



HAL
open science

Vers une stabilité et une exactitude de 10^{-16} pour les horloges atomiques : - le rayonnement du corps noir - la détection optique

Eric Simon

► **To cite this version:**

Eric Simon. Vers une stabilité et une exactitude de 10^{-16} pour les horloges atomiques : - le rayonnement du corps noir - la détection optique. Physique Quantique [quant-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 1997. Français. NNT : . tel-00639420

HAL Id: tel-00639420

<https://theses.hal.science/tel-00639420>

Submitted on 9 Nov 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY

N° d'ordre : 4984

**UNIVERSITE DE PARIS-SUD
U.F.R SCIENTIFIQUE D'ORSAY**

THESE

présentée pour obtenir

**LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY**

par

Eric SIMON

Sujet :

**Vers une stabilité et une exactitude de 10^{-16} pour les horloges atomiques :
- le rayonnement du corps noir
- la détection optique**

Soutenu le 16 octobre 1997 devant la commission d'examen :

**M. François Biraben
M. Pierre Thomann
M. Alain Aspect
M. Andreas Bauch
M. André Clairon
M. Georges Otrio
M. Christophe Salomon**

**Rapporteur
Rapporteur**

A mes parents

Résumé :

La fontaine atomique FO1, étalon primaire de fréquence qui utilise des atomes de césium refroidis par laser, a permis d'atteindre un niveau d'exactitude et de stabilité de 2×10^{-15} . Gagner encore un facteur dix sur ces performances pose plusieurs problèmes. L'amélioration de l'exactitude se heurte à une difficulté majeure: le rayonnement du corps noir. Celui-ci provoque un déplacement de fréquence qui n'était modélisé qu'à un niveau d'exactitude de 1×10^{-15} . Grâce à une étude théorique et expérimentale de l'effet Stark pour la transition horloge de l'atome de césium, nous avons amélioré l'évaluation du déplacement de fréquence induit par le rayonnement du corps noir. Pour gagner sur la stabilité, une solution séduisante consiste à développer une horloge à atomes froids qui opère en microgravité. Cette idée a donné naissance au projet PHARAO. Dans une horloge embarquée sur un satellite, les sources laser de laboratoire ne sont plus utilisables. Nous avons développé une solution technologique qui met en oeuvre une diode laser de type DBR avec une contre réaction optique faible. Nous avons mené une analyse de la dégradation de la stabilité des horloges par le bruit de fréquence des sources laser. Cette étude définit les spécifications requises pour les sources laser de détection des horloges à atomes froids.

Abstract :

A relative accuracy and frequency stability of 2×10^{-15} has been obtained with the atomic fountain FO1 : an atomic frequency standard based on a fountain of cold cesium atoms. A ten fold improvement over those performances is problematic. The accuracy is presently limited by the 1×10^{-15} uncertainty on the evaluation of the frequency shift induced by the black body radiation. A theoretical and experimental study of the Stark effect for the clock transition enables to improve the evaluation of the black body radiation shift. A cold atom clock operating in microgravity could be a solution for improving the stability. This is the concept of PHARAO project. The operation of a cold atom clock in a satellite requires stable and compact narrow linewidth lasers. We have developed a weak optical feedback on a DBR laser diode and we have explained the influence of the laser frequency noise on the stability of atomic clocks. This study specifies the detection lasers of cold atom cesium clocks.

Remerciements :

Cette thèse a été effectuée au BNM-Laboratoire Primaire du Temps et des Fréquences. Je remercie son directeur, Michel Granveaud, de m'y avoir accueilli.

Christophe Salomon a assuré la direction de cette thèse. Sa rigueur, ses compétences scientifiques et son enthousiasme ont été une aide précieuse. Je l'en remercie.

J'ai eu le plaisir et la chance de travailler sous l'orientation d'André Clairon. Sa connaissance encyclopédique et son savoir faire expérimental ont constamment guidé mon travail. Je lui exprime toute ma reconnaissance.

Je remercie vivement Philippe Laurent pour les nombreux éclairages théoriques et expérimentaux dont il m'a fait part, ainsi que pour sa bonne humeur quotidienne.

Je remercie tous les membres de l'équipe qui ont contribué au développement du projet PHARAO, et tout particulièrement François Jamin Changeart, François Gonzalez, Pierre Lemonde et Pierre Petit.

Marie-Anne Bouchiat, Wayne Itano, Jacques Bauche et Wang Yiqiu m'ont permis d'approfondir mes connaissances théoriques sur l'effet Stark, je leur en suis très reconnaissant. Je suis également très reconnaissant à Emeric de Clercq et Sébastien Bize pour les nombreuses discussions scientifiques que nous avons eu tout au long de ma thèse.

Cipriana Mandache, Marie-Laure Mathieu, Olivier Mathieu et Lionel Pichon ont contribué à la mesure de l'effet Stark, je leur exprime ma sincère gratitude.

Je remercie Alain Aspect, Andreas Bauch, Georges Otrio pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de cette thèse en acceptant de faire partie du jury. Je remercie tout particulièrement François Biraben et Pierre Thomann pour avoir accepté de faire partie du jury en qualité de rapporteurs. Leurs remarques m'ont été précieuses.

J'exprime ma gratitude à l'ensemble du personnel du LPTF et à toutes les personnes qui ont contribué à l'avancement de mes travaux grâce à de fructueuses discussions.

Je tiens tout particulièrement à remercier pour leur soutien administratif et technique Catherine Boulland, Annie Gérard, Pierre Aynié, Michel Lours, Michel Dequin, Laurent Volodimer, Pascal Blondé, René Lebreton, Jean Pierre Aoustin et Jacques Hammès.

Ces travaux ont été soutenus par le Centre National d'Etudes Spatiales et le Bureau National de Métrologie. Je remercie ces institutions.

Merci à mes amis, ma famille, et Karolina.

Table des matières

Préambule	5
------------------	----------

Première partie :

Influence du rayonnement du corps noir sur l'exactitude des horloges atomiques au césium.

1. Introduction	18
2. Théorie de l'effet Stark	20
2.1 Présentation	20
2.2 Généralités sur l'atome de césium	20
2.3 Origine de l'effet Stark	23
2.3.1 Une interprétation classique	23
2.3.2 Approche quantique	24
2.4 Effet Stark différentiel sur la transition d'horloge	26
2.4.1 Perturbation conjuguée des champs B et E.	26
2.4.2 Expression de la perturbation Stark	27
2.4.3 Couplages mis en jeux	29
2.5 Influence de l'orientation du champ E	31
2.5.1 Une interprétation classique	31
2.5.2 Développement de l'opérateur dipolaire électrique	33
2.5.3 Développement sur la structure hyperfine	35
2.6 Application à la fontaine atomique :	37
2.6.1 Transition horloge	37
2.6.2 Transitions entre sous-niveaux Zeeman	37
2.6.3 Discussion	38

3. Mesure expérimentale du déplacement de fréquence induit par un champ électrique.	42
3.1 Introduction	42
3.2 La fontaine atomique.	42
3.2.1 Mode opératoire de F.O.1	44
3.2.2 Le piège magnéto-optique.	46
3.2.3 Le lancement des atomes	46
3.2.4 Evolution spatiale du nuage d'atomes	47
3.2.5 Calcul théorique de la figure de franges de Ramsey	48
3.3 Dispositif pour générer un champ électrique statique.	52
3.3.1 description	52
3.3.2 calcul du champ électrique	55
3.3.3 Effets de bords	56
3.4 Mesure expérimentale de la constante k_0	63
3.4.1 généralités	63
3.4.2 calcul de la frange de Ramsey en présence d'un champ électrique.	65
3.4.3 Décalage de la frange centrale	67
3.4.4 Loi quadratique du déplacement de fréquence avec le champ électrique	69
3.4.5 Mesure de k_0 : méthode différentielle.	70
3.4.6 Méthode du champ pulsé	73
3.5 Sources d'erreurs	78
3.5.1 Extension spatiale du nuage d'atomes	78
3.5.2 Champ magnétique de mouvement.	81
3.5.3 Effet du gradient de champ électrique sur la trajectoire.	82
3.6 Mesure des constantes k_i relatives aux sous niveaux Zeeman.	83
3.6.1 Rappel sur les sous niveaux Zeeman.	83
3.6.2 Principe de la mesure.	83
3.6.3 Procédure expérimentale	85
3.7 Bilan des mesures	87
3.7.1 Résultats	87
3.7.2 Résumé des incertitudes.	89
3.7.3 Intérêt de la fontaine atomique pour ces mesures	91

4. Application au corps noir	92
4.1 Introduction	92
4.2 Le rayonnement du corps noir	92
4.2.1 Le corps noir parfait	92
4.2.2 Le corps noir effectif.	95
4.3 Effet du champ magnétique	97
4.4 Effet du champ électrique	99
4.4.1 Dépendance avec l'orientation du champ	99
4.4.2 Dépendance en fréquence	100
4.4.3 Expression générale	101
4.4.4 Evaluation simplifiée	102
4.5 Mesure directe de l'effet du corps noir	108
4.5.1 Principe du dispositif	108
4.5.2 Procédure expérimentale	111
4.5.3 Perspectives	112

Deuxième partie :

Influence des sources laser sur la stabilité d'une horloge à atomes froids

5. Introduction	116
6. Le projet PHARAO	118
6.1 introduction	118
6.2 Le prototype d'horloge spatiale	118
6.2.1 Le banc optique	120
6.2.2 L'enceinte à vide	121
6.2.3 La chaîne de synthèse de fréquence	126
6.3 Premiers résultats expérimentaux	126
7. Limites de la détection optique dans une horloge atomique à atomes froids.	128
7.1 Présentation	128
7.2 Influence du bruit de la détection sur la stabilité de l'horloge	128
7.2.1 Généralités	128
7.2.2 Sources de bruits	130
7.3 Dégradation du signal de détection par le bruit du laser	134
7.3.1 Théorie	134
7.3.2 Mesure expérimentale de l'influence du bruit du laser de détection sur la stabilité.	142

8. Développement de sources laser à faible bruit	150
8.1 Le bruit des sources lasers	150
8.1.1 Généralités	150
8.1.2 Les lasers à semi-conducteur	152
8.2 Source laser à diode DBR et contre réaction optique.	153
8.2.1 généralités	153
8.2.2 Propriétés de la rétroaction optique.	154
8.2.3 Réalisation pratique.	155
8.2.4 Asservissement électronique.	159
8.2.5 Résultats en laboratoire	163
8.2.6 essais en vols paraboliques	167
9. Bilan du test pour l'ensemble du prototype PHARAO	170
9.1 Résultats	170
9.2 Perspectives	172
Conclusion	169
Annexe 1 : Stabilité et exactitude	171
Annexe 2 : Variance d'Allan	173
Annexe 3 : Transformation de Fourier	175
Références	177

Notations :

soit un vecteur \vec{A} , nous écrivons :

$$\mathbf{A} = \vec{A}, \text{ et } A = \|\vec{A}\|$$

Valeurs de quelques constantes :

constante de Planck :	$h = 6,6262 \times 10^{-34} \text{ J s}$
constante de Boltzmann :	$k_B = 1,3806 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
charge de l'électron :	$e = -1,60219 \times 10^{-19} \text{ C}$
permittivité du vide :	$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
célérité de la lumière dans le vide :	$c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$

Préambule

Dans le début des années 50, P. Kusch aux U.S.A, et L. Essen et J.V.L. Parry en Angleterre, utilisent un jet à résonance magnétique pour mesurer la fréquence de résonance d'une transition atomique de l'atome de césium. Ces appareils constituent les premières références de fréquence atomiques au césium. Les performances des étalons de fréquences à césium connaissent depuis une évolution croissante jusqu'à un niveau d'exactitude relative et de stabilité de 2×10^{-15} en 1996, avec la mise en oeuvre d'un étalon de fréquence primaire qui utilise des atomes de césium refroidis par laser dans une géométrie de fontaine : 'La fontaine atomique, F.O.1'. Gagner encore un facteur dix sur ces performances pose plusieurs problèmes. L'amélioration de l'exactitude des horloges atomiques se heurte à une difficulté majeure : le rayonnement du corps noir. Celui-ci provoque un déplacement de la fréquence de transition qui n'est modélisé qu'à un niveau d'exactitude de 1×10^{-15} . La première partie de ce rapport de thèse permettra d'améliorer l'évaluation de cet effet. Pour gagner sur la stabilité, une solution séduisante consiste à développer une horloge à atomes froids qui opère en microgravité. Cette idée a donné naissance au projet PHARAO. La mise en oeuvre d'un dispositif pouvant fonctionner dans un satellite pose des difficultés technologiques. En particulier, les sources laser des horloges de laboratoire ne sont plus utilisables. La deuxième partie de ce document présente une solution technique et définit les spécifications requises pour des laser de détection des horloges à atomes froids.

« Dans le silence de ta chambre, le temps ne pénètre plus, il est alentour, bain permanent, encore plus présent, obsédant, que les aiguilles d'un réveil que tu pourrais ne pas regarder, et pourtant légèrement tordu, faussé, un peu suspect [...]. »

Georges Perec

1^{ère} partie

*Influence du
rayonnement du corps noir
sur
l'exactitude des horloges
atomiques au césium.*

1. Introduction

Les méthodes de refroidissement et de manipulation d'atomes par laser ont permis d'ouvrir la voie à une nouvelle génération d'étalons primaires de fréquence avec une stabilité et une exactitude potentielle dans la gamme des 10^{-16} (Ref. 11, Ref. 13-Ref. 17). Par définition, la seconde du système international est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. La définition sous entend que les atomes de césium ne soient pas perturbés. En pratique, dans une horloge atomique, les atomes sont soumis à des perturbations extérieures. Ils peuvent entrer en collision avec des atomes voisins, ils sont soumis au champ gravitationnel terrestre ou encore à des champs électromagnétiques. L'exactitude d'un étalon de fréquence est conditionnée par une évaluation des déplacements de fréquence introduits par ces différentes perturbations. En particulier, les atomes de césium d'une horloge atomique sont soumis au rayonnement thermique de l'enceinte qui les contient. A température ambiante, ce rayonnement du corps noir provoque un déplacement relatif de la fréquence de $-1,7 \times 10^{-14}$. Cet effet est estimé avec une incertitude de quelques pour-cent ce qui correspond à une limite de 1×10^{-15} pour l'exactitude d'une horloge atomique au césium. C'est actuellement une des sources d'incertitude principales des meilleurs étalons de fréquence. Nous verrons que cet effet est principalement lié au champ électrique rayonné par le corps noir. Ainsi, la connaissance précise du déplacement de fréquence induit dans une horloge atomique par un champ électrique statique est essentielle pour estimer le déplacement de fréquence produit par le rayonnement du corps noir. La mise en œuvre de la fontaine atomique F.O.1, seul étalon primaire de fréquence à atomes refroidis par lasers actuellement opérationnel, a rendu possible la réalisation d'une expérience pour mesurer ce déplacement de fréquence avec une incertitude de deux pour-mille.

Nous rappellerons dans un premier temps la théorie décrivant la perturbation induite par un champ électrique statique sur le niveau fondamental de l'atome de césium. Nous décrirons ensuite une mesure de la constante reliant le déplacement de fréquence à l'intensité du champ électrique. Cette mesure représente une amélioration d'un facteur 10 en exactitude par rapport aux précédents résultats. Nous présenterons comment il est possible de relier le déplacement de fréquence dû à un champ électrique statique à celui engendré par le rayonnement du corps noir. Dans cette perspective, la mesure réalisée constitue une donnée indispensable pour réduire l'incertitude provenant du déplacement de fréquence du rayonnement du corps noir dans un étalon de fréquence atomique au niveau de 10^{-16} .

2. Théorie de l'effet Stark

2.1 Présentation

Nous allons décrire l'effet d'un champ électrique sur la fréquence de la transition de l'atome de césium, qui est utilisée pour définir la seconde. Cette étude théorique permettra d'interpréter la mesure expérimentale présentée dans le paragraphe suivant. Elle nous servira également par la suite pour expliquer comment il est possible de déduire le déplacement de fréquence engendré par le rayonnement du corps noir à partir de la connaissance du déplacement de fréquence induit par un champ électrique statique.

Après avoir rappelé quelques généralités sur l'atome de césium, nous présenterons l'origine physique de l'effet Stark. Nous décrirons son effet sur la transition d'horloge de l'atome de césium.

2.2 Généralités sur l'atome de césium

Avant de développer en détail le calcul de la perturbation provenant de l'effet Stark, nous allons décrire de façon générale la structure atomique de l'atome de césium. Nous représentons sur la figure (Fig. 2-1) le diagramme d'énergie d'un atome de césium. Les différents états propres $|n, L, S, J, I, F, m_F\rangle$ sont les vecteurs propres du Hamiltonien.

L'hamiltonien H_0 de l'atome de césium non perturbé peut s'écrire sous la forme :

$$H_0 = H_e + H_f + H_{h.f} .$$

Equ. 2-1

Le terme H_e englobe l'énergie cinétique (non relativiste) de l'atome dans le système du centre de masse et l'interaction électrostatique de Coulomb entre les électrons et le noyau. Le terme H_e détermine le nombre quantique principal n et le nombre quantique azimutal L associé à l'opérateur de moment orbital \mathbf{L} .

Le terme H_f est l'hamiltonien de structure fine. Il prend en compte les effets relativistes négligés dans H_e et le couplage entre le spin de l'électron et le champ magnétique motionnel vu par l'électron périphérique. Le terme H_f permet d'introduire le nombre quantique S associé à l'opérateur de spin de l'électron \mathbf{S} , et le nombre quantique J qui est associé à l'opérateur $\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$.

L'hamiltonien de structure hyperfine $H_{h.f}$ provient des interactions magnétiques liées au spin du noyau et de l'interaction électrostatique avec le moment quadripolaire électrique du noyau. Il met en jeu le nombre quantique I associé à l'opérateur de spin du noyau \mathbf{I} , et les nombres F et m_F qui sont associés à l'opérateur du moment cinétique total $\mathbf{F}=\mathbf{J}+\mathbf{I}$. En particulier, $H_{h.f}$ lève la dégénérescence entre les niveaux $F=3$ et $F=4$ du

niveau fondamental $6S_{1/2}$. L'énergie associée à cette perturbation correspond à une fréquence de 9,192 GHz. C'est cette fréquence qui définit la seconde.

L'hamiltonien H d'un atome de césium soumis à un champ magnétique \mathbf{B} et un champ électrique \mathbf{E} s'écrit sous la forme :

$$H = H_0 + H_B + H_E$$

Equ. 2-2

Avec les faibles valeurs des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} utilisées dans nos expériences, le terme H_B+H_E pourra être traité comme une perturbation sur les états propres de H_0 .

Le terme H_B provient du couplage entre le champ magnétique extérieur et le moment dipolaire magnétique de l'atome. En pratique, dans la fontaine atomique, un champ magnétique \mathbf{B}_0 de $1,7 \times 10^{-7}$ T est appliqué selon l'axe (Oz) pour lever la dégénérescence entre les différents sous niveaux Zeeman. Dans ces conditions, deux sous niveaux Zeeman adjacents ($|m_F-m'_F|=1$) d'un niveau fondamental $6S_{1/2}$ F=3 où F=4 sont séparés de 1,2kHz.

L'hamiltonien H_E provient de l'interaction entre le moment dipolaire électrique de l'atome et le champ électrique appliqué. Avec un champ de l'ordre de 1×10^5 V/m, cette perturbation déplace l'énergie des niveaux $|6S_{1/2}, F=3\rangle$ et $|6S_{1/2}, F=4\rangle$ de -48 kHz (Ref. 40). Le déplacement différentiel entre ces deux niveaux vaut alors seulement -2,3 Hz.

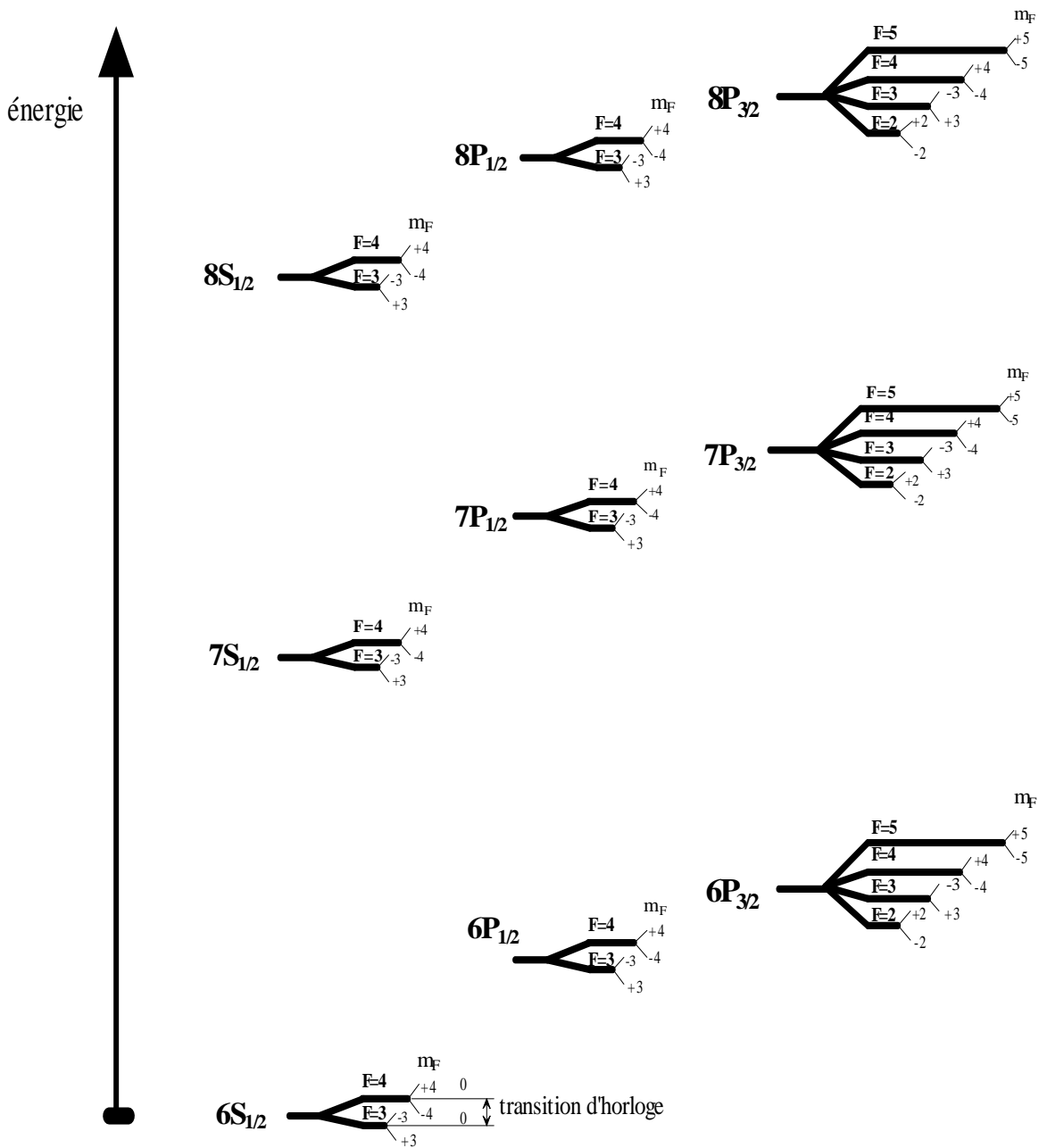


Fig. 2-1 : Diagramme des niveaux d'énergie de l'atome de césium pour $n=6, 7, 8$ et $l=0, 1$.

2.3 Origine de l'effet Stark

L'effet Stark provient de l'interaction au second ordre entre le moment dipolaire électrique de l'atome et le champ électrique extérieur. Il crée un déplacement de l'énergie des niveaux atomiques proportionnel au carré du champ électrique appliqué.

2.3.1 Une interprétation classique

Non utilisons dans ce paragraphe un formalisme classique pour donner une image intuitive de l'effet Stark. Dans la suite, nous traiterons le problème avec le formalisme quantique.

Le système étudié est un atome a dans un état donné. Nous notons W_a l'énergie de l'atome a non perturbé. Calculons la variation d'énergie ΔW_a , de l'atome quand il est soumis à un champ électrique \mathbf{E} . Soit \mathbf{d} le dipôle électrique de a , nous avons :

$$\Delta W_a = -\vec{d} \cdot \vec{E}.$$

Equ. 2-3

Un atome ne présente pas de dipôle électrique permanent. Dans cette mesure, l'énergie ΔW_a de couplage avec le champ électrique est nulle au premier ordre en \mathbf{E} . Cependant, la présence d'un champ électrique perturbe la répartition des charges dans l'atome ce qui crée un dipôle induit \mathbf{d}_i proportionnel au champ électrique :

$$\vec{d}_i = K \cdot \vec{E}$$

Equ. 2-4

où K est une matrice 3 x 3 définie pour un état et une orientation donnée de l'atome. Remarquons que le dipôle induit provient majoritairement des électrons de la couche périphérique de l'atome, car ce sont les électrons les moins fortement liés au noyau, (dans le cas du césium qui est un alcalin, il n'y a qu'un seul électron périphérique). Selon (Equ. 2-3), le dipôle induit \mathbf{d}_i possède une énergie de couplage avec le champ \mathbf{E} :

$$\begin{aligned}\Delta W_a &= -\vec{d}_i \cdot \vec{E} \\ \Delta W_a &= -(K \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E}.\end{aligned}$$

Equ. 2-5

Si nous développons l'écriture de K :

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix}$$

Equ. 2-6

L'équation (Equ. 2-5) devient :

$$\Delta W_a = - \sum_{\substack{\alpha \in \{x,y,z\} \\ \beta \in \{x,y,z\}}} K_{\alpha\beta} (E_\alpha E_\beta).$$

Equ. 2-7

Nous discuterons au paragraphe 2.5.1 les simplifications possibles de cette expression. Pour un état donné de l'atome et une direction donnée du champ \mathbf{E} par rapport à l'atome, l'expression Equ. 2-7 peut s'écrire :

$$\Delta W_a = -\frac{1}{2} \alpha \times E^2$$

avec α scalaire .

Equ. 2-8

Cette expression met en évidence l'effet Stark : un champ électrique appliqué sur un atome crée un couplage dont l'énergie est proportionnelle au carré du champ électrique.

2.3.2 Approche quantique

L'hamiltonien du couplage Stark entre un atome et un champ électrique \mathbf{E} est défini par :

$$H_E = -\vec{E} \cdot \vec{d}.$$

Equ. 2-9

où \mathbf{d} est l'opérateur dipôle électrique de l'atome. Dans le cas où l'atome est un alcalin, nous ne considérons que le dipôle créé par l'électron périphérique¹ et nous avons :

$$H_E = -e \vec{E} \cdot \vec{r}$$

$$H_E = |e| E \vec{\epsilon} \cdot \vec{r}$$

Equ. 2-10

où e est la charge de l'électron, \mathbf{r} est l'opérateur position de l'électron périphérique et $\vec{\epsilon}$ est le vecteur unitaire orienté selon \mathbf{E} .

Considérons le déplacement d'énergie provoqué par l'application d'un champ électrique sur un état propre $|a\rangle$ d'un atome. D'après la théorie des perturbations, l'effet du champ électrique \mathbf{E} sur l'énergie W_a associée au niveau $|a\rangle$ peut s'écrire sous la forme d'une série de termes proportionnels aux puissances croissantes de la perturbation:

¹ Compte tenu de la taille importante de l'atome de césium, il est quelque peu discutable de modéliser la structure électronique du césium par l'unique électron périphérique.

$$\Delta W_a = \Delta_1 W_a + \Delta_2 W_a + \Delta_3 W_a + \dots$$

avec $\Delta_i W_a \propto E^i$

Equ. 2-11

Au premier ordre :

$$\Delta_1 W_a = |e|E \langle a | \vec{\epsilon} \cdot \vec{r} | a \rangle$$

Equ. 2-12

Quelque soit l'orientation de $\vec{\epsilon}$, l'opérateur $\vec{\epsilon} \cdot \vec{r}$ est impair. Le niveau $|a\rangle$ a une parité bien définie (soit pair, soit impair)*. Il en résulte que la perturbation induite par le champ électrique sur le niveau $|a\rangle$ est nulle au premier ordre. Cependant, le champ électrique introduit au premier ordre une perturbation de la fonction d'onde électronique du niveau $|a\rangle$, ce qui induit une perturbation de l'énergie de ce niveau au second ordre du développement :

$$\Delta_2 W_a = e^2 E^2 \sum_{\substack{n', L', S', J' \\ I', F', m'_F \\ E' \neq E_a}} \frac{|\langle a | \vec{\epsilon} \cdot \vec{r} | n', L', S', J', I', F', m'_F \rangle|^2}{W_a - W'}$$

Equ. 2-13

Où W' est l'énergie associée au niveau $|n', L', S', J', I', F', m'_F\rangle$ (nous supposons ici que tous les états sont non dégénérés). Pour les valeurs du champ électrique appliqué dans les expériences, le développement perturbatif au second ordre est suffisant et nous écrirons par la suite :

$$\Delta W_a = \Delta_2 W_a.$$

Equ. 2-14

Il est commode de définir l'opérateur H_{EE} :

$$H_{EE} = e^2 E^2 \sum_{\substack{n', L', S', J' \\ I', F', m'_F \\ E' \neq E_a}} \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{r} | n', L', S', J', I', F', m'_F \rangle \langle n', L', S', J', I', F', m'_F | \vec{\epsilon} \cdot \vec{r}}{W_a - W'}$$

Equ. 2-15

Nous avons alors :

$$\Delta_2 W_a = \langle a | H_{EE} | a \rangle$$

Equ. 2-16

* L'atome d'hydrogène est la seule exception car il possède deux sous-niveaux de même énergie et de parité opposée.

L'opérateur effectif H_{EE} permet de traiter la perturbation Stark du second ordre comme une perturbation du premier ordre. Il sera commode d'utiliser H_{EE} pour modéliser la perturbation conjointe du champ magnétique et du champ électrique.

2.4 Effet Stark différentiel sur la transition d'horloge

La différence d'énergie entre les deux niveaux $|6S_{1/2} F=3, m_F=0\rangle$ et $|6S_{1/2} F=4, m_F=0\rangle$ de l'atome non perturbé sert à définir la seconde (cf. Fig. 2-1). Nous présenterons dans ce paragraphe l'effet de la perturbation Stark sur cette transition dans les conditions expérimentales utilisées dans la fontaine atomique.

Dans la fontaine atomique, les atomes de césium soumis à un champ magnétique vertical \mathbf{B}_0 . Ce champ sert à lever la dégénérescence entre les sous niveaux Zeeman afin de ne pas perturber la résonance sur la transition horloge. Nous appliquerons un champ électrique statique \mathbf{E} pour étudier l'effet Stark. Dans la mesure où l'amplitude des perturbations engendrées par le champ électrique et le champ magnétique sont comparables, il est à priori nécessaire de les traiter simultanément. Nous expliquerons pourquoi il est en fait possible de traiter indépendamment les perturbation du champ électrique et du champ magnétique puis nous développerons le calcul de l'effet Stark sur la transition d'horloge.

2.4.1 Perturbation conjuguée des champs \mathbf{B} et \mathbf{E} .

Nous avons vu au paragraphe 2.2 que l'hamiltonien de l'atome de césium en présence d'un champ magnétique et d'un champ électrique s'écrit :

$$H = H_0 + H_B + H_E$$

Equ. 2-17

et que les faibles valeurs de \mathbf{E} et de \mathbf{B}_0 utilisées dans nos expériences permettaient de traiter le terme $H_B + H_E$ comme une perturbation sur les états propre de H_0 .

La perturbation H_B est développée au premier ordre alors que H_E est développée au second ordre. En utilisant l'opérateur effectif H_{EE} , nous pouvons traiter la perturbation du champ électrique comme une perturbation du premier ordre et il suffit alors de considérer la perturbation $H_B + H_{EE}$ au premier ordre pour prendre en compte l'effet simultané du champ magnétique et du champ électrique. Compte tenu des ordre de grandeur de \mathbf{B}_0 et \mathbf{E} , la perturbation $H_B + H_{EE}$ peut être considérée comme diagonale en n, L, J . Considérons la diagonalisation de la perturbation $H_B + H_{EE}$ dans le sous espace formé par les sous-niveaux $|F, m_F\rangle$ du niveau fondamental $6S_{1/2}$. Dans la mesure où le terme H_{EE} déplace pratiquement tous les niveaux $|F, m_F\rangle$ de la même fréquence (48 kHz à quelques Hertz près), nous pouvons écrire H_{EE} sous la forme :

$$H_{EE} = -\frac{1}{2}\alpha E^2 \cdot Id + H'_{EE}.$$

Equ. 2-18

Id est la matrice identité, et l'opérateur $-\frac{1}{2} \alpha E^2 Id$ décrit le déplacement moyen de tous les sous niveaux de l'état $6S_{1/2}$. La valeur numérique de α a été déterminée expérimentalement et théoriquement (Ref. 38, Ref. 39 et Ref. 40) : $\alpha = 5,8 \times 10^{-39} \text{ J}/(\text{V}/\text{m})^2$. Pour un champ électrique de $10^5 \text{ V}/\text{m}$, le déplacement moyen du niveau $6S_{1/2}$ vaut -48 kHz . L'hamiltonien H'_{EE} décrit les effets différentiels de la perturbation du champ électrique sur les états $|F, m_F\rangle$. Pour un champ électrique de $10^5 \text{ V}/\text{m}$, l'ordre de grandeur des déplacements de fréquence dus à H'_{EE} est de 2 Hz . Ecrivons alors la perturbation conjointe du champ magnétique et du champ électrique sous la forme :

$$H_B + H_E = H_B - \frac{1}{2} \alpha E^2 Id + H'_{EE}$$

Equ. 2-19

La perturbation H'_{EE} est négligeable devant H_B qui sépare les sous niveaux Zeeman de plusieurs kilohertz. Par ailleurs, l'opérateur identité n'affecte pas la diagonalisation. Il en résulte que c'est H_B qui impose la diagonalisation de la perturbation $H_B + H_{EE}$. Nous pourrions donc considérer l'effet du champ électrique comme une perturbation sur les états propres $|F, m_F\rangle$ du hamiltonien H'_0 qui décrit l'atome de césium en présence d'un champ magnétique. :

$$H'_0 = H_0 + H_B$$

$$\text{et } H = H'_0 + H'_{EE}.$$

Equ. 2-20

Pour des raisons de commodité, l'axe de quantification sera choisi parallèlement au champ \mathbf{B}_0 .

Remarque : Les faibles valeurs des champs électriques utilisés dans nos expériences permettent toujours de considérer l'effet Stark comme une perturbation petite vis à vis de la structure hyperfine. On trouvera dans (Ref. 32) une étude théorique de l'effet Stark valable dans le cas où la perturbation Stark est du même ordre de grandeur que la perturbation de structure hyperfine.

2.4.2 Expression de la perturbation Stark

Nous noterons respectivement $|3\rangle$ et $|4\rangle$ les deux états propres $|6S_{1/2} F=3, m_F=0\rangle$ et $|6S_{1/2} F=4, m_F=0\rangle$ de l'atome de césium en présence du champ magnétique vertical \mathbf{B}_0 .

En présence d'un champ électrique \mathbf{E} dirigé selon un vecteur unitaire $\vec{\epsilon}$, les perturbations sur les énergies W_3 et W_4 des niveaux $|3\rangle$ et $|4\rangle$ sont données par (cf. paragraphe 2.3.2) :

$$\Delta W_3 = e^2 E^2 \sum_{\substack{n', L', S', J' \\ I', F', m'_F \\ E' \neq E_3}} \frac{|\langle 3 | \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r} | n', L', S', J', I', F', m'_F \rangle|^2}{W_3 - W'}$$

$$\Delta W_4 = e^2 E^2 \sum_{\substack{n', L', S', J' \\ I', F', m'_F \\ E' \neq E_4}} \frac{|\langle 4 | \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r} | n', L', S', J', I', F', m'_F \rangle|^2}{W_4 - W'}$$

Equ. 2-21

En l'absence de champ électrique, la fréquence de la transition entre les sous niveaux $|3\rangle$ et $|4\rangle$ de l'état fondamental du césium vaut* :

$$\nu_0 = \frac{W_4 - W_3}{h},$$

Equ. 2-22

où h est la constante de Planck. En présence d'un champ électrique \mathbf{E} , les énergies associées aux états $|3\rangle$ et $|4\rangle$ sont déplacées par effet Stark des quantités ΔW_3 et ΔW_4 . La fréquence ν_0 de la transition horloge est perturbée de façon différentielle de la quantité $\delta\nu_0$:

$$\delta\nu_0 = \Delta W_4 - \Delta W_3.$$

Equ. 2-23

$$\delta\nu_0 = k \times E^2$$

Equ. 2-24

avec :

$$k = e^2 \sum_{\substack{n', L', S', J' \\ I', F', m'_F \\ E' \neq E_4}} \left(\frac{|\langle 4 | \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r} | n', L', S', J', I', F', m'_F \rangle|^2}{W_4 - W'} - \frac{|\langle 3 | \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r} | n', L', S', J', I', F', m'_F \rangle|^2}{W_3 - W'} \right).$$

Equ. 2-25

Le terme k dépend de l'orientation du champ électrique par rapport à l'axe de quantification. Nous détaillerons cette dépendance dans le §2.5. Dans la mesure où les deux niveaux $|3\rangle$ et $|4\rangle$ sont séparés par une énergie très faible vis à vis de l'énergie qui

* A cause de la présence de \mathbf{B}_0 , ν_0 n'est pas exactement la fréquence qui sert à définir la seconde. Il est nécessaire de corriger ν_0 du déplacement de fréquence lié à la perturbation induite au second ordre par le champ \mathbf{B}_0 sur la transition $|3\rangle |4\rangle$ (Dans les conditions du §2.2 cette correction vaut seulement 1 mHz, ce qui nous a permis d'ignorer cet effet pour la discussion du §2.4.1).

les séparent des niveaux $|n', L', S', J', I', F', m'_F\rangle$ qui entrent en jeu dans la perturbation Stark, ΔW_4 et ΔW_3 diffèrent très peu, et $\delta \nu_0$ est un déplacement très petit vis à vis de ν_0 . A titre indicatif nous donnons ci-dessous quelques ordres de grandeur :

$$\begin{aligned} \text{Pour } E &= 1000 \text{ V / cm} \\ \Delta W_3 &= -48 \text{ kHz} \\ \delta \nu_0 &= -2,3 \text{ Hz} \\ \frac{\delta \nu_0}{\nu_0} &= -2,5 \times 10^{-10}. \end{aligned}$$

Equ. 2-26

2.4.3 Couplages mis en jeu

L'expression (Equ. 2-21) prend en considération la somme de tous les couplages qui interviennent dans le déplacement d'énergie des niveaux $|3\rangle$ et $|4\rangle$. En pratique, la plupart des termes de cette somme sont nuls. Dans ce chapitre, nous recenserons les termes de couplage non nuls et nous donnerons l'ordre de grandeur de leurs importances relatives.

.a Eléments de matrice non nuls.

Nous rappelons que le nombre quantique de spin S vaut $\frac{1}{2}$ et que pour le césium, le nombre quantique de spin nucléaire I vaut $\frac{7}{2}$. Nous rappelons par ailleurs que :

$$\begin{aligned} |3\rangle &= |6S_{1/2}, F = 3, m_F = 0\rangle \\ |3\rangle &= |n = 6, L = 0, S = \frac{1}{2}, J = \frac{1}{2}, I = \frac{7}{2}, F = 3, m_F = 0\rangle \\ |4\rangle &= |6S_{1/2}, F = 4, m_F = 0\rangle \\ |4\rangle &= |n = 6, L = 0, S = \frac{1}{2}, J = \frac{1}{2}, I = \frac{7}{2}, F = 4, m_F = 0\rangle \end{aligned}$$

Equ. 2-27

En utilisant les règles de sélection pour les couplages dipolaires électriques (Ref. 2), nous trouvons que :

$$\begin{aligned} &\langle 6S_{1/2}, F, m_F | \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r} | n', L', \frac{1}{2}, J', \frac{7}{2}, F', m'_F \rangle \neq 0 \\ &\text{si } \begin{cases} n' \geq 6 \\ L' = 1 \\ J' = \frac{1}{2} \text{ ou } J' = \frac{3}{2} \\ F - F' = 0, \pm 1 \\ m_F - m'_F = 0, \pm 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Equ. 2-28

Nous voyons que l'effet Stark sur les niveaux $|3\rangle$ et $|4\rangle$ ne met en jeu que des couplages avec des états P pour lesquels $L'=1$.

Le niveau $|3\rangle$ est couplé avec les niveaux :

$$\begin{aligned} nP_{1/2} \text{ F}=3, 4, \text{ et } m_F = -1, 0, +1 \\ nP_{3/2} \text{ F}=2, 3, 4, \text{ et } m_F = -1, 0, +1 \\ \text{avec } n=6, 7, 8, \dots \end{aligned}$$

Le niveau $|4\rangle$ est couplé avec les niveaux :

$$\begin{aligned} nP_{1/2} \text{ F}=3, 4, \text{ et } m_F = -1, 0, +1 \\ nP_{3/2} \text{ F}=3, 4, 5, \text{ et } m_F = -1, 0, +1 \\ \text{avec } n=6, 7, 8, \dots \end{aligned}$$

Dans la suite, nous écrivons :

$$|n', L'=1, S'=1/2, J', I'=7/2, F', m'_F\rangle = |n' P_{J'}, F', m'_F\rangle$$

.b ordres de grandeur

Nous donnons dans le tableau 2-1 les valeurs théoriques des éléments de matrice réduits du dipôle* mis en jeu pour $n=6$, $n=7$ et $n=8$ (Ref. 41). Nous donnons également les valeurs de $e^2 |\langle 6S_{1/2} || r || nP_J \rangle|^2 / (W_{nP} - W_{6S})$ afin d'avoir un ordre de grandeur de l'influence des différents couplages sur la perturbation Stark du niveau fondamental.

n, J	$\langle 6S_{1/2} r nP_J \rangle$ (en unité de rayon de Bohr**)	$e^2 \langle 6S_{1/2} r nP_J \rangle ^2 / (W_{nP} - W_{6S})$ (Hz/(V/m) ²)
6, 1/2	-4,525	1,00x10 ⁻⁵
6, 3/2	-6,370	1,90x10 ⁻⁵
7, 1/2	0,279	1,96x10 ⁻⁸
7, 3/2	-0,575	8,27x10 ⁻⁸
8, 1/2	0,0787	1,32x10 ⁻⁹
8, 3/2	-0,212	9,57x10 ⁻⁹

tableau 2-1 : Valeurs numériques des éléments de matrice réduits du dipôle et des différents couplages mis en jeu dans le déplacement par effet Stark du niveau $6S_{1/2}$

* Les éléments de matrice $\langle 6S_{1/2}, F, m_F | \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r} | nP_J, F', m'_F \rangle$ sont proportionnels aux éléments de matrice réduit $\langle 6S_{1/2} || r || nP_J \rangle$ du dipôle. Leur expression dépend par ailleurs de F, F', m_F, m'_F , et de l'orientation du champ \mathbf{E} (cf. §2.5.2).

** Le rayon de Bohr vaut $a_0 = 0,529 \times 10^{-10}$ m

Nous constatons que la contribution majeure au déplacement de fréquence du niveau fondamental provient du couplage avec les niveaux $6P_{1/2}$ et $6P_{3/2}$. L'intensité de la perturbation Stark induite par les niveaux nP décroît avec n. Ceci est dû à deux raisons : les fonctions d'onde électroniques des niveaux 6S et nP se recouvrent d'autant moins que n est grand et les perturbations induites par les niveaux nP sont inversement proportionnelles à la différence d'énergie entre les niveaux 6S et nP qui croît avec n.

2.5 Influence de l'orientation du champ E

Jusqu'à présent, nous ne nous sommes pas préoccupés de l'orientation du champ électrique par rapport à l'axe de quantification qui est défini par la direction du champ magnétique \mathbf{B}_0 . Nous donnerons en introduction une interprétation classique du problème, puis nous développerons l'opérateur $\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r}$ pour prendre en compte l'orientation du champ E sur le déplacement Stark d'un niveau $|6S_{1/2}, F, m_F\rangle$.

2.5.1 Une interprétation classique

Nous avons développé au paragraphe 2.3.1 une interprétation classique de l'effet Stark. Si l'on y ajoute quelques considérations de symétrie, nous pouvons facilement retrouver des propriétés de la dépendance de l'effet Stark avec la direction du champ électrique appliqué.

Nous avons introduit le tenseur de polarisabilité d'un atome dans un état donné :

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix}$$

Equ. 2-29

Si l'on admet que l'atome de césium non perturbé ne présente pas de direction privilégiée, il est invariant par toutes les isométries qui laissent son centre O invariant et donc la matrice K doit être invariante par toutes les isométries de l'espace. Les seules matrices qui vérifient cette propriété sont des multiples de la matrice identité :

$$K = \begin{bmatrix} K_0 & 0 & 0 \\ 0 & K_0 & 0 \\ 0 & 0 & K_0 \end{bmatrix}$$

Equ. 2-30

Dans le cas de la fontaine, les atomes de césium sont soumis à un champ magnétique \mathbf{B}_0 selon l'axe (Oz). Dans cette mesure, on peut supposer que l'atome de césium ainsi perturbé ne présente plus qu'un axe de symétrie selon la direction z. La matrice K est alors seulement invariante par toutes les isométries laissant l'axe (Oz) invariant. On montre que les matrices vérifiant cette propriété sont de la forme :

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & K_2 \end{bmatrix}$$

Equ. 2-31

L'expression (Equ. 2-7) du couplage Stark sur le système a en fonction du champ électrique devient alors :

$$\Delta W_a = -(K_1 E_x^2 + K_1 E_y^2 + K_2 E_z^2)$$

Equ. 2-32

Si nous prenons les notations de la figure (Fig. 2-2) pour l'orientation du champ \mathbf{E} par rapport au champ \mathbf{B}_0 qui est dirigé selon l'axe (Oz), l'écriture ci dessus peut se mettre sous la forme :

$$\Delta W_a = -E^2 \times \left(K_{sc} + K_{ten} \times \frac{3\cos^2 \theta - 1}{2} \right)$$

Equ. 2-33

où :

$$K_{sc} = \frac{1}{3}(2K_1 + K_2)$$

$$K_{ten} = \frac{2}{3}(K_2 - K_1).$$

Equ. 2-34

Cette écriture met en évidence un terme K_{sc} de polarisabilité scalaire qui ne dépend pas de la direction du champ électrique. Ce terme est la valeur moyenne de la polarisabilité selon les trois axes. Le terme $K_{ten} \times (3\cos^2(\theta)-1)/2$ est proportionnel à la différence de polarisabilité entre l'axe Oz et les axes Ox et Oy. Il dépend de la direction du champ \mathbf{E} . et sa valeur moyenne sur toutes les directions de l'espace est nulle :

$$\int_{\text{sphère}} \frac{(3\cos^2 \theta - 1)}{2} d\Omega = \iint_{\substack{-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi}} \frac{(3\cos^2 \theta - 1)}{2} \sin \theta d\phi d\theta = 0$$

Equ. 2-35

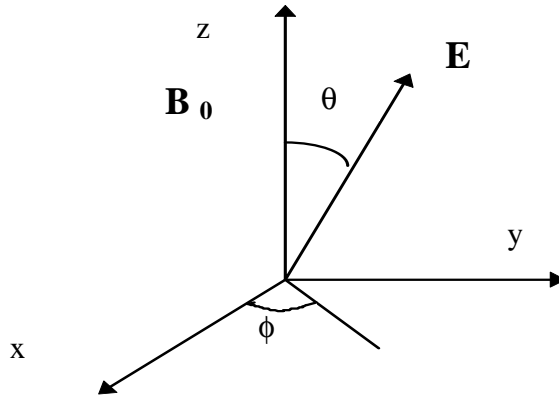


Fig. 2-2 :Orientation du champ E

2.5.2 Développement de l'opérateur dipolaire électrique

Nous utilisons les notations de la figure (Fig. 2-2) pour l'orientation de E par rapport à B_0 . L'opérateur $\vec{\epsilon} \cdot \vec{r}$ peut se développer sur les opérateur x, y, z :

$$\vec{\epsilon} \cdot \vec{r} = z \cos \theta + (x \cos \phi + y \sin \phi) \times \sin \theta$$

Equ. 2-36

La décomposition sur la base cartésienne (x,y,z) n'est pas la mieux adaptée pour traiter le problème et il est astucieux de décomposer r dans une base d'opérateurs tensoriels irréductibles (Ref. 1, Ref. 2) :

(C_0^1, C_1^1, C_{-1}^1) avec :

$$\begin{cases} C_0^1 = z \\ C_1^1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) \\ C_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) \end{cases}$$

Equ. 2-37

Dans cette base, nous avons :

$$\vec{\epsilon} \cdot \vec{r} = C_0^1 \cos \theta - \frac{C_1^1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\phi} + \frac{C_{-1}^1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\phi}$$

Equ. 2-38

Les termes C_q^1 sont proportionnels à un terme radial et aux harmoniques sphériques Y_q^1 .
Le théorème de Wigner-Eckart permet de simplifier les termes de couplage :

$$\begin{aligned} & \langle 6S_{1/2}, F, m_F | C_q^1 | n' P_{J'}, F', m'_F \rangle = \\ & (-1)^{F-m_F} \begin{pmatrix} F & 1 & F' \\ -m_F & q & m'_F \end{pmatrix} \langle 6S_{1/2}, F || C^1 || n' P_{J'}, F' \rangle \end{aligned}$$

Equ. 2-39

Le terme entre parenthèses désigne un coefficient 3j qui dépend de q et donc de l'orientation du champ \mathbf{E} , le second terme est un élément de matrice réduit du dipôle qui est indépendant de l'orientation de \mathbf{E} , (ce terme peut être évalué pour une valeur choisie du couple q et m_F). En utilisant (Equ. 2-13) et (Equ. 2-38), l'expression du déplacement Stark de l'énergie d'un niveau $|6S_{1/2}, F, m_F\rangle$ devient :

$$\Delta W_{F, m_F} = e^2 E^2 \times \sum_{\substack{n' \geq 6 \\ J', F', m'_F}} \left[\left((-1)^{F-m_F} \begin{pmatrix} F & 1 & F' \\ -m_F & 0 & m'_F \end{pmatrix} \cos \theta + \frac{(-1)^{F-m_F}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} F & 1 & F' \\ -m_F & 1 & m'_F \end{pmatrix} \sin \theta e^{-i\phi} + \frac{(-1)^{F-m_F}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} F & 1 & F' \\ -m_F & -1 & m'_F \end{pmatrix} \sin \theta e^{i\phi} \right)^2 \right] \times \frac{\left| \langle 6S_{1/2}, F || C^1 || n' P_{J'}, F' \rangle \right|^2}{W_F - W'}$$

Equ. 2-40

Pour rendre compte simplement de la dépendance angulaire, l'expression ci-dessus peut se mettre sous la forme de la somme d'un terme scalaire et d'un terme tensoriel (Ref. 31, Ref. 33) :

$$\Delta W_{F, m_F} = -\frac{1}{2} E^2 \left(\alpha_{sc}(F) + \left(\alpha_{ten}(F) \times \frac{3m_F^2 - F(F+1)}{F(2F-1)} \right) \times \frac{3\cos^2 \theta - 1}{2} \right)$$

Equ. 2-41

avec

$$\begin{aligned} \alpha_{sc}(F) &= -e^2 \times \frac{2}{3(2F+1)} \sum_{n', J', F'} \frac{\left| \langle 6S_{1/2}, F || C^1 || n' P_{J'}, F' \rangle \right|^2}{W_F - W'} \\ \alpha_{ten}(F) &= -e^2 \times 4\sqrt{\frac{5}{6}} \frac{\sqrt{F(2F-1)}}{\sqrt{(2F+3)(F+1)(2F+1)}} \times \sum_{n', J', F'} \left(\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ F & F & F' \end{Bmatrix} \times \frac{\left| \langle 6S_{1/2}, F || C^1 || n' P_{J'}, F' \rangle \right|^2}{W_F - W'} \right) \end{aligned}$$

Equ. 2-42

où le terme entre accolade utilise la notation $6j$. L'expression (Equ. 2-41) met en évidence de façon simple la dépendance du déplacement Stark d'un niveau $|6S_{1/2}, F, m_F\rangle$ en fonction de l'orientation du champ \mathbf{E} . Le terme scalaire α_{sc} est indépendant de la direction de \mathbf{E} . Le terme tensoriel proportionnel à α_{ten} dépend du sous niveau Zeeman (m_F) considéré et de l'orientation de \mathbf{E} . Sa valeur moyenne sur toutes les directions de l'espace est nulle (cf.§2.5.1).

