



HAL
open science

Trois problèmes géométriques d'hyperbolicité complexe et presque complexe

Benoît Saleur

► **To cite this version:**

Benoît Saleur. Trois problèmes géométriques d'hyperbolicité complexe et presque complexe. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris Sud - Paris XI, 2011. Français. NNT : 2011PA112256 . tel-00647337

HAL Id: tel-00647337

<https://theses.hal.science/tel-00647337>

Submitted on 1 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat de l'Université Paris-Sud XI Orsay

Spécialité :

Mathématiques

Présentée par

Benoît Saleur

Pour obtenir le grade de docteur de l'Université Paris-Sud XI

Trois problèmes géométriques d'hyperbolicité complexe et presque complexe

Soutenue le 22 novembre 2011 devant le jury composé de :

Gerd-Eberhard DETHLOFF

Julien DUVAL

Sergueï IVACHKOVITCH

Joël MERKER

Jean-Claude SIKORAV

Rapporteur

Directeur de thèse

Examineur

Examineur

Rapporteur

Remerciements

Je tiens en tout premier lieu à témoigner de ma gratitude envers Julien Duval. Il m'a introduit à un sujet riche et passionnant, à la jonction de plusieurs disciplines. Il m'a consacré son temps sans compter, partageant ses idées avec moi avec une grande générosité. Il a enfin, par l'originalité de ses points de vue, changé radicalement mon approche des Mathématiques. Je le remercie pour sa disponibilité et sa patience.

Je souhaite aussi exprimer toute ma reconnaissance envers Gerd-Eberhard Dethloff et Jean-Claude Sikorav pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse, ainsi qu'envers Sergueï Ivachkovitch et Joël Merker qui me font l'honneur de participer au jury.

Mes plus vifs remerciements vont aussi à Henry de Thélin, Dan Popovici, Vincent Guedj et Nikolay Shcherbina, pour m'avoir donné la parole dans les groupes de travail, séminaires ou colloques où j'ai eu la chance de pouvoir m'exprimer.

Mon goût pour l'analyse complexe doit beaucoup aux enseignements de Nessim Sibony, sous la direction duquel j'ai travaillé à mon mémoire de Master, et de Tien Cuong Dinh. Qu'ils soient chaleureusement remerciés, ainsi que tous les professeurs de l'Université Paris-Sud et de l'Ecole Normale Supérieure qui ont su m'aiguiller dans mes études.

Je veux adresser un remerciement spécial mes camarades de bureau : Bernardo, qui n'a jamais rechigné à réfléchir à mes questions et qui m'a aidé à digérer ce que je sais de géométrie algébrique, et Emmanuel.

Je remercie également tous ceux qui, tout au long de mes études, m'ont appris des Mathématiques. Je pense à mes professeurs de classes préparatoires, Michel Gonnord et Alain Soyeur, mais aussi à mes professeurs de lycée, en particulier Georges Gava. Je souhaite également exprimer toute ma gratitude envers Jacques Cazenove, qui m'a consacré un temps précieux et m'a transmis son goût pour la Science. Sous son patronage, j'ai visité divers haut-lieux de la physique et de l'astronomie, serré des mains célèbres et admiré une aurore boréale en Provence. Qu'il soit assuré de ma reconnaissance et de mon amitié.

Je sais ce que je dois à ma famille. Je tiens à en remercier chaque membre, et en premier lieu ma mère, mon père, Claude et ma soeur, qui n'ont jamais douté de moi ; mes grand-parents, Madeleine, Gisèle et Gaston, ainsi que Pierrette et Robert, dont le soutien m'a été précieux ; Colette, Françoise, Régis et mes cousins Hugo et Sandro ; et bien sûr mes nombreuses tantes et mes non moins nombreux oncles, mes cousins tourangeaux, limouxins, parisiens et néo-biterrois.

Je remercie enfin tous mes amis pour leurs encouragements, les Narbonnais et les Toulousains, les Parisiens, les Savoyards, les Bretons, les Lyonnais et même les Clermontois s'il y en a.

Table des matières

Introduction	6
0 Préliminaires	8
0.1 Hyperbolicité complexe	8
0.2 Fonctions caractéristiques de Nevanlinna	10
0.3 Théorie de recouvrement des surfaces d’Ahlfors	12
0.3.1 Nombre moyen de feuilletés d’un recouvrement	12
0.3.2 Iles et péninsules	13
1 Inégalité d’Ahlfors en dimension supérieure	16
1.1 Introduction	16
1.2 Démonstration du théorème	17
1.2.1 Réduction à un problème riemannien	17
1.2.2 La méthode des courbes parallèles	18
1.2.3 La méthode de Kleiner	25
1.3 Conséquences et raffinements	27
2 Théorème de Borel presque complexe	29
2.1 Introduction	29
2.2 Préliminaires de géométrie presque complexe	31
2.2.1 Généralités	31
2.2.2 Notion de J -courbe et propriétés locales	32
2.2.3 Aire d’une J -courbe	33
2.2.4 Familles normales	34
2.2.5 Plan projectif presque complexe	34
2.2.6 Courants positifs et fonctions plurisousharmoniques dans un contexte presque complexe	38
2.3 Démonstration du théorème de Borel presque complexe	39
2.3.1 Construction d’un courant fermé numériquement effectif relativement aux diagonales	39
2.3.2 Le courant T est singulier	42
2.3.3 Conclusion par éclatement	49
3 Théorème de Bloch presque complexe	53
3.1 Introduction	53
3.2 Démonstration du théorème de Bloch presque complexe	54
3.2.1 Construction d’un courant positif fermé numériquement effectif relativement aux diagonales	54
3.2.2 Démonstration du théorème de Bloch	59

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude géométrique de trois problèmes d'hyperbolicité complexe et presque complexe. Elle se compose de trois parties et d'un chapitre préliminaire.

La première partie, intitulée « inégalité d'Ahlfors en dimension supérieure », est consacrée à la démonstration d'une propriété relative aux courbes holomorphes dans des variétés hyperboliques au sens de Kobayashi. L'hyperbolicité d'une variété complexe compacte se traduit, en termes qualitatifs, par la non-existence de courbes entières non constantes ; le principal résultat de cette première partie met en évidence une conséquence quantitative de l'hyperbolicité, prenant la forme d'une inégalité isopérimétrique évoquant l'inégalité d'Ahlfors. Sa démonstration est purement géométrique, et reste d'ailleurs valable dans un contexte presque complexe. Elle emprunte à une méthode couramment utilisée en géométrie riemannienne pour la démonstration d'inégalités isopérimétriques, la méthode des courbes parallèles, ainsi qu'à un argument dû à B. Kleiner.

La deuxième partie est intitulée « un théorème de Borel presque complexe ». Elle est consacrée à la démonstration d'une version presque complexe du théorème de Borel, qui affirme que les courbes entières dans le plan projectif complexe évitant quatre droites en position générale sont linéairement dégénérées. Dans un plan projectif presque complexe $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$, les J -droites se substituent aux droites projectives, et le théorème de Borel affirme alors qu'une J -courbe entière évitant quatre J -droites en position générale est dégénérée, au sens où son image est contenue dans une réunion de trois J -droites. La démonstration du théorème de Borel presque complexe repose sur l'examen des propriétés d'un courant positif fermé construit à partir d'une courbe entière. Les méthodes mises en œuvre sont essentiellement géométriques, et il ne peut en être autrement, puisque nous ne disposons véritablement que d'un seul outil dans le plan projectif presque complexe : les projections centrales. Celles-ci permettent de réduire le problème à une question de distribution des valeurs des applications quasiconformes entre surfaces de Riemann, que nous pouvons traiter à l'aide de la théorie de recouvrement des surfaces d'Ahlfors.

La troisième partie est dédiée à la démonstration d'un « théorème de Bloch presque complexe ». Il s'agit là encore de généraliser au cas presque complexe un énoncé déjà connu dans le plan projectif complexe, le théorème de Bloch, qui affirme qu'une suite non normale de disques holomorphes dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ évitant quatre droites en position générale converge, en un certain sens, vers un diviseur constitué de trois droites. Il s'agit donc, là encore, d'établir une forme d'hyperbolicité du complémentaire de quatre J -droites en position générale. La démonstration du théorème de Bloch presque complexe est similaire à celle du théorème de Borel, mais présente une difficulté supplémentaire, celle de construire un courant fermé à partir d'une suite non normale de disques J -holomorphes, et non plus à partir d'une J -courbe entière.

Cette troisième partie est très proche de la précédente, par sa thématique comme par son contenu. Au-delà de la démonstration d'un nouveau résultat, il s'agit là encore d'améliorer la compréhension géo-

métrique d'un énoncé bien connu. Malgré tout, les théorèmes de Borel et de Bloch sont de nature assez différente, le second étant généralement considéré comme plus profond que le premier. Historiquement, plus de trente ans séparent d'ailleurs leurs démonstrations. Il m'a donc semblé opportun de les traiter séparément, quitte à ne pas tout écrire pour éviter les répétitions. Ce choix présente l'avantage de mettre en lumière ce qui différencie effectivement les deux démonstrations. A posteriori, ces différences sont surtout techniques et significativement moins évidentes que celles qui existent entre les démonstrations originales.

La première partie se distingue nettement des autres, puisqu'elle s'attache à mettre en évidence une conséquence de l'hyperbolicité d'une variété complexe quelconque, là où les deuxième et troisième parties établissent l'hyperbolicité d'une variété particulière. Par ailleurs, elle met en œuvre des méthodes purement riemanniennes, là où les théorèmes de Borel et de Bloch sont réductibles à de la géométrie élémentaire du plan projectif et à la théorie d'Ahlfors. Cependant, les trois problèmes abordés dans cette thèse ont trait à l'hyperbolicité complexe et à son étude d'un point de vue géométrique. Par ailleurs, l'inégalité d'Ahlfors en dimension supérieure est valable dans un contexte presque complexe, et permet d'obtenir une conséquence quantitative de l'hyperbolicité plongée du complémentaire de cinq J -droites en position générale dans un plan projectif presque complexe $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$. Il s'agit d'un premier pas, certes modeste, en direction d'un second théorème principal presque complexe. On ne peut raisonnablement attendre plus de cette inégalité, puisqu'elle ignore la géométrie particulière du plan projectif, pourtant essentielle à la démonstration des théorèmes de Green, Borel et Bloch comme des seconds théorèmes principaux de Cartan-Nevanlinna ou d'Ahlfors. Cependant, ces deux derniers théorèmes sont liés, d'une façon ou d'une autre, à l'existence d'une métrique hermitienne de courbure sectionnelle holomorphe constante dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Aussi, peut-être les méthodes riemanniennes utilisées dans la première partie peuvent-elles présenter un intérêt en vue d'un second théorème principal presque complexe ?

Le manuscrit s'ouvre sur un chapitre préliminaire, consacré à des rappels utiles à la compréhension des trois parties de la thèse. Il est consacré à la notion d'hyperbolicité au sens de Kobayashi, à la construction de courants positifs fermés numériquement effectifs à partir de courbes entières, et se termine par un rapide résumé de la théorie de recouvrement des surfaces d'Ahlfors. Cette théorie est au coeur des deuxième et troisième parties, mais contrairement aux apparences, il y sera peu fait référence dans la première partie, baptisée « inégalité d'Ahlfors en dimension supérieure » par analogie avec la vraie inégalité d'Ahlfors. Les rappels de géométrie presque complexe sont renvoyés à la deuxième partie, car il n'y sera fait allusion que brièvement à la fin de la première partie.

Chapitre 0

Préliminaires

0.1 Hyperbolicité complexe

Ce paragraphe est consacré à une rapide introduction à l'hyperbolicité complexe. Nous renvoyons aux ouvrages de S. Kobayashi [23] et S. Lang [26] pour les détails.

Soit X une variété complexe. Pour tout point $P \in X$ et tout vecteur $v \in T_P X$, notons :

$$K_X(P, v) = \inf \left\{ \frac{1}{|\lambda|} \mid \exists f : \mathbb{D} \rightarrow X \text{ telle que } f(0) = P, df_0(\partial/\partial z) = \lambda v \right\}.$$

La fonction K_X est une pseudo-métrique finslerienne, appelée *pseudo-métrique de Kobayashi-Royden*. La variété X est dite *hyperbolique au sens de Kobayashi* si sa pseudo-métrique de Kobayashi-Royden est non dégénérée :

Définition 0.1.1. Une variété complexe X est dite hyperbolique au sens de Kobayashi si pour tout compact K de X et toute métrique riemannienne g sur K , il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall P \in K, \forall v \in T_P X, K_X(P, v) \geq \varepsilon \|v\|_g.$$

La pseudo-métrique de Kobayashi-Royden K_X d'une variété hyperbolique X est continue. Dans le cas général, elle est seulement semi-continue supérieurement, et donne par intégration sur les chemins continus une pseudo-distance d_X . Lorsque X est hyperbolique, d_X est une vraie distance. La réciproque est vraie :

Proposition 1. Une variété complexe X est hyperbolique au sens de Kobayashi si et seulement si d_X est une distance, i.e. si pour tout couple (P, Q) de points distincts de X , $d_X(P, Q) \neq 0$.

La pseudo-métrique de Kobayashi-Royden d'une surface de Riemann elliptique ou parabolique est uniformément nulle. En revanche, la pseudo-métrique de Kobayashi-Royden du disque unité \mathbb{D} peut être calculée à l'aide du lemme de Schwarz, et vaut : $K_{\mathbb{D}} = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$. Elle est donc liée à la métrique de Poincaré $g_{\mathbb{D}} = \frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$, de courbure constante égale à -1 , par la relation : $K_{\mathbb{D}} = \frac{1}{2}\sqrt{g_{\mathbb{D}}}$. Une surface de Riemann hyperbolique Σ étant revêtue par le disque unité, elle hérite d'une métrique g_{Σ} de courbure constante égale à -1 , encore appelée métrique de Poincaré. Sa pseudo-métrique de Kobayashi-Royden K_{Σ} vaut alors : $K_{\Sigma} = \frac{1}{2}\sqrt{g_{\Sigma}}$. Les notions d'hyperbolicité et d'hyperbolicité au sens de Kobayashi coïncident donc pour les surfaces de Riemann.

Si g désigne une métrique riemannienne sur une variété X hyperbolique au sens de Kobayashi, pour tout point $P \in X$, la norme $\|df_0\|_g$ de la dérivée en l'origine de tout disque holomorphe $f : \mathbb{D} \rightarrow X$ tel que $f(0) = P$ est uniformément bornée. Si X est compacte, on s'attend à ce que toute suite de disques holomorphes à valeurs dans X soit *normale*. Rappelons de quoi il s'agit :

Définition 0.1.2. Une suite de disques holomorphes $f_n : \mathbb{D} \rightarrow X$ est dite normale si toute sous-suite de (f_n) admet une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact de \mathbb{D} vers un disque holomorphe $f : \mathbb{D} \rightarrow X$.

Lorsque X est compacte, le théorème d'Ascoli permet de caractériser la normalité d'une suite par l'existence d'une borne pour la norme des dérivées : la suite (f_n) est normale si la suite $(\|df_n\|_g)$ est uniformément bornée sur tout compact du disque unité, $\|\cdot\|_g$ désignant la norme associée à une métrique riemannienne g .

Une autre caractérisation des surfaces hyperboliques est liée à la présence ou non de courbes entières non constantes : une surface de Riemann Σ est hyperbolique si toute application entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \Sigma$ est constante. Une variété complexe vérifiant cette même propriété est dite *hyperbolique au sens de Brody*. Par définition de la pseudo-métrique de Kobayashi-Royden, si Y est une variété complexe et $f : Y \rightarrow X$ une application holomorphe, alors $f^*K_X \leq K_Y$. Comme $K_{\mathbb{C}} = 0$, une variété hyperbolique au sens de Kobayashi est donc hyperbolique au sens de Brody. Inversement, lorsque K_X s'annule en un point, il passe par ce point une suite de disques holomorphes dont la dérivée à l'origine explose. Lorsque X est compacte, le lemme de reparamétrisation de Brody permet d'en déduire l'existence d'une courbe entière non constante :

Lemme de Brody. (voir aussi [6]). Soit X une variété complexe compacte. Si (f_n) est une suite non normale d'applications holomorphes dans X , il existe un point $a \in \mathbb{D}$, une suite (a_n) convergeant vers a et une suite décroissante (r_n) de réels positifs convergeant vers 0 tels que la suite d'applications $z \mapsto f_n(a_n + r_n z)$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} vers une courbe entière non constante $f : \mathbb{C} \rightarrow X$.

En particulier, le lemme de Brody montre que les notions d'hyperbolicité aux sens de Kobayashi et de Brody coïncident pour les variétés compactes :

Théorème 2. Une variété complexe compacte est hyperbolique au sens de Kobayashi si et seulement si elle est hyperbolique au sens de Brody.

Cette équivalence est fautive pour les variétés non compactes : l'hyperbolicité au sens de Brody est plus faible que l'hyperbolicité au sens de Kobayashi.

Soit $D \subset X$ un diviseur d'une variété compacte X dont le complémentaire $Y = X \setminus D$ est hyperbolique au sens de Kobayashi. Etant donnée une métrique g sur X , il n'est pas exclu qu'il existe une suite de points P_n de Y convergeant vers D et une suite de vecteurs $v_n \in T_{P_n}X$ de norme $\|v_n\|_g = 1$ tels que $K_Y(P_n, v_n)$ converge vers 0. En d'autres termes, la pseudo-métrique K_Y peut dégénérer asymptotiquement près de D . Lorsque ce n'est pas le cas, Y est dite hyperboliquement plongée dans X .

Définition 0.1.3. Un ouvert Y d'une variété complexe compacte X est dit *hyperboliquement plongé* dans X si pour toute métrique riemannienne g sur X , il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall P \in Y, \forall v \in T_P X, K_Y(P, v) \geq \varepsilon \|v\|_g.$$

Cela revient à dire que pour tout point P de \bar{Y} et tout voisinage U_P de P dans X , il existe un voisinage V de P tel que $\bar{V} \subset U_P$ et $d_Y(\bar{V} \cap Y, Y \setminus U_P) > 0$. L'espace métrique (Y, d_Y) est alors complet.

Le lemme de Brody permet de caractériser l'hyperbolicité plongée d'un ouvert d'une variété compacte à l'aide de courbes entières :

Proposition 3. Un ouvert Y d'une variété compacte X est hyperboliquement plongé dans X si et seulement s'il n'existe pas de courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ non constante qui soit limite de disques holomorphes dans Y .

Le complémentaire de 5 droites projectives en position générale dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est un exemple classique de domaine hyperboliquement plongé. En revanche, le complémentaire de quatre droites en position générale

n'est même pas hyperbolique, puisqu'il contient des courbes entières non constantes (voir chapitre 2). Le lieu d'annulation de sa pseudo-métrique de Kobayashi-Royden est cependant connu : il s'agit d'une réunion de trois droites, appelées diagonales (voir chapitre 3). Le complémentaire des quatre droites est dit *hyperbolique modulo* les diagonales, et même *hyperboliquement plongé dans* $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ *modulo* les diagonales.

Définition 0.1.4. Une variété complexe X est dite *hyperbolique modulo* un sous-ensemble fermé $\Delta \subset X$ si pour tous points distincts $P, Q \in X$ n'appartenant pas tous les deux à Δ , $d_X(P, Q) > 0$.

Si par ailleurs pour tout couple de tels points P et Q il existe des voisinages U_P et U_Q de P et Q dans X tels que $d_Y(U_P \cap Y, U_Q \cap Y) > 0$, $Y \subset X$ est dite *hyperboliquement plongée dans* X *modulo* Δ .

Soit X une variété complexe compacte et soit $D \subset X$ un diviseur. L'hyperbolicité de $X \setminus D$ dans X interdit l'existence de courbes entières non constantes évitant D . Peut-on quantifier ce phénomène? En d'autres termes, est-il possible de minorer le nombre de points d'intersection de l'image $f(D(0, R))$ du disque de rayon R par une courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ avec D ? c'est l'objet du chapitre 1. Nous abordons là des questions de théorie de distribution des valeurs, dont nous rappelons quelques constructions et quelques résultats dans le paragraphe suivant.

0.2 Fonctions caractéristiques de Nevanlinna

Soit (X, ω) une variété complexe compacte munie d'une 2-forme positive ω et soit $D \subset X$ un diviseur de X . Nous souhaitons mettre en évidence une relation, pour une application holomorphe $f : D(0, R) \rightarrow X$, entre le nombre de points d'intersection du disque holomorphe $f(D(0, R))$ avec D et un terme quantifiant la « croissance » de f .

Ce terme de croissance, noté $T_{f,R}(\omega)$ et appelé caractéristique d'aire de f , est défini comme l'intégrale logarithmique entre 0 et R de l'aire de l'image du disque $D(0, r)$ par f :

$$T_{f,R}(\omega) = \int_0^R \text{Aire}(f(D(0, r))) \frac{dr}{r} \quad \text{où} \quad \text{Aire}(f(D(0, r))) = \int_{D(0, r)} f^* \omega.$$

Plus généralement, l'intégrale logarithmique des courants $[f(D(0, r))]$ d'intégration sur l'image de $D(0, r)$ par f est un courant positif noté $T_{f,R}$:

$$T_{f,R} = \int_0^R [f(D(0, r))] \frac{dr}{r}.$$

Si $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ est une courbe entière, les courants $\left(\frac{T_{f,R}}{T_{f,R}(\omega)}\right)$ sont de masse uniformément bornée, et toute suite $\left(\frac{T_{f,R_n}}{T_{f,R_n}(\omega)}\right)$ admet donc une sous-suite convergeant au sens des courants vers un courant positif T . Pour voir si ce courant T est fermé, il faut nous intéresser à une autre fonction caractéristique $L_{f,R}(\omega)$ mesurant la longueur du bord de l'image par f des disques $D(0, r)$:

$$L_{f,R}(\omega) = \int_0^R \text{Longueur}(f(\partial D(0, r))) \frac{dr}{r}$$

où

$$\text{Longueur}(f(\partial D(0, r))) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\omega_{f(re^{i\theta})}(df(re^{i\theta}), idf(re^{i\theta}))} d\theta.$$

Le théorème de Stokes assure que le courant T est fermé dès que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{f,R_n}(\omega)}{T_{f,R_n}(\omega)} = 0.$$

L'estimée longueur-aire suivante montre que si la suite (R_n) est non bornée et suffisamment générique, cette condition est vérifiée.

Théorème 4. (voir [7], [23], [30]). Soit $\omega_0 = \lambda^2 idz \wedge d\bar{z}$ une 2-forme positive sur \mathbb{C} . Notons pour tout $R > 0$:

$$T_R(\omega_0) = \int_0^R \int_{D(0, r)} \omega_0 \frac{dr}{r} = \int_0^R \int_0^r \int_0^{2\pi} \lambda^2(\rho e^{i\theta}) \rho d\theta d\rho \frac{dr}{r}$$

la caractéristique d'aire de ω_0 , et :

$$L_R(\omega_0) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \lambda(re^{i\theta}) r d\theta \frac{dr}{r}$$

sa caractéristique de longueur. Alors pour tout $R > 0$ et tout $\eta \in]0, R[$:

$$\left(\frac{L_R(\omega_0) - L_\eta(\omega_0)}{T_R(\omega_0)} \right)^2 \leq 2\pi R \log \left(\frac{R}{\eta} \right) \frac{1}{T_R(\omega_0)^2} \frac{dT_R(\omega_0)}{dR}.$$

Nous en déduisons, comme $T_R(\omega_0)$ est non borné, que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{R > 0 \mid \frac{L_R(\omega_0)}{T_R(\omega_0)} \geq \varepsilon\}$ est de mesure de Lebesgue finie.

Comme f est holomorphe, la 2-forme $f^*\omega$ est positive sur \mathbb{C} , et le théorème 4 montre qu'il existe de nombreuses suites croissantes non bornées (R_n) telles que la $\frac{L_{f,R_n}(\omega)}{T_{f,R_n}(\omega)}$ converge vers 0. On dit généralement que $\frac{L_{f,R_n}(\omega)}{T_{f,R_n}(\omega)}$ converge vers 0 « pour presque toute suite » (R_n) tendant vers $+\infty$. Nous signalerons cette convergence à l'aide de la notation consacrée :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{L_{f,R}(\omega)}{T_{f,R}(\omega)} = 0 \quad || \quad \text{ou} \quad L_{f,R}(\omega) = o(T_{f,R}(\omega)) \quad ||.$$

Le procédé ci-dessus permet donc de construire des courants positifs fermés à partir d'une courbe entière.

Remarque. (voir [1], [30]) Il existe une version « non intégrée » du théorème 4, connue sous le nom de lemme d'Ahlfors : si l'on note $A_{f,R} = \text{Aire}(f(D(0, R)))$ et $l_{f,R} = \text{Longueur}(f(\partial D(0, R))) = \int_{\partial D(0, R)} \|df\|$, alors :

$$l_{f,R} = o(A_{f,R}) \quad ||.$$

Pour presque toute suite (R_n) tendant vers $+\infty$, la suite de courants $\left(\frac{[f(D(0, R_n))]}{A_{f,R_n}} \right)$ converge, à extraction d'une sous-suite près, vers un courant positif fermé, appelé courant d'Ahlfors. Le principal inconvénient de ces courants est qu'ils ne vérifient pas nécessairement le théorème 5 ci-dessous.

La dernière fonction caractéristique que nous introduirons quantifie le nombre de points d'intersection, comptés avec multiplicités, de $f(D(0, R))$ avec le diviseur D . Supposons que $f(0) \notin D$, et notons :

$$I_{f,R}(D) = \int_0^R \int_{D(0,r)} f^*[D] \frac{dr}{r}.$$

Etant donnée une suite (R_n) telle que la suite de courants $\left(\frac{T_{f,R_n}(\omega)}{T_{f,R_n}(\omega)} \right)$ converge au sens faible vers un courant T positif fermé, le réel :

$$I(T, D) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{f,R_n}(D)}{T_{f,R_n}(\omega)}$$

s'interprète comme une intersection géométrique asymptotique de la courbe f et du diviseur D . Le théorème suivant, remontant au-moins à M. McQuillan et à M. Brunella sous sa forme la plus générale, affirme que cette intersection géométrique asymptotique est majorée par l'intersection algébrique de T et D :

Théorème 5. (voir [7]) Supposons que $f(0) \notin D$. Alors :

$$[T].[D] \geq I(T, D).$$

Ce théorème affirme en particulier que l'intersection algébrique $[T].[D]$ du courant T et du diviseur D est positive ou nulle, ce qui est particulièrement remarquable lorsque D est d'auto-intersection négative. Lorsque ω est dans la classe fondamentale $\{D\}$ du diviseur D , $[T].[D] = 1$, et le théorème 5 s'interprète alors comme un premier théorème de Nevanlinna. L'objet du premier chapitre est d'obtenir une inégalité inverse lorsque $X \setminus D$ est hyperboliquement plongé dans X . Nous montrerons que l'intersection géométrique asymptotique $I(T, D)$ est alors minorée par un réel strictement positif ε dépendant de ω et de $d_{X \setminus D}$, ce qui évoque un second théorème de Nevanlinna.

Lorsque X est une surface de Riemann, la distribution des valeurs des fonctions entières $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ a d'abord été étudiée par R. Nevanlinna, puis par L. Ahlfors, qui a mis au point une approche géométrique que nous présentons maintenant.

0.3 Théorie de recouvrement des surfaces d'Ahlfors

Ce paragraphe est consacré à une brève introduction à la théorie de recouvrement des surfaces d'Ahlfors. Nous renvoyons à [1] et à [30] pour plus de détails.

La théorie de recouvrement des surfaces, mise au point par L. Ahlfors dans les années 1930, permet de développer une théorie de distribution des valeurs des fonctions holomorphes purement géométrique, voire topologique. Elle présente deux avantages notables par rapport à la théorie classique développée par R. Nevanlinna. D'une part, elle éclaire d'un jour nouveau les deux théorèmes principaux en les reformulant de façon nettement plus géométrique, tout en permettant d'obtenir des résultats inaccessibles par les méthodes usuelles. D'autre part, elle s'étend à une classe de fonctions beaucoup plus vaste que celle des simples fonctions holomorphes, celle des applications quasiconformes.

Pour des raisons de simplicité, nous nous bornerons à exposer les principaux résultats de la théorie d'Ahlfors dans un contexte purement holomorphe, même s'ils s'étendent sans difficulté aux applications quasiconformes (voir par exemple [30]).

0.3.1 Nombre moyen de feuillettes d'un recouvrement

Soit Σ_0 une surface de Riemann compacte à bord, munie d'une métrique riemannienne conforme g_0 . Un recouvrement de Σ_0 est la donnée d'une surface de Riemann Σ compacte, éventuellement à bord, et d'une application lisse $f : \Sigma \rightarrow \Sigma_0$ holomorphe sur l'intérieur de Σ .

