Gamma = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{p_2} - p_1}$, $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{p_2} + p_1}$.

Les fonctions caractéristiques sont données par :

$$\phi_1 = r^{-\Gamma} \cos(\gamma \ln r), \phi_2 = r^{-\Gamma} \sin(\gamma \ln r), \phi_3 = r^\Gamma \cos(\gamma \ln r), \phi_4 = r^\Gamma \sin(\gamma \ln r).$$

Les constantes δ_j et χ_j peuvent s'obtenir par

$$\delta_1 = \frac{a_s c_s + b_s d_s}{a_s^2 + b_s^2}, \chi_1 = \frac{a_s d_s - b_s c_s}{a_s^2 + b_s^2}, \delta_2 = \frac{b_s c_s - a_s d_s}{a_s^2 + b_s^2}, \chi_2 = \frac{a_s c_s + b_s d_s}{a_s^2 + b_s^2},$$

$$\delta_3 = \frac{a_s e_s - b_s d_s}{a_s^2 + b_s^2}, \chi_3 = \frac{a_s d_s - b_s e_s}{a_s^2 + b_s^2}, \delta_4 = \frac{b_s e_s - a_s d_s}{a_s^2 + b_s^2}, \chi_4 = \frac{a_s e_s + b_s d_s}{a_s^2 + b_s^2}$$

où a_s, b_s, c_s, d_s et e_s sont définis par

$$a_s = C_{11}(\Gamma^2 - \gamma^2) - C_{22} - 4C_{66}, b_s = -2\Gamma\gamma,$$

$$c_s = 2[\Gamma(C_{12} + C_{66}) + C_{66} + C_{22}], d_s = -2(C_{12} + C_{66})\Gamma,$$

$$e_s = 2[-\Gamma(C_{12} + C_{66}) + C_{66} + C_{22}].$$

3.3.3 Modules élastiques effectifs

On considère un cylindre Ω de hauteur z_0 limité par une surfaces latérale Γ_l , une base supérieure Γ_s et une base inférieure Γ_i . Les deux bases ne sont pas nécessairement circulaires. Le matériau constitutif de

Ω est considéré comme étant homogène et isotrope transverse et caractérisé par

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \\ \sqrt{2}\Sigma_4 \\ \sqrt{2}\Sigma_5 \\ \sqrt{2}\Sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^* + m^* & k^* - m^* & l^* & 0 & 0 & 0 \\ k^* - m^* & k^* + m^* & l^* & 0 & 0 & 0 \\ l^* & l^* & n^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \sqrt{2}E_4 \\ \sqrt{2}E_5 \\ \sqrt{2}E_6 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

où k^* , m^* sont respectivement les modules effectifs de compressibilité plane et de cisaillement transversal, n^* signifie la rigidité longitudinale effective suivant l'axe \mathbf{e}_z , G^* exprime le module effectif de cisaillement anti-plan et l^* présente la rigidité transversale effective.

Détermination des modules k^* et l^*

On impose les conditions aux limites axisymétriques sur la surface de Ω :

$$\begin{aligned} u_r^0(\mathbf{x}) &= \varepsilon_{Tr}, u_\theta^0(\mathbf{x}) = 0, u_z^0(\mathbf{x}) = \varepsilon_{Az}, \mathbf{x} \in \partial\Gamma_l, \\ u_z^0(\mathbf{x}) &= \varepsilon_{Az}, \sigma_4^0(\mathbf{x}) = \sigma_5^0(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \partial\Gamma_s \cap \Gamma_i, \end{aligned} \quad (3.95)$$

où ε_T et ε_A sont deux constantes. En supposant que la force volumique est nulle, les champs de déplacements, de déformations et de contraintes dans Ω sont uniforme :

$$\begin{aligned} u_r(\mathbf{x}) &= \varepsilon_{Tr}, u_\theta(\mathbf{x}) = 0, u_z(\mathbf{x}) = \varepsilon_{Az}, \\ \varepsilon_1(\mathbf{x}) &= \varepsilon_2(\mathbf{x}) = \varepsilon_T, \varepsilon_3(\mathbf{x}) = \varepsilon_A, \varepsilon_4(\mathbf{x}) = \varepsilon_5(\mathbf{x}) = \varepsilon_6(\mathbf{x}) = 0, \\ \sigma_1(\mathbf{x}) &= 2k^*\varepsilon_T + l^*\varepsilon_A, \sigma_2(\mathbf{x}) = 2k^*\varepsilon_T + l^*\varepsilon_A, \\ \sigma_3(\mathbf{x}) &= 2l^*\varepsilon_T + n^*\varepsilon_A, \sigma_4(\mathbf{x}) = \sigma_5(\mathbf{x}) = \sigma_6(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \quad (3.96)$$

On crée un trou cylindrique à un endroit quelconque dans Ω et on le remplit par un cylindre composite à $n + 2$ phases qu'on a défini dans la partie précédente. Après ce remplacement, les propriétés du matériau initial formant le rest de Ω sont déterminées de telle sorte que les champs de déplacements, de déformations et de contraintes ne changent pas par la présence du cylindre composite. Par définition, l'inclusion cylindrique en question est dite neutre.

Les composantes non nulles des champs de déplacements, de déformations et de contraintes dans la couche j sont déterminées ci-dessous.

– champ de déplacements :

$$\begin{aligned} u_r^{(j)}(\mathbf{x}) &= A_j r^{\alpha_j} + B_j r^{-\alpha_j} + \omega_j \varepsilon_{Ar}, \\ u_\theta^{(j)}(\mathbf{x}) &= 0, \\ u_z^{(j)}(\mathbf{x}) &= \varepsilon_{Az}; \end{aligned} \quad (3.97)$$

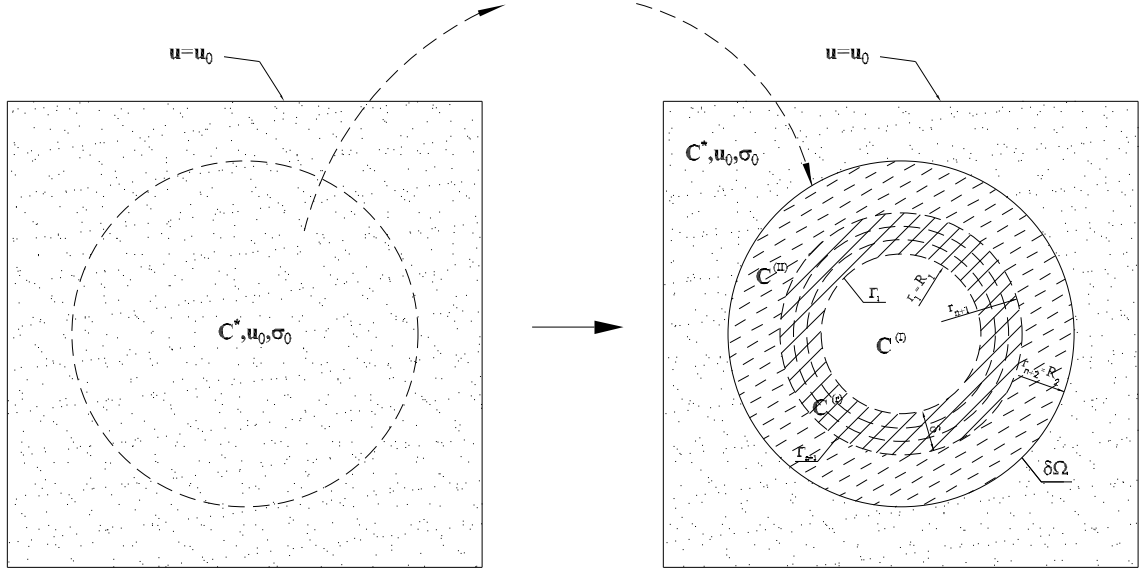


FIGURE 3.6: Inclusion cylindrique neutre

– champ de déformations :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1^{(j)} &= \alpha_j A_j r^{\alpha_j - 1} - \alpha_j B_j r^{-\alpha_j - 1} + \omega_j \varepsilon_A, \\
 \varepsilon_2^{(j)} &= A_j r^{\alpha_j - 1} + B_j r^{-\alpha_j - 1} + \omega_j \varepsilon_A, \\
 \varepsilon_3^{(j)} &= \varepsilon_A;
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

– champ de contraintes :

$$\begin{aligned}
 \sigma_1^{(j)} &= 2A_j k_j r^{\alpha_j - 1} - 2B_j m_j r^{-(\alpha_j + 1)} + l_j \varepsilon_A, \\
 \sigma_2^{(j)} &= 2A_j \psi_j r^{\alpha_j - 1} + 2B_j \varrho_j r^{-(\alpha_j + 1)} + \phi_j \varepsilon_A, \\
 \sigma_3^{(j)} &= 2A_j \tau_j r^{\alpha_j - 1} + B_j \varsigma_j r^{-(\alpha_j + 1)} + n_j \varepsilon_A,
 \end{aligned} \tag{3.99}$$

ci-dessus, $j = 1$ à $n + 2$ et les paramètres matériels sont définis par

$$\begin{aligned}
 \alpha_j &= \sqrt{\frac{C_{22}^{(j)}}{C_{11}^{(j)}}} > 0, \quad \omega_j = \frac{C_{13}^{(j)} - C_{23}^{(j)}}{C_{22}^{(j)} - C_{11}^{(j)}}, \\
 k_j &= \frac{1}{2} (C_{12}^{(j)} + \alpha_j C_{11}^{(j)}), \quad m_j = \frac{1}{2} (-C_{12}^{(j)} + \alpha_j C_{11}^{(j)}), \quad l_j = \omega_j (C_{11}^{(j)} + C_{12}^{(j)}) + C_{13}^{(j)}, \\
 \tau_j &= \frac{1}{2} (C_{23}^{(j)} + \alpha_j C_{13}^{(j)}), \quad \varsigma_j = C_{23}^{(j)} - \alpha_j C_{13}^{(j)}, \quad n_j = \omega_j (C_{13}^{(j)} + C_{23}^{(j)}) + C_{33}^{(j)}, \\
 \psi_j &= \frac{1}{2} (C_{22}^{(j)} + \alpha_j C_{12}^{(j)}), \quad \varrho_j = \frac{1}{2} (C_{22}^{(j)} - \alpha_j C_{12}^{(j)}), \quad \phi_j = \omega_j (C_{12}^{(j)} + C_{22}^{(j)}) + C_{23}^{(j)}.
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

On note que le déplacement $u_z = \varepsilon_A z$ et les contraintes $\sigma_4^0(\mathbf{x}) = \sigma_5^0 = 0$ dans chaque phase vérifient automatiquement les conditions aux limites sur les bases supérieure et inférieure de Ω . Les interfaces

entre les phases étant supposées parfaites, le vecteur de contrainte $\sigma \mathbf{e}_r$ et le vecteur de déplacement \mathbf{u} sont donc continus à travers chaque interface $r = r_j$. Ces conditions de continuité peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{J}_j(r_j)\mathbf{V}_j = \mathbf{J}_{j+1}(r_j)\mathbf{V}_{j+1} \quad (3.101)$$

où $\mathbf{V}_j = [A_j, B_j, \varepsilon_A]^T$ et

$$\mathbf{J}_j(r_j) = \begin{bmatrix} r_j^{\alpha_j} & r_j^{-\alpha_j} & \omega_j r_j \\ 2k_j r_j^{\alpha_j-1} & -2m_j r_j^{-\alpha_j-1} & l_j \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

L'équation (3.101) peut être réécrite sous la forme

$$\mathbf{V}_{j+1} = \mathbf{N}_j(r_j)\mathbf{V}_j \quad (3.103)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_j(r_j) &= \mathbf{J}_{j+1}^{-1}(r_j)\mathbf{J}_j(r_j) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{r_j^{\alpha_j-\alpha_{j+1}}(m_{j+1}+k_j)}{k_{j+1}+m_{j+1}} & \frac{r_j^{-\alpha_j-\alpha_{j+1}}(m_{j+1}-m_j)}{k_{j+1}+m_{j+1}} & \frac{1}{2} \frac{(-2m_{j+1}\omega_j-l_j+l_{j+1}+2\omega_{j+1}m_{j+1})r_j^{1-\alpha_{j+1}}}{k_{j+1}+m_{j+1}} \\ \frac{r_j^{\alpha_j+\alpha_{j+1}}(k_{j+1}-k_j)}{k_{j+1}+m_{j+1}} & \frac{r_j^{\alpha_{j+1}-\alpha_j}(k_{j+1}+m_j)}{k_{j+1}+m_{j+1}} & -\frac{1}{2} \frac{(-2k_{j+1}\omega_j+l_j-l_{j+1}+2\omega_{j+1}k_{j+1})r_j^{\alpha_{j+1}+1}}{k_{j+1}+m_{j+1}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Cette expression permet d'exprimer \mathbf{V}_{j+1} en fonction de \mathbf{V}_1 :

$$\mathbf{V}_{j+1} = \prod_{i=1}^j \mathbf{N}_i(r_i)\mathbf{V}_1. \quad (3.104)$$

En particulier, quand $j = n + 2$, on obtient

$$\mathbf{V}_{n+3} = \mathbf{Q}_{n+2}\mathbf{V}_1 = \mathbf{N}_{n+2}(r_{n+2} = R_2)\mathbf{Q}_{n+1}\mathbf{V}_1 \quad (3.105)$$

avec

$$\mathbf{Q}_j = \prod_{i=1}^j \mathbf{N}_i, \quad \mathbf{V}_1 = [A_1 \quad B_1 \quad \varepsilon_A]^T.$$

En posant $\mathbf{Q}_{n+1} = \mathbf{Q}$, on a

$$\mathbf{J}_{n+3}(r_{n+2})\mathbf{V}_{n+3} = \begin{bmatrix} u_r^*(R_2) \\ \sigma_1^*(R_2) \\ \varepsilon_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_T R_2 \\ 2k^* \varepsilon_T + l^* \varepsilon_A \\ \varepsilon_A \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{n+2}(r_{n+2})\mathbf{Q}\mathbf{V}_1. \quad (3.106)$$

La condition que le déplacement au centre doit être fini conduit à $B_1 = 0$. En résolvant le système des

équations (3.106) et en rappelant que ε_T et ε_A sont des constantes quelconques, on obtient

$$A_1 = \frac{-R_2 \varepsilon_T + \omega_{II} R_2 \varepsilon_A + \varepsilon_A R_2^{\alpha_{II}} Q_{13} + \varepsilon_A R_2^{-\alpha_{II}} Q_{23}}{R_2^{\alpha_{II}} Q_{11} + R_2^{-\alpha_{II}} Q_{21}}, \quad (3.107)$$

$$k^* = \frac{R_2^{2\alpha_{II}} k_{II} Q_{11} - m_{II} Q_{21}}{R_2^{2\alpha_{II}} Q_{11} + Q_{21}}, \quad (3.108)$$

$$l^* = \frac{2R_2^{\alpha_{II}-1} (k_{II} + m_{II}) (Q_{21} Q_{13} - Q_{11} Q_{23})}{R_2^{2\alpha_{II}} Q_{11} + Q_{21}},$$

$$+ \frac{(l_{II} - 2k_{II} \omega_{II}) R_2^{2\alpha_{II}} Q_{11} + (l_{II} + 2m_{II} \omega_{II}) Q_{21}}{R_2^{2\alpha_{II}} Q_{11} + Q_{21}}. \quad (3.109)$$

Dans le cas où il n'y a que deux phases, nos résultats se réduisent à ceux obtenus par Le Quang et He (2007).

Détermination du module G^*

Pour calculer le module de cisaillement anti-plan, on utilise le même modèle micromécanique que celui présenté ci-dessus. Les conditions aux limites du type cisaillement anti-plan sont appliquées sur les surfaces externes de Ω :

$$u_r^0(\mathbf{x}) = s_0 z \cos \theta, \quad u_\theta^0(\mathbf{x}) = -s_0 z \sin \theta, \quad u_z^0(\mathbf{x}) = s_0 r \cos \theta, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_l,$$

$$u_r^0(\mathbf{x}) = s_0 z \cos \theta, \quad u_\theta^0(\mathbf{x}) = -s_0 z \sin \theta, \quad \sigma_3^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_s \cap \Omega_i. \quad (3.110)$$

Dans le milieu extérieur du cylindre composite, le champ de déplacement est uniforme. Grâce à la solution du problème auxiliaire de cisaillement anti-plan, les composantes non-nulles des champs de déplacements, de déformations et de contraintes dans chaque phase et dans le milieu effectif peuvent être explicitées comme suit :

– dans le milieu extérieur du cylindre composite,

$$u_r^*(\mathbf{x}) = s_0 z \cos \theta, \quad u_\theta^*(\mathbf{x}) = -s_0 z \sin \theta, \quad u_z^*(\mathbf{x}) = s_0 r \cos \theta, \quad (3.111)$$

$$\varepsilon_3 = -s_0 \sin \theta, \quad \varepsilon_4 = s_0 \cos \theta, \quad (3.112)$$

$$\sigma_4 = -2G^* s_0 \sin \theta, \quad \sigma_5 = 2G^* s_0 \cos \theta; \quad (3.113)$$

– dans la phase j :

$$u_r(\mathbf{x}) = s_0 z \cos \theta, \quad u_\theta(\mathbf{x}) = -s_0 z \sin \theta, \quad u_z(\mathbf{x}) = (A_j r^{i_j} + B_j r^{-i_j} - s_0 r) \cos \theta, \quad (3.114)$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{2} (A_j r^{i_j-1} + B_j r^{-i_j-1}) s_0 \sin \theta, \quad \varepsilon_4 = \frac{1}{2} (A_j r^{i_j-1} - B_j r^{-i_j-1}) s_0 i_j \cos \theta, \quad (3.115)$$

$$\sigma_4 = -G_\theta^{(j)} (A_j r^{i_j-1} + B_j r^{-i_j-1}) s_0 \sin \theta, \quad \sigma_5 = G_r^{(j)} (A_j r^{i_j-1} - B_j r^{-i_j-1}) s_0 i_j \cos \theta; \quad (3.116)$$

où les paramètres matériels sont précisés par

$$i_j = \sqrt{\frac{G_r^{(j)}}{G_\theta^{(j)}}} > 0,$$

$$G_\theta^{(j)} = C_{44}^{(j)}, \quad G_r^{(j)} = C_{55}^{(j)}, \quad (3.117)$$

avec $j = 1$ à $n + 1$.

On remarque que les déplacements $u_r(\mathbf{x}) = s_0 z \cos \theta$ et $u_\theta(\mathbf{x}) = -s_0 z \sin \theta$ et la contrainte $\sigma_3 = 0$ dans chaque phase vérifient automatiquement les conditions aux limites sur les bases inférieure et supérieure du domaine Ω . Les conditions de continuité du vecteur de déplacements et le vecteur de contraintes à travers les interfaces latérales se réduisent aux conditions de continuité de u_z et de σ_5 . Ces conditions peuvent être écrites sous la forme matricielle :

$$\mathbf{K}_j(r_j)\mathbf{s}_j = \mathbf{K}_{j+1}(r_j)\mathbf{s}_{j+1} \quad (3.118)$$

où le vecteur $\mathbf{s}_j = [A_j, B_j]^T$ et

$$\mathbf{K}_j(r_j) = \begin{bmatrix} r_j^{i_j} & r_j^{-i_j} \\ G_{r_j} i_j r_j^{i_j-1} & -G_{r_j} i_j r_j^{-i_j-1} \end{bmatrix}. \quad (3.119)$$

En posant

$$\mathbf{L}_j(r_j) = \mathbf{K}_{j+1}^{-1}(r_j)\mathbf{K}_j(r_j),$$

l'équation de continuité peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{s}_{j+1} = \mathbf{L}_j(r_j)\mathbf{s}_j \quad (3.120)$$

avec

$$\mathbf{L}_j(r_j) = \mathbf{K}_{j+1}^{-1}(r_j)\mathbf{K}_j(r_j) \quad (3.121)$$

$$= \begin{bmatrix} r_j^{i_j-i_{j+1}}(1+g_j) & r_j^{-i_j-i_{j+1}}(1-g_j) \\ r_j^{i_j+i_{j+1}}(1-g_j) & r_j^{-i_j+i_{j+1}}(1+g_j) \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

où $g_j = \frac{G_{r_j} i_j}{G_{r_{j+1}} i_{j+1}}$.

L'équation (3.120) permet d'exprimer \mathbf{s}_{j+1} en fonction de \mathbf{s}_1 :

$$\mathbf{s}_{j+1} = \prod_{i=1}^j \mathbf{L}_i(r_i)\mathbf{s}_1. \quad (3.123)$$

Si $j = n + 2$, en posant

$$\mathbf{H} = \prod_{i=1}^{n+1} \mathbf{L}_i(r_i)\mathbf{s}_1,$$

on a la relation

$$\mathbf{K}_{n+3}(r_{n+2} = R_2)\mathbf{s}_{n+3} = \begin{bmatrix} 2s_0 R_2 \\ 2G^* s_0 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{n+2}(r_{n+2})\mathbf{H}\mathbf{V}_1. \quad (3.124)$$

Pour que le vecteur de déplacements ne soit pas singulier au centre du cylindre composite, la valeur de B_1 doit être nulle. On a donc un système de deux équations à deux inconnues A_1 et G^* . la résolution de

ce système donne

$$A_1 = \frac{R_2 s_0}{R_2^{iII} H_{11} + R_2^{-iII} H_{21}}, \quad (3.125)$$

$$G^* = \frac{G_{rII} i_{II} \left(R_2^{iII} H_{11} - R_2^{-iII} H_{21} \right)}{R_2^{iII} H_{11} + R_2^{-iII} H_{21}}. \quad (3.126)$$

Encore une fois, quand il n'y a que deux phases, notre résultat correspond à celui de Le Quang et He (2007).

Détermination du module n^*

Dans les parties précédentes de cette section, on a appliqué l'idée de l'inclusion neutre pour calculer k^* , l^* et G^* . Selon cette idée, la présence du cylindre composite dans le domaine Ω ne perturbe pas les champs initiaux. Par conséquent, les contraintes moyennes dans le cylindre composite est égales à celles dans tout le domaine Ω . Alors, quand on impose les déplacements axisymétriques sur le bord du domaine Ω , on a

$$\langle \sigma_1 \rangle_{CC} = 2k^* \varepsilon_T + l^* \varepsilon_A = \langle \sigma_1 \rangle_{\Omega}, \quad (3.127)$$

$$\langle \sigma_2 \rangle_{CC} = 2k^* \varepsilon_T + l^* \varepsilon_A = \langle \sigma_2 \rangle_{\Omega}, \quad (3.128)$$

$$\langle \sigma_3 \rangle_{CC} = 2k^* \varepsilon_T + l^* \varepsilon_A = \langle \sigma_3 \rangle_{\Omega}. \quad (3.129)$$

En tenant compte de la loi de comportement locale et de la définition des propriétés effectives du domaine Ω , il vient que

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_{CC} = \langle C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \rangle_{CC} = C_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{kl} \rangle_{CC}. \quad (3.130)$$

Si l'on connaît les champs dans Ω , par l'opérateur de moyenne volumique, on peut déterminer les propriétés effectives C_{ijkl}^* . Pour faciliter les calculs, on peut écrire le tenseur de déformations sous la forme :

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = A_{ij}(\mathbf{x}) \varepsilon_T + B_{ij}(\mathbf{x}) \varepsilon_A, \quad (3.131)$$

où $A_{ij}(\mathbf{x})$ et $B_{ij}(\mathbf{x})$ sont les tenseurs de localisation devant satisfaire aux conditions de consistance

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \langle \mathbf{A} \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

avec :

$$\mathbf{B}^{(i)} = \begin{bmatrix} \omega_i + a_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^{\alpha_i - 1} & \alpha_i - b_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^{-\alpha_i - 1} & \alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & & & \omega_i + a_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^{\alpha_i - 1} + b_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^{-\alpha_i - 1} & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.132)$$

où a_i et b_i sont respectivement les valeurs de A_i et B_i satisfaisant aux équations de (3.101) à (3.106) dans le cas où $\varepsilon_T = 0$ et $\varepsilon_A = 1$, r_i étant le rayon de l'interface i .

Par (3.130), on obtient

$$n^* = \langle C_{33kl}(\mathbf{x})B_{kl}(\mathbf{x}) \rangle_{CC}. \quad (3.133)$$

En y introduisant (3.132), il vient que

$$n^* = \frac{2}{R_2^2} \sum_{i=1}^{n+2} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(n_i + 2 \frac{a_i \tau_i r^{\alpha_i-1}}{r_i^{\alpha_i-1}} + \frac{b_i \varsigma_i r^{-\alpha_i-1}}{r_i^{-\alpha_i-1}} \right) r dr$$

L'intégration de cette équation donne finalement

$$n^* = \frac{2}{R_2^2} \sum_{i=1}^{n+2} \left(\frac{n_i}{2} (r_i^2 - r_{i-1}^2) + 2 \frac{a_i \tau_i (r_i^{\alpha_i+1} - r_{i-1}^{\alpha_i+1})}{(\alpha_i + 1) r_i^{\alpha_i-1}} + \frac{b_i \varsigma_i (r_i^{-\alpha_i+1} - r_{i-1}^{-\alpha_i+1})}{(-\alpha_i + 1) r_i^{-\alpha_i-1}} \right). \quad (3.134)$$

S'il n'y a que deux phases, ce résultat se réduit à celui de Le Quang et He (2007).

Détermination du module m^* par le schéma auto-cohérent généralisé

On vient de trouver les expressions explicites des modules effectifs k^* , l^* , G^* et n^* en utilisant l'idée de l'inclusion neutre. Pour déterminer le module m^* , on fera appel au schéma auto-cohérent généralisé.

