



HAL
open science

Contribution au développement et à l'étude de facteurs d'importance fiabilistes pour les systèmes markoviens

Phuc Do Van

► **To cite this version:**

Phuc Do Van. Contribution au développement et à l'étude de facteurs d'importance fiabilistes pour les systèmes markoviens. Automatique / Robotique. Université de Technologie de Troyes, 2008. Français. NNT: . tel-00636258

HAL Id: tel-00636258

<https://theses.hal.science/tel-00636258>

Submitted on 27 Oct 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contribution au développement et à l'étude de facteurs d'importance fiabilistes pour les systèmes markoviens

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 03 octobre 2008

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Technologie de Troyes

(spécialité optimisation et sûreté des systèmes)

par

Phuc DO VAN

Composition du jury

Rapporteurs : Yves DUTUIT (Pr. des Univ.) - Université Bordeaux 1
Michel ROUSSIGNOL (Pr. des Univ.) - Université Paris-Est Marne la Vallée

Examineurs : Jean-Louis BON (Pr. des Univ.) - Université des Sciences et Technologies de Lille
Didier THEILLIOL (Pr. des Univ.) - Université Henri Poincaré
Emanuel BORGONOVO (Associate Professor) - Bocconi University, Italy
Anne BARROS (Maître de conférence - *Directeur de thèse*) - UTT
Christophe BERENGUER (Pr. des Univ. - *Directeur de thèse*) - UTT

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier, Christophe Bérenguer et Anne Barros pour m'avoir encadré durant mon DEA, et pendant ces trois années dernières de thèse. Ils m'ont donné l'opportunité de travailler sur un sujet aussi passionnant que riche d'enseignements. Leur confiance, leur disponibilité, et leur sens de la critique constructive ont été pour moi toujours très précieux. Je leur exprime ici toute ma reconnaissance et mon admiration.

Je remercie Christophe Bérenguer, Anne Barros, Antoine Grall, Laurence Dieulle et Mitra Fouladirad pour m'avoir accueilli dans leur équipe et pour leur professionnalisme excellent dans les travaux que j'ai réalisés au sein de leur équipe. J'étends ces remerciements aux membres du laboratoire M2S/ICD, en particulier à Monsieur Igor Nikiforov, pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire et pour avoir mis à ma disposition les moyens nécessaires pour achever ce travail de thèse.

Messieurs Yves Dutuit, Michel Roussignol ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse et je tiens à leur exprimer ma gratitude pour l'attention qu'ils y ont portée et les observations pertinentes qu'ils ont faites sur ce travail. Je remercie également Messieurs Jean-Louis Bon, Didier Theilliol, Emanuelle Borgonovo pour avoir accepté de faire partie du jury et pour leur soutien.

Je ne peux également manquer l'occasion d'adresser une pensée particulière à mes parents et ma fiancée pour leur estime et leurs encouragements.

Un remerciement spécial à Babiga Birregah et Jean-Baptiste Pothin pour leur amitié sincère et hors pair.

Résumé

Les facteurs d'importance fiabilistes permettant de fournir des informations sur l'importance des composants vis-à-vis des performances fiabilistes d'un système. Ces facteurs d'importance sont un outil efficace pour la prise de décision dans les études de fiabilité, d'analyse de risques, en maintenance, en exploitation ou en conception. Les facteurs d'importance fiabilistes ont été classiquement définis dans le cadre des modèles booléens de fiabilité et, sous leur forme classique (et avec les méthodes d'évaluation actuelles), ces facteurs ne sont souvent utilisables que sous l'hypothèse de composants binaires et indépendants, et pour une architecture de système "statique". L'utilisation de ces facteurs d'importance pour l'aide à la décision sur des systèmes réels impose pourtant souvent la prise en compte d'hypothèses plus réalistes.

Cette thèse propose un nouveau facteur d'importance fiabiliste, la "sensibilité multi-directionnelle", qui permet d'évaluer l'importance fiabiliste d'un composant ou d'un groupe de composants d'un système markovien à composants dépendants et, plus généralement, l'importance fiabiliste d'un ensemble de caractéristiques du système. On développe également des méthodes efficaces d'évaluation de ce nouveau facteur d'importance par calcul analytique ou par estimation à partir d'une seule trajectoire observée en utilisant des techniques d'analyse par perturbation.

L'extension aux ordres supérieurs et l'utilisation pour des systèmes markoviens d'un facteur importance introduit récemment (DIM) sont également abordés.

Abstract

Reliability importance measures provide useful insight in system performance (reliability, availability, maintainability, global production capacity, ...). They constitute an efficient tool to support decision-making in reliability studies, risk analysis, maintenance optimization, system exploitation or design. Most of reliability importance measures have been primarily defined in the framework of reliability boolean models and under their classic form (and to the current methods of assessment), these measures can be used for systems with binary and independent components, and for a “static” structure a priori defined. However, the use of these importance measures in the decision-making process for real systems often requires the consideration of more realistic assumptions.

This thesis proposes a new reliability importance measure, the “multi-directional sensitivity”, which allows the evaluation of the reliability importance of a component or a group of components for a markovian system with dependent components and more generally the reliability importance of any characteristic feature of the system. The thesis also develops efficient evaluation procedures for this new importance measure both by analytical calculation and estimation from a single sample path observation using perturbation analysis techniques.

The extension and use of classical importance measures for systems with dependent components in a markovian framework are also investigated.

Table des matières

Introduction générale	1
I Cadre de l'étude	5
Introduction	7
1	
Etude de sensibilité et facteurs d'importance fiabilistes pour un système dynamique : problématique	
1.1 Introduction	9
1.2 Modélisation des dépendances : une difficulté accrue et un enjeu pour l'évaluation d'indicateurs fiables	11
1.3 Analyses de sensibilité et facteurs d'importance fiabilistes	12
1.4 Conclusions et problème proposé	13
2	
Étude bibliographique	
2.1 Introduction	15
2.2 Modélisation markovienne des systèmes	15
2.2.1 Modélisation des systèmes "dynamiques" avec dépendances	15
2.2.2 Modélisation markovienne	16
2.3 Facteurs d'importance fiabilistes	23
2.3.1 Facteurs d'importance fiabilistes classiques	24
2.3.2 Facteur d'importance marginal pour un système markovien	29
2.4 Problème étudié	37

2.4.1	Proposition d'un nouveau facteur d'importance	37
2.4.2	Facteur d'importance différentiel : mise en œuvre et extension	40
2.5	Conclusions et orientation des travaux	41

II Proposition d'un nouveau facteur d'importance 43

Introduction 45

3 Facteur de sensibilité multi-directionnelle

3.1	Introduction	47
3.2	Facteur de sensibilité multi-directionnelle (MSM)	48
3.2.1	Matrice directionnelle de perturbation	48
3.2.2	Définition du facteur de sensibilité multi-directionnelle	54
3.2.3	Propriétés du facteur MSM	55
3.3	MSM de la disponibilité	56
3.3.1	MSM instantané	56
3.3.2	MSM moyen	60
3.3.3	MSM stationnaire	62
3.4	Conclusions	64

4 Application aux systèmes de production multi-état

4.1	Introduction	65
4.2	Systèmes de production multi-état	66
4.2.1	Mesures de performance	66
4.2.2	Mise en œuvre de MSM	69
4.3	Application à un système de production	71
4.3.1	Analyse de sensibilité par rapport à un paramètre	73
4.3.2	Analyse de sensibilité par rapport à un groupe de paramètres	78
4.3.3	Analyse de sensibilité par rapport à un état	80
4.3.4	Analyse de sensibilité par rapport à un groupe d'états	81
4.4	Conclusions	83

5**Estimation du facteur MSM stationnaire par analyse de perturbation**

5.1	Introduction	85
5.2	Analyse de perturbation	86
5.2.1	Principe de l'analyse de perturbation (PA)	86
5.2.2	Analyse de perturbation infinitésimale (IPA) :	87
5.3	Réalisation de perturbation pour un processus de Markov	88
5.3.1	Réalisation de perturbation	89
5.3.2	Facteur de réalisation de perturbation	90
5.3.3	Potentiel de performance	95
5.4	Estimation du facteur MSM stationnaire	97
5.4.1	Approche basée sur l'estimation de la matrice génératrice	98
5.4.2	Approche basée sur l'estimation du facteur de réalisation de perturbation	101
5.4.3	Approche basée sur l'estimation du potentiel de performance	105
5.4.4	Conclusion	107
5.5	Exemple d'application	108
5.6	Conclusion	111

III Proposition d'un facteur d'importance différentiel étendu 113**Introduction 115****6****Variation des performances asymptotiques**

6.1	Introduction	117
6.2	Variation des performances asymptotiques - Définition	118
6.2.1	Variation en fonction d'un seul paramètre	118
6.2.2	Variation en fonction de plusieurs paramètres	120
6.3	Calcul analytique de la variation δW	122
6.3.1	Evaluation de la variation au premier ordre $\delta^1 W$	123
6.3.2	Evaluation de la variation au deuxième ordre $\delta^2 W$	124
6.3.3	Evaluation de la variation aux ordres supérieurs	125

6.3.4	Conclusion	128
6.4	Estimation de la variation δW	129
6.4.1	Approche basée sur l'estimation de la matrice génératrice	129
6.4.2	Approche basée sur l'estimation directe de l'inverse généralisée $M^\#$	133
6.5	Conclusions	136

7

Facteur d'importance différentiel : mise en œuvre et extension

7.1	Introduction	137
7.2	Facteur d'importance différentiel et son extension	138
7.2.1	Facteur d'importance différentiel (DIM)	138
7.2.2	DIM aux ordres supérieurs (DIM*)	140
7.3	Evaluation analytique de DIM et de DIM*	141
7.3.1	Evaluation de DIM en stationnaire et en transitoire	141
7.3.2	Evaluation de DIM* en régime stationnaire	146
7.4	Estimation de DIM et de DIM* en régime stationnaire	149
7.4.1	Estimation de DIM stationnaire	149
7.4.2	Estimation de DIM* stationnaire	151
7.5	Conclusions	152

Conclusion générale 155

Perspectives 157

Annexes 159

A Facteurs d'importance fiabilistes pour un système markovien à composants indépendants 161

A.1	Formulation analytique des facteurs d'importance existants	161
A.2	Estimation à partir de REX	170

B Méthode de perturbation généralisée [54] 177

Glossaire des notations et abréviations

Notation	Signification
λ_i, μ_i	taux de défaillance, de réparation du composant i en condition normale
$\bar{\lambda}_i$	taux de défaillance du composant i en partage de charge
λ_C	taux de défaillance de cause commune
M	matrice des taux de transition du processus de Markov
M[#]	inverse généralisée de M
$X^i = (X_t^i, t \geq 0)$	processus de Markov avec la matrice de taux de transition M et l'état initial $X_0^i = i$
$E = \{e_1, e_2, \dots\}$	espace d'états fini
$\eta_t(\mathbf{M}, X^i)$	fonction de performance du processus de Markov X^i ayant la matrice génératrice M
d_{ij}	facteur de réalisation de perturbation
D	matrice de réalisation de perturbation
g	vecteur du potentiel de performance
$P(t)$	vecteur de probabilité d'occupation d'états
π	vecteur de probabilité d'occupation d'états en régime stationnaire
Q	matrice directionnelle de sensibilité
I	matrice d'identité
f	vecteur colonne associé aux états du système
X	vecteur colonne représentant les niveaux de production d'états du système
W	mesure de performance du système
δW	variation de performance du système
$\delta_{\mathbf{Q}_i}$	variation selon la direction \mathbf{Q}_i de la matrice des taux de transition du processus de Markov
$A(t), a_i(t)$	disponibilité du système, du composant i à l'instant t
$A(1_i t)$	probabilité que le système est en marche à l'instant t sachant que le composant i est en marche

Glossaire des notations et abréviations

$A(0_i t)$	probabilité que le système est en marche à l'instant t sachant que composant i est en panne
$A(i t)$	probabilité que le système est en marche quand le composant i est en marche à l'instant t
$A(\bar{i} t)$	probabilité que le système est en marche quand le composant i est en panne à l'instant t
\tilde{A}	disponibilité moyenne sur l'intervalle de temps $[0, t]$
A, a_i	disponibilité asymptotique du système, du composant i
$S(t)$	capacité de production globale du système à l'instant t
\tilde{S}	capacité de production moyenne sur l'intervalle de temps $[0, t]$
S	capacité de production asymptotique
$MSM_{\mathbf{Q}}^W$	sensibilité de la mesure de performance W selon la direction \mathbf{Q}
MSM	facteur de sensibilité multi-directionnelle
MSM instantané	sensibilité de la mesure de performance instantanée selon une direction d'intérêt
MSM moyen	sensibilité de la mesure de performance moyenne sur un intervalle de temps selon une direction d'intérêt
MSM stationnaire	sensibilité de la mesure de performance asymptotique selon une direction d'intérêt
DIM	facteur d'importance différentiel
DIM^*	facteur d'importance différentiel aux ordres supérieurs
MIM	facteur d'importance marginal
MIM^G	facteur d'importance marginal généralisé
JIM	facteur d'importance conjoint
CIM	facteur d'importance critique
DIF	facteur d'importance de diagnostic
RAW	facteur d'augmentation du risque
RRW	facteur de diminution du risque
\mathbb{E}	espérance mathématique
DCC	défaillances de cause commune
REX	données de retour d'expérience

Introduction générale

LA sûreté de fonctionnement est apparue récemment dans l'histoire, et s'est développée au cours du XXe siècle en devenant un domaine incontournable à l'heure actuelle pour les industries à risques (en premier chef, l'industrie nucléaire et les industries chimiques) mais aussi de plus en plus pour toute industrie en raison de ses relations étroites avec la notion de qualité, les problèmes ergonomiques (relation homme-machine), l'impact sur l'environnement ainsi que son influence sur le coût global de possession (construction et production, exploitation, mise au rebut).

Les études de sûreté des systèmes constituent un bon support pour l'aide à la décision en exploitation, en maintenance et même en conception. Quant aux facteurs d'importance, ils peuvent constituer des indicateurs de pilotage des activités de maintenance qui permettent de concentrer les ressources disponibles sur les matériels les plus critiques et ainsi optimiser les décisions de maintenance. A l'aide de facteurs d'importance, il est par exemple possible de distinguer les matériels critiques pour la sûreté (sur lesquels on renforcera la maintenance) des matériels non critiques (pour lesquels on peut souhaiter relâcher certaines contraintes réglementaires). Avec le développement des approches de décision dite «risk-informed», de telles utilisations des facteurs d'importance sont appelées à se développer en pratique. Les décisions prises peuvent naturellement avoir des conséquences directes sur la sûreté des installations et elles méritent donc d'être étayées par des développements méthodologiques permettant de justifier et de valider les procédures de décision de maintenance basées sur les facteurs d'importance. Les facteurs d'importance ont été classiquement définis dans le cadre des modèles booléens de fiabilité (arbres de défaillances, arbres d'événements) et des algorithmes d'évaluation performants basés sur les diagrammes de décision binaire ont été développés, [43, 44]. Sous leur forme classique et avec les méthodes d'évaluation actuelles, ils peuvent être utilisables sous l'hypothèse de composants binaires et indépendants et pour une architecture de système définie a priori. L'utilisation des facteurs d'importance fiabilistes pour l'aide à la décision sur des systèmes réels impose pourtant souvent la prise en compte d'hypothèses plus réalistes.

Notre premier objectif est de proposer un nouveau facteur d'importance fiabiliste appelé le facteur de sensibilité multi-directionnelle. Le facteur proposé est en fait défini en se basant sur

une modélisation markovienne du système qui permet de prendre en compte des dépendances entre les composants. Ce facteur permet, d'une part, d'étudier la sensibilité du système selon une direction d'intérêt, d'autre part, d'identifier l'importance d'un composant (d'un groupe de composants), ainsi que l'importance d'un état (ou d'un groupe d'états) du système. Pour l'évaluation de ce facteur proposé, le calcul analytique ainsi que l'estimation à partir d'une seule trajectoire observée sont considérés.

Le second objectif est de mettre en œuvre et de proposer une extension d'un facteur d'importance fiabiliste introduit récemment [18] dans le cadre des systèmes markoviens à composants dépendants. Pour l'évaluation de ce facteur et celle de son extension, les méthodes analytiques et estimées sont également étudiées.

Organisation du manuscrit

La première partie permet de donner un cadre à notre étude et de préciser notre problématique. Des introductions sur les systèmes à composants dépendants et sur les facteurs d'importance fiabilistes sont exposées dans le premier chapitre. L'essentiel des notions indispensables à la compréhension de notre problème et de nos motivations y est exposé de manière très générale. Le deuxième chapitre est consacré entièrement à une étude bibliographique sur la modélisation des systèmes dynamique avec dépendances, et sur les facteurs d'importance existants. Chacun de ces points a été abordé dans le but de justifier les choix que nous avons effectués au sujet de la modélisation pour le système et les composants (modélisation markovienne), des extensions des facteurs d'importance existants, et de la nécessité d'un nouveau facteur d'importance (facteur de sensibilité multi-directionnelle) pour le modèle du système envisagé.

La seconde partie du mémoire est consacrée à l'étude du nouveau facteur d'importance proposé (le facteur de sensibilité multi-directionnelle). On commence par présenter, dans le chapitre 3, son concept et son évaluation analytique dans le cas d'un système markovien pour lequel l'indicateur de performance est vue traditionnellement via sa disponibilité instantanée, asymptotique, ou encore moyenne sur une période d'observation. Le chapitre 4 a pour but de montrer comment ce facteur d'importance peut être utilisé pour un système de production multi-état dans lequel les indicateurs de performance considérés sont sa disponibilité et sa capacité de production globale. Des applications détaillées sont également exposées. Dans le chapitre 5, nous présentons la méthode d'analyse de perturbation afin d'estimer ce facteur à partir des données de retour d'expérience.

La troisième partie se compose de deux chapitres. Le chapitre 6 concerne une étude sur la variation de performances (qui sont des mesures de disponibilité/fiabilité, de capacité de production globale, etc) du système lorsqu'il existe une variation de paramètres fiabilistes (taux de

défaillance et de réparation, ...), ou plus généralement, une variation selon une direction spécifique (taux de transition entre des états) dans le contexte des systèmes markoviens. Afin de mesurer la contribution relative d'un composant ou d'un groupe de composants à la variation de performances, on propose dans le chapitre 7 l'utilisation du facteur d'importance différentiel récemment introduit par Borgonovo [18, 17]. Lorsque ce facteur est limité par l'hypothèse de variation faible des paramètres, on propose dans ce chapitre son extension permettant une utilisation plus générale qui s'avère possible dans le cadre markovien. Le lien direct avec le facteur de sensibilité multi-directionnelle est également établi.

Une étude sur la mise en œuvre et sur l'évaluation (y compris le calcul analytique ou par estimation) des facteurs d'importance fiabilistes existants dans le contexte des systèmes markoviens à composants indépendants est présentée dans l'annexe A.

Première partie

Cadre de l'étude

Introduction

L'objectif de cette première partie est de présenter et d'explicitier notre problématique pour les études de sensibilité et le calcul de facteurs d'importance fiabilistes dans un système dynamique. De manière générale, nous avons pu constater que les facteurs d'importance existants utilisés comme outils d'aide à la décision (de maintenance, d'exploitation ou de conception, ...) sont basés sur l'hypothèse simplificatrice (mais parfois peu réaliste) d'indépendance des composants. Or, il existe de nombreux cas réels dans lesquels cette hypothèse n'est pas vérifiée, par exemple pour les dépendances relevant de phénomènes de défaillances de cause commune ou de propriétés fonctionnelles et structurelles. L'existence de ces dépendances affecte souvent de façon notable les probabilités d'occurrence des événements redoutés sur un système, et en les négligeant, on s'expose à de graves erreurs d'appréciation sur les composants les plus critiques pour la sûreté et sur les décisions les plus appropriées. L'objectif des travaux présentés ici est de mettre en évidence la nécessité de la prise en compte des dépendances stochastiques entre des composants et de proposer des outils efficaces qui permettent, d'une part, d'étudier la sensibilité de performance du système selon une direction d'intérêt, d'autre part, d'identifier l'importance d'un composant (d'un groupe de composants) ainsi que l'importance d'un état (d'un groupe d'états) du système envisagé.

Le chapitre 1 est une introduction générale sur la nécessité de la prise en compte des dépendances dans un système dynamique et sur les facteurs d'importance fiabilistes pour l'optimisation de la prise de décision. On définit et on illustre de manière succincte et très "pratique", l'ensemble des notions indispensables à la description et à la compréhension de cette problématique.

Dans le chapitre 2, on présente une étude bibliographique sur la modélisation des systèmes en prenant en compte des dépendances entre des composants, et sur les facteurs d'importance fiabilistes couramment utilisés en sûreté de fonctionnement, afin de préciser le cadre de notre problématique et de justifier le choix de modélisation effectué.

Chapitre 1

Etude de sensibilité et facteurs d'importance fiabilistes pour un système dynamique : problématique

1.1 Introduction

La sûreté de fonctionnement constitue désormais un enjeu majeur pour de nombreux systèmes embarqués ou procédés complexes. Dans ce contexte, les études probabilistes de sûreté de fonctionnement voient leur champ d'utilisation s'étendre de plus en plus. Il ne s'agit plus seulement de vérifier que des spécifications techniques d'exploitation ou de conception sont respectées, mais aussi d'utiliser les modèles et les indicateurs de sûreté de fonctionnement pour optimiser les décisions de maintenance, d'exploitation ou de conception. Pour des systèmes complexes, il est en général difficile, voire impossible de construire un modèle global et complet en suivant une démarche analytique, mais il est souvent possible de caractériser le comportement du système par la détermination d'indicateurs de sûreté de fonctionnement du système (facteurs d'importance fiabilistes des composants, importance relative des coupes minimales prépondérantes, probabilité d'occurrence d'événements critiques, ...) et d'appuyer les décisions sur ces indicateurs. On observe de façon assez courante cette pratique et cette évolution en ingénierie de la sûreté de fonctionnement. Ainsi, par exemple, dans l'industrie nucléaire, les études probabilistes de sûreté (EPS) n'ont plus pour seule vocation d'identifier et de quantifier les scénarios accidentels conduisant à une conséquence inacceptable (fusion du cœur, rejets radioactifs hors de l'enceinte de confinement) et de vérifier le respect des contraintes de sûreté et de sécurité. Ces études servent également de support à plusieurs applications visant à perfectionner les pratiques d'exploitation, à ré-évaluer en permanence le "référentiel sûreté" et à justifier les choix de conception des tranches futures. Parmi ces applications, on peut citer l'analyse pro-

babaliste des incidents (évaluation des conséquences potentielles d'un accident), l'optimisation de la maintenance par la fiabilité (OMF), ou encore l'élaboration des spécifications techniques d'exploitation. Ainsi, les facteurs d'importance peuvent constituer des indicateurs de pilotage des activités de maintenance qui permettent de concentrer les ressources disponibles sur les matériels les plus critiques et d'optimiser les décisions de maintenance. A l'aide des facteurs d'importance, il est par exemple possible de distinguer les matériels critiques pour la sûreté (sur lesquels on renforcera la maintenance) des matériels non critiques (pour lesquels on peut souhaiter relâcher certaines contraintes réglementaires). Avec le développement des approches de décision dite "risk-informed", de telles utilisations des facteurs d'importance sont appelées à se développer en pratique. Les décisions prises peuvent naturellement avoir des conséquences directes sur la sûreté des installations et elles méritent donc d'être étayées par des développements méthodologiques permettant de justifier et de valider les procédures de décision de maintenance basées sur les facteurs d'importance (quels facteurs utiliser pour la maintenance et comment les utiliser ?).

Cette approche de la décision basée sur la détermination et l'utilisation d'indicateurs issus des études de sûreté et de fiabilité est susceptible de présenter deux types de difficultés :

1. **Calcul des indicateurs** : en premier lieu, il faut être en mesure de calculer des indicateurs pertinents et représentatifs du système, sous des hypothèses réalistes. Ce calcul se heurte très rapidement à des obstacles méthodologiques. Ainsi, s'il existe des algorithmes efficaces pour calculer les divers facteurs d'importance existants sous l'hypothèse d'indépendance des composants du système étudié, le calcul d'un facteur d'importance fiabiliste devient très difficile à réaliser en présence de dépendances entre les composants du système.
2. **Utilisation et mise en œuvre des indicateurs** : en second lieu, comme il n'est pas toujours possible d'évaluer de façon exhaustive et complète les conséquences d'une décision sur le système, l'utilisation de ces indicateurs pour la prise de décision doit s'appuyer sur une démarche heuristique validée permettant d'éviter de "mauvaises" décisions, à défaut de savoir établir les décisions optimales.

Chacune de ces deux difficultés peut, à elle seule, justifier un programme de travail pour une (ou même plusieurs !) thèse. Dans le cadre de cette thèse, on s'intéressera donc principalement au problème de l'évaluation d'indicateurs de fiabilité pertinents et représentatifs de la réalité du système, avec pour objectif à plus long terme l'utilisation et la mise en œuvre de ces indicateurs pour la prise de décision.

1.2 Modélisation des dépendances : une difficulté accrue et un enjeu pour l'évaluation d'indicateurs fiables

Bien évidemment, dans les pratiques actuelles, on construit déjà de tels indicateurs à partir des études probabilistes de sûreté pour les utiliser dans des procédures de décision basées sur le risque (" risk-informed decision making "). C'est notamment le cas en maintenance lorsqu'il faut hiérarchiser et choisir les actions à réaliser avec un budget limité. Cependant, une analyse détaillée de l'utilisation des études de sûreté dans les procédures de décisions montrent que de nombreux problèmes persistent, comme le rapporte K.N. Fleming dans un rapport publié en 2003, [49]. Il apparaît ainsi que les dépendances existant entre les différents éléments du système étudié sont rarement prises en compte explicitement dans les études probabilistes de sûreté qui reposent sur l'hypothèse simplificatrice (mais parfois peu réaliste) d'indépendance des composants. Or, l'existence de ces dépendances affecte souvent de façon notable les probabilités d'occurrence des événements redoutés sur un système, et en les négligeant, on s'expose à de graves erreurs d'appréciation sur les composants les plus critiques pour la sûreté et sur les décisions les plus appropriées.

La prise en compte et la modélisation des dépendances entre les différents composants d'un système constituent donc une direction privilégiée d'amélioration des études probabilistes de sûreté pour la prise de décision. Naturellement, la prise en compte des dépendances, si elle constitue une hypothèse de travail plus réaliste et permet de construire des indicateurs de décision plus fiables, conduit à des modèles plus complexes et accroît les difficultés de modélisation. Comme nous le verrons par la suite, la présence de dépendances complique significativement le travail de définition et d'évaluation des indicateurs d'importance fiabiliste des composants d'un système. On s'intéressera en particulier aux dépendances stochastiques (c'est-à-dire les interactions qui peuvent survenir entre les composants lorsqu'on les assemble pour remplir une fonction commune, par exemple, défaillances de cause commune) ou aux dépendances fonctionnelles qui confèrent un comportement "dynamique" au système.

Les phénomènes de défaillances de cause commune affectent ou peuvent affecter, simultanément ou en cascade, à partir d'une même cause, tout ou partie des composants d'une entité. Cette situation se produit lorsque plusieurs composants partagent un environnement commun ou des caractéristiques de conception identiques. Il ne fait aucun doute que les défaillances de cause commune contribuent de façon notable à la probabilité d'occurrence d'un événement redouté sur un système. Il est donc indispensable de prendre en compte ces dépendances stochastiques lors de l'évaluation de l'importance des composants d'un système. De façon plus générale, il faudra prendre en compte divers autres types de dépendances qui sont présentes dès que le comportement fiabiliste d'un composant dépend de l'état d'autres composants (partage

de charge, ...).

Les défaillances fonctionnelles (dues par exemple à la présence de redondance passive, de reconfigurations possibles du système selon la phase de mission en cours, d'actions de maintenance, ...) doivent également être prises en compte. En présence de ces dépendances, les études de fiabilité doivent adopter des approches plus "dynamiques" que celles des modèles booléens classiques, relevant soit de modèles analytiques (modèle de Markov, arbres de défaillances dynamiques, ...), soit de méthodes basées sur la simulation stochastique (simulation de Monte Carlo), soit de méthodes mixtes.

De nombreuses approches sont proposées dans la littérature pour prendre en compte ce type de dépendances (dépendances fonctionnelles/structurelles, défaillances de cause commune, ...) dans le but de modéliser de manière plus réaliste les comportements dynamiques du système. Une étude bibliographique sur ces approches sera exposée dans le paragraphe 2.2 (du chapitre 2).

1.3 Analyses de sensibilité et facteurs d'importance fiabilistes

Dans le domaine nucléaire, comme dans la plupart des autres champs d'application de l'ingénierie de la fiabilité et de la sûreté (transports, pétrochimie, systèmes instrumentés de sécurité...), une étude probabiliste de sûreté et de fiabilité n'a plus pour seul objectif de vérifier qu'un niveau de performance requis est effectivement atteint. Ces études doivent en effet également permettre d'améliorer la conception, l'exploitation et la maintenance du système considéré en offrant des éléments de réponse aux questions suivantes :

- quels composants ou modules du système contribuent le plus à sa défiabilité ?
- sur quel composant agir pour améliorer de façon la plus efficace et la moins coûteuse les performances du système ?
- sur quel composant peut-on relâcher (ou au contraire doit-on absolument garantir) des exigences de maintenance ?

Les analyses de sensibilité ou d'importance permettent d'évaluer la contribution relative d'un composant à la fiabilité ou la défiabilité du système, et elles ont précisément pour objet de répondre (en partie, au moins) aux interrogations formulées ci-dessus. L'importance d'un composant dépend à la fois de sa fiabilité propre et de son rôle fonctionnel au sein du système et mesure la sensibilité du système au composant considéré et à ses caractéristiques [92]. Selon le type d'utilisation envisagée (amélioration de la fiabilité en conception, pilotage d'une stratégie de diagnostic de défaillance...) plusieurs facteurs d'importance différents ont été définis (facteur d'importance marginal, facteur d'importance critique, facteurs d'augmentation et de diminution du risque, facteur d'importance de diagnostic,...). Ces facteurs d'importance sont classiquement

définis a priori pour un système à partir de son architecture (fonction de structure) et des caractéristiques des composants et évalués par des méthodes plutôt combinatoires. On verra dans l'étude bibliographique du chapitre 2 (paragraphe 2.3) que l'on peut montrer que l'utilisation de ces facteurs et leurs méthodes d'évaluations deviennent rapidement difficiles d'utilisation ou moins efficaces en présence des systèmes complexes. Il est donc nécessaire d'une part de disposer de méthodes et d'outils d'évaluation de ces grandeurs, et d'autre part, d'extensions notables de ces facteurs.

1.4 Conclusions et problème proposé

La prise en compte des dépendances entre composants devient donc indispensable afin de pouvoir modéliser de manière plus réaliste des comportements dynamiques du système pour les études de sûreté de fonctionnement.

Les facteurs d'importance fiabilistes sont un outil efficace pour la prise de décision de maintenance, d'exploitation ou de conception. Cependant, sous leur forme classique (et avec les méthodes d'évaluations actuelles), ils ne peuvent pas tenir compte de dépendances entre les composants du système.

Dans ce mémoire, nous allons étudier la problématique de développement des facteurs d'importance fiabilistes avec pour but l'étude de sensibilité et l'importance d'un composants ou d'un groupe de composants dans un système "dynamique" avec dépendances. Nous orienterons nos travaux selon ces deux axes :

- une proposition d'un nouveau facteur d'importance fiabiliste basé sur une modélisation markovienne du système ;
- une étude des possibilités d'extensions et d'adaptation des facteurs d'importance fiabilistes existants dans le contexte des systèmes envisagés.

Chapitre 2

Étude bibliographique

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de montrer les travaux les plus significatifs par rapport d'une part à la modélisation des systèmes avec des dépendances entre des composants que nous considérons, d'autre part aux facteurs d'importance fiabilistes que nous exposons dans ce mémoire. L'étude bibliographique nous permet de choisir l'approche envisagée pour la modélisation des dépendances et de préciser l'orientation des travaux que l'on expose dans ce mémoire.

L'organisation de ce chapitre est la suivante. Dans un premier temps (section 2.2), on cherchera à présenter le problème de la modélisation des systèmes dynamiques en prenant en compte des dépendances entre les composants. Après avoir choisi un modèle de modélisation (approche markovienne), on présente les travaux relatifs à la modélisation markovienne en termes de modélisation des dépendances et des comportements dynamiques (multi-état, multiphasé, ...). Dans un second temps, on exposera (section 2.3) les travaux les plus significatifs par rapport aux facteurs d'importance fiabilistes afin de définir les deux axes d'orientation de la thèse (section 2.4) : une proposition d'un nouveau facteur d'importance et une extension d'un facteur d'importance existant dans le cadre des systèmes markoviens à composants dépendants.

2.2 Modélisation markovienne des systèmes

2.2.1 Modélisation des systèmes "dynamiques" avec dépendances

Il s'agit de modéliser des systèmes en prenant en compte les dépendances entre composants (par exemple, dépendances fonctionnelles ou structurelles, ...). Il existe trois approches principales : les arbres de défaillance dynamique, les réseaux de Petri et l'approche markovienne.

- La modélisation par arbre de défaillance (AdD), a été créée au début des années soixante,

et est utilisée dans de nombreux domaines pour les études de sûreté et de fiabilité qui concernaient des systèmes statiques (sans dépendances structurelles et/ou fonctionnelles) [3, 75]. Les arbres dynamiques [46, 76], développés au début des années quatre-vingt dix, modélisent des séquences de panne ou des dépendances fonctionnelles grâce à de nouvelles portes : les CSP (cold spare) qui en cas de panne du ou des composants en entrée "lance" les composants en redondance passive, les HSP (hot spare) pour les composants de secours en redondance active, les WSP (warm spare) pour les composants en redondance semi-active et enfin les portes FDEP (functional dependency gate) de dépendance fonctionnelle ;

- Les réseaux de petri stochastiques, (RdP) se sont développés depuis le début des années 1970 aux États-Unis et en Europe. Il s'agit de représenter l'évolution d'un système dynamique à événements discrets sous forme de graphe (places et transitions) et d'évaluer des indicateurs de fiabilité à partir de simulations de Monte-Carlo [4, 45] ;
- Les approches markoviennes sont fondées sur les travaux de Andreï Andreïevitch Markov (1856- 1922) en théorie des probabilités et plus particulièrement sur les "processus de Markov". Elles ont été appliquées à la sûreté de fonctionnement pour la première fois dans les années 50. Depuis, de nombreux progrès ont été réalisés, et des extensions permettent de résoudre un grand nombre de classes de problèmes. La modélisation des systèmes dynamiques par des processus markoviens présente l'avantage de permettre une évaluation analytique des indicateurs de fiabilité à partir de la résolution de systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre. On notera l'existence d'une abondante littérature sur le sujet [30, 73, 92, 95].

Nous avons retenu pour le travail présenté dans ce mémoire la modélisation markovienne qui permet d'intégrer "naturellement" les principales caractéristiques des systèmes pour lesquels nous cherchons à développer une méthode d'analyse d'importance probabiliste (dépendances stochastiques, fonctionnelles, comportement dynamique, ...).

2.2.2 Modélisation markovienne

Dans ce paragraphe, on présente les principaux travaux consacrés à la modélisation des systèmes dynamiques en utilisant les processus de markov de sauts.

Processus markovien de sauts Soit $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ un ensemble fini ou dénombrable d'états et $X = (X_t, t \geq 0)$ un processus à trajectoires continues à droite, à valeur dans E .

Définition 2.1. *Le processus X est un processus markovien de sauts (homogène) si pour tout n , tous $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, et tous e_0, e_1, \dots, e_{n+1} dans E tels que $\mathbb{P}(X_{t_0} = e_0, X_{t_1} =$*

$e_1, \dots, X_{t_n} = e_n) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = e_{n+1}/X_{t_0} = e_0, X_{t_1} = e_1, \dots, X_{t_n} = e_n) = \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = e_{n+1}/X_{t_n} = e_n)$$

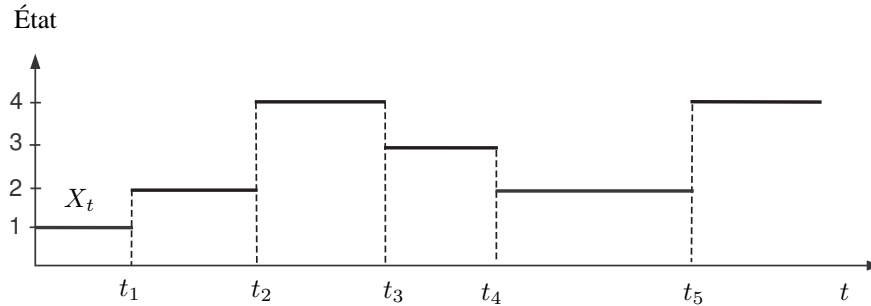


FIG. 2.1 – Trajectoire d'un processus de Markov

Equations de Chapman-Kolmogorov Un système physique est couramment décrit par des équations permettant de connaître les principales grandeurs observables qui le caractérisent. Une autre description consiste à s'intéresser non plus à son évolution physique mais plutôt à son "état". En d'autres termes, il s'agit de considérer l'ensemble des propriétés et/ou de comportements du système (variable interne ou d'environnement) qui peuvent influencer sur ses propriétés fiabilistes (probabilité de défaillance ou de réparation) et réciproquement. Une approche probabiliste de la fiabilité d'un système conduit inévitablement à distinguer un ou des états nominaux, des états dits "dégradés". Les équations d'état qui en résultent sont probabilistes et basées sur des états e_i du système identifiés. En sûreté de fonctionnement, la description conventionnelle des systèmes par l'approche markovienne est souvent basée sur une discrétisation des états des composants du système. Les états du système peuvent alors être déduits des états des composants en étudiant les interactions entre composants. Ainsi, les équations d'état permettent de rendre compte de l'évolution du système en fonction du temps en termes de probabilité d'occupation d'état du système $P_i(t) = \mathbb{P}(X_t = e_i)$, ceci à l'aide des probabilités de transition $P_{ij}(t)$ ($P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j/X_0 = i)$) avec $dP_{ij}(t) = p_{ij}dt$ pendant un intervalle de temps dt entre deux états e_i et e_j . Le paramètre p_{ij} est appelé taux de transition et n'est défini que si $P_{ij}(t)$ est dérivable. Dans de nombreuses applications, les taux de transition sont constants et peuvent correspondre aux taux de défaillance (notés λ) ou aux taux de réparation (notés μ) des composants qui causent les changements d'état. Toutes les lois de probabilité qui régissent les divers phénomènes pris en compte (les temps de séjour dans chaque état notamment) sont donc de nature exponentielle et un tel processus stochastique est dénommé processus de Markov homogène.

On peut construire l'équation d'état d'un système S associée à l'espace discret E en faisant intervenir les taux de transition instantanés p_{ij} (s'ils existent bien entendu) sous forme d'un système d'équations différentielles de **Chapman-Kolmogorov**. On considère ainsi pour chaque état e_i :

$$P_i(t + dt) = \mathbb{P}(X_{t+dt} = e_i) = \mathbb{P}(S \text{ dans l'état } e_i \text{ à } t \text{ et durant } [t, t + dt]) + \\ + \sum_{e_j \in E - \{e_i\}} \mathbb{P}(S \text{ dans l'état } e_j \text{ à l'instant } t \text{ et dans l'état } e_i \text{ à l'instant } t + dt).$$

En ne tenant compte que des termes du premier ordre (les termes du second ordre correspondent à deux transitions élémentaires), on obtient :

$$P_i(t + dt) = P_i(t) \left[1 - \sum_{e_j \in E - \{e_i\}} p_{ij} dt \right] + \sum_{e_j \in E - \{e_i\}} P_j(t) p_{ji} dt.$$

D'où, en faisant apparaître la différence $P_i(t + dt) - P_i(t)$ puis en divisant par dt :

$$\frac{P_i(t + dt) - P_i(t)}{dt} = -P_i(t) \sum_{e_j \in E - \{e_i\}} p_{ij} + \sum_{e_j \in E - \{e_i\}} P_j(t) p_{ji} \\ = P_i(t) p_{ii} + \sum_{e_j \in E - \{e_i\}} P_j(t) p_{ji},$$

où $p_{ii} = - \sum_{e_j \in E - \{e_i\}} p_{ij}$. Et $|p_{ii}|$ représente donc le taux de transition de e_i vers n'importe quel autre état différent (et non pas le taux de transition de e_i vers lui-même).

Comme chaque état fait l'objet d'une équation similaire, l'ensemble de ces équations peut être rassemblé sous une forme matricielle qui constitue la formule de base des processus markoviens homogènes :

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{M}, \quad (2.1)$$

où,

- $\mathbf{M} = [p_{ij}]_{i,j \in E}$: matrice des taux de transition (ou matrice génératrice) du processus de Markov,
- $\mathbf{P}(t) = (P_1(t), P_2(t), \dots)$: vecteur de probabilité d'occupation des états.

2.2.2.1 Modélisation d'un système à composants indépendants

Composant binaire L'approche classique ne considère que deux états, état de marche parfaite et état de panne totale, pour chaque composant.

Considérons un composant de taux de défaillance λ et de taux de réparation μ constants et dont toutes les durées de fonctionnement et de réparation sont indépendantes entre elles.

Le comportement de ce composant est décrit par un processus markovien¹ X_t à valeur dans $E = \{1, 0\}$ de matrice génératrice :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

Son graphe d'états est donné dans la figure 2.2 ci-dessous :

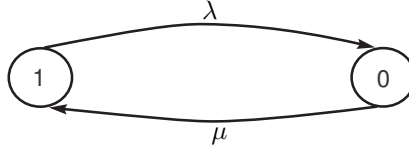


FIG. 2.2 – Graphe d'états d'un composant binaire

Système avec composants indépendants Considérons un système de n composants élémentaires C_1, C_2, \dots, C_n indépendants stochastiquement. Le taux de défaillance du composant C_i est λ_i , son taux de réparation est μ_i . L'ensemble des états du système est $E = \{0, 1\}^n$ et l'état $e_i = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ avec $c_k = \{0, 1\}$.

Construction automatique de la matrice génératrice Pour un grand système, il est difficile de construire manuellement sa matrice génératrice, et la construire automatiquement devient nécessaire. Cela se fait à partir de la relation 2.2 en utilisant la somme de Kronecker.

Soit \mathbf{M}_i la matrice génératrice du processus markovien pour le composant élémentaire C_i ($i = 1, \dots, n$). La matrice génératrice \mathbf{M} peut être établie selon l'expression suivante :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{M}_n = \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{M}_i, \quad (2.2)$$

où :

$$\mathbf{M}_i \oplus \mathbf{M}_j = \mathbf{M}_i \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_j, \text{ pour } i, j = 1, \dots, n. \mathbf{I} \text{ étant la matrice d'identité.}$$

Par exemple, on s'intéresse à la construction de la matrice génératrice qui correspond à un système à deux composants indépendants (C_1 et C_2) à partir de deux matrices génératrices \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 qui correspondent aux composants élémentaires C_1 et C_2 .

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 \\ \mu_1 & -\mu_1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & \lambda_2 \\ \mu_2 & -\mu_2 \end{pmatrix}.$$

¹Tout le reste du mémoire, nous écrirons souvent "processus markovien" au lieu de "processus markovien de sauts"

Alors :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \mathbf{M}_2 \oplus \mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & \lambda_2 \\ \mu_2 & -\mu_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 \\ \mu_1 & -\mu_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \mu_1 & -\mu_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1 - \lambda_2 & 0 & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & -\lambda_1 - \mu_2 & \lambda_1 \\ 0 & \mu_2 & \mu_1 & -\mu_1 - \mu_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

2.2.2.2 Modélisation d'un système à composants dépendants

Dans de nombreux articles, les différents types de dépendances sont pris en compte grâce à la modélisation markovienne, voir par exemple [83, 30, 92]. On présente ici deux types de dépendances principales : les dépendances fonctionnelles/structurelles et les dépendances relevant de phénomènes de défaillances de cause commune.

Dépendances fonctionnelles/structurelles Dans plusieurs systèmes industriels, les dépendances fonctionnelles et structurelles peuvent exister entre les composants : c'est le cas par exemple lorsque la mise en œuvre d'un composant dépend de l'état d'autres composants (re-configurations, redondance passive, ...) ou encore lorsque le comportement fiabiliste d'un composant dépend de l'état d'autres composants (taux de défaillance accru en cas de perte d'un système auxiliaire, ...).

Redondance passive Considérons deux composants élémentaires C_1 et C_2 en redondance passive. Le composant C_1 est initialement en fonctionnement et le composant C_2 est en attente. Lorsque le composant C_1 tombe en panne, le composant C_2 devra être mis en service. La probabilité de refus de démarrage du composant C_2 est γ . Les taux de défaillance et de réparation du composant C_i sont λ_i et μ_i respectivement. Le composant C_2 ne peut tomber en panne lorsqu'il est en attente. Ces comportements dynamiques du système peuvent être modélisés par un processus markovien dont le graphe d'état de markov est donné dans la figure 3.6.

Partage de charge Considérons un système formé de 2 composants élémentaires C_1 et C_2 en parallèle. Le taux de réparation du composant C_i est μ_i . Le taux de défaillance du composant C_i est λ_i en fonctionnement normal (c'est-à-dire si l'autre composant est en fonctionnement).

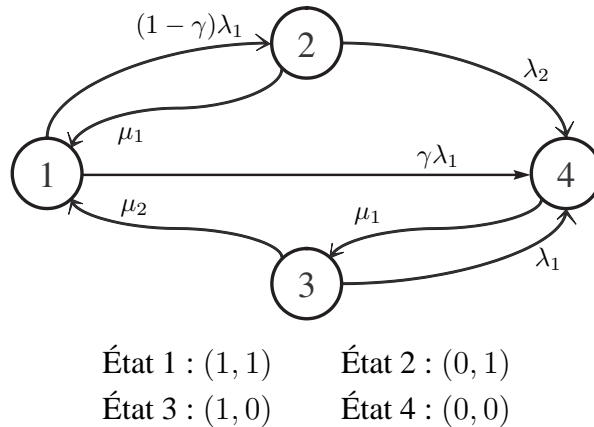


FIG. 2.3 – Graphe d'états d'un système de deux composants en redondance passive

Par contre si un composant est en réparation, le composant restant est plus "sollicité" et son taux de défaillance est $\bar{\lambda}_i (> \lambda_i)$. Alors le comportement du système peut être modélisé par un processus markovien dont le graphe est donné dans la figure 2.4.

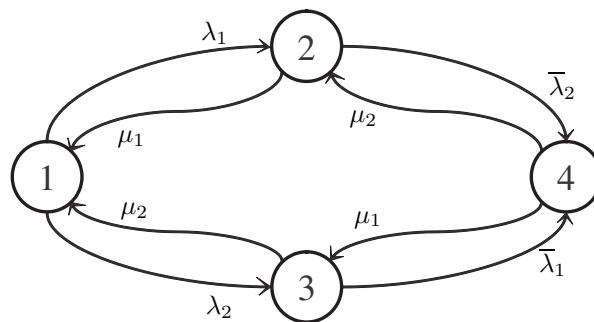


FIG. 2.4 – Graphe d'états d'un système de 2 composants en parallèle avec le partage de charge

Défaillances de cause commune Une défaillance de cause commune (DCC [5, 7, 50, 10]) se produit sur un système lorsque des défaillances (quasi) « simultanées » de plusieurs entités du système se produisent en réponse à une même cause sous-jacente. Dans le pire des cas, tout le système peut tomber en panne à cause d'un seul et même phénomène initiateur. Ce phénomène entraîne évidemment des dépendances entre les défaillances des composants du système, ce qui vient contredire l'hypothèse d'indépendance généralement retenue dans les modèles de fiabilité. Ces dépendances peuvent être dues à des facteurs environnementaux (mécanique, thermique, électrique, chimique...) ou à des liens fonctionnels (conception, fabrication et technologie identiques, procédures de maintenance similaires, proximité géographique...). L'utilisation des processus markoviens pour modéliser des défaillances de cause commune a été étudiée par Platz [89]. En effet, l'auteur considère un modèle de deux composants en parallèle. Les deux

composants peuvent faillir au même moment lorsqu’une défaillance de cause commune survient avec un taux de défaillance λ_C ; ceci quel que soit le nombre de composants en fonctionnement à ce moment là. Cela signifie que le taux λ_C doit être ajouté au taux de défaillance classique lorsqu’un des deux composants est en fonctionnement. Le graphe de Markov est présenté sur la figure 2.5.

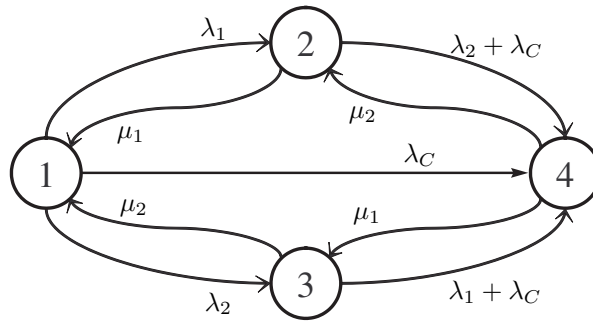


FIG. 2.5 – Graphe d’états d’un système de 2 composants en parallèle en présence des défaillances de cause commune

2.2.2.3 Modélisation d’un système dynamique

On considère ici deux types de systèmes dynamiques : les systèmes multi-états et les systèmes multiphasés.

Systèmes multi-états Sous l’hypothèse “binaire”, seulement deux états (marche/panne) sont considérés pour chaque composant. Cependant, du point de vue pratique, plusieurs systèmes industriels ne vérifient pas cette hypothèse, comme par exemple, les systèmes de génération électrique, les lignes de production, ..., dans lesquels les composants peuvent continuer à assurer un service même s’ils ne sont pas dans un état de marche parfaite. Ces états intermédiaires sont appelés des états “dégradés”. On distingue en général des états de dégradations intermédiaires qui permettent de transiter successivement entre l’état neuf ou le moins dégradé et l’état de panne. Ce type de systèmes est appelé des systèmes multi-état (*multi-state systems* [8, 34, 79]). Pour modéliser les comportements de ces composants, les processus markoviens sont proposés dans [2, 14, 72].

Systèmes multiphasés Pour un système multiphasé (*multi-phase system*), sa mission est caractérisée par des phases différentes. La structure du système, le processus de défaillance et de restauration, et aussi les critères de succès peuvent changer selon chaque phase. Par exemple, un avion devrait changer sa configuration pour le décollage ou pour l’atterrissage, etc. Afin

de modéliser le comportement de ces systèmes, les processus markoviens sont proposés dans [62, 96].

Réduction de la taille des graphes Avec une modélisation markovienne, le nombre d'états augmente très rapidement lorsque le nombre de composants constituant le système augmente. Pour des grands systèmes, il faut alors trouver des moyens pour limiter ce nombre d'états à la combinatoire explosive. Il existe pour cela deux approches principales [81, 93, 95] :

- les réductions/simplifications rigoureuses qui conduisent à un graphe équivalent plus petit ;
- les réductions/simplifications approchées qui conduisent à un graphe donnant des résultats numériques proches des résultats exacts.

2.3 Facteurs d'importance fiabilistes

Les facteurs d'importance permettent de fournir des éléments d'aide à la décision pour améliorer la conception et l'exploitation d'un système en identifiant les principaux points faibles. Deux catégories de facteurs d'importance ont été proposées : les facteurs d'importance structurels (*structural importance measures*) et les facteurs d'importance fiabilistes (*reliability importance measures*). Les facteurs d'importance structurels donnent l'importance relative d'un composant grâce seulement à sa position dans la structure d'arbre de défaillance, et ils peuvent être utilisés même si la loi de durée de vie (la disponibilité) du composant n'est pas connue. Ces facteurs ne permettent pas de distinguer des composants qui ont des comportements fiabilistes différents mais qui se situent à des positions similaires dans la structure du système. Les facteurs d'importance fiabilistes évaluent l'importance relative d'un composant en prenant en compte de façon conjointe ses contributions structurelle et probabiliste à la fiabilité du système. Dans ce mémoire, nous ne considérons que les facteurs d'importance fiabilistes.

Plusieurs facteurs d'importance fiabilistes ont été proposés, et les plus couramment utilisés sont :

- le facteur d'importance marginal (*marginal importance measure* - MIM [11]),
- le facteur d'importance conjoint (*joint importance measure* - JIM [67]),
- le facteur d'importance critique (*criticality importance measure* - CIM [75]),
- le facteur d'importance de diagnostic (*Diagnostic importance factor* - DIF [53]),
- le facteur d'augmentation du risque (*risk achievement worth* - RAW [28]),
- le facteur de diminution du risque (*risk reduction worth* - RRW [28]),
- et récemment, le facteur d'importance différentiel (*differential importance measure* - DIM [18]).

Ces facteurs d'importance ont été classiquement définis dans le cadre des modèles booléens de fiabilité (arbres de défaillances, arbres d'événements) et des algorithmes d'évaluation performants, basés notamment sur les diagrammes de décision binaire (*binary decision diagrams*-BDD [27, 44]) ont été développés. Sous leur forme classique et avec les méthodes d'évaluation actuelles, ils constituent donc des indicateurs de performances statiques, utilisables sous l'hypothèse de composants binaires et indépendants et pour une architecture de système définie a priori.

2.3.1 Facteurs d'importance fiabilistes classiques

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à présenter les facteurs d'importance fiabilistes évoqués précédemment et les liens directs entre eux dans le contexte des systèmes à composants stochastiquement indépendants.

Facteur d'importance marginal (marginal importance measure, MIM)

Le facteur d'importance marginal, introduit par Birnbaum [11], est défini comme une mesure de variation de la disponibilité/fiabilité du système en fonction de la disponibilité/fiabilité d'un composant. Par définition, le facteur d'importance marginal relatif au composant i peut s'écrire selon l'expression suivante :

$$\text{MIM}(i|t) = \frac{\partial A(t)}{\partial a_i(t)} \text{ (ou } \frac{\partial \bar{A}(t)}{\partial \bar{a}_i(t)}), \quad (2.3)$$

où :

- $A(t)$, $a_i(t)$ sont les disponibilités/fiabilités du système et du composant i à l'instant t ,
- $\bar{A}(t)$, $\bar{a}_i(t)$ sont les indisponibilités/défiabilités du système et du composant i à l'instant t .

Pour les systèmes binaires avec des composants stochastiquement indépendants, la disponibilité/fiabilité du système est une fonction linéaire de la disponibilité/fiabilité de chacun des composants (voir la relation (2.16)). Alors si la disponibilité du composant i à l'instant t subit une variation δ , la disponibilité du système au même instant varie de $\delta \text{MIM}(i/t)$. Par conséquent, MIM mesure la sensibilité de la disponibilité du système à l'état d'un composant. Si on veut augmenter la disponibilité/fiabilité du système, il faut donc commencer par améliorer la disponibilité/fiabilité du composant qui a le plus grand facteur d'importance marginal.