Lorsque le bord relatif de $f(\Sigma)$ est vide, c'est-à-dire lorsque $f(\partial\Sigma) \subset \partial\Sigma_0$, et lorsque Σ est connexe, le recouvrement $f : \Sigma \rightarrow \Sigma_0$ est un revêtement ramifié. Le théorème de Riemann-Hurwitz relie alors son degré $\deg(f)$ et sa ramification totale $\text{Ram}(f) = \sum_{z \in \Sigma \setminus \partial\Sigma} (\nu_f(z) - 1)$, où $\nu_f(z)$ désigne l'indice de ramification du point z , avec les caractéristiques d'Euler-Poincaré $\chi(\Sigma)$ et $\chi(\Sigma_0)$ des surfaces Σ et Σ_0 :

Théorème 6. [*Riemann-Hurwitz*]

$$\chi(\Sigma) = \deg(f)\chi(\Sigma_0) - \text{Ram}(f).$$

Cette relation perd tout son sens lorsque le bord relatif de $f(\Sigma)$ n'est pas vide, puisque le recouvrement $f : \Sigma \rightarrow \Sigma_0$ n'est plus nécessairement un revêtement. Il est cependant possible de définir un nombre moyen de feuillettes au-dessus de Σ_0 , jouant le rôle du degré topologique. Notons

$$\text{Aire}(\Omega) = \int_{\Omega} \omega_0$$

l'aire d'un compact $\Omega \subset \Sigma$ pour la 2-forme ω_0 associée à la métrique g_0 , et :

$$\text{Aire}(f(\Omega')) = \int_{\Omega'} f^* \omega_0$$

l'aire de l'image d'un compact $\Omega' \subset \Sigma$ calculée en prenant en compte les multiplicités. Le nombre moyen de feuillettes $F(\Omega)$ au-dessus d'un compact $\Omega \subset \Sigma_0$ est défini par :

$$F(\Omega) = \frac{\text{Aire}(f^{-1}(\Omega))}{\text{Aire}(\Omega)}.$$

Si pour un entier $k \in \mathbb{N}$, Ω_k désigne l'ensemble des points de Ω ayant k antécédents par f (en prenant en compte les multiplicités), on vérifie que :

$$F(\Omega) = \frac{\sum_{k \in \mathbb{N}} k \text{Aire}(\Omega_k)}{\text{Aire}(\Omega)}.$$

Exemple. Munissons $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de la métrique sphérique g_1 normalisée d'aire totale 1 dont la forme volume est la forme de Fubini-Study ω_1 . Considérons une application entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. La limite lorsque R tend vers l'infini du nombre moyen de feuillettes du recouvrement $f : D(0, R) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est égale au degré de f si f est une fraction rationnelle, et à $+\infty$ si f est transcendante.

Le premier résultat concernant le nombre moyen de feuillettes est le lemme de recouvrement d'Ahlfors :

Lemme de recouvrement. *Il existe une constante $h > 0$ telle que pour tout recouvrement $f : \Sigma \rightarrow \Sigma_0$ et tout domaine Ω compact à bord lisse dans Σ_0 :*

$$|F(\Omega) - F(\Sigma_0)| \leq \frac{h}{\text{Aire}(\Omega)} L$$

où $L = \text{Longueur}(f(\partial\Sigma) \setminus \partial\Sigma_0)$ désigne la longueur du bord relatif de $f(\partial\Sigma)$.

En pratique, ce résultat est utilisé pour des recouvrements tels que le terme de bord L soit petit devant $F(\Sigma_0)$. Il affirme alors que le nombre moyen de feuillettes au-dessus d'un compact Ω ne dépend pas de Ω .

Le résultat central de la théorie de recouvrement des surfaces est l'inégalité d'Ahlfors (voir aussi [15] pour une démonstration élémentaire). Elle s'apparente à un théorème de Riemann-Hurwitz à bord, dans lequel le nombre moyen de feuillettes se substitue au degré topologique.

Pour toute surface de Riemann Σ , notons $\chi^-(\Sigma) = \min(0, \chi(\Sigma))$ si Σ est connexe, et $\chi^-(\Sigma) = \sum_j \chi^-(\Sigma_j)$ si Σ est une réunion finie de surfaces de Riemann connexes Σ_j .

Théorème 7. (Inégalité d'Ahlfors) *Il existe une constante $h > 0$ dépendant de (Σ_0, g_0) telle que pour tout recouvrement $f : \Sigma \rightarrow \Sigma_0$:*

$$\chi^-(\Sigma) \leq F(\Sigma_0)\chi(\Sigma_0) + hL.$$

Cette inégalité n'a d'intérêt que si $\chi(\Sigma_0)$ est strictement négative, donc en particulier lorsque Σ_0 est hyperbolique.

Les implications de ces deux résultats en termes de théorie de distribution des valeurs sont liées aux notions d'îles et de péninsules, que nous abordons maintenant.

0.3.2 Îles et péninsules

Les composantes connexes de la pré-image $f^{-1}(\Omega)$ d'un compact à bord lisse Ω peuvent être classées en deux catégories : les îles et les péninsules.

1. Une île δ au-dessus de Ω est une composante connexe de $f^{-1}(\Omega)$ n'intersectant pas le bord $\partial\Sigma$ de Σ . Le bord relatif de $f(\delta)$ dans Ω est alors vide, et la restriction $f|_\delta : \delta \rightarrow \Omega$ de f à δ est un revêtement ramifié au-dessus de Ω . Le degré de l'île δ est alors défini comme le degré de ce revêtement.
2. Une péninsule ρ au-dessus de Ω est une composante connexe de $f^{-1}(\Omega)$ intersectant $\partial\Sigma$. Il est possible que $\Sigma \setminus \rho$ possède une composante connexe de plus que Σ .

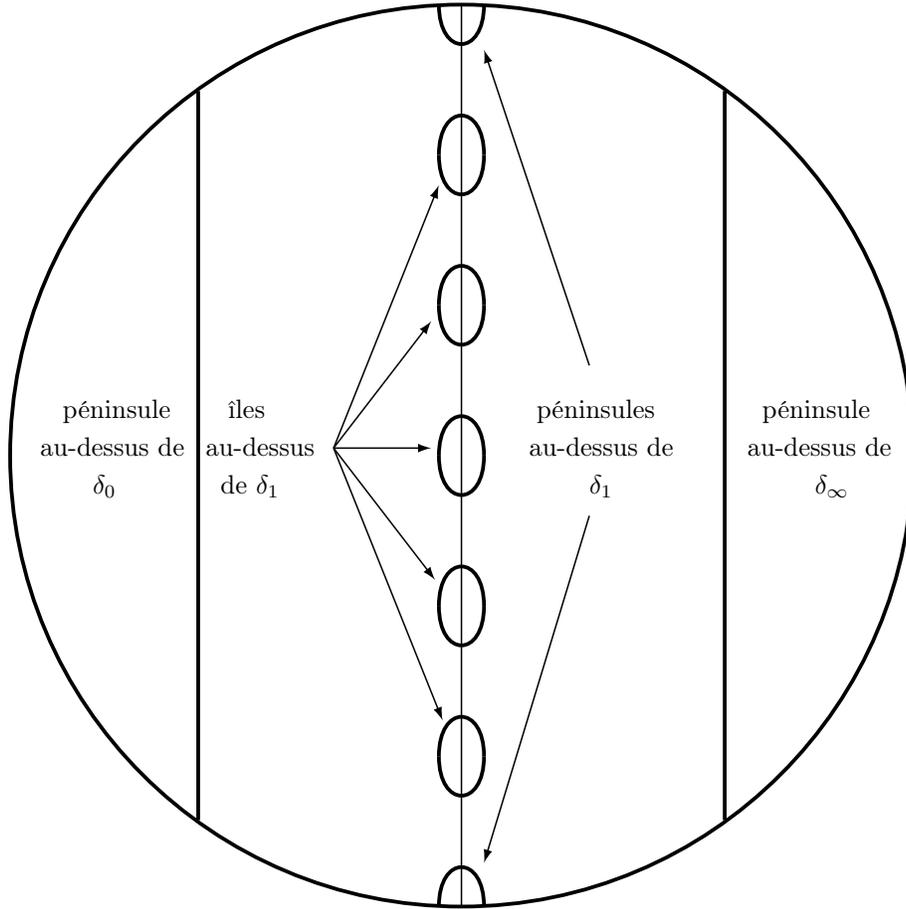
Exemple. *Examinons le cas $\Sigma_0 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Notons δ_0, δ_1 et δ_∞ trois disques disjoints de rayon $\varepsilon > 0$ pour la métrique sphérique g_1 , centrés respectivement en les points $0, 1$ et ∞ . Fixons un rayon $R \gg 1$, notons $\Sigma = \overline{D}(0, R)$ le disque fermé de rayon R (pour la norme euclidienne de \mathbb{C}) et $f(z) = e^z$, pour $z \in \Sigma$.*

Comme f évite les points 0 et ∞ , il ne peut y avoir d'îles au-dessus de δ_0 et δ_∞ . Plus précisément, les pré-images des disques δ_0 et δ_∞ sont constituées de péninsules ρ_0 et ρ_∞ , données par $\rho_0 = D(0, R) \cap \{\Re(z) \leq -R_\varepsilon\}$ et $\rho_\infty = D(0, R) \cap \{\Re(z) \geq R_\varepsilon\}$, le réel $R_\varepsilon > 0$ dépendant du rayon ε des disques.

Par contre, la pré-image de δ_1 est constituée d'une réunion d'îles images les unes des autres par des translations verticales de vecteur $(0, 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, et éventuellement de deux péninsules si $\exp^{-1}(\delta_1)$ intersecte le bord du disque $D(0, R)$.

Figure 0.1

Iles et péninsules au-dessus de δ_0 , δ_∞ et δ_1 pour la fonction exponentielle



Le nombre moyen de feuilletés au-dessus d'un domaine Ω se décompose en une somme de deux termes : la contribution $n(\Omega)$ des îles au-dessus de Ω , qui est un entier positif indépendant de la métrique g_0 , et celle des péninsules, notée $m(\Omega)$: $F(\Omega) = n(\Omega) + m(\Omega)$. Le lemme de recouvrement s'écrit alors :

$$n(\Omega) + m(\Omega) = F(\Omega) + l(\Omega) \quad (1)$$

où $l(\Omega)$ est une fonction vérifiant : $|l(\Omega)| \leq \frac{h}{\text{Aire}(\Omega)}L$, h étant une constante positive ne dépendant que de (Σ_0, g_0) . Cette relation s'apparente à un premier théorème principal, dans lequel $n(\Omega)$ joue le rôle du cardinal de la fibre au-dessus d'un point et $m(\Omega)$ celui du terme de proximité, le terme de longueur ayant vocation à devenir négligeable.

Avant de pousser l'analogie plus loin vers un second théorème principal, restreignons-nous à l'étude des fonctions holomorphes définies sur un domaine de \mathbb{C} , à valeurs dans la sphère de Riemann. Bien que la théorie d'Ahlfors permette une étude plus générale, nous n'en aurons pas usage.

Munissons comme plus haut $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de la métrique sphérique g_1 de forme volume la forme de Fubini-Study ω_1 , d'aire 1. Considérons trois disques ouverts d'adhérences deux à deux disjointes δ_1 , δ_2 et δ_3 et notons $\Sigma_0 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus (\delta_1 \cup \delta_2 \cup \delta_3)$ leur complémentaire, de caractéristique d'Euler-Poincaré -1 . Soit $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ un recouvrement de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par un domaine Σ de \mathbb{C} . Notons $i(\delta_j)$ le nombre d'îles au-dessus

de δ_j dans Σ .

Comme $\chi^-(f^{-1}(\Sigma_0)) \geq \chi^-(\Sigma) - i(\delta_1) - i(\delta_2) - i(\delta_3)$, L'inégalité d'Ahlfors et le lemme de recouvrement permettent d'obtenir l'inégalité :

$$F(\Sigma) = \text{Aire}(f(\Sigma)) \leq i(\delta_1) + i(\delta_2) + i(\delta_3) - \chi^-(\Sigma) + hL. \quad (2)$$

Intéressons-nous au cas d'une application entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Notons $i_r(\delta_j)$ le nombre d'îles au-dessus de δ_j dans le disque $D(0, r)$. D'après l'inégalité (2) :

$$\text{Aire}(f(D(0, r))) \leq i_r(\delta_1) + i_r(\delta_2) + i_r(\delta_3) + hL_r \quad (3)$$

où L_r est la longueur du bord relatif de $f(D(0, r))$ dans Σ_0 . Cette inégalité s'apparente à un second théorème principal de Nevanlinna. Il est possible de la préciser de manière à faire apparaître cette analogie de façon plus frappante, mais nous n'en aurons pas usage ici.

Supposons que f évite deux points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, par exemple un point de δ_2 et un point de δ_3 . Il ne peut y avoir d'îles au-dessus des disques δ_2 et δ_3 . Notons alors $i_{1,r}(\delta_1)$ le nombre d'îles de degré 1 au-dessus de δ_1 . L'inégalité (3) peut être améliorée de manière à obtenir :

$$\text{Aire}(f(D(0, r))) \leq i_{1,r}(\delta_1) + hL_r. \quad (4)$$

A l'aide de l'inégalité (1), on montre que :

$$|\text{Aire}(f(D(0, R))) - i_{1,R}(\delta_1)| \leq hL_r. \quad (5)$$

Ainsi, une application entière évitant deux points se comporte asymptotiquement comme un quasi-revêtement.

Les inégalités (2), (3) et (4) seront utilisées aux chapitres 2 et 3, non pas sous leur forme brute mais intégrées par rapport à $\frac{dr}{r}$. Par exemple, comme le terme de longueur $\int_0^R L_r \frac{dr}{r}$ est majoré par $L_{f,R}(\omega_1)$, l'inégalité (4) donnera :

$$T_{f,R}(\omega_1) \leq \int_1^R i_{1,r}(\delta_1) \frac{dr}{r} + o(T_{f,R}(\omega_1)) \quad ||. \quad (6)$$

Les résultats présentés restent valables pour une application f non plus holomorphe, mais seulement quasiconforme. C'est dans ce contexte qu'ils seront exploités.

Chapitre 1

Inégalité d'Ahlfors en dimension supérieure

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous cherchons à établir des conséquences quantitatives, quant aux courbes holomorphes, de l'hyperbolicité au sens de Kobayashi d'une variété complexe. Ces conséquences prendront la forme d'une inégalité isopérimétrique affine évoquant l'inégalité d'Ahlfors. Nous ne pouvons espérer reproduire à l'identique la théorie de recouvrement des surfaces : hors du contexte équidimensionnel, les notions de nombre moyen de feuilletés et de bord relatif n'ont plus de sens. Nous chercherons simplement à établir une inégalité du type :

$$\text{Aire}(f(\Sigma)) \leq -C\chi^-(\Sigma) + C' \text{Longueur}(f(\partial\Sigma)) \quad (1.1)$$

pour une application holomorphe $f : \Sigma \rightarrow X$ d'une surface de Riemann compacte à bord à valeurs dans une variété hyperbolique compacte X munie d'une 2-forme positive non dégénérée ω .

Lorsque la surface Σ est compacte sans bord, l'inégalité (1.1) est une conséquence directe de l'hyperbolicité au sens de Kobayashi, comme nous le verrons par la suite (voir aussi [13]). A l'inverse, lorsque la surface Σ est un disque, l'inégalité (1.1) est simplement une inégalité isopérimétrique linéaire. Elle a été démontrée de façon indépendante par J. Duval (voir [17]) et B. Kleiner (voir [22]) :

Théorème 8. *Les disques holomorphes d'une variété complexe compacte X hyperbolique au sens de Kobayashi vérifient une inégalité isopérimétrique linéaire pour toute métrique hermitienne.*

Remarquons que ce résultat s'applique également à la pseudo-métrique de Kobayashi elle-même. Il évoque le théorème 12, et peut s'interpréter comme une notion de courbure négative pour la pseudo-métrique de Kobayashi-Royden. La démonstration de J. Duval repose sur des méthodes combinatoires et permet par ailleurs d'obtenir un résultat plus général sur les courants d'Ahlfors. La démonstration de B. Kleiner est purement riemannienne, et nous allons l'adapter à une surface quelconque pour démontrer le théorème suivant :

Théorème 9. *Soit X une variété complexe compacte munie d'une 2-forme positive fermée non dégénérée ω . Soit Y un domaine hyperboliquement plongé dans X . Il existe alors deux constantes positives C et C' dépendant de ω telles que pour toute surface de Riemann Σ compacte à bord et toute application holomorphe $f : \Sigma \rightarrow Y \subset X$:*

$$\text{Aire}(f(\Sigma)) \leq -C\chi^-(\Sigma) + C' \text{Longueur}(f(\partial\Sigma)).$$

Lorsque X est munie d'une métrique hermitienne de courbure sectionnelle strictement négative, le théorème 9 se déduit d'une inégalité isopérimétrique affine valable pour la métrique de Poincaré d'une surface de Riemann hyperbolique. Dans le cas général, un argument supplémentaire, dû à B. Kleiner, s'avère nécessaire. La démonstration reste cependant purement riemannienne, et repose sur la méthode dite des « courbes parallèles », utilisée par G. Bol et F. Fiala (voir [19]) pour démontrer une inégalité isopérimétrique classique en courbure majorée (voir théorème 11, voir aussi l'article de M.P. Muller dans [3]).

Le théorème 9 présente un intérêt particulier pour les courbes entières. Si X est une variété complexe compacte munie d'une 2-forme ω et D un diviseur de X dont le complémentaire $X \setminus D$ est hyperboliquement plongé dans X , alors pour toute courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow X$, on a :

$$\forall R > 0, \text{Aire}(f(D(0, R))) \leq C.n_{1,f,R}(D) + C' \text{Longueur}(f(\partial D(0, R)))$$

où $n_{1,f,R}(D)$ désigne le cardinal de l'ensemble $f^{-1}(D) \cap D(0, r)$, c'est-à-dire le nombre de points d'intersection de $f(D(0, R))$ avec D , sans compter les multiplicités. Cette inégalité précise la nécessité, pour une courbe entière à valeurs dans X , de rencontrer un diviseur dont le complémentaire est hyperboliquement plongé dans X . Elle évoque un second théorème principal, mais la constante C reste difficile à déterminer, puisqu'elle dépend de la métrique de Kobayashi-Royden de $X \setminus D$ d'une façon explicitée plus bas (voir le théorème 13). Elle a cependant l'avantage d'être assez générale, et aisément généralisable à l'univers presque complexe.

1.2 Démonstration du théorème

Fixons une variété complexe compacte X munie d'une 2-forme positive ω . Associons à la 2-forme ω la métrique hermitienne g_0 définie sur X par la relation :

$$g_0(u, v) = \frac{\omega(u, iv) + \omega(v, iu)}{2} \quad \forall p \in X, \forall u, v \in T_p X.$$

Considérons alors un ouvert $Y \subset X$ hyperboliquement plongé dans X . Fixons une surface de Riemann (Σ, j) , ainsi qu'une application holomorphe $f : \Sigma \rightarrow Y$. Comme Y ne contient pas de courbe entière non constante, la surface $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ est nécessairement hyperbolique. Munissons-la de sa métrique de Poincaré g_Σ de courbure -1 .

La pseudo-métrique riemannienne $g = f^*g_0$ ne s'annule que sur l'ensemble $R_f = \{z \in \Sigma \mid df_z = 0\}$, et sa forme d'aire est $dA = f^*\omega$. Elle est conforme à la métrique g_Σ , puisque f est holomorphe : il existe une fonction positive lisse Φ telle que $g = \Phi^2 g_\Sigma$.

Il s'agit de montrer que pour tout compact Ω à bord lisse de Σ :

$$\text{Aire}(\Omega) \leq -C\chi^-(\Omega) + C' \text{Longueur}(\partial\Omega)$$

les aires et longueurs étant calculées pour la pseudo-métrique g . L'inégalité d'Ahlfors devient alors un énoncé riemannien. Nous allons maintenant voir comment traduire l'holomorphie de f et l'hyperbolicité de Y en des termes purement riemanniens. En l'absence de précisions, un compact Ω sera toujours supposé à bord lisse.

1.2.1 Réduction à un problème riemannien

La pseudo-métrique g possède deux propriétés élémentaires : la première concerne la courbure, et provient du caractère holomorphe de f , et la seconde est liée à l'hyperbolicité de X .

La courbure de Gauss k de la pseudo-métrique g est définie partout sauf sur l'ensemble $R_f = \{z \in \Sigma \mid df_z = 0\}$. Elle est uniformément majorée là où elle est définie :

Propriété 1. *Il existe une constante K ne dépendant que de g_0 telle que pour tout $z \in \Sigma \setminus R_f$, $k(z) \leq K$.*

En effet, tout $z \in \Sigma \setminus R_f$ est contenu dans un ouvert U_z dont l'image $f(U_z)$ est une sous-variété holomorphe de dimension 1 de X . Or, la courbure moyenne, pour la métrique g_0 , d'une sous-variété

holomorphe de X est majorée par $\|\nabla J\|_{g_0}$, (∇ désignant la connexion de Levi-Civita de g_0 et J l'endomorphisme du fibré tangent de X donné par la multiplication par i). Le théorème de Gauss reliant la courbure sectionnelle de $f(U_z)$ et la courbure sectionnelle ambiante permet d'obtenir la majoration voulue. Nous renvoyons à l'ouvrage de Audin-Lafontaine [3] pour les détails.

Remarque. Si (X, g_0, ω) est kählérienne, les courbes holomorphes sont des surfaces minimales de (X, g_0) , et leur courbure de Gauss est alors majorée par la courbure sectionnelle holomorphe ambiante k_0 . Il suffit alors de prendre pour K le maximum de la courbure sectionnelle holomorphe sur les plans complexes de TX .

La seconde propriété est une conséquence de l'hyperbolicité de Y :

Propriété 2. *Il existe une constante $M > 0$ telle que $0 \leq \Phi \leq M$.*

Démonstration. Par définition de l'hyperbolicité plongée au sens de Kobayashi, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $K_Y \geq \varepsilon \|\cdot\|_{g_0}$. L'holomorphie de f implique aussi que $f^*K_Y \leq K_\Sigma$. Comme $K_\Sigma = \frac{1}{2} \|\cdot\|_{g_\Sigma}$, la constante $M = 1/(2\varepsilon)$ convient. \square

Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction, cette propriété suffit à obtenir l'inégalité d'Ahlfors en l'absence de bord pour Σ (voir [13]). En effet, la métrique de Poincaré étant de courbure -1 , le théorème de Gauss-Bonnet assure que l'aire de Σ pour g_Σ vaut $-2\pi\chi(\Sigma)$, donc :

$$\text{Aire}(\Sigma) \leq -2\pi M^2 \chi(\Sigma).$$

Nous pouvons nous débarrasser des singularités de la pseudo-métrique g en l'approchant par une famille de métriques $g_\varepsilon = (\Phi + \varepsilon)^2 g_\Sigma$. Cette famille de métriques converge vers g uniformément sur tout compact de $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ quand ε tend vers 0, et le terme $\Phi + \varepsilon$ est majoré par $M + \varepsilon$. De plus la limite supérieure quand ε tend vers 0 de la courbure de Gauss k_ε de g_ε est majorée par K . L'inégalité d'Ahlfors se réduit alors à un problème purement riemannien, et se déduit du théorème suivant :

Théorème 10. *Soit g une métrique riemannienne sur Σ de courbure de Gauss k majorée par un réel K . Supposons que sur $\Sigma \setminus \partial\Sigma$, g s'écrive $g = \Phi^2 g_\Sigma$, où Φ est une fonction positive lisse majorée par un réel M . Alors il existe des constantes C et C' , dépendant de K et M , telles que pour tout domaine compact Ω :*

$$\text{Aire}(\Omega) \leq -C\chi^-(\Omega) + C' \text{Longueur}(\partial\Omega)$$

où $\text{Aire}(\Omega)$ et $\text{Longueur}(\partial\Omega)$ désignent respectivement l'aire de Ω et la longueur de $\partial\Omega$ pour la métrique g .

La démonstration de ce théorème fait l'objet des deux paragraphes suivants.

1.2.2 La méthode des courbes parallèles

Ce paragraphe est consacré à la méthode des courbes parallèles, introduite par F. Fiala pour démontrer une inégalité isopérimétrique en courbure majorée. Donnons-nous une métrique riemannienne g de courbure de Gauss k majorée par une constante K . Notons d la distance associée à la métrique g , et $B(p, \varepsilon)$ la boule de centre p et de rayon ε pour cette distance. Nous noterons respectivement $\text{Aire}(\Omega)$ et $\text{Longueur}(\partial\Omega)$ l'aire et la longueur du bord d'un compact Ω pour la métrique g . Commençons par rappeler deux inégalités isopérimétriques obtenues à l'aide de cette méthode.

Inégalités isopérimétriques en courbure majorée

Le théorème de Bol-Fiala, d'abord démontré pour des métriques analytiques réelles, puis pour des métriques lisses, est une inégalité isopérimétrique quadratique en courbure majorée :

Théorème 11. *(voir [8], [19], et l'article de M.P. Muller dans [3]). Soit Ω un disque topologique de Σ . L'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\text{Longueur}(\partial\Omega)^2 \geq 4\pi \text{Aire}(\Omega) - K \text{Aire}(\Omega)^2.$$

En courbure majorée, les disques de petite aire vérifient donc une inégalité isopérimétrique quadratique, donc en particulier linéaire. Si la courbure est majorée par une constante négative, une inégalité isopérimétrique affine est vérifiée pour tous les domaines sans restriction d'aire ni de caractéristique :

Théorème 12. (voir [8]). Supposons que $K \leq -1$. Pour tout domaine Ω compact, on a :

$$\text{Aire}(\Omega) \leq -2\pi\chi^-(\Omega) + \text{Longueur}(\partial\Omega).$$

En guise d'illustration, voyons comment cette inégalité isopérimétrique permet d'obtenir une inégalité du type « second théorème principal de Nevanlinna » pour les courbes entières à valeurs dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Notons $\Sigma_0 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ la sphère de Riemann épointée en trois points. Munissons-la de sa métrique de Poincaré g_{Σ_0} de courbure -1 , de forme d'aire ω_{Σ_0} . Si Σ est une surface de Riemann compacte à bord et $f : \Sigma \rightarrow \Sigma_0$ est une application holomorphe, alors la courbure de la pseudo-métrique $f^*g_{\Sigma_0}$ est majorée par -1 lorsqu'elle est définie (voir la remarque suivant la proposition 1). Ainsi, d'après le théorème 12, nous avons :

$$\frac{\text{Aire}_{g_{\Sigma_0}}(f(\Sigma))}{2\pi} \leq -\chi^-(\Sigma) + \frac{1}{2\pi} \text{Longueur}_{g_{\Sigma_0}}(f(\partial\Sigma))$$

où $\text{Aire}_{g_{\Sigma_0}}(f(\Sigma))$ et $\text{Longueur}_{g_{\Sigma_0}}(f(\partial\Sigma))$ désignent l'aire et la longueur du bord de $f(\Sigma)$ pour la métrique g_{Σ_0} . Rappelons que la 2-forme ω_{Σ_0} est équivalente au voisinage d'un point $a \in \{0, 1, \infty\}$ à une 2-forme du type :

$$\frac{C_a dz \wedge d\bar{z}}{(d_1(z, a) \log(d_1(z, a)))^2}$$

où C_a est une constante positive et d_1 désigne la distance sphérique sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. La surface Σ_0 est donc d'aire finie pour la 2-forme $\frac{\omega_{\Sigma_0}}{2\pi}$, et cette aire vaut 1 en vertu du théorème de Gauss-Bonnet. Les formes $\frac{\omega_{\Sigma_0}}{2\pi}$ et ω_1 sont donc cohomologues : il existe une 1-forme α , singulière en 0, 1 et ∞ telle que :

$$\omega_1 = \frac{\omega_{\Sigma_0}}{2\pi} + d\alpha.$$

Par ailleurs, un examen plus précis des singularités de la forme α montre qu'il existe une constante $h > 0$ telle que $|\alpha| \leq h\sqrt{\omega_{\Sigma_0}(\cdot, \cdot)}$, et donc que :

$$\text{Aire}(f(\Sigma)) \leq \text{Aire}_{g_{\Sigma_0}}(f(\Sigma)) + h \text{Longueur}_{g_{\Sigma_0}}(f(\partial\Sigma))$$

où $\text{Aire}(f(\Sigma))$ est calculée pour la métrique sphérique g_1 .

Soit maintenant $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ une courbe entière non constante à valeurs dans la sphère de Riemann. Comme $f^{-1}(\{0, 1, \infty\})$ est un ensemble discret, on a :

$$\frac{\text{Aire}_{g_{\Sigma_0}}(f(D(0, R)))}{2\pi} \leq n_{1,f,R}(0) + n_{1,f,R}(1) + n_{1,f,R}(\infty) + \text{Longueur}_{g_{\Sigma_0}}(\partial D(0, R)) \quad (1.2)$$

où $n_{1,f,R}(a) = \#(f^{-1}(a) \cap D(0, R))$ pour $a = 0, 1, \infty$. D'après le lemme d'Ahlfors (voir la remarque suivant le théorème 4), le terme de longueur est négligeable devant le terme d'aire, au sens où :

$$\text{Longueur}_{g_{\Sigma_0}}(\partial D(0, R)) = o(\text{Aire}_{g_{\Sigma_0}}(D(0, R))) \quad ||$$

donc les aires $\text{Aire}(f(D(0, R)))$ et $\text{Aire}_{g_{\Sigma_0}}(f(D(0, R)))$ sont proches :

$$\frac{\text{Aire}(D(0, R))}{\text{Aire}_{g_{\Sigma_0}}(D(0, R))} = 1 + o(1) \quad ||.$$

L'inégalité (1.2) entraîne alors l'inégalité voulue :

$$\text{Aire}(f(D(0, R))) \leq n_{1,f,R}(0) + n_{1,f,R}(1) + n_{1,f,R}(\infty) + o(\text{Aire}(f(D(0, R)))) \quad ||.$$

Ce second théorème principal est plus faible que le théorème original d'Ahlfors, puisqu'il prend en compte le nombre de préimages de trois points et non pas le nombre d'îles au-dessus de trois disques. Remarquons cependant qu'il ne fait pas intervenir de constante indésirable devant les termes $n_{1,f,R}(0)$, $n_{1,f,R}(1)$ et $n_{1,f,R}(\infty)$.