On suppose que le domaine Ω entourant le cylindre composite est fini dans la direction \mathbf{e}_z mais infini dans le plan Oxy . Les conditions aux limites associées au cisaillement transversal sont imposées au bord de Ω :

$$\begin{aligned} u_r^0(\mathbf{x}) &= c_0 r \cos 2\theta, \quad u_\theta^0(\mathbf{x}) = -c_0 r \sin 2\theta, \quad u_z^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_l, \\ u_z^0(\mathbf{x}) &= 0, \quad \sigma_4^0(\mathbf{x}) = \sigma_5^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_s \cap \Omega_i. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Les champs de déplacements et de contraintes dans Ω sont uniformes et les composantes non-nulles de ces champs sont exprimées par :

$$\varepsilon_1 = c_0 \cos 2\theta, \quad \varepsilon_2 = -c_0 \cos 2\theta, \quad \varepsilon_6 = -c_0 \sin 2\theta, \quad (3.136)$$

$$\sigma_1 = 2m^* c_0 \cos 2\theta, \quad \sigma_2 = -2m^* c_0 \cos 2\theta, \quad \sigma_6 = -2c_0 \sin 2\theta. \quad (3.137)$$

Ainsi, la moyenne volumique de l'énergie de déformation est

$$\omega_0 = 2m^* c_0^2.$$

Le schéma auto-cohérent généralisé consiste à remplacer un cylindre dans Ω par un cylindre composite de la même taille de telle sorte que la moyenne de l'énergie de déformation ne change pas, à savoir

$$\omega = \omega_0 \quad (3.138)$$

où ω est la moyenne de l'énergie de déformation après avoir introduit le cylindre composite. Selon Eshelby (1957), ω peut être calculée par

$$\omega = \omega_0 - \frac{1}{2} \int_{r=R_2} (\mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}^0) dS \quad (3.139)$$

où \mathbf{u} (ou \mathbf{u}^0) et \mathbf{t} (ou \mathbf{t}^0) sont respectivement le vecteur de déplacements et le vecteur de contraintes sur la surface $r = R_2$ du milieu effectif en présence (ou absence) du cylindre composite. Alors, la condition (3.138) se traduit par

$$\int_{r=R_2} (\mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}^0) dS = 0. \quad (3.140)$$

Ensuite, on utilise la solution du problème auxiliaire dans le cas où les conditions aux limites relatives au cisaillement transversal.

– Dans le milieu effectif ($r > R_2$), l'expression du champ de déplacements est

$$u_r(\mathbf{x}) = g^{(e)}(r) \cos 2\theta, u_\theta(\mathbf{x}) = h^{(e)}(r) \sin 2\theta, u_z(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.141)$$

avec

$$\begin{aligned} g^{(e)}(r) &= A_1^{(e)} r^{-3} + A_2^{(e)} r^{-1} + A_3^{(e)} r + A_4^{(e)} r^3, \\ h^{(e)}(r) &= B_1^{(e)} r^{-3} + B_2^{(e)} r^{-1} + B_3^{(e)} r + B_4^{(e)} r^3, \\ A_1^{(e)} &= B_1^{(e)}, A_2^{(e)} = -\frac{k^* + m^*}{m^*} B_2^{(e)}, \\ A_3^{(e)} &= -B_3^{(e)}, A_4^{(e)} = \frac{-k^* + m^*}{2k^* + m^*} B_4^{(e)}. \end{aligned} \quad (3.142)$$

En utilisant les conditions aux limites de cisaillement transversal quand r tend vers l'infini, il vient que

$$A_3^{(e)} = -B_3^{(e)} = c_0, A_4^{(e)} = -B_4^{(e)} = 0. \quad (3.143)$$

– Dans la phase j , comme le matériau est orthotrope, le champ de déplacements s'écrit :

$$u_r(\mathbf{x}) = g^{(j)}(r) \cos 2\theta, u_\theta(\mathbf{x}) = h^{(j)}(r) \sin 2\theta, u_z(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.144)$$

où $g^{(j)}(r)$ et $h^{(j)}(r)$ sont deux fonctions scalaires en r :

$$\begin{aligned} g^{(j)}(r) &= A_1^{(j)} \phi_1 + A_2^{(j)} \phi_2 + A_3^{(j)} \phi_3 + A_4^{(j)} \phi_4, \\ h^{(j)}(r) &= B_1^{(j)} \phi_1 + B_2^{(j)} \phi_2 + B_3^{(j)} \phi_3 + B_4^{(j)} \phi_4, \end{aligned} \quad (3.145)$$

avec $j = 1$ à $n + 2$ et

$$\begin{aligned} A_1^{(j)} &= \delta_1 B_1^{(j)} + \chi_1 B_2^{(j)}, & A_2^{(j)} &= \delta_2 B_2^{(j)} + \chi_2 B_1^{(j)}, \\ A_3^{(j)} &= \delta_3 B_3^{(j)} + \chi_3 B_4^{(j)}, & A_4^{(j)} &= \delta_4 B_4^{(j)} + \chi_4 B_3^{(j)}. \end{aligned} \quad (3.146)$$

Les composantes correspondantes non-nulles du tenseur de déformations sont exprimées par

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(j)} &= g^{(j)'}(r) \cos 2\theta, & \varepsilon_2^{(j)} &= \frac{1}{r} \left(g^{(j)}(r) + 2h^{(j)}(r) \right) \cos 2\theta, \\ \varepsilon_6^{(j)} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2g^{(j)}(r) + h^{(j)}(r)}{r} - h^{(j)'}(r) \right) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (3.147)$$

où la prime ci-dessus signifie la dérivée par rapport au rayon r . Donc, les composantes non-nulles du tenseur de contraintes sont

$$\begin{aligned}\sigma_1^{(j)} &= \left[C_{11}^{(j)} g^{(j)'}(r) + \frac{C_{12}^{(j)}}{r} \left(g^{(j)}(r) + 2h^{(j)}(r) \right) \right] \cos 2\theta, \\ \sigma_2^{(j)} &= \left[C_{12}^{(j)} g^{(j)'}(r) + \frac{C_{22}^{(j)}}{r} \left(g^{(j)}(r) + 2h^{(j)}(r) \right) \right] \cos 2\theta, \\ \sigma_3^{(j)} &= \left[C_{13}^{(j)} g^{(j)'}(r) + \frac{C_{23}^{(j)}}{r} \left(g^{(j)}(r) + 2h^{(j)}(r) \right) \right] \cos 2\theta, \\ \sigma_6^{(j)} &= -C_{66}^{(j)} \left(\frac{2g^{(j)}(r) + h^{(j)}(r)}{r} - h^{(j)'}(r) \right) \sin 2\theta.\end{aligned}\quad (3.148)$$

Pour le matériau effectif dans la zone extérieure du cylindre composite, les composantes non-nulles du tenseur de contraintes sont données par

$$\begin{aligned}\sigma_1^{(e)} &= 2 \left(-\frac{3B_1^{(e)} m^*}{r^4} + \frac{2B_2^{(e)} k^*}{r^2} + c_0 m^* \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_6^{(e)} &= 2 \left(-\frac{3B_1^{(e)} m^*}{r^4} + \frac{B_2^{(e)} k^*}{r^2} - c_0 m^* \right) \sin 2\theta, \\ \sigma_5^{(e)} &= 0.\end{aligned}\quad (3.149)$$

Dans le noyau, on doit vérifier la condition que le champ de déplacements au centre est fini. Par conséquence, on a $B_1^{(1)} = B_2^{(1)} = 0$.

En substituant les expressions de \mathbf{u}^0 , \mathbf{t}^0 , $\mathbf{u}^{(e)}$ et $\mathbf{t}^{(e)}$ dans la condition auto-cohérente (3.140), on obtient

$$B_2^{(e)} = 0.$$

En supposant que les interfaces entre les interphases sont parfaites, on a les continuités du vecteur de déplacements \mathbf{u} et du vecteur de contraintes \mathbf{t} à travers $\Gamma^{(j)}$. Les équations de continuité peuvent s'écrire sous la forme matricielle

$$\mathbf{M}_j(r_j)\omega_j = \mathbf{M}_{j+1}(r_j)\omega_{j+1}\quad (3.150)$$

où $\omega_j = [B_1^{(j)}, B_2^{(j)}, B_3^{(j)}, B_4^{(j)}]^T$ et

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_j(r_j)[1, k] &= \vartheta_k^{(j)}, \\ \mathbf{M}_j(r_j)[2, k] &= \phi_k^{(j)}(r_j), \\ \mathbf{M}_j(r_j)[3, k] &= C_{11}^{(j)} r_j \vartheta_k^{(j)'} + C_{12}^{(j)} \vartheta_k^{(j)} + 2C_{12}^{(j)} \phi_k^{(j)}(r_j), \\ \mathbf{M}_j(r_j)[4, k] &= -C_{66}^{(j)} \left(2\vartheta_k^{(j)} + \phi_k^{(j)}(r_j) - r_j \phi_k^{(j)'}(r_j) \right),\end{aligned}\quad (3.151)$$

où

$$\begin{aligned}\vartheta_1^{(j)} &= \delta_1^{(j)} \phi_1^{(j)}(r_j) + \chi_2^{(j)} \phi_2^{(j)}(r_j), \quad \vartheta_2^{(j)} = \delta_2^{(j)} \phi_2^{(j)}(r_j) + \chi_1^{(j)} \phi_1^{(j)}(r_j), \\ \vartheta_3^{(j)} &= \delta_3^{(j)} \phi_3^{(j)}(r_j) + \chi_4^{(j)} \phi_4^{(j)}(r_j), \quad \vartheta_4^{(j)} = \delta_4^{(j)} \phi_4^{(j)}(r_j) + \chi_3^{(j)} \phi_3^{(j)}(r_j).\end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que

$$\omega_{j+1} = \mathbf{M}_{j+1}(r_j)^{-1} \mathbf{M}_j(r_j) \omega_j = \mathbf{P}_j(r_j) \omega_j \quad (3.152)$$

avec $\mathbf{P}_j(r_j) = \mathbf{M}_{j+1}(r_j)^{-1} \mathbf{M}_j(r_j)$. La formule de récurrence (3.152) nous permet d'exprimer ω_{n+3} du milieu effectif en fonction de ω_1 du noyau de cylindre composite. Finalement, on obtient

$$\mathbf{M}_{n+3}(R_2) \omega_{n+3} = \begin{bmatrix} \frac{B_1^{(e)}}{R_2^3} + c_0 R_2 \\ \frac{B_1^{(e)}}{R_2^3} - c_0 R_2 \\ -\frac{6B_1^{(e)} m^*}{R_2^4} + 2c_0 m^* \\ -\frac{6B_1^{(e)} m^*}{R_2^4} - 2c_0 m^* \end{bmatrix} = \mathbf{s} \omega_1 = \begin{bmatrix} S_{13} B_3^{(1)} + S_{14} B_4^{(1)} \\ S_{23} B_3^{(1)} + S_{24} B_4^{(1)} \\ S_{33} B_3^{(1)} + S_{34} B_4^{(1)} \\ S_{43} B_3^{(1)} + S_{44} B_4^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.153)$$

où

$$\mathbf{s} = \mathbf{M}_{n+2}(R_2) \prod_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}_i(r_i), \quad \omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_3^{(1)} & B_4^{(1)} \end{bmatrix}^T.$$

On a un système de quatre équations à quatre inconnues m^* , $B_1^{(e)}$, $B_3^{(1)}$ et $B_4^{(1)}$. La résolution de ce système donne

$$\begin{cases} B_3^{(1)} = T_{11} R_2 + 2T_{12} m^*, \\ B_4^{(1)} = T_{21} R_2 + 2T_{22} m^*, \end{cases} \quad (3.154)$$

avec

$$\mathbf{t} = 2c_0 \begin{bmatrix} S_{13} - S_{23} & S_{14} - S_{24} \\ S_{33} - S_{43} & S_{34} - S_{44} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (3.155)$$

Le modul effectif m^* doit satisfaire à l'équation suivante :

$$24 (S_{14} S_{23} - S_{13} S_{24}) m^{*2} - 4R_2 (-2S_{33} S_{14} - S_{33} S_{24} + 2S_{13} S_{34} - S_{13} S_{44} \\ + S_{43} S_{14} + 2S_{43} S_{24} + S_{23} S_{34} - 2S_{23} S_{44}) m^* + 2R_2^2 (S_{33} S_{44} - S_{34} S_{43}) = 0 \quad (3.156)$$

On peut montrer que cette équation admet une solution positive unique qui n'est rien d'autre que la valeur du module effectif m^* .

3.4 Exemple numérique

Dans les sections précédentes de ce chapitre, nous avons d'abord homogénéisé la zone d'interface rugueuse d'un composite suivant la direction circonférentielle pour obtenir une interphase équivalente qui est hétérogène suivant la direction radiale. Nous avons ensuite proposé deux méthodes d'homogénéisation pour déterminer les modules effectifs du composite. Dans cette section, nous considérons un exemple non seulement pour effectuer une comparaison entre ces deux méthodes mais aussi pour comparer les résultats obtenus par ces deux méthodes avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis.

Le composite en question est constitué d'une matrice en polymère PolyMethAcrylate de Méthyle (PMMA) et renforcée par des inclusions SiC. Les propriétés élastiques de ces deux phases sont données ci-dessous :

- Matrice polymère PMMA : $E_2 = 3.8 \text{ GPa}$, $\nu_2 = 0.36$;
- Inclusion SIC : $\kappa_1 = 223 \text{ GPa}$, $\mu_1 = 188 \text{ GPa}$.

On applique les trois méthodes susmentionnées pour calculer les propriétés effectives du cylindre composite. Les valeurs numériques de ces propriétés calculées sont illustrées et tracées en fonction de la fraction volumique $f_1 = R_1^2/R_2^2$ dans les figures (3.8) à (3.11). Une bonne concordance entre les résultats obtenus par les trois méthodes est constatée.

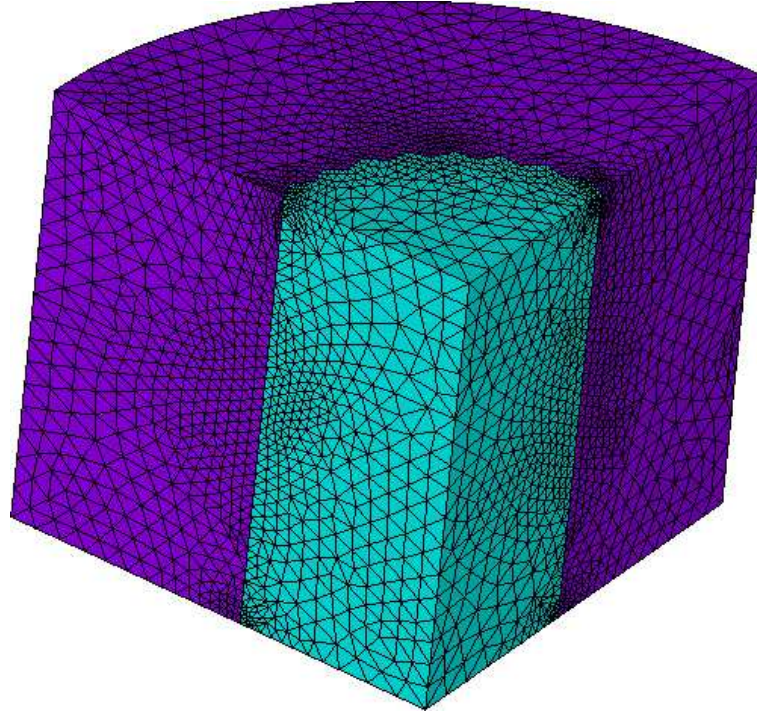


FIGURE 3.7: Modélisation de l'interface rugueuse par l'ANSYS

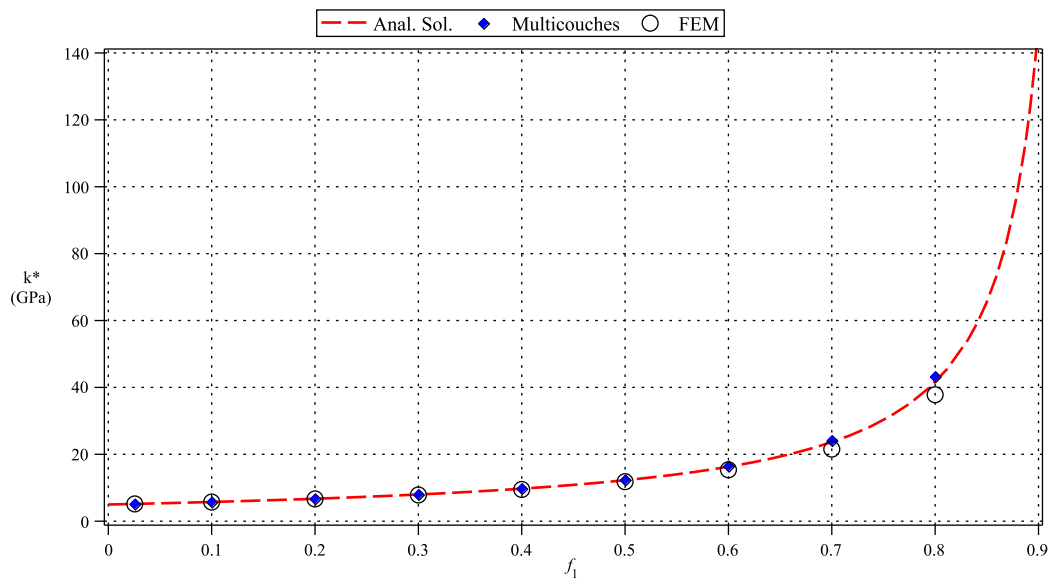


FIGURE 3.8: Comparaison des valeurs de k^* obtenues par les trois méthodes

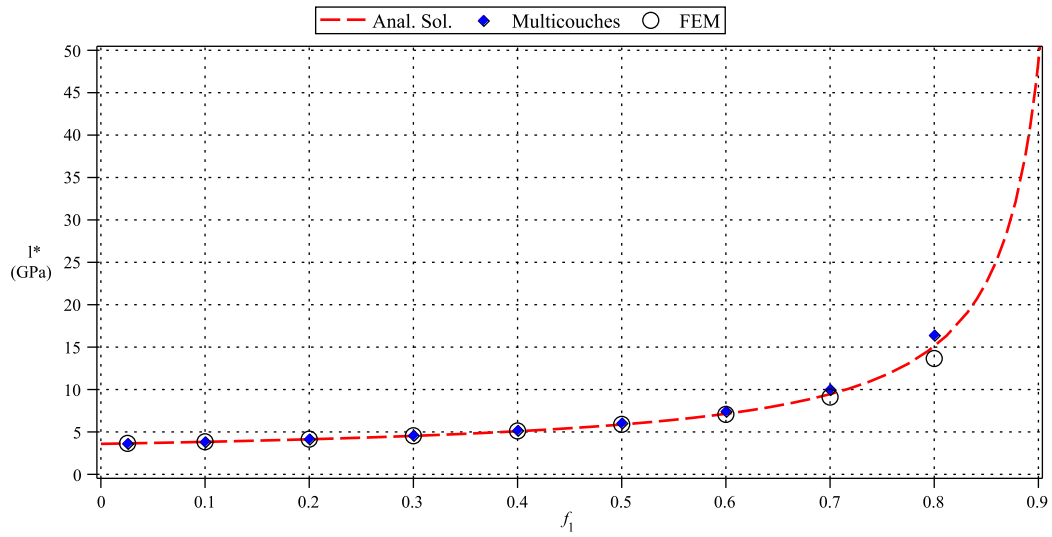


FIGURE 3.9: Comparaison des valeurs de l^* obtenues par les trois méthodes

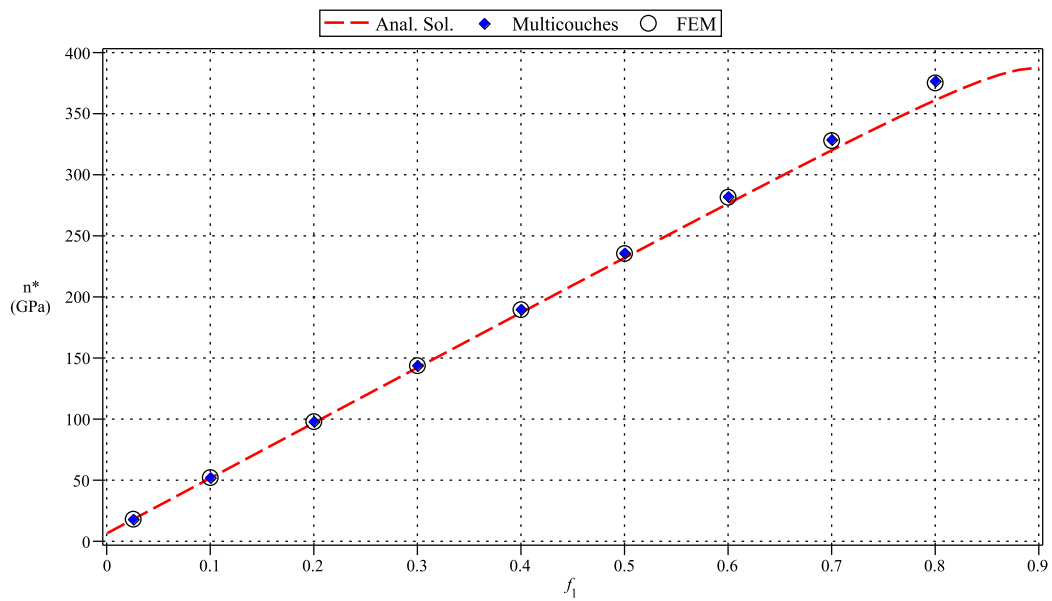


FIGURE 3.10: Comparaison des valeurs de G^* obtenues par les trois méthodes

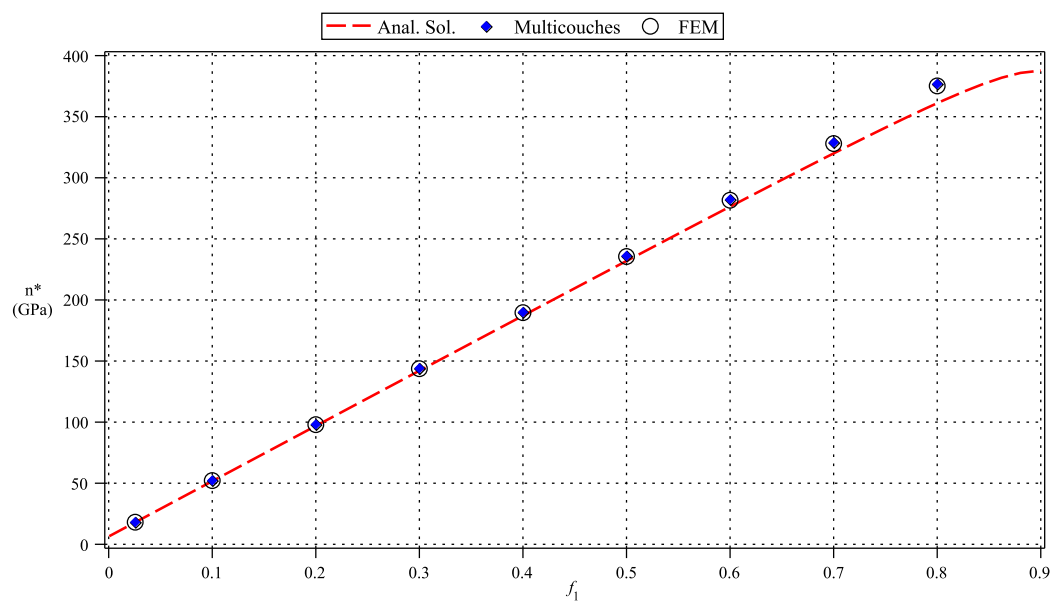


FIGURE 3.11: Comparaison des valeurs de n^* obtenues par les trois méthodes

Chapitre 4

Interfaces thermiques cylindriques ondulées suivant la direction circonférentielle

4.1 Formulation du problème

On considère un cylindre Ω de rayon R_2 et constitué d'un composite à deux phases. L'interface entre les deux du composite, notée par Γ , est une surface cylindrique, périodiquement ondulée suivant la direction circonférentielle et décrite par la fonction $r = h(y)$ avec $y = \theta/\epsilon$ dans le système des coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Les valeurs minimale et maximale de $h(y)$ sont respectivement R_1 et $R_1 + \delta$. Le domaine intérieur de Ω , noté par Ω_i , est constitué de la phase 1 alors que le domaine extérieur de Ω , dénoté par Ω_e , est constitué de la phase 2.

Le champ de température a pour forme

$$T = T(x_1, x_2, x_3, t)$$

où les variables spatiales x_1 , x_2 et x_3 sont associées aux coordonnées cylindriques par $x_1 = r$, $x_2 = \theta$ et $x_3 = z$. Pour la conduction thermique, on adopte la loi de Fourier

$$\mathbf{q}^{(i)} = -\mathbf{K}^{(i)} \nabla T^{(i)} \quad (4.1)$$

où $\mathbf{q}^{(i)}$, $\mathbf{K}^{(i)}$ et $\nabla T^{(i)}$ sont respectivement le vecteur flux de chaleur, le tenseur de conductivité et le gradient de la température dans la phase i . Le tenseur de conductivité $\mathbf{K}^{(i)}$ est un tenseur du second ordre symétrique et défini positif. En coordonnées cylindriques, le gradient de la température s'écrit :

$$\nabla T^{(i)} = \frac{\partial T^{(i)}}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial T^{(i)}}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Le vecteur flux de chaleur \mathbf{q} doit vérifier l'équation de la conservation de l'énergie

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^{(i)} + P = \rho_c^{(i)} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.2)$$

où ρ_c est la chaleur spécifique volumique de la phase i en $J.K^{-1}.m^{-3}$ et P une source de chaleur en $W.m^{-3}$. En coordonnées cylindriques, cette équation peut s'écrire sous la forme indicelle

$$-K_{jk}^{(i)}T_{,kj} - \frac{1}{r}K_{1j}^{(i)}T_{,j} + P = \rho_c^{(i)}\frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.3)$$

où on définit $(\bullet)_{,1} = (\bullet)_{,r}$, $(\bullet)_{,2} = \frac{1}{r}(\bullet)_{,\theta}$ et $(\bullet)_{,3} = (\bullet)_{,z}$.