Remarque :

Les expressions (Equ. 2-41) et (Equ. 2-42) posent la forme générale d'un calcul numérique théorique de l'effet Stark. Pour poursuivre se calcul, il faut encore modéliser les perturbations hyperfines afin d'estimer les éléments de matrice $\langle 6S_{1/2}, F||C^1||n'PJ', F'\rangle$ en fonction des éléments de matrice réduits $\langle 6S_{1/2}||r||n'PJ'\rangle$ (ces derniers ont été calculés pour $n=6, 7, 8$ (Ref. 41, Ref. 42, Ref. 43) et un accord au niveau du pour-cent a pu être vérifié expérimentalement pour la plus récentes évaluation de ces termes (Ref. 41)). Le déplacement Stark différentiel sur la transition d'horloge de l'atome de césium a ainsi été évalué en prenant compte des couplages avec les niveaux $n=6, n=7$ et $n=8$ (Ref. 26, Ref. 27). Nous donnerons au § 2.6.3 les résultats obtenus et nous détaillerons dans le chapitre 4 la méthode de calcul utilisée.

2.5.3 Développement sur la structure hyperfine

L'expression (Equ. 2-41) met en évidence la dépendance du déplacement par effet Stark d'un niveau $6S_{1/2}, F, m_F$ avec la direction du champ électrique. Cependant dans la mesure où les termes $\alpha_{sc}(F)$ et $\alpha_{ten}(F)$ dépendent de F (Equ. 2-42), l'expression (Equ. 2-41) est difficilement exploitable pour déterminer l'influence de la direction du champ électrique sur l'effet Stark différentiel entre les niveaux $6S_{1/2} F=3$ et $F=4$. La dépendance de $\alpha_{sc}(F)$ et $\alpha_{ten}(F)$ en fonction du nombre quantique F peut être simplifiée si l'on évalue l'influence des différents couplages de structure hyperfine sur la polarisabilité. Ce calcul théorique qui utilise les propriétés des moments angulaires a été effectué par P.G.H. Sandars dans le cas des niveaux fondamentaux de l'hydrogène et des alcalins (Ref. 30). Nous nous contentons de rappeler les résultats obtenus pour les déplacements Stark des deux sous niveaux hyperfins du niveau fondamental d'un alcalin dont le nombre quantique du moment nucléaire est I :

$$\begin{cases} \alpha_{sc}(F = I + \frac{1}{2}) = \alpha + \alpha_{10} \\ \alpha_{ten}(F = I + \frac{1}{2}) = \alpha_{12} + \alpha_{02} \\ \alpha_{sc}(F = I - \frac{1}{2}) = \alpha + \frac{I+1}{I} \alpha_{10} \\ \alpha_{ten}(F = I - \frac{1}{2}) = \frac{(2I-1)(I-1)}{I(2I+1)} \alpha_{12} + \frac{(2I+3)(I-1)}{I(2I+1)} \alpha_{02} \end{cases}$$

Equ. 2-43

α est la polarisabilité en l'absence des effets de structure hyperfine et $\alpha_{10}, \alpha_{12}, \alpha_{02}$, sont les termes de polarisabilité dont l'origine physique est liée à 3 différents couplages qui entrent en jeux dans la perturbation de structure hyperfine $H_{h.f.}$. Le terme α_{10} est le terme de contact qui décrit l'interaction H_{I0} entre le moment magnétique de spin de l'électron

et le champ magnétique à l'intérieur du noyau. Le terme α_{12} provient de l'interaction H_{12} entre le moment magnétique de spin de l'électron et le moment magnétique nucléaire. Le terme α_{02} provient de l'interaction électrostatique H_{02} entre l'électron périphérique et le moment quadripolaire électrique du noyau.

En appliquant ces résultats pour les états $|6S_{1/2}, F, m_F\rangle$ du niveau fondamental de l'atome de césium.

$$\begin{cases} \alpha_{sc}(F=4) = \alpha + \alpha_{10} \\ \alpha_{ten}(F=4) = \alpha_{12} + \alpha_{02} \\ \alpha_{sc}(F=3) = \alpha - \frac{9}{7}\alpha_{10} \\ \alpha_{ten}(F=3) = \frac{15}{28}\alpha_{12} + \frac{25}{28}\alpha_{02} \end{cases}$$

Equ. 2-44

En remplaçant ces expressions dans (Equ. 2-41), les déplacements d'énergie des niveaux $|6S_{1/2}, F=4, m_F\rangle$ et $|6S_{1/2}, F=3, m_F\rangle$ dus à un champ électrique \mathbf{E} orienté d'un angle θ par rapport à l'axe de quantification s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Delta W_{F=4, m_F} &= -\frac{1}{2} E^2 \left(\alpha + \alpha_{10} + (\alpha_{12} + \alpha_{02}) \times \frac{3m_F^2 - 20}{28} \times \frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \right) \\ \Delta W_{F=3, m_F} &= -\frac{1}{2} E^2 \left(\alpha - \frac{9}{7}\alpha_{10} + \left(\frac{15}{28}\alpha_{12} + \frac{25}{28}\alpha_{02} \right) \times \frac{3m_F^2 - 12}{15} \times \frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \right) \end{aligned}$$

Equ. 2-45

Remarque :

Il est possible d'estimer l'ordre de grandeur des termes α_{10} , α_{12} , α_{02} par rapport à α . En faisant l'hypothèse simplificatrice que le déplacement Stark des niveaux $|6S\rangle$ provient uniquement du couplage avec le niveau P le plus proche ($n=6$), on peut montrer que le rapport α_{ij}/α est de l'ordre de grandeur du rapport entre l'intensité du terme de perturbation hyperfine H_{ij} sur le niveau 6P, et l'écart d'énergie ($W_{6P} - W_{6S}$) entre les niveaux 6S et 6P. (Ref. 29). Compte tenu des valeurs expérimentales des constantes de structure hyperfine, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{10}}{\alpha} &\approx 10^{-5} \\ \frac{\alpha_{12}}{\alpha} &\approx 5 \times 10^{-7} \\ \frac{\alpha_{02}}{\alpha} &\approx 10^{-9} \end{aligned}$$

Equ. 2-46

Nous rappelons que $\alpha/h = 8,8 \times 10^{-6}$ Hz/(V/m)² (Ref. 38, Ref. 39, Ref. 40)

2.6 Application à la fontaine atomique :

Nous appliquons ici les résultats obtenus au cas de la mesure que nous effectuons dans la fontaine atomique. Le champ magnétique B_0 est vertical et le champ électrique est horizontal donc $\theta = \pi/2$.

2.6.1 Transition horloge

L'expression (Equ. 2-45) donne le déplacement d'énergie par effet Stark différentiel sur la transition horloge entre les niveaux $|6S_{1/2} F=3, m_F=0\rangle$ et $|6S_{1/2} F=4, m_F=0\rangle$ ($|3\rangle$ et $|4\rangle$):

$$\Delta W_4 - \Delta W_3 = -\frac{1}{2} E^2 \left(\frac{16}{7} \alpha_{10} - \frac{2}{7} \alpha_{12} \times \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right),$$

Equ. 2-47

avec $\theta = \pi/2$,

$$\Delta W_4 - \Delta W_3 = -\frac{1}{2} E^2 \left(\frac{16}{7} \alpha_{10} + \frac{1}{7} \alpha_{12} \right).$$

Equ. 2-48

Pour le chapitre suivant, nous définissons la constante k_0 relative au déplacement de fréquence par effet Stark différentiel sur la transition horloge dans la fontaine atomique :

$$k_0 = -\frac{1}{2h} \left(\frac{16}{7} \alpha_{10} + \frac{1}{7} \alpha_{12} \right),$$

Equ. 2-49

ainsi :

$$\begin{aligned} \delta \nu_0 &= k_0 E^2 \\ \text{où } \delta \nu_0 &= \frac{\Delta W_4 - \Delta W_3}{h}. \end{aligned}$$

Equ. 2-50

2.6.2 Transitions entre sous-niveaux Zeeman

Dans la fontaine atomique, il sera également possible de mesurer le déplacement de fréquence sur les transitions entre sous-niveaux Zeeman $|6S_{1/2} F=3, m_F\rangle$ et $|6S_{1/2} F=4, m_F\rangle$ avec $m_F = -3, -2, -1, 1, 2, 3$. Nous utiliserons les notations suivantes :

$$k_{m_F} = k_0 + m_F^2 \times \frac{\alpha_{02}}{28}$$

Equ. 2-51

En accord avec (Equ. 2-45), nous avons :

$$\begin{aligned} \delta\nu_{m_F} &= k_{m_F} E^2 \\ \text{où } \delta\nu_{m_F} &= \frac{\Delta W_{4,m_F} - \Delta W_{3,m_F}}{h}. \end{aligned}$$

Equ. 2-52

Pour réduire la sensibilité des mesure de k_{m_F} aux fluctuations parasites du champ magnétique \mathbf{B}_0 , nous utiliserons la propriété :

$$k_{m_F} = k_{-m_F} = k_{|m_F|}$$

Equ. 2-53

2.6.3 Discussion

Nous verrons dans le chapitre 4 que la détermination du déplacement de fréquence provoqué par le rayonnement du corps noir dans un étalon de fréquence atomique nécessite de connaître précisément la valeur du terme scalaire α_{10} . Pour espérer atteindre une exactitude de fréquence relative de 10^{-16} , il est nécessaire de connaître la valeur de α_{10} avec une incertitude de 5 pour mille. Considérons les valeurs expérimentales et théoriques de α_{10} disponibles à ce jour :

. α Valeurs expérimentales

Des mesures ont été réalisées sur des jets atomiques à résonance magnétique pour mesurer les constantes relatives à l'effet Stark différentiel entre les niveaux $|3\rangle$ et $|4\rangle$. Le principe de ces mesures est le suivant : on enregistre le déplacement de fréquence $\delta\nu_0$ de la résonance atomique entre les niveaux $|3\rangle$ et $|4\rangle$, quand les atomes de césium sont soumis à un champ électrique \mathbf{E} . On déduit de cette mesure la constante k'_0 relative à l'effet Stark :

$$\delta\nu_0 = k'_0 E^2.$$

Equ. 2-54

Nous n'avons pas repris la notation k_0 de (Equ. 2-49 et Equ. 2-50) car dans les mesures réalisées sur les jets, la géométrie du champ électrique et du champ magnétique est différente de celle qui est utilisée dans la fontaine atomique. Le champ électrique appliqué est parallèle au champ magnétique statique \mathbf{B}_0 . Dans ces conditions , l'équation (Equ. 2-47) montre que :

$$k'_0 = -\frac{1}{2h} \left(\frac{16}{7} \alpha_{10} - \frac{2}{7} \alpha_{12} \right).$$

Equ. 2-55

Les résultats de ces mesures sont :

$$k'_0 = -2,29(3) \times 10^{-10} \text{ Hz}/(\text{V}/\text{m})^2 \quad (\text{Ref. 24})$$

$$k'_0 = -2,25(5) \times 10^{-10} \text{ Hz}/(\text{V}/\text{m})^2 \quad (\text{Ref. 25})$$

Il est possible d'accéder à la valeur du terme de contact α_{10} , si nous utilisons de précédents résultats obtenus sur la polarisabilité différentielle entre les niveaux ($6S_{1/2}$, $F=4$, $m_F=-3$) et ($6S_{1/2}$, $F=4$, $m_F=-4$) (Ref. 28, Ref. 29). Ces mesures ont été réalisées sur des jets atomiques à résonance magnétique (Ref. 7, Ref. 8) avec un champ \mathbf{E} parallèle au champ \mathbf{B} . Les valeurs des déplacements de fréquences mesurées sont respectivement :

$$\frac{1}{h} (\Delta W_{F=4, m_F=-3} - \Delta W_{F=4, m_F=-4}) = -127(20) \times 10^{-14} \text{ Hz}/(\text{V}/\text{m})^2$$

$$\frac{1}{h} (\Delta W_{F=4, m_F=-3} - \Delta W_{F=4, m_F=-4}) = -137(8) \times 10^{-14} \text{ Hz}/(\text{V}/\text{m})^2$$

Equ. 2-56

En utilisant (Equ. 2-44), nous avons :

$$\frac{1}{h} (\Delta W_{F=4, m_F=-3} - \Delta W_{F=4, m_F=-4}) = \frac{3}{8} (\alpha_{12} + \alpha_{02})$$

Equ. 2-57

Par ailleurs, les considérations théoriques sur l'ordre de grandeur du terme spin dipolaire α_{12} et du terme quadupolaire α_{02} montrent que α_{02} est 500 fois plus petit que α_{12} (Equ. 2-46). Dans cette mesure :

$$\alpha_{12} \approx (\alpha_{12} + \alpha_{02}) = \frac{8}{3} (\Delta W_{F=4, m_F=-3} - \Delta W_{F=4, m_F=-4})$$

$$\text{et donc } \frac{\alpha_{12}}{h} = -3,6(2) \times 10^{-12} \text{ Hz}/(\text{V}/\text{m})^2$$

Equ. 2-58

Reprenons (Equ. 2-55). Compte tenu de l'ordre de grandeur du terme α_{12} vis à vis du terme α_{10} , et de l'incertitude de quelques pour-cent sur les mesures de k'_0 , nous pouvons tout simplement négliger le terme α_{12} et α_{10} est donné par:

$$-\frac{1}{2h} \left(\frac{16}{7} \alpha_{10} \right) \approx k'_0$$

Equ. 2-59

.b Valeurs théoriques

Deux calculs théoriques (cf. remarque du §2.5.2) du déplacement par effet Stark de la fréquence de la transition entre $|3\rangle$ et $|4\rangle$ ont été réalisés en supposant le champ \mathbf{E} dirigé selon l'axe de quantification, (ce qui correspond au terme k'_0 défini dans (Equ. 2-54)). Nous donnons ci dessous les résultats obtenus :

$$k'_0 = -1,9(2) \times 10^{-10} \text{ Hz}/(\text{V/m})^2 \quad (\text{Ref. 26})$$

$$k'_0 = -2,23 \times 10^{-10} \text{ Hz}/(\text{V/m})^2 \quad (\text{Ref. 27})$$

L'incertitude sur la deuxième valeur n'est pas explicitée (à priori, elle vaut quelques pour-cents). Compte tenu des incertitudes sur ces estimations, nous pouvons directement déduire la valeur de α_{10} selon :

$$-\frac{1}{2h} \left(\frac{16}{7} \alpha_{10} \right) \approx k'_0$$

Equ. 2-60

.c bilan

Les valeurs théoriques et expérimentales de α_{10} présentent au mieux une incertitude relative de deux pour-cent. La mise en oeuvre d'une mesure expérimentale de k_0 utilisant la fontaine atomique (premier étalon primaire de fréquence utilisant des atomes de césium refroidis) a permis d'améliorer d'un facteur dix les précédentes estimations. Nous détaillerons dans le chapitre suivant la mesure de la constante k_0 . Nous résumons les résultats obtenus dans le § 3.7 .

3. Mesure expérimentale du déplacement de fréquence induit par un champ électrique.

3.1 Introduction

Jusqu'à présent, le déplacement de fréquence induit par un champ électrique statique sur la transition horloge du césium avait été mesuré avec une incertitude de quelques pour-cent dans des jets atomiques à résonance magnétique (Ref. 25 ,Ref. 24). Le récent développement de la fontaine atomique FO.1 du BNM-LPTF, étalon de fréquence utilisant des atomes de césium refroidis par laser, a motivé la mise en œuvre d'une nouvelle mesure de cet effet. De par sa grande stabilité et son mode de fonctionnement pulsé, FO.1 a permis d'améliorer d'un facteur dix l'exactitude de la mesure. Nous présenterons brièvement le fonctionnement de la fontaine atomique et nous décrirons le dispositif expérimental développé pour mesurer l'effet Stark. Nous expliquerons le principe des différentes méthodes opératoires utilisées et nous passerons en revue les différentes erreurs systématiques et incertitudes expérimentales.

3.2 La fontaine atomique.

Le principe d'un étalon de fréquence atomique consiste à asservir la fréquence d'un oscillateur sur la fréquence d'une transition atomique (Ref. 7, Ref. 8) La fontaine atomique F.O.1 est actuellement le seul étalon primaire de fréquence opérationnel à atomes de césium refroidis par laser. La transition atomique $6S_{1/2} F=3-F=4$ de l'atome de césium est excitée par une interaction micro-onde de type Ramsey dont la durée est de l'ordre de 1 seconde. L'incertitude relative sur la fréquence de F.O.1 est à ce jour 2×10^{-15} (Ref. 18). Le principe des fontaines à atomes refroidis est décrit dans (Ref. 11, Ref. 13, Ref. 14) et nous trouverons dans les références (Ref. 16, Ref. 17, Ref. 18, Ref. 19, Ref. 21) une description assez détaillée de F.O.1. Nous nous contenterons ici de rappeler le mode opératoire de F.O.1 et de préciser quelques éléments importants dans le cadre de l'étude du déplacement de fréquence induit par un champ électrique statique et par le rayonnement du corps noir.

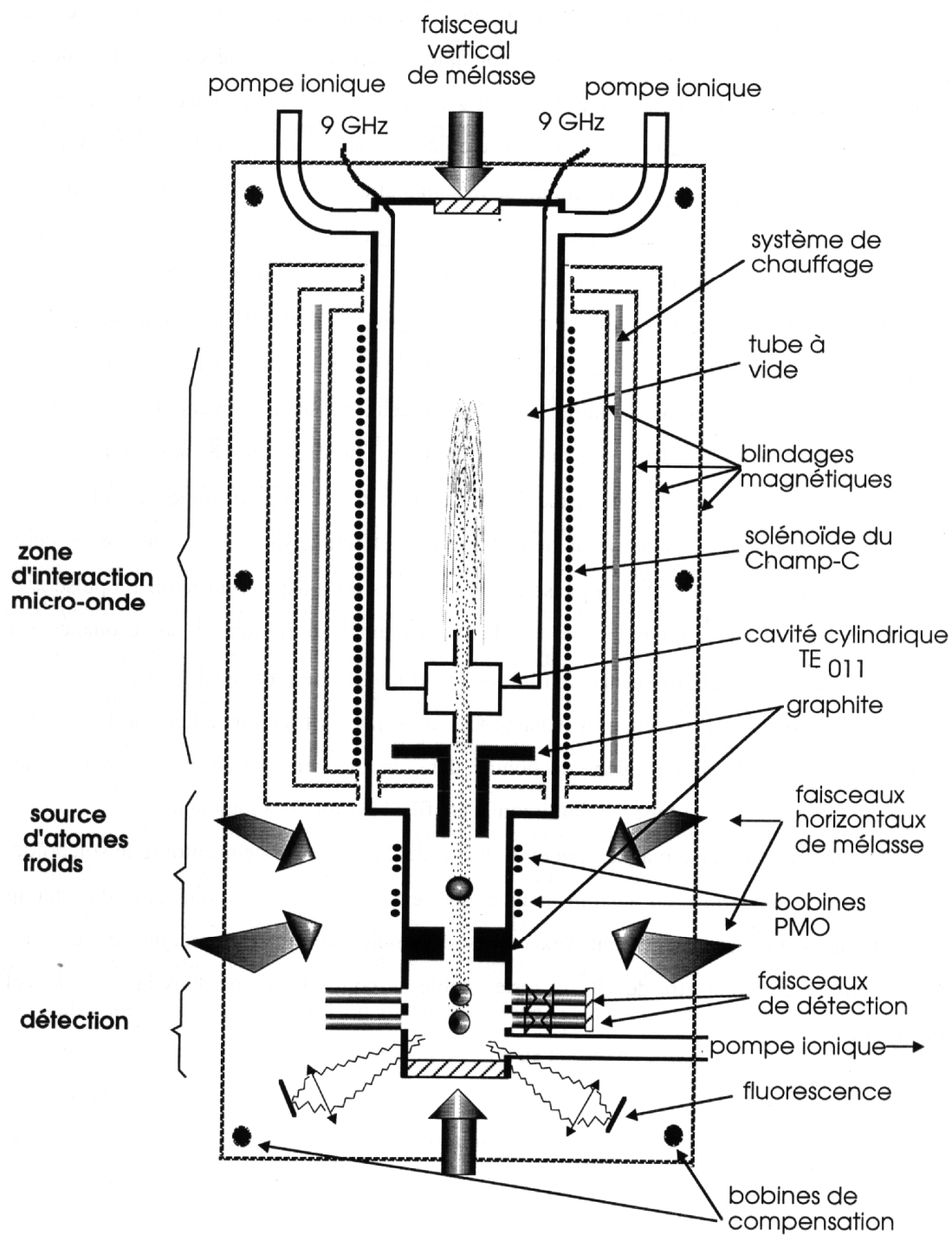


Fig. 3-1: Schéma de la fontaine atomique

3.2.1 Mode opératoire de F.O.1

La figure (Fig. 3-1) montre le schéma de F.O.1. A peu près 10^8 atomes de césium sont refroidis dans un piège magnéto-optique (PMO) à une température de quelques micro-Kelvin. Pendant le refroidissement, les atomes sont sélectionnés par pompage optique dans le niveau $F=4$, puis ils sont lancés verticalement. Ils passent une première fois dans la cavité micro-onde, effectuent un vol balistique dont l'apogée se situe au maximum 60 cm au dessus de la cavité. Ils retombent sous l'effet de la gravité, et passent une deuxième fois dans la cavité micro-onde. Le double passage dans la cavité réalise une excitation de type Ramsey de la transition hyperfine $F=3$, $F=4$. Les populations des atomes dans les deux niveaux hyperfins sont mesurées dans la zone de détection. Le temps entre les deux passages dans la cavité micro-onde est d'environ 500 ms, ce qui conduit à une largeur à mi-hauteur de 1Hz pour la frange centrale du motif de franges de Ramsey (cf. Fig. 3-2).

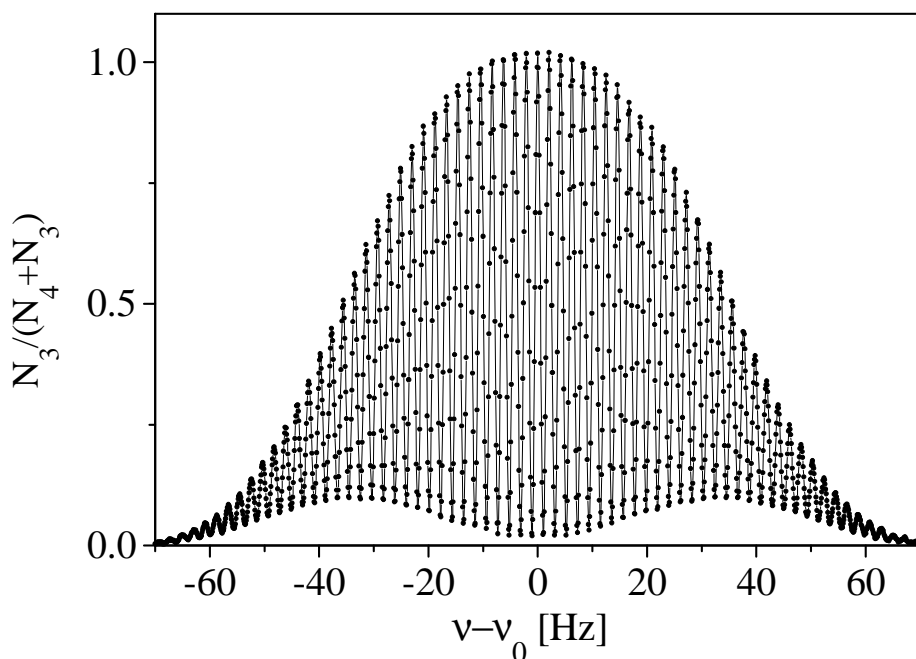


Fig. 3-2: Motif de franges de Ramsey de la fontaine atomique. N_3 et N_4 sont respectivement les nombres d'atomes détectés dans les états $F=3$ et $F=4$. Les points expérimentaux sont superposés à une courbe calculée par une simulation numérique.

Le mode opératoire de la fontaine est cyclique. Environ chaque seconde, un nuage d'atome froid réalise ainsi une interaction de type Ramsey. La mesure des populations dans chaque niveau hyperfin à chaque cycle permet d'asservir la fréquence d'un oscillateur à quartz sur le sommet de la frange centrale de résonance. La stabilité de fréquence de cette oscillateur asservi à la fréquence atomique de la transition hyperfine est décrite par sa variance d'Allan $\sigma_y^2(\tau)$ (Fig. 3-3). Sur cette courbe, la stabilité sur une seconde de 2×10^{-13} est principalement limitée par le bruit de fréquence du quartz. La stabilité à long terme de 2×10^{-15} est limitée au bout de trois heures par la stabilité de fréquence du maser à hydrogène utilisé comme oscillateur de comparaison. L'écart type de la variance d'Allan $\sigma_y(\tau)$ décroît inversement proportionnellement à la racine carré du nombre de cycles n_c (et donc à τ), ce qui peut s'interpréter comme la réduction du bruit en fonction du nombre de mesures, de la valeur moyenne d'une grandeur affectée d'un bruit blanc.

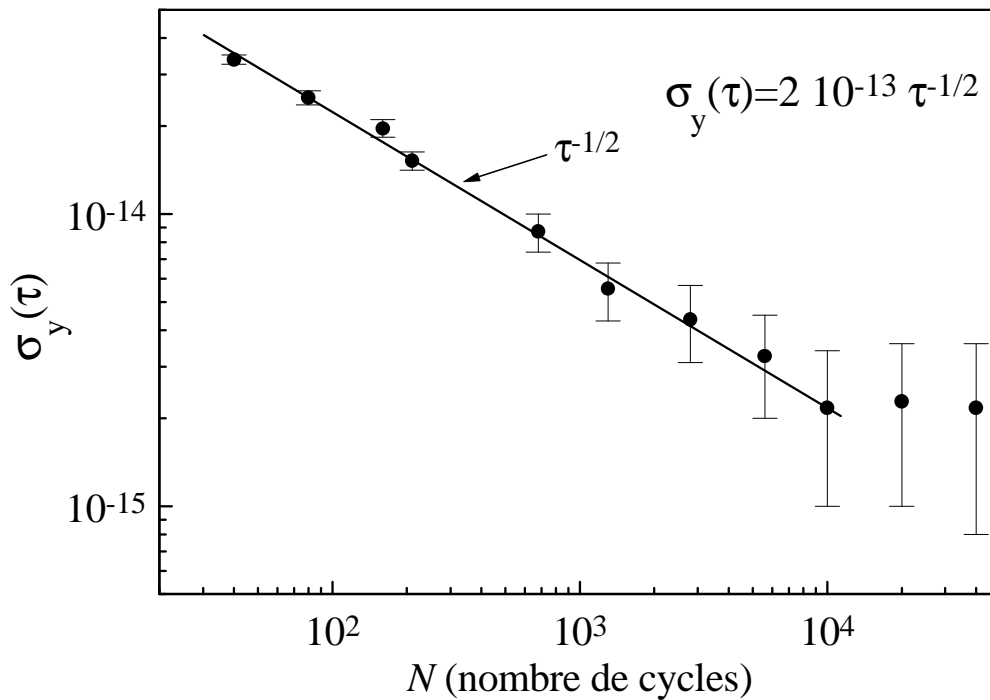


Fig. 3-3 : Ecart-type de la variance d'Allan de la fontaine atomique par rapport à un maser à hydrogène, la durée d'un cycle est de 1,1 s.

3.2.2 Le piège magnéto-optique.

Le principe du piège magnéto-optique est décrit dans (Ref. 9). Nous rappelons brièvement que les bobines du piège centrées sur l'axe vertical de F.O.1 sont en configuration anti-Helmoltz afin de créer un gradient de champ magnétique au centre de symétrie des bobines. Nous utilisons la transition optique $6S_{1/2} F=4, 6P_{3/2} F=5$ pour le refroidissement. Dans le cas où le gradient est dirigé vers le haut, les quatre faisceaux horizontaux ont une polarisation circulaire droite et les deux faisceaux verticaux une polarisation circulaire gauche. Les atomes sont piégés au centre de symétrie des bobines où le champ magnétique est nul. Nous verrons par la suite qu'il est important de connaître précisément la position relative de la zone de piégeage par rapport à la cavité micro-onde. Pour ce faire, nous avons mesuré le temps nécessaire aux atomes pour passer de la zone de refroidissement à la cavité micro-onde. Cette mesure a été réalisée en pulsant la puissance micro-onde dans la cavité. En mode de fonctionnement habituel, la puissance micro-onde injectée dans la cavité est constante. Il est également possible de générer une impulsion micro-onde courte et intense, décalée d'une durée ΔT par rapport à l'instant où les atomes sont lancés vers le haut. Si l'on choisit ΔT assez courte pour que les atomes ne se trouvent pas encore dans la cavité pendant l'impulsion micro-onde, il n'y a pas d'interaction entre la micro-onde et les atomes. En revanche, si les atomes se trouvent dans la cavité pendant l'impulsion, il y a une interaction et nous détectons une variation des populations dans les deux niveaux hyperfins. En augmentant progressivement ΔT , on détermine la durée ΔT_c nécessaire aux atomes pour atteindre la cavité micro-onde. Comme nous connaissons la vitesse de lancement V_z , nous déduisons aisément la distance d_{lc} entre la zone de lancement et l'entrée de la cavité :

$$d_{lc} = V_z \Delta T_c - \frac{1}{2} g \Delta T_c^2$$

Equ. 3-1

g est la valeur de l'accélération gravitationnelle dans notre laboratoire parisien ($g=9,8094 \text{ m/s}^2$, (Ref. 61)). Nous avons réalisé une série de mesures pour différentes valeurs de V_0 . Compte tenue des incertitudes liées à la taille du nuage d'atomes froids et à la durée de l'impulsion micro-onde, nous trouvons $d_{lc}=307,8(7) \text{ mm}$.

3.2.3 Le lancement des atomes

Une mélasse optique en mouvement est utilisée pour lancer les atomes. Une onde stationnaire se déplaçant verticalement dans le référentiel du laboratoire et dans laquelle les atomes refroidis sont à l'équilibre, est obtenue en changeant symétriquement de $\pm \Delta v$ les fréquences des faisceaux verticaux. A cause de l'effet Doppler, un atome de vitesse $V_z = \lambda \epsilon \Delta v$ voit dans son référentiel propre toutes les fréquences des faisceaux égales. Les désaccords en fréquence $+\Delta v$ et $-\Delta v$ sur les faisceaux lasers montants et descendants sont réalisés par des modulateurs acousto-optiques dont les fréquences sont pilotées par des synthétiseurs H.P 8647. Cette méthode permet d'ajuster la vitesse moyenne de lancement V_z de 0 à 5 m/s avec une incertitude relative bien meilleure que 10^{-4} . A la fin de la phase de lancement, les atomes sont refroidis jusqu'à quelques μK en

réduisant l'intensité et en augmentant le désaccord en fréquence des faisceaux de refroidissement. La direction de lancement des atomes est déterminée par la direction des faisceaux. Pour régler expérimentalement la direction des faisceaux verticaux, nous orientons horizontalement un miroir à l'aide d'un niveau à bulle puis nous vérifions que le faisceau vertical descendant se rétro-réfléchit parfaitement sur ce miroir. Nous superposons ensuite le faisceau montant sur le faisceau descendant. La verticalité du lancement est ainsi ajustée avec une précision meilleure que 1 mrad.

3.2.4 Evolution spatiale du nuage d'atomes

Dans le piège magnéto-optique, les atomes sont confinés dans une sphère dont le rayon r_0 est de l'ordre du millimètre. Après le lancement, le nuage d'atomes s'étend progressivement sous l'effet de la vitesse d'agitation thermique des atomes. Si nous désignons $\langle v_x^2 \rangle, \langle v_y^2 \rangle, \langle v_z^2 \rangle$, les vitesses quadratiques moyennes des atomes dans le référentiel du centre de masse, T la température du nuage d'atome et m_{cs} la masse d'un atome de césium, nous avons :

$$\langle v_x^2 \rangle \approx \langle v_y^2 \rangle \approx \langle v_z^2 \rangle$$

Equ. 3-2

et

$$\frac{1}{2} m_{cs} \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

Equ. 3-3

où k_B est la constante de Boltzmann. Le rayon moyen du nuage d'atomes au bout du temps t est donné par :

$$r_0(t) = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle t^2 + r_0^2} .$$

Equ. 3-4

Pour des températures de quelques μK , au bout de quelques dixièmes de seconde, le rayon initial r_0 du nuage d'atomes froids est petit devant le rayon moyen $r_0(t)$. (A titre indicatif, $r_0=1 \text{ mm}$ et pour $T = 7\mu\text{K}$, $\langle v_x^2 \rangle^{1/2} = 2\text{cm/s}$). Nous avons alors approximativement :

$$r_0(t) \approx \sqrt{\langle v_x^2 \rangle} \times t .$$

Equ. 3-5

Nous faisons l'hypothèse que la distribution de vitesse est gaussienne. La distribution des atomes en fonction du rayon r est alors donnée par :

$$\frac{dn}{dr}(r) = n_{tot} \times \frac{e^{-(r/r_0)^2}}{2\sqrt{\pi}}$$

Equ. 3-6

où n_{tot} est le nombre total d'atomes refroidis.

3.2.5 Calcul théorique de la figure de franges de Ramsey

Dans la cavité micro-onde de la fontaine atomique, l'intensité du champ micro-onde n'est pas constante, c'est pourquoi il est difficile de calculer analytiquement la probabilité de transition d'un atome du niveau $F=4$ au niveau $F=3$ en fonction de la fréquence de la micro-onde. Nous décrivons brièvement ici la méthode numérique utilisée.

Un champ magnétique vertical constant \mathbf{B}_0 de $1,7 \times 10^{-7}$ T est appliqué afin de lever la dégénérescence entre les différents sous niveaux Zeeman des états $6S_{1/2} F=3$ et $6S_{1/2} F=4$. Nous ne considérerons que la transition entre les états $6S_{1/2} F=3, m_F=0$ et $6S_{1/2} F=4, m_F=0$, et nous utiliserons le modèle d'un atome à deux niveaux pour modéliser l'excitation de cette transition par un champ magnétique oscillant. Ce modèle est justifié dans la mesure où tous les autres niveaux ne sont pas couplés par le champ magnétique oscillant. Nous noterons respectivement $|3\rangle$ et $|4\rangle$ les vecteurs propres associés aux états $6S_{1/2} F=3, m_F=0$ et $6S_{1/2} F=4, m_F=0$ de l'atome non perturbé, et W_3 et W_4 leurs énergies respectives. L'état de l'atome est décrit par :

$$|e(t)\rangle = p_3(t) |3\rangle + p_4(t) |4\rangle$$

Equ. 3-7

avec $p_3(t)$ et $p_4(t)$, nombres complexes dépendants du temps. L'évolution de $|e(t)\rangle$ est donnée par l'équation de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d|e(t)\rangle}{dt} = H|e(t)\rangle$$

Equ. 3-8

où H est le hamiltonien du système. En l'absence de perturbations, $H=H_0$. Dans la base ($|3\rangle, |4\rangle$), nous aurons :

$$H_0 = \begin{pmatrix} W_3 & 0 \\ 0 & W_4 \end{pmatrix}.$$

Equ. 3-9

Les fonctions $p_3(t)$ et $p_4(t)$ sont déduites de l'équation d'évolution et des conditions initiales au temps t_0 :

$$\begin{pmatrix} p_3(t_0 + t) \\ p_4(t_0 + t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i(W_3/\hbar)t} & 0 \\ 0 & e^{-i(W_4/\hbar)t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_3(t_0) \\ p_4(t_0) \end{pmatrix}.$$

Equ. 3-10

Nous écrirons de préférence cette équation sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} p_3(t_3) \\ p_4(t_3) \end{pmatrix} = e^{-i(W_3/\hbar)(t_3-t_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i((W_4-W_3)/\hbar)(t_3-t_2)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_3(t_2) \\ p_4(t_2) \end{pmatrix}.$$

Equ. 3-11

Cette écriture fait apparaître la différence d'énergie W_4-W_3 . Le terme de phase qui précède la matrice n'a aucune influence sur la résolution du problème physique. Dans le cas où l'on applique un champ magnétique $\mathbf{B}(t)$ oscillant de pulsation ω et d'intensité constante B_0 dirigé selon l'axe de quantification, le hamiltonien du système devient:

$$H=H_0+H_B$$

Equ. 3-12

où H_B provient de l'interaction du dipôle magnétique atomique $\boldsymbol{\mu}$ avec le champ oscillant :

$$H_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(t)$$

$$H_B = \hbar b_0 \times \begin{pmatrix} 0 & \cos(\omega t) \\ \cos(\omega t) & 0 \end{pmatrix}$$

Equ. 3-13

$$\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_z$$

$$\text{avec } b_0 = \frac{1}{2} (g_I + g_J) \mu_B B_0 / \hbar$$

Equ. 3-14

où μ_B est la valeur du magnéton de Bohr ($\mu_B = 9,27 \times 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$), g_I et g_J sont respectivement les facteurs de Landé pour le noyau et l'électron ($g_I + g_J \approx g_J = 2,00$)

Dans la mesure où b_0 est très petit devant ω_0 , les solutions de l'équation d'évolution pour $H=H_0+H_B$ sont alors (Ref. 6):

$$\begin{pmatrix} p_3(t_0 + t) \\ p_4(t_0 + t) \end{pmatrix} = e^{i\Phi t} \begin{pmatrix} (i \cos\Theta \sin \frac{1}{2} at + \cos \frac{1}{2} at) \times e^{\frac{1}{2} i \omega t} & i \sin\Theta \sin \frac{1}{2} at \times e^{\frac{1}{2} i \omega t + i \omega t_0} \\ i \sin\Theta \sin \frac{1}{2} at \times e^{-\frac{1}{2} i \omega t - i \omega t_0} & (-i \cos\Theta \sin \frac{1}{2} at + \cos \frac{1}{2} at) \times e^{-\frac{1}{2} i \omega t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_3(t_0) \\ p_4(t_0) \end{pmatrix}$$

Equ. 3-15

avec :

$$\Phi = -(W_3 + W_4) / 2\hbar$$

$$\omega_0 = (W_4 - W_3) / \hbar$$

$$a = \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + (b_0)^2}$$

$$\cos \Theta = (\omega_0 - \omega) / a$$

$$\sin \Theta = -b_0 / a$$

Pour résoudre l'équation d'évolution, nous avons effectué l'approximation quasi-résonnante qui revient à remplacer H_B de Equ. 3-13 par :

$$H_B = \frac{\hbar b_0}{2} \times \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}.$$

Equ. 3-16

Cette approximation est justifiée dans la mesure où nous considérons toujours le cas où $|\omega - \omega_0|$ est petit devant ω_0 .

Dans la cavité TE_{011} de la fontaine atomique, le calcul est plus difficile car l'amplitude du champ magnétique oscillant n'est pas constante. L'intensité du champ le long de l'axe z est donnée par:

$$B(z, t) = B_0 \cos\left(\pi \times \frac{z}{l_c}\right) \times \cos(\omega \cdot t)$$

Equ. 3-17

L'origine des z est prise au centre de la cavité et l_c est la longueur de la cavité. Nous représentons sur la figure (Fig. 3-4) l'amplitude du champ magnétique oscillant vu par les atomes pendant leur vol balistique. t_0 , est l'instant de lancement, $[t_1, t_2]$ correspond au premier passage des atomes dans la cavité, $[t_3, t_4]$ au deuxième passage. La probabilité de transition entre les états $|3\rangle$ et $|4\rangle$ est mesurée à partir de l'instant t_5 .

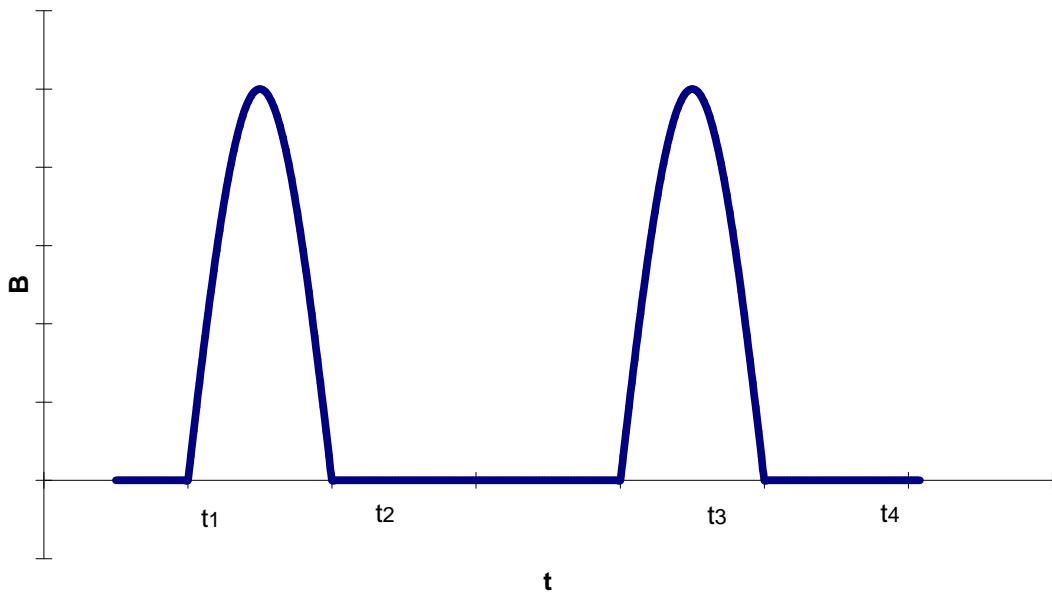


Fig. 3-4: Intensité du champ magnétique vu par les atomes pendant leur vol balistique

Calculons l'évolution du vecteur d'état d'un atome sélectionné dans l'état $|4\rangle$ à $t=0$. Nous choisissons la phase telle que $p_4(t_0) = 1$ et $p_3(t_0) = 0$. Le calcul de l'évolution du système non perturbé pendant les intervalles $[t_0, t_1]$, $[t_2, t_3]$, et $[t_4, t_5]$ est immédiat en utilisant (Equ. 3-11), les modules de p_3 et p_4 sont invariants dans ces périodes. Pour résoudre l'équation d'évolution dans la cavité, nous utilisons la méthode d'Euler. Nous découpons les intervalles $[t_1, t_2]$ et $[t_3, t_4]$ avec un pas dt et nous considérons que l'intensité du champ magnétique oscillant est constante dans chaque intervalle dt (Fig. 3-5). Il suffit alors de calculer l'évolution élémentaire de l'état du système en utilisant (Equ. 3-15) dans chaque intervalle dt . Nous calculons finalement la probabilité $|p_3(t_5)|^2$ pour qu'un atome ait effectué la transition du niveau $|4\rangle$ vers le niveau $|3\rangle$ pendant l'interaction Ramsey. Nous ajustons le pas dt pour obtenir la résolution voulue.

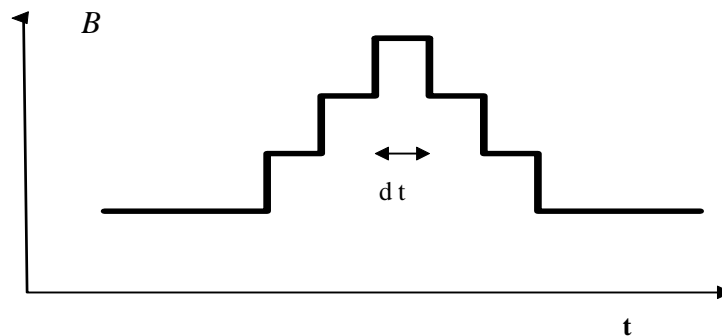


Fig. 3-5: Echantillonnage de l'intensité du champ micro-onde dans la cavité

L'évolution du champ oscillant vu par les atomes en fonction du temps (cf. Fig. 3-4) dépend de la vitesse de lancement. Pour prendre en compte la vitesse d'agitation thermique, nous calculons la probabilité de transition pour différentes vitesses de lancement et nous prenons la moyenne pondérée des résultats. De même, nous calculons la probabilité de transition pour plusieurs trajectoires possibles dans la cavité afin de prendre en compte l'inhomogénéité radiale de l'amplitude du champ micro-onde dans la cavité.

La modélisation de la frange de Ramsey par cette méthode est excellente (Fig. 3-2). Elle nous permettra par la suite de modéliser l'influence de certains effets systématiques qui entrent en jeu dans la mesure de k_0 (cf. §3.4.3).

3.3 Dispositif pour générer un champ électrique statique.

3.3.1 description

Nous avons suspendu deux plaques de cuivre 17 cm au dessus de la cavité micro-onde. Ces plaques ont des dimensions de $9,8 \times 30,8 \times 1,5 \text{ cm}^3$ et elles sont séparées d'une distance e_p par des cales en céramique (cf. Fig. 3-6, Fig. 3-7, Fig. 3-8). Il est possible d'appliquer des tensions de signes opposées $+U$ et $-U$ sur chaque plaque (le tube qui entoure les plaques et la cavité sont au potentiel $0V$). Ainsi, quand les atomes sont lancés à quelques dizaines de centimètres au dessus de la cavité, ils passent entre les plaques et sont soumis à un champ électrique qui induit un déplacement de la fréquence de résonance. Nous cherchons à mesurer avec une incertitude de quelques pour-mille la constante qui relie le déplacement de fréquence de la courbe de résonance avec le carré du champ électrique vu par les atomes. Il est donc nécessaire de connaître

avec une précision du même ordre de grandeur le champ électrique généré par le système.

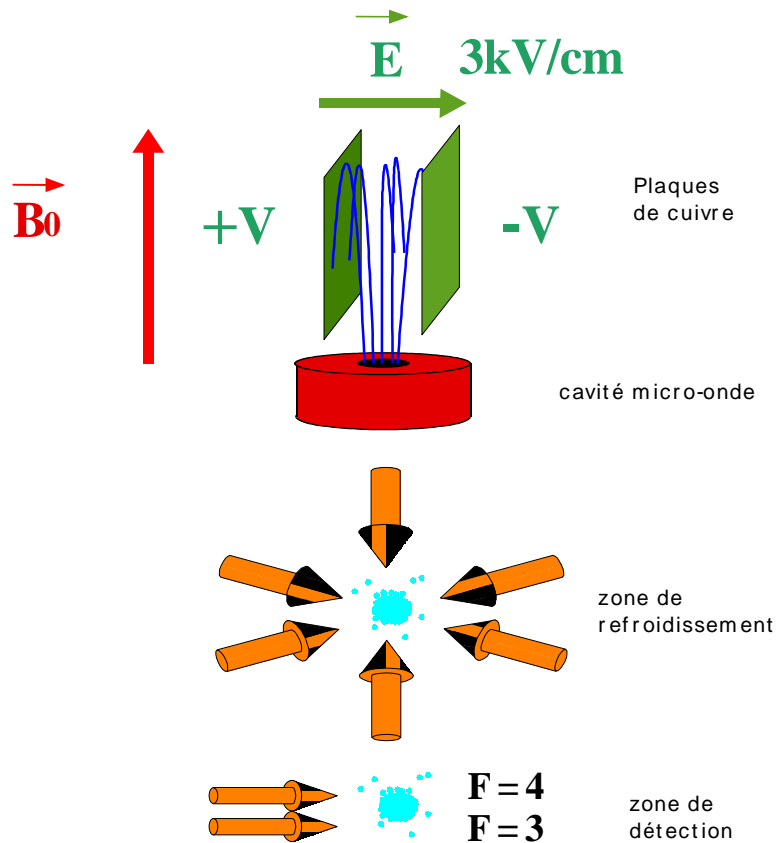


Fig. 3-6 : Schéma de la fontaine avec le dispositif pour générer un champ électrique. La trajectoire des atomes de césium y est représentée.

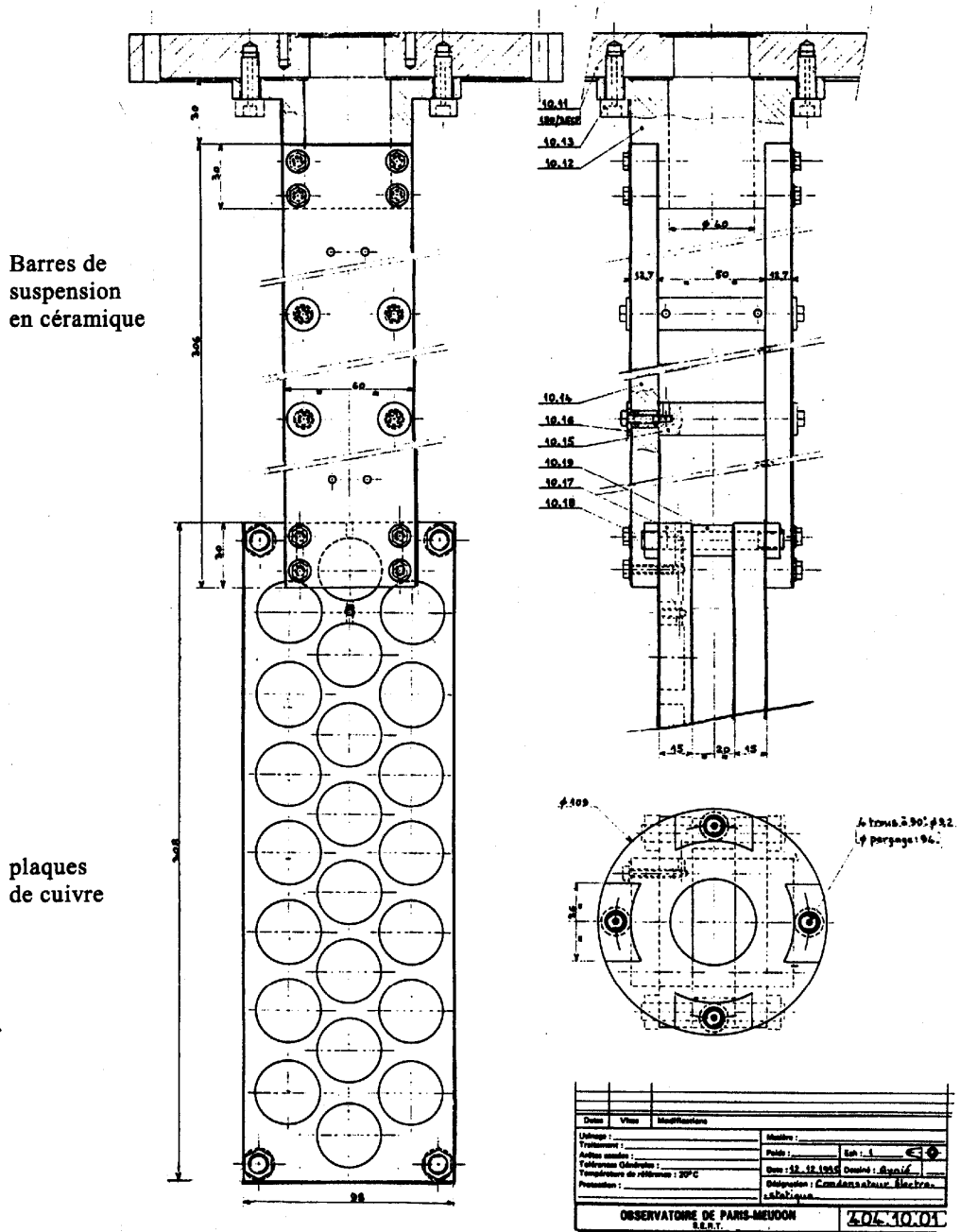


Fig. 3-7 : Plan du dispositif pour générer un champ électrique.

