



**HAL**  
open science

# Matrices aléatoires et leurs applications à la physique statistique et quantique

Céline Nadal

► **To cite this version:**

Céline Nadal. Matrices aléatoires et leurs applications à la physique statistique et quantique. Autre [cond-mat.other]. Université Paris Sud - Paris XI, 2011. Français. NNT: 2011PA112089. tel-00633266

**HAL Id: tel-00633266**

**<https://theses.hal.science/tel-00633266>**

Submitted on 18 Oct 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ  
PARIS-SUD XI

présentée par

Céline NADAL

Sujet :

---

MATRICES ALÉATOIRES ET LEURS APPLICATIONS À  
LA PHYSIQUE STATISTIQUE ET PHYSIQUE  
QUANTIQUE

---

21 juin 2011

jury composé de

John CARDY	Rapporteur
Yan FYODOROV	Examineur
Hendrik-Jan HILHORST	Examineur
Pierre LE DOUSSAL	Rapporteur
Satya N. MAJUMDAR	Directeur de thèse
Marc YOR	Examineur
Jean-Bernard ZUBER	Examineur



---

---

# Remerciements

---

Suivant la tradition, je souhaite débiter cette thèse par des remerciements, remerciements pour les personnes qui m'ont accompagnée et soutenue durant ces trois années de thèse, mais aussi pour tous ceux qui m'ont guidée dans mon parcours d'élève puis d'étudiante, car une thèse c'est aussi l'aboutissement de nombreuses années d'études et de questionnement. Je ne pourrai pas ici citer tous ceux que j'aimerais remercier pour cela et je m'en excuse d'avance.

Si ces pages constituent pour le lecteur comme une préface de mon manuscrit, elles sont pour moi plutôt les dernières lignes que j'écris, elles sont l'aboutissement d'un long travail de rédaction qui, loin d'être fastidieux m'a permis de prendre du recul sur mon travail de recherche ainsi que de prendre le temps de lire en détail des articles ou des chapitres de livres que je n'avais pu que survoler auparavant. Finalement j'ai beaucoup appris durant les deux mois que j'ai consacrés à la rédaction, et j'espère que le lecteur prendra autant de plaisir à lire cette thèse que j'en ai eu à la rédiger.

En premier lieu, je tiens à remercier Satya Majumdar qui a été pour moi un excellent directeur de thèse, tant par ses qualités scientifiques et pédagogiques que par sa joie de vivre et sa gentillesse. Je le remercie sincèrement pour tous ses conseils, pour sa disponibilité et pour la confiance qu'il m'a accordée. J'ai énormément apprécié son enthousiasme et sa passion communicative de la recherche. Il a toujours été très présent et disponible tout en me laissant une grande liberté dans mon travail de recherche. Ce fut et ce sera toujours un vrai bonheur et un honneur de travailler avec lui.

Je suis très reconnaissante à John Cardy et Pierre Le Doussal d'avoir accepté la lourde tâche d'être rapporteurs de ma thèse. Je remercie également beaucoup Jean-Bernard Zuber pour sa lecture attentive de ma thèse et pour ses remarques qui m'ont été très utiles. Merci également à Yan Fyodorov, Henk Hilhorst et Marc Yor pour leur participation à mon jury de thèse. J'aimerais remercier particulièrement John Cardy de m'avoir encouragée à candidater au postdoc à All Souls College à Oxford et d'avoir soutenu ma candidature. Je me réjouis d'avance à l'idée d'aller à Oxford et en particulier de travailler avec lui.

Une thèse, c'est un travail très personnel mais c'est aussi l'occasion de discuter et travailler avec d'autres chercheurs, et pas seulement le directeur de thèse. Je pense en particulier à Massimo Vergassola avec qui nous avons écrit plusieurs articles sur les problèmes d'intrication quantique pour des états aléatoires. Je l'ai vu assez peu, mais les quelques discussions que j'ai eues avec lui m'ont été très utiles. J'ai beaucoup apprécié ses conseils et son ouverture d'esprit tant par rapport à ses idées scientifiques et la di-

versité des sujets qui l'intéressent que par rapport aux questions que j'ai pu me poser, notamment au moment de la recherche du postdoc. Je pense aussi à Grégory Schehr, que je remercie pour les nombreuses discussions que nous avons eues pendant ma thèse, à la fois sur le plan scientifique et sur le plan personnel. Si les problèmes de marcheurs vicieux de Pearcey sur lesquels nous avons travaillé ensemble n'ont pas abouti à une publication pour diverses raisons, ils m'ont malgré tout beaucoup intéressée, j'ai bien apprécié ce travail commun et j'y consacre un chapitre de ma thèse. Je pense enfin à Gaëtan Borot et Pierpaolo Vivo avec qui j'ai eu grand plaisir à travailler.