Puisque l'interface Γ est parfaite, la température et la composante normale du vecteur flux de chaleur sont continues à travers Γ . Ces conditions de continuité sont formulées par

$$[\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}]_{\Gamma} = 0, \quad (4.4)$$

$$[T]_{\Gamma} = 0, \quad (4.5)$$

où le vecteur unitaire normal à Γ est donné par

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (h_{,y}/\epsilon)^2}} [-1 \quad h_{,y}/\epsilon \quad 0]^T.$$

En introduisant cette expression dans (4.4), on obtient

$$[\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}]_{\Gamma} = -[K_{1j}T_{,j}]_{\Gamma} + \epsilon^{-1}[h_{,y}K_{2j}T_{,j}]_{\Gamma} = 0. \quad (4.6)$$

4.2 Homogénéisation asymptotique de la zone d'interface rugueuse

Comme dans les chapitres précédents, on suppose que $T_{\epsilon}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathfrak{T}(x_1, x_2, x_3, y, \epsilon, t)$. Alors, on peut effectuer le développement asymptotique suivant :

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} &= V + \epsilon \left(N^{(1)}V + N^{(11)}V_{,1} + N^{(12)}V_{,2} + N^{(13)}V_{,3} \right) \\ &+ \epsilon^2 \left(N^{(2)}V + N^{(21)}V_{,1} + N^{(22)}V_{,2} + N^{(23)}V_{,3} + N^{(211)}V_{,11} + N^{(212)}V_{,12} \right. \\ &+ \left. N^{(213)}V_{,13} + N^{(222)}V_{,22} + N^{(223)}V_{,23} + N^{(233)}V_{,33} \right) + 0(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (4.7)$$

où $V = V(x_1, x_2, x_3, t)$ est un champ scalaire et indépendant de y ; $N^{(1)}$, $N^{(11)}$, $N^{(12)}$, $N^{(13)}$, $N^{(2)}$, $N^{(21)}$, $N^{(22)}$, $N^{(23)}$, $N^{(211)}$, $N^{(212)}$, $N^{(213)}$, $N^{(222)}$ et $N^{(223)}$ sont des fonctions scalaires dépendantes de y , x_1 , x_3 mais indépendantes de x_2 et du temps.

Puisque $y = x_1/\epsilon$, les dérivées de la température par rapport aux variables d'espace sont données par

$$T_{,1} = \mathfrak{T}_{,1}, \quad T_{,2} = \mathfrak{T}_{,2} + \epsilon^{-1}\mathfrak{T}_{,y}, \quad T_{,3} = \mathfrak{T}_{,3}$$

ou plus précisément par

$$\begin{aligned}
T_{,1} &= V_{,1} + \epsilon \left([N^{(1)}V]_{,1} + [N^{(11)}V_{,1}]_{,1} + [N^{(12)}V_{,2}]_{,1} + [N^{(13)}V_{,3}]_{,1} \right) \\
&+ \epsilon^2 \left([N^{(2)}V]_{,1} + [N^{(21)}V_{,1}]_{,1} + [N^{(22)}V_{,2}]_{,1} + [N^{(23)}V_{,3}]_{,1} + [N^{(211)}V_{,11}]_{,1} \right. \\
&+ \left. [N^{(212)}V_{,12}]_{,1} + [N^{(213)}V_{,13}]_{,1} + [N^{(222)}V_{,22}]_{,1} + [N^{(223)}V_{,23}]_{,1} + [N^{(233)}V_{,33}]_{,1} \right), \\
T_{,2} &= V_{,2} + \epsilon \left(N^{(1)}V_{,2} + N^{(11)}V_{,12} + N^{(12)}V_{,22} + N^{(13)}V_{,32} \right) \\
&+ \epsilon^2 \left(N^{(2)}V_{,2} + N^{(21)}V_{,12} + N^{(22)}V_{,22} + N^{(23)}V_{,32} + N^{(211)}V_{,112} + N^{(212)}V_{,122} \right. \\
&+ \left. N^{(213)}V_{,132} + N^{(222)}V_{,222} + N^{(223)}V_{,232} + N^{(233)}V_{,332} \right) + N_{,y}^{(1)}V + N_{,y}^{(11)}V_{,1} \\
&+ N_{,y}^{(12)}V_{,2} + N_{,y}^{(13)}V_{,3} + \epsilon \left(N_{,y}^{(2)}V + N_{,y}^{(21)}V_{,1} + N_{,y}^{(22)}V_{,2} + N_{,y}^{(23)}V_{,3} + N_{,y}^{(211)}V_{,11} \right. \\
&+ \left. N_{,y}^{(212)}V_{,12} + N_{,y}^{(213)}V_{,13} + N_{,y}^{(222)}V_{,22} + N_{,y}^{(223)}V_{,23} + N_{,y}^{(233)}V_{,33} \right), \\
T_{,3} &= V_{,3} + \epsilon \left([N^{(1)}V]_{,3} + [N^{(11)}V_{,1}]_{,3} + [N^{(12)}V_{,2}]_{,3} + [N^{(13)}V_{,3}]_{,3} \right) \\
&+ \epsilon^2 \left([N^{(2)}V]_{,3} + [N^{(21)}V_{,1}]_{,3} + [N^{(22)}V_{,2}]_{,3} + [N^{(23)}V_{,3}]_{,3} + [N^{(211)}V_{,11}]_{,3} \right. \\
&+ \left. [N^{(212)}V_{,12}]_{,3} + [N^{(213)}V_{,13}]_{,3} + [N^{(222)}V_{,22}]_{,3} + [N^{(223)}V_{,23}]_{,3} + [N^{(233)}V_{,33}]_{,3} \right).
\end{aligned}$$

En substituant les dérivées précédentes dans les équations (4.3)-(4.5) et en posant le coefficient associé à ϵ^{-1} égal à zéro, on obtient

$$[K_{22}N_{,y}^{(1)}]_{,y} V + [K_{22}N_{,y}^{(11)}]_{,y} V_{,1} + [K_{22}N_{,y}^{(12)}]_{,y} V_{,2} + [K_{22}N_{,y}^{(13)}]_{,y} V_{,3} = 0. \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
&[K_{22}N_{,y}^{(1)}V]_{\Gamma} + [(K_{12} + K_{22}N_{,y}^{(11)})V_{,1}]_{\Gamma} + [K_{22}(1 + N_{,y}^{(12)})V_{,2}]_{\Gamma} \\
&+ [(K_{23} + K_{22}N_{,y}^{(13)})V_{,3}]_{\Gamma} = 0. \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Les fonctions $N^{(1)}$, $N^{(11)}$, $N^{(12)}$ et $N^{(13)}$ sont ensuite choisies de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
&[K_{22}N_{,y}^{(1)}]_{,y} = 0, \quad 0 < y < 1, \quad y \neq y_1, y_2, \\
&[K_{12} + K_{22}N_{,y}^{(11)}]_{,y} = 0, \quad 0 < y < 1, \quad y \neq y_1, y_2, \\
&[K_{22}(1 + N_{,y}^{(12)})]_{,y} = 0, \quad 0 < y < 1, \quad y \neq y_1, y_2, \\
&[K_{23} + K_{22}N_{,y}^{(13)}]_{,y} = 0, \quad 0 < y < 1, \quad y \neq y_1, y_2, \\
&[K_{22}N_{,y}^{(1)}]_{\Gamma} = 0, \quad [N^{(1)}]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \quad N^{(1)}(0) = N^{(1)}(1), \\
&[K_{12} + K_{22}N_{,y}^{(11)}]_{\Gamma} = 0, \quad [N^{(11)}]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \quad N^{(11)}(0) = N^{(11)}(1), \\
&[K_{22}(1 + N_{,y}^{(12)})]_{\Gamma} = 0, \quad [N^{(12)}]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \quad N^{(12)}(0) = N^{(12)}(1), \\
&[K_{23} + K_{22}N_{,y}^{(13)}]_{\Gamma} = 0, \quad [N^{(13)}]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \quad N^{(13)}(0) = N^{(13)}(1). \quad (4.10)
\end{aligned}$$

où y_1 et y_2 sont les deux solutions dans l'intervalle $(0, 1)$ de l'équation $h(y) = cte$. Il résulte de (4.10) que $N_{,y}^{(1)} = 0$. De plus, pour que le coefficient de ϵ^0 dans l'équation de continuité soit égal à zéro, il faut

que

$$\begin{aligned}
0 &= h_{,y} \left[K_{12}N_{,1}^{(1)} + K_{22}N_{,y}^{(2)} + K_{23}N_{,3}^{(1)} \right]_{\Gamma} V \\
&+ \left\{ h_{,y} \left[K_{12} \left(N^{(1)} + N_{,1}^{(11)} \right) + K_{22}N_{,y}^{(21)} + K_{23}N_{,3}^{(11)} \right]_{\Gamma} - \left[K_{11} + K_{12}N_{,y}^{(11)} \right]_{\Gamma} \right\} V_{,1} \\
&+ \left\{ h_{,y} \left[K_{12}N_{,1}^{(12)} + K_{22} \left(N^{(1)} + N_{,y}^{(22)} \right) + K_{23}N_{,3}^{(12)} \right]_{\Gamma} - \left[K_{12} + K_{12}N_{,y}^{(12)} \right]_{\Gamma} \right\} V_{,2} \\
&+ \left\{ h_{,y} \left[K_{12}N_{,1}^{(13)} + K_{22}N_{,y}^{(23)} + K_{23} \left(N^{(1)} + N_{,3}^{(13)} \right) \right]_{\Gamma} - \left[K_{13} + K_{12}N_{,y}^{(13)} \right]_{\Gamma} \right\} V_{,3} \\
&+ h_{,y} \left[K_{12}N^{(11)} + K_{22}N_{,y}^{(211)} \right]_{\Gamma} V_{,11} + h_{,y} \left[K_{12}N^{(12)} + K_{22} \left(N^{(11)} + N_{,y}^{(212)} \right) \right]_{\Gamma} V_{,12} \\
&+ h_{,y} \left[K_{12}N^{(13)} + K_{22}N_{,y}^{(213)} + K_{23}N^{(11)} \right]_{\Gamma} V_{,13} + h_{,y} \left[K_{22} \left(N^{(12)} + N_{,y}^{(222)} \right) \right]_{\Gamma} V_{,22} \\
&+ h_{,y} \left[K_{22} \left(N^{(13)} + N_{,y}^{(223)} \right) + K_{23}N^{(12)} \right]_{\Gamma} V_{,23} \\
&+ h_{,y} \left[K_{22}N_{,y}^{(233)} + K_{23}N^{(13)} \right]_{\Gamma} V_{,33}. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Cette équation est satisfaite si

$$\begin{aligned}
&\left[K_{12}N_{,1}^{(1)} + K_{22}N_{,y}^{(2)} + K_{23}N_{,3}^{(1)} \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \\
&\left[K_{12} \left(N^{(1)} + N_{,1}^{(11)} \right) + K_{22}N_{,y}^{(21)} + K_{23}N_{,3}^{(11)} \right]_{\Gamma} = \frac{1}{h_{,y}} \left[K_{11} + K_{12}N_{,y}^{(11)} \right]_{\Gamma} \text{ à } y_1, y_2, \\
&\left[K_{12}N_{,1}^{(12)} + K_{22} \left(N^{(1)} + N_{,y}^{(22)} \right) + K_{23}N_{,3}^{(12)} \right]_{\Gamma} = \frac{1}{h_{,y}} \left[K_{12} + K_{12}N_{,y}^{(12)} \right]_{\Gamma} \text{ à } y_1, y_2, \\
&\left[K_{12}N_{,1}^{(13)} + K_{22}N_{,y}^{(23)} + K_{23} \left(N^{(1)} + N_{,3}^{(13)} \right) \right]_{\Gamma} = \frac{1}{h_{,y}} \left[K_{13} + K_{12}N_{,y}^{(13)} \right]_{\Gamma} \text{ à } y_1, y_2, \\
&\left[K_{12}N^{(11)} + K_{22}N_{,y}^{(211)} \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \\
&\left[K_{12}N^{(12)} + K_{22} \left(N^{(11)} + N_{,y}^{(212)} \right) \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \\
&\left[K_{12}N^{(13)} + K_{22}N_{,y}^{(213)} + K_{23}N^{(11)} \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \\
&\left[K_{22} \left(N^{(12)} + N_{,y}^{(222)} \right) \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \\
&\left[K_{22} \left(N^{(13)} + N_{,y}^{(223)} \right) + K_{23}N^{(12)} \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2, \\
&\left[K_{22}N_{,y}^{(233)} + K_{23}N^{(13)} \right]_{\Gamma} = 0 \text{ à } y_1, y_2. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

En demandant que le coefficient associé à ϵ^0 dans l'équation de la conservation de l'énergie soit nul, on

a

$$\begin{aligned}
&\left[K_{12}N_{,1}^{(1)} + K_{22}N_{,y}^{(2)} + K_{23}N_{,3}^{(1)} \right]_{,y} V \\
&+ \left\{ \left[2K_{12} \left(N^{(1)} + N_{,1}^{(11)} \right) + K_{22}N_{,y}^{(21)} + 2K_{23}N_{,3}^{(11)} \right]_{,y} + \frac{1}{r} \left(K_{11} + K_{12}N_{,y}^{(11)} \right) \right\} V_{,1} \\
&+ \left\{ \left[2K_{12}N_{,1}^{(12)} + K_{22} \left(2N^{(1)} + N_{,y}^{(22)} \right) + 2K_{23}N_{,3}^{(12)} \right]_{,y} + \frac{1}{r} \left(K_{12} + K_{12}N_{,y}^{(12)} \right) \right\} V_{,2} \\
&+ \left\{ \left[2K_{12}N_{,1}^{(13)} + K_{22}N_{,y}^{(23)} + 2K_{23} \left(N^{(1)} + N_{,3}^{(13)} \right) \right]_{,y} + \frac{1}{r} \left(K_{13} + K_{12}N_{,y}^{(13)} \right) \right\} V_{,3} \\
&+ \left[K_{11} + 2K_{12}N^{(11)} + K_{22}N_{,y}^{(211)} \right]_{,y} V_{,11} \\
&+ \left[2K_{12} + 2K_{12}N^{(12)} + K_{22} \left(2N^{(11)} + N_{,y}^{(212)} \right) \right]_{,y} V_{,12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[2K_{13} + 2K_{12}N^{(13)} + K_{22}N_{,y}^{(213)} + 2K_{23}N^{(11)} \right]_{,y} V_{,13} \\
& + \left[K_{22} + K_{22} \left(2N^{(12)} + N_{,y}^{(222)} \right) \right]_{,y} V_{,22} + \left[K_{33} + K_{22}N_{,y}^{(233)} + 2K_{23}N^{(13)} \right]_{,y} V_{,33} \\
& + \left[2K_{23} + K_{22} \left(2N^{(13)} + N_{,y}^{(223)} \right) + 2K_{23}N^{(12)} \right]_{,y} V_{,23} - P + \rho_c \dot{V} = 0. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

En intégrant cette équation par rapport à y de 0 à 1, on arrive à

$$\begin{aligned}
& \left\langle K_{11} + K_{12}N_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y V_{,11} + \left\langle 2K_{12} + K_{12}N_{,y}^{(12)} + K_{22}N_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y V_{,12} \\
& + \left\langle 2K_{13} + K_{12}N_{,y}^{(13)} + K_{23}N_{,y}^{(11)} \right\rangle_{,y} V_{,13} + \left\langle K_{22} + K_{22}N_{,y}^{(12)} \right\rangle_Y V_{,22} \\
& + \left\langle 2K_{23} + K_{22}N_{,y}^{(13)} + K_{23}N_{,y}^{(12)} \right\rangle_{,y} V_{,23} + \left\langle K_{33} + K_{23}N_{,y}^{(13)} \right\rangle_Y V_{,33} \\
& + \frac{1}{r} \left\{ \left\langle K_{11} + K_{12}N_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y V_{,1} + \left\langle K_{12} + K_{12}N_{,y}^{(12)} \right\rangle_Y V_{,2} + \left\langle K_{13} + K_{12}N_{,y}^{(13)} \right\rangle_Y V_{,3} \right\} \\
& + \left\langle \left[K_{12}N_{,1}^{(11)} + K_{23}N_{,3}^{(11)} \right]_{,y} \right\rangle_Y V_{,1} + \left\langle \left[K_{12}N_{,1}^{(12)} + K_{23}N_{,3}^{(12)} \right]_{,y} \right\rangle_Y V_{,2} \\
& + \left\langle \left[K_{12}N_{,1}^{(13)} + K_{23}N_{,3}^{(13)} \right]_{,y} \right\rangle_Y V_{,3} - \langle P \rangle_Y = - \langle \rho_c \rangle_Y \dot{V} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

où

$$\langle f \rangle_Y = (y_2 - y_1)f_e + (1 - y_2 + y_1)f_i \tag{4.15}$$

avec f_e et f_i étant les valeurs de la fonction f dans les domaines extérieur et intérieur. Après avoir déterminé les fonctions $N_{,y}^{(11)}$, $N_{,y}^{(12)}$ et $N_{,y}^{(13)}$, on les introduit dans l'équation (4.14) et obtient finalement

$$\begin{aligned}
K_{11}^{(r)} & = \left\langle K_{11} + K_{12}N_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y = \langle K_{11} \rangle_Y + \langle K_{12}K_{22}^{-1} \rangle_Y^2 \langle K_{22}^{-1} \rangle_Y^{-1} - \langle K_{12}^2 K_{22}^{-1} \rangle_Y, \\
K_{22}^{(r)} & = \left\langle K_{22} + K_{22}N_{,y}^{(12)} \right\rangle_Y = \langle K_{22}^{-1} \rangle_Y^{-1}, \\
K_{33}^{(r)} & = \left\langle K_{33} + K_{23}N_{,y}^{(13)} \right\rangle_Y = \langle K_{33} \rangle_Y + \langle K_{23}K_{22}^{-1} \rangle_Y^2 \langle K_{22}^{-1} \rangle_Y^{-1} - \langle K_{23}^2 K_{22}^{-1} \rangle_Y, \\
K_{23}^{(r)} & = K_{32}^{(r)} = \left\langle K_{23} + \frac{1}{2}K_{22}N_{,y}^{(13)} + \frac{1}{2}K_{23}N_{,y}^{(12)} \right\rangle_Y \\
& = \left\langle K_{23} + K_{22}N_{,y}^{(13)} \right\rangle_Y = \left\langle K_{23} + K_{23}N_{,y}^{(12)} \right\rangle_Y = \langle K_{23}K_{22}^{-1} \rangle_Y \langle K_{22}^{-1} \rangle_Y^{-1}, \\
K_{13}^{(r)} & = K_{31}^{(r)} = \left\langle K_{13} + \frac{1}{2}K_{12}N_{,y}^{(13)} + \frac{1}{2}K_{23}N_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y \\
& = \left\langle K_{13} + K_{23}N_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y = \left\langle K_{13} + K_{12}N_{,y}^{(13)} \right\rangle_Y \\
& = \langle K_{13} \rangle_Y + \langle K_{23}K_{22}^{-1} \rangle_Y \langle K_{22}^{-1} \rangle_Y^{-1} \langle K_{22}^{-1} K_{12} \rangle_Y - \langle K_{23}K_{22}^{-1} K_{12} \rangle_Y, \\
K_{12}^{(r)} & = K_{21}^{(r)} = \left\langle K_{12} + \frac{1}{2}K_{12}N_{,y}^{(12)} + \frac{1}{2}K_{22}N_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y = \left\langle K_{12} + K_{12}N_{,y}^{(12)} \right\rangle_Y \\
& = \left\langle K_{12} + K_{22}N_{,y}^{(11)} \right\rangle_Y = \langle K_{22}^{-1} \rangle_Y^{-1} \langle K_{22}^{-1} K_{12} \rangle_Y. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Comme l'interface Γ est périodiquement rugueuse suivant la direction circonférentielle Ox_1 , on peut écrire l'équation de la conservation de l'énergie sous la forme :

$$- \left(K_{ij}^{(r)} V_{,j} \right)_{,i} - \frac{1}{r} K_{1j}^{(r)} V_{,j} + \langle P \rangle_Y = \langle \rho_c \rangle_Y \dot{T}. \tag{4.17}$$

Les équations (4.16) et (4.17) montre que la zone d'interface rugueuse définie par $R_1 < r < R_1 + \delta$ peut être remplacée par un matériau équivalent dont le tenseur de conductivité est calculé par (4.16). De plus, ce dernier coïncide avec le tenseur de conductivité effectif d'un composite constitué de couches stratifiées suivant la direction Ox_2 (voir Milton, 2002).

4.3 Homogénéisation d'un composite avec l'interface ondulée en dent de scie par une approche rigoureuse

Dans la formule (4.15) permettant de déterminer le tenseur de conductivité pour la zone d'interface rugueuse, $1 - y_2 + y_1$ et $y_2 - y_1$ jouent le rôle des fractions volumiques des phases 1 et 2. Comme $1 - y_2 + y_1$ et $y_2 - y_1$ varient dans la direction radiale, l'interphase remplaçant la zone d'interface rugueuse est radialement hétérogène.

Soit Ω un cylindre composite dont le noyau est composé de la phase 1 et dont la couche extérieure est formée de la phase 2. Entre le noyau et la couche extérieure, il y a l'interphase dont les conductivités sont calculées par (4.15). Dans la suite de ce chapitre, les deux phases 1 et 2 sont supposées cylindriquement orthotrope. Donc, on a

$$\mathbf{K}^{(i)} = \begin{bmatrix} K_r^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & K_\theta^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & K_z^{(i)} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

avec $i = 1, 2$. L'interface Γ entre ces deux phases est en dent de scie et illustrée par la figure ci-dessous. Comme dans le cas élastique, on suppose que l'interface Γ est très rugueuse, c'est-à-dire que la valeur

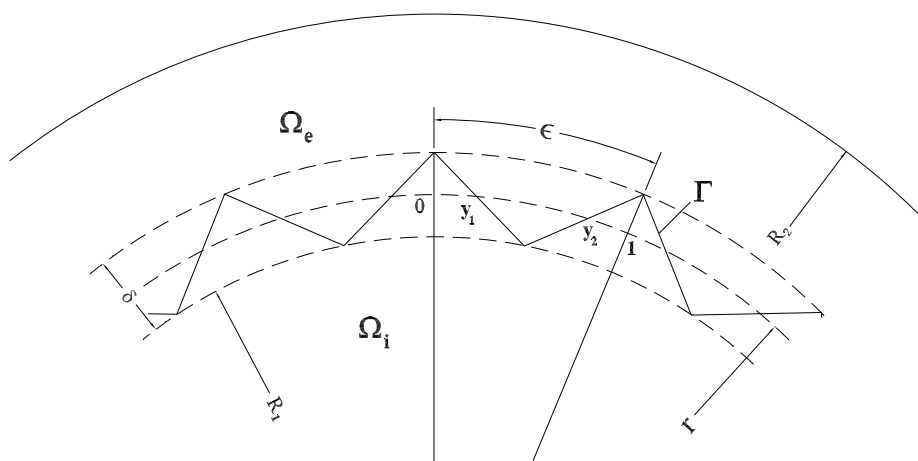


FIGURE 4.1: Interface en dent de scie

de ϵ est suffisamment petite. La rugosité de l'interface étant périodique, on a

$$f_2 = y_2 - y_1 = \frac{r - R_1}{\delta}, \quad \forall r \in (R_1, R_1 + \delta). \quad (4.19)$$

En appliquant l'opérateur de moyenne défini par (4.15), le tenseur de conductivité de l'interphase équivalente s'écrit :

$$\mathbf{K}^{(r)} = \begin{bmatrix} K_r^{(r)} & 0 & 0 \\ 0 & K_\theta^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & K_z^{(r)} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} K_r^{(r)} &= \frac{r - R_1}{\delta} K_r^{(II)} + \left(1 - \frac{r - R_1}{\delta}\right) K_r^{(I)}, \\ K_\theta^{(r)} &= \left[\frac{r - R_1}{\delta} \frac{1}{K_\theta^{(II)}} + \left(1 - \frac{r - R_1}{\delta}\right) \frac{1}{K_\theta^{(I)}} \right]^{-1}, \\ K_z^{(r)} &= \frac{r - R_1}{\delta} K_z^{(II)} + \left(1 - \frac{r - R_1}{\delta}\right) K_z^{(I)}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

4.3.1 Solution du problème auxiliaire

On considère un cylindre circulaire Ω de hauteur $2h_0$ et de rayon R . On applique sur le bord de ce cylindre les conditions aux limites suivantes :

$$T_0(\mathbf{x}) = e_0 \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \delta\Omega \quad (4.21)$$

où $\mathbf{e}_0 = e_0[1, 0, 0]^T = e_0 \mathbf{e}_x$. Dans la base cylindrique, cette condition s'écrit sous la forme équivalente :

$$T_0(\mathbf{x}) = e_0 r \cos \theta, \quad \forall \mathbf{x} \in \delta\Omega. \quad (4.22)$$

Au vu de (4.22), on cherche une solution de la forme

$$T(\mathbf{x}) = g(r) \cos \theta \quad (4.23)$$

pour le champ de température.