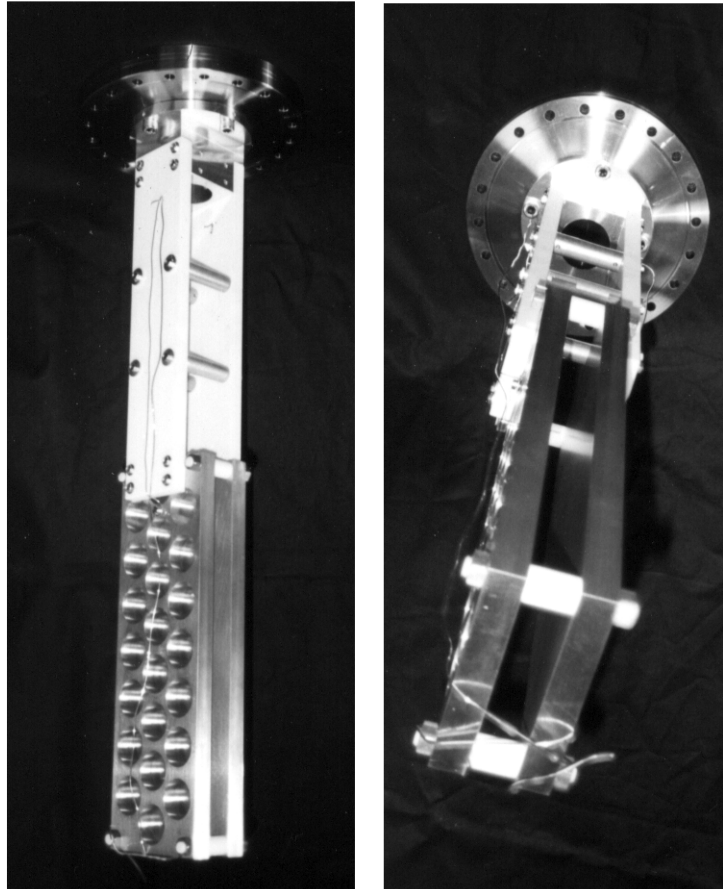


Fig. 3-8 : Photographies du dispositif pour générer un champ électrique statique

3.3.2 calcul du champ électrique

Si l'on suppose dans un premier temps que les plaques ont des dimensions infinies, l'intensité du champ électrique E_{inf} entre les plaques vaut :

$$E_{inf} = 2 \times \frac{U}{e_p}$$

Equ. 3-18

(Rappelons que U est la valeur absolue de la tension appliquée sur chaque plaque et que e_p est la distance qui sépare les plaques). L'incertitude sur E_{inf} est donnée par :

$$\frac{\Delta E_{\text{inf}}}{E_{\text{inf}}} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta e_p}{e_p}.$$

Equ. 3-19

La distance e_p dépend de l'usinage des plaques de cuivre et des quatre entretoises de céramique qui les séparent. La tolérance imposée sur la planéité des faces en vis à vis est de 10 μm . Les faces extérieures ont été fraisées de trous circulaires afin d'alléger les plaques tout en conservant une rigidité suffisante pour limiter les risques de déformation pendant le montage. La longueur e_{p0} des entretoises de céramique est 20,000(5) mm. Notons au passage que le coefficient de dilatation thermique de l'alumine (7 $\mu\text{m}/\text{m}/\text{K}$) est assez petit pour que les dilatations soient négligeables vis à vis de la tolérance d'usinage. Nous avons finalement une incertitude relative sur e_p :

$$\frac{\Delta e_p}{e_p} < 10^{-3}.$$

Equ. 3-20

La tension appliquée sur chacune des plaques peut respectivement être ajustée de 0V à +3000 et de 0V à -3000V. La mesure de la tension est effectuée à l'aide d'un multimètre HP 34401 A et d'un pont diviseur 1/1000 que l'on calibre pour des tensions inférieures à 1000V directement mesurables avec le multimètre. Compte tenu de la stabilité de l'alimentation, du pont diviseur de tension et de l'incertitude du multimètre, on déduit que :

$$\frac{\Delta U}{U} < 10^{-4}$$

Equ. 3-21

Finalement, dans l'hypothèse des plaques de taille infinie, nous avons :

$$\frac{\Delta E_{\text{inf}}}{E_{\text{inf}}} < 10^{-3}.$$

Equ. 3-22

3.3.3 Effets de bords

Dans la mesure où les plaques ont des dimensions finies, nous avons dû calculer l'écart entre E_{inf} et la valeur réelle du champ entre les plaques. Le problème du calcul du champ électrique entre deux plaques rectangulaires de dimensions finies n'a pas de solution analytique simple. De ce fait nous avons eu recours à un calcul numérique par la méthode des éléments finis, (Ref. 49). Ce calcul a été réalisé sur le logiciel OPERA*.

* OPERA est commercialisé par la société Vector Fields

La figure (Fig. 3-9) montre les potentiels des contours imposés dans le calcul. Les plaques de cuivre sont respectivement aux potentiels $-U$ et $+U$ (Nous ne prenons pas en considération les fraisages sur les faces externes des plaques). Le cylindre de cuivre qui entoure les plaques et la cavité micro-onde est au potentiel $0V$. La cavité micro-onde est également au potentiel $0V$. Nous verrons par la suite qu'il est intéressant de connaître la carte du champ électrique le long de l'axe z , entre la cavité micro-onde et le centre des plaques. Il sera également important de définir le contour de la zone Z_h dans laquelle le module du champ électrique diffère de la valeur E_{inf} de moins de 0,5 pour mille (compte tenu de l'incertitude de un pour mille sur E_{inf} , on considèrera

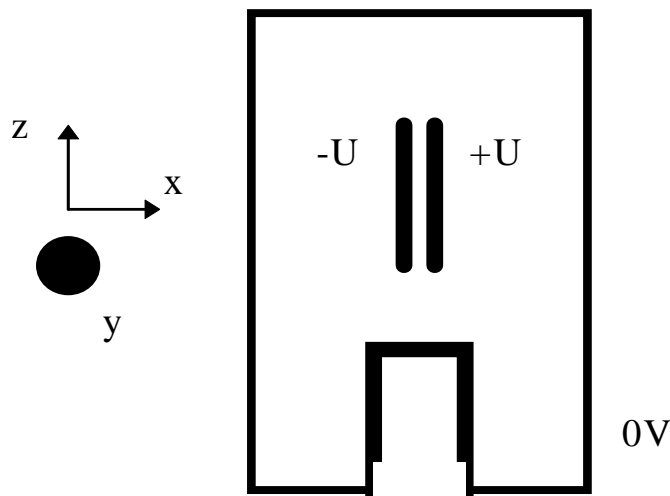


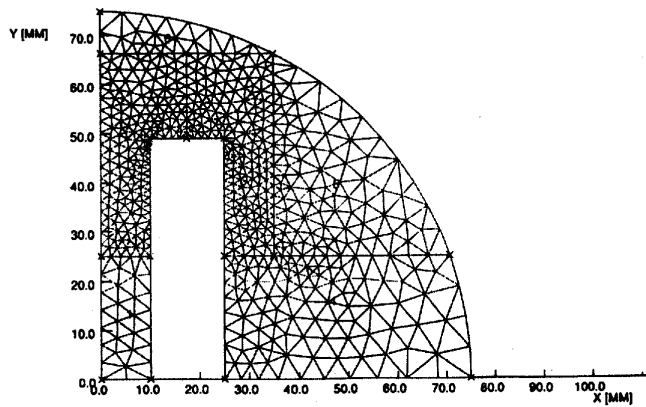
Fig. 3-9: Potentiels imposés pour le calcul du champ

que \mathbf{E} est uniforme dans la zone Z_h).

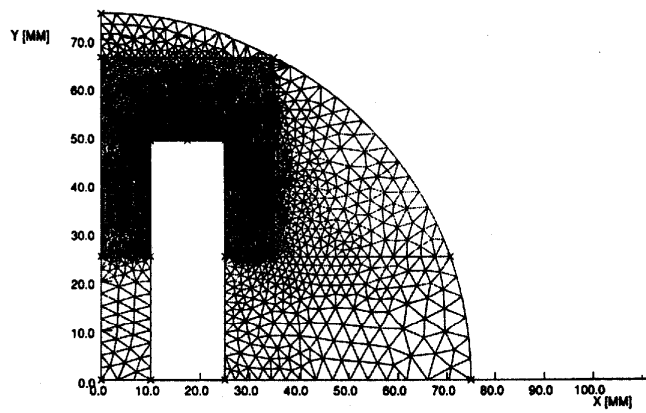
.a Détermination de la zone de champ homogène

Pour des raisons de temps des calculs, il est à priori difficile de pouvoir garantir une estimation du champ avec une incertitude de quelques 10^{-4} dans la géométrie tridimensionnelle de la figure (Fig. 3-9). Nous avons dans un premier temps considéré le problème à deux dimensions. Nous avons calculé le champ électrique dans les plans de coupes (Oxy) et (Oxz) en supposant que le système était invariant par translation selon respectivement z et y . Cette hypothèse paraît raisonnable dans la mesure où nous avons constaté dans ces deux calculs que l'effet de bord disparaissait très rapidement. Pour s'assurer de la convergence des calculs du champ électrique à un niveau d'incertitude de 10^{-4} , nous avons comparé les résultats donnés par différents maillages de finesses croissantes. Nous illustrons cette méthode dans le cas du calcul du champ pour une

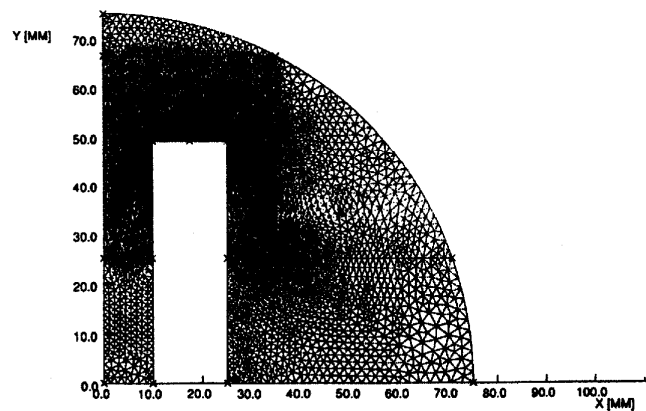
coupe horizontale du cylindre et des plaques. La figure (Fig. 3-10) représente l'allure de trois maillages avec respectivement 1122, 6502 et 9916 éléments. La figure (Fig. 3-11) représente le contour de la zone Z_h calculés avec deux différents maillages. La détermination du contour est d'autant plus régulière que le maillage est fin mais dans tous les cas, nous constatons qu'il suffit de se placer à 20mm du bord des plaques pour s'assurer que l'on se trouve dans Z_h . Dans le cas de la coupe selon (Oxz) (Fig. 3-12), nous avons trouvé le même résultat que précédemment, à savoir qu'il suffit de se placer à 20mm du bord des plaques pour s'assurer que l'on se trouve dans Z_h . Remarquons à ce sujet que l'influence du cylindre ou de la cavité sur le calcul du champ entre les plaques est tout à fait négligeable. (Ainsi, nous avons constaté que le calcul analytique du champ entre deux demi-plans infinis d'épaisseur nulle en vis à vis portés aux potentiels +V et -V nous aurait conduit à un résultat similaire). En conclusion, nous définirons sans risque d'erreur la zone Z_h à 25mm du bord des plaques. Dans Z_h le champ électrique vaut la valeur E_{inf} à mieux que 0,5 pour mille ce qui est inférieure à l'incertitude sur E_{inf} .



1122
éléments



6502
éléments



9916
éléments

Fig. 3-10 : Maillages du calcul par éléments finis dans le plan (Oxy).

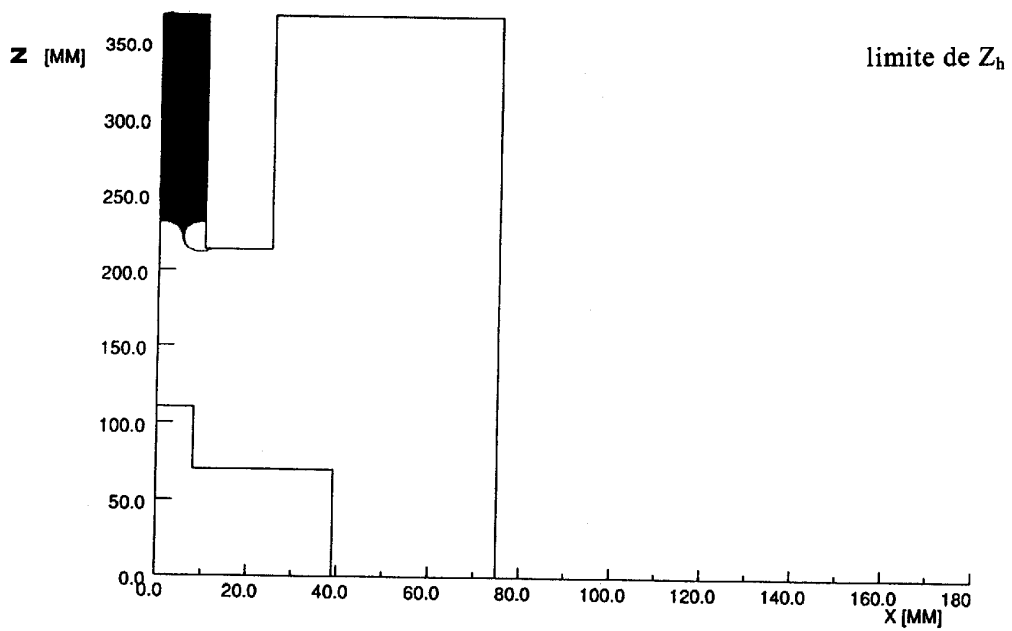
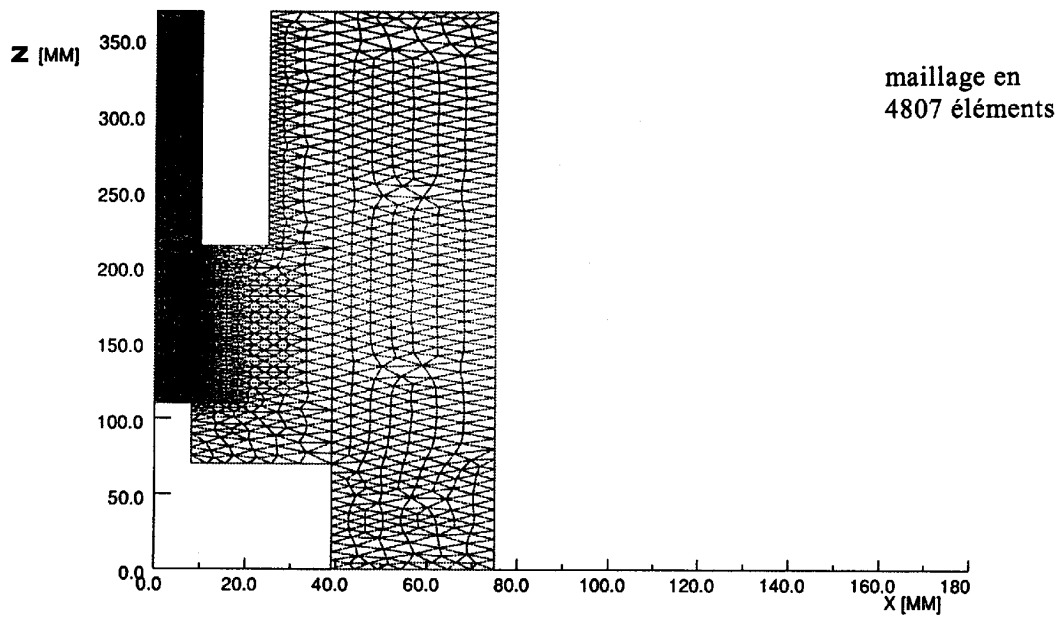
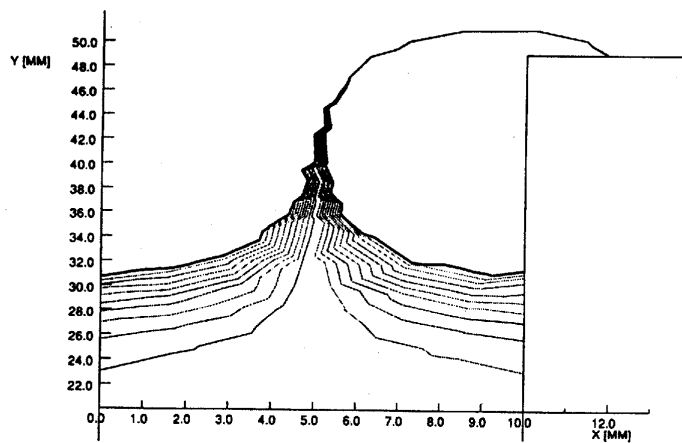
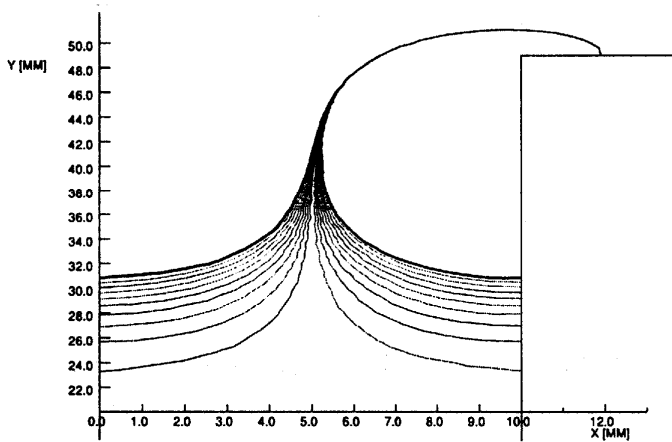


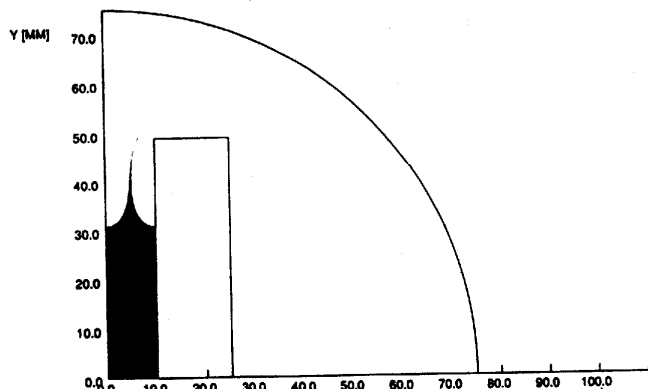
Fig. 3-11 : 1/2 Coupe selon (Oxz). On peut voir le haut de la cavité micro-onde et le bas d'une des deux plaques de cuivre.



1122
éléments
(vue agrandie)



9916
éléments
(vue agrandie)



9916
éléments
(vue d'ensemble)

Fig. 3-12 : Le trait gras représente le contour de la zone Z_h dans le plan (Oxy). (Dans cette zone, le champ est identique à 0,5 pour mille près au champ qui serait créé si les plaques étaient de dimensions infinies. Les contours en traits fins correspondent à des niveaux d'homogénéité s'échelonnant jusqu'à 0,05 pour mille.

.b Détermination du champ électrique le long de l'axe (Oz)

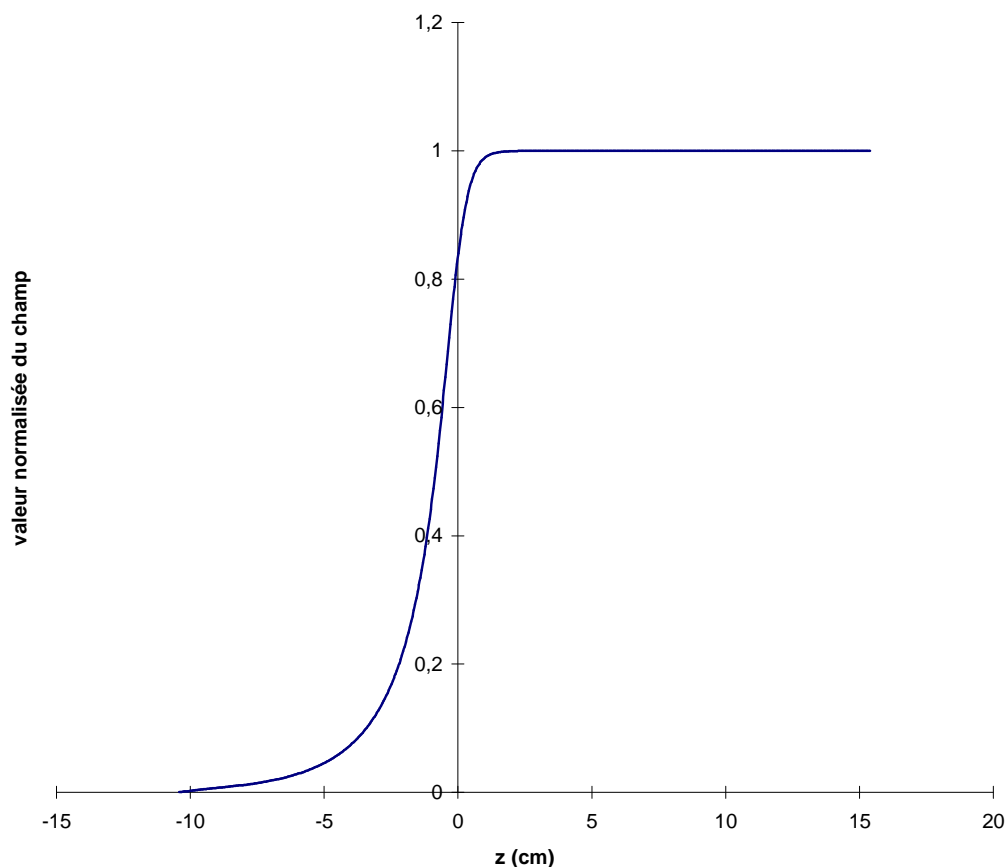


Fig. 3-13 : Intensité du champ le long de l'axe (Oz). L'origine de l'axe des z est pris au bord inférieur des plaques de cuivre. (La cavité micro-onde se trouve à $z = -10\text{cm}$).

Nous avons utilisé la modélisation à 2 dimensions de la figure (Fig. 3-12) pour estimer le champ le long de l'axe (Oz) entre la cavité micro-onde et le centre des plaques. Nous représentons le champ calculé $E_{num}(z)$ (Fig. 3-13). Ce calcul à deux dimensions suppose que les plaques ont une largeur infinie. Cette hypothèse est raisonnable entre les plaques et à une distance z de leurs bords qui est petite devant leur largeur (10cm). Elle est plus discutable lorsque z vaut plusieurs centimètres. Cependant, dans la mesure où le champ électrique décroît rapidement quand on s'éloigne des plaques, nous verrons au chapitre 3.4.5 qu'une erreur importante sur le calcul du champ

électrique à l'extérieur des plaques aura très peu d'effet sur la mesure du déplacement de fréquence Stark.

3.4 Mesure expérimentale de la constante k_0

3.4.1 généralités

Nous avons vu au chapitre 2 que la présence d'un champ électrique statique horizontal \mathbf{E} dans la fontaine atomique induit un décalage $\delta\nu_0$ de la fréquence associée à la transition horloge du césium selon la loi :

$$\delta\nu = k_0 \times E^2.$$

Equ. 3-23

Nous supposons idéalement qu'il est possible d'appliquer un champ électrique uniforme pendant toute l'interaction Ramsey. Pour déterminer k_0 , nous enregistrons tout d'abord la fréquence du sommet de la frange centrale de résonance de la fontaine atomique sans champ électrique. Nous appliquons ensuite un champ électrique d'intensité E connue et nous mesurons le déplacement du sommet de la frange centrale ce qui nous permet de déduire $\delta\nu$. Un maser à hydrogène dont la dérive de fréquence relative est inférieure à 3×10^{-16} par jour est utilisé comme oscillateur de référence. Il permet de comparer des séries de mesures réalisées pendant la même semaine pour différentes valeurs du champ électrique avec une incertitude de quelques 2×10^{-5} Hz. Avec des champs électriques de quelques milliers de volts par centimètre, nous mesurerons typiquement des décalages en fréquence $\delta\nu$ de l'ordre du Hertz. Ainsi, la stabilité du Maser à hydrogène est très largement suffisante pour réaliser des mesures de $\delta\nu$ avec une incertitude relative de 10^{-3} .

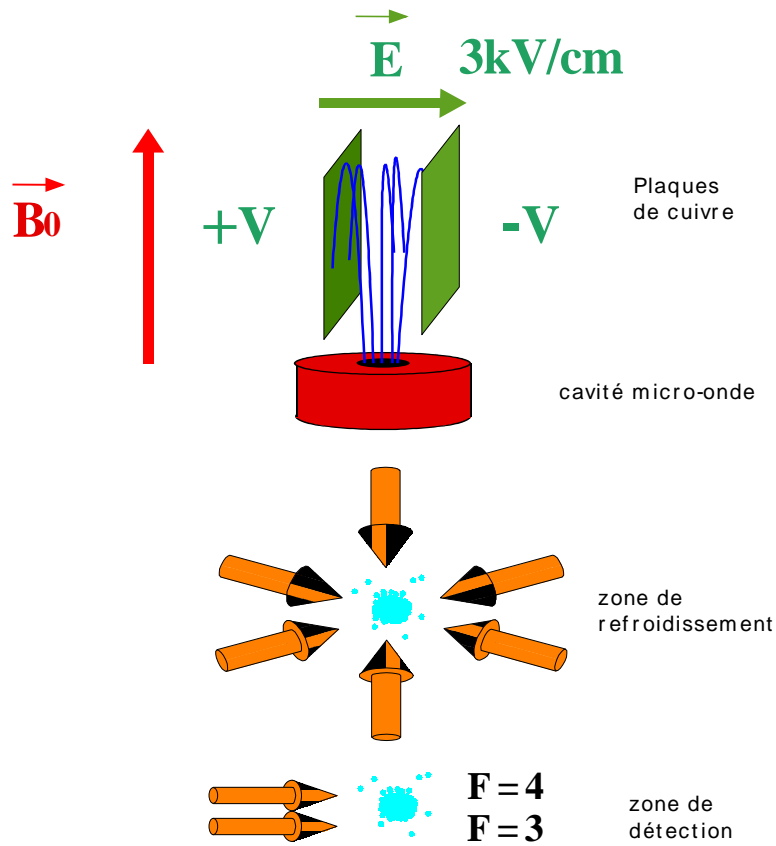


Fig. 3-14: Schéma de la fontaine avec le dispositif pour générer un champ électrique. La trajectoire des atomes de césium y est représentée.

En pratique, il n'est pas possible d'appliquer un champ électrique uniforme tout au long de l'interaction Ramsey. Les atomes sont seulement soumis à un champ électrique uniforme lorsqu'ils passent entre les plaques de cuivre (cf. Fig. 3-14). Nous calculerons dans le chapitre 3.4.2 le déplacement de fréquence du sommet de la frange centrale dans ce cas. Nous verrons que le décalage en fréquence est approximativement proportionnel à k_0 et à la valeur moyenne du carré du champ électrique sur le temps passé par les atomes au dessus de la cavité micro-onde. Compte tenu de l'incertitude sur la position des plaques par rapport à la cavité micro-onde, l'évaluation de k_0 à partir de la mesure de $\delta\nu$ et du calcul numérique de la moyenne du carré du champ donne la valeur de k_0 à quelques pour-cent près. Il est possible de réduire notablement cette

incertitude si l'on mesure $\delta\nu$ en lançant les atomes à différentes hauteurs entre les plaques ou si l'on applique seulement un champ électrique quand les atomes se trouvent dans la zone Z_h (cf. 3.3.2) où le champ électrique est quasi uniforme. Ces deux méthodes sont détaillées dans les parties 3.4.5 et 3.4.6.

3.4.2 calcul de la frange de Ramsey en présence d'un champ électrique.

La figure (Fig. 3-14) représente le schéma de la fontaine atomique avec le

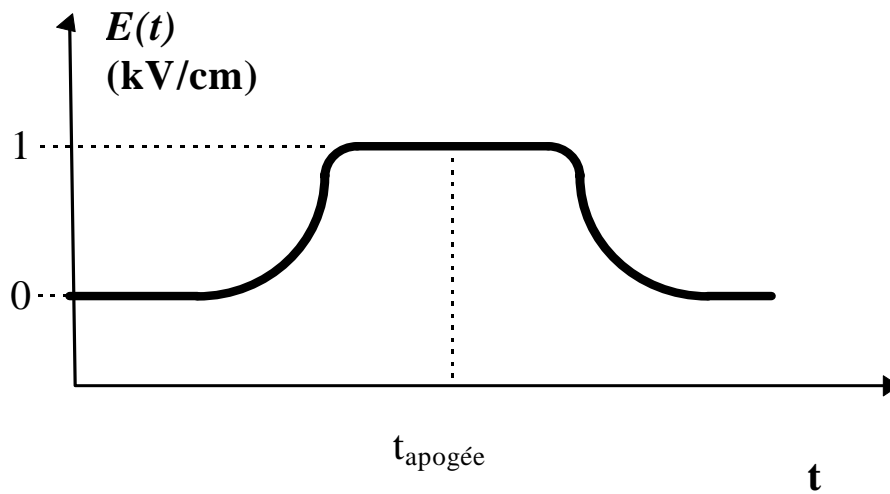


Fig. 3-15 : Champ électrique vu par les atomes pendant leur vol balistique.

dispositif pour générer un champ électrique.

Au cours du vol balistique entre les deux interactions micro-onde, les atomes sont soumis à un champ électrique d'intensité variable $E(t)$ (cf. Fig. 3-15). Reprenons le calcul théorique de la frange de Ramsey dans ce cas. En l'absence de champ électrique, nous avons précédemment montré que le hamiltonien entre les deux interactions micro-onde valait dans la base $(|3\rangle, |4\rangle)$:

$$H_0 = \begin{pmatrix} W_3 & 0 \\ 0 & W_4 \end{pmatrix}$$

Equ. 3-24

et nous en déduisons que :

$$\begin{pmatrix} p_3(t_3) \\ p_4(t_3) \end{pmatrix} = e^{-i(E_3/\hbar)(t_3-t_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i((W_4-W_3)/\hbar)(t_3-t_2)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_3(t_2) \\ p_4(t_2) \end{pmatrix}$$

Equ. 3-25

t_2 et t_3 étant respectivement les instants où les atomes sortent du premier passage dans la cavité micro-onde et y entrent une seconde fois. La présence d'un champ électrique $E(t)$ crée une perturbation H_E (cf. chap.2) et le hamiltonien devient :

$$H=H_0+H_E$$

Equ. 3-26

avec :

$$H_E(t) = h \cdot \begin{pmatrix} k_3 \times E^2(t) & 0 \\ 0 & k_4 \times E^2(t) \end{pmatrix}$$

Equ. 3-27

h est la constante de Planck, k_3 et k_4 sont définis dans le chapitre 2. La variation du champ $E(t)$ au cours du temps est très lente vis à vis de $(E_4-E_3)^{-1}$. La perturbation créée par le champ électrique peut donc être traitée de manière adiabatique (Ref. 1) et nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} p_3(t_3) \\ p_4(t_3) \end{pmatrix} = e^{-i(W_3/\hbar)(t_3-t_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i((W_4-W_3+h\delta\nu_0)/\hbar)(t_3-t_2)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_3(t_2) \\ p_4(t_2) \end{pmatrix}$$

Equ. 3-28

avec

$$\delta\nu_0 = \frac{\int_{t_2}^{t_3} (k_4 E^2(t) - k_3 E^2(t)) dt}{t_3 - t_2}$$

Equ. 3-29

en prenant $k_0=k_4-k_3$,

$$\delta\nu_0 = k_0 \times \frac{\int_{t_2}^{t_3} E^2(t) dt}{t_3 - t_2}$$

Equ. 3-30

et

$$W'_3 = W_3 + \frac{\int_{t_2}^{t_3} k_3 E^2(t) dt}{t_3 - t_2}$$

Equ. 3-31

Si nous comparons les équations d'évolution sans champ électrique et avec (Equ. 3-25 et Equ. 3-28), nous constatons que la fréquence associée à la transition atomique entre les niveaux F=3 et F=4 est décalée de la quantité $\delta\nu_0$ qui est la valeur moyenne de la perturbation induite par le champ électrique E(t) entre les deux passages dans la cavité micro-onde (cf. Equ. 3-30). Remarquons que les termes de phase qui précèdent les matrices d'évolutions des équations (Equ. 3-25) et (Equ. 3-28) n'ont pas d'influence sur la physique du problème.

Les équations (Equ. 3-28 et Equ. 3-30) et les résultats du paragraphe 3.2.5 permettent de calculer numériquement la résonance de Ramsey en présence d'un champ électrique entre les plaques. En l'absence de champ électrique, la frange centrale de résonance est exactement centrée sur la fréquence atomique ν_0 de la transition F=3, F=4.

$$\nu_0 = (W_4 - W_3)/\hbar$$

Equ. 3-32

Nous pourrions penser à priori que le sommet de la frange centrale du motif de Ramsey en présence d'un champ électrique est décalé de la quantité $\delta\nu_0$ par rapport au cas où il n'y a pas de champ électrique. Le calcul numérique montre que ce n'est pas tout à fait vrai, et nous noterons par la suite $\delta\nu_{mes}$ le déplacement de fréquence mesuré du sommet de la frange centrale en présence d'un champ électrique :

$$\delta\nu_{mes} \neq \delta\nu_0.$$

Equ. 3-33

Ceci est dû au fait que la fréquence atomique dans la cavité micro-onde est différente de la fréquence atomique moyenne entre les deux passages dans la cavité. Nous détaillons dans le chapitre suivant cet effet qui est une source d'incertitude importante pour la mesure de k_0 .

3.4.3 Décalage de la frange centrale

Nous venons de voir que le sommet de la frange centrale n'est pas exactement centré sur la fréquence atomique moyenne des atomes entre les deux passages dans la cavité micro-onde. A titre indicatif, quand nous appliquons un champ électrique qui crée un déplacement de la fréquence atomique $\delta\nu_0 = -1,595$ Hz, le déplacement de fréquence observé vaut $\delta\nu_{mes} = -1,547$ Hz, ce qui représente un écart relatif de 3%. Cet effet dépend de l'évolution du champ magnétique micro-onde pendant l'interaction avec les atomes. Il a été calculé analytiquement dans le cas où le champ magnétique micro-onde a une amplitude constante dans les deux zones d'excitation micro-onde de l'interaction Ramsey (Ref. 5) .

$$\delta\nu_{mes} - \delta\nu_0 = -2\delta\nu_0 \times \frac{\tan\left(\frac{1}{2}b_0\tau\right)}{b_0T + 4\tan\left(\frac{1}{2}b_0\tau\right)}$$

Equ. 3-34

b_0 est proportionnel à l'intensité du champ magnétique micro-onde dans les deux zones d'excitation, τ et T sont respectivement le temps de passage des atomes dans une zone d'excitation micro-onde et le temps passé entre les deux zones d'excitation de l'interaction Ramsey. Dans notre cas, l'intensité du champ magnétique n'est pas constante et le calcul de $\delta\nu_{mes} - \delta\nu_0$ sera réalisé numériquement. Nous pouvons cependant remarquer dans (Equ. 3-34) que la différence $\delta\nu_{mes} - \delta\nu_0$ est proportionnelle au déplacement de fréquence $\delta\nu_0$ engendré par le champ électrique. Par ailleurs, cette différence dépend de l'intensité du champ magnétique micro-onde. b_0^2 est

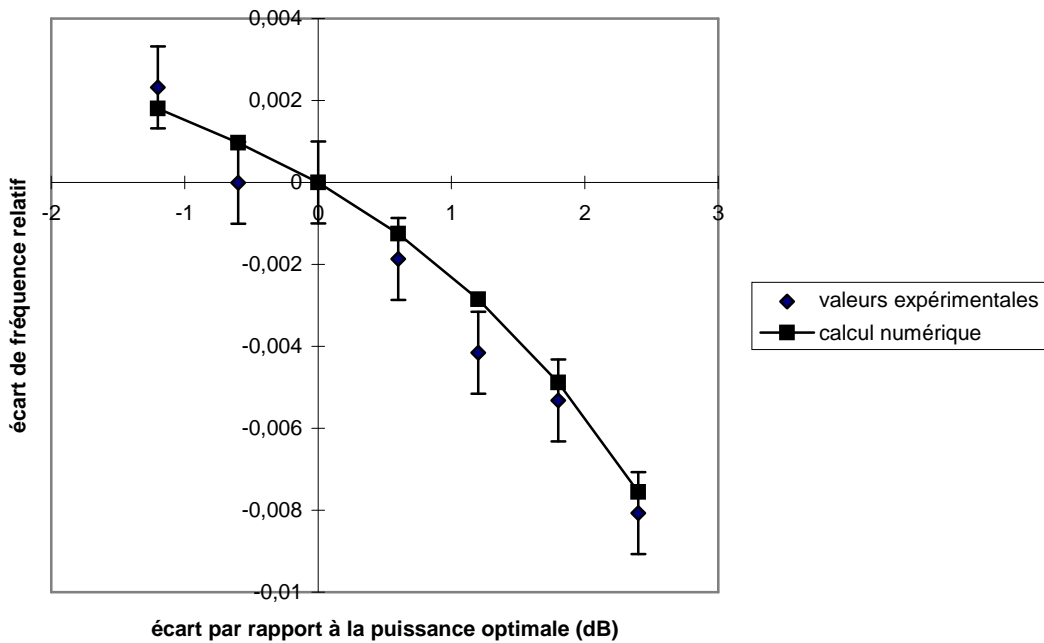


Fig. 3-16 : la variation de l'écart relatif $(\delta\nu_{mes} - \delta\nu_0) / \delta\nu_0$ en fonction du désaccord de la puissance micro-onde par rapport au cas où $b_0\tau = \pi/2$. Les deux courbes correspondent respectivement à une mesure expérimentale et au calcul numérique

proportionnelle à la puissance micro-onde P_μ envoyée dans la cavité. Habituellement, nous choisissons P_μ de manière à avoir $b_0\tau = \pi/2$ ce qui donne le meilleur contraste de la frange centrale de résonance (Ref. 6). En pratique, la valeur de P_μ est ajustée en maximisant la probabilité de transition quand la fréquence micro-onde est ajustée à la

fréquence atomique. L'incertitude de ce réglage est de +/- 0,25 dB. Il est nécessaire d'étudier l'erreur sur le calcul de $\delta\nu_{mes}-\delta\nu_0$ qui provient de l'incertitude sur l'ajustement de P_μ . Nous avons représenté sur la figure (Fig. 3-16) la variation de l'écart relatif $(\delta\nu_{mes}-\delta\nu_0)/\delta\nu_0$ en fonction du désaccord de la puissance micro-onde.

Le modèle numérique correspond bien à la mesure expérimentale qui a été effectuée en modifiant volontairement la puissance micro-onde. L'incertitude de +/- 0,25dB sur le réglage de la puissance micro-onde introduit une incertitude relative de 1×10^{-3} sur le calcul de $\delta\nu_0$ à partir de $\delta\nu_{mes}$.

A puissance micro-onde fixée, nous avons également comparé les valeurs de $\delta\nu_{mes}-\delta\nu_0$ données respectivement par le calcul numérique et l'expression analytique (Equ. 3-34) qui suppose l'intensité du champ magnétique micro-onde constante dans les phases d'excitation micro-onde. La différence relative est inférieure à 10^{-3} ce qui montre que l'expression (Equ. 3-34) est utilisable pour nos études.

3.4.4 Loi quadratique du déplacement de fréquence avec le champ électrique

Selon la théorie, le déplacement de fréquence induit par l'effet Stark est proportionnel au carré du champ électrique. Pour une vitesse de lancement des atomes V_z donnée, nous avons appliqué une tension U entre les plaques de cuivre et nous avons mesuré le déplacement de fréquence $\delta\nu_{mes}$ par rapport à la fréquence de FO1 quand U est

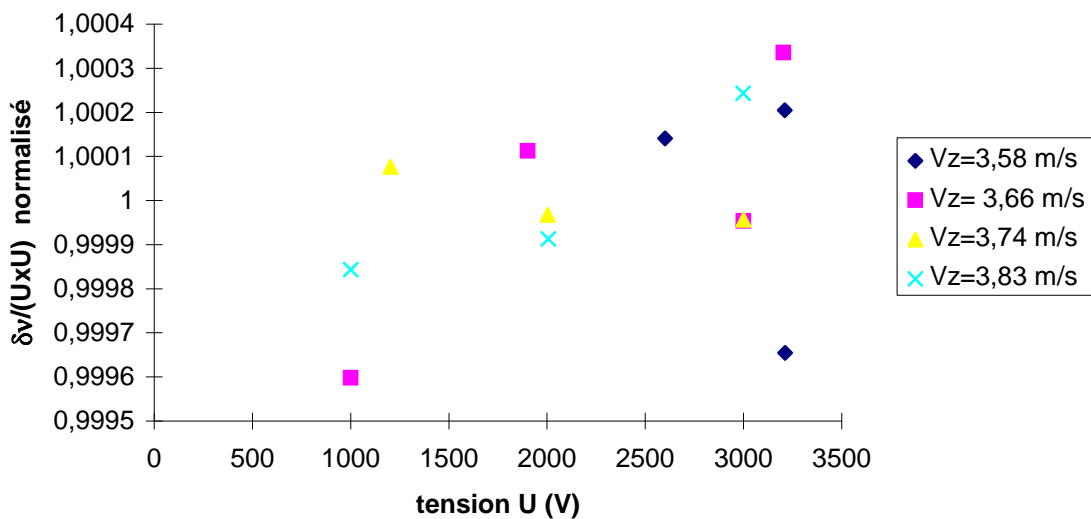


Fig. 3-17 : Rapport du déplacement de fréquence sur le carré de la tension U pour quatre valeurs V_z de la vitesse de lancement des atomes . Pour chaque série de résultat, nous avons normalisé le déplacement de fréquence par sa valeur moyenne sur la série.

nulle. La valeur du champ électrique vu par les atomes est proportionnel à U , et $\delta\nu_{mes}$ est proportionnel au déplacement de fréquence de la transition par un champ électrique. En mesurant $\delta\nu_{mes}$ pour plusieurs valeurs de U , nous vérifions la loi quadratique du déplacement de fréquence de la transition horloge par un champ électrique. Il est intéressant de remarquer que cette mesure n'est limitée en exactitude que par la stabilité de la tension appliquée sur les plaques (quelques 10^{-4} en valeur relative). Nous avons réalisé quatre séries de mesures pour quatre valeurs V_Z de la vitesse de lancement des atomes. Nous représentons sur la figure (Fig. 3-17) le rapport de $\delta\nu_{mes}$ sur le carré de la tension U . Pour chaque série de résultats, nous avons normalisé le déplacement de fréquence par sa valeur moyenne sur la série. Nous constatons que la proportionnalité de $\delta\nu_{mes}$ avec le carré du champ électrique est vérifiée à 5×10^{-4} près.

3.4.5 Mesure de k_0 : méthode différentielle.

Pour cette mesure, le champ électrique est appliqué en permanence entre les plaques de cuivre. Il est alors nécessaire de connaître précisément la trajectoire des atomes et la valeur du champ électrique le long de cette trajectoire. L'accélération de la pesanteur et la vitesse de lancement V_0 sont très bien connues (cf. 3.2.2). La détermination de la trajectoire des atomes dans le vide ne présente donc pas de difficultés. Le champ électrique créé par les plaques de cuivre a été calculé dans le chapitre 3.3.3. Il est donc possible d'évaluer numériquement la valeur de l'équation (Equ. 3-30) afin de déduire k_0 à partir de $\delta\nu_0$. Malheureusement, ce calcul est sensible à la position géométrique de la zone de lancement des atomes par rapport à la cavité micro-onde et aux plaques de cuivre. La mesure de la distance d_{lc} entre la zone de lancement des atomes et le bas de la cavité est décrite au paragraphe 3.2.2. La distance d_{lp} entre la zone de lancement et le bord inférieur des plaques de cuivre est mal connue en raison des incertitudes mécaniques et optiques du montage :

$$d_{lc} = 307,8(7) \text{ mm}$$

$$d_{lp} = 513(3) \text{ mm.}$$

En calculant numériquement k_0 en fonction de $\delta\nu_0$ pour différentes valeurs de d_{lc} et de d_{lp} nous pourrions estimer la sensibilité du calcul de k_0 aux incertitudes géométriques. Nous noterons Δk_0 l'erreur que l'on commet sur le calcul de k_0 quand on se trompe de Δd_{lc} ou Δd_{lp} sur l'évaluation respective de d_{lc} ou d_{lp} :

$$\frac{\Delta k_0}{k_0} = \alpha_{lc} \times \frac{\Delta d_{lc}}{d_{lc}}$$

$$\frac{\Delta k_0}{k_0} = \alpha_{lp} \times \frac{\Delta d_{lp}}{d_{lp}}.$$

Equ. 3-35

vitesse de lancement V (m/s)	α_{lc}	α_{lp}
3,5788	-0,58	1,81
3,66403	-0,52	1,47
3,74924	-0,46	1,25
3,83445	-0,44	1,06

tableau 3-1 : Paramètres de sensibilité aux incertitudes géométriques pour différentes vitesses de lancement .

Le calcul donne les paramètres α_{lc} et α_{lp} pour différentes trajectoires correspondant à différentes vitesses de lancement des atomes (cf. tableau 3-1). Nous remarquons que l'incertitude sur d_{lc} conduit à une incertitude raisonnable sur k_0 de un pour mille. En revanche, la mauvaise connaissance de d_{lp} donne au mieux une incertitude de 1% sur k_0 . Nous pouvons y remédier en utilisant les mesures pour plusieurs vitesses de lancement des atomes et en déduisant la valeur de d_{lp} par un ajustement au moindre carré des différents résultats. En effet, supposons que l'on ait commis une erreur Δd_{lp} sur la mesure de la distance d_{lp} entre la cavité et les plaques. Nous trouverons alors une valeur de Δk_0 qui dépend de la vitesse de lancement V selon la loi :

$$k_0(V) = k_0 + \alpha_{lp}(V) \times \Delta d_{lp} \times \frac{k_0}{d_{lp}} .$$

Equ. 3-36

Il suffit alors de corriger légèrement la valeur de d_{cp} jusqu'à ce que k_0 ne varie plus avec V , nous aurons alors $\Delta d_{cp}=0$. En pratique, on effectue des mesures avec quatre vitesses de lancement différentes V_i ($i=1 ; 2 ; 3 ; 4$) et l'on recherche le minimum de la fonction $d_{cp} \rightarrow f(d_{cp})$:

$$f(d_{lp}) = \sum_i (k_0(V_i) - \bar{k}_0)^2$$

$$\text{avec } \bar{k}_0 = \frac{1}{4} \times \sum_{i=1}^4 k_0(V_i)$$

Equ. 3-37

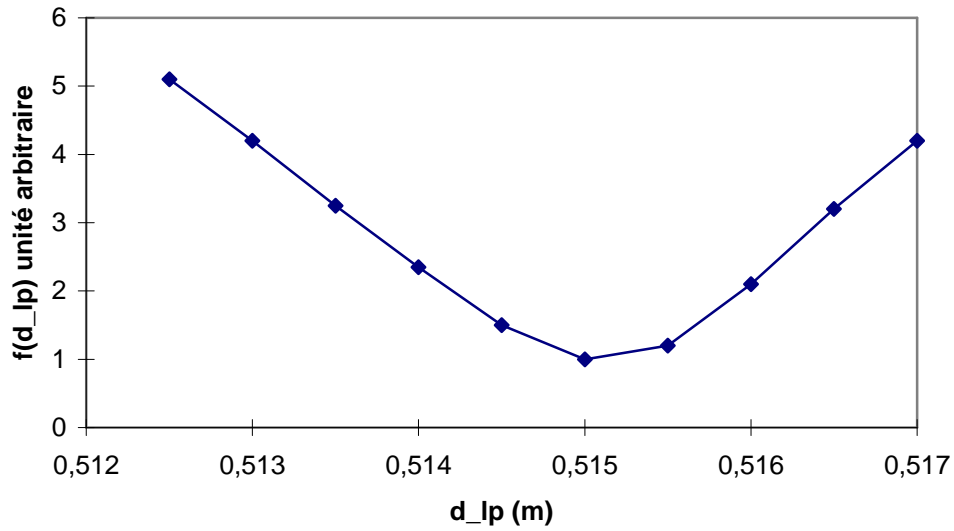


Fig. 3-18 :Le minimum de la fonction $f(d_{lp})$ permet d'accéder à la valeur exacte de d_{lp} .

Nous représentons sur la figure (Fig. 3-18) la fonction $f(d_{cp})$. La valeur de d_{cp} pour laquelle $f(d_{cp})$ est minimum est $d_{cp0} = 515,1(2)$ mm. L'incertitude sur la détermination de d_{cp0} provient du bruit de mesure de δv_{mes} . Elle entraîne une incertitude sur k_0 inférieure à 10^{-3} (cf. Equ. 3-35). Nous résumons dans le tableau 3-2 l'ensemble des mesures réalisées.

vitesse de lancement V (m/s)	V (V)	δv_{mes} (Hz)	δv_0 (Hz)	$k_0 \times 10^{10}$ (Hz V ⁻² m ²)
3,5788	2601,3	-2,5257	-2,6307	-2,2700
3,5788	3210,9	-3,8463	-4,0061	-2,2689
3,5788	3210,6	-3,8477	-4,0076	-2,2702
3,66403	1000,5	-0,39399	-0,4089	-2,2672
3,66403	1901,9	-1,4243	-1,4786	-2,2684
3,66403	2999,6	-3,5424	-3,6772	-2,2680
3,66403	3203,3	-4,0414	-4,1952	-2,2689
3,74924	1202,56	-0,5943	-0,6149	-2,2698
3,74924	2003,02	-1,6486	-1,7055	-2,2694
3,74924	2999,5	-3,6969	-3,8243	-2,2692
3,83445	1000,5	-0,4254	-0,4388	-2,2692
3,83445	2005,1	-1,7087	-3,1762	-2,2690
3,83445	2998,9	-3,8235	-3,9437	-2,2697

tableau 3-2: Mesure de k_0 à partir de plusieurs vitesses de lancement des atomes, et de plusieurs tensions sur les plaques. La valeur moyenne de k_0 sur l'ensemble de ces mesures vaut $k_0 = -2,2692 \cdot 10^{-10} \text{ Hz}/(\text{V/m})^2$

Le calcul de δv_0 à partir de δv_{mes} est détaillé dans le chapitre 3.4.3. Le calcul de k_0 est effectué à partir de l'expression (Equ. 3-30) et de la valeur numérique du champ électrique entre la cavité micro-onde et l'apogée du vol balistique des atomes. Nous avons remarqué au chapitre (3.3.3.b) que le modèle numérique 2D du champ électrique n'était pas parfaitement adapté lorsque l'on se plaçait à quelques centimètres des plaques. Pour avoir une idée de l'ordre de grandeur de l'erreur que l'on peut commettre à cause de cette incertitude dans la modélisation du champ, nous avons recalculé k_0 en supposant que le champ était nul dès que l'on se trouvait à 2,5cm des plaques. Malgré cette grossière approximation, nous avons seulement observé un écart relatif de $0,5 \times 10^{-3}$ sur la valeur de k_0 .

3.4.6 Méthode du champ pulsé

.a principe

Il est possible de simplifier le calcul de la moyenne du carré du champ électrique vu par les atomes pendant le temps de vol si l'on applique seulement le champ électrique entre les plaques quand les atomes se trouvent dans la zone où le champ peut être considéré comme homogène à 0,5 pour mille près.

En pratique, la commutation des tensions +U et -U sur les plaques de cuivre est réalisée avec deux relais haute tension pilotés par un signal de commande T.T.L. Nous

avons enregistré sur un oscilloscope numérique les temps de montée et les temps de descente de la haute tension sur les plaques en fonction du signal T.T.L (cf. Fig. 3-19). Deux effets doivent être pris en compte : les retards de commutation des relais et les temps de charge et de décharge de la capacité formée par les plaques de cuivre ainsi que

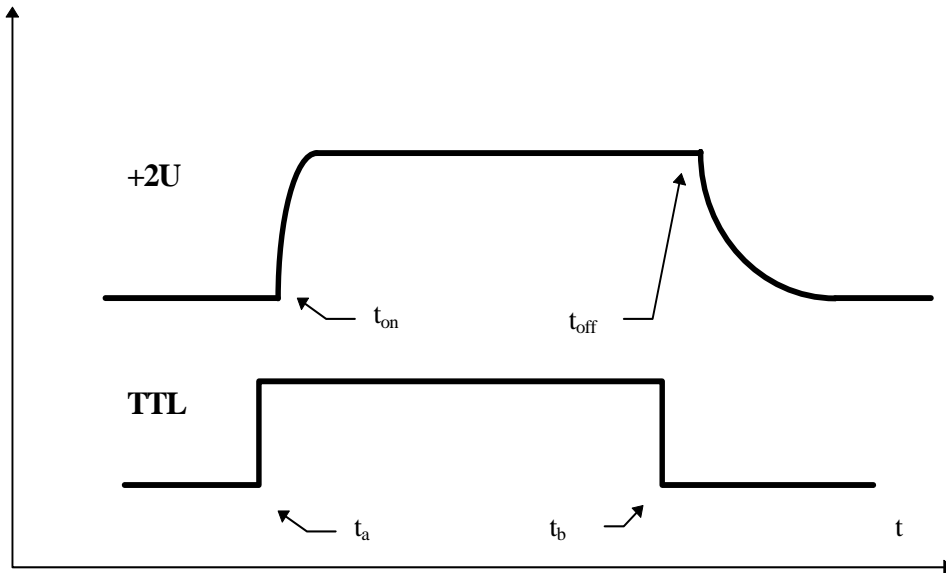


Fig. 3-19 : Evolution de la tension entre les plaques de cuivre en fonction du signal de commande.

les fils qui les relie à l'alimentation.