Une autre façon permettant de calculer ce facteur est donnée selon l'expression suivante, [92] :

$$\text{MIM}(i|t) = \mathbb{P}\{\varphi(1_i, \mathbf{s}) - \varphi(0_i, \mathbf{s}) = 1\}, \quad (2.4)$$

où :

- $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3, \dots)$ représente le vecteur d'états du système avec s_i une variable booléenne indiquant l'état du composant i : $s_i = 1$ si le composant i est en marche, sinon $s_i = 0$;
- $(1_i, \mathbf{s}) = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, 1, s_{i+1}, \dots)$,
- $\varphi(\mathbf{s})$ correspond à la fonction de structure du système pour laquelle $\varphi(\mathbf{s}) = 1$ si le système est en marche, $\varphi(\mathbf{s}) = 0$ en cas de panne .

Le facteur d'importance marginal relatif au composant i dans un système cohérent peut donc être défini comme la probabilité que la panne du composant i conduise à la panne du système.

Facteur d'importance conjoint (joint importance measure, JIM)

Le facteur d'importance conjoint [6, 56, 66, 67, 100] mesure l'action conjointe de deux composants i et j sur la disponibilité du système. Sa définition est :

$$\text{JIM}(i, j|t) = \frac{\partial^2 A(t)}{\partial a_i(t) \partial a_j(t)} \quad (2.5)$$

D'après (2.3) et (2.5), on a une relation directe entre le facteur d'importance marginal et le facteur d'importance conjoint comme suit :

$$\begin{aligned} \text{JIM}(i, j|t) &= \frac{\partial \text{MIM}(i|t)}{\partial a_j(t)} \\ &= \frac{\partial \text{MIM}(j|t)}{\partial a_i(t)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Cette relation nous montre que le $\text{JIM}(i, j|t)$ mesure la sensibilité du $\text{MIM}(i|t)$ à l'état du composant j (ou la sensibilité du $\text{MIM}(j|t)$ à l'état du composant i respectivement). Pour un système binaire avec des composants indépendants, le $\text{MIM}(i|t)$ est une fonction linéaire de la disponibilité/fiabilité du composant j . Alors si la disponibilité/fiabilité du composant j , à l'instant t , subit une variation δ le $\text{MIM}(i|t)$ devrait varier de $\delta \text{JIM}(i|t)$.

Il est démontré que le facteur JIM peut s'écrire en fonction du facteur MIM (voir [6, 67]) :

$$\begin{aligned} \text{JIM}(i, j|t) &= \text{MIM}(j|t)_{1_i} - \text{MIM}(j|t)_{0_i} \\ &= \text{MIM}(1|t)_{1_j} - \text{MIM}(i|t)_{0_j}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

où : $\text{MIM}(j|t)_{1_i}$ correspond à $\text{MIM}(j|t)$ sachant que le composant i est en marche et $\text{MIM}(j|t)_{0_i}$ correspond à $\text{MIM}(j|t)$ sachant que le composant i est en panne.

Si on utilise le critère MIM pour évaluer l'importance d'un composant, alors la relation (2.7) nous montre que :

- $\text{JIM}(i, j|t) > 0$ (par conséquent $\text{MIM}(j|t)_{1_i} > \text{MIM}(j|t)_{0_i}$) indique que le composant j a plus d'impact sur la disponibilité du système lorsque le composant i fonctionne,

- $JIM(i, j|t) < 0$ indique que le composant j a moins d'impact sur la disponibilité du système lorsque le composant i fonctionne,
- $JIM(i, j|t) = 0$ indique que l'impact du composant j est indépendant de l'état du composant i .

La relation (2.7) montre également que le facteur JIM peut être évalué grâce au facteur MIM.

Facteur d'importance de critique (criticality importance measure, CIM)

Le facteur d'importance critique, introduit par Lambert [75], correspond à la probabilité que le composant i ait mis en panne le système, sachant que le système est en panne. Ce facteur évalue donc l'importance d'un composant en fonction de sa participation à la mise en panne du système global.

$$\begin{aligned} CIM(i|t) &= \mathbb{P}\{(\varphi(1_i, \mathbf{s}) - \varphi(0_i, \mathbf{s}) = 1) \cap s_i = 0 / \varphi(\mathbf{s}) = 0\} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{(\varphi(1_i, \mathbf{s}) - \varphi(0_i, \mathbf{s}) = 1) \cap s_i = 0, \varphi(\mathbf{s}) = 0\}}{\mathbb{P}\{\varphi(\mathbf{s}) = 0\}} \end{aligned}$$

Notons que :

- $\{(\varphi(1_i, \mathbf{s}) - \varphi(0_i, \mathbf{s}) = 1) \cap s_i = 0\}$ implique $\varphi(\mathbf{s}) = 0$;
- et que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{(\varphi(1_i, \mathbf{s}) - \varphi(0_i, \mathbf{s}) = 1) \cap s_i = 0\} &= \mathbb{P}\{\varphi(1_i, \mathbf{s}) - \varphi(0_i, \mathbf{s}) = 1\} \mathbb{P}\{s_i = 0\} \\ &= MIM(i|t) \bar{a}_i(t), \end{aligned}$$

où : $\bar{a}_i(t) = \mathbb{P}\{s_i = 0\}$ l'indisponibilité/défiabilité du composant i . On obtient finalement :

$$CIM(i|t) = MIM(i|t) \frac{\bar{a}_i(t)}{\bar{A}(t)}, \quad (2.8)$$

avec $\bar{A}(t) = \mathbb{P}\{\varphi(\mathbf{s}) = 0\}$ l'indisponibilité/défiabilité du système.

Ce facteur est en fait utile en cas de panne pour identifier les composants à réparer en priorité, c'est-à-dire ceux dont la mise en marche est la plus susceptible de restaurer le fonctionnement du système.

Facteur de diminution du risque (risk reduction worth - RRW)

Le facteur de diminution du risque [28] représente la diminution maximum du risque que l'on peut espérer en améliorant la disponibilité/fiabilité du composant i . Sa définition est :

$$RRW(i|t) = \frac{\mathbb{P}\{\varphi(\mathbf{s}) = 0\}}{\mathbb{P}\{\varphi(1_i, \mathbf{s}) = 0\}} = \frac{\bar{A}(t)}{\bar{A}(1_i|t)},$$

avec $\bar{A}(1_i|t) = \mathbb{P}\{\varphi(1_i, \mathbf{s}) = 0\}$ la probabilité pour que le système soit en panne à l'instant t sachant que le composant i est en marche.

Ce facteur d'importance est intéressant pour repérer les composants dont l'amélioration de la disponibilité/fiabilité est la plus susceptible d'augmenter celle du système. Alors, elle est couramment utilisée pour déterminer les composants à fiabiliser en priorité dans le cadre d'une maintenance préventive.

Le lien direct entre les deux facteurs RRW et MIM est donné ¹ par la relation suivante :

$$\text{RRW}(i|t) = \frac{1}{1 - \text{MIM} \frac{\bar{a}_i(t)}{\bar{A}(t)}}. \quad (2.9)$$

Facteur d'augmentation du risque (risk achievement worth, RAW)

Le facteur d'augmentation du risque [28] est un indicateur de l'importance qu'il y a à maintenir le niveau de disponibilité du composant i pour maintenir la disponibilité du système. Sa définition est la suivante :

$$\text{RAW}(i|t) = \frac{\mathbb{P}\{\varphi(0_i, \mathbf{s}) = 0\}}{\mathbb{P}\{\varphi(\mathbf{s}) = 0\}} = \frac{\bar{A}(0_i|t)}{\bar{A}(t)}, \quad (2.10)$$

où : $\bar{A}(0_i|t) = \mathbb{P}\{\varphi(0_i, \mathbf{s}) = 0\}$ la probabilité pour que le système soit en panne à l'instant t sachant que le composant i est en panne.

Cette quantité ne représente pas l'importance du composant lui-même mais "l'immunité" du système vis-à-vis de la défaillance du composant. D'après [28], un RAW élevé reflète une mauvaise immunité du système vis-à-vis de la défaillance du composant en question. C'est l'interprétation du RAW en termes de sûreté.

Ce facteur d'importance peut être évalué à partir du facteur MIM selon l'expression suivante¹ :

$$\text{RAW}(i|t) = \text{MIM} \frac{a_i(t)}{\bar{A}(t)} + 1. \quad (2.11)$$

Facteur d'importance de diagnostic (Diagnostic importance factor, DIF)

Le facteur d'importance de diagnostic, introduit par Vesely-Fussel [53], est la probabilité que le composant i soit en panne, sachant que le système est effectivement en panne. Sa défini-

¹les développements détaillés seront exposés dans l'annexe A.1.

tion est la suivante :

$$\text{DIF}(i|t) = \mathbb{P}\{s_i = 0 / \varphi(\mathbf{s}) = 0\} = \frac{\mathbb{P}\{s_i = 0, \varphi(\mathbf{s}) = 0\}}{\mathbb{P}\{\varphi(\mathbf{s}) = 0\}} \quad (2.12)$$

$$= \frac{\mathbb{P}\{\varphi(0_i, \mathbf{s})\} \mathbb{P}\{s_i = 0\}}{\mathbb{P}\{\varphi(\mathbf{s}) = 0\}} = \frac{\bar{A}(0_i|t)}{\bar{A}(t)} \bar{a}_i(t). \quad (2.13)$$

Ce facteur représente la proportion de temps où le composant i est en panne lorsque le système est en panne. A ce titre, $\text{DIF}(i|t)$ est utilisé comme un facteur de contribution au risque du composant i . Il faut remarquer que le système peut être en panne sans que i le soit. En effet, le composant i n'a pas nécessairement déclenché la panne du système.

D'après (2.10), (2.11) et (2.12), le facteur DIF relatif du composant i peut s'écrire comme suit :

$$\text{DIF}(i|t) = \text{RAW} \bar{a}_i(t) = (\text{MIM} \frac{a_i(t)}{\bar{A}(t)} + 1) \bar{a}_i(t). \quad (2.14)$$

Cette relation permet d'évaluer le facteur DIF à partir du facteur RAW ou du facteur MIM.

Facteur d'importance différentiel (differential importance measure, DIM)

Récemment, un nouveau facteur appelé facteur d'importance différentiel a été introduit [16, 17, 18] afin de mesurer la contribution relative d'un composant à la variation totale de la disponibilité/fiabilité (ou plus généralement, d'une mesure de performance), qui est provoquée par les changements simultanés d'un ou plusieurs paramètres.

Supposons que les indisponibilités/fiabilités de K composants $(a_1(t), a_2(t), \dots, a_K(t))$ varient simultanément selon des quantités dites "suffisamment petites"² $\delta a_1(t), \delta a_2(t), \dots, \delta a_K(t)$ respectivement. Le facteur d'importance différentiel relatif du composant i est défini selon l'expression suivante :

$$\text{DIM}(i|t) = \frac{\frac{\partial A(t)}{\partial a_i(t)} \delta a_i(t)}{\sum_{j=1}^K \frac{\partial A(t)}{\partial a_j(t)} \delta a_j(t)}.$$

En regardant la définition du facteur MIM, on obtient une relation suivante :

$$\text{DIM}(i|t) = \frac{\text{MIM}(i|t) \delta a_i(t)}{\sum_{j=1}^K \text{MIM}(j|t) \delta a_j(t)}. \quad (2.15)$$

C'est-à-dire que l'on peut utiliser le facteur MIM afin de calculer le facteur DIM.

²La condition "suffisamment petits" a été démontrée dans [18] en utilisant le critère de convergence de la séquence de Cauchy

Conclusions

1. L'étude ci-dessus montre que tous les facteurs d'importance fiabilistes classiques peuvent être évalués à partir du facteur d'importance marginal MIM, voir le tableau 2.1 (détail dans l'annexe A).
2. L'utilisation des facteurs d'importance fiabilistes pour classifier l'importance d'un composant a été exposée dans de nombreux articles. Lorsque chaque facteur d'importance donne un classement d'importance différent, alors la combinaison des informations données par les facteurs d'importance d'un composant afin de classifier l'importance globale d'un composant a également été étudiée [47, 98, 101]. Les études dans [98] montrent que l'ensemble des informations fournies par les différents facteurs permet de prendre une décision ... Parmi ces facteurs d'importance, le facteur d'importance marginal est le plus important si le but est d'optimiser la maintenance.

JIM($i t$)	CIM($i t$)	RRW($i t$)	RAW($i t$)	DIF($i t$)	DIM($i t$)
$MIM(1_i) - MIM(0_i)$	$MIM \frac{\bar{a}_i(t)}{A(t)}$	$\frac{1}{1 - MIM \frac{\bar{a}_i(t)}{A(t)}}$	$MIM \frac{a_i(t)}{A(t)} + 1$	$(MIM \frac{a_i(t)}{A(t)} + 1) \bar{a}_i(t)$	$\frac{MIM \delta a_i(t)}{\sum_{j=1}^K MIM \delta a_j(t)}$

TAB. 2.1 – Liens directs entre le MIM et les autres facteurs d'importance. MIM dans le tableau correspond à MIM($i|t$)

Nous nous intéressons donc, dans la suite de ce chapitre, aux travaux les plus significatifs par rapport au facteur d'importance marginal (MIM).

2.3.2 Facteur d'importance marginal pour un système markovien

On étudie ici les travaux publiés sur le facteur MIM dans le contexte des systèmes décrits par des processus de Markov. On distingue deux grandes classes des systèmes :

- les systèmes à composants indépendants ;
- et les systèmes avec des composants dépendants.

2.3.2.1 Système à composants indépendants

Lorsque les composants du systèmes sont indépendants, une décomposition pivotale de Shannon pour le composant i permet d'écrire la disponibilité/fiabilité du système sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} A(t) &= a_i(t) * A(1_i|t) + (1 - a_i(t)) * A(0_i|t) \\ &= a_i(t)[A(1_i|t) - A(0_i|t)] + A(0_i|t). \end{aligned} \quad (2.16)$$

- $A(1_i|t)$ est la probabilité que le système est en marche à l’instant t sachant que le composant i est en marche ($a_i(t) = 1$);
- $A(0_i|t)$ est la probabilité que le système est en marche à l’instant t sachant que le composant i est en panne ($a_i(t) = 0$).

Par définition, le facteur d’importance marginal relatif du composant i peut donc s’écrire comme suit :

$$\text{MIM}(i|t) = \frac{\partial A(t)}{\partial a_i(t)} = A(1_i|t) - A(0_i|t), \quad (2.17)$$

De façon similaire, afin d’étudier l’importance d’un groupe de composants, Huseby [69] propose le MIM relatif du groupe de composants S selon l’expression suivante :

$$\text{MIM}(S|t) = A(1_S|t) - A(0_S|t). \quad (2.18)$$

Les relations (2.17) et (2.18) permettant de calculer le facteur d’importance marginal pour un composant ou un groupe de composants. Cette solution reste cependant limitée aux systèmes dont tous les composants sont indépendants, ce qui la rend en pratique d’un intérêt limité pour les systèmes étudiés sous l’aide d’un modèle markovien (puisque les solutions classiques, basées sur la fonction de structure du système, restent valables dans ce contexte). De plus, cette méthode n’est certainement pas optimale du point de vue “charge de calcul”.

2.3.2.2 Système à composants dépendants

Dans le cas de composants dépendants, la disponibilité du système ne peut plus être formulée comme une fonction des seules caractéristiques des composants. Les dépendances résultent en effet d’interactions au niveau du système qui sont prises en compte dans le calcul de la disponibilité $A(t)$ du système, mais qui n’apparaissent pas dans l’expression de la disponibilité d’un composant pris individuellement. La disponibilité du système n’est donc plus une fonction de la disponibilité des composants, ce qui remet en cause la définition des facteurs d’importance tels qu’on les envisage classiquement. En effet, quelle signification peut-on donner à la définition du facteur d’importance marginal $\text{MIM}(i|t) = \frac{\partial A(t)}{\partial a_i(t)}$ dans ce contexte ? Cette définition est aussi ambiguë car la disponibilité du composant $a_i(t)$ à considérer n’est elle-même pas claire. En effet, sous l’hypothèse de composants indépendants, la disponibilité/fiabilité du composant

i ($i = 1, 2, \dots$) dans le système notée $a_i^S(t)$ (voir l'équation (2.27)) et celle de ce composant pris isolément $a_i^I(t)$ sont identiques et généralement notées $a_i(t)$ qui est donnée par l'expression suivante :

$$a_i^S(t) = a_i^I(t) = a_i(t) = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} e^{-(\lambda_i + \mu_i)t}, \quad (2.19)$$

λ_i, μ_i étant les taux de défaillance et de réparation du composant i .

En revanche, en prenant en compte des dépendances entre les composants, l'état d'un composant peut dépendre de l'état des autres composants. Il est donc important de noter que $a_i^S(t)$ peut dépendre non seulement du comportement propre du composant i mais aussi d'autres composants dans le système et du fonctionnement du système lui-même [85] et que $a_i^S(t)$ peut être différent de $a_i^I(t)$.

Remarquons également qu'en présence de composants dépendants, la décomposition pivotale donnée par l'équation (2.16) n'est plus valable, c'est-à-dire que la disponibilité/fiabilité n'est plus une fonction linéaire de la disponibilité/fiabilité de chacun des composants.

Face à cette difficulté, des auteurs ont été tentés de proposer une généralisation du facteur d'importance marginal notée MIM^G , [51, 85, 55], définie selon l'expression suivante :

$$\text{MIM}^G(i|t) = \frac{\partial A(t)}{\partial a_i^I(t)} \quad (2.20)$$

Afin d'évaluer ce facteur généralisé, plusieurs approches différentes ont été mises en œuvre par différents auteurs : méthode de Frank, méthode de perturbation généralisée et méthode d'approximation. La comparaison détaillée de ces trois méthodes est exposée dans [41]. Notons cependant dès à présent que la définition et la signification de $\text{MIM}^G(i|t)$ restent sujettes à discussion, car rien ne justifie l'utilisation de $a_i^I(t)$ à la place de $a_i(t)$.

L'approche de Frank Frank [51] utilise la règle de dérivation en chaîne afin de reformuler le MIM^G comme suit :

$$\text{MIM}^G(i|t) = \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_i^I(t)} \cdot \frac{\partial A(t)}{\partial \lambda_i}. \quad (2.21)$$

Remarquons que $A(t) = \sum_{j \in \Omega_O} P_j(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{f}$ (Ω_O étant un ensemble d'états de marche, $\mathbf{P}(t)$ le vecteur de probabilité d'occupation d'états, et $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots)^\top$ est un vecteur colonne associé aux états du système, par exemple, $f_i = 1$ si le système est en état de marche i et $f_i = 0$ sinon), alors :

$$\frac{\partial A(t)}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial \mathbf{P}(t)}{\partial \lambda_i} \mathbf{f} = \mathbf{I}_{\lambda_i}(t) \mathbf{f},$$

où $\mathbf{I}_{\lambda_i}(t) = \partial \mathbf{P}(t) / \partial \lambda_i$. D'après l'équation (2.1), on a :

$$\frac{\partial \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt}}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial \mathbf{P}(t)}{\partial \lambda_i} \mathbf{M} + \mathbf{P}(t) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda_i},$$

Notons que $\frac{d\mathbf{I}_{\lambda_i}(t)}{dt} = \frac{d \frac{\partial \mathbf{P}(t)}{\partial \lambda_i}}{dt} = \frac{\partial \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt}}{\partial \lambda_i}$, on obtient finalement :

$$\frac{d\mathbf{I}_{\lambda_i}(t)}{dt} = \mathbf{I}_{\lambda_i} \mathbf{M} + \mathbf{P}(t) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda_i}. \quad (2.22)$$

En utilisant les équations (2.1) et (2.22), on obtient le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} & \frac{d\mathbf{I}_{\lambda_i}(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(t) & \mathbf{I}_{\lambda_i}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda_i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}.$$

La résolution de ce système permet d'obtenir toutes les dérivées partielles nécessaires à l'évaluation de $\text{MIM}^G(i|t)$. Remarquons que cette approche peut être utilisée dans le cas où les composants sont indépendants car pour ce cas le MIM^G devient le MIM.

L'approche de Frank est une approche simple et élégante. Et elle a été également utilisée dans [85, 86] afin de calculer le facteur d'importance marginal généralisé. Notons toutefois que pour évaluer $\mathbf{I}_{\lambda_i}(t)$, il faut résoudre un système d'équations différentielles. En effet, la taille de ce système d'équations explose en fonction du nombre d'états. Par conséquent, pour des grands systèmes, cette méthode est difficile à mettre en œuvre. Des algorithmes améliorés ont ainsi été proposés pour une utilisation efficace de cette méthode [13].

L'approche de Gandini Dans [55], Gandini propose l'utilisation de la méthode de perturbation généralisée (*generalized perturbation theory* - GPT [54]) afin de calculer les dérivées partielles nécessaires à l'évaluation du facteur d'importance marginal généralisé MIM^G .

On commence par réécrire de façon différente la formule d'évaluation de la disponibilité afin de pouvoir appliquer la méthode de perturbation généralisée. Plus concrètement, la disponibilité peut s'écrire selon l'expression suivante :

$$A(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{f} = \int_0^t \mathbf{P}(s) \mathbf{f}^* ds, \quad \text{avec } \mathbf{f}^* = \mathbf{f} \Upsilon(t-s),$$

avec $\Upsilon(t-s)$ la fonction Dirac. Notons que $A(t)$ est une fonction dérivable par rapport au taux de défaillance (taux de réparation) du système. En appliquant la méthode de perturbation généralisée (voir l'annexes B), Gandini [55] a montré que la dérivée de $A(t)$ par rapport au taux de défaillance λ_i du composant i peut être écrite comme suit :

$$\frac{\partial A(t)}{\partial \lambda_i} = \int_0^t \mathbf{P}(s) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda_i} \mathbf{P}^{*\top}(s) ds, \quad (2.23)$$

où $\mathbf{P}^*(s) = [P_1^*(s), P_2^*(s), \dots]$, pour $0 \leq s \leq t$, est un vecteur ligne qui satisfait l'équation suivante :

$$-\frac{d\mathbf{P}^*(s)}{ds} = \mathbf{P}^*(s)\mathbf{M}^\top + \mathbf{f}^{*\top}.$$

D'après les équations (2.21) et (2.23), le facteur d'importance marginal généralisé relatif du composant i à l'instant t peut s'écrire sous forme :

$$\text{MIM}^G(i|t) = \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_i^I(t)} \int_0^t \mathbf{P}(s) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda_i} \mathbf{P}^{*\top}(s) ds, \quad (2.24)$$

Cette technique nous permet de calculer le facteur d'importance marginal généralisé. Cependant, elle reste complexe à mettre en œuvre. En effet, l'expression (2.24) nous montre que pour calculer $\text{MIM}^G(i|t)$, il faut d'abord déterminer le vecteur $\mathbf{P}^*(t)$, et ensuite calculer l'intégrale de 0 à t . D'autre part, les calculs deviennent rapidement difficiles dans le cas de systèmes complexes de grande taille.

Approche de Ou et Dugan Dans [85], Ou et Dugan proposent une méthode approchée de calcul du facteur d'importance généralisé MIM^G s'appuyant sur la résolution du modèle de Markov et sur une partition judicieuse de l'espace des états. Cette méthode approchée est valide pour un système modélisé par une chaîne de Markov acyclique. Deux situations doivent être distinguées selon le comportement du composant étudié :

- Composant avec comportement indépendant : le composant est soit en cours d'utilisation, soit défaillant indépendamment des autres composants ;
- Composant avec comportement dépendant : le composant peut être en attente, en utilisation partielle, ... Il s'agit en fait des composants dont le comportement de défaillance est affecté par le comportement dynamique du système.

Composants avec comportement indépendant : Dans un système avec des dépendances, il peut exister quelques composants dont le comportement est indépendant de celui des autres.

Ou et Dugan [85] montrent que le facteur d'importance marginal généralisé pour le composant i se calcule grâce à l'approximation suivante :

$$\text{MIM}^G(i|t) \simeq \frac{A(i|t)}{a_i^I(t)} - \frac{A(\bar{i}|t)}{1 - a_i^I(t)}, \quad (2.25)$$

où : $a_i^I(t)$ est la fiabilité du composant i pris isolément.

Composants avec comportement dépendant : Pour le composant j qui a le comportement dépendant, $a_j^S(t)$ est différent de $a_j^I(t)$. Ou et Dugan montrent dans [85] que le facteur d'importance marginal généralisé relatif du composant j est calculé approximativement selon la relation suivante :

$$\text{MIM}^G(j|t) \simeq \left[\frac{A(j|t)}{a_j^S(t)} - \frac{A(\bar{j}|t)}{1 - a_j^S(t)} \right] \frac{1 - a_j^S(t)}{1 - a_j^I(t)}, \quad (2.26)$$

où $a_j^S(t)$ est calculé par par l'expression suivante :

$$a_j^S(t) = \sum_{l \in \Omega_j} P_l(t), \quad (2.27)$$

avec Ω_j étant un ensemble d'états dans lesquels le composant j est en marche.

Prenons l'exemple d'un système dynamique constitué par 4 composants, repris de [85]. Ce système est décrit par l'arbre de défaillance dynamique de la figure 2.6 :

- P1 et P2 sont les composants primaires avec comportement indépendant. Les taux de défaillance sont $\lambda_{P1} = \lambda_{P2} = 10^{-5}/h(\text{heure})$;
- S1 et S2 sont les composants de secours (en attente) avec comportement dépendant. Les taux de défaillance sont $\lambda_{S1} = \lambda_{S2} = 10^{-5}/h$.

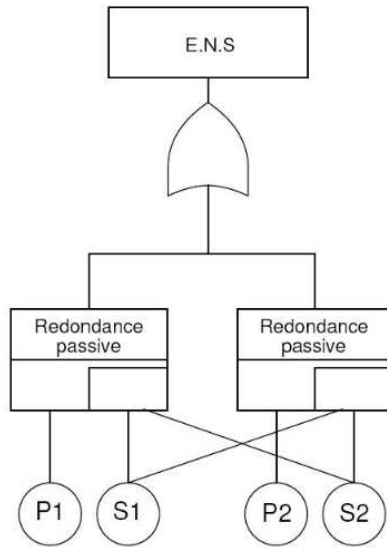


FIG. 2.6 – Exemple d'un système à comportement dynamique : les composants S1 et S2 sont tous deux en redondance passive sur les composants P1 et P2. S1 est utilisé en premier. D'après [85]

Les figures 2.7 permettent une comparaison des résultats données par la méthode de Frank et par la méthode d'approximation. La figure 2.7.a représente le facteur d'importance marginal

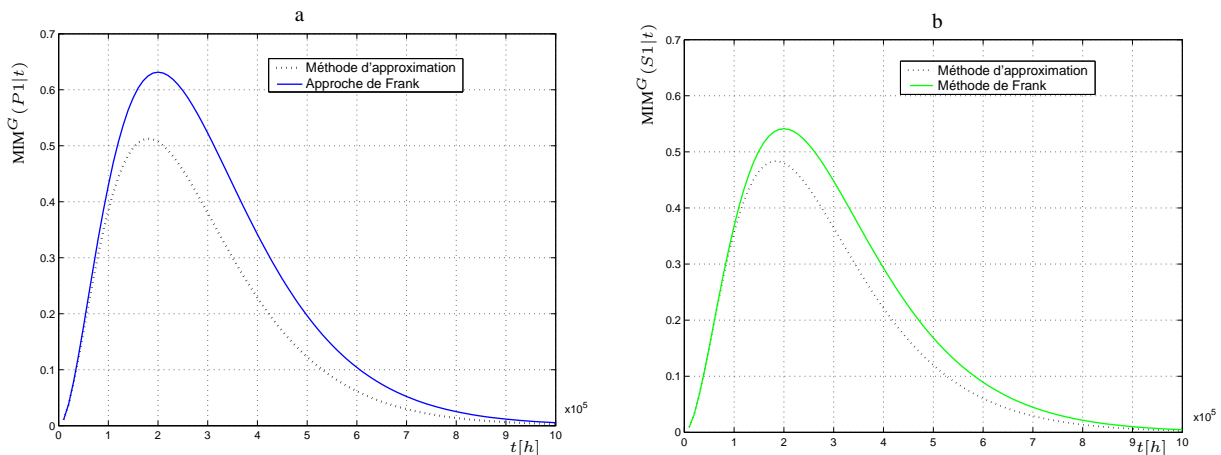


FIG. 2.7 – Comparaison des évaluations du facteur d'importance marginal généralisé pour les composants P1 (figure 2.7.a) et S1 (figure 2.7.b) par les approches de Frank (exacte) et de Ou et Dugan (approchée)

généralisé MIM^G pour le composant à comportement indépendant P1. Les résultats de MIM^G relatif d'un composant à comportement dépendant S1 dans ce système sont reportés sur la figure 2.7.b. Les résultats numériques permettent de mettre en évidence la qualité de l'approximation pour des temps de mission faibles (en comparaison du MTTF du composant) et l'erreur commise pour des temps plus grands.

2.3.2.3 Conclusions

Pour un système à composants indépendants, le facteur d'importance marginal (MIM) est un outil efficace permettant d'identifier l'importance d'un composant ou d'un groupe de composants pour la prise de décision (de la maintenance, de l'exploitation, ou de la conception, ...). La méthode d'évaluation donnée par (2.17) est simple et efficace.

En présence de dépendances dans le système, il est important de remarquer que :

- la disponibilité/fiabilité du composant dans le système et celle de ce composant pris isolément sont différentes ;
- la disponibilité/fiabilité du système n'est plus une fonction linéaire de la disponibilité/fiabilité de chacun des composants (y compris la disponibilité/fiabilité du composant dans le système et ainsi que celle de ce composant pris isolément).

Une généralisation du facteur d'importance marginal notée MIM^G (voir l'équation (2.21)) constitue une première proposition pour l'évaluation de l'importance fiabiliste des composants. Pour l'évaluation de cette mesure, l'approche de Frank [51] et l'approche de Gandini [55] semblent adaptées. Toutefois, ces méthodes deviennent inutilisables lorsque l'on a à faire à des systèmes complexes de grande taille. Quant à l'approche de Ou et Dugan [85], elle est moins

sensible à la taille du modèle, mais elle fournit des résultats approchés et ne permet pas de travailler directement avec des systèmes à composants dépendants réparables. Mais au-delà des difficultés d'évaluation, le sens même de cette mesure pose problème et motive largement les travaux développés ici visant à proposer une mesure de sensibilité adaptée aux systèmes à composants dépendants.

La nécessité d'une mesure de sensibilité multi-directionnelle

Cette rapide analyse des travaux existants montre que le problème de l'évaluation des indicateurs de sensibilité (ou facteurs d'importance) pour les systèmes dynamiques mettant en jeu des dépendances entre composants reste largement ouvert :

- aucune des approches relevées dans la littérature ne permet de résoudre complètement ce problème d'évaluation du facteur généralisé MIM^G . De plus, MIM^G ne semble pas constituer une mesure de d'importance adaptée car il prend mal en compte les dépendances présentes dans le système ; en particulier, il ne peut pas tenir compte du fait que le comportement d'un composant peut changer et dépendre d'autres composants quand il est inséré dans le système. Il est donc intéressant d'étudier la sensibilité par rapport à ce qui peut conduire directement au changement du comportement fiabiliste du composant (ou du système), c'est-à-dire la sensibilité par rapport à un ou plusieurs paramètres fiabilistes, ce qui correspond en fait à considérer des dérivées partielles et directionnelles ;
- la disponibilité/fiabilité d'un système peut dépendre non seulement des paramètres des composants pris individuellement (λ_i, μ_i) mais aussi des paramètres qui sont le produit des dépendances dans le système, comme par exemple, $\bar{\lambda}$ (pour un partage de charge), λ_C (pour une défaillance de cause commune), γ (probabilité de refus de démarrage), ... Selon la définition, le facteur d'importance marginal et sa généralisation deviennent inopérants pour ce système. La mesure de sensibilité par rapport à un paramètre est alors indispensable.
- enfin, dans le contexte des systèmes markoviens, la variation de paramètres peut être liée non seulement à un paramètre, ou un groupe de paramètres, mais également aux taux de transition entre des états [1, 26, 31, 63]. Par exemple, un composant ou un groupe de composants dans un état spécifique peuvent être soumis à un événement comme par exemple, un choc électrique/mécanique, un changement brutal de la condition d'environnement, une surcharge, etc. Les taux de transition sortant de cet état peuvent alors varier et il est intéressant d'étudier la sensibilité par rapport à ces taux de transition.

Le nouveau facteur que nous allons proposer est une mesure de sensibilité par rapport à une direction qui peut représenter un paramètre, un groupe de paramètres, ou plus généralement, des taux de transition entre des états. Cette mesure correspond donc en fait à dérivées directionnelles. Remarquons d'une part que l'approche de Frank et celle de Gandini se basent principale-

ment sur la dérivée partielle par rapport au taux de défaillance du composant. D'autre part, dans le contexte d'analyse de sensibilité d'un système markovien, le calcul de dérivées partielles a déjà été étudié [1, 63, 90]. Mais, il n'y a aucune littérature sur l'utilisation de cette mesure de dérivée dans le but d'identifier l'importance d'un composant pour les études de fiabilité.

2.4 Problème étudié

Afin de répondre à la problématique exposée dans le chapitre 1, nos travaux s'appuient sur deux axes principaux : la proposition d'un nouveau facteur d'importance basée sur des dérivées partielles ou directionnelles et la mise en œuvre et l'extension du facteur d'importance différentiel (DIM) dans le cadre des systèmes markoviens à composants dépendants. Ces choix sont explicités et justifiés à l'aide de l'étude bibliographique précédente.

2.4.1 Proposition d'un nouveau facteur d'importance

La première étape de notre travail a donc consisté à redéfinir des facteurs d'importance et à s'interroger sur la notion de sensibilité du système par rapport à l'état d'un composant (ou d'un groupe de composants), à un état (ou groupe d'états) du systèmes dans le contexte des systèmes markoviens.

2.4.1.1 Facteur de sensibilité multi-directionnelle

Le nouveau facteur d'importance proposé, appelé le facteur de sensibilité multi-directionnelle notée MSM (Multi-directional sensitivity measure), est défini comme la dérivée de la mesure de performance (par exemple la disponibilité/fiabilité, la capacité de production,...) du système suivant une direction définie par une matrice directionnelle (ou matrice de sensibilité). Par définition, le facteur de sensibilité multi-directionnelle de la mesure de performance W selon la direction de sensibilité Q est :

$$\text{MSM}_Q^W = \frac{dW}{dQ}.$$

La définition détaillée sera exposée dans le chapitre 3. Ce facteur nous permet en fait :

- quand la matrice directionnelle Q représente la direction d'un paramètre ou d'un groupe de paramètres (taux de défaillance et/ou taux de réparation, la probabilité de refus de démarrage,...), le MSM_Q^W est équivalent à la sensibilité par rapport à un ou plusieurs paramètres. Nous allons en fait utiliser cette mesure afin d'identifier l'importance d'un composant ou d'un groupe composants. Une analyse détaillée sera présentée dans les chapitres 3 et 4 ;

- quand la matrice de sensibilité Q représente la direction des taux de transition sortant et/ou entrant d'un état ou d'un groupe d'états du système, le MSM_Q^W correspond à une mesure de sensibilité par rapport à un ou plusieurs états (chapitre 4) ;
- enfin, le facteur d'importance multi-directionnel nous permet de construire une mesure de variation de performance du système et de proposer également cette mesure comme un facteur d'importance fiabiliste. En se basant sur cette dérivée directionnelle, nous proposons également des extensions du facteur d'importance différentiel existant (DIM) (voir les chapitres 6 et 7).

2.4.1.2 Évaluation du facteur de sensibilité multi-directionnelle

Ce nouveau facteur nous a conduit à mener des études sur l'évaluation des dérivées partielles ou directionnelles d'une fonction de performance par rapport à une direction définie par une matrice dans un espace approprié. Il existe en effet deux classes de méthodes d'évaluation :

1. les évaluations analytiques : on s'intéresse au développement d'une méthode permettant de calculer analytiquement le facteur proposé en régime transitoire et aussi en régime stationnaire ;
2. les évaluations par estimation : l'objectif est d'estimer le facteur proposé à partir des données de retour d'expérience (REX), et sans avoir à connaître la matrice de taux de transition du processus de Markov sous-jacent.

Évaluation analytique L'évaluation de la dérivée partielle par rapport à un paramètre fiabiliste (taux de défaillance) a été étudiée par Frank [51] et par Gandini [55]. Ces deux approches sont limitées dans leur application par la complexité de leur mise en œuvre (voir le paragraphe 2.3.2.2). Une autre approche nous semble efficace a été considérée dans [1, 63, 90]. Cette approche est en fait basée seulement sur la résolution de l'équation d'états (2.1).

Notre objectif dans le chapitre 3 est de développer une méthode similaire (basée seulement sur la résolution de l'équation d'états (2.1)) pour le calcul des dérivées directionnelles. Cette méthode nous permet de calculer de façon analytique le facteur d'importance proposé MSM en régime stationnaire et transitoire.

Estimation à partir de REX par analyse de perturbation Du point de vue pratique, le comportement fiabiliste (taux de défaillance et/ou taux de réparation) des composants n'est pas toujours disponible et la matrice des taux de transition du modèle de Markov du système est inconnue. La taille de l'espace d'état de Markov peut devenir trop grande pour permettre un travail aisé directement sur la matrice des taux de transition. Pour ces cas, il est pratiquement

impossible de calculer de manière analytique les indicateurs de sensibilité du système. La simulation de Monte Carlo ne permet pas non plus d'apporter une réponse simple au problème dans la mesure où l'estimation des dérivées directionnelles à partir de simulation n'est pas immédiate. En effet, la méthode classique des différences finies qui consiste à simuler l'évolution de deux chaînes de Markov (l'une avec le jeu de paramètres nominal, l'autre avec un jeu de paramètre légèrement modifié) et à estimer la dérivée de la fonction de performance par la formule de différences finies présente dans bien des cas de mauvaises propriétés de convergence, [31] et peut même, dans certains cas, conduire à des résultats erronés. De façon plus générale, s'il s'avère simple de simuler des réalisations d'un processus markovien, même de grande taille, l'estimation de dérivées de fonctions de performances à partir des réalisations ainsi obtenues reste un problème difficile qui requiert l'élaboration d'estimateur consistants. Enfin ces méthodes ne permettent pas de se contenter des données de retour d'expérience (REX), (c'est-à-dire l'observation d'une trajectoire du processus).

L'analyse de perturbation apporte une solution économique en coût de calcul à ce problème, [24, 25, 80, 31, 26]. Dans une de ses formulations (dite IPA, pour *Infinitesimal Perturbation Analysis*), elle consiste à analyser l'effet d'une modification infinitésimale de la matrice de transition de la chaîne de Markov sur les trajectoires du processus correspondant. Cette approche a également été étendue au cas de perturbation finie, mais non infinitésimale et cette extension peut s'appliquer par exemple à des systèmes dont les indicateurs de performance sont discontinus [25]. L'analyse de perturbation permet d'estimer de façon efficace les indicateurs de sensibilité (dérivées des performances du système par rapport à une direction d'intérêt) à partir d'une réalisation unique d'une trajectoire du processus d'évolution de l'état du système. Cette réalisation peut être issue soit de l'observation du système (et permet donc de se contenter des données de REX), soit fournie par une procédure de simulation. L'approche par analyse de perturbation repose sur des résultats récents montrant qu'une réalisation unique d'une trajectoire du processus contient toute l'information sur la sensibilité du système à une direction [26]. Les algorithmes d'estimation développés dans le cadre de l'analyse de perturbation reposent sur l'analyse d'une seule réalisation du processus stochastique décrivant l'évolution du système et ne nécessitent pas d'explicitier les matrices de transition ou les générateurs infinitésimaux mis en jeu [25]. En plus de la réduction du volume de calcul nécessaire, cette méthode semble également présenter l'avantage d'être applicable en ligne (dans un contexte de surveillance par exemple) pour estimer les indicateurs de sensibilité de systèmes pour lesquels il n'est pas envisageable de modifier les valeurs de paramètres dans le seul but d'estimer des dérivées directionnelles.

Le nouveau facteur d'importance proposé et son évaluation présentés dans ce mémoire ont fait l'objet de deux publications dans deux revues avec comité de lecture [40, 38], de deux communications à des congrès internationaux [42, 37] et d'une communication à un congrès

national [36].

2.4.2 Facteur d'importance différentiel : mise en œuvre et extension

La deuxième partie de ce mémoire a pour objectif, d'une part, de présenter la mise œuvre du facteur d'importance différentiel DIM, et d'autre part, de proposer une extension de ce facteur (DIM aux ordres supérieurs) dans un système markovien à composants dépendants.

2.4.2.1 Mise en œuvre du facteur d'importance différentiel

Le facteur d'importance différentiel a été créé dans le but d'analyser la sensibilité de performance du système par rapport à un composant (voir 2.3.1) pour un système à composants indépendants. Dans le contexte des systèmes à composants dépendants, on propose une généralisation de ce facteur pour les études de sensibilité selon une direction d'intérêt (y compris la direction d'un paramètre, d'un groupe de paramètres, ...). Pour l'évaluation, on propose le calcul analytique ainsi que l'estimation à partir d'une seule trajectoire observée du système (voir les chapitres 6 et 7).

2.4.2.2 Extension du facteur d'importance différentiel

Le facteur d'importance différentiel se base principalement sur l'hypothèse d'une variation faible des paramètres. Du point de vue pratique, cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée. Il est donc intéressant de développer ce facteur pour une utilisation plus générale qui s'avère possible dans le cadre markovien. Dans ce mémoire, on propose une extension de ce facteur appelé le facteur d'importance différentiel aux ordres supérieurs. Cette extension permet de mesurer plus précisément la contribution relative d'un composant (ou d'un groupe de composants) à la variation totale de la performance du système. L'évaluation (analytique et estimée) de cette extension présentée dans le chapitre 7 se base principalement sur celle qui est exposée dans le chapitre 6.

Ces extensions ont fait l'objet d'une communication à un congrès international [39].

En outre, une étude sur la mise en œuvre des facteurs d'importance existants dans le contexte des systèmes markoviens à composants indépendants est considérée. Elle permet de montrer comment un facteur d'importance existant peut être évalué de manière analytique ou estimée. Cette étude sera présentée dans l'annexe A.

2.5 Conclusions et orientation des travaux

L'étude bibliographique nous a amené d'abord à choisir l'approche markovienne qui permet de prendre en compte des dépendances entre les composants (partage de charge, redondance passive, défaillances de cause commune, ...) d'un système dynamique.

Compte tenu des choix que nous avons faits au terme de l'étude bibliographique dans ce chapitre sur les facteurs d'importance fiabilistes, la problématique posée dans le chapitre 1 peut être reformulée de manière plus précise :

1. Il s'agit, dans un premier temps, de proposer un nouveau facteur d'importance (facteur de sensibilité multi-directionnelle, MSM) dans le contexte des systèmes markoviens en prenant en compte des dépendances entre des composants. L'évaluation analytique et l'évaluation estimée à partir des données de retour d'expérience en utilisant la méthode d'analyse de perturbation sont considérées dans ce mémoire.
2. Dans un second temps, nous considérons la mise en œuvre et l'extension d'un facteur d'importance existant, le facteur d'importance différentiel (DIM).

Deuxième partie

Proposition d'un nouveau facteur d'importance

Introduction

Dans cette partie, nous proposons un nouveau facteur d'importance, appelé facteur de sensibilité multi-directionnelle [38, 40], pour des systèmes décrits par les processus de Markov qui permettent de prendre en compte des dépendances entre composants (y compris dépendances fonctionnelles et structurelles, défaillances de cause commune,...). Ce facteur nous permet d'analyser la sensibilité de la mesure de performance du système par rapport à un paramètre, à un groupe de paramètres, ou plus généralement, suivant des "directions" caractéristiques du système. Ces directions caractéristiques peuvent correspondre par exemple à un composant du système, une famille de composants, ... Comme les autres facteurs d'importance, la sensibilité multi-directionnelle nous fournit des éléments d'aide à la décision pour améliorer la conception et l'exploitation d'un système en identifiant ses principaux points faibles.

Nous commençons, dans un premier temps du chapitre 3, par présenter de manière générale le principe de ce facteur et ses propriétés. Afin d'évaluer ce facteur, nous découvrirons dans un second temps de ce chapitre des méthodes analytiques permettant donner des résultats exacts en considérant que la mesure de performance est la disponibilité du système.

Le chapitre 4 a pour but de montrer comment ce facteur d'importance peut être utilisé pour un système de production multi-état pour lequel les mesures de performance retenues sont la disponibilité et la capacité de production globale. Des exemples d'applications sont également exposées au travers un système de production simple.

Dans le chapitre 5, nous présentons une méthode d'estimation efficace basée sur les techniques d'analyse par perturbation, permettant l'estimation du facteur proposé à partir d'une seule trajectoire nominale du processus de Markov. Du point de vue pratique, cette méthode peut être mise en œuvre pour estimer le facteur de sensibilité multi-directionnelle directement à partir des données de retour d'expérience (c'est-à-dire l'observation d'une trajectoire du processus) lorsqu'on n'en connaît pas le générateur.

Chapitre 3

Facteur de sensibilité multi-directionnelle

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est, dans premier temps, de présenter un nouveau facteur d'importance appelé le facteur de sensibilité multi-directionnelle (*Multi-directional sensitivity measure-MSM*, [38, 40]) que nous envisageons suite à l'étude bibliographique présentée au chapitre 2 dans le contexte des systèmes markoviens. Dans un second temps, on montre comment ce facteur proposé peut être calculé de façon analytique en régime transitoire ainsi qu'en régime stationnaire. On découvre également les liens entre la méthode de calcul proposée et celle de Frank, [51] et de Gandini, [55].

Rappelons que le facteur de sensibilité multi-directionnelle est en fait défini comme la dérivée de la mesure de performance du système selon une direction d'intérêt définie par une matrice dans un espace approprié. Cette direction peut représenter la direction d'un paramètre, d'un groupe de paramètres, d'un composant, d'une famille de composants, ou plus généralement, la direction des taux de transition entre des états. Ce facteur permet donc conduire aux études suivantes :

- l'évaluation de l'effet sur la mesure de la performance lorsqu'il existe des changements d'un ou plusieurs paramètres de conception ;
- l'identification de l'importance d'un composant (ou d'un groupe de composants), et ainsi que l'importance d'un état (ou d'un groupe d'états) du système ;
- et enfin, l'optimisation de la maintenance des paramètres.

Pour introduire le facteur de sensibilité multi-directionnelle, on s'intéresse en premier lieu dans le paragraphe 3.2 à la matrice directionnelle qui permet de modéliser les directions différentes de sensibilité (direction d'un paramètre, d'un groupe de paramètres, ou plus généralement, direction des taux de transition). On présente ensuite la définition générale de ce facteur ainsi que ses propriétés.

Le paragraphe 3.3, entièrement consacré à l'évaluation de ce facteur, permet de présenter le calcul analytique du facteur proposé en considérant que les mesures de performance d'intérêt sont la disponibilité instantanée, la disponibilité moyenne sur l'intervalle de temps donné, et ainsi que la disponibilité asymptotique.

3.2 Facteur de sensibilité multi-directionnelle (MSM)

Considérons un système dont le comportement au cours du temps est décrit par un processus de Markov ayant un espace d'états fini $E = \{S_1, S_2, \dots\}$ et une matrice de taux de transition $\mathbf{M} = [m_{ij}]_{i,j \in E}$.

Soit $\mathbf{P}(t) = (P_1(t), P_2(t), \dots)$ le vecteur de probabilité d'occupation des états à l'instant t et $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(t=0)$ le vecteur de probabilité d'occupation des états à l'instant initial. $\mathbf{P}(t)$ satisfait l'équation différentielle du premier ordre de Chapman-Kolmogorov appliquée au processus Markovien homogène (sans ajouter des variables dynamiques) [30, 92] :

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{M}. \quad (3.1)$$

La solution de (3.1) peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 e^{\mathbf{M}t} = \mathbf{P}_0 \mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t), \quad (3.2)$$

où $\mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t) = e^{\mathbf{M}t}$ est une fonction exponentielle de la matrice \mathbf{M} .

Pour étudier la sensibilité de la mesure de performance du système selon une direction d'intérêt qui est définie par une matrice directionnelle, on expose donc dans le premier paragraphe de cette section comment est construite cette matrice directionnelle.

3.2.1 Matrice directionnelle de perturbation

3.2.1.1 Introduction de la matrice directionnelle de perturbation

En suivant les approches utilisées dans l'analyse par perturbation, on considère une perturbation structurelle [22, 33, 58] sur un paramètre ou sur un groupe de paramètres du système. Cette perturbation conduit alors à une perturbation sur la matrice de taux de transition du processus de Markov [24, 31].

Supposons que la matrice de taux de transition \mathbf{M} soit perturbée de manière suivante :

$$\mathbf{M}_\delta = \mathbf{M} + \delta\mathbf{Q}, \quad (3.3)$$

où δ est un réel positif et $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$ est une matrice indiquant la direction de perturbation effectuée. Une entrée $q_{ij} = 0$ indique que le taux de transition de l'état i à l'état j n'est pas perturbé, et une entrée $q_{ij} = \alpha$ ($\alpha \neq 0$) indique que le taux de transition de l'état i à l'état j est perturbé par une quantité $\alpha\delta$. La condition nécessaire sur la matrice \mathbf{Q} pour que \mathbf{M}_δ soit aussi une matrice de taux de transitions d'un processus de Markov est que la somme de chaque ligne de \mathbf{Q} soit égale à 0 [24].

Sur la base de la relation (3.3), on peut modéliser non seulement les perturbations sur des paramètres (taux de défaillance ou/et taux de réparation, ...), mais plus généralement, sur les taux de transition entre des états du processus de Markov.

Pour illustrer le concept de la perturbation et la matrice indiquant la direction de perturbation, on considère l'exemple simple suivant.

Exemple 1. (Système de 2 composants indépendants) Soit un système de deux composants indépendants C_1 et C_2 en parallèle, ayant pour taux de défaillance λ_1 et λ_2 et taux de réparation μ_1 et μ_2 respectivement, voir figure 3.1. Chaque composant possède deux états. On notera C_i l'état de marche du composant C_i , et \bar{C}_i son état de panne.

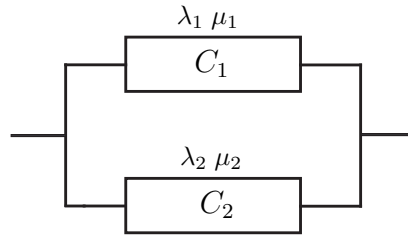


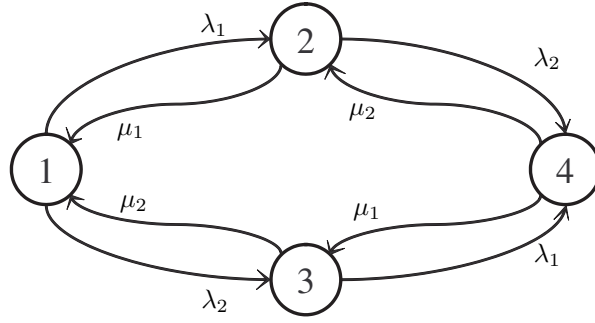
FIG. 3.1 – Une structure parallèle de 2 composants indépendants ayant les taux de défaillance et de réparation constants

Le comportement du système est décrit par un processus de Markov, et le graphe d'états est donné par la figure 3.2.

Par conséquent, la matrice de taux de transition du système est :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1 - \lambda_2 & 0 & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & -\mu_2 - \lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & \mu_2 & \mu_1 & -\mu_1 - \mu_2 \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant deux types différents de perturbations : une perturbation sur le paramètre λ_2 (voir figure 3.3), et une perturbation sur les transitions sortant de l'état 3 (voir figure 3.4). Ces perturbations conduisent à deux matrices de direction Q_{λ_2} , Q_{S_3} respectivement.



État 1 : $C_1 C_2$ État 2 : $C_1 \bar{C}_2$
 État 3 : $\bar{C}_1 C_2$ État 4 : $\bar{C}_1 \bar{C}_2$

FIG. 3.2 – Graphe d'états d'un système à deux composants indépendants

Perturbation sur le paramètre λ_2 : La perturbation sur λ_2 conduit à la matrice génératrice perturbée :

$$\mathbf{M}_\delta = \begin{pmatrix} -\lambda_1 - (\lambda_2 + \delta) & \lambda_1 & \lambda_2 + \delta & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1 - (\lambda_2 + \delta) & 0 & \lambda_2 + \delta \\ \mu_2 & 0 & -\mu_2 - \lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & \mu_2 & \mu_1 & -\mu_1 - \mu_2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice peut s'écrire également sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}_\delta = \begin{pmatrix} -\lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1 - \lambda_2 & 0 & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & -\mu_2 - \lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & \mu_2 & \mu_1 & -\mu_1 - \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\delta & 0 & \delta & 0 \\ 0 & -\delta & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou :

$$\mathbf{M}_\delta = \mathbf{M} + \delta \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{M} + \delta \mathbf{Q}_{\lambda_2}, \text{ avec } \mathbf{Q}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette relation montre que la perturbation sur le paramètre λ_2 correspond à une perturbation selon la direction \mathbf{Q}_{λ_2} .

Une autre écriture possible de \mathbf{Q}_{λ_2} est :

$$\mathbf{Q}_{\lambda_2} = \frac{\mathbf{M}_\delta - \mathbf{M}}{\delta}.$$

Lorsque \mathbf{Q}_{λ_2} est une matrice constante et indépendante de δ , on a finalement :

$$\mathbf{Q}_{\lambda_2} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{M}_\delta - \mathbf{M}}{\delta} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda_2}.$$

Cette relation montre que la matrice indiquant la perturbation d'un paramètre est égale à la dérivé partielle de la matrice génératrice par rapport à ce paramètre.

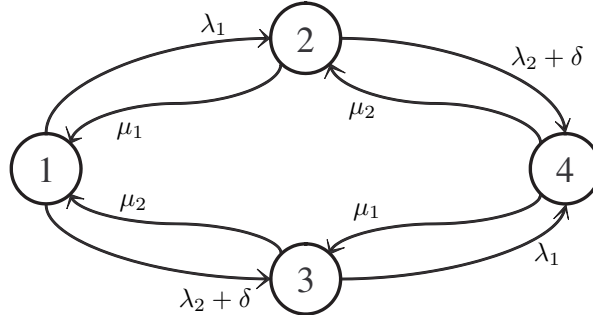


FIG. 3.3 – Perturbation sur taux de défaillance λ_2 du composant C_2 , correspondant la matrice directionnelle de perturbation \mathbf{Q}_{λ_2}

Perturbation sur les transitions sortant de l'état 3 : On regarde maintenant la perturbation sur les transitions sortant de l'état 3 (voir figure 3.4).