On considère d'abord le cas où dans la loi de Fourier

$$\begin{bmatrix} q_r \\ q_\theta \\ q_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_r & 0 & 0 \\ 0 & K_\theta & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{,r} \\ T_{,\theta}/r \\ T_{,z} \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

les coefficients de conductivité K_r , K_θ et K_z sont constantes. Avec (4.23), il vient que

$$\mathbf{q} = -K_r g' \cos \theta \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} K_\theta g \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (4.25)$$

où $(\bullet)'$ signifie la dérivée par rapport au rayon r . En introduisant l'expression de \mathbf{q} dans l'équation $\text{div} \mathbf{q} = 0$, on obtient

$$-K_r g'' - \frac{1}{r} K_r g' + \frac{1}{r^2} K_\theta g = 0. \quad (4.26)$$

La solution de la dernière équation est

$$g(r) = C_1 r^\alpha + C_2 r^{-\alpha} \quad (4.27)$$

avec $\alpha = \sqrt{\frac{K_\theta}{K_r}}$. Il est ensuite immédiat que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= (C_1 r^\alpha + C_2 r^{-\alpha}) \cos \theta, \\ \mathbf{e}(\mathbf{x}) &= -\nabla T(\mathbf{x}) = -(C_1 r^{\alpha-1} - C_2 r^{-\alpha-1}) \alpha \cos \theta \mathbf{e}_r + (C_1 r^{\alpha-1} + C_2 r^{-\alpha-1}) \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}) &= -K_r (C_1 r^{\alpha-1} - C_2 r^{-\alpha-1}) \alpha \cos \theta \mathbf{e}_r + K_\theta (C_1 r^{\alpha-1} + C_2 r^{-\alpha-1}) \sin \theta \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (4.28)$$

On considère ensuite le cas où le tenseur de conductivité est cylindriquement orthotrope et dépendant du rayon r . Plus précisément, le tenseur de conductivité correspond à celui déterminé par (4.20). Dans ce cas et avec (4.23), on a

$$\mathbf{q} = -K_r^{(r)} g' \cos \theta \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} K_\theta^{(r)} g \sin \theta \mathbf{e}_\theta. \quad (4.29)$$

En substituant cette expression dans l'équation $\text{div} \mathbf{q} = 0$, on arrive à l'équation différentielle

$$-K_r^{(r)} g'' - \left(\frac{K_r^{(r)}}{r} - \frac{K_r^{(I)} - K_r^{(II)}}{\delta} \right) g' + \frac{1}{r^2} K_\theta^{(r)} g = 0. \quad (4.30)$$

A l'aide de l'algorithme "hyper3" de Maple, présenté par L. Chan et E.S. Cheb-Terrab (2004), on transforme (4.30) en l'équation différentielle hypergéométrique de Gauss de la forme

$$x(x-1)y'' + [(a+b+1)x-c]y' + aby = 0.$$

On sait donc que la solution de (4.30) est donnée par

$$g^{(r)}(r) = \frac{\delta^2 K_r^{(r)} K_\theta^{(I)} K_\theta^{(II)}}{K_\theta^{(r)}} \left[C_1^{(r)} \mathfrak{U}_1(r) + C_2^{(r)} \mathfrak{U}_2(r) \right] \quad (4.31)$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_1(r) &= r^\psi \left(\delta K_r^{(r)} \right)^{-2-\psi} {}_2F_1(a_1, b_1, c_1, z_1), \\ \mathfrak{U}_2(r) &= r^{-\psi} \left(\delta K_r^{(r)} \right)^{-2+\psi} {}_2F_1(a_2, b_2, c_2, z_2), \\ a_1 &= 1 + \psi, b_1 = 1 + \psi, c_1 = 1 + 2\psi, \\ a_2 &= 1 - \psi, b_2 = 1 - \psi, c_2 = 1 - 2\psi, \\ z_1 = z_2 &= \frac{r \left(K_r^{(I)} K_\theta^{(I)} - K_r^{(II)} K_\theta^{(II)} \right)}{K_r^{(r)} \left[K_\theta^{(I)} R_1 - K_\theta^{(II)} (\delta + R_1) \right]}, \\ \psi &= \frac{\delta}{\sqrt{\frac{\delta+R_1}{K_\theta^{(I)}} - \frac{R_1}{K_\theta^{(II)}}} \sqrt{K_r^{(I)} (\delta + R_1) - K_r^{(II)} R_1}}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

avec ${}_2F_1$ étant la série hypergéométrique définie par

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, c, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \\ (a)_n &= a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1), (a)_0 = 1. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Finalement, on peut calculer

$$\begin{aligned}
T^{(r)}(\mathbf{x}) &= g^{(r)}(r) \cos \theta \\
q_r^{(r)} &= -K_r^{(r)} \frac{\partial g^{(r)}(r)}{\partial r} \cos \theta \mathbf{e}_r \\
q_\theta^{(r)} &= \frac{1}{r} K_\theta^{(r)} g^{(r)}(r) \sin \theta
\end{aligned} \tag{4.34}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g^{(r)}(r)}{\partial r} &= \frac{g^{(r)}(r)}{r} \left[1 + \frac{r \left(K_r^{(II)} - K_r^{(I)} \right)}{\delta K_r^{(r)}} \right] \\
&+ \frac{\delta^2 K_r^{(r)} K_\theta^{(I)} K_\theta^{(II)} \left(K_r^{(I)} K_\theta^{(I)} - K_r^{(II)} K_\theta^{(II)} \right)}{K_\theta^{(r)} \left[K_\theta^{(I)} R_1 - K_\theta^{(II)} (\delta + R_1) \right]} \left[\frac{1}{K_r^{(r)}} - \frac{r \left(K_r^{(II)} - K_r^{(I)} \right)}{\delta \left(K_r^{(r)} \right)^2} \right] \\
&\left[\frac{a_1 b_1}{c_1} C_1^{(r)} \mathfrak{U}_1(r) + \frac{a_2 b_2}{c_2} C_2^{(r)} \mathfrak{U}_2(r) \right] \\
&+ \delta K_\theta^{(I)} K_\theta^{(II)} \left[\frac{K_r^{(II)} - K_r^{(I)}}{K_\theta^{(r)}} + \frac{K_r^{(r)}}{K_\theta^{(II)}} - \frac{K_r^{(r)}}{K_\theta^{(I)}} \right] \left[\frac{a_1 b_1}{c_1} C_1^{(r)} \mathfrak{U}_1(r) + \frac{a_2 b_2}{c_2} C_2^{(r)} \mathfrak{U}_2(r) \right].
\end{aligned} \tag{4.35}$$

4.3.2 Détermination des conductivités effectives par le schéma auto-cohérent généralisé

On considère un milieu M infini tridimensionnel constitué du matériau effectif recherché dont la loi constitutive est

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}^* \mathbf{e} \tag{4.36}$$

où $\mathbf{e} = -\nabla T$ et \mathbf{K}^* est le tenseur de conductivité effectif qui est isotrope transverse

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} K_{ep} & 0 & 0 \\ 0 & K_{ep} & 0 \\ 0 & 0 & K_{ez} \end{bmatrix}. \tag{4.37}$$

Lorsque les condition aux limites $T_0 = e_0 r \cos \theta$ sont imposées au bord de M , le champ de température dans M prend la forme $T_0^{(e)}(\mathbf{x}) = e_0 r \cos \theta$. Donc, le gradient de la température et le flux de chaleur dans M s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_0^{(e)}(\mathbf{x}) &= -e_0 \cos \theta \mathbf{e}_r + e_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta \\
\mathbf{q}_0^{(e)}(\mathbf{x}) &= -K_{ep} e_0 \cos \theta \mathbf{e}_r + K_{ep} e_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Ensuite, on introduit l'énergie associée à la conduction thermique

$$2U_0(\mathbf{e}^0) = \int_M \mathbf{q}_0^{(e)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_0^{(e)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = |\Omega| K_{ep} e_0^2.$$

On creuse tout d'abord un trou cylindrique à un endroit quelconque dans M et on le remplit ensuite

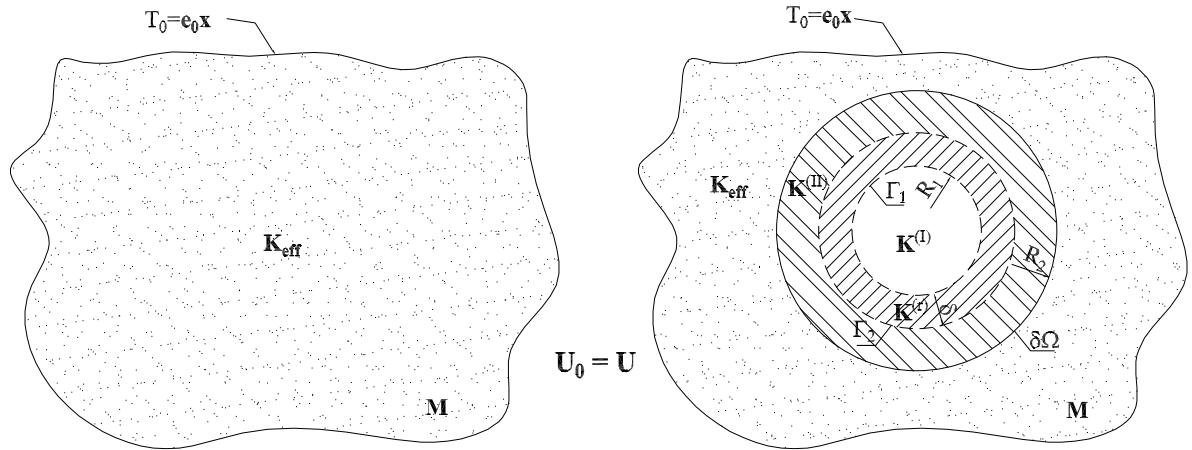


FIGURE 4.2: Modèle autocohérent généralisé

par le cylindre composite Ω de la même taille. Comme dans le cas élastique, le tenseur de conductivité effectif \mathbf{K}^* est déterminé par la condition suivante

$$\int_{\delta\Omega} \left(\mathbf{q}_0^{(e)} T^{(e)} - \mathbf{q}^{(e)} T_0^{(e)} \right) \mathbf{n} d\mathbf{x} = 0. \quad (4.39)$$

En présence du cylindre composite, la température, le gradient de la température et le flux de chaleur sont donnés par l'équation (4.28) avec $\alpha_e = \sqrt{K_\theta/K_r} = 1$, à savoir

$$\begin{aligned} T^{(e)}(\mathbf{x}) &= \left(C_1^{(e)} r + C_2^{(e)} r^{-1} \right) \cos \theta, \\ \mathbf{e}^{(e)}(\mathbf{x}) &= -\nabla T(\mathbf{x}) = - \left(C_1^{(e)} - C_2^{(e)} r^{-2} \right) \cos \theta \mathbf{e}_r + \left(C_1^{(e)} + C_2^{(e)} r^{-2} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{q}^{(e)}(\mathbf{x}) &= -K_{ep} \left(C_1^{(e)} - C_2^{(e)} r^{-2} \right) \cos \theta \mathbf{e}_r + K_{ep} \left(C_1^{(e)} + C_2^{(e)} r^{-2} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Après avoir substitué (4.38) et (4.40) dans la condition (4.39), on en déduit que

$$C_2^{(e)} = 0. \quad (4.41)$$

La température T , son gradient \mathbf{e} et le flux de chaleur \mathbf{q} dans les phases 1 et 2 et dans l'interphase et $K^{(r)}$ sont fournis par les équations (4.28) et (4.34). De plus, la condition que la température au centre du cylindre composite doit être fini implique que

$$C_2^{(I)} = 0.$$

Puisque les interfaces sont parfaites, la température et la composante normale du flux de chaleur sont continus à elles. Ces conditions de continuité sont données ci-dessous :

– Sur l'interface Γ_1 ($r = R_1$) :

$$\begin{aligned} C_1^{(I)} R_1^{\alpha_I} &= C_1^{(r)} \mathfrak{F}_1(R_1) + C_2^{(r)} \mathfrak{F}_2(R_1), \\ \alpha_I K_r^{(I)} C_1^{(I)} R_1^{\alpha_I-1} &= C_1^{(r)} \mathfrak{G}_1(R_1) + C_2^{(r)} \mathfrak{G}_2(R_1); \end{aligned} \quad (4.42)$$

– Sur l'interface Γ_2 ($r = R_1 + \delta$) :

$$\begin{aligned} C_1^{(II)} (R_1 + \delta)^{\alpha_{II}} + C_2^{(II)} (R_1 + \delta)^{-\alpha_{II}} &= C_1^{(r)} \mathfrak{F}_1(R_1 + \delta) + C_2^{(r)} \mathfrak{F}_2(R_1 + \delta), \\ \alpha_{II} K_r^{(II)} \left[C_1^{(II)} (R_1 + \delta)^{\alpha_{II}-1} - C_2^{(II)} (R_1 + \delta)^{-\alpha_{II}-1} \right] \\ &= C_1^{(r)} \mathfrak{G}_1(R_1 + \delta) + C_2^{(r)} \mathfrak{G}_2(R_1 + \delta); \end{aligned} \quad (4.43)$$

– Sur l'interface $\delta\Omega$ ($r = R_2$) :

$$\begin{aligned} C_1^{(II)} R_2^{\alpha_{II}} + C_2^{(II)} R_2^{-\alpha_{II}} &= C_1^{(e)} R_2 \\ \alpha_{II} K_r^{(II)} \left(C_1^{(II)} R_2^{\alpha_{II}-1} - C_2^{(II)} R_2^{-\alpha_{II}-1} \right) &= K_{ep} C_1^{(e)} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Ci-dessus,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1(r) &= \delta^2 K_r^{(r)} K_\theta^{(I)} K_\theta^{(II)} \mathfrak{U}_1(r) / K_\theta^{(r)}, & \mathfrak{G}_1(r) &= K_r^{(r)} \partial \mathfrak{F}_1(r) / \partial r \\ \mathfrak{F}_2(r) &= \delta^2 K_r^{(r)} K_\theta^{(I)} K_\theta^{(II)} \mathfrak{U}_2(r) / K_\theta^{(r)}, & \mathfrak{G}_2(r) &= K_r^{(r)} \partial \mathfrak{F}_2(r) / \partial r \end{aligned} \quad (4.45)$$

D'autre part, la condition aux limites (4.22) sur le frontière de M implique que

$$C_1^{(e)} = e_0. \quad (4.46)$$

On obtient finalement un système de 6 équations que sont (4.42), (4.43) et (4.44) contenant 6 inconnus $C_1^{(I)}$, $C_1^{(r)}$, $C_2^{(r)}$, $C_1^{(II)}$, $C_2^{(II)}$ et e_0 . Ces équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle

$$\mathbf{A}\varsigma = \mathbf{0} \quad (4.47)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R_1^{\alpha_I} & \mathfrak{F}_1(R_1) & \mathfrak{F}_2(R_1) & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_I K_r^{(I)} R_1^{\alpha_I-1} & \mathfrak{G}_1(R_1) & \mathfrak{G}_2(R_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{F}_1(R_1 + \delta) & \mathfrak{F}_2(R_1 + \delta) & -(R_1 + \delta)^{\alpha_{II}} & -(R_1 + \delta)^{-\alpha_{II}} & 0 \\ 0 & \mathfrak{G}_1(R_1 + \delta) & \mathfrak{G}_2(R_1 + \delta) & -\alpha_{II} K_r^{(II)} (R_1 + \delta)^{\alpha_{II}-1} & \alpha_{II} K_r^{(II)} (R_1 + \delta)^{-\alpha_{II}-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2^{\alpha_{II}} & R_2^{-\alpha_{II}} & -R_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_{II} K_r^{(II)} R_2^{\alpha_{II}-1} & \alpha_{II} K_r^{(II)} R_2^{-\alpha_{II}-1} & K_{ep} \end{bmatrix}$$

$$\varsigma = \left[C_1^{(I)} \quad C_1^{(r)} \quad C_2^{(r)} \quad C_1^{(II)} \quad C_2^{(II)} \quad e_0 \right]^T.$$

Pour que le système (4.47) ait une solution non-triviale, il faut que le déterminant de la matrice \mathbf{A} soit nul, à savoir

$$\det \mathbf{A} = K_{ep} \det \mathbf{B} + R_2 \det \mathbf{C} = 0 \quad (4.48)$$

avec

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -R_1^{\alpha_I} & \mathfrak{F}_1(R_1) & \mathfrak{F}_2(R_1) & 0 & 0 \\ -\alpha_I K_r^{(I)} R_1^{\alpha_I-1} & \mathfrak{G}_1(R_1) & \mathfrak{G}_2(R_1) & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{F}_1(R_1 + \delta) & \mathfrak{F}_2(R_1 + \delta) & -(R_1 + \delta)^{\alpha_{II}} & -(R_1 + \delta)^{-\alpha_{II}} \\ 0 & \mathfrak{G}_1(R_1 + \delta) & \mathfrak{G}_2(R_1 + \delta) & -\alpha_{II} K_r^{(II)} (R_1 + \delta)^{\alpha_{II}-1} & \alpha_{II} K_r^{(II)} (R_1 + \delta)^{-\alpha_{II}-1} \\ 0 & 0 & 0 & R_2^{\alpha_{II}} & R_2^{-\alpha_{II}} \end{bmatrix}, \quad (4.49)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -R_1^{\alpha_I} & \mathfrak{F}_1(R_1) & \mathfrak{F}_2(R_1) & 0 & 0 \\ -\alpha_I K_r^{(I)} R_1^{\alpha_I-1} & \mathfrak{G}_1(R_1) & \mathfrak{G}_2(R_1) & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{F}_1(R_1 + \delta) & \mathfrak{F}_2(R_1 + \delta) & -(R_1 + \delta)^{\alpha_{II}} & -(R_1 + \delta)^{-\alpha_{II}} \\ 0 & \mathfrak{G}_1(R_1 + \delta) & \mathfrak{G}_2(R_1 + \delta) & -\alpha_{II} K_r^{(II)} (R_1 + \delta)^{\alpha_{II}-1} & \alpha_{II} K_r^{(II)} (R_1 + \delta)^{-\alpha_{II}-1} \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_{II} K_r^{(II)} R_2^{\alpha_{II}-1} & \alpha_{II} K_r^{(II)} R_2^{-\alpha_{II}-1} \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

Il est immédiat de (4.48) que

$$K_{ep} = -R_2 \frac{\det \mathbf{C}}{\det \mathbf{B}}. \quad (4.51)$$

Il nous reste à déterminer le module K_{ez} . Pour la microstructure cylindrique en question, on peut montrer que K_{ez} est la moyenne volumique des modules $K_z^{(i)}$ des phases et l'interphase du composite :

$$K_{ez} = \left\langle K_z^{(i)} \right\rangle \quad (4.52)$$

avec $i = I, II$ et r . Plus précisément,

$$\begin{aligned} K_{ez} &= \frac{R_1^2}{R_2^2} K_z^{(I)} + \left(1 - \frac{(R_1 + \delta)^2}{R_2^2} \right) K_z^{(II)} + \frac{1}{R_2^2} \int_{R_1}^{R_1 + \delta} K_z^{(r)} r dr \\ &= \frac{R_1^2}{R_2^2} K_z^{(I)} + \left(1 - \frac{(R_1 + \delta)^2}{R_2^2} \right) K_z^{(II)} + \frac{\delta}{6R_2^2} \left[(3R_1 + \delta) K_z^{(I)} + (3R_1 + 2\delta) K_z^{(II)} \right]. \end{aligned} \quad (4.53)$$

4.3.3 Exemple numérique

Pour illustrer les résultats analytiques que l'on vient d'obtenir, on considère un cylindre composite à deux phases isotropes dont les conductivités thermiques sont :

$$\begin{aligned} K_r^{(II)} &= K_\theta^{(II)} = K_z^{(II)} = k_2 = 1 \text{ Wm}^{-1} \text{ K}^{-1}, \\ K_r^{(I)} &= K_\theta^{(I)} = K_z^{(I)} = k_1 = 10 \text{ Wm}^{-1} \text{ K}^{-1}. \end{aligned}$$

L'interface Γ entre ces deux phases est en dent de scie. On choisit l'épaisseur δ de la zone d'interface rugueuse égale à $R_1/20$ avec R_1 étant le rayon intérieur de l'inclusion. Dans cet exemple, on pose

$R_1 = 1$ et étudie la variation de la conductivité effective K^* en fonction du rayon extérieur de la matrice. Plus précisément, on s'intéresse à la variation de K^* en fonction de la fraction volumique

$$f_1 = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{1}{R_2^2}.$$

La condition aux limites imposée sur le bord du cylindre composite est

$$T = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_x = r \cos \theta. \quad (4.54)$$

En basant sur la formule (4.51), on peut tracer la courbe qui donne K^* en fonction de f_1 (Fig. 4.4). Par ailleurs, on analyse le cylindre composite par le code des éléments finis (ANSYS).

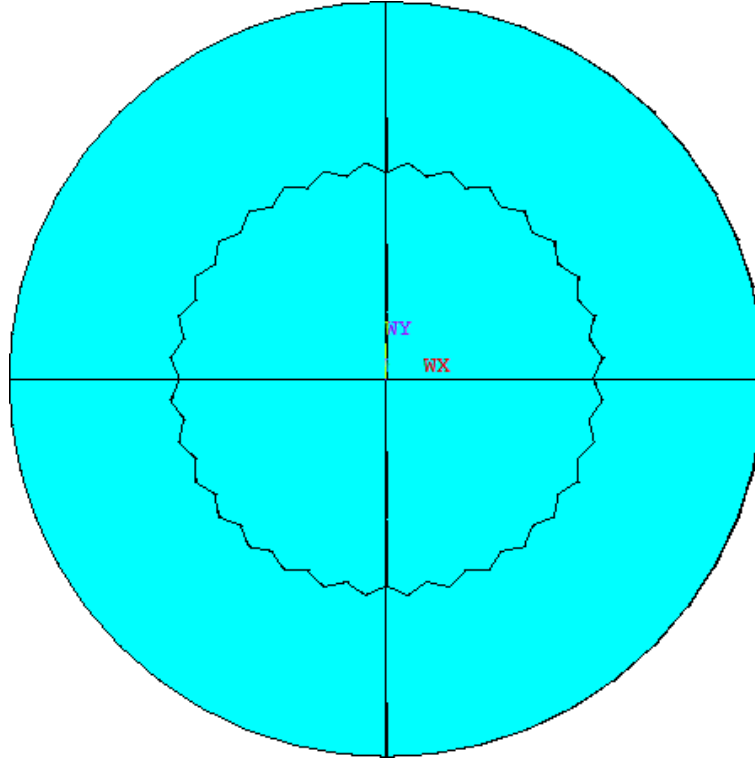


FIGURE 4.3: Analyse de l'interface rugueuse par ANSYS

Finalement, la conductivité effective K^* numérique est déterminée par la formule suivante

$$K_{ANSYS}^* = -q_X - q_Y \operatorname{tg} \theta \quad (4.55)$$

où q_X et q_Y sont les projections du flux de chaleur sur la surface extérieure dans les directions OX et OY .

En comparant les résultats analytiques avec les résultats numériques obtenues par ANSYS, on trouve une bonne concordance entre eux. De plus, on voit que quand le rayon extérieur R_2 de la matrice tend vers l'infini, c'est-à-dire que $f_1 = 0$, la conductivité thermique effective est égale à celle-ci de la matrice $K_\infty^* = K_2 = 1$.

D'autre part, afin d'étudier les champs du problème, on prend $f_1 = 0, 3$. En résolvant le système des équations (4.47), la température et le flux de chaleur dans le cylindre composite sont analytiquement

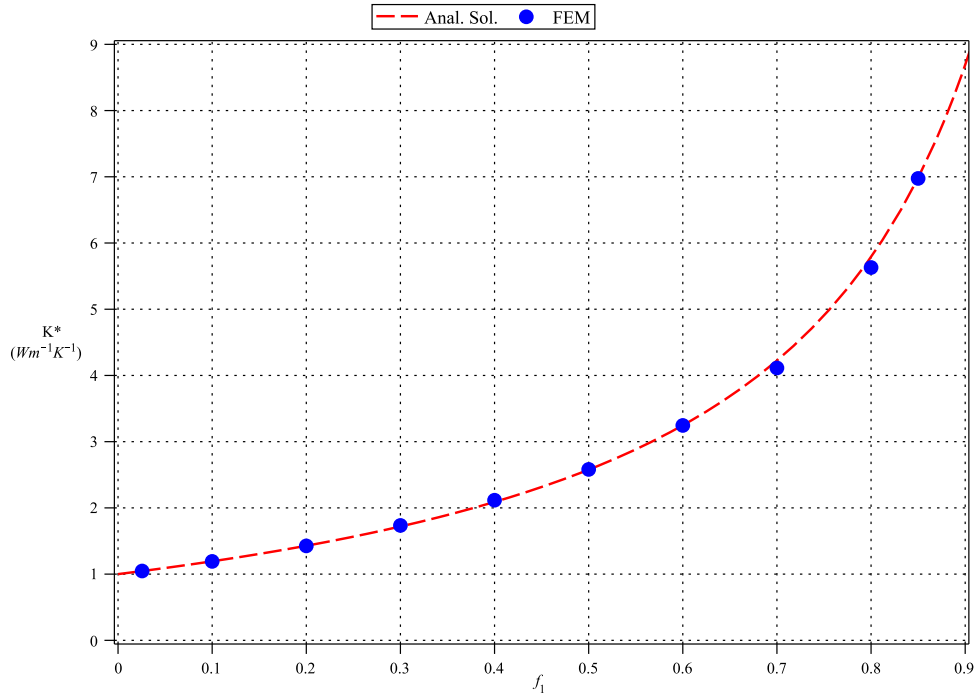


FIGURE 4.4: Comparaison des résultats analytiques avec les résultats numériques obtenus par ANSYS

déterminés par les formules (4.28) et (4.34) avec

$$\begin{aligned}
 C_1^{(I)} &= 0.2541303091, \quad C_1^{(r)} = -477.4192201, \quad C_2^{(r)} = 428.6815854, \\
 C_1^{(II)} &= 1.35966628, \quad C_2^{(II)} = -1.198887602, \\
 K^* &= 1.719332561.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on peut tracer les diagrammes de la température et de la composante q_X du flux de chaleur analytiquement déterminées. Encore une fois, on observe une excellente concordance avec les résultats numériques obtenus par ANSYS.