Courbes parallèles et coordonnées normales

Fixons un compact Ω de $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ à bord orienté par sa normale entrante. Pour tout point $p \in \partial\Omega$ nous noterons respectivement N_p et T_p le vecteur unitaire normal et le vecteur unitaire tangent et la courbure géodésique au point p . Pour tout $t > 0$, posons :

$$\Omega(t) = \{p \in \Omega \mid d(p, \partial\Omega) \geq t\}.$$

Les bords $\partial\Omega(t)$ de ces domaines sont appelés « courbes parallèles au bord de $\partial\Omega$ ». Notons R_Ω le plus petit de tous les réels t tels que $\Omega(t)$ soit d'aire nulle, appelé rayon de Ω . Il s'agit de rechercher des relations entre les fonctions $a(t) = \text{Aire}(\Omega(t))$ et $l(t) = \text{Longueur}(\partial\Omega(t))$. Cela est rendu particulièrement aisé, lorsque t est petit, par l'utilisation des coordonnées normales. Rappelons de quoi il s'agit. Nous renvoyons à [11] pour les détails.

Notons $\exp_p(t, v)$ l'application exponentielle de (Σ, g) , qui à un point $p \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$ et à un vecteur $v \in T_p\Sigma$ associe le point obtenu en translatant p sur une distance t le long de la géodésique passant par p tangentiellement à v . Pour tout point $p \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$ et tout vecteur $v \in T_p\Sigma$, $\exp_p(t, v)$ est définie si t est suffisamment petit.

Etant donné un réel $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\bigcup_{p \in \partial\Omega} B(p, \varepsilon)$ soit contenu dans $\Sigma \setminus \partial\Sigma$, nous appelons exponentielle normale à la courbe $\partial\Omega$ l'application :

$$\nu : \begin{cases}]\varepsilon, \varepsilon[\times \partial\Omega \rightarrow \Sigma \\ (t, p) \mapsto \exp_p(t, N_p) \end{cases}$$

Cette application est lisse et ses dérivées valent :

$$\frac{\partial \nu}{\partial t}(0, p) = N_p, \quad \frac{\partial \nu}{\partial p}(0, p) = T_p.$$

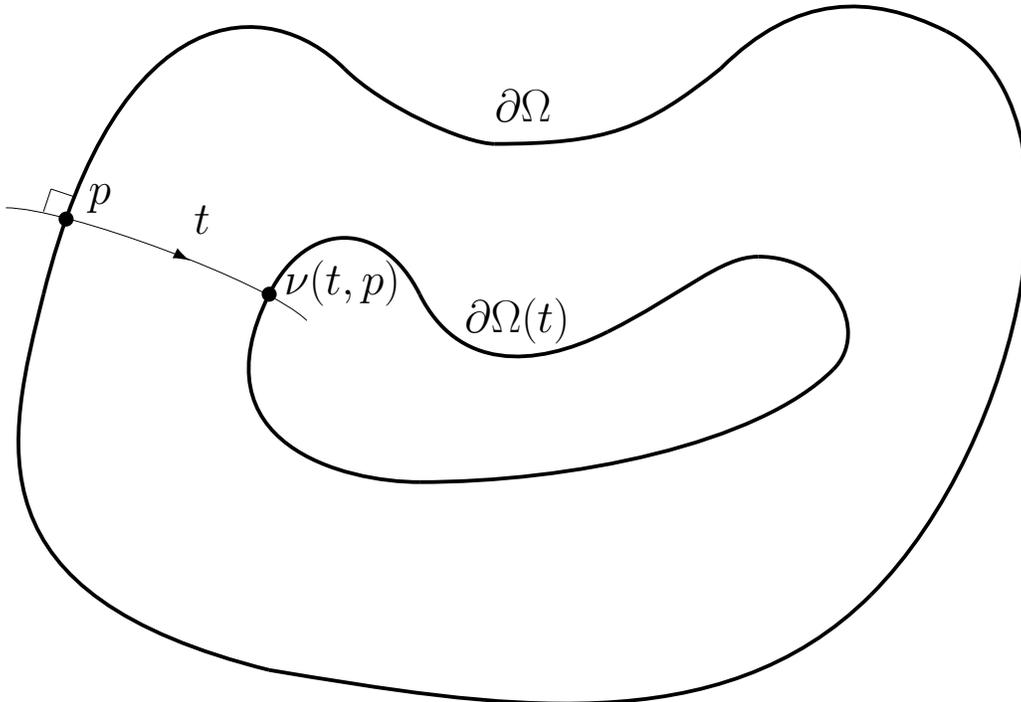
L'exponentielle normale à la courbe est donc un difféomorphisme local, et il existe un réel $t_0 > 0$, appelé rayon d'injectivité normal de la courbe $\partial\Omega$, tel que la restriction ν à $] -t_0, t_0[\times \partial\Omega$ soit un difféomorphisme sur son image, définissant alors près de $\partial\Omega$ le système de coordonnées normales (ou « de Fermi »).

Pour $t < t_0$, les courbes parallèles s'expriment à l'aide de ν :

$$\forall 0 < t < t_0, \quad \partial\Omega(t) = \nu(t, \partial\Omega).$$

En particulier, pour $t < t_0$, les courbes parallèles $\partial\Omega(t)$ sont lisses.

Figure 1.1



Pour $t < t_0$, les fonctions a et l sont dérivables. Par ailleurs, les coordonnées normales permettent de calculer leurs dérivées :

$$\forall 0 < t < t_0, \quad a'(t) = -l(t) \quad \text{et} \quad l'(t) = - \int_{\partial\Omega(t)} c \, ds$$

où c désigne la courbure géodésique de $\partial\Omega(t)$ conformément à l'orientation choisie, et s son abscisse curviligne.

Le théorème de Gauss-Bonnet, qui s'écrit pour le domaine $\Omega(t)$:

$$\int_{\Omega(t)} k \, dA + \int_{\partial\Omega(t)} c \, ds = 2\pi\chi(\Omega(t))$$

implique alors :

$$Ka(t) + a''(t) \geq 2\pi\chi(\Omega(t)).$$

Par ailleurs, pour $t < t_0$, les composantes connexes du domaine $\Omega(t_0) \setminus \Omega(t)$ sont topologiquement des anneaux, de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle, donc $\chi(\Omega(t)) = \chi(\Omega)$, et l'inégalité précédente devient :

$$Ka(t) + a''(t) \geq 2\pi\chi(\Omega). \quad (1.3)$$

Cette inéquation différentielle n'est a priori valable que pour $t < t_0$. Pour en déduire une inégalité isopérimétrique, nous aurons cependant besoin de la prolonger à jusqu'au temps R_Ω . Nous allons donc nous intéresser aux domaines $\Omega(t)$ pour $t > t_0$.

Domaines $\Omega(t)$ pour $t > t_0$

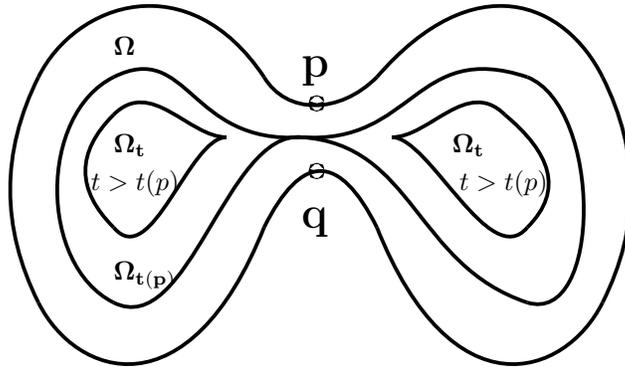
Lorsque t dépasse t_0 , les courbes $\nu(t, \partial\Omega)$ présentent des singularités, et ne coïncident plus nécessairement avec les courbes parallèles $\partial\Omega(t)$. Pour tout point $p \in \partial\Omega$, nous noterons :

$$t(p) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \forall \tau \in [0, t], \, d(\nu(\tau, p), \partial\Omega) = \tau\}$$

le *temps de rupture* du point p . La courbe $\nu(t(p), \partial\Omega)$ peut présenter deux types de singularités au point $\nu(t(p), p)$ (voir [2] et l'article de M.P. Muller dans [3]) :

1. Un point double, dû à la non injectivité de l'application $\nu(t(p), \cdot) : \partial\Omega \rightarrow \Sigma$. Il existe alors un point $q \in \partial\Omega$ distinct de p tel que $\nu(t(p), p) = \nu(t(p), q)$. Pour $t > t(p)$, la courbe $\partial\Omega(t)$ possède un point angulaire, et les domaines $\Omega(t)$ et $\Omega(u)$ (pour $u < t(p)$) n'ont pas la même topologie.

Figure 1.2

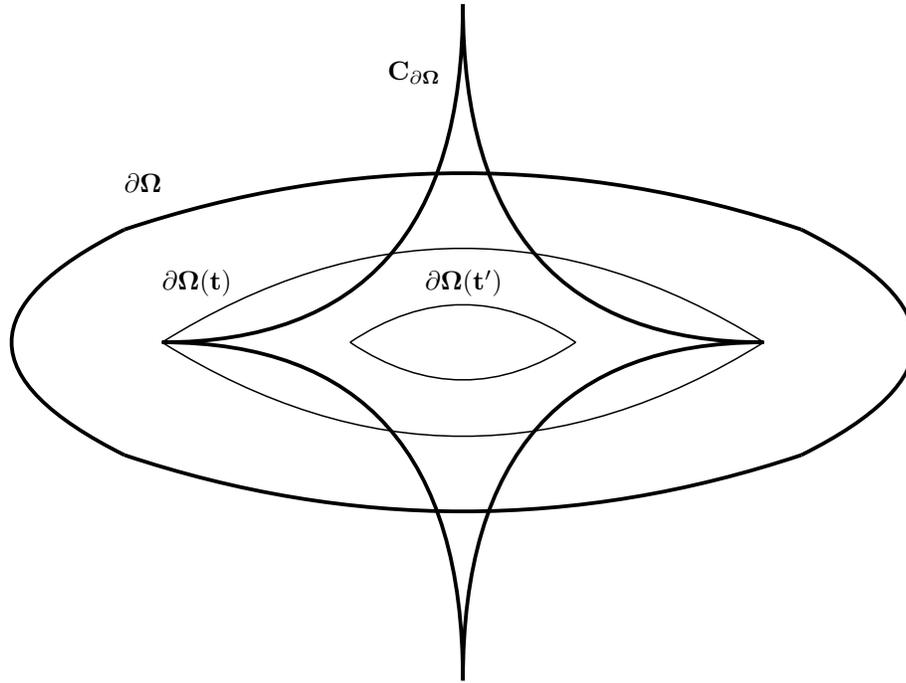


2. Un point de rebroussement, dû à l'annulation de $\frac{\partial\nu(t,p)}{\partial p}$. Précisons ceci. La courbe définie par :

$$C_{\partial\Omega} = \left\{ \nu(t, p) \mid t > 0, \, \frac{\partial\nu(t, p)}{\partial p} = 0 \right\}$$

est appelée courbe caustique de $\partial\Omega$. Lorsque (Σ, g) désigne le plan euclidien, il s'agit du lieu des centres de courbure de la courbe $\partial\Omega$, c'est à dire sa développée. La figure suivante représente les courbes $\nu(t, \partial\Omega)$ lorsque $\partial\Omega$ est une ellipse. Sa développée est alors une astroïde.

Figure 1.3



Les points de rebroussement de $\nu(t, \partial\Omega)$ sont alors les points de l'intersection $\nu(t, \partial\Omega) \cap C_{\partial\Omega}$.

Notons pour tout $p \in \partial\Omega$:

$$t_f(p) = \inf\{t > 0 \mid \nu(t, p) \in C_{\partial\Omega}\}.$$

Lorsque $t_f(p) < +\infty$, Le point $\nu(t_f(p), p)$ est appelé *premier point focal* de p . Lorsqu'elle est finie, la fonction $t_f(p)$ est dérivable sur $\partial\Omega$, et si le premier point focal et le point de rupture de p coïncident, alors $t'_f(p) = 0$ (voir [11]). Nous en déduisons que le point $\nu(t(p), p)$ est un point de rebroussement de la caustique $C_{\partial\Omega}$.

Ainsi, les points angulaires de la courbe parallèle $\partial\Omega(t)$ proviennent des points doubles des courbes parallèles $\partial\Omega(\tau)$, avec $\tau < t$, ainsi que de leurs intersections avec le lieu des points de rebroussement de la caustique.

La présence de points angulaires rend moins aisée l'obtention d'une relation de type (1.3). D'une part, les angles doivent être pris en compte dans la relation de Gauss-Bonnet. D'autre part, la fonction $l(t)$ n'est plus nécessairement dérivable. En particulier, si une infinité d'angles apparaissent en un temps fini, cette méthode mène à une impasse. Nous devons donc impérativement travailler avec une courbe dont les parallèles n'ont qu'un nombre fini de points d'auto-intersection, et dont la courbe caustique n'a qu'un nombre fini de points de rebroussement.

Si la métrique g et la courbe $\partial\Omega$ sont analytiques réelles, ces deux propriétés sont vérifiées (voir [11]). Or d'après le théorème de H. Whitney (voir [35]), l'ensemble des métriques (respectivement des courbes fermées) analytiques sur Σ est dense dans l'ensemble des métriques (respectivement des courbes fermées) lisses ; il suffit donc d'établir le théorème 10 dans un contexte analytique, le théorème général s'en déduisant par approximation.

La théorie des singularités des caustiques et des fronts d'onde de V.I. Arnold nous permet d'éviter un tel détour. Elle affirme que pour une courbe générique, les deux propriétés ci-dessus sont vérifiées. Il

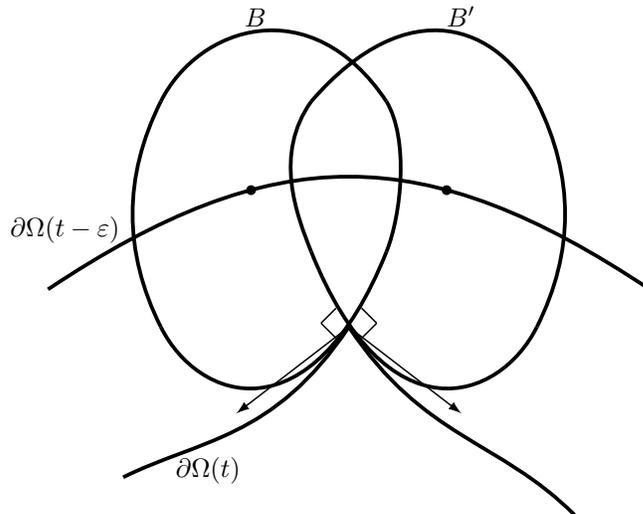
s'agit en fait d'une théorie très générale réduisant l'étude des singularités des courbes parallèles à celle des singularités de deux classes d'applications, les applications lagrangiennes et legendriennes. Nous n'en dirons pas plus ici et renvoyons à l'article de V.I. Arnold [2]. Nous retiendrons simplement qu'il est possible d'approximer la courbe $\partial\Omega$ par une suite de courbes convenables :

Fait. Il existe une suite Ω_n de domaines compacts de $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ tels que $\partial\Omega_n$, Longueur($\partial\Omega_n$) et Aire(Ω_n) convergent respectivement vers $\partial\Omega$, Longueur($\partial\Omega$) et Aire(Ω), et $\partial\Omega_n(t)$ n'ait qu'un nombre fini de points angulaires pour tout n et pour tout $t > 0$.

Nous démontrerons donc le théorème 10 pour un domaine Ω tel que pour tout $t > 0$, $\partial\Omega(t)$ n'ait qu'un nombre fini de points angulaires. Cela suffira à établir le théorème en toute généralité.

Commençons par observer qu'en un point angulaire de $\partial\Omega(t)$, l'angle entre les normales entrantes est inférieur à π . En effet, fixons un réel $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour qu'une boule de rayon ε centrée en un point de Ω soit de frontière régulière. La courbe $\partial\Omega(t)$ est alors l'enveloppe des boules de rayon ε centrées en les points de la courbe $\partial\Omega(t - \varepsilon)$. Un point angulaire q de $\partial\Omega(t)$ est donc un point d'intersection de deux boules B et B' de rayon ε , centrées en des points de $\partial\Omega(t - \varepsilon)$, et l'angle entre les deux normales entrantes en q à $\partial\Omega(t)$ est donné par l'angle entre les normales sortantes en q à B et B' , qui est inférieur à π .

Figure 1.4



La fonction $a(t)$ est toujours dérivable, de dérivée $-l'(t)$. La fonction $l(t)$ est toujours continue, et même absolument continue, mais elle n'est plus nécessairement dérivable. Cependant, elle reste dérivable à droite et si $l'(t)$ désigne sa dérivée à droite, alors :

$$l'(t) = - \int_{\partial\Omega(t)} c ds - 2 \sum_{j=1}^N \cotan \left(\frac{\alpha_j}{2} \right)$$

où les réels α_j , $1 \leq j \leq N$, désignent les valeurs des angles intérieurs de $\partial\Omega(t)$. Cela apparaît clairement sur la figure 1.5, dans laquelle les droites représentent les tangentes aux courbes. Ainsi, le théorème de Gauss-Bonnet appliqué au domaine $\Omega(t)$ s'écrit :

$$\int_{\Omega(t)} k dA - l'(t) - 2 \sum_{j=1}^N \cotan \left(\frac{\alpha_j}{2} \right) + \sum_{j=1}^N (\pi - \alpha_j) = 2\pi\chi(\Omega(t)).$$

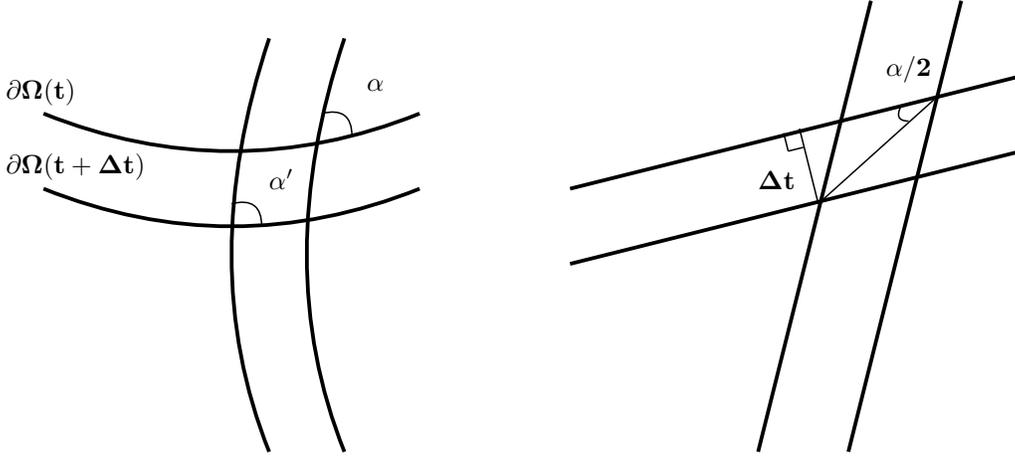
Ainsi, comme $k \leq K$:

$$Ka(t) - l'(t) \geq 2\pi\chi(\Omega(t)) + 2 \left(\sum_{j=1}^N \cotan \left(\frac{\alpha_j}{2} \right) - \frac{\pi - \alpha_j}{2} \right).$$

Par ailleurs, comme $0 < \alpha_j < \pi$, $\cotan\left(\frac{\alpha_j}{2}\right) \geq \frac{\pi - \alpha_j}{2}$, ce qui donne l'inéquation :

$$Ka(t) - l'(t) \geq 2\pi\chi(\Omega(t)). \quad (1.4)$$

Figure 1.5



Il reste à voir comment évolue $\chi(\Omega(t))$. Il s'agit d'une fonction constante par morceaux, qui ne change de valeur que lorsque la topologie de $\Omega(t)$ change, c'est à dire quand son bord s'auto-intersecte. Supposons que le bord du domaine $\Omega(t_1)$ présente une auto-intersection. Nous distinguerons deux cas :

1. Deux composantes distinctes du bord de $\Omega(t_1)$ s'intersectent. Alors $\partial\Omega(t_1 + \varepsilon)$ a une composante connexe de moins que $\partial\Omega(t_1 - \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit.
2. Une composante connexe du bord de $\Omega(t_1)$ s'auto-intersecte. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le domaine $\Omega(t_1 - \varepsilon) \setminus \Omega(t_1 + \varepsilon)$ est la réunion d'un nombre fini d'anneaux, de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle, et d'un domaine homéomorphe au disque unité privé de deux petits disques, de caractéristique d'Euler-Poincaré -1.

Dans tous les cas, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\chi(\Omega(t_1 + \varepsilon)) = \chi(\Omega(t_1 - \varepsilon)) + 1$. Remarquons que si p auto-intersections se produisent simultanément au temps t_1 , alors $\chi(\Omega(t_1 + \varepsilon)) = \chi(\Omega(t_1 - \varepsilon)) + p$. Ainsi, la fonction $\chi(\Omega(t))$ est croissante, et d'après (1.4), l'inégalité suivante est vérifiée :

$$Ka(t) - l'(t) \geq 2\pi\chi(\Omega). \quad (1.5)$$

La fonction $a' = -l$ étant absolument continue, de dérivée a'' , cette inégalité devient :

$$Ka(t) + a''(t) \geq 2\pi\chi(\Omega). \quad (1.6)$$

Cette inéquation différentielle (voir également [8]) permet d'établir le théorème 12. Rappelons comment.

Inégalité isopérimétrique affine en courbure majorée par une constante négative

Supposons que la métrique g soit de courbure majorée par -1 . Rappelons comment la méthode de Fiala permet d'établir le théorème 12. L'inégalité (1.5) devient :

$$-a(t) + a''(t) \geq 2\pi\chi(\Omega) \geq 2\pi\chi^-(\Omega).$$

Posons $y(t) = a(0) - a(t) = \text{Aire}(\Omega) - a(t)$. La fonction y est dérivable et sa dérivée y' admet une dérivée à droite y'' vérifiant :

$$y''(t) - y(t) \leq -2\pi\chi^-(\Omega) - a(0).$$

Par ailleurs, $y(0) = 0$ et $y'(0) = \text{Longueur}(\partial\Omega) = l(0)$. Le lemme suivant permet de majorer la fonction y :

Lemme. (voir par exemple [8]). Soient A un réel et B, r des réels strictement positifs. Notons $\psi(t) = A \sinh(t) + B \cosh(t) - B$ l'unique solution de l'équation différentielle $\psi'' - \psi = B$ telle que $\psi(0) = 0$ et $\psi'(0) = A$. Si $y : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable telle que y' admette une dérivée à droite y'' en tout point vérifiant : $y'' - y \leq B$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = A$, alors :

$$\forall t \in [0, r], \quad y(t) \leq \psi(t).$$

Ainsi, la fonction y est majorée pour tout $t \geq 0$:

$$y(t) \leq l(0) \sinh(t) - (2\pi\chi^-(\Omega) + a(0)) \cosh(t) + 2\pi\chi^-(\Omega) + a(0).$$

Pour $t \geq R_\Omega$ le domaine $\Omega(t)$ est d'aire nulle, donc $y(R_\Omega) = a(0)$, ce qui donne :

$$a(0) \leq l(0) \frac{\sinh(R_\Omega)}{\cosh(R_\Omega)} - 2\pi\chi^-(\Omega) + \frac{2\pi\chi^-(\Omega)}{\cosh(R_\Omega)} \leq l(0) - 2\pi\chi^-(\Omega).$$

L'inégalité ci-dessus justifie que l'on travaille avec $\chi^-(\Omega)$ et non avec $\chi(\Omega)$.

1.2.3 La méthode de Kleiner

Plaçons-nous dans le cadre des hypothèses du théorème 10. Si la constante K est négative, le théorème 12 implique le théorème 10. En courbure simplement majorée, le théorème suivant implique le théorème 10 :

Théorème 13. *Supposons que g soit de la forme $\Phi^2 g_\Sigma$, où Φ est une fonction majorée par une constante $M \geq 1$, et que la courbure de g est majorée par une constante $K > 0$. Soit Ω un domaine compact de Σ . L'alternative suivante est vérifiée :*

$$\text{Soit} \quad \text{Aire}(\Omega) \leq -4\pi K M^2 \chi^-(\Omega)$$

$$\text{ou bien} \quad \text{Aire}(\Omega) \leq e^{16KM^2} \text{Longueur}(\partial\Omega).$$

Nous pouvons nous ramener au cas où $K = 1$ en remplaçant g par la métrique $\sqrt{K}g$. La constante M est alors remplacée par $M\sqrt{K}$. On supposera donc dans toute la suite que $K = 1$. Un argument dû à B.Kleiner (voir [22]) permet de compenser la non négativité de K . Il repose sur le lemme suivant :

Lemme. *Soit Ω un domaine compact à bord lisse de Σ , et notons respectivement $a(t)$ et $l(t)$ l'aire et la longueur du bord du domaine $\Omega(t)$ défini au paragraphe 2.2.2, pour la métrique g . Alors :*

$$\forall t \geq 0, \quad a(t) + 2\pi M^2 \chi^-(\Omega) \leq \frac{M^2}{\int_0^t \frac{du}{l(u)}}.$$

Démonstration. Notons respectivement $a_p(t)$ et $l_p(t)$ l'aire et la longueur du bord du domaine $\Omega(t)$ pour la métrique de Poincaré g_Σ . Soit $t > 0$. Comme $a_p(t) = \int_{\Omega(t)} \Phi^{-2} dA$, où dA désigne la forme d'aire associée à la métrique g , alors : $a'_p(t) = -\int_{\partial\Omega(t)} \Phi^{-2} ds$, où l'abscisse curviligne ds est calculée pour la métrique g . Par ailleurs, $l_p(t)^2 = \left(\int_{\partial\Omega(t)} \Phi^{-1} ds \right)^2$ donc en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$l_p(t)^2 \leq \left(\int_{\partial\Omega(t)} \Phi^{-2} ds \right) \left(\int_{\partial\Omega(t)} ds \right) = -a'_p(t) l(t)$$

soit encore :

$$\frac{1}{l(t)} \leq -\frac{a'_p(t)}{l_p(t)^2}.$$

Fixons un réel $t > 0$. Si $a_p(t) + 2\pi\chi^-(\Omega) \leq 0$, alors comme $a(t) \leq M^2 a_p(t)$, $a(t) + 2\pi M^2 \chi^-(\Omega) \leq 0$ et l'inégalité recherchée est vraie pour t . Sinon, comme a_p est décroissante, pour tout $u \in [0, t]$, $a_p(u) + 2\pi\chi^-(\Omega) > 0$. Alors :

$$\frac{1}{l(u)} \leq -\frac{a'_p(u)}{l_p(u)^2} \leq -\frac{a'_p(u)}{(a_p(u) + 2\pi\chi^-(\Omega))^2}$$

par le théorème 12. En intégrant entre 0 et t on obtient :

$$\int_0^t \frac{du}{l(u)} \leq \int_0^t \frac{-a'_p(u)}{(a_p(u) + 2\pi\chi^-(\Omega))^2} du = \frac{1}{a_p(t) + 2\pi\chi^-(\Omega)} - \frac{1}{a_p(0) + 2\pi\chi^-(\Omega)}$$

donc :

$$\int_0^t \frac{du}{l(u)} \leq \frac{1}{a_p(t) + 2\pi\chi^-(\Omega)}.$$

L'inégalité recherchée s'en déduit :

$$a(t) + 2\pi M^2 \chi^-(\Omega) \leq M^2(a_p(t) + 2\pi\chi^-(\Omega)) \leq \frac{M^2}{\int_0^t \frac{du}{l(u)}}.$$

□

Voyons comment ce lemme permet d'obtenir le théorème 10.

Supposons que $a(0) > -4\pi M^2 \chi^-(\Omega)$. Montrons que la seconde alternative du théorème est satisfaite.

En intégrant la relation (1.5) entre 0 et $t > 0$ et en majorant $a(u)$ par $a(0)$ pour tout $u \in [0, t]$, on obtient, puisque $M \geq 1$:

$$l(t) \leq l(0) + t(a(0) - 2\pi\chi^-(\Omega)) \leq l(0) + 2ta(0).$$

D'une part, on en déduit en intégrant l'inverse de cette inégalité :

$$\frac{1}{\int_0^t \frac{du}{l(u)}} \leq \frac{2a(0)}{\log(1 + 2t \frac{a(0)}{l(0)}}. \quad (1.7)$$

D'autre part, comme $a' = -l$, on en déduit par intégration :

$$a(t) - a(0) = - \int_0^t l(u) du \geq - \int_0^t l(0) - 2ua(0) du = -tl(0) - t^2a(0). \quad (1.8)$$

Posons alors $x = \frac{a(0)}{l(0)}$. En injectant l'inégalité (1.7) dans le lemme précédent, on obtient :

$$a(t) + 2\pi M^2 \chi^-(\Omega) \leq \frac{2M^2 a(0)}{\log(1 + 2tx)}.$$

L'inégalité (1.8) implique alors :

$$x - t - t^2x + \frac{2\pi M^2 \chi^-(\Omega)}{l(0)} \leq \frac{2M^2 x}{\log(1 + 2tx)}.$$

Comme $a(0) \geq -4\pi M^2 \chi^-(\Omega)$, cette relation entraîne :

$$x\left(\frac{1}{2} - t^2\right) - t \leq \frac{2M^2 x}{\log(1 + 2tx)}.$$

Posons alors $t = \frac{1}{2}$. Soit le terme de gauche de cette dernière majoration est négatif ou nul, auquel cas $x \leq 2$, soit il est strictement positif, et alors :

$$\log(1 + x) \leq \frac{8M^2 x}{x - 2} = 8M^2 + \frac{16M^2}{x - 2}.$$

Si $x \geq 4$, cela entraîne que $x \leq e^{16M^2}$. Comme $M \geq 1$, on a dans tous les cas :

$$x \leq e^{16M^2}.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 13, et donc du théorème 10.