Ma thèse s'est déroulée au Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques (LPTMS) à Orsay dans un environnement très agréable et très sympathique. Je suis très reconnaissante pour cela à l'ensemble des chercheurs du laboratoire. Je tiens à remercier en particulier Satya Majumdar et Alain Comtet ainsi que les directeurs successifs du laboratoire Stéphane Ouvry et surtout Marc Mézard pour l'attention qu'il accorde aux thésards. Merci aussi aux secrétaires Claudine et Géraldine ainsi qu'à notre informaticien Vincent pour leur travail efficace et leur gentillesse.

Parce que la thèse est l'aboutissement d'un long parcours d'études et d'apprentissage, j'aimerais exprimer ma gratitude envers tous les enseignants et professeurs qui m'ont guidée et m'ont marquée tout au long de ce parcours. Je voudrais remercier l'ensemble des professeurs que j'ai eus à l'ENS et qui m'ont enseigné le goût des sciences et de la recherche. Je tiens à remercier tout particulièrement Damien Simon que j'ai eu comme chargé de TD, excellent enseignant débordant d'enthousiasme et très sympathique, qui m'a donné beaucoup de conseils.

Si je remonte un peu plus loin dans le temps, je pourrais remercier nombre de mes professeurs de collège ou lycée qui m'ont appris à apprécier leur matière et à m'intéresser à tout. Je citerai seulement ceux qui ont le plus marqué ma scolarité. Au lycée, Monsieur Sanchez m'a enseigné la passion des mathématiques et de la recherche, en nous proposant des problèmes toujours plus ambitieux et difficiles à résoudre. Au collège, je dois beaucoup à l'un de mes professeurs de français Monsieur Cantillon, je le remercie pour tout ce que j'ai appris de lui, l'intérêt pour les lettres, le théâtre, la réflexion littéraire, mais aussi ses conseils et idées originales sur l'enseignement et la pédagogie. Enfin le lecteur sera peut-être surpris que je remonte encore plus loin, mais il est important pour moi de remercier ma maîtresse de CM2, Madame Prin, institutrice hors norme qui m'a tant appris. Je garde un souvenir ému en particulier de tout ce qu'elle m'a transmis, le goût pour les études, les sciences et les lettres et en particulier une grande admiration pour Victor Hugo en tant qu'écrivain, poète et être humain.

Une thèse, c'est trois années de travail de recherche et d'apprentissage. Ce sont des phases de doute et parfois de découragement mais aussi des instants de bonheur intense, le bonheur d'avoir trouvé, pas forcément quelque chose de révolutionnaire, mais simplement d'avoir trouvé, compris la solution d'un problème sur lequel on s'acharnait et qui nous avait résisté jusque là. La joie surgit soudain, parfois brève mais intense, on a l'impression de tout comprendre - même si finalement, une fois qu'on l'approfondit, cette idée, qui nous paraît si formidable au début n'est pas si fantastique et ne résout rien, au moins elle procure cette grande joie localement et dans tous les cas elle n'est jamais perdue, chaque petite idée est une pierre à l'édifice de la recherche, de notre recherche. Il faut

seulement garder confiance en ces petits pas qui permettent d'avancer lentement mais sûrement dans la jungle du monde de la recherche.

C'est en particulier pour garder cette confiance en soi nécessaire au thésard et au chercheur que les amis et la famille jouent un rôle si important. C'est pourquoi les proches qui m'ont soutenue, aidée ont tout à fait leur place dans ces remerciements. C'est à ce titre que je remercie les thésards du labo, qui ont pour moi joué le rôle d'amis bien plus que de collègues. Je les remercie pour toutes ces discussions très sympathiques le midi et pour toutes ces touches de joie qu'ils ont ajoutées dans mes journées de recherche à Orsay. Je pense en particulier à David avec qui j'ai partagé le même bureau durant ces trois années de thèse, j'ai bien apprécié toutes nos discussions sur la musique, sur Dostoïevski, sur la littérature en général, sur la peinture ou le cinéma, mais aussi sur l'enseignement et la recherche ou encore plus généralement sur la vie, la politique et toutes les questions existentielles qu'on peut se poser. Je pense aussi à Matthieu qui nous a rejoints un an après, et qui m'étonnera toujours par son incroyable culture. Merci à Simon, Michele, Elia, Aurélien, Jason, merci aussi à Pierre-Elie, Paul, Arthur, Alvaro, Olga et Tianyou. Enfin je remercie les anciens Julien, Mathias, Pierre, Brice avec lesquels j'ai passé de très bons moments en première année de thèse, et aussi Joachim du LPT pour les fous rires et pour son aide quand nous nous sommes retrouvés prisonniers de la neige à Londres.