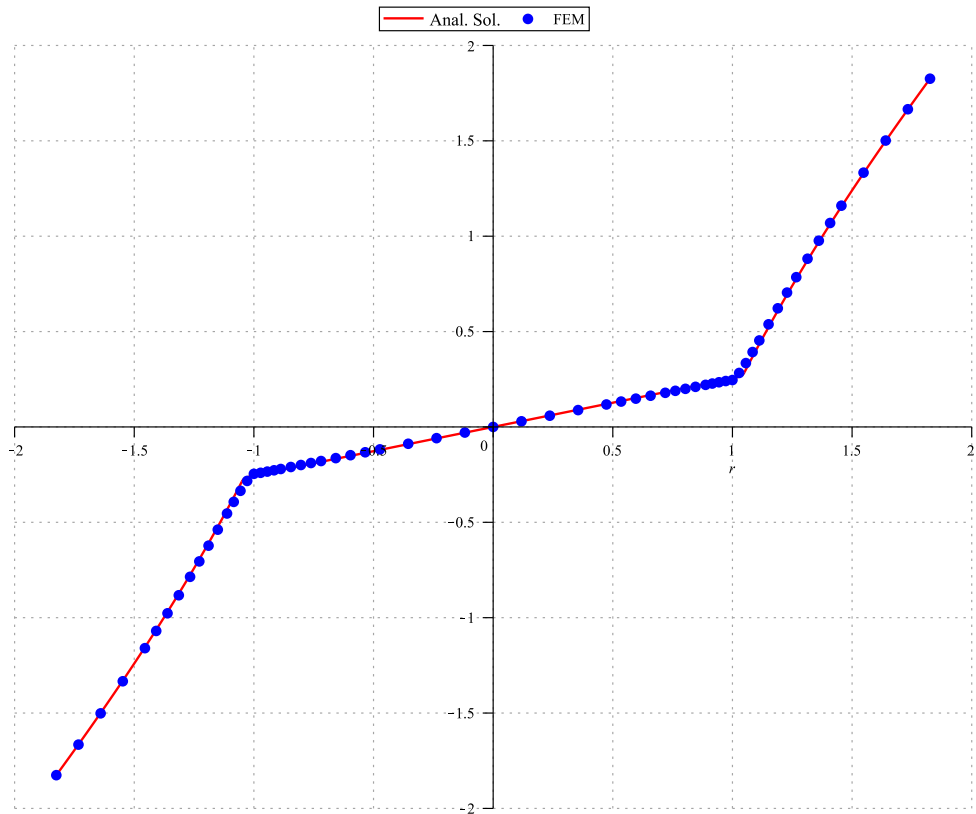


FIGURE 4.5: Variation de la température selon l'axe Ox

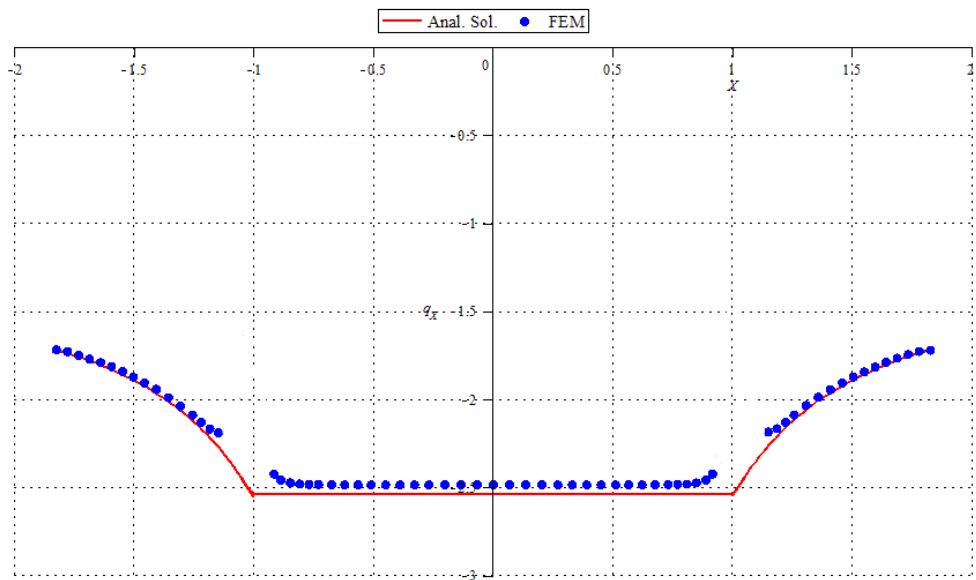


FIGURE 4.6: Variation du flux thermique selon l'axe Ox

4.4 Homogénéisation d'un composite avec l'interface périodiquement ondulée par une méthode approximative

On a montré dans la section 4.2 que la zone d'interface rugueuse peut être remplacée par une interphase équivalente qui est homogène suivant la direction circonférentielle mais hétérogène dans la direction

radiale. Ensuite, on a donné dans la section 4.3 la solution analytique exacte du problème afin de déterminer analytiquement les conductivités effectives dans le cas particulier où l'interface rugueuse est en dent de scie. Dans le cas général, il est impossible de trouver une solution analytiquement explicite pour le problème d'une interphase hétérogène suivant la direction radiale. Par conséquent, on propose dans cette section une méthode approximative pour homogénéiser un composite avec l'interface cylindrique périodiquement ondulée qui n'est pas nécessairement en dent de scie.

Soit un cylindre composite Ω constitué de deux phases liées par une interphase dont les conductivités sont déterminées par (4.16). Les deux phases sont cylindriquement orthotropes et homogènes alors que l'interphase est non cylindriquement anisotrope et radialement hétérogène. Les tenseurs de conductivités de ces matériaux sont précisés par

$$\mathbf{K}^{(I)} = \begin{bmatrix} K_r^{(I)} & 0 & 0 \\ 0 & K_\theta^{(I)} & 0 \\ 0 & 0 & K_z^{(I)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(II)} = \begin{bmatrix} K_r^{(II)} & 0 & 0 \\ 0 & K_\theta^{(II)} & 0 \\ 0 & 0 & K_z^{(II)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}^{(r)} = \begin{bmatrix} K_r^{(r)} & 0 & 0 \\ 0 & K_\theta^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & K_z^{(r)} \end{bmatrix},$$

où

$$K_r^{(r)} = (1 - f(r)) K_r^{(I)} + f(r) K_r^{(II)}, \quad K_z^{(r)} = (1 - f(r)) K_z^{(I)} + f(r) K_z^{(II)}$$

$$K_\theta^{(r)} = 1 / \left[((1 - f(r)) / K_\theta^{(I)} + f(r) / K_\theta^{(II)}) \right]$$

avec $f(r) = y_2 - y_1$ dans (4.15). En particulier, lorsque l'interface rugueuse est en dent de scie, on a

$$f(r) = y_2 - y_1$$

$$= \frac{n}{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \arcsin \left[\frac{(R_1 + \delta) \sin(\pi/n)}{\sqrt{(R_1 + \delta)^2 + R_1^2 - 2R_1(R_1 + \delta) \cos(\pi/n)}} \right] \\ - \arcsin \left[\frac{R_1(R_1 + \delta) \sin(\pi/n)}{r \sqrt{(R_1 + \delta)^2 + R_1^2 - 2R_1(R_1 + \delta) \cos(\pi/n)}} \right] \end{array} \right\}.$$

Cette formule est exacte pour calculer $f(r)$. Quand δ est suffisamment petit, la formule approximative (4.19) peut être utilisée à la place.

Ensuite, on divise l'interphase en n couches d'épaisseur uniforme δ/n suffisamment petite. Chaque couche est supposée homogène. Il est clair que la précision d'approximation augmente quand n augmente.

Après la division de l'interphase en n couches, le cylindre composite est constitué d'un noyau entouré de $n + 1$ couches. Le tenseur de conductivité effective de ce cylindre composite a pour forme (4.37). Pour calculer ses composantes, on utilise le concept de l'inclusion neutre présenté dans la chapitre 3.

On considère un milieu infini homogène M dont la conductivité est \mathbf{K}^* . La température uniforme (4.22) est imposée sur le bord infini de M . Comme M est homogène, son champ de température prend la même forme que (4.22). Donc, le flux de chaleur est uniforme dans M et déterminé par

$$\mathbf{q}_0 = e_0 K_{ep} (-\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta) = -e_0 K_{ep} \mathbf{e}_X. \quad (4.56)$$

Ensuite, dans M on creuse un trou de la même taille que le cylindre multicouche Ω et y insère ce dernier.

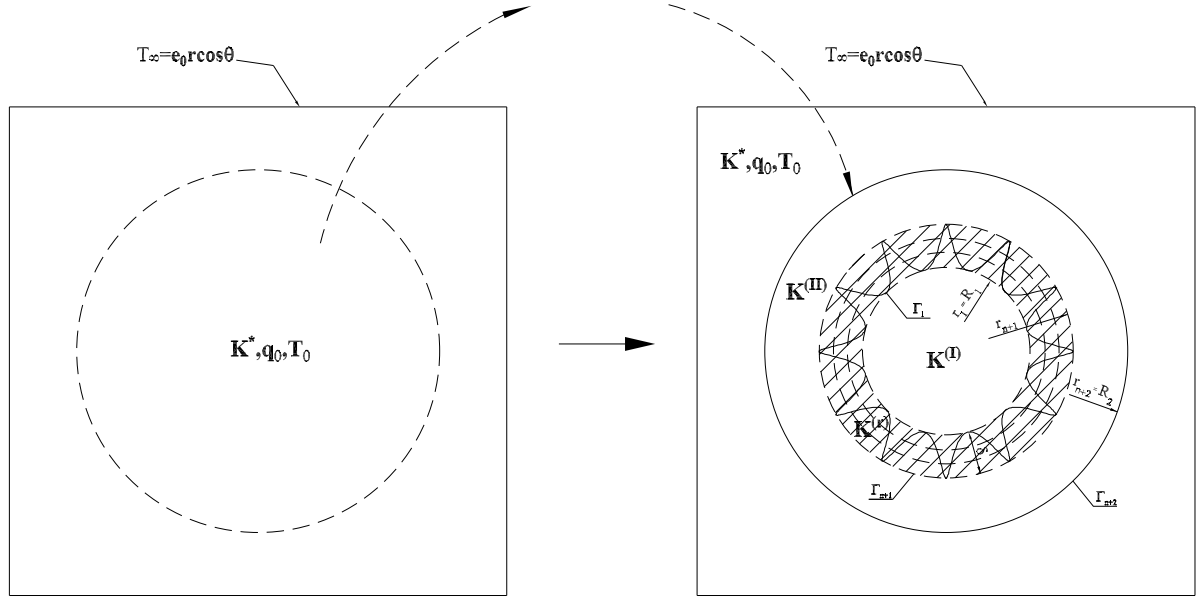


FIGURE 4.7: Illustration du concept d'Inclusion neutre

En demandant que l'introduction du cylindre composite ne perturbe pas le champ de température et le flux de chaleur dans le domaine M , on a (4.22) et (4.56).

Les couches de Ω étant orthotropes, le champ de température et le champ de flux de chaleur dans la couche i sont donnés par (4.28), à savoir

$$\begin{aligned} T^{(i)}(\mathbf{x}) &= \left(C_1^{(i)} r^{\alpha^{(i)}} + C_2^{(i)} r^{-\alpha^{(i)}} \right) \cos \theta, \\ \mathbf{q}^{(i)}(\mathbf{x}) &= -K_r^{(i)} \left(C_1^{(i)} r^{\alpha^{(i)}-1} - C_2^{(i)} r^{-\alpha^{(i)}-1} \right) \alpha^{(i)} \cos \theta \mathbf{e}_r \\ &\quad + K_\theta^{(i)} \left(C_1^{(i)} r^{\alpha^{(i)}-1} + C_2^{(i)} r^{-\alpha^{(i)}-1} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Les constantes dans ces expressions sont à déterminer par les équations de continuité de la température et de la composante normale du flux de chaleur ainsi que les conditions aux limites (4.22) à l'infini du milieu M .

Pour structurer les calculs relatifs à la détermination de \mathbf{K}^* , les équations de continuité pour l'interface i sont réécrites sous la forme matricielle :

$$\mathbf{J}^{(i)}(r_i)\mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{J}^{(i+1)}(r_i)\mathbf{v}^{(i+1)} \quad (4.58)$$

avec

$$\mathbf{v}^{(i)} = \begin{bmatrix} C_1^{(i)} \\ C_2^{(i)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^{(i)}(r_i) = \begin{bmatrix} r_i^{\alpha^{(i)}} & r_i^{-\alpha^{(i)}} \\ -\alpha^{(i)} K_r^{(i)} r_i^{\alpha^{(i)}-1} & \alpha^{(i)} K_r^{(i)} r_i^{-\alpha^{(i)}-1} \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

Pour que la température au centre du cylindre soit finie, il est nécessaire que $C_2^{(I)} = 0$. Donc,

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(I)} = \begin{bmatrix} C_1^{(i)} & 0 \end{bmatrix}^T.$$

On déduit de (4.58) que

$$\mathbf{v}^{(i+1)} = \mathbf{J}^{(i+1)}(r_i)^{-1} \mathbf{J}^{(i)}(r_i) \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{N}^{(i)} \mathbf{v}^{(i)} \quad (4.60)$$

avec $\mathbf{N}^{(i)} = \mathbf{J}^{(i+1)}(r_i)^{-1} \mathbf{J}^{(i)}(r_i)$. Ainsi, on obtient

$$\mathbf{v}^{(n+2)} = \mathbf{Q}_{n+1} \mathbf{v}^{(I)} \quad (4.61)$$

avec

$$\mathbf{Q}_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}.$$

La continuité à travers l'interface Γ_{n+2} se traduit par

$$\mathbf{J}^{(n+2)}(R_2)\mathbf{v}^{(n+2)} = \mathbf{J}^{(n+3)}(R_2)\mathbf{v}^{(n+3)} = \begin{bmatrix} e_0 R_2 \\ -e_0 K_{ep} \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

En substituant (4.59) et (4.61) dans (4.62), on obtient un système de deux équations :

$$\begin{bmatrix} R_2^{\alpha^{(II)}} & R_2^{-\alpha^{(II)}} \\ -\alpha^{(II)} K_r^{(II)} R_2^{\alpha^{(II)}-1} & \alpha^{(II)} K_r^{(II)} R_2^{-\alpha^{(II)}-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^{(I)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_0 R_2 \\ -e_0 K_{ep} \end{bmatrix}.$$

La résolution de cette équation donne

$$\begin{aligned} C_1^{(I)} &= \frac{e_0 R_2}{R_2^{\alpha^{(II)}} Q_{11} + R_2^{-\alpha^{(II)}} Q_{21}}, \\ K_{ep} &= \frac{\alpha^{(II)} K_r^{(II)} \left(R_2^{\alpha^{(II)}} Q_{11} - R_2^{-\alpha^{(II)}} Q_{21} \right)}{R_2^{\alpha^{(II)}} Q_{11} + R_2^{-\alpha^{(II)}} Q_{21}}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

La conductivité effective K_{ez} est égale à la moyenne volumique des conductivités $K_z^{(i)}$ des phases du cylindre composite :

$$K_{ez} = \langle K_z^{(i)} \rangle = \frac{1}{R_2^2} \sum_{i=1}^{n+2} (r_i^2 - r_{i-1}^2) K_z^{(i)} \quad (4.64)$$

avec $r_0 = 0$.

Exemple numérique

A titre d'un exemple numérique, on choisit les données analogues à la partie 4.3.3. Comme l'épaisseur δ est petite, l'interphase équivalente de la zone d'interface rugueuse est divisée en 10 couches. Après avoir fait les calculs, on obtient la conductivité effective en fonction de la fraction volumique de la phase 1 : $f_1 = R_1^2/R_2^2$. Dans figure 4.8, on trace les résultats obtenus par la méthode d'homogénéisation rigoureuse et par la méthode d'homogénéisation approximative. On y présente également les résultats délivrés par la méthode des éléments finis. On constate qu'il y a une très bonne concordance entre les résultats donnés par les trois méthodes.

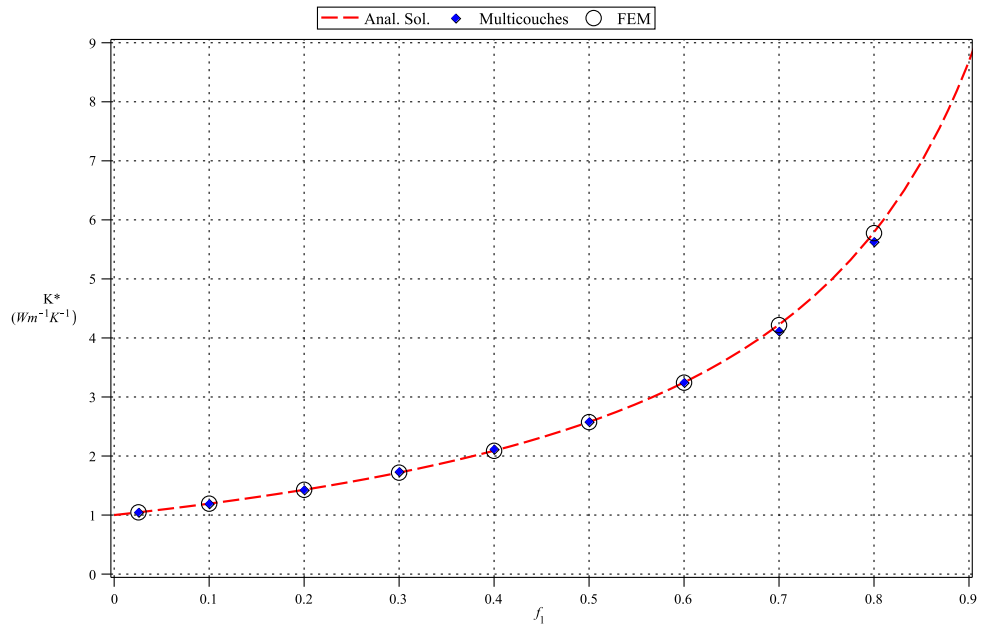


FIGURE 4.8: Comparaison des résultats de la conductivité effective K^* obtenus par les 3 méthodes.

Chapitre 5

Interfaces élastiques planes ondulées suivant deux directions

5.1 Formulation du problème

On considère un matériau composite Ω formé de deux phases élastiques anisotropes. Le domaine supérieure est constitué de la phase 1 alors que le domaine inférieur est composé de la phase 2. L'interface Γ entre ces deux phases est une surface plane rugueuse suivant les directions Ox_1 et Ox_2 et décrite par l'équation $x_3 = h(x_1, x_2)$. On suppose que la rugosité est périodique et à la même période ϵ le long de Ox_1 et Ox_2 . Alors, il convient de réécrire l'équation $x_3 = h(x_1, x_2)$ sous la forme

$$x_3 = h(y_1, y_2) \quad (5.1)$$

avec $(y_1, y_2) = (x_1/\epsilon, x_2/\epsilon)$. La valeur minimale de $h(y_1, y_2)$ est désignée par H_0 et sa valeur maximale est égale à zéro. On divise Ω en trois zones. La zone d'interface rugueuse, symbolisée par $\Omega^{(r)}$, est définie par

$$\Omega^{(r)} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid -H^{(0)} < x_3 < 0 \right\}, \quad (5.2)$$

Les deux autres zones homogènes, constituées de la phase 1 et de la phase 2, sont décrites par

$$\Omega^{(-)} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega^{(1)} \mid x_3 < -H^{(0)} \right\}, \quad (5.3)$$

$$\Omega^{(+)} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega^{(2)} \mid x_3 > 0 \right\}. \quad (5.4)$$

Dans le cas 3D, les composantes du vecteur de déplacement sont

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.5)$$

La loi de comportement des phases supposées linéairement élastiques s'écrit

$$\sigma = \mathbb{C}\varepsilon, \quad (5.6)$$

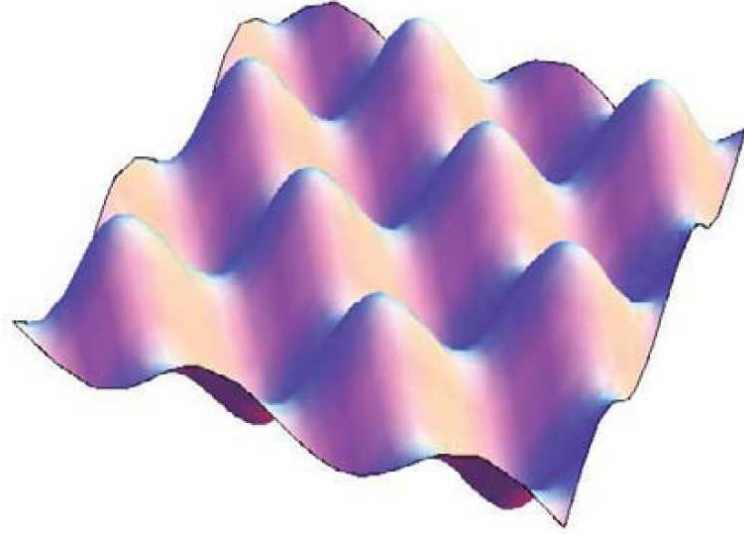


FIGURE 5.1: Surface ondulée dans deux directions.

où σ et ε sont respectivement les tenseurs de contraintes et de déformations locales. A l'aide de la notation de Voigt, on peut la relation (5.6) sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

où $\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$.

L'équation du mouvement du problème est donnée par

$$\nabla \cdot \sigma(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t).$$

En substituant (5.7) dans cette équation, on obtient une équation qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left(\mathbf{A}^{(hk)} \mathbf{u}_k \right)_{,h} + \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (5.8)$$

où $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$, $\mathbf{F} = [f_1 \ f_2 \ f_3]^T$ avec f_1, f_2 et f_3 étant les composantes de la force volumique, les indices h et k prennent les valeurs de 1 à 3, les matrices \mathbf{A} sont définies par $A_{ij}^{(hk)} = C_{ihjk}$.