1.3 Conséquences et raffinements

Comme en dimension complexe 1, l'inégalité d'Ahlfors en dimension supérieure évoque un second théorème principal pour des courbes entières. Malheureusement, les résultats obtenus, s'ils sont assez généraux, sont loin d'être optimaux.

Soient X une variété complexe compacte munie d'une 2-forme positive ω et D un diviseur de X . Soit également $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ une courbe entière non constante et non contenue dans le diviseur D . Rappelons les notations introduites dans l'introduction. Notons, pour tout $R > 0$:

$$A_{f,R} = \text{Aire}(f(D(0,R))) = \int_{D(0,R)} f^* \omega \quad \text{l'aire de l'image de } D(0,R) \text{ par } f$$

$$l_{f,R} = \text{Longueur}(f(\partial D(0,R))) = \int_{\partial D(0,R)} \|df\| \omega \quad \text{la longueur de l'image de } \partial D(0,R) \text{ par } f.$$

Notons également :

$$n_{1,f,R}(D) = \#(f^{-1}(D) \cap D(0,R)) \quad \text{le nombre de points d'intersection de } f \text{ avec } D.$$

Traditionnellement, ces fonctions ne sont pas utilisées telles qu'elles. On leur préfère leurs intégrales logarithmiques :

$$T_{f,R}(\omega) = \int_0^R A_{f,r} \frac{dr}{r}, \quad L_{f,R}(\omega) = \int_0^R l_{f,r} \frac{dr}{r}, \quad N_{1,f,R}(D) = \int_0^R n_{1,f,r}(D) \frac{dr}{r}.$$

Le théorème suivant est une conséquence presque immédiate de l'inégalité d'Ahlfors en dimension supérieure :

Théorème 14. *Supposons que $X \setminus D$ soit hyperboliquement plongé dans X . Il existe alors deux constantes $C, C' > 0$ ne dépendant que de ω et de D telles que pour tout $R > 0$:*

$$A_{f,R} \leq C n_{1,f,R} + C' l_{f,R}.$$

En particulier, d'après le lemme d'Ahlfors (voir chapitre 0) :

$$A_{f,R} \leq C n_{1,f,R}(D) + o(A_{f,R}(\omega)) \quad \|\cdot\|.$$

Ces majorations demeurent vraies pour les caractéristiques intégrées :

$$T_{f,R}(\omega) \leq C N_{1,f,R}(D) + C' L_{f,R}(\omega) \leq C N_{1,f,R}(D) + o(T_{f,R}(\omega)) \quad \|\cdot\|.$$

Ce théorème est assez général et a l'avantage de fonctionner pour les fonctions caractéristiques non intégrées.

Démonstration. Soit $R > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que les disques $D(z, \varepsilon)$ centrés en les points $z \in f^{-1}(D) \cap D(0, R)$ soient disjoints et contenus dans $D(0, R)$. Posons :

$$\Sigma_{R,\varepsilon} = \overline{D(0, R)} \setminus \bigcup_{z \in f^{-1}(D) \cap D(0, R)} D(z, \varepsilon).$$

Alors la restriction de f à $\Sigma_{R,\varepsilon}$ est à valeurs dans $X \setminus D$. Comme $\chi(\Sigma_{R,\varepsilon}) = 1 - n_{1,f,R}(D)$, il existe deux constantes C et C' ne dépendant que de ω et de D telles que :

$$\text{Aire}(f(\Sigma_{R,\varepsilon})) \leq C n_{1,f,R}(D) + C' \text{Longueur}(f(\partial \Sigma_{R,\varepsilon})).$$

Le résultat s'en déduit car $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Aire}(f(\Sigma_{R,\varepsilon})) = A_{f,R}$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Longueur}(f(\partial \Sigma_{R,\varepsilon})) = l_{f,R}$. □

Examinons maintenant le cas du plan projectif complexe $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Intéressons nous au diviseur D constitué de cinq droites projectives en position générale. Commençons par rappeler le théorème de Green (voir [20]) :

Théorème 15. *Soit L_j ($1 \leq j \leq 5$) une famille de 5 droites projectives en position générale, c'est-à-dire telle que la configuration $C = \bigcup_{1 \leq j \leq 5} L_j$ ne possède pas de point triple. Alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C$ est constante. Plus précisément, $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C$ est hyperboliquement plongé dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.*

Les hypothèses du théorème 14 sont donc satisfaites. Les aires et les longueurs seront calculées pour la 2-forme de Fubini-Study ω_2 . Il existe une constante $C > 0$ dépendant des droites projectives L_j telle que pour tout courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$:

$$A_{f,R} \leq C \sum_{j=1}^5 n_{1,f,R}(L_j) + o(A_{f,R}) \quad || \quad (1.9)$$

$$T_{f,R}(\omega_2) \leq C \sum_{j=1}^5 N_{1,f,R}(L_j) + o(T_{f,R}(\omega_2)) \quad ||. \quad (1.10)$$

Comparons maintenant ces résultats au second théorème principal connu depuis H. Cartan :

Théorème 16. *(voir [10], [23], [26]). Soit une famille L_j , $1 \leq j \leq 5$ de 5 droites projectives en position générale dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Notons $n_{2,f,r}(L_j)$ le nombre de points d'intersections de $f(D(0,r))$ et de L_j en comptant les multiplicités tronquées à l'ordre 2, et :*

$$N_{2,f,R}(L_j) = \int_0^R n_{2,f,r}(L_j) \frac{dr}{r}.$$

Alors :

$$2T_{f,R}(\omega_2) \leq \sum_{j=1}^5 N_{2,f,R}(L_j) + o(T_{f,R}(\omega_2)). \quad ||$$

Comme $n_{2,f,r}(L_j) \leq 2n_{1,f,r}(L_j)$, il est également vrai que $N_{1,f,R}(L_j) \leq 2N_{1,f,R}(L_j)$, et ce théorème implique l'inégalité :

$$T_{f,R}(\omega_2) \leq \sum_{j=1}^5 N_{1,f,R}(L_j) + o(T_{f,R}(\omega_2)). \quad ||. \quad (1.11)$$

Cette inégalité est nettement plus précise que l'inégalité (1.10), ce qui n'est pas surprenant a posteriori, puisqu'elle prend en compte les spécificités de la géométrie de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, et plus particulièrement celles de la forme de Fubini-Study.

Remarquons pour finir que le théorème 9 s'adapte sans problème au contexte presque complexe. Couplé au théorème de Green presque complexe (voir [16]), il permet d'obtenir des inégalités (1.9) et (1.10) pour une J -courbe entière et 5 J -droites dans un plan projectif presque complexe (voir chapitre suivant pour les rappels de géométrie presque complexe).

Chapitre 2

Théorème de Borel presque complexe

2.1 Introduction

Cette seconde partie est consacrée à la démonstration d'un énoncé d'hyperbolicité, le théorème de Borel, dans un contexte presque complexe. L'hyperbolicité presque complexe est un sujet d'études relativement récent, puisque la définition d'une pseudo-métrique de Kobayashi-Royden presque complexe remonte à B. Kruglikov et M. Overholt (voir [25]). Un exemple classique de variété hyperbolique complexe, le complémentaire de cinq droites projectives dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, a été exploré récemment dans un contexte presque complexe par R. Debalme et S. Ivashkovich (voir [12]) puis par J. Duval (voir [16]). Nous nous proposons de pousser les investigations un peu plus loin et de nous intéresser au complémentaire de quatre droites.

Une structure presque complexe sur une variété lisse M de dimension paire est une section J du fibré $\text{End}(TM)$ des endomorphismes du fibré tangent de M telle que pour tout point $P \in M$, $J_P^2 = -Id_{T_P M}$. La multiplication par i induite par une structure de variété complexe sur M définit une structure presque complexe dite intégrable. Une surface de Riemann, c'est-à-dire une variété réelle orientable de dimension deux munie d'une classe conforme de métriques, est naturellement munie d'une structure presque complexe, qui est toujours intégrable en vertu du théorème des coordonnées isothermes. Ce n'est pas le cas en dimension supérieure : l'intégrabilité d'une structure presque complexe est caractérisée par l'annulation d'un tenseur, le tenseur de Nijenhuis : c'est le théorème de Newlander-Nirenberg. La non intégrabilité d'une structure presque complexe entraîne la perte de certains énoncés : en particulier, l'existence, même locale, de sous-variétés de dimension quatre ou plus dont le plan tangent est stable par la structure presque complexe, n'est plus garantie (voir [24]). Cependant, il existe localement de nombreuses surfaces presque complexes, c'est-à-dire dont le plan tangent est stable par J . Une telle surface S , munie de la structure presque complexe J , devient une surface de Riemann, et peut toujours être paramétrée par une application J -holomorphe, c'est-à-dire par une application différentiable $f : (\Sigma, j) \rightarrow (M, J)$ définie sur une surface de Riemann (Σ, j) et vérifiant $df \circ j = J \circ df$.

L'existence pour tout point P de M et tout vecteur $v \in T_P M$ d'un J -disque f , c'est-à-dire d'une application J -holomorphe $f : \mathbb{D} \rightarrow M$, tel que $f(0) = P$ et $v \in \text{Im}(df_0)$ (voir [31], ainsi que les articles de J.C. Sikorav et D. McDuff dans [3]), motive la définition d'une pseudo-métrique de Kobayashi-Royden presque complexe (voir [25]) :

$$\forall P \in M, \forall v \in T_P M, K_{M,J}(P, v) = \inf \left\{ \frac{1}{|\lambda|} \mid \exists f : \mathbb{D} \rightarrow M \text{ } J\text{-holomorphe t.q. } f(0) = P, df_0(\partial/\partial z) = \lambda v \right\}.$$

La variété presque complexe (M, J) est alors dite « hyperbolique au sens de Kobayashi » lorsque $K_{M,J}$ est « non dégénérée », avec les mêmes nuances que dans le contexte holomorphe. Lorsque M est compacte, nous dirons simplement que M est hyperbolique lorsque pour toute métrique riemannienne g sur M , il

existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout point $P \in M$ et tout vecteur $v \in T_P M$, $K_{M,J}(P, v) \geq \varepsilon \|v\|_g$. Dans le cas contraire, il existe une J -courbe entière $f : (\mathbb{C}, i) \rightarrow (M, J)$ non constante (voir ([25])) :

Théorème 17. *Une variété compacte presque complexe (M, J) de classe \mathcal{C}^1 est hyperbolique au sens de Kobayashi si et seulement si il n'existe pas de J -courbe entière non constante $f : \mathbb{C} \rightarrow M$.*

Le complémentaire de cinq droites projectives en position générale dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est un exemple bien connu de variété hyperbolique complexe. Le complémentaire de quatre droites en position générale, en revanche, contient des courbes entières non constantes. Néanmoins le théorème de Borel affirme que ces courbes entières sont linéairement dégénérées :

Théorème 18. (voir [5], [23], [26]). *Soient L_j , $1 \leq j \leq 4$, quatre droites projectives en position générale dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, c'est-à-dire telles que la configuration $C = \bigcup_{1 \leq j \leq 4} L_j$ possède exactement six points doubles (et donc pas de point triple). Appelons diagonales les trois droites projectives $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ coupant chacune C en deux points doubles. Alors si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C$ est une courbe entière évitant les 4 droites projectives L_j , son image $f(\mathbb{C})$ est contenue dans une diagonale.*

Qu'en est-il dans un contexte presque complexe ? Soit J une structure presque complexe de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ positive par rapport à la métrique de Fubini-Study ω_2 , i.e. $\omega_2(v, Jv) > 0$ pour tout point P et tout vecteur $v \in T_P \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ non nul. Le triplet $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \omega_2, J)$ est appelé plan projectif presque complexe. Une J -droite du plan projectif presque complexe est une courbe J -holomorphe plongée dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, difféomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et de degré 1 en homologie. D'après M. Gromov [21] (voir aussi J.-C. Sikorav [33]), on dispose de nombreuses J -droites : plus précisément, l'ensemble des J -droites peut-être muni d'une structure de variété différentiable difféomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Par ailleurs, les J -droites vérifient les relations d'incidences classiques : deux points distincts sont contenus dans une unique J -droite, et tout vecteur non nul tangent à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en un point P est tangent à une unique J -droite. Ces J -droites jouent donc le rôle, dans le plan projectif presque complexe, des droites projectives. Il semble naturel de s'intéresser à l'hyperbolicité du complémentaire de cinq J -droites en position générale, c'est-à-dire dont la réunion ne possède pas de point triple. Dans cette direction, R. Debalme et S. Ivashkovich ont montré que le théorème de Green était une propriété ouverte dans l'espace des structures presque complexes positives par rapport à ω_2 et dans l'espace des configurations de cinq J -droites :

Théorème 19. [12]— *L'ensemble*

$\mathcal{M} = \{(J, \{L_k, 1 \leq k \leq 5\}) \mid J \text{ est positive par rapport à } \omega_2, \text{ les } J\text{-droites } L_k \text{ sont en position générale}\}$
est muni d'une structure de variété banachique. Le sous-ensemble

$$\mathcal{H} = \{(J, \{L_k, 1 \leq k \leq 5\}) \mid (\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \bigcup_{1 \leq k \leq 5} L_k, J) \text{ est hyperboliquement plongé dans } (\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)\}$$

est un ouvert non vide de \mathcal{M} .

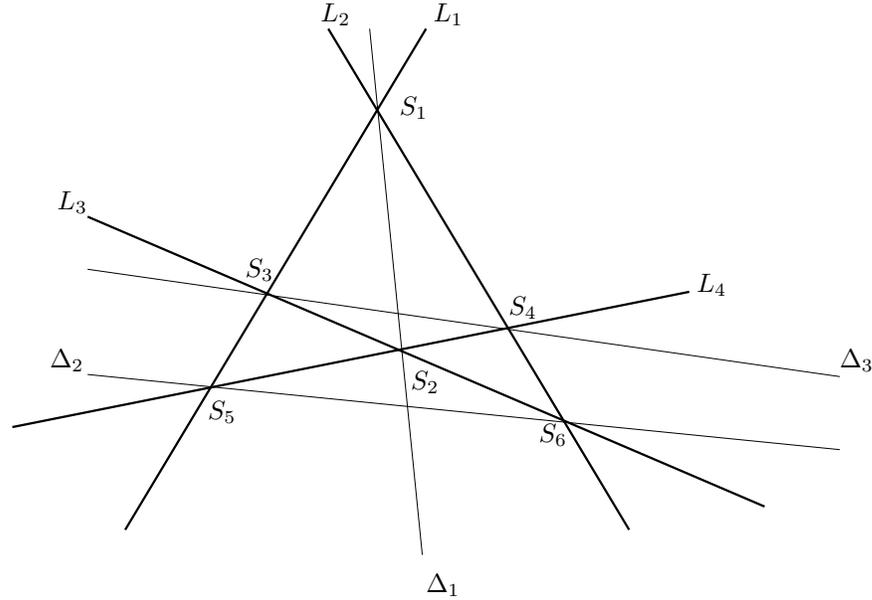
Plus récemment, J. Duval a montré que le théorème de Green était en fait toujours vrai dans le plan projectif presque complexe :

Théorème 20. [16]— *Une J -courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \bigcup_{1 \leq k \leq 5} L_k$ évitant cinq J -droites L_k en position générale est constante. De plus, le complémentaire dans $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ d'une réunion de cinq J -droites en position générale est hyperboliquement plongé dans $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$.*

Il est naturel de poursuivre l'étude et de s'intéresser au complémentaire dans un plan projectif presque complexe $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ de quatre J -droites L_1, L_2, L_3 et L_4 en position générale. Nous noterons S_k ($1 \leq k \leq 6$) les six points doubles de la configuration $C = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$. Appelons diagonales les trois J -droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 coupant chacune C en deux points doubles. Voici l'énoncé que nous allons démontrer :

Théorème 21. *Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C$ une J -courbe entière non constante évitant la configuration C . Son image $f(\mathbb{C})$ est contenue dans la réunion $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ des diagonales.*

Figure 2.1 : La configuration $\bigcup_{1 \leq k \leq 4} L_k$ et ses diagonales



Ce théorème ne permet nullement d'affirmer que la pseudo-métrique de Kobayashi-Royden du complémentaire de quatre J -droites en position générale ne s'annule pas en dehors des diagonales. Nous en dirons plus au chapitre suivant. Remarquons aussi que les résultats ci-dessus n'ont pas de sens dans les espaces projectifs de dimensions supérieures, puisqu'il n'existe génériquement pas d'hypersurfaces presque complexes en dimension supérieure ou égale à six.

Avant d'en venir à la démonstration proprement dite, nous allons énoncer quelques rappels de géométrie presque complexe.

2.2 Préliminaires de géométrie presque complexe

Ce chapitre préliminaire est consacré à des rappels de géométrie presque complexe. Sauf mention contraire (voir le paragraphe sur les éclatements du plan projectif presque complexe), les structures presque complexes considérées seront toutes lisses.

Le premier paragraphe contient des généralités sur les structures presque complexes. Le second est consacré aux applications J -holomorphes et à leurs propriétés locales. Le troisième paragraphe s'intéresse au plan projectif presque complexe. Enfin, le dernier paragraphe est consacré aux courants positifs et aux applications plurisousharmoniques dans un contexte presque complexe.

2.2.1 Généralités

Soit M une variété réelle lisse de dimension paire. Notons $\mathcal{J}(M)$ l'ensemble des structures presque complexes sur M .

Soit ω une 2-forme non dégénérée sur M . Une structure presque complexe $J \in \mathcal{J}(M)$ est dite positive par rapport à ω si pour tout point $P \in M$ et tout vecteur $v \in T_P M \setminus \{0\}$ non nul tangent à M en P :

$$\omega_P(v, Jv) > 0.$$

Le champ de formes bilinéaires définies par :

$$\forall P \in M, \forall u, v \in T_P M, g_P(u, v) = \frac{\omega_P(u, Jv) + \omega_P(v, Ju)}{2}$$

définit alors une métrique riemannienne sur M , invariante par J .

L'espace $\mathcal{J}_t(\omega)$ des structures presque complexes positives par rapport à ω revêt une importance particulière : il est non vide et contractile (voir par exemple [3]). Cette propriété est en particulier utile à l'étude de la géométrie du plan projectif presque complexe.

2.2.2 Notion de J -courbe et propriétés locales

Etant donnée une surface de Riemann (Σ, j) , une application différentiable $f : \Sigma \rightarrow M$ est dite J -holomorphe si :

$$\forall z \in \Sigma, d_z f \circ j = J(f(z))d_z f \quad (2.1)$$

où j est la structure complexe sur Σ . L'application f est aussi appelée J -courbe. Son image $f(\mathbb{D})$ est une surface de M dont le plan tangent en un point régulier est stable par J . Nous la qualifierons parfois abusivement de J -courbe. En toute rigueur, une surface N de M dont le plan tangent est en tout point invariant par J est appelée *surface presque complexe*. Munie de la structure presque complexe ambiante, elle est une surface de Riemann.

Ce paragraphe rappelle quelques propriétés locales usuelles des applications J -holomorphes : propriétés de régularité, de convergence, d'existence locale et d'intersection. Les démonstrations sont détaillées dans les articles de J.C. Sikorav et D. McDuff de l'ouvrage [3].

Ces propriétés proviennent essentiellement de l'étude d'une équation de type Cauchy-Riemann vérifiée localement par les applications J -holomorphes. Soient un point P de M et un voisinage U de P suffisamment petit. Quitte à composer par un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme adapté, nous pouvons supposer que U est la boule unité B_2 de \mathbb{C}^2 , que J coïncide en 0 avec la structure complexe standard J_0 donnée par la multiplication par i , et que $J + J_0$ est inversible sur B_2 . Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow B_2$ une application J -holomorphe. La relation (2.1) devient alors :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = J(f) \frac{\partial f}{\partial x}$$

soit encore :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + q(f) \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

avec

$$q = (J_0 + J)^{-1} \circ (J_0 - J).$$

Ainsi, f est solution d'une équation aux dérivées partielles quasilinear elliptique d'ordre 1 qui évoque l'équation de Cauchy-Riemann. L'étude de cette équation montre que les applications J -holomorphes ont des propriétés locales proches de celles des applications holomorphes.

Régularité et convergence

Le caractère elliptique de l'équation (2.2) permet de montrer qu'une J -courbe est toujours lisse, et que la convergence dans \mathcal{C}^0 entraîne la convergence dans \mathcal{C}^∞ :

Théorème 22. *Toute application J -holomorphe $f : \Sigma \rightarrow M$ définie sur une surface de Riemann est lisse. Par ailleurs, les topologies associées aux convergences \mathcal{C}^0 et \mathcal{C}^∞ sur tout compact coïncident pour les J -courbes.*

Nous serons surtout intéressés par le fait que la convergence dans \mathcal{C}^0 d'une suite de J -courbes entraîne sa convergence dans \mathcal{C}^1 : si $f_n : \Sigma \rightarrow M$ est une suite de J -courbes convergeant uniformément sur tout compact de Σ vers une application f , alors f est lisse et J -holomorphe, et la suite (df_n) converge vers df .

Existence locale

La relation (2.2) permet de montrer que les applications J -holomorphes sont localement en correspondance bijective avec les applications holomorphes standard, et qu'il existe en tout point des J -courbes tangentes à toutes les directions :

Théorème 23. Soit $P \in M$, soit $v \in T_P M$. Il existe un réel $r > 0$ et un J -disque f (c'est-à-dire une application J -holomorphe $f : \mathbb{D} \rightarrow M$) tels que :

$$f(0) = P, \quad d_P f(\partial/\partial z) = rv.$$

Par ailleurs, si $v(P)$ est un champ local de vecteurs suffisamment petits, il existe une famille lisse f_P d'applications J -holomorphes telles que $f(0) = P$, $d_P f(\partial/\partial z) = v(P)$.

En dimension réelle 4, cette propriété permet d'obtenir des coordonnées locales dans lesquelles J prend une forme particulière :

Forme normale d'une structure presque complexe. Supposons que $\dim M = 4$. Au voisinage d'un point P de M , il existe des coordonnées (z_1, z_2) dans lesquelles J est de la forme :

$$J(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} A(z_1, z_2) & 0 \\ 0 & B(z_1, z_2) \end{pmatrix}$$

où A et B sont des applications \mathbb{R} -linéaires de \mathbb{C}^2 .

Points critiques d'une J -courbe

Comme pour les applications holomorphes standard, les points critiques des J -courbes sont isolés :

Théorème 24. Les points critiques d'une J -courbe non constante sont isolés.

Intersections de J -courbes

Sans entrer dans les détails, il est connu depuis M. Gromov [21] que les points d'intersection de deux J -courbes d'images C et C' distinctes sont isolés. De plus, si la variété M est de dimension réelle 4, l'intersection homologique de C et C' en un point $p \in C \cap C'$ est strictement positive. Des énoncés précis sont donnés dans [28], dans l'article de McDuff dans [3] et dans [34]. Nous nous contenterons de l'énoncé suivant :

Théorème 25. Supposons la variété M de dimension réelle 4. Soient deux J -disques $f, g : \mathbb{D} \rightarrow M$ d'images distinctes. Supposons que $f(\mathbb{D})$ et $g(\mathbb{D})$ s'intersectent en un point $p = f(0) = g(0)$. Alors cette intersection est isolée, et l'intersection homologique de $f(\mathbb{D})$ et de $g(\mathbb{D})$ en p est strictement positive.

Ce résultat nous sera moins utile que le corollaire suivant (voir [16]), qui généralise au cas presque complexe le théorème d'Hurwitz.

Théorème d'Hurwitz. Supposons M de dimension réelle 4. Soit N une surface compacte presque complexe de M , et soit une suite de J -disques $f_n : \mathbb{D} \rightarrow M$ évitant N , ie. tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(\mathbb{D})$ n'intersecte pas N . Si la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact vers un J -disque $f : \mathbb{D} \rightarrow M$, alors soit $f(\mathbb{D})$ évite N , soit $f(\mathbb{D})$ est contenu dans N .

Nous nous référerons très souvent à ce résultat dans les démonstrations des théorèmes de Borel et Bloch.

2.2.3 Aire d'une J -courbe

Soient ω une 2-forme sur M et J une structure presque complexe positive par rapport à ω . Soient (Σ, j) une surface de Riemann (j désignant la structure complexe induite par la multiplication par i) et une J -courbe $f : (\Sigma, j) \rightarrow (M, J)$ non constante. Nous définissons l'aire de $f(\Sigma)$ comme dans le cas holomorphe (voir introduction) :

$$\text{Aire}(f(\Sigma)) = \int_{\Sigma} f^* \omega.$$

Le théorème suivant est une version presque complexe du théorème de Lelong, qui sera utilisée à plusieurs reprises dans les démonstrations des théorèmes de Borel et Bloch.

Théorème de Lelong. Notons $g(u, v) = \frac{1}{2}(\omega(u, Jv) + \omega(v, Ju))$ la métrique riemannienne associée à la 2-forme ω . Soient Σ une surface de Riemann compacte à bord, $f : \Sigma \rightarrow M$ une J -courbe et P un point de son image $f(\Sigma)$. Supposons que $f(\Sigma)$ est contenue dans une boule fermée $\bar{B}(P, r)$ de centre P et de rayon r , et que l'image $f(\partial\Sigma)$ de la frontière de Σ est contenue dans la frontière $\partial B(P, r)$ de la boule. Il existe alors deux constantes strictement positives r_0 et C , ne dépendant que de ω et de J , telles que si $r \leq r_0$, on ait :

$$\text{Aire}(f(\Sigma)) \geq Cr^2.$$

Ce résultat se démontre à l'aide de la méthode de Fiala, et découle de l'existence de l'existence d'une inégalité isopérimétrique quadratique pour les petits J -disques (voir l'article de J.C. Sikorav dans [3]).

2.2.4 Familles normales

Le théorème 22 nous amène à définir, comme dans le cas holomorphe, une notion de familles normales. A l'aide du théorème d'Ascoli, la normalité d'une famille (f_n) peut être caractérisée, lorsque M est compacte, par une condition sur les dérivées df_n :

Famille normale. Une suite de J -disques $f_n : \mathbb{D} \rightarrow M$ est dite normale si toute sous-suite de (f_n) admet une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact de \mathbb{D} vers un J -disque.

Lorsque M est compacte, cela équivaut à dire que la suite $(\|df_n\|)$ est bornée sur tout compact du disque unité, $\|\cdot\|$ désignant la norme associée à une métrique riemannienne.

Comme dans le cas où J est intégrable, la non normalité d'une suite de J -disques se caractérise à l'aide du lemme de Brody (voir [25]) :

Lemme de Brody. Supposons M compacte. Soit $f_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une suite non normale de J -disques. Il existe une suite de contractions affines $\rho_n(z) = a_n + r_n z$, avec (r_n) convergeant vers 0 et (a_n) vers un point $a \in \mathbb{D}$, telle que $(f_n \circ \rho_n)$ converge après extraction vers une J -courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow M$ non constante .

Ce lemme permet de démontrer le critère d'hyperbolicité des variétés compactes énoncé dans l'introduction. Notons qu'il ne donne aucune information quant à la localisation de la J -courbe entière f obtenue par reparamétrisation : rien ne permet de dire que son image $f(\mathbb{C})$ contient une valeur d'adhérence de la suite de points $(f_n(a))$. C'est à cause de ce phénomène que le théorème de Bloch, que nous étudierons au chapitre suivant, ne se réduit pas au théorème de Borel.

2.2.5 Plan projectif presque complexe

Fixons une structure presque complexe J sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ positive par rapport à la 2-forme de Fubini-Study. La géométrie du plan projectif presque complexe $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \omega_2, J)$ est très proche de la géométrie du plan projectif complexe standard $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \omega_2, J_0)$. Rappelons qu'une J -droite est une sous-variété compacte de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de dimension réelle 2, difféomorphe à la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, de degré 1 en homologie et dont le plan tangent est en tout point stable par J . Deux J -droites distinctes se coupent en un unique point, puisque leur intersection homologique vaut 1 et que leurs intersections géométriques sont positives.

Le caractère contractile de $\mathcal{J}_t(\omega_2)$ a permis à M. Gromov de démontrer, à l'aide du *théorème de compacité*, qu'il existe « autant » de J -droites que de droites projectives. Plus précisément, l'ensemble des J -droites, appelé dual du plan projectif presque complexe $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J, \omega_2)$, peut être muni d'une structure de variété différentiable difféomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Les J -droites vérifient en outre les relations d'incidences habituelles :

1. Deux points distincts P et Q de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sont contenus dans une unique J -droite $L_{P,Q}$ dépendant de façon lisse de P et de Q .
2. Etant donné un point P de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et un vecteur non nul v tangent à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en P , il existe une unique J -droite contenant P et dont le plan tangent en P contient v . L'ensemble des J -droites contenant P , appelé pinceau des J -droites en P , est une sous-variété du dual difféomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Pour tout point P de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, l'application lisse $\pi_P : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui à tout point Q distinct de P associe la J -droite $L_{P,Q}$ vue comme élément de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est appelée projection centrale en P , par analogie avec les projections centrales ordinaires.

L'existence de pincesaux de J -droites permet de définir l'éclaté du plan projectif presque complexe en un point.

Eclatement presque complexe

L'éclaté du plan projectif presque complexe est défini en redressant localement les J -droites d'un pinceau sur des droites complexes.

(a) Définition

Fixons un point P de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Il existe un voisinage ouvert U de P et un difféomorphisme $\Phi : U \rightarrow B_2$ à valeurs dans la boule unité B_2 de \mathbb{C}^2 tels que $\Phi(P) = 0$ et Φ_*J coïncide avec J_0 en 0. Nous pouvons donc voir le voisinage U de P comme un voisinage de 0 dans \mathbb{C}^2 , tout en supposant que $J(0) = J_0 = i$. Le plan tangent en 0 à une J -droite passant par 0 est donc une droite complexe de \mathbb{C}^2 .