La commutation présente un retard significatif par rapport au signal de commande TTL. Cet effet n'est pas gênant car les mesures ont montré que la durée du retard est identique pour les deux relais et qu'elle est très stable dans le temps. En utilisant les notations de la figure (Fig. 3-19), nous avons mesuré :

$$t_{on} - t_a = 1,016(10)ms$$

$$t_{off} - t_b = 0,10(1)ms$$

Equ. 3-38

L'analyse des enregistrements du temps de montée de la tension sur les plaques met en évidence que la différence de tension entre les deux plaques atteint sa valeur asymptotique $2xU_{max}$ (à $5x10^{-4}$ près) au bout de 150 ms. Dans tous les cas d'utilisation, la mise en fonctionnement du champ électrique durera plus de 150ms et nous définissons un temps de montée équivalent t_{me} par :

$$t_{me} \times (2U_{max})^2 = \int_{t_{on}}^{t_{on}+150ms} (2U(t))^2 dt .$$

Equ. 3-39

En utilisant trois enregistrements numériques de fronts de montée de la tension aux bornes des plaques, nous trouvons respectivement :

1^{er}e enregistrement : $t_{me} = 149,637$ ms

2^{em}e enregistrement : $t_{me} = 149,648$ ms

3^{em}e enregistrement : $t_{me} = 149,584$ ms.

Nous constatons la stabilité de la forme du front de montée et nous prendrons :

$$t_{me} = 149,6(1) \text{ ms}$$

De manière similaire, l'extinction de la tension entre les plaques n'est pas instantanée. Nous pouvons considérer que la tension est nulle au bout de 40 ms et définissons un temps de descente équivalent t_{de} :

$$t_{de} \times (2U_{\max})^2 = \int_{t_{off}}^{t_{off}+40ms} (2U(t))^2 dt$$

Equ. 3-40

Les enregistrements de fronts de descente nous donnent :

$$t_{de} = 2,12(1) \text{ ms.}$$

En définitive, en utilisant les équations (Equ. 3-38, Equ. 3-39, Equ. 3-40) la moyenne du carré de la tension entre les plaques s'exprime simplement en fonction de la tension asymptotique $2 \times U_{\max}$, de la durée $(t_b - t_a)$ du créneau TTL de commande et d'une correction dt_{co} sur la durée de ce créneau.

$$\int_{t_{on}}^{t_{off}+40ms} (2U(t))^2 dt = \int_{t_{on}}^{t_{on}+150ms} (2U(t))^2 dt + \int_{t_{on}+150ms}^{t_{off}} (2U(t))^2 dt + \int_{t_{off}}^{t_{off}+40ms} (2U(t))^2 dt$$

Equ. 3-41

$$\int_{t_{on}}^{t_{off}+40ms} (2U(t))^2 dt = t_{me} \times (2U_{\max})^2 + (t_{off} - t_{on} - 150ms) \times (2U_{\max})^2 + t_{de} \times (2U_{\max})^2$$

Equ. 3-42

$$\int_{t_{on}}^{t_{off}+40ms} (2U(t))^2 dt = (t_b - t_a + dt_{co}) \times (2U_{\max})^2$$

$$\text{avec } dt_{co} = 0,83(10) \text{ ms}$$

Equ. 3-43

Si l'on applique la tension sur les plaques pendant que les atomes évoluent dans la zone de champ homogène Z_h , alors on connaît à 5×10^{-4} près la valeur du champ électrique E en fonction de la tension $\pm U$ appliquée sur chacune des plaques :

$$E = 2 \times \frac{U}{ep}.$$

L'expression (Equ. 3-30) devient :

$$\delta v_0 = k_0 \times \left(\frac{2U_{\max}}{ep} \right)^2 \times \frac{t_b - t_a + dt_{co.}}{t_3 - t_2}.$$

Equ. 3-44

.b Procédure expérimentale

Nous choisissons la vitesse de lancement V_0 de sorte que les atomes passent le plus de temps possible entre les plaques de cuivre et que l'apogée du vol libre des atomes soit contenue dans la zone Z_h . On connaît précisément la position de la cavité (cf. 3.2.2), ce qui nous donne accès au temps t_2 et t_3 . Nous déclenchons le créneau TTL de sorte que les atomes se trouvent dans la zone Z_h entre les instants t_a et t_b (le signal TTL est généré par l'ordinateur qui pilote la séquence temporelle de l'expérience avec une résolution meilleure que $10\mu s$). Pour une valeur donnée de la tension entre les plaques, le pointage du sommet de la frange centrale du motif de Ramsey est réalisé en moyennant quelques milliers de cycles de mesure. Nous représentons sur la figure (Fig. 3-20) la variance d'Allan des fluctuations de la fréquence du sommet de la frange centrale. Si nous prenons une barre d'erreur à 3σ , nous pouvons considérer que le sommet de la frange centrale est pointé à 3×10^{-4} Hz près au bout de trois heures de mesure.

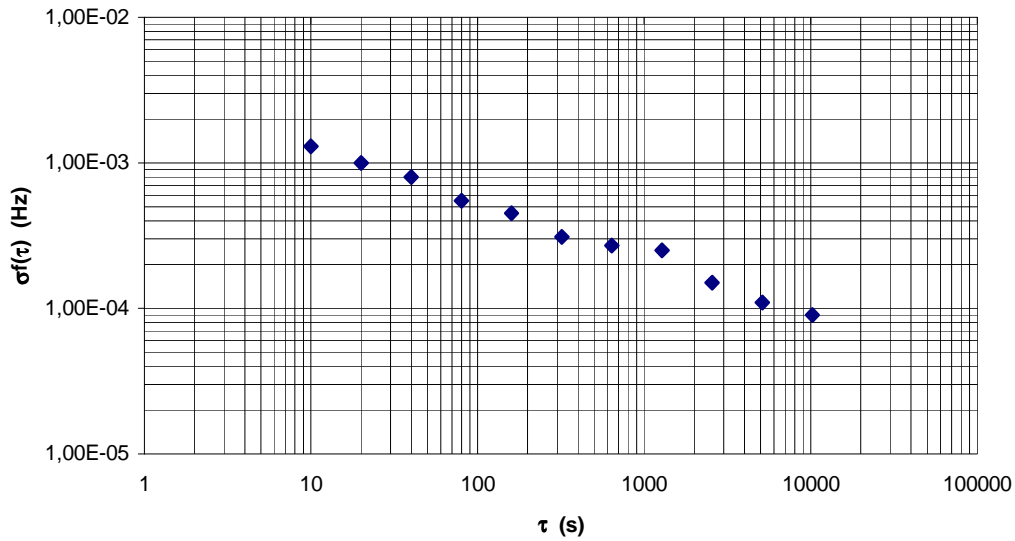


Fig. 3-20 : Variance d'Allan des fluctuations de la fréquence du sommet de la frange centrale. Cet enregistrement a été réalisé avec 10 000 cycles, ce qui correspond à une durée de mesure de 3 heures. Un champ électrique de 1000 V/cm était appliqué pendant 0,4s à chaque cycle.

Nous comparons la position du sommet de la frange centrale avec une mesure réalisée préalablement sans champ électrique, ce qui nous donne le déplacement de fréquence $\delta\nu_{mes}$ du sommet de la frange. Nous utilisons alors la modélisation numérique du motif de Ramsey pour retrouver la valeur de $\delta\nu_0$ à laquelle correspond un déplacement du sommet de la frange centrale de la valeur $\delta\nu_{mes}$ (cf. 3.4.2).

Nous donnons ci-dessus les valeurs numériques des différents paramètres et résultats. L'origine du temps et de la hauteur sont respectivement pris à l'instant et au point d'où les atomes sont lancés.

- $2xU_{max} = 1998,3(1)$ V
- $ep = 20,00(2)$ mm
- $V_0 = 3,8344(3)$ m/s
- $t_a = 190,00(5)$ ms
- $t_b = 590,00(5)$ ms
- $dt_{co} = 0,83(10)$ ms
- $\delta\nu_{mes} = -1,5476(5)$ Hz
- $\delta\nu_0 = -1.5953(10)$ Hz

L'incertitude sur la détermination de $\delta\nu_0$ à partir de $\delta\nu_{mes}$ est discutée dans le chapitre 3.4.3.

On en déduit la valeur de k_0 :

$$k_0 = -2,2729(40).$$

3.5 Sources d'erreurs

Tout au long de cette partie, nous avons discuté les sources majeures d'incertitude pour les deux méthodes de mesure de k_0 . Nous rappellerons les valeurs de ces différents effets dans le bilan d'incertitude du paragraphe 3.7.2. Nous nous contenterons de traiter ci-dessous les sources d'erreurs mineures qui n'ont pas encore été évoquées.

3.5.1 Extension spatiale du nuage d'atomes

Jusqu'à présent, nous avons considéré que le nuage d'atomes était ponctuel, et nous avons supposé que tous les atomes du nuage avaient rigoureusement la même vitesse. En fait, nous avons remarqué au chapitre 3.2.4 que cette hypothèse n'est pas tout à fait exacte. Le nuage d'atomes est quasiment ponctuel au lancement puis il s'étend progressivement au cours du vol balistique à cause de la vitesse d'agitation thermique des atomes. Nous discuterons les effets de l'élargissement vertical et transverse de la boule d'atomes froids sur la mesure de k_0 .

.a extension verticale

Si nous lançons les atomes avec une vitesse d'entraînement V_0 , compte tenu de l'agitation thermique, tous les atomes ne partent pas exactement avec une vitesse verticale V_0 . En fait, la distribution de vitesse verticale au moment du lancement est donnée par :

$$\frac{dn}{dV_z}(V_z) = n_{tot} \times \frac{e^{-\frac{(V_z - V_0)^2}{\langle v_z^2 \rangle}}}{2\sqrt{\pi}}$$

Equ. 3-45

où n_{tot} est le nombre total d'atomes froids et V_z la projection selon la verticale de la vitesse des atomes au lancement. Nous rappelons que $\langle v_z^2 \rangle$ est la vitesse quadratique moyenne selon la verticale dans le référentiel du centre de masse de la boule d'atomes froids. Pour une température de mélasse typique de $7\mu\text{K}$, nous avons $\langle v_z^2 \rangle^{0,5} = 2 \text{ cm/s}$ (cf.3.2.4).

Le calcul de la constante k_0 à partir du déplacement de fréquence engendré par un champ électrique dépend de la trajectoire des atomes et donc du paramètre V_0 . Dans l'hypothèse où la vitesse de lancement est identique pour tous les atomes, nous allons estimer l'erreur que l'on commettrait sur l'évaluation de k_0 si l'on se trompait sur la vitesse de lancement V_0 de la quantité $(V_z - V_0)$. Nous estimerons ensuite la valeur moyenne de cette erreur en prenant en compte la distribution des vitesses au lancement (Equ. 3-45).

Le tableau 3-3 et le tableau 3-4 donnent les valeurs de l'erreur Δk_0 que l'on commet sur k_0 pour un écart $(V_Z - V_0)$ sur la vitesse de lancement dans le cas des deux méthodes de mesure de k_0 , (la méthode différentielle et la méthode du champ pulsé). Nous constatons que l'effet est assez important puisqu'il conduit à un écart de l'ordre de 1% pour des atomes dont la vitesse verticale diffère de $\langle v_z^2 \rangle^{0,5}$ par rapport à la vitesse d'entraînement V_0 . Dans cette mesure, nous pouvons nous demander si le calcul simplifié de k_0 qui considère que tous les atomes ont la même vitesse V_0 au lancement est suffisamment précis dans notre cas. Fort heureusement, quand nous calculons la valeur moyenne de Δk_0 sur la distribution de vitesse au lancement (Equ. 3-46, Equ. 3-47), l'effet se compense très bien entre les atomes lancés à des vitesses symétriques par rapport à V_0 . Pour une évaluation de k_0 à 10^{-3} près, il est donc bien légitime de simplifier les calculs en supposant que la vitesse au lancement est rigoureusement V_0 pour tous les atomes.

$(V_Z - V_0) / \langle v_z^2 \rangle^{-0,5}$	$\Delta k_0 / k_0$
-2	-1,97%
-1	-0,98%
0	0
+1	+0,97%
+2	+1,95%

tableau 3-4 : dépendance de k_0 avec la vitesse verticale de lancement V_Z dans le cas où le champ électrique est pulsé pendant 400ms.

$(V_Z - V_0) / \langle v_z^2 \rangle^{-0,5}$	$\Delta k_0 / k_0$
-2	-1,44%
-1	-0,71%
0	0
+1	+0,67%
+2	+1,32%

tableau 3-3 : dépendance de k_0 avec la vitesse verticale au lancement V_Z dans le cas où le champ électrique est appliqué en permanence. Nous avons pris $V_0 = 3,83 \text{ m/s}$ et nous avons défini l'écart entre V_Z et V_0 par rapport à la vitesse d'agitation thermique à $7 \mu\text{K}$. A cette température, $\langle v_z^2 \rangle^{0,5} = 2 \text{ cm/s}$.

$$\Delta \bar{k}_0 = \frac{1}{n_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\Delta k_0(v_z) \times \frac{dn}{dv_z}(v_z) \right) dv_z$$

Equ. 3-46

Dans le cas où le champ est appliqué en permanence :

$$\frac{\Delta \bar{k}_0}{k_0} = -6 \times 10^{-5} .$$

Dans le cas où le champ est pulsé :

$$\frac{\Delta \bar{k}_0}{k_0} = -2 \times 10^{-5} .$$

Equ. 3-47

.b Extension horizontale

Compte tenu de l'extension spatiale du nuage d'atomes froids, tous les atomes ne se trouvent pas rigoureusement sur l'axe (Oz). Or nous avons utilisé la valeur du champ électrique calculé le long de l'axe (Oz) pour calculer k_0 . Cette approximation peut éventuellement fausser le calcul.

Contrairement au cas de l'extension verticale du nuage d'atomes, il ne faut pas prendre en compte tous les atomes de la distribution spatiale. En effet, quand les atomes retombent, le trou de sortie de la cavité micro-onde diaphragme le nuage d'atomes froids à un diamètre 1cm. Les atomes détectés les plus excentrés se trouvent donc à 5mm de l'axe (Oz) pendant le vol balistique au dessus de la cavité. Nous avons utilisé une évaluation numérique du champ électrique E' le long d'un axe (O'z), décalé de $\Delta x=5\text{mm}$ par rapport à (Oz) (cf. Fig. 3-9), et nous avons recalculé la valeur moyenne du carré du champ électrique vu par les atomes. Nous donnons ci-dessous les résultats de ce calcul comparativement au cas où le champ E est pris le long de l'axe (Oz).

Dans le cas où le champ est appliqué en permanence

(mesure différentielle):

$$\frac{\int_{t_2}^{t_3} E'^2(t) dt}{\int_{t_2}^{t_3} E^2(t) dt} = 1,0012 .$$

Equ. 3-48

Dans le cas où le champ est pulsé :

$$\frac{\int_{t_2}^{t_3} E'^2(t) dt}{\int_{t_2}^{t_3} E^2(t) dt} \approx 1,0001.$$

Equ. 3-49

Dans le cas de l'expérience où le champ électrique est appliqué seulement quand les atomes se trouvent dans la zone de champ homogène Z_h , nous constatons que l'effet est négligeable pour une évaluation de k_0 au pour-mille.

Pour la mesure différentielle dans laquelle le champ est appliqué en permanence, l'effet est plus important car le champ électrique est peu homogène selon l'axe (Ox) au bord des plaques. L'écart relatif sur le champ électrique moyen vu par un atome à la périphérie du nuage d'atomes et un atome sur l'axe (Oz) vaut $1,2 \times 10^{-3}$. Nous estimons que cet effet moyenné pour $-5\text{mm} < x < 5\text{mm}$, et pondéré par la distribution des atomes conduit à un écart entre le champ électrique moyen vu par le nuage d'atomes et le champ sur l'axe (Oz) de +0,3 pour mille. Nous négligerons donc également cet effet pour une évaluation de k_0 au pour mille.

3.5.2 Champ magnétique de mouvement.

Au cours de la mesure de k_0 , les atomes de césium se déplacent dans le champ électrique \mathbf{E} généré par les plaques de cuivre. Pour connaître le champ électromagnétique effectivement vu par les atomes, il faut se placer dans le référentiel en mouvement du nuage d'atomes. Les équations de la transformation de Lorentz montrent que dans un référentiel R' en déplacement à la vitesse \vec{v} par rapport au référentiel R , au premier ordre en v/c , les champs électromagnétiques \mathbf{E}' et \mathbf{B}' se déduisent de \mathbf{E} et \mathbf{B} selon :

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \end{cases}$$

Equ. 3-50

Nous noterons \mathbf{E}_{mo} et \mathbf{B}_{mo} les champs électriques et magnétiques provenant du déplacement de R' par rapport à R :

$$\begin{cases} \vec{E}_{mo} = \vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{B}_{mo} = -\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \end{cases}$$

Equ. 3-51

La vitesse maximum des atomes pendant le vol balistique est de l'ordre de 4m/s. Le champ magnétique statique \mathbf{B}_0 que l'on applique pour lever la dégénérescence des sous niveaux Zeeman est vertical, la vitesse des atomes également donc \mathbf{E}_{mo} est nul. En prenant un champ électrique statique \mathbf{E} dirigé selon (Ox), d'intensité 3×10^5 V/m, nous

obtenons au plus un champ magnétique de mouvement \mathbf{B}_{mo} , dirigé selon (Oy) d'intensité 10^{-11} T. La présence de \mathbf{B}_{mo} engendre une variation relative de \mathbf{B}_0 :

$$\frac{\sqrt{B_0^2 + B_{mo}^2} - \|B_0\|}{\|B_0\|} \leq 10^{-8} .$$

Equ. 3-52

Cette perturbation de \mathbf{B}_0 provoque un déplacement de fréquence de la transition $6S_{1/2} F=3, m_F=0 - 6S_{1/2} F=4, m_F=0$ qui est négligeable par rapport à la stabilité de fréquence de la fontaine atomique. Dans le chapitre suivant, nous étudierons l'effet Stark pour les transitions $6S_{1/2} F=3, m_F=i - 6S_{1/2} F=4, m_F=i$ entre les sous niveaux Zeeman ($|i|=1 ; 2 ; 3$). L'effet du champ magnétique est alors bien plus important. Pour la transition la plus sensible au champ magnétique ($6S_{1/2} F=3, m_F=3$ et $6S_{1/2} F=4, m_F=3$), nous aurons un déplacement de fréquence de 3×10^{-5} Hz. Cet effet est tout juste mesurable avec la fontaine atomique. Cependant, pour les mesures de l'effet Stark, il nous suffit de mesurer des déplacements de fréquence avec une incertitude d'environ 10^{-3} Hz. Nous pouvons donc également ignorer l'effet du champ magnétique dû au déplacement des atomes dans le champ électrique.

3.5.3 Effet du gradient de champ électrique sur la trajectoire.

Dans le cas où le champ électrique est appliqué en permanence, les atomes de césium évoluent dans un champ électrique dont l'intensité varie le long de la trajectoire. Dans ces conditions, l'énergie d'interaction dipolaire ΔW_d entre le champ et les atomes varie, et les atomes sont soumis à une force verticale $\mathbf{F}_E = -\mathbf{grad}(\Delta W_d)$ qui influence la trajectoire. Considérons la trajectoire d'un atome de césium dans notre dispositif expérimental. Le lancement vertical s'effectue dans une zone où le champ électrique est nul et l'apogée de la trajectoire se trouve entre les plaques de cuivre, où le champ électrique a une valeur E . Calculons $z_{max}(E) - z_{max}(0)$, l'écart entre la hauteur de l'apogée en présence d'un champ \mathbf{E} entre les plaques par rapport au cas où le champ est nul.

En présence d'un champ de pesanteur \mathbf{g} et d'un champ électrique \mathbf{E} , l'énergie totale W_T d'un atome de césium dans l'état $6S_{1/2}$ en mouvement à la vitesse \mathbf{v} dans le référentiel du laboratoire vaut :

$$W_T = m_{Cs}g \cdot z + \frac{1}{2}m_{Cs}v^2 + \Delta W_d .$$

Equ. 3-53

Nous en déduisons aisément :

$$z_{max}(E) - z_{max}(0) = \frac{-\frac{1}{2}\alpha E^2}{m_{Cs}g} .$$

Equ. 3-54

Nous rappelons la valeur de la masse d'un atome de césium $m_{Cs} = 2,2 \times 10^{-25}$ kg. La définition et la valeur de α sont données au § 2.4.1 (p.17). Pour un champ électrique de 3000 V/cm, $z_{max}(E) - z_{max}(0) = 1,2 \times 10^{-4}$ m. Cette perturbation de la trajectoire est assez faible pour être négligée dans le calcul de k_0 au pour mille à partir de l'équation (Equ. 3-30).

3.6 Mesure des constantes k_i relatives aux sous niveaux Zeeman.

Nous nous sommes intéressé jusqu'à présent à la constante k_0 relative au déplacement de fréquence $\delta\nu_0$ induit par un champ électrique statique d'intensité E sur la transition $6S_{1/2} F=3, m_F=0 - 6S_{1/2} F=4, m_F=0$ des étalons de fréquence à césium :

$$\delta\nu_0 = k_0 \times E^2 .$$

Equ. 3-55

Il est également possible de mesurer les constantes k_i (avec $|i|=1 ; 2 ; 3$) relatives aux transitions entre les sous niveaux Zeeman $6S_{1/2} F=3, m_F=i - 6S_{1/2} F=4, m_F=i$ sans modifier le dispositif expérimental . Si l'on désigne par ν_i le déplacement de fréquence engendré sur la transition $6S_{1/2} F=3, m_F=i - 6S_{1/2} F=4, m_F=i$ par un champ électrique E , nous avons :

$$\delta\nu_i = k_i \times E^2 .$$

Equ. 3-56

Nous décrivons ci-dessous ces mesures.

3.6.1 Rappel sur les sous niveaux Zeeman.

En présence d'un champ magnétique d'intensité B , les niveaux atomiques hyperfins $6S_{1/2} F=3$ et $6S_{1/2} F=4$ se séparent respectivement en 7 et 9 sous niveaux. Nous donnons ci-dessous les fréquences ν_i des transitions $6S_{1/2} F=3, m_F=i - 6S_{1/2} F=4, m_F=i$ en fonction de B (au premier ordre),(Ref. 5).

$$\nu_0 = 9192631770 \text{ Hz}$$

$$\nu_i = \nu_0 + i \times B \times \gamma$$

$$\text{avec } \gamma = 701 \times 10^7 \text{ Hz} / T$$

Equ. 3-57

3.6.2 Principe de la mesure.

La mesure des constantes k_i est effectuée de façon relative par rapport à la mesure de k_0 . Cette méthode permet de s'affranchir du calcul des différentes erreurs systématiques.

Pour une valeur fixée V_0 de la vitesse de lancement, nous mesurons le déplacement de fréquence $\delta\nu_{mes}(m_F=0)$ engendré par un champ électrique \mathbf{E} sur la transition $F=3, m_F=0 - F=4, m_F=0$. Avec une vitesse de lancement et un champ électrique identiques, nous mesurons les déplacements de fréquence $\delta\nu_{mes}(m_F=i)$ sur les 6 transitions $F=3, m_F=i - F=4, m_F=i$ avec $|i|=1 ; 2 ; 3$. La détermination relative de k_i par rapport à k_0 est simplement donné par :

$$\frac{k_i}{k_0} = \frac{\delta\nu_{mes}(m_F=i)}{\delta\nu_{mes}(m_F=0)} .$$

Equ. 3-58

Justifions brièvement ce résultat. Nous utilisons l'approximation analytique pour modéliser l'effet de l'asymétrie de la frange centrale. Nous prenons des notations similaires au cas $m_F=0$ des paragraphes 3.4.2 et 3.4.3.

$$\delta\nu_{mes}(m_F=i) = \delta\nu_i \times \left(1 - 2 \frac{\tan(\frac{1}{2}b_0\tau)}{b_0T + 4 \tan(\frac{1}{2}b_0\tau)} \right)$$

Equ. 3-59

et

$$\delta\nu_i = k_i \times \frac{\int_{t_2}^{t_3} E^2(t) dt}{t_3 - t_2} .$$

Equ. 3-60

Les équations Equ. 3-59 et Equ. 3-60 impliquent les résultats Equ. 3-58 si pour les mesures avec $m_F=0$ et $m_F=i$, l'intégrale du carré du champ ainsi que le terme entre parenthèses dans Equ. 3-59 ont respectivement les mêmes valeurs. Dans la mesure où la vitesse de lancement et le champ électrique appliqué entre les plaques sont inchangés entre les deux mesures, l'intégrale du carré du champ est bien constante et il suffit que le terme b_0 soit également constant pour que le terme entre parenthèses de l'expression (Equ. 3-59) ne varie pas. L'intensité du champ magnétique micro-onde optimum pour exciter les différentes transitions varie avec le nombre quantique m_F . L'expression de proportionnalité entre le terme b_0 et l'amplitude B_0 du champ magnétique est donné pour les différentes valeur du nombre quantique m_F dans l'expression suivante :

$$b_0(m_F) = K(m_F) \times \left[\frac{1}{2} (g_I + g_J) \mu_B B_0 / \hbar \right]$$

Equ. 3-61

Les notations sont explicitées au chapitre 3.2.5 et nous donnons ci-dessous les valeurs numériques de $K(m_F)$ (Ref. 5).

$ m_F $	0	1	2	3
$K(m_F)$	1	$0,25 \times 15^{-1/2}$	$0,5 \times 3^{-1/2}$	$0,25 \times 7^{-1/2}$

En pratique, nous ajustons la puissance micro-onde telle que $b_0 \tau = \pi/2$ pour la transition $m_F = 0$. Puis, pour les transitions $m_F \neq 0$, nous décalons la puissance micro-onde avec un atténuateur calibré en utilisant les valeurs de $K(m_F)$ ci-dessus. Dans ces conditions, l'écriture (Equ. 3-58) est bien justifiée.

3.6.3 Procédure expérimentale

Dans le principe, la mesure des coefficients k_i ($|i|=1; 2; 3$) est assez simple. En pratique, la très grande sensibilité au champ magnétique de la fréquence des transitions entre les sous niveaux Zeeman rend la mesure difficile. Les fluctuations du champ magnétique terrestre (provenant en partie des lignes de métró) dégradent notablement la stabilité de fréquence des mesures. A titre indicatif, nous donnons la variance d'Allan de la fréquence de la fontaine atomique lorsqu'elle est asservie sur la transition $F=3, m_F=3 - F=4, m_F=3$ (cf. Fig. 3-21). Nous constatons que la stabilité de fréquence est optimum au bout de 6s avec une valeur de $\sigma_f(t=5s) = 0,04\text{Hz}$. Pour des durées d'intégration plus longues, nous observons une dérive de fréquence provenant des fluctuations du champ magnétique. Il est clair que la stabilité de fréquence est insuffisante pour mesurer des déplacements de fréquence de environ 1Hertz induit par le champ électrique \mathbf{E} , avec une incertitude relative de 10^{-3} .

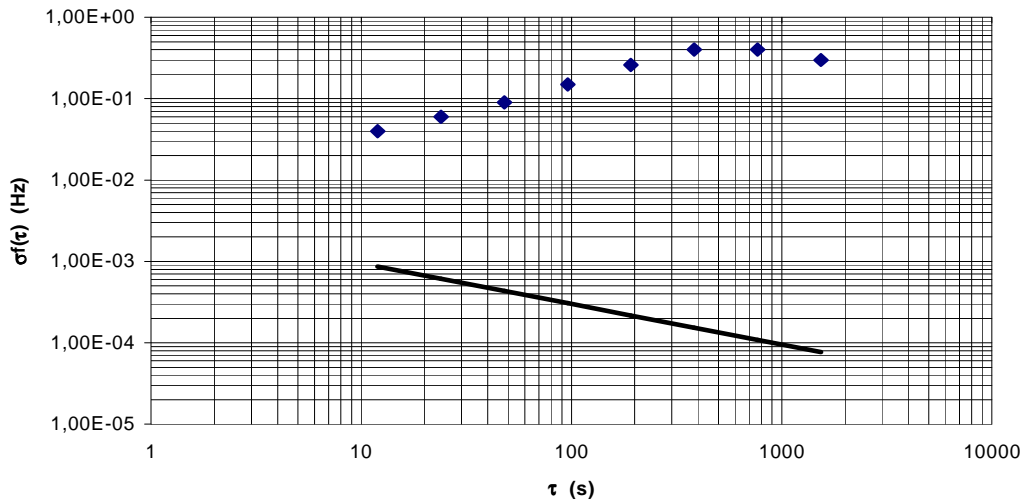


Fig. 3-21 : variance d'Allan des fluctuations de fréquence de la fontaine atomique asservie sur la transition $F=3, m_F=3 - F=4, m_F=3$. (A titre de comparaison, nous représentons en trait continue l'allure de la même variance pour la transition d'horloge $F=3, m_F=0 - F=4, m_F=0$).

Nous pouvons contourner cet obstacle en remarquant que la constante de temps caractéristique des fluctuations du champ magnétique est d'une dizaine de secondes. Pendant une durée inférieure à 10s, nous mesurons successivement la fréquence de la transition sans appliquer de champ électrique et en appliquant un champ électrique E , nous accédons ainsi à une valeur de $\delta v_{mes}(m_F=3)$ avec une incertitude de l'ordre de $\sigma_{\delta v_{mes}}(t=12s) = 0,05\text{Hz}$. Nous répétons cette mesure différentielle un grand nombre de fois pour moyennner les fluctuations du champ magnétique. Nous représentons sur la figure (Fig. 3-22) la variance d'Allan des fluctuations de la quantité $\delta v_{mes}(m_F=3)$ pendant deux heures de mesure.

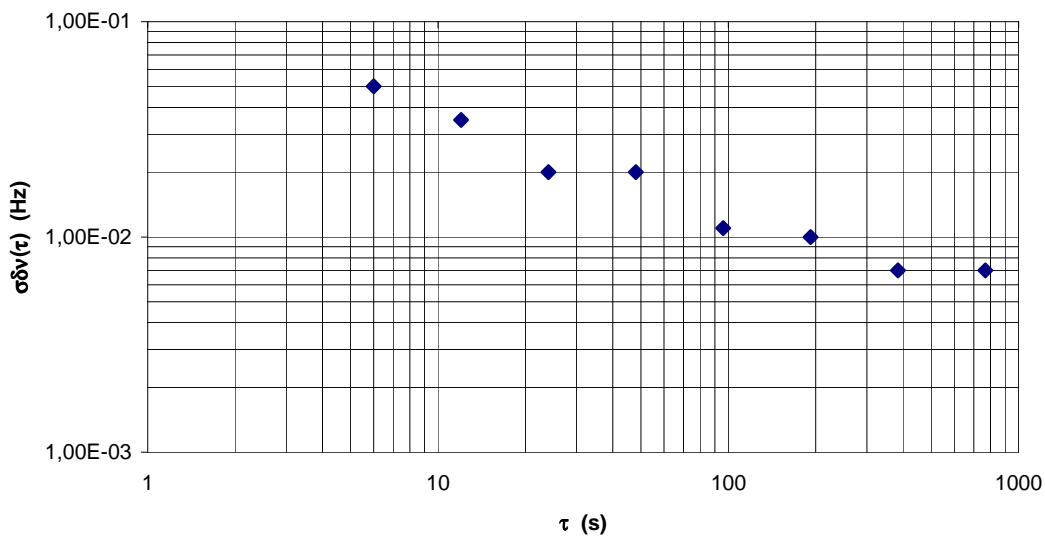


Fig. 3-22 : variance d'Allan des fluctuations de la différence $\sigma_{\delta v}$.

Nous constatons que la méthode rejette efficacement les fluctuations du champ magnétique. En effet, elle permet d'atteindre au bout de deux heures une stabilité de quelques milli-Hertz sur la mesure de $\delta v_{mes}(m_F=3)$. Cependant, en répétant cette mesure pendant plusieurs semaines, nous avons observé des fluctuations lentes de $\delta v_{mes}(m_F=i)$ de l'ordre de 3%. Nous avons émis l'hypothèse que ces fluctuations étaient dues à un champ magnétique généré par des courants de fuite résultants de l'application d'une tension sur les plaques. Ces fluctuations devraient être de signe opposé pour $\delta v_{mes}(m_F=i)$ et $\delta v_{mes}(m_F=-i)$. Nous avons effectué en parallèle une mesure de $\delta v_{mes}(m_F=3)$ et $\delta v_{mes}(m_F=-3)$ selon la technique décrite ci dessus et nous avons observé les fluctuations de la demi-somme $(\delta v_{mes}(m_F=3) + \delta v_{mes}(m_F=-3))/2$. Pendant un mois, nous n'avons pas observé de fluctuations supérieures à 0,5% sur cette demi-somme. De manière similaire nous avons mesuré les demi-sommes pour $|m_F|=1$ et $|m_F|=2$. Nous avons observé une dépendance de k avec $|m_F|$ qui se détachait un peu du bruit de mesure.

$$\text{On note: } k_{|m_F|} = \frac{k_{m_F} + k_{-m_F}}{2}$$

$ m_F $	$k_{ m_F }/k_0$
0	1
1	1,002(3)
2	1,006(3)
3	1,010(5)

tableau 3-5 : Valeurs relatives de $k_{|m_F|}$ par rapport à k_0 . Les incertitudes correspondent à l'amplitude des fluctuations observées sur environ 5 mesures par valeur de m_F .

L'incertitude de ces mesures a été remise en question quand nous les avons répétées en inversant la polarité de la tension appliquée sur les plaques générant le champ électrique. A priori, les mesures de $(\delta v_{\text{mes}}(m_F=1) + \delta v_{\text{mes}}(m_F=-1))/2$ auraient dû être invariantes vis à vis de cette transformation. L'expérience a donné un écart de l'ordre de 2%. Si nous prenons la demi-somme de ces mesures avec celle du tableau 3-5, nous observons que le rapport $k_{|m_F|}/k_0$ se rapproche de l'unité. Nous supposons que cet effet est lié à des champs magnétique induit par des courants parasites. L'origine et la géométrie de ces courants ne sont pas clairement comprises. En raison du temps important requis pour ces mesures, nous n'avons pas poursuivi les investigations. Nous nous contenterons de donner le résultat suivant avec une incertitude prudente de 3%.

$$\frac{k_{|m_F|}}{k_0} = 1,00(3) \text{ quel que soit } m_F \in \{1;2;3\}$$

Equ. 3-62

3.7 Bilan des mesures

3.7.1 Résultats

Toutes les mesures de déplacement de fréquence ont été effectuées en présence d'un champ magnétique vertical d'intensité $B_0 = 1,7 \times 10^{-7}$ T qui sert à lever la dégénérescence entre les différents sous niveaux Zeeman des états $6S_{1/2} F=3$ et $6S_{1/2} F=4$. (Nous avons effectué une série de mesure de k_0 en doublant l'intensité du champ magnétique. Nous n'avons pas observé de différence à un niveau de résolution de quelques 10^{-4}).

Quand les atomes de césium sont soumis à un champ électrique statique \mathbf{E} perpendiculaire au champ magnétique \mathbf{B}_0 , nous avons vérifié avec une incertitude relative de 5×10^{-4} que le déplacement de fréquence $\delta\nu_0$ induit sur la transition $6S_{1/2} F=3, m_F=0 - 6S_{1/2} F=4, m_F=0$ est proportionnel au carré de l'intensité du champ électrique E :

$$\delta\nu_0 = k_0 \times E^2 .$$

Nous avons déterminé la valeur de k_0 avec une incertitude relative de deux pour mille. Cette mesure a été réalisée de manière concordante avec deux procédures expérimentales différentes.

$$\text{méthode différentielle : } k_0 = -2,269(4) \times 10^{-10} \text{ Hz}/(\text{V}/\text{m})^2$$

$$\text{méthode pulsée : } k_0 = -2,273(4) \times 10^{-10} \text{ Hz}/(\text{V}/\text{m})^2$$

$$\text{valeur moyenne : } k_0 = -2,271(4) \times 10^{-10} \text{ Hz}/(\text{V}/\text{m})^2$$

De manière similaire, nous avons étudié les déplacements de fréquence $\delta\nu_i$ induits sur les transitions $6S_{1/2} F=3, m_F=i - 6S_{1/2} F=4, m_F=i$ en présence d'un champ électrique \mathbf{E} .

$$\delta\nu_i = k_i \times E^2 .$$

Equ. 3-63

$$\text{On note : } k_{|m_F|} = \frac{k_{m_F} + k_{-m_F}}{2} ,$$

Equ. 3-64

$$\text{et nous trouvons : } \frac{k_{|m_F|}}{k_0} = 1,00(3) , \text{ avec } |m_F| \in \{1 ; 2 ; 3\} .$$

Equ. 3-65

Nous en déduisons (cf .§ 2.6.3) :

$$\frac{1}{2h} \left(\frac{16}{7} \alpha_{10} + \frac{1}{7} \alpha_{12} \right) = 2,271(4) \times 10^{-10} \text{ Hz} / (\text{V} / \text{m})^2$$

$$\text{et } \left| \frac{\alpha_{02}}{h} \right| \leq 3,5 \times 10^{-11} \text{ Hz} / (\text{V} / \text{m})^2 .$$

Equ. 3-66

Les mesures réalisées sur les transitions Zeeman dépendantes du champ magnétique (m_F non nul) donnent accès à une majoration du terme d'origine quadrupolaire α_{02} .

L'incertitude sur ce résultat est modeste compte tenu de l'ordre de grandeur de ce terme. Selon les estimations théoriques (cf. § 2.6.3), $|\alpha_{02}/h|$ vaut approximativement $10^{-15} \text{ Hz}/(\text{V}/\text{m})^2$. La mesure de k_0 donne accès avec une précision remarquable de quelques pour mille à la valeur du terme de contact α_{10} car nous connaissons par ailleurs la valeur de α_{12} (cf. §2.6.3):

$$\frac{\alpha_{12}}{h} = -3,6(2) \times 10^{-12} \text{ Hz}/(\text{V}/\text{m}^2)$$

Equ. 3-67

Ce qui permet de déduire :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{10}}{h} &= 1,989(4) \times 10^{-10} \text{ Hz}/(\text{V}/\text{m})^2 \\ -\frac{1}{2h} \times \frac{16}{7} \alpha_{10} &= -2,273(5) \times 10^{-10} \text{ Hz}/(\text{V}/\text{m})^2 \end{aligned}$$

Equ. 3-68

Cette évaluation du terme scalaire α_{10} nous servira pour étudier le déplacement par effet Stark induit par le champ électrique du rayonnement du corps noir

3.7.2 Résumé des incertitudes.

Nous résumons dans les tableaux qui suivent les incertitudes pour les trois mesures effectuées :

origine physique	incertitude x 10³
puissance micro-onde	1
position relative de la zone de refroidissement et de la cavité	1
position relative de la zone de refroidissement et des plaques	1
tension appliquée sur les plaques	0,3
distance entre les plaques	0,7
distribution de vitesse des atomes	0,3
stabilité de fréquence de FO1	<0,1
numérisation du champ électrique	0,5
incertitude globale (1σ)	2

tableau 3-6 : incertitude relative pour la mesure différentielle de k_0

origine physique	incertitude x 10³
puissance micro-onde	1
position relative de la zone de refroidissement et de la cavité	1
position relative de la zone de refroidissement et des plaques	<0,1
forme et durée du pulse	0,5
tension appliquée sur les plaques	0,3
distance entre les plaques	0,7
distribution de vitesse des atomes	0,1
stabilité de fréquence de FO1	<0,1
numérisation du champ électrique	0,1
incertitude globale (1σ)	2

tableau 3-7: incertitude relative pour la mesure pulsée de k_0

origine physique	incertitude x 10³
puissance micro-onde	<0,5
position relative de la zone de refroidissement et de la cavité	<0,5
position relative de la zone de refroidissement et des plaques	<0,5
tension appliquée sur les plaques	<0,5
distance entre les plaques	<0,5
distribution de vitesse des atomes	<0,5
stabilité de fréquence de FO1,(champ magnétique parasite)	30
numérisation du champ électrique	<0.5
incertitude globale (1σ)	30

tableau 3-8 : incertitude relative pour les mesures de k_i/k_0

3.7.3 Intérêt de la fontaine atomique pour ces mesures

La mesure de la constante k_0 avait précédemment été réalisée dans des jets atomiques à résonance magnétique (Ref. 7, Ref. 8). Les deux électrodes pour générer un champ électrique étaient placées entre les deux cavités micro-ondes de l'interaction Ramsey. Nous rappelons les résultats obtenus :

$$k'_0 = -2,29(3) \times 10^{-10} \text{ Hz}/(\text{V}/\text{m})^2 \quad (\text{Ref. 24})$$

$$k'_0 = -2,25(5) \times 10^{-10} \text{ Hz}/(\text{V}/\text{m})^2 \quad (\text{Ref. 25})$$

Nous utilisons ici la notation k'_0 au lieu de k_0 car les précédentes mesures n'ont pas été réalisées avec une géométrie similaire à la notre pour les champs \mathbf{E} et \mathbf{B}_0 . Dans notre cas, nous avons \mathbf{E} et \mathbf{B}_0 orthogonaux, dans les mesures de R.D. Haun et J.R. Zacharias (Ref. 24) et de R. Mowat (Ref. 25) \mathbf{E} et \mathbf{B}_0 sont parallèles. Nous avons montré au chapitre 2 que cette différence géométrique provoque une différence de quelques pour mille entre k_0 et k'_0 . Cependant, cette différence n'est pas significative vis à vis de l'incertitude expérimentale sur les deux valeurs de k'_0 .

Avec notre mesure :

$$k_0 = -2,271(4) \times 10^{-10} \text{ Hz}/(\text{V}/\text{m})^2,$$

nous avons amélioré la précision sur la constante k_0 d'un facteur dix et nous avons confirmé les précédents résultats.

La stabilité de fréquence de la fontaine de 2×10^{-15} Hz a notablement facilité la mesure. En effet, dans le cas des mesures (Ref. 25 et Ref. 24), la stabilité de fréquence des jets atomiques était de l'ordre de 30 Hz. Pour que la mesure du déplacement de fréquence ne soit pas limitée par cette valeur au niveau du pour-cent en incertitude relative, il était nécessaire de créer un déplacement de fréquence important en appliquant des champs électriques de l'ordre de 40 kV/cm. Dans notre cas, nous avons très largement pu nous contenter de champ électrique de 1 kV/cm pour une mesure dix fois plus précise.

La limite principale des mesures de k_0 dans les modes opératoires de (Ref. 24 et Ref. 25) provenait des incertitudes sur la distance entre les électrodes du champ électrique ainsi que des inhomogénéités du champ au bords des électrodes. Le mode de fonctionnement pulsé de la fontaine, la faible vitesse des atomes de césium dans le dispositif ainsi que les calculs numériques de champ ont permis de développer des méthodes de mesures très peu sensibles aux inhomogénéités du champ électrique. Par ailleurs, les faibles valeurs du champ \mathbf{E} requises dans notre expérience nous ont permis d'espacer les électrodes d'une distance e_p , 5 fois plus importante que dans les mesures réalisées dans les jets. L'incertitude relative sur e_p et donc sur la valeur du champ électrique est réduite du même ordre de grandeur.

4. Application au corps noir

4.1 Introduction

Dans une horloge atomique, les atomes de césium voient le rayonnement thermique de l'enceinte qui les contient. Les champs magnétiques et électriques de ce rayonnement déplacent la fréquence de la transition horloge des étalons de fréquence atomiques.

Nous rappellerons dans un premier temps les propriétés du rayonnement du corps noir. Nous verrons que le déplacement de fréquence induits par le champ magnétique est négligeable vis à vis du déplacement de fréquence provoqué par effet Stark par le champ électrique. Nous étudierons les déplacements de fréquence induit sur la transition horloge par un champ électrique statique afin de modéliser le déplacement induit par le rayonnement du corps noir.

4.2 Le rayonnement du corps noir

4.2.1 Le corps noir parfait

Le champ électromagnétique dans un volume donné peut être décrit comme la somme de différents modes discrets orthogonaux du champ. Les différents modes du champ sont caractérisés par leur fréquence, leur distribution spatiale et leur polarisation. Quand le rayonnement électromagnétique est en équilibre thermodynamique avec les parois parfaitement absorbantes d'une enceinte fermée à la température T , la densité spectrale d'énergie volumique du rayonnement est donnée (en J/Hz/m³) par la loi de Planck (Fig. 4-1) :

$$\rho(\nu) = h\nu \times \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \times \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

Equ. 4-1

h, k et c désignent respectivement la constante de Planck, la constante de Boltzman et la célérité de la lumière dans le vide. Le premier terme $h\nu$ est l'énergie d'un photon de fréquence ν . Le second terme provient du modèle de distribution statistique de Bose-Einstein (Ref. 4). Il donne le nombre moyen de photons par mode à la fréquence ν , à l'équilibre thermique à la température T .

$$n(\text{photons}) / \text{mode} = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Equ. 4-2

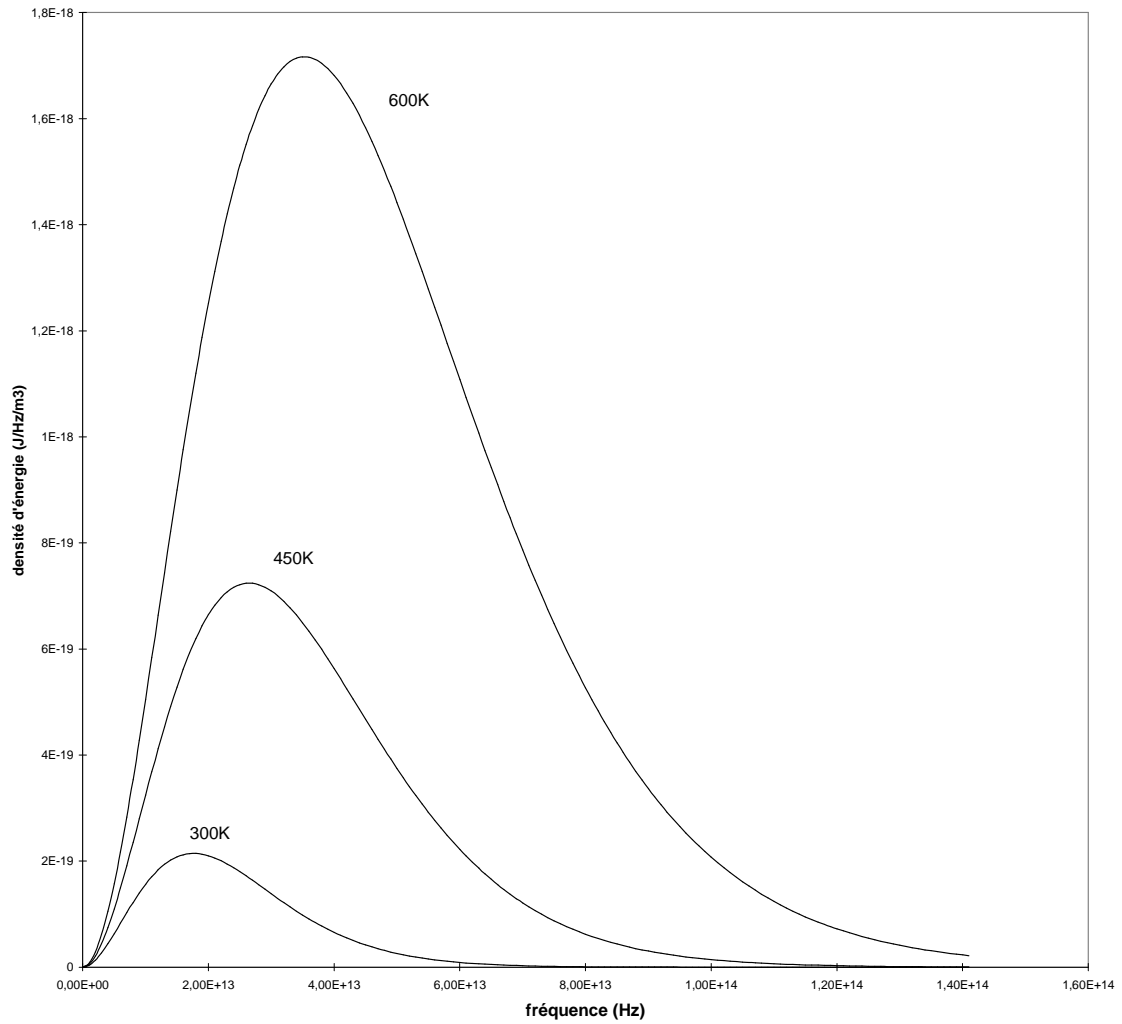


Fig. 4-1 :Densité spectrale d'énergie volumique du rayonnement du corps noir à 300K, 450K et 600K.

Le dernier terme du produit donne le nombre de modes à la fréquence ν , par unité de volume et par unité de fréquence.

$$\frac{\partial n(\text{mode})}{\partial \nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

Equ. 4-3

Si nous intégrons la distribution spectrale d'énergie volumique du corps noir sur tout le spectre, nous retrouvons la densité d'énergie volumique w d'un corps noir en équilibre avec les parois à la température T (loi de Stephan) :

$$w(T) = \int_0^{\infty} \rho(\nu) d\nu$$

$$w(T) = K_{st} \times T^4$$

$$K_{st} = 7,570 \times 10^{-16} \text{ Jm}^{-3} \text{ K}^{-4}.$$

Equ. 4-4

La densité volumique d'énergie du rayonnement électromagnétique est par ailleurs reliée à la valeur quadratique moyenne $\langle E^2 \rangle$ du champ électrique par :

$$w(T) = \epsilon_0 \cdot \langle E^2 \rangle$$

Equ. 4-5

où ϵ_0 est la permittivité du vide. Nous déduisons de (Equ. 4-4 et Equ. 4-5) la valeur quadratique moyenne du champ électrique du rayonnement d'un corps noir à la température T.

$$\langle E^2 \rangle = \frac{K_{st}}{\epsilon_0} T^4$$

$$\langle E^2 \rangle = K' \times \left(\frac{T}{300} \right)^4, \text{ avec T en Kelvin et } K' = (831,9 \text{ V} / \text{m})^2$$

Equ. 4-6

De manière similaire, la densité volumique d'énergie du rayonnement électromagnétique est reliée à la valeur quadratique moyenne $\langle B^2 \rangle$ du champ magnétique par :

$$w(T) = c^2 \epsilon_0 \cdot \langle B^2 \rangle$$

Equ. 4-7

et

$$\langle B^2 \rangle = P' \times \left(\frac{T}{300} \right)^4, \text{ avec T en Kelvin et } P' = (2,775 \times 10^{-6} \text{ Telsa})^2.$$

Equ. 4-8

Pour une température de rayonnement T donnée, Il sera intéressant de connaître la longueur d'onde λ_m pour laquelle la densité spectrale d'énergie du rayonnement est maximum :

$$\lambda_m = \frac{K_1}{T}$$

avec $K_1 = 2,9 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

Equ. 4-9

ce qui donne :

$$\text{à } 300\text{K}, \lambda_m = 9,6\mu m$$

$$\text{à } 500\text{K}, \lambda_m = 5,8\mu m$$

4.2.2 Le corps noir effectif.

Jusqu'à présent, nous avons considéré un corps noir parfait constitué par une enceinte fermée avec des parois idéalement absorbantes pour toutes les fréquences du rayonnement électromagnétique. Dans la fontaine atomique, l'enceinte qui est vue par les atomes, pendant l'interaction Ramsey, entre les deux passages dans la cavité micro-onde est constituée par un cylindre de cuivre de 15cm de diamètre et de 70cm de haut. En outre, le cylindre est ouvert en haut par un hublot de verre de 4cm de diamètre et en bas par un trou de 1cm qui débouche dans la zone de refroidissement d'atomes. Cette zone est elle même ouverte sur l'extérieur par des hublots en verre. Nous étudierons les effets de cette géométrie par rapport à un corps noir parfait en faisant l'hypothèse que la température du cylindre, des hublots et de la zone de refroidissement d'atome est homogène.