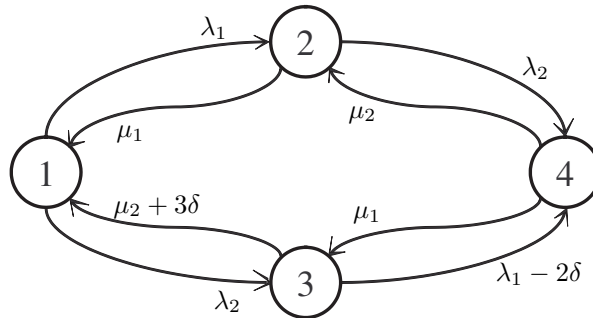


FIG. 3.4 – Perturbation sur les transitions sortant de l'état 3, correspondant la matrice directionnelle de perturbation \mathbf{Q}_{S_3}

De façon similaire, on obtient la matrice indiquant cette perturbation comme la suivante :

$$\mathbf{Q}_{S_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

3.2.1.2 Propriétés de la matrice directionnelle \mathbf{Q}

Notons d'abord que, de façon générale, une matrice directionnelle de perturbation $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$ doit vérifier les conditions suivantes :

1. la taille de matrice \mathbf{Q} est la même celle de la matrice génératrice \mathbf{M} ,
2. $q_{ij} \geq 0$ si $m_{ij} = 0$ et $i \neq j$,
3. $\mathbf{Q}\mathbf{e} = \mathbf{0}$, où $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^\top$ est un vecteur colonne.

Deux types principaux de \mathbf{Q} Plusieurs types de matrices de perturbation peuvent être proposés. En effet, les directions ici peuvent être la direction d'un paramètre, la direction d'un groupe de paramètres, ou plus généralement, la direction de taux de transition. Dans le contexte des études de sensibilité de la mesure de performance du système, on peut distinguer notamment deux types de matrices :

Type 1 : matrice indiquant la perturbation sur un paramètre x , notée \mathbf{Q}_x telle que $\mathbf{Q}_x = \partial\mathbf{M}/\partial x$. Dans l'exemple ci-dessus la matrice directionnelle indiquant la perturbation sur le paramètre λ_2 est $\mathbf{Q}_{\lambda_2} = \partial\mathbf{M}/\partial\lambda_2$.

Type 2 : matrice qui indique les perturbations sur les taux de transition entrant ou/et sortant d'états sont notées \mathbf{Q}_S . Par exemple, \mathbf{Q}_{S_3} indique la perturbation sur les taux de transition sortant de l'état 3.

Combinaison de matrices directionnelles de perturbation Soient k matrices de direction $\mathbf{Q}_{x_1}, \mathbf{Q}_{x_2}, \dots, \mathbf{Q}_{x_k}$ qui indiquent les perturbations sur k paramètres x_1, x_2, \dots, x_k (taux de défaillance/taux de réparation) respectivement, la matrice de direction modélisant les perturbations simultanées de ces k paramètres, sous l'hypothèse que chaque paramètre $x_{i,i=1,\dots,k}$ est perturbé par une quantité $\delta * \alpha_i$ ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont des constantes réelles), est :

$$\mathbf{Q}_{[\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_k x_k]} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{Q}_{x_i}. \quad (3.4)$$

La démonstration de (3.4) peut facilement être obtenue par l'utilisation (3.3).

Cette relation nous permet d'établir la direction de perturbation pour un groupe de paramètres à partir des directions de perturbation individuelles. Cette propriété permet en particulier de construire une matrice de perturbation correspondant à un composant décrit par plusieurs paramètres. En outre, dans de nombreux systèmes réels, les composants d'un groupe peuvent être affectés par un même événement (comme par exemple, le changement brutal de la condition de l'environnement, un choc électrique, un choc de l'atterrissage, une surcharge, etc.) et on peut chercher à évaluer l'importance de cet événement "aggravant" en perturbant simultanément les taux de défaillance des composants d'un groupe. Ici encore, cette étude peut être menée simplement grâce à la propriété de linéarité évoquée ci-dessus.

Reprenons l'exemple 1 ci-dessus et considérons une perturbation simultanée sur le groupe de deux composants C_1 et C_2 . Supposons que les taux de défaillance des composants C_1 et C_2 soient perturbés simultanément par deux quantités δ et 2δ .

La matrice de direction pour la perturbation sur λ_1 est :

$$\mathbf{Q}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, la matrice de direction pour la perturbation simultanée vaut :

$$\mathbf{Q}_{[\lambda_1, 2\lambda_2]} = \mathbf{Q}_{\lambda_1} + 2\mathbf{Q}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. (Système de 2 composants en redondance passive) Soit un système de 2 composants en redondance passive, voir figure 3.5. On supposera que le composant C_2 initialement au repos peut refuser de démarrer avec une probabilité γ et le fait que le composant C_1 soit réparé en priorité quand les deux composants sont en panne.

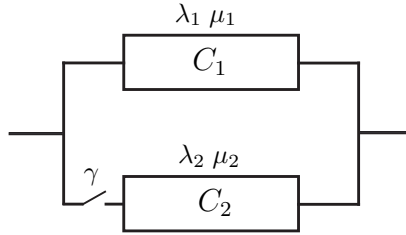


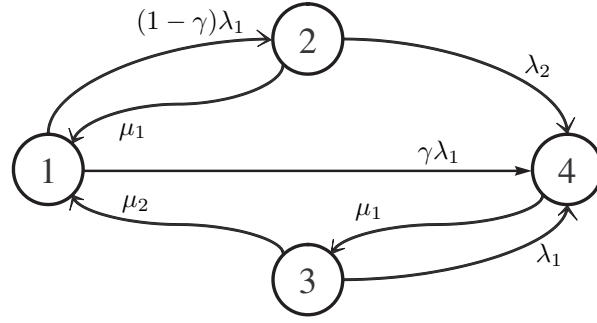
FIG. 3.5 – Une structure parallèle de 2 composants en redondance passive avec la probabilité de refus de démarrage γ

Le graphe d'états est représenté sur la figure 3.6. La matrice des taux de transition est :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & (1-\gamma)\lambda_1 & 0 & \gamma\lambda_1 \\ \mu_1 & -\mu_1 - \lambda_2 & 0 & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & -\mu_2 - \lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \mu_1 & -\mu_1 \end{pmatrix}.$$

S'il y a une perturbation sur le taux de défaillance λ_1 , alors la matrice directionnelle \mathbf{Q}_{λ_1} est :

$$\mathbf{Q}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -1 & (1-\gamma) & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



État 1 : $C_1 C_{2r}$ État 2 : $C_1 \bar{C}_2$
 État 3 : $\bar{C}_1 C_2$ État 4 : $\bar{C}_1 \bar{C}_2$

FIG. 3.6 – Graphe d'états d'un système de 2 composants en redondance passive : C_1 est le composant principal ; composant 2 initialement au repos noté C_{2r}

De la même façon, la matrice directionnelle indiquant la perturbation sur la probabilité de refus de démarrage γ est :

$$Q_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Selon la technique proposée, on ne peut pas modéliser, dans ce cas, la perturbation simultanée des deux paramètres λ_1 et γ de manière indiquée par (3.3).

En résumé, on peut toujours modéliser la perturbation sur chaque paramètre individuel, mais dans certains cas, on ne peut pas modéliser les perturbations simultanées sur des paramètres. On expose dans la suite la définition du nouveau facteur d'importance proposé.

3.2.2 Définition du facteur de sensibilité multi-directionnelle

La perturbation de la matrice de taux de transition conduit à un changement de la probabilité d'occupation des divers états du système. De ce fait, notons $P_\delta(t)$ le vecteur de probabilité d'occupation des états pour la matrice des taux de transition perturbée M_δ . Par conséquent, $P_\delta(t)$ satisfait l'équation différentielle du premier ordre Chapman-Kolmogorov suivante :

$$\frac{dP_\delta(t)}{dt} = P_\delta(t)M_\delta, \quad (3.5)$$

avec la condition initiale choisie $P_\delta(0) = P(0)$.

La dérivée du vecteur de probabilité d'occupation des états est définie comme suit :

$$\frac{dP(t)}{dQ} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{P_\delta(t) - P(t)}{\delta}. \quad (3.6)$$

Si on s'intéresse à une mesure de performance $W(t)$ du système qui est une fonction linéaire des probabilités d'occupation des états, c'est-à-dire

$$W(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{f}$$

où $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots)^\top$ est un vecteur colonne associé aux états du système, la dérivée de la mesure de performance dans la direction \mathbf{Q} est donnée par

$$\frac{dW(t)}{d\mathbf{Q}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}_\delta(t)\mathbf{f} - \mathbf{P}(t)\mathbf{f}}{\delta}.$$

Notons que les mesures de performances classiquement utilisées en sûreté de fonctionnement des systèmes (fiabilité, disponibilité, capacité de production) sont effectivement linéaires en fonction des probabilités d'occupation des états.

Définition 3.1. Facteur de sensibilité multi-directionnelle - MSM, [38, 40] - *Étant donnée une mesure de performance $W(t)$ linéaire en fonction des probabilités d'occupation des états, le facteur de sensibilité multi-directionnelle (Multi-directional Sensitivity Measure - MSM) est défini comme la dérivée de la mesure de performance du système suivant une direction définie par une matrice directionnelle \mathbf{Q} .*

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^W(t) = \frac{dW(t)}{d\mathbf{Q}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}_\delta(t)\mathbf{f} - \mathbf{P}(t)\mathbf{f}}{\delta}. \quad (3.7)$$

3.2.3 Propriétés du facteur MSM

A partir de la définition du facteur MSM, et sur la base des deux types différents de matrice directionnelle de perturbation, \mathbf{Q}_x et \mathbf{Q}_S , nous distinguons deux types de facteur MSM :

Type1 : MSM représentant la sensibilité de la mesure de performance du système par rapport à un paramètre (taux de défaillance/taux de réparation, ou généralement un paramètre fiabiliste, noté généralement x_i), $\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{x_i}}^W(t)$, ou à un groupe de paramètres (s'il existe la matrice directionnelle $\mathbf{Q}_{[\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_k x_k]}$), $\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{[\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_k x_k]}}^W(t)$

Type2 : MSM représentant la sensibilité de la mesure de performance du système par rapport aux taux de transition entrant et/ou sortant d'états donnés, $\text{MSM}_{\mathbf{Q}_S}^W(t)$.

Par définition, le facteur MSM nous permet de fournir des éléments d'aide pour optimiser les décisions de maintenance, les politiques d'amélioration de performance du système. Plus concrètement :

Le facteur MSM type 1 nous permet :

- d'évaluer l'effet sur la mesure de performance (disponibilité/fiabilité, capacité de production, etc) d'un changement simultané d'un ou plusieurs paramètres de conception [38, 42] ;

- d’identifier l’importance d’un composant (paramètre) donné et aussi l’importance d’un groupe de composants, voir [37, 40] ;
- d’établir les liens directs avec : le facteur d’importance marginal (voir le paragraphe A.1.1.3 dans les annexes), le facteur d’importance différentiel (voir le chapitre 7).

Enfin le facteur MSM type 2 nous permet :

- d’évaluer l’effet sur la mesure de performance d’un changement simultané d’un ou plusieurs taux de transition entre des états du système,
- d’identifier l’importance d’un état ou l’importance d’un groupe d’états donnés [40, 38].
- de proposer un facteur d’importance différentiel généralisé, voir le chapitre 7.

3.3 MSM de la disponibilité

Dans le domaine de la sûreté de fonctionnement, la performance d’un système est traditionnellement vue via sa disponibilité instantanée, moyenne sur une période d’observation, et asymptotique. Afin d’étudier la sensibilité de la disponibilité du système selon une direction, on considère dans cette section le MSM instantané, le MSM moyen et le MSM asymptotique.

3.3.1 MSM instantané

Le but de ce paragraphe est d’étudier la sensibilité de la disponibilité instantanée selon une direction \mathbf{Q} .

3.3.1.1 Définition de MSM instantané

La disponibilité/fiabilité à l’instant t est évaluée selon l’expression suivante, [30, 92] :

$$A(t) = \sum_{i \in \Omega_O} P_i(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{f}, \quad (3.8)$$

où Ω_O est un ensemble d’états de marche, et $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots)^\top$ est un vecteur colonne associé aux états du système. Par exemple pour un système à composants binaires, $f_i = 1$ si le système est en état de marche dans l’état i et $f_i = 0$ sinon.

D’après la définition (3.1) et la relation (3.8), la sensibilité de la disponibilité instantanée $A(t)$ suivant la direction \mathbf{Q} (c’est-à-dire : MSM de $A(t)$), appelée MSM instantané, peut être définie selon l’expression suivante :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^A(t) = \frac{dA(t)}{d\mathbf{Q}} = \frac{d\mathbf{P}(t)}{d\mathbf{Q}} \mathbf{f}. \quad (3.9)$$

On s’intéresse maintenant à la méthode permettant de calculer de façon analytique cette mesure.

3.3.1.2 Evaluation de MSM instantané

Afin d'établir la formule d'évaluation de MSM instantané, nous commençons par définir un vecteur ligne $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{P}_\delta(t) - \mathbf{P}(t)$. D'après les équations (3.1) et (3.5), $\mathbf{Z}(t)$ satisfait :

$$\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt} = \mathbf{Z}(t)\mathbf{M}_\delta + \mathbf{P}(t)(\mathbf{M}_\delta - \mathbf{M}), \quad (3.10)$$

avec la condition initiale $\mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{P}_\delta(t_0) - \mathbf{P}(t_0)$. La solution de l'équation différentielle linéaire (3.10) est (voir, par exemple, [68] pour le détail) :

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}(t_0)e^{\mathbf{M}_\delta(t-t_0)} + \int_0^t \mathbf{P}(s)(\mathbf{M}_\delta - \mathbf{M})e^{\mathbf{M}_\delta(t-s)} ds.$$

Rappelons qu'une des hypothèses de base est que les conditions initiales du processus ne sont pas affectées par la perturbation et qu'à $t_0 = 0$, $\mathbf{P}_\delta(0) = \mathbf{P}(0)$ soit $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{0}$.

Par conséquent, $\mathbf{Z}(t)$ peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{Z}(t) = \int_0^t \mathbf{P}(s)(\mathbf{M}_\delta - \mathbf{M})e^{\mathbf{M}_\delta(t-s)} ds,$$

ou,

$$\mathbf{Z}(t) = \int_0^t \mathbf{P}(s)(\mathbf{M}_\delta - \mathbf{M})\mathbf{F}_{\mathbf{M}_\delta}(t-s) ds. \quad (3.11)$$

avec $\mathbf{F}_{\mathbf{M}_\delta}(t-s) = e^{\mathbf{M}_\delta(t-s)}$.

Remplaçons $\mathbf{P}_\delta(t) - \mathbf{P}(t)$ par $\mathbf{Z}(t)$ à l'équation (3.6) et utilisons l'équation (3.11), alors la dérivée de $\mathbf{P}(t)$ suivant la direction \mathbf{Q} peut être écrite sous forme :

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{d\mathbf{Q}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^t \mathbf{P}(s)(\mathbf{M}_\delta - \mathbf{M})\mathbf{F}_{\mathbf{M}_\delta}(t-s) ds,$$

ou :

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{d\mathbf{Q}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^t \mathbf{P}(s) \frac{\mathbf{M}_\delta - \mathbf{M}}{\delta} \mathbf{F}_{\mathbf{M}_\delta}(t-s) ds,$$

Notons que $(\mathbf{M}_\delta - \mathbf{M})/\delta = \mathbf{Q}$ est une matrice constante et indépendante par rapport à δ et que la limite $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{F}_{\mathbf{M}_\delta}(t-s) = \lim_{\delta \rightarrow 0} e^{\mathbf{M}_\delta(t-s)}$ existe. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}(t)}{d\mathbf{Q}} &= \int_0^t \mathbf{P}(s)\mathbf{Q}(\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{F}_{\mathbf{M}_\delta}(t-s)) ds. \\ \frac{d\mathbf{P}(t)}{d\mathbf{Q}} &= \int_0^t \mathbf{P}(s)\mathbf{Q}\mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t-s) ds. \end{aligned} \quad (3.12)$$

En substituant (3.2) à (3.12), on a :

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{d\mathbf{Q}} = \int_0^t \mathbf{P}_0\mathbf{F}_{\mathbf{M}}(s)\mathbf{Q}\mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t-s) ds. \quad (3.13)$$

Finalement, d'après (3.9) et (3.13), le facteur $\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^A(t)$ peut s'écrire comme suit :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^A(t) = \int_0^t \mathbf{P}_0 \mathbf{F}_{\mathbf{M}}(s) \mathbf{Q} \mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t-s) \mathbf{f} ds. \quad (3.14)$$

Le facteur $\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^A(t)$ s'obtient ensuite directement par évaluation numérique de l'intégrale dans l'équation (3.14), [84].

La proposition ci-dessous rappelle comment on peut obtenir le facteur $\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^A(t)$ pour une direction "composée" donnée en fonction des facteurs $\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^A(t)$ pour des directions "élémentaires".

Proposition 3.3.1. *Considérons k matrices directionnelles $\mathbf{Q}_{x_1}, \mathbf{Q}_{x_2}, \dots, \mathbf{Q}_{x_k}$ indiquant la direction de k paramètres x_1, x_2, \dots, x_k respectivement. S'il existe une matrice directionnelle $\mathbf{Q}_{[\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_k x_k]}$ tel que :*

$$\mathbf{Q}_{[\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_k x_k]} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{Q}_{x_i}.$$

On a :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{[\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_k x_k]}}^A(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \text{MSM}_{\mathbf{Q}_{x_i}}^A(t), \quad (3.15)$$

Preuve. Cette proposition est facile à démontrer comme suit. On commence par établir le MSM instantané dans (3.14) pour les directions \mathbf{Q}_{x_i} , pour $i = 1, 2, \dots, k$, puis on prend la somme.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \alpha_i \text{MSM}_{\mathbf{Q}_{x_i}}^A(t) \\ &= \sum_{i=1}^k \left[\alpha_i \int_0^t \mathbf{P}_0 \mathbf{F}_{\mathbf{M}}(s) \mathbf{Q}_{x_i} \mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t-s) \mathbf{f} ds \right] \\ &= \sum_{i=1}^k \left[\int_0^t \mathbf{P}_0 \mathbf{F}_{\mathbf{M}}(s) \alpha_i \mathbf{Q}_{x_i} \mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t-s) \mathbf{f} ds \right] \\ &= \int_0^t \mathbf{P}_0 \mathbf{F}_{\mathbf{M}}(s) \left[\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{Q}_{x_i} \right] \mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t-s) \mathbf{f} ds. \end{aligned}$$

En remplaçant $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{Q}_{x_i}$ par $\mathbf{Q}_{[\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_k x_k]}$, on obtient finalement la relation (3.15). ■

La proposition 3.3.1 permet de calculer facilement la sensibilité de la disponibilité du système suivant une direction constituée par une combinaison linéaire de directions élémentaires qui correspondent à des dérivées partielles. Cela nous permet alors d'étudier la sensibilité ou l'importance dans une direction quelconque (correspondant à une ensemble de paramètres caractéristiques d'un composant, d'un groupe de composants, d'un ensemble d'états, ...) à partir de la mesure de sensibilité aux paramètres (c'est-à-dire les dérivées partielles) sans ajouter du calcul.

3.3.1.3 Lien avec l'approche de perturbation généralisée [55]

Afin de calculer la sensibilité de la disponibilité du système markovien par rapport à un paramètre, une méthode basée sur la théorie de perturbation généralisée (*generalized perturbation theory* - GPT [54]) est présentée par Gandini [55]. On s'intéresse ici à montrer le lien entre notre résultat et celui donné par Gandini.

Lien avec l'approche GPT : L'équation (3.14) peut s'écrire sous forme :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^W(t) = \frac{dA}{d\mathbf{Q}}(t) = \int_0^t \mathbf{P}(s)\mathbf{Q}\mathbf{P}^{*\top}(s)ds, \quad (3.16)$$

où $\mathbf{P}^*(s) = [P_1^*(s), P_2^*(s), \dots]$, pour $0 \leq s \leq t$, est un vecteur ligne qui satisfait l'équation suivante :

$$-\frac{d\mathbf{P}^*(s)}{ds} = \mathbf{P}^*(s)\mathbf{M}^\top + \mathbf{f}^\top \Upsilon(t-s), \quad (3.17)$$

avec $\Upsilon(t-s)$ la fonction Dirac.

Preuve. Notons que l'équation (3.17) correspond à une équation différentielle linéaire suivante

$$-\frac{d\mathbf{P}^*(s)}{ds} = \mathbf{P}^*(s)\mathbf{M}^\top,$$

avec $0 \leq s \leq t$ et la condition finale $\mathbf{P}^*(t) = \mathbf{f}^\top$. Alors la solution de cette équation est :

$$\mathbf{P}^*(s) = \mathbf{f}^\top e^{\mathbf{M}^\top(t-s)} = \mathbf{f}^\top \mathbf{F}_{\mathbf{M}^\top}(t-s). \quad (3.18)$$

Lemme 1. Soit $\mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t)$ la fonction exponentielle de la matrice \mathbf{M} , on a :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{M}^\top}(t) = [\mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t)]^\top.$$

Ce lemme est facile à prouver en utilisant le développement en série de Taylor :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{M}^\top}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbf{M}^\top]^n \frac{t^n}{n!}.$$

On sait que $[\mathbf{M}^\top]^n = [\mathbf{M}^n]^\top$, alors :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{M}^\top}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbf{M}^n]^\top \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbf{M}^n \frac{t^n}{n!}]^\top = [\mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t)]^\top.$$

Lorsque nous appliquons ce lemme, l'équation (3.18) peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{P}^*(s) = \mathbf{f}^\top [\mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t-s)]^\top = [\mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t-s)\mathbf{f}]^\top,$$

c'est-à-dire que $\mathbf{P}^*(s)^\top = \mathbf{F}_M(t-s)\mathbf{f}$. Substituons ce résultat à l'équation (3.14), on obtient finalement (3.16). ■

Les équations (3.16) et (3.17) ont été également montrées dans [55]. Notons toutefois que la matrice directionnelle \mathbf{Q} dans [55] est limitée à la direction d'un seul paramètre, c'est-à-dire $\mathbf{Q}_x = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x}$, afin d'étudier la sensibilité de la disponibilité du système par rapport à un paramètre. Il s'agit d'une contribution importante de l'approche que nous proposons : si, comme d'autres approches proposées auparavant, elle est basée sur l'évaluation de dérivées partielles, son principal intérêt est d'offrir un cadre permettant de combiner les sensibilités élémentaires par rapport aux paramètres pour obtenir des mesures de sensibilités dans n'importe quelle direction d'intérêt.

3.3.2 MSM moyen

L'objectif de ce paragraphe est d'établir la formule d'évaluation de la sensibilité de la disponibilité moyenne sur l'intervalle de temps $[0, t]$ suivant une direction spécifique.

3.3.2.1 Définition de MSM moyen

Rappelons que la disponibilité moyenne sur l'intervalle de temps $[0, t]$ peut être calculée grâce à la relation suivante, [30, 92] :

$$\tilde{A}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t A(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{P}(s) \mathbf{f} ds = \frac{1}{t} \tilde{\mathbf{P}}(t) \mathbf{f}. \quad (3.19)$$

La sensibilité de la disponibilité moyenne $\tilde{A}(t)$ suivant la direction \mathbf{Q} (appelée le MSM moyen) est définie selon l'expression suivante :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^{\tilde{A}}(t) = \frac{d\tilde{A}(t)}{d\mathbf{Q}}. \quad (3.20)$$

3.3.2.2 Evaluation de MSM moyen

Pour commencer, on prend l'intégrale sur l'intervalle de temps $[0, t]$ de l'équation (3.10). On obtient alors :

$$\int_0^t \frac{d\mathbf{Z}(s)}{ds} ds = \left[\int_0^t \mathbf{Z}(s) ds \right] \mathbf{M}_\delta + \left[\int_0^t \mathbf{P}(s) ds \right] (\mathbf{M}_\delta - \mathbf{M}),$$

ou,

$$\mathbf{Z}(t) - \mathbf{Z}(0) = \left[\int_0^t \mathbf{Z}(s) ds \right] \mathbf{M}_\delta + \left[\int_0^t \mathbf{P}(s) ds \right] (\mathbf{M}_\delta - \mathbf{M}). \quad (3.21)$$

Puis, on définit :

$$\begin{aligned}
 - \check{\mathbf{P}}(t) &= \int_0^t \mathbf{P}(s) ds. \\
 - \check{\mathbf{Z}}(t) &= \check{\mathbf{P}}_\delta(t) - \check{\mathbf{P}}(t) = \int_0^t \mathbf{Z}(s) ds.
 \end{aligned}$$

Notons que $d\check{\mathbf{Z}}(t)/dt = \mathbf{Z}(t)$ et $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{0}$. L'équation différentielle (3.21) peut donc s'écrire comme suit :

$$\frac{d\check{\mathbf{Z}}(t)}{dt} = \check{\mathbf{Z}}(t)\mathbf{M}_\delta + \check{\mathbf{P}}(t)(\mathbf{M}_\delta - \mathbf{M}), \quad (3.22)$$

avec la condition initiale $\check{\mathbf{Z}}(0) = \mathbf{0}$. Alors la solution de l'équation différentielle linéaire (3.22) est (voir [68] pour le détail) :

$$\check{\mathbf{Z}}(t) = \int_0^t \check{\mathbf{P}}(s)(\mathbf{M}_\delta - \mathbf{M})\mathbf{F}_{\mathbf{M}_\delta}(t-s) ds.$$

La dérivée de $\check{\mathbf{P}}(t)$ par rapport à la direction \mathbf{Q} est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\check{\mathbf{P}}(t)}{d\mathbf{Q}} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\check{\mathbf{Z}}(t)}{\delta} \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta} \int_0^t \check{\mathbf{P}}(s)(\mathbf{M}_\delta - \mathbf{M})\mathbf{F}_{\mathbf{M}_\delta}(t-s) ds \right\} \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_0^t \check{\mathbf{P}}(s) \frac{\mathbf{M}_\delta - \mathbf{M}}{\delta} \mathbf{F}_{\mathbf{M}_\delta}(t-s) ds \right\},
 \end{aligned}$$

en utilisant $(\mathbf{M}_\delta - \mathbf{M})/\delta = \mathbf{Q}$ et le fait que la limite $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{F}_{\mathbf{M}_\delta}(t-s) = \lim_{\delta \rightarrow 0} e^{\mathbf{M}_\delta(t-s)}$ existe. On obtient alors :

$$\frac{d\check{\mathbf{P}}(t)}{d\mathbf{Q}} = \int_0^t \check{\mathbf{P}}(s) \mathbf{Q} \mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t-s) ds. \quad (3.23)$$

D'après les relations (3.20) et (3.23), le MSM moyen est finalement donné par :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^{\tilde{\mathbf{A}}}(t) = \frac{1}{t} \frac{d\check{\mathbf{P}}(t)}{d\mathbf{Q}} \mathbf{f} = \frac{1}{t} \int_0^t \check{\mathbf{P}}(s) \mathbf{Q} \mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t-s) \mathbf{f} ds. \quad (3.24)$$

Cette relation nous permet d'évaluer analytiquement la sensibilité de la disponibilité moyenne sur l'intervalle de temps $[0, t]$ par rapport à une direction.

Comme le MSM instantané, le MSM moyen relatif d'une direction définie par une combinaison linéaire des directions différentes peut être calculé selon l'expression suivante :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{[\alpha_1 \mathbf{x}_1, \alpha_2 \mathbf{x}_2, \dots, \alpha_k \mathbf{x}_k]}}^{\tilde{\mathbf{A}}}(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\mathbf{x}_i}}^{\tilde{\mathbf{A}}}(t), \quad (3.25)$$

avec :

$$\mathbf{Q}_{[\alpha_1 \mathbf{x}_1, \alpha_2 \mathbf{x}_2, \dots, \alpha_k \mathbf{x}_k]} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{Q}_{\mathbf{x}_i}.$$

La démonstration de (3.32) est similaire à la démonstration de la proposition 3.3.1.

3.3.3 MSM stationnaire

Si le système atteint un régime permanent, ce qui est en particulier le cas lorsque tous les composants sont réparables (car dans ce cas, le processus de Markov est irréductible et il ne possède qu'une classe de récurrence) alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \{d\mathbf{P}(t)/dt\} = \mathbf{0}$. Il existe alors une et une seule loi stationnaire $\boldsymbol{\pi}$ et, pour toute loi initiale, $\boldsymbol{\pi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t)$. Nous nous intéressons dans cette section à la mesure de sensibilité multi-directionnelle en régime stationnaire.

3.3.3.1 Définition de MSM stationnaire

La disponibilité asymptotique du système, noté A , est donnée par l'expression suivante, [30, 92] :

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \boldsymbol{\pi} \mathbf{f}. \quad (3.26)$$

La sensibilité de la disponibilité asymptotique A suivant la direction Q , appelé MSM stationnaire, est définie comme suit :

$$\text{MSM}_Q^A = \frac{dA}{dQ} = \frac{d\boldsymbol{\pi}}{dQ} \mathbf{f}. \quad (3.27)$$

3.3.3.2 Evaluation de MSM stationnaire

Afin d'établir la formule d'évaluation du facteur MSM stationnaire, nous commençons par prendre la limite quand $t \rightarrow \infty$ pour l'équation (3.10). Notons que $\lim_{t \rightarrow \infty} \{d\mathbf{Z}(t)/dt\} = \mathbf{0}$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{Z}(t) = \boldsymbol{\pi}_\delta - \boldsymbol{\pi}$ avec $\boldsymbol{\pi}_\delta = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\delta(t)$. On obtient :

$$(\boldsymbol{\pi}_\delta - \boldsymbol{\pi})\mathbf{M}_\delta + \boldsymbol{\pi}(\mathbf{M}_\delta - \mathbf{M}) = 0,$$

donc :

$$-\frac{\boldsymbol{\pi}_\delta - \boldsymbol{\pi}}{\delta} \mathbf{M}_\delta = \boldsymbol{\pi} \frac{\mathbf{M}_\delta - \mathbf{M}}{\delta} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{Q}. \quad (3.28)$$

La matrice génératrice perturbée \mathbf{M}_δ n'étant pas inversible par construction, nous devons avoir recours à un inverse généralisée (*generalized inverse*) [82, 24].

Inverse généralisé [82] : L'inverse généralisée de la matrice génératrice \mathbf{M}_δ est :

$$\mathbf{M}_\delta^\# = (\mathbf{M}_\delta + \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}_\delta)^{-1} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}_\delta,$$

et,

$$\mathbf{M}_\delta \mathbf{M}_\delta^\# = \mathbf{M}_\delta^\# \mathbf{M}_\delta = \mathbf{I} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}_\delta, \quad (3.29)$$

avec \mathbf{I} est la matrice d'identité de la même taille que celle de \mathbf{M}_δ et, $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^\top$ un vecteur colonne.

D'après les équations (3.28) et (3.29), on obtient :

$$-\frac{\pi_\delta - \pi}{\delta}(\mathbf{I} - \mathbf{e}\pi_\delta) = \pi\mathbf{Q}\mathbf{M}_\delta^\#.$$

En remarquant que $\pi\mathbf{e} = \pi_\delta\mathbf{e} = 1$, alors :

$$\frac{\pi_\delta - \pi}{\delta} = -\pi\mathbf{Q}\mathbf{M}_\delta^\#.$$

La dérivée de π suivant la direction \mathbf{Q} peut être définie comme suivante :

$$\frac{d\pi}{d\mathbf{Q}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\pi_\delta - \pi}{\delta} = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \pi\mathbf{Q}\mathbf{M}_\delta^\# = -\pi\mathbf{Q} \left[\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{M}_\delta^\# \right].$$

La continuité de la matrice $\mathbf{M}_\delta^\#$ a été démontrée dans [24], alors $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{M}_\delta^\# = \mathbf{M}^\#$. Par conséquent, $d\pi/d\mathbf{Q}$ peut s'écrire comme suit :

$$\frac{d\pi}{d\mathbf{Q}} = -\pi\mathbf{Q}\mathbf{M}^\#. \quad (3.30)$$

D'après la définition (3.27), le facteur MSM stationnaire peut s'écrire finalement :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^A = -\pi\mathbf{Q}\mathbf{M}^\#f. \quad (3.31)$$

La solution exacte est obtenue en calculant l'inverse généralisée $\mathbf{M}^\# = (\mathbf{M} + \mathbf{e}\pi)^{-1} - \mathbf{e}\pi$ [82]. En se basant sur cette relation, une méthode d'estimation sera présentée dans le chapitre 5. Cette méthode permet d'estimer directement le facteur MSM stationnaire à partir des données de retour d'expérience [40].

Afin de calculer la sensibilité de la disponibilité asymptotique selon une direction qui est définie par une combinaison linéaire des directions différentes, on peut d'une part utiliser directement la relation (3.30) en remplaçant la matrice de direction \mathbf{Q} par cette matrice de combinaison, ou d'autre part se baser sur la relation suivante :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{[\alpha_1 \times 1, \alpha_2 \times 2, \dots, \alpha_k \times k]}}^A(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \text{MSM}_{\mathbf{Q}_{x_i}}^A(t), \quad (3.32)$$

avec :

$$\mathbf{Q}_{[\alpha_1 \times 1, \alpha_2 \times 2, \dots, \alpha_k \times k]} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{Q}_{x_i}.$$

La démonstration de (3.32) est facilement donnée par l'équation (3.31).

En résumé, le MSM de la disponibilité (y compris disponibilité instantanée, disponibilité moyenne sur un intervalle de temps, ou disponibilité asymptotique) suivant une direction, ce qui est une combinaison linéaire des directions individuelles, peut être calculé grâce aux MSMs suivant chacune de ces directions sans ajouter du calcul.

3.4 Conclusions

Dans ce chapitre on a étudié le facteur d'importance de sensibilité multi-directionnelle MSM dans le cadre des systèmes markoviens à composants dépendants. Ce facteur nous permet d'étudier la sensibilité de la mesure de performance dans une direction d'intérêt définie par une matrice directionnelle. Cette direction peut représenter la direction d'un paramètre, d'un groupe de paramètres, d'un composant, d'une famille de composants, ou plus généralement, la direction des taux de transition entre des états.

La considération de MSM instantané, de MSM moyen et de MSM stationnaire nous permet d'étudier la sensibilité de la mesure de performance (y compris la disponibilité ou la fiabilité) instantané, moyenne sur une période d'observation, asymptotique. Pour l'évaluation, on a proposé le calcul analytique permettant des résultats exacts. Plus précisément,

- le MSM instantané est calculé par :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^A(t) = \int_0^t \mathbf{P}_0 \mathbf{F}_{\mathbf{M}}(s) \mathbf{Q} \mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t-s) \mathbf{f} ds;$$

- le MSM moyen sur l'intervalle de temps $[0, t]$ est obtenu grâce à la relation suivante :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^{\bar{A}}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \check{\mathbf{P}}(s) \mathbf{Q} \mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t-s) \mathbf{f} ds, \text{ avec } \check{\mathbf{P}}(s) = \int_0^s \mathbf{P}(v) dv.$$

- et enfin, le MSM stationnaire est donné par :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^A = -\pi \mathbf{Q} \mathbf{M}^{\#} \mathbf{f}.$$

On a montré également que la mesure de sensibilité (y compris le MSM instantané, le MSM moyen et le MSM stationnaire) de la disponibilité du système suivant une direction constituée par une combinaison linéaire de directions élémentaires peut être calculée facilement à partir de la mesure de sensibilité dans ces directions élémentaires sans ajouter du calcul.

Des applications détaillées de ce facteur de sensibilité MSM seront exposées dans le chapitre 4 au travers d'un système de production multi-état pour lequel les mesures de performance retenues sont la disponibilité et la capacité de production globale du système.

Chapitre 4

Application aux systèmes de production multi-état

4.1 Introduction

L'approche "binaire" de modélisation des systèmes ne considère que deux classes d'états : la classe des états de marche parfaite et celle des états de panne totale. D'un point de vue pratique, entre l'état de marche parfaite et l'état de panne totale, les systèmes industriels (par exemple, les systèmes de génération électrique, les lignes de production, les ateliers de fabrication ...) présentent généralement un grand nombre d'états dégradés qui continuent d'assurer un service, même si celui-ci n'est pas égal à 100%. L'approche "multi-état", introduite dans les années 1970, permet de prendre en compte les différents niveaux de performance (par exemple, 100%, 80%, 50%, ... de la valeur nominale), voir [77, 79, 102]). La performance d'un système modélisé suivant une approche binaire est traditionnellement vue via sa fiabilité, sa disponibilité instantanée ou moyenne. Dans le contexte des systèmes multi-état, plusieurs indicateurs de performance et des méthodes d'évaluation ont été proposés, voir par exemple [8, 15, 72, 48]. Nous nous intéressons dans ce travail à deux indicateurs de performance particulièrement adaptés à un système de production que sont la disponibilité et la capacité de production, dite aussi production potentielle.

De nombreuses études sur l'extension des facteurs d'importance (facteur de Birnbaum [11], de Vesely-Fussel [53], de Lambert [75],...) proposés initialement pour les systèmes binaires, ont été menées dans le but de développer des méthodes pour évaluer l'importance d'un composant dans un système multi-état, voir [70, 78, 103, 91, 48]. Il a été démontré dans le chapitre précédent que le facteur de sensibilité multi-directionnelle [38, 40] offre de nombreux avantages pour analyser la sensibilité de la disponibilité, et d'identifier l'importance d'un composant (ou d'un groupe de composants) pour un système binaire. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'utili-

sation de ce facteur pour des systèmes de production multi-état où on utilise non seulement la disponibilité, mais encore la capacité de production globale comme indicateurs de performance du système.

Nous considérons dans un premier temps la mise en œuvre du facteur MSM sur un système multi-état. Ainsi, nous commençons par évaluer la capacité de production instantanée, asymptotique et moyenne sur une période d'observation. Ensuite, nous établissons les formules d'évaluation de MSM instantané, MSM asymptotique et MSM moyen. Grâce aux méthodes analytiques, nous pouvons obtenir des résultats exacts.

Dans un second temps, nous montrons comment le facteur de sensibilité multi-directionnelle MSM peut être utilisé d'une part pour analyser la sensibilité des performances (y compris la disponibilité et la capacité de production globale) du système, et pour identifier l'importance d'un composant (ou d'un groupe de composants), l'importance d'un état (ou d'un groupe d'états) du système au travers d'un système de production simple. D'autre part, ce facteur peut également être appliqué pour développer une technique permettant de maintenir le niveau de performances lorsque sont survenues des variations simultanées des paramètres.

4.2 Systèmes de production multi-état

La modélisation multi-état (*multi-state systems* [8, 79]) se prête particulièrement bien à l'étude des performances de nombreux systèmes industriels, comme par exemple les systèmes de génération électrique, les lignes de production, les ateliers de fabrication, les chaînes logistiques, etc. Dans ce contexte de modélisation "multi-état", les indicateurs de performance considérés sont non seulement la disponibilité mais aussi la capacité de production [72, 70, 48].

Dans cette section, nous nous intéressons à étudier la sensibilité les indicateurs de performance d'un système de production multi-état en utilisant le facteur de sensibilité multi-directionnelle MSM [38, 40] qui a été présenté au chapitre précédent. Nous commencerons dans un premier temps par exposer comment ces indicateurs de performance sont évalués. Puis, dans un second temps, nous présentons et illustrons la mise en œuvre du facteur MSM sur un système multi-état.

4.2.1 Mesures de performance

Afin d'évaluer la performance des systèmes multi-état, plusieurs indicateurs de performance ont été introduits, voir par exemple [8, 79]. Dans le contexte des systèmes de production multi-état, nous considérons deux indicateurs intéressants : la disponibilité et la capacité de production globale du système.

4.2.1.1 Disponibilité d'un système multi-état

La disponibilité (fiabilité) d'un système multi-état peut être définie de la manière suivante (voir par exemple [8, 79, 77]) :

$$A^{\text{MSS}}(t) = \mathbb{P}\{W(t) \geq W^*\}, \quad (4.1)$$

où $W(t)$ est le niveau de performance du système à l'instant t , et W^* le niveau de performance demandé. Sous la modélisation markovienne, l'équation (4.1) peut s'écrire comme suit :

$$A^{\text{MSS}}(t) = \sum_{i \in \Omega_{W^*}} P_i(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{f}^{\text{MSS}}, \quad (4.2)$$

où :

- $P_i(t)$ est la probabilité d'être à l'état i du système ;
- Ω_{W^*} est l'ensemble des états dont le niveau de performance est supérieur ou égal au niveau demandé ;
- $\mathbf{f}^{\text{MSS}} = (f_1^{\text{MSS}}, f_2^{\text{MSS}}, \dots)^\top$ est un vecteur colonne associé à la performance d'états, $f_i^{\text{MSS}} = 1$ si la performance d'état i : $W_i(t) \geq W^*$ et $f_i^{\text{MSS}} = 0$ sinon.

Il est clair que si $W^* = 0$, la disponibilité du système multi-état est identique à celle obtenue avec une modélisation binaire du système, c'est-à-dire que $A^{\text{MSS}}(t) = A(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{f}$.

Exemple 3. (Centrale électrique simple) *Considérons un système de génération électrique constitué de deux générateurs électriques notées G_1 et G_2 dont la structure est représentée sur la figure 4.1. La capacité nominale de G_1 est de 60 MW et celle de G_2 est de 40 MW. Puisque G_1 est plus productif que G_2 alors il est prioritaire pour la remise en service. Le graphe d'états est donné sur la figure 4.2.*

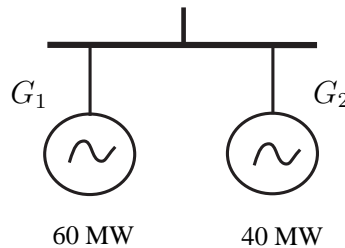


FIG. 4.1 – Exemple simple d'une centrale de deux générateurs électriques

Supposons que cette centrale a pour but de fournir l'énergie pour une charge (par exemple, un centre industriel, une communauté d'habitants, ...). Alors si la puissance de la centrale est inférieure à la consommation, ce système est considéré comme défaillant. Ainsi

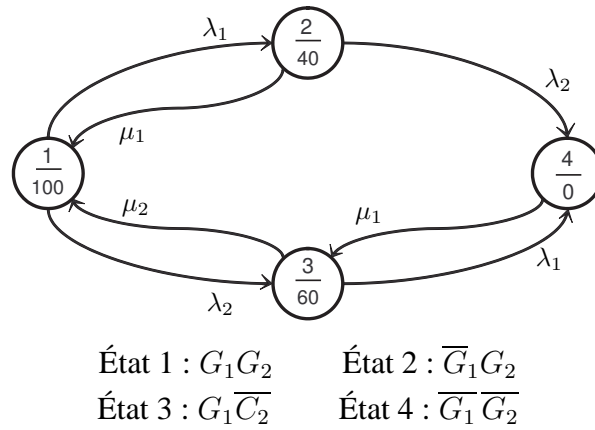


FIG. 4.2 – Graphe d'états d'un système de 2 composants dans lesquels G_1 est prioritaire pour la mise en service

- si la puissance demandée est de 40MW ($W^* = 40$), la disponibilité de la centrale est :

$$A_{40}^{\text{MSS}}(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t);$$

- si la puissance demandée est supérieure à 40MW ($W^* > 40$), la disponibilité de la centrale devient :

$$A_{>40}^{\text{MSS}}(t) = P_1(t) + P_2(t).$$

Il est clair que la disponibilité (fiabilité) du système multi-état dépend non seulement du comportement du système mais aussi au niveau de performance demandé. Il a été démontré également que l'importance d'un composant dans un système multi-état peut changer en fonction du niveau de performance demandé, voir [40, 77, 103]. Il est donc important de disposer de facteur d'importance pour les systèmes multi-état.

4.2.1.2 Capacité de production

Le deuxième indicateur de performance qui nous intéresse est, rappelons-le, la capacité de production du système. Celle-ci peut être vue comme une variable aléatoire \mathbf{X} pouvant prendre plusieurs valeurs discrètes X_i , qui correspondent aux différents niveaux de production que peut atteindre le système. On peut alors considérer que l'espérance mathématique $\mathbb{E}(\mathbf{X})$ est un bon indicateur qui reflète la performance moyenne globale du système, et qui sera complété par la distribution de probabilités $(P_i(t), X_i)$, voir [70, 72].

Sous la modélisation markovienne, on suppose que chaque état i du système correspond à un seul niveau de production X_i . La probabilité que ce système se trouve dans l'état i à l'instant t est $P_i(t)$. Alors, la capacité de production globale du système peut alors être évaluée par :

$$S(t) = \mathbb{E}_{\mathbf{P}(t)}\{\mathbf{X}\} = \sum_{i \in \Omega} P_i(t) X_i = \mathbf{P}(t) \mathbf{X}, \quad (4.3)$$

où $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ est un vecteur colonne représentant les niveaux de production d'états du système, $\mathbb{E}_{P(t)}\{\mathbf{X}\}$ indique l'espérance mathématique de la variable \mathbf{X} suivant la distribution de probabilités $P(t)$, et Ω est l'ensemble d'états du système.

Evaluation du niveau de production des états

Notons que le niveau de production d'un état du système dépend non seulement des niveaux de production des composants individuels mais aussi de la structure du système. On suppose que tous les composants sont caractérisés par différents états, correspondant chacun à un niveau de production différent, et par les différents taux de défaillance et réparation entre états. Pour évaluer le niveau de production de chaque état du système, on divise le système en des sous-systèmes et des structures fondamentales (structures séries/parallèles). Le niveau de production d'une structure série (sans tampon) est égal au niveau minimal de production de ses composants. Et pour une structure parallèle (sans tampon), le niveau de production de la structure est égal à la somme des niveaux de production de tous les composants.

Soit $X_k^{struct.}$ la capacité de production à l'état k ($k = 1, 2, \dots$) d'une structure de n composants, Y_i^k le niveau de production du composant i à l'état k , on a les relations suivantes :

- pour une structure série (sans tampon),

$$X_k^{series-struct.} = \min(Y_1^k, Y_2^k, \dots, Y_n^k);$$

- pour une structure parallèle (sans tampon),

$$X_k^{parallel-struct.} = \sum_{i=1}^n Y_i^k.$$

Ces relations permettent de calculer le niveau de production des structures fondamentales, et par conséquent, le niveau de production du système pour chaque état. Et finalement, la capacité de production globale du système est évaluée par la relation (4.3).

4.2.2 Mise en œuvre de MSM

La sensibilité de la disponibilité suivant une direction spécifique a été étudiée au chapitre précédent. Dans le même esprit, on s'intéresse ici à analyser la sensibilité de la capacité de production globale du système en utilisant le même facteur MSM. La considération de la capacité production instantanée, moyenne sur une période d'observation et asymptotique correspondent aux MSM instantané, MSM moyen et MSM stationnaire respectivement.

MSM instantané

En utilisant (3.13) et (4.3), la sensibilité de la capacité de production du système suivant une direction \mathbf{Q} (c'est-à-dire le MSM de $S(t)$) à l'instant t peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \text{MSM}_{\mathbf{Q}}^S(t) &= \frac{dS(t)}{d\mathbf{Q}} \\ &= \int_0^t \mathbf{P}_0 \mathbf{F}_{\mathbf{M}}(s) \mathbf{Q} \mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t-s) \mathbf{X} ds. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Cette équation peut être évaluée numériquement pour fournir la valeur de $\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^S(t)$, voir [84].

MSM moyen

La capacité de production moyenne sur l'intervalle de temps donné $[0, t]$ est définie selon l'expression suivante :

$$\tilde{S}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{P}(s) \mathbf{X} ds,$$

ou,

$$\tilde{S}(t) = \frac{\tilde{\mathbf{P}}(t)}{t} \mathbf{X}, \text{ avec } \tilde{\mathbf{P}} = \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{P}(s) ds. \quad (4.5)$$

En utilisant (3.23) et (4.5), la sensibilité de la capacité de production moyenne sur l'intervalle de temps $[0, t]$ par rapport une direction considérée \mathbf{Q} (c'est-à-dire le MSM de $\tilde{S}(t)$) peut être écrite comme suit :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^{\tilde{S}}(t) = \frac{d\tilde{S}(t)}{d\mathbf{Q}} = \frac{1}{t} \frac{d\tilde{\mathbf{P}}(t)}{d\mathbf{Q}} \mathbf{X} = \frac{1}{t} \int_0^t \check{\mathbf{P}}(s) \mathbf{Q} \mathbf{F}_{\mathbf{M}}(t-s) \mathbf{X} ds. \quad (4.6)$$

MSM asymptotique

Nous supposons que le processus de Markov est irréductible, ou plus généralement qu'il ne possède qu'une classe de récurrence. Il existe alors une et une seule probabilité stationnaire $\boldsymbol{\pi}$ et, pour toute loi initiale $\boldsymbol{\pi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t)$. Et quand t tend vers l'infini ($+\infty$), $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{S}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \boldsymbol{\pi} \mathbf{X}$. $S = \boldsymbol{\pi} \mathbf{X}$ est appelé la capacité de production asymptotique. De façon similaire à l'équation (3.30), la sensibilité de la capacité de production asymptotique suivant la direction spécifique \mathbf{Q} (c'est-à-dire le MSM de S) peut être donnée par la relation suivante :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^S = \frac{dS}{d\mathbf{Q}} = \frac{d\boldsymbol{\pi}}{d\mathbf{Q}} = -\mathbf{M}^{\#} \mathbf{Q} \boldsymbol{\pi} \mathbf{X}. \quad (4.7)$$

La solution exacte est obtenue en calculant l'inverse généralisé $\mathbf{M}^{\#} = (\mathbf{M} + \mathbf{e}\boldsymbol{\pi})^{-1} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}$ [82]. Notons toutefois qu'une méthode d'estimation sera présentée dans le chapitre 5. Cette méthode offre de nombreux avantages. Elle permet d'estimer directement le facteur MSM stationnaire

suivant une direction spécifique à partir des données de retour d'expérience (sans perturbation des paramètres) [40].

Il est clair que le MSM nous permet d'étudier la sensibilité suivant d'une direction de la disponibilité et de la capacité de production globale. L'évaluation numérique des relations analytiques (4.4), (4.6) et (4.7) permettent de calculer le MSM en régime transitoire ainsi qu'en régime stationnaire.

Rappelons que la matrice directionnelle peut représenter la direction d'un paramètre, d'un groupe de paramètres ou plus généralement la direction des taux de transition entre des états. Par conséquent, selon la direction choisie, le facteur proposé MSM peut conduire à l'évaluation de l'importance d'un composant, d'un groupe de composants ainsi que l'importance d'un état et d'un groupe d'états spécifiques du système [38, 40]. Ces diverses mesures d'importance donnent des informations permettant d'optimiser la décision de la maintenance, d'exploitation de production ou de conception.

Afin d'illustrer les applications du facteur MSM, on considère dans la section suivante des analyses détaillées au travers d'un système de production.

4.3 Application à un système de production

Cette section a pour objectif de montrer comment le facteur de sensibilité multi-directionnelle MSM peut être utilisé afin d'analyser l'importance d'un composant/état, d'un groupe de composants/états au travers d'un système de production simple où les mesures de performances considérées sont la disponibilité et la capacité de production globale. Ces deux mesures de performance seront considérées à l'instant t , sur une période d'observation donnée et aussi en régime stationnaire.

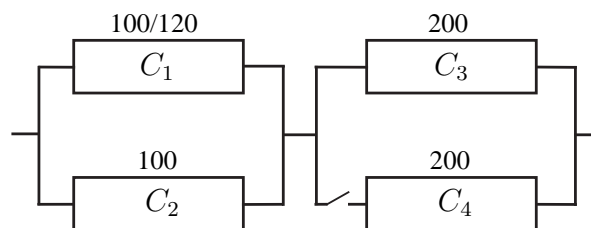


FIG. 4.3 – Une partie d'une ligne de production de fabrication

La figure 4.3 représente une partie d'une ligne de production de fabrication. Les quatre composants (notés C_1 , C_2 , C_3 et C_4) sont dépendants. Ils sont séparés en deux groupes différents :

- Groupe G1 : deux composants C_1 et C_2 sont des unités de traitement de production. Chaque composant peut traiter 100 produits par heure (h) quand il est à l'état de fonction-

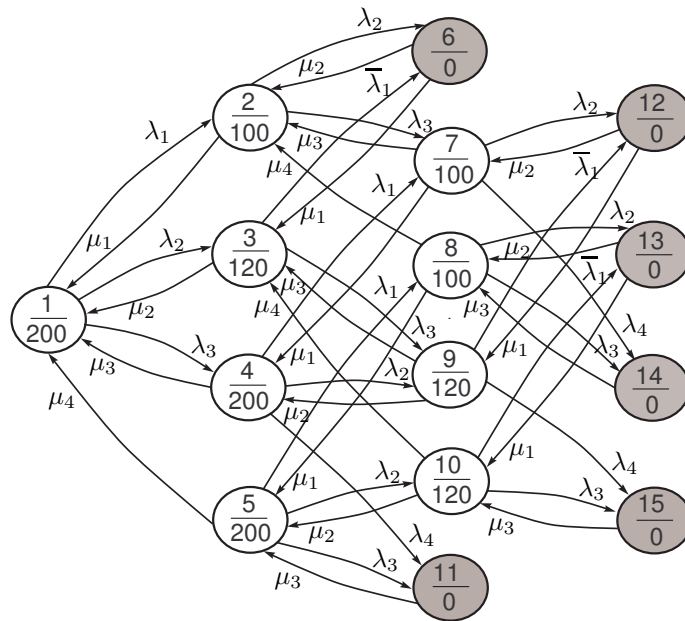


FIG. 4.4 – Diagramme de Markov & la distribution de la capacité de production

nement normal. On suppose que C_1 augmente sa capacité de traitement à 120 produits/h (celle-ci correspond à 20% d’augmentation) lorsque le composant C_2 est défaillant.

- Groupe G2 : deux composants C_3 et C_4 sont des unités d’emballage, et le composants C_4 est en redondance passive (il est mis en service dès la défaillance du composant C_3 et il est arrêté dès que le composant C_3 est réparé). C_3 est le composant principal de ce groupe, c’est-à-dire qu’il est prioritaire pour la remise en service. La capacité de traitement pour chaque composant du groupe est de 200 produits/h pour l’état de fonctionnement et de 0 pour l’état de panne.