Pour tout point $Q \in U$ distinct de 0, notons L_Q l'unique J -droite du pinceau centré en 0 et passant par Q . L'application Ψ qui à tout point Q distinct de 0 associe le projeté orthogonal de Q sur la droite complexe T_0L_Q de \mathbb{C}^2 est bijective près de 0, et de classe \mathcal{C}^∞ . Elle admet un prolongement évident en 0 par $\Psi(0) = 0$, mais malheureusement, ce prolongement n'est pas lisse. Il s'agit cependant d'un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^{1+lip} près de 0 (voir[16]).

Quitte à restreindre l'ouvert U , nous disposons donc d'un \mathcal{C}^{1+lip} -difféomorphisme Ψ d'un voisinage U de P vers un voisinage U_0 de 0 dans \mathbb{C}^2 redressant localement les J -droites passant par P sur des droites complexes de \mathbb{C}^2 passant par 0. Notons $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ l'éclaté standard de \mathbb{C}^2 en 0, $\Pi_0 : \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$ la projection évidente, $E_0 = \Pi_0^{-1}(\{0\})$ le diviseur exceptionnel et $\widetilde{U}_0 = \Pi_0^{-1}(U_0)$ le voisinage du diviseur exceptionnel situé au-dessus de U_0 . L'éclaté presque complexe $\widetilde{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}^P$ de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en P est obtenu en recollant $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus U$ et \widetilde{U}_0 à l'aide de Ψ .

Nous disposons d'une application naturelle $\Pi_P : \widetilde{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}^P \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Le diviseur exceptionnel E_P au-dessus de P est l'image réciproque $\Pi_P^{-1}(\{P\})$ de P par Π_P . Par construction, il s'agit d'une sous-variété compacte difféomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, d'auto-intersection -1 . La restriction de Π_P à $\widetilde{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}^P \setminus E_P$ est un difféomorphisme vers $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{P\}$.

(b) Structure presque complexe dans l'éclaté

La structure presque complexe J se relève en une structure presque complexe \widetilde{J}^P dans $\widetilde{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}^P \setminus E_P$. De façon équivalente, la structure presque complexe Ψ_*J définie sur le voisinage U_0 de 0 se relève en une structure presque complexe $\widetilde{\Psi_*J}$ définie dans $\widetilde{U}_0 \setminus E_0$. Le caractère \mathcal{C}^{1+lip} de Ψ permet de la prolonger en une structure presque complexe lipschitzienne coïncidant avec i le long du diviseur exceptionnel (voir [16]). De façon équivalente, \widetilde{J}^P se prolonge à tout l'éclaté :

Proposition 26. ([16]) La structure presque complexe \widetilde{J}^P admet un prolongement lipschitzien sur $\widetilde{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}^P$.

La forme de Fubini-Study ω_2 se relève en une 2-forme $\Pi_P^*\omega_2$ définie sur tout l'éclaté, mais dégénérée le long du diviseur exceptionnel. Il est possible de la modifier de façon à obtenir une 2-forme non dégénérée \widetilde{J}^P par rapport à laquelle \widetilde{J}^P est positive :

Proposition 27. Il existe une 2-forme λ_P à support dans un voisinage du diviseur exceptionnel E_P telle que la 2-forme $\tilde{\omega}^P = \Pi_P^* \omega_2 + \lambda_P$ soit non dégénérée telle que \tilde{J}^P soit positive par rapport à $\tilde{\omega}^P$.

Démonstration. Il s'agit d'un problème local près du diviseur exceptionnel : cela revient donc à montrer qu'il existe une 2-forme λ_0 à support dans \tilde{U}_0 telle que la structure presque complexe $\tilde{\Psi}_* J$ soit positive par rapport à $\Pi_0^*(\Psi_* \omega_2) + \lambda_0$.

Classiquement, il existe une 2-forme λ_0 dans l'éclaté standard de \mathbb{C}^2 en 0, à support dans un voisinage de E_0 , positive le long de \underline{E}_0 . Comme $\tilde{\Phi}_* J$ coïncide avec i le long de E_0 , par compacité, il existe une constante $c > 0$ telle que $\tilde{\Psi}_* J$ soit positive par rapport à la 2-forme $\Pi_0^*(\Psi_* \omega_2) + c\lambda_0$. \square

A cause de la perte de régularité pour la structure presque complexe, il n'est pas possible de définir des tours d'éclatements. Il est cependant tout-à-fait possible d'éclater le plan projectif presque complexe en plusieurs points distincts.

Projections quasiconformes

Pour tout point P et toute application J -holomorphe $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{P\}$ dont l'image évite P , la fonction $\pi_P \circ f : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est bien définie. Lorsque J correspond à la structure standard J_0 sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, cette fonction est holomorphe. Ce n'est plus le cas pour une structure presque complexe arbitraire : l'application $\pi_P \circ f$ est alors simplement quasiconforme. Rappelons de quoi il s'agit.

(a) Applications quasiconformes

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ une fonction définie sur un ouvert Ω de \mathbb{C} . Elle est dite *absolument continue sur les droites* si sa restriction à presque tout segment horizontal ou vertical contenu dans Ω est absolument continue. Les distributions $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ peuvent alors être considérées comme des fonctions localement intégrables.

Etant donné un réel $\alpha \in [0, 1[$, une application $f : \Omega \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ absolument continue sur les droites est dite α -*quasiconforme* si ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ vérifient presque partout :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq \alpha \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|.$$

Le théorème d'Ahlfors-Bers montre qu'en reparamétrant une application quasiconforme par un homéomorphisme convenable on obtient une fonction holomorphe :

Théorème 28. ([27]) Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ une application α -quasiconforme définie sur le disque unité de \mathbb{C} . Il existe un homéomorphisme α -quasiconforme $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ et une application holomorphe $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tels que $f = g \circ \phi$.

Les fonctions α -quasiconformes ont donc des propriétés topologiques identiques à celles des fonctions holomorphes : elles vérifient le principe du maximum (en d'autres termes, une fonction α -quasiconforme non constante est ouverte) et le principe des zéros isolés (l'ensemble des antécédents d'un point par une fonctions α -quasiconforme non constante est discret). Par ailleurs, les homéomorphismes α -quasiconformes vérifient un critère intéressant de normalité :

Théorème 29. ([27]) A extraction d'une sous-suite près, une suite d'homéomorphismes α -quasiconformes $\phi_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ du disque unité converge sur tout compact vers un homéomorphisme α -quasiconforme ou vers une application constante.

Une fonction α -quasiconforme de classe \mathcal{C}^1 préserve l'orientation, puisque son jacobien vérifie :

$$J_f = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 \geq \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 (1 - \alpha^2).$$

L'aire de l'image d'un domaine Ω par une application α -quasiconforme f de classe \mathcal{C}^1 peut être définie classiquement par :

$$\text{Aire}(f(\Omega)) = \int_{\Omega} f^* \omega_1.$$

De la même façon, nous pouvons définir la longueur du bord de l'image d'un compact à bord lisse par une application quasiconforme de classe \mathcal{C}^1 . La théorie de recouvrement des surfaces d'Ahlfors est alors entièrement valable pour les applications quasiconformes : nous disposons du lemme de recouvrement, de l'inégalité d'Ahlfors, ainsi que de tous les théorèmes qui s'en déduisent (en particulier, les inégalités (2) et (4), voir introduction).

Notons que le théorème 28 permet de définir l'aire de l'image d'une application α -quasiconforme $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ non nécessairement dérivable : si $f = g \circ \phi$, où $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est holomorphe et $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ est un homéomorphisme α -quasiconforme, pour tout domaine Ω' de \mathbb{D} :

$$\text{Aire}(f(\Omega')) = \int_{\Phi(\Omega')} g^* \omega_1.$$

(b) Projections centrales de J -courbes

L'existence d'un prolongement lipschitzien de la structure presque complexe \widetilde{J}^P dans l'éclaté presque complexe de $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \omega_2, J)$ au point P permet de montrer que la projection centrale d'une J -courbe donne une application quasiconforme (voir [16]) :

Proposition 30. Il existe un réel $\alpha_P \in]0, 1[$ tel que pour tout J -disque $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{P\}$, l'application $\pi_P \circ f$ soit α_P -quasiconforme.

Cette proposition nous permettra de nous ramener à la dimension complexe 1 à l'aide de projections centrales, et d'appliquer la théorie d'Ahlfors.

Forme normale de J le long d'une J -droite

Soit L une J -droite. La structure presque complexe J admet une forme normale le long de J :

Proposition 31. Soit L_0 une droite projective de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Il existe deux ouverts U et U_0 contenant respectivement L et L_0 et un difféomorphisme $\Phi : U \rightarrow U_0$ envoyant L sur L_0 , et tel que pour tout point P de L_0 , $(\Phi_* J)_P = (J_0)_P$.

Rappelons d'abord (voir J.C. Sikorav [33]) qu'il existe un difféomorphisme Φ' de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tel que $\Phi'(L) = L_0$ et $\Phi'_* J$ coïncide avec J_0 tangentiuellement le long de L_0 , au sens où :

$$\forall P \in L_0, \forall v \in T_P L_0, (\Phi'_* J)_P(v) = (J_0)_P(v).$$

Nous pouvons donc supposer que L est une J -droite le long de laquelle J et J_0 coïncident tangentiuellement. Il reste à redresser J sur J_0 normalement à L .

Fixons un point P_0 de L . Comme J admet une forme normale près de P_0 , il est possible de construire un difféomorphisme d'un voisinage de L , stabilisant L , et transportant J sur une structure presque complexe coïncidant avec J_0 près de P_0 , le long de L . Quitte à composer par ce difféomorphisme, nous pouvons donc supposer qu'il existe un petit disque $\delta \subset L$ contenant P_0 tel que $J = J_0$ sur δ .

Fixons un point P_1 hors de L . Pour tout point $P \in L \setminus \delta$, il existe une unique J -droite L_P et une unique droite projectives L_P^0 contenant toutes deux P et P_1 . Comme une J -droite du pinceau centré en P_0 suffisamment proche de L coupe L_P^0 en un unique point, il existe un voisinage U de $L \setminus \delta$ et un difféomorphisme de U envoyant les J -disques $L_P \cap U$ sur les disques holomorphes $L_P^0 \cap U$. Nous pouvons le prolonger en un difféomorphisme d'un voisinage de L laissant L invariante et égal à l'identité près de P_0 . Quitte à composer par ce difféomorphisme, nous pouvons supposer que les J -disques $L_P \cap U$ sont en fait des disques holomorphes. Notons J_P la structure presque complexe induite sur $L_P \cap U$ par J . Le résultat voulu s'obtient à l'aide d'une famille lisse de difféomorphismes Φ_P de $L_P \cap U$ tels que $(\Phi_P)_* J_P$ coïncide avec J_0 en P .

2.2.6 Courants positifs et fonctions plurisousharmoniques dans un contexte presque complexe

Nous rappelons brièvement les notions de courants positifs et de fonctions plurisousharmoniques dans un contexte presque complexe. Nous renvoyons à [32] pour plus de détails.

Courants positifs

L'automorphisme J se prolonge en un automorphisme \mathbb{C} -linéaire, encore noté J , du complexifié $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_{\mathbb{R}}\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ du fibré tangent réel $T_{\mathbb{R}}\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ du plan projectif. Notons respectivement $T_J^{1,0}$ et $T_J^{0,1}$ les sous-fibrés de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_{\mathbb{R}}\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dont les fibres sont les sous-espaces propres de J associés aux valeurs propres i et $-i$, et $T_{J,1,0}^*, T_{J,0,1}^*$ leurs duaux. Notons enfin $\bigwedge_J^{1,1}$ l'espace des formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ , de bidegré $(1, 1)$.

Un courant T est dit de type $(1, 1)$ s'il s'écrit localement comme une forme différentielle de bidegré $(1, 1)$ dont les coefficients sont des distributions.

Une forme θ de bidegré $(1, 1)$ est dite positive si pour tout champ de vecteur ζ , $\theta(\zeta, J\zeta) \geq 0$. Comme nous sommes en bidegré $(1, 1)$, une telle forme différentielle s'écrit localement comme une somme de formes du type $i\alpha \wedge \bar{\alpha}$, où $\alpha \in T_{J,1,0}^*$.

Un courant T de bidegré $(1, 1)$ est positif si pour tout $(1, 1)$ -forme θ positive, $T(\theta) \geq 0$. Si (ζ_1, ζ_2) est un repère local du fibré $T_J^{1,0}$, d'après [32], T s'écrit dans le repère dual (ζ_1^*, ζ_2^*) :

$$T = iT_{1,1}\zeta_1^* \wedge \bar{\zeta}_1^* + iT_{1,2}\zeta_1^* \wedge \bar{\zeta}_2^* + iT_{2,1}\zeta_2^* \wedge \bar{\zeta}_1^* + iT_{2,2}\zeta_2^* \wedge \bar{\zeta}_2^*$$

où les $T_{r,s}$ sont des distributions d'ordre zéro, donc des mesures de Radon complexes, avec $T_{1,1}$ et $T_{2,2}$ positives. De plus, $\|T_{1,2}\|, \|T_{2,1}\| \leq 2T_{1,1} + 2T_{2,2}$. En particulier, en écrivant la forme locale du courant dans le repère $(\lambda_1\zeta_1, \lambda_2\zeta_2)$, avec $\lambda_2 \gg \lambda_1 > 0$, on montre que si $T_{2,2} = 0$, alors $T_{1,2} = T_{2,1} = 0$.

Les courants positifs sont d'ordre zéro, et une suite de courants positifs de masse uniformément bornée admet donc une valeur d'adhérence pour la topologie faible, qui est encore un courant positif. Si c est une courbe J -holomorphe, le courant $[c]$ d'intégration sur c est positif.

Bien que ne disposant pas d'un théorème de Siu pour les courants positifs fermés, nous pouvons malgré tout isoler leur composante singulière portée par une J -droite donnée : si T est un courant positif fermé du plan projectif presque complexe, pour toute J -droite L , le courant $\mathbb{1}_L T$ est positif fermé, et s'écrit donc $\mathbb{1}_L T = \alpha[L]$, où α est un réel positif. Si Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont trois J -droites du plan projectif presque complexe, T admet la décomposition suivante :

$$T = T' + \alpha_1[\Delta_1] + \alpha_2[\Delta_2] + \alpha_3[\Delta_3]$$

où les α_k sont positifs et T' est un courant positif fermé dont les J -droites Δ_k ne sont pas des composantes singulières.

Fonctions plurisousharmoniques

Rappelons brièvement ce qu'est une fonction plurisousharmonique dans le contexte presque complexe. Si U est un ouvert de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, une application $u : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite plurisousharmonique si pour tout J -disque $f : \mathbb{D} \rightarrow U$, l'application $u \circ f$ est sous-harmonique.

Si P est un point du plan projectif presque complexe, il existe un difféomorphisme u d'un voisinage de P dans un ouvert de \mathbb{C}^2 envoyant J_P sur i . D'après [32], $P \mapsto \|u(P)\|^2$ ($\|\cdot\|$ désignant ici la norme hermitienne de \mathbb{C}^2) est plurisousharmonique. Tout point P possède donc une base $(U_t)_{0 \leq t \leq \varepsilon}$ de voisinages pseudo-convexes, donnés par : $U_t = u^{-1}([0, t])$. Ainsi, si $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \omega_2, J)$ est un plan projectif presque complexe, le diviseur exceptionnel E_P au-dessus de P dans l'éclaté presque complexe de \tilde{X}_P en P possède lui aussi une base de voisinages pseudo-convexes $(\tilde{U}_t = \tilde{\pi}_P^{-1}(U_t))_{0 \leq t \leq \varepsilon}$.

Si $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est un J -disque évitant P et dont le relevé \tilde{f}_P dans \tilde{X}_P vérifie : $\tilde{f}_P(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\tilde{U}_t$ pour un certain $0 < t < \varepsilon$, le principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques interdit que $\tilde{f}_P(\mathbb{D})$ soit contenu dans $\tilde{U}_{t'} \setminus \tilde{U}_t$, pour un certain $t < t' < \varepsilon$. Cette remarque nous sera utile au dernier paragraphe.

2.3 Démonstration du théorème de Borel presque complexe

Donnons-nous un plan projectif presque complexe $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$, fixons quatre J -droites L_1, L_2, L_3 et L_4 en position générale et notons $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ les diagonales de la configuration $C = \bigcup_{1 \leq j \leq 4} L_j$.

Nous allons raisonner par l'absurde : supposons qu'il existe une J -courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ non constante évitant la configuration C , dont l'image n'est pas contenue dans la réunion Δ des diagonales $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Nous allons construire à partir de f un courant positif fermé numériquement effectif. Nous allons ensuite montrer que ce courant est singulier, porté par les diagonales, à l'aide d'un lemme affirmant que le support de T est feuilleté par des J -disques dans l'adhérence de la courbe entière $f(\mathbb{C})$. Nous obtiendrons une contradiction en examinant plus précisément la situation aux points doubles de la configuration, à l'aide d'éclatements presque complexes, et en nous inspirant du travail de McQuillan [?].

D'après la proposition 30, les applications $f_{S_j} = \pi_{S_j} \circ f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont α -quasiconformes pour un certain réel $\alpha \in]0, 1[$. Par ailleurs, nous serons amenés à travailler dans l'éclaté presque complexe \tilde{X} du plan projectif en les six points doubles S_k , $1 \leq k \leq 6$. Notons $\Pi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ la projection canonique contractant les diviseurs exceptionnels E_{S_k} sur les points S_k . La transformée stricte \tilde{L} d'une J -droite L est définie par :

$$\tilde{L} = \Pi^{-1} \left(\overline{L \setminus \bigcup_{1 \leq k \leq 6} S_k} \right).$$

Notons encore \tilde{J} la structure presque complexe dans \tilde{X} obtenue par prolongement comme expliqué dans la proposition 26, et fixons une 2-forme $\omega_{\tilde{X}}$ sur \tilde{X} , non dégénérée et positive par rapport à \tilde{J} , construite comme il est expliqué dans la proposition 27. La J -courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C$ se relève alors en une \tilde{J} -courbe entière $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \tilde{X}$ évitant les diviseurs exceptionnels et les \tilde{J} -courbes \tilde{L}_j .

2.3.1 Construction d'un courant fermé numériquement effectif relativement aux diagonales

Nous avons déjà vu comment construire un courant positif fermé numériquement effectif à partir d'une courbe entière. Nous allons faire de même avec la J -courbe f , la \tilde{J} -courbe \tilde{f} et les applications α -quasiconformes $f_{S_j} = \pi_{S_j} \circ f$.

Plus précisément, nous cherchons à construire une suite (R_n) strictement croissante tendant vers l'infini telle que les suites de courants

$$\left(\frac{T_{f, R_n}}{T_{f, R_n}(\omega_2)} \right), \left(\frac{T_{\tilde{f}, R_n}}{T_{\tilde{f}, R_n}(\omega_{\tilde{X}})} \right) \text{ et } \left(\frac{T_{f_{S_j}, R_n}}{T_{f_{S_j}, R_n}(\omega_1)} \right)$$

convergent vers des courants fermés.

Construction d'un courant fermé

Soit (R_n) une suite strictement croissante de réels positifs tendant vers l'infini. Les suites de courants $\left(\frac{T_{f, R_n}}{T_{f, R_n}(\omega_2)} \right)$, $\left(\frac{T_{\tilde{f}, R_n}}{T_{\tilde{f}, R_n}(\omega_{\tilde{X}})} \right)$ et $\left(\frac{T_{f_{S_j}, R_n}}{T_{f_{S_j}, R_n}(\omega_1)} \right)$ sont de masse uniformément majorée : quitte à remplacer (R_n) par une sous-suite, elles convergent au sens faible vers des courants positifs T , \tilde{T} et T_{S_j} . Si de plus la suite (R_n) est telle que les suites $\left(\frac{L_{f, R_n}(\omega_2)}{T_{f, R_n}(\omega_2)} \right)$, $\left(\frac{L_{\tilde{f}, R_n}(\omega_{\tilde{X}})}{T_{\tilde{f}, R_n}(\omega_{\tilde{X}})} \right)$ et $\left(\frac{L_{f_{S_j}, R_n}(\omega_1)}{T_{f_{S_j}, R_n}(\omega_1)} \right)$ tendent vers 0, d'après le théorème de Stokes, ces courants sont fermés. Nous recherchons donc une suite (R_n) telle que :

$$\left(\frac{L_{f, R_n}(\omega_2)}{T_{f, R_n}(\omega_2)} \right), \left(\frac{L_{\tilde{f}, R_n}(\omega_{\tilde{X}})}{T_{\tilde{f}, R_n}(\omega_{\tilde{X}})} \right) \text{ et } \left(\frac{L_{f_{S_j}, R_n}(\omega_1)}{T_{f_{S_j}, R_n}(\omega_1)} \right) \quad (1 \leq j \leq 6)$$

convergent vers 0.

Rappelons que f et \tilde{f} ne sont pas constantes. Il en va de même pour les applications f_{S_j} ($1 \leq j \leq 6$) : en effet, si l'application f_{S_j} était constante, l'image de f serait contenue dans une J -droite L du pinceau

centré en S_j . L'image de l'application holomorphe $f : (\mathbb{C}, i) \rightarrow (L, J) \simeq (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), i)$ éviterait alors l'ensemble $C \cap L$. D'après le petit théorème de Picard, $C \cap L$ contiendrait au plus trois éléments, et donc la J -droite L serait l'une des diagonales Δ_k de la configuration C , ce que nous avons exclu.

Ainsi, les caractéristiques d'aire $T_{f,R}(\omega_2)$, $T_{\tilde{f},R}(\tilde{\omega})$ et $T_{f_{S_j},R}(\omega_1)$ tendent vers l'infini quand R tend vers l'infini.

Les 2-formes $f^*\omega_2$, $\tilde{f}^*\omega_{\tilde{X}}$ et $f_{S_j}^*\omega_1$ sont positives, donc de la forme :

$$f^*\omega_2 = \lambda^2 idz \wedge d\bar{z}, \quad \tilde{f}^*\omega_{\tilde{X}} = \tilde{\lambda}^2 idz \wedge d\bar{z}, \quad f_{S_j}^*\omega_1 = \lambda_{S_{12}}^2 idz \wedge d\bar{z}.$$

Le théorème 4 s'applique donc, et pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble :

$$\left\{ R > 1 \mid \frac{L_{f,R}(\omega_2) - L_{f,1}(\omega_2)}{T_{f,R}(\omega_2)}, \frac{L_{\tilde{f},R}(\omega_{\tilde{X}}) - L_{\tilde{f},1}(\omega_{\tilde{X}})}{T_{\tilde{f},R}(\omega_{\tilde{X}})}, \frac{L_{f_{S_j},R}(\omega_1) - L_{f_{S_j},1}(\omega_1)}{T_{f_{S_j},R}(\omega_1)} \geq \varepsilon \right\}$$

est de mesure de Lebesgue finie. Nous en déduisons que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble :

$$\left\{ R > 1 \mid \frac{L_{f,R}(\omega_2)}{T_{f,R}(\omega_2)}, \frac{L_{\tilde{f},R}(\omega_{\tilde{X}})}{T_{\tilde{f},R}(\omega_{\tilde{X}})}, \frac{L_{f_{S_j},R}(\omega_1)}{T_{f_{S_j},R}(\omega_1)} \geq \varepsilon \right\}$$

est de mesure de Lebesgue finie. Il existe donc une infinité de suites vérifiant les conditions requises.

Nous fixons à partir de maintenant une suite (R_n) telle que les suites $\left(\frac{T_{f,R_n}}{T_{f,R_n}(\omega_2)}\right)$, $\left(\frac{T_{\tilde{f},R_n}}{T_{\tilde{f},R_n}(\omega_{\tilde{X}})}\right)$ et $\left(\frac{T_{f_{S_j},R_n}}{T_{f_{S_j},R_n}(\omega_1)}\right)$ convergent vers des courants positifs T , \tilde{T} et T_{S_j} . Nous allons démontrer pour les courants T et \tilde{T} et certains diviseurs de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et \tilde{X} des inégalités semblables à celle énoncée au théorème 5.

Intersection algébrique et intersection géométrique

Les courants T et \tilde{T} sont fermés : si ω (respectivement $\tilde{\omega}$) est une 2-forme fermée sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (respectivement sur \tilde{X}), le réel $T(\omega)$ (respectivement $\tilde{T}(\tilde{\omega})$) ne dépend que de la classe de cohomologie de ω (respectivement $\tilde{\omega}$). Cela permet, par dualité de Poincaré, de définir une classe d'homologie pour les courants T et \tilde{T} . Ainsi, si Y est une sous-variété compacte de dimension 2 de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, son intersection algébrique avec T est définie à l'aide d'une 2-forme différentielle ω_Y contenue dans la classe fondamentale de cohomologie $\{Y\}$ de Y par :

$$[T].[Y] = T(\omega_Y).$$

De même, si \tilde{Y} est une sous-variété compacte de dimension 2 de \tilde{X} , l'intersection algébrique $[\tilde{T}].[Y]$ est définie à l'aide d'une 2-forme $\omega_{\tilde{Y}} \in \{\tilde{Y}\}$ par :

$$[\tilde{T}].[Y] = \tilde{T}(\omega_{\tilde{Y}}).$$

Si par ailleurs Y et \tilde{Y} sont des sous-variétés presque complexes de $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ et (\tilde{X}, \tilde{J}) ne contenant pas $f(0)$ et $\tilde{f}(0)$, les sous-ensembles $f^{-1}(Y)$ et $\tilde{f}^{-1}(\tilde{Y})$ sont discrets dans \mathbb{C} : nous pouvons définir les intersections géométriques asymptotiques $I(T, Y)$ de T et Y et $I(\tilde{T}, \tilde{Y})$ de \tilde{T} et \tilde{Y} par :

$$I(T, Y) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_{f,R_n}(\omega_2)} \int_0^{R_n} \int_{D(0,t)} f^*[Y] \frac{dt}{t}$$

$$I(\tilde{T}, \tilde{Y}) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_{\tilde{f},R_n}(\omega_{\tilde{X}})} \int_0^{R_n} \int_{D(0,t)} (\tilde{f})^*[\tilde{Y}] \frac{dt}{t}.$$

Lorsque J correspond à la structure complexe standard J_0 , le lemme de Brunella (voir [7]) affirme que l'intersection algébrique majore l'intersection géométrique asymptotique. Nous allons voir que ce résultat demeure dans un contexte presque complexe dans le cas où Y est une J -droite :

Théorème 32. *Soit L une J -droite de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ telle que $f(0) \notin L$. Alors :*

$$I(T, L) \leq [T].[L].$$

Cette inégalité correspond à un premier théorème de Nevanlinna pour les J -courbes entières dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Une inégalité similaire est valable pour certaines sous-variétés presque complexes de l'éclaté de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en un nombre fini de points. Enonçons-le dans le cas particulier de \tilde{X} :

Théorème 33. *Rappelons que E_{S_k} désigne le diviseur exceptionnel au-dessus de S_k ($1 \leq k \leq 6$), et $\tilde{\Delta}_j$ la transformée stricte de la diagonale Δ_j ($1 \leq j \leq 3$). Alors :*

$$\begin{aligned} I(\tilde{T}, E_{S_k}) &\leq [\tilde{T}] \cdot [E_{S_k}] \\ I(\tilde{T}, \tilde{\Delta}_j) &\leq [\tilde{T}] \cdot [\tilde{\Delta}_j]. \end{aligned}$$

Commençons par démontrer le théorème 32. Nous allons nous ramener à une situation proche du cas holomorphe pour pouvoir mimer la démonstration du théorème 5. Notons :

$$d_J^c = -d \circ J.$$

La J -holomorphicité de f implique que pour toute fonction u :

$$f^* d_J^c u = d^c(u \circ f).$$

Nous allons montrer qu'il existe une fonction majorée u à singularité logarithmique le long de L et une 1-forme α bornée telles que la 2-forme :

$$\omega_L = [L] - dd_J^c u + d\alpha$$

soit fermée et dans la classe de cohomologie de ω_2 .

D'après la proposition 31, il existe un difféomorphisme ϕ d'un voisinage ouvert U de L vers un voisinage ouvert U_0 d'une droite projective standard L_0 de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, tel que $\phi(L) = L_0$ et $\phi_* J$ coïncide avec J_0 le long de L_0 . Soit alors s une section du fibré en droites holomorphe sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ associé au diviseur L_0 , dont le diviseur d'annulation $\{s = 0\}$ est égal au diviseur L_0 . Choisissons une métrique hermitienne $|\cdot|$ sur ce fibré de sorte que $dd^c \log |s| = 0$ hors de U_0 (c'est possible puisque le fibré est trivial au-dessus de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus U_0$). D'après le théorème de Lelong-Poincaré (voir par exemple [14]), la 2-forme ω_{L_0} définie au sens des courants par :

$$\omega_{L_0} = [L_0] - dd^c \log |s|$$

est dans la classe $\{L\}$. La 2-forme $\omega_L = \phi^* \omega_{L_0}$, à support dans U , est aussi un élément de $\{L\}$ et s'écrit :

$$\begin{aligned} \omega_L &= [L] - d(\phi^*(d^c \log |s|)) = [L] - d(\phi^*(-(d \log |s|) \circ J_0)) \\ &= [L] - d(\phi^*(-(d \log |s|) \circ \phi_* J)) - d(\phi^*(-(d \log |s|) \circ (J_0 - \phi_* J))) \\ &= [L] - d(\phi^*(-(d \log |S|) \circ J)) + d(\phi^*((d \log |s|) \circ (J_0 - \phi_* J))). \end{aligned} \tag{2.3}$$

La 1-forme $\alpha = \phi^*(d \log |s|) \circ (J_0 - \phi_* J)$ est définie sur U et bornée près de L , puisque $\phi_* J$ est lisse et coïncide avec J_0 le long de L_0 . Comme $d\alpha$ est à support dans U , α se prolonge en une 1-forme sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ à support dans U . La 2-forme ω_L est donc de la forme voulue :

$$\omega_L = [L] - dd_J^c u + d\alpha \tag{2.4}$$

avec $u = \log |s \circ \phi|$.