Merci à mes amis pour le bon temps passé ensemble, en particulier je pense à Charlotte, Aline et à tous mes amis de l'ENS, surtout Claire, Peng, Louise et Thomas, Pierre, Simon, Michal, Olivier, Loïc, Laure et Romain, Gaëtan et Sophie, et aussi Elisabeth, et Vivien.

Merci à ma famille pour leur soutien tout au long de mes études. Je suis particulièrement reconnaissante à mes parents à qui je dois tant. Ils m'ont beaucoup aidée et soutenue pendant mes études. Je ne les remercierai jamais assez pour tout ce qu'ils m'ont fait découvrir, les voyages et le goût de l'archéologie, la musique, la peinture et la culture en général. Ils m'ont appris à apprécier tant de choses et m'ont donné un appétit de connaissances qui guide toute ma vie. Je remercie aussi mon frère pour tout ce que nous avons partagé depuis le plus jeune âge, pour tous les jeux, toutes les histoires que nous inventions ensemble, pour toutes les confidences et toutes les discussions. Nous nous sommes toujours entendus, il me comprend toujours très bien et j'aime ses conseils. Enfin, last but not least comme on dit, je remercie de tout mon coeur Sébastien pour son amour, son soutien, sa patience, toutes ses attentions. Les mots eux-même ne sont pas assez forts pour traduire la reconnaissance infinie que je lui porte.



---



---

# Table des matières

---

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>vi</b>
<b>Introduction</b>	<b>xiii</b>
Quelques notations . . . . .	xix
<b>I Matrices aléatoires</b>	<b>1</b>
<b>1 Principaux ensembles de matrices aléatoires</b>	<b>3</b>
1.1 Ensembles gaussiens . . . . .	4
1.1.1 Ensemble gaussien unitaire (GUE) . . . . .	4
1.1.2 Ensemble gaussien orthogonal (GOE) . . . . .	6
1.1.3 Ensemble gaussien symplectique (GSE) . . . . .	7
1.1.4 Généralisation des ensembles gaussiens . . . . .	9
1.2 Distribution des valeurs propres . . . . .	10
1.2.1 Preuve dans le cas réel symétrique, $\beta = 1$ . . . . .	11
1.2.2 Preuve dans le cas hermitien $\beta = 2$ . . . . .	13
1.2.3 Preuve dans les cas hermitien autodual $\beta = 4$ . . . . .	14
1.3 Mesure de Haar : distribution uniforme . . . . .	14
1.3.1 Mesure de Haar sur le groupe unitaire . . . . .	14
1.3.2 Mesure de Haar sur le groupe orthogonal . . . . .	15
1.3.3 Mesure de Haar sur le groupe symplectique unitaire . . . . .	16
1.4 Matrices de Wishart (ensemble de Laguerre) . . . . .	17
1.4.1 Matrice de covariance et PCA . . . . .	17
1.4.2 Définition des matrices de Wishart . . . . .	20
1.4.3 Distribution des valeurs propres . . . . .	21
<b>2 Densité, gaz de Coulomb et fonctions de corrélation</b>	<b>23</b>
2.1 Gaz de Coulomb pour une matrice aléatoire gaussienne . . . . .	24
2.1.1 Gaz de Coulomb . . . . .	25
2.1.2 Scaling pour $N$ grand . . . . .	25
2.1.3 Densité moyenne . . . . .	26