.a Structure de modes

La loi de distribution spectrale d'énergie du corps noir suppose que les parois de l'enceinte sont des surfaces parfaitement absorbantes. Dans la fontaine, les parois sont en cuivre et pour des longueurs d'onde grandes devant les défauts de surface, celles ci se comportent comme de bons miroirs et donnent ainsi au rayonnement thermique une structure de modes discrets aux basses fréquences. Pour les hautes fréquences, la distribution d'énergie du rayonnement redevient continue. Pour illustrer ce phénomène, nous avons représenté l'allure de la distribution spectrale d'un corps noir formé par une enceinte fermée cubique de 40 μm de côté et dont les parois à 300 K se comportent comme de bons miroirs pour des longueurs d'onde de l'ordre de 300 μm (Nous avons pris un facteur de qualité de 60 à $\lambda=300\mu\text{m}$). Dans le cas de la fontaine atomique, cette figure aurait été peu représentative car la densité de mode est à peu près 10^7 fois plus importante. En effet, le volume de l'enceinte cylindrique où passent les atomes pendant l'interaction Ramsey est de 12 litres environ. Par ailleurs, les parois sont réalisées en cuivre avec des tolérances d'usinage de l'ordre de 100 μm . Elle constituent donc de bons miroirs pour des longueurs d'onde supérieures au millimètre.

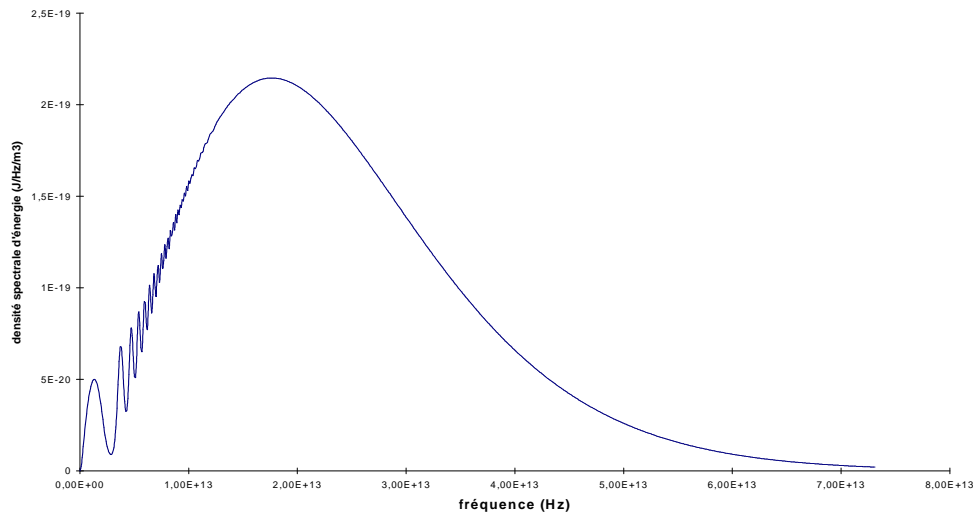


Figure 4-1 : Distribution spectrale d'énergie de rayonnement d'un corps noir à 300K formé par une enceinte fermée de un millimètre cube de volume et dont les parois se comportent comme de bons miroirs pour des longueurs d'onde de l'ordre de 100 μm

La structure de mode ne modifie pas l'énergie moyenne du rayonnement du corps noir contenu dans une tranche de fréquence dont la largeur est notablement supérieure à l'intervalle entre deux modes discrets. Ainsi, la structure de mode ne perturbe pas la valeur moyenne de l'énergie volumique du corps noir donnée par la loi de Stefan (Equ. 4-4). Cependant, nous pourrions craindre des phénomènes de résonance entre les modes discrets du champs et les résonances atomiques. En effet, si la densité d'énergie du champ varie rapidement avec la fréquence autour d'une résonance, elle peut produire un phénomène de déplacement lumineux. Pour les transitions dipolaires électriques, les fréquences atomiques mises en jeu sont supérieures à $3,5 \times 10^{14} \text{ Hz}$ ($\lambda = 850 \text{ nm}$) et pour de telles fréquences, le rayonnement du corps noir peut être considéré comme continu et les déplacements lumineux peuvent être négligés.

Pour les transitions dipolaires magnétiques, les fréquences atomiques sont proches de 9,2 GHz, et nous pouvons craindre une structure de modes discrets et donc de fortes variations de la densité d'énergie du rayonnement. Remarquons que pour des fréquences de l'ordre de 9 GHz, dans une enceinte de 12l, il y a 9×10^{-7} modes de rayonnement électromagnétique par Hz et l'énergie moyenne par mode vaut $4 \times 10^{-21} \text{ J}$, ce qui correspond à une valeur de $\langle B^2 \rangle = 5 \times 10^{-27} \text{ T}^2$. Si nous supposons que les modes sont bien répartis en fréquence, l'écart moyen entre deux modes vaut environ 1 MHz. Compte tenu de la qualité géométrique des parois du tube de cuivre, il est peu probable de trouver des facteurs de qualité supérieurs à 1000 pour les modes du champ à 9 GHz. Il en résulte que la largeur à mi hauteur des modes autour de 9 GHz est de l'ordre de 10 MHz, ce qui est

10 fois plus important que l'intervalle de fréquence séparant deux modes successifs. Il en résulte que la structure de mode n'apparaît pratiquement pas à 9 GHz et le rayonnement peut être considéré comme continu.

.b Influence des ouvertures

L'énergie électromagnétique contenue dans une enceinte fermée à température T est donnée par la loi de Stefan (Equ. 4-4). La présence d'une ouverture dans l'enceinte perturbe le rayonnement. En se plaçant à un point donné dans l'enceinte, on voit le rayonnement des parois à la température T et les réflexions multiples de ce rayonnement sur les parois ainsi que le rayonnement extérieur vu par l'ouverture et ses réflexions sur les parois. L'effet d'une ouverture dans un corps noir se modélise en appliquant une correction à la température des parois de ce corps noir. La modélisation des ouvertures est bien connue en photométrie (Ref. 45, Ref. 46, Ref. 47). A titre indicatif, on trouve dans (Ref. 48) l'étude de la perturbation introduite par un trou de 2,5 cm de diamètre sur le rayonnement à $11\ \mu\text{m}$ d'un corps noir à 550 K, constitué par un cylindre de 15 cm de long et de 9 cm, dont les parois intérieures sont recouvertes de graphite colloïdal. La correction de température due à l'ouverture est de $-0,38\ \text{K}$ et cette correction est déterminée à $0,06\ \text{K}$ près. Dans le cadre du développement d'étalons de fréquence atomique au césium d'une exactitude de fréquence relative de 10^{-16} , nous verrons au §4.4.4 qu'il est nécessaire de connaître la température du rayonnement vu par les atomes à $0,5\ \text{K}$ près (à $T=300\ \text{K}$).

Pour la fontaine atomique, l'enceinte est ouverte sur l'extérieure par des hublots en verre. Nous supposons que la température du cylindre de cuivre et des hublots est homogène. Pour des températures inférieures à 350K, 99,9% de l'énergie du rayonnement du corps noir est contenue dans le rayonnement dont la longueur d'onde est supérieure à $3\ \mu\text{m}$ or les hublots de verre de 6mm d'épaisseur ont une transmission inférieure à 1% dans cette bande spectrale. (Ils sont transparents dans la bande de $0,3\ \mu\text{m}$ à $2\ \mu\text{m}$). Les hublots en verre qui séparent l'intérieur de l'enceinte du milieu extérieur constituent donc de très bonnes parois étanches pour le rayonnement du corps noir². Nous pouvons considérer que la température du rayonnement du corps noir dans le cylindre de cuivre est celle de ces parois, à bien mieux que $0,5\ \text{K}$ près.

4.3 Effet du champ magnétique

Nous avons décrit en détail dans le chapitre 2 le déplacement de fréquence engendré par un champ électrique sur la transition entre les niveaux $|6S_{1/2}\ F=3, m_F=0\rangle$ et

² Ceci est vrai si nous supposons que la température du laboratoire est inférieure à 50°C et que la lumière d'éclairage de la pièce ne rentre pas par les hublots. En effet, le filament d'une lampe à incandescence de 100W est à 2500 K. Environ 75% du flux électromagnétique émis par la lampe passe par le hublot en verre. Si l'on place cette lampe (non collimatée) au-dessus du hublot supérieur, à 1m de la zone de vol libre des atomes de césium, on montre que le rayonnement lumineux équivaut à une élévation de température de 1K pour la densité d'énergie du rayonnement thermique vu par les atomes. (A 1 m de l'ampoule, la densité d'énergie de son rayonnement vaut $2,6 \times 10^{-8}\ \text{J/m}^3$, à comparer à $6 \times 10^{-6}\ \text{J/m}^3$ pour un rayonnement de corps noir à température ambiante). Une mesure expérimentale de cet effet serait intéressante.

$|6S_{1/2} F=4, m_F=0\rangle$ (que nous écrivons de façon simplifiée $|3\rangle$ et $|4\rangle$). Ce déplacement Stark a pour origine une perturbation dipolaire électrique au second ordre qui couple les états $|3\rangle$ et $|4\rangle$ avec les états $|n'P_J, F', m'_F\rangle$. De manière comparable (quoique plus simple), la différence d'énergie entre les niveaux $|3\rangle$ et $|4\rangle$ est perturbée par un champ magnétique par effet Zeeman du second ordre. Ce déplacement a pour origine une perturbation dipolaire magnétique au second ordre qui couple directement les états $|3\rangle$ et $|4\rangle$. Nous donnons l'expression de ce déplacement pour un champ magnétique oscillant à la fréquence ν et d'amplitude B_ν , dirigé selon l'axe du champ magnétique statique $\mathbf{B}_0 \in$

$$\frac{\delta \nu_0}{\nu_0} = \frac{\mu_B^2}{h^2} (g_I + g_J)^2 \times \frac{\frac{1}{2} B_\nu^2}{\nu_0^2 - \nu^2}$$

Equ. 4-10

où μ_B est la valeur du magnéton de Bohr ($\mu_B = 9,27 \times 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$), g_I et g_J sont respectivement les facteurs de Landé pour le noyau et l'électron ($g_I + g_J = 2,00$). Pour intégrer cette expression sur le champ magnétique rayonné par le corps noir, nous pouvons ignorer la contribution proche de la résonance ν_0 car la distribution spectrale d'énergie du corps noir varie peu autour de ν_0 (cf. §4.2.2) et les contributions de l'intégration en ν_0^+ et ν_0^- s'annulent au premier ordre (Ref. 36). Par ailleurs, au premier ordre, seul le champ magnétique orienté selon le champ statique B_0 induit un déplacement de fréquence sur la transition hyperfine ($F=3, m_F=0$)-(F=4, $m_F=0$) et dans cette mesure seulement un tiers du rayonnement isotrope du corps noir contribue au déplacement de fréquence (Ref. 5). L'intégration de (Equ. 4-10) sur la densité d'énergie du rayonnement du corps noir peut donc être approchée par :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \nu_0}{\nu_0} &= -\frac{\mu_B^2}{3h^2} (g_I + g_J)^2 \times \int_0^\infty \frac{\frac{1}{2} B_\nu^2}{\nu^2} d\nu \\ \frac{\delta \nu_0}{\nu_0} &= -\frac{\mu_B^2}{3h^2} (g_I + g_J)^2 \langle B^2 \rangle \times \frac{\int_0^\infty \frac{\rho(\nu)}{\nu^2} d\nu}{\int_0^\infty \rho(\nu) d\nu} = \\ \frac{\delta \nu_0}{\nu_0} &= \xi \left(\frac{T}{300} \right)^2 \\ \text{avec } \xi &= -1,304 \times 10^{-17} \text{ et } T \text{ en Kelvin} \end{aligned}$$

Equ. 4-11

Nous verrons que ce déplacement est négligeable vis-à-vis de l'incertitude sur le déplacement de fréquence engendré par le champ électrique rayonné par le corps noir à température ambiante.

4.4 Effet du champ électrique

4.4.1 Dépendance avec l'orientation du champ

Nous avons vu au §2.6.1 que la présence d'un champ électrique \mathbf{E} orienté avec un angle θ par rapport à l'axe vertical défini par le champ magnétique statique \mathbf{B}_0 , engendre un déplacement de fréquence $\delta\nu_0$ de la transition horloge selon la loi :

$$\delta\nu_0 = \left[-\frac{8}{7h} \alpha_{10} + \frac{1}{7h} \alpha_{12} \left(\frac{3\cos^2 \theta - 1}{2} \right) \right] \times E^2$$

Equ. 4-12

avec $-\frac{8}{7h} \alpha_{10} = -2,273(5) \times 10^{-10} \text{ Hz}/(\text{V/m})^2$

et $\frac{1}{7h} \alpha_{12} = -5,1(3) \times 10^{-13} \text{ Hz}/(\text{V/m})^2$.

La direction du champ électrique rayonné par le corps noir idéal est une fonction aléatoire du temps, il n'y a pas de direction privilégiée. Dans la mesure où le terme proportionnel à α_{12} a une valeur moyenne nulle sur toutes les directions de l'espace (cf. §2.5.1), le déplacement de fréquence engendré par le champ électrique rayonné par le corps noir ne dépend que du terme de polarisabilité scalaire α_{10} . Négligeons dans un premier temps la distribution spectrale du rayonnement du corps noir. Nous supposons que le module du champ électrique est constant et égal à la racine carré de sa valeur quadratique moyenne $\langle E^2 \rangle$. Dans cette approximation, le déplacement de fréquence engendré par le rayonnement du corps noir sur la transition d'horloge du césium est alors simplement donné par :

$$\delta\nu_0 = -\frac{8}{7h} \alpha_{10} \times \langle E^2 \rangle$$

Equ. 4-13

En utilisant (Equ. 4-6), nous déduisons le déplacement de fréquence en fonction de la température T :

$$\delta\nu_0 = -\frac{8}{7h} \alpha_{10} \cdot \frac{K_{st}}{\epsilon_0} \cdot T^4$$

$$\delta\nu_0 = K'' \left(\frac{T}{300} \right)^4 \text{ avec } T \text{ en Kelvin et } K'' = -1,573(3) \times 10^{-4} \text{ Hz}$$

Equ. 4-14

Cette approximation donne un bon ordre de grandeur du déplacement de fréquence engendré par le rayonnement du corps noir (cf.4.4.4).

4.4.2 Dépendance en fréquence

Pour prendre en compte la distribution de fréquence du rayonnement du corps noir, il est nécessaire d'intégrer le déplacement Stark, induit par un champ électrique alternatif à la fréquence ν sur la densité spectrale d'énergie du rayonnement du corps noir. Nous donnons dans un premier temps l'expression du déplacement Stark engendré par un champ électrique oscillant à la fréquence ν .

Sous l'effet d'un champ électrique continu d'intensité E dirigé selon $\vec{\epsilon}$, la perturbation par effet Stark de l'énergie W_a d'un niveau $|a\rangle$ ($|a\rangle=|3\rangle$ ou $|a\rangle=|4\rangle$) est donnée par :

$$\Delta W_a = e^2 E^2 \sum_{x \neq a} \frac{|\langle a | \vec{\epsilon} \cdot \vec{r} | x \rangle|^2}{W_a - W_x}$$

Equ. 4-15

Nous écrivons de façon générique $|x\rangle$, les états $|nP_J, F, m_F\rangle$ d'énergie W_x . En présence d'un champ électrique \mathbf{E}_ν oscillant à la fréquence ν , on peut montrer (Ref. 35) que le déplacement Stark s'écrit :

$$\Delta_\nu W_a = e^2 \frac{E_\nu^2}{2} \sum_{x \neq a} \frac{1}{2} \left[\frac{|\langle a | \vec{\epsilon} \cdot \vec{r} | x \rangle|^2}{W_a - W_x + h\nu} + \frac{|\langle a | \vec{\epsilon} \cdot \vec{r} | x \rangle|^2}{W_a - W_x - h\nu} \right]$$

Equ. 4-16

$$\text{où : } \vec{E}_\nu = E_\nu \cdot \cos(2\pi\nu t) \cdot \vec{\epsilon}$$

Equ. 4-17

Appliquons cette expression au calcul de l'effet Stark différentiel entre les niveaux $|3\rangle$ et $|4\rangle$, produit par un champ électrique oscillant défini selon (Equ. 4-17). A partir de (Equ. 4-16) et (Equ. 2-25), nous obtenons :

$$\Delta_\nu(W_4 - W_3) = e^2 \frac{E_\nu^2}{2} \sum_x \frac{1}{2} \left[\frac{|\langle 4 | \vec{\epsilon} \cdot \vec{r} | x \rangle|^2}{W_4 - W_x + h\nu} + \frac{|\langle 4 | \vec{\epsilon} \cdot \vec{r} | x \rangle|^2}{W_4 - W_x - h\nu} - \frac{|\langle 3 | \vec{\epsilon} \cdot \vec{r} | x \rangle|^2}{W_3 - W_x + h\nu} - \frac{|\langle 3 | \vec{\epsilon} \cdot \vec{r} | x \rangle|^2}{W_3 - W_x - h\nu} \right]$$

Equ. 4-18

Cette expression est valable pour un champ \mathbf{E} orienté selon $\vec{\epsilon}$.

4.4.3 Expression générale

Il est possible de séparer l'expression (Equ. 4-18) en deux termes : un terme scalaire et un terme tensoriel qui s'annule quand on prend sa valeur moyenne sur toutes les directions $\vec{\epsilon}$ du champ \mathbf{E} . Dans le cas du corps noir, seul le terme scalaire nous intéresse. Nous déduisons son expression à partir de (Equ. 4-18) et de (Equ. 2-42). Pour simplifier l'écriture nous utiliserons les notations des éléments de dipôle radiaux $\langle 6S_{1/2}, F | r | n' P_{J', F'} \rangle$ à la place des éléments de matrice réduits $\langle 6S_{1/2}, F || C^1 || n' P_{J', F'} \rangle$, ceux-ci sont définis par :

$$\langle 6S_{1/2}, F | r | n' P_{J', F'} \rangle = \sqrt{\frac{3}{2F+1}} \times \langle 6S_{1/2}, F || C^1 || n' P_{J', F'} \rangle$$

Equ. 4-19

Ainsi, le terme scalaire Δ_ν^{sc} du déplacement Stark différentiel à la fréquence ν vaut :

$$\Delta_\nu^{sc}(W_4 - W_3) = \frac{1}{9} e^2 \frac{E_\nu^2}{2} \sum_y \frac{1}{2} \left[\frac{|\langle 4 | r | y \rangle|^2}{W_4 - W_y + h\nu} + \frac{|\langle 4 | r | y \rangle|^2}{W_4 - W_y - h\nu} - \frac{|\langle 3 | r | y \rangle|^2}{W_3 - W_y + h\nu} - \frac{|\langle 3 | r | y \rangle|^2}{W_3 - W_y - h\nu} \right]$$

Equ. 4-20

où $|y\rangle$ désigne un état $|n' P_{J', F'}\rangle$ (nous gardons abusivement les notations $|3\rangle$ et $|4\rangle$ pour désigner $|6S_{1/2}, F=3\rangle$ et $|6S_{1/2}, F=4\rangle$). En intégrant cette expression sur la densité spectrale d'énergie du rayonnement du corps noir, nous déduisons une expression générale³ du déplacement de fréquence de la transition entre les niveaux $|3\rangle$ et $|4\rangle$ par le champ électrique de valeur quadratique moyenne $\langle E^2 \rangle$ rayonné par un corps noir à la température T :

$$\Delta \nu_0 = \frac{1}{18h} e^2 \sum_y \int_0^\infty \left[\frac{|\langle 4 | r | y \rangle|^2}{W_4 - W_y + h\nu} + \frac{|\langle 4 | r | y \rangle|^2}{W_4 - W_y - h\nu} - \frac{|\langle 3 | r | y \rangle|^2}{W_3 - W_y + h\nu} - \frac{|\langle 3 | r | y \rangle|^2}{W_3 - W_y - h\nu} \right] \frac{E_\nu^2}{2} d\nu$$

Equ. 4-21

³ Il nous paraît important de rappeler ici que cette expression admet l'hypothèse selon laquelle la polarisabilité de l'atome de césium provient uniquement de son électron périphérique.

$$\Delta v_0 = \frac{1}{18h} e^2 \langle E^2 \rangle \sum_y \frac{\int_0^\infty \left[\frac{|\langle 4|r|y \rangle|^2}{W_4 - W_y + h\nu} + \frac{|\langle 4|r|y \rangle|^2}{W_4 - W_y - h\nu} - \frac{|\langle 3|r|y \rangle|^2}{W_3 - W_y + h\nu} - \frac{|\langle 3|r|y \rangle|^2}{W_3 - W_y - h\nu} \right] \rho(\nu) d\nu}{\int_0^\infty \rho(\nu) d\nu}$$

avec

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\infty E_\nu^2 d\nu = K'' \left(\frac{T}{300} \right)^4$$

Equ. 4-22

Nous avons abusivement intégré l'expression (Equ. 4-20) sur l'ensemble du spectre du rayonnement du corps noir. Il aurait été nécessaire d'isoler les fréquences résonnantes qui annulent les dénominateurs mais pour les mêmes raisons que les termes résonnants du champ magnétique (cf. § 4.3), ces termes de déplacement lumineux quasi-résonnant peuvent être négligés dans l'intégration. L'évaluation numérique de l'expression (Equ. 4-22) est délicate. En effet, à l'heure actuelle, nous ne disposons que des valeurs théoriques des éléments de matrice du dipôle (en négligeant les effets de structure hyperfine) entre les états $|6S\rangle$ et $|n'P_J\rangle$ pour $n'=6, 7$ et 8 . Pour poursuivre le calcul, il faut d'une part évaluer l'influence des perturbations de structure hyperfine sur les éléments de matrice tabulés du dipôle $|6S\rangle$ et $|n'P_J\rangle$ pour $n'=6, 7, 8$ et il faut estimer l'effet des couplages avec tous les niveaux $|n'P_J\rangle$ pour $n'>8$. A l'aide de quelques hypothèses simplificatrices, il est néanmoins possible de déduire une expression approchée du déplacement de fréquence engendré par le rayonnement du corps noir en tenant compte de sa répartition spectrale d'énergie. Nous décrirons dans le chapitre suivant cette évaluation simplifiée.

4.4.4 Evaluation simplifiée

Dans cette partie, nous décrirons la méthode utilisée par Itano et al. (Ref. 37) pour évaluer l'expression (Equ. 4-22). Cette méthode utilise successivement trois approximations que nous discuterons au cours du calcul :

- 1) Nous effectuerons un développement limité des dénominateurs de (Equ. 4-22) sur la différence d'énergie hyperfine entre les niveaux $|3\rangle$ et $|4\rangle$.
- 2) Nous utiliserons un développement perturbatif au premier ordre de la différence d'origine hyperfine entre les fonctions d'onde des états $|3\rangle$ et $|4\rangle$.
- 3) Dans la mesure où le rayonnement du corps noir à température ambiante est centré à une fréquence plus faible que les transitions $W_{nP} - W_{6S}$, nous effectuerons un développement limité en $h\nu / (W_{nP} - W_{6S})$.
- 4) Pour intégrer le développement précédent sur la densité spectrale d'énergie du rayonnement du corps noir, nous considérerons que le déplacement Stark du niveau $6S$ est majoritairement dû aux états $6P$.

Remarquons que les deux premières hypothèses ont été utilisées par Feichtner et al. et Lee et al. (Ref. 26 et Ref. 27) pour calculer l'effet Stark induit par un champ électrique

continu sur la transition d'horloge du césium (pour retrouver ce calcul , il suffira simplement de prendre $v=0$ dans les expressions qui suivent).

Considérons la première hypothèse. Nous notons W_{6S} l'énergie moyenne des niveau 6S, et nous posons :

$$W_4 = W_{6S} + w_4$$

$$W_3 = W_{6S} + w_3$$

Equ. 4-23

Les perturbations d'énergie w_4 et w_3 qui proviennent des couplages de structure hyperfine sont petites vis à vis des différences $W_{n'P} - W_{6S}$. Nous faisons également l'hypothèse que $h\nu$ reste plus faible que $W_{n'P} - W_{6S}$. Nous avons alors :

$$\left| \frac{w_4}{W_{6S} - W_y \pm h\nu} \right| \leq 10^{-4}$$

$$\left| \frac{w_3}{W_{6S} - W_y \pm h\nu} \right| \leq 10^{-4}$$

Equ. 4-24

où W_y désigne l'énergie d'un quelconque état $|n'P_J, F\rangle$ avec $n' \geq 6$. Ainsi, un développement au premier ordre des dénominateurs de l'expression (Equ. 4-20) selon les termes ci-dessus donne une très bonne estimation du déplacement de fréquence induit par un champ électrique oscillant à la fréquence ν (Equ. 4-20).

$$\Delta(W_4 - W_3) = -\frac{1}{9}e^2 \frac{E_v^2}{2} \times$$

$$\sum_y \frac{1}{2} \left[\frac{1}{W_y - W_{6S} + h\nu} \times \left(|\langle 4|r|y \rangle|^2 - |\langle 3|r|y \rangle|^2 + \frac{w_4 \times |\langle 4|r|y \rangle|^2}{W_y - W_{6S} + h\nu} - \frac{w_3 \times |\langle 3|r|y \rangle|^2}{W_y - W_{6S} + h\nu} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{W_y - W_{6S} - h\nu} \times \left(|\langle 4|r|y \rangle|^2 - |\langle 3|r|y \rangle|^2 + \frac{w_4 \times |\langle 4|r|y \rangle|^2}{W_y - W_{6S} - h\nu} - \frac{w_3 \times |\langle 3|r|y \rangle|^2}{W_y - W_{6S} - h\nu} \right) \right]$$

Equ. 4-25

Pour simplifier le développement, nous décomposons la fonction d'onde des états $|3\rangle$ et $|4\rangle$ en la somme du niveau fondamental $|6S\rangle$ sans tenir compte de la structure hyperfine et d'une petite perturbation hyperfine (c'est la deuxième approximation) :

$$|3\rangle = |6S\rangle + |\varepsilon_3\rangle$$

$$|4\rangle = |6S\rangle + |\varepsilon_4\rangle$$

Equ. 4-26

Nous écrivons (Equ. 4-25) en négligeant les termes du second ordre sur les deux développements précédents :

$$\Delta(W_4 - W_3) = -\frac{1}{9}e^2 \frac{E_v^2}{2} \times \sum_y \frac{1}{2} \left[\frac{1}{W_y - W_{6S} + h\nu} \times \left(2\langle 6S|r|y\rangle\langle y|r|\varepsilon_4\rangle - 2\langle 6S|r|y\rangle\langle y|r|\varepsilon_3\rangle + \frac{w_4 \times |\langle 6S|r|y\rangle|^2}{W_y - W_{6S} + h\nu} - \frac{w_3 \times |\langle 6S|r|y\rangle|^2}{W_y - W_{6S} + h\nu} \right) + \frac{1}{W_y - W_{6S} - h\nu} \times \left(2\langle 6S|r|y\rangle\langle y|r|\varepsilon_4\rangle - 2\langle 6S|r|y\rangle\langle y|r|\varepsilon_3\rangle + \frac{w_4 \times |\langle 6S|r|y\rangle|^2}{W_y - W_{6S} - h\nu} - \frac{w_3 \times |\langle 6S|r|y\rangle|^2}{W_y - W_{6S} - h\nu} \right) \right]$$

Equ. 4-27

Nous pouvons séparer cette expression en deux termes :

$$\Delta(W_4 - W_3) = E_v^2 \times h(k_{h,f}(\nu) + k_{f,o}(\nu))$$

Equ. 4-28

Le terme $k_{h,f}$ provient de la différence d'énergie entre les deux niveaux hyperfins et $k_{f,o}$ est liée à la différence entre les fonctions d'onde de $|3\rangle$ et $|4\rangle$, h désigne la constante de Planck.

$$k_{f,o}(\nu) = -\frac{1}{9h}e^2 \sum_y \left[\left(\frac{1}{W_y - W_{6S} + h\nu} + \frac{1}{W_y - W_{6S} - h\nu} \right) \times (\langle 6S|r|y\rangle\langle y|r|\varepsilon_4\rangle - \langle 6S|r|y\rangle\langle y|r|\varepsilon_3\rangle) \right]$$

Equ. 4-29

$$k_{h,f}(\nu) = -\frac{1}{18h}e^2 \sum_y \left[\left(\frac{|\langle 6S|r|y\rangle|^2}{W_y - W_{6S} + h\nu} \right) \times \left(\frac{w_4 - w_3}{W_y - W_{6S} + h\nu} \right) + \left(\frac{|\langle 6S|r|y\rangle|^2}{W_y - W_{6S} - h\nu} \right) \times \left(\frac{w_4 - w_3}{W_y - W_{6S} - h\nu} \right) \right]$$

Equ. 4-30

Environ 98% de l'énergie du rayonnement d'un corps noir (à $T < 600K$) est contenue dans une bande spectrale pour laquelle $h\nu$ est plus petit que le tiers de la plus faible différence d'énergie $W_y - W_{6S}$. Dans cette mesure, il est raisonnable d'approcher l'expression ci dessus en la développant au second ordre en puissances de $h\nu/(W_y - W_{6S})$ (c'est la troisième approximation) :

$$k_{f.o}(\nu) = -\frac{2}{9h} e^2 \sum_y \left[\frac{\langle 6S|r|y\rangle\langle y|r|\epsilon_4\rangle - \langle 6S|r|y\rangle\langle y|r|\epsilon_3\rangle}{W_y - W_{6S}} \times \left(1 + \left(\frac{h\nu}{W_y - W_{6S}} \right)^2 \right) \right]$$

Equ. 4-31

et

$$k_{h.f}(\nu) = -\frac{1}{9h} e^2 \sum_y \left[\left(\frac{|\langle 6S|r|y\rangle|^2}{W_y - W_{6S}} \right) \times \left(\frac{W_4 - W_3}{W_y - W_{6S}} \right) \times \left(1 + 3 \left(\frac{h\nu}{W_y - W_{6S}} \right)^2 \right) \right]$$

Equ. 4-32

Le déplacement par effet Stark des niveaux 6S est provoquée à 95% par les couplages avec les niveaux $|6P_J, F'\rangle$ (Ref. 26). Dans cette mesure, nous effectuons la dernière approximation qui consiste à remplacer tous les termes $h\nu/(W_y - W_{6S})$ du développement limité de (Equ. 4-31) et (Equ. 4-32) par $h\nu/(W_{6P} - W_{6S})$ où W_{6P} est l'énergie du barycentre des niveaux $|6P_J, F'\rangle$. Nous obtenons alors :

$$k_{f.o}(\nu) = k_{f.o}(0) \times \left(1 + \left(\frac{h\nu}{W_{6P} - W_{6S}} \right)^2 \right)$$

Equ. 4-33

et

$$k_{h.f}(\nu) = k_{h.f}(0) \times \left(1 + 3 \left(\frac{h\nu}{W_{6P} - W_{6S}} \right)^2 \right)$$

Equ. 4-34

avec

$$k_{f.o}(0) = -\frac{2}{9h} e^2 \sum_y \left[\frac{\langle 6S|r|y\rangle\langle y|r|\epsilon_4\rangle - \langle 6S|r|y\rangle\langle y|r|\epsilon_3\rangle}{W_y - W_{6S}} \right]$$

Equ. 4-35

et

$$k_{h.f}(0) = -\frac{1}{9h} e^2 \sum_y \left[\left(\frac{|\langle 6S|r|y\rangle|^2}{W_y - W_{6S}} \right) \times \left(\frac{W_4 - W_3}{W_y - W_{6S}} \right) \right]$$

Equ. 4-36

Cette dernière approximation présente l'avantage d'aboutir à une expression qui ne dépend que des termes $k_{f.o}(0)$ et $k_{h.f}(0)$ qui définissent le terme scalaire du déplacement d'énergie différentiel engendré par un champ électrique statique sur la transition entre les niveaux $|3\rangle$ et $|4\rangle$. Ces deux termes ont été évalués indépendamment dans (Ref. 26) et (Ref. 27) pour calculer la constante $(k_{f.o}(0)+k_{h.f}(0))$ relative au déplacement de fréquence $k \times E^2$ induit sur la transition horloge par un champ électrique⁴ statique E . L'expression du déplacement d'énergie engendré par un champ électrique oscillant a la fréquence ν s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\Delta(W_4 - W_3) &= \frac{E_\nu^2}{2} \times (k_{h.f}(\nu) + k_{f.o}(\nu)) \\ \Delta(W_4 - W_3) &= \frac{E_\nu^2}{2} (k_{h.f}(0) + k_{f.o}(0)) \times \left(1 + \frac{3k_{h.f}(0) + k_{f.o}(0)}{k_{h.f}(0) + k_{f.o}(0)} \times \left(\frac{h\nu}{W_{6P} - W_{6S}} \right)^2 \right) \\ \Delta(W_4 - W_3) &= -\frac{8}{7} \alpha_{10} \frac{E_\nu^2}{2} \times \left(1 + \frac{3k_{h.f}(0) + k_{f.o}(0)}{k_{h.f}(0) + k_{f.o}(0)} \times \left(\frac{h\nu}{W_{6P} - W_{6S}} \right)^2 \right)\end{aligned}$$

Equ. 4-37

Dans cette dernière écriture, nous introduisons le terme α_{10} dont nous avons déterminé expérimentalement la valeur à deux pour mille près et nous utilisons uniquement les valeurs relatives des contributions $k_{f.o}(0)$ et $k_{h.f}(0)$. Selon (Ref. 26), nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{k_{f.o}(0)}{k_{h.f}(0) + k_{f.o}(0)} &= 0,334 \\ \frac{k_{h.f}(0)}{k_{h.f}(0) + k_{f.o}(0)} &= 0,667\end{aligned}$$

Equ. 4-38

et donc :

$$\frac{3k_{h.f}(0) + k_{f.o}(0)}{k_{h.f}(0) + k_{f.o}(0)} = 2,33$$

Equ. 4-39

l'intégration de l'expression (Equ. 4-37) sur la distribution d'énergie du rayonnement du corps noir est sans difficultés :

⁴ (Dans (Ref. 26) et (Ref. 27), le calcul de $k_{f.o}(0)$ et $k_{h.f}(0)$ était effectué en supposant que le champ électrique était parallèle à l'axe z alors que nous considérons ici le terme scalaire. Cependant compte tenu de la précision du calcul de (Ref. 26) et (Ref. 27), ceci ne constitue pas une différence significative cf. § 2.5.3).

$$\Delta(W_4 - W_3) = \langle E^2 \rangle \frac{\int_0^\infty \left[-\frac{8}{7} \alpha_{10} \times \left(1 + \frac{3k_{h,f}(0) + k_{f,o}(0)}{k_{h,f}(0) + k_{f,o}(0)} \times \left(\frac{h\nu}{W_{6P} - W_{6S}} \right)^2 \right) \right] \rho(\nu) d\nu}{\int_0^\infty \rho(\nu) d\nu}$$

$$\Delta(W_4 - W_3) = -\frac{8}{7} \alpha_{10} \langle E^2 \rangle \times \left(1 + \frac{3k_{h,f}(0) + k_{f,o}(0)}{k_{h,f}(0) + k_{f,o}(0)} \times \frac{40\pi^2}{21} \left(\frac{kT}{W_{6P} - W_{6S}} \right)^2 \right)$$

Equ. 4-40

En utilisant (Equ. 4-14), nous en déduisons une expression du déplacement de fréquence engendré par l'effet du champ électrique rayonné par le corps noir à la température T (en Kelvin).

$$\Delta\nu_0 = K'' \left(\frac{T}{300} \right)^4 \times \left(1 + \varepsilon \left(\frac{T}{300} \right)^2 \right)$$

avec $K'' = -1,573(3) \times 10^{-4} \text{ Hz}$ et $\varepsilon = 1,4 \times 10^{-2}$

Equ. 4-41

Il est délicat de donner rigoureusement une incertitude sur cette évaluation qui met en jeu de nombreuses hypothèses simplificatrices et qui utilise à la fois des données expérimentales et des estimations théoriques. L'expression (Equ. 4-41) résulte d'un développement limité au second ordre en $h\nu/(W_{np}-W_{6S})$ de l'effet Stark engendré par un champ électrique oscillant à la fréquence ν .

A l'ordre 0 de ce développement, nous retrouvons le terme $K''(T/300)^4$ de (Equ. 4-14) qui décrit la valeur quadratique moyenne du champ électrique rayonné par le corps noir. Grâce à notre mesure de l'effet Stark D.C et aux mesures de (Ref. 28 et Ref. 29), ce terme est connu avec une incertitude de deux pour mille.

Le terme d'ordre un du développement en $h\nu/(W_y-W_{6S})$ est nul. Le terme d'ordre deux peut être approché par $\varepsilon K''(T/300)^6$. L'évaluation de ce terme repose sur deux hypothèses. Nous utilisons l'approximation 4) qui consiste à remplacer les énergies W_y des états $|y\rangle = |n'P_J, F\rangle$ par W_{6P} le barycentre des énergies des niveaux $|6P_J, F\rangle$. Nous estimons que cette simplification peut conduire au plus à une erreur de l'ordre de 10% sur l'évaluation du terme du second ordre car les couplages avec les niveaux 6P contribuent à environ 95% du déplacement par effet Stark des niveaux 6S. En outre, le calcul de ε utilise les valeurs relatives théoriques des termes $k_{f,o}(0)$ et $k_{h,f}(0)$ issues du développement de l'effet Stark selon les hypothèses 1) et 2) (Ref. 26). Comme ce calcul théorique annonce une incertitude globale de 10%, il est raisonnable de penser que l'évaluation du terme $(k_{f,o}(0)+3k_{h,f}(0))/(k_{f,o}(0)+k_{h,f}(0))$ ramène une incertitude de quelques dizaines de pour-cent sur le calcul du terme ε .

Nous pouvons aisément montrer que le terme d'ordre trois du développement en $h\nu/(W_y-W_{6S})$ est nul, et nous négligeons les termes d'ordre supérieur. Compte tenu de la

distribution spectrale du corps noir, cette approximation nous paraît très raisonnable jusqu'à des température de 600 K vis-à-vis des incertitudes sur le terme d'ordre deux.

En conclusion, nous considérons que l'incertitude relative du terme $\epsilon K''(T/300)^6$ de l'expression Equ. 4-41 est de l'ordre de quelques dizaines de pour-cent. Il en résulte que si l'on travaille à température ambiante, l'expression Equ. 4-41 modélise le déplacement engendré par le champ électrique rayonné par le corps noir à quelques pour mille près. Cette évaluation théorique de l'effet du corps noir est compatible avec le développement d'étalons de fréquence atomique au césium d'une exactitude de fréquence relative de 10^{-16} . Pour une estimation au niveau de 10^{-16} , l'incertitude δT sur la connaissance de la température doit être inférieure à 0,5 Kelvin.

$$\frac{d\Delta\nu_0}{dT} = \frac{4K''}{300} \left(\frac{T}{300}\right)^3 \times \left(1 + \frac{3}{2}\epsilon \left(\frac{T}{300}\right)^2\right)$$

$$\frac{\delta\Delta\nu_0}{\nu_0} \leq 10^{-16} \text{ pour } T = 300K \text{ si } \delta T \leq 0,5K$$

$$(K'' = -1,573(3) \times 10^{-4} \text{ Hz}, \epsilon = 1,4 \times 10^{-2})$$

Equ. 4-42

4.5 Mesure directe de l'effet du corps noir

Pour vérifier expérimentalement la loi du déplacement de fréquence engendré par le rayonnement du corps noir, il suffirait de modifier la température de l'ensemble de la fontaine atomique et de mesurer le déplacement de fréquence qui en résulte. Compte tenu de la résolution en fréquence actuelle de la fontaine atomique de 2×10^{-15} , il faudrait modifier sa température de 20°C pour mesurer un déplacement de fréquence avec une incertitude de 50%. Cette expérience est difficilement réalisable car la température de la cavité micro-onde est fixée au degré près (pour qu'elle soit résonnante à 9Ghz). En revanche, il est possible de mettre en place une expérience dans laquelle les atomes de césium sont soumis à un rayonnement de corps noir à haute température pendant une partie de leur vol balistique entre les deux interactions dans la cavité micro-onde (de manière comparable à l'expérience du déplacement de fréquence par un champ électrique statique). Nous décrirons brièvement le dispositif réalisé pour cette expérience et nous donnerons l'ordre de grandeur de la résolution de mesure attendue.

4.5.1 Principe du dispositif

.a description

Le corps noir est réalisé par un tube de graphite de 30 cm de long percé sur toute sa longueur par un trou de 1,6 cm de diamètre cf. Fig. 4-2. Le tube est suspendu 10 cm au dessus de la cavité micro-onde, si bien que pour des hauteurs de lancement des atomes de césium 30 cm au dessus de la cavité, les atomes passent plus de 75% de leur temps entre les deux excitations micro-onde à l'intérieure du tube de graphite. Pour

chauffer le tube de graphite, 10 m de fil en arcap (acier inoxydable amagnétique) isolé dans une tresse de fibre de verre ont été enroulés autour du tube de graphite. Le fil réalise un aller retour sur l'enroulement de manière à minimiser le champ magnétique pendant le chauffage. Nous avons l'intention de chauffer ce tube à 500 K. Pour limiter le rayonnement thermique vers l'enceinte de cuivre et la cavité micro-onde, nous avons entouré le tube de graphite d'un double écran thermique. Le premier écran est réalisé par un tube de section carré constitué de quatre feuilles d'aluminium polis. Le tube est maintenu sur le cylindre en graphite à l'aide de huit plots de céramique (macor) de 5 mm de diamètre. Le deuxième écran est constitué par un tube en alliage d'aluminium (dural, AU4G) dont la surface intérieure a été polie. Pour limiter le rayonnement sur la cavité micro-onde, le bas du tube est fermé par un couvercle de dural poli percé d'un trou de 1,6 cm de diamètre afin de laisser passer les atomes). Outre sa fonction d'écran, le tube de dural sert à suspendre le barreau de graphite et il conduit la chaleur rayonnée par celui-ci vers le bouchon ultra vide supérieur qui peut être refroidi par une circulation d'eau. La fixation du barreau en graphite est réalisée en bas et en haut par quatre tiges de verres de 2 mm de diamètre disposées en croisillon. Cette méthode de fixation permet de limiter la conduction thermique entre le tube de graphite et le cylindre de dural. Nous donnons à titre indicatif les différents coefficients de conduction thermique et la réflectivité des matériaux utilisés dans le tableau 4-1.

matériau	conduction thermique (W/m/K)	réflexivité pour $\lambda=9,6\mu\text{m}$ (300K)	réflexivité pour $\lambda=5,8\mu\text{m}$ (500K)
graphite	90	0,5	0,3
aluminium poli		0,95	
dural AU4G	130		
macor	1,67		
verre	1,0		

tableau 4-1:Conductions thermiques et réflectivité des matériaux utilisés dans le montage.

.b Chauffage

La température du tube de graphite est mesurée à l'aide de trois capteurs de température de type PT-100 répartis le long du tube. Nous comptons ainsi estimer la température moyenne du tube de graphite à mieux que 0,5K près. Pour chauffer le barreau, nous faisons passer dans le fil chauffant un courant alternatif à 100 KHz dont l'allumage et l'extinction sont progressives afin d'éviter de magnétiser les blindages magnétiques qui entourent la zone d'interaction Ramsey. (Il est clair que pendant le fonctionnement en horloge de la fontaine, le courant de chauffage doit être interrompu). Lorsque le dispositif est sous vide, la température du barreau atteint 500 K avec une puissance de chauffage de 12W. La durée du chauffage de 300 K à 500 K est de environ

une heure. Nous avons constaté expérimentalement que le refroidissement du barreau de graphite se modélise bien par une loi exponentielle :

$$T(t) = (T_{\max} - T_{\text{final}}) \cdot e^{-t/t_0} + T_{\text{final}}$$

Equ. 4-43

T_{\max} est la température initiale du barreau de graphite et T_{final} sa température à la fin du refroidissement (c'est la température du tube de cuivre). Le temps caractéristique de refroidissement t_0 vaut 280 minutes. Quand le barreau de graphite est à 167°C, le cylindre de dural est à 34 C (ceci pour une température du tube de cuivre de 27°C).

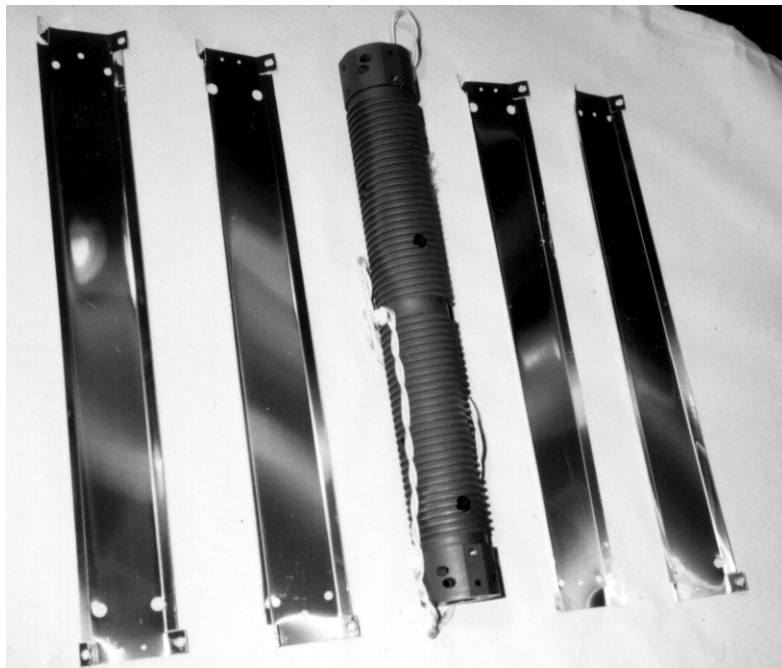
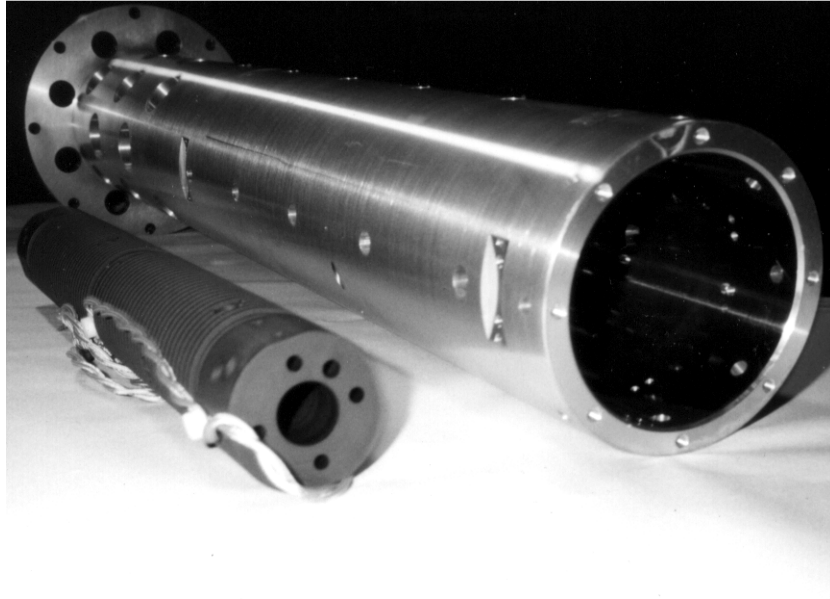


Fig. 4-2: Photographie du cylindre de graphite et des deux blindages thermiques.

4.5.2 Procédure expérimentale

Une mesure de fréquence avec une incertitude relative de $\sigma_{\epsilon} = 2 \times 10^{-15}$ nécessite 3 heures d'opération pendant lesquels nous prenons la valeur moyenne de 10 000 pointés

de la fréquence de la frange centrale de résonance, chaque pointé présente une incertitude relative de 2×10^{-13} . La comparaison de la fréquence de résonance atomique pour différentes températures de rayonnement nécessite un oscillateur de référence dont la fréquence est suffisamment stable pendant la durée des comparaisons. Dans notre cas, nous utiliserons un maser à hydrogène qui présente une stabilité relative de fréquence de l'ordre de 2×10^{-15} sur deux jours. Compte tenu de la perturbation électromagnétique produite par le courant de chauffage, il n'est pas possible de chauffer le dispositif en même temps que nous effectuons une mesure de la fréquence atomique. Ainsi la procédure de mesure du déplacement de fréquence induit par le rayonnement du corps noir suivra les étapes suivantes :

- 1) Le tube de graphite est à température ambiante T_0 , la fontaine atomique étalonne la fréquence du maser à hydrogène avec une incertitude relative de 2×10^{-15} à la valeur ν_0 de la fréquence atomique de la transition $|3\rangle |4\rangle$ à T_0 .
- 2) Pendant quelques heures, le tube de graphite est chauffé à $T_{1\max}$.
- 3) Pendant quelques minutes, nous effectuons quelques centaines de pointés de la fréquence de la transition atomique par rapport à ν_0 . Pendant cette courte durée de mesure, le barreau de graphite se refroidit jusqu'à la température $T_{1\min}$. Ainsi le déplacement de fréquence moyen $\Delta\nu$ mesuré correspond à une température moyenne T_1 du barreau de graphite que nous modélisons aisément à partir de $T_{1\max}$, $T_{1\min}$ et de l'enregistrement de la décroissance de la température pendant la mesure.
- 4) Pendant quelques minutes nous réchauffons le barreau de graphite à la température $T_{1\max}$.
- 5) Nous répétons les étapes 3) et 4) pendant quelques heures afin d'accumuler une centaine de valeurs de $\Delta\nu$, et d'accéder ainsi à $\Delta\nu$ avec une incertitude optimum.
- 6) Nous laissons refroidir le tube de graphite à T_0 et nous répétons les opérations 1) à 5) pour une nouvelle valeur de T_1 .

De manière similaire à l'expérience de la mesure du déplacement de fréquence engendré par un champ électrique statique, il sera nécessaire de déduire le déplacement de fréquence intrinsèque de la transition atomique $\Delta\nu(T_1)$ engendré par un rayonnement du corps noir en fonction du déplacement de fréquence mesuré $\Delta\nu$ et de la géométrie de l'expérience.

4.5.3 Perspectives

Au cours de mesures préliminaires, nous avons chauffé le barreau de graphite de 303 K à 473 K, ce qui a occasionné un déplacement de fréquence de -0,75(2) mHz. En menant une étude détaillée des différentes sources d'erreur systématique, nous devrions atteindre une incertitude de 3% sur le déplacement de fréquence engendré par le rayonnement du corps noir à une température de 500K (5% à 450K et 9% à 260K) et en particulier, nous devrions pouvoir mettre en évidence le terme en $K''\epsilon T^6$ qui représente 4% du déplacement de fréquence à 500 K. La première mesure expérimentale du déplacement de fréquence engendré par le rayonnement du corps noir a été réalisée dans un dispositif à jet atomique (Ref. 44). Cette mesure postulait la loi de dépendance en température de (Equ. 4-41) et permettait de retrouver le terme K'' à 10% près à partir

d'une interpolation de l'ensemble des mesures aux différentes températures. Une des difficultés expérimentales de cette mesure était lié au fait que l'interaction micro-onde était réalisée dans deux zones distinctes. La présence d'un chauffage entre les deux zones introduisait des perturbations différentielles de la phase du signal micro-onde dans les deux zones d'excitation et il fallait modéliser le déplacement de fréquence introduit par cet effet. Dans la fontaine atomique, les atomes effectuent un double passage dans la même cavité micro-onde ce qui supprime cet effet de déphasage et simplifie ainsi notablement la mesure.