En appliquant T_{f, R_n} à l'égalité (2.4), la formule de Jensen (voir par exemple [23]) :

$$\int_0^R \int_{D(0,r)} dd^c v \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(Re^{i\theta}) d\theta - v(0)$$

donne en particulier :

$$T_{f, R_n}(\omega_L) = \int_0^{R_n} \int_{D(0,t)} f^*[L] \frac{dt}{t} + \int_0^{R_n} \int_{\partial D(0,t)} f^* \alpha \frac{dt}{t} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \circ f(R_n e^{i\theta}) d\theta + \log u \circ f(0).$$

Comme $|s|$ est majorée et $f(0) \notin L$, le terme $-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \circ f(R_n e^{i\theta}) d\theta + u \circ f(0)$ est minoré par une constante réelle, éventuellement négative. Par ailleurs, comme α est bornée sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, on a :

$$\int_0^{R_n} \int_{\partial D(0,t)} f^* \alpha \frac{dt}{t} = O(L_{f, R_n}(\omega_2)).$$

Le théorème 32 s'en déduit. \square

Ce premier théorème ne nous sera pas utile en soi : nous aurons surtout usage du théorème 33. Nous le prouvons en montrant que les représentants des classes $\{E_{S_k}\}$ et $\{\Delta_j\}$ s'obtiennent à l'aide d'expressions similaires à (2.4).

Rappelons qu'il existe un difféomorphisme $\tilde{\phi}_j$ de classe \mathcal{C}^{1+lip} d'un voisinage ouvert \tilde{U}_j du diviseur exceptionnel E_{S_j} vers un voisinage ouvert \tilde{U}_j^0 du diviseur exceptionnel $E_{S_j}^0$ au-dessus de S_j dans l'éclaté standard en S_j , tel que $(\tilde{\phi}_j)_*\tilde{J}$ coïncide avec i le long de $E_{S_j}^0$. Notons $d_{\tilde{J}}^c = -d^c \circ \tilde{J}$. En écrivant le théorème de Lelong-Poincaré pour le diviseur $E_{S_j}^0$ dans l'éclaté de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en S_j , on démontre comme plus haut qu'il existe une 2-forme $\omega_{E_{S_j}} \in \{E_{S_j}\}$ à support dans \tilde{U}_j , s'écrivant au sens des courants :

$$\omega_{E_{S_j}} = [E_{S_j}] - dd_{\tilde{J}}^c \tilde{u}_j + d\tilde{\alpha}_j \quad (2.5)$$

où \tilde{u}_j est une fonction majorée à support dans \tilde{U}_j et à singularité logarithmique le long de E_{S_j} et $\tilde{\alpha}_j$ est une 1-forme éventuellement discontinue le long de E_{S_j} , mais bornée.

Un raisonnement similaire montre qu'il existe des 2-formes fermées $\omega_{\tilde{\Delta}_j}$ dans la classe $\{\tilde{\Delta}_j\}$ s'écrivant au sens des courants :

$$\omega_{\tilde{\Delta}_j} = [\tilde{\Delta}_j] - dd_{\tilde{J}}^c v_j + d\beta_j \quad (2.6)$$

où v_j est une fonction majorée à singularité logarithmique le long de $\tilde{\Delta}_j$ et β_j est une 1-forme bornée.

En appliquant $T_{\tilde{f}, R_n}$ aux identités (2.5) et (2.6) et en utilisant la formule de Jensen comme plus haut, on obtient le théorème 33. \square

Avant d'en venir à la démonstration proprement dite du théorème de Borel, rappelons pourquoi les caractéristiques d'aire des fonctions f_{S_j} sont dominées par celle de f .

Comparaison des caractéristiques $T_{f, R_n}(\omega_2)$ et $T_{f_{S_j}, R_n}(\omega_1)$

Lorsque J est la structure complexe standard J_0 , il est connu que :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_{f_{S_j}, R_n}(\omega_1)}{T_{f, R_n}(\omega_2)} \leq 1. \quad (2.7)$$

Cette inégalité provient de l'existence d'une fonction majorée u_j ayant une singularité logarithmique en S_j telle que $\pi_{S_j}^* \omega_1 = \omega_2 + dd^c u_j$. Dans le cas presque complexe, d'après [16], il existe une fonction u_j majorée à singularité logarithmique en S_j et une 1-forme bornée α sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{S_j\}$ telles que :

$$\pi_{S_j}^* \omega_1 = \omega_2 + dd_{\tilde{J}}^c u_j + d\alpha_j.$$

La formule de Jensen montre alors que l'inégalité (2.7) reste valable dans un contexte presque complexe. Elle nous sera utile au paragraphe 2.3.2.

Nous disposons maintenant des outils nécessaires à la démonstration proprement dite du théorème de Borel. Dans le paragraphe suivant, nous ne nous intéressons qu'au courant T . Nous allons montrer qu'il est singulier, porté par les diagonales.

2.3.2 Le courant T est singulier

Dans ce paragraphe, nous démontrons que le courant T est singulier et supporté par les diagonales. En toute généralité, le courant T admet la décomposition suivante :

$$T = T' + \alpha_1[\Delta_1] + \alpha_2[\Delta_2] + \alpha_3[\Delta_3]$$

où les réels α_j ($1 \leq j \leq 3$) sont positifs ou nuls, et où le courant T' est fermé. En effet, d'après [18], pour $1 \leq j \leq 3$, le courant $\mathbb{1}_{\Delta_j} T$ est fermé. Comme il est d'ordre zéro (car positif), il est de la forme (voir [14]) :

$$\mathbb{1}_{\Delta_j} T = \alpha_j[\Delta_j].$$

Le courant $T' = T - (\alpha_1[\Delta_1] + \alpha_2[\Delta_2] + \alpha_3[\Delta_3])$ est donc fermé.

Nous allons démontrer que le courant T' est nul, c'est-à-dire que le courant T est singulier, porté par les diagonales :

Proposition 34.

$$T = \alpha_1[\Delta_1] + \alpha_2[\Delta_2] + \alpha_3[\Delta_3].$$

Nous procédons par l'absurde : supposons le courant T' non nul. Nous allons établir que son support est alors feuilleté par des J -disques limites de morceaux de la J -courbe entière f , ce qui aboutira à une absurdité aux points doubles de la configuration C .

Lemme géométrique

Enonçons sans plus tarder le lemme géométrique sur lequel repose la proposition 34 :

Lemme 1. *Soit P un point du support de T' . Il existe une suite de disques topologiques d_n contenus dans \mathbb{C} tels que la suite de J -disques $f(d_n)$ converge vers un J -disque d non trivial de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, contenant P et contenu dans le support de T' .*

Voyons d'abord comment ce lemme entraîne la proposition 34. Commençons par établir la propriété suivante, qui est une forme de théorème d'Hurwitz pour le courant T' :

Proposition 35. Toute J -droite intersecte le support du courant T' .

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe une J -droite L ne rencontrant pas le support de T' . Fixons un point P de L : il existe au moins une J -droite L' du pinceau centré en P qui intersecte $\text{Supp}(T')$. Par tout point $Q \in \text{Supp}(T') \cap L'$, passe un J -disque d_Q contenu dans le support de T' . Les J -disques d_Q ne peuvent tous être contenus dans L' , car sinon l'intersection de L' et du support de T' serait ouverte dans L' , et L' serait contenue dans $\text{Supp}(T')$: la J -droite L rencontrerait alors le support de T' au point P . Il existe donc un J -disque d_Q non contenu dans L' , donc d'intersection positive avec L' : toute J -droite du pinceau en P assez proche de L' intersecte d_Q , donc par connexité, toute droite du pinceau intersecte le support de T' , ce qui est absurde. \square

Cette proposition s'applique en particulier aux J -droites de la configuration C ; soit $1 \leq j \leq 4$: étant donné un point $P \in L_j \cap \text{Supp}(T')$, il existe un J -disque d adhérent à la J -courbe $f(\mathbb{C})$, passant par P et contenu dans le support de T' . Par le théorème d'Hurwitz, ce J -disque d est contenu dans la J -droite L_j , puisque cette dernière est évitée par f . Comme plus haut, nous en déduisons que L_j est contenue dans le support de T' .

Examinons la situation aux points doubles de la configuration : le point d'intersection S_1 de L_1 et L_2 , par exemple, est contenu dans le support de T' . Il existe donc un J -disque d non trivial passant par S_1 et, compte-tenu de ce qui précède, contenu à la fois dans L_1 et L_2 , ce qui est absurde.

La proposition 34 se réduit donc au lemme géométrique. Venons-en à sa démonstration : elle repose sur l'étude de la structure de T' , que nous étudierons à l'aide de projections centrales et de la théorie d'Ahlfors.

Démonstration du lemme géométrique

Soit $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ un point appartenant au support de T' . Les J -droites L_j étant en position générale, il existe au moins deux J -droites distinctes de la configuration C , disons L_1 et L_2 , ne contenant pas le point P . Nous allons examiner le courant T' depuis leur point d'intersection S_1 , à l'aide de la projection centrale $\pi_{S_1} : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{S_1\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

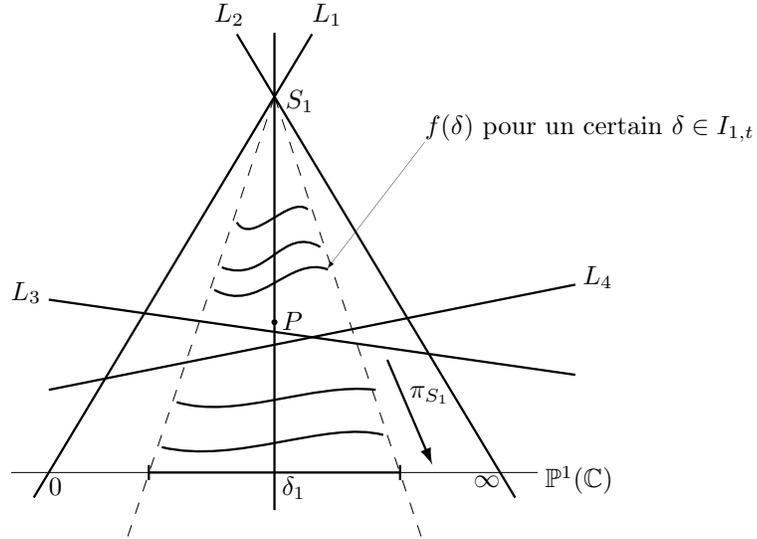
Quitte à composer à droite par un automorphisme de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, nous pouvons toujours supposer que les points $\pi_{S_1}(L_1 \setminus \{S_1\})$, $\pi_{S_1}(L_2 \setminus \{S_1\})$ et $\pi_{S_1}(P)$ coïncident respectivement avec les points 0 , ∞ et 1 . Fixons alors un disque ouvert δ_1 contenant le point 1 .

Comme la J -courbe entière f évite les J -droites L_1 et L_2 , l'application α -quasiconforme $f_{S_1} = \pi_{S_1} \circ f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ évite les points 0 et ∞ . D'après l'inégalité (5), sa caractéristique de Nevanlinna est donc équivalente à l'intégrale logarithmique du nombre d'îles de degré 1 au-dessus de δ_1 . Plus précisément, en notant $I_{1,t}$ l'ensemble des îles de degré 1 au-dessus de δ_1 dans le disque $\overline{D}(0, t)$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{R_n} \#I_{1,t} \frac{dt}{t}}{T_{f_{S_1}, R_n}(\omega_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})})} = 1. \quad (2.8)$$

Remarquons que si δ est une île de degré 1 au-dessus de δ_1 , la restriction $(\pi_{S_1})|_{f(\delta)} : f(\delta) \rightarrow \delta_1$ de la projection de centre S_1 au J -disque δ est un homéomorphisme vers δ_1 .

Figure 2.2



La relation (2.8) nous amène à nous interroger sur la contribution, quant à la masse du courant T près de P , des courants d'intégration $[f(\delta)]$ sur les images des îles δ de degré 1 au-dessus de δ_1 . Dans ce sens, il est naturel d'introduire le courant T_1 défini par :

$$T_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_{f, R_n}(\omega_2)} \int_0^{R_n} \left(\sum_{d \in I_{1,t}} [f(d)] \right) \frac{dt}{t}.$$

Notons qu'il peut être nécessaire de remplacer la suite (R_n) par une sous-suite pour que la convergence ait lieu ; la définition ci-dessus a donc un sens en remplaçant (R_n) par une sous-suite, que nous noterons encore (R_n) . Le courant T_1 est positif mais n'a aucune raison d'être fermé.

(a) Structure du courant T_1

Nous allons voir que T_1 peut s'écrire comme une moyenne de courants d'intégration sur des J -disques homéomorphes à δ_1 via π_{S_1} . Pour cela, notons \mathcal{D} l'ensemble des J -disques de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et introduisons l'ensemble :

$$\mathcal{G} = \{D \in \mathcal{D} \mid D \cap C = \emptyset, (\pi_{S_1})|_D : D \rightarrow \delta_1 \text{ est un homéomorphisme}\}.$$

Remarquons que l'ambiguïté quant à la signification de l'expression J -disque pose problème. Nous parlons ici de l'image d'un disque topologique de \mathbb{C} par une application J -holomorphe, indépendamment de son paramétrage. Cette ambiguïté peut être levée en choisissant pour tout J -disque D de \mathcal{G} un unique

paramétrage g_D par le disque unité tel que $\pi_{S_1} \circ g_D(0) = 1$ et $(\pi_{S_1} \circ g_D)'(0) \in \mathbb{R}$. La topologie associée à la métrique de Hausdorff sur \mathcal{G} correspond alors à la topologie de la convergence uniforme sur l'ensemble $\{g_D, D \in \mathcal{G}\}$, que nous assimilerons à \mathcal{G} .

Munissons alors \mathcal{G} de la tribu borélienne associée à la topologie de la convergence uniforme, et notons δ_D la masse de Dirac en un point D de \mathcal{G} . Pour tout entier n , nous noterons μ_n la mesure définie sur \mathcal{G} par :

$$\mu_n = \frac{1}{T_{f,R_n}(\omega_2)} \int_0^{R_n} \left(\sum_{d \in I_{1,t}} \delta_{f(d)} \right) \frac{dt}{t}.$$

Le courant T_1 s'écrit alors :

$$T_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_{f,R_n}(\omega_2)} \int_0^{R_n} \sum_{d \in I_{1,t}} [f(d)] \frac{dt}{t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{G}} [D] d\mu_n(D).$$

Nous allons vérifier que μ_n a une valeur d'adhérence. Notons $\mathcal{M}(\overline{\mathcal{G}} \setminus \{S_1\})$ l'espace des mesures de masse bornée sur tout compact de $\overline{\mathcal{G}} \setminus \{S_1\}$. Nous allons vérifier que cet espace est compact pour la convergence faible sur tout compact, et qu'il contient les termes de la suite (μ_n) .

La compacité de $\mathcal{M}(\overline{\mathcal{G}} \setminus \{S_1\})$ provient de la proposition suivante, qui affirme que $\overline{\mathcal{G}} \setminus \{S_1\}$ est une réunion dénombrable de compacts.

Proposition 36. L'ensemble \mathcal{G} est relativement compact dans \mathcal{D} , et son adhérence vaut :

$$\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \cup (L_3 \cap \pi_{S_1}^{-1}(\delta_1)) \cup (L_4 \cap \pi_{S_1}^{-1}(\delta_1)) \cup \{S_1\}.$$

Par ailleurs, pour tout $\eta > 0$, l'ensemble \mathcal{G}_η des J -disques de $\overline{\mathcal{G}}$ évitant la boule de centre S_1 et de rayon η est compact. L'ensemble $\overline{\mathcal{G}} \setminus \{S_1\}$ est donc une réunion dénombrable de compacts :

$$\overline{\mathcal{G}} \setminus \{S_1\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{G}_{1/k}.$$

Démonstration. Soit (D_n) une suite de J -disques de \mathcal{G} . La suite $(\pi_{S_1} \circ g_{D_n})$ est une suite d'applications α -quasiconformes à valeurs dans le disque δ_1 : quitte à en extraire une sous-suite, nous pouvons affirmer qu'elle converge vers un homéomorphisme $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \delta_1$.

En vertu du lemme de reparamétrisation de Brody, il suffit pour établir la normalité de la suite (D_n) de vérifier que la suite (g_{D_n}) ne présente aucune explosion. Supposons donc le contraire : si (g_{D_n}) présente une explosion en un point z_0 de \mathbb{D} , nous en tirons par reparamétrisation une J -courbe entière $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ non constante, dont l'image est contenue dans la J -droite $L_{z_0} = \pi_{S_1}^{-1}(\varphi(z_0)) \cup \{S_1\}$ du pinceau centré en S_1 au-dessus de $\varphi(z_0)$. Par ailleurs, les J -disques D_n n'intersectant pas la configuration C , le théorème d'Hurwitz assure que l'image de la J -courbe g est contenue dans $L_{z_0} \setminus C$: nous disposons donc d'une courbe entière g à valeurs dans une surface de Riemann (L_{z_0}, J) conforme à la sphère de Riemann, et évitant les points d'intersections de L_{z_0} et de C . Ces points doivent être au plus deux, à cause du théorème de Picard, donc la J -droite L_{z_0} doit être une des trois diagonales de la configuration C . La proposition est donc démontrée lorsque $\pi_{S_1}^{-1}(\delta_1) \cup \{S_1\}$ ne contient pas de diagonale.

Dans le cas contraire L_{z_0} est une des trois diagonales, disons Δ_1 . Dans ce cas, z_0 ne peut prendre qu'une seule valeur : $z_0 = \varphi^{-1}(\pi_{S_1}(\Delta_1 \setminus \{S_1\}))$. Ainsi, la suite (g_{D_n}) est normale sur tout compact de $\mathbb{D} \setminus z_0$, donc sur un anneau $A = \overline{D}(0, R) \setminus D(0, r)$ du disque unité, avec $0 < r < R < 1$. Examinons la situation depuis un second point double de la configuration C , disons le point S_3 d'intersection de L_1 et L_3 : la suite d'applications α -quasiconformes $(\pi_{S_3} \circ g_{D_n})$ est normale sur l'anneau A . D'après le théorème 28, il existe une suite d'homéomorphismes α -quasiconformes $\Phi_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ et une suite de fonctions holomorphes $h_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ telles que $\pi_{S_3} \circ g_{D_n} = h_n \circ \Phi_n$. D'après le théorème 29, la suite (Φ_n) est normale sur \mathbb{D} : quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer qu'elle converge vers un homéomorphisme Φ . La suite d'applications holomorphes $h_n = h_n^{-1} \circ \pi_{S_3} \circ g_{D_n}$ est donc normale sur l'anneau A , et donc, en vertu du principe du maximum, sur le disque \mathbb{D} . La suite $(\pi_{S_3} \circ g_{D_n})$ est donc normale sur tout le disque \mathbb{D} . Ainsi, les applications α -quasiconformes $\pi_{S_1} \circ g_{D_n}$ et $\pi_{S_3} \circ g_{D_n}$ forment des familles normales. Comme l'application $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus L_1 \rightarrow (\pi_{S_1}(P), \pi_{S_3}(P)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ est un difféomorphisme, la suite (g_{D_n}) est normale, contrairement à ce que nous avons supposé.

La suite (g_{D_n}) ne peut donc pas présenter d'explosions, et constitue alors une famille normale. Nous en déduisons que \mathcal{G} est relativement compact. La suite de la proposition se déduit du théorème d'Hurwitz. \square

Les mesures (μ_n) ont donc leur support dans un ensemble relativement compact. Malheureusement, leur masse n'est pas forcément uniformément bornée, même si les courants $\int_G [D] d\mu_n(D)$ le sont : en effet, il existe des suites de J -disques de \mathcal{G} convergeant vers S_1 , dont l'aire tend vers 0 ; de tels disques peuvent donc apparaître en très grand nombre dans le support de μ_n sans faire exploser la masse des courants $\int_G [D] d\mu_n(D)$. En revanche, nous allons voir que la masse de μ_n est uniformément bornée sur les compacts \mathcal{G}_η .

Fixons un compact \mathcal{G}_η . Pour tout élément D de \mathcal{G}_η , la distance entre le point $g_D(0) \in L_{P,S_1}$ et les J -droites L_1 et L_2 est minorée par un réel ε_η strictement positif ne dépendant que de η . Comme la boule de centre $g_D(0)$ et de rayon ε_η ne contient pas tout le J -disque D , le théorème de Lelong assure que l'aire de D est minorée par un réel $a_\eta > 0$. Ainsi, la masse $\mu_n(\mathcal{G}_\eta)$ est majorée :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(\mathcal{G}_\eta) &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_{f,R_n}(\omega_2)} \int_0^{R_n} \sum_{d \in I_{1,t}, f(d) \in \mathcal{G}_\eta} 1 \frac{dt}{t} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_{f,R_n}(\omega_2)} \int_0^{R_n} \sum_{d \in I_{1,t}, f(d) \in \mathcal{G}_\eta} \frac{\text{Aire}(f(d))}{a_\eta} \frac{dt}{t} \\ &\leq \frac{T_1(\omega_2)}{a_\eta}. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, la suite de mesures μ_n admet donc une valeur d'adhérence μ définie sur $\overline{\mathcal{G}} \setminus \{S_1\}$. Le courant $\int_{\overline{\mathcal{G}} \setminus \{S_1\}} [D] d\mu(D)$ est bien défini (c'est-à-dire que la fonction $D \in \overline{\mathcal{G}} \setminus \{S_1\} \mapsto \text{Aire}(D)$ est intégrable pour μ) et coïncide avec le courant T_1 :

$$T_1 = \int_{\overline{\mathcal{G}} \setminus \{S_1\}} [D] d\mu(D).$$

Le support de T_1 s'exprime en fonction du support de μ :

Fait. Un J -disque du support de μ est une limite de J -disques de la forme $f(d_n)$, où d_n est un disque topologique de \mathbb{C} . Par ailleurs :

$$\text{Supp } T_1 \setminus \{S_1\} = \bigcup_{D \in \text{Supp } \mu} D.$$

Démonstration. La première assertion est vraie par construction de μ . Il est également vrai que tout point du support de T_1 est contenu dans un disque du support de μ . Réciproquement, montrons qu'un disque D du support de μ est inclus dans le support de T_1 . Soit $Q \in D$, soit $\eta > 0$ tel que S_1 n'appartienne pas à la boule de centre Q et de rayon η . Notons $B_{\eta/2}$ la boule de centre Q et de rayon $\eta/2$ pour la distance de Hausdorff dans $\overline{\mathcal{G}}$. Comme D est dans le support de μ , $\mu(B_{\eta/2}) > 0$. Par ailleurs, le théorème de Lelong assure que tout J -disque D' de $B_{\eta/2}$ est d'aire minorée par une constante c strictement positive. On en déduit que la masse de la boule de centre Q et de rayon η pour le courant T_1 est minorée par un réel $c\mu(B_{\eta/2})$ strictement positif, et donc que Q est dans le support de T_1 . \square

Cette propriété démontre le lemme géométrique lorsque le point P est dans le support du courant T_1 . Dans le cas contraire, nous allons voir que près de P , le courant T' est « vertical » relativement à la projection π_{S_1} . Nous concluons alors en examinant la situation depuis un autre point double de la configuration C .

(b) Le courant T_1 comme composante horizontale de T

Le courant T_1 est en quelque sorte la « composante horizontale » du courant T . Précisons ceci à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 37. Pour tout voisinage U de P contenu dans $\pi_{S_1}^{-1}(\delta_1)$, on a :

$$(\pi_{S_1})_*(\mathbf{1}_U T) = (\pi_{S_1})_*(\mathbf{1}_U T_1).$$

Démonstration. Fixons un voisinage U de P , contenu dans $\pi_{S_1}^{-1}(\delta_1)$. Le réel $(\pi_{S_1})_*(\mathbb{1}_U T_{f,R_n})(\omega_1)$ s'exprime en fonction de l'aire de l'image de $f^{-1}(U)$ par f_{S_1} :

$$((\pi_{S_1})_*(\mathbb{1}_U T_{f,R_n}))(\omega_1) = \int_0^{R_n} \int_{D(0,t) \cap f^{-1}(U)} (f_{S_1})^* \omega_1 \frac{dt}{t} = \int_0^{R_n} \text{Aire}(f_{S_1}((D(0,t) \cap f^{-1}(U)))) \frac{dt}{t}.$$

Or, l'intégrale logarithmique de l'aire de l'image des péninsules et des îles de multiplicité supérieure ou égale à 2 au-dessus de δ_1 est négligeable devant la caractéristique d'aire de f_{S_1} . Plus précisément :

$$\begin{aligned} \int_0^{R_n} \text{Aire} \left(f_{S_1} \left((D(0,t) \cap f^{-1}(U)) \setminus \bigcup_{d \in I_{1,t}} d \right) \right) \frac{dt}{t} &\leq \int_0^{R_n} \text{Aire} \left(f_{S_1} \left((D(0,t)) \setminus \bigcup_{d \in I_{1,t}} d \right) \right) \frac{dt}{t} \\ &= o(T_{f_{S_1},R_n}(\omega_1)) \quad \text{d'après la relation (2.8)} \\ &= o(T_{f,R_n}(\omega_2)) \quad \text{par l'inégalité (2.7)}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_{f,R_n}(\omega_2)} \int_{D(0,t) \cap f^{-1}(U)} (f_{S_1})^* \omega_1 \frac{dt}{t} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_{f,R_n}(\omega_2)} \int_0^{R_n} \sum_{d \in I_{1,t}} \text{Aire}(f_{S_1}(d \cap f^{-1}(U))) \frac{dt}{t} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_{f,R_n}(\omega_2)} \int_0^{R_n} (\mathbb{1}_U[f(d)])(\pi_{S_1})^* \omega_1 \frac{dt}{t} \\ &= ((\pi_{S_1})_*(\mathbb{1}_U T_1))(\omega_1) \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition. \square

Supposons que P n'appartienne pas au support de T_1 : il existe alors un voisinage U de P tel que $\mathbb{1}_U T_1 = 0$. D'après la proposition précédente, $(\pi_{S_1})_*(\mathbb{1}_U T) = 0$, et donc $(\pi_{S_1})_*(\mathbb{1}_U T') = 0$. Ceci implique que près de P , T' est une moyenne de courants d'intégration sur des droites du pinceau centré en S_1 :

Proposition 38. Il existe une mesure ν sur $\pi_{S_1}(U)$ telle que :

$$\mathbb{1}_U T' = \int_{\pi_{S_1}(U)} [\pi_{S_1}^{-1}(z) \cap U] d\nu(z).$$

Démonstration. Considérons une trivialisatoin locale $U \simeq \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ de la fibration $\pi_{S_1} : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{S_1\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dans laquelle π_{S_1} correspond à la projection sur la seconde coordonnée : $\pi_{S_1}(z, w) = w$. Les vecteurs $\zeta_1 = 1 \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial z} - i \otimes_{\mathbb{R}} J \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)$ et $\zeta_2 = 1 \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial w} - i \otimes_{\mathbb{R}} J \left(\frac{\partial}{\partial w} \right)$ forment un repère local du fibré $T_J^{1,0}$. Dans le repère dual, $\mathbb{1}_U T'$ est de la forme :

$$\mathbb{1}_U T' = iT_{1,1} \zeta_1^* \wedge \bar{\zeta}_1^* + iT_{1,2} \zeta_1^* \wedge \bar{\zeta}_2^* + iT_{2,1} \zeta_2^* \wedge \bar{\zeta}_1^* + iT_{2,2} \zeta_2^* \wedge \bar{\zeta}_2^*$$

où les $T_{j,k}$ sont des mesures. Comme $(\pi_{S_1})_*(\mathbb{1}_U T') = 0$, la mesure $T_{1,1}$, est nulle. Par positivité de T' , il en va de même pour $T_{1,2}$ et $T_{2,1}$. Comme de plus T' est fermé, $T_{2,2}$ est dans la classe d'une fonction constante le long des J -droites du pinceau en S_1 : la mesure ν sur $\pi_{S_1}(U)$ de densité $T_{2,2}$ est donc bien définie, et le courant $\mathbb{1}_U T'$ est bien de la forme :

$$\mathbb{1}_U T' = \int_{\pi_{S_1}(U)} [\pi_{S_1}^{-1}(z) \cap U] d\nu(z).$$

\square

Voyons comment cela nous permet de conclure. Supposons pour commencer que le point P n'appartienne pas à la J -droite L_3 . Nous pouvons alors examiner la situation depuis le point double $S_3 \in L_1 \cap L_3$ de la configuration C : soit δ'_1 un disque ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ contenant $\pi_{S_3}(P)$, et soit \mathcal{G}' l'ensemble :

$$\mathcal{G}' = \{D \in \mathcal{D} \mid D \cap C = \emptyset, (\pi_{S_3})|_D : D \rightarrow \delta'_1 \text{ est un homéomorphisme}\}.$$

Il existe une mesure μ' sur $\bar{\mathcal{G}}' \setminus \{S_3\}$ telle que le courant :

$$T_3 = \int_{\bar{\mathcal{G}}' \setminus \{S_3\}} [D] d\mu'(D) \tag{2.9}$$

soit la composante horizontale du courant $\mathbb{1}_U T$ relativement à la projection de centre S_3 , ou en d'autres termes que :

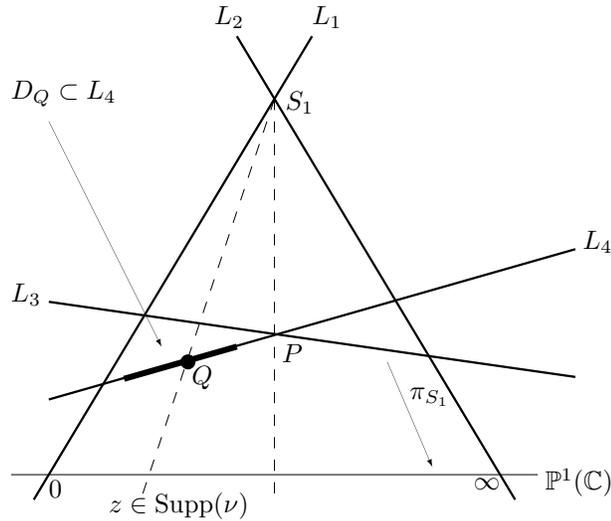
$$(\pi_{S_3})_*(\mathbb{1}_U T) = (\pi_{S_3})_*(\mathbb{1}_U T_3).$$

Or, comme pour toute droite L passant par S_1 et intersectant le voisinage U , le courant $(\pi_{S_3})_*[L \cap U]$ est non nul, la proposition précédente assure que $(\pi_{S_3})_*(\mathbb{1}_U T') \neq 0$. Le point P est alors dans le support de T_3 , et le J -disque recherché est, comme plus haut, un élément du support de μ' .