2.2	Gaz de Coulomb pour une matrice de Wishart . . . . .	30
2.2.1	Gaz de Coulomb . . . . .	30
2.2.2	Scaling typique . . . . .	30
2.2.3	Densité moyenne . . . . .	31
2.3	Fonctions de corrélation pour l'ensemble gaussien GUE ( $\beta = 2$ ) . . . . .	34
2.3.1	Fonctions de corrélation . . . . .	35
2.3.2	Polynômes orthogonaux . . . . .	35
2.3.3	Comportement asymptotique . . . . .	38
2.4	Equations intégrales et Tricomi . . . . .	39
2.4.1	Théorème de Tricomi . . . . .	39
2.4.2	Equations intégrales et analyse complexe . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Statistique d'extrêmes et valeur propre maximale</b>	<b>43</b>
3.1	Maximum de variables indépendantes . . . . .	44
3.2	Valeur propre maximale d'une matrice aléatoire : Tracy-Widom . . . . .	45
3.2.1	Matrices aléatoires gaussiennes . . . . .	45
3.2.2	Matrices de Wishart . . . . .	49
3.3	Grandes déviations de $\lambda_{\max}$ . . . . .	49
3.3.1	Ordre dominant : gaz de Coulomb . . . . .	50
3.3.2	Branche gauche : premières corrections . . . . .	53
3.3.3	Branche droite : premières corrections . . . . .	54
3.3.4	Matrice de Wishart : ordre dominant . . . . .	54
<b>II</b>	<b>Marcheurs vicieux</b>	<b>55</b>
<b>4</b>	<b>Marcheurs aléatoires vicieux</b>	<b>57</b>
4.1	Contexte historique et physique . . . . .	57
4.2	Mouvement brownien $1D$ . . . . .	62
4.2.1	Définition du mouvement brownien . . . . .	62
4.2.2	Distribution marginale de la position $x$ au temps $t$ . . . . .	64
4.2.3	Intégrale de chemin et propagateur quantique . . . . .	66
4.2.4	Le cas du mouvement brownien standard . . . . .	67
4.2.5	Le cas du mouvement brownien avec potentiel . . . . .	68
4.3	Mouvements browniens vicieux . . . . .	70
4.3.1	Distribution marginale . . . . .	71
4.3.2	Propagateur quantique . . . . .	71
4.3.3	Distribution marginale loin des bords . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Modèle d'interfaces et matrices aléatoires</b>	<b>75</b>
5.1	Modèle d'interfaces . . . . .	75
5.1.1	Une interface . . . . .	76
5.1.2	$N$ interfaces . . . . .	81
5.2	Propriétés statistiques des interfaces . . . . .	85
5.2.1	Densité moyenne . . . . .	86
5.2.2	Hauteur maximale . . . . .	87
5.2.3	Hauteur minimale . . . . .	89

5.3	Centre de masse des hauteurs . . . . .	92
5.3.1	Méthode du gaz de Coulomb . . . . .	93
5.3.2	Densité optimale et distribution de $G_N$ . . . . .	96
5.3.3	Asymptotes et point de transition . . . . .	101
<b>6</b>	<b>Processus de Pearcey</b> . . . . .	<b>107</b>
6.1	Un modèle simple avec un seul marcheur . . . . .	108
6.1.1	Mouvement brownien $1D$ . . . . .	108
6.1.2	Mouvement brownien séparé en deux . . . . .	109
6.2	Processus de Pearcey . . . . .	110
6.2.1	Distribution marginale des positions . . . . .	110
6.2.2	Densité moyenne . . . . .	114
6.2.3	Densité moyenne au point critique . . . . .	117
6.3	Solution de Bueckner pour certaines équations intégrales . . . . .	119
6.3.1	Analyse complexe et idée générale . . . . .	120
6.3.2	Solution explicite pour $g(x)$ polynomial . . . . .	120
6.4	Solution par équation de Tricomi généralisée . . . . .	122
6.4.1	Equation de Tricomi généralisée . . . . .	122
6.4.2	Equation de Bueckner . . . . .	123
6.5	Gaz de Coulomb généralisé et transitions de phase . . . . .	124
6.5.1	Gaz de Coulomb généralisé . . . . .	124
6.5.2	Densité au point critique . . . . .	125
6.5.3	Transition de phase . . . . .	128
<b>III</b>	<b>Intrication quantique pour des états aléatoires</b> . . . . .	<b>131</b>
<b>7</b>	<b>Intrication quantique</b> . . . . .	<b>133</b>
7.1	Intrication pour un état pur . . . . .	134
7.1.1	Etats de Bell . . . . .	134
7.1.2	Calcul quantique . . . . .	135
7.1.3	L'entropie d'intrication . . . . .	138
7.2	Intrication pour un état mélange statistique . . . . .	146
7.2.1	Mesure d'intrication . . . . .	147
7.2.2	Entropie de formation . . . . .	148
7.2.3	Distance aux états séparables . . . . .	149
<b>8</b>	<b>Etats aléatoires</b> . . . . .	<b>153</b>
8.1	Etat pur aléatoire . . . . .	153
8.2	Mélange statistique aléatoire . . . . .	154
8.2.1	Ensemble corrélé aléatoirement . . . . .	155
8.2.2	Distance et mesure de probabilité . . . . .	156
<b>9</b>	<b>Entropie d'intrication pour un état pur aléatoire</b> . . . . .	<b>159</b>
9.1	Contexte physique . . . . .	159
9.1.1	Etat pur aléatoire et matrice densité réduite . . . . .	160
9.1.2	Densité des valeurs propres et moyennes . . . . .	162
9.2	Distribution de la pureté $\Sigma_q$ . . . . .	164