Cette mesure directe du déplacement de fréquence engendré par le rayonnement du corps noir restera dans le meilleur des cas 10 fois moins précise que l'évaluation théorique du §4.4.4. Elle pourra cependant constituer une confirmation expérimentale au pour-cent de cette prédiction théorique qui donne une estimation du déplacement de fréquence du corps noir compatible avec une exactitude relative de 10^{-16} pour les étalons de fréquence au césium.

2^{eme} Partie

*Influence
des sources laser
sur
la stabilité d'une horloge
à atomes froids*

5. Introduction

Une amélioration notable des performances des horloges atomiques semble possible en développant une horloge qui utilise le refroidissement d'atomes et les conditions de microgravité. Cette idée a donné naissance au projet PHARAO qui vise à réaliser une horloge à atomes froids spatiale. L'étude qui suit entre dans le cadre de ce projet. Le chapitre 6 donne une description d'ensemble du projet PHARAO, et nous renvoyons le lecteur au rapport de synthèse (Ref. 22) pour plus de détails.

La stabilité d'une horloge atomique est étroitement liée au rapport signal sur bruit obtenu lors de la détection des atomes de césium après leur interaction avec le champ micro-onde. Dans la fontaine atomique du LPTF, la partie détection est réalisée par des diodes laser à cavité étendue de laboratoire, de très bonne qualité spectrale. Les impératifs d'encombrement et d'immunité aux vibrations imposés par une horloge embarquée sur satellite ne nous permettent pas d'utiliser les mêmes sources laser. C'est pourquoi nous avons cherché à comprendre dans quelle mesure il était possible de remplacer les sources laser de la fontaine atomique par des systèmes plus fiables mais de moins bonne qualité spectrale.

Nous décrivons brièvement l'ensemble du projet PHARAO. Nous expliquerons ensuite comment la stabilité d'un étalon de fréquence est reliée au rapport signal sur bruit du système de détection optique. Nous présenterons une étude théorique et expérimentale de l'influence des propriétés spectrales d'un laser sur le rapport signal sur bruit du système de détection dans les horloges à atomes refroidis par laser. Nous décrivons finalement l'étude, la réalisation et les essais en microgravité d'une source laser développée pour répondre aux spécifications imposées par le prototype de l'horloge spatiale PHARAO.

6. Le projet PHARAO

6.1 introduction

L'utilisation du refroidissement d'atomes neutres par laser améliore considérablement les caractéristiques des horloges atomiques. Les vitesses atomiques très basses obtenues avec ces techniques (de l'ordre du cm/s pour le césium (Ref. 12)) permettent des temps d'interrogation des atomes beaucoup plus longs que dans les horloges conventionnelles. La stabilité de fréquence, qui est inversement proportionnelle au temps d'interrogation, peut donc être améliorée. De plus, la plupart des effets systématiques qui déplacent la fréquence atomique sont réduits avec la vitesse des atomes. Ainsi, l'exactitude de fréquence est beaucoup mieux déterminée. La première horloge atomique utilisant des atomes froids, la fontaine atomique FO1 du BNM-LPTF (Ref. 16) a des propriétés inégalées à ce jour. Sa stabilité de fréquence est de 1×10^{-15} en valeur relative pour un temps d'intégration de quelques heures. Pour des temps d'intégration plus longs, nous atteignons le plancher de stabilité de fréquence du maser à hydrogène que nous utilisons comme oscillateur de référence. L'exactitude de fréquence est égale à 2×10^{-15} (Ref. 20). Dans la fontaine atomique, la gravité terrestre limite le temps d'interrogation à 700 ms. En microgravité, il sera possible d'augmenter le temps d'interaction par un facteur 10 avec un dispositif simple et compact (Ref. 23). Le programme PHARAO vise à développer une horloge spatiale à atomes refroidis par laser qui pourrait surpasser les performances des horloges terrestres.

6.2 Le prototype d'horloge spatiale

Si la fontaine atomique montre des performances exceptionnelles au laboratoire, elle demeure très loin d'un objet spatial. Son poids total dépasse deux tonnes, elle mesure deux mètres de hauteur et ne fonctionne que dans une atmosphère bien contrôlée. Nous avons donc construit une horloge beaucoup plus fiable et de dimensions réduites, capable de fonctionner en microgravité. Nous l'avons testée au cours de vols paraboliques à bord de l'avion ZERO-G du CNES. L'objectif de ces vols était de montrer le bon fonctionnement du prototype dans un environnement très éloigné des conditions qui règnent dans un laboratoire et de faire la démonstration de l'intérêt de l'apesanteur en enregistrant une courbe de résonance plus étroite que celle obtenue sur terre.

Prochainement, le prototype sera modifié pour optimiser ses performances, en présence de gravité, à un niveau comparable à celles de la fontaine atomique. Transportable, il pourra alors être utilisé pour la comparaison d'horloges distantes à un niveau qui ne peut être obtenu avec les techniques de transfert de temps actuelles.

Le dispositif expérimental de l'horloge est schématisé sur la figure (Fig. 6-1). Tout comme la fontaine atomique, le prototype fonctionne de manière pulsée. Dans une enceinte à vide où règne une vapeur de césium, environ 10^7 atomes sont capturés et

refroidis à l'intersection de six faisceaux laser (Ref. 13). La durée variable de cette phase de capture (entre 100ms et 1s) permet de varier le nombre d'atomes froids. Les atomes sont ensuite lancés par la méthode de mélasse mouvante (Ref. 20) et sont refroidis à leur température minimum en un peu plus de 3ms. Ils subissent l'interaction micro-onde dans une cavité cylindrique accordée sur le mode TE_{013} et sont ensuite détectés par une méthode optique. Tous les faisceaux lasers sont fournis par un banc optique séparé. Une chaîne de multiplication de fréquence synthétise le champ micro-onde autour de 9,2 GHz à partir d'un oscillateur à quartz BVA ultra-stable à 10 MHz. Un ordinateur génère la séquence temporelle et traite les données.

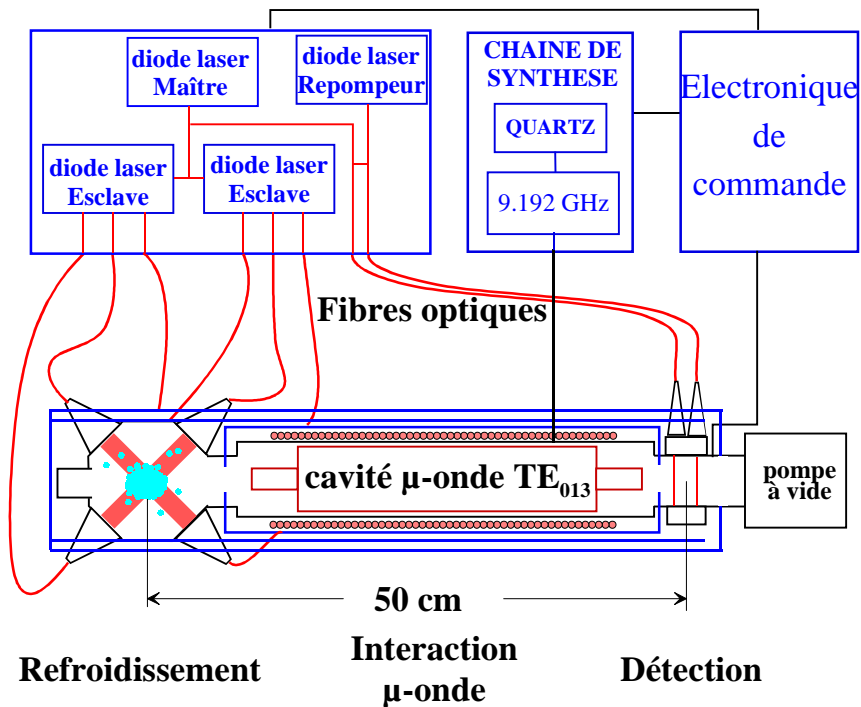


Fig. 6-1 : Schéma de principe du prototype d'horloge à atomes froids.

La différence majeure dans le fonctionnement du prototype par rapport à la fontaine atomique est que les atomes subissent une seule interaction micro-onde. Durant toute la phase d'interrogation, les atomes sont sous l'influence du champ micro-onde. Il devient donc nécessaire de bien connaître, à chaque instant et en chaque point de la trajectoire atomique, la phase et l'amplitude du champ micro-onde pour en déduire les effets de la cavité sur la fréquence de résonance atomique. Des études sur la modélisation de la distribution du champ dans une cavité cylindrique sont en cours à l'IRCOM⁵. Ces

⁵ Institut de Recherche en Communication Optiques et Micro-ondes, Université de Limoges, 123 av. Albert Thomas, 87060 Limoges.

calculs seront confrontés aux résultats expérimentaux obtenus au cours de l'évaluation du prototype.

6.2.1 Le banc optique

Le banc optique est enfermé dans un boîtier de dimension $65 \times 65 \times 15 \text{ cm}^3$ (cf. Fig. 6-2). Les dimensions du banc optique ont été considérablement réduites en comparaison avec celles de la fontaine atomique. La température du boîtier est asservie autour de 30°C . Huit fibres optiques relient le banc au tube à vide : six pour la mélasse optique, deux pour la détection. Nous utilisons des fibres optiques monomodes et polarisantes. La puissance de sortie de chaque fibre optique est asservie au moyen de lames à cristaux liquides à retard variable. La puissance laser vue par les atomes est ainsi stabilisée à mieux que 10^{-3} avec un temps de réponse d'une dizaine de millisecondes.

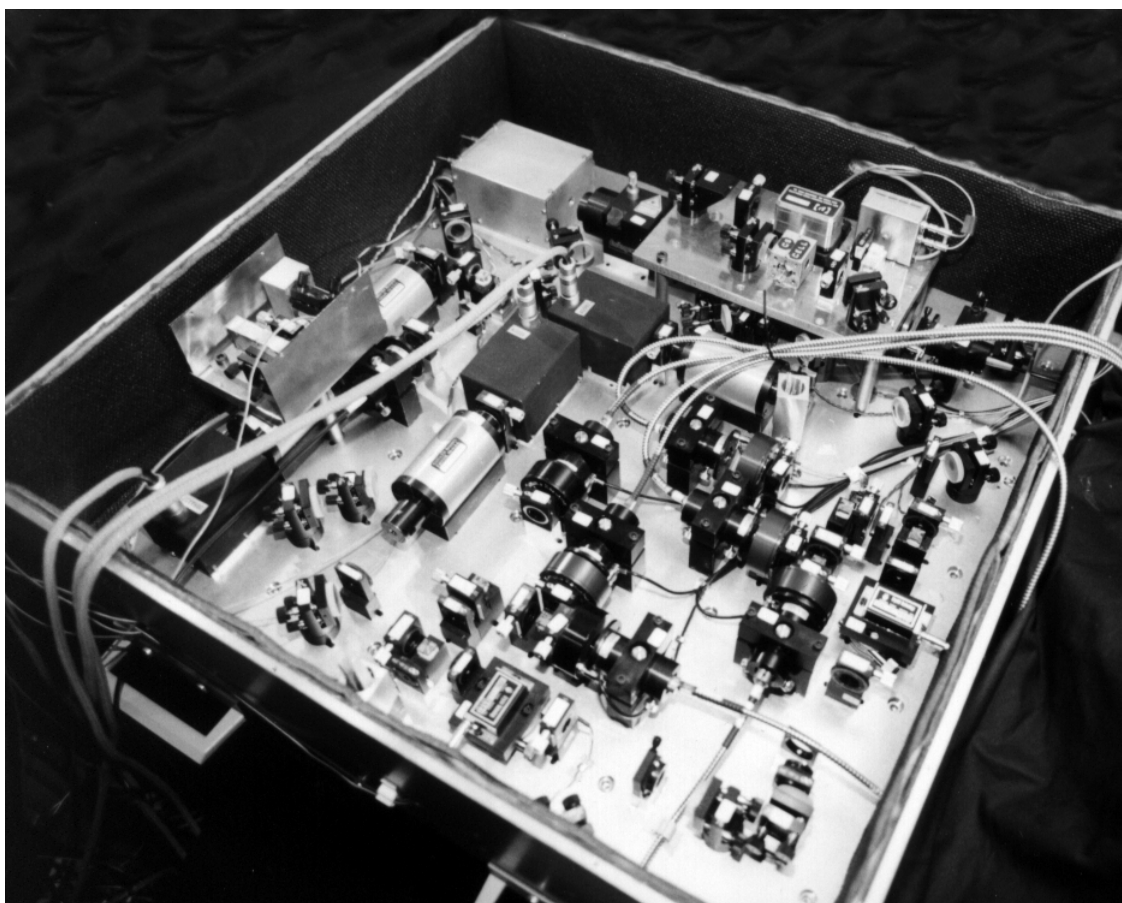


Fig. 6-2 :Banc optique

Quatre diodes lasers délivrent tous les faisceaux nécessaires à l'expérience. Un laser maître est asservi à une fréquence inférieure de 2 MHz par rapport à la transition hyperfine $6S_{1/2} F=4 \rightarrow 6P_{3/2} F'=5$ de la raie D_2 du césium. Nous avons développé deux types de diode laser maître. Le premier est une diode à cavité étendue avec réseau de

diffraction. Le deuxième est une diode laser DBR dont la largeur de raie est réduite par une réinjection optique sur une lame faiblement réfléchissante et un asservissement électronique rapide (cf. §8). Les deux lasers ont une largeur de raie dans la gamme des 100 kHz, bien plus faible que la largeur de la raie D_2 du césium ($\Gamma = 5\text{MHz}$).

Une partie du faisceau du laser maître est injectée directement dans une fibre optique qui est connectée à la zone de détection de l'enceinte à vide. La puissance de sortie peut être ajustée jusqu'à 6 mW. Après un double passage dans un modulateur acousto-optique (MAO) qui fixe le désaccord de la mélasse jusqu'à 12Γ , l'autre partie du faisceau injecte deux diodes lasers esclaves de puissance. Grâce à cette injection, les 2 diodes lasers adoptent les propriétés spectrales du laser maître. Ces diodes de puissance génèrent les faisceaux de mélasse. Leur puissance de sortie est de 150 mW. Après un double passage dans un MAO, chaque faisceau des 2 lasers esclaves est divisé en trois faisceaux qui sont injectés dans les fibres optiques de refroidissement. La puissance maximale de sortie de chacune des fibres est de 13 mW. Par différence de fréquence $\Delta\nu$ entre les deux MAO esclaves, nous communiquons aux atomes froids une vitesse de lancement V donnée par la relation :

$$V = \sqrt{3} \cdot \lambda \cdot \Delta\nu$$

Equ. 6-1

où λ est la longueur d'onde optique. V peut être ainsi ajustée entre 0,5 m/s et 8 m/s. Les MAO esclaves permettent également une extinction rapide des faisceaux lasers. Une diode laser DBR supplémentaire est asservie sur la transition $F=3 \rightarrow F'=4$ de la raie D_2 du césium. Une partie du faisceau (quelques mW) est prélevée et mélangée à quatre des faisceaux de mélasse optique pour recycler les atomes dans l'état $F=4$ au cours du processus de refroidissement. L'autre partie du faisceau (100 μW) est injectée dans la deuxième fibre optique de détection. Pour éliminer toute lumière parasite au moment de l'interaction entre les atomes et la micro-onde, des obturateurs mécaniques assurent une extinction complète de tous les faisceaux.

6.2.2 L'enceinte à vide

L'enceinte à vide est un cylindre de 1 m de hauteur et de 300 mm de diamètre (cf. Fig. 6-3). Sa température est asservie à 35 °C. Dans la zone de refroidissement règne une vapeur de césium de faible pression (10^{-6} Pa). Les six fibres de la mélasse sont connectées à des collimateurs vissés autour de la zone de refroidissement. En sortie, Le diamètre des faisceaux est de 16 mm. Les faisceaux de mélasse forment trois paires de faisceaux contre-propageants. Chaque paire est orthogonale aux autres. La polarisation de chacun des faisceaux est perpendiculaire à celle du faisceau contre propageant (Ref. 12). Les atomes sont lancés par la technique de mélasse mouvante, dans la direction [1,1,1] du trièdre formé par les faisceaux (Ref. 15). Dans cette géométrie, seules deux fréquences différentes sont nécessaires pour lancer les atomes (il faut trois fréquences dans la fontaine atomique), et aucun faisceau ne traverse la cavité ; celle-ci limiterait le diamètre du faisceau à 1 cm et réduirait le nombre d'atomes froids capturés. La zone de refroidissement est un polyèdre de titane dont les tolérances angulaires sont au niveau de 10^{-4} radian. La direction de la vitesse de lancement résultante est déterminée avec une

incertitude de 5×10^{-4} radian. La superposition des faisceaux contre-propageants est assurée à mieux que 0,1 mm. Les tolérances mécaniques de fabrication assurent une excellente reproductibilité de l'alignement optique après démontage et montage des optiques de collimation.



Fig. 6-3: Photographie de l'enceinte à vide. Nous apercevons de bas en haut : la zone de refroidissement laser, la zone d'interaction micro-onde, la zone de détection optique et la pompe à vide principale.

La pression de vapeur de césium dans les zones d'interaction et de détection est de quelques 10^{-8} Pa, pour éviter les collisions pendant l'interaction micro-onde et la fluorescence parasite émise par ces atomes chauds dans la zone de détection. La qualité du vide est assurée par une pompe ionique et des tubes en graphite qui piègent les atomes de césium.

La cavité micro-onde, en cuivre, est cylindrique, mesure 20 cm de long et est utilisée dans le mode TE_{013} . Le facteur de qualité en charge est de plusieurs milliers. Cette cavité est suffisamment longue pour que les atomes y passent la moitié de leur temps de vol. Le diamètre des trous à chaque extrémité de la cavité est relativement grand (1 cm) pour laisser le passage à un grand nombre d'atomes froids sans trop perturber la distribution d'amplitude et de phase du champ micro-onde dans la cavité. Afin d'éviter les fuites micro-onde, des guides sous-coupeure sont placés aux extrémités de la cavité. Leur longueur est de 8 cm.

Dans la zone d'interaction, un champ magnétique de quelques mG, très homogène, est fourni par un long solénoïde et un blindage en μ -métal. Deux bobines de compensation et trois autres blindages magnétiques assurent une direction constante du champ magnétique tout le long de l'enceinte à vide. L'atténuation totale d'un champ magnétique extérieur parallèle à l'axe du tube est de 10^6 au centre de la cavité. L'atténuation du champ transverse n'est pas mesurable.

Après le passage des atomes dans la cavité, la population des deux niveaux hyperfins de la transition d'horloge est mesurée indépendamment par la fluorescence induite par deux faisceaux lasers, dans la zone de détection (cf. Fig. 6-4, Fig. 6-5). Deux fibres optiques sont connectées à la zone de détection. Chaque faisceau est collimaté à un diamètre de 1 cm. Le faisceau asservi sur la transition $F=4 \rightarrow F'=5$ est divisé en deux : une partie pour détecter directement les atomes dans l'état $F=4$. L'autre partie est mélangée au faisceau asservi sur $F=3 \rightarrow F'=4$ pour détecter les atomes dans l'état $F=3$. Les deux faisceaux de détection sont parallèles et diaphragmés pour obtenir des faisceaux de section 10x5 mm séparés de quelques mm. Leur polarisation est circulaire et leur direction est perpendiculaire à la vitesse atomique. Un miroir placé de l'autre côté du tube à vide, rétro-réfléchit les deux faisceaux de façon à former des ondes stationnaires. Seule, la partie haute du premier faisceau $F=4$ n'est pas réfléchi. Ainsi les atomes dans l'état $F=4$ sont tout d'abord détectés dans l'onde stationnaire puis sont expulsés par l'onde progressive. Les atomes restants, dans le niveau $F=3$, sont pompés optiquement vers $F=4$ et détectés sur la transition $F=4 \rightarrow F'=5$. Deux condenseurs collectent 6 % de la fluorescence émise par les atomes. Les signaux de fluorescence sont numérisés et traités par l'ordinateur. La distance entre la zone de refroidissement et la zone de détection est de 40 cm.

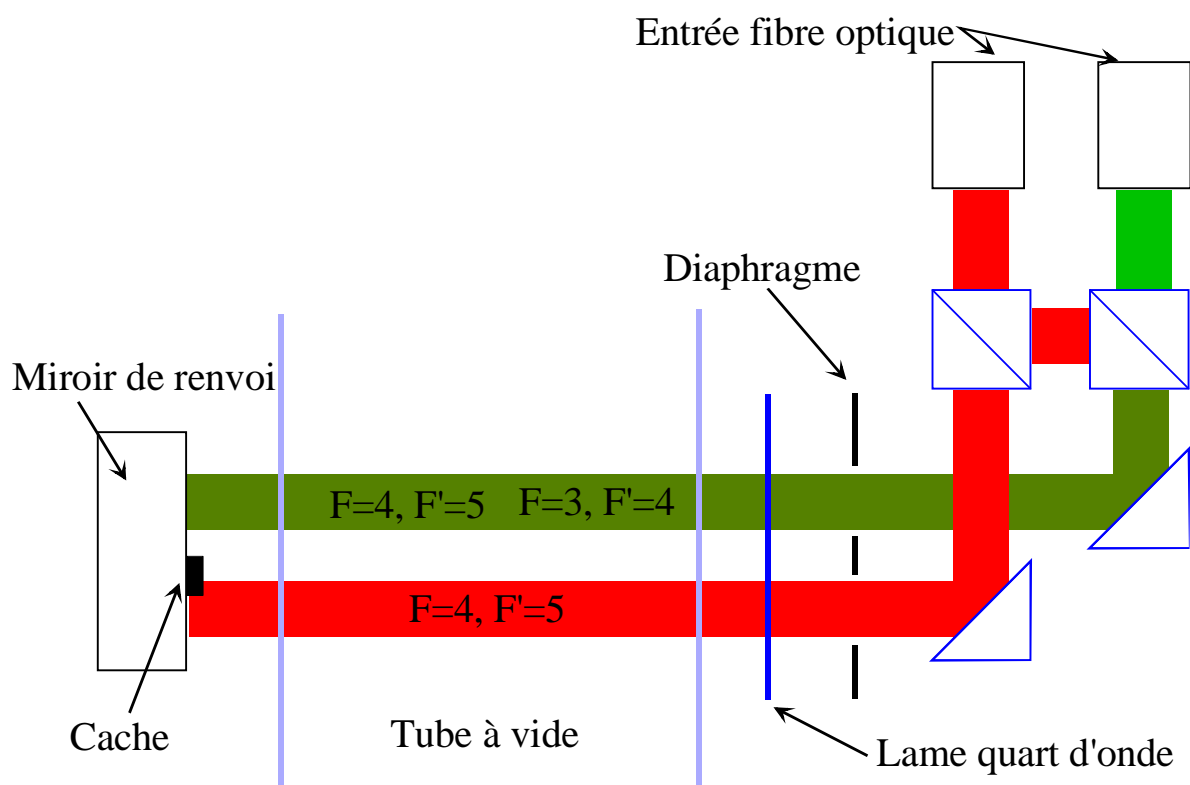


Fig. 6-4: Schéma de principe du système de détection

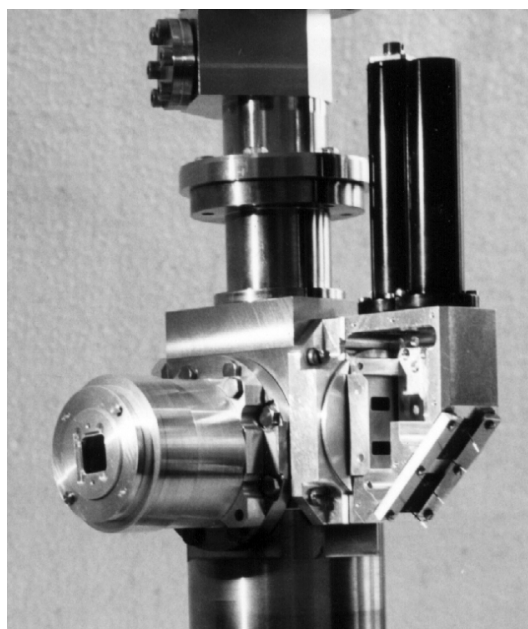


Fig. 6-5 : Photographie de la zone de détection en cours de montage. (Les prismes et les cubes polariseur ne sont pas encore en place)

6.2.3 La chaîne de synthèse de fréquence

Le signal micro-onde à 9,2 GHz est synthétisé à partir d'un quartz à 10 MHz multiplié en fréquence par 100 puis par 92. Le signal résultant à 9,2 GHz est alors mélangé avec un synthétiseur à 7,3 MHz piloté par l'ordinateur pour atteindre la fréquence de résonance atomique. L'ensemble de la chaîne est enfermé dans une boîte en μ -métal pour réduire les effets du champ magnétique sur la fréquence délivrée par la chaîne. La stabilité de fréquence de la chaîne est de $1,8 \times 10^{-13}$ sur 1 s. Pour valider ses performances, nous l'avons utilisé comme oscillateur local sur la fontaine atomique. Nous avons mesuré une stabilité de fréquence de $1,5 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$. La particularité de cette chaîne est qu'elle repose sur l'utilisation d'un quartz de faible sensibilité accélémétrique. Ce quartz a été réalisé par le LCEP⁶ et possède une sensibilité relative de fréquence de $5 \times 10^{-12}/g$ ou g est l'accélération terrestre. Ce niveau de sensibilité est nécessaire pour conserver une fréquence stable pendant les vols paraboliques.

6.3 Premiers résultats expérimentaux

Le prototype d'horloge fonctionne au laboratoire depuis septembre 1996. Le nombre d'atomes froids détecté à chaque cycle est de quelques 10^7 . La température des atomes a été évaluée à 10 μ K. Les fluctuations du nombre d'atomes demeurent inférieures à 10^{-3} en valeur relative d'un cycle à l'autre. A cause de la gravité, la vitesse de lancement optimum est de 4m/s. Cette vitesse correspond à un temps d'interaction des atomes avec le champ micro-onde de 58 ms. La figure (Fig. 6-6) montre les courbes de résonance de la transition hyperfine $F=4, mF=0 \rightarrow F=3, mF=0$ obtenues expérimentalement et théoriquement. La forme inhabituelle de la résonance provient de la cavité micro-onde utilisée dans le mode TE_{013} . Il existe un très bon accord entre les deux courbes sauf sur la deuxième bande latérale. Ce faible écart est probablement dû à la modélisation imparfaite de l'amplitude du champ micro-onde dans la cavité. La largeur de la frange centrale est de 13 Hz avec un contraste de 96 %. Le rapport signal à bruit est égal à 300 par cycle.

⁶ Laboratoire de Chronométrie Electronique et Piézoélectricité, 26 chemin de l'épitaphe, 25030 Besançon, France.

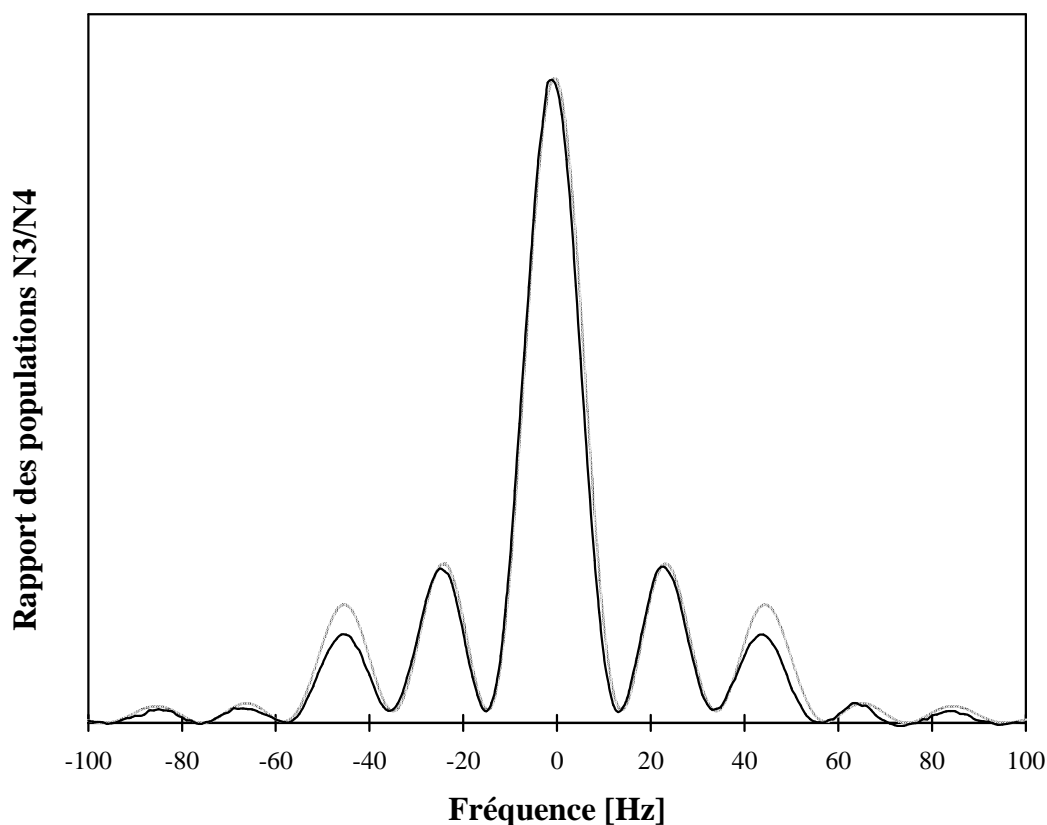


Fig. 6-6 : Courbes de résonance de la transition d'horloge. Nous avons tracé le rapport N_3/N_4 des populations des 2 niveaux hyperfins $F=3, m_F=0$ et $F=4, m_F=0$. La résonance expérimentale est tracée en noir. La vitesse de lancement des atomes est de 4m/s. Le pas du balayage en fréquence est de 1 Hz. Les données ne sont pas moyennées. La résonance obtenue par simulation numérique est tracée en gris. Les deux courbes de résonance sont volontairement décalées pour les distinguer.

A la fin du mois de Mai 1997, nous avons transporté par la route le prototype à Bordeaux pour la première campagne de vols paraboliques dans l'Airbus ZERO-G du CNES. Nous résumerons les résultats obtenus dans la partie 9.

7. Limites de la détection optique dans une horloge atomique à atomes froids.

7.1 Présentation

Le rapport signal sur bruit sur la mesure de la probabilité de transition atomique des étalons de fréquences à détection optique est étroitement lié au bruit de fréquence des sources laser utilisées. Ce phénomène a été étudié pour les horloges à jet de césium à pompage optique (Ref. 58), mais il est encore mal connu dans les horloges à atomes froids dont le fonctionnement est pulsé. Après avoir rappelé l'influence du rapport signal sur bruit de détection sur la stabilité de fréquence des horloges atomiques, nous développerons une interprétation de l'influence du bruit de fréquence des sources laser dans les étalons de fréquence à atomes refroidis par laser.

7.2 Influence du bruit de la détection sur la stabilité de l'horloge

Le signal de la boucle d'asservissement de l'horloge à atomes froids est donné par la probabilité de transition des atomes après l'interaction micro-onde. Cette probabilité est donnée par le rapport du nombre d'atomes dans l'état $F=4$ sur le nombre total d'atomes. La mesure du nombre d'atomes dans les états $F=3$ et $F=4$ s'obtient en détectant la fluorescence émise par les atomes lors de leur passage à travers un faisceau laser.

7.2.1 Généralités

Si l'on ne considère que la frange centrale de résonance de la transition horloge, la dépendance de la probabilité de transition avec la fréquence peut s'écrire :

$$p(\nu) \approx \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi(\nu - \nu_0)}{\Delta\nu_0} \right) \right].$$

Equ. 7-1

Où ν_0 est la fréquence de la transition atomique et $\Delta\nu_0$ la largeur à mi-hauteur de la frange centrale de résonance.

Pour asservir la fréquence de l'oscillateur local de l'horloge atomique sur la fréquence de la transition atomique, nous mesurons la probabilité de transition à chaque cycle d'opération de l'horloge à atomes froids. Nous déduisons l'écart de fréquence

entre l'oscillateur local et la fréquence de la transition atomique de (Equ. 7-1), ce signal d'erreur permet d'asservir la fréquence de l'oscillateur local.

Le bruit engendré par le système de détection peut détériorer la mesure de la probabilité $p(\nu)$. Si nous commettons une erreur δp sur la mesure de la probabilité de transition, nous induisons une erreur $\delta \nu$ sur le pointé de la fréquence. D'après (Equ. 7-1) :

$$\delta p(\nu) = \frac{\pi}{2\Delta\nu_0} \sin\left(\frac{\pi(\nu - \nu_0)}{\Delta\nu_0}\right) \times \delta \nu .$$

Equ. 7-2

La valeur de $\delta \nu$ est minimale quand le sinus vaut 1, c'est à dire quand la fréquence de l'oscillateur local correspond à la mi-hauteur de la frange centrale ($p=1/2$)⁷. Par la suite, nous prendrons la valeur $1/2$ pour la valeur moyenne de p et donc sur un cycle :

$$\delta \nu = \delta p \times \frac{2\Delta\nu_0}{\pi} .$$

Equ. 7-3

Cette expression permet de déduire l'écart type des fluctuations de fréquence en fonction de l'écart type des fluctuations de p :

$$\sigma_y = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{S/N_p} \times \frac{\Delta\nu_0}{\nu_0}$$

Equ. 7-4

où $\sigma_y = \sigma_\nu/\nu_0$ désigne l'écart type des fluctuations relatives de fréquence sur un cycle et S/N_p est le rapport signal sur bruit sur la mesure de la probabilité de transition à mi-hauteur ($S/N_p = p/\sigma_p$). Dans l'hypothèse d'un bruit blanc de fréquence, si nous notons τ_0 la durée d'un cycle et si nous négligeons le bruit de l'oscillateur local sur cette durée⁸, la variance d'Allan des fluctuations de fréquence normalisées vaut :

⁷ La fréquence de l'oscillateur local alterne à chaque cycle sur les deux flancs de la frange centrale de résonance et c'est la fréquence moyenne qui est délivrée.

⁸ Actuellement, la source prédominante de dégradation de la stabilité de la fontaine atomique provient du bruit de l'oscillateur local (Ref. 19). La fréquence de l'oscillateur local est asservie sur la fréquence de la transition atomique, mais la boucle d'asservissement donne seulement un signal d'erreur par cycle. Ainsi, l'oscillateur local doit être suffisamment stable pour conserver sa fréquence entre deux cycles avec une erreur inférieure à l'incertitude $\nu_0 \times \sigma_y$ donnée par Equ. 7-4. Actuellement, ce n'est pas le cas. La dégradation de la stabilité de fréquence par l'oscillateur local équivaut à une valeur 150 pour S/N_p dans Equ. 7-4, alors que le rapport signal sur bruit de détection est quatre fois meilleur.

$$\sigma_y(\tau) = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{S/N_p} \times \frac{\Delta v_0}{v_0} \times \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau}} .$$

Equ. 7-5

Cette expression met en évidence que la stabilité de fréquence d'un étalon atomique est proportionnelle au rapport signal sur bruit sur la mesure de la transition de probabilité p , et inversement proportionnelle à la largeur de la frange de résonance atomique.

7.2.2 Sources de bruits

Exprimons les différents effets qui détériorent S/N_p . Nous noterons respectivement N_3 et N_4 le nombre d'atomes dans les niveaux $F=3$ et $F=4$ de la transition horloge. Nous mesurons le rapport :

$$\frac{N_3}{N_3 + N_4}$$

Equ. 7-6

.a Bruit de projection quantique

Supposons dans un premier temps que le système de détection des atomes n'ajoute aucun bruit.

La limite fondamentale sur l'estimation de p est liée au nombre total d'atomes détectés $N_a = N_3 + N_4$. La dispersion sur la mesure de la probabilité de transition est donnée par l'écart type de la loi binomiale⁹ :

$$\left(S / N_p \right)_{proj} = \frac{p}{\sigma_p} = \frac{N_a \cdot p}{\sqrt{N_a \cdot p \cdot (1-p)}} = \sqrt{N_a} .$$

Equ. 7-7

Nous supposons toujours $p=1/2$.

Remarque : Cette source de bruit est habituellement appelée le bruit de projection quantique.

Si la détection et l'oscillateur local sont parfaits, la stabilité ultime d'un étalon de fréquence atomique est donc d'autant meilleure que le nombre total d'atomes est grand¹⁰. Dans la fontaine atomique, il y a environ 10^6 atomes détectés. Le rapport signal sur bruit sera donc au plus égal à 1000.

⁹ Nous supposons que chaque atome réalise une mesure indépendante de la probabilité de transition.

¹⁰ Mais si le nombre d'atomes est trop grand, les collisions entre atomes peuvent dégrader l'exactitude de l'horloge (Ref. 15, Ref. 17). Un compromis stabilité exactitude doit alors être réalisé.

.b Bruits de détection

Nous noterons s_3 et s_4 les signaux de détection des zones F=3 et F=4. La probabilité de transition mesurée par le système de détection vaut :

$$p_{mes} = \frac{s_4}{s_3 + s_4} .$$

Equ. 7-8

Nous allons exprimer l'influence du bruit des signaux s_3 et s_4 sur le calcul de la probabilité de transition.

Soient δs_3 et δs_4 des fluctuations sur les valeurs moyennes de s_3 et s_4 . En supposant toujours $p=1/2$, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\delta p_{mes}}{p_{mes}} &= 2 \times \delta \left(\frac{s_4}{s_3 + s_4} \right) \\ \frac{\delta p_{mes}}{p_{mes}} &= \frac{1}{2} \frac{\delta s_4}{s_4} - \frac{1}{2} \frac{\delta s_3}{s_3} . \end{aligned}$$

Equ. 7-9

Si les fluctuations des signaux des deux zones de détection sont parfaitement corrélées ($\delta s_4/s_4 = \delta s_3/s_3$) l'effet des fluctuations s'annule ($\delta p_{mes}/p_{mes}=0$). (C'est le cas si seul le nombre total d'atomes varie). Si en revanche, les fluctuations sont parfaitement décorrélées, l'écart type des fluctuations de p s'écrit :

$$\frac{\sigma_p}{p} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{\sigma_{s_4}}{s_4} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma_{s_3}}{s_3} \right)^2} .$$

Equ. 7-10

Dans l'hypothèse où les deux zones de détection sont identiques et $p=1/2$, nous exprimerons l'expression (Equ. 7-10) en fonction du rapport signal sur bruit sur la mesure du signal s d'une des deux zones de détection :

$$\left(S / N_p \right)_{mes} = \frac{p}{\sigma_p} = \sqrt{2} \frac{s}{\sigma_s}$$

Equ. 7-11

Considérons à présent les différentes sources de bruit sur le signal s d'une zone de détection.

Pour un cycle de fonctionnement, le nuage d'atomes contient N_a atomes. Au temps τ , le centre du nuage se trouve au centre de la zone de détection. Nous notons $n_A(t)$ le nombre d'atomes dans le faisceau laser à l'instant t . Nous pouvons écrire :

$$n_{\tau}(t) = N_a \times \zeta \times G(t - \tau)$$

avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(t) dt = 1$$

Equ. 7-12

G est une fonction de forme qui dépend de la forme du faisceau laser et de la vitesse moyenne des atomes, ζ est une constante de normalisation. Dans le cas de la fontaine atomique, G est représentée sur la figure (Fig. 7-1) de la page 137).

Si $p=1/2$, le signal $si_{\tau}(t)$ reçu par une photodiode de détection à l'instant t vaut :

$$si_{\tau}(t) = \frac{n_{\tau}(t)}{2} \cdot \gamma \cdot eff \cdot gain$$

Equ. 7-13

où

- γ est le nombre de photons d'émission spontanée par seconde et par atome,
- eff est l'efficacité de collection de l'optique de collimation, multipliée par le rendement quantique de la photodiode,
- $gain$ est le gain de l'amplificateur du signal de la photodiode.

Nous calculons numériquement le signal de la zone de détection :

$$s_{\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} si_{\tau}(t) dt .$$

Equ. 7-14

Cette grandeur donne accès au nombre d'atomes dans l'état $F=3$ (ou $F=4$) à une constante multiplicative près k .

$$N_{F=3} = \frac{s_{\tau}}{k}$$

avec

$$k = \gamma \cdot eff \cdot gain \cdot \zeta \cdot T_p$$

Equ. 7-15

Où T_p est le temps de passage d'un atome dans le faisceau laser. La détermination de k à mieux qu'une dizaine de pour-cent près est très difficile. Ceci est sans importance car nous calculons toujours un rapport de nombre d'atomes détectés. Il suffit de s'assurer que les deux zones de détection sont identiques.

Si nous reconsidérons la formule (Equ. 7-13), nous voyons apparaître l'origine des différentes sources de bruit de la détection optique. Le nombre de photons d'émission spontanée émis par seconde γ fluctue si la puissance et la fréquence du laser

fluctuent. La collection des photons sur la photodiode sont sujets au bruit de photons et le *gain* du système de détection photodiode +amplificateur est également bruité.

Nous utilisons une photodiode silicium et un amplificateur opérationnel OP 637 à très faible bruit de tension et de courant ($10 \text{ nV Hz}^{-0,5}$ et $2 \text{ fA Hz}^{-0,5}$ à 100 Hz). L'amplificateur opérationnel est monté en convertisseur courant tension. Le système de détection a un gain de $2,5 \times 10^7 \text{ V/W}$ pour une bande passante de $1,5 \text{ KHz}$ et une surface photosensible de 1 cm^2 . Nous avons mesuré le bruit du système de détection sur un analyseur de spectre de type FFT. Le bruit d'obscurité d'origine électronique et thermique vaut $1,8 \mu\text{V Hz}^{-0,5}$ ce qui correspond à un N.E.P de $7,2 \times 10^{-14} \text{ W Hz}^{-0,5}$. Dès que le signal dépasse $0,2 \text{ V}$, le bruit de photons dépasse le bruit d'obscurité. Avec la fontaine atomique et le prototype PHARAO, les signaux de détection valent typiquement quelques volts, nous pouvons donc négliger le bruit électronique du système de détection vis à vis du bruit de photons. Déterminons le bruit de photons.

Si nous négligeons la lumière parasite, le nombre total de photons détectés dans une zone de détection vaut :

$$n_{phot} = \frac{N_a}{2} \cdot T_p \cdot \gamma \cdot eff \ .$$

Equ. 7-16

Le bruit de photons vaut :

$$\sigma_{nphot} = \sqrt{n_{phot}} \ .$$

Equ. 7-17

Il en résulte que le rapport signal sur bruit sur *s* est limité par le bruit de photons à la valeur :

$$\frac{s}{\sigma_s} = \sqrt{\frac{N_a}{2} \cdot T_p \cdot \gamma \cdot eff}$$

Equ. 7-18

Comme ce bruit est parfaitement décorrélié entre les deux zones de détections, nous déduisons de (Equ. 7-11) la limite du rapport signal sur bruit de la mesure de la probabilité de transition *p* résultante :

$$\left(S / N_p \right)_{phot} = \sqrt{N_a \cdot T_p \cdot \gamma \cdot eff}$$

Equ. 7-19

Comparons cette valeur au bruit de projection :

$$\frac{\left(S / N_p\right)_{proj}}{\left(S / N_p\right)_{phot}} = \frac{1}{\sqrt{T_p \cdot \gamma \cdot eff}}.$$

Equ. 7-20

Dans la fontaine et dans le prototype avion du projet PHARAO, $T_p \gamma \text{ eff} \gg 1$ et le bruit de photon est négligeable vis à vis du bruit de projection. Nous porterons notre attention sur le bruit provenant du laser.

Le lecteur pourra éventuellement lire le paragraphe 8.1 avant d'aborder la suite de cette étude.

7.3 Dégradation du signal de détection par le bruit du laser

7.3.1 Théorie

Le nombre de photons émis par atome et par seconde dépend de la puissance et de la fréquence du laser. Nous négligerons les fluctuations de puissance du laser qui constituent une contribution négligeable sur les fluctuations du flux de photons émis par atome γ . Le terme γ dépend du désaccord entre avec la fréquence ν_{laser} du laser et la fréquence de résonance atomique ($\lambda=850\text{nm}$). La fréquence du laser fluctue autour d'une valeur moyenne f_0 ce qui conduit à des variations temporelles de γ proportionnelles à la pente¹¹ de la fonction $\gamma(\nu)$ en f_0 (cf. 8.1):

$$\gamma(t) = \gamma(f_0) + \Delta_f(t) \cdot \frac{d\gamma}{d\nu}(f_0)$$

Equ. 7-21

où :

$$\nu_{laser}(t) = f_0 + \Delta_f(t).$$

Equ. 7-22

Supposons que le nombre d'atomes à chaque cycle soit constant ($N_{\tau} \approx N$). D'après (Equ. 7-13, Equ. 7-14), le signal détecté s_{τ} peut s'écrire sous la forme de la somme d'une valeur moyenne s en l'absence de bruit du laser et d'un terme de bruit qui provient des fluctuations de fréquence aléatoires du laser, intégrées sur le temps de passage des atomes dans le faisceau de détection.

¹¹ Cette modélisation s'applique dans le cas où les fluctuations de fréquence du laser sont faibles vis à vis de la largeur de la courbe de résonance atomique. Dans le cas où cette hypothèse n'est pas vérifiée, notre étude aboutira quand même à une majoration du bruit généré par les fluctuations de fréquence du laser.

$$\begin{aligned}
s_\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} dN_\tau(t) \cdot \gamma(t) \cdot \text{eff} \cdot \text{gain} \cdot dt \\
s_\tau &= s + s \times \frac{1}{\gamma(f_0)} \frac{d\gamma}{d\nu}(f_0) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau) \cdot \Delta_f(t) dt \\
s_\tau &= s + s \cdot \nu \cdot (G \otimes \Delta_f)(\tau) \\
\text{avec} \\
s &= \gamma(f_0) \cdot \text{eff} \cdot \text{gain} \cdot \frac{1}{2} N_a \cdot \zeta dt . \\
\nu &= \frac{1}{\gamma(f_0)} \frac{d\gamma}{d\nu}(f_0) .
\end{aligned}$$

Equ. 7-23

Le coefficient ν désigne la pente normalisée de la résonance atomique à la fréquence moyenne du laser. L'écart normalisé de s_τ par rapport à sa valeur moyenne vaut :

$$\frac{\delta s_\tau}{s} = \nu \cdot (G \otimes \Delta_f)(\tau) .$$

Equ. 7-24

Pour déduire la perturbation provoquée sur la mesure de la probabilité de transition, il est nécessaire de considérer deux cas :

-le cas où la source laser est différente pour chaque zone de détection.

-le cas où les faisceaux des deux zones de détection proviennent du même laser.

(Dans la fontaine atomique et dans le prototype PHARAO nous sommes dans le second cas).

.a Sources laser différentes dans les deux zones de détection

Si les sources lasers sont différentes¹², les fluctuations introduites par le bruit du laser dans les deux zones de détection sont décorréliées et il suffit donc de calculer σ_s/s dans une zone pour déduire S/N_p .

L'écart type $\sigma_{s_\tau}(\Delta\tau)$ des fluctuations entre deux mesures de s séparées d'un délai $\Delta\tau$ peut s'exprimer par la variance d'Allan (cf. annexe).

$$\frac{\sigma_{s_\tau}^2(\Delta\tau)}{s^2} = \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{s_{\tau_i+\Delta\tau} - s_{\tau_i}}{s} \right)^2 \right\rangle .$$

Equ. 7-25

¹² Ce paragraphe s'applique aussi au cas où il n'y a qu'une seule source laser à condition que la différence de chemin optique entre les deux zones de détection soit grande devant sa longueur de cohérence .

La notation $\langle x \rangle$ désigne la valeur moyenne de x sur une infinité de cycles de mesure. D'après (Equ. 7-24) :

$$\frac{s_{\tau+\Delta\tau} - s_{\tau}}{s} = v \cdot \left[(G \otimes \Delta_f)(\tau + \Delta\tau) - (G \otimes \Delta_f)(\tau) \right]$$

Equ. 7-26

et donc :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{s_{\tau}}^2(\Delta\tau)}{s^2} &= \left\langle v^2 \left[(G \otimes \Delta_f)(\tau) \right]^2 \right\rangle - \left\langle v^2 (G \otimes \Delta_f)(\tau) \cdot (G \otimes \Delta_f)(\tau + \Delta\tau) \right\rangle \\ \frac{\sigma_{s_{\tau}}^2(\Delta\tau)}{s^2} &= \left\langle v^2 \left[(G \otimes \Delta_f)(\tau) \right]^2 \right\rangle + v^2 C_{G \otimes \Delta_f}(\Delta\tau). \end{aligned}$$

Equ. 7-27

Le temps qui sépare deux cycles d'interrogation est bien plus grand que la constante de temps caractéristique des fluctuations de fréquence du laser, et la fonction d'auto corrélation du bruit de détection est donc nulle au bout du temps $\Delta\tau$:

$$C_{G \otimes \Delta_f}(\Delta\tau) = 0.$$

Equ. 7-28

Ainsi l'écart type des fluctuations entre le signal de détection de deux cycles différents est indépendant du temps qui sépare les deux cycles et nous noterons $\sigma_{s_{\tau}}(\Delta\tau) = \sigma_s$.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_s^2}{s^2} &= v^2 \left\langle \left[(G \otimes \Delta_f)(\tau) \right]^2 \right\rangle \\ \frac{\sigma_s^2}{s^2} &= v^2 \cdot E_{G \otimes \Delta_f} \end{aligned}$$

Equ. 7-29

où $E_{G \otimes \Delta_f}$ désigne l'énergie moyenne du bruit de fréquence $\Delta_f(t)$ filtré par le filtre temporel $G(t)$. Cette quantité s'exprime également en fonction de la densité spectrale de puissance du bruit de fréquence, et du filtre en fréquence associé au filtre temporel $G(t)$.

$$E_{G \otimes \Delta_f} = 2 \int_0^{+\infty} S_{\Delta_f}(v) \cdot |TF(G)(v)|^2 dv.$$

Equ. 7-30

En utilisant (Equ. 7-11) nous déduisons une expression de la limite du rapport signal sur bruit sur la mesure de la probabilité de transition résultant du bruit de fréquence du laser dans le cas où les deux zones de détection sont décorréliées :

$$S/N_p = \sqrt{2} \frac{S}{\sigma_s}$$

$$S/N_p = \frac{\sqrt{2}}{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{E_{G \otimes \Delta_f}}}$$

$$S/N_p = \frac{1}{v} \left(\int_0^{+\infty} S_{\Delta_f}(v) \cdot |TF(G)(v)|^2 dv \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Equ. 7-31

Dans la fontaine atomique, la forme du temps de vol se modélise très bien par une fonction gaussienne cf. Fig. 7-1 :

$$G(t) = \frac{e^{-t^2/t_d^2}}{t_d \cdot \sqrt{\pi}}$$

Equ. 7-32

fluorescence u.a.