En se basant sur ces données et la structure du système, la capacité de production nominale du système est de 200 produits/h. Les différents modes de fonctionnement du système sont décrits dans le tableau 4.1 où “O” indique un état de fonctionnement, “S” indique un état de veille, et “F” correspond un état de panne. Le graphe de Markov correspondant est reporté sur la figure 4.4. Le tableau 4.2 donne les valeurs numériques des taux de défaillance λ_i ($\bar{\lambda}_i$ indiquant le partage de charge du composant C_i , par exemple, quand C_2 est défaillant et C_1 est fonctionnement), celles des taux de réparation μ_i , ($i = 1, \dots, 4$), et également les capacités de production de chaque composant.

On s’intéresse tout d’abord à calculer la disponibilité $A(t)$ et la capacité de production $S(t)$ du système. En effet, en résolvant analytiquement l’équation différentielle du premier ordre de Chapman-Kolmogorov, la disponibilité et la capacité de production du système sont obtenues par les relations (3.8) et (4.3) respectivement. Leurs évolutions en temps sont reportées sur

État	Composant				Système	Capacité de production
	C_1	C_2	C_3	C_4		
1	O	O	O	S	O	200
2	F	O	O	S	O	100
3	O	F	O	S	O	120
4	O	O	F	O	O	200
5	O	O	O	F	O	200
6	F	F	O	S	F	0
7	F	O	F	O	O	100
8	F	O	O	F	O	100
9	O	F	F	O	O	120
10	O	F	O	F	O	120
11	O	O	F	F	F	0
12	F	F	F	O	F	0
13	F	F	O	F	F	0
14	F	O	F	F	F	0
15	O	F	F	F	F	0

TAB. 4.1 – États du système et ses niveaux de production

la figure 4.5. On trouve que le comportement asymptotique est atteint après une durée environ de 2500h. La disponibilité moyenne et la capacité de production moyenne sur une période d'observation initiale d'une année $[0, 8760 \text{ h}]$ ($t_s = 8760\text{h}$) sont évaluées par (3.19) et (4.5) respectivement, et leurs valeurs obtenues sont $\tilde{A}(t_s) = 0,966$ et $\tilde{S}(t_s) = 88,47\%$ (celui-ci correspond à $88.47\% * 200 = 176,94$ produits/h).

Nous présentons ci-dessous les études de la sensibilité de la disponibilité et de la capacité de production du système en utilisant le facteur de sensibilité multi-directionnelle MSM. Les mesures de sensibilité sont considérées en régime transitoire (MSMs instantanés et MSMs moyennes sur la durée d'une année), et en régime stationnaire (MSMs stationnaire).

4.3.1 Analyse de sensibilité par rapport à un paramètre

Afin d'étudier la sensibilité des mesures de performance du système (y compris la disponibilité et la capacité de production du système, notées généralement W) en utilisant le facteur MSM, plusieurs directions de sensibilité peuvent être proposées. Nous nous intéressons dans ce paragraphe aux directions des paramètres individuels pour les études de sensibilité par rapport

Composant	$\lambda_i(h^{-1})$	$\mu_i(h^{-1})$	$\bar{\lambda}_i(h^{-1})$	Capacité de production (produits/h)
C_1	4.5e-4	4e-3	1e-3	0/100/120
C_2	4.5e-4	4e-3	-	0/100
C_3	4.5e-4	3e-3	-	0/200
C_4	6.0e-4	3e-3	-	0/200

TAB. 4.2 – Taux de défaillance/réparation & capacités de production des composants.

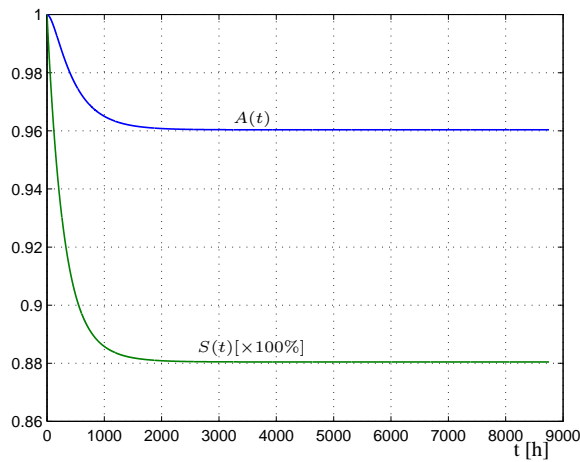


FIG. 4.5 – Evolution de la disponibilité et de la capacité de production globale du système.

aux paramètres, plus concrètement, aux taux de défaillance des composants.

Pour commencer, rappelons que la matrice de direction \mathbf{Q}_{λ_i} représente la direction de sensibilité pour le taux de défaillance du composant i , λ_i . La sensibilité de la mesure de performance W suivant cette direction est, par définition, $\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_i}}^W$, notée simplement ici $\text{MSM}_{\lambda_i}^W$ ($\text{MSM}_{\lambda_i}^W = \text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_i}}^W$). Lorsque que le taux de défaillance du composant C_1 est partagé entre λ_1 et $\bar{\lambda}_1$, la sensibilité de la mesure de performance par rapport au taux de défaillance du composant C_1 est égale à la somme des sensibilités de la mesure de performance par rapport à λ_1 et par rapport à $\bar{\lambda}_1$: $\text{MSM}_{\lambda_1}^W + \text{MSM}_{\bar{\lambda}_1}^W$.

4.3.1.1 Analyse de sensibilité de la disponibilité par rapport à un paramètre

Considérons maintenant la sensibilité par rapport aux taux de défaillance des composants de la disponibilité instantanée, moyenne sur une période d'observation d'une année [0 8760h], et asymptotique. Les mesures de sensibilité correspondantes (MSM instantané, MSM moyen et MSM stationnaire) sont calculées en évaluant numériquement les relations analytiques (3.14),

(3.24) et (3.31).

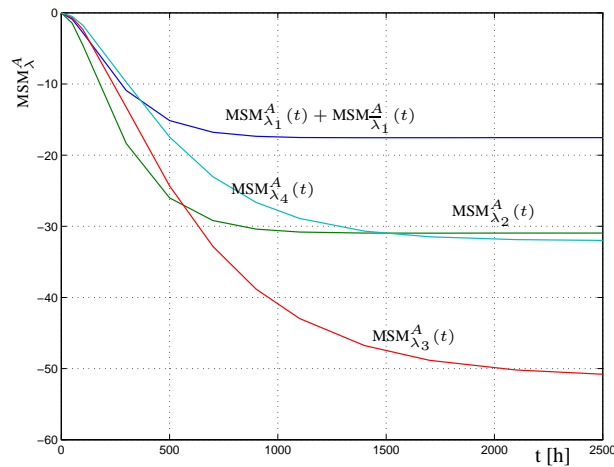


FIG. 4.6 – Sensibilité de la disponibilité du système par rapport aux taux de défaillance

Les évolutions en temps de ces mesures sont présentées sur la figure 4.6. De façon non surprenante, les résultats numériques montrent qu'une augmentation du taux de défaillance amène à une diminution de la disponibilité du système car ces mesures sont toujours négatives.

En se basant sur la sensibilité de la disponibilité du système par rapport aux taux de défaillance, on peut classer les composants selon leur importance. Les résultats donnés sur la figure 4.6 montrent que l'importance relative d'un composant peut changer dans le temps. Plus concrètement :

- le composant le plus important dans l'intervalle de temps $(0, 580 \text{ h})$ est C_2 ;
- à partir de $t = 580 \text{ h}$ à $t = 1500 \text{ h}$, le classement d'importance des composants est $C_1 < C_4 < C_2 < C_3$;
- et enfin, après $t = 1500 \text{ h}$, le classement d'importance des composants est : $C_1 < C_2 < C_4 < C_3$. Ce classement est le même que celui donné par le MSM moyen (voir tableau 4.3) ou celui donné par MSM stationnaire (voir tableau 4.4). Ces résultats peuvent être expliqués par le fait que le comportement asymptotique du système est atteint dès $t = 2500 \text{ h}$.

Ces résultats montrent que l'importance relative d'un composant peut changer avec le temps, l'intérêt de la sensibilité en régime transitoire est précisément d'être en mesure d'identifier au fil du temps, parmi tous les composants constituant un système, ceux qui influent le plus sur sa disponibilité. Notons toutefois que les classements que nous obtenons ne sont pas des classements absolus de l'importance, mais les classements liés au critère du facteur MSM. Évidemment, des classements différents pourraient être obtenus si un autre critère était utilisé.

4.3.1.2 Analyse de sensibilité de la capacité de production par rapport à un paramètre

Les études de la sensibilité de la disponibilité par rapport aux taux de défaillance permettent de hiérarchiser l'importance d'un composant. Étudions maintenant dans ce paragraphe la sensibilité de la capacité de production globale par rapport au taux de défaillance d'un composant afin d'identifier son importance dans le système.

Les mesures de sensibilité, MSM instantané, MSM moyen (sur l'intervalle de temps d'une année) et MSM stationnaire, sont calculées numériquement par les équations (4.4), (4.6) et (4.7). Et leurs résultats sont reportés sur la figure 4.7, aux tableaux 4.3 et 4.4 respectivement. On note qu'une augmentation du taux de défaillance conduit à une diminution de la capacité de production globale du système.

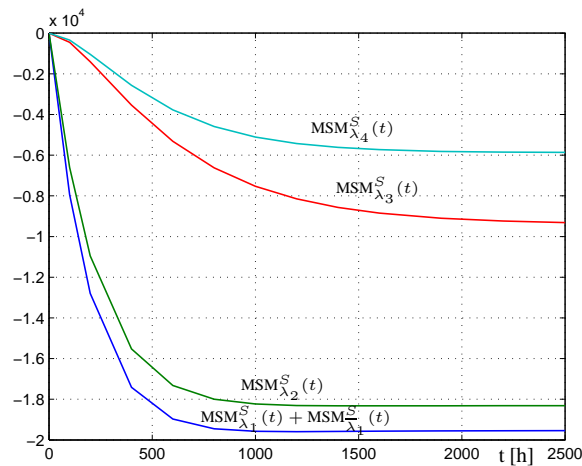


FIG. 4.7 – Sensibilité de la capacité de production globale du système par rapport aux taux de défaillance

Pour le régime transitoire, les résultats exposés dans la figure 4.7 montrent que C_1 est le plus important et le classement de l'importance des composants est $C_4 < C_3 < C_2 < C_1$. Ce classement est maintenu pour la valeur moyenne, et aussi pour la valeur asymptotique, voir tableaux 4.3 et 4.4. Cet ordre d'importance peut être expliqué intuitivement de la façon suivante. Le volume de production entrant dans le groupe G_2 (C_3 ou C_4) dépend de l'état du groupe G_1 (C_1 et C_2). Alors, l'impact de C_1 et C_2 sur la capacité de production globale est plus important que C_3 et C_4 ("effet de goulot d'étranglement"). De plus, la capacité de production du composant C_1 est plus élevée que celle de C_2 .

Si le régime stationnaire est atteint rapidement dans l'intervalle d'étude considéré, la mesure de sensibilité moyenne (MSM moyen) sur l'intervalle et la mesure de sensibilité stationnaire (MSM stationnaire) conduisent évidemment à un même classement d'importance des compo-

sants. On peut donc utiliser la mesure stationnaire pour les études de l'importance des composants durant cet intervalle de temps car l'évaluation de MSM moyen est plus complexe que l'évaluation de MSM stationnaire (voir la section 3.3).

Remarquons que ce classement de l'importance des composants n'est pas le même que celui montré dans le paragraphe précédent car la mesure de performance n'est pas la même. Alors, afin de prendre la décision (pour la maintenance, l'exploitation, ...), il est intéressant de regarder l'influence d'un composant sur les deux indicateurs de performance (la disponibilité et de la capacité de production globale) du système.

Composant	Disponibilité			Capacité de production globale		
	MSM	Valeur	Ordre	MSM	Valeur	Ordre
C_1	$MSM_{\lambda_1}^{\bar{A}}$	-7.9066	4	$MSM_{\lambda_1}^{\bar{S}}$	-17333.4172	1
	$MSM_{\lambda_1}^{\underline{A}}$	-9.0608		$MSM_{\lambda_1}^{\underline{S}}$	-1812.4142	
C_2	$MSM_{\lambda_2}^{\bar{A}}$	-29.8912	3	$MSM_{\lambda_2}^{\bar{S}}$	-17872.5520	2
C_3	$MSM_{\lambda_3}^{\bar{A}}$	-47.3851	1	$MSM_{\lambda_3}^{\bar{S}}$	-8690.0876	3
C_4	$MSM_{\lambda_4}^{\bar{A}}$	-30.0011	2	$MSM_{\lambda_4}^{\bar{S}}$	-5501.9786	4

TAB. 4.3 – Sensibilité de la disponibilité/capacité de production moyennes sur une période d'observation d'une année par rapport aux taux de défaillance des composants

Composant	Disponibilité			Capacité de production globale		
	MSM	Valeur	Ordre	MSM	Valeur	Ordre
C_1	$MSM_{\lambda_1}^A$	-8.1398	4	$MSM_{\lambda_1}^S$	-17644.2201	1
	$MSM_{\lambda_1}^{\underline{A}}$	-9.3909		$MSM_{\lambda_1}^{\underline{S}}$	-1897.7427	
C_2	$MSM_{\lambda_2}^A$	-30.9503	3	$MSM_{\lambda_2}^S$	-18310.9107	2
C_3	$MSM_{\lambda_3}^A$	-51.2382	1	$MSM_{\lambda_3}^S$	-9395.1702	3
C_4	$MSM_{\lambda_4}^A$	-32.0239	2	$MSM_{\lambda_4}^S$	-5871.9813	4

TAB. 4.4 – Sensibilité de la disponibilité asymptotique et la capacité de production asymptotique par rapport aux taux de défaillance des composants

De façon plus générale, la décision optimale (pour la maintenance, l'exploitation, ...) dépend probablement d'autres contraintes, par exemple, la sécurité, le coût de maintenance, etc.

4.3.2 Analyse de sensibilité par rapport à un groupe de paramètres

Considérons maintenant la sensibilité dans d'autres directions. Pour ce faire, choisissons la matrice directionnelle \mathbf{Q} de façon à mesurer la sensibilité par rapport à un groupe de paramètres (ou groupe de composants). Ces mesures de sensibilité peuvent être utilisées non seulement pour identifier l'importance d'un groupe de composants, mais encore pour optimiser l'effort de maintenance comme on le verra ci-dessous.

4.3.2.1 Application à l'identification du classement de l'importance d'un groupe de composants

Du point de vue pratique, les composants dans un groupe spécifique peuvent être affectés par une même action (maintenance, remplacement, ...) ou par un même événement (choc, ...). Alors, il est intéressant de connaître l'influence de ce groupe sur la performance du système. Dans cette section, on note $\mathbf{Q}(\bar{\lambda}_1, \lambda_1, \lambda_2)$ la matrice de perturbation directionnelle qui indique que les taux de défaillance du composant C_1 et C_2 sont perturbés en même temps d'une même quantité δ . De façon semblable, la direction notée $\mathbf{Q}(\lambda_3, \lambda_4)$ correspond à une perturbation uniforme et simultanée des taux de défaillance des composants C_3 et C_4 . On considère ensuite la sensibilité des mesures de performance du système suivant ces directions comme un critère permettant de classer l'importance d'un groupe de composants.

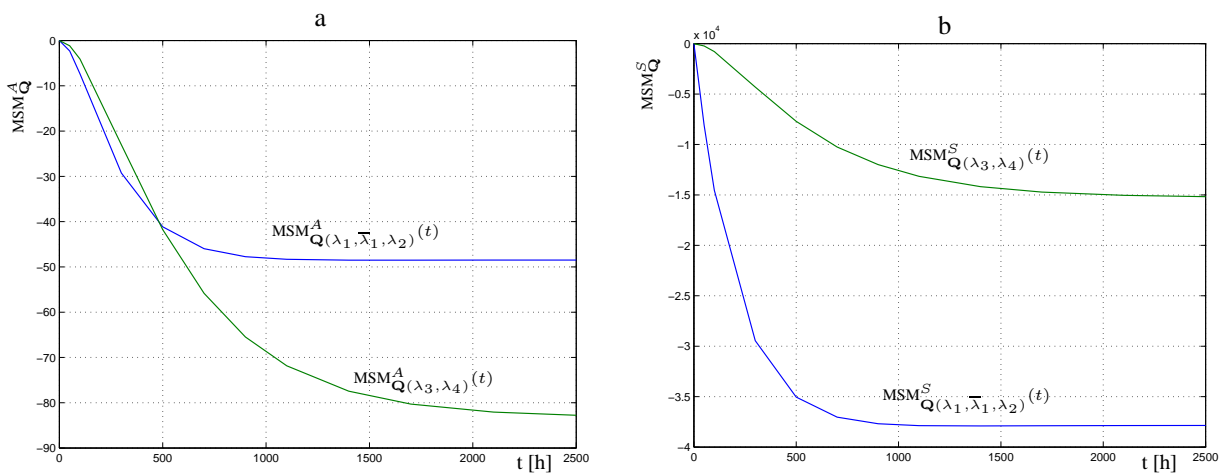


FIG. 4.8 – Sensibilité de la disponibilité (a) et de la capacité de production globale (b) du système suivant une direction d'un groupe de paramètres (composants)

Les mesures de performance considérées sont la disponibilité et la capacité de production

globale du système. Grâce à la proposition 3.3.1, on peut obtenir la mesure de sensibilité suivant la direction d'un groupe de taux de défaillance à partir des mesures de sensibilité par rapport aux taux de défaillance individuels.

En se basant sur les mesures de la disponibilité données dans la figure 4.8.a., on trouve que :

- dans l'intervalle de temps $(0, 500h]$, le groupe $G1(C_1, C_2)$ est plus important que le groupe $G2(C_3, C_4)$;
- après $t = 500h$, le groupe (C_3, C_4) est plus important que $G1(C_1, C_2)$.

Si on regarde les mesures de sensibilité de la capacité de production globale, les résultats conduisent au classement de l'importance : $G1(C_1, C_2) > G2(C_3, C_4)$, voir figure 4.8.b.

Les sensibilités des mesures de performance moyennes/asymptotiques sont reportés au tableau 4.5. Et on note que :

- le classement de l'importance lié aux mesures de sensibilité de la disponibilité moyenne ou asymptotique est : $C_1 < C_2 < C_4 < G1(C_1, C_2) < C_3 < G2(C_3, C_4)$, voir les tableaux 4.3, 4.4 et 4.5 ;
- en se basant sur les mesures de sensibilité de la capacité production moyenne ou asymptotique du système, on obtient un autre classement : $C_4 < C_3 < G1(C_3, C_4) < C_2 < C_1 < G2(C_1, C_2)$.

Il est clair que le facteur MSM peut être utilisé pour identifier non seulement l'importance d'un composant et aussi l'importance d'un groupe de composants.

4.3.2.2 Application à l'optimisation de la maintenance

On sait que le taux de défaillance d'un composant peut être se augmenter lorsque ce composant dégrade ou subit un choc (interne et/ou externe). Par conséquent, la performance du système devraient varier de manière négative. Alors, il est nécessaire de trouver un moyen pour la compensation de cette variation. En effet, pour éviter ces baisses de performance, il est possible de répercuter cette variation sur les autres paramètres (taux de réparation, par exemple). Plus concrètement, on suppose que λ_i augmente d'une quantité suffisamment petite δ . Simultanément, on perturbe le taux de réparation μ_j d'une quantité $\alpha\delta$ (réduction du temps de réparation du composant j par exemple). Si la sensibilité de la mesure de performance suivant la direction $Q(\lambda_i, \alpha\mu_j)$ est proche de 0 et le fait que les quantités $\delta, \alpha\delta$ soient suffisamment petites, alors la variation de la mesure de performance provoquée par l'augmentation du λ_i peut être compensée par l'effet lié au changement de μ_j .

Dans le tableau 4.5, on présente deux directions de perturbation permettant de maintenir le niveau de la disponibilité et/ou la capacité de production globale du système lorsque $\bar{\lambda}_1$ et λ_4 varient légèrement. D'un point de vue pratique, les différentes directions de "compensation" peuvent être proposées. La solution optimale dépend évidemment d'autres critères comme, par

Direction	Disponibilité		Capacité de production	
	$MSM_{\bar{Q}}^A$	MSM_{Q}^A	$MSM_{\bar{Q}}^S$	MSM_{Q}^S
$Q(\bar{\lambda}_1, \lambda_1, \lambda_2)$	-46.8586	-48.4811	-37018.3834	-37852.8736
$Q(\lambda_3, \lambda_4)$	-77.3862	-83.2621	-14192.0662	-15267.1515
$Q(\bar{\lambda}_1, 2.34\mu_2)$	-0.2137	-0.0060	2756.2570	2923.6961
$Q(\lambda_4, 2.42\mu_3)$	-1.3369	0.0534	-245.1435	9.8035

TAB. 4.5 – Sensibilité de la disponibilité moyenne/asymptotique et de la capacité de production moyenne/asymptotique par rapport à un groupe de paramètres

exemples, le coût de maintenance (modification d'un taux de réparation) ou de reconception (modification d'un taux de défaillance).

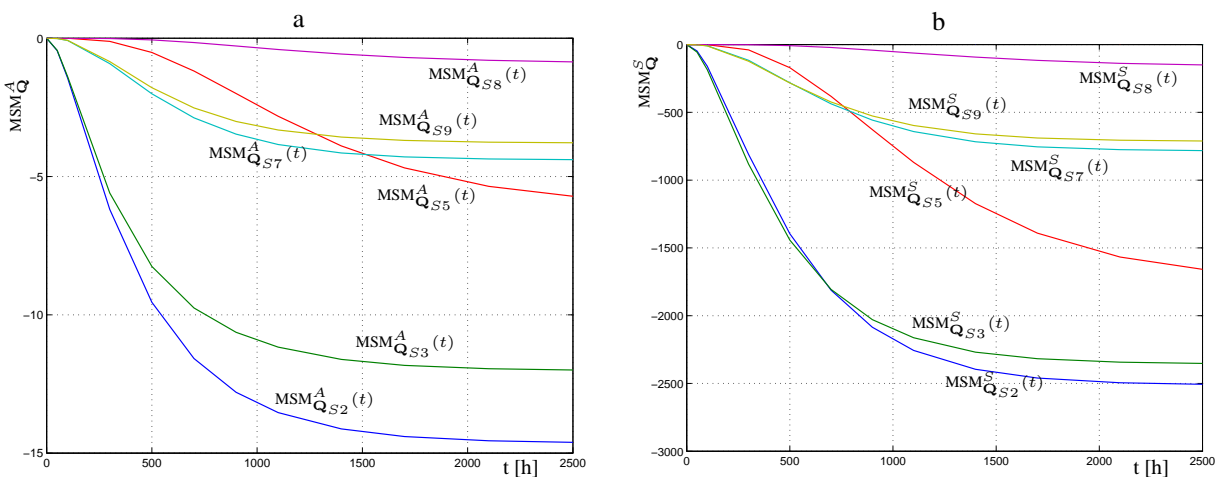


FIG. 4.9 – Sensibilité de la disponibilité instantanée (a) et de la capacité de production instantanée (b) par rapport aux taux de défaillance sortant d'un état de fonctionnement

4.3.3 Analyse de sensibilité par rapport à un état

Dans ce paragraphe, on utilise le même facteur d'importance MSM pour le but d'analyser la sensibilité d'un état du système. En se basant sur les résultats de sensibilité, on peut classer l'importance d'un état sur la performance (disponibilité/capacité de production globale) du système.

On commence par choisir les directions permettant d'étudier la sensibilité d'un état de fonctionnement. En effet, dans le tableau 4.6, la direction notée Q_{S_i} indique le fait que tous les taux

Direction	Disponibilité			Capacité de production		
	$MSM_{Q_{S_i}}^{\bar{A}}$	$MSM_{Q_{S_i}}^A$	Ordre	$MSM_{Q_{S_i}}^{\bar{S}}$	$MSM_{Q_{S_i}}^S$	Ordre
Q_{S_1}	-57.4255	-60.0535	1	-35477.8421	-36215.8937	1
Q_{S_2}	-13.8533	-14.6393	3	-2354.4050	-2512.5380	3
Q_{S_3}	-11.4106	-12.0197	4	-2221.8456	-2356.8238	4
Q_{S_4}	-27.3454	-29.1022	2	-8022.0121	-8486.7967	2
Q_{S_5}	-5.1681	-6.0478	5	-1496.7651	-1739.0416	5
Q_{S_7}	-4.0821	-4.4008	6	-719.7299	-785.4732	6
Q_{S_8}	-0.7728	-0.9072	8	-136.2435	-162.0568	8
Q_{S_9}	-3.5206	-3.7906	7	-657.3550	-714.1543	7
$Q_{S_{10}}$	-0.6664	-0.7822	9	-124.2511	-147.2472	9

TAB. 4.6 – Sensibilité de la disponibilité moyenne/asymptotique et de la capacité de production moyenne/asymptotique par rapport aux taux de défaillance d'un état de fonctionnement

de défaillance sortant de l'état de marche i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10$) sont perturbés simultanément par une même petite quantité δ . Les mesures de sensibilité instantanée de la disponibilité suivant ces directions sont présentées sur la figure 4.9.a. De son côté, la figure 4.9.b correspond au fait que la mesure de performance est la capacité de production globale. Les résultats montrent que l'importance d'un état peut aussi changer dans le temps. D'après les résultats de la sensibilité de la disponibilité moyenne/asymptotique et/ou de la capacité de production globale moyenne/asymptotique reportés au tableau 4.6, l'état 1 est le plus important sur ces mesures de performance (disponibilité/capacité de production globale) et, le moins important état est l'état numéro 10.

4.3.4 Analyse de sensibilité par rapport à un groupe d'états

Ce paragraphe explore l'étude de sensibilité de la mesure de performance du système par rapport aux taux de défaillance caractérisant un groupe d'états. Dans le tableau 4.7, la direction notée $Q_{(C_i C_j)}$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) indique le fait que le taux de défaillance des composants C_i et C_j sont perturbés simultanément par une même quantité petite δ dans tous les états de fonctionnement où les deux composants C_i et C_j sont en marche. En se basant sur la sensibilité de mesures de performance du système suivant ces directions, on peut classifier l'importance d'un groupe d'états ou un groupe de composants opérationnels (tous les composants dans d'un groupe opérationnel sont en marche).

Les résultats des mesures de sensibilité moyennes et asymptotiques reportés au tableau 4.7

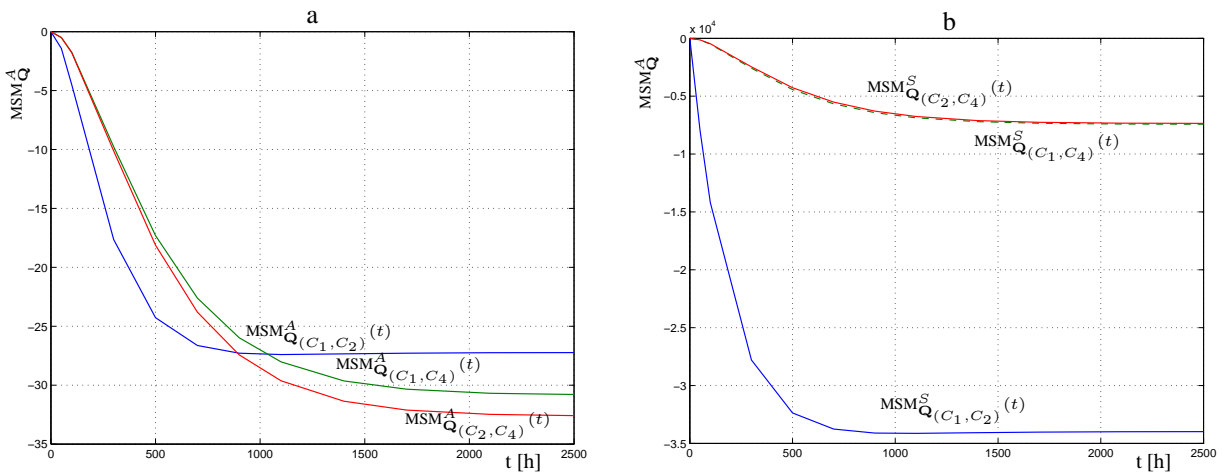


FIG. 4.10 – Sensibilité de la disponibilité instantanée (a) et de la capacité de production instantanée (b) par rapport aux taux de défaillance sortant d'un groupe d'état de fonctionnement

Direction	Etats	Disponibilité			Capacité de production		
		$MSM_{\bar{Q}}^A$	MSM_Q^A	Ordre	$MSM_{\bar{Q}}^S$	MSM_Q^S	Ordre
$Q_{(C_1C_2)}$	1,4,5	-26.4276	-27.2344	5	-33329.7076	-33978.7511	1
$Q_{(C_1C_3)}$	1,3,5,10	-58.0905	-61.8841	2	-25005.6896	-25899.9678	2
$Q_{(C_1C_4)}$	4,9	-28.9252	-30.8173	4	-6998.0912	-7425.4585	4
$Q_{(C_2C_3)}$	1,2,5,8	-70.1417	-74.3927	1	-23954.6266	-24903.1600	3
$Q_{(C_2C_4)}$	4,7	-30.5990	-32.6183	3	-6918.9540	-7354.4199	5

TAB. 4.7 – Sensibilité de la disponibilité moyenne/asymptotique et de la capacité de production moyenne/asymptotique par rapport aux taux de défaillance d'un groupe d'états de fonctionnement

montrent que :

- si on regarde la disponibilité moyenne/asymptotique, le plus important groupe de deux composants opérationnel est is (C_2, C_3) tandis que le groupe (C_1, C_2) est la moins importante ;
- si on regarde la capacité de production moyenne/asymptotique, (C_1, C_2) est le plus important groupe et le moins important groupe est (C_2, C_4) .

Les mesures de sensibilité instantanées sont reportées dans la figure 4.10 dans lesquelles, 4.10.a correspond au cas où la mesure de performance est la disponibilité et 4.10.b indique la capacité de production globale.

4.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons montré comment le facteur de sensibilité multi-directionnelle MSM peut être utilisé pour les études de sensibilité des mesures de performance du système de production multi-état décrit par un processus de Markov.

Dans un premier temps, nous avons étudié la mise en œuvre du facteur MSM dans le contexte où la mesure de performance est la capacité de production globale du système. Grâce aux MSM instantané, MSM moyen et MSM stationnaire, nous pouvons analyser la sensibilité de la capacité de production globale suivant une direction d'intérêt (direction d'un paramètre, d'un groupe de paramètres, ou plus généralement, direction des taux de transitions du processus de Markov) à l'instant donné, durant une période d'observation ou en régime stationnaire.

Dans un second temps, nous avons montré les applications principaux du facteur MSM au travers d'un système de production multi-état simple où les mesures de performance considérées sont la disponibilité et la capacité de production globale. Les différentes directions de sensibilité ont été proposées afin d'identifier l'importance d'un composant (un groupe de composants), l'importance d'un état (un groupe d'états). On a montré également que ce facteur peut fournir une technique permettant de maintenir le niveau de performance lorsque des variations des paramètres sont survenues.

En résumé, le facteur MSM nous semble un outil efficace dans nombreuses applications : étude de la variation d'un ou plusieurs paramètres, identification d'un composant critique ou d'un groupe de composants critiques, adaptation des paramètres de maintenance pour maintenir ou améliorer les indicateurs de performance en cas de dégradation de composants, etc.

Chapitre 5

Estimation du facteur MSM stationnaire par analyse de perturbation

5.1 Introduction

Si on veut mettre en œuvre en pratique les méthodes développées dans les chapitres précédents, on peut se retrouver confronté à diverses difficultés. Le comportement fiabiliste (taux de défaillance et/ou taux de réparation) des composants peut être inconnu, et la matrice des taux de transition du modèle de Markov du système est inconnue. La taille de l'espace d'état de Markov peut devenir trop grande pour permettre un travail aisé directement sur la matrice des taux de transition. Pour ces cas, il est pratiquement impossible de calculer de manière analytique les indicateurs de fiabilité du système. Il est donc intéressant de disposer d'une méthode efficace permettant une estimation à partir des données observées du système, c'est-à-dire à partir de l'observation d'une trajectoire du processus de Markov régissant le comportement du système.

L'objectif de ce chapitre est de présenter une méthode d'estimation efficace qui permet d'estimer le facteur d'importance proposé en régime stationnaire (appelé aussi MSM stationnaire) à partir d'une seule trajectoire observée du processus de Markov.

Rappelons tout d'abord que le facteur proposé MSM est défini comme la dérivée de la mesure de performance selon une direction d'intérêt. Afin d'estimer une dérivée, plusieurs méthodes d'estimation ont été proposées. Les méthodes simples se basent sur la technique des différences finies (*finite differences* - FD [32]), et sur la technique des perturbations simultanées (*simultaneous perturbation* - SP [97]). Ces méthodes impliquent des changements de paramètres pour chaque simulation, qui peuvent être coûteuses en temps de calcul et irréalisable pour de nombreux systèmes réels. Les méthodes basées sur des nombres aléatoires communs (*common random numbers* [32]) offrent une solution à ce problème. Cependant, si la valeur de la perturbation est trop petite, les résultats des différentes estimations pourraient être extrêmement

affectés par des interférences. L'estimation de dérivée basée sur les rapports de vraisemblance a été proposée dans [61, 59], et la dérivée faible (*weak derivatives*) a été introduite par Pflug [87, 88]. Ces méthodes offrent un estimateur sans biais, ce qui conduit à une accélération de la convergence lors de mises en œuvre d'une optimisation de l'algorithme de simulation, par exemple, approximation stochastique [59].

L'analyse de perturbation (*Perturbation Analysis - PA*) [22, 65], et ses variantes : analyse de perturbation infinitésimale (*Infinitesimal Perturbation Analysis - IPA* [26]), analyse de perturbation moyenne (*smoothed perturbation analysis - SPA* [52]), analyse de perturbation infinitésimale structurelle (*structural IPA* [33]) semblent être beaucoup plus prometteuses. Ces méthodes sont basées sur l'utilisation du gradient stochastique qui peut être estimé à partir d'une seule trajectoire (c'est-à-dire qu'aucune modification des paramètres du modèle n'est nécessaire) [58, 60]. Toutefois la complexité de mise en œuvre en limite leur application. Récemment, l'approche basée sur le concept de réalisation de perturbation (*Perturbation Realization* [24]) a été introduite. Cette approche semble la plus pratique et particulièrement bien adaptée aux modèles de Markov en régime stationnaire [25, 31].

Le présent chapitre a pour but de montrer comment la méthode d'analyse de perturbation, ou plus précisément, le concept de réalisation de perturbation peut être utilisé afin d'estimer le MSM stationnaire à partir d'une seule trajectoire observée. Pour ce faire, nous commençons par présenter le principe de l'analyse de perturbation, qui donne un cadre général à de nombreuses approches au problème d'analyse de perturbation. Nous aborderons ensuite l'approche basée sur la notion de "réalisation de perturbation" afin de définir des estimateurs à partir d'une seule réalisation du processus de Markov. Nous établirons ensuite les formules permettant d'évaluer le facteur MSM stationnaire grâce à ces estimateurs. Nous appliquerons enfin cette approche au travers de quelques exemples numériques simples pour montrer les avantages de la méthode choisie.

5.2 Analyse de perturbation

5.2.1 Principe de l'analyse de perturbation (PA)

Considérons un système à événements discrets défini par :

- un espace d'états fini $e = \{e_1, e_2, \dots\}$,
- un ensemble de paramètres $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$,
- un espace de probabilité (Ω, F, P) ,
- un vecteur aléatoire $\xi = \xi(\omega), \omega \in \Omega$, qui représente la partie aléatoire du modèle d'évolution du système.

La fonction de performance du système à l'instant t est notée $\eta_t(\theta, \xi)$. Deux grandeurs sont considérées par la suite. La première, associée au régime transitoire, est :

$$\bar{\eta}_t(\theta) = \mathbb{E}\left\{\eta_t(\theta, \xi)\right\},$$

où \mathbb{E} désigne l'espérance mathématique. La deuxième, associée au régime stationnaire (s'il existe), est :

$$\eta(\theta) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \eta_t(\theta, \xi).$$

Les fonctions déterministes $\bar{\eta}_t(\theta)$ et $\eta(\theta)$ représentent des critères de performance dont on se propose d'analyser la sensibilité par rapport à θ . On étudie pour cela la dérivée directionnelle que l'on peut définir par rapport à θ et qui s'écrit [22, 65] :

$$\frac{d\bar{\eta}_t(\theta)}{d\theta} = \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\bar{\eta}_t(\theta + \delta\theta) - \bar{\eta}_t(\theta)}{\delta\theta}, \quad (5.1)$$

$$\frac{d\eta(\theta)}{d\theta} = \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\eta(\theta + \delta\theta) - \eta(\theta)}{\delta\theta}, \quad (5.2)$$

en régime transitoire et stationnaire respectivement. Supposons que l'on perturbe légèrement les paramètres du système selon $\theta' = \theta + \delta\theta$, et que l'on note :

- (θ, ξ) le couple représentant les paramètres et l'évolution du système sans perturbation,
- (θ', ξ') , où ξ' est indépendant de ξ , le couple représentant les paramètres et l'évolution du système avec perturbation.

L'estimation de (5.1) et (5.2) peut alors se faire par la méthode des différences finies. Toutefois, du point de vue pratique, les données de la trajectoire perturbée ne sont pas toujours disponibles. Changer les paramètres du système réel afin d'observer les réalisations de la trajectoire perturbée peut, par exemple, s'avérer impossible ou trop coûteux [26]. Dans ce cas, la simulation est indispensable, mais elle devient rapidement difficile pour des grands systèmes.

5.2.2 Analyse de perturbation infinitésimale (IPA) :

Le but de l'analyse de perturbation infinitésimale est d'estimer les dérivées (5.1) et (5.2) à l'aide de la seule trajectoire définie par (θ, ξ) . Pour atteindre cet objectif, il est alors nécessaire de pouvoir déterminer une quantité basée sur la seule trajectoire (θ, ξ) . Dans [22], Cao propose de considérer comme estimateur de l'IPA :

$$\phi_t(\theta, \xi) = \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\eta_t(\theta + \delta\theta, \xi) - \eta_t(\theta, \xi)}{\delta\theta},$$

où :

- $\eta_t(\theta, \xi)$ est la fonction de performance déterminée à partir de (θ, ξ) , donc à partir des données de retour d'expérience ξ qui correspondent à la trajectoire nominale, et en faisant l'hypothèse (juste) que ces données ont été générées par un système dont les paramètres sont dans θ .
- $\eta_t(\theta + \delta\theta, \xi)$ est la fonction de performance déterminée à partir de (θ', ξ) , avec $\theta' = \theta + \delta\theta$, donc à partir des données de retour d'expérience ξ qui correspondent à la trajectoire nominale, et en faisant l'hypothèse (erronée) que ces données ont été générées par un système dont les paramètres sont dans θ' .

En considérant l'espérance mathématique et la limite de $\phi_t(\theta, \xi)$, on obtient :

$$\mathbb{E}\left\{\phi_t(\theta, \xi)\right\} = \mathbb{E}\left\{\lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\eta_t(\theta + \delta\theta, \xi) - \eta_t(\theta, \xi)}{\delta\theta}\right\}$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(\theta, \xi) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\eta_t(\theta + \delta\theta, \xi) - \eta_t(\theta, \xi)}{\delta\theta} \right).$$

$\phi_t(\theta, \xi)$ peut être utilisé pour l'estimation de (5.1) et (5.2) si et seulement s'il est non biaisé ou/et convergent. C'est-à-dire que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\phi_t(\theta, \xi)\right\} &= \frac{d}{d\theta} \mathbb{E}\left\{\eta_t(\theta, \xi)\right\} = \frac{d\bar{\eta}_t(\theta)}{d\theta}, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(\theta, \xi) &= \frac{d\eta(\theta)}{d\theta}. \end{aligned}$$

Les difficultés de l'IPA consistent tout d'abord à trouver un algorithme d'estimation de la fonction $\phi_t(\theta, \xi)$. Il faut ensuite montrer que l'estimateur $\phi_t(\theta, \xi)$ vérifie les propriétés précédentes de convergence et de biais nul. Ce dernier point peut être particulièrement difficile, notamment lorsque la mesure de performance n'est pas une fonction continue de la variable θ . C'est pourquoi "l'analyse de perturbation moyenne", "l'analyse de perturbation finie" et le concept de "réalisation de perturbation" ont été développées [22, 26, 24]. Les deux premières méthodes s'appliquent pour une classe restreinte de problèmes. En outre, leur application est limitée de par leur complexité. La dernière, concept de réalisation de perturbation, semble la plus pratique et particulièrement bien adaptée aux modèles de Markov en régime stationnaire.

5.3 Réalisation de perturbation pour un processus de Markov

L'objectif de cette section est de définir des estimateurs (y compris les estimateurs du facteur de réalisation de perturbation, et de potentiel de performance) à partir d'une seule réalisation.

Grâce à ces estimateurs, on peut estimer le facteur proposé MSM stationnaire à partir d'une seule trajectoire observée.

Pour commencer, nous considérons un processus irréductible de Markov ayant un espace d'états fini, noté X . Par conséquent, ce processus est ergodique et l'existence d'une distribution stationnaire peut être prouvée, voir [94]. Ce processus est caractérisé par :

- un espace d'états fini $E = \{e_1, e_2, \dots\}$;
- un ensemble de paramètres θ représentant les taux de transition, et déterminant la matrice de taux de transition \mathbf{M} ;
- un vecteur de probabilité $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots)$ indiquant la distribution de probabilité d'occupation d'états du processus en régime stationnaire.

Le critère de performance du processus de Markov en régime stationnaire est défini par :

$$W = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}} \left\{ \eta_t(\mathbf{M}, X) \right\} = \sum_{i \in E} \pi_i f_i = \boldsymbol{\pi} \mathbf{f},$$

où $\eta_t(\mathbf{M}, X)$ est la fonction de performance du processus de Markov X , et le vecteur colonne $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots)^\top$ (\top désigne la transposition). f_i est un coefficient associé à l'état i ou à la performance de l'état i selon les cas (système binaire ou système multi-état). Rappelons par exemple, que si l'on cherche à évaluer la fiabilité ou la disponibilité d'un système binaire, $f_i = 1$ si l'état i est un état de marche du système et $f_i = 0$ si l'état i est un état de panne.

5.3.1 Réalisation de perturbation

Supposons qu'à l'instant t_k , le processus est à l'état k et la matrice \mathbf{M} est perturbée de façon à ce que :

$$\mathbf{M}_\delta = \mathbf{M} + \delta \mathbf{Q}, \tag{5.3}$$

avec δ un nombre réel de valeur faible et \mathbf{Q} une matrice indiquant la direction de perturbation. Rappelons que la condition sur \mathbf{Q} pour que \mathbf{M}_δ soit une matrice de taux de transition est que la somme de chaque ligne de \mathbf{Q} soit égale à 0. Suite à cette perturbation, si elle se "réalise" effectivement, le processus X peut sauter de l'état k à l'état j au lieu de l'état i dans lequel il se serait trouvé en l'absence de perturbation sur la matrice de taux de transition \mathbf{M} .

Notons maintenant :

- $X^i = (X_t^i, t \geq 0)$ le processus de Markov avec la matrice de taux de transition \mathbf{M} et l'état initial $X_0^i = i$;
- $X'^j = (X_t'^j, t \geq 0)$ le processus de Markov avec la matrice de taux de transition \mathbf{M}_δ et l'état initial $X_0'^j = j$.

Une illustration d'effet de la perturbation est présentée sur la Figure 5.1. Supposons que l'on commence par un processus de Markov X_t^l à l'instant zéro, avec un état initial l ($X_0^l = l$)

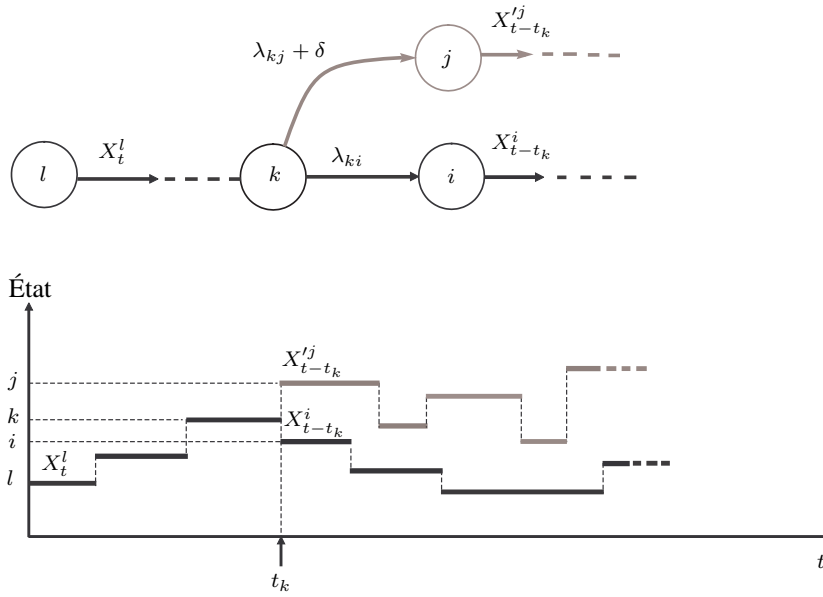


FIG. 5.1 – Illustration d’effet de la perturbation d’un processus de Markov, une perturbation est effectuée à l’instant t_k

et la matrice de taux de transition \mathbf{M} . Si à l’instant t_k donné (le système est à l’état k), le taux de transition λ_{kj} est perturbé par $\lambda_{kj} + \delta$, par conséquent, le processus peut sauter de l’état k à l’état j au lieu de l’état k à l’état i comme dans le cas où il n’y a pas de perturbation sur le taux de transition λ_{kj} . Dans ce cas, on dit que la perturbation est réalisée.

5.3.2 Facteur de réalisation de perturbation

5.3.2.1 Définition du facteur de réalisation de perturbation

L’effet de la perturbation sur le processus peut être mesuré par la quantité $d_{ij}(\delta, \infty)$ qui vise à quantifier l’écart entre la performance obtenue avec le processus perturbé et celle résultant du processus original :

$$d_{ij}(\delta, \infty) = \mathbb{E} \left\{ \int_{t_k}^{\infty} [\eta_t(\mathbf{M}_\delta, X_{t-t_k}^{ij}) - \eta_t(\mathbf{M}, X_{t-t_k}^i)] dt \right\},$$

où :

- t_k = l’instant de la perturbation survenue,
- $\eta_t(\mathbf{M}_\delta, X_{t-t_k}^{ij})$, la fonction de performance du processus de Markov X^{ij} ,
- $\eta_t(\mathbf{M}, X_{t-t_k}^i)$, la fonction de performance du processus de Markov X^i .

Quand δ tend vers zéro, \mathbf{M}_δ tend vers \mathbf{M} [24]. Par conséquent, le processus X^{ij} devient X^j qui est un processus de Markov avec la matrice de taux de transition \mathbf{M} et l’état initial

$X_0^j = j, X^j = (X_t^j, t \geq 0)$.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} d_{ij}(\delta, \infty) = \mathbb{E} \left\{ \int_{t_k}^{\infty} [\eta_t(\mathbf{M}, X_{t-t_k}^j) - \eta_t(\mathbf{M}, X_{t-t_k}^i)] dt \right\},$$

Le facteur de réalisation de perturbation, noté d_{ij} , est défini comme suit [21] :

$$d_{ij} = \lim_{\delta \rightarrow 0} d_{ij}(\delta, \infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \int_{t_k}^T [\eta_t(\mathbf{M}, X_{t-t_k}^j) - \eta_t(\mathbf{M}, X_{t-t_k}^i)] dt \right\},$$

Par définition, le facteur de réalisation de perturbation (d_{ij}) mesure l'effet moyen d'un changement de l'état initial (de l'état i à l'état j) du processus de Markov sur le critère de performance.

Il a montré également dans [24] que le facteur de réalisation de perturbation peut également être écrit sous la forme :

$$d_{ij} = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \int_{t_k}^T \eta_t(\mathbf{M}, X_{t-t_k}^j) dt \right\} - \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \int_{t_k}^T \eta_t(\mathbf{M}, X_{t-t_k}^i) dt \right\} \quad (5.4)$$

La matrice de réalisation, notée \mathbf{D} , est donc telle que $\mathbf{D} = [d_{ij}]_{i,j \in E}$. D'après (5.4), on a :

$$d_{ij} = -d_{ji}, \quad i, j \in E, \quad (5.5)$$

et par conséquent, \mathbf{D} est une matrice antisymétrique. C'est-à-dire que :

$$\mathbf{D}^\top = -\mathbf{D} \quad (5.6)$$

Afin de déterminer la matrice de réalisation \mathbf{D} , il suffit de déterminer les éléments d_{ij} tel que $i > j$, ce qui nous permet de réduire le temps de calcul.

Le facteur de réalisation de perturbation d_{ij} , et par conséquent, la matrice de réalisation \mathbf{D} sera utilisée dans la section suivante afin d'évaluer le facteur de sensibilité multi-directionnelle MSM présenté au chapitre 3. Le paragraphe suivant est consacré à l'estimation de d_{ij} .

5.3.2.2 Estimation du facteur de réalisation de perturbation d_{ij}

Pour commencer, notons bien que les deux processus X^j et X^i ont la même matrice de taux de transition \mathbf{M} et le même espace d'états E . Seul les états initiaux diffèrent ; il existe donc un temps fini t_{fin} pour lequel ces deux processus se rejoignent à l'instant t_{fin} [24], c'est-à-dire que $X_{t_{fin}}^j = X_{t_{fin}}^i$. Par conséquent,

$$\mathbb{E} \left\{ \int_{t_{fin}}^{+\infty} [\eta_t(\mathbf{M}, X_{t-t_k}^j) - \eta_t(\mathbf{M}, X_{t-t_k}^i)] dt \right\} = 0, \quad (5.7)$$

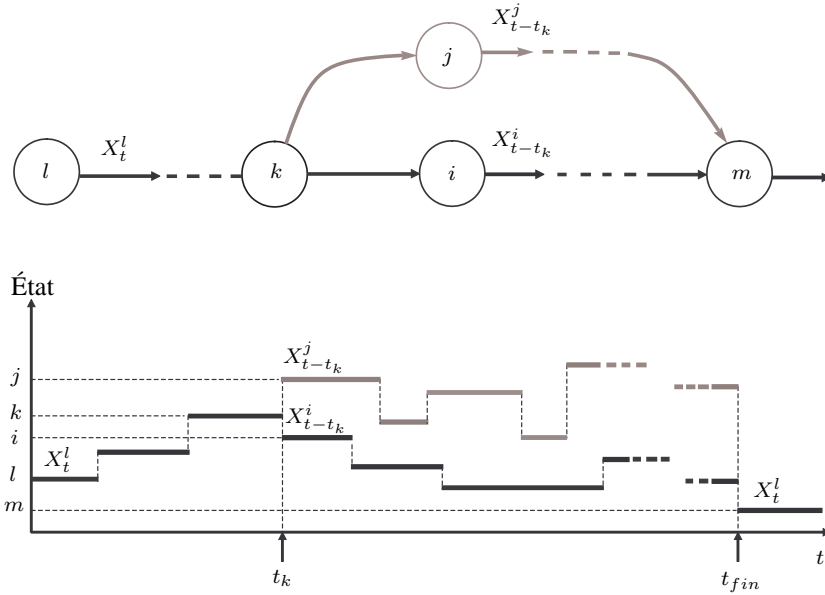


FIG. 5.2 – Illustration d'une réalisation de perturbation commençant à l'instant t_k et terminant à l'instant t_{fin} .

alors,

$$\begin{aligned}
 d_{ij} &= \mathbb{E} \left\{ \int_{t_k}^{t_{fin}} [\eta_t(\mathbf{M}, X_{t-t_k}^j) - \eta_t(\mathbf{M}, X_{t-t_k}^i)] dt \right\} \\
 &+ \mathbb{E} \left\{ \int_{t_{fin}}^{\infty} [\eta_t(\mathbf{M}, X_{t-t_k}^j) - \eta_t(\mathbf{M}, X_{t-t_k}^i)] dt \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \int_{t_k}^{t_{fin}} [\eta_t(\mathbf{M}, X_{t-t_k}^j) - \eta_t(\mathbf{M}, X_{t-t_k}^i)] dt \right\}.
 \end{aligned}$$

Comme les deux processus sont homogènes en temps, d_{ij} peut être défini à partir de l'instant $t = 0$. Le facteur de réalisation de perturbation d_{ij} peut donc s'écrire :

$$d_{ij} = \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t_{fin}-t_k} [\eta_t(\mathbf{M}, X_t^j) - \eta_t(\mathbf{M}, X_t^i)] dt \right\}. \quad (5.8)$$

Pour estimer le facteur de réalisation d_{ij} à partir d'une seule trajectoire sans utiliser l'estimateur d'IPA, on introduit maintenant la mesure du temps de premier passage de l'état j à l'état i , $\Gamma^j(i)$, comme suit :

$$\Gamma^j(i) = \inf\{t, t > 0 / X_t^j = i\}. \quad (5.9)$$

On note que $\Gamma^j(i)$ correspond à un temps d'arrêt de X^j et est indépendant de X^i .

Théorème 5.1. Si $\mathbb{E}_\pi(f) < \infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[|\eta_t(\mathbf{M}, X_t^i)|] = \mathbb{E}_\pi(|f|)$, donc pour tout $i, j \in E$:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \mathbb{E} \left\{ \int_0^{\Gamma^j(i)} [\eta_t(\mathbf{M}, X_t^j) - \eta_t(\mathbf{M}, X_t^i)] dt \right\} \\ &= -\mathbb{E} \left\{ \int_0^{\Gamma^i(j)} [\eta_t(\mathbf{M}, X_t^i) - \eta_t(\mathbf{M}, X_t^j)] dt \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \int_0^{\Gamma^j(i)} \eta_t(\mathbf{M}, X_t^j) dt \right\} - W * \mathbb{E} \left\{ \Gamma^j(i) \right\}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

La démonstration de ce théorème a été donnée dans [24].

Considérons maintenant $\Gamma^l(j)$, la durée de temps que X_t^l passe avant de visiter pour la première fois l'état j . On a selon la relation (5.9) :

$$\Gamma^l(j) = \inf\{t, t > 0 / X_t^l = j\}.$$

Alors, les deux processus $\{X_t^l, t \geq \Gamma^l(j)\}$ et $\{X_t^j, t \geq 0\}$ sont identiques. Par conséquent, l'équation (5.10) peut s'écrire finalement comme suit :

$$d_{ij} = \mathbb{E} \left\{ \int_{\Gamma^l(j)}^{\Gamma^j(i) + \Gamma^l(j)} \eta_t(\mathbf{M}, X_t^l) dt \right\} - W * \mathbb{E} \left\{ \Gamma^j(i) \right\}.$$

Lorsque le temps de premier passage $\Gamma^j(i)$ et le vecteur de probabilité π (et en conséquence, la mesure de performance W) peuvent être estimés à partir d'une seule trajectoire observée X^l , cette relation permet d'estimer tous les facteurs de réalisation de perturbation d_{ij} (pour tous $i, j \in E$) en utilisant des données d'une seule trajectoire X^l .