9.2.1	Régimes <b>I</b> et <b>II</b> : densité continue . . . . .	165
9.2.2	Régime <b>III</b> : une charge isolée . . . . .	172
9.3	Distribution de l'entropie . . . . .	178
9.3.1	Entropie de Renyi $S_q$ . . . . .	178
9.3.2	Entropie de von Neumann $S_{VN}$ . . . . .	179
9.3.3	Valeur propre maximale . . . . .	181
<b>10</b>	<b>Mélange statistique aléatoire : mesure de Bures</b>	<b>187</b>
10.1	Densité moyenne des valeurs propres . . . . .	188
10.1.1	Densité moyenne . . . . .	189
10.1.2	Dérivation de l'expression de la densité . . . . .	189
10.2	Distribution de la pureté . . . . .	192
10.2.1	Résultats . . . . .	192
10.2.2	Gaz de Coulomb pour les régimes <b>I</b> et <b>II</b> . . . . .	194
10.2.3	Régime <b>III</b> . . . . .	196
10.2.4	Solution de Bueckner : cas général . . . . .	199
<b>IV</b>	<b>Propriétés des matrices aléatoires</b>	<b>201</b>
<b>11</b>	<b>Nombre de valeurs propres positives</b>	<b>203</b>
11.1	Introduction et contexte . . . . .	204
11.1.1	Contexte physique . . . . .	204
11.1.2	Gaz de Coulomb à $\mathcal{N}_+$ fixé . . . . .	205
11.2	Densité à deux supports . . . . .	207
11.2.1	Double Tricomi . . . . .	208
11.2.2	Analyse complexe . . . . .	212
11.3	Distribution du nombre de valeurs propres positives $\mathcal{N}_+$ . . . . .	214
11.3.1	Densité optimale . . . . .	214
11.3.2	Energie de point col . . . . .	216
11.3.3	Voisinage de $c = \frac{1}{2}$ . . . . .	219
11.4	Probabilité d'un gap dans le spectre . . . . .	220
11.4.1	Gap avec proportions fixées . . . . .	221
11.4.2	Probabilité d'un gap symétrique . . . . .	225
<b>12</b>	<b>Valeur propre maximale : Tracy-Widom</b>	<b>227</b>
12.1	Idée générale et notations . . . . .	228
12.1.1	Méthode de Gross et Matytsin . . . . .	228
12.1.2	Notations et scaling . . . . .	230
12.2	Polynômes orthogonaux . . . . .	231
12.2.1	Fonction de partition . . . . .	232
12.2.2	Relations de récurrence . . . . .	233
12.2.3	Normalisation : limite $y \rightarrow \infty$ . . . . .	235
12.3	Branche droite de la distribution de $\lambda_{\max}$ : grande déviation . . . . .	235
12.3.1	Développement de $R_n$ et $S_n$ à $N$ grand . . . . .	236
12.3.2	Solution de la récurrence pour les $c_n$ . . . . .	237
12.3.3	Distribution de $\lambda_{\max}$ pour $N$ grand . . . . .	240
12.4	Limite de "double échelle" et distribution de Tracy-Widom . . . . .	243