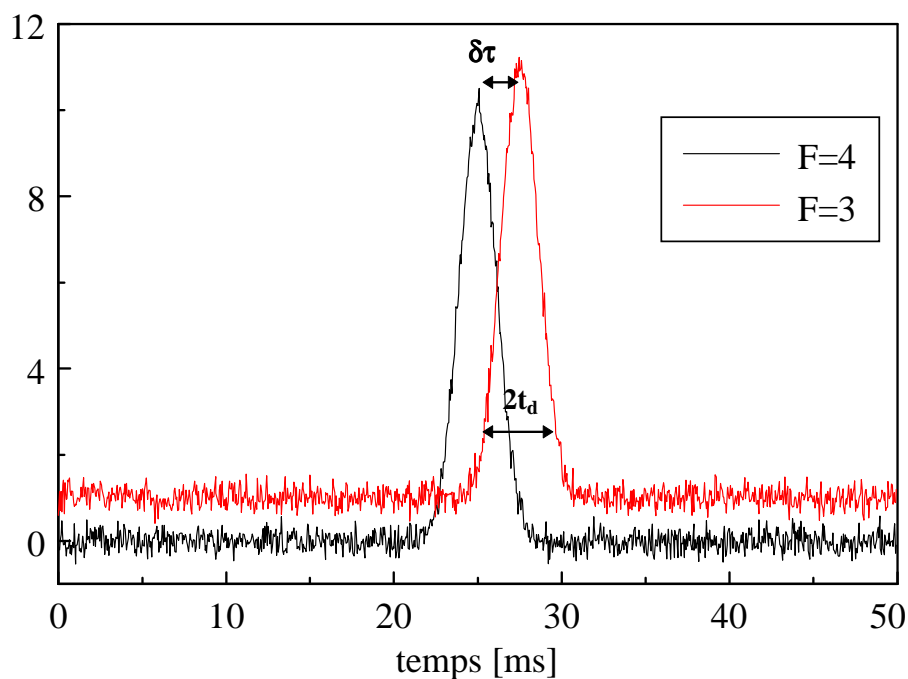


Fig. 7-1 Temps de vol dans la fontaine atomique.

où t_d définit la demi-largeur (à 1/e) du signal de détection. Dans la fontaine atomique, t_d vaut typiquement 2,5 ms, (dans le prototype PHARAO, ce temps peut être plus long car les atomes passent plus lentement dans la zone de détection). En utilisant, (Equ. 7-32), (Equ. 7-31) devient :

$$S/N_p = \frac{1}{v} \left(\int_0^{+\infty} S_{\Delta_f}(v) \cdot e^{-t_d^2 \pi^2 v^2} dv \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Equ. 7-33

Si nous supposons que la densité spectrale de puissance des fluctuations de fréquence du laser est à peu près constante dans la bande des fréquences inférieures à $f_d=1/t_d$ et égale à sa valeur à $f_d/2$, nous avons :

$$S/N_p = \pi^{1/4} \frac{\sqrt{2t_d}}{v \sqrt{S_{\Delta_f} \left(\frac{1}{2t_d} \right)}}.$$

Equ. 7-34

Si le laser de détection ne sature pas la transition atomique, le profil de résonance de la transition de détection est lorentzien avec une largeur à mi-hauteur de $\Gamma=5$ MHz :

$$\gamma(v) = \gamma_{\max} \frac{(\Gamma/2)^2}{(v - v_{at})^2 + (\Gamma/2)^2},$$

Equ. 7-35

et le paramètre v s'écrit en fonction de la fréquence f_0 du laser et de la fréquence atomique v_{at} de la transition cyclante :

$$v(f_0) = \frac{2(f_0 - v_{at})}{(f_0 - v_{at})^2 + (\Gamma/2)^2}$$

Equ. 7-36

Pour éviter de réchauffer les atomes dans la zone de détection, la fréquence du laser de détection est ajustée à la fréquence $f_0 = v_{at} - \Gamma/2$. Pour cette fréquence, le paramètre v atteint sa valeur maximum $2/\Gamma$, et la dégradation du rapport signal sur bruit de la détection par les fluctuations de fréquence du laser vaut :

$$S/N_p = \frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma \sqrt{t_d}}{\sqrt{S_{\Delta_f} \left(\frac{1}{2t_d} \right)}}.$$

Equ. 7-37

Pour rendre l'interprétation de (Equ. 7-37) plus évidente, supposons que les fluctuations de fréquence du laser soient dominées par l'émission spontanée¹³. Le rapport signal sur bruit de la détection s'exprime alors en fonction de la largeur à mi-hauteur du laser Δ_ν :

$$S/N_p = \frac{\pi^{3/4}}{\sqrt{2}} \cdot \Gamma \sqrt{\frac{t_d}{\Delta_\nu}}$$

Equ. 7-38

L'expression donne un ordre de grandeur de la réduction du bruit de fréquence du laser qui devra être réalisée par l'asservissement électronique pour atteindre le bruit de projection quantique.

.b Sources laser identique dans les deux zones de détection

Le temps $\delta\tau$ qui sépare le passage du nuage d'atomes dans les deux zones de détection F=4 et F=3 ne dure que quelques millisecondes (cf. Fig. 7-1). Dans cette mesure, il n'est pas possible de supposer que les fluctuations des signaux des deux zones de détection résultant du bruit du laser soient décorréliées.

Nous poserons :

τ est le moment où le nuage d'atome est centré dans la première zone de détection F=4.

$\tau+\delta\tau$ est le moment où le nuage d'atome est centré dans la deuxième zone de détection F=3.

Nous noterons $s_{4,\tau}$ et $s_{3,\tau}$ les signaux de détection des zones F=4 et F=3.

D'après (Equ. 7-24), nous avons :

$$\frac{\delta s_{4,\tau}}{s} = v \cdot (G \otimes \Delta_f)(\tau)$$

Equ. 7-39

$$\frac{\delta s_{3,\tau}}{s} = v \cdot (G \otimes \Delta_f)(\tau + \delta\tau)$$

Equ. 7-40

D'après (Equ. 7-9) nous déduisons les fluctuations produites par le bruit du laser sur la mesure de la probabilité de transition pour le cycle du temps τ .

¹³ Cette hypothèse est discutable pour des fréquences de l'ordre de $1/(2t_p) = 100\text{Hz}$. Le bruit de fréquence du laser est alors souvent dominé par des bruits de scintillation de fréquence (ou bruit en $1/f$). En outre, la bande passante de l'asservissement électronique de la fréquence du laser est généralement assez importante pour réduire le bruit de fréquence à 100Hz.

$$\frac{\delta p_{mes}}{p_{mes}} = \frac{1}{2} \frac{\delta s_4}{s_4} - \frac{1}{2} \frac{\delta s_3}{s_3}$$

$$\frac{\delta p_{mes}}{p_{mes}} = \frac{1}{2} v \cdot (G_2 \otimes \Delta_f)(\tau)$$

avec:

$$G_2(t) = G(t) - G(t + \delta\tau)$$

Equ. 7-41

Le calcul de σ_p/p est tout à fait similaire à celui développé de (Equ. 7-25) à (Equ. 7-31) en remplaçant G par G_2 :

$$\frac{\sigma_p^2}{p^2} = \frac{v^2}{4} \left\langle \left[(G_2 \otimes \Delta_f)(\tau) \right]^2 \right\rangle$$

$$\frac{\sigma_p^2}{p^2} = \frac{v^2}{4} \cdot E_{G_2 \otimes \Delta_f}$$

Equ. 7-42

et l'expression du rapport signal sur bruit sur p devient :

$$S/N_p = \frac{2}{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{E_{G_2 \otimes \Delta_f}}}$$

$$S/N_p = \frac{1}{v} \left(2 \int_0^{+\infty} S_{\Delta_f}(v) \cdot e^{-t_d^2 \pi^2 v^2} \cdot \sin^2(\pi \cdot v \cdot \delta\tau) \cdot dv \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Equ. 7-43

Où t_d définit la demi largeur (à 1/e) d'un signal de détection et $\delta\tau$ l'intervalle de temps qui sépare les deux signaux de détection. Dans la fontaine atomique, nous avons approximativement $t_d = 2,5\text{ms}$ et $\delta\tau = 4,5\text{ms}$, Nous représentons la forme du filtre de fréquence $|TF(G_2)|^2$ pour ces valeurs sur la figure (Fig. 7-2).

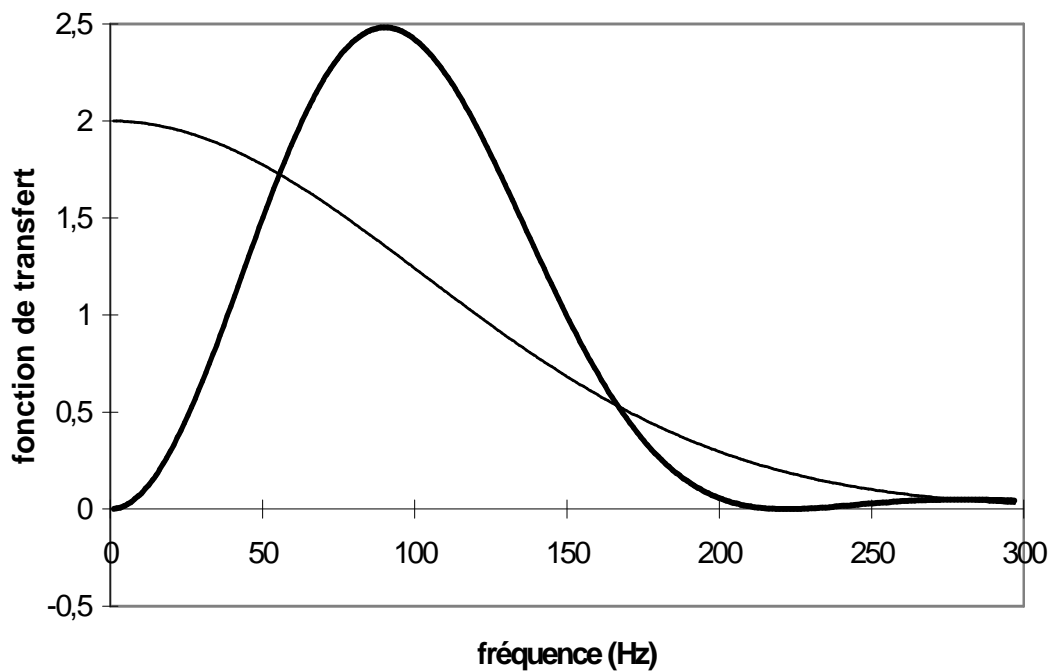


Fig. 7-2 : La courbe épaisse représente $|TF(G_2)|^2$, et à titre comparatif, nous avons également représenté $2|TF(G)|^2$ en trait fin.

Si nous supposons que la densité spectrale de puissance des fluctuations de fréquence du laser est à peu près constante dans la bande des fréquences inférieures à $f_d=1/t_d$ et égale à sa valeur à $f_d/2$, nous avons :

$$S/N_p = \frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma \sqrt{t_d}}{\sqrt{S_{\Delta_f} \left(\frac{1}{2t_d} \right)}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\left(\frac{\delta\tau}{t_d}\right)^2}}}$$

Equ. 7-44

Nous avons également supposé que la fréquence du laser était désaccordée à $\Gamma/2$ dans le rouge de la résonance. Quand le temps $\delta\tau$ qui sépare le passage du nuage d'atomes dans les deux zones tend vers l'infini, les fluctuations des deux zones de détection deviennent décorréélées et nous retrouvons l'expression (Equ. 7-37).

Dans l'hypothèse où les fluctuations de fréquence du laser sont dominées par l'émission spontanée¹⁴, le rapport signal sur bruit de la détection s'exprime en fonction de la largeur à mi-hauteur du laser Δ_ν :

¹⁴ (cf. note p134).

$$S/N_p = \frac{\pi^{3/4}}{\sqrt{2}} \Gamma \sqrt{\frac{t_d}{\Delta_\nu}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\left(\frac{\delta\tau}{t_d}\right)^2}}}$$

Equ. 7-45

Cette expression donne un ordre de grandeur de la réduction du bruit de fréquence du laser qui devra être réalisée par l'asservissement électronique pour atteindre le bruit de projection quantique.

Dans la fontaine atomique, nous avons $t_d = 2,5\text{ms}$ et $\delta\tau = 4,5\text{ms}$. Si nous utilisons des asservissements dont la bande passante est inférieure à 100 Hz la largeur de raie à mi-hauteur d'une diode laser en cavité étendue est inférieure à 50 kHz ce qui donne d'après (Equ. 7-45):

$$S/N_p \geq 800$$

Equ. 7-46

Pour une diode laser de type DBR, $\Delta\nu = 3\text{MHz}$, ce qui donne :

$$S/N_p \approx 100.$$

Equ. 7-47

Cette modélisation s'applique dans le cas où les fluctuations de fréquence du laser sont faibles vis à vis de la largeur de la courbe de résonance atomique ($\Gamma = 5\text{MHz}$). Dans le cas où cette hypothèse n'est pas vérifiée, notre étude aboutira quand même à une majoration du bruit généré par les fluctuations de fréquence du laser (cf. remarque au bas de la page 134). Compte tenu de l'ensemble des différentes sources de bruit, nous pouvons espérer atteindre un rapport signal sur bruit de détection de l'ordre de 1000 dans la fontaine atomique. Pour cette valeur, l'utilisation d'une diode DBR paraît un peu insuffisante. Nous mettrons à profit cette particularité pour mener une étude expérimentale de l'influence du bruit de fréquence du laser de détection sur le rapport signal sur bruit de la détection. En faisant varier le gain de la boucle d'asservissement de la fréquence de la diode nous pourrions faire varier $S_{\Delta f}(1/2t_d)$ et vérifier la validité de l'expression (Equ. 7-44).

7.3.2 Mesure expérimentale de l'influence du bruit du laser de détection sur la stabilité.

Nous avons utilisé une diode laser de type DBR (SDL, modèle 5712 H1) pour étudier l'influence du bruit de fréquence du laser de détection sur le rapport signal sur bruit de la détection de la fontaine atomique FO1.

La diode laser est monomode, elle délivre une centaine de milliwatt et la largeur de raie de la diode libre vaut $\delta\nu_0 = 2.5\text{MHz}$. La fréquence de la diode est asservie à partir d'un signal d'absorption saturée obtenu dans une cellule de vapeur de césium. La variation du bruit de fréquence de la diode a été obtenue en modifiant le gain de

l'asservissement de fréquence. A titre indicatif, si nous supposons que le bruit de fréquence est dominé par l'émission spontanée, d'après (Equ. 8-7), le bruit de fréquence est blanc et vaut :

$$S_{\Delta_f}(\nu) = \frac{\Delta_\nu}{\pi} = 0,8 \cdot 10^6 \text{ (Hz)}^2 / \text{Hz}$$

Equ. 7-48

Pour asservir la fréquence de la diode laser, le courant de la diode laser est modulé à $f_m = 50$ kHz, ce qui induit une modulation de la fréquence de la diode laser. En notant m l'indice de modulation, le rayonnement laser s'écrit :

$$E(t) = E_0 \cos\left[\left(f_0 + \Delta_f(t) + m \cdot \cos(2\pi \cdot f_m t)\right) \cdot t\right]$$

Equ. 7-49

Le faisceau laser passe en double passage dans une cellule de césium ce qui atténue le faisceau par absorption saturée. Quand la fréquence du laser est proche de la fréquence ν_{at} de la transition atomique qui sert à asservir la fréquence, l'intensité du faisceau après double passage dans la cellule peut s'écrire :

$$I(t) \approx E_0^2 \cdot \left[1 + (\nu_{laser} - \nu_{at})^2\right]$$

$$I(t) = E_0^2 \cdot \left[1 + \left(f_0 - \nu_{at} + \Delta_f(t) + m \cdot \cos(2\pi \cdot f_m t)\right)^2\right]$$

Equ. 7-50

Considérons le signal d'erreur s_{pho} détecté par la photodiode de gain k pour des fréquences proches de f_m :

$$s_{pho} = k \cdot 2m \cdot \left[\left(f_0 - \nu_{at}\right) + \Delta_f(t)\right] \cos(2\pi \cdot f_m t)$$

$$\text{et } S_{s_{pho}}(\nu) = \left[2 \cdot k \cdot m \cdot \left(f_0 - \nu_{at}\right)\right]^2 \cdot \delta(f_m) + (2 \cdot k \cdot m)^2 S_{\Delta_f}(\nu - f_m)$$

Equ. 7-51

La densité spectrale de puissance du signal d'erreur contient un terme proportionnel au bruit de fréquence du laser (décalé de f_m) et un terme proportionnel à la différence entre la fréquence du laser et la fréquence atomique. Ce dernier, après démodulation sert à asservir la fréquence du laser. En appliquant une tension d'offset sur ce signal d'erreur, nous asservirons la fréquence du laser à la fréquence $f_0 \cong \nu_{at} - \Gamma/2$.

Nous avons représenté sur les figures Fig. 7-3 à Fig. 7-6 les spectres du signal d'erreur avant la démodulation pour quatre valeurs différentes du gain g_a de l'asservissement. Ces spectres sont proportionnels à la densité spectrale des fluctuations

de puissance¹⁵ dans la bande de fréquence de 0 à 500 Hz (les spectres sont décalés de 46 050 Hz, ce qui correspond à la fréquence de modulation f_{mod}). Pour chaque valeur du gain de l'asservissement g_a , nous avons mesuré le niveau de bruit de fréquence relatif B_{dB} à la fréquence $f_{typ}=100$ Hz, par rapport au cas où le gain de l'asservissement est minimal ($g_a=g_0$) :

$$B_{dB}(g_a) = 10 \log \left(\frac{S_{\Delta_f, g_a}(f_{typ})}{S_{\Delta_f, g_0}(f_{typ})} \right)$$

Equ. 7-52

Et pour chacun de ces cas, nous avons mesuré le rapport signal sur bruit de la détection S/N_p (Nous avons calculé la variance à partir d'une centaine de mesures successives de p). Nous donnons dans le tableau 7-1 les valeurs B_{dB} et S/N_p en fonction du gain de l'asservissement.

gain g_a	niveau de bruit relatif à 100Hz $B_{dB}(g_a)$	rapport signal sur bruit $S/N_p(g_a)$
g_0	0	33
$5g_0$	-8dB	142
$10g_0$	-14dB	200
$50g_0$	-26dB	500

tableau 7-1 : Valeur du rapport signal sur bruit de détection en fonction de la valeur relative de la densité spectrale du bruit de fréquence à 100 Hz

D'après (Equ. 7-44) la valeur théorique du rapport signal sur bruit relatif entre différentes mesures s'écrit simplement¹⁶ :

$$\frac{S/N_p(g_a)}{S/N_p(g_0)} = \sqrt{\frac{S_{\Delta_f, g_0}(f_{typ})}{S_{\Delta_f, g_a}(f_{typ})}} = 10^{B_{dB}/20}$$

Equ. 7-53

¹⁵ Le bruit de détection du système d'absorption saturée est négligeable vis à vis du signal provenant du bruit de fréquence du laser.

¹⁶ Pour obtenir l'équation Equ. 7-44, nous avons simplifié l'expression générale (Equ. 7-43) en supposant que la densité spectrale des fluctuations de fréquence du laser était constante pour des fréquences inférieures à $1/t_d=400$ Hz. Dans le cas présent, les spectres des figures (Fig. 7-3) à (Fig. 7-6) montrent que cette hypothèse n'est pas rigoureusement valable. Il est néanmoins possible de simplifier grossièrement l'équation (Equ. 7-43) en (Equ. 7-44) en supposant que S_{Δ_f} est constante et égal à sa valeur à $f_{typ}=100$ Hz, fréquence du maximum de TF(G_2), (cf. Fig. 7-2).

Nous donnons dans le tableau 7-2 les valeurs expérimentales et théoriques de ce rapport.

gain g_a	valeur expérimentale du rapport : $\frac{S/N_p(g_a)}{S/N_p(g_0)}$	valeur calculée en fonction du bruit de fréquence à 100Hz : $10^{\text{bruit}/4}$
g_0	1	1
$5g_0$	4,3	2,5
$10g_0$	6	5
$50g_0$	15	20

tableau 7-2 : Comparaison du rapport signal sur bruit mesuré avec la valeur déduite du bruit de fréquence du laser.

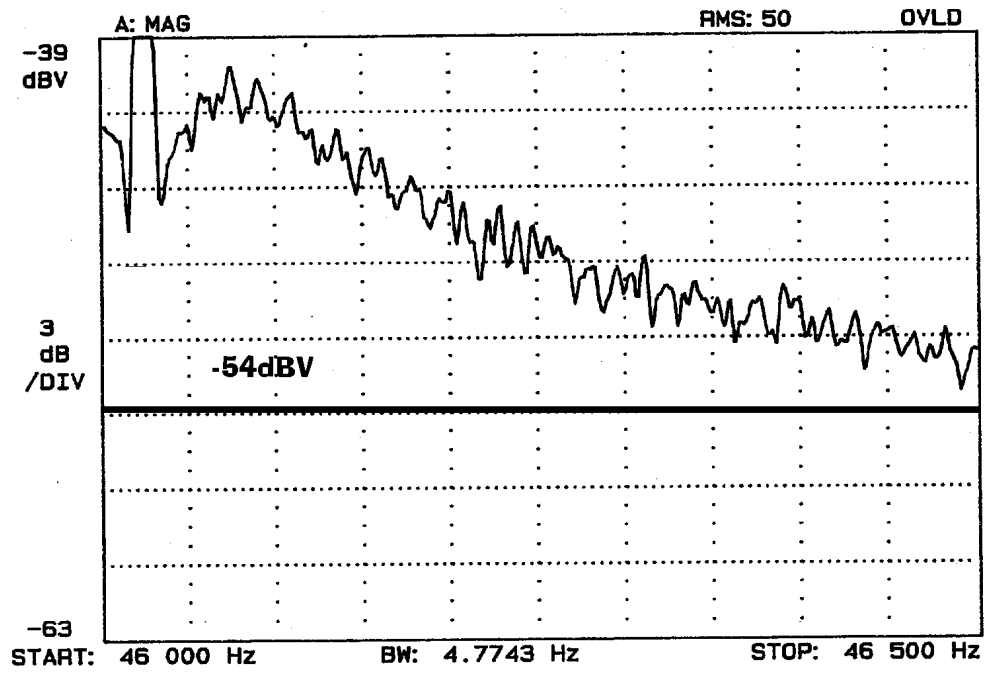


Fig. 7-3 : Spectre de bruit pour une valeur $g_a = g_0$ du gain

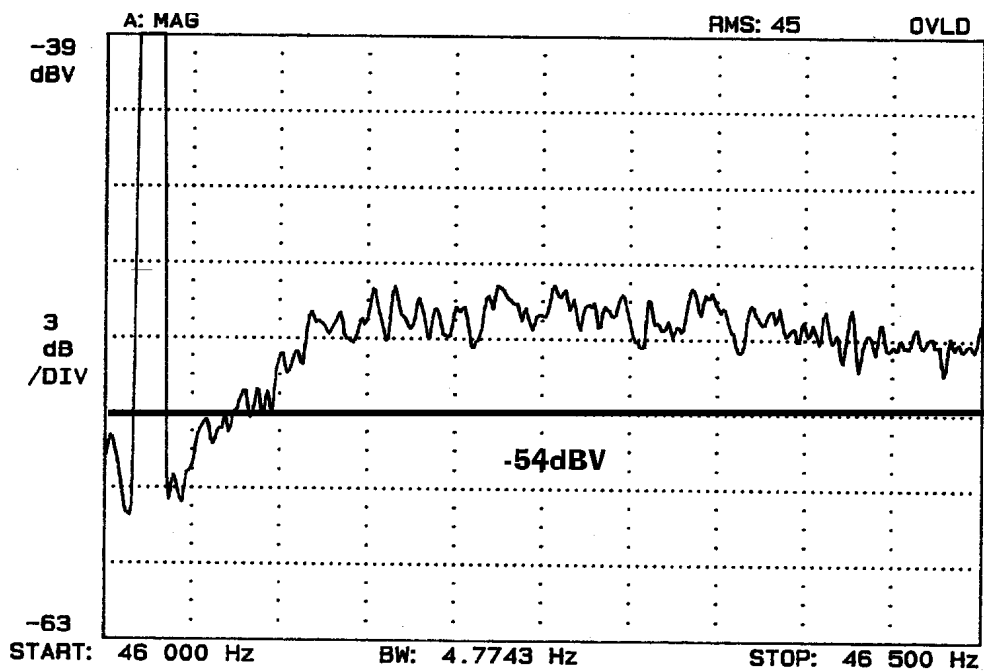


Fig. 7-4 : Spectre de bruit pour une valeur $g_a = 5 g_0$ du gain

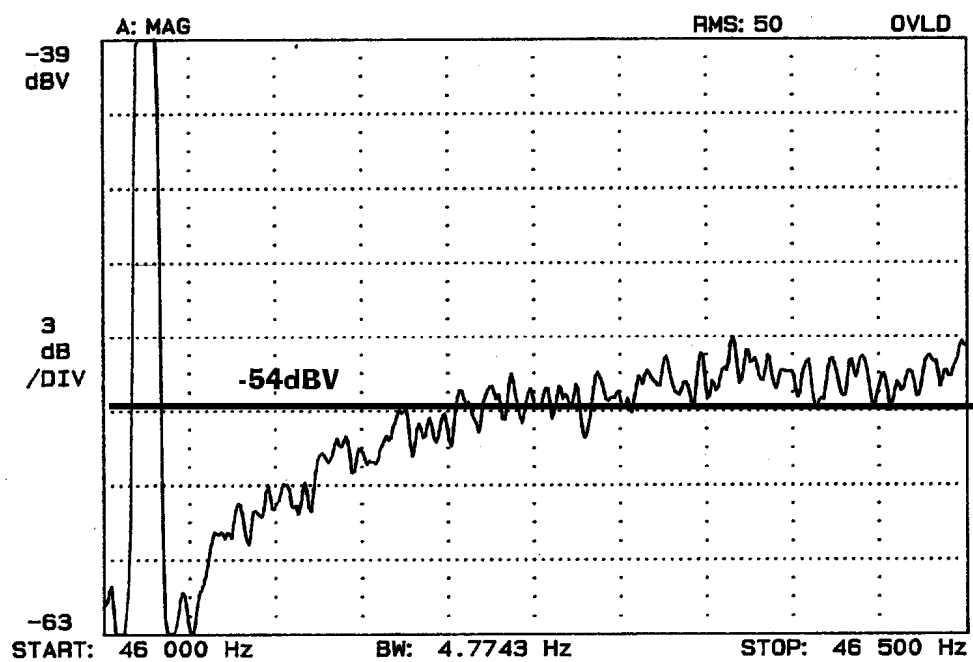


Fig. 7-5 : Spectre de bruit pour une valeur $g_a = 10 g_0$ du gain

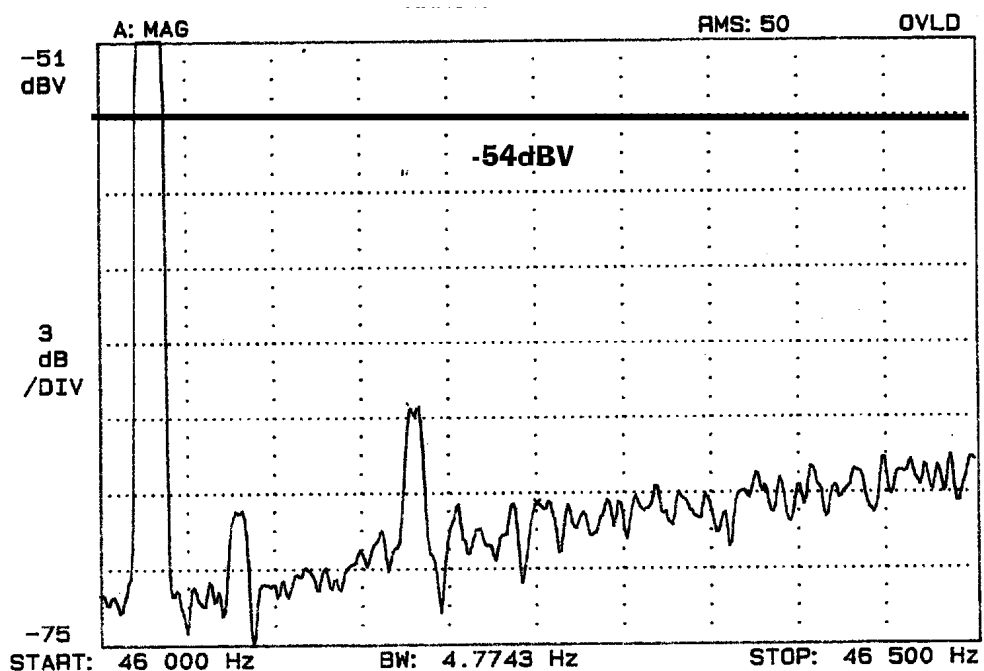


Fig. 7-6 : Spectre de bruit pour une valeur $g_a = 50 g_0$ du gain

Compte tenu des incertitudes introduites sur l'évaluation du niveau de bruit de fréquence du laser, nous constatons que les valeurs calculées du rapport signal sur bruit selon la théorie que nous avons développée au paragraphe 7.3.1 sont en bon accord avec les résultats expérimentaux.

Ces résultats laissent à penser qu'il est possible d'améliorer, autant que nous le désirons, le rapport signal sur bruit de la mesure si nous augmentons suffisamment le gain de l'asservissement. En fait, on peut montrer que la bande passante de l'asservissement dépend de la fréquence de modulation f_{mod} . Pour un asservissement du type intégrateur, le gain maximum de la boucle d'asservissement en limite d'oscillation est de l'ordre de¹⁷ :

$$gain_{max}(f) \approx \frac{1}{10} \frac{f_{mod}}{f}$$

Equ. 7-54

Le spectre de la figure (Fig. 7-6) correspond au gain maximum de l'asservissement avant oscillation. Si nous voulons augmenter le gain, il est nécessaire d'augmenter la fréquence de modulation f_{mod} . Au delà de $f_{mod} = 5\text{MHz}$, le signal d'absorption saturée de la vapeur de césium se comportera comme un filtre coupe haut se qui limite les possibilités de l'asservissement (Ref. 62).

Compte tenu de cette limite sur la réduction du bruit par l'asservissement électronique, il est intéressant de disposer d'une source laser dont le niveau de bruit de fréquence est suffisamment bas. Le paragraphe suivant traite de la réalisation d'une telle source.

¹⁷ Il est facile de comprendre que le spectre $S_\phi(v-f_m)$ décalé de f_m est détérioré, par recouvrement avec $S_\phi(v)$. Ainsi la bande passante utile du signal d'erreur est au mieux $f_m/2$.

8. Développement de sources laser à faible bruit

8.1 Le bruit des sources lasers

8.1.1 Généralités

Le champ électrique rayonné par une source laser monomode à la fréquence f_0 peut s'écrire idéalement sous la forme :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_r(x, y, z) \cdot \cos(2\pi f_0 \cdot t)$$

Equ. 8-1

où \mathbf{E}_r décrit l'amplitude, la distribution spatiale et la polarisation du rayonnement. En pratique, le rayonnement est perturbé par différents types de bruits. Nous négligerons les fluctuations d'amplitude qui constituent une source de bruit négligeable (Ref. 3, Ref. 56) et nous introduirons une fonction aléatoire $\phi(t)$ pour modéliser les fluctuations de phase:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_r \cdot \cos(2\pi f_0 \cdot t + \phi(t))$$

Equ. 8-2

que pouvons écrire sous la forme :

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_r \cdot \cos\left(2\pi \int_0^t (f_0 + \Delta_f(t)) dt\right)$$

$$\text{où } \Delta_f = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt}$$

Equ. 8-3

Cette écriture nous permet d'introduire la fonction aléatoire de bruit de fréquence Δ_f (en Hertz), de valeur moyenne nulle. Pour décrire le bruit de fréquence, nous utiliserons la densité spectrale de puissance de cette fonction $S_{\Delta_f}(\nu)$. De même, pour décrire le spectre du rayonnement, nous utiliserons la densité spectrale de puissance du rayonnement $S_E(\nu)$ (cf. annexe 3).

La limite ultime du bruit de fréquence d'un laser a été mise en évidence par Schawlow et Townes (Ref. 50). Elle est due aux photons d'émission spontanée qui

s'ajoute au rayonnement laser en créant ainsi une perturbation de phase aléatoire sur ce rayonnement laser. L'expression de la densité spectrale de fluctuations de fréquence est proportionnelle au taux d'émission spontanée de photons par seconde et par mode du rayonnement η_{sp} , divisée par le nombre moyen de photons dans le mode laser n_{phot} :

$$S_{\Delta_f}(\nu) = \frac{1+\alpha^2}{4\pi^2} \times \frac{\eta_{sp}}{n_{phot}}$$

Equ. 8-4

Où α est le facteur introduit par Henry (Ref. 51). Ce paramètre relie les fluctuations de la partie réelle n' et de la partie imaginaire n'' de l'indice de réfraction optique du milieu amplificateur¹⁸. Il permet d'expliquer comment les fluctuations du gain introduites par l'émission spontanée contribuent au bruit de fréquence dans un laser à semi-conducteur.

$$\alpha = \frac{\Delta n'}{\Delta n''}$$

Equ. 8-5

Nous pouvons également écrire :

$$S_{\Delta_f}(\nu) = \frac{1+\alpha^2}{4\pi^2} \times \frac{\mu_i h\nu_{opt}}{P_{opt}} \times \frac{1}{t_c^2}$$

Equ. 8-6

où ν_{opt} et P_{opt} désignent la fréquence et la puissance du rayonnement laser émis. Le terme μ_i vaut $t_c \times \eta_{sp}$, il peut être approximativement considéré comme constant (Ref. 3). Le terme t_c désigne le temps de vie moyen d'un photon en cavité, il est proportionnel au facteur de qualité de la cavité optique.

La connaissance de la densité spectrale des fluctuations de fréquence d'un laser donne accès au spectre de son rayonnement S_E (Ref. 52). Si la source de bruit de fréquence prédominante¹⁹ est le bruit blanc de l'émission spontanée, le spectre de rayonnement est lorentzien avec une largeur de raie à mi-hauteur de Δ_ν (Ref. 51, Ref. 3, Ref. 52) :

¹⁸ Le facteur α est quasiment nul pour tous les types de laser à l'exception des lasers à semi-conducteur pour lesquels on trouve $2 < \alpha < 9$

¹⁹ Habituellement, dans la plupart des sources laser, les perturbations thermiques et acoustiques de la cavité optique dominent nettement le spectre des fluctuations de fréquences et il est nécessaire d'isoler très soigneusement la cavité pour approcher la limite de la largeur de raie du spectre d'émission donnée par Equ. 8-7). Pour les laser à semi-conducteur, en raison de la compacité du résonateur et de son faible facteur de qualité, dans des conditions d'opérations courantes, on peut observer une largeur de raie du spectre d'émission optique de l'ordre de grandeur de l'expression Equ. 8-7).

$$\Delta_\nu = \pi \times S_{\Delta_f}(\nu)$$

Equ. 8-7

Dans la mesure où il est difficile de mesurer précisément la valeur absolue de la densité spectrale des fluctuations de fréquence d'une source laser, nous utiliserons ce critère pour caractériser la source laser développée dans le § 8.2.

8.1.2 Les lasers à semi-conducteur

Pour des raisons de compacité et de simplicité, nous utilisons des diodes laser. A 850 nm, les sources laser semi-conducteurs sont réalisées en AlGaAs. L'indice optique de ce matériau est $\mu = 3,5$. Pour les laser à cavité de type Fabry-Perot, les miroirs sont réalisés par clivage des faces du cristal et par dépôt de traitements réfléchissants (à peu près 95% sur la face arrière et 10% pour la face de sortie). La longueur optique de la cavité est de l'ordre de un millimètre.

La puissance optique délivrée par les diodes laser monomode à 850 nm atteint quelques centaines de mW, la largeur de raie à mi-hauteur mesurée est de l'ordre de 5 MHz. Ce dernier résultat est de l'ordre de grandeur de la prédiction théorique de la loi (Equ. 8-7).

L'utilisation des diodes laser à cavité de type Fabry-Perot pour la détection optique dans les horloges atomiques est problématique car le mode longitudinal d'émission laser est peu stable. En effet, la courbe de gain du milieu amplificateur est large vis à vis de l'intervalle spectral libre entre deux modes de la cavité Fabry-Perot. L'émission laser est généralement monomode mais on observe fréquemment des sauts de modes, ce qui est incompatible avec le fonctionnement continu pendant plusieurs heures d'un étalon de fréquence atomique.

Pour stabiliser la longueur d'onde d'émission, un réseau de diffraction est utilisé en réflexion à la place d'un miroir de la cavité Fabry-Perot. Deux solutions technologiques sont utilisées.

- 1) Le réseau est placé à quelques centimètres devant la face de sortie de la diode. Il rétro-réfléchit dans son ordre un le rayonnement à la longueur d'onde voulue (Ref. 54). Idéalement, la face de sortie de la diode est traitée avec un dépôt antireflet. Ainsi, la diode joue le rôle de milieu amplificateur, la cavité laser est réalisée par un miroir de la diode et par le réseau qui joue le rôle de réflecteur et de filtre en longueur d'onde.
- 2) Un réseau de Bragg peut être directement gravé sur un côté du semi conducteur. On réalise ainsi une diode laser de type DBR.

Ces deux systèmes peuvent fonctionner continûment sans sauts de modes pendant plusieurs semaines. Le système DBR présente l'avantage de ne comporter aucun réglage mécanique. La puissance optique et la longueur d'onde sont ajustées simplement en agissant sur le courant et la température de la diode. Nous avons mesuré une largeur de raie à mi-hauteur de 2,5 MHz pour les diodes DBR de 100 mW de type SDL 5712H1, ce qui est relativement important pour nos applications. Le système à réseau externe agrandit la cavité et donc la durée de vie des photons en cavité. Ceci permet de réduire la densité spectrale des fluctuations de fréquence (cf. Equ. 8-6). La largeur de raie

mesurée par battement optique avec ce type de laser est inférieure à 50 KHz, ce qui constitue un atout pour l'utilisation de ce système dans la détection des horloges atomiques. En revanche, l'utilisation d'un réseau en cavité externe rend le système relativement encombrant et plus sensible aux vibrations mécaniques. Des travaux ont été menés pour réduire la sensibilité de ce système aux vibrations (Ref. 57). Nous développerons un système hybride qui combine la stabilisation de fréquence d'une diode DBR et une cavité externe pour réduire le bruit de fréquence.

8.2 Source laser à diode DBR et contre réaction optique.

8.2.1 généralités

L'idée de principe est la suivante : nous disposons de diodes DBR qui possèdent un rayonnement monomode stable mais dont le bruit de fréquence est un peu trop important pour nos applications. Nous proposons d'ajouter une lame faiblement réfléchissante à environ un centimètre devant la face de sortie de la diode laser (Fig. 8-1). Nous constituons ainsi une cavité composée, dans laquelle il est possible d'augmenter la durée de vie des photons, et donc de réduire le bruit de fréquence produit par l'émission spontanée (Equ. 8-6)

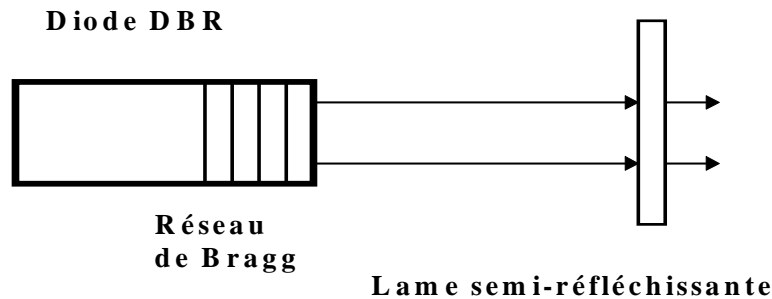


Fig. 8-1 : Schéma de principe de la contre réaction optique sur une diode DBR

Une modélisation rigoureuse du comportement de ce système est difficile et elle présente un intérêt limité dans notre cas, dans la mesure où les fabricants de diodes DBR donnent très peu d'informations sur les caractéristiques techniques de leurs produits. Nous nous contenterons de rappeler quelques résultats sur la contre réaction optique de diodes laser et nous mènerons une étude expérimentale d'un système de diode DBR avec une contre réaction optique.

8.2.2 Propriétés de la rétroaction optique.

Une synthèse de la théorie de la rétroaction optique sur les diodes laser est effectuée dans les références (Ref. 53, Ref. 55). Nous rappelons quelques résultats. Les notations utilisées sont explicitées sur la figure (Fig. 8-2). Les coefficients de réflexion en amplitude des miroirs de la diode et de la lame de contre réaction sont r_1 , r_2 et r_c . La longueur géométrique de la cavité Fabry Perot de la diode est L , la longueur optique entre le miroir de sortie de la diode et la lame de contre réaction vaut L_c .

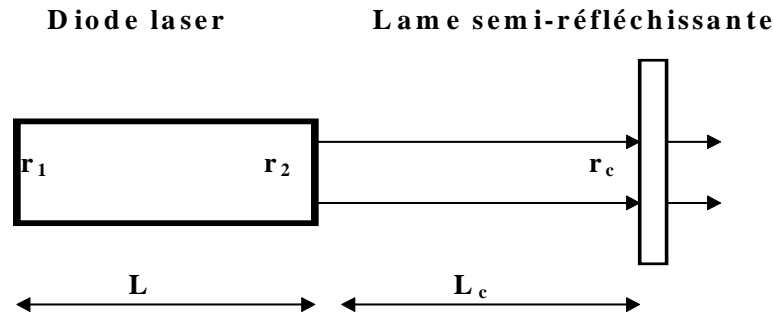


Fig. 8-2 : Contre réaction optique sur une diode laser.

En l'absence de lame de contre réaction, nous notons g_{th} le gain de seuil du laser, ν_{th} sa fréquence et t_{th} le temps de vie moyen des photons en cavité. En présence d'un couplage avec une lame semi réfléchissante, nous nommons g_c , ν_c et t_c ces nouveaux paramètres.

Le coefficient de réflexion équivalent au couple r_c , r_2 est modulé en fonction de la phase de l'onde réfléchié par la lame externe. Il en résulte que le gain de seuil du laser est modulé en fonction du produit de L_c et de la fréquence . Dans l'hypothèse d'un couplage faible $r_c < r_2$:

$$(g_c - g_{th}) = -\frac{k_c}{L} \times \cos(\phi_c)$$

$$\text{avec } k_c = \frac{r_c}{r_2} (1 - |r_2|^2)$$

$$\phi_c = \frac{2\pi\nu_c L_c}{c}$$

Equ. 8-8

Le déphasage induit par la réflexion sur le miroir équivalent au couple r_c , r_2 est également modifié. La fréquence ν_c est donc différente de ν_{th} afin de maintenir un déphasage multiple de $k \times 2\pi$ sur un aller-retour en cavité :

$$(v_c - v_{th}) = \Delta_{v_{max}} \times \sin(\phi_c + \arctan \alpha)$$

$$\Delta_{v_{max}} = \frac{k_c \times \sqrt{1 + \alpha^2}}{2\pi\mu L/c}$$

Equ. 8-9

Où α désigne le facteur de Henry et μ l'indice optique de la zone active.

La durée de vie moyenne des photons dans la cavité couplée vaut (Ref. 55) :

$$t_c = t_{th} \times (1 + C \cos(\phi_c + \arctan \alpha))$$

$$\text{avec } C = \frac{L_c}{\mu L} \times k_c \times \sqrt{1 + \alpha^2}$$

Equ. 8-10

Dans l'hypothèse où le bruit blanc de fréquence induit par l'émission spontanée est la source dominante du bruit de fréquence du laser, nous déduisons de Equ. 8-6 et Equ. 8-10 que la largeur de raie à mi-hauteur du laser contre réactionnée peut être réduite d'un facteur $(1+C)^2$, si L_c est choisie telle que $\phi_c + \arctan \alpha$ soit un multiple de 2π .

En prenant $|r_c|^2=4\%$, $L_c=20$ mm, et en supposant $\alpha=3$, $\mu L=3$ mm $|r_2|^2=15\%$, nous pouvons théoriquement espérer réduire la largeur de raie δv_0 d'un facteur 10. Nous avons obtenu des résultats expérimentaux plus modestes pour deux raisons :

- Avec la diode contre réactionnée, la densité spectrale des fluctuations de fréquence n'est plus dominée par le bruit blanc mais par un bruit basse fréquence.
- Pour nos valeurs de r_2 et de r_c , l'approximation du couplage faible $r_c \gg r_2$ est discutable et nous ne sommes plus tout à fait dans le domaine de validité de la formule (Equ. 8-10).

8.2.3 Réalisation pratique.

Nous utilisons une diode DBR fabriquée par la société SDL(modèle 5712 H1). Elle est monomode et délivre une centaine de milliwatt. La taille de sortie de la zone active est de à peu près 1 μ m selon l'axe vertical et de 3 μ m selon l'axe horizontal. La largeur de raie de la diode libre vaut $\delta v_0=2,5$ Mhz.

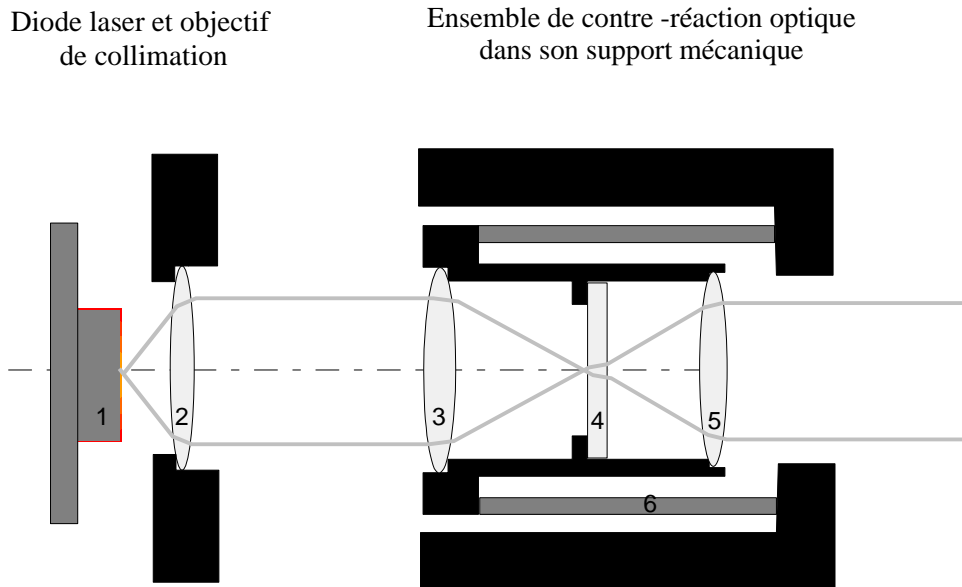


Fig. 8-3: Diode laser avec contre réaction optique.
*(1 : diode laser ; 2, 3, 5 : lentilles asphériques, 4 :
 lame de contre réaction ; 6 : cale piezo-electrique
 cylindrique)*

Le faisceau de la diode est focalisé par une lentille (2) de distance focale 2 mm et d'ouverture numérique 0,5 (cf. Fig. 8-3) ce qui donne un faisceau approximativement elliptique de diamètres $2W_z = 0,6$ mm et $2W_y = 2$ mm . La lame de contre réaction (4) est traitée antireflet sur une face, l'autre face a un coefficient de réflexion $R=4\%$. Si la lame avait été placée directement derrière la lentille de collimation (2), un désalignement angulaire de 0,3 mrad autour de l'axe z aurait modifié de 50% la puissance réinjectée dans la diode laser. Pour réduire la tolérance sur ce réglage, la contre réaction optique est réalisée par un système afocal (lentilles 3 et 5) qui utilise le principe de l'oeil de chat. Les optiques de focalisation (3,5) sont réalisées avec des lentilles asphériques commercialement montées sur des supports vissables. Compte tenu des tolérances du fabricant, le positionnement de ces lentilles selon les trois axes peut être obtenu mécaniquement sans réglage manuel à environ 10 μ m près. Cette solution a été préférée à des lentilles à gradient d'indice difficiles à ajuster et à des objectifs à plusieurs lentilles trop encombrants. (Sur le premier prototype, nous avons néanmoins testé une lentille à gradient d'indice pour la lentille de collimation (2)).

L'ensemble du système de réinjection est monté sur une cale piézo-électrique. Un asservissement électronique de la tension de la cale piézo-électrique maintient

constant (à quelques nm près) la longueur optique de la cavité externe de rétroaction ($L_{\text{ext}} = 21\text{mm}$). La dynamique de cet asservissement de $\pm 0.3 \mu\text{m}$ permet de compenser les variations de L_{ext} , dus aux dilatations thermiques et aux éventuelles déformations mécaniques, si elles restent inférieures à cette dynamique. Le coefficient d'élongation thermique de la cavité externe vaut $d(L_{\text{ext}})/dT = 0.2 \mu\text{m}/^\circ\text{C}$. Nous avons asservi la température de la boîte qui contient le système afin que les dilatations puissent être corrigées par la cale piezo-électrique pour des fluctuations de la température extérieure d'une dizaine de degrés. La difficulté majeure consiste à assurer une bonne stabilité mécanique de la distance L_{ext} entre la lame de contre-réaction optique et la diode laser.

Nous avons développé un premier prototype (Fig. 8-4).

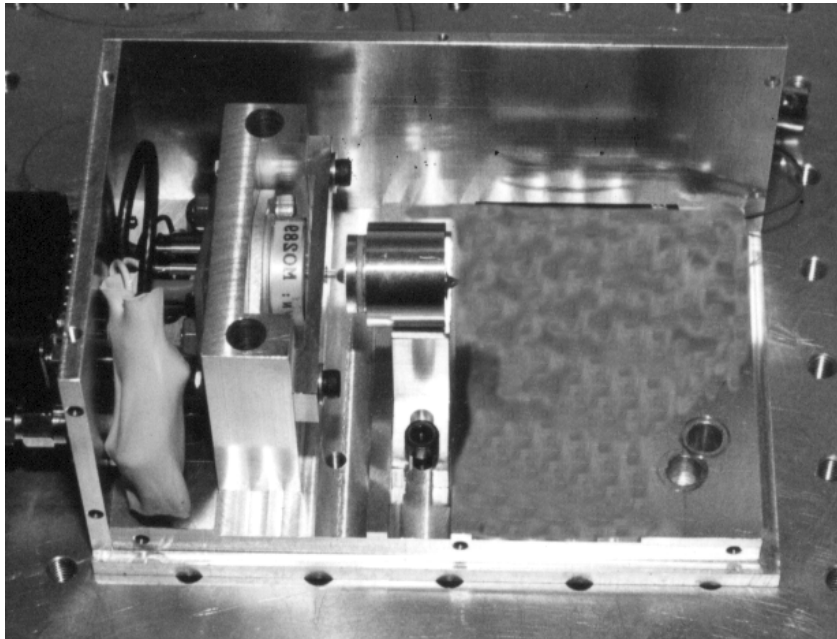


Fig. 8-4 : Premier prototype de diode DBR à contre réaction optique. De gauche à droite, on aperçoit la diode, l'objectif de colimation (lentille à gradient d'indice) et le système de contre réaction optique.

Il comprend deux sous-ensembles :

- La diode laser et une lentille à gradient d'indice collée sur un support devant la diode.

- Le système de contre réaction optique collé dans un support en forme de V.

Les deux sous ensembles sont vissés sur une plaque en duraluminium (AU4G) de 8mm d'épaisseur, elle même vissée sur une table optique commerciale. Lorsque nous retournions la table optique (pour simuler des changements de gravité), les déformations mécaniques du système provoquaient des variations de L_{ext} trop importantes pour être

corrigées par la cale piezo-electrique. Ces variations étaient visiblement induites par la torsion de la plaque de duraluminium pendant le retournement

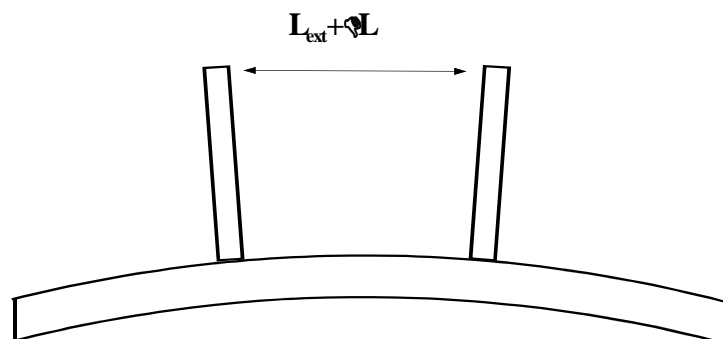


Fig. 8-5 : Perturbation de la longueur de la cavité externe produit par la torsion du support.

Pour remédier à ce problème, nous avons conçu un système monobloc (Fig. 8-6). Sur un unique support en forme de V, nous vissons la diode laser, nous collons l'objectif de collimation (2) et le système de contre réaction optique (3, 4, 5, 6). Le support en forme de V en cuivre est vissé sur une plaque de duraluminium avec une faible surface de contact de manière à réduire les contraintes que pourraient induire la torsion de la plaque. Avec ce montage, les perturbations de L_{ext} liées aux déformations mécaniques sont devenues négligeables vis à vis de la dynamique de la cale piezo-electrique.

Compte tenu des tolérances mécaniques sur les différents éléments du montage, le positionnement de la lentille de focalisation (2) est le seul réglage à réaliser pendant l'assemblage.