La situation est identique lorsque le point P n'appartient pas à L_4 . Reste à traiter le cas où P est le point double situé à l'intersection de L_3 et L_4 . Comme P est dans le support de T' , le point $1 = \pi_{S_1}(P)$ est dans le support de ν . Comme par ailleurs la diagonale $\Delta_1 = L_{S_1, P}$ n'est pas une composante singulière du courant T' , le point $1 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ n'est pas un atome pour la mesure ν : il existe donc des points du support de ν arbitrairement proches de 1. Soit $z \in \text{Supp}(\nu) \setminus \{1\}$; le point $Q = \pi_{S_1}^{-1}(z) \cap L_4$ est dans le support de T' , mais pas dans le support de T_1 pourvu que z soit assez proche de 1 : il est donc forcément dans le support de T_3 . Il existe donc un J -disque D_Q du support de μ' passant par Q . Comme ce J -disque est issu de la J -courbe f , le théorème d'Hurwitz assure (comme nous l'avons vu à plusieurs reprises) que D_Q est contenu dans L_4 .

Mais pour tout J -disque D de $\overline{\mathcal{G}'} \setminus \{S_3\}$ assez proche de D_Q , la masse du courant $(\pi_{S_1})_*[D]$ est uniformément minorée par un réel strictement positif : pour tout voisinage U' de Q , le courant $(\pi_{S_1})_*(\mathbb{1}_{U'} T_3)$ ne peut donc être nul, vu la forme du courant T_3 (voir (2.9)). Nous en déduisons que $(\pi_{S_1})_*(\mathbb{1}_{U'} T) \neq 0$, puis, par la proposition 37, que le point Q est dans le support de T_1 , ce qui contredit ce que nous avons supposé.

Figure 2.3



Ceci conclut la démonstration du lemme géométrique : nous pouvons donc affirmer que le courant T est singulier, porté par les diagonales. Le paragraphe suivant conclut la démonstration du théorème de Borel.

2.3.3 Conclusion par éclatement

Le paragraphe précédent montre que le courant T est porté par Δ . Suivant une idée de M.L. McQuillan, nous allons examiner le comportement de la J -courbe f au voisinage des points doubles de la configuration C à l'aide d'éclatements.

Le courant T étant singulier, il en va de même pour le courant \tilde{T} associé à la \tilde{J} -courbe \tilde{f} . Plus précisément :

Fait. Le courant \tilde{T} est porté par la réunion de \tilde{J} -courbes $D = (\bigcup \tilde{\Delta}_i) \cup (\bigcup E_{S_k})$, et de la forme :

$$\tilde{T} = \tilde{\alpha}_1[\tilde{\Delta}_1] + \tilde{\alpha}_2[\tilde{\Delta}_2] + \tilde{\alpha}_3[\tilde{\Delta}_3] + \sum_{1 \leq k \leq 6} \lambda_k[E_{S_k}]. \quad (2.10)$$

En effet, si \tilde{U} désigne un ouvert de $\tilde{X} \setminus D$, alors $\Pi_*(\mathbf{1}_{\tilde{U}}\tilde{T}) = \mathbf{1}_{\Pi(\tilde{U})}T$. Comme $\Pi(\tilde{U})$ est un ouvert de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \Delta$, $\mathbf{1}_{\Pi(\tilde{U})}T = 0$, et comme $\Pi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \Pi(\tilde{U})$ est un difféomorphisme, la restriction de \tilde{T} à \tilde{U} est nulle. Le courant \tilde{T} est donc porté par D , et comme il est fermé et d'ordre zéro, il est bien de la forme annoncée.

La contradiction recherchée portera sur l'intersection algébrique du courant \tilde{T} et de la transformée stricte $\tilde{\Delta}_1$ de Δ_1 . Elle se déduira de l'analyse, à l'aide de la théorie d'Ahlfors, de la masse du courant \tilde{T} près des diviseurs exceptionnels. Rappelons que les diviseurs exceptionnels sont d'auto-intersection -1 . Il en va de même pour les transformées strictes $\tilde{\Delta}_j$ des diagonales, puisque chaque éclatement fait chuter leur auto-intersection de 1.

Calcul de l'intersection géométrique $[\tilde{T}].[\tilde{\Delta}_1]$

Comme l'image de \tilde{f} n'est pas contenue dans le diviseur D , le théorème 33 assure que l'intersection algébrique de \tilde{T} et des diviseurs exceptionnels est positive :

$$\forall k \in [1, 6], [\tilde{T}].[E_{S_k}] \geq 0.$$

Le courant \tilde{T} ne peut donc pas être porté par les diviseurs exceptionnels, qui sont d'auto-intersection -1 . Les trois réels $\tilde{\alpha}_k$ ($1 \leq k \leq 3$) ne peuvent donc pas être tous nuls : supposons par exemple $\tilde{\alpha}_1$ strictement positif.

L'intersection algébrique $[\tilde{T}].[\tilde{\Delta}_1]$ se calcule grâce à la relation (2.10) :

$$[\tilde{T}].[\tilde{\Delta}_1] = -\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3 + \lambda_1 + \lambda_2.$$

Comme en vertu du théorème 33 l'intersection algébrique $[\tilde{T}].[\tilde{\Delta}_1]$ majore l'intersection géométrique asymptotique $I(\tilde{T}, \tilde{\Delta}_1)$, on a :

$$I(\tilde{T}, \tilde{\Delta}_1) \leq -\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3 + \lambda_1 + \lambda_2.$$

La contradiction viendra du lemme suivant :

Lemme 2. $\tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3 + \lambda_1 + \lambda_2 \leq I(\tilde{T}, \tilde{\Delta}_1)$.

Nous allons démontrer ce lemme à l'aide de la théorie d'Ahlfors.

Démonstration du lemme 2

Commençons par une approche heuristique. Etant donné le caractère singulier de \tilde{T} , la \tilde{J} -courbe \tilde{f} reste proche du support D de \tilde{T} . Par exemple, près de E_{S_1} , \tilde{f} se comporte comme une fonction holomorphe à valeurs dans la surface de Riemann (E_{S_1}, \tilde{J}) , évitant les points $\tilde{L}_1 \cap E_{S_1}$ et $\tilde{L}_2 \cap E_{S_2}$. La théorie d'Ahlfors nous dit qu'alors, la masse λ_1 du courant \tilde{T} près de E_{S_1} est majorée par le nombre d'îles au-dessus d'un disque ouvert de E_{S_1} contenant le point $\tilde{\Delta}_1 \cap E_{S_1}$.

Précisons les choses. Nous allons établir que λ_1 est majoré par l'intersection géométrique asymptotique près de E_{S_1} du courant \tilde{T} et de $\tilde{\Delta}_1$. Le raisonnement se transposera aisément aux cas des diviseurs

E_{S_2} , $\tilde{\Delta}_2$ et $\tilde{\Delta}_3$. Nous allons pour cela projeter sur E_{S_1} les morceaux de $\tilde{f}(\mathbb{C})$ situés près du diviseur exceptionnel, de façon à pouvoir appliquer la théorie d'Ahlfors.

Identifions le diviseur exceptionnel E_{S_1} avec la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et munissons-le de la forme de Fubini-Study ω_1 . La projection qui à tout point \tilde{P} de $\tilde{X} \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq 6} E_{S_j}$ associe le point d'intersection avec E_{S_1} de la transformée stricte de la J -droite passant par $\Pi(\tilde{P})$ et S_1 s'identifie à la projection $\tilde{\pi}_{S_1} : \tilde{P} \in \tilde{X} \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq 6} E_{S_j} \mapsto \pi_{S_1} \circ \Pi(\tilde{P})$.

Localisons l'étude au voisinage de E_{S_1} : fixons un $\eta > 0$ suffisamment petit pour que pour tout $0 < r < \eta$, le voisinage U_r de E_{S_1} soit pseudo-convexe. Fixons un $0 < \varepsilon < \eta$. Posons $\Sigma = \tilde{f}^{-1}(U_\varepsilon)$. L'application $\tilde{\pi}_{E_{S_1}} \circ \tilde{f} : \Sigma \rightarrow E_{S_1}$ s'identifie à la restriction à Σ de l'application α -quasiconforme f_{S_1} . Posons, pour tout $t > 0$, $\Sigma_t = \Sigma \cap D(0, t)$. Nous allons, grâce à la théorie d'Ahlfors, établir l'inégalité :

$$\int_0^{R_n} \text{Aire}(f_{S_1}(\Sigma_t)) \frac{dt}{t} + o(T_{\tilde{f}, R_n}(\omega_{\tilde{X}})) \leq \int_0^{R_n} \#[\tilde{f}(D(0, t))].[\tilde{\Delta}_1 \cap U_\varepsilon] \frac{dt}{t}. \quad (2.11)$$

Comme $(\tilde{\pi}_{S_1})_*(\mathbf{1}_{U_\varepsilon} \tilde{T}) = \lambda_1[E_1]$, nous obtiendrons, après division par $T_{\tilde{f}, R}(\omega_{\tilde{X}})$:

$$\lambda_1 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_{\tilde{f}, R}(\omega_{\tilde{X}})} \int_0^{R_n} \#[\tilde{f}(D(0, t))].[\tilde{\Delta}_1 \cap U_\varepsilon] \frac{dt}{t}$$

ce qui est l'inégalité recherchée.

Commençons par montrer le fait suivant :

Fait.

$$\int_0^{R_n} \chi^-(\Sigma_t) \frac{dt}{t} = o(T_{\tilde{f}, R_n}(\omega_{\tilde{X}})).$$

Démonstration. Soit $0 < t < R_n$. Une composante connexe Σ_t^k du domaine Σ_t prend la forme d'un grand disque topologique privé de petits disques topologiques :

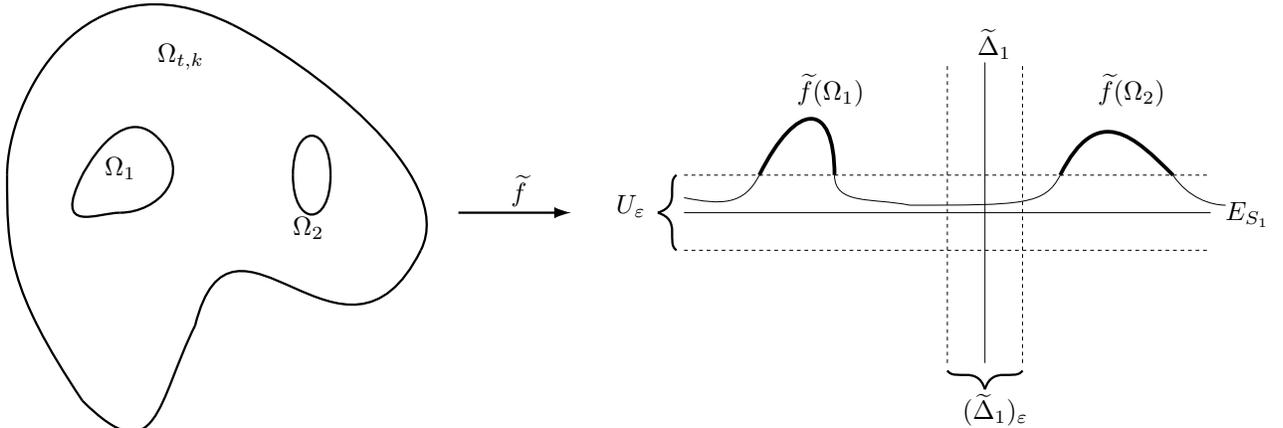
$$\Sigma_t^k = \Omega_{t,k} \setminus \bigcup_{j \leq j_{t,k}} \overline{\Omega_j}$$

où $j_{t,k}$ est un entier positif, $\Omega_{t,k}$ est un disque topologique, et les Ω_j sont des disques topologiques ouverts d'adhérence contenue dans $\Omega_{t,k}$ tels que pour tout $1 \leq j \leq s$:

$$\tilde{f}(\partial\Omega_j) \subset \overline{U_\varepsilon}.$$

Sa caractéristique d'Euler-Poincaré vaut donc : $\chi(\Sigma_t) = 1 - j_{t,k}$.

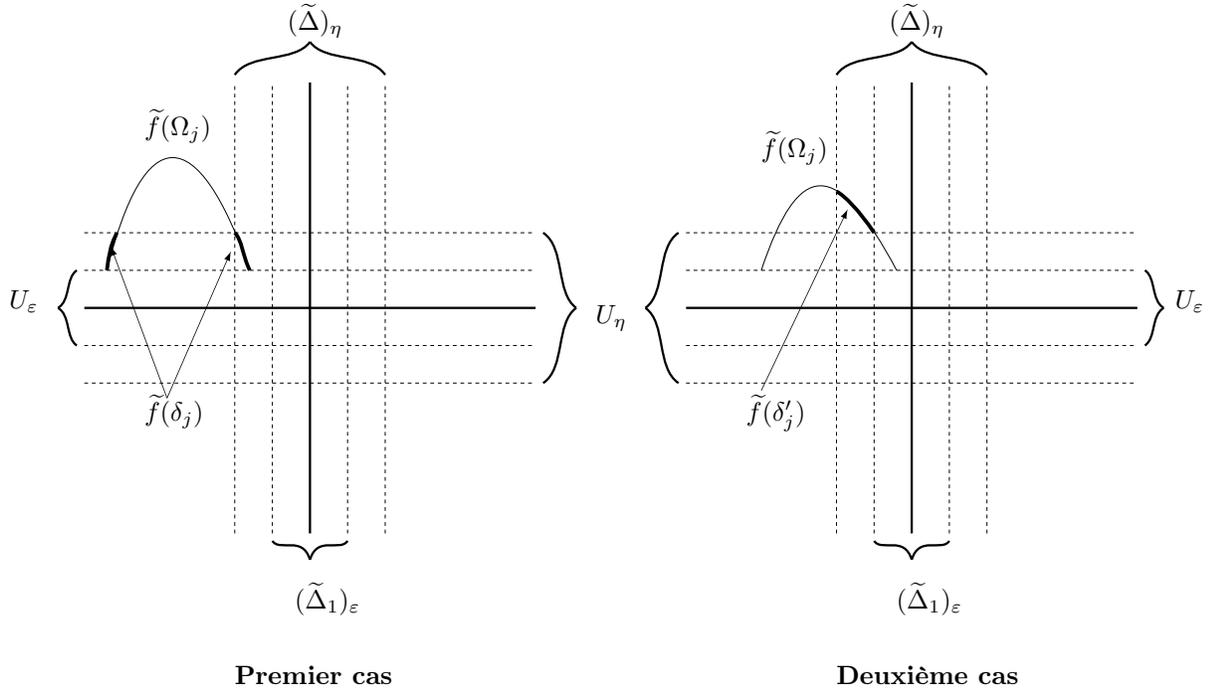
Figure 2.4



Pour tout $1 \leq j \leq j_{t,k}$, le disque $\Omega_{t,j}$ ne peut avoir son image $\tilde{f}(\Omega_{t,j})$ entièrement contenue dans U_η , puisque les ouverts U_r sont tous pseudo-convexes. Distinguons trois possibilités :

1. Soit le \tilde{J} -disque $\tilde{f}(\Omega_j)$ ne rencontre pas le ε -voisinage $(\tilde{\Delta}_1)_\varepsilon$ de $\tilde{\Delta}_1$. Alors il existe un domaine $\delta_j \subset \Omega_j$ tel que $\tilde{f}(\delta_j) \subset U_\eta \setminus (U_\varepsilon \cup (\tilde{\Delta}_1)_\varepsilon)$ et $\tilde{f}(\partial\delta_j) \subset \partial(U_\eta \setminus U_\varepsilon)$ (voir figure 2.5, premier cas). D'après le théorème de Lelong, il existe une constante $c > 0$ telle que $\text{Aire}(\tilde{f}(\delta_j)) \geq c(\eta - \varepsilon)^2$.
2. Soit le \tilde{J} -disque $\tilde{f}(\Omega_j)$ rencontre $(\tilde{\Delta}_1)_\varepsilon$ sans être contenu dans le η -voisinage $(\tilde{\Delta}_1)_\eta$. Il existe alors un domaine $\delta'_j \subset \Omega_j$ tel que $\tilde{f}(\delta'_j) \subset (\tilde{\Delta}_1)_\eta \setminus (U_\varepsilon \cup (\tilde{\Delta}_1)_\varepsilon)$ et $\tilde{f}(\partial\delta'_j) \subset (\tilde{\Delta}_1)_\eta \setminus (\tilde{\Delta}_1)_\varepsilon$ (voir figure 2.5, deuxième cas). D'après le théorème de Lelong, il existe une constante $c > 0$ telle que $\text{Aire}(\tilde{f}(\delta'_j)) \geq c(\eta - \varepsilon)^2$.
3. Soit le \tilde{J} -disque $\tilde{f}(\Omega_j)$ est contenu dans $(\tilde{\Delta}_1)_\eta$: le bord $f(\partial\Omega_j)$ du J -disque $f(\Omega_j)$ est donc localisé près du point S_1 . Cela implique qu'il doit lui-même être localisé près du point S_1 . En effet, fixons un point $P \in L_3 \setminus \{S_2\}$ et notons π_{P,Δ_1} la projection sur Δ_1 depuis P , c'est-à-dire l'application qui à tout point $Q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{P\}$ associe l'unique point d'intersection de la J -droite $L_{P,Q}$ reliant P à Q avec Δ_1 . L'application $\pi_{P,\Delta_1} \circ f$ est β -quasiconforme pour un certain $0 < \beta < 1$, et le principe du maximum assure que l'ensemble $\pi_{P,\Delta_1} \circ f(\Omega_j)$ est égal à l'une des deux composantes connexes du complémentaire de sa frontière. Ce ne peut être la composante connexe contenant le point S_2 , puisque (Ω_j) évite la J -droite L_3 , donc il s'agit de la composante localisée près de S_1 . Ainsi, le \tilde{J} -disque $\tilde{f}(\Omega_j)$ est contenu dans U_ε , ce qui est impossible. Cette possibilité est donc exclue.

Figure 2.5



Seuls les deux premiers cas sont possibles. Mais comme le courant \tilde{T} ne charge pas les ensembles $U_\eta \setminus (U_\varepsilon \cup (\tilde{\Delta}_1)_\varepsilon)$ et $(\tilde{\Delta}_1)_\eta \setminus (U_\varepsilon \cup (\tilde{\Delta}_1)_\varepsilon)$, les disques Ω_j ne peuvent être trop nombreux : plus précisément, $\int_0^{R_n} \sum_k j_{t,k} \frac{dt}{t}$ doit être négligeable devant $T_{\tilde{f}, R_n}(\omega_{\tilde{X}})$. Comme $-\chi^-(\Sigma_t) \leq \sum_k j_{t,k}$, le lemme est démontré. \square

En vue d'appliquer la théorie d'Ahlfors, considérons le disque ouvert $\delta = \tilde{\pi}_{S_1}((\tilde{\Delta}_1)_\varepsilon \cap U_\varepsilon)$ de E_{S_1} , contenant le point $\tilde{\pi}_{S_1}(\tilde{\Delta}_1 \cap U_\varepsilon)$, et posons $\Sigma'_t = \Sigma_t \setminus f_{S_1}^{-1}(\delta)$. Comme la \tilde{J} -courbe \tilde{f} évite les \tilde{J} -droites

\tilde{L}_1 et \tilde{L}_2 , l'application f_{S_1} évite deux points distincts, que nous noterons 0 et ∞ . Nous disposons d'un recouvrement quasiconforme $f_{S_1} : \Sigma_t \rightarrow E_{S_1} \setminus (\bar{\delta} \cup \{0, \infty\})$. D'après la théorie d'Ahlfors, il existe une constante $h > 0$ telle que si $i(t)$ désigne le nombre d'îles au-dessus de δ dans Σ_R :

$$\text{Aire}(f_{S_1}(\Sigma_t)) \leq i(t) - \min(0, \chi(\Sigma_t)) + h \text{Longueur}(f_{S_1}(\partial\Sigma'_t) \setminus \partial\delta). \quad (2.12)$$

D'une part, l'image par \tilde{f} de toute île au-dessus de δ coupe $\tilde{\Delta}_1$. D'autre part, $\text{Longueur}(f_{S_1}(\partial\Sigma'_t) \setminus \partial\delta)$ est majorée (à une constante multiplicative près dépendant de $\tilde{\omega}$) par $\text{Longueur}(\tilde{f}(C_t))$, où $C_t = \partial\Sigma_t \setminus \tilde{f}^{-1}((\tilde{\Delta}_1)_\varepsilon)$. On obtient donc l'inégalité :

$$\text{Aire}(f_{S_1}(\Sigma_t)) \leq \#[\tilde{f}(D(0, t))].[\tilde{\Delta}_1 \cap U_\varepsilon] - \chi^-(\Sigma_t) + h \text{Longueur}(\tilde{f}(C_t)).$$

Rappelons que $L_{\tilde{f}, R_n}(\omega_{\tilde{X}})$ est négligeable devant $T_{\tilde{f}, R_n}(\omega_{\tilde{X}})$. D'autre part, comme \tilde{T} ne charge pas $U_\eta \setminus U_\varepsilon \cup (\tilde{\Delta}_1)_\varepsilon$, la formule de coaire permet d'affirmer, quitte à modifier légèrement ε , que $\int_0^{R_n} \text{Longueur}(\tilde{f}(C_t)) \frac{dt}{t}$ est négligeable devant $T_{\tilde{f}, R}(\omega_{\tilde{X}})$.

Après intégration par rapport à $\frac{dt}{t}$, on obtient donc l'inégalité (2.11) recherchée.

Nous pouvons reproduire ce raisonnement à l'identique au voisinage du diviseur E_{S_2} , puisque \tilde{f} évite \tilde{L}_3 et \tilde{L}_4 .

La situation est similaire au voisinage de $\tilde{\Delta}_2$ et de $\tilde{\Delta}_3$. En effet, si π_{S_1, Δ_2} désigne la projection de centre S_1 sur Δ_2 , l'application quasiconforme à valeurs dans Δ_2 définie par $\pi_{S_1, \Delta_2} \circ \Pi \circ \tilde{f} = \pi_{S_1, \Delta_1} \circ f$ évite les points S_3 et S_4 . La théorie d'Ahlfors appliquée à cette application permet de montrer, exactement comme plus haut, que $\tilde{\alpha}_2$ est majoré par l'intersection géométrique asymptotique de \tilde{f} et de $\tilde{\Delta}_1$ près de $\tilde{\Delta}_2$. De la même façon, on démontre que $\tilde{\alpha}_3$ est majoré par l'intersection géométrique asymptotique de \tilde{f} et de $\tilde{\Delta}_1$ près de $\tilde{\Delta}_3$. Ceci achève la démonstration du lemme 2, puis du théorème de Borel. \square

Chapitre 3

Théorème de Bloch presque complexe

3.1 Introduction

Le théorème de Borel presque complexe, établi dans le chapitre précédent, met en évidence une forme d'hyperbolicité « à la Brody », c'est-à-dire relative aux courbes entières, du complémentaire de quatre J -droites en position générale dans un plan projectif presque complexe $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \omega_2, J)$. Ce chapitre est consacré à la démonstration d'un énoncé similaire pour les suites de J -disques, connu lorsque J correspond à la structure complexe standard sous le nom de *théorème de Bloch* :

Théorème 39. ([9]) Soient 4 droites projectives L_k , $1 \leq k \leq 4$, en position générale. Notons Δ le diviseur diagonal associé. Une suite de disques holomorphes $f_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ évitant ces droites vérifie l'une des deux propositions suivantes :

1. La suite (f_n) est normale.
2. Pour tout $r \in]0, 1[$, la suite (f_n) possède une sous-suite (f_{n_p}) telle que pour tout voisinage U de Δ , il existe un entier p_0 tel que $f_{n_p}(D(0, r)) \subset U$ pour tout $p \geq p_0$.

L'existence, pour tout énoncé relatif aux courbes entières, d'un énoncé similaire portant sur les suites de disques holomorphes a été affirmée par A. Bloch en 1926 (voir [4]). Ce principe heuristique, connu sous le nom de « principe de Bloch », est illustré en dimension complexe un par l'équivalence entre le petit théorème de Picard et le théorème de Montel. En dimension supérieure, l'hyperbolicité du complémentaire de cinq droites projectives en position générale se déduit directement du théorème de Green, relatif aux courbes entières. Dans les deux cas, le lemme de Brody établit le lien entre les courbes entières non constantes et les familles non normales de disques holomorphes. On s'attend donc à ce que le théorème de Borel implique, via le lemme de Brody, un énoncé similaire portant sur les suites de disques holomorphes.

Il n'en est rien. Comme nous l'avons remarqué dans le chapitre précédent, le lemme de Brody ne fournit aucune information quant à la localisation d'une courbe entière obtenue par reparamétrisation d'une suite non normale de disques holomorphes. Ainsi, le théorème de Borel n'interdit pas *a priori* qu'une suite non normale de disques holomorphes évitant quatre droites en position générale ne produise par reparamétrisation que des courbes entières portées par les diagonales, tout en demeurant loin des diagonales.

Le théorème de Bloch n'est donc pas réductible au théorème de Borel. Sa démonstration originale, initiée par A. Bloch en 1926 (voir [4]) et achevée par H. Cartan en 1928 (voir [9]), est nettement plus technique que celle du théorème de Borel. Elle repose sur des estimées fines et, du propre aveu d'André Bloch, excessivement compliquées, des fonctions caractéristiques de Nevanlinna. André Bloch lui-même n'est parvenu à établir le théorème éponyme que pour les suites de disques holomorphes prenant des valeurs fixées en 0. Cette difficulté, résolue par H. Cartan, est caractéristique des difficultés soulevées par l'étude de la distribution des valeurs des suites de disques holomorphes.

Voici l'énoncé que nous allons démontrer :

Théorème 40. Soient L_1, L_2, L_3, L_4 quatre J -droites en position générale dans un plan projectif presque complexe $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$. Notons $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ l'union des diagonales associées. Une suite de J -disques $f_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \bigcup_{1 \leq k \leq 4} L_k$ évitant ces quatre droites vérifie l'une des deux propositions suivantes :

1. La suite (f_n) est normale.
2. Pour tout $r \in]0, 1[$, la suite (f_n) possède une sous-suite (f_{n_p}) telle que pour tout voisinage U de Δ , il existe un entier p_0 tel que $f_{n_p}(D(0, r)) \subset U$ pour tout $p \geq p_0$.

Comme dans le cas complexe, le complémentaire de quatre J -droites en position générale est hyperboliquement plongé dans $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ modulo les diagonales.

Corollaire 1. Notons N le complémentaire des J -droites L_k . Notons $K_{N,J}$ la pseudo-métrique de Kobayshi-Royden de (N, J) et $d_{N,J}$ la pseudo-distance associée. Si P et Q sont deux points distincts de N n'appartenant pas tous deux au diviseur diagonal, alors $d_{N,J}(P, Q) > 0$.

De plus, il existe des voisinages U_P et U_Q de P et Q tels que $d_{N,J}(U_P \cap N, U_Q \cap N) > 0$. Enfin, l'ensemble d'annulation de la pseudo-métrique K_N est égal au diviseur diagonal.

Ce corollaire se démontre exactement de la même façon que lorsque J correspond à la structure complexe standard sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Nous renvoyons à l'ouvrage de S. Kobayashi ([23]) pour plus de détails.

Notre démonstration du théorème de Bloch presque complexe diffère peu de celle du théorème de Borel presque complexe : seule change la construction d'un courant positif fermé numériquement effectif relativement aux diagonales. Nous insisterons donc sur la construction d'un tel courant, en renvoyant au chapitre précédent pour le reste de la démonstration.

3.2 Démonstration du théorème de Bloch presque complexe

Comme dans le chapitre précédent, nous allons encore raisonner par l'absurde : supposons donné une suite non normale (f_n) de J -disques évitant la configuration C et deux réels $r \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $f_n(D(0, r))$ ne soit pas contenu dans le ε -voisinage de Δ . Nous allons construire à partir de cette suite un courant T positif fermé et numériquement effectif relativement aux diagonales.