Algorithme d'estimation de la matrice de réalisation de perturbation :

Considérons un processus de Markov X^l de matrice de taux de transition \mathbf{M} et d'état initial $X_0^l = l$. Ce processus est observé pour les deux séquences de temps $\{j_s\}$ et $\{i_s\}$ tels que pour tout $s \geq 1$:

- $i_0 = 0$,
- j_s est la date à laquelle X_t^l visite pour la première fois l'état j après i_{s-1} ,
- i_s est la date à laquelle que X_t^l visite pour la première fois l'état i après j_s .

Par définition, $\Gamma^l(j) = j_1$.

On définit également :

- $L_s^j(i) = i_s - j_s$ pour $s \geq 1$ (voir Figure 5.3),
- $R_s = \int_{j_s}^{i_s} \eta_t(\mathbf{M}, X_t^l) dt$,
- $\epsilon^k(v)$ tel que $\epsilon^k(v) = 1$ si $v = k$ et $\epsilon^k(v) = 0$ sinon.

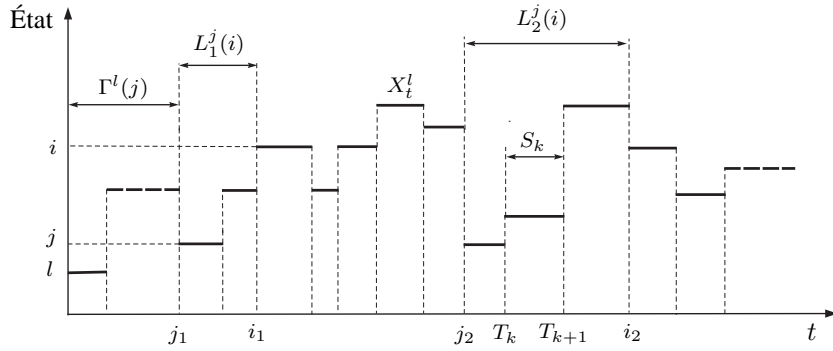


FIG. 5.3 – Représentation de $L_s^j(i)$ sur une trajectoire donnée X^l . $L_s^j(i)$ est utilisé pour estimer le temps de premier passage $\Gamma^j(i)$ afin d'estimer le facteur de réalisation de perturbation d_{ij} .

Les quantités $\Gamma^j(i)$, $\int_0^{\Gamma^j(i)} \eta_t(\mathbf{M}, X_t^l) dt$, et W peuvent être estimées par $\hat{\Gamma}^j(i)$, \hat{I} , \hat{W} respectivement :

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}^j(i) &= \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n L_s^j(i), \\ \hat{I} &= \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n R_s, \\ \hat{\pi}_i &= \frac{1}{T_N} \int_0^{T_N} \epsilon^i(X_t^l) dt, \text{ pour tout } i \in E, \\ \hat{W} &= \hat{\pi} \mathbf{f},\end{aligned}\tag{5.11}$$

où n est le nombre de séquences observées sur l'intervalle de l'état j à l'état i , N est le nombre total de séquences observées, et T_N est la durée de la trajectoire observée. Par conséquent, on obtient finalement l'estimateur \hat{d}_{ij} :

$$\hat{d}_{ij} = \hat{I} - \hat{W} \hat{\Gamma}^j(i).\tag{5.12}$$

La convergence de ces estimateurs a été étudiée et prouvée par Cao, voir [24, 25].

Pour l'estimation de la matrice de réalisation \mathbf{D} , on peut donc suivre les étapes suivantes :

1. Estimer d_{ij} pour tous $\{i, j \in E / i > j\}$ par l'estimateur (5.12).
2. Affecter $d_{ji} = -d_{ij}$ pour tous $\{i, j \in E / i > j\}$ et $d_{ij} = 0$ pour $\{i, j \in E / i = j\}$
3. Affecter $\mathbf{D} = [d_{ij}]_{i,j \in E}$.

En se basant sur cet algorithme, l'estimation de la matrice de réalisation de perturbation doit être menée pour chaque couple $(i, j)_{i > j}$, ce qui donne une complexité d'ordre $\mathcal{O}((m^2 - m)/2)$ lorsque m désigne le nombre total d'états du système.

Sur le plan pratique, ce résultat est important : il permet d'utiliser une seule et même trajectoire pour estimer l'impact d'une perturbation sur un système et de simplifier, par conséquent, la complexité de calculs. Ce résultat peut nous permettre d'estimer le facteur de sensibilité proposé MSM à partir de données de retour d'expérience, c'est-à-dire l'observation d'une trajectoire nominale du processus de Markov.

5.3.3 Potentiel de performance

5.3.3.1 Introduction du potentiel de performance

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à introduire une mesure, appelée le potentiel de performance, qui sera utilisée pour l'estimation du facteur de sensibilité MSM en régime stationnaire, voir la section suivante.

Pour commencer, on regarde la définition de d_{ij} donnée par l'équation (5.4), on trouve que :

$$d_{ij} = d_{ik} + d_{kj}, \text{ avec } i, j, k \in E. \quad (5.13)$$

Cette propriété ressemble à celle du potentiel d'énergie. Notons g_i le potentiel de performance ou simplement le potentiel de l'état i . Soient $k^* \in E$ un entier quelconque et c un nombre réel, tels que :

$$g_{k^*} = c, \text{ et } g_i = g_{k^*} + d_{k^*i}, i \neq k^*,$$

on peut démontrer d'après (5.13) que :

$$d_{ij} = g_j - g_i, \text{ pour tous } i, j \in E. \quad (5.14)$$

Par conséquent, la matrice de réalisation \mathbf{D} peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}\mathbf{g}^\top - \mathbf{g}\mathbf{e}^\top, \quad (5.15)$$

$\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots)^\top$ étant le vecteur du potentiel de performance et $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^\top$.

5.3.3.2 Estimation du potentiel de performance \mathbf{g}

D'après les équations (5.4) et (5.14) et le fait que X^i et X^j sont homogène en temps, on a :

$$g_j - g_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \int_0^T \eta_t(\mathbf{M}, X_t^j) dt \right\} - \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \int_0^T \eta_t(\mathbf{M}, X_t^i) dt \right\}$$

Posons maintenant $g_i(T)$ tel que :

$$g_i(T) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T \eta_t(\mathbf{M}, X_t^i) dt \right\}. \quad (5.16)$$

Il est clair que :

$$g_j - g_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}\{g_j(T) - g_i(T)\}. \quad (5.17)$$

D'après (5.14), (5.15) et (5.17), la matrice de réalisation \mathbf{D} peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{D} = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}\{e[\mathbf{g}(T)]^\top - [\mathbf{g}(T)]e^\top\},$$

où $\mathbf{g}(T) = (g_1(T), g_2(T), \dots)^\top$. C'est-à-dire que l'on peut utiliser $\mathbf{g}(T)$ comme un estimateur de \mathbf{g} en choisissant le T suffisamment grand.

On définit maintenant :

- T_k est l'instant de la k -ième transition du processus de Markov,
- S_k est le k -ième temps de séjour vérifiant $S_k = T_{k+1} - T_k$ (voir Figure 5.3),
- $X_k = X_t|_{t=T_k^+}$, X_k étant l'état de la k -ième transition,
- $\epsilon^k(v)$ tel que $\epsilon^k(v) = 1$ si $v = k$ et $\epsilon^k(v) = 0$ sinon.

En se basant sur l'ergodicité du processus de Markov à récurrence positive, (5.16) conduit à l'équation suivante, [23] :

$$g_i(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \epsilon^i(X_k) \int_{T_k}^{T_k+T} \eta(\mathbf{M}, X_t) dt \right\}}{\sum_{k=0}^{N-1} \epsilon^i(X_k)}, \quad (5.18)$$

où N est le nombre total de séquences observée.

La démonstration de (5.18) se base sur le théorème fondamental de l'ergodicité, voir [19]. Soit un processus de Markov ergodique $X = \{X_t/t \geq 0\}$, alors le processus de Markov $Z = \{Z_t/t \geq 0\}$ avec $Z_k = \epsilon^i(X_k) \int_{T_k}^{T_k+T} \eta(\mathbf{M}, X_t) dt$ est aussi ergodique. On a :

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \epsilon^i(X_k) \int_{T_k}^{T_k+T} \eta(\mathbf{M}, X_t) dt \right\}}{\sum_{k=0}^{N-1} \epsilon^i(X_k)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{N}{\sum_{k=0}^{N-1} \epsilon^i(X_k)} \right\} \left\{ \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \epsilon^i(X_k) \int_{T_k}^{T_k+T} \eta(\mathbf{M}, X_t) dt \right\}}{N} \right\}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Notons que :

$$\mathbb{E}[X_k = i] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \epsilon^i(X_k)}{N},$$

et,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_k] &= \mathbb{E}\left[\epsilon^i(X_k) \int_{T_k}^{T_k+T} \eta(\mathbf{M}, X_t) dt \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \epsilon^i(X_k) \int_{T_k}^{T_k+T} \eta(\mathbf{M}, X_t) dt \right\}}{N}. \end{aligned}$$

Par conséquent, (5.19) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \epsilon^i(X_k) \int_{T_k}^{T_k+T} \eta(\mathbf{M}, X_t) dt \right\}}{\sum_{k=0}^{N-1} \epsilon^i(X_k)} &= \frac{\mathbb{E} \left[\epsilon^i(X_k) \int_{T_k}^{T_k+T} \eta(\mathbf{M}, X_t) dt \right]}{\mathbb{E} [X_k = i]} \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_0^T \eta(\mathbf{M}, X_t) dt | X_0 = i \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_0^T \eta(\mathbf{M}, X_t^i) dt \right]. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

La relation (5.18) nous permet d'estimer le vecteur de potentiel de performance grâce au comportement d'une seule trajectoire observée. Notons d'une part que l'estimation de \mathbf{g} est biaisée pour un temps fini T , et d'autre part, qu'une difficulté est ici de choisir la longueur de période T . En effet, pour estimer g_i ($i = 1, 2, \dots$) on calcule l'espérance de l'intégrale de la fonction de performance sur une période fixe T . En ayant recours à la définition du facteur de réalisation $d_{ij} = g_j - g_i$, pour estimer d_{ij} , la période doit représenter le temps du premier passage de l'état j à l'état i , voir (5.9).

Choix de la longueur de période T [25] : Pour estimer g_i , la valeur de T peut être choisie d'un ordre de grandeur comparable à la durée moyenne du premier passage de l'état i à l'état j .

Remarquons que si T est grande, l'erreur systématique de $(g_j - g_i)$ qui estime d_{ij} est faible mais sa variance est grande, [25].

5.4 Estimation du facteur MSM stationnaire

L'objectif de cette section est d'intégrer les estimateurs ci-dessus, qui peuvent être estimés à partir d'une seule trajectoire nominale du processus de Markov, dans la formule d'évaluation du facteur de sensibilité multi-directionnelle en régime stationnaire (dit aussi facteur MSM stationnaire dans le chapitre 3). Ce développement nous permettra d'estimer le facteur MSM stationnaire à partir des données de retour d'expérience, c'est-à-dire de l'observation d'une seule trajectoire nominale.

Soit W la mesure de performance stationnaire du système. Il peut s'agir de la disponibilité asymptotique, la capacité de production asymptotique, etc. Le facteur MSM stationnaire de la mesure W suivant la direction \mathbf{Q} noté $\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^W$ et présenté dans le chapitre 3 est donné par :

$$\begin{aligned}
 \text{MSM}_{\mathbf{Q}}^W &= \frac{dW}{d\mathbf{Q}} \\
 &= -\pi \mathbf{Q} \mathbf{M}^\# \mathbf{f}, \tag{5.20}
 \end{aligned}$$

où M^\sharp est l'inverse généralisée de M tel que :

$$MM^\sharp = M^\sharp M = I - \pi e,$$

I étant la matrice d'identité de même taille que M .

Afin d'estimer le facteur MSM stationnaire à partir d'une seule trajectoire observée, nous présentons ci-dessous trois approches différentes :

- la première méthode se base sur l'estimation de la matrice génératrice ;
- la deuxième consacrée à une approche qui est basée sur l'estimation du facteur de réalisation de perturbation ;
- enfin, la troisième approche est liée à l'estimation du potentiel de performance.

On commence maintenant par étudier la première méthode.

5.4.1 Approche basée sur l'estimation de la matrice génératrice

Il a été démontré dans [82] que l'inverse généralisée M^\sharp peut être calculé selon l'expression suivante :

$$M^\sharp = (M + e\pi)^{-1} - e\pi. \quad (5.21)$$

Alors, d'après l'équation (5.20) le facteur MSM peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \text{MSM}_Q^W &= -\pi Q[(M + e\pi)^{-1} - e\pi]f \\ &= -\pi Q(M + e\pi)^{-1}f + \pi Qe\pi f, \end{aligned}$$

en notant que $Qe = 0$. On obtient finalement :

$$\text{MSM}_Q^W = -\pi Q(M + e\pi)^{-1}f. \quad (5.22)$$

Supposons que la matrice génératrice M est inconnue. Étant donnée une matrice directionnelle Q , pour pouvoir estimer le facteur MSM_Q^W à partir d'une seule trajectoire observée, il faut tout d'abord estimer le vecteur de probabilité d'occupation des états π . L'estimateur $\hat{\pi}$ est obtenu par (5.11) en analysant le comportement d'une seule trajectoire observée. Le problème restant est d'estimer la matrice génératrice M à partir de cette trajectoire.

5.4.1.1 Estimation de la matrice génératrice

Supposons que le comportement du système est observé sur l'intervalle de temps $[0, T]$. L'estimation de la matrice génératrice $M = [m_{ij}]_{i,j \in E}$ se base sur l'approche de maximum de vraisemblance, voir [71, 74].

Soit $N_{ij}(T)$ le nombre de transitions de l'état i à l'état j sur l'intervalle de temps $[0, T]$, alors $N_{ij}(t)$ peut s'écrire comme suit :

$$N_{ij}(T) = \sum_{k=0}^{N-1} \epsilon^i(X_k) \epsilon^j(X_{k+1}),$$

où N est le nombre total de transitions observées. On considère maintenant le temps passé dans l'état i durant l'intervalle de temps $[0, T]$, noté $T_i(T)$. Ce temps peut être évalué par :

$$T_i(T) = \int_0^T \epsilon^i(X_t) dt,$$

En se basant sur le comportement observé du système sur l'intervalle de temps $[0, T]$, l'estimation de la matrice génératrice peut être obtenue selon l'expression suivante [12, 71] :

$$\hat{m}_{ij}(T) = \frac{N_{ij}(T)}{T_i(T)}. \quad (5.23)$$

La convergence de cet estimateur a été justifié dans [71].

La relation (5.24) nous donne l'estimation de la matrice génératrice,

$$\hat{\mathbf{M}} = [\hat{m}_{ij}(T)]_{i,j \in E}, \quad (5.24)$$

grâce au comportement observé du système.

5.4.1.2 Estimation du facteur de sensibilité multi-directionnelle MSM

D'après les équations (5.22) et (5.24), on obtient finalement l'estimation du facteur MSM stationnaire comme suit :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^W = -\hat{\pi} \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{M}} + e \hat{\pi})^{-1} \mathbf{f}. \quad (5.25)$$

Cette relation nous montre que l'on peut estimer le facteur MSM stationnaire à partir d'une seule trajectoire nominale du processus de Markov. C'est-à-dire que l'estimation du facteur MSM peut être obtenue à partir des données de retour d'expériences.

On considère maintenant l'exemple 1 du chapitre 3. On s'intéresse ici à calculer la sensibilité de la disponibilité du système, noté A , par rapport à la direction \mathbf{Q}_{λ_2} , voir le paragraphe 3.2.1 du chapitre 3. $\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}^A$ correspond à la dérivée partielle de A par rapport au paramètre λ_2 , c'est-à-dire que $\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}^A = \partial A / \partial \lambda_2$. Afin de comparer le résultat estimé au résultat exact, on commence par calculer le $\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}^A$ en utilisant la résolution analytique.

L'équation de Kolmogorov en régime stationnaire est comme suit :

$$\begin{aligned}
 -(\lambda_1 + \lambda_2)\pi_1 + \lambda_1\pi_2 + \lambda_2\pi_3 &= 0 \\
 \mu_1\pi_1 - (\mu_1 + \lambda_2)\pi_2 + \lambda_2\pi_4 &= 0 \\
 \mu_2\pi_1 - (\lambda_1 + \mu_2)\pi_3 + \lambda_1\pi_4 &= 0 \\
 \mu_2\pi_2 + \mu_1\pi_3 - (\mu_1 + \mu_2)\pi_4 &= 0 \\
 \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 &= 1.
 \end{aligned}$$

Les états de marche du système sont 1, 2 et 3. Alors $\mathbf{f} = (1, 1, 1, 0)^\top$. En résolvant cette équation, la disponibilité asymptotique du système est obtenue finalement :

$$A = \boldsymbol{\pi} \mathbf{f} = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = \frac{\mu_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2 + \mu_2\lambda_1}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)},$$

et la dérivée de A par rapport à λ_2 est :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}^A = \frac{\partial A}{\partial \lambda_2} = \frac{-\mu_2\lambda_1}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)^2}.$$

En prenant les données³ : $\lambda_1 = 0.01, \lambda_2 = 0.01, \mu_1 = 0.05, \mu_2 = 0.05$, le résultat exact de $\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}^A$ vaut :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}^A = -2.3148.$$

Considérons maintenant la méthode d'estimation. On effectue 10 simulations et la longueur de la trajectoire simulée correspond à 100000 transitions. En utilisant (5.11), le vecteur de probabilité d'occupation d'états est obtenu comme suit :

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} = (0.6898, 0.1406, 0.1413, 0.0283), \quad (5.26)$$

en utilisant l'équation (5.24), l'estimation de la matrice génératrice vaut :

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} -0.0200 & 0.0101 & 0.0099 & 0 \\ 0.0495 & -0.0596 & 0 & 0.0102 \\ 0.0503 & 0 & -0.0598 & 0.0095 \\ 0 & 0.0495 & 0.0492 & -0.0988 \end{pmatrix}.$$

Et d'après l'équation (5.25), on obtient finalement :

$$\mathbb{E}(\hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}^A) = -2.3047, \text{ et}$$

$$\sigma_{\hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}^A} = 0.0337,$$

avec $\sigma_{\hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}^A}$ étant l'écart-type de $\hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}^A$.

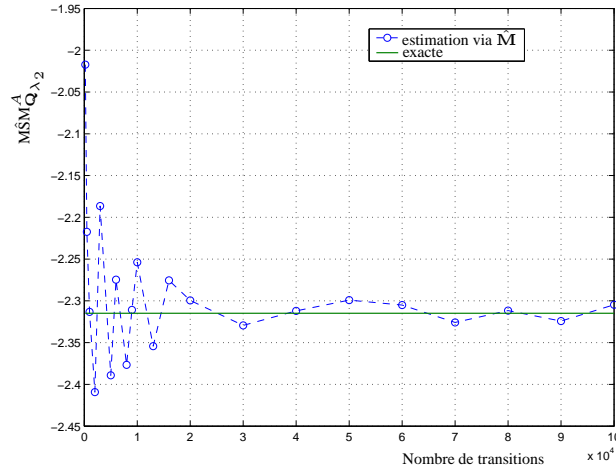


FIG. 5.4 – Représentation de l’estimateur de $\text{MSM}_{Q, \lambda_2}^A$, basé sur l’estimation de la matrice génératrice \mathbf{M} , en fonction de la longueur de trajectoire simulée

La figure 5.4 représente l’évolution de l’estimateur $\widehat{\text{MSM}}_{Q, \lambda_2}^A$, qui est basé sur l’estimation de la matrice génératrice \mathbf{M} , en fonction de la taille de la trajectoire simulée.

Pour éviter le problème d’inversion d’une matrice, nous considérons au paragraphe suivant une approche basée sur l’estimation de la matrice de réalisation de perturbation, ce qui permet d’estimer le facteur MSM stationnaire sans passer l’inverse d’une matrice.

5.4.2 Approche basée sur l’estimation du facteur de réalisation de perturbation

Dans ce paragraphe on intègre le facteur de réalisation de perturbation d_{ij} à la formule d’évaluation du facteur MSM stationnaire. Cela nous permet de pouvoir estimer le facteur MSM stationnaire via l’estimation de \mathbf{D} .

Théorème 5.2. *Si $\mathbb{E}_\pi(f) < \infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[|\eta_t(\mathbf{M}, X_t^i)|] = \mathbb{E}_\pi(|\mathbf{f}|)$, la matrice de réalisation \mathbf{D} vérifie l’équation de Lyapunov*

$$\mathbf{MD} + \mathbf{DM}^\top = -\mathbf{F}, \quad (5.27)$$

où $\mathbf{F} = \mathbf{e}\mathbf{f}^\top - \mathbf{f}^\top\mathbf{e}$. Lorsque le processus de Markov est ergodique alors il existe une solution unique dans \mathcal{V} , où : $\mathcal{V} = \{\mathbf{e}x^\top - x\mathbf{e}^\top : x \in \mathcal{R}^\infty\}$

³Rappelons que tout le reste du mémoire on utilise des unités arbitraires

Preuve. Nous commençons par définir $\mathbf{D}(T) = [d_{ij}(T)]_{i,j \in E}$ de façon suivante :

$$\begin{aligned} d_{ij}(T) &= \mathbb{E} \left\{ \int_0^T [\eta_t(\mathbf{M}, X_t^j) - \eta_t(\mathbf{M}, X_t^i)] dt \right\} \\ &= \int_0^T \left\{ \mathbb{E}[\eta_t(\mathbf{M}, X_t^j)] - \mathbb{E}[\eta_t(\mathbf{M}, X_t^i)] \right\} dt. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Par conséquent, on a :

$$\mathbf{D} = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{D}(T).$$

En notons que $\mathbb{E}[\eta_t(\mathbf{M}, X_t^i)] = \sum_{k \in E} f_k p_{ik}(t)$, qui est le i ème élément de $\exp(\mathbf{M}t)\mathbf{f}$. De ce fait, l'expression intérieure de l'intégration (5.28) est égale à la différence entre le j ème et i ème élément de $\exp(\mathbf{M}t)\mathbf{f}$, alors :

$$\mathbf{D}(T) = \int_0^T (\mathbf{e}\mathbf{f}^\top [\exp(\mathbf{M}t)]^\top - [\exp(\mathbf{M}t)]\mathbf{f}\mathbf{e}^\top) dt.$$

En utilisant $\mathbf{M}\mathbf{e} = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{D}(T) + \mathbf{D}(T)\mathbf{M}^\top &= \int_0^T (\mathbf{e}\mathbf{f}^\top [\exp(\mathbf{M}t)]^\top \mathbf{M}^\top - \mathbf{M} [\exp(\mathbf{M}t)]\mathbf{f}\mathbf{e}^\top) dt \\ &= \mathbf{e}\mathbf{f}^\top \left(\int_0^T [\exp(\mathbf{M}t)]\mathbf{M} dt \right)^\top - \left(\int_0^T [\exp(\mathbf{M}t)]\mathbf{M} dt \right) \mathbf{f}\mathbf{e}^\top \\ &= \mathbf{e}\mathbf{f}^\top [\exp(\mathbf{M}T) - \exp(\mathbf{0})]^\top - [\exp(\mathbf{M}T) - \exp(\mathbf{0})] \mathbf{f}\mathbf{e}^\top. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Notons que $\exp(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$ et que $\lim_{T \rightarrow \infty} p_{ij}(T) = \pi_j$, c'est-à-dire également que $\lim_{T \rightarrow \infty} \exp(\mathbf{M}T) = \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}$. En prenant $T \rightarrow \infty$ pour l'équation (5.29), on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{M}^\top &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \mathbf{M}\mathbf{D}(T) + \mathbf{D}(T)\mathbf{M}^\top \right\} \\ &= \mathbf{e}\mathbf{f}^\top (\mathbf{e}\boldsymbol{\pi})^\top - \mathbf{e}\mathbf{f}^\top - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}\mathbf{f}\mathbf{e}^\top + \mathbf{f}\mathbf{e}^\top \\ &= \mathbf{f}\mathbf{e}^\top - \mathbf{e}\mathbf{f}^\top, \text{ car } \mathbf{e}\mathbf{f}^\top (\mathbf{e}\boldsymbol{\pi})^\top = \mathbf{e}(\boldsymbol{\pi}\mathbf{f})^\top \mathbf{e}^\top = \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}\mathbf{f}\mathbf{e}^\top \\ &= -\mathbf{F}. \end{aligned}$$

Maintenant, on prouve l'unicité de la solution. Supposons que (5.27) admet deux solutions différentes, $\mathbf{D}_1 = \mathbf{e}\mathbf{g}_1^\top - \mathbf{g}_1\mathbf{e}^\top$ et $\mathbf{D}_2 = \mathbf{e}\mathbf{g}_2^\top - \mathbf{g}_2\mathbf{e}^\top$. Étant $\mathbf{W} = \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2 = \mathbf{e}\boldsymbol{\omega}^\top - \boldsymbol{\omega}\mathbf{e}^\top$, avec $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2$, par conséquent, $\mathbf{M}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{M}^\top = \mathbf{0}$. Remarquons que $\mathbf{M}\mathbf{e} = 0$, on a donc $\mathbf{e}\boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{M}^\top - \mathbf{M}\boldsymbol{\omega}\mathbf{e}^\top = \mathbf{0}$. En multipliant les deux côtés sur la gauche de cette équation avec l'inverse généralisée \mathbf{M}^\sharp et, utilisant $\mathbf{M}^\sharp \mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}$ et $\mathbf{M}^\sharp \mathbf{e} = 0$, on obtient : $(\mathbf{I} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi})\boldsymbol{\omega}\mathbf{e}^\top = \mathbf{0}$. Par conséquent,

$$\boldsymbol{\omega}\mathbf{e}^\top = \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\omega}\mathbf{e}^\top = (\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\omega})\mathbf{e}\mathbf{e}^\top,$$

où $\pi\omega$ est une constante. Pour cela, on a $\mathbf{W} = (\omega e^\top)^\top - \omega e^\top = \mathbf{0}$. C'est-à-dire finalement que $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2$. ■

Lien entre \mathbf{M}^\sharp et \mathbf{D} : Soient l'inverse généralisée \mathbf{M}^\sharp et la matrice de réalisation de perturbation \mathbf{D} , on a la relation suivante :

$$\mathbf{M}^\sharp \mathbf{f} = \mathbf{D} \pi^\top, \quad (5.30)$$

Pour la démonstration de cette relation, on commence par multiplier les deux côtés sur la droite de (5.27) par π , et en utilisant $\pi \mathbf{M} = \mathbf{0}$ et $\pi e = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \mathbf{D} \pi^\top &= (\mathbf{f} e^\top \pi^\top - e \mathbf{f}^\top \pi^\top) = \mathbf{f} - e \pi \mathbf{f} \\ &= (\mathbf{I} - e \pi) \mathbf{f}, \end{aligned}$$

Remarquons que $(\mathbf{I} - e \pi) = \mathbf{M} \mathbf{M}^\sharp$, on a :

$$\mathbf{M} \mathbf{D} \pi^\top = \mathbf{M} \mathbf{M}^\sharp \mathbf{f}$$

Ensuite, multiplions à gauche les deux membres par \mathbf{M}^\sharp , on obtient $(\mathbf{I} - e \pi) \mathbf{D} \pi^\top = (\mathbf{I} - e \pi) \mathbf{M}^\sharp \mathbf{f}$. Cela conduit directement à (5.30) car $\pi \mathbf{M}^\sharp = \mathbf{0}$ et $\pi \mathbf{D} \pi^\top = \pi (e g^\top - g e^\top) \pi^\top = g^\top \pi^\top - \pi g = 0$ pour tout $\mathbf{D} \in \mathcal{V}$. ■

Lien entre le facteur MSM et le facteur de perturbation d_{ij} : D'après (5.6) et (5.30), le facteur MSM stationnaire peut se écrire comme suit :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^W = -\pi \mathbf{Q} \mathbf{D} \pi^\top = \pi \mathbf{Q} \mathbf{D}^\top \pi^\top. \quad (5.31)$$

On a vu précédemment que le vecteur de probabilité d'occupation des états π et la matrice de réalisation de perturbation \mathbf{D} peuvent être estimés à partir d'une seule trajectoire observée. En effet, les estimateurs $\hat{\pi}$ et $\hat{\mathbf{D}}$ sont obtenus par les équations (5.11) et (5.12) respectivement. Par conséquent,

$$\hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}}^W = \hat{\pi} \mathbf{Q} \hat{\mathbf{D}}^\top \hat{\pi}^\top. \quad (5.32)$$

Ici encore, cette relation nous permet d'estimer le facteur de sensibilité multi-directionnelle en régime stationnaire grâce à une seule trajectoire observée. Notons de plus que cette équation montre tout l'intérêt de l'approche proposée par rapport à une estimation par différences finies : les quantités $\hat{\pi}$ et $\hat{\mathbf{D}}$ sont estimées une fois pour toutes, et n'importe quelle mesure d'importance souhaitée peut être obtenue sans estimation supplémentaire, directement en choisissant la matrice \mathbf{Q} correspondante.

Pour illustrer cette approche, reprenons maintenant l'exemple au paragraphe 5.4.1. Plus concrètement, on s'intéresse ici à estimer $\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}$ en utilisant une trajectoire simulée du système.

On considère des données simulées identiques à celles de la section précédente. Tout d'abord, en utilisant l'algorithme basée sur la relation (5.12), l'estimation de la matrice de réalisation de perturbation donne :

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1.3648 & -1.4528 & -11.2053 \\ 1.3648 & 0 & -0.0850 & -9.8446 \\ 1.4528 & 0.0850 & 0 & -9.8063 \\ 11.2053 & 9.8446 & 9.8063 & 0 \end{pmatrix},$$

Puis, en utilisant l'estimation $\hat{\pi}$ donnée(5.26), on obtient alors les résultats suivants grâce à la relation (5.32) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{M}SM_{Q\lambda_2}^A) &= -2.3301 \\ \sigma_{\hat{M}SM_{Q\lambda_2}^A} &= 0.0309. \end{aligned}$$

La figure 5.5 représente l'évolution de l'estimation $\hat{M}SM_{Q\lambda_2}^A$ basée sur l'estimation de la matrice de réalisation de perturbation \hat{D} , en fonction de la taille de la trajectoire simulée.

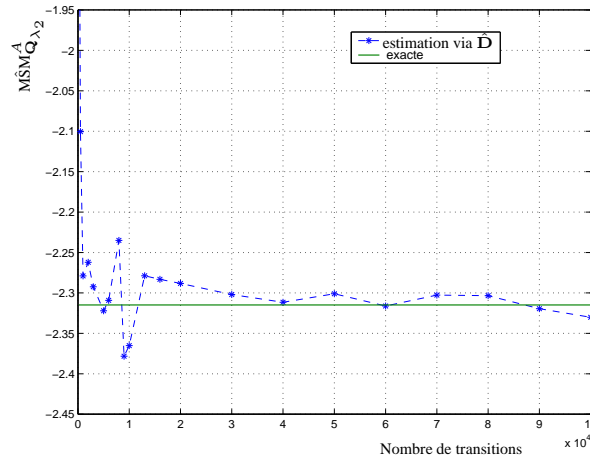


FIG. 5.5 – Représentation de l'estimateur de $M^SM_{Q\lambda_2}^A$ basé sur l'estimation de la matrice de réalisation de perturbation \hat{D} en fonction de la taille de la trajectoire simulée observée

Les deux figures 5.4 et 5.5 semblent indiquer que l'estimateur $\hat{M}SM_{Q\lambda_2}^A$ basé sur l'estimation du facteur de réalisation de perturbation converge plus rapidement que celui basé sur l'estimation de la matrice génératrice.

En se basant sur l'estimation du facteur de réalisation de perturbation d_{ij} , ou par conséquent, la matrice de réalisation D , on peut estimer le facteur MSM stationnaire à partir d'une seule trajectoire. Notons toutefois que l'estimation de la matrice de réalisation D peut s'avérer coûteuse en temps de calcul. En effet, celle-ci demande une complexité d'ordre $\mathcal{O}((m^2 - m)/2)$ lorsque m désigne le nombre total d'états du système.

Au paragraphe suivant, on considérera une autre approche permettant d'estimer le MSM stationnaire avec une complexité d'ordre $\mathcal{O}(m)$.

5.4.3 Approche basée sur l'estimation du potentiel de performance

Ce paragraphe a pour objectif d'intégrer le vecteur du potentiel de performance \mathbf{g} dans la formule d'évaluation du facteur MSM stationnaire. Cela nous permet de pouvoir estimer le facteur MSM stationnaire via l'estimation de \mathbf{g} .

Lien entre le facteur MSM et le vecteur du potentiel de performance \mathbf{g} : Le facteur MSM stationnaire peut être écrit sous la forme :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^W = \boldsymbol{\pi} \mathbf{Q} \mathbf{g}. \quad (5.33)$$

Preuve. En substituant (5.15) dans (5.32), on a :

$$\text{MSM}_{\mathbf{Q}}^W = \boldsymbol{\pi} \mathbf{Q} (\mathbf{e} \mathbf{g}^\top - \mathbf{g} \mathbf{e}^\top) \boldsymbol{\pi}^\top = \boldsymbol{\pi} \mathbf{Q} \mathbf{e} (\boldsymbol{\pi} \mathbf{g})^\top - \boldsymbol{\pi} \mathbf{Q} \mathbf{g} (\boldsymbol{\pi} \mathbf{e})^\top.$$

En utilisant $\mathbf{Q} \mathbf{e} = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\pi} \mathbf{e} = 1$, on obtient facilement (5.33). ■

Lien direct entre \mathbf{g} et \mathbf{M}^\sharp : D'après (5.20) et (5.33), on obtient :

$$\mathbf{g} = -\mathbf{M}^\sharp \mathbf{f}. \quad (5.34)$$

Notons que le vecteur du potentiel de performance \mathbf{g} peut être estimé à partir d'une seule trajectoire observée, voir paragraphe 5.3.3. En fait, les estimateurs $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ et $\hat{\mathbf{g}}$ sont obtenus par les équations (5.11) et (5.18) respectivement.

D'après (5.33), l'estimation du facteur MSM stationnaire suivant une direction \mathbf{Q} peut être obtenue grâce à la relation suivante :

$$\hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}}^W = \hat{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{Q} \hat{\mathbf{g}}. \quad (5.35)$$

Cette relation nous donne une estimation du facteur MSM stationnaire à partir d'une seule trajectoire observée car les deux estimateurs $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ et $\hat{\mathbf{g}}$ sont obtenus à partir d'une seule trajectoire observée. Il est important de rappeler que l'estimation du vecteur du potentiel de performance \mathbf{g} est obtenue avec une complexité d'ordre $\mathcal{O}(m)$ seulement. Rappelons que cette équation montre tout l'intérêt de l'approche proposée par rapport à une estimation par différences finies : les quantités $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ et $\hat{\mathbf{D}}$ sont estimées une fois pour toutes, et n'importe quelle mesure d'importance souhaitée peut être obtenue sans estimation supplémentaire, directement en choisissant la matrice \mathbf{Q} correspondante.

Considérons encore une fois maintenant l'exemple traité aux paragraphes précédents. On s'intéresse à estimer le $\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}$ en utilisant l'estimation de \mathbf{g} ce qui peut être obtenue à partir de la même trajectoire simulée au paragraphe 5.4.1.

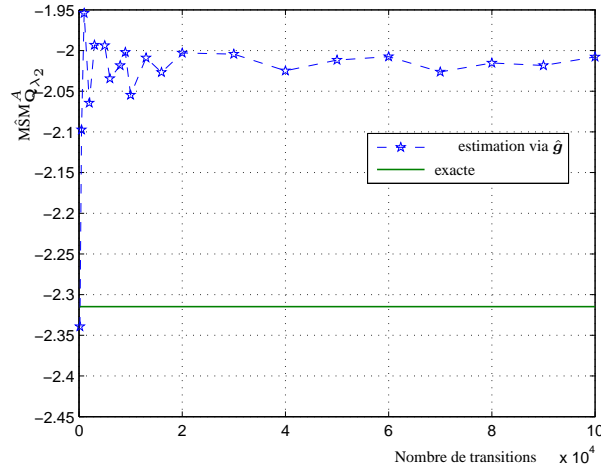


FIG. 5.6 – Représentation de l’estimateur de $\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}^A$ basé sur l’estimation du potentiel de performance en fonction de la longueur de trajectoire observée pour le cas $T = 20$

On commence tout d’abord par estimer la durée moyenne du premier passage qui permet de choisir la longueur de la période T pour l’estimation du potentiel de performance. En utilisant (5.9), la durée moyenne du premier passage Γ vaut :

$$\hat{\Gamma} = 56.0953.$$

Puis, on propose maintenant trois scénarios liés à trois différentes valeurs de T : $T = 20$, $T = 56$, et $T = 100$. Ensuite on utilise l’équation (5.18) pour estimer le vecteur du potentiel performance \mathbf{g} , et on reprend l’estimateur $\hat{\pi}$, voir (5.26). Les résultats de $\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}^A$ sont finalement obtenus par l’équation (5.4.3), voir tableau 5.1. Ils nous montrent que quand la longueur T est égale ou supérieure à la durée moyenne du premier passage, les résultats estimés sont tout à fait comparables avec le résultat exact obtenu par la méthode analytique. On trouve également que si T est grande, l’écart-type est grand, cependant, il est tout à fait acceptable. Notons toutefois que si T est grande, le temps de calcul devrait être probablement long.

Les figures 5.6 et 5.7 donnent les évolutions de l’estimateur $\hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}^A$, qui est basé sur l’approche d’estimation du potentiel de performance, en fonction de la longueur de trajectoire simulée pour trois cas différents.

Les résultats numériques dans cet exemple nous suggère le fait que l’on choisit la valeur de la longueur T dans la formule d’estimation (5.18) selon la valeur de la durée moyenne du premier passage.

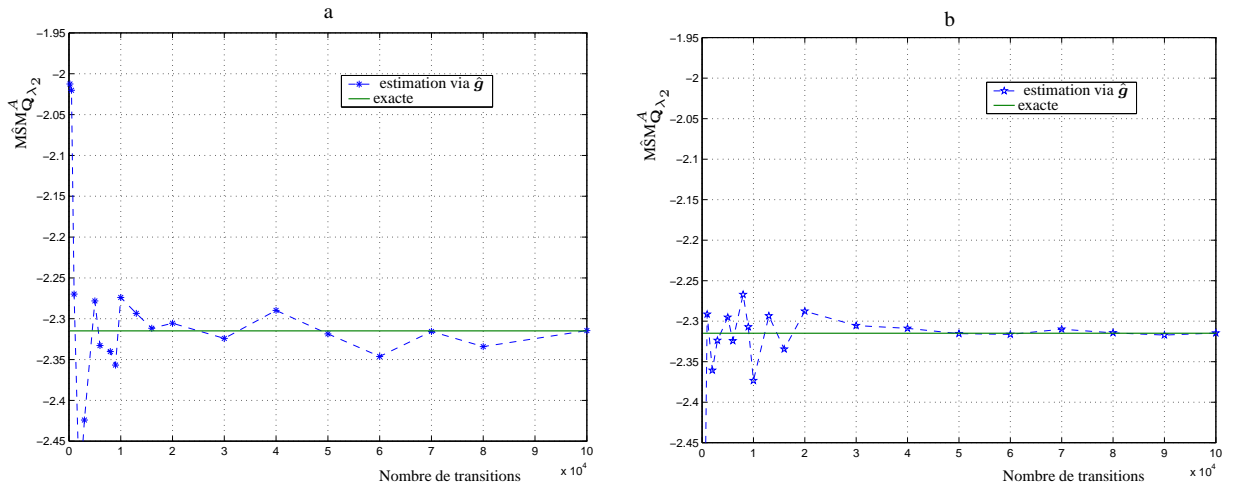


FIG. 5.7 – Représentation de l’estimateur de $\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}^A$ basé sur l’estimation du potentiel de performance en fonction de la longueur de trajectoire observée (T) : (a) correspond au cas $T = 56$; (b) correspond au cas $T = 100$

T	$\mathbb{E}(\hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}^A)$	$\sigma_{\hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}^A}$
$T = 20$	-2.0078	0.0362
$T = 56$	-2.3145	0.0469
$T = 100$	-2.3146	0.0511

TAB. 5.1 – Résultats de l’estimateur $\hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_{\lambda_2}}^A$, qui est basé sur l’estimation du potentiel de performance, avec trois différentes valeurs de la longueur de trajectoire observée T

5.4.4 Conclusion

En résumé, afin d’estimer le MSM stationnaire à partir d’une seule trajectoire observée, on peut utiliser trois différentes approches. La première se base sur l’estimation de la matrice génératrice du processus de Markov, cette approche est simple et facile à réaliser. Notons toutefois qu’elle peut conduire des erreurs numériques car le problème de l’inverse d’une matrice des valeurs faibles. De plus, elle peut également être difficile à appliquer pour des grands systèmes dont la taille de la matrice génératrice \mathbf{M} est grande.

La deuxième approche basée sur l’estimation de la matrice de réalisation de perturbation \mathbf{D} nous permet d’éviter le problème de l’inverse d’une matrice. Malgré sa complexité à mettre en œuvre, le résultat estimé est bon et comparable avec le celui de la théorie, la convergence de cette estimation est plus rapide que celle liée sur l’estimation de la matrice génératrice.

Notons toutefois que l'estimation de la matrice de réalisation \mathbf{D} peut s'avérer coûteuse en temps de calcul. En effet, celle-ci doit être menée pour chaque couple $(i, j)_{i > j}$, ce qui donne une complexité d'ordre $\mathcal{O}((m^2 - m)/2)$ lorsque m désigne le nombre total d'états du système.

L'approche basée sur l'estimation du potentiel de performance permettant également d'estimer le facteur MSM stationnaire grâce à une seule trajectoire. Elle peut fournir de bon résultat en choisissant la valeur de la longueur T autour de la valeur de la durée moyenne du premier passage. De plus, sa complexité est beaucoup moindre que l'approche basée sur l'estimation de la matrice de réalisation de perturbation. En effet, cette approche demande une complexité d'ordre $\mathcal{O}(m)$ seulement. C'est-à-dire que cette approche offre des avantages considérables, particulièrement pour des grands systèmes.

5.5 Exemple d'application

Considérons maintenant le système de production présenté à la section 4.3 du chapitre 4, où on a découvert les applications principales du facteur MSM afin d'analyser la sensibilité des indicateurs de performance (disponibilité et capacité de production globale) du système suivant des directions spécifiques, et d'identifier non seulement l'importance d'un composant, d'un groupe de composant, et aussi l'importance d'un état ou d'un groupe d'états donnés. La méthode analytique a été utilisée dans le chapitre 4.3 les résultats exactes de MSM instantané, moyenne sur une intervalle de temps et aussi stationnaire.

Dans cette section, on suppose que les comportements des composants (taux de défaillance et de réparation) et la matrice génératrice sont inconnus et que seulement des données de retour d'expériences (qui correspondent à une seule trajectoire du processus de Markov en régime normal) sont disponibles. On s'intéresse ici à utiliser la technique de l'analyse de perturbation, plus concrètement, l'approche basée sur l'estimation du potentiel de performance pour estimer le facteur MSM stationnaire.

Pour commencer, on simule une trajectoire sur une durée équivalente de 100000 transitions en utilisant les mêmes données (taux de défaillance, taux de réparation) appliquées à la section 4.3.

En se basant sur cette trajectoire, le vecteur de probabilité d'occupation d'états est obtenu grâce à l'équations (5.11). La durée moyenne du premier passage, qui est utilisé pour choisir la longueur de la période T pour l'estimation du potentiel de performance, peut également être obtenue par l'équation (5.9). Ensuite, on utilisera l'équation (5.18) afin d'estimer le vecteur du potentiel de performance \mathbf{g} . Et finalement, l'estimation du facteur MSM stationnaire sera obtenue grâce à l'équation (5.4.3). Plus concrètement, en changeant les différentes directions

spécifiques on peut obtenir l'estimation des sensibilités de la disponibilité/capacité de production asymptotique par rapport à :

- un paramètre donné, voir les tableaux 5.2 et 5.3 ;
- un groupe de paramètres, voir le tableau 5.4 ;
- un état donné, voir le tableau 5.5 ;
- un groupe d'états donnés, voir le tableau 5.6.

Résultat	$MSM_{Q_{\lambda_1}}^A$	$MSM_{Q_{\bar{\lambda}_1}}^A$	$MSM_{Q_{\lambda_2}}^A$	$MSM_{Q_{\lambda_3}}^A$	$MSM_{Q_{\lambda_4}}^A$
Théorique	-8.1398	-9.3909	-30.9503	-51.2382	-32.0239
Estimation ⁴	-8.2003	-9.4116	-30.8735	-52.2005	-32.0500

TAB. 5.2 – Sensibilité de la disponibilité asymptotique du système par rapport à un paramètre

Résultat	$MSM_{Q_{\lambda_1}}^S$	$MSM_{Q_{\bar{\lambda}_1}}^S$	$MSM_{Q_{\lambda_2}}^S$	$MSM_{Q_{\lambda_3}}^S$	$MSM_{Q_{\lambda_4}}^S$
Théorique	-17644.2201	-1897.7427	-18310.9107	-9395.1702	-5871.9814
Estimation ⁴	-17718.2509	-1889.2698	-18262.4159	-9539.7950	-5902.7632

TAB. 5.3 – Sensibilité de la productivité asymptotique du système par rapport à un paramètre

Direction	MSM_Q^A		MSM_Q^S	
	Théorique	Estimation ⁴	Théorique	Estimation ⁴
$Q_{(\bar{\lambda}_1, \lambda_1, \lambda_2)}$	-48.4811	-48.4854	-37852.8736	-37965.5190
$Q_{(\lambda_3, \lambda_4)}$	-83.2621	-82.2505	-15267.1515	-15710.7693
$Q_{(\bar{\lambda}_1, 2.34\mu_2)}$	-0.0060	-0.0025	2923.6961	2954.3188
$Q_{(\lambda_4, 2.42\mu_3)}$	0.0534	0.6145	9.8035	-20.8369

TAB. 5.4 – Sensibilité de la disponibilité/productivité asymptotique par rapport à un groupe de paramètres

Les résultats numériques nous montrent que les valeurs estimées sont proches de celles qui sont données par la méthode analytique.

⁴L'approche basée sur l'estimation du potentiel de performance

Direction	MSM _Q ^A		MSM _Q ^S	
	Théorique	Estimation ⁴	Théorique	Estimation ⁴
Q _{S1}	-60.0535	-60.3198	-36215.8937	-36384.5685
Q _{S2}	-14.6393	-14.8813	-2512.5380	-2591.7307
Q _{S3}	-12.0197	-12.3534	-2356.8238	-2376.2139
Q _{S4}	-29.1022	-28.7519	-8486.7967	-8666.4106
Q _{S5}	-6.0478	-6.1136	-1739.0416	-1794.6838
Q _{S7}	-4.4008	-4.3567	-785.4732	-782.1155
Q _{S8}	-0.9072	-0.8512	-162.0568	-176.9185
Q _{S9}	-3.7906	-3.8327	-714.1543	-749.2108
Q _{S10}	-0.7822	-0.8320	-147.2472	-154.5079

TAB. 5.5 – Sensibilité de la disponibilité/productivité asymptotique par rapport à un état donné

Direction	États	MSM _Q ^A		MSM _Q ^S	
		Théorique	Estimation ⁴	Théorique	Estimation ⁴
Q _(C₁C₂)	1,4,5	-27.2344	-27.0534	-33978.7511	-34114.7134
Q _(C₁C₃)	1,3,5,10	-61.8841	-62.1467	-25899.9678	-26096.2319
Q _(C₁C₄)	4,9	-30.8173	-30.3143	-7425.4585	-7632.9012
Q _(C₂C₃)	1,2,5,8	-74.3927	-74.6672	-24903.1600	-22443.5158
Q _(C₂C₄)	4,7	-32.6183	-32.9070	-7354.4199	-7483.8962

TAB. 5.6 – Sensibilité de la disponibilité/productivité asymptotique par rapport à un groupe d'états

5.6 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre comment le facteur de sensibilité multi-directionnelle en régime stationnaire (appelé aussi MSM stationnaire, voir chapitre 3) peut être évalué sans passer par des méthodes exactes qui requièrent les données des composants individuels (taux de défaillance, taux de réparation), ni par des méthodes approximatives qui sont coûteuses en temps de calcul, ni par les méthodes FD/SP qui nécessitent des données des comportements nominal et perturbé à la fois. En fait, les données du système perturbé peuvent être inexistantes lorsque les paramètres ne peuvent pas être intentionnellement modifiés (par exemple, pour des raisons d'économie ou de sécurité).

Nous avons présenté trois approches permettant d'estimer le facteur MSM à partir d'une seule réalisation du processus de Markov :

- l'approche basée sur l'estimation de la matrice des taux de transition ;
- l'approche basée sur l'estimation du facteur de réalisation de perturbation ;
- et enfin, L'approche liée à l'estimation du potentiel de performance.

Les deux dernières approches basée principalement sur la technique de réalisation de perturbation permettent d'éviter les problèmes numériques dus à l'inversion matricielle nécessaire à la mise en œuvre de la première approche. Pour une comparaison entre ces deux approches, la deuxième peut s'avérer plus coûteuse en temps de calcul que la troisième approche particulièrement pour des grands systèmes.

A travers d'un système simple, il a été montré que les trois approches peuvent donner des résultats tout à fait comparables à ceux obtenus par la méthode analytique, et que la convergence de la troisième semble être la plus rapide (même si ce dernier point reste à prouver).

D'un point de vue pratique, ces approches offrent de nombreux avantages. Elles permettent d'estimer le MSM stationnaire à partir des données de retour d'expériences, et sans avoir à connaître la matrice des taux de transition du processus de Markov sous-jacent. Par rapport à une approche "simple" basée sur les différences finies, il est à noter qu'une seule estimation suffit à obtenir toutes les mesures d'importance souhaitées, puisqu'il suffit ensuite de prendre la valeur de Q souhaitée dans les équations (5.32) ou (5.35).

Troisième partie

Proposition d'un facteur d'importance différentiel étendu

Introduction

Dans la dernière partie de ce mémoire, on envisage, dans un premier temps, de mesurer l'effet sur la performance du système d'un changement des paramètres, dans une direction. Pour ce faire, on s'intéresse à la définition d'un indicateur de variation de performances. On étudie, dans un second temps, comment mesurer la contribution relative d'un composant (d'un groupe de composants), ou d'un état, à la variation totale de performances du système.

Le chapitre 6 est consacré à l'étude de l'accroissement d'une fonction qui correspond à des mesures de performances (la disponibilité/fiabilité, la capacité de production globale ...) du système. Cette étude est nécessaire lorsque des changements de paramètres surviennent qui peuvent être liés, par exemple, aux phénomènes de dégradation des composants, à un choc, ou au fait que l'on optimise la conception du système en modifiant ses caractéristiques fiabilistes. Afin d'évaluer cet accroissement, on considère d'abord dans ce chapitre des méthodes analytiques permettant de donner des résultats exacts. Ensuite, on présentera des méthodes d'estimation qui peuvent fournir des résultats approchés à partir de données dont la structure est réaliste par rapport au retour d'expérience.

Afin de classer les composants (ou des groupes de composants) selon leur contribution relative à une variation des performances du système, on propose dans le chapitre 7 l'utilisation du facteur d'importance différentiel récemment introduit par Borgonovo [18, 17]. Ce facteur est ici mis en œuvre dans le contexte des systèmes à composants dépendants décrits par des processus de Markov. Il est défini à partir de l'approximation au premier ordre de l'accroissement de la fonction de performance. Nous proposons ensuite une extension de ce facteur basée sur un développement complet de l'accroissement. On montre qu'un tel développement est envisageable à moindre frais dans le cadre des systèmes markoviens. L'évaluation du facteur d'importance différentiel et celle de son extension sont facilement obtenues grâce à l'indicateur de variation de performances présenté au chapitre 6 et l'on peut établir un lien direct avec le facteur d'important proposé MSM.

Chapitre 6

Variation des performances asymptotiques

6.1 Introduction

L'évaluation des variations des performances (qui sont des mesures de disponibilité/fiabilité, de capacité de production globale ...) du système en fonction des variations de certains paramètres a été étudiée dans de nombreux travaux. Borgonovo [18, 17] propose de passer par une approximation au premier ordre de l'accroissement de la fonction de performance à condition que les changements soient suffisamment petits au niveau des paramètres. L'approximation au deuxième ordre a été introduite par Zio [104]. Dans le contexte des systèmes markoviens seulement, l'approximation aux ordres supérieurs a été envisagée [29, 64] mais aucune formulation donnant le développement complet n'a été établie.

Nous nous attachons dans un premier temps à établir la formule permettant de calculer de façon analytique les variations de performances asymptotiques qui sont provoquées par des changements simultanés de paramètres fiabilistes (taux de défaillance et/ou de réparation) ou relatifs à des états (taux de transition) dans le contexte d'un système dynamique décrit par un processus de Markov. Cette formule prend en compte tous les ordres de l'accroissement, ce qui nous permet d'obtenir des résultats exacts.

Dans un second temps, nous considérons les méthodes d'estimation basées sur l'analyse de perturbation, voir chapitre 5, permettant d'estimer cette variation à partir de données de retour d'expérience sans avoir à connaître la matrice génératrice du processus de Markov.

Une partie présentée dans ce chapitre a été l'objet d'une communication à un congrès international [39].

6.2 Variation des performances asymptotiques - Définition

Considérons un système à composants dépendants (fonctionnelles et structurelles) décrit par un processus de Markov avec pour matrice génératrice M . Nous supposons également que le processus est irréductible, il existe donc une et une seule distribution de probabilité d'occupation d'états en régime stationnaire π . Par conséquent, l'équation Chapman-Kolmogorov en régime stationnaire vaut :

$$\pi M = 0 \tag{6.1}$$

Rappelons que la mesure de performance du système en régime stationnaire, appelée mesure de performance asymptotique, peut être évaluée selon l'expression suivante :

$$W = \pi f,$$

où $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ est un vecteur colonne associé aux états du système dans le cas d'un système binaire. Pour un système multi-état (y compris un système de production), f est associé au niveau de performance asymptotique des états du système. Par exemple, pour un système de production, f peut correspondre au vecteur des capacités de production d'états X , voir le chapitre 4.