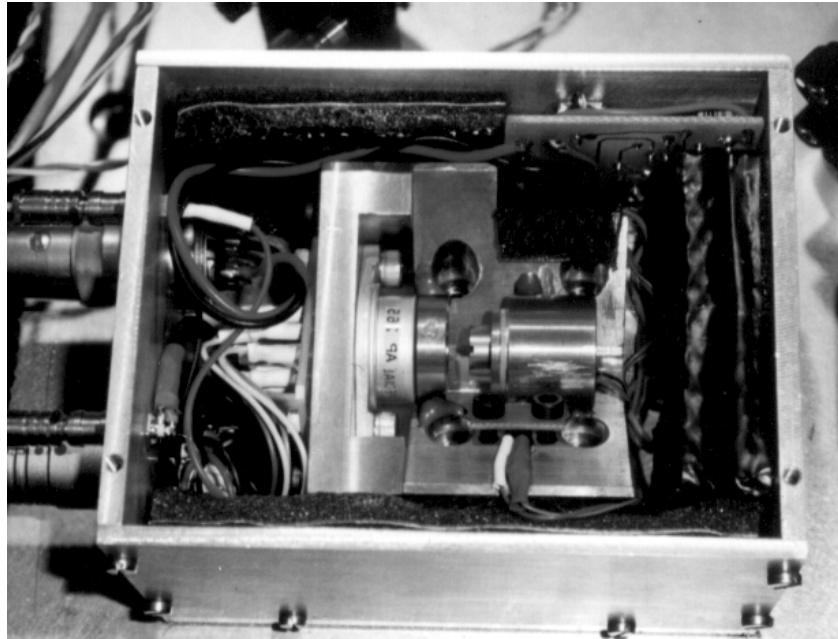


Fig. 8-6 : Second prototype. (10x15 cm)

8.2.4 Asservissement électronique.

La diode laser est asservie sur une raie d'absorption saturée d'une vapeur de césium (Ref. 59 , Ref. 60). Une partie du faisceau de la diode est modulée en phase à 5 Mhz dans un cristal électro-optique et traverse une cellule de vapeur de césium (cf.Fig. 8-7).

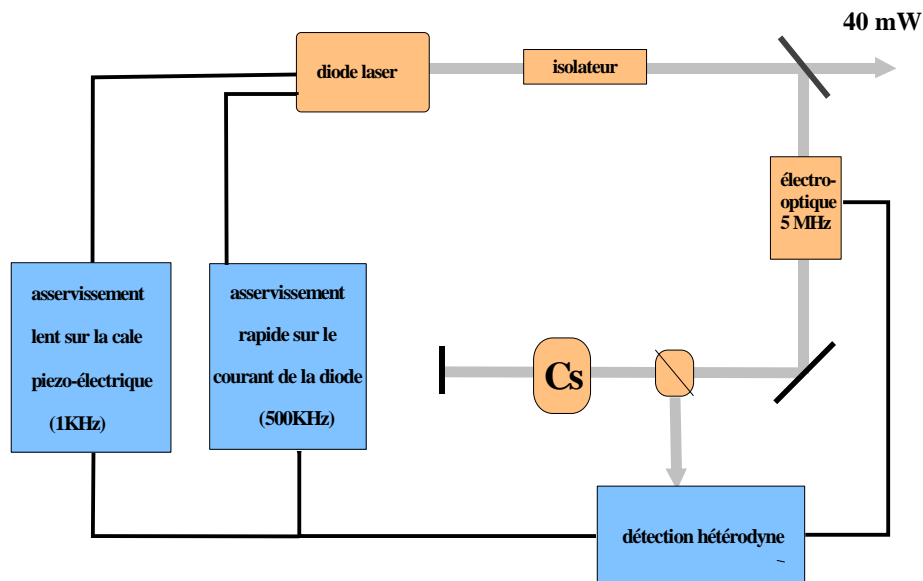


Fig. 8-7 : Schéma de l'asservissement de la diode laser sur la transition atomique $6P_{1/2} F=4$, $6P_{3/2} F=4$ du césium.

Nous réalisons ainsi une spectroscopie hétérodyne par modulation de phase. Après démodulation (cf. schéma du circuit Fig. 8-8), nous obtenons un signal d'erreur qui permet d'asservir la diode sur la transition atomique. Après traitement, (cf. Fig. 8-9) le signal d'erreur est envoyé sur la cale piézo-électrique de la rétroaction optique et sur le courant de la diode. Nous réalisons une correction D.C. sur la cale piézo-électrique avec une bande passante de 100 Hz afin de compenser les variations lentes de la longueur de la cavité de rétroaction optique. Un asservissement A.C. sur le courant de la diode permet d'atténuer les perturbations acoustiques et réduit le bruit de fréquence du laser dans une bande passante de 200 KHz.

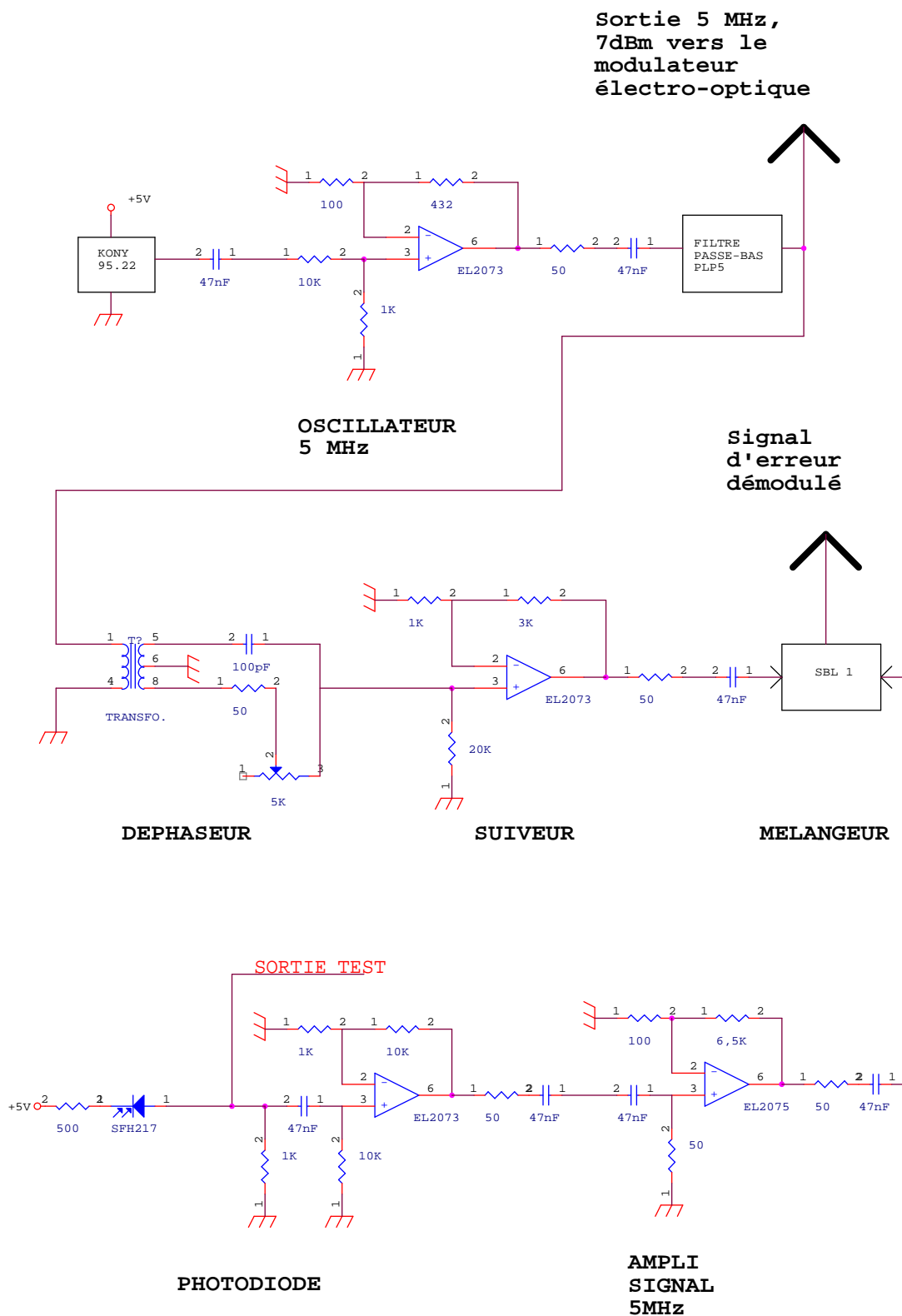


Fig. 8-8 : Schéma du circuit de démodulation du signal d'absorption saturée de la photodiode.

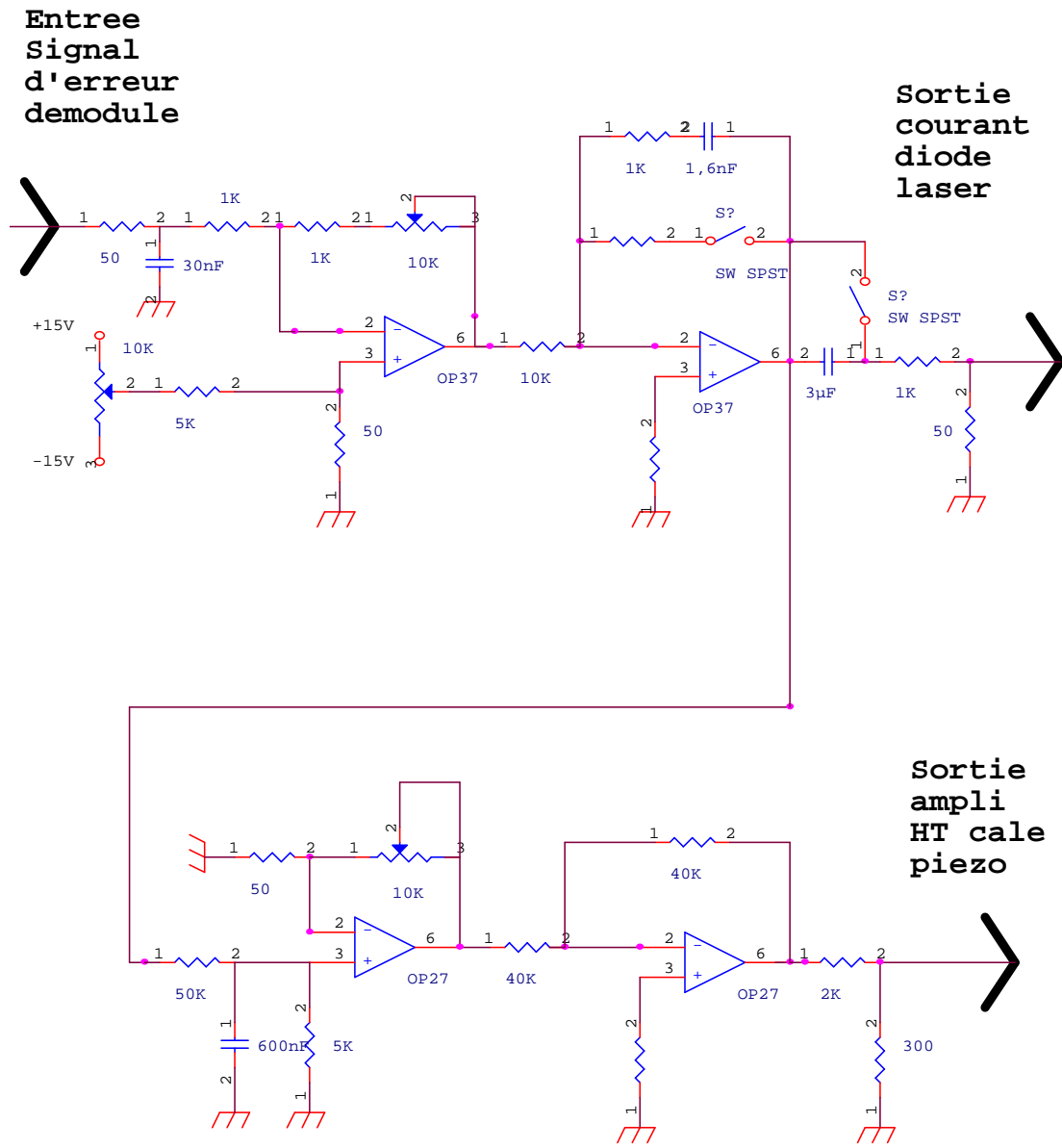


Fig. 8-9 :Schéma du circuit d'asservissement.

La diode laser et le système d'asservissement par absorption saturée sont intégrés dans le banc optique du prototype PHARAO (cf.Fig. 8-10). Une partie du faisceau est envoyée dans une fibre optique vers la zone de détection et l'autre partie est utilisée pour injecter les diodes laser de la zone de refroidissement.

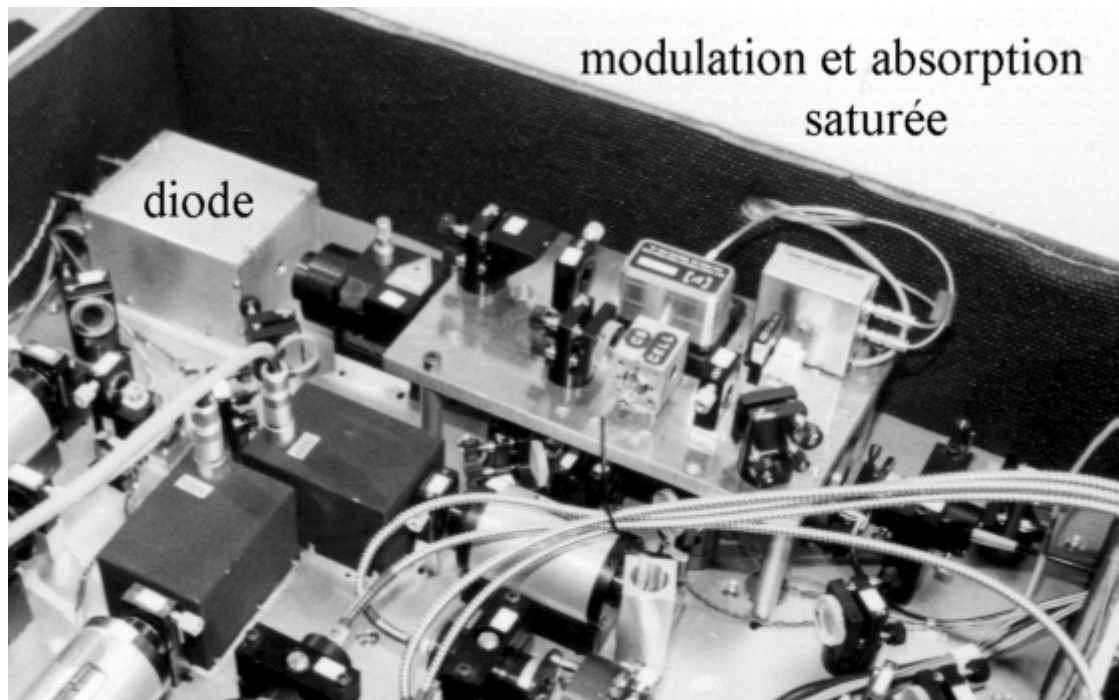


Fig. 8-10 : Diode DBR avec contre réaction optique et montage d'asservissement dans le banc optique du prototype PHARAO.

8.2.5 Résultats en laboratoire

La diode laser DBR libre est spectralement monomode et stable (sans sauts de mode) quelque soit le courant d'alimentation si celui-ci est supérieur au courant de seuil laser. Dans le système à contre réaction optique, la cavité externe perturbe le gain de seuil et le comportement spectral est plus complexe. Pour une position donnée de la lame de contre réaction, le rayonnement de la diode est monomode et stable pour une succession de plages étroites de valeurs du courant d'alimentation seulement. Pour chaque plage de courant, la fréquence du rayonnement laser peut être ajustée sur une centaine de MHz. La procédure utilisée pour asservir la fréquence de la diode sur une transition atomique est la suivante :

1 : le courant d'alimentation est choisi tel que l'émission laser de la diode soit monomode et que la fréquence soit proche de la fréquence atomique sur laquelle la diode doit être asservie.

2 : En déplaçant la lame de contre réaction montée sur la cale piézo-électrique, nous ajustons la fréquence d'émission sur la fréquence de la transition atomique voulue.

L'asservissement DC de la tension aux bornes de la cale piézo-électrique permet de maintenir la position de la lame et de conserver la fréquence. L'asservissement AC du courant permet de compenser des variations rapides de fréquence causées par des

perturbations extérieures, sans modifier la valeur moyenne du courant. Celle-ci est donc constante et la diode reste ainsi dans une zone de fonctionnement stable monomode. Sur des durées de l'ordre de quelques semaines, les propriétés de la diode dérivent de façon non négligeable et la diode finit par quitter la plage de fonctionnement stable. Il est alors nécessaire de reprendre manuellement²⁰ la valeur du courant d'alimentation.

Les largeurs de raie de la diode D.B.R libre et contre réactionnée ont été mesurées en effectuant un battement hétérodyne avec une diode laser en cavité étendue de largeur de raie inférieure à 50 kHz comme oscillateur de référence. Pour la diode libre, nous obtenons un raie lorentzienne dont la largeur à mi-hauteur vaut 2,5 MHz, nous représentons respectivement sur les figures (Fig. 8-11) et (Fig. 8-13) les spectres de puissance optique avec des échelles logarithmiques et linéaires. Avec le système de rétroaction optique, nous obtenons respectivement les spectres des figures (Fig. 8-12) et (Fig. 8-14). La largeur de raie à mi hauteur vaut 500 kHz, ce qui correspond à un facteur de réduction 5 par rapport à la diode libre. D'après la formule (Equ. 8-10), la largeur de raie de la diode contre réactionnée devrait varier autour de celle de la diode libre en fonction de la position de la lame de contre réaction optique. En pratique, nous avons constaté que la largeur de raie de la diode ne changeait pratiquement pas avec la position de la lame pour des déplacements de quelques longueurs d'onde. Quand le couple de paramètres (courant ; position de la lame de contre réaction) donne fonctionnement stable et monomode pour la diode laser, nous observons toujours une réduction de la largeur de raie d'un facteur proche de 5 par rapport à la diode libre. Ce comportement est très avantageux car il suffit d'asservir la diode laser sur la fréquence atomique sans se préoccuper de la largeur de raie.

La formule (Equ. 8-10) ne modélise pas correctement le comportement de notre système car le flux lumineux renvoyé par la lame de contre réaction est trop important pour que nous puissions raisonner dans l'hypothèse du couplage faible²¹ (cf.8.2.2). La forme de la partie centrale du spectre n'est plus lorentzienne (cf. Fig. 8-14), ce qui montre que la contribution majeure au spectre d'émission n'est plus dominée par le bruit blanc de fréquence.

²⁰ Un réglage automatisé est tout à fait envisageable.

²¹ Dans des essais préliminaires, nous avons réalisé une rétroaction optique une dizaine de fois plus faible que celle du prototype avion. Dans ce cas, conformément à la formule (Equ. 8-10), nous avons observé une variation périodique de la largeur de raie de l'émission dans un rapport compris entre 1/3 et 3, en déplaçant progressivement la lame de contre réaction. Par ailleurs, la diode laser avait un comportement monomode stable pour presque n'importe quelle valeur du courant tant que celui-ci était supérieur au courant de seuil laser.

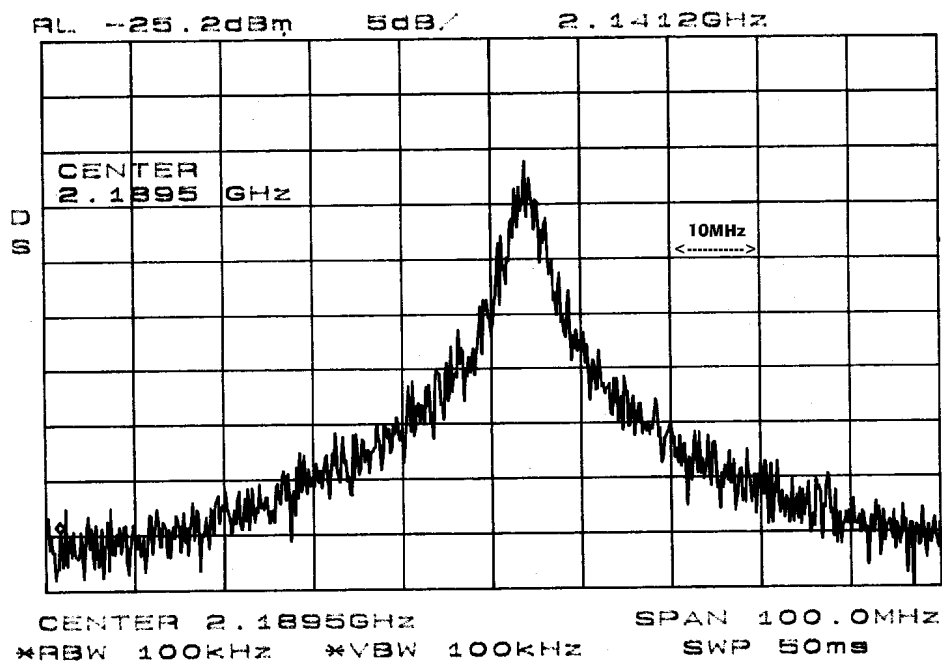


Fig. 8-11 : Spectre du rayonnement laser de la diode libre en échelle logarithmique. (1 carreau correspond à 5dB)

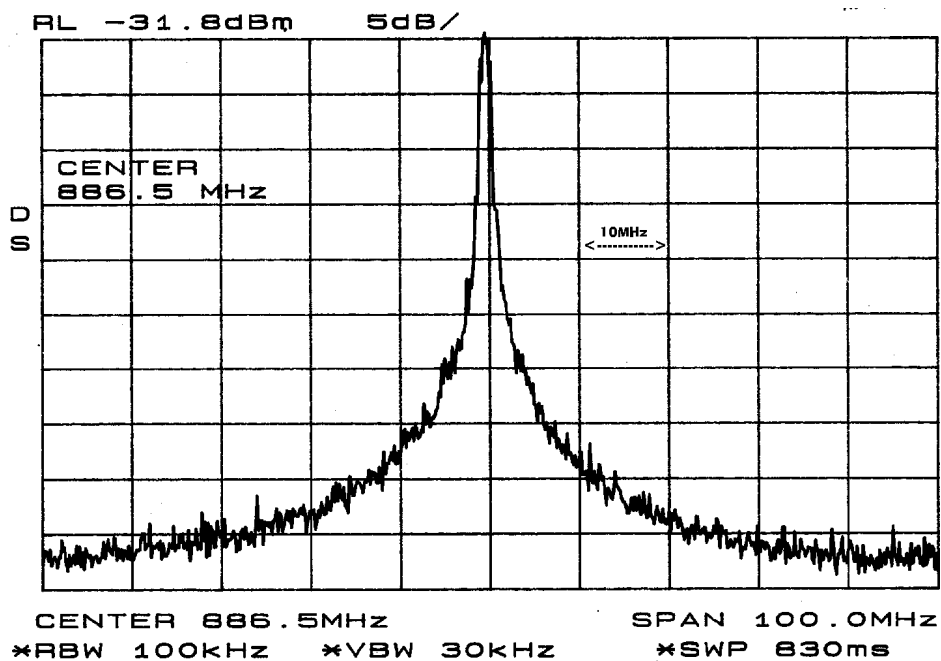


Fig. 8-12 : Spectre du rayonnement laser de la diode avec contre réaction optique en échelle logarithmique. (1 carreau correspond à 5dB)

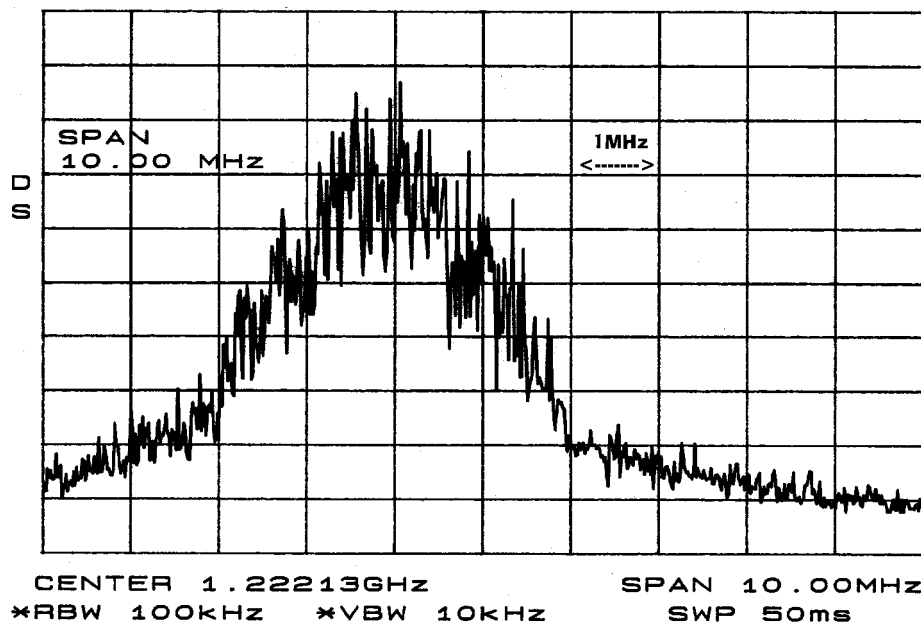


Fig. 8-13 : Spectre du rayonnement laser de la diode libre en échelle logarithmique. (1 carreau correspond a 5dB)

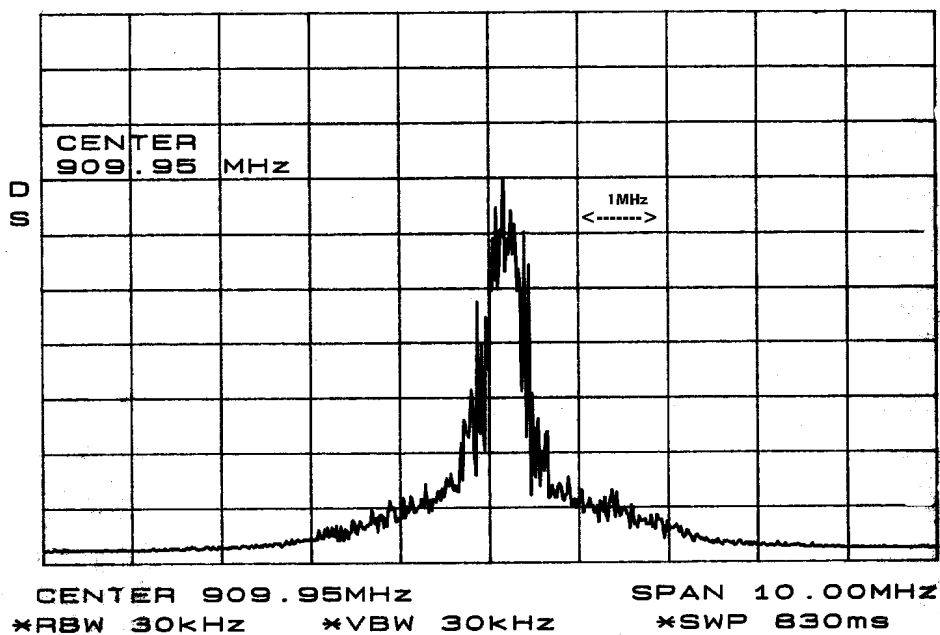


Fig. 8-14 : Spectre du rayonnement laser de la diode avec contre réaction optique en échelle logarithmique. (1 carreau correspond a 5dB)

8.2.6 essais en vols paraboliques

Le prototype de l'horloge PHARAO a été testé dans une campagne de vol parabolique en Airbus-0g²². Pendant chaque parabole, l'ensemble du système était soumis successivement à différentes accélérations verticales :

vol en palier : 1g
ressource (20 secondes) : 2g
apesanteur (20 seconde) : 0g
ressource (20 secondes) : 2g
vol en palier : 1g

Chacun des trois vols comportait 30 paraboles.

Le bon fonctionnement de la diode dans ces conditions de constituait un des points dur de cette campagne

Pendant toute la durée d'un vol, la diode laser DBR avec contre réaction optique a fonctionné de façon continu en restant asservi sur la fréquence de la transition atomique de détection, ce qui démontre la fiabilité mécanique de ce système.



Fig. 8-15 : Campagne de vols parabolique. Les conditions de microgravité ont permis d'obtenir une frange centrale de résonance deux fois plus étroite que sur terre pour le prototype PHARAO.

Au cours de certaines paraboles, nous avons supprimé l'asservissement de fréquence de la diode afin d'observer les perturbations que provoquent les accélérations de l'avion. Chaque changement de gravité (1g-2g, 2g-0g, ...) est suivi par une dérive

²² CNES/NOVSPACE

lente de la fréquence pendant environs 5 secondes (l'amplitude des fluctuations est de l'ordre de quelques MHz). Cet effet est très probablement lié a une perturbation de la température d'asservissement de la cavité de contre réaction. En effet, la répartition de la température dans le système dépend de la gravité (phénomènes de conduction thermique par convections). Quand le système est asservi, ces dilatations sont parfaitement compensées par l'asservissement lent sur la cale piézo électrique.

9. Bilan du test pour l'ensemble du prototype PHARAO

9.1 Résultats

La température élevée de l'atmosphère (30-35°C), supérieure aux températures de consigne des asservissements, nous a empêché de bien optimiser les réglages de l'expérience. Malgré cela nous avons réussi à faire fonctionner le prototype en vols paraboliques. Le nombre de paramètres de l'expérience étant relativement élevé, il était nécessaire que le dispositif fonctionne pendant plusieurs paraboles sans aucune intervention humaine. Les figures (Fig. 9-16) et (Fig. 9-17) montrent le signal de résonance que nous avons mesuré pendant les phases de gravité réduite. Sur la figure (Fig. 9-16), la vitesse de lancement des atomes est de 4 m/s comme au laboratoire. La largeur du pic central est de 14 Hz. Sur la figure (Fig. 9-17) la vitesse de lancement est divisée par 2. La largeur du pic central est de 7 Hz. Le rapport signal à bruit est moins élevé parce que nous perdons des atomes à la détection à cause des fluctuations d'accélération pendant les paraboles (de l'ordre de quelques 10^{-2} g) et de la rotation de l'avion (100° en 20 s). Il faut rappeler que sur terre, à la vitesse de 2 m/s, les atomes n'atteignent pas la zone de détection. C'est la première fois qu'il est démontré expérimentalement que des conditions de gravité réduite améliorent la spectroscopie à très haute résolution.

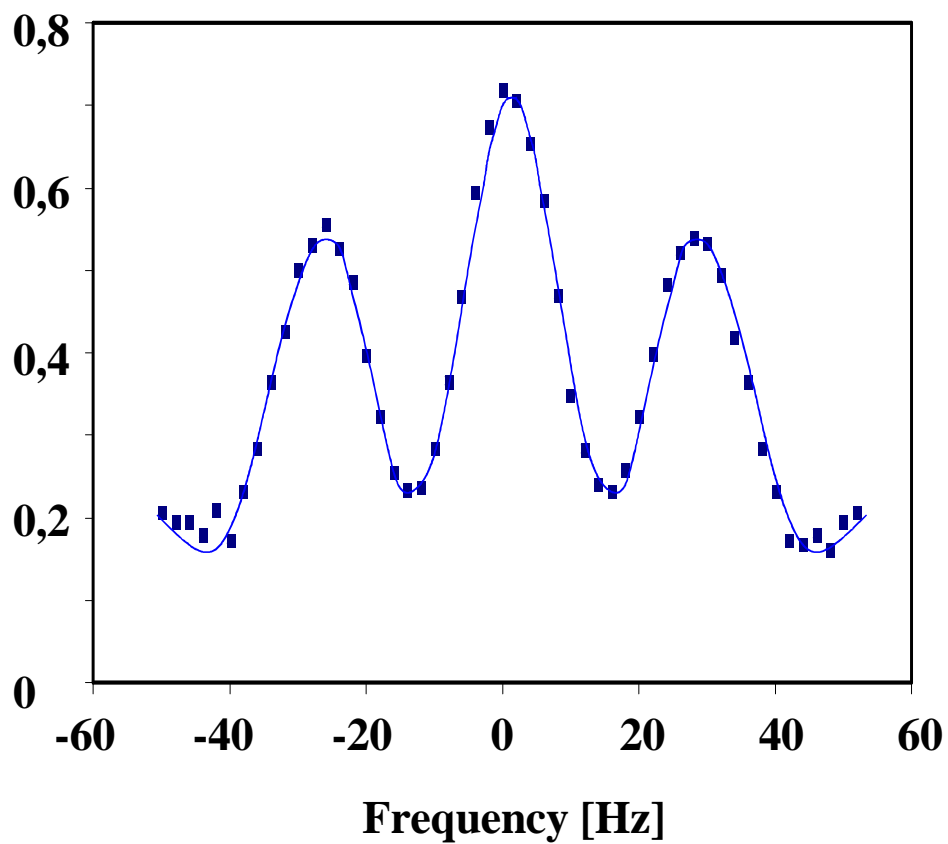


Fig. 9-16: Courbe expérimentale de résonance obtenue en gravité réduite pendant les vols paraboliques. La vitesse de lancement des atomes est de 4m/s.

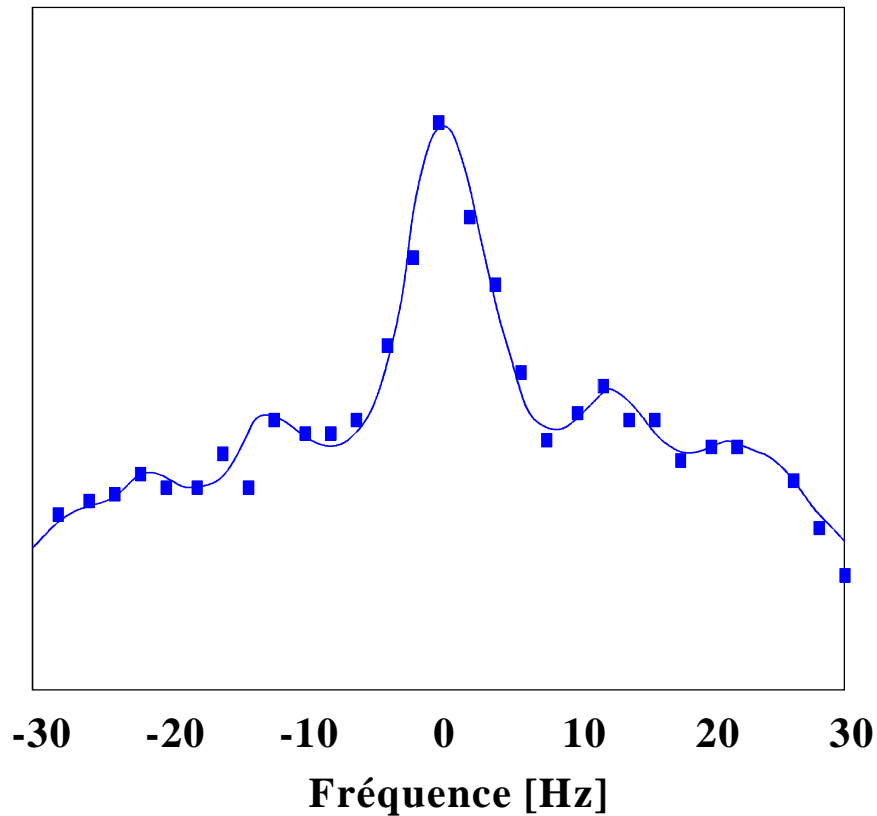


Fig. 9-17: Courbe expérimentale de résonance obtenue en gravité réduite pendant les vols paraboliques. La vitesse de lancement des atomes est de 2m/s.

9.2 Perspectives

Les performances du prototype seront prochainement évaluées au sol. Pour déterminer les effets dus à la cavité TE₀₁₃, le prototype sera modifié pour fonctionner alternativement dans le mode actuel ou dans un mode à double passage dans la cavité comme dans la fontaine atomique. Par comparaison avec la fontaine atomique, nous espérons mesurer une stabilité de fréquence dans la gamme des 10⁻¹⁶ sur une journée d'intégration. Après ces expériences, cette horloge transportable permettra de réaliser des comparaisons d'horloges distantes au niveau de quelques 10⁻¹⁶.

Le succès de la première campagne de vols paraboliques ouvre la voie vers la réalisation d'une horloge spatiale à atomes froids. Une première mission spatiale, ACES²³, a été proposée à l'Agence Spatiale Européenne dans le cadre de l'utilisation de la future station internationale ISS. En plus de l'horloge à atomes froids, d'autres étalons de fréquences et des moyens de transfert temps/fréquence seront embarqués à bord de la

²³ Atomic Clock Ensemble in Space

station. Cette mission a plusieurs objectifs. Le premier est de valider les performances de tous les systèmes embarqués. Pour l'horloge à atomes froids, nous étudierons ses propriétés de stabilité et d'exactitude de fréquence en fonction du temps d'interaction des atomes. Le but est d'atteindre une stabilité sur un jour et une exactitude au niveau de 10^{-16} . Le deuxième objectif est de profiter des performances exceptionnelles de cette horloge dans le domaine de la métrologie : distribution d'une échelle de temps de haute précision à l'échelle du globe, navigation et positionnement, etc... et dans le domaine de la physique fondamentale : test de l'isotropie de la vitesse de la lumière, mesure du décalage gravitationnel vers le rouge, mesure d'une éventuelle dérive de la constante de structure fine... Ces expériences pourraient être la genèse d'un programme spatial

Conclusion

En utilisant une fontaine atomique, nous avons réalisé une mesure expérimentale du déplacement de fréquence engendré par un champ électrique statique sur la transition d'horloge de l'atome de césium avec une incertitude relative de 2×10^{-3} .

Ce résultat nous a permis d'améliorer d'un facteur 10 la modélisation existante du déplacement de fréquence induit par le rayonnement du corps noir. Nous avons également mis en place une mesure directe du déplacement de fréquence engendré par le rayonnement d'un corps noir dont la température peut varier entre 300 K et 500 K. Cette expérience viendra compléter notre étude théorique et pourra donner confiance en une estimation du déplacement de fréquence induit par le rayonnement du corps noir sur la fréquence d'horloge à un niveau d'exactitude de 10^{-16} .

Nous avons mis en évidence et expliqué, comment le bruit de fréquence des sources laser de détection influence la stabilité de fréquence des horloges à atomes froids fonctionnant en mode pulsé. Cette étude constitue un élément essentiel pour spécifier les caractéristiques des sources laser des horloges à atomes froids, et elle est du plus grand intérêt pour le projet d'horloge spatiale PHARAO.

L'ensemble de ces travaux ouvre la voie au développement futur d'étalons de fréquence d'une exactitude et d'une stabilité de 10^{-16} . De tels étalons de fréquence permettront d'améliorer le temps atomique international et de réaliser de nouvelles applications pour la navigation et le positionnement. Ils rendent également possibles de nouveaux tests expérimentaux de la relativité générale tels que la mesure de l'effet Shapiro ou la mesure de la stabilité des constantes fondamentales de la physique.

Annexe 1 : Stabilité et exactitude

Les termes stabilité et d'exactitude sont souvent utilisés pour caractériser les oscillateurs, il nous semble utile de préciser le sens de ces termes dans le contexte de la métrologie du temps et des fréquences. Nous donnons en italique les définitions extraites des recommandations 686 du CCIR. Nous y ajouterons quelques commentaires.

Exactitude : *Degré de conformité d'une valeur mesurée ou calculée par rapport à sa définition. L'exactitude d'un oscillateur caractérise son aptitude à réaliser la fréquence atomique f_{at} qui entre dans la définition de la seconde. Si cet oscillateur reproduit f_{at} avec une incertitude absolue σ_f , nous dirons que son exactitude relative vaut σ_f/f_{at} .*

Stabilité : *La stabilité d'un oscillateur caractérise son aptitude à délivrer une fréquence contante. Pour définir de manière quantitative la stabilité d'un oscillateur de fréquence moyenne f_{moy} , nous utilisons la variance d'Allan des fluctuations de fréquence $\sigma_f^2(\tau)$ (cf. annexe 2). Nous dirons que la stabilité relative de fréquence de l'oscillateur sur une durée Δt vaut $\sigma_f(\Delta t)/f_{moy}$. Conventionnellement, on note $y = (f-f_{moy})/f_{moy}$ la valeur de l'écart de fréquence normé instantané, et le terme précédent s'écrit donc aussi $\sigma_y(\Delta t)$. Le CCIR définit l'instabilité de fréquence : *Changement de fréquence spontané et/ou causé par l'environnement au cours d'un intervalle de temps donné. Selon le contexte, le terme « stabilité » est souvent employé à la place du terme « instabilité » ; cet usage est acceptable.**

Annexe 2 : Variance d'Allan

Soit y une fonction du temps. Considérons la valeur moyenne $\bar{y}(t, \tau)$ de y sur l'intervalle $[t, t+\tau]$.

$$\bar{y}(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \int_{x=t}^{t+\tau} y(x) dx$$

Equ. 9-1

Pour étudier les fluctuations de $\bar{y}(t, \tau)$ avec le temps, il suffit de calculer la variance vraie de cette fonction par rapport à la variable t .

$$\text{var}_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T (\bar{y}(t, \tau) - \bar{y})^2 dt$$

$$\text{où } \bar{y} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T y(t) dt$$

Equ. 9-2

Ne disposant au mieux que d'un nombre fini d'échantillons de la fonction y , on préfère à la variance vraie un estimateur qui converge vers la variance vraie quand on utilise un grand nombre d'échantillons.

La variance d'Allan sans recouvrement $\sigma_y^2(\tau)$ est l'estimateur de la variance vraie de $\bar{y}(t, \tau)$ conventionnellement utilisé en métrologie. Elle se calcul à partir de N échantillons de y pris à des intervalles réguliers τ_0 . En posant $t_i = (i-1) \tau_0$ et en imposant $N=2^k$ avec k entier, nous avons :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2N} \cdot \frac{\tau}{\tau_0} \sum_{k=1}^{N \cdot (\tau_0/\tau)} (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2$$

$$\bar{y}_k = \frac{\tau_0}{\tau} \sum_{i=1+(k-1) \cdot (\tau/\tau_0)}^{k \cdot (\tau/\tau_0)} y(t_i) \cdot$$

Equ. 9-3

L'expérience montre que la densité spectrale de puissance des fluctuations de fréquence de la plupart des oscillateurs de fréquence moyenne f_{moy} , peut être modélisée par une loi de puissance :

$$S_y(\nu) = \sum_{\alpha=-2}^{+2} h_\alpha \cdot \nu^\alpha$$

Equ. 9-4

Où $y = (f - f_{moy})/f_{moy}$ désigne l'écart de fréquence normée instantanée et h_α les coefficients associés aux différents termes. A chaque terme correspond la contribution d'un bruit précis :

- $\alpha = -2$ bruit de marche aléatoire de fréquence
- $\alpha = -1$ bruit de scintillation de fréquence
- $\alpha = 0$ bruit blanc de fréquence
- $\alpha = +1$ bruit de scintillation de phase
- $\alpha = +2$ bruit blanc de phase

A chaque type de bruit correspond une pente caractéristique de l'écart type de la variance d'Allan $\sigma_y(\tau)$ tracée sur une échelle log-log :

- $\alpha = -2$ pente = -1
- $\alpha = -1$ pente proche de -1
- $\alpha = 0$ pente = -1/2
- $\alpha = +1$ pente = 0
- $\alpha = +2$ pente = +1/2

Annexe 3 : Transformation de Fourier

Soit une fonction f de la variable t . Sans nous préoccuper des conditions d'existence, nous définissons la transformée de Fourier de f , la fonction $TF(f)$ de la variable v :

$$[TF(f)](v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-2\pi i v \tau} d\tau$$

La transformée de Fourier réciproque TF^{-1} est définie par :

$$[TF^{-1}(f)](\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) e^{-2\pi i v \tau} dv$$

On vérifie la propriété :

$$TF^{-1}(TF(f)) = f$$

et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |TF(f)(v)|^2 dv$$

(Théorème de Parseval)

Nous rappelons que la densité spectrale de puissance d'une fonction réelle f est le double de la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation C_f :

$$S_f = 2 \cdot TF(C_f)$$

$$\text{avec } C_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot f(t + \tau) dt$$

Références

- Ref. 1 : A. Messiah, 'Mécanique quantique', édité par Dunod, (1963).
- Ref. 2 : C. Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloë. 'Mécanique Quantique', édité par Herman (1973).
- Ref. 3 : A. Yariv, 'Optical electronics', édité par Saunders (1991).
- Ref. 4 : B.E.A. Saleh, M.C. Teich, 'Fundamentals of Photonics', édité par J.W. Goodman, (1991).
- Ref. 5 : J. Vanier et C. Audoin, 'The quantum physics of atomic frequency standards', édité par Adam Hilger (1989).
- Ref. 6 : N.F. Ramsey, 'Molecular beams', édité par Oxford Science Publications (1985).
- Ref. 7 : N.F. Ramsey, Journal of Research M.B.S, Vol. **88**, p.301, (1983).
- Ref. 8 : C. Audoin, Metrologia, Vol 29, p.113, (1992).
- Ref. 9 : E. Raab, M. Prentiss, S. Chu and D. Prichard, Phys. Rev. Lett. **59**, 2631, (1987).
- Ref. 10 : J.L. Hall et al., J. Opt. Soc. Am. B, **6**, 2194 (1989).
- Ref. 11 : M.A. Kasevich, E. Riis, S. Chu, et R.G DeVoe, Phys. Rev. Lett. **63**, 612 (1989).
- Ref. 12 : C. Salomon et al., Europhys. Lett., **12** (8), (1990).
- Ref. 13 : A. Clairon, C. Salomon, S. Guellati, et W.D. Phillips, EuroPhys. Lett. **12**, 683 (1991)
- Ref. 14 : K. Gibble et S. Chu, Metrologia, **29**, 201, (1992).
- Ref. 15 : K. Gibble et S. Chu, Phys. Rev. Lett. **70**, 1771, (1993).
- Ref. 16 : A. Clairon, P. Laurent, G. Santarelli, S. Ghezali, S.N. Lea, M. Bahoura, IEEE Trans. Instrum. Meas. **44**, 128, (1995).
- Ref. 17 : S. Ghezali, P. Laurent, S.N. Lea et A. Clairon, Europhys. Lett. **36**, p25, (1996).
- Ref. 18 : A. Clairon, S. Ghezali, G. Santarelli, P. Laurent, S.N. Lea, E. Simon, S. Weyers, et K. Szymaniec, 'Preliminary evaluation of a cesium fountain frequency standard' dans 'Proceedings of the fifth symposium on frequency standards and metrology 1995', édité par J.C. Bergquist, World Scientific Publ., Singapore, (1996)
- Ref. 19 : G. Santarelli, Thèse de doctorat de l'université Paris VI, 'Contribution à la réalisation d'une fontaine atomique' (1996)

- Ref. 20 : E. Simon, P. Laurent, C. Mandache et A. Clairon, 'Proceedings EFTF 1997 du 11^{ème} Forum Européen Fréquences et Temps', édité par FSRM Suisse, (1997).
- Ref. 21 : S. Ghezali, Thèse de doctorat de l'université Paris VI, (à paraître).
- Ref. 22 : P. Lemonde, Thèse de doctorat de l'université Paris VI, (à paraître).
- Ref. 23 : Proceedings of the 25th Moriond conference on dark matter, cosmology, ultra-stable clocks and fundamental tests.
- Ref. 24 : R.D. Haun, Jr and J.R. Zacharias. Phys. Rev. **107**, 107, (1957).
- Ref. 25 : J.R. Mowat, Phys. Rev.A **5**, 1059 (1971)
- Ref. 26 : J.D. Feichtner, M.E. Hoover et M. Mizushima. Phys. Rev. **3A**, A702 (1964).
- Ref. 27 : T.Lee et T.P. Das, R.M. Sternheimer. Phys. Rev.A **11**, 1784, (1975)
- Ref. 28 : H. Gould, E. Lipworth et M.C. Weisskopf, Phys. Rev. **188**, 24, (1969).
- Ref. 29 : J.P. Carrico, A. Adler, M.R. Baker, S. Legowski, E. Lipworth, P.G.H. Sandars, T.S. Stein et M.C. Weisskopf. Phys. Rev.**170**, 64, (1967).
- Ref. 30 : P.G.H. Sandars, Proc. Phys. Soc. vol. **92**, (1967).
- Ref. 31 : J.R.P. Angel et P.G.H. Sandars, Proc. Roy. Soc. A305, 125-**138** (1967).
- Ref. 32 : R.W. Schmieder, A.J.P. **40**, 297, (1971).
- Ref. 33 : A. Khadjavi et Allen Lurio. Phys. Rev. **167**, 128, (1967).
- Ref. 34 : M.Mizushima, Phys.Rev. **133**, A414, (1963)
- Ref. 35 : C. Cohen Tannoudji, J Dupont Roc, Gilbert Grynberg, 'Processus d'interaction entre photons et atomes', édition du CNRS, (1988).
- Ref. 36 : T.F Gallagher et W.E Cooke Pys. Rev. Lett. **42** 835 (1979).
- Ref. 37 : W.M. Itano, L.L. Lewis, et D.J. Wineland. Phys. Rev.A **25**, 1233, (1982)
- Ref. 38 : Richard Marrus, Douglas Mccolm et Joseph Yellin. Phys. Rev. **147**, 55 (1966).
- Ref. 39 : R.M. Sternheimer. Phys. Rev. 183, **112** (1969).
- Ref. 40 : A. Salop, E. Pollack et B. Bederson. Phys. Rev. **124**, 1431 (1961).
- Ref. 41 : S.A. Blundell, W.R. Johnson et J. Sapirstein. Phys. Rev.A **43**, 3407 (1991).
- Ref. 42: R.M. Sternheimer. Phys. Rev. **183**, 112, (1968)
- Ref. 43 : D.R. Bates et A. Damgaard, Philos. Trans. Roy. Soc. London **A242**, 101 (1949).
- Ref. 44: A.Bauch, R.Schröder, Phys. Rev. Lett. **78**, 662, (1997).

- Ref. 45 : T.J. Quinn et J.E. Martin, Philosophical transactions of the royal society of London, vol. **316**, p 85-189, 1536, (1985).
- Ref. 46 : M.J. Ballico, Metrologia, 1995/96, **32**, 259-265.
- Ref. 47 : V.I. Sapritsky et A.V. Prokhorov, Applied Optics, vol **34**, n° 25, (1995).
- Ref. 48 : Thèse de doctorat de G.Negro, 'Le corps noir, étude et réalisation de cavité étalons de référence pour le rayonnement thermique'. Thèse de l'école centrale de Paris n°1993-26 .
- Ref. 49 : C.W. Trowbridge, 'An introduction to computer aided electromagnetic analysis', 1990, Wessex Press limited.
- Ref. 50 : A.L. Shawlow et C.H. Townes, Phys. Rev. **112**, p.1940, (1958).
- Ref. 51 : C.H. Henry, IEEE J. Quant. Electron. **QE18**, p.259, (1982).
- Ref. 52 : D.S. Elliott, Rajarshi Roy, et S.J. Smith, Phys. Rev. A, **26**, (1981).
- Ref. 53 : K. Petermann, 'Laser diode modulation and noise', advances in optoelectronics, publié par Kluwer Academic Publishers (1991)
- Ref. 54 : M.W. Fleming et A. Mooradian, IEEE J. Quantum. Electron. Vol. **QE17**, p.44, (1981)
- Ref. 55 : G.P. Agrawal, IEEE, J. Quant. Electron, vol. QE20, pp468-471, (May 1984).
- Ref. 56 : P. Laurent, Thèse de doctorat de l'université Paris XI, 'Stabilisation en fréquence de diode laser par couplage optique résonant sur une cavité Fabry-Perot confocale', (1989).
- Ref. 57 : B. Fermigier, Thèse de doctorat de l'université Paris XI, 'Etude d'un étalon de fréquence atomique à 729 nm : réalisation et stabilisation du laser d'interrogation', (1997).
- Ref. 58 : N. Dimarcq, Thèse de doctorat de l'université Paris XI, 'Propriétés statistiques de la fluorescence induite par laser dans un jet atomique', (1992).
- Ref. 59 : C. Salomon, Thèse de doctorat de l'université Paris XIII, 'Franges de Ramsey et spectroscopie laser à ultra-haute résolution dans l'infrarouge', (1984).
- Ref. 60 : G. Camy, Thèse de doctorat de l'université Paris XIII, 'Sources laser ultrastables en spectroscopie de saturation. Réalisation d'étalons optiques de fréquence et caractérisation de leurs qualités', (1985) .
- Ref. 61 : David R. Lide, 'Handbook of chemistry and physics', édité par C.R.C press (1995-96).
- Ref. 62 : M. Bahoura, Thèse de doctorat de l'université Paris XI, (à paraître).