12.4.1	Limite de double échelle . . . . .	244
12.4.2	Equation de Painlevé et loi de Tracy-Widom . . . . .	245
<b>13</b>	<b>Valeur propre maximale : grande déviation gauche</b>	<b>249</b>
13.1	Idée générale et notations . . . . .	250
13.1.1	Energie libre et développement perturbatif . . . . .	251
13.1.2	Corrélateurs . . . . .	252
13.1.3	Equations de boucle . . . . .	255
13.2	Développement en puissances de $1/N$ . . . . .	258
13.2.1	Développement des équations de boucle . . . . .	260
13.2.2	Solution à l'ordre dominant . . . . .	261
13.2.3	Première correction . . . . .	263
13.2.4	Seconde correction . . . . .	264
13.3	Grande déviation à gauche . . . . .	267
13.3.1	Détermination de la constante $F_N(0)$ . . . . .	267
13.3.2	Distribution de la valeur propre maximale . . . . .	270
13.3.3	Loi de Tracy-Widom $\beta$ . . . . .	272
<b>V</b>	<b>Simulations numériques</b>	<b>273</b>
<b>14</b>	<b>Monte Carlo par chaînes de Markov</b>	<b>275</b>
14.1	Algorithme Monte Carlo Metropolis et grandes déviations . . . . .	276
14.1.1	Algorithme Metropolis standard . . . . .	276
14.1.2	Convergence d'une chaîne de Markov . . . . .	277
14.1.3	Valeurs propres d'une matrice aléatoire gaussienne . . . . .	280
14.1.4	Probabilités conditionnelles . . . . .	283
14.2	Entropie d'intrication d'un état aléatoire . . . . .	286
14.2.1	Méthode 1 : Metropolis avec probabilités conditionnelles . . . . .	287
14.2.2	Méthode 2 : Simulation avec densité et probabilités conditionnelles	290
14.3	Nombre de valeurs propres positives . . . . .	294
14.3.1	Distribution de $\mathcal{N}_\eta$ . . . . .	295
14.3.2	Retour à $\mathcal{N}_+$ . . . . .	296
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>299</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>303</b>
	<b>Mes articles</b>	<b>309</b>



---

---

# Introduction

---

Cette thèse est consacrée à l'étude des matrices aléatoires et de quelques-unes de leurs nombreuses applications en physique. La théorie des matrices aléatoires a initialement été introduite par E. P. Wigner dans le contexte de la physique nucléaire [Wig51]. Les niveaux excités d'un gros noyau atomique sont très denses, leurs corrélations sont importantes. Les interactions entre nucléons sont alors bien trop nombreuses et trop complexes pour que ces niveaux d'énergie puissent être étudiés analytiquement dans les détails. Wigner a suggéré alors de modéliser le Hamiltonien d'un tel gros noyau atomique par une matrice aléatoire, c'est-à-dire une matrice à coefficients aléatoires. Le noyau est représenté ainsi par une "boîte noire" : on suppose que les nucléons interagissent de façon complètement aléatoire. Cette approche est similaire à la démarche de la physique statistique qui modélise les positions et vitesses des particules dans un système de grande taille (par exemple les atomes d'un gaz) par des quantités aléatoires. Avec cette description on peut estimer la probabilité de trouver une particule à tel endroit avec telle vitesse mais on ne peut pas suivre la trajectoire d'une particule donnée. En modélisant le Hamiltonien d'un noyau atomique par une matrice aléatoire, on ne peut donc pas calculer la position exacte des niveaux d'énergie de tel ou tel noyau, mais on peut espérer décrire des propriétés statistiques des noyaux atomiques. La théorie des matrices aléatoires s'est rapidement révélée être une bonne description locale des niveaux de haute énergie des gros noyaux atomiques. En effet, on observe dans ces noyaux une répulsion entre les niveaux d'énergie voisins. Or de façon similaire, les valeurs propres  $\lambda_i$  d'une matrice aléatoire à coefficients indépendants se repoussent au sens où la densité de probabilité  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  s'annule quand  $\lambda_i = \lambda_j$  pour un couple  $(i, j)$  tel que  $i \neq j$ .

Depuis lors, la théorie des matrices aléatoires a trouvé de très nombreuses applications dans des contextes aussi divers qu'inattendus tels que la théorie des nombres, le chaos quantique, les systèmes désordonnés, les marches aléatoires évitantes ou encore la chromodynamique quantique (QCD) sur réseau. Je présente ci-dessous quelques-unes de ces applications qui font de la théorie des matrices aléatoires un domaine de recherche actuel très actif et fascinant.