6.2.1 Variation en fonction d'un seul paramètre

On suppose que le changement d'un paramètre est modélisé mathématiquement selon la relation suivante :

$$x_{i\delta} = x_i + \delta x_i, \tag{6.2}$$

où :

- x_i est un paramètre fiabiliste (par exemple, taux de défaillance ou taux de réparation, ou plus généralement, taux de transition entre des états, ...);
- δx_i est la quantité de variation du paramètre x_i ;
- $x_{i\delta}$ est la valeur de x_i après le changement.

Ce changement peut se produire physiquement lorsque le composant subit un changement brutal (phénomène de dégradation d'un composant). Les changements liés à des chocs extérieurs peuvent être, par exemple, un changement de la condition de l'environnement, un choc mécanique, etc, voir [9]. Une illustration de ce changement lié à un changement brutal de l'environnement est présentée sur la figure 6.1. Notons également que ce changement peut être également dû à une action de maintenance : amélioration de la fiabilité d'un composant ; remplacement d'un nouveau composant.

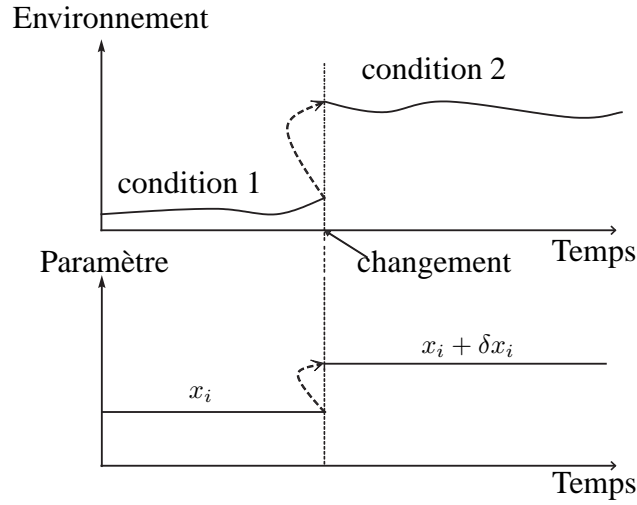


FIG. 6.1 – Illustration d’une dégradation liée au changement de la condition de l’environnement

La variation de la valeur du paramètre x_i conduit à un changement de la matrice des taux de transition du processus de Markov :

$$\mathbf{M}_\delta = \mathbf{M} + \delta x_i \mathbf{Q}_{x_i}, \quad (6.3)$$

avec \mathbf{Q}_{x_i} est la matrice directionnelle indiquant la direction du paramètre x_i . On a montré également dans le chapitre 3 que $\mathbf{Q}_{x_i} = \partial \mathbf{M} / \partial x_i$.

Le changement d’un paramètre donné par relation (6.2), ou plus généralement, le changement de la matrice des taux de transition du processus de Markov (équation (6.3)) conduit donc à une variation de la mesure de performance. Nous nous intéressons à établir la formule d’évaluation de cette variation. Pour ce faire, nous utilisons le développement en séries de McLaurin [20] en supposant que la mesure de performance asymptotique W est une fonction indéfiniment dérivable par rapport au paramètre x_i .

Plus précisément, la variation de la mesure de performance asymptotique W provoquée par le changement d’un paramètre x_i peut s’écrire selon l’expression suivante :

$$\begin{aligned} \delta W_{x_i} &= \delta x_i \frac{\partial W}{\partial x_i} + \frac{1}{2!} (\delta x_i)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial^2 x_i} + \frac{1}{3!} (\delta x_i)^3 \frac{\partial^3 W}{\partial^3 x_i} + \dots \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \delta^l W_{x_i}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

avec :

$$\delta^l W_{x_i} = \frac{1}{l!} (\delta x_i)^l \frac{\partial^l W}{\partial^l x_i}, \text{ pour } l = 1, 2, 3, \dots$$

6.2.2 Variation en fonction de plusieurs paramètres

De façon plus générale, on suppose maintenant que K paramètres (les taux de défaillance et/ou les taux de réparation, ou plus généralement, les taux de transition caractérisant un état, ou d'un groupe d'états) du système de multi composants (x_1, x_2, \dots, x_K) sont simultanément perturbés selon les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x_{1\delta} &= x_1 + \delta x_1 \\ x_{2\delta} &= x_2 + \delta x_2 \\ &\dots \\ x_{K\delta} &= x_K + \delta x_K. \end{aligned} \tag{6.5}$$

La figure 6.2 donne une illustration de la variation de taux de défaillance de deux composants en parallèle soumis à un choc extérieur. Sur cet exemple simple, les taux de défaillance du composant C_1 et du composant C_2 avant de choc sont λ_1 et λ_2 respectivement. Après avoir subi un choc, ils deviennent $\lambda_1 + \delta\lambda_1$ et $\lambda_2 + \delta\lambda_2$ respectivement. Une autre illustration est reportée dans la figure 6.3 dans laquelle les taux de transition sortant de l'état 1 varient lorsqu'il existe une interaction entre les deux composants C_1 et C_2 dans l'état 1.

Notons également que les changements simultanés des paramètres du système peuvent être également dûs à une action de maintenance : amélioration simultanée de la fiabilité des composants ; remplacement des nouveaux composants. Ils peuvent aussi être liés au fait que l'on optimise la conception en faisant varier simultanément les valeurs des paramètres fiabilistes pour atteindre la mesure de performance souhaitée.

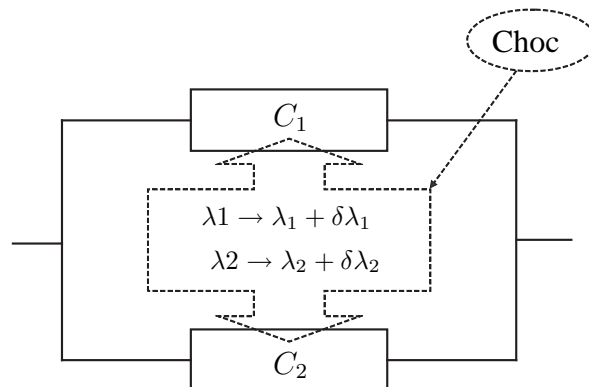


FIG. 6.2 – Illustration d'une dégradation liée à un choc extérieur

Dans le cadre des études de la sûreté des systèmes nucléaires, Borgonovo [18, 17] considère deux types de changements simultanés des paramètres :

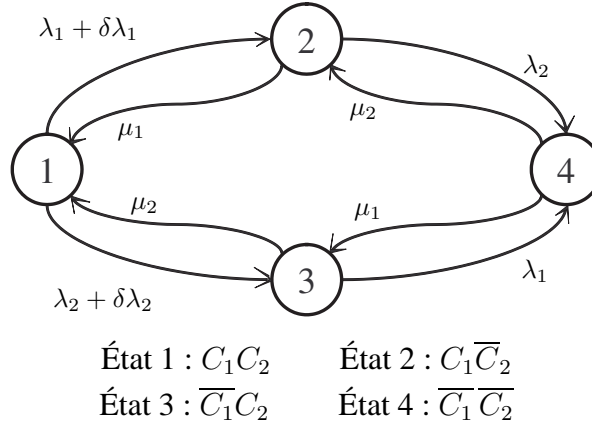


FIG. 6.3 – Illustration d’une dégradation liée à une interaction entre deux composants C_1 et C_2 dans l’état 1

Type1 - changements uniformes : les K paramètres varient simultanément d’une même quantité. On a :

$$\delta x_i = \delta x_j, \text{ pour } i, j = 1, 2, \dots, K. \quad (6.6)$$

Type2 - changements proportionnels : les K paramètres varient simultanément avec un même pourcentage ω .

$$\frac{\delta x_i}{x_i} = \frac{\delta x_j}{x_j} = \omega, \text{ pour } i, j = 1, 2, \dots, K. \quad (6.7)$$

De façon similaire, en utilisant les matrices directionnelle ($\mathbf{Q}_{x_1}, \mathbf{Q}_{x_2}, \dots, \mathbf{Q}_{x_K}$) qui indiquent les directions des paramètres (x_1, x_2, \dots, x_K) respectivement, l’équation (6.5) conduit à l’équation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\delta &= \mathbf{M} + \delta x_1 \mathbf{Q}_{x_1} + \delta x_2 \mathbf{Q}_{x_2} + \dots + \delta x_K \mathbf{Q}_{x_K} \\ &= \mathbf{M} + \sum_{i=1}^K \delta x_i \mathbf{Q}_{x_i} \\ &= \mathbf{M} + \mathbf{Q}^\delta, \end{aligned} \quad (6.8)$$

où :

$$\begin{aligned} - \mathbf{Q}_{x_i} &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, K \\ - \mathbf{Q}^\delta &= \sum_{i=1}^K \delta x_i \mathbf{Q}_{x_i}. \end{aligned}$$

Le changement simultané de plusieurs paramètres, le changement des taux de transition caractérisant un état (un groupe d’états) du système, ou plus généralement, le changement de la

matrice des taux de transition du processus de Markov conduit à une variation de la mesure de performance notée δW .

En utilisant l'extension du développement en séries de McLaurin et en supposant que W est indéfiniment dérivable par rapport tous les paramètres, cette variation totale δW peut s'écrire selon l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\delta W &= \sum_{i=1}^K \delta x_i \frac{\partial W}{\partial x_i} + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K (\delta x_i \delta x_j \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}) + \dots \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \delta^l W,\end{aligned}\tag{6.9}$$

où :

$$\delta^l W = \frac{1}{l!} \sum_{i_1=1}^K \sum_{i_2=1}^K \dots \sum_{i_l=1}^K \delta x_{i_1} \delta x_{i_2} \dots \delta x_{i_l} \frac{\partial^l W}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_l}}, \text{ pour } l = 1, 2, 3, \dots\tag{6.10}$$

On explicite maintenant une méthode efficace permettant d'évaluer la variation de la mesure de performance asymptotique δW .

6.3 Calcul analytique de la variation δW

Pour l'évaluation de δW , la méthode des différences finis peut être utilisés. On a :

$$\delta W = W_\delta - W,$$

où :

- W est la mesure de performance asymptotique du système non perturbé (avant des changements des paramètres) ayant comme matrice de taux de transition \mathbf{M} et comme vecteur de probabilité d'occupation d'états $\boldsymbol{\pi}$;
- W_δ est la mesure de performance asymptotique du système perturbé ayant comme matrice de taux de transition \mathbf{M}_δ qui conduit au vecteur de probabilité d'occupation d'états $\boldsymbol{\pi}_\delta$.

$$W_\delta = \boldsymbol{\pi}_\delta \mathbf{f} \text{ avec } \boldsymbol{\pi}_\delta \mathbf{M}_\delta = \mathbf{0}.\tag{6.11}$$

Par conséquent,

$$\delta W = (\boldsymbol{\pi}_\delta - \boldsymbol{\pi}) \mathbf{f}.\tag{6.12}$$

Cette relation montre que pour calculer δW il faut déterminer le vecteur de probabilité d'occupation d'états du système nominal $\boldsymbol{\pi}$ et celui du système perturbé $\boldsymbol{\pi}_\delta$. L'objectif dans la suite est de montrer que l'on peut évaluer δW à partir seulement du vecteur de probabilité d'occupation des états $\boldsymbol{\pi}$ (sans calcul $\boldsymbol{\pi}_\delta$).

6.3.1 Evaluation de la variation au premier ordre $\delta^1 W$

Par définition, $\delta^1 W$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\delta^1 W &= \sum_{i=1}^K \delta x_i \frac{\partial W}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^K \delta x_i \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \mathbf{f} \\ &= \delta^1 \boldsymbol{\pi} \mathbf{f},\end{aligned}\tag{6.13}$$

avec :

$$\delta^1 \boldsymbol{\pi} = \sum_{i=1}^K \delta x_i \frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial x_i}.\tag{6.14}$$

On sait que l'équation de Kolmogorov en régime stationnaire donne :

$$\boldsymbol{\pi} \mathbf{M} = \mathbf{0},$$

en prenant la dérivée par rapport au paramètre x_i , on a :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial x_i} \mathbf{M} + \boldsymbol{\pi} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} = \mathbf{0},$$

en remplaçant \mathbf{Q}_{x_i} par $\partial \mathbf{M} / \partial x_i$, on obtient :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial x_i} \mathbf{M} = -\boldsymbol{\pi} \mathbf{Q}_{x_i}.\tag{6.15}$$

Notons que \mathbf{M} est la matrice génératrice d'un processus de Markov, elle n'est donc pas inversible. C'est la raison pour laquelle l'inverse généralisée de \mathbf{M} a été introduite dans [82]. En effet, l'inverse généralisée de \mathbf{M} est calculé selon l'expression suivante :

$$\mathbf{M}^\# = (\mathbf{M} + \mathbf{e}\boldsymbol{\pi})^{-1} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi},\tag{6.16}$$

avec $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^\top$ et $\mathbf{M}\mathbf{M}^\# = \mathbf{M}^\#\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}$ (\mathbf{I} étant la matrice d'identité de la même taille que celle de la matrice génératrice \mathbf{M}). En multipliant les deux côtés de l'équation (6.15) par $\mathbf{M}^\#$, on a :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial x_i} (\mathbf{I} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}) = -\boldsymbol{\pi} \mathbf{Q}_{x_i} \mathbf{M}^\#,$$

ou,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial x_i} - \frac{\partial \boldsymbol{\pi} \mathbf{e}}{\partial x_i} \boldsymbol{\pi} = -\boldsymbol{\pi} \mathbf{Q}_{x_i} \mathbf{M}^\#.$$

Notons également que $\boldsymbol{\pi} \mathbf{e} = 1$, donc $\partial \boldsymbol{\pi} \mathbf{e} / \partial x_i = 0$. Par conséquent, on obtient :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial x_i} = -\boldsymbol{\pi} \mathbf{Q}_{x_i} \mathbf{M}^\#.\tag{6.17}$$

Alors, d'après l'équation (6.14) :

$$\begin{aligned}
 \delta^1 \boldsymbol{\pi} &= \sum_{i=1}^K \delta x_i \frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial x_i} \\
 &= -\boldsymbol{\pi} \left[\sum_{i=1}^K \delta x_i \mathbf{Q}_{x_i} \right] \mathbf{M}^\# \\
 &= -\boldsymbol{\pi} \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\#,
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

et d'après les équations (6.13) et (6.18), on obtient finalement :

$$\delta^1 W = -\boldsymbol{\pi} \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\# \mathbf{f}. \tag{6.19}$$

6.3.2 Evaluation de la variation au deuxième ordre $\delta^2 W$

Par définition, $\delta^2 W$ peut s'écrire comme suit :

$$\delta^2 W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \delta x_i \delta x_j \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \delta x_i \delta x_j \frac{\partial^2 \boldsymbol{\pi}}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{f}, \tag{6.20}$$

on commence par prendre la dérivée de l'équation (6.15) par rapport au paramètre x_j :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\pi}}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{M} + \frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial x_j} \mathbf{Q}_{x_i},$$

alors :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\pi}}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{M} = -\frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial x_i} \mathbf{Q}_{x_j} - \frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial x_j} \mathbf{Q}_{x_i}. \tag{6.21}$$

En utilisant l'inverse généralisée $\mathbf{M}^\#$, et en notant que $\mathbf{M}\mathbf{M}^\# = \mathbf{I} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}$ et $\boldsymbol{\pi}\mathbf{e} = 1$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\pi}}{\partial x_i \partial x_j} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial x_i} \mathbf{Q}_{x_j} + \frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial x_j} \mathbf{Q}_{x_i} \right) \mathbf{M}^\#. \tag{6.22}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 \delta^2 \boldsymbol{\pi} &= \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \delta x_i \delta x_j \frac{\partial^2 \boldsymbol{\pi}}{\partial x_i \partial x_j} \\
 &= -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^K \delta x_i \frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial x_i} \sum_{j=1}^K \delta x_j \mathbf{Q}_{x_j} + \sum_{j=1}^K \delta x_j \frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial x_j} \sum_{i=1}^K \delta x_i \mathbf{Q}_{x_i} \right\} \mathbf{M}^\# \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \delta x_i \frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^K \delta x_j \mathbf{Q}_{x_j} \right] \mathbf{M}^\# \\
 &= -\sum_{i=1}^K \delta x_i \frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial x_i} \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\#,
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

en utilisant les équations (6.14) et (6.18), on a :

$$\begin{aligned}\delta^2 \pi &= -[\delta^1 \pi] \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\# \\ &= \pi [\mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\#] \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\# \\ &= \pi [\mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\#]^2.\end{aligned}\quad (6.24)$$

D'après les équations (6.20), (6.23) et (6.24), on obtient finalement :

$$\delta^2 W = [\delta^2 \pi] f = \pi [\mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\#]^2 f. \quad (6.25)$$

6.3.3 Evaluation de la variation aux ordres supérieurs

De façon similaire, la variation au l -ième ordre ($l = 3, 4, \dots$) de $\delta \pi$ peut s'écrire comme suit :

$$\delta^l \pi = \frac{1}{l!} \sum_{i_1=1}^K \sum_{i_2=1}^K \dots \sum_{i_l=1}^K \delta x_{i_1} \delta x_{i_2} \dots \delta x_{i_l} \frac{\partial^l \pi}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_l}}, \quad (6.26)$$

et,

$$\delta^l W = \delta^l \pi f. \quad (6.27)$$

On commence par prendre la dérivée de l'équation (6.21) par rapport au paramètre x_k :

$$\frac{\partial^3 \pi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \mathbf{M} + \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_k} = -\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_k} \mathbf{Q}_{x_j} - \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_j \partial x_k} \mathbf{Q}_{x_i},$$

or,

$$\frac{\partial^3 \pi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \mathbf{M} = -\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{Q}_{x_k} - \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_k} \mathbf{Q}_{x_j} - \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_j \partial x_k} \mathbf{Q}_{x_i}. \quad (6.28)$$

Notons que $\mathbf{M} \mathbf{M}^\# = \mathbf{I} - \mathbf{e} \pi$ et $\pi \mathbf{e} = 1$, alors on obtient la relation suivante lorsque l'on multiplie tous les deux côtés de l'équation (6.28) par $\mathbf{M}^\#$:

$$\frac{\partial^3 \pi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = -\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{Q}_{x_k} + \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_k} \mathbf{Q}_{x_j} + \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_j \partial x_k} \mathbf{Q}_{x_i} \right) \mathbf{M}^\#.$$

Par conséquent, On a :

$$\begin{aligned}
 \delta^3 \pi &= \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K \delta x_i \delta x_j \delta x_k \frac{\partial^3 \pi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \\
 &= -\frac{1}{3!} \left\{ \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \delta x_i \delta x_j \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^K \delta x_k \mathbf{Q}_{x_k} + \right. \\
 &\quad + \sum_{i=1}^K \sum_{k=1}^K \delta x_i \delta x_k \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_k} \sum_{j=1}^K \delta x_j \mathbf{Q}_{x_j} + \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K \delta x_j \delta x_k \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_j \partial x_k} \sum_{i=1}^K \delta x_i \mathbf{Q}_{x_i} \right\} \mathbf{M}^\# \\
 &= -\frac{1}{3!} 3 \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \delta x_i \delta x_j \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\# \\
 &= -\left[\frac{1}{2!} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \delta x_i \delta x_j \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_j} \right] \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\# \tag{6.29}
 \end{aligned}$$

D'après les équations (6.23), (6.24) et (6.29), on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 \delta^3 \pi &= -[\delta^2 \pi] \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\# \\
 &= -\pi [\mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\#]^3. \tag{6.30}
 \end{aligned}$$

Et, la variation au 3-ième ordre de la mesure de performance asymptotique est :

$$\delta^3 W = \delta^3 \pi f = -\pi [\mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\#]^3 f. \tag{6.31}$$

De façon plus générale, en regardant les relations (6.24) et (6.30), on trouve que $\delta^l \pi$ peut être écrit récursivement à partir de $\delta^{l-1} \pi$ (pour $l = 2, 3, \dots$). C'est-à-dire que pour tout $l \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
 \delta^l \pi &= -[\delta^{l-1} \pi] \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\# \\
 &= (-1)^l \pi [\mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\#]^l. \tag{6.32}
 \end{aligned}$$

Alors, la variation au l -ième ($l > 3$) ordre de la mesure de performance asymptotique est :

$$\delta^l W = \delta^l \pi f = (-1)^l \pi [\mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\#]^l f. \tag{6.33}$$

D'après les équations (6.9), (6.19), (6.25), (6.31) et (6.33), on obtient la variation totale de la mesure de performance asymptotique provoquée par les changements simultanés des paramètres du système :

$$\delta W = \sum_{i=1}^{\infty} \{(-1)^i \pi [\mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\#]^i\} \mathbf{f},$$

ou,

$$\delta W = -\pi \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\# \left[\sum_{i=0}^{\infty} [-\mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\#]^i \right] \mathbf{f}. \quad (6.34)$$

Grâce à la prise en compte des impacts aux ordres supérieurs, cette relation nous permet de calculer précisément la variation totale de la mesure de performance asymptotique provoquée par des changements de paramètres (taux de défaillance, taux de réparation, ou plus généralement, taux de transition entre des états). Notons toutefois que le calcul peut être laborieux (évaluation d'une somme infinie). On étudie maintenant la convergence de $\sum_{i=0}^{\infty} [-\mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\#]^i$.

On commence par définir la matrice \mathbf{T} tel que $\mathbf{T} = -\mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\#$. En notant que :

$$\begin{aligned} \mathbf{I} - \mathbf{T}^k &= (\mathbf{I} - \mathbf{T})(\mathbf{I} + \mathbf{T} + \mathbf{T}^2 + \dots + \mathbf{T}^{k-1}) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{T}) \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{T}^i, \end{aligned}$$

donc,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\mathbf{I} - \mathbf{T}^k] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ (\mathbf{I} - \mathbf{T}) \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{T}^i \right\},$$

ou,

$$\mathbf{I} - \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{T}^k = (\mathbf{I} - \mathbf{T}) \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{T}^i. \quad (6.35)$$

Théorème 6.1. (Convergence de $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{T}^k$ - [64]) *r étant la plus grande valeur propre de la matrice \mathbf{T} en valeur absolue, on a $r < 1$. Par conséquent,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{T}^k = \mathbf{0}. \quad (6.36)$$

D'après (6.36) et (6.35), on a :

$$\mathbf{I} = (\mathbf{I} - \mathbf{T}) \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{T}^i.$$

alors :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{T}^i = (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}.$$

En remplaçant \mathbf{T} par $-\mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\sharp$, on a :

$$\sum_{i=0}^{\infty} [-\mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\sharp]^i = (\mathbf{I} + \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\sharp)^{-1}. \quad (6.37)$$

D'après les équations (6.37) et (6.34), on obtient finalement une relation suivante :

$$\delta W = -\pi \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\sharp (\mathbf{I} + \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\sharp)^{-1} \mathbf{f}. \quad (6.38)$$

Remarque : On considère le cas où la matrice des taux de transition du processus de Markov est "linéaire" par rapport à tous ses paramètres (c'est notamment le cas lorsqu'elle n'est constituée que de taux de défaillance et de réparation, et qu'il n'y a pas par exemple de refus de démarrage). On suppose également que tous les paramètres du système varient simultanément d'une même quantité (en pourcentage), voir (6.7). D'après l'équation (6.7), on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^\delta &= \sum_{i=1}^K \omega x_i \mathbf{Q}_{x_i} \\ &= \omega \sum_{i=1}^K x_i \mathbf{Q}_{x_i} \\ &= \omega \mathbf{M}. \end{aligned}$$

On sait que $\pi \mathbf{M} = \mathbf{0}$, alors $\pi \mathbf{Q}^\delta = \pi \omega \mathbf{M} = \mathbf{0}$. Par conséquent, en injectant cette relation dans l'équation (6.34), on trouve la variation totale $\delta W = 0$.

De façon plus générale, si tous les paramètres (taux de défaillance et les taux de réparation) de la matrice des taux de transition du processus de Markov changent simultanément d'un même pourcentage, la mesure de performance asymptotique du système est inchangée.

6.3.4 Conclusion

En résumé, on peut calculer de façon analytique la variation totale de la mesure de performance asymptotique qui est provoquée par des changements simultanés de paramètres (taux de défaillance et/ou de réparation, ou plus généralement, taux de transition entre des états) en utilisant soit la relation donnée par l'équation (6.34) :

$$\delta W = -\pi \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\sharp \left[\sum_{i=0}^{\infty} [-\mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\sharp]^i \right] \mathbf{f},$$

soit la formule (6.38) :

$$\delta W = -\pi \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\sharp (\mathbf{I} + \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\sharp)^{-1} \mathbf{f}.$$

Il est clair que la formule d'évaluation représentée à l'équation (6.38) est beaucoup plus simple que celle donnée par l'équation (6.34). Cependant, l'intérêt de la formule (6.34) est de pouvoir éviter l'inversion d'une matrice. Dans la suite, on se base sur la formule (6.38) pour développer la méthode d'estimation, mais les résultats obtenus sont transposables à l'équation (6.34).

6.4 Estimation de la variation δW

Supposons que la matrice génératrice est inconnue et que l'on a seulement des données de retour d'expérience (qui correspondent à une trajectoire nominale du processus de Markov). L'objectif de cette section est de montrer comment l'indicateur des variations de performances asymptotiques est estimé à partir de cette seule trajectoire observée.

Le vecteur de probabilité d'occupation des états π peut être estimé grâce à l'estimateur $\hat{\pi}$ obtenu par l'équation (5.11) du chapitre 5. Le problème restant est l'estimation de l'inverse généralisée M^\sharp . En effet, il existe principalement deux méthodes différentes fondées sur l'équation (6.38) :

- une approche basée sur l'estimation de la matrice génératrice ;
- une approche basée sur l'estimation directe de l'inverse généralisée.

6.4.1 Approche basée sur l'estimation de la matrice génératrice

Au paragraphe 5.4.1.1 du chapitre 5, nous avons montré que la matrice génératrice M peut être estimée à partir d'une seule trajectoire observée en utilisant une technique basée sur le maximum de vraisemblance. L'estimateur \hat{M} est donc obtenu par l'équation (5.24). D'après l'équation (6.16), on obtient l'estimation de l'inverse généralisée selon la relation suivante :

$$\hat{M}^\sharp = (\hat{M} + e\hat{\pi})^{-1} - e\hat{\pi}, \quad (6.39)$$

où $\hat{\pi}$ est obtenu par l'équation (5.11). Notons que :

$$\begin{aligned} Q^\delta \hat{M}^\sharp &= Q^\delta (\hat{M} + e\hat{\pi})^{-1} - Q^\delta e\hat{\pi} \\ &= Q^\delta (\hat{M} + e\hat{\pi})^{-1}, \text{ car } Q^\delta e = 0. \end{aligned}$$

D'après les équations (6.38), on obtient finalement :

$$\delta \hat{W} = -\hat{\pi} Q^\delta (\hat{M} + e\hat{\pi})^{-1} [I + Q^\delta (\hat{M} + e\hat{\pi})^{-1}]^{-1} f. \quad (6.40)$$

Cette relation nous donne une estimation de la variation totale de la mesure de performance asymptotique provoquée par les changements des paramètres fiabilistes grâce à une seule trajectoire observée.

Exemple 4. (Système dynamique de 4 composants) *Considérons un système dynamique représenté sur la figure 6.4. Les quatre composants (notés C_1, C_2, C_3 et C_4) sont dépendants : le composant 4 est en redondance passive (il est mis en service dès la défaillance du composant 3 et il est arrêté dès que le composant 3 est réparé). Le composant 1 est en partage de charge avec le groupe de composants 2, 3 et 4 (quand les trois composants 2, 3 et 4 sont défaillants, et si le composant 1 est en marche, son taux de défaillance passe de λ_1 à $\bar{\lambda}_1$). On suppose que $\lambda_1 = 0.002, \bar{\lambda}_1 = 0.0025, \lambda_2 = 0.001, \lambda_3 = 0.002, \lambda_4 = 0.004, \mu_1 = 0.001, \mu_2 = 0.009, \mu_3 = 0.0029, \mu_4 = 0.006$.*

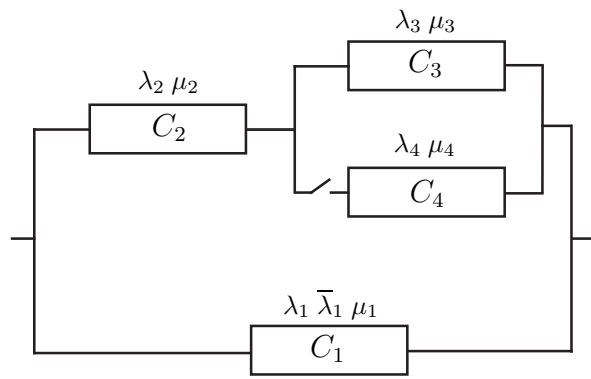


FIG. 6.4 – Structure du système de 4 composants dépendants

Le graphe de Markov correspondant est reporté sur la figure 6.5.

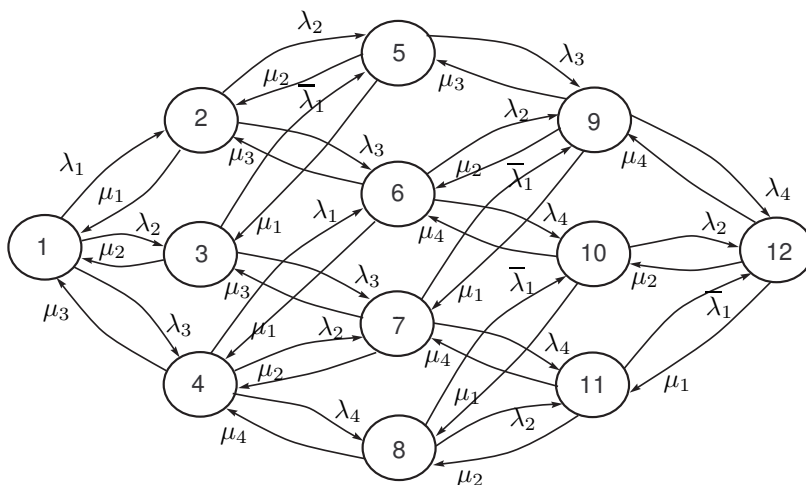


FIG. 6.5 – Diagramme de Markov

La matrice génératrice du système est :

$$\mathbf{M} = 10^{-2} \begin{pmatrix} -0.50 & 0.20 & 0.10 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.10 & -0.40 & 0 & 0 & 0.10 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.90 & 0 & -1.35 & 0 & 0.25 & 0 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.29 & 0 & 0 & -0.99 & 0 & 0.20 & 0.10 & 0.40 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.90 & 0.10 & 0 & -1.20 & 0 & 0 & 0 & 0.20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.29 & 0 & 0.10 & 0 & -0.89 & 0 & 0 & 0.10 & 0.40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.29 & 0.90 & 0 & 0 & -1.84 & 0 & 0.25 & 0 & 0.40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.60 & 0 & 0 & 0 & -0.95 & 0 & 0.25 & 0.10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.29 & 0.90 & 0.10 & 0 & -1.69 & 0 & 0 & 0.40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.60 & 0 & 0.10 & 0 & -0.80 & 0 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.60 & 0.90 & 0 & 0 & -1.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.60 & 0.90 & 0.10 & -1.60 \end{pmatrix}$$

En résolvant l'équation (6.1), on a :

$$\boldsymbol{\pi} = (0.1362, 0.2825, 0.0146, 0.0921, 0.0319, 0.1966, 0.0099, 0.0590, 0.0222, 0.1335, 0.0065, 0.0149)$$

En utilisant le vecteur associé d'états $\mathbf{f} = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0)^\top$, on obtient la disponibilité asymptotique du système : $A = \boldsymbol{\pi} \mathbf{f} = 0.79747$.

On s'intéresse au calcul de la variation de la disponibilité asymptotique du système lorsqu'il existe les changements simultanés des paramètres. En effet, on suppose que tous les taux de défaillance varient simultanément de $\omega = 10\%$ (par exemple, à cause de choc électrique, choc mécanique,...).

La matrice génératrice perturbée est :

$$\mathbf{M}_\delta = \mathbf{M} + w(\lambda_1 \mathbf{Q}_{\lambda_1} + \bar{\lambda}_1 \mathbf{Q}_{\bar{\lambda}_1} + \lambda_2 \mathbf{Q}_{\lambda_2} + \lambda_3 \mathbf{Q}_{\lambda_3} + \lambda_4 \mathbf{Q}_{\lambda_4}),$$

alors,

$$\mathbf{Q}^\delta = w(\lambda_1 \mathbf{Q}_{\lambda_1} + \bar{\lambda}_1 \mathbf{Q}_{\bar{\lambda}_1} + \lambda_2 \mathbf{Q}_{\lambda_2} + \lambda_3 \mathbf{Q}_{\lambda_3} + \lambda_4 \mathbf{Q}_{\lambda_4}),$$

et numériquement,

$$\mathbf{Q}^\delta = 10^{-3} \begin{pmatrix} -0.50 & 0.20 & 0.10 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.30 & 0 & 0 & 0.1 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.45 & 0 & 0.25 & 0 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.70 & 0 & 0.20 & 0.10 & 0.40 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.20 & 0 & 0 & 0 & 0.20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.50 & 0 & 0 & 0.10 & 0.40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.65 & 0 & 0.25 & 0 & 0.40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.35 & 0 & 0.25 & 0.10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.40 & 0 & 0.40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.10 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, la disponibilité asymptotique perturbée est : $A_\delta = 0.76950$. D'après l'équation (6.12) ou (6.38), on obtient finalement la variation de la disponibilité asymptotique :

$$\delta A = -0.02826.$$

Considérons maintenant la méthode d'estimation. On suppose que la matrice génératrice du processus de Markov est inconnue, que l'on a seulement un trajectoire observée qui correspond ici une trajectoire simulée (avec les même données de taux de défaillance et taux de réparation) sur une durée équivalente à 100000 transitions.

L'estimation de la matrice génératrice est obtenue par l'équation (5.24) :

$$\hat{M} = 10^{-2} \begin{pmatrix} -0.50 & 0.20 & 0.10 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.10 & -0.40 & 0 & 0 & 0.10 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.90 & 0 & -1.37 & 0 & 0.27 & 0 & 0.19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.29 & 0 & 0 & -0.99 & 0 & 0.20 & 0.10 & 0.39 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.89 & 0.10 & 0 & -1.20 & 0 & 0 & 0 & 0.20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.29 & 0 & 0.10 & 0 & -0.90 & 0 & 0 & 0.10 & 0.41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.29 & 0.91 & 0 & 0 & -1.88 & 0 & 0.27 & 0 & 0.41 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.59 & 0 & 0 & 0 & -0.95 & 0 & 0.26 & 0.10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.29 & 0.90 & 0.10 & 0 & -1.70 & 0 & 0 & 0.41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.59 & 0 & 0.10 & 0 & -0.79 & 0 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.62 & 0.94 & 0 & 0 & -1.84 & 0.28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.60 & 0.91 & 0.09 & -1.61 \end{pmatrix}$$

L'estimation du vecteur de probabilité d'occupation d'états est obtenue par l'équation (5.11) :

$$\hat{\pi} = (0.1358, 0.2822, 0.0139, 0.0910, 0.0318, 0.1965, 0.0094, 0.0579, 0.0223, 0.1380, 0.0060, 0.0152)$$

D'après l'équation (6.40), on obtient l'estimation de la variation totale de la disponibilité asymptotique du système :

$$\delta \hat{A} = -0.02793.$$

La figure 6.6 représente l'évolution de l'estimateur $\delta \hat{A}$ basé sur l'estimation de la matrice génératrice, en fonction de la taille de la trajectoire.

Il est clair que le résultat estimé est très proche du résultat exact. Dans le paragraphe suivant, nous considérerons une autre approche qui se base sur la technique d'analyse de perturbation permettant d'estimer directement l'inverse généralisée à partir d'une seule trajectoire observée sans passer l'estimation de la matrice génératrice.

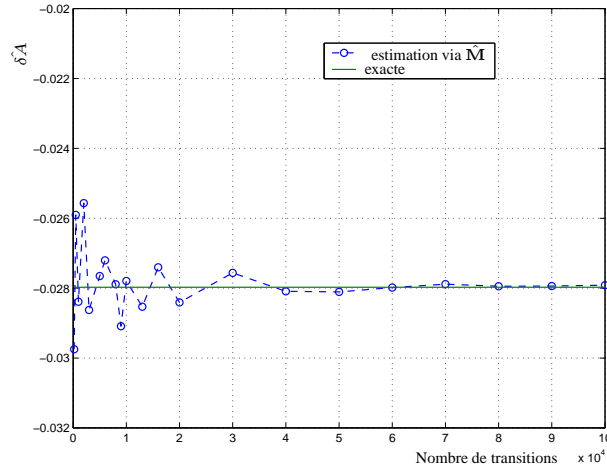


FIG. 6.6 – Représentation de l'estimateur de $\delta \hat{A}$ basé sur l'estimation de la matrice génératrice, en fonction de la taille de la trajectoire observée

6.4.2 Approche basée sur l'estimation directe de l'inverse généralisée \mathbf{M}^\sharp

Nous commençons par établir la formule d'évaluation directe de l'inverse généralisée.

Lemme 2. *L'inverse généralisée \mathbf{M}^\sharp peut s'écrire comme suit :*

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^\sharp &= - \int_0^\infty (\exp\{\mathbf{M}t\} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}) dt, \\ &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^T \exp\{\mathbf{M}t\} dt - T\mathbf{e}\boldsymbol{\pi} \right\} \end{aligned} \quad (6.41)$$

Preuve. On a [24] :

$$\int_0^\infty \exp\{\mathbf{M}t\} \mathbf{M} dt = -(\mathbf{I} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}).$$

Ensuite, en utilisant les relations $\mathbf{M}\mathbf{e} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{M} = \mathbf{0}$, on a :

$$\left[\int_0^\infty (\exp\{\mathbf{M}t\} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}) dt \right] \mathbf{M} = -(\mathbf{I} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}).$$

En multipliant les deux côtés de cette équation par \mathbf{M}^\sharp , et en utilisant $\mathbf{M}\mathbf{M}^\sharp = \mathbf{I} - \boldsymbol{\pi}\mathbf{e}$ et $\boldsymbol{\pi}\mathbf{M}^\sharp = \mathbf{0}$, on obtient :

$$\left[\int_0^\infty (\exp\{\mathbf{M}t\} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}) dt \right] (\mathbf{I} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}) = -\mathbf{M}^\sharp + \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}\mathbf{M}^\sharp,$$

ou,

$$\int_0^\infty (\exp\{\mathbf{M}t\} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}) dt - \left[\int_0^\infty (\exp\{\mathbf{M}t\} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}) dt \right] \mathbf{e}\boldsymbol{\pi} = -\mathbf{M}^\sharp. \quad (6.42)$$

De plus, notons que $\exp\{\mathbf{M}t\}\mathbf{e} = \mathbf{e}$ et $\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}\mathbf{e} = \mathbf{e}$. On a donc :

$$\left[\int_0^\infty (\exp\{\mathbf{M}t\} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi}) dt \right] \mathbf{e}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}.$$

En injectant cette relation dans l'équation (6.42), on obtient (6.41). ■

D'après (6.41), on a :

$$\mathbf{M}^\sharp = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{M}^\sharp(T),$$

où,

$$\mathbf{M}^\sharp(T) = - \left\{ \int_0^T \exp\{\mathbf{M}t\} dt - T\mathbf{e}\boldsymbol{\pi} \right\}. \quad (6.43)$$

La relation (6.41) nous montre que $\mathbf{M}^\sharp(T)$, avec un T choisi, peut être considéré comme un estimateur de \mathbf{M}^\sharp . En notant que $\mathbf{Q}^\delta \mathbf{e} = \mathbf{0}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\sharp(T) &= -\mathbf{Q}^\delta \int_0^T \exp\{\mathbf{M}t\} dt - T\mathbf{Q}^\delta \mathbf{e}\boldsymbol{\pi} \\ &= -\mathbf{Q}^\delta \int_0^T \exp\{\mathbf{M}t\} dt = \mathbf{Q}^\delta \overline{\mathbf{M}}^\sharp(T), \end{aligned}$$

où,

$$\overline{\mathbf{M}}^\sharp(T) = - \int_0^T \exp\{\mathbf{M}t\} dt \quad (6.44)$$

Dans le but d'estimer la variation totale δW en utilisant la relation (6.38), on peut utiliser $\overline{\mathbf{M}}^\sharp(T)$ au lieu de $\mathbf{M}^\sharp(T)$.

Soient $p_{ij}(t) = \mathbb{P}\{X_t^i = j\}$ et $\mathbf{P}(t) = [p_{ij}(t)]_{i,j \in E}$. On a $\mathbf{P}(t) = \exp(\mathbf{M}t)$ (voir par exemple [57]). Par conséquent, d'après (6.44) l'élément $m_{ij}^\sharp(T)$ de la matrice $\overline{\mathbf{M}}^\sharp(T) = [\overline{m}_{ij}^\sharp(T)]_{i,j \in E}$ peut s'écrire comme suit :

$$\overline{m}_{ij}^\sharp(T) = - \int_0^T p_{ij}(t) dt, \quad (6.45)$$

en utilisant le $\epsilon^j(X_t^i)$ (rappelons que $\epsilon^k(v) = 1$ si $v = k$ et $\epsilon^k(v) = 0$ sinon, voir le paragraphe 5.3.3.2 du chapitre 5), l'équation (6.45) peut s'écrire comme suit :

$$\overline{m}_{ij}^\sharp(T) = -\mathbb{E} \left[\int_0^T \epsilon^j(X_t^i) dt \right]. \quad (6.46)$$

En se basant sur l'ergodicité du processus de Markov, $\overline{m}_{ij}^\sharp(T)$ peut s'écrire de la même façon que $g_i(T)$, voir le paragraphe 5.3.3.2 du chapitre 5. Alors :

$$\overline{m}_{ij}^\sharp(T) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \epsilon^i(X_k) \int_{T_k}^{T_k+T} \epsilon^j(X_t) dt \right\}}{\sum_{k=0}^{N-1} \epsilon^i(X_k)}. \quad (6.47)$$

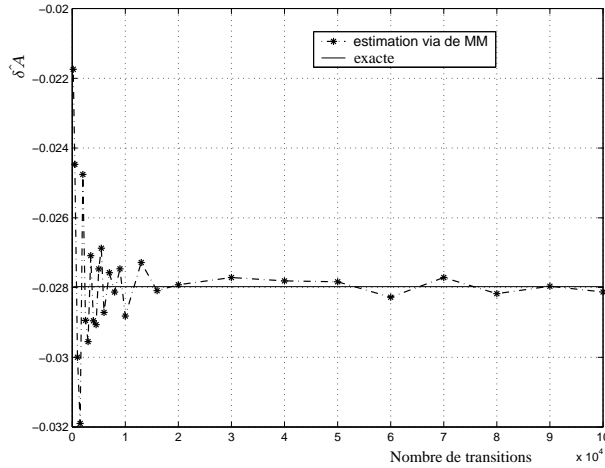


FIG. 6.7 – Représentation de l’estimateur de $\delta \hat{A}$ basé sur l’estimation directe de l’inverse généralisée en fonction de la taille de la trajectoire observée

La démonstration de (6.47) est similaire à celle donnée pour l’équation (5.18). Il est clair que (6.47) nous permet de calculer directement l’estimateur de l’inverse généralisée grâce à une seule trajectoire observée sans utiliser l’estimateur de la matrice génératrice.

Remarquons que la démarche d’estimation de l’inverse généralisée est similaire à celle du potentiel de performance g . Alors, la longueur de période T peut être choisie de la même façon que pour l’estimation de g (c’est-à-dire qu’il est basé sur la durée moyenne du premier passage de l’un à l’autre état).

L’estimateur de l’inverse généralisée est alors :

$$\hat{M}^\# = [\bar{m}^\#(T)], \text{ pour tous } i, j \in E.$$

Notons que l’estimation du vecteur de probabilité d’occupation d’états est obtenue par l’équation (5.11) du chapitre 5. Alors, d’après les équations (6.38), on obtient finalement :

$$\delta \hat{W} = -\hat{\pi} \mathbf{Q}^\delta \hat{M}^\# (\mathbf{I} + \mathbf{Q}^\delta \hat{M}^\#)^{-1} \mathbf{f}. \quad (6.48)$$

Reprenons maintenant l’exemple 4, auquel on applique cette approche afin d’estimer la variation totale de la disponibilité asymptotique du système. On utilise la même trajectoire simulée au paragraphe précédent pour l’estimation de l’inverse généralisée.

En utilisant (5.9), la durée moyenne du premier passage Γ vaut :

$$\hat{\Gamma} = 2614,$$

en se basant sur cette valeur, on choisit la longueur de période $T = 2700$, et d’après (6.47), on obtient l’estimation de l’inverse généralisée $\hat{M}^\#$.

Finalement, d'après l'équation (6.48), on obtient l'estimation de la variation totale de la disponibilité asymptotique provoquée par les changements simultanés de 10% pour tous les taux de défaillance :

$$\delta \hat{A} = -0.027867.$$

Le résultat nous montre que la valeur estimée est tout à fait comparable avec celle de la théorie. La figure 6.7 représente l'évolution de l'estimateur $\delta \hat{A}$ basé sur l'estimation directe du groupe inverse en fonction de la longueur de la trajectoire.

En regardant les deux figures 6.6 et 6.7, on constate que l'estimateur $\delta \hat{A}$ basé sur l'estimation de l'inverse généralisée $M^\#$ converge plus rapidement que celui basé sur l'estimation de la matrice génératrice M .

Notons que l'estimation de l'inverse généralisée $M^\#$ directement permet de calculer $\delta \hat{W}$ avec une seule inversion de matrice (voir la relation (6.48)), au lieu de deux pour la méthode basée sur l'estimation de la matrice génératrice, voir l'équation (6.40).

6.5 Conclusions

On a étudié dans ce chapitre un indicateur des variations de performances asymptotiques qui sont provoquées par des changements simultanés de paramètres fiabilistes (taux de défaillance/réparation, ou plus généralement, taux de transition entre des états...), ou plus généralement, par un changement de la matrice des taux de transition du processus de Markov.

Afin de calculer cet indicateur, on a présenté une méthode analytique permettant de donner des résultats exacts. Pour les cas où la matrice génératrice est inconnue, deux approches différentes permettant d'estimer cette variation grâce à une seule trajectoire observée (qui correspond aux données de retour d'expérience dont on dispose) sont proposées. L'approche basée sur l'estimation de la matrice génératrice du processus de Markov est simple et facile à réaliser. Les résultats numériques nous montrent que la valeur estimée est tout à fait comparable avec celle obtenue analytiquement. La deuxième approche basée sur l'estimation directe de l'inverse généralisée peut donner aussi de bons résultats. La comparaison entre ces deux approches a été considérée au travers d'un exemple et les résultats numériques montrent que la convergence de la première approche est moins rapide que celle de la seconde. De plus, la deuxième approche nous permet d'éviter une inversion de matrice.

Dans le chapitre suivant, nous considérons l'utilisation de cet indicateur afin de calculer analytiquement, et d'estimer des facteurs d'importance différentiels dans le contexte des systèmes markoviens à composants dépendants.

Chapitre 7

Facteur d'importance différentiel : mise en œuvre et extension

7.1 Introduction

Pour identifier la contribution relative d'un composant ou d'un groupe de composants aux variations des performances du système qui sont provoquées par des changements simultanés des paramètres fiabilistes, un facteur appelé facteur d'importance différentiel a été introduit récemment par Borgonovo [18]. Ce facteur est privilégié pour les études de sûreté dans les centrales nucléaires [16, 17, 99]. Jusqu'à présent, aucun développement n'a été proposé pour calculer ce facteur dans le cas de systèmes markoviens.

Dans ce chapitre nous nous intéressons, d'une part, à mettre en œuvre ce facteur dans le contexte des systèmes markoviens, d'autre part, à proposer une extension ayant pour objectif :

- de poursuivre les études de sensibilité dans des directions quelconques ;
- de permettre une utilisation plus large du facteur proposé par Borgonovo quand celui-ci n'est plus satisfaisant.

Afin d'évaluer ce facteur et son extension, nous proposons dans un premier temps des méthodes analytiques pour des résultats exacts, et dans un second temps, des méthodes d'estimation permettant d'utiliser une seule trajectoire observée du système. Un lien direct avec le facteur de sensibilité multi-directionnelle MSM, est également établi.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : le deuxième paragraphe a pour objectif de présenter le facteur d'importance différentiel et son extension pour un système à composants dépendants décrit par un processus de Markov. Le calcul analytique de ce facteur et celui de son extension sont exposés dans le troisième paragraphe. Afin d'estimer ces facteurs en régime stationnaire, des méthodes d'estimation sont considérées dans le quatrième paragraphe. Ces méthodes nous permettent d'obtenir des résultats approchés à partir des données observées sur

le système. On établit également le lien direct avec le facteur de sensibilité multi-directionnelle présenté dans les chapitres précédents.

7.2 Facteur d'importance différentiel et son extension

Cette section a, d'une part, pour objectif de présenter le facteur d'importance différentiel récemment introduit pour des études de la sûreté des systèmes nucléaires [18], et d'autre part, de présenter une extension de ce facteur dans le contexte des systèmes décrits par des processus de Markov.

7.2.1 Facteur d'importance différentiel (DIM)

Soit W la mesure de performance du système (la disponibilité/fiabilité, capacité de production globale,...), W est en fait une fonction linéaire des probabilités d'occupation des états. On suppose que W est fonction indéfiniment dérivable par rapport aux paramètres (taux de défaillance, de réparation...).

La variation de la mesure de performance W provoquée par les changements simultanés de K paramètres $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_K)$, sous l'hypothèse que ces changements soient suffisamment petits⁵, peut être approximée selon l'expression suivante :

$$\delta W \simeq \delta^1 W = \frac{\partial W}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial W}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial W}{\partial x_K} \delta x_K,$$

où $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_K$ sont les variations des paramètres x_1, x_2, \dots, x_K respectivement. De façon similaire, la variation conduite par la variation du paramètre x_i est :

$$\delta W_{x_i} \simeq \delta^1 W_{x_i} = \frac{\partial W}{\partial x_i} \delta x_i,$$

Le facteur d'importance différentiel (DIM) pour le paramètre x_i , introduit par Borgonovo [18], est défini comme suit :

$$\text{DIM}(x_i) = \frac{\delta^1 W_{x_i}}{\delta^1 W} = \frac{\frac{\partial W}{\partial x_i} \delta x_i}{\sum_{j=1}^K \frac{\partial W}{\partial x_j} \delta x_j}. \quad (7.1)$$

Cette relation donne la contribution relative du composant i (qui est caractérisé par le paramètre x_i) par rapport à la variation de la mesure de performance δW .

⁵Rappelons que la condition "suffisamment petits" a été explicitée dans [18] en utilisant le critère de convergence de la séquence de Cauchy

De façon similaire, on peut définir le DIM pour un groupe de paramètres (x_i, x_j, \dots, x_l) comme la suivante :

$$\text{DIM}(x_i, x_j, \dots, x_l) = \frac{\delta^1 W_{x_i, x_j, \dots, x_l}}{\delta^1 W} = \frac{\frac{\partial W}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial W}{\partial x_j} \delta x_j + \dots + \frac{\partial W}{\partial x_l} \delta x_l}{\sum_{j=1}^K \frac{\partial W}{\partial x_j} \delta x_j}, \quad (7.2)$$

où :

$$\delta W_{x_i, x_j, \dots, x_l} \simeq \delta^1 W_{x_i, x_j, \dots, x_l} = \frac{\partial W}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial W}{\partial x_j} \delta x_j + \dots + \frac{\partial W}{\partial x_l} \delta x_l.$$

est la variation de la mesure de performance provoquée par le groupe de paramètres (x_i, x_j, \dots, x_l) .

Remarquons que l'on peut classer des composants (groupes de composants) selon leur importance donnée par ce facteur DIM.

Propriétés de DIM

Par construction, le DIM possède les deux propriétés suivantes :

1. Le DIM d'un groupe de paramètres est égal à la somme des DIM des paramètres.

$$\text{DIM}(x_i, x_j, \dots, x_l) = \text{DIM}(x_i) + \text{DIM}(x_j) + \dots + \text{DIM}(x_l).$$

Cette propriété nous permet de calculer facilement l'importance d'un groupe de paramètres (ou composants) à partir de l'importance de chaque paramètres.

2. La somme des DIM de chacun des paramètres du système qui sont perturbés est égale à l'unité. C'est-à-dire que :

$$\text{DIM}(x_1) + \text{DIM}(x_2) + \dots + \text{DIM}(x_K) = 1.$$

En se basant sur cette proposition, on peut évaluer l'importance d'un paramètre (composant) grâce à l'importance des autres paramètres (composants).

$$\begin{aligned} \text{DIM}(x_i) &= \\ &= 1 - [\text{DIM}(x_1) + \text{DIM}(x_2) + \dots + \text{DIM}(x_{i-1}) + \text{DIM}(x_{i+1}) + \dots + \text{DIM}(x_K)]. \end{aligned}$$

DIM pour une direction spécifique

Considérons une variation de la matrice génératrice du processus de Markov due à des changements simultanés suivant K directions différentes $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_K$ (voir le chapitre 6).

$$\mathbf{M}_\delta = \mathbf{M} + \delta_{\mathbf{Q}_1} \mathbf{Q}_1 + \delta_{\mathbf{Q}_2} \mathbf{Q}_2 + \dots + \delta_{\mathbf{Q}_K} \mathbf{Q}_K,$$

où $\delta_{\mathbf{Q}_i}$ (pour $i = 1, \dots, K$) est la variation selon la direction \mathbf{Q}_i de la matrice des taux de transition du processus de Markov.

Selon la définition de DIM, on peut définir une généralisation de DIM comme suit.

$$\text{DIM}(\mathbf{Q}_i) = \frac{\frac{dW}{d\mathbf{Q}_i} \delta_{\mathbf{Q}_i}}{\sum_{j=1}^K \frac{dW}{d\mathbf{Q}_j} \delta_{\mathbf{Q}_j}}, \quad (7.3)$$

où $\frac{dW}{d\mathbf{Q}_i}$ est la dérivée de la fonction W dans la direction \mathbf{Q}_i (le paragraphe 3.2.2 du chapitre 3).