Plus explicitement,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{(11)} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{16} & C_{15} \\ C_{16} & C_{66} & C_{56} \\ C_{15} & C_{56} & C_{55} \end{bmatrix}, & \mathbf{A}^{(12)} &= \begin{bmatrix} C_{16} & C_{12} & C_{14} \\ C_{66} & C_{26} & C_{46} \\ C_{56} & C_{25} & C_{45} \end{bmatrix}, & \mathbf{A}^{(13)} &= \begin{bmatrix} C_{15} & C_{14} & C_{13} \\ C_{56} & C_{46} & C_{36} \\ C_{55} & C_{45} & C_{35} \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}^{(21)} &= \begin{bmatrix} C_{16} & C_{66} & C_{56} \\ C_{12} & C_{26} & C_{25} \\ C_{14} & C_{46} & C_{45} \end{bmatrix}, & \mathbf{A}^{(22)} &= \begin{bmatrix} C_{66} & C_{26} & C_{46} \\ C_{26} & C_{22} & C_{24} \\ C_{46} & C_{24} & C_{44} \end{bmatrix}, & \mathbf{A}^{(23)} &= \begin{bmatrix} C_{56} & C_{46} & C_{36} \\ C_{25} & C_{24} & C_{23} \\ C_{45} & C_{44} & C_{34} \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}^{(31)} &= \begin{bmatrix} C_{15} & C_{56} & C_{55} \\ C_{14} & C_{46} & C_{45} \\ C_{13} & C_{36} & C_{35} \end{bmatrix}, & \mathbf{A}^{(32)} &= \begin{bmatrix} C_{56} & C_{25} & C_{45} \\ C_{46} & C_{24} & C_{44} \\ C_{36} & C_{23} & C_{34} \end{bmatrix}, & \mathbf{A}^{(33)} &= \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} & C_{35} \\ C_{45} & C_{44} & C_{34} \\ C_{35} & C_{34} & C_{33} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En supposant que l'interface Γ est parfaite, le vecteur de contraintes et celui de déplacements sont continus à travers Γ . En particulier, la continuité du vecteur de contraintes implique que

$$\begin{aligned}
[\mathbf{t}]_{\Gamma} &= \left[\left(\mathbf{A}^{(11)}\mathbf{u}_{,1} + \mathbf{A}^{(12)}\mathbf{u}_{,2} + \mathbf{A}^{(13)}\mathbf{u}_{,3} \right) n_1 + \left(\mathbf{A}^{(21)}\mathbf{u}_{,1} + \mathbf{A}^{(22)}\mathbf{u}_{,2} + \mathbf{A}^{(23)}\mathbf{u}_{,3} \right) n_2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\mathbf{A}^{(31)}\mathbf{u}_{,1} + \mathbf{A}^{(32)}\mathbf{u}_{,2} + \mathbf{A}^{(33)}\mathbf{u}_{,3} \right) n_3 \right]_{\Gamma} = 0,
\end{aligned} \tag{5.9}$$

où $[\cdot]_{\Gamma}$ signifie le saut d'une quantité à travers Γ et n_i sont les composantes du vecteur unitaire \mathbf{n} normal à Γ donné par

$$\mathbf{n} = [1 + h_{,x_1}^2 + h_{,x_2}^2]^{-1} [h_{,x_1}, h_{,x_2}, -1]^T = [1 + (h_{,y_1}^2 + h_{,y_2}^2) / \epsilon^2]^{-1} [h_{,y_1} / \epsilon, h_{,y_2} / \epsilon, -1]^T.$$

5.2 Homogénéisation de la zone d'interface rugueuse

Quand la valeur de ϵ est faible, on peut appliquer la méthode d'homogénéisation asymptotique pour la zone d'interface rugueuse. Dans ce cas, le champ de déplacement $\mathbf{u}_{\epsilon}(x_1, x_2, x_3, t)$ peut s'écrire sous la forme $\mathbf{U}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, \epsilon, t)$ qui admet le développement asymptotique

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{\epsilon}(x_1, x_2, x_3, t) &= \mathbf{U}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, \epsilon, t) \\
&= \mathbf{V} + \epsilon \left(\mathbf{N}^{(1)}\mathbf{V} + \mathbf{N}^{(11)}\mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}^{(12)}\mathbf{V}_{,2} + \mathbf{N}^{(13)}\mathbf{V}_{,3} \right) \\
&\quad + \epsilon^2 \left(\mathbf{N}^{(2)}\mathbf{V} + \mathbf{N}^{(21)}\mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}^{(22)}\mathbf{V}_{,2} + \mathbf{N}^{(23)}\mathbf{V}_{,3} + \mathbf{N}^{(211)}\mathbf{V}_{,11} \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{N}^{(212)}\mathbf{V}_{,12} + \mathbf{N}^{(213)}\mathbf{V}_{,13} + \mathbf{N}^{(222)}\mathbf{V}_{,22} + \mathbf{N}^{(223)}\mathbf{V}_{,23} + \mathbf{N}^{(233)}\mathbf{V}_{,33} \right) + o(\epsilon^3)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

où $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x_1, x_2, x_3, t)$ est indépendant de y , $\mathbf{N}^{(1)}$, $\mathbf{N}^{(11)}$, $\mathbf{N}^{(12)}$, $\mathbf{N}^{(13)}$, $\mathbf{N}^{(2)}$, $\mathbf{N}^{(21)}$, $\mathbf{N}^{(22)}$, $\mathbf{N}^{(23)}$, $\mathbf{N}^{(211)}$, $\mathbf{N}^{(212)}$, $\mathbf{N}^{(213)}$, $\mathbf{N}^{(222)}$ et $\mathbf{N}^{(223)}$ sont des matrices 3×3 dont les composantes sont des fonctions périodiques de y_1 et y_2 , dépendentes de x_3 mais indépendentes de x_1 , x_2 et du temps t . Elles sont à

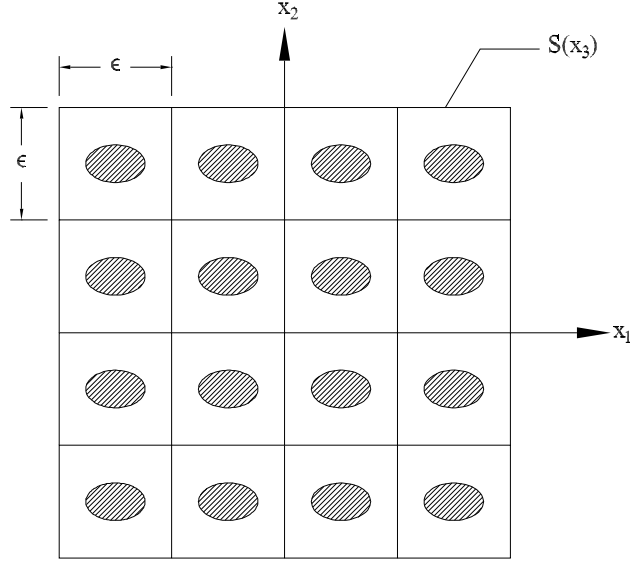


FIGURE 5.2: L'intersection entre la zone d'interface rugueuse $\Omega^{(r)}$ et le plan $\mathcal{S}(x_3 = \text{const})$ est un domaine périodique dans le plan Ox_1x_2 .

déterminer par l'utilisation de l'équation du mouvement et des équations de continuité.

Les dérivées du vecteur de déplacements par rapport aux variables d'espace x_i s'expriment par

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{,1} &= \mathbf{U}_{,1} + \epsilon^{-1} \mathbf{U}_{,y_1}, \\
 \mathbf{u}_{,2} &= \mathbf{U}_{,2} + \epsilon^{-1} \mathbf{U}_{,y_2}, \\
 \mathbf{u}_{,3} &= \mathbf{U}_{,3}.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{,1} = \mathbf{U}_{,1} &= \epsilon \left(\mathbf{N}^{(1)} \mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}^{(11)} \mathbf{V}_{,11} + \mathbf{N}^{(12)} \mathbf{V}_{,21} + \mathbf{N}^{(13)} \mathbf{V}_{,31} \right) \\
 &+ \epsilon^2 \left(\mathbf{N}^{(2)} \mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}^{(21)} \mathbf{V}_{,11} + \mathbf{N}^{(22)} \mathbf{V}_{,21} + \mathbf{N}^{(23)} \mathbf{V}_{,31} + \mathbf{N}^{(211)} \mathbf{V}_{,111} + \mathbf{N}^{(212)} \mathbf{V}_{,121} \right. \\
 &+ \left. \mathbf{N}^{(213)} \mathbf{V}_{,131} + \mathbf{N}^{(222)} \mathbf{V}_{,221} + \mathbf{N}^{(223)} \mathbf{V}_{,231} + \mathbf{N}^{(233)} \mathbf{V}_{,331} \right) + \mathbf{N}_{,y_1}^{(1)} \mathbf{V} + \mathbf{N}_{,y_1}^{(11)} \mathbf{V}_{,1} \\
 &+ \mathbf{N}_{,y_1}^{(12)} \mathbf{V}_{,2} + \mathbf{N}_{,y_1}^{(13)} \mathbf{V}_{,3} + \epsilon \left(\mathbf{N}_{,y_1}^{(2)} \mathbf{V} + \mathbf{N}_{,y_1}^{(21)} \mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}_{,y_1}^{(22)} \mathbf{V}_{,2} + \mathbf{N}_{,y_1}^{(23)} \mathbf{V}_{,3} + \mathbf{N}_{,y_1}^{(211)} \mathbf{V}_{,11} \right. \\
 &+ \left. \mathbf{N}_{,y_1}^{(212)} \mathbf{V}_{,12} + \mathbf{N}_{,y_1}^{(213)} \mathbf{V}_{,13} + \mathbf{N}_{,y_1}^{(222)} \mathbf{V}_{,22} + \mathbf{N}_{,y_1}^{(223)} \mathbf{V}_{,23} + \mathbf{N}_{,y_1}^{(233)} \mathbf{V}_{,33} \right), \tag{5.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{,2} = \mathbf{V}_{,2} &+ \epsilon \left(\mathbf{N}^{(1)} \mathbf{V}_{,2} + \mathbf{N}^{(11)} \mathbf{V}_{,12} + \mathbf{N}^{(12)} \mathbf{V}_{,22} + \mathbf{N}^{(13)} \mathbf{V}_{,32} \right) \\
 &+ \epsilon^2 \left(\mathbf{N}^{(2)} \mathbf{V}_{,2} + \mathbf{N}^{(21)} \mathbf{V}_{,12} + \mathbf{N}^{(22)} \mathbf{V}_{,22} + \mathbf{N}^{(23)} \mathbf{V}_{,32} + \mathbf{N}^{(211)} \mathbf{V}_{,112} + \mathbf{N}^{(212)} \mathbf{V}_{,122} \right. \\
 &+ \left. \mathbf{N}^{(213)} \mathbf{V}_{,132} + \mathbf{N}^{(222)} \mathbf{V}_{,222} + \mathbf{N}^{(223)} \mathbf{V}_{,232} + \mathbf{N}^{(233)} \mathbf{V}_{,332} \right) + \mathbf{N}_{,y_2}^{(1)} \mathbf{V} + \mathbf{N}_{,y_2}^{(11)} \mathbf{V}_{,1} \\
 &+ \mathbf{N}_{,y_2}^{(12)} \mathbf{V}_{,2} + \mathbf{N}_{,y_2}^{(13)} \mathbf{V}_{,3} + \epsilon \left(\mathbf{N}_{,y_2}^{(2)} \mathbf{V} + \mathbf{N}_{,y_2}^{(21)} \mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}_{,y_2}^{(22)} \mathbf{V}_{,2} + \mathbf{N}_{,y_2}^{(23)} \mathbf{V}_{,3} + \mathbf{N}_{,y_2}^{(211)} \mathbf{V}_{,11} \right. \\
 &+ \left. \mathbf{N}_{,y_2}^{(212)} \mathbf{V}_{,12} + \mathbf{N}_{,y_2}^{(213)} \mathbf{V}_{,13} + \mathbf{N}_{,y_2}^{(222)} \mathbf{V}_{,22} + \mathbf{N}_{,y_2}^{(223)} \mathbf{V}_{,23} + \mathbf{N}_{,y_2}^{(233)} \mathbf{V}_{,33} \right), \tag{5.13}
 \end{aligned}$$

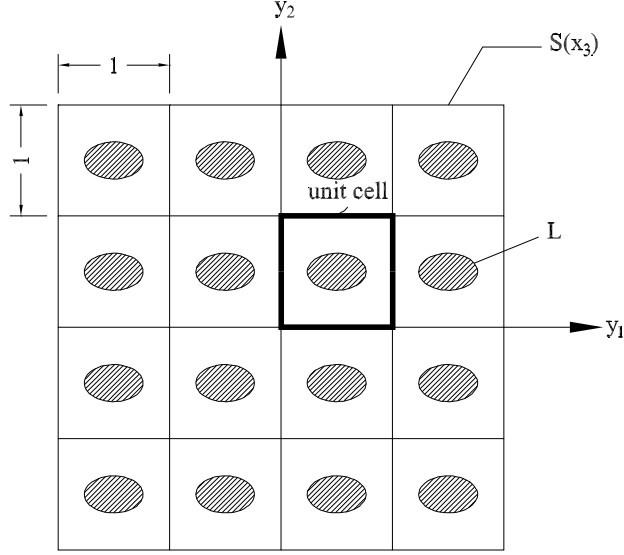


FIGURE 5.3: L'intersection entre la zone d'interface rugueuse $\Omega^{(r)}$ et le plan $\mathcal{S}(x_3 = \text{const})$ peut s'exprimer dans le plan Oy_1y_2 .

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{,3} = \mathbf{U}_{,3} = \mathbf{V}_{,3} + \epsilon \left(\left[\mathbf{N}^{(1)} \mathbf{V} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(11)} \mathbf{V}_{,1} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(12)} \mathbf{V}_{,2} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(13)} \mathbf{V}_{,3} \right]_{,3} \right) \\
+ \epsilon^2 \left(\left[\mathbf{N}^{(2)} \mathbf{V} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(21)} \mathbf{V}_{,1} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(22)} \mathbf{V}_{,2} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(23)} \mathbf{V}_{,3} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(211)} \mathbf{V}_{,11} \right]_{,3} \right. \\
\left. + \left[\mathbf{N}^{(212)} \mathbf{V}_{,12} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(213)} \mathbf{V}_{,13} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(222)} \mathbf{V}_{,22} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(223)} \mathbf{V}_{,23} \right]_{,3} + \left[\mathbf{N}^{(233)} \mathbf{V}_{,33} \right]_{,3} \right). \tag{5.14}
\end{aligned}$$

En substituant les expressions de (5.12) à (5.14) dans l'équation du mouvement (5.8) et les équations de continuité (5.9) et en demandant que le coefficient associé à ϵ^{-1} soit égal à zéro, on obtient

– Equation d'équilibre :

$$\begin{aligned}
\left\{ \left[\mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1)} \right]_{,y_1} + \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1)} \right]_{,y_2} \right\} \mathbf{V} \\
+ \left\{ \left[\mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} \right]_{,y_1} + \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} \right]_{,y_2} \right\} \mathbf{V}_{,k} = 0 \tag{5.15}
\end{aligned}$$

– Equation de continuité :

$$\begin{aligned}
\left[\left(\mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1)} \right) h_{,y_1} + \left(\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1)} \right) h_{,y_2} \right]_{\Gamma} \mathbf{V} \\
+ \left[\left(\mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(1k)} \right) h_{,y_1} \right. \\
\left. + \left(\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(2k)} \right) h_{,y_2} \right]_{\Gamma} \mathbf{V}_{,k} = 0 \tag{5.16}
\end{aligned}$$

où $k = 1$ à 3 , \mathbf{I} est la matrice d'identité 3×3 .

Les deux équations (5.15) et (5.16) définissent les composantes de $\mathbf{N}^{(1)}$ et $\mathbf{N}^{(1k)}$ par

$$\left[\mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1)} \right]_{,y_1} + \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1)} \right]_{,y_2} = 0, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{S}, \quad \mathbf{y} \notin \mathcal{L}, \quad (5.17)$$

$$\left[\mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(1k)} \right]_{,y_1} + \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(2k)} \right]_{,y_2} = 0, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{S}, \quad \mathbf{y} \notin \mathcal{L}, \quad (5.18)$$

$$\left[\left(\mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1)} \right) h_{,y_1} + \left(\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1)} \right) h_{,y_2} \right]_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{L}, \quad (5.19)$$

$$\left[\left(\mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(1k)} \right) h_{,y_1} + \left(\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(2k)} \right) h_{,y_2} \right]_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{L} \quad (5.20)$$

où $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{x_3} \cup \Omega^{(r)}$ et $\mathcal{L} = \mathcal{S} \cup \Gamma$ avec \mathcal{S}_{x_3} la surface $x_3 \in (-H_0, 0)$. Ainsi, on peut montrer que

$$\mathbf{N}_{,y_1}^{(1)} = \mathbf{N}_{,y_2}^{(1)} = 0. \quad (5.21)$$

D'une manière analogue, en posant le coefficient associé à ϵ^0 dans l'équation de continuité égal à zéro, on arrive à

$$\begin{aligned} & \left[\left(\mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2)} + \mathbf{A}^{(13)} \mathbf{N}_{,x_3}^{(1)} \right) h_{,y_1} \right. \\ & + \left. \left(\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2)} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}_{,x_3}^{(1)} \right) h_{,y_2} \right]_{\Gamma} \mathbf{V} \\ & + \left[\left\{ \mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2k)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2k)} + \mathbf{A}^{(1k)} \mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{A}^{(13)} \mathbf{N}_{,x_3}^{(1k)} \right\} h_{,y_1} \right. \\ & + \left. \left\{ \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2k)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2k)} + \mathbf{A}^{(2k)} \mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}_{,x_3}^{(1k)} \right\} h_{,y_2} \right. \\ & - \left. \mathbf{A}^{(31)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} - \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} - \mathbf{A}^{(3k)} \right]_{\Gamma} \mathbf{V}_{,k} \\ & + \left[\left\{ \mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2ij)} + \mathbf{A}^{(1i)} \mathbf{N}^{(1j)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2ij)} + \mathbf{A}^{(1j)} \mathbf{N}^{(1i)} \right\} h_{,y_1} \right. \\ & + \left. \left\{ \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2ij)} + \mathbf{A}^{(2i)} \mathbf{N}^{(1j)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2ij)} + \mathbf{A}^{(2j)} \mathbf{N}^{(1i)} \right\} h_{,y_2} \right]_{\Gamma} \mathbf{V}_{,ij} \\ & + \left[\left\{ \mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2kk)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2kk)} + \mathbf{A}^{(1k)} \mathbf{N}^{(1k)} \right\} h_{,y_1} \right. \\ & + \left. \left\{ \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2kk)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2kk)} + \mathbf{A}^{(2k)} \mathbf{N}^{(1k)} \right\} h_{,y_2} \right]_{\Gamma} \mathbf{V}_{,kk} = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

avec $k = 1$ à 3 , $(i, j) = (1, 2), (1, 3)$ ou $(2, 3)$. Pour satisfaire l'équation (5.22), on choisit les fonctions $\mathbf{N}^{(2)}, \mathbf{N}^{(2k)}, \mathbf{N}^{(2kk)}$ et $\mathbf{N}^{(2ij)}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\left[\left(\mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2)} + \mathbf{A}^{(13)} \mathbf{N}_{,x_3}^{(1)} \right) h_{,y_1} + \left(\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2)} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}_{,x_3}^{(1)} \right) h_{,y_2} \right]_{\Gamma} = 0, \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} & \left[\left\{ \mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2k)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2k)} + \mathbf{A}^{(1k)} \mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{A}^{(13)} \mathbf{N}_{,x_3}^{(1k)} \right\} h_{,y_1} \right. \\ & + \left. \left\{ \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2k)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2k)} + \mathbf{A}^{(2k)} \mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}_{,x_3}^{(1k)} \right\} h_{,y_2} \right. \\ & - \left. \mathbf{A}^{(31)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} - \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} - \mathbf{A}^{(3k)} \right]_{\Gamma} = 0, \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2ij)} + \mathbf{A}^{(1i)} \mathbf{N}^{(1j)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2ij)} + \mathbf{A}^{(1j)} \mathbf{N}^{(1i)} \right] h_{,y_1} \right. \\ & \left. + \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2ij)} + \mathbf{A}^{(2i)} \mathbf{N}^{(1j)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2ij)} + \mathbf{A}^{(2j)} \mathbf{N}^{(1i)} \right] h_{,y_2} \right\}_{\Gamma} = 0, \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2kk)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2kk)} + \mathbf{A}^{(1k)} \mathbf{N}^{(1k)} \right] h_{,y_1} \right. \\ & \left. + \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2kk)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2kk)} + \mathbf{A}^{(2k)} \mathbf{N}^{(1k)} \right] h_{,y_2} \right\}_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

De plus, en mettant le coefficient associé à ϵ^0 dans l'équation de mouvement égal à zéro, on a

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2)} + \mathbf{A}^{(13)} \mathbf{N}_{,x_3}^{(1)} \right]_{,y_1} \right. \\ & \left. + \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2)} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}_{,x_3}^{(1)} \right]_{,y_2} \right\} \mathbf{V} \\ & + \left\{ \left[\mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2k)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2k)} + \mathbf{A}^{(1k)} \mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{A}^{(13)} \mathbf{N}_{,x_3}^{(1k)} \right]_{,y_1} \right. \\ & \left. + \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2k)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2k)} + \mathbf{A}^{(2k)} \mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{A}^{(23)} \mathbf{N}_{,x_3}^{(1k)} \right]_{,y_2} \right. \\ & \left. + \left[\mathbf{A}^{(31)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(3k)} \right]_{,x_3} \right\} \mathbf{V}_{,k} \\ & + \left\{ \left[\mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2ij)} + \mathbf{A}^{(1i)} \mathbf{N}^{(1j)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2ij)} + \mathbf{A}^{(1j)} \mathbf{N}^{(1i)} \right]_{,y_1} \right. \\ & \left. + \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2ij)} + \mathbf{A}^{(2i)} \mathbf{N}^{(1j)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2ij)} + \mathbf{A}^{(2j)} \mathbf{N}^{(1i)} \right]_{,y_2} \right. \\ & \left. + \mathbf{A}^{(i1)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1j)} + \mathbf{A}^{(i2)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1j)} + \mathbf{A}^{(ij)} + \mathbf{A}^{(j1)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1i)} + \mathbf{A}^{(ji)} + \mathbf{A}^{(j2)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1i)} \right\} \mathbf{V}_{,ij} \\ & + \left\{ \left[\mathbf{A}^{(11)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2kk)} + \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2kk)} + \mathbf{A}^{(1k)} \mathbf{N}^{(1k)} \right]_{,y_1} \right. \\ & \left. + \left[\mathbf{A}^{(21)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(2kk)} + \mathbf{A}^{(22)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(2kk)} + \mathbf{A}^{(2k)} \mathbf{N}^{(1k)} \right]_{,y_2} \right. \\ & \left. + \mathbf{A}^{(k1)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(k2)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(kk)} \right\} \mathbf{V}_{,kk} + \mathbf{F} - \rho \ddot{\mathbf{V}} = 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

En intégrant l'équation (5.27) sur la surface \mathcal{S} de la cellule de base, en appliquant le théorème de divergence et en tenant compte des équations (5.23) à (5.26), on obtient

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathbf{A}^{(h1)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(h2)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(hk)} \right\rangle_{\mathcal{S}} \mathbf{V}_{,hk} \\ & + \left\{ S^{-1} \int_{\mathcal{L}} \left[\mathbf{A}^{(31)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(3k)} \right]_{\Gamma} \frac{dl}{|\nabla \mathbf{h}(\mathbf{y})|} \right\} \mathbf{V}_{,k} \\ & + \left\langle \left[\mathbf{A}^{(31)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(3k)} \right]_{,x_3} \right\rangle_{\mathcal{S}} \mathbf{V}_{,k} + \langle \mathbf{F} \rangle_{\mathcal{S}} = \langle \rho \rangle_{\mathcal{S}} \ddot{\mathbf{V}} \end{aligned} \quad (5.28)$$

où $k = 1 \text{ à } 3$, $|\nabla \mathbf{h}(\mathbf{y})| = \sqrt{h_{,y_1}^2 + h_{,y_2}^2}$ et

$$\langle \bullet \rangle_{\mathcal{S}} = S^{-1} \int_{\mathcal{S}} (\bullet) dS = S^{-1} \int \int (\bullet) dy_1 dy_2.$$

D'autre part, en appliquant le lemme A.1 de Kristensson (2005) et en considérant la périodicité des tenseurs $\mathbf{N}^{(1k)}$, on en déduit la relation

$$\left\langle \left[\mathbf{A}^{(31)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(3k)} \right]_{,x_3} \right\rangle_{\mathcal{S}} = \left\{ \left\langle \mathbf{A}^{(31)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(3k)} \right\rangle_{\mathcal{S}} \right\}_{,x_3} - S^{-1} \int_{\mathcal{L}} \left[\mathbf{A}^{(31)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(32)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(3k)} \right]_{\Gamma} \frac{dl}{|\nabla \mathbf{h}(\mathbf{y})|}.$$

Ensuite, notant que les tenseurs élastiques effectifs sont définis par :

$$\bar{\mathbf{A}}^{(hk)} = \left\langle \mathbf{A}^{(h1)} \mathbf{N}_{,y_1}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(h2)} \mathbf{N}_{,y_2}^{(1k)} + \mathbf{A}^{(hk)} \right\rangle_{\mathcal{S}}, \quad (5.29)$$

l'équation (5.28) devient

$$\left(\bar{\mathbf{A}}^{(hk)} \mathbf{V}_{,k} \right)_{,h} + \langle \mathbf{F} \rangle_{\mathcal{S}} = \langle \rho \rangle_{\mathcal{S}} \ddot{\mathbf{V}}. \quad (5.30)$$

Les résultats de cette section montrent que la zone d'interface rugueuse $\Omega^{(r)}$ peut être remplacée par une interphase équivalente dont les propriétés élastiques sont déterminées par (5.29). Cette interphase ainsi définie est homogène dans le plan $x_1 - x_2$ mais hétérogène suivant la direction d'épaisseur x_3 .

5.3 Interface ondulées entre deux phases élastiques isotropes

Maintenant, on considère le cas particulier important où Γ est une interface périodiquement ondulée entre deux phases élastiques isotropes caractérisées par les constantes de Lamé $\lambda^{(i)}$ et $\mu^{(i)}$ avec $i = 1$ ou 2 . De plus, on suppose que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{x_3} \cup \Omega^{(r)}$ est un cercle de rayon r_i . Quand l'interface rugueuse se présente sous forme de cônes circulaires (voir la figure 5.4), r_i est déterminé en fonction de x_3 épar

$$r_i = \frac{R_c (H_0 + x_3)}{H_0}$$

avec H_0 étant l'épaisseur de la zone d'interface rugueuse, R_c le rayon du fond d'un cône. Si l'interface rugueuse correspond à une duplication périodique d'une surface sphérique, on a

$$r_i = \sqrt{R_s^2 - x_3^2}$$

avec R_s étant le rayon de la sphère. Afin de déterminer les propriétés élastiques de l'interphase équivalente à la zone d'interface rugueuse, il faut d'abord chercher les composantes des tenseurs $\mathbf{N}^{(11)}$, $\mathbf{N}^{(12)}$ et $\mathbf{N}^{(13)}$ à l'aide des équations (5.17) à (5.20). Mais, comme ces composantes ne peuvent en général pas être déterminées de façon analytique, on fait appel à des schémas micromécaniques pour effectuer l'homogénéisation dans le plan $x_1 - x_2$.