Issue de la théorie des nombres, la fonction zeta de Riemann présente un lien très fort avec la théorie des matrices aléatoires. La fonction zeta de Riemann est définie sur le demi-plan complexe  $\text{Re}(s) > 1$  par  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$  où  $p$  parcourt les nombres premiers. Ainsi la fonction zeta de Riemann est étroitement liée à la répartition des nombres premiers parmi les entiers. Elle se prolonge par continuation analytique à

tout le plan complexe.  $\zeta(s)$  a alors un pôle simple en  $s = 1$  et des zéros en  $s = -2, -4, \dots$  (zéros “triviaux”). Ses autres zéros sont situés dans la bande  $0 < \text{Re}(s) < 1$ . La célèbre hypothèse de Riemann dit que ces zéros non triviaux sont tous situés sur la droite  $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ . On note  $\frac{1}{2} \pm it_n$  les zéros non triviaux de  $\zeta(s)$  ( $t_1 < t_2 < \dots$ ). Divers théorèmes suggèrent que les “zéros dépliés” (unfolded zeros)  $w_n = \frac{t_n}{2\pi} \ln\left(\frac{t_n}{2\pi}\right)$  de  $\zeta(s)$  présentent les mêmes propriétés statistiques que les valeurs propres d’une matrice aléatoire de grande taille.

En physique, une des applications importantes des matrices aléatoires est le chaos quantique. Le comportement dynamique d’un système classique est très différent selon que ce système est intégrable ou non. Un système est intégrable quand il présente autant de constantes du mouvement que de degrés de liberté, dans ce cas on peut explicitement résoudre les équations du mouvement et les trajectoires sont régulières quasi-périodiques. A l’opposé, quand il n’y a aucune autre constante du mouvement que l’énergie, le système est chaotique. Dans ce cas, les trajectoires sont très sensibles aux conditions initiales : une très légère différence entre deux conditions initiales conduira à deux trajectoires complètement différentes. Bien qu’un tel système soit complètement déterministe, les trajectoires semblent aléatoires. Un exemple de système chaotique est le stade à deux dimensions : la dynamique d’une particule classique libre dans un billard en forme de stade (deux parois rectilignes parallèles, deux parois convexes en forme de demi-cercle), avec chocs élastiques sur les bords du stade, est chaotique. Souvent les systèmes sont intermédiaires entre les deux situations extrêmes (intégrable et chaotique), leur dynamique est dite mixte. Les systèmes quantiques dits chaotiques sont ceux dont la version classique est chaotique. Ils présentent des propriétés très différentes des systèmes intégrables quantiques. Leurs propriétés sont en fait bien décrites par la théorie des matrices aléatoires : l’idée est de décrire le Hamiltonien d’un système quantique chaotique par une matrice aléatoire. Il se trouve que les états propres du Hamiltonien dans un système chaotique présentent effectivement la même propriété de répulsion entre deux niveaux très proches que les valeurs propres d’une matrice aléatoire. Cette propriété caractéristique contraste fortement avec le cas des systèmes intégrables.

La théorie des matrices aléatoires apparaît également dans le contexte des systèmes désordonnés (verres, verres de spin, etc) où l’on modélise l’effet des impuretés par un potentiel aléatoire. Par exemple, dans le cas d’un paysage de potentiel aléatoire à  $N$  dimensions  $V(x_1, \dots, x_N)$  où  $\{x_1, \dots, x_N\}$  est une configuration du système (par exemple des spins continus), la stabilité des points stationnaires est décrite par les valeurs propres de la matrice hessienne  $H_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ , qui est donc une matrice aléatoire.

La théorie des matrices aléatoires a également trouvé récemment des applications dans des contextes assez surprenants comme celui des marcheurs aléatoires dits vicieux étudiés aussi bien en mathématiques qu’en physique. Ce sont des marcheurs aléatoires à une dimension (ou des mouvements browniens à une dimension) dont les trajectoires ne peuvent pas se croiser. Ce modèle introduit par P. G. de Gennes a beaucoup été étudié, en particulier par M. E. Fisher qui lui a donné son nom. M. E. Fisher décrit ces marcheurs comme des hommes ivres et méchants (“vicious”) se promenant une arme à la main et s’entre-tuant lorsqu’ils se rencontrent. Seuls survivent à la fin les marcheurs qui ne se sont pas croisés. On peut montrer que dans ce modèle de marcheurs vicieux la distribution jointe des positions des marcheurs à un instant donné (sachant qu’ils ont tous survécu jusqu’à ce temps-là) est exactement la distribution des valeurs propres d’une matrice aléatoire. La répulsion des valeurs propres caractéristique des matrices aléatoires

traduit ici la contrainte de non-croisement des marches aléatoires.