Par construction, le $\text{DIM}(\mathbf{Q}_i)$ donne la contribution relative de la direction de sensibilité \mathbf{Q}_i par rapport à la variation totale de la mesure de performance. De façon similaire, le DIM pour un groupe de directions est défini selon l'expression suivante :

$$\text{DIM}(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j, \dots, \mathbf{Q}_l) = \frac{\frac{dW}{d\mathbf{Q}_i} \delta_{\mathbf{Q}_i} + \frac{dW}{d\mathbf{Q}_j} \delta_{\mathbf{Q}_j} + \dots + \frac{dW}{d\mathbf{Q}_l} \delta_{\mathbf{Q}_l}}{\sum_{j=1}^K \frac{dW}{d\mathbf{Q}_j} \delta_{\mathbf{Q}_j}}. \quad (7.4)$$

Notons d'une part que deux propriétés du DIM (relatif à un paramètre) présentées ci-dessus sont applicables pour le DIM relatif à une direction en remplaçant les paramètres x_1, x_2, \dots, x_K par les directions de sensibilité $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_K$. D'autre part, on a montré dans le chapitre 3 que la direction de sensibilité peut représenter la direction d'un paramètre ou d'un groupe de paramètres, ou plus généralement, la direction de taux de transition entre des états. Par conséquent, le DIM relatif à paramètre correspond au cas particulier du DIM calculé avec les matrices de direction $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_K$ qui représentent les directions des paramètres, c'est à dire : $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_{x_1}, \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_{x_2}, \dots, \mathbf{Q}_K = \mathbf{Q}_{x_K}$.

Par définition, le DIM ne prend en compte que l'impact de changements au premier ordre. Une condition nécessaire pour une utilisation correcte du DIM est que ces changements soient "suffisamment petits". Afin de s'affranchir de cette condition, on propose de s'intéresser à une extension de ce facteur qui correspondrait à un DIM aux ordres supérieurs.

7.2.2 DIM aux ordres supérieurs (DIM*)

Remarquons que la variation de performance, δW , peut être calculée précisément selon l'expression suivante (voir l'équation (6.9) au chapitre 6) :

$$\delta W = \sum_{l=1}^{\infty} \delta^l W,$$

où $\delta^l W$ est la variation au l -ième ordre et son interprétation est donnée par l'équation (6.10).

On s'intéresse à mesurer la contribution relative du composant i (qui est caractérisé par le paramètre x_i) par rapport à la variation totale de performance δW . Pour ce faire, on propose

donc une extension du facteur d'importance différentiel, appelée DIM aux ordres supérieurs et notée DIM*. Le DIM* du paramètre x_i est défini comme suit :

$$\text{DIM}^*(x_i) = \frac{\delta W_{x_i}}{\delta W}, \quad (7.5)$$

avec δW_{x_i} est la variation de performance provoquée par le changement de paramètre x_i (voir la relation (6.4)).

De façon similaire, le DIM pour un groupe de paramètres x_i, x_j, \dots, x_l est donné par :

$$\text{DIM}^*(x_i, x_j, \dots, x_l) = \frac{\delta W_{x_i, x_j, \dots, x_l}}{\delta W}, \quad (7.6)$$

où $\delta W_{x_i, x_j, \dots, x_l}$ est la variation de la mesure W provoquée par les changements simultanés des paramètres x_i, x_j, \dots, x_l .

Il est clair que le facteur d'importance différentiel aux ordres supérieurs (DIM*) prend en compte tous les effets aux ordres supérieurs. Le DIM* peut donner plus précisément la contribution relative d'un composant (ou d'un groupe de composants) à la variation totale de performance que le DIM. Notons toutefois que l'évaluation de DIM* est plus complexe que celle de DIM. C'est la raison pour laquelle on présente seulement le DIM* en régime stationnaire (dit DIM* stationnaire). Quant au DIM, il est étudié en régime stationnaire ainsi qu'en régime transitoire.

7.3 Evaluation analytique de DIM et de DIM*

Dans ce paragraphe on s'intéresse aux méthodes analytiques permettant de donner des résultats exacts de DIM et de DIM* dans le contexte des systèmes markoviens.

7.3.1 Evaluation de DIM en stationnaire et en transitoire

Ce paragraphe a pour objectif de montrer comment le facteur DIM pour un paramètre, pour un groupe de paramètres, ou plus généralement, pour une direction quelconque peut être calculé de façon analytique. Pour ce faire, on propose un lien direct entre le facteur DIM et le facteur proposé MSM (voir le chapitre 3). Cela nous permet d'évaluer rapidement le DIM à partir des résultats du MSM.

7.3.1.1 Lien direct avec le facteur MSM

On rappelle que $\text{MSM}_{Q_i}^W = \frac{dW}{dQ_i}$, le DIM selon la direction Q_i (d'après l'équation (7.3)) peut donc s'écrire comme suit :

$$\text{DIM}(\mathbf{Q}_i) = \frac{\delta_{\mathbf{Q}_i} \text{MSM}_{\mathbf{Q}_i}^W}{\sum_{j=1}^K \delta_{\mathbf{Q}_j} \text{MSM}_{\mathbf{Q}_j}^W}. \quad (7.7)$$

Et d'après l'équation (7.4), on a :

$$\text{DIM}(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j, \dots, \mathbf{Q}_j) = \frac{\delta_{\mathbf{Q}_i} \text{MSM}_{\mathbf{Q}_i}^W + \delta_{\mathbf{Q}_j} \text{MSM}_{\mathbf{Q}_j}^W + \dots + \delta_{\mathbf{Q}_l} \text{MSM}_{\mathbf{Q}_l}^W}{\sum_{j=1}^K \delta_{\mathbf{Q}_j} \text{MSM}_{\mathbf{Q}_j}^W}. \quad (7.8)$$

Ces relations permettent de faire un lien direct entre le facteur d'importance différentiel au premier ordre DIM et le facteur de sensibilité multi-directionnelle MSM.

Rappelons que la section 3.3 a porté sur l'étude du facteur MSM en régime transitoire (y compris le MSM instantané, le MSM moyen sur l'intervalle de temps donné), et aussi en régime stationnaire (le MSM stationnaire). En effet, le calcul analytique de ces mesures (le MSM instantané, le MSM moyen, et le MSM stationnaire) a été étudié. D'après la relation (7.7), on peut alors calculer analytiquement le DIM instantané, moyen sur l'intervalle de temps donné et également le DIM stationnaire selon une direction d'intérêt en utilisant le facteur MSM.

DIM pour un paramètre Pour les cas où les changements sont liés aux paramètres (taux de défaillance ou de réparation), la relation (7.7) devient :

$$\text{DIM}(x_i) = \frac{\delta x_i \text{MSM}_{\mathbf{Q}_{x_i}}^W}{\sum_{j=1}^K \delta x_j \text{MSM}_{\mathbf{Q}_{x_j}}^W}. \quad (7.9)$$

Dans le chapitre 6 on a signalé qu'il existe principalement deux types de variation de paramètres :

- le type 1 (changements uniformes) qui se base sur le fait que tous les paramètres varient simultanément avec une même quantité ;
- le type 2 (changements proportionnels) pour lequel tous les paramètres varient simultanément avec un même pourcentage.

Changements uniformes : D'après l'équation (7.9), pour les changements uniformes, le facteur DIM relatif du paramètre x_i ou de la direction \mathbf{Q}_{x_i} peut s'écrire simplement comme suit :

$$\text{DIM}(\mathbf{Q}_{x_i}) = \frac{\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{x_i}}^W}{\sum_{j=1}^K \text{MSM}_{\mathbf{Q}_{x_j}}^W}, \quad (7.10)$$

car $\delta x_i = \delta x_j$ pour tous $i, j = 1, 2, \dots, K$. Cette relation nous montre que si les paramètres varient uniformément alors le DIM ne dépend pas de la quantité de changement.

Dans ce cas l'importance d'un composant basée sur le facteur DIM sous l'hypothèse que des paramètres du système varient uniformément et celle liée au facteur MSM conduisent au même résultat. En effet si on suppose $|\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{x_i}}^W| > |\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{x_j}}^W|$, alors l'équation (7.10) conduit à $|\text{DIM}(x_i)| > |\text{DIM}(x_j)|$.

Changements proportionnels : On considère maintenant le cas dans lequel des paramètres changent simultanément avec un même pourcentage : $\delta x_i = \omega * x_i$ pour tout $i = 1, 2, \dots, K$. Par conséquent, on peut obtenir la relation suivante d'après (7.9) :

$$\text{DIM}(x_i) = \frac{x_i \text{MSM}_{\mathbf{Q}_{x_i}}^W}{\sum_{j=1}^K x_j \text{MSM}_{\mathbf{Q}_{x_j}}^W}. \quad (7.11)$$

D'après cette relation, on trouve que le DIM ne dépend pas de ω .

Remarquons que le DIM pour un paramètre (x_i) en régime stationnaire peut être évalué via le facteur MSM ou directement par la relation suivante d'après l'équation (6.19) :

$$\text{DIM}(x_i) = \frac{\delta^1 W_{x_i}}{\delta^1 W} = \frac{-\pi \mathbf{Q}_{x_i}^\delta \mathbf{M}^\# \mathbf{f}}{-\pi \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\# \mathbf{f}}. \quad (7.12)$$

7.3.1.2 Exemple d'application

Considérons maintenant l'exemple 4 présenté au chapitre 6. On s'intéresse ici au facteur DIM afin d'étudier l'importance des composants pour la performance du système qui est vue via la disponibilité instantanée et la disponibilité asymptotique.

On commence par calculer le MSM de la disponibilité du système par rapport aux directions de taux de défaillance. Lorsque le taux de défaillance du composant C_1 vaut λ_1 ou $\bar{\lambda}_1$, la sensibilité de la disponibilité du système par rapport au taux de défaillance du composant C_1 peut être définie par $\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_1 \bar{\lambda}_1}}^A$, où $\mathbf{Q}_{\lambda_1 \bar{\lambda}_1} = \mathbf{Q}_{\lambda_1} + \mathbf{Q}_{\bar{\lambda}_1}$. En utilisant l'équation (3.14), on obtient les $\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_i}, i=2 \dots 4}^A(t)$, et $\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_1 \bar{\lambda}_1}}^A(t)$. Leurs évolutions avec temps sont représentées sur la figure 7.1. Pour étudier la sensibilité de la disponibilité asymptotique par rapport aux taux de défaillance des composants (ce qui correspondent aux MSMs stationnaires), on se base sur l'équation (3.31). Et les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 7.1.

En se basant sur ces résultats, nous pouvons étudier l'importance d'un composant. Selon les résultats représentés sur la figure 7.1, on trouve un classement de l'importance des composants comme suit. Sur l'intervalle de temps $[0, 1150]$: $C_2 > C_1 \geq C_3 > C_4$, c'est-à-dire que le plus important composant est C_2 tandis que C_4 est le plus moins important. A partir de l'instant $t = 1150$, l'importance des composants C_1 et C_3 change. En effet, C_3 devient plus important que C_1 et le classement est $C_2 > C_3 > C_1 > C_4$. Ce classement est maintenu jusqu'à l'infini, voir tableau 7.1.

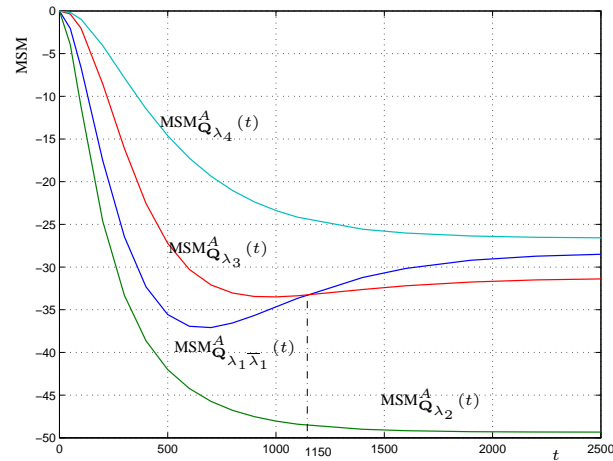


FIG. 7.1 – Sensibilité de la disponibilité instantanée par rapport aux taux de défaillance

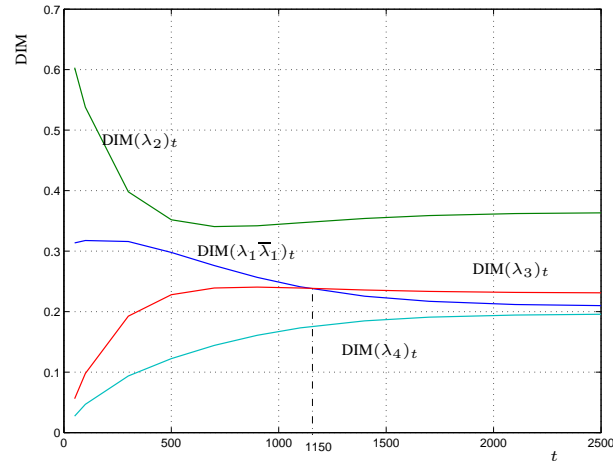


FIG. 7.2 – DIM des paramètres pour les cas où les taux de défaillance varient simultanément d'un même quantité

Changements uniformes des paramètres : Supposons maintenant que les taux de défaillance des composants varient simultanément et uniformément (changements uniformes - type 1). Ces changements conduisent à une variation de la disponibilité du système. Nous nous intéressons à la contribution de chaque composant à cette variation. Pour ce faire, on calcule alors le facteur DIM relatif de chaque composant. Sachant que la relation (7.11) nous permet d'obtenir facilement le DIM grâce aux résultats du facteur MSM.

La figure 7.2 représente l'évolution avec temps de $DIM(\lambda_i)_{i=2\dots 4}$ et de $DIM(\bar{\lambda}_1 \lambda_1)$. Ces résultats montrent que $C_2 > C_1 \geq C_3 > C_4$ sur l'intervalle de temps $(0, 1150]$. Dès l'instant $t = 1150$, le classement de l'importance des composants d'importance devient $C_2 > C_3 \geq C_1 > C_4$. Et ce classement est maintenu jusqu'à l'instant infini, voir tableau 7.1.

Grâce aux résultats de MSM stationnaire donnés dans le tableau 7.1, le facteur DIM stationnaire peut être facilement obtenu en utilisant la relation (7.11), voir le tableau 7.1. On rappelle que le DIM en régime stationnaire peut être évalué en utilisant le calcul analytique donné par l'équation (7.12).

Composant	MSM			DIM		
	MSM	Valeur	Ordre	DIM	Valeur	Ordre
C_1	$MSM_{Q_{\lambda_1 \bar{\lambda}_1}}^A$	-28.3094	3	$DIM(\lambda_1 \bar{\lambda}_1)$	0.2088	3
C_2	$MSM_{Q_{\lambda_2}}^A$	-49.3440	1	$DIM(\lambda_2)$	0.3640	1
C_3	$MSM_{Q_{\lambda_3}}^A$	-31.2916	2	$DIM(\lambda_3)$	0.2308	2
C_4	$MSM_{Q_{\lambda_4}}^A$	-26.6111	4	$DIM(\lambda_4)$	0.1963	4

TAB. 7.1 – Résultats des facteurs d'importance MSM stationnaire et DIM stationnaire liés à des changements uniformes des taux de défaillance

Les résultats montrent que l'importance d'un composant basée sur le facteur MSM et celle liée au facteur DIM, sous l'hypothèse que les changements des paramètres varient uniformément, conduisent au même résultat. Ce qui est normal puisque dans ce cas, le MSM et le DIM sont égaux à une facteur multiplicatif près.

Changements proportionnels des paramètres : Considérons maintenant que les taux de défaillance varient simultanément d'un même pourcentage (changements proportionnels - type 2). Ici encore, nous nous intéressons la contribution de chaque composant à la variation totale de la disponibilité. Pour atteindre cet objectif, on calculera alors le facteur DIM relatif de chaque composant. Sachant que la relation (7.11) nous permet d'obtenir facilement le DIM grâce aux résultats du facteur MSM.

La figure 7.3 représente l'évolution avec le temps de $DIM(\lambda_i)_{i=2...4}$ et de $DIM(\bar{\lambda}_1 \lambda_1)$. Ces résultats montrent que :

- $C_1 > C_2 > C_3 > C_4$ sur l'intervalle de temps $(0, 300]$;
- $C_1 > C_3 > C_4 > C_2$ sur l'intervalle de temps $(300, 350]$;
- $C_1 > C_4 > C_3 > C_2$ sur l'intervalle de temps $(350, 750]$;
- et après $t = 750$: $C_4 > C_1 > C_3 > C_2$ et ce classement d'importance est maintenu jusqu'à l'infini, voir tableau 7.2.

Il est clair que dans ce cas (changements proportionnels) l'importance d'un composant basée sur le facteur MSM est différente de celle donnée par le facteur DIM. Cela est normal car le DIM prend en compte les variations effectives des paramètres et pas seulement la valeur des

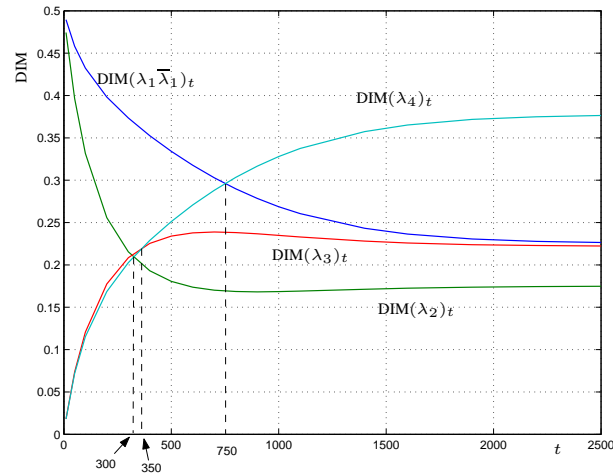


FIG. 7.3 – DIM des paramètres pour les cas où les taux de défaillance varient simultanément d'un même pourcentage

Composant	MSM			DIM		
	MSM	Valeur	Ordre	DIM	Valeur	Ordre
C_1	$MSM_{Q_{\lambda_1 \bar{\lambda}_1}}^A$	-28.3094	3	$DIM(\lambda_1 \bar{\lambda}_1)$	0.2254	2
C_2	$MSM_{Q_{\lambda_2}}^A$	-49.3440	1	$DIM(\lambda_2)$	0.1750	4
C_3	$MSM_{Q_{\lambda_3}}^A$	-31.2916	2	$DIM(\lambda_3)$	0.2219	3
C_4	$MSM_{Q_{\lambda_4}}^A$	-26.6111	4	$DIM(\lambda_4)$	0.3775	1

TAB. 7.2 – Résultats des facteurs d'importance MSM stationnaire et DIM stationnaire liés à des changements proportionnels des taux de défaillance

dérivées partielles. Le DIM est ainsi plus adapté à un changement proportionnel des paramètres car il synthétise mieux toutes les caractéristiques de la perturbation. Il peut donc être intéressant de prendre en compte ces deux critères pour les études de sensibilité en fonction du type de variations envisagé.

7.3.2 Evaluation de DIM* en régime stationnaire

Dans ce paragraphe, on montre comment le DIM* en régime stationnaire (DIM* stationnaire) peut être calculé analytiquement. Pour ce faire, on utilise principalement le résultat du calcul de l'indicateur de variation de performance δW présenté dans le chapitre 6.

Rappelons que les changements simultanés de K paramètres (taux de défaillance/taux de

réparation) conduisent à un changement sur la matrice génératrice :

$$\mathbf{M}_\delta = \mathbf{M} + \mathbf{Q}^\delta,$$

où $\mathbf{Q}^\delta = \sum_{i=1}^K \delta x_i \mathbf{Q}_{x_i}$. Nous avons montré dans le chapitre 6 que la variation totale de performance asymptotique δW produite par ce changement peut être évaluée selon l'expression 6.38, soit :

$$\delta W = -\pi \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\# (\mathbf{I} + \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\#)^{-1} \mathbf{f},$$

où \mathbf{I} est la matrice identité de la même taille que \mathbf{M} , π est le vecteur de probabilité d'occupation d'état en régime stationnaire ($\pi \mathbf{M} = 0$) et $\mathbf{M}^\#$ est l'inverse généralisée [82] de la matrice génératrice.

De façon similaire, la variation de performance asymptotique δW_{x_i} provoquée par le changement du paramètre x_i vaut :

$$\delta W_{x_i} = -\pi \mathbf{Q}_{x_i}^\delta \mathbf{M}^\# (\mathbf{I} + \mathbf{Q}_{x_i}^\delta \mathbf{M}^\#)^{-1} \mathbf{f},$$

avec $\mathbf{Q}_{x_i}^\delta = \delta x_i \mathbf{Q}_{x_i}$.

De façon plus générale, la variation de performance asymptotique produite par la variation de la matrice génératrice selon la direction \mathbf{Q}_i est :

$$\delta W_{\mathbf{Q}_i} = -\pi \mathbf{Q}_{\mathbf{Q}_i}^\delta \mathbf{M}^\# (\mathbf{I} + \mathbf{Q}_{\mathbf{Q}_i}^\delta \mathbf{M}^\#)^{-1} \mathbf{f},$$

avec $\mathbf{Q}_{\mathbf{Q}_i}^\delta = \delta \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i$.

Selon la définition (7.5), le DIM* pour un paramètre en régime stationnaire (DIM* stationnaire) peut être calculé selon l'expression suivante :

$$\text{DIM}^*(x_i) = \frac{\pi \mathbf{Q}_{x_i}^\delta \mathbf{M}^\# (\mathbf{I} + \mathbf{Q}_{x_i}^\delta \mathbf{M}^\#)^{-1} \mathbf{f}}{\pi \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\# (\mathbf{I} + \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\#)^{-1} \mathbf{f}}. \quad (7.13)$$

Le DIM* stationnaire selon une direction de sensibilité est calculé comme suit :

$$\text{DIM}^*(\mathbf{Q}_i) = \frac{\pi \mathbf{Q}_{\mathbf{Q}_i}^\delta \mathbf{M}^\# (\mathbf{I} + \mathbf{Q}_{\mathbf{Q}_i}^\delta \mathbf{M}^\#)^{-1} \mathbf{f}}{\pi \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\# (\mathbf{I} + \mathbf{Q}^\delta \mathbf{M}^\#)^{-1} \mathbf{f}}. \quad (7.14)$$

Ces relations nous permettent de calculer analytiquement le DIM* stationnaire relatif d'un paramètre ou selon une direction quelconque. Notons toutefois, d'une part, que la condition nécessaire pour le DIM* est le fait que la variation totale de performance δW soit différente de zéro. D'autre part, il a été démontré dans le chapitre 6 que la mesure de performance stationnaire peut être inchangée (c'est-à-dire : $\delta W = 0$) lorsque tous les paramètres (taux de défaillance/taux

de réparation) changent simultanément avec un même pourcentage. Le DIM* ne peut pas donc être défini pour les cas où tous les paramètres varient simultanément avec un même pourcentage.

Reconsidérons maintenant l'exemple présenté au paragraphe précédent. Nous nous intéressons à la comparaison des résultats obtenus par le DIM* stationnaire et ceux donnés par le DIM. Pour ce faire, on suppose que tous les taux de défaillance et de réparation changent simultanément du même pourcentage ω . On considère ensuite deux scénarios de changement des paramètres : le premier avec $\omega = 1\%$ et le deuxième avec $\omega = 15\%$.

Composant	DIM	Valeur	Ordre	DIM*	Valeur	Ordre
C_1	$\text{DIM}(\lambda_1 \bar{\lambda}_1)$	0.2254	2	$\text{DIM}^*(\lambda_1 \bar{\lambda}_1)$	0.2240	2
C_2	$\text{DIM}(\lambda_2)$	0.1750	4	$\text{DIM}^*(\lambda_2)$	0.1749	4
C_3	$\text{DIM}(\lambda_3)$	0.2219	3	$\text{DIM}^*(\lambda_3)$	0.2209	3
C_4	$\text{DIM}(\lambda_4)$	0.3775	1	$\text{DIM}^*(\lambda_4)$	0.3770	1

TAB. 7.3 – Résultats de DIM et de DIM* en régime stationnaire : cas où les taux de tous les composants varient simultanément du même pourcentage, $\omega = 1\%$

En se basant sur la relation (7.11), le DIM stationnaire peut être calculé via le MSM stationnaire qui est obtenu par l'équation (3.31). Quand au DIM* stationnaire, il peut être évalué directement grâce à l'équation (7.5). Et les résultats obtenus sont donnés dans les tableaux 7.3 et 7.4.

Composant	DIM	Valeur	Ordre	DIM*	Valeur	Ordre
C_1	$\text{DIM}(\lambda_1 \bar{\lambda}_1)$	0.2254	2	$\text{DIM}^*(\lambda_1 \bar{\lambda}_1)$	0.2068	3
C_2	$\text{DIM}(\lambda_2)$	0.1750	4	$\text{DIM}^*(\lambda_2)$	0.1747	4
C_3	$\text{DIM}(\lambda_3)$	0.2219	3	$\text{DIM}^*(\lambda_3)$	0.2082	2
C_4	$\text{DIM}(\lambda_4)$	0.3775	1	$\text{DIM}^*(\lambda_4)$	0.3709	1

TAB. 7.4 – Résultats de DIM et de DIM* en régime stationnaire : cas où les taux de tous les composants varient simultanément du même pourcentage, $\omega = 15\%$

Les résultats montrent que le DIM ne dépend pas du pourcentage de changement et que le DIM et le DIM* peuvent conduire à un même classement quand les variations des paramètres sont suffisamment petites. En effet, pour le cas $\omega = 1\%$ les résultats obtenus avec le DIM

sont très proches de ceux donnés par le DIM* et les deux DIM et DIM* conduisent au même classement $C_2 < C_3 < C_1 < C_4$ (voir tableau 7.3). Au contraire, pour le cas $\omega = 15\%$, les résultats reportés au tableau 7.4 montrent que les DIM sont inchangés tandis que les DIM* changent et conduisent à un nouveau classement des composants.

7.4 Estimation de DIM et de DIM* en régime stationnaire

7.4.1 Estimation de DIM stationnaire

Dans le chapitre 5, nous avons montré que le facteur MSM stationnaire peut être estimé à partir d'une seule trajectoire. En effet, nous avons présenté trois approches différentes : la première basée sur l'estimation de la matrice génératrice du processus de Markov, la deuxième liée à l'estimation du facteur de réalisation de perturbation et la troisième basée sur l'estimation du potentiel de performance. Les deux dernières offrent de nombreux avantages au niveau de la convergence. Nous avons montré également que la troisième est particulièrement efficace dans le contexte des grands systèmes car elle peut réduire la complexité au niveau du temps de calcul (voir section 5.4).

D'après la relation (7.7), on obtient l'estimation du facteur DIM stationnaire (DIM en régime stationnaire) selon une direction \mathbf{Q}_i comme suit :

$$\hat{\text{DIM}}(\mathbf{Q}_i) = \frac{\delta_{\mathbf{Q}_i} \hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_i}^W}{\sum_{j=1}^K \delta_j \hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_j}^W}. \quad (7.15)$$

Comme les estimateurs $\hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_i}^W$, pour $i = 1, \dots, K$, peuvent être obtenus à partir d'une seule trajectoire observée, l'estimateur $\hat{\text{DIM}}(\mathbf{Q}_i)$ peut être évalué grâce à une seule trajectoire également.

De façon similaire, d'après la relation (7.9) le DIM stationnaire pour un paramètre peut être estimé par :

$$\hat{\text{DIM}}(x_i) = \frac{\delta x_i \hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_{x_i}}^W}{\sum_{j=1}^K \delta x_j \hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_{x_j}}^W}. \quad (7.16)$$

Si les paramètres varient uniformément, on a :

$$\hat{\text{DIM}}(x_i) = \frac{\hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_{x_i}}^W}{\sum_{j=1}^K \hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_{x_j}}^W}. \quad (7.17)$$

Si les paramètres varient simultanément d'une quantité ωx_i , $i = 1, \dots, K$, le l'estimation de $\text{DIM}(x_i)$ est :

$$\hat{\text{DIM}}(x_i) = \frac{x_i \hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_{x_i}}^W}{\sum_{j=1}^K x_j \hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_{x_j}}^W}. \quad (7.18)$$

Remarquons que l'estimation de DIM stationnaire pour un paramètre peut être évaluée par l'expression suivante selon l'équation (7.12) :

$$\hat{\text{DIM}}(x_i) = \frac{-\hat{\pi} \mathbf{Q}_{x_i}^\delta \hat{\mathbf{M}}^\# \mathbf{f}}{-\hat{\pi} \mathbf{Q}^\delta \hat{\mathbf{M}}^\# \mathbf{f}}. \quad (7.19)$$

Reprenons maintenant l'exemple 4 présenté au paragraphe précédent en faisant l'hypothèse supplémentaire que la matrice génératrice du processus de Markov est inconnue et que seulement des données de retour d'expérience sont disponibles. Ces données correspondent, du point de vue théorique, à l'observation d'une trajectoire nominale du processus de Markov. Alors, pour illustrer les avantages de la méthode d'estimation, on simule le processus de Markov avec les mêmes données utilisées ci-dessus sur l'intervalle équivalent de 100000 transitions. Pour l'estimation, on utilise ici la troisième méthode d'estimation, approche basée sur l'estimation du potentiel de performance exposée au chapitre 5. Grâce à cette approche, on obtient les estimateurs $\hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_{\lambda_i}}^W$ pour tous $i = 1, 2, 3, 4$. Et enfin, on obtient les estimations de $\text{DIM}(\lambda_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) grâce à la relation (7.18). Les résultats reportés aux tableaux 7.5 et 7.6 montrent que les valeurs estimées sont proches de celles données par la méthode analytique.

Composant	DIM	Théorie	Estimation ⁶	DIM*	Théorie	Estimation ⁷
C_1	$\text{DIM}(\lambda_1 \bar{\lambda}_1)$	0.2254	0.2244	$\text{DIM}^*(\lambda_1 \bar{\lambda}_1)$	0.2240	0.2286
C_2	$\text{DIM}(\lambda_2)$	0.1750	0.1681	$\text{DIM}^*(\lambda_2)$	0.1749	0.1651
C_3	$\text{DIM}(\lambda_3)$	0.2219	0.2247	$\text{DIM}^*(\lambda_3)$	0.2209	0.2233
C_4	$\text{DIM}(\lambda_4)$	0.3775	0.3816	$\text{DIM}^*(\lambda_4)$	0.3770	0.3811

TAB. 7.5 – Evaluation de DIM stationnaire et de DIM* stationnaire dans le cas où les taux de tous les composants varient simultanément du même pourcentage, $\omega = 1\%$

⁶Approche basée sur l'estimation du potentiel de performance

⁷Approche basée sur l'estimation directe de l'inverse généralisée

7.4.2 Estimation de DIM* stationnaire

L'estimation de la variation de performance asymptotique à partir d'une seule trajectoire observée a été étudiée dans la section 6.4 du chapitre 6. Nous avons présenté deux approches permettant d'estimer δW en régime stationnaire :

- l'approche basée sur l'estimation de la matrice génératrice \mathbf{M} ;
- l'approche basée sur l'estimation directe de l'inverse généralisée \mathbf{M}^\sharp .

7.4.2.1 Approche basée sur l'estimation de la matrice génératrice

La matrice génératrice \mathbf{M} peut être estimée à partir d'une seule trajectoire observée en utilisant la technique basée sur le maximum de vraisemblance, voir paragraphe 5.4.1.1.

Dans la section 6.4.1, on a démontré que l'estimation de la variation totale de performance asymptotique, provoquée par les changements simultanément de K paramètres, peut être obtenue par la relation (6.40), rappelons-la :

$$\delta \hat{W} = -\hat{\pi} \mathbf{Q}^\delta (\hat{\mathbf{M}} + \mathbf{e} \hat{\pi})^{-1} [\mathbf{I} + \mathbf{Q}^\delta (\hat{\mathbf{M}} + \mathbf{e} \hat{\pi})^{-1}]^{-1} \mathbf{f},$$

où les estimateurs $\hat{\pi}$ et $\hat{\mathbf{M}}$ sont obtenus par les équations (5.11) et (5.24) respectivement.

De façon similaire, la variation provoquée par le changement d'un seul paramètre x_i est alors :

$$\delta \hat{W}_{x_i} = -\hat{\pi} \mathbf{Q}_{x_i}^\delta (\hat{\mathbf{M}} + \mathbf{e} \hat{\pi})^{-1} [\mathbf{I} + \mathbf{Q}_{x_i}^\delta (\hat{\mathbf{M}} + \mathbf{e} \hat{\pi})^{-1}]^{-1} \mathbf{f}.$$

Par définition, on obtient finalement l'estimation du DIM* stationnaire relatif d'un paramètre comme suit :

$$\hat{\text{DIM}}^*(x_i) = \frac{\hat{\pi} \mathbf{Q}_{x_i}^\delta (\hat{\mathbf{M}} + \mathbf{e} \hat{\pi})^{-1} [\mathbf{I} + \mathbf{Q}_{x_i}^\delta (\hat{\mathbf{M}} + \mathbf{e} \hat{\pi})^{-1}]^{-1} \mathbf{f}}{\hat{\pi} \mathbf{Q}^\delta (\hat{\mathbf{M}} + \mathbf{e} \hat{\pi})^{-1} [\mathbf{I} + \mathbf{Q}^\delta (\hat{\mathbf{M}} + \mathbf{e} \hat{\pi})^{-1}]^{-1} \mathbf{f}}. \quad (7.20)$$

De façon plus généralement, le DIM* stationnaire selon une direction de sensibilité est :

$$\hat{\text{DIM}}^*(\mathbf{Q}_i) = \frac{\hat{\pi} \mathbf{Q}_{\mathbf{Q}_i}^\delta (\hat{\mathbf{M}} + \mathbf{e} \hat{\pi})^{-1} [\mathbf{I} + \mathbf{Q}_{\mathbf{Q}_i}^\delta (\hat{\mathbf{M}} + \mathbf{e} \hat{\pi})^{-1}]^{-1} \mathbf{f}}{\hat{\pi} \mathbf{Q}^\delta (\hat{\mathbf{M}} + \mathbf{e} \hat{\pi})^{-1} [\mathbf{I} + \mathbf{Q}^\delta (\hat{\mathbf{M}} + \mathbf{e} \hat{\pi})^{-1}]^{-1} \mathbf{f}}. \quad (7.21)$$

Ces relations nous donnent l'estimation du facteur d'importance différentiel en régime stationnaire à partir d'une seule trajectoire observée puisque les estimateurs $\hat{\pi}$ et $\hat{\mathbf{M}}$ sont estimés grâce à cette trajectoire.

Composant	DIM	Théorie	Estimation ⁶	DIM*	Théorie	Estimation ⁷
C_1	$\text{DIM}(\lambda_1 \bar{\lambda}_1)$	0.2254	0.2266	$\text{DIM}^*(\lambda_1 \bar{\lambda}_1)$	0.2068	0.2082
C_2	$\text{DIM}(\lambda_2)$	0.1750	0.1704	$\text{DIM}^*(\lambda_2)$	0.1747	0.1701
C_3	$\text{DIM}(\lambda_3)$	0.2219	0.2208	$\text{DIM}^*(\lambda_3)$	0.2082	0.2071
C_4	$\text{DIM}(\lambda_4)$	0.3775	0.3822	$\text{DIM}^*(\lambda_4)$	0.3709	0.3756

TAB. 7.6 – Evaluations de DIM et de DIM* en régime stationnaire : cas où les taux de tous les composants varient simultanément du même pourcentage, $\omega = 15\%$

7.4.2.2 Approche basée sur l'estimation directe de l'inverse généralisée

Dans le chapitre 6, on a montré une autre approche basée sur l'estimation directe du groupe inverse afin d'estimer la variation de performance asymptotique δW du système. On utilise ici ces résultats dans le but d'estimer le DIM* stationnaire en utilisant une seule trajectoire observée.

En se basant sur la technique de l'analyse de perturbation, l'estimation de l'inverse généralisée, $\hat{\mathbf{M}}^\#$, est obtenue par l'équation (6.47). Par conséquent, selon l'équation (7.5), on obtient l'estimation de $\text{DIM}^*(x_i)$ comme suit :

$$\hat{\text{DIM}}^*(x_i) = \frac{\hat{\pi} \mathbf{Q}_{x_i}^\delta \hat{\mathbf{M}}^\# (\mathbf{I} + \mathbf{Q}_{x_i}^\delta \hat{\mathbf{M}}^\#)^{-1} \mathbf{f}}{\pi \mathbf{Q}^\delta \hat{\mathbf{M}}^\# (\mathbf{I} + \mathbf{Q}^\delta \hat{\mathbf{M}}^\#)^{-1} \mathbf{f}}, \quad (7.22)$$

où $\hat{\pi}$ est donné par l'équation (5.11).

De façon similaire, le DIM* stationnaire selon une direction de sensibilité est estimée par l'expression suivante :

$$\hat{\text{DIM}}^*(\mathbf{Q}_i) = \frac{\hat{\pi} \mathbf{Q}_{\mathbf{Q}_i}^\delta \hat{\mathbf{M}}^\# (\mathbf{I} + \mathbf{Q}_{\mathbf{Q}_i}^\delta \hat{\mathbf{M}}^\#)^{-1} \mathbf{f}}{\pi \mathbf{Q}^\delta \hat{\mathbf{M}}^\# (\mathbf{I} + \mathbf{Q}^\delta \hat{\mathbf{M}}^\#)^{-1} \mathbf{f}}. \quad (7.23)$$

D'après les relations (7.22) et (7.21), la deuxième approche nous permet d'éviter une inversion de matrice. On utilise ici cette approche pour l'estimation de DIM* dans le cas d'exemple 4. Les résultats donnés dans les tableaux 7.5 et 7.6 montrent que les valeurs estimées sont proches de celles obtenues par la méthode analytique.

7.5 Conclusions

On a présenté dans ce chapitre le facteur d'importance différentiel et ses extensions dans le contexte des systèmes décrits par des processus de Markov afin d'une part d'identifier l'importance d'un composant ou d'un groupe de composants, et d'autre part, d'étudier la sensibilité

selon une direction quelconque des performances du système. Des méthodes analytiques et d'estimation ont été considérées pour l'évaluation de ce facteur.

Le facteur d'importance différentiel au premier ordre, noté DIM est introduit principalement pour étudier la sensibilité par rapport à un paramètre ou à un groupe de paramètres [18]. Dans ce chapitre, une généralisation de DIM, le DIM selon une direction de sensibilité, a été proposée. On a établi un lien direct avec le facteur de sensibilité multi-directionnelle MSM. Grâce à ce lien, le DIM et son extension peuvent être évalués d'une part par une méthode analytique qui donne des résultats exacts, et d'autre part par des méthodes d'estimation qui donnent des résultats approchés. Ces méthodes d'estimation ont l'avantage de permettre d'utiliser directement des données de retour d'expérience (dates de transition du système d'un état dans un autre) pour l'évaluation de ce facteur.

Toutefois le DIM ne rend compte que des effets d'une variation des paramètres sur les performances du système au premier ordre. Il est donc raisonnable de l'utiliser sous l'hypothèse que les variations des paramètres sont "assez faibles". Pour une utilisation plus large, nous avons présenté une extension de DIM appelée DIM aux ordres supérieurs et notée DIM* qui prend en compte les variations de performance à un ordre quelconque. Afin de l'évaluer, nous avons proposé une méthode analytique ainsi que deux méthodes d'estimation.

L'utilisation envisagée de DIM, de DIM* et ainsi que leurs évaluations sont résumées dans le tableau 7.7.

Facteur	Régime transitoire	Régime stationnaire
DIM	Oui ⁸ -lien direct avec MSM -évaluation analytique	Oui ⁸ -lien direct avec MSM -évaluation analytique/estimée
DIM*	pas encore étudié	Oui -évaluation analytique/estimée

TAB. 7.7 – Utilisation envisagée et méthodes d'évaluation du facteur d'importance différentiel DIM et de son extension DIM*

⁸Sous l'hypothèse de variation petite des paramètres

Conclusion générale

Les travaux et les résultats présentés dans ce mémoire concernent le développement d'indicateurs d'aide à la décision en exploitation, en maintenance et même en conception d'un système décrit par un processus de Markov. Les indicateurs développés correspondent à des facteurs d'importance au sens classique du terme, tel qu'ils sont définis en sûreté de fonctionnement. Ces facteurs permettent de mener des études de sensibilité pour identifier les principaux points faibles d'un système du point de vue de la sécurité, la maintenance, la productivité, ...

L'originalité des travaux présentés ici est de s'intéresser à la définition de tels facteurs dans le cas de systèmes dynamiques dont les composants peuvent être dépendants. Pour modéliser ces dépendances nous avons choisi de nous limiter au cadre markovien.

Concrètement, nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à :

1. une proposition d'un nouveau facteur d'importance. Il s'agit du facteur de sensibilité multi-directionnelle (MSM), défini comme la dérivée de la mesure de performance selon une direction quelconque définie par une matrice directionnelle, permettant en fait de fournir des éléments d'aide pour : (i) analyser la sensibilité de la performance du système par rapport à un paramètre (d'un groupe de paramètres), ou plus généralement, à une direction quelconque ; (ii) identifier l'importance d'un composant (ou d'un groupe de composants), ainsi que l'importance d'un état (ou d'un groupe d'états) du système. Des applications du facteur proposé ont été mises en place pour un système de production dans lequel les mesures de performance du système sont la disponibilité et la capacité de production globale ;
2. la mise en œuvre et l'extension du facteur d'importance différentiel (DIM) : le facteur DIM proposé récemment sous l'hypothèse de composants indépendants a été mis en œuvre dans le cadre des systèmes markoviens à composants dépendants. Le facteur DIM permet de mesurer la contribution relative d'un composant (d'un groupe de composants), ou plus généralement, d'une direction quelconque, à la variation totale de performance. Le lien direct avec le facteur proposé MSM a été établi. Lorsque le DIM est limité par l'hypothèse de petite variation des paramètres, l'extension de DIM notée DIM* a été proposée en prenant en compte l'hypothèse plus réaliste de variations quelconques.

Pour l'évaluation des facteurs étudiés (y compris le MSM, les DIM et DIM*), on a proposé, d'une part, des méthodes analytiques efficaces permettant de donner des résultats exacts en régime transitoire (sauf le DIM*) ainsi qu'en régime stationnaire. On a présenté également des méthodes d'estimation dans le but d'estimer ces facteurs (en régime stationnaire) à partir d'une seule trajectoire observée du système sans perturber les paramètres. Les études montrent que la méthode d'analyse perturbative offre un outil efficace permettant l'estimation des indicateurs de fiabilité en utilisant directement des données de retour d'expérience.

Les résultats numériques dans ce mémoire nous permettent, d'une part, de montrer l'intérêt de chacun des facteurs d'importance étudiés dans le but d'analyser la sensibilité selon une direction d'intérêt et d'identifier l'importance d'un composant (d'un groupe de composants, d'un état, ou d'un groupe d'états du système). D'autre part, ces résultats numériques permettent une comparaison entre les facteurs étudiés ainsi qu'entre les méthodes de calcul utilisées.

On a exposé également dans ce mémoire (voir l'annexe A) une étude montrant comment les principaux facteurs d'importance fiabilistes peuvent être mis en œuvre et évalués dans le contexte des systèmes markoviens à composants indépendants à partir des méthodes développées dans notre travail de recherche doctorale. Les liens directs entre ces facteurs ont été également établis.

Perspectives

L'ensemble des résultats théoriques et numériques que nous avons obtenus nous permet d'envisager plusieurs perspectives concernant les développements des facteurs d'importance dans le contexte des systèmes à composants dépendants et l'utilisation de ces facteurs pour l'optimisation de la maintenance.

Mesure de variation de performances et le facteur d'importance différentiel étendu en régime transitoire

Une perspective de recherche intéressante en ce qui concerne les chapitres 6 et 7 serait de chercher une méthode efficace permettant d'évaluer l'indicateur de variation de performance en régime transitoire. En se basant sur ce résultat on pourrait évaluer l'extension du facteur d'importance différentiel DIM* à l'instant donné.

Facteurs d'importance existants pour un système à composants dépendants

Les facteurs d'importance existants présentés dans le chapitre 2 (par exemple, le facteur d'importance critique (CIM), le facteur d'importance de diagnostic (DIF), le facteur d'augmentation du risque (RAW), ...) sont définis classiquement sous l'hypothèse d'indépendance stochastique entre composants. Il est donc intéressant d'étendre ces facteurs d'importance pour un système à composants dépendants.

Utilisation des facteurs d'importance fiabilistes

Lorsqu'il n'est pas toujours possible d'évaluer de façon exhaustive et complète les conséquences d'une décision sur le système, l'utilisation des facteurs d'importance fiabilistes pour la prise de décision doit s'appuyer sur une démarche heuristique validée permettant d'éviter de "mauvaises" décisions, à défaut de savoir établir les décisions optimales.

Nous prévoyons d'étudier l'utilisation des facteurs d'importance présentés dans ce mémoire (y compris le facteur MSM, l'indicateur de variation de performance δW ainsi que le facteur

différentiel DIM) pour optimiser les paramètres de maintenance afin de conserver ou d'augmenter les performances du système (la disponibilité et/ou la capacité de production globale, ...), en prenant en compte des contraintes, comme par exemple, le coût de maintenance, l'indisponibilité de composant pour la maintenance, ...

Annexes

Annexe A

Facteurs d'importance fiabilistes pour un système markovien à composants indépendants

On présente ici une étude sur la mise en œuvre et sur l'évaluation des facteurs d'importance fiabilistes existants dans le cadre des systèmes markoviens à composants indépendants. Pour ce faire, on expose d'abord la formulation analytique de ces facteurs. On montre ensuite comment ces facteurs d'importance peuvent être estimés à partir des données de retours d'expérience (REX).

A.1 Formulation analytique des facteurs d'importance existants

Cette section a pour objectif de présenter des approches et des liens directs entre des facteurs d'importance existants permettant d'évaluer les six principaux facteurs d'importance.

A.1.1 Facteur d'importance marginal

On s'intéresse dans ce paragraphe à présenter trois approches permettant de calculer analytiquement le facteur d'importance marginal :

- l'approche basée sur le calcul de la probabilité conditionnelle ;
- l'approche directe liée au calcul du vecteur de probabilité d'occupation des états ;
- l'approche basée sur le lien direct avec le facteur de sensibilité multi-directionnelle.

A.1.1.1 Approche basée sur la probabilité conditionnelle

Par définition, le facteur d'importance marginal relatif au composant i peut s'écrire selon l'expression suivante (voir le chapitre 2) :

$$\text{MIM}(i|t) = A(1_i|t) - A(0_i|t). \quad (\text{A.1})$$

D'après cette relation, on trouve que pour calculer le MIM relatif d'un composant ou d'un groupe de composants, il faut d'abord générer deux modèles de Markov : l'un modèle basé sur l'hypothèse de marche parfaite du composant i et l'autre lié à l'hypothèse de panne parfaite du composant i . Ensuite, on calcule les probabilités que le système soit en marche pour chaque modèle.

Pour calculer le MIM à partir d'un seul modèle de Markov, l'approche directe permettant d'évaluer le MIM à partir d'un seul modèle de Markov a été considérée [35].

A.1.1.2 Approche directe

La probabilité que système soit en marche à l'instant t alors que le composant i est en marche étant :

$$\begin{aligned} A(i|t) &= \mathbb{P}\{\varphi(\mathbf{s}) = 1 \cap s_i = 1\} \\ &= \mathbb{P}\{\varphi(\mathbf{s}) = 1 / s_i = 1\} \mathbb{P}\{s_i = 1\} \\ &= A(1_i|t) a_i(t), \end{aligned}$$

alors,

$$A(1_i|t) = \frac{A(i|t)}{a_i(t)}.$$

De façon similaire, on a la probabilité que le système soit en marche à l'instant t alors que le composant i est en panne :

$$A(0_i|t) = \frac{A(\bar{i}|t)}{1 - a_i(t)},$$

D'après (A.1), on obtient une autre formule d'évaluation de MIM comme suit :

$$\text{MIM}(i|t) = \frac{A(i|t)}{a_i(t)} - \frac{A(\bar{i}|t)}{1 - a_i(t)}. \quad (\text{A.2})$$

Notons d'une part que $A(i|t)$ peut être calculé à partir du vecteur de probabilité d'occupation d'états $\mathbf{P}(t)$. Plus concrètement, soit Ω_{O_i} l'ensemble d'états où le système et le composant i

sont en marche, on a :

$$\begin{aligned} A(i|t) &= \sum_{j \in \Omega_{O_i}} P_j(t) \\ &= \mathbf{P}(t) \mathbf{h}_i^S, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

où $\mathbf{h}_i^S = (h_i^S(1), h_i^S(2), \dots)^\top$ est le vecteur associé aux états du système et l'état du composant i . $h_i^S(j) = 1$ si le système et le composant i sont en marche à l'état j , et $h_i^S(j) = 0$ si non.

D'autre part, notons que la disponibilité du système peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} A(t) &= \mathbf{P}(t) \mathbf{f} \\ &= A(i|t) + A(\bar{i}|t), \end{aligned}$$

alors :

$$A(\bar{i}|t) = A(t) - A(i|t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{f} - \mathbf{P}(t) \mathbf{h}_i^S = \mathbf{P}(t) (\mathbf{f} - \mathbf{h}_i^S).$$

Par conséquent, l'équation (A.2) peut s'écrire finalement :

$$\text{MIM}(i|t) = \frac{\mathbf{P}(t) \mathbf{f}}{a_i(t)} - \frac{\mathbf{P}(t) (\mathbf{f} - \mathbf{h}_i^S)}{1 - a_i(t)}. \quad (\text{A.4})$$

Cette relation nous permet de calculer le facteur MIM à partir du vecteur de probabilité d'occupation d'états $\mathbf{P}(t)$ et du comportement de composant i .

A.1.1.3 Lien direct avec le facteur MSM

Une autre façon permettant de calculer le facteur d'importance marginal MIM à partir du facteur de sensibilité multi-directionnelle se base sur le lien direct entre ces deux facteurs.

Par définition , on a une relation suivante :

$$\begin{aligned} \text{MIM}(i|t) &= \frac{\partial A(t)}{\partial \lambda_i} / \frac{\partial a_i(t)}{\partial \lambda_i} \\ &= \text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_i}}^A(t) / \frac{\partial a_i(t)}{\partial \lambda_i} \end{aligned}$$

De façon similaire, le MIM peut être défini au niveau de composant, c'est-à-dire que $\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_i}}^{a_i}(t) = \frac{\partial a_i(t)}{\partial \lambda_i}$. On obtient finalement :

$$\text{MIM}(i|t) = \frac{\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_i}}^A(t)}{\text{MSM}_{\mathbf{Q}_{\lambda_i}}^{a_i}(t)}. \quad (\text{A.5})$$

Cette relation nous permet de calculer le facteur d'importance marginal MIM via les facteurs de sensibilité multi-directionnelle MSM.

A.1.2 Facteur d'importance conjoint

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à présenter deux approches permettant de calculer analytiquement le facteur d'importance conjoint : la première approche basée sur le calcul de la probabilité conditionnelle et la deuxième approche, appelée approche directe, liée au calcul du vecteur de probabilité d'occupation des états.

A.1.2.1 Approche basée sur la probabilité conditionnelle

Par définition, le facteur d'importance conjoint relatif des composants i et j est

$$\text{JIM}(i, j|t) = \frac{\partial^2 A(t)}{\partial a_i(t) \partial a_j(t)} = \frac{\partial \text{MIM}(i|t)}{\partial a_j(t)}.$$

D'après (A.1), on a :

$$\begin{aligned} \text{JIM}(i, j|t) &= \frac{\partial A(1_i|t)}{\partial a_j(t)} - \frac{\partial A(0_i|t)}{\partial a_j(t)} \\ &= \text{MIM}(j|t)_{1_i} - \text{MIM}(j|t)_{0_i}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

En se basant sur l'équation (A.1), on obtient les relations suivantes :

$$\text{MIM}(1_i, j|t) = A(1_i, 1_j|t) - A(1_i, 0_j|t),$$

et,

$$\text{MIM}(0_i, j|t) = A(0_i, 1_j|t) - A(0_i, 0_j|t),$$

où :

- $A(1_i, 1_j|t) = \mathbb{P}\{\varphi(1_i, 1_j, \mathbf{s}) = 1\}$ la probabilité pour que le système soit en marche à l'instant t sachant que les composants i et j sont en marche ($a_i(t) = 1$ et $a_j(t) = 1$),
- $A(0_i, 0_j|t) = \mathbb{P}\{\varphi(0_i, 0_j, \mathbf{s}) = 1\}$ la probabilité pour que le système soit en marche à l'instant t sachant que les composants i et j sont en panne ($a_i(t) = 0$ et $a_j(t) = 0$),
- $A(1_i, 0_j|t) = \mathbb{P}\{\varphi(1_i, 0_j, \mathbf{s}) = 1\}$ la probabilité pour que le système soit en marche à l'instant t sachant que le composant i est en marche et que le composant j est en panne ($a_i(t) = 1$ et $a_j(t) = 0$),
- $A(0_i, 1_j|t) = \mathbb{P}\{\varphi(0_i, 1_j, \mathbf{s}) = 1\}$ la probabilité pour que le système soit en marche à l'instant t sachant que le composant i est en panne et que le composant j est en marche ($a_i(t) = 0$ et $a_j(t) = 1$).

Le $\text{JIM}(i, j|t)$ donnée par l'équation (A.6) peut s'écrire finalement selon l'expression suivante :

$$\text{JIM}(i, j|t) = A(1_i, 1_j|t) + A(0_i, 0_j|t) - A(1_i, 0_j|t) - A(0_i, 1_j|t). \quad (\text{A.7})$$

A.1.2.2 Approche directe

La probabilité pour que système soit en marche lorsque les composants i et j sont en marche est :

$$\begin{aligned} A(i, j|t) &= \mathbb{P}\{\varphi(\mathbf{s}) = 1 \cap s_i = 1, s_j = 1\} \\ &= \mathbb{P}\{\varphi(\mathbf{s}) = 1 / s_i = 1, s_j = 1\} \mathbb{P}\{s_i = 1\} \mathbb{P}\{s_j = 1\} \\ &= A(1_i, 1_j|t) a_i(t) a_j(t). \end{aligned}$$

Alors :

$$A(1_i, 1_j|t) = \frac{A(i, j|t)}{a_i(t) a_j(t)}. \quad (\text{A.8})$$

De façon similaire, on a :

$$\begin{aligned} A(1_i, 0_j|t) &= \frac{A(i, \bar{j}|t)}{a_i(t) \bar{a}_j(t)} \\ A(0_i, 1_j|t) &= \frac{A(\bar{i}, j|t)}{\bar{a}_i(t) a_j(t)} \\ A(0_i, 0_j|t) &= \frac{A(\bar{i}, \bar{j}|t)}{\bar{a}_i(t) \bar{a}_j(t)}. \end{aligned}$$

L'équation (A.7) peut donc s'écrire en fait comme suit :

$$\text{JIM}(i, j|t) = \frac{A(i, j|t)}{a_i(t) a_j(t)} + \frac{A(\bar{i}, \bar{j}|t)}{\bar{a}_i(t) \bar{a}_j(t)} - \frac{A(i, \bar{j}|t)}{a_i(t) \bar{a}_j(t)} - \frac{A(\bar{i}, j|t)}{\bar{a}_i(t) a_j(t)}. \quad (\text{A.9})$$

On établit maintenant les formules permettant de calculer les $A(i, j|t)$, $A(\bar{i}, j|t)$, $A(i, \bar{j}|t)$ et $A(\bar{i}, \bar{j}|t)$ à partir du vecteur de probabilité d'occupation des états $\mathbf{P}(t)$.