On considère une cellule de base (5.3) dans le plan Oy_1y_2 et on considère qu'elle est en déformations planes. D'après la technique d'homogénéisation des milieux périodiques (voir, par exemple, Pinho-da-Cruz (2009)), on peut réécrire (5.10) sous la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}, x_3, t) = \mathbf{V}(\mathbf{y}, x_3, t) + \mathbf{V}^{(1)}(\mathbf{y}, x_3, t) \quad (5.31)$$

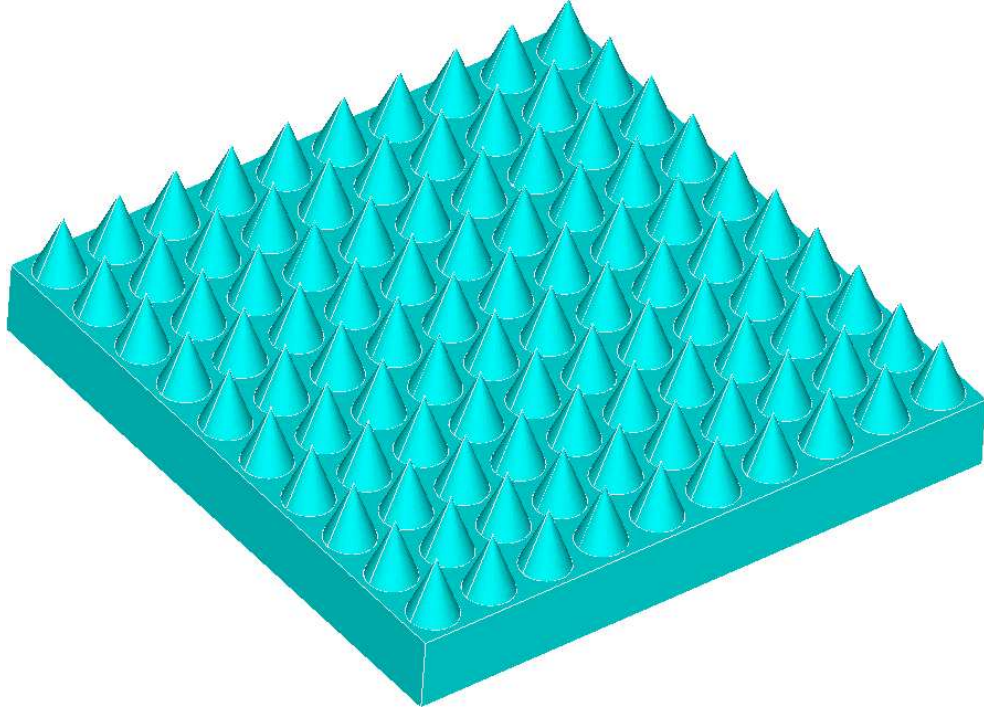


FIGURE 5.4: Interface rugueuse en dent à la forme des cônes.

avec

$$V_i(\mathbf{y}, x_3, t) = \bar{u}_i(\mathbf{y}, x_3, t), \quad V_i^{(1)}(\mathbf{y}, x_3, t) = \chi_{ijk}(\mathbf{y}, x_3) V_{j,k}. \quad (5.32)$$

En comparant (5.18), (5.20) avec (5.31), on en déduit que

$$N_{ij}^{(1k)} = \chi_{ijk} \quad (5.33)$$

Si la condition homogène en déformations $\mathbf{u} = \mathbf{E}\mathbf{y}$ est imposée sur la frontière Ω , on a

$$u_i = E_{ij}y_j + \chi_{ijk}(\mathbf{y}, x_3)E_{jk}. \quad (5.34)$$

De plus, le champ de déplacements \mathbf{u} de l'inclusion dans la cellule de base peut être approximativement calculé par le schéma auto-cohérent généralisé (5.5), tout en demandant que les fractions volumiques de la matrice et des inclusions soient identiques dans les deux cas. Le problème de déterminer les fonctions $\chi_{ijk}(\mathbf{y}, x_3)$ peut se composer en plusieurs problèmes auxiliaires suivantes.

5.3.1 Problème 1

Le tenseur de déformations macroscopique \mathbf{E} prend la forme

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, le champ de déplacements dans l'inclusion est donné par

$$u_r = \xi r, \quad u_\theta = 0 \quad (5.35)$$

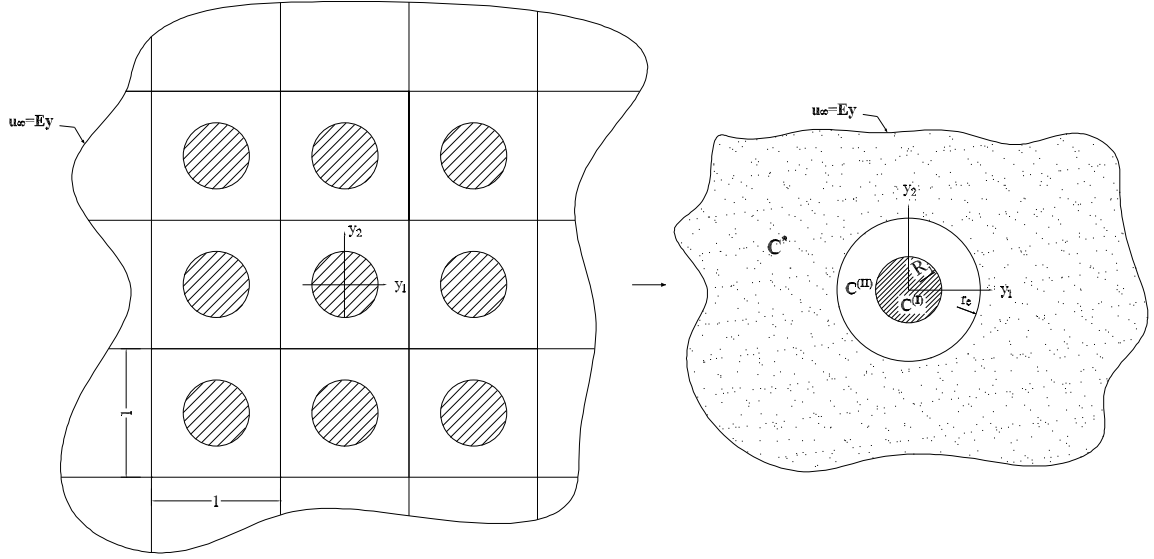


FIGURE 5.5: Modèle GSCM déterminant le champ de solution dans l'inclusion

avec

$$\xi = \frac{2\mu_2 + \lambda_2}{-\pi(\lambda_1 + \mu_1 - \mu_2 - \lambda_2)R_i^2 + (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)}, \quad R_i = \frac{r_i}{\epsilon}. \quad (5.36)$$

5.3.2 Problème 2

Le tenseur de déformations macroscopique \mathbf{E} a la forme

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Alors, le champ de déplacements dans l'inclusion s'exprime par

$$u_r = \left(-\frac{\lambda_i}{2\lambda_i + 3\mu_i} \xi_1 r^3 - \xi_2 r \right) \cos 2\theta, \quad (5.37)$$

$$u_\theta = (\xi_1 r^3 + \xi_2 r) \sin 2\theta, \quad (5.38)$$

avec

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{4R_i^2 \pi^2 \mu_2 (2\mu_2 + \lambda_2) (\mu_2 + \lambda_2) (\mu_2 - \mu_1) (2\lambda_1 + 3\mu_1) (\pi R_i^2 - 1)}{a_8 R_i^8 + a_6 R_i^6 + a_4 R_i^4 + a_2 R_i^2 + a_0}, \\ \xi_2 &= \frac{2\mu_2 (2\mu_2 + \lambda_2) (b_6 R_i^6 + b_4 R_i^4 + b_0)}{a_8 R_i^8 + a_6 R_i^6 + a_4 R_i^4 + a_2 R_i^2 + a_0}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

5.3.3 Problème 3

Le tenseur de déformations macroscopique \mathbf{E} correspond à un cisaillement :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le champ de déplacements dans l'inclusion est fourni par

$$u_r = \left(\frac{\lambda_i}{2\lambda_i + 3\mu_i} \xi_3 r^3 + \xi_4 r \right) \sin 2\theta, \quad (5.40)$$

$$u_\theta = (\xi_3 r^3 + \xi_4 r) \cos 2\theta, \quad (5.41)$$

où

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \frac{4\pi\mu_2(2\mu_2 + \lambda_2)(2\lambda_1 + 3\mu_1)(d_2 R_i^2 + d_0)}{a_8 R_i^8 + a_6 R_i^6 + a_4 R_i^4 + a_2 R_i^2 + a_0}, \\ \xi_4 &= \frac{6\mu_2(2\mu_2 + \lambda_2)(c_4 R_i^4 + c_2 R_i^2 + c_0)}{a_8 R_i^8 + a_6 R_i^6 + a_4 R_i^4 + a_2 R_i^2 + a_0}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Les coefficients dans les formules ci-dessus sont définis par :

$$\begin{aligned} a_8 &= \pi^4 (-\mu_1 + \mu_2) (3\mu_2 + \lambda_2) \left(\begin{aligned} &3\mu_1\mu_2^2 + \lambda_1\mu_2^2 - 3\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_2\mu_1\lambda_1 \\ &+ \mu_2\lambda_1\lambda_2 + 3\mu_2\mu_1\lambda_2 - \mu_1^2\lambda_2 - \mu_1\lambda_1\lambda_2 \end{aligned} \right) \\ a_6 &= -4\pi^3 \left(\begin{aligned} &(-\lambda_1 - 3\mu_1)\mu_2^4 - 2\lambda_2(\lambda_1 + 3\mu_1)\mu_2^3 \\ &+ (\mu_1^2\lambda_2 + 3\mu_1^3 + 3\lambda_1\mu_1^2 - 3\mu_1\lambda_2^2 - \lambda_2^2\lambda_1)\mu_2^2 \\ &+ \mu_1^2\lambda_2(\lambda_2 + 3\mu_1 + 3\lambda_1)\mu_2 + \mu_1^2\lambda_2^2(\mu_1 + \lambda_1) \end{aligned} \right) \\ a_4 &= -6\pi^2(\mu_2 + \lambda_2)^2(\mu_2 - \mu_1)(\mu_1^2 + 3\mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_1 + \lambda_1\mu_2) \\ a_2 &= 4\pi(3\mu_2^2 + 3\lambda_2\mu_2 + \lambda_2^2)(\mu_2 - \mu_1)(\mu_1^2 + 3\mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_1 + \lambda_1\mu_2) \\ a_0 &= (3\mu_2 + \lambda_2)(\mu_2^2 + \lambda_2\mu_2 + 3\mu_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2)(\mu_1^2 + 3\mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_1 + \lambda_1\mu_2) \\ b_6 &= 2\pi^3 \left(\begin{aligned} &-3\mu_1\mu_2^2 + 3\mu_1^2\mu_2 + 2\mu_1\lambda_1\lambda_2 + 2\mu_1^2\lambda_2 - 2\lambda_1\mu_2^2 \\ &-3\mu_1\mu_2\lambda_2 - 2\mu_2\lambda_1\lambda_2 + 3\mu_1\mu_2\lambda_1 \end{aligned} \right) \\ b_4 &= 3\pi^2(\mu_2 + \lambda_2)(\mu_2 - \mu_1)(\mu_1 + \lambda_1) \\ b_0 &= -(3\mu_2 + \lambda_2)(\mu_2\lambda_1 + 3\mu_2\mu_1 + \mu_1\lambda_1 + \mu_1^2) \\ c_4 &= \pi^2(3\mu_2 + \lambda_2)(\mu_2 - \mu_1)(\mu_1 + \lambda_1); c_2 = 2\pi\mu_1\mu_2(\lambda_1 + \mu_1 - \mu_2 - \lambda_2) \\ c_0 &= (\mu_2 + \lambda_2)(\mu_2\lambda_1 + 3\mu_2\mu_1 + \mu_1\lambda_1 + \mu_1^2); d_2 = \pi(3\mu_2 + \lambda_2)(-\mu_2 + \mu_1) \\ d_0 &= -3\mu_2\mu_1 - \mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_2 - \mu_2^2 \end{aligned}$$

En introduisant les solutions pour les problèmes auxiliaires précédents dans la formule (5.34), on peut estimer les composantes χ_{ijk} dans l'inclusion d'une cellule de base. Pour trouver les moyennes des composantes du gradient du tenseur χ dans la matrice, on prend la valeur moyenne du tenseur de déformations telle que $\bar{\varepsilon} = \mathbf{E}$ et on obtient

$$\left\langle \frac{\partial \chi_{ijk}}{\partial y_l}(\mathbf{y}, x_3) E_{jk} \right\rangle_S = \left\langle \frac{\partial \chi_{ijk}}{\partial y_l}(\mathbf{y}, x_3) E_{jk} \right\rangle_{inclusion} + \left\langle \frac{\partial \chi_{ijk}}{\partial y_l}(\mathbf{y}, x_3) E_{jk} \right\rangle_{matrice} = 0 \quad (5.43)$$

avec $i = 1$ ou 2 .

Ensuite, en substituant le tenseur χ dans (5.33), on détermine les composantes des tenseurs $\mathbf{N}^{(k)}$. A l'aide de l'équation (5.29), les composantes non nulles du tenseur de rigidité effectif sont fournis par

$$C_{11}^{(r)} = C_{22}^{(r)} = \pi (\lambda_1 + 2\mu_1 - \lambda_2 - 2\mu_2) R_i^2 + 2(\mu_1 - \mu_2) \chi_{11} + \lambda_2 + 2\mu_2 + \pi R_i^2 (\lambda_1 - \lambda_2) (\xi - 1), \quad (5.44)$$

$$C_{33}^{(r)} = \pi (\lambda_1 + 2\mu_1 - \lambda_2 - 2\mu_2) R_i^2 + \lambda_2 + 2\mu_2, \quad (5.45)$$

$$C_{13}^{(r)} = C_{23}^{(r)} = \pi (\lambda_1 - \lambda_2) R_i^2 + \lambda_2, \quad (5.46)$$

$$C_{12}^{(r)} = \pi (\lambda_1 - \lambda_2) R_i^2 + 2(\mu_1 - \mu_2) \chi_{12} + \lambda_2 + \pi R_i^2 (\lambda_1 - \lambda_2) (\xi - 1), \quad (5.47)$$

$$C_{44}^{(r)} = C_{55}^{(r)} = \pi (\mu_1 - \mu_2) R_i^2 + \mu_2, \quad (5.48)$$

$$C_{66}^{(r)} = \pi (\mu_1 - \mu_2) R_i^2 + (\mu_1 + \mu_2) \chi_{66} + \mu_2, \quad (5.49)$$

avec

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= -\frac{3}{4} \frac{\pi \xi_1 (\lambda_1 + \mu_1)}{2\lambda_1 + 3\mu_1} R_i^4 - \frac{1}{2} (2 - \xi + \xi_2) \pi R_i^2, \\ \chi_{12} &= \frac{3}{4} \frac{\pi \xi_1 (\lambda_1 + \mu_1)}{2\lambda_1 + 3\mu_1} R_i^4 + \frac{1}{2} (\xi + \xi_2) \pi R_i^2, \\ \chi_{66} &= \frac{3}{2} \frac{\pi \xi_3 (\lambda_1 + \mu_1)}{2\lambda_1 + 3\mu_1} R_i^4 + (\xi_4 - 1) \pi R_i^2. \end{aligned}$$

Exemple numérique

Comme un exemple d'application numérique, on s'intéresse à un composite constitué de deux phases élastiques isotropes dont l'interface est rugueuse et décrite dans la section précédente. Les modules d'Young et les coefficients de Poisson des deux phases en question ont les valeurs suivantes :

- Phase 1 : $E_1 = 13GPa, \nu_1 = 0.3$;
- Phase 2 : $E_2 = 1GPa, \nu_1 = 0.25$.

Le problème à résoudre est une plaque formée du composite venant d'être décrit, encastrée sur un côté et soumise à un chargement uniformément réparti (voir la figure 5.6) On modélise la plaque en question de deux façons. D'abord (ou dans le modèle 1), la plaque est modélisée comme étant composée de trois couches : les propriétés des couches supérieure et inférieure sont celles des deux phases et les celles de la couche intermédiaire sont déterminées par les formules (5.44) à (5.49). Ensuite (ou dans le modèle 2), la plaque est modélisée comme étant constituée de deux phases séparée par une interface ondulée. Ces deux modèles sont finalement utilisés dans les calculs par le logiciel Comsol pour déterminer les déplacements le long de la ligne médiane sur la surface inférieure de la plaque et perpendiculaire au côté encastré.

Les épaisseurs H_1 et H_2 des couches supérieure et inférieure sont $H_1 = H_2 = 0,5m$ et l'épaisseur de la zone d'interface rugueuse $H_0 = 0.1m, 0.5m$ ou $1m$. La longueur de périodicité ϵ est donnée par $\epsilon = 0,2m$. Le rayon maximal de cône est $R_c = 0,07m$. La longueur L_1 et la largeur L_2 de la plaque

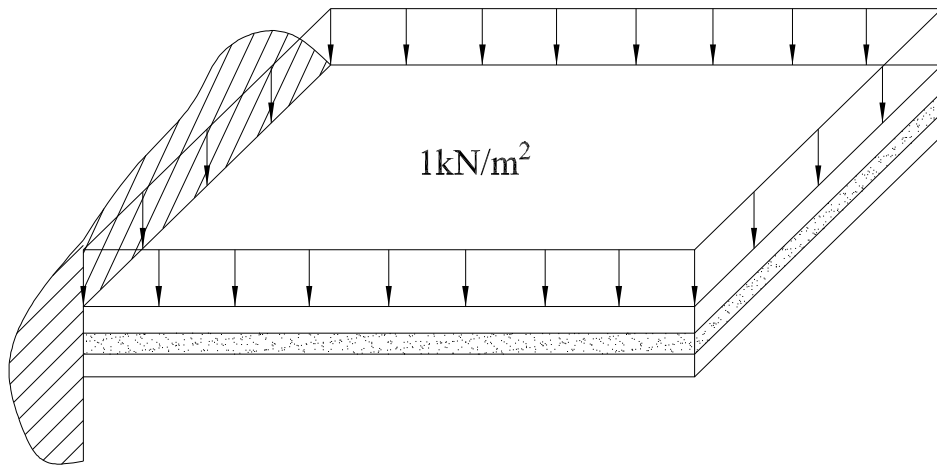


FIGURE 5.6: Une plaque encastée est constituée de deux phases dont l'interface est rugueuse.

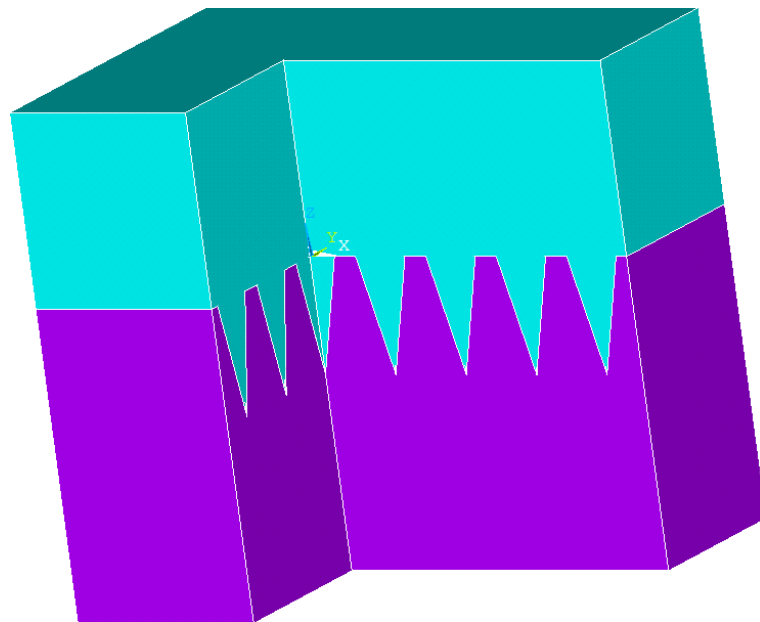


FIGURE 5.7: Plaque constituée de deux phases élastiques isotropes.

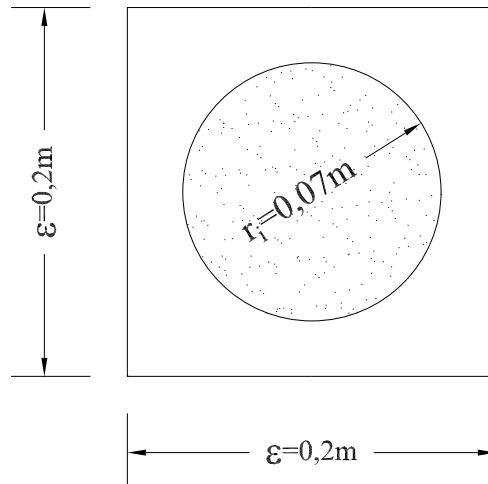


FIGURE 5.8: Fond d'un cône.

sont $L_1 = L_2 = 6m$. On applique une pression uniforme de $1 kN/m^2$ sur la surface supérieure de la plaque.

Les résultats obtenus par Comsol pour les deux modèles sont comparés et présentés dans la figure 5.6. On y observe une bonne concordance. Ceci constitue une validation pour l'approche consistant à remplacer la zone d'interface rugueuse par une interphase équivalente dont les propriétés sont déterminées par les formules (5.44) à (5.49).

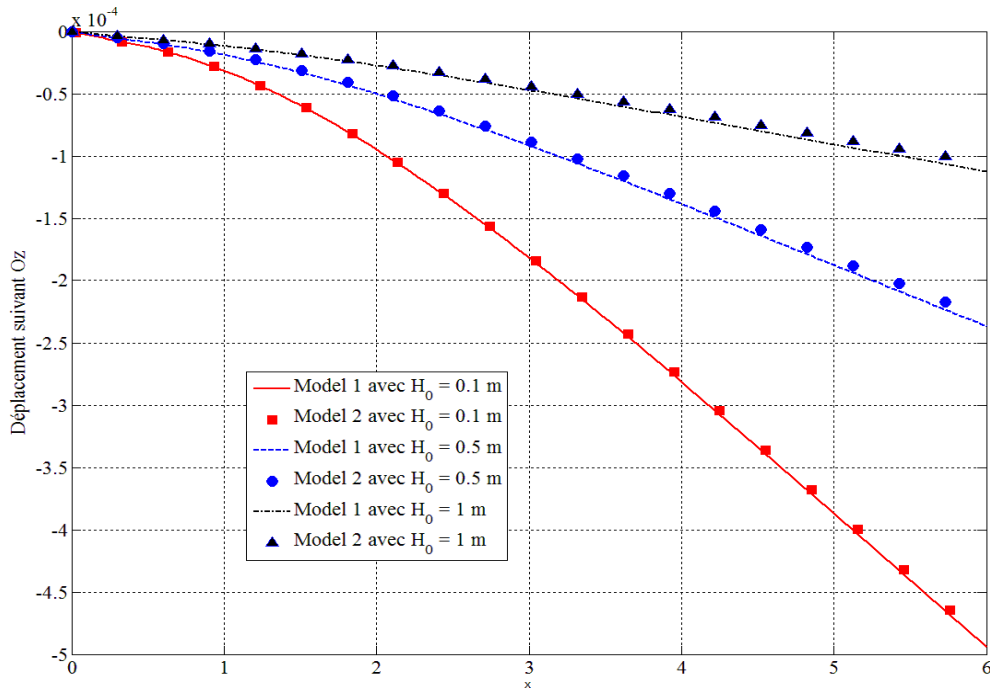


FIGURE 5.9: Déplacements le long de la ligne médiane sur la surface inférieure de la plaque et perpendiculaire au côté encasturé.

5.4 Homogénéisation d'une plaque tri-phasique suivant la direction d'épaisseur

Maintenant on étudie un domaine Ω composé de trois couches perpendiculaires à l'axe Ox_3 . La couche supérieure d'épaisseur H_1 est constitué du matériau 1 alors que la couche inférieure d'épaisseur H_2 est composé du matériau 2. La couche intermédiaire d'épaisseur H_0 est formé du matériau équivalent de la zone d'interface rugueuse dont ses propriétés élastiques effectives sont déterminées par les formules (5.44) à (5.49). L'épaisseur totale de la plaque composite tri-couche est $H = H_1 + H_0 + H_2$.

Etant correspondant à composants du tenseur de contrainte, on décompose le tenseur de rigidité élastique de chaque couche en composants ci-dessous :

$$\mathbf{B}_{(33)}^{(j)} = \begin{bmatrix} C_{3333}^{(j)} & \sqrt{2}C_{3331}^{(j)} & \sqrt{2}C_{3332}^{(j)} \\ \sqrt{2}C_{3331}^{(j)} & 2C_{3131}^{(j)} & 2C_{3132}^{(j)} \\ \sqrt{2}C_{3332}^{(j)} & 2C_{3132}^{(j)} & 2C_{3232}^{(j)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{(32)}^{(j)} = \begin{bmatrix} C_{3322}^{(j)} & C_{3311}^{(j)} & \sqrt{2}C_{3321}^{(j)} \\ \sqrt{2}C_{2231}^{(j)} & \sqrt{2}C_{1131}^{(j)} & 2C_{2131}^{(j)} \\ \sqrt{2}C_{2232}^{(j)} & \sqrt{2}C_{1132}^{(j)} & 2C_{2132}^{(j)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{(22)}^{(j)} = \begin{bmatrix} C_{2222}^{(j)} & C_{2211}^{(j)} & \sqrt{2}C_{2221}^{(j)} \\ C_{2211}^{(j)} & C_{1111}^{(j)} & \sqrt{2}C_{1121}^{(j)} \\ \sqrt{2}C_{2221}^{(j)} & \sqrt{2}C_{1121}^{(j)} & 2C_{2121}^{(j)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{(23)}^{(j)} = [\mathbf{B}_{(32)}^{(j)}]^T$$

Les composantes du tenseur de rigidité élastique effective de la plaque étudiée sont trouvées selon les formules suivantes (Milton, 2002) :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}_{(33)} &= \left\langle [\mathbf{B}_{(33)}]^{-1} \right\rangle_{\Omega}^{-1}, \\ \bar{\mathbf{B}}_{(32)} &= \left\langle [\mathbf{B}_{(33)}]^{-1} \right\rangle_{\Omega}^{-1} \left\langle [\mathbf{B}_{(33)}]^{-1} \mathbf{B}_{(32)} \right\rangle_{\Omega}, \\ \bar{\mathbf{B}}_{(22)} &= \left\langle \mathbf{B}_{(22)} - \mathbf{B}_{(23)} [\mathbf{B}_{(33)}]^{-1} \mathbf{B}_{(32)} \right\rangle_{\Omega} \\ &\quad + \left\langle \mathbf{B}_{(23)} [\mathbf{B}_{(33)}]^{-1} \right\rangle_{\Omega} \left\langle [\mathbf{B}_{(33)}]^{-1} \right\rangle_{\Omega}^{-1} \left\langle [\mathbf{B}_{(33)}]^{-1} \mathbf{B}_{(32)} \right\rangle_{\Omega}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

avec

$$\langle \bullet \rangle_{\Omega} = \frac{1}{H} \left(\int_{-(H_0+H_1)}^{-H_0} \bullet^{(1)} dx_3 + \int_{-H_0}^0 \bullet^{(r)} dx_3 + \int_0^{H_2} \bullet^{(2)} dx_3 \right)$$

Exemple numérique

A titre exemple, on détermine les propriétés élastiques effectives de la plaque étant décrite dans l'exemple de la section 5.3. Elles sont analytiquement obtenue par (5.50).