3.2.1 Construction d'un courant positif fermé numériquement effectif relativement aux diagonales

La construction, à partir d'une suite non normale de J -disques restant « loin » du diviseur diagonal, d'un courant positif fermé numériquement effectif relativement aux diagonales, est moins directe que lorsque l'on travaille avec une J -courbe entière non constante. Une première difficulté vient de ce que la suite $(f_n(0))$ peut très bien converger vers Δ , ce qui rend impossible la démonstration d'un lemme de Brunella. Nous pouvons cependant résoudre ce problème en reparamétrant les J -disques f_n .

reparamétrage de sorte que $f_n(0)$ reste loin de Δ .

Comme $f_n(D(0, r))$ n'est pas contenu dans le ε -voisinage de Δ , il existe une suite (z_n) de points de $D(0, r)$ tels que $d(f_n(z_n), \Delta) \geq \varepsilon$. Notons alors ρ_n l'automorphisme de \mathbb{D} tel que $\rho_n(0) = z_n$ et $\rho_n(z_n) = 0$, défini par :

$$\rho_n(z) = \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z}.$$

L'image de 0 par le J -disque $f_n \circ \rho_n$ reste loin de Δ :

$$d(f_n \circ \rho_n(0), \Delta) \geq \varepsilon.$$

Par ailleurs, la suite $(f_n \circ \rho_n)$ n'est pas normale. En effet, puisque (f_n) n'est pas normale, elle présente des explosions sur un disque compact $\bar{D}(0, r') \subset \mathbb{D}$, avec $0 < r' < 1$, : il existe une suite (z'_n) telle que la suite de terme général

$$\left\| d_{z'_n} f_n \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \right\|$$

ne soit pas bornée. Un calcul montre que d'une part, la suite $\left\| d_{\rho_n^{-1}(z'_n)} f_n \circ \rho_n \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \right\|$ n'est pas bornée et que d'autre part, l'image par ρ_n^{-1} du compact $\bar{D}(0, r')$ est contenue dans un disque compact $\bar{D}(0, r'') \subset \mathbb{D}$,

avec $r'' < 1$. La suite $(f_n \circ \rho_n)$ présente donc des explosions dans le disque compact $\overline{D}(0, r'')$, et par conséquent, elle n'est pas normale.

Nous pouvons donc supposer que $d(f_n(0), \Delta) \geq \varepsilon$. Quitte à remplacer (f_n) par un de ses sous-suites, nous pouvons également supposer que la suite $(\|df_n\|)$ explose effectivement sur compact de \mathbb{D} , ou plus précisément qu'il existe une suite de points a_n convergeant vers un point a intérieur au disque unité telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|d_{a_n} f_n\| = +\infty.$$

Ceci revient à supposer qu'aucune sous-suite de (f_n) n'est normale. Voyons maintenant comment construire des courants positifs fermés T , \tilde{T} et T_{S_j} à partir des suites (f_n) , (\tilde{f}_n) et (f_{n, S_j}) .

Construction d'un courant positif fermé

Une seconde difficulté vient du fait qu'une suite non normale de J -disques peut très bien être d'aire bornée. Heureusement, le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n évite les quatre J -droites L_k permettra d'écartier cette éventualité. Pour le voir, nous devons d'abord rappeler la notion de bulle.

(a) Notion de bulle et théorème de compacité de Gromov

Le théorème de Lelong permet de démontrer un théorème de prolongement des J -courbes d'aire bornée définies sur le disque épointé (voir par exemple l'article de J.C. Sikorav dans [3]) :

Théorème de prolongement. *Soit $f : \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow M$ une J -courbe d'aire finie définie sur le disque épointé à l'origine. Alors f se prolonge en un J -disque $\bar{f} : \mathbb{D} \rightarrow M$.*

En particulier, une J -courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow M$ d'aire finie se prolonge en une J -courbe rationnelle $\bar{f} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow M$. Lorsque f est issue d'une reparamétrisation à la Brody d'une suite non normale de J -disques, la J -courbe rationnelle ainsi obtenue est appelée *bulle*.

Le théorème de Lelong montre en outre que l'aire d'une bulle est minorée par une constante. Une suite non normale de J -disques d'aire uniformément bornée ne peut donc donner lieu à l'apparition d'une infinité de bulles.

Ceci est résumé par le théorème de compacité de Gromov suivant :

Théorème de compacité de Gromov. *Soit une suite de J -disques $g_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ d'aire uniformément bornée par une constante A :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{Aire}(g_n(\mathbb{D})) \leq A.$$

Alors il existe un J -disque $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, un entier $p \in \mathbb{N}$ et p suites $\rho_{1,n}, \dots, \rho_{p,n}$ de contractions affines convergeant vers p points z_1, \dots, z_p de \mathbb{D} tels qu'après extraction :

1. la suite (g_n) converge vers g uniformément sur tout compact de $\mathbb{D} \setminus \{z_1, \dots, z_p\}$.
2. Les suites $(g_n \circ \rho_{j,n})$ convergent vers des J -courbes entières d'aire finie se prolongeant en des J -courbes rationnelles $\varphi_j : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, appelées bulles.

Ainsi, lorsque pour une raison quelconque l'apparition de bulles est interdite, une suite (g_n) d'aire uniformément bornée est normale. Nous allons utiliser ce phénomène pour construire un courant fermé.

(b) Cas de la suite (f_n)

La famille $\left(\frac{T_{f_n, R}}{T_{f_n, R}(\omega_2)} \right)_{n \in \mathbb{N}, 0 < R < 1}$ est constituée de courants positifs. La proposition suivante montre que nous pouvons choisir des rayons R tels que la suite $\left(\frac{T_{f_n, R}}{T_{f_n, R}(\omega_2)} \right)$ converge, à extraction d'une sous-suite près, vers un courant positif fermé.

Proposition 41. Il existe un réel $R_0 < 1$ tel que pour presque tout $R \in]R_0, 1[$:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{f_n, R}(\omega_2)}{T_{f_n, R}(\omega_2)} = 0.$$

Le théorème 4 ne s'applique pas directement, contrairement au cas des courbes entières. Cependant, l'inégalité longueur-aire sur laquelle il repose reste valable, sous une forme légèrement différente :

$$\forall \eta \in]0, 1[, \forall R \in]\eta, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{L_{f_n, R}(\omega_2) - L_{f_n, \eta}(\omega_2)}{T_{f_n, R}(\omega_2)} \leq \sqrt{2\pi R \log\left(\frac{R}{\eta}\right) \frac{1}{T_{f_n, R}(\omega_2)^2} \frac{dT_{f_n, R}(\omega_2)}{dR}}. \quad (3.1)$$

Nous allons commencer par montrer qu'il existe un $R_0 < 1$ tel que pour presque tout réel $R \in]R_0, 1[$ et pour tout $\eta \in]0, R_0[$, le terme de droite de l'inégalité (3.1) ci-dessus converge vers 0. Pour cela, remarquons que la suite des caractéristiques d'aire $(T_{f_n, R}(\omega_2))$ ne peut être bornée pour tout $R < 1$:

Lemme. *Il existe un réel $R_0 \in]0, 1[$ tel que :*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} T_{f_n, R_0}(\omega_2) = +\infty.$$

Démonstration. Comme nous l'avons déjà dit, il existe un réel $R_0 < 1$ tel que la suite (f_n) présente des explosions sur le disque $D(0, R_0)$. Nous allons vérifier que ces explosions sont d'aire infinie, c'est-à-dire qu'il ne peut pas se former de bulles. Le théorème de compacité de Gromov impliquera alors que la suite de terme général Aire($f_n(D(0, R_0))$) n'est pas bornée, et donc, quitte à augmenter légèrement R_0 , que la suite $(T_{f_n, R_0}(\omega_2))$ n'est pas bornée.

Supposons qu'il se forme une bulle au point $z \in D(0, R_0)$, c'est-à-dire qu'il existe une suite (ρ_n) de contractions affines convergeant vers le point z telle que $f_n \circ \rho_n$ converge uniformément sur tout compact vers une J -courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ se prolongeant en une J -courbe rationnelle $\bar{f} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Comme une J -courbe rationnelle n'est jamais homologiquement triviale, intersecte toutes les J -droites de la configuration C ; elle intersecte donc C en au-moins deux points distincts. Comme $\bar{f}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = f(\mathbb{C}) \cup \{f(\infty)\}$, la J -courbe f ne peut éviter C : le théorème d'Hurwitz assure alors que $f(\mathbb{C})$ est contenue dans une des J -droites de la configuration, tout en évitant les trois autres, ce qui contredit le petit théorème de Picard. Il ne peut donc pas se former de bulles. \square

Ainsi, si $\eta \in]0, R_0[$, on :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{R_0}^R \frac{2\pi t \log(t/\eta)}{T_{f_n, t}(\omega_2)^2} \frac{dT_{f_n, t}(\omega_2)}{dt} \frac{dt}{2\pi t \log(t/\eta)} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T_{f_n, R}(\omega_2)} - \frac{1}{T_{f_n, R_0}(\omega_2)} \right) = 0$$

donc pour tout $0 < \eta < R_0$ et presque tout $R \in]R_0, 1[$:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{f_n, R}(\omega_2) - L_{f_n, \eta}(\omega_2)}{T_{f_n, R}(\omega_2)} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi R \log\left(\frac{R}{\eta}\right) \frac{1}{T_{f_n, R}(\omega_2)^2} \frac{dT_{f_n, R}(\omega_2)}{dR}} = 0. \quad (3.2)$$

Notons que ceci n'est plus vrai pour $\eta = 0$, puisque la relation (3.1) n'est vraie que pour $\eta > 0$. C'est un problème, puisque nous ne pouvons pas affirmer que la limite inférieure du rapport $\frac{L_{f_n, \eta}(\omega_2)}{T_{f_n, R}(\omega_2)}$ vaut 0. Voyons comment passer outre cette difficulté.

Soit $\eta_n > 0$ tel que Aire($f_n(D(0, 2\eta_n))$) = 1. La suite des J -disques $z \in \mathbb{D} \mapsto f_n(2\eta_n z)$ est normale puisque comme nous avons vu dans la démonstration du lemme précédent il ne peut se former de bulles d'aire finie. Nous en déduisons que la suite de terme général Longueur($f_n(\partial D(0, \eta_n))$) est bornée. Il en va de même de la suite de terme général $L_{f_n, \eta_n}(\omega_2)$, et donc que pour tout $R > R_0$:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{f_n, R}(\omega_2)}{T_{f_n, R}(\omega_2)} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{f_n, R}(\omega_2) - L_{f_n, \eta_n}(\omega_2)}{T_{f_n, R}(\omega_2)}.$$

Il reste à montrer que cette limite est nulle, ce qui n'est pas donné a priori par (3.2) puisque η_n n'est pas constante. Distinguons deux cas :

1. La suite (η_n) est minorée par un $\eta > 0$. Alors d'après (3.2) :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{f_n, R}(\omega_2) - L_{f_n, \eta_n}(\omega_2)}{T_{f_n, R}(\omega_2)} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{f_n, R}(\omega_2) - L_{f_n, \eta}(\omega_2)}{T_{f_n, R}(\omega_2)} = 0$$

et la proposition 41 est alors démontrée.

2. La suite (η_n) n'est pas minorée par un réel strictement positif : nous pouvons supposer, quitte à extraire une sous-suite, que (η_n) tend vers 0. Soit un réel $R > R_0$. Il est tentant de reparamétriser l'anneau $D(0, R) \setminus D(0, \eta_n)$ par l'anneau $D(0, R/\eta_n) \setminus D(0, 1)$, ce qui revient à effectuer le changement de variables suivant :

$$\int_{4\eta_n}^R \frac{\varphi_n(t) dt}{t \log(t/\eta_n)} = \int_4^{R/\eta_n} \varphi_n(\eta_n u) \frac{du}{u \log(u)} \quad \text{avec } \varphi_n(t) = \frac{t \log(t/\eta_n)}{T_{f_n, t}(\omega_2)^2} \frac{dT_{f_n, t}(\omega_2)}{dt}.$$

Cette intégrale vaut :

$$\frac{1}{T_{f_n, 4\eta_n}(\omega_2)} - \frac{1}{T_{f_n, R}(\omega_2)} \leq \frac{1}{T_{f_n, 4\eta_n}(\omega_2)} \leq \frac{1}{\log 2} < +\infty.$$

Comme la fonction $\frac{1}{u \log u}$ n'est pas intégrable sur $[4, +\infty[$, pour tout $\delta > 0$, l'ensemble $\{u \in [4, R/\eta_n] \mid \varphi_n(\eta_n u) \geq \delta\}$ est de mesure de Lebesgue majorée uniformément en n par une constante M_δ . Nous en déduisons que l'ensemble $\{t \in [4\eta_n, R] \mid \varphi_n(t) \geq \delta\}$ est de mesure de Lebesgue inférieure à $\eta_n M_\delta$, puis que pour presque tout $t \in]0, R]$, $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t) = 0$.

Ainsi, pour presque tout $R > R_0$, la suite $\frac{L_{f_n, R}(\omega_2) - L_{f_n, \eta_n}(\omega_2)}{T_{f_n, R}(\omega_2)}$ a pour limite inférieure 0, et la proposition 41 est démontrée.

(c) Cas de la suite (\tilde{f}_n)

Intéressons-nous à la suite (\tilde{f}_n) . Comme $T_{\tilde{f}_n, R}(\omega_{\tilde{X}}) \geq T_{f_n, R}(\omega_2)$ pour tout R , alors pour tout $R \in]R_0, 1[$:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} T_{\tilde{f}_n, R}(\omega_{\tilde{X}}) = +\infty.$$

Nous pouvons procéder comme ci-dessus pour démontrer la proposition suivante :

Proposition 42. Pour presque tout $R \in]R_0, 1[$:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{\tilde{f}_n, R}(\omega_{\tilde{X}})}{T_{\tilde{f}_n, R}(\omega_{\tilde{X}})} = 0.$$

(d) Cas des suites (f_{n, S_j})

La théorie de recouvrement des surfaces, et plus précisément l'inégalité (4), est un ingrédient essentiel de la démonstration du théorème de Bloch comme de celle du théorème de Borel. Elle s'applique aussi bien à une application α -quasiconforme $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, comme nous l'avons vu dans la démonstration du théorème de Borel, qu'à une suite d'applications quasiconformes $g_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, mais ne présente d'intérêt que s'il existe un réel $R \in]0, 1[$ tel que $L_{g_n, R}(\omega_1)$ est négligeable devant $T_{g_n, R}(\omega_1)$. Ce paragraphe a pour but de montrer que ceci est vrai pour les applications f_{n, S_j} :

Proposition 43. Il existe un réel $R'_0 \in]0, 1[$ tel que pour presque tout $R \in]R'_0, 1[$ et tout $1 \leq j \leq 6$:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{f_{n, S_j}, R}(\omega_1)}{T_{f_{n, S_j}, R}(\omega_1)} = 0.$$

La principale difficulté est de vérifier que les suites $(T_{f_{n, S_j}, R}(\omega_1))$ sont non bornées pour tout R suffisamment proche de 1. Commençons par vérifier que les suites (f_{n, S_j}) ne sont pas normales :

Lemme. Pour tout $1 \leq j \leq 6$, aucune sous-suite de la suite d'applications α -quasiconformes (f_{n,S_j}) ne converge.

Démonstration. Pour fixer les idées, prenons $j = 1$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une sous-suite (f_{n_k,S_j}) de (f_{n,S_1}) qui converge vers une application α -quasiconforme $f_{S_1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Puisqu'elle n'est pas normale, la suite (f_{n_k}) explose en au-moins un point $z \in \mathbb{D}$, donnant après reparamétrage à la Brody, une J -courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ non constante. L'image de f est forcément contenue dans la J -droite $L = \pi_{S_1}^{-1}(f_{S_1}(z)) \cup \{S_1\}$ du pinceau centré en S_1 . Par le théorème d'Hurwitz, soit elle est contenue dans l'une des J -droites de C tout en évitant les trois autres, ce qui est impossible en vertu du petit théorème de Picard, soit elle n'intersecte pas la configuration C . La J -droite L doit donc être Δ_1 , toujours à cause du petit théorème de Picard, puisque cette J -droite est la seule du pinceau centré en S_1 à n'intersecter C qu'en deux points.

Les points d'explosion de la suite (f_{n_k}) sont donc forcément contenus dans l'ensemble des antécédents par f_{S_1} du point $z_1 = \pi_{S_1}(\Delta_1 \setminus \{S_1\})$. Cet ensemble est fini, car comme $d(f_{n_k}(0), \Delta_1) \geq \varepsilon$, $f_{S_1}(0)$ est différent de z_1 et l'application f_{S_1} ne peut être constante égale à $f_{S_1}(z)$. La suite (f_{n_k}) ne peut donc pas exploser en dehors d'un ensemble fini de points : elle est donc normale en restriction à un certain anneau $A = \mathbb{D} \setminus D(0, r_A)$. Examinons alors la situation depuis un second point double, par exemple $S_3 \in L_1 \cap L_3$. La suite d'applications α -quasiconformes (f_{n_k,S_3}) est normale sur l'anneau A . Les théorèmes 28 et 29 ainsi que le principe du maximum permettent de montrer, comme nous l'avons fait dans la proposition 36, que la suite (f_{n_k,S_3}) est en fait normale sur \mathbb{D} . Ainsi, les suites $(\pi_{S_1} \circ f_{n_k})$ et $(\pi_{S_3} \circ f_{n_k})$ sont normales sur le disque unité : comme l'application $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus L_1 \mapsto (\pi_{S_1}(P), \pi_{S_3}(P)) \in \mathbb{C}^2$ est un difféomorphisme, la suite (f_{n_k}) est normale, ce qui est absurde. \square

Comme nous l'avons vu pour la suite (f_n) , cette propriété implique l'existence d'un réel $R'_0 < 1$ tel que les caractéristiques $T_{f_n,S_j,R'_0}(\omega_1)$ ne soient pas bornées. Plus précisément :

Fait. Quitte à remplacer (f_n) par une sous-suite, il existe $R'_0 < 1$ tel que :

$$\forall 1 \leq j \leq 6, \lim_{n \rightarrow +\infty} T_{f_n,S_j,R'_0}(\omega_1) = +\infty.$$

Démonstration. D'après le théorème d'Ahlfors-Bers, il existe une suite de fonctions holomorphes $g_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et une suite d'homéomorphismes α -quasiconformes $\phi_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ tels que pour tout n , $f_{n,S_1} = g_n \circ \phi_n$. La suite (ϕ_n) converge, après extraction, vers un homéomorphisme α -quasiconforme du disque unité. Comme la suite f_{n,S_1} n'est pas normale, il existe un réel $R_1 \in]0, 1[$ tel que la suite (g_n) présente une explosion sur le domaine $\phi(D(0, R_1))$. Par le lemme de Brody, il existe une suite de contractions affines ρ_n convergeant vers un point de $\phi(D(0, R_1))$ telle que $g_n \circ \rho_n$ converge, après extraction, vers une fonction entière non constante $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Comme f_n évite deux droites du pinceau centré en S_1 , f_{n,S_1} et g_n évitent deux points fixés de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et par le théorème d'Hurwitz, il en va de même pour g . La fonction entière g ne peut donc se prolonger en une fonction rationnelle, et l'aire de $g(D(0, r))$ tend donc vers l'infini avec r . La suite des aires de $g_n(\Phi(D(0, R_1)))$ ne peut donc être bornée, il en va donc de même de la suite de terme général $\text{Aire}(f_{S_n,S_1}(\overline{D}(0, R_1)))$.

On procède successivement de même pour les suites (f_{n,S_j}) pour conclure. \square

En reprenant une fois encore les arguments de la proposition 41, nous obtenons la proposition 43 annoncée.

(e) Bilan

Les propositions 41, 42 et 43 montrent que pour presque tout $R > \max(R_0, R'_0)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{f_n,R}(\omega_2)}{T_{f_n,R}(\omega_2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{\tilde{f}_n,R}(\omega_{\tilde{X}})}{T_{\tilde{f}_n,R}(\omega_{\tilde{X}})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{f_n,S_j,R}(\omega_1)}{T_{f_n,S_j,R}(\omega_1)} = 0 \quad (\forall j \in [1, 6]). \quad (3.3)$$

Fixons donc un tel réel R . Quitte à reparamétriser les J -disques f_n , nous pouvons supposer que $R = 1$. Notons alors $T_n = T_{f_n,1}$, $\tilde{T}_n = T_{\tilde{f}_n,1}$ et $T_{n,S_j} = T_{f_n,S_j,1}$. D'après (3.3), quitte à en extraire des sous-suites, les suites de termes généraux

$$\frac{T_n}{T_n(\omega_2)}, \frac{\tilde{T}_n}{\tilde{T}_n(\omega_{\tilde{X}})}, \frac{T_{n,S_j}}{T_{n,S_j}(\omega_1)}$$

convergent vers des courants T , \tilde{T} , T_{S_j} fermés.

Nous allons maintenant définir l'intersection géométrique des courants T et \tilde{T} avec des sous-variétés de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et \tilde{X} , et la comparer à l'intersection algébrique, comme nous l'avons fait pour le théorème de Borel.

Intersection algébrique et intersection géométrique

L'intersection algébrique du courant T (respectivement \tilde{T}) et d'une sous-variété compacte $Y \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (respectivement $\tilde{Y} \subset \tilde{X}$) de dimension 2 est bien définie puisque T (respectivement \tilde{T}) est fermé : si ω_Y (respectivement $\omega_{\tilde{Y}}$) est une 2-forme d'intersection pour Y (respectivement \tilde{Y}), alors :

$$[T].[Y] = T(\omega_Y), \quad [\tilde{T}].[\tilde{Y}] = \tilde{T}(\omega_{\tilde{Y}}).$$

Si Y et \tilde{Y} sont des sous-variétés presque complexes de $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ et de (\tilde{X}, \tilde{J}) , les intersections géométriques asymptotiques $I(T, Y)$ de T et de Y et $I(\tilde{T}, \tilde{Y})$ de \tilde{T} et de \tilde{Y} sont définies par :

$$I(T, Y) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_n(\omega_Y)} \int_0^1 \int_{D(0,t)} f_n^*[Y] \frac{dt}{t}$$

$$I(\tilde{T}, \tilde{Y}) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tilde{T}_n(\omega_{\tilde{Y}})} \int_0^1 \int_{D(0,t)} \tilde{f}_n^*[\tilde{Y}] \frac{dt}{t}.$$

Comme nous l'avons vu dans la démonstration du théorème de Borel, le théorème 5 reste valide dans un contexte presque complexe, dans des cas particuliers, que nous regroupons dans le théorème suivant :

Théorème 44. *Pour tout $k \in [1, 3]$, l'intersection algébrique de T et de la diagonale Δ_k majore leur intersection géométrique asymptotique :*

$$I(T, \Delta_k) \leq [T].[\Delta_k].$$

Dans l'éclaté \tilde{X} , l'intersection algébrique de \tilde{T} avec un diviseur exceptionnel E_{S_j} ou avec la transformée stricte $\tilde{\Delta}_k$ d'une diagonale majore l'intersection géométrique asymptotique :

$$I(\tilde{T}, E_{S_j}) \leq [\tilde{T}].[E_{S_j}] \quad (1 \leq j \leq 6)$$

$$I(\tilde{T}, \tilde{\Delta}_k) \leq [\tilde{T}].[\tilde{\Delta}_k] \quad (1 \leq k \leq 3).$$

La démonstration de ces inégalités a déjà pratiquement été vue. Intéressons-nous par exemple à la première : rappelons qu'il existe une fonction majorée u ayant une singularité logarithmique le long de Δ_1 et une 1-forme α bornée sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ telles que la 2-forme fermée ω_{Δ_1} définie au sens des courants par :

$$\omega_{\Delta_1} = [\Delta_1] - dd^c u + d\alpha \quad (3.4)$$

soit une forme d'intersection pour Δ_1 . La formule de Jensen donne :

$$T_n(\omega_{\Delta_1}) = \int_0^1 \int_{D(0,t)} f_n^*[\Delta_1] \frac{dt}{t} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \circ f_n(e^{i\theta}) d\theta + u \circ f_n(0) + \int_0^1 \int_{\partial D(0,t)} f_n^* \alpha.$$

Puisque $f_n(0)$ reste loin de Δ_1 , le terme $u \circ f_n(0)$ est minoré et l'inégalité recherchée s'en déduit. Le travail effectué précédemment pour nous assurer que $f_n(0)$ reste loin de Δ prend ici tout son sens.

Les deux autres inégalités se déduisent aussi d'une relation du type (3.4), et du fait que $\tilde{f}_n(0)$ reste loin des diviseurs exceptionnels et des transformées strictes des diagonales.

3.2.2 Démonstration du théorème de Bloch

Une fois les courants T , \tilde{T} et T_{S_j} construits, la démonstration du théorème de Bloch est identique à celle du théorème de Borel : le fait de travailler avec des suites de disques plutôt qu'avec des courbes entières ne pose pas de problème. Pour éviter d'inutiles répétitions, nous renvoyons au chapitre précédent.

Bibliographie

- [1] L.V. AHLFORS *Zur Theorie der Ueberlagerungsflächen*, Acta Math. 65 (1935), 157-194.
- [2] V.I. ARNOLD *Singularities of systems of rays*, Russian Math. Surveys 38 (1983), 87-176.
- [3] M. AUDIN ET J. LAFONTAINE ED., *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progress in Math., vol 117, Birkhäuser, Basel, 1994.
- [4] A. BLOCH *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires*, Ann. Ecole Norm. Sup. 43 (1926), 309-362.
- [5] E. BOREL *Sur les zéros des fonctions entières*, Acta Math. 20 (1897), 357-396.
- [6] R. BRODY, *Compact manifolds and hyperbolicity*, Trans. Amer. Math. Soc. 235 (1978), 213-219.
- [7] M. BRUNELLA *Courbes entières et feuilletages holomorphes*, L'enseignement mathématique 45 (1999), 195-216.
- [8] YU. D. BURAGO, V.A. ZALGALLER *Geometric inequalities*, Grundlehren der math. Wissenschaften 285. Springer, 1988, Berlin.
- [9] H. CARTAN *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés lacunaires et leurs applications*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 45 (1928), 255-346.
- [10] H. CARTAN *Sur les zéros des combinaisons linéaires de fonctions holomorphes données*, Mathematica (Cluj) 7 (1933), 5-31.
- [11] I. CHAVEL, *Riemannian Geometry*, Cambridge studies in advanced mathematics 98, Cambridge University press, 1994.
- [12] R. DEBALME ET S. IVASHKOVICH *Complete hyperbolic neighbourhood in almost complex surfaces*, Int. J. of Math. 12 (2001), 211-221
- [13] J.P. DEMAILLY, *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials (Lecture notes at Santa Cruz)*, Proceedings of Symposia in Pure Math., vol 62.2, (1997), 285-360.
- [14] J.-P. DEMAILLY *Complex analytic and differential geometry*, [http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/demailly/manuscripts/agbook.pdf).
- [15] H. DE THÉLIN, *Une démonstration du théorème de recouvrement de surfaces d'Ahlfors*, Ens. Math. 51 (2005), 203-209.
- [16] J. DUVAL, *Un théorème de Green presque complexe*, Annales de l'institut Fourier 54 no 7 (2004), 2357-2367.
- [17] J. DUVAL *Sur le lemme de Brody*, Invent. Math. 173 (2008), 305-314.
- [18] F. ELKHADHRA *J-pluripolar subsets and currents on almost complex manifolds*, Math. Zeit. (2010) vol. 264 no. 2, 399-422.
- [19] F. FIALA, *Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive*, Comment. Math. Helv. 13 (1940-41), 293-345.
- [20] M. GREEN, *Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties*, Amer. J. Math. 97 (1975), 43-75.
- [21] M. GROMOV *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math.83 (1985), 3007-347.
- [22] B. KLEINER, *Hyperbolicity using minimal surfaces*, preprint.
- [23] S. KOBAYASHI, *Hyperbolic complex spaces*, Grundlehren mathematischen Wissenschaften 318, Springer, 1998.
- [24] B. KRUGLIKOV, *Invariants and submanifolds in almost complex geometry*, Differential Geometry and its Applications, Proc. conf in honour of Leonhard Euler [Olomouc, August 2007], World Sci. Publ. 305-316 (2008).

- [25] B. KRUGLIKOV ET M. OVERHOLT, *Pseudoholomorphic mappings and Kobayashi hyperbolicity*, Diff. Geom. Appl. 11 (1999), 265-277.
- [26] S. LANG, *Introduction to hyperbolic complex spaces*, Springer, 1987.
- [27] O. LEHTO ET K.I. VIRTANEN, *Quasiconformal mappings in the plane*, Grundlehren der math. Wiss, Vol. 126, Springer, Berlin, 1973.
- [28] D. MCDUFF *The local behaviour of holomorphic curves in almost complex 4-manifolds*, J. Diff. Geom. 34 (1991), 143-164.
- [29] M. MCQUILLAN, *Bloch hyperbolicity*, preprint IHES (2001).
- [30] R. NEVANLINNA, *Analytic functions*, Springer (1970).
- [31] A. NIJENHUIS, W.B. WOOLF *Some integration problems in almost complex and complex manifolds*, Ann. of Math. 77 (1963), 424-489.
- [32] N. PALI, *Fonctions pluriharmoniques et courants de type (1,1) sur les variétés presque complexes*, Manuscripta Math. 118 (2005), 311-337.
- [33] J.-C. SIKORAV, *Dual elliptic Planes*, Actes des journées mathématiques à la mémoire de Jean Leray, Soc. Math. France, Séminaires et congrès, vol. 9 (1997), 175-199.
- [34] J.-C. SIKORAV, *Singularities of J-holomorphic curves*, Math. Z. 226 (1997), 359-373.
- [35] H. WHITNEY, *The embedding of manifolds in families of analytic manifolds*, Ann. Math. 37, 865-878 (1936).