Soit $\Omega_{O_{ij}}$ l'ensemble des états de marche du système dans lesquels les composants i et j sont en marche, $A(i, j|t)$ peut être calculé selon l'expression suivante :

$$A(i, j|t) = \sum_{j \in \Omega_{O_{ij}}} P_j(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{h}_{ij}^S, \quad (\text{A.10})$$

avec $\mathbf{h}_{ij}^S = (h_{ij}^S(1), h_{ij}^S(2), \dots)^\top$ est le vecteur associé aux états du système et des composants i , j . $h_{ij}^S(l) = 1$ si le système et les composants i , j sont en marche à l'état l , et $h_{ij}^S(l) = 0$ si non.

Remarquons que :

$$A(i, \bar{j}|t) = A(i|t) - A(i, j|t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{h}_i^S - \mathbf{P}(t) \mathbf{h}_{ij}^S = \mathbf{P}(t) (\mathbf{h}_i^S - \mathbf{h}_{ij}^S); \quad (\text{A.11})$$

$$A(\bar{i}, j|t) = A(j|t) - A(i, j|t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{h}_j^S - \mathbf{P}(t) \mathbf{h}_{ij}^S = \mathbf{P}(t) (\mathbf{h}_j^S - \mathbf{h}_{ij}^S); \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} A(\bar{i}, \bar{j}|t) &= A(t) - A(i, j|t) - A(i, \bar{j}|t) - A(\bar{i}, j|t) = A(t) + A(i, j|t) - A(i|t) - A(j|t) \\ &= \mathbf{P}(t) \mathbf{f} + \mathbf{P}(t) \mathbf{h}_{ij}^S - \mathbf{P}(t) \mathbf{h}_i^S - \mathbf{P}(t) \mathbf{h}_j^S = \mathbf{P}(t) (\mathbf{f} + \mathbf{h}_{ij}^S - \mathbf{h}_i^S - \mathbf{h}_j^S). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

D'après (A.9), (A.10), (A.11), (A.12) et (A.13), on obtient finalement :

$$\text{JIM}(i, j|t) = \frac{\mathbf{P}(t)\mathbf{h}_{ij}^S}{a_i(t)a_j(t)} + \frac{\mathbf{P}(t)(\mathbf{f} + \mathbf{h}_{ij}^S - \mathbf{h}_i^S - \mathbf{h}_j^S)}{\bar{a}_i(t)\bar{a}_j(t)} - \frac{\mathbf{P}(t)(\mathbf{h}_i^S - \mathbf{h}_{ij}^S)}{a_i(t)\bar{a}_j(t)} - \frac{A(\mathbf{P}(t)(\mathbf{h}_j^S - \mathbf{h}_{ij}^S))}{\bar{a}_i(t)a_j(t)}. \quad (\text{A.14})$$

Il est clair que le $\text{JIM}(i, j|t)$ peut être calculé à partir du vecteur de probabilité d'occupation des états $\mathbf{P}(t)$.

A.1.3 Autres facteurs d'importance

A.1.3.1 Facteur d'importance critique

On a montré dans le chapitre 2 que le facteur d'importance critique peut être calculé via le facteur d'importance marginal grâce à un lien direct entre eux, rappelons-le :

$$\begin{aligned} \text{CIM}(i|t) &= \text{MIM}(i|t) \frac{\bar{a}_i(t)}{\bar{A}(t)} \\ &= \text{MIM}(i|t) \frac{1 - a_i(t)}{1 - A(t)}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

A.1.3.2 Facteur de diminution du risque

Par définition (voir le chapitre 2), le facteur de diminution du risque pour le composant i est :

$$\text{RRW}(i|t) = \frac{\bar{A}(t)}{\bar{A}(1_i, t)}. \quad (\text{A.16})$$

Pour la démonstration de l'équation (2.11), on regarde la fonction de l'indisponibilité/défiabilité du système en utilisant la décomposition pivotale [92].

De façon similaire de l'équation (2.16), on a :

$$\bar{A}(t) = \bar{a}_i(t)[\bar{A}(0_i, t) - \bar{A}(1_i, t)] + \bar{A}(1_i, t). \quad (\text{A.17})$$

où :

- $\bar{A}(1_i, t)$ est la probabilité que le système est en panne à l'instant t sachant que composant i est en marche ($a_i(t) = 1$);
- $\bar{A}(0_i, t)$ est la probabilité que le système est en panne à l'instant t sachant que composant i est en panne ($a_i(t) = 0$).

D'après les équations (2.3) et (A.17), on obtient :

$$\text{MIM}(i|t) = \bar{A}(0_i, t) - \bar{A}(1_i, t). \quad (\text{A.18})$$

Par conséquent :

$$\overline{A}(1_i, t) = \overline{A}(t) - \overline{a}_i(t)\text{MIM}(i|t).$$

En utilisant cette relation, l'équation (A.16) peut s'écrire comme suit :

$$\text{RRW}(i|t) = \frac{\overline{A}(t)}{\overline{A}(t) - \overline{a}_i(t)\text{MIM}(i|t)},$$

ou,

$$\text{RRW}(i|t) = \frac{1}{1 - \text{MIM}(i|t) \frac{\overline{a}_i(t)}{\overline{A}(t)}}. \quad (\text{A.19})$$

En utilisant (2.8), on obtient finalement :

$$\text{RRW}(i|t) = \frac{1}{1 - \text{CIM}(i|t)}. \quad (\text{A.20})$$

Ces relations (A.19) et (A.20) nous permettent de calculer le facteur de diminution du risque RRW à partir soit du facteur d'importance marginal MIM, soit du facteur d'importance critique CIM.

A.1.3.3 Facteur d'augmentation du risque

Rappelons que le facteur d'augmentation du risque pour le composant i est :

$$\text{RAW}(i|t) = \frac{\overline{A}(0_i, t)}{\overline{A}(t)}. \quad (\text{A.21})$$

D'après (A.18), (A.16) et (A.21), on a :

$$\frac{\text{MIM}(i|t)}{\overline{A}(t)} = \text{RAW}(i|t) - \frac{1}{\text{RRW}(i|t)}, \quad (\text{A.22})$$

ou,

$$\text{RAW}(i|t) = \frac{\text{MIM}(i|t)}{\overline{A}(t)} + \frac{1}{\text{RRW}(i|t)}. \quad (\text{A.23})$$

En utilisant (A.19), on a :

$$\text{RAW}(i|t) = \text{MIM}(i|t) \frac{\overline{a}_i(t)}{\overline{A}(t)} + 1. \quad (\text{A.24})$$

Cette relation nous permet de calculer le facteur d'augmentation du risque RAW grâce au facteur d'importance MIM.

A.1.3.4 Facteur d'importance de diagnostic

On a montré dans le chapitre 2 que le facteur d'importance de diagnostic peut être calculé à partir soit du facteur d'importance marginal MIM, soit du facteur d'augmentation du risque RAW grâce aux liens directs entre eux, rappelons-les :

$$\begin{aligned} \text{DIF}(i|t) &= \text{RAW}(i|t)\bar{a}_i(t) \\ &= (\text{MIM}(i|t)\frac{a_i(t)}{A(t)} + 1)\bar{a}_i(t). \end{aligned}$$

Dans le tableau A.1, on présente les liens directs entre des facteurs d'importance présentés ci-dessus. Ces liens directs permettent de calculer rapidement un facteur d'importance grâce aux facteurs.

Liens directs entre les facteurs d'importance classiques

Facteur	MIM	CIM	RRW	RAW	DIF
MIM	1	$\text{CIM} \frac{\bar{A}(t)}{\bar{a}_i(t)}$	$\frac{(\text{RRW} - 1)\bar{A}(t)}{\text{RRW}\bar{a}_i(t)}$	$\frac{(\text{RAW} - 1)\bar{A}(t)}{a_i(t)}$	$(\frac{\text{DIF}}{\bar{a}_i(t)} - 1) \frac{\bar{A}(t)}{a_i(t)}$
CIM	$\text{MIM} \frac{\bar{a}_i(t)}{\bar{A}(t)}$	1	$1 - \frac{1}{\text{RRW}}$	$(\text{RAW} - 1) \frac{\bar{a}_i(t)}{a_i(t)}$	$\frac{\text{DIF}}{a_i(t)} - \frac{\bar{a}_i(t)}{a_i(t)}$
RRW	$\frac{1}{1 - \text{MIM} \frac{\bar{a}_i(t)}{\bar{A}(t)}}$	$\frac{1}{1 - \text{CIM}}$	1	$\frac{1}{\text{RAW} - \frac{\text{MIM}}{\bar{A}(t)}}$	$\frac{1}{\frac{\text{DIF}}{\bar{a}_i(t)} - \frac{\text{MIM}}{\bar{A}(t)}}$
RAW	$\text{MIM} \frac{a_i(t)}{\bar{A}(t)} + 1$	$\frac{\text{MIM}}{\bar{A}(t)} + 1 - \text{CIM}$	$\frac{\text{MIM}}{\bar{A}(t)} + \frac{1}{\text{RRW}}$	1	$\frac{\text{DIF}}{\bar{a}_i(t)}$
DIF	$(\text{MIM} \frac{a_i(t)}{\bar{A}(t)} + 1)\bar{a}_i(t)$	$\text{CIM}a_i(t) + \bar{a}_i(t)$	$\frac{\bar{a}_i(t)\text{MIM}}{\bar{A}(t)} + \frac{\bar{a}_i(t)}{\text{RRW}}$	$\bar{a}_i(t)\text{RAW}$	1

TAB. A.1 – Liens directs entre les facteurs d'importance classiques dans le contexte des systèmes avec les composants indépendants stochastiques. MIM ,CIM,RRW, RAW et DIF indiquent $\text{MIM}(i|t)$, $\text{CIM}(i|t)$, $\text{RRW}(i|t)$, $\text{RAW}(i|t)$ et $\text{DIF}(i|t)$ respectivement

avec : $\bar{A}(t) = 1 - A(t)$ et $\bar{a}_i(t) = 1 - a_i(t)$.

Ces relations nous permettent calculer rapidement les facteurs d'importance relatifs d'un composant afin de pouvoir classer sa importance à la sûreté de fonctionnement du système.

Remarquons qu'en se basant sur chaque facteur d'importance, on peut obtenir les différents classements d'importance des composants.

A.2 Estimation à partir de REX

Supposons que les comportements fiabilistes des composants (taux de défaillance et de réparation) et la matrice génératrice du processus de Markov sont inconnus, et que seulement des données de retours d'expérience (qui correspondent à l'observation d'une seule trajectoire du système) sont disponibles. Nous nous intéressons à estimer ces facteurs d'importance présentés ci-dessus en régime stationnaire à partir de ces données.

A.2.1 Facteur d'importance marginal

Lorsqu'il existe trois approches permettant de calculer analytiquement le facteur d'importance marginal MIM (voir le paragraphe A.1.1), on utilise ici ces trois approches pour l'estimation de MIM en régime stationnaire.

A.2.1.1 Approche basée sur l'estimation de δA

En se basant sur l'équation (A.1), le facteur MIM relatif du composant i en régime stationnaire peut s'écrire comme suit :

$$\text{MIM}(i) = A(1_i) - A(0_i), \quad (\text{A.25})$$

où :

- $A(1_i)$ est la probabilité pour que le système soit en marche en régime stationnaire sachant que composant i est en marche ;
- $A(0_i)$ est la probabilité pour que le système soit en marche en régime stationnaire sachant que composant i est en panne

Notons que la probabilité d'être en marche du composant i en régime stationnaire est $a_i = \mu_i / (\lambda_i + \mu_i)$. Alors :

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{si et seulement si } \lambda_i = 0 \text{ et } \mu_i \neq 0 \\ 0 & \text{si et seulement si } \mu_i = 0 \text{ et } \lambda_i \neq 0 \end{cases}$$

Remarquons également que :

$$A(1_i) = A(0_{\lambda_i}) = A + \delta A(0_{\lambda_i}), \quad (\text{A.26})$$

où A est la disponibilité asymptotique du système, $A(0_{\lambda_i})$ la disponibilité asymptotique sachant que $\lambda_i = 0$, et $\delta A(0_{\lambda_i})$ la variation de la disponibilité asymptotique provoquée par le fait que le taux de défaillance du composant i varie de -100% sa valeur.

De façon similaire,

$$A(0_i) = A(0_{\mu_i}) = A + \delta A(0_{\mu_i}), \quad (\text{A.27})$$

$\delta A(0_{\mu_i})$ étant la variation de la disponibilité asymptotique provoquée par le fait que le taux de réparation du composant i varie de -100% sa valeur.

D'après les équations (A.28), (A.26) et (A.27), on obtient :

$$\text{MIM}(i) = \delta A(0_{\lambda_i}) - \delta A(0_{\mu_i}). \quad (\text{A.28})$$

D'après l'équation (6.38) dans le chapitre 6, la variation de la disponibilité asymptotique provoquée par le changement du taux de défaillance du composant i est :

$$\delta A(0_{\lambda_i}) = \boldsymbol{\pi} \lambda_i \mathbf{Q}_{\lambda_i} \mathbf{M}^\# (\mathbf{I} - \lambda_i \mathbf{Q}_{\lambda_i} \mathbf{M}^\#)^{-1} \mathbf{f}, \quad (\text{A.29})$$

où $\mathbf{M}^\#$ est l'inverse généralisée calculé grâce à la matrice génératrice \mathbf{M} , voir (6.16). De façon similaire, on a :

$$\delta A(0_{\mu_i}) = \boldsymbol{\pi} \mu_i \mathbf{Q}_{\mu_i} \mathbf{M}^\# (\mathbf{I} - \mu_i \mathbf{Q}_{\mu_i} \mathbf{M}^\#)^{-1} \mathbf{f}. \quad (\text{A.30})$$

Les relations (A.29), (A.30) et (A.28) nous permettent de calculer analytiquement le facteur MIM à partir du vecteur de probabilité $\boldsymbol{\pi}$ et de la matrice génératrice \mathbf{M} .

Dans la section 6.4 du chapitre 6, nous avons montré que les variations de la disponibilité asymptotique peuvent être estimées à partir d'une seule trajectoire observée. En effet, les estimations de $\delta A(0_{\lambda_i})$ et de $\delta A(0_{\mu_i})$, basées principalement sur l'estimation du vecteur de probabilité d'occupation d'état $\boldsymbol{\pi}$ et celle de l'inverse généralisée $\mathbf{M}^\#$, peuvent être obtenues à partir d'une seule trajectoire observée en changeant seulement les directions liées aux paramètres considérés. Par conséquent, on peut obtenir l'estimation du facteur d'importance marginal comme suit :

$$\hat{\text{MIM}}(i) = \delta \hat{A}(0_{\lambda_i}) - \delta \hat{A}(0_{\mu_i}). \quad (\text{A.31})$$

Il est clair que cette relation nous permet d'estimer le facteur MIM stationnaire grâce à des données de retour d'expériences.

A.2.1.2 Approche basée sur l'estimation de $\boldsymbol{\pi}$

Nous présentons maintenant une autre façon permettant d'estimer le facteur MIM stationnaire en utilisant seulement l'estimation du vecteur de probabilité d'occupation des états en régime stationnaire.

En se basant sur l'équation (A.4), le facteur MIM relatif du composant i en régime stationnaire peut s'écrire comme suit :

$$\text{MIM}(i) = \frac{\pi \mathbf{f}}{a_i} - \frac{\pi(\mathbf{f} - \mathbf{h}_i^S)}{1 - a_i}. \quad (\text{A.32})$$

Notons que la disponibilité asymptotique d'un composant peut être également déterminée à partir du vecteur de probabilité d'occupation des états. En effet, soit Ω_i l'ensemble des états où le composant i est en marche, on a :

$$a_i = \sum_{j \in \Omega_i} \pi_j = \pi \mathbf{h}_i, \quad (\text{A.33})$$

où $\mathbf{h}_i = (h_i(1), h_i(2), \dots)^\top$ est le vecteur associé aux états du système et du composant i . $h_i(j) = 1$ si le le composant i est en marche à l'état j , et $h_i(j) = 0$ si non. Alors le facteur MIM relatif du composant i peut s'écrire finalement comme suit :

$$\text{MIM}(i) = \frac{\pi \mathbf{h}_i^S}{\pi \mathbf{h}_i} - \frac{\pi(\mathbf{f} - \mathbf{h}_i^S)}{1 - \pi \mathbf{h}_i}. \quad (\text{A.34})$$

Cette relation nous permet de calculer le facteur MIM stationnaire à partir du vecteur de probabilité d'occupation des états π . Notons qu'en se basant sur la trajectoire observée du système, l'estimateur $\hat{\pi}$ est obtenu, voir (5.11). Alors,

$$\hat{\text{MIM}}(i) = \frac{\hat{\pi} \mathbf{h}_i^S}{\hat{\pi} \mathbf{h}_i} - \frac{\hat{\pi} \mathbf{f} - \hat{\pi} \mathbf{h}_i^S}{1 - \hat{\pi} \mathbf{h}_i}. \quad (\text{A.35})$$

Cette relation nous permet d'estimer le facteur d'importance marginal en régime stationnaire à partir des données de retour d'expérience.

A.2.1.3 Lien direct avec le facteur MSM

Selon le lien direct avec le facteur de sensibilité multi-directionnelle (A.5), l'estimation du facteur MIM est obtenue grâce à les estimations des facteurs MSM qui peut être obtenues à partir d'une seule trajectoire observée (voir le chapitre 5).

$$\hat{\text{MIM}}(i) = \frac{\hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_{\lambda_i}}^A}{\hat{\text{MSM}}_{\mathbf{Q}_{\lambda_i}}^{a_i}}.$$

A.2.2 Facteur d'importance conjoint

Il existe deux approches permettant d'estimer le facteur d'importance conjoint en régime stationnaire à partir d'une seule trajectoire observée :

- l'approche basée sur l'estimation de δA ;
- l'approche basée sur l'estimation de π .

A.2.2.1 Approche basée sur l'estimation de δA

En se basant sur l'équation (A.7), le facteur JIM relatif des composants i et j en régime stationnaire peut s'écrire comme suit :

$$\text{JIM}(i, j) = A(1_i, 1_j) + A(0_i, 0_j) - A(1_i, 0_j) - A(0_i, 1_j). \quad (\text{A.36})$$

De même esprit du paragraphe A.2.1.1, on a :

$$A(1_i, 1_j) = A(0_{\lambda_i}, 0_{\lambda_j}) = A + \delta A(0_{\lambda_i}, 0_{\lambda_j}),$$

où $A(0_{\lambda_i}, 0_{\lambda_j})$ est la disponibilité asymptotique du système sous l'hypothèse que $\lambda_i = 0$ ($a_i = 1$) et $\lambda_j = 0$ ($a_j = 1$), et $\delta A(0_{\lambda_i}, 0_{\lambda_j})$ est la variation de la disponibilité asymptotique sous l'hypothèse que les taux de défaillance des composants i et j varient de -100% leur valeur.

De façon similaire :

$$\begin{aligned} A(0_i, 0_j) &= A(0_{\mu_i}, 0_{\mu_j}) = A + \delta A(0_{\mu_i}, 0_{\mu_j}), \\ A(1_i, 0_j) &= A(0_{\lambda_i}, 0_{\mu_j}) = A + \delta A(0_{\lambda_i}, 0_{\mu_j}), \\ A(0_i, 1_j) &= A(0_{\mu_i}, 0_{\lambda_j}) = A + \delta A(0_{\mu_i}, 0_{\lambda_j}). \end{aligned}$$

Par conséquent, (A.36) peut s'écrire :

$$\text{JIM}(i, j) = \delta A(1_i, 1_j) + \delta A(0_i, 0_j) - \delta A(1_i, 0_j) - \delta A(0_i, 1_j). \quad (\text{A.37})$$

D'après l'équation (6.38) dans le chapitre 6, la variation de la disponibilité asymptotique provoquée par les changements du paramètres λ_i et λ_j est :

$$\delta A(0_{\lambda_i}, 0_{\lambda_j}) = \boldsymbol{\pi}(\lambda_i \mathbf{Q}_{\lambda_i} + \lambda_j \mathbf{Q}_{\lambda_j}) \mathbf{M}^\# [\mathbf{I} - (\lambda_i \mathbf{Q}_{\lambda_i} + \lambda_j \mathbf{Q}_{\lambda_j}) \mathbf{M}^\#]^{-1} \mathbf{f}.$$

De façon similaire, on a :

$$\begin{aligned} \delta A(0_{\mu_i}, 0_{\mu_j}) &= \boldsymbol{\pi}(\mu_i \mathbf{Q}_{\mu_i} + \mu_j \mathbf{Q}_{\mu_j}) \mathbf{M}^\# [\mathbf{I} - (\mu_i \mathbf{Q}_{\mu_i} + \mu_j \mathbf{Q}_{\mu_j}) \mathbf{M}^\#]^{-1} \mathbf{f}, \\ \delta A(0_{\lambda_i}, 0_{\mu_j}) &= \boldsymbol{\pi}(\lambda_i \mathbf{Q}_{\lambda_i} + \mu_j \mathbf{Q}_{\mu_j}) \mathbf{M}^\# [\mathbf{I} - (\lambda_i \mathbf{Q}_{\lambda_i} + \mu_j \mathbf{Q}_{\mu_j}) \mathbf{M}^\#]^{-1} \mathbf{f}, \\ \delta A(0_{\mu_i}, 0_{\lambda_j}) &= \boldsymbol{\pi}(\mu_i \mathbf{Q}_{\mu_i} + \lambda_j \mathbf{Q}_{\lambda_j}) \mathbf{M}^\# [\mathbf{I} - (\mu_i \mathbf{Q}_{\mu_i} + \lambda_j \mathbf{Q}_{\lambda_j}) \mathbf{M}^\#]^{-1} \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Ces relations nous montrent que l'on peut calculer analytiquement le facteur JIM à partir du vecteur de probabilité $\boldsymbol{\pi}$ et la matrice génératrice \mathbf{M} en changeant seulement les directions liées aux paramètres considérés.

La relation (A.39) conduit à l'estimation de $\text{JIM}(i, j)$ selon l'expression suivante :

$$\hat{\text{JIM}}(i, j) = \delta \hat{A}(0_{\lambda_i}, 0_{\lambda_j}) + \delta \hat{A}(0_{\mu_i}, 0_{\mu_j}) - \delta \hat{A}(0_{\mu_i}, 0_{\lambda_j}) - \delta \hat{A}(0_{\lambda_i}, 0_{\mu_j}). \quad (\text{A.38})$$

Notons d'une part que les $\delta\hat{A}(0_{\lambda_i}, 0_{\lambda_j})$, $\delta\hat{A}(0_{\mu_i}, 0_{\mu_j})$, $\delta\hat{A}(0_{\mu_i}, 0_{\lambda_j})$ et $\delta\hat{A}(0_{\lambda_i}, 0_{\mu_j})$ peuvent être obtenus grâce aux estimateurs $\hat{\pi}$ et \hat{M}^\sharp en changeant seulement les directions liées aux paramètres considérés. Nous avons montré, d'autre part dans la section 6.4 du chapitre 6, que ces estimateurs peuvent être obtenus à partir d'une seule trajectoire observée. Par conséquent, on peut obtenir l'estimation du facteur JIM à partir d'une seule trajectoire observée.

A.2.2.2 Approche basée sur l'estimation de π

En régime stationnaire, l'équation (A.14) devient :

$$\begin{aligned} \text{JIM}(i, j) &= \frac{A(i, j)}{a_i a_j} + \frac{A(\bar{i}, \bar{j})}{(1 - a_i)(1 - a_j)} - \frac{A(i, \bar{j})}{a_i(1 - a_j)} - \frac{A(\bar{i}, j)}{(1 - a_i)a_j} \\ &= \frac{\pi \mathbf{h}_{ij}^S}{\pi \mathbf{h}_i \pi \mathbf{h}_j} + \frac{\pi(\mathbf{f} + \mathbf{h}_{ij}^S - \mathbf{h}_i^S - \mathbf{h}_j^S)}{(1 - \pi \mathbf{h}_i)(1 - \pi \mathbf{h}_j)} - \frac{\pi(\mathbf{h}_i^S - \mathbf{h}_{ij}^S)}{\pi \mathbf{h}_i(1 - \pi \mathbf{h}_j)} - \frac{\pi(\mathbf{h}_j^S - \mathbf{h}_{ij}^S)}{(1 - \pi \mathbf{h}_i)\pi \mathbf{h}_j}. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Notons d'une part que \mathbf{f} , \mathbf{h}_i^S , \mathbf{h}_j^S , \mathbf{h}_{ij}^S , \mathbf{h}_i et \mathbf{h}_j sont des vecteurs constants. Alors l'équation (A.39) nous montre que le facteur JIM relatif des composants i, j peut être calculé directement grâce au vecteur de probabilité d'occupation des états π . D'autre part, l'estimation du vecteur π est obtenue grâce à la trajectoire observée, voir (5.11). Par conséquent, on obtient finalement l'estimation de $\text{JIM}(i, j)$ comme suit :

$$\hat{\text{JIM}}(i, j) = \frac{\hat{\pi} \mathbf{h}_{ij}^S}{\hat{\pi} \mathbf{h}_i \hat{\pi} \mathbf{h}_j} + \frac{\hat{\pi}(\mathbf{f} + \mathbf{h}_{ij}^S - \mathbf{h}_i^S - \mathbf{h}_j^S)}{(1 - \hat{\pi} \mathbf{h}_i)(1 - \hat{\pi} \mathbf{h}_j)} - \frac{\hat{\pi}(\mathbf{h}_i^S - \mathbf{h}_{ij}^S)}{\hat{\pi} \mathbf{h}_i(1 - \hat{\pi} \mathbf{h}_j)} - \frac{\hat{\pi}(\mathbf{h}_j^S - \mathbf{h}_{ij}^S)}{(1 - \hat{\pi} \mathbf{h}_i)\hat{\pi} \mathbf{h}_j}. \quad (\text{A.40})$$

Cette relation nous permet d'estimer le facteur d'importance conjoint en régime stationnaire à partir des données de retour d'expérience car ces données donnent l'estimation du vecteur π .

A.2.3 Autres facteurs d'importance

Les facteurs d'importance restants (y compris le facteur d'importance critique CIM, le facteur de diminution du risque RRW, le facteur d'augmentation du risque RAW et le facteur d'importance de diagnostic DIF) peuvent être estimés grâce aux liens directs avec l'estimateur du facteur d'importance marginal $\hat{\text{MIM}}$ (voir le tableau A.2)

Liens directs entre les estimateurs des facteurs d'importance classiques

Estimateur	$\hat{M}\hat{I}\hat{M}$	$\hat{C}\hat{I}\hat{M}$	$\hat{R}\hat{R}\hat{W}$	$\hat{R}\hat{A}\hat{W}$	$\hat{D}\hat{I}\hat{F}$
$\hat{M}\hat{I}\hat{M}$	1	$\hat{C}\hat{I}\hat{M} \frac{\hat{A}}{\hat{a}_i}$	$\frac{(\hat{R}\hat{R}\hat{W} - 1) \hat{A}}{\hat{R}\hat{R}\hat{W} \hat{a}_i}$	$\frac{(\hat{R}\hat{A}\hat{W} - 1) \hat{A}}{\hat{a}_i}$	$(\frac{\hat{D}\hat{I}\hat{F}}{\hat{a}_i} - 1) \frac{\hat{A}}{\hat{a}_i}$
$\hat{C}\hat{I}\hat{M}$	$\hat{M}\hat{I}\hat{M} \frac{\hat{a}_i}{\hat{A}}$	1	$1 - \frac{1}{\hat{R}\hat{R}\hat{W}}$	$(\hat{R}\hat{A}\hat{W} - 1) \frac{\hat{a}_i}{\hat{a}_i}$	$\frac{\hat{D}\hat{I}\hat{F}}{\hat{a}_i} - \frac{\hat{a}_i}{\hat{a}_i}$
$\hat{R}\hat{R}\hat{W}$	$\frac{1}{1 - \hat{M}\hat{I}\hat{M} \frac{\hat{a}_i}{\hat{A}}}$	$\frac{1}{1 - \hat{C}\hat{I}\hat{M}}$	1	$\frac{1}{\hat{R}\hat{A}\hat{W} - \frac{\hat{M}\hat{I}\hat{M}}{\hat{A}}}$	$\frac{1}{\frac{\hat{D}\hat{I}\hat{F}}{\hat{a}_i} - \frac{\hat{M}\hat{I}\hat{M}}{\hat{A}}}$
$\hat{R}\hat{A}\hat{W}$	$\hat{M}\hat{I}\hat{M} \frac{\hat{a}_i}{\hat{A}} + 1$	$\frac{\hat{M}\hat{I}\hat{M}}{\hat{A}} + 1 - \hat{C}\hat{I}\hat{M}$	$\frac{\hat{M}\hat{I}\hat{M}}{\hat{A}} + \frac{1}{\hat{R}\hat{R}\hat{W}}$	1	$\frac{\hat{D}\hat{I}\hat{F}}{\hat{a}_i}$
$\hat{D}\hat{I}\hat{F}$	$(\hat{M}\hat{I}\hat{M} \frac{\hat{a}_i}{\hat{A}} + 1) \hat{a}_i$	$\hat{C}\hat{I}\hat{M} \hat{a}_i + \hat{a}_i$	$\frac{\hat{a}_i \hat{M}\hat{I}\hat{M}}{\hat{A}} + \frac{\hat{a}_i}{\hat{R}\hat{R}\hat{W}}$	$\hat{a}_i \hat{R}\hat{A}\hat{W}$	1

TAB. A.2 – Liens directs entre les estimateurs des facteurs d'importance classiques en régime stationnaire. $\hat{M}\hat{I}\hat{M}$, $\hat{C}\hat{I}\hat{M}$, $\hat{R}\hat{R}\hat{W}$, $\hat{R}\hat{A}\hat{W}$ et $\hat{D}\hat{I}\hat{F}$ indiquent $\hat{M}\hat{I}\hat{M}(i)$, $\hat{C}\hat{I}\hat{M}(i)$, $\hat{R}\hat{R}\hat{W}(i)$, $\hat{R}\hat{A}\hat{W}(i)$ et $\hat{D}\hat{I}\hat{F}(i)$ respectivement

avec : $\hat{\bar{A}} = 1 - \hat{A} = 1 - \hat{\pi} \mathbf{f}$ et $\hat{\bar{a}}_i = 1 - \hat{a}_i = 1 - \hat{\pi} \mathbf{h}_i$.

Ces relations nous permettent calculer rapidement l'estimation des facteurs d'importance relatifs d'un composant en utilisant seulement des données de retour d'expérience sans avoir à connaître le comportement des composants (taux de défaillance et de réparation) ni la matrice génératrice du processus de Markov.

Annexe B

Méthode de perturbation généralisée [54]

Considérons un système physique décrit par p_j (avec $j = 1 \dots J$) et par un vecteur $z = (z_1, \dots, z_K)$ satisfaisant l'équation suivante :

$$m(z|p) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Le vecteur $z(\theta, t)$ décrit des états du systèmes et dépend généralement de l'espace des phases coordonnées θ et du temps t . Le vecteur p représente l'ensemble de J paramètres indépendants $p_j (j = 1, 2, \dots, J)$. L'équation (B.2) est supposée être dérivablee par rapport aux paramètres p_j et z_k .

Considérons maintenant une fonction d'intérêt qui peut être écrite selon l'expression suivante :

$$W = \int_{t_0}^{t_F} \langle \mathbf{h}^+, \mathbf{z} \rangle dt = \ll \mathbf{h}^+, \mathbf{z} \gg, \quad (\text{B.2})$$

où :

- \mathbf{h}^+ correspond au vecteur d'une fonction assignée ;
- t_0, t_F désignent les limites de temps ;
- $\langle \rangle, \ll \gg$ indiquent l'intégrations en l'espace phases et l'intégration en l'espace phases et de temps.

Supposons qu'il existe \mathbf{h} tel que :

$$\ll \mathbf{z}^*, \mathbf{h} \gg = \ll \mathbf{h}^+, \mathbf{z} \gg, \quad (\text{B.3})$$

où \mathbf{z}^* est la mesure d'importance associée à la mesure \mathbf{z} . Les règles permettant de déterminer l'équation régissant cette mesure d'importance associée \mathbf{z}^* à partir de l'équation régissant la mesure \mathbf{z} sont :

- changement de signe de la dérivée ;
- transposition de la matrice des éléments ;

- inverse de l'ordre des opérateurs ;
- substitution de \mathbf{h} avec \mathbf{h}^+ .

Le but de cette méthode est de chercher une expression qui donne la variation δW par le terme de perturbations δp_j ($j = 1, \dots$).

La discrétisation de l'équation (B.2) nous donne :

$$\sum_{j=0}^{j=J} (\mathbf{H}z_{/j} + \mathbf{m}_{/j})\delta p_j + \mathcal{O}_2 = 0, \quad (\text{B.4})$$

où :

- \mathcal{O}_2 est le terme au second ordre ou à l'ordre supérieur ;
- $z_{/j} = \frac{dz}{dp_j}$;
- $\mathbf{m}_{/j} = \frac{d\mathbf{m}}{dp_j}$;
- et enfin, \mathbf{H} est une matrice jacobienne :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial z_1} & \frac{\partial m_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial m_1}{\partial z_K} \\ \frac{\partial m_2}{\partial z_1} & \frac{\partial m_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial m_2}{\partial z_K} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial m_K}{\partial z_1} & \frac{\partial m_K}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial m_K}{\partial z_K} \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{z}}.$$

Lorsqu'on suppose que p_j et δp_j sont indépendants, on obtient selon l'équation (B.5) :

$$\mathbf{H}z_{/j} + \mathbf{m}_{/j} = 0, \quad (\text{B.5})$$

qui représente l'équation régissant la fonction dérivée $z_{/j}$.

Pour l'illustration, on considère une équation régissant suivante :

$$m(z) = -\frac{dz}{dt} + az,$$

avec la condition initiale $z(t_0) = z_0$. Cette équation correspond en effet à l'équation suivante :

$$m(z) = -\frac{dz}{dt} + az + z_0 \Upsilon(t - t_0) = 0.$$

En prenant la dérivée par rapport à p_j , on obtient :

$$m_{/j} = \frac{\partial}{\partial p_j} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial a}{\partial p_j} z + \frac{\partial z_0}{\partial p_j} \Upsilon(t - t_0) = 0. \quad \blacksquare$$

Considérons maintenant la fonction d'intérêt W_j et en utilisant l'équation (B.3), W_j peut s'écrire selon l'expression suivante :

$$W_j = \ll \mathbf{h}^+, \mathbf{z}_{/j} \gg = \ll \mathbf{z}^*, \mathbf{m}_{/j} \gg,$$

où \mathbf{z}^* est une mesure d'importance associée à $\mathbf{m}_{/j}$. \mathbf{z}^* est la solution de l'équation suivante :

$$\mathbf{H}^* \mathbf{z}^* + \mathbf{h}^+ = 0, \quad (\text{B.6})$$

où \mathbf{H}^* est une inverse de l'opérateur \mathbf{H} . Pour simplifier, notons qu'il suffit, pour obtenir l'équation (B.6) à partir de celle (B.5), de transposer la matrice d'éléments et de changer le signe du terme de dérivation.

La sensibilité de la fonction W par rapport à p_j devient :

$$S_j = \frac{dW}{dp_j} = \ll \frac{\partial \mathbf{h}^+}{\partial p_j}, \mathbf{z} \gg + \ll \mathbf{z}^*, \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial p_j} \gg. \quad (\text{B.7})$$

Le premier ordre de changement global de la mesure W est :

$$\partial W = \sum_{j=1}^J \partial p_j \ll \frac{\partial \mathbf{h}^+}{\partial p_j}, \mathbf{z} \gg + \ll \mathbf{z}^*, \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial p_j} \gg. \quad (\text{B.8})$$

Bibliographie

- [1] ABDALLAH.H. Sensitivity computation of reliability markov models using the uniformized power method. *Reliability Engineering and System Safety* 56, 1 (1996), 53–59.
- [2] ABUELMA'ATTI, M., AND QAMBAR, I. S. Spice application in the study of the behaviour of multi-state systems described by markov models. *Microelectronics and Reliability* 37, 4 (1997), 609–613.
- [3] AKERS, S. Binary decision diagrams. *IEEE Trans. Computers* C-27, 6 (1978), 509–516.
- [4] ALLA, H., AND DAVIS, P. Du grafcet aux réseaux de petri. *Traité des nouvelles Technologies, éd. Hermès* (1998).
- [5] APOSTOLAKIS, G., AND MOIENI, P. The foundations of models of dependence in probabilistic safety assessment. *Reliability Engineering* 18, 3 (1987), 177–195.
- [6] ARMSTRONG, M. Joint reliability-importance of components. *IEEE Transactions on Reliability* 44, 3 (1995), 408–412.
- [7] ATWOOD, C. J. The binomial failure rate common cause model. *Technometrics* 28, 2 (1986), 139–148.
- [8] AVEN, T. Availability evaluation of oil/gas production and transportation systems. *Reliability Engineering* 18 (1987), 35–44.
- [9] BARLOW, R., AND PROSCHAN, F. *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. International Serie in Decision Processes. Holt, Rinehart and Winston, 1975.
- [10] BÉRENGUER, C., DIEULLE, L., GRALL, A., AND VASSEUR, D. Etudes de sensibilité, facteurs d'importance et défaillances de cause commune. *Journal européen des systèmes automatisés* 40, 7 (2006), 763–785.
- [11] BIRNBAUM, L. On the importance of different components in a multi components system. *Multivariate analysis 2, New york : Academic Press* (1969).
- [12] BLADT, M., AND SORENSEN, M. Statistical inference discretely observed markov jum processes. *Royal Statistical Society* 67, 3 (2005), 395–410.

- [13] BLAKE, J., REIBMAN, A., AND TRIVEDI, K. Sensitivity analysis of reliability and performability measures for multiprocessor systems. *Performance Evaluation Review* 16, 1 (1988), 177–186.
- [14] BOBBIO, A., PREMOLI, A., AND SARACCO, O. Multi-state homogeneous markov models in reliability analysis. *Microelectronics and Reliability* 20, 6 (1980), 875–880.
- [15] BOITEAU, M., DUTUIT, Y., RAUZY, A., AND J.-P., S. The altarcia data-flow language in use : modeling of production availability of a multi-state system. *Reliability Engineering and System Safety* 91 (2006), 747–755.
- [16] BORGONOVO, E. Differential, criticality and birnbaum importance measures : An application to basic event, groups and sscs in event trees and binary decision diagrams. *Reliability Engineering and System Safety* 92, 10 (2007), 1458–1467.
- [17] BORGONOVO, E., APOSTOLAKIS, G., TARANTOLA, S., AND SALTELLI, A. Comparison of global sensitivity analysis techniques and importance measures in PSA. *Reliability Engineering and System Safety* 79 (2003), 175–185.
- [18] BORGONOVO, E., AND APOSTOLAKIS, G.-E. A new importance measure for risk-informed decision making. *Reliability Engineering and System Safety* 72, 2 (2001), 193–212.
- [19] BREIMAN, L. *Probability*. Reading, MA :Addison-Wesley, 1968.
- [20] BRONSHTEIN, I. N., SEMENDIAEV, K., AND HIRSCH, K. *Handbook of mathematics*. Berlin New-York Paris : Springer, 1997.
- [21] CAO, X.-R. *Realisation Probabilities : The Dynamics of Queueing Systems*. New York : Springer-Verlag, 1994.
- [22] CAO, X.-R. Perturbation analysis of discrete event systems : Concepts, algorithms and applications. *EJOR* 91 (1995), 1–13.
- [23] CAO, X.-R. The maclaurin series for performance functions of markov chains. *Advances in Applied Probability* 30 (1998), 676–692.
- [24] CAO, X.-R., AND CHEN, H.-F. Pertubation realization, potentials, and sensitivity analysis of markov processes. *IEEE Transactions on Automatic Control* 42, 10 (1997), 1382–1393.
- [25] CAO, X.-R., AND WAN, Y.-W. Algorithms for sensitivity analysis of markov systems through potential and perturbation realization. *IEEE Transactions on Automatic Control* 43, 4 (1998), 482–494.
- [26] CAO, X.-R., YUAN, X., AND QIU, L. A single sample path-based performance sensitivity formula for Markov chains. *IEEE Transactions on Automatic Control* 41, 12 (1996), 1814–1817.

-
- [27] CHANG, Y.-R., AMARI, S.-V., AND KUO, S.-Y. Computing system failure frequencies and reliability importance measures using obdd. *IEEE Transactions on Computers* 53, 1 (2004), 54–68.
- [28] CHEOK, M., PARRY, G., AND SHERRY, R. Use of importance measures in risk informed regulatory applications. *Reliability Engineering and System Safety* 60 (1998), 213–226.
- [29] CHO, G., AND MEYER, C. Comparison of perturbation bounds for the stationary distribution of a markov chain. *Linear Algebra and its Applications* 335 (2001), 137–150.
- [30] COCOZZA-THIVENT, C. *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*. Mathématiques & Applications 28. Springer, 1997.
- [31] DAI, L. Sensitivity analysis of stationary performance measures for Markov chains. *Mathematical and Computer Modelling* 23, 11-12 (1996), 143–160.
- [32] DAI, L. Rate of convergence for derivative estimation of discrete-time Markov chains via finite-difference approximation with common random numbers. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 57, 3 (1997), 731–751.
- [33] DAI, L., AND HO, C.-Y. Structural infinitesimal perturbation analysis (SIPA) for derivative estimation of discrete-event dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 40, 7 (1995), 1154–1166.
- [34] DHILLON, B. S. A multi-state system model. *Microelectronics and Reliability* 16, 1 (1977), 55–56.
- [35] DO VAN, P. Facteurs d’importance fiabilistes et leurs extensions pour les systèmes dynamiques. Rapport de dea toric - optimisation et sûreté des systèmes, Université de technologie de Troyes, 2004.
- [36] DO VAN, P., BARROS, A., AND BERENQUER, C. Etude de sensibilité par analyse de perturbation pour un système markovien : application à la fiabilité. In *2ème journées doctorales, 9-11 Juillet 2007, Reims, France* (2007), p. 6 p.
- [37] DO VAN, P., BARROS, A., AND BERENQUER, C. Importance measure on finite time horizon and application to markovian multi-state production systems. In *Risk, Reliability and Societal Safety - Proc.ESREL 2007, 25-27 June 2007, Stavanger, Norway* (2007), T. A. . J. E. Vinnem, Ed., Taylor & Francis, pp. 229–237.
- [38] DO VAN, P., BARROS, A., AND BERENQUER, C. Importance measure on finite time horizon and application to markovian multi-state production systems. *Journal of Risk and Reliability, special issue paper 222* (2008), 449–461.
- [39] DO VAN, P., BARROS, A., AND BERENQUER, C. A new result on the differential importance measures of markov systems. In *Ninth International Probabilistic Safety*

- Assesment and Management Conference - Proc.PSAM9, 18-23 may 2008, Hong Kong, China* (2008).
- [40] DO VAN, P., BARROS, A., AND BERENGUER, C. Reliability importance analysis of markovian systems at steady state using perturbation analysis. *Reliability Engineering and System Safety* 93, 11 (2008), 1605–1615.
- [41] DO VAN, P., BERENGUER, C., AND DIEULLE, L. Comparaison et evaluation des méthodes de calcul des facteurs d'importance fiabilistes pour les systèmes dynamique. In *6ème congrès international pluridisciplinaire qualité et sûreté de fonctionnement - Proc. of QUALITA 2005, 16-18 Mars 2005, Bordeaux, France* (2005), pp. 45–52.
- [42] DO VAN, P., KHALOULI, S., BARROS, A., AND BERENGUER, C. Sensitivity & importance analysis of markov models using perturbation analysis : Applications in reliability. In *Safety and Reliability for Managing Risk - Proc. of ESREL 2006, 18-22 sep. 2006, Estoril, Portugal* (2006), C. Guedes-Soares and E. Zio, Eds., Taylor & Francis, pp. 1769–1775.
- [43] DUTUIT, Y., AND RAUZY, A. New algorithms to compute importance factors cpr,mif, cif, dif,rawand rrw. In *Safety and Reliability - Proc.ESREL'99, - 10th European Conference on Safety and Reliability, A.A. Balkema* (1999), I. G. Schuëller and P. Kafka, Eds.
- [44] DUTUIT, Y., AND RAUZY, A. Efficient algorithms to assess component and gate importance in fault tree analysis. *Reliability Engineering and System Safety* 72 (2001), 213–222.
- [45] DUTUIT, Y., RAUZY, A., SIGNORET, J. P., AND THOMAS, P. Modélisation d'un système dynamique simple et évaluation de sa fiabilité par réseaux de petri stochastiques. *St Malo* (1996), 648 – 659.
- [46] DYNAMIQUE DES ARBRES D'ÉVÉNEMENTS, S. André cabarbaye - centre national d'études spatiales (cnes) et lamine ngom - institut national des sciences appliquées (insa toulouse).
- [47] EISENBERGA, N., AND SAGARB, B. Importance measures for nuclear waste repositories. *Reliability Engineering and System Safety* 70, 3 (2003), 217–239.
- [48] EYMARD, R., AND MERCIE, S. Comparison of numerical methods for the assessment of production availability of a hybrid system. *Reliability Engineering and System Safety* 93 (2007), 168–177.
- [49] FLEMING, K. Issues and recommendations for advancement of pra technology in risk-informed decision making. U.S. Nuclear Regulatory Commission Technical Report n° NUREG/CR-6813, 2003.
- [50] FLEMING, K. reliability model for common mode failures in redundant safety systems. *GA-A13284* (April 1975).

-
- [51] FRANK, P. Introduction to system sensitivity. *Academic press* (1978).
- [52] FU, M., AND HU, J. Smoothed perturbation analysis derivative estimation for Markov chains. *Operations Research Letters* 15 (1994), 241–251.
- [53] FUSSEL, J. How to hand-calculate system reliability characteristics. *IEEE Transactions on Reliability* 24, 3.
- [54] GANDINI, A. Generalized perturbation theory (gpt) methods : A heuristic approach. *Advances in Nuclear Science and Technology* 19, (Lewins & Becker, Eds) Plenum Press (1987).
- [55] GANDINI, A. Importance and sensitivity analysis in assessing system reliability. *IEEE Transaction on Reliability* 39, 1 (1990), 61–70.
- [56] GAO, X., CUI, L., AND LI, J. Analysis for joint importance of components in a coherent system. *European Journal of Operational Research*.
- [57] GEORGE YIN, G., AND ZHANG, Q. *Continuous-Time Markov Chains and Applications. Application of Mathematics*. Springer, 1998.
- [58] GLASSERMAN, P. *Gradient Estimation Via Perturbation Analysis*, AT&T ed. The Kluwer International Series in Engineering and Computer Science. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [59] GLASSERMAN, P. Derivative estimates from simulation of continuous-time Markov chains. *Operations Research* 40, 2 (1992), 292–308.
- [60] GLASSERMAN, P. TAYUR, S. Sensitivity analysis for base-stock levels in multiechelon production-inventory systems. *Management Science* 41, 2 (1995).
- [61] GLYNN, P. Likelihood ratio gradient estimation for stochastic systems. *Communications of the ACM* 33 (1990), 75–84.
- [62] GOEL, L., AND MUMTAZ, S. Z. A homogeneous markov model for phased-mission reliability characteristics. *Microelectronics and Reliability* 33, 8 (1993), 1107–1111.
- [63] HEIDELBERGER, P., AND GOYAL, A. Sensitivity of continuous time markov chains using uniformization. *Computer Performance and Reliability* (1987).
- [64] HEIDERGOTT, B., AND HORDIJK, A. Taylor series expansions of stationary markov chains. *Avances in Applied Probability* 35 (2003), 1046–1070.
- [65] HO, Y., AND CAO, X. *Perturbation Analysis of Discrete-Event Dynamic Systems*. Kluwer Academic Publisher, Boston, 1991.
- [66] HONG, J. Computation of joint reliability importance of two gate events in a fault tree. *Reliability Engineering and System Safety* 68, 1 (2000), 1–5.

- [67] HONG, J., KOO, H., AND LIE, C. Joint reliability importance of two edges in an undirected network. *IEEE Transactions on Reliability* 42, 1 (1995), 17–23.
- [68] HUBBARD, J.H.AND WEST, B. *Differential Equations : A Dynamical Systems Approach*. Texts in Applied Mathematics 18. Springer-Verlag, 1990.
- [69] HUSEBY, A. Importance measures for multicomponent binary systems. Tech. Rep. Statistical Research Report No. 11-04 - ISSN 0806-3842, University of Oslo - Dept. of Math., December 2004.
- [70] INNAL, F., AND DUTUIT, Y. Evaluation de la performance d'un système de production et des contributions individuelles de ses unités constitutives. In *6ème Conférence Francophone de Modélisation et Simulation - MOSIM'06, Maroc, 3-5 avril (2006)*. In French.
- [71] JACOBSEN, M. *Statistical Analysis of Counting Process*. Lecture Notes in Statistics 12. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [72] KAWAUCHI, Y., AND RAUSAND, M. A new approach to production regularity assessment in the oil and chemical industries. *Reliability Engineering and System Safety* 75 (2002), 379–388.
- [73] KOUTRAS, M. V. On a markov chain approach for the study of reliability structures. *Journal of Applied Probability* 33, 2 (1996), 357–367.
- [74] KUCHLER, U., AND M., S. *Exponential Families of Stochastic Processes*. Springer Series in Statistics. Spinger, 1997.
- [75] LAMBERT, H. Measures of importance of events and cut sets in fault trees. In *R.E. Barlow, J.B. Fussel, and N.D. Singpurwalla, editors, Reliability and Fault Tree Analysis*.
- [76] LEE, H., LIE, C., AND HONG, J. A computation method for evaluating importance-measure of gate in a fault tree. *IEEE Transactions on reliability* 46, 3 (1997).
- [77] LEVITIN, G., AND LISNIANSKI, A. Importance and sensitivity analysis of multi-state systems using the universal generating function method. *Reliability Engineering and System Safety* 65 (1999), 271–281.
- [78] LEVITIN, G., PODOFILLINI, L., AND ZIO, E. Generalised importance measure for multi-state elements based on performance level restrictions. *Reliability Engineering and System Safety* 82 (2003), 287–298.
- [79] LISNIANSKI, A., AND LEVITIN, G. *Multi-state system reliability*. Wiley Series in Quality, Reliability & Engineering Statistics. World Scientific, 2003.
- [80] LIU, Z., AND TU, F. Single sample path-based sensitivity analysis of markov processes using uniformization. *IEEE Transactions on Automatic Control* 44, 4 (1999), 872–875.

-
- [81] MALHOTRA, M. A computationally efficient technique for transient analysis of repairable markovian systems. *Performance Evaluation* 24 (1995).
- [82] MEYER, C.D., J. The role of the group generalized inverse in the theory of finite markov chains. *SIAM Rev.* 17 (1975), 443–464.
- [83] MUPPALA, J. K., AND TRIVEDI, K. S. System dependencies in markov dependability modelling. In *Fault-Tolerant Systems and Software, Proceedings of FTS-95* (New Delhi, India, 1995), Narosa Publishing House, pp. 38–47.
- [84] NEUTS, M. *Algorithm Probability : a Collection of Problems*. Chapman and Hall, 1995.
- [85] OU, Y., AND BECHTA-DUGAN, J. Approximate sensitivity analysis for acyclic markov reliability models. *IEEE Transactions on Reliability* 52, 2 (2003), 220–231.
- [86] PERRY, M., WYNN, H., AND BATES, R. Principal components analysis in sensitivity studies of dynamic systems. *Probabilistic Engineering Mechanics* 4 (2006).
- [87] PFLUG, G. Sampling derivatives of probabilities. *Computing* 42 (1989), 315–328.
- [88] PFLUG, G. On-line optimization of simulated markovian processes. *Mathematics of Operations Research* 15 (1990), 381–395.
- [89] PLATZ, O. A markov model for common-cause failures. *Reliability Engineering* 9 (1984).
- [90] RAMESH, A., AND TRIVEDI, K. On the sensitivity of transient solutions of Markov models. *ACM Sigmetrics* 5 (1993), 122–134.
- [91] RAMIREZ-MARQUEZ, J. E., AND COIT, D. W. Composite importance measures for multi-state systems with multi-state components. *IEEE Transactions on Reliability* 54, 3 (2005), 517–529.
- [92] RAUSAND, M., AND HOYLAND, H. *System Reliability Theory - Models, Statistical methods and Application*, second edition ed. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley Interscience, 2004.
- [93] RAUZY, A. An experimental study on iterative methods to compute transient solutions of large markov models. *Reliability Engineering and System Safety* 86, 1 (2004), 105–115.
- [94] ROSS, S. *Stochastic Processes*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [95] SIGNORET, J.-P. Analyse des risques des systèmes dynamiques : approche markovienne. In *Technique de l'ingénieur* (10/2005 [En Français]).
- [96] SMOTHERMAN, M., AND ZEMOUDEH, K. A non-homogeneous markov model for phased-mission reliability analysis. *Microelectronics and Reliability* 38, 5 (1989).

- [97] SPALL, J. Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation. *IEEE Transactions on Automatic Control* 37, 4 (1992), 332–341.
- [98] VAN DER BORST, M., AND SCHOONAKKER, H. An overview of psa importance measures. *Reliability Engineering and System Safety* 72, 3 (2001), 241–245.
- [99] VINOD, G., KUSHWAHA, H. S., VERMA, A. K., AND SRIVIDYA, A. Importance measures in ranking piping components for risk informed in-service inspection. *Reliability Engineering and System Safety* 80, 2 (2003), 107–113.
- [100] WU, S. Joint importance of multistate systems. *Computers and Industrial Engineering* 49, 1 (2005), 63–75.
- [101] XING, L., AND AMARI, S. V. Effective component importance analysis for the maintenance of systems with common-cause failures. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering* 14, 5 (2007), 459–478.
- [102] ZIO, E., AND PODOFILLINI, L. Importance measures of multi-state components in multi-state systems. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering* 10, 3 (2003), 289–310.
- [103] ZIO, E., AND PODOFILLINI, L. Monte carlo simulation analysis of the effects of different system performance levels on the importance of multi-state components. *Reliability Engineering and System Safety* 82 (2003), 63–73.
- [104] ZIO, E., AND PODOFILLINI, L. Accounting for components interactions in the differential importance measure. *Reliability Engineering and System Safety* 91 (2006), 1163–1174.