Premièrement, on étudie l'influence de l'interface rugueuse sur les propriétés élastiques effectives quand la hauteur de la zone d'interface rugueuse H_0 se varie de 0 à 1 m et la période de la rugosité de l'interface est fixée à 0.2 m. Les diagrammes des propriétés effectives normalisées C_{1111}^*/E_2 et C_{3333}/E_2 obtenue par (5.50) sont tracés en fonction de H_0 dans la figure 5.10. Ensuite, on les compare avec les valeurs numériques calculées par FEM (Comsol). On trouve que ces deux valeurs sont très proches l'un de l'autre. En première étude, on s'intéresse à l'effet de la période de la rugosité sur les propriétés élastiques

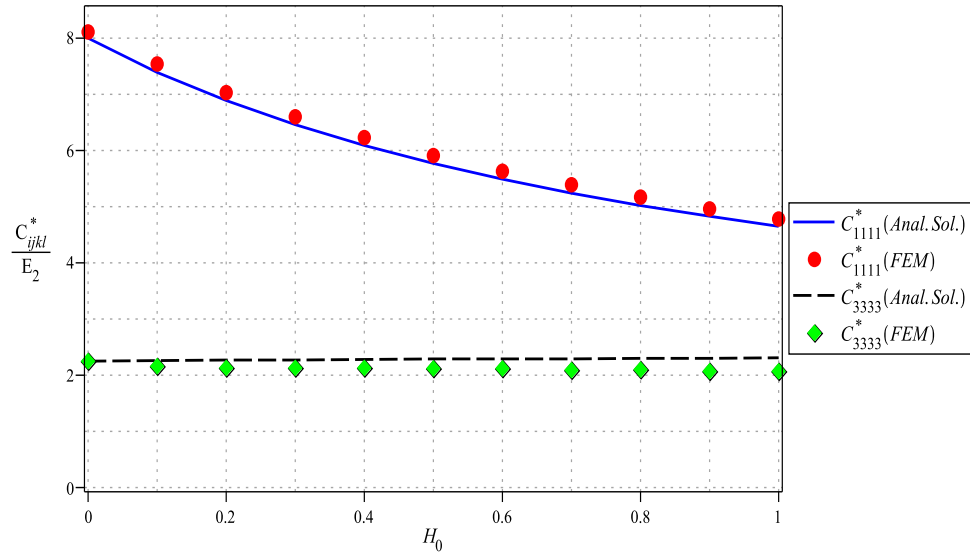


FIGURE 5.10: Propriétés effectives normalisées C_{1111}^*/E_2 et C_{3333}^*/E_2 en fonction de l'épaisseur H_0 de la zone d'interface très rugueuse.

effectives quand la hauteur de la zone d'interface rugueuse est constante. La figure 5.11 illustre le rapport entre la valeur de C_{1111}^* obtenue par (5.50) et celle calculée par FEM (Comsol) en fonction de $1/\epsilon$ avec $H_0 = 0,5m$.

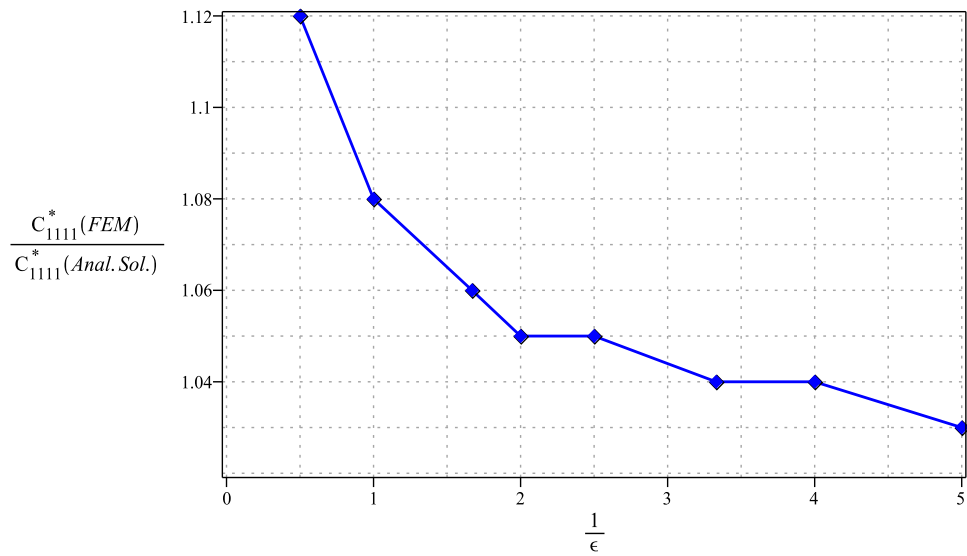


FIGURE 5.11: Module effectif normalisé de C_{1111}^* en fonction de $1/\epsilon$ avec l'épaisseur H_0 de la zone d'interface très rugueuse $H_0 = 0.5 m$.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail de thèse, nous avons étudié les interfaces périodiquement ondulées d'abord suivant une seule direction et ensuite suivant deux directions. Les phénomènes en jeu sont la conduction thermique et l'élasticité linéaire. L'objectif principal de ce travail était de déterminer les propriétés conductrices et élastiques effectives des composites dont les interfaces entre les phases oscillent rapidement et périodiquement. Pour atteindre cet objectif, nous avons élaboré une nouvelle approche qui consiste à appliquer l'analyse asymptotique pour modéliser une zone d'interface rugueuse comme une interphase équivalente hétérogène uniquement suivant son épaisseur et à faire appel à des méthodes micromécaniques pour quantifier les effets de cette interphase sur les propriétés effectives.

En conduction thermique comme en élasticité, l'interphase équivalente obtenue pour remplacer une zone d'interface ondulée est hétérogène dans une seule direction, à savoir qu'elle est hétérogène suivant son épaisseur mais homogène le long de chaque plan ou surface transverse. Par l'analyse asymptotique mathématique, nous avons montré que la détermination des propriétés de l'interphase équivalente revient à résoudre un problème d'homogénéisation 2D paramétré pour une cellule de base. Quand les interfaces ondulées suivant une seule direction (rectiligne ou circulaire) sont concernées, nous avons mis en évidence le remarquable fait que la solution du problème d'homogénéisation 2D paramétré pour une cellule de base n'est rien d'autre que celle du problème d'homogénéisation d'un composite multicouche. Cette dernière peut s'écrire sous une forme très compacte grâce à l'utilisation de certains opérateurs d'interface appropriés.

Nous avons considéré trois types de composites dans lesquels les interfaces sont périodiquement ondulées : composites stratifiés, fibreux et à inclusions. Dans le cas des composites stratifiés avec les interfaces ondulées suivant une seule direction, leurs propriétés effectives peuvent être analytiquement et exactement calculées. Dans les autres cas, des schémas micromécaniques ont été utilisés pour estimer les propriétés effectives. Pour tenir compte des effets d'une interphase équivalente qui est hétérogène suivant son épaisseur, nous avons proposé trois méthodes. La première méthode consiste à résoudre analytiquement le problème correspondant. Cette méthode n'est applicable que dans des cas très simples et très limités. La deuxième méthode est d'effectuer une homogénéiser l'interphase suivant son épaisseur. La troisième méthode est de discrétiser l'interphase en un certain nombre de couches individuellement homogènes. Les résultats obtenus par l'approche élaborée dans ce travail sur les propriétés effectives des

composites en question ont été comparés avec ceux délivrés par la méthode des éléments finis. Dans tous les cas examinés, nous avons constaté une très bonne concordance.

La méthode proposée par ce travail pour homogénéiser les interfaces ondulées dans les composites et les résultats obtenus par ce travail sur les propriétés effectives des composites concernés contribuent au développement de la micromécanique des matériaux hétérogènes et peuvent être utilisés pour résoudre certains problèmes d'intérêt pratique. En même temps, ce travail ouvre de nombreuses nouvelles perspectives. Parmi celles-ci, nous listons en particulier les suivantes :

- Quand une interface ondulée suivant deux directions intervient, nous avons traité le cas le plus simple où les ondulations se font autour d'un plan et ont la même période suivant les deux directions. La méthode élaborée dans ce travail peut s'étendre sans grandes difficultés au cas importants où une interface oscille suivant deux directions avec deux différentes périodes autour d'un plan ou ondule dans deux directions avec la même période autour d'une surface sphérique.
- La surface autour de laquelle une interface ondule a été supposé plane ou cylindrique circulaire dans ce travail. Notre approche peut s'étendre au cas général où la surface autour de laquelle une interface oscille est une surface lisse quelconque.
- Les phénomènes physiques et mécaniques étudiés dans ce travail sont la conduction thermique et l'élasticité linéaire. Par analogie mathématique, les résultats dérivés pour la conduction thermique s'appliquent également aux autres phénomènes de transport linéaires tels que la conduction électrique et la diffusion. Notre approche peut se généraliser aux phénomènes couplés linéaires tels que la piézo-électricité. La clé de cette généralisation réside dans l'introduction de certains opérateurs appropriés.
- L'approche et les résultats présentés dans ce travail portent sur les interfaces ondulées. Nous pouvons les étendre aux surfaces.
- A l'échelle micrométrique ou nanométrique, les surfaces et les interfaces sont souvent rugueuses et présentent une énergie non négligeable. Nous pouvons envisager de la prendre en considération en généralisant notre approche.
- Dans ce travail, nous nous sommes intéressés par les interfaces périodiquement ondulées. Comment traiter le problème d'homogénéisation des interfaces aléatoirement ondulé est un sujet largement ouvert.
- Un autre problème largement ouvert concerne l'homogénéisation d'une interface ondulée entre deux matériaux non linéaires.

En mécanique et physique des surfaces et des interfaces, de nombreux problèmes restent à résoudre et de formidables défis sont à relever.

Bibliographie

- [1] T. Abboud and H. Ammari. Diffraction at a curved grating : TM and TE cases, homogenization. *J. Math. Anal. Appl.*, 202 : 995 - 1026, 1996.
- [2] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover publications, 1964.
- [3] Y. Achdou, O. Pironneau and F. Valentin. Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries. *J. Comput. Phys.*, 147 : 187 - 218, 1998.
- [4] Y. Amirat, O. Bodart, U. De Maio and A. Gaudiello. Asymptotic approximation of the solution of the Laplace equation in a domain with highly oscillating boundary. *SIAM J. Math. Anal.*, 35 : 1598-1616, 2004.
- [5] Y. Amirat, G.A. Chechkin and R.R. Gadylshin. Asymptotics for eigenelements of Laplacian in domain with oscillating boundary : multiple eigenvalues. *Appl. Anal.*, 86 : 873-897, 2007.
- [6] Y. Amirat, G.A. Chechkin and R.R. Gadylshin. Asymptotics of the solution of a Dirichlet spectral problem in a junction with highly oscillating boundary. *C. R. Mech.*, 336 : 693-698, 2008.
- [7] G.E. Backus. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *J. Geophys. Res.*, 67 : 4427-4440, 1962.
- [8] N. S. Bakhvalov and G . Panasenko. *Homogenisation : Averaging of Processes in Periodic Media : Mathematical Problems of the Mechanics of Composite Materials*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London, 1989.
- [9] G. Bao and E. Bonnetier. Optimal design of periodic diffractive structures. *Appl. Math. Opt.*, 43 : 103-116, 2001.
- [10] A.G. Belyaev, A.G. Mikheev and A.S. Shamaev. Diffraction of a plane wave by rapidly oscillating surface. *Comp. Math. Math. Phys.*, 32 : 1121 - 1133, 1992.
- [11] A.G. Belyaev, A.L. Pyatnitskii and G.A. Chechkin. Asymptotic behavior of a solution to a boundary value problem in a perforated domain with oscillating boundary. *Siberian Math. J.*, 39 : 621-644, 1998.
- [12] A. Bensoussan, J. L. Lions and G. Papanicolau. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. 1978.

- [13] Y. Benveniste and T. Chen. The Saint-Venant torsion of a circular bar consisting of a composite cylinder assemblage with cylindrically orthotropic constituents. *Int. J. Solids Struct.*, 40 : 7093 - 7107, 2003.
- [14] Y. Benveniste, T. Chen and G. J. Dvorak. The effective thermal conductivity of composites reinforced by coated cylindrically orthotropic fibers. *J. Appl. Phys.*, 67 : 2878-2884, 1990.
- [15] D. Blanchard, A. Gaudiello and J. Mossino. Highly oscillating boundaries and reduction of dimension : the critical case. *Appl. Anal.*, 5 : 137-163, 2007.
- [16] L. Chan and E.S. Cheb Terrab. Non - liouvillian solutions for second order linear odes. *Proc. of ISSAC*, 80 - 86, 2004.
- [17] G. A. Chechkin, A. Friedman and A. L. Piatnitski. The boundary - value problem in domains with very rapidly oscillating boundary. *J. Math. Anal. Appl.*, 231 : 213 - 234, 1999.
- [18] K. T. Cheng and N. Olhoff. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates. *Int. J. Solids Struct.*, 17 : 305 - 323, 1981.
- [19] P.C. Chou, J. Carleone and C.M. Hsu. Elastic constants of layered media. *J. Comp. Mat.*, 6 : 80-93, 1972.
- [20] R. M. Christensen and K. H. Lo. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Solids*, 27 : 315 - 330, 1979.
- [21] H. Dumontet. Homogénéisation d'un matériaux à structure périodique stratifié, de comportement élastique linéaire et non linéaire et viscoélastique. *C. R. Acad. Sci.*, 295 : 633-636, 1982.
- [22] J.D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problem. *Proc. Roy. Soc. London*, A241 : 376-396, 1957.
- [23] N.M. Fyrrillas and C. Pozrikidis. Conductive heat transport across rough surfaces and interfaces between two conforming media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 44 : 1789 - 1801, 2001.
- [24] R. P. Gilbert and M. Ou. Acoustic wave propagation in a composite of two different poroelastic materials with a very rough periodic interface : a homogenization approach. *Int. J. Multiscale Comput. Eng.*, 1 : 10 - 20, 2003.
- [25] M.E. Gurtin and A. Ian Murdoch. A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 57 : 291-323, 1975.
- [26] Z. Hashin. Thermoelastic properties and conductivity of carbon/carbon fiber composites. *Mech. Mater.*, 8 : 293 - 308, 1990.
- [27] Q. C. He and Z. Q. Feng. Homogenization of layered elastoplastic composites. In *International Conference on Material Modelling, Dortmund, Germany, 2009*.
- [28] Q.C. He and A. Curnier. A more fundamental approach to damaged elastic stress-strain relations. *Int. J. Solids Struct.*, 32 : 1433-1457, 1995.

- [29] E. Hervé and A. Zaoui. Elastic behaviour of multiply coated fibre - reinforced composites. *Int. J. Eng. Sci.*, 33 : 1419 - 1433, 1995.
- [30] R. Hill. Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials : I. Elastic behaviour. *J. Mech. Phys. Solids*, 12 : 199 - 212, 1964.
- [31] Y. Huang and K.X. Hu. A generalized selfnext term - consistent mechanics method for composite materials with multiphase inclusions. *J. Mech. Phys. Solids*, 42 : 491 - 504, 1994.
- [32] W. Kohler, G. Papanicolaou and S. Varadhan. Boundary and interface problems in regions with very rough boundaries. In *Multiple Scattering and Waves in Random Media*, 1 : 165-197, 1981.
- [33] R. V. Kohn and M. Vogelius. A new model for thin plates with rapidly varying thickness. *Int. J. Solids Struct.*, 20 : 333 - 350, 1984.
- [34] G. Kristensson. Homogenization of corrugated interfaces in electromagnetics. *Progress in electromagnetics research*, PIER 55 : 1 - 31, 2005.
- [35] Q. V. Le. *Modélisation multi-échelle des matériaux viscoélastiques hétérogènes : Application à l'identification et à l'estimation du fluage propre de bétons d'enclintes de centrales nucléaires*. PhD thesis, Université de Marne la Vallée, 2008.
- [36] H. Le Quang, G. Bonnet and Q.C. He. Size-dependent Eshelby tensor fields and effective conductivity of composites made of anisotropic phases with highly conducting imperfect interfaces. *Physical Review B*, 81 : 64203, 2010.
- [37] H. Le Quang and Q.C. He. Thermoelastic composites with columnar microstructure and cylindrically anisotropic phases. Part I : Exact results. *Int. J. Eng. Sci.*, 45 : 402-423, 2007.
- [38] H. Le Quang and Q.C. He. Thermoelastic composites with columnar microstructure and cylindrically anisotropic phases. Part II : One-parameter generalized self-consistent estimates. *Int. J. Eng. Sci.*, 45 : 424-435, 2007.
- [39] Y.M. Lee, R.B. Yang and S.S. Gau. A generalized self-consistent method for calculation of effective thermal conductivity of composites with interfacial contact conductance. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 33(2) : 142 - 150, 2006.
- [40] T. Lewinski. Effective models of composite periodic plates—I, asymptotic solution. *Int. J. Solids Struct.*, 27 : 1155 - 1172, 1991.
- [41] S. Li. *Introduction to Micromechanics and Nanomechanics*. University of California, Berkeley, 2000.
- [42] A. E. H. Love. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover publications, 1927.
- [43] A.L. Madureira and F. Valentin. Asymptotics of the poisson problem in domains with curved rough boundaries. *SIAM J. Math. Anal.*, 38 : 1450 - 1473, 2007.

- [44] R.S. Maier. The 192 solutions of the heun equation. *Math. Comp.*, 76 : 811 - 843, 2007.
- [45] T.A. Melnik, G.A. Chechkin and T.P. Chechkina. Convergence theorems for solutions and energy functionals of boundary value problems in thick multilevel junctions of a new type with perturbed neumann conditions on the boundary of thin rectangles. *J. Math. Sci.*, 159 : 113-132, 2009.
- [46] M. Milgrom and S. Shtrikman. A layered-shell model of isotropic composites and exact expressions for the effective properties. *J. Appl. Phys.*, 66 : 3429-3436, 1989.
- [47] G. W. Milton. *The Theory of Composites*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [48] T. Mura. *Micromechanics of Defects in Solids*. Kluwer academic publishers, 1987.
- [49] S. Nemat Nasser and M. Hori. *Micromechanics : Overall Properties of Heterogeneous Materials*. Elsevier, Amsterdam - Lausanne - New York - Oxford - Shannon - Singapore - Tokyo, 1999.
- [50] J. Nevard and J. B. Keller. Homogenization of rough boundaries and interfaces. *SIAM J. Appl. Math.*, 57 : 1660 - 1686, 1997.
- [51] A.N. Norris. The effective moduli of layered media- a new look at an old problem. *Micromechanics and inhomogeneity- The Toshio Mura 65 th anniversary volume*, 321-339, 1990.
- [52] N. J. Pagano. Exact moduli of anisotropic laminates. *Comp. Mat., edited by G. P. Sendeckyj (Academic, New York)*, 2 : 23-45, 1974.
- [53] S. Pecullan, L.V. Gibiansky and S. Torquato. Scale effects on the elastic behavior of periodic andhierarchical two-dimensional composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 47 : 1509-1542, 1999.
- [54] L.E. Persson, L. Persson, N. Svanstedt and J. Wyller. *The Homogenization Method : An Introduction*. Studentlitteratur, 1993.
- [55] J. Pinho-da Cruz, J.A. Oliveira and F. Teixeira-Dias. Asymptotic homogenisation in linear elasticity. Part I : Mathematical formulation and finite element modelling. *Comput. Mat. Sci.*, 45 : 1073-1080, 2009.
- [56] G. W. Postma. Wave propagation in a stratified medium. *Geophysics*, 20 : 780-806, 1955.
- [57] H. Le Quang. *Microstructures solubles et relations exacts en micromécanique*. PhD thesis, Université de Marne - la - Vallée, 2005.
- [58] H.L. Quang and Q.C. He. A one-parameter generalized self-consistent model for isotropic multi-phase composites. *Int. J. Solids Struct.*, 44 : 6805-6825, 2007.
- [59] A. Ronveaux. *Heun's Differential Equations*. Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [60] K. Sab. Propriétés homogénéisées des matériaux hétérogènes élastiques : Définition des bornes. Cours de DEA de l'Ecole Nationale de Ponts et Chaussées, 2005.
- [61] E. Sanchez Palencia. *Non - Homogeneous Media and Vibration Theory*. Springer Verlag, Heidelberg, 1980.

- [62] S.S. Singh and S.K. Tomar. Quasi - p - waves at a corrugated interface between two dissimilar monoclinic elastic half - spaces. *Int. J. Solids Struct.*, 44 : 197 - 228, 2007.
- [63] D. R. S. Talbot, J. B. Titchener and J. R. Willis. The reflection of electromagnetic waves from very rough interfaces. *Wave Motion*, 12 : 245 - 260, 1990.
- [64] S. Torquato. *Random Heterogeneous Materials Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer, New York, 2002.
- [65] P.C. Vinh and D.X. Tung. Homogenized equations of the linear elasticity in two-dimensional domains with very rough interfaces. *Mech. Res. Commun.*, 37 : 285-288, 2010.
- [66] P.C. Vinh and D.X. Tung. Homogenized equations of the linear elasticity theory in two - dimensional domains with interfaces highly oscillating between two circles. *Acta Mech.*, 1-16, 2010.
- [67] Y. Wang, J. Weissmuller and H.L. Duan. Mechanics of corrugated surfaces. *J. Mech. Phys. Solids*, 58 : 1552 - 1566, 2010.
- [68] P.C. Waterman. Scattering by periodic surfaces. *J. Acous. Soc. America*, 57 : 791 - 802, 1975.
- [69] K. Zaki and A. Neureuther. Scattering from a perfectly conducting surface with a sinusoidal height profile : TE polarization. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 19 : 208 - 214, 1971.
- [70] A. Zaoui. Matériaux hétérogènes et composites. Cours à l'Ecole Polytechnique - Ed. Presses de l'Ecole Polytechnique, 2000.
- [71] Q. S. Zheng and D. X. Du. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution. *J. Mech. Phys. Solids*, 49 : 2765 - 2788, 2001.
- [72] V.V. Zhikov, S.M. Kozlov and O.A. Oleinik. *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*. Springer-Verlag Heidelberg, 1994.

Résumé

Les surfaces et interfaces rugueuses sont rencontrées dans de nombreuses situations en mécanique et physique des solides. En particulier, une surface ou interface considérée comme lisse à une échelle donnée se révèle souvent rugueuse à une autre échelle plus petite. Ce travail étudie les interfaces planes et courbées dont la rugosité peut être raisonnablement décrite comme des ondulations périodiques. Il a pour objectif de modéliser ces interfaces dans des composites et de déterminer leurs effets sur les propriétés effectives élastiques et conductrices des composites concernés. L'approche élaborée pour atteindre cet objectif consiste d'abord à utiliser l'analyse asymptotique pour modéliser une zone d'interface rugueuse comme une interphase hétérogène uniquement suivant son épaisseur et ensuite à faire appel à des schémas micromécaniques pour quantifier les influences de cette interphase sur les propriétés effectives. Ce travail considère trois types de composites dans lesquels des interfaces périodiquement ondulées sont présentes : composites stratifiés, fibreux et à inclusions. Les résultats obtenus pour ces composites contribuent au développement de la micromécanique et apportent des solutions à des problèmes d'intérêt pratique rencontrés en physique et mécanique des matériaux hétérogènes.

Mots-clés : homogénéisation, micromécanique, interfaces rugueuses, propriétés effectives, analyse asymptotique, matériaux composites.

Abstract

Rough surfaces and interfaces are encountered in many situations in mechanics and physics of solids. In particular, a surface or interface considered smooth at a given scale turns out often to be rough at another smaller scale. This work studies the flat and curved interfaces whose roughness can be reasonably described as periodic undulations. It aims to model these interfaces in composites and to determine their effects on the effective elastic and conductive properties of the composites in question. The approach elaborated to achieve this objective consists first in using asymptotic analysis to model a zone of rough interface as an interphase being heterogeneous only along its thickness direction and then in resorting to some micromechanical schemes to quantify the influences of the interphase on the effective properties. This work considers three types of composites in which periodically corrugated interfaces are present : laminated, fibrous and particulate composites. The results obtained for these composites contribute to the development of micromechanics and provide solutions to problems of practical interest encountered in physics and mechanics of heterogeneous materials.

Keywords : homogenization, micromechanics, rough interfaces, effective properties, asymptotic analysis, composite materials.