Dans ma thèse, je me suis intéressée à plusieurs applications des matrices aléatoires, en particulier en physique statistique (marcheurs vicieux, systèmes désordonnés) et en physique quantique (intrications pour des états quantiques aléatoires), mais également à des propriétés mathématiques de ces matrices (valeur propre maximale, nombre de valeurs propres positives, etc). Sur le plan technique, j'ai été amenée à comprendre et développer un certain nombre de méthodes spécifiques de la théorie des matrices aléatoires. En particulier, j'ai beaucoup travaillé avec la technique du gaz de Coulomb qui consiste à voir les valeurs propres d'une matrice aléatoire comme les charges d'un gaz de Coulomb à deux dimensions. Dans cette représentation, la répulsion entre les valeurs propres se traduit par l'interaction coulombienne répulsive entre deux charges de même signe. Cette méthode conduit en général à des équations intégrales dont la résolution repose souvent sur l'analyse complexe. J'ai aussi étudié certains problèmes à l'aide d'autres méthodes comme celle des polynômes orthogonaux ou encore celle des "équations de boucle" et l'analyse complexe. Enfin j'ai effectué un certain nombre de simulations numériques pour vérifier et parfois deviner les résultats analytiques. J'ai développé et adapté à différentes situations un algorithme Monte Carlo Metropolis non standard pour tracer numériquement la distribution de diverses fonctions des valeurs propres d'une matrice aléatoire (valeur propre maximale, somme des valeurs propres, etc). En effet cette distribution est en général très piquée autour de sa moyenne quand la taille de la matrice est grande. Ainsi, pour voir les queues de la distribution j'avais besoin de simuler numériquement des événements très rares, ce qui n'est pas évident a priori.

L'organisation de ce manuscrit est la suivante.

Dans une **première partie introductive** (chapitres 1, 2 et 3), j'introduis la **théorie des matrices aléatoires** de façon générale. Je définis d'abord au chapitre 1 les principaux ensembles de matrices aléatoires. Les ensembles gaussiens introduits originellement par E. P. Wigner et F. J. Dyson consistent en des matrices hermitiennes à coefficients réels ou complexes aléatoires indépendants distribués selon la même loi gaussienne. Ces ensembles sont étroitement liés aux ensembles de matrices aléatoires unitaires distribuées selon une loi uniforme (mesure de Haar). Enfin je présente aussi les matrices de Wishart, qui sont des matrices aléatoires introduites initialement en statistique comme des matrices de covariance pour des données statistiques. J'ai rencontré ces matrices tout au long de ma thèse dans des contextes variés (interfaces browniennes, états aléatoires quantiques,...). Pour tous ces ensembles de matrices, la distribution des valeurs propres  $\lambda_i$  est connue et fait apparaître un déterminant de Vandermonde  $\prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i) = \det(\lambda_i^{j-1})$  qui provient du jacobien de changement de variables quand on passe des coefficients de la matrice à ses valeurs propres. Du fait de la présence de ce déterminant, les valeurs propres sont des variables aléatoires fortement corrélées, elles se repoussent comme je l'ai déjà mentionné plus haut.

Au chapitre 2, je définis la densité moyenne des  $N$  valeurs propres (pour une matrice aléatoire  $N \times N$ ), qui est aussi la distribution marginale d'une valeur propre, et j'explique comment la calculer dans la limite  $N \rightarrow \infty$  à l'aide d'une méthode de gaz de Coulomb. Cette méthode consiste à interpréter les valeurs propres comme les charges d'un gaz de Coulomb à deux dimensions. Je définis aussi les fonctions de corrélations à  $n$  points



(pour  $n$  valeurs propres) et je présente quelques résultats connus pour la fonction de corrélation à  $n = 2$  points ainsi que la technique des polynômes orthogonaux qui conduit à ces résultats.

Au chapitre 3, j'introduis brièvement la statistique des valeurs extrêmes qui décrit les événements rares. De nombreux phénomènes en physique, biologie ou mathématiques reposent sur de tels événements extrêmes et rares (séismes, tempêtes, inondations, records, mutations génétiques, prix sur les marchés financiers, etc). En particulier, une question importante est de savoir quelle est la distribution du maximum d'un ensemble de variables aléatoires  $X_i$ . Dans le cas d'un ensemble de variables aléatoires  $\{X_i\}_{1 \leq i \leq N}$  indépendantes identiquement distribuées, il existe trois classes d'universalité pour le maximum  $X_{\max}$  : quand  $N \rightarrow \infty$ , la loi de  $X_{\max}$  tend vers la distribution de Gumbel, Fréchet ou Weibull selon la forme de la loi des  $X_i$ . Ce résultat est l'analogie pour  $X_{\max}$  du théorème de la limite centrale pour la moyenne des  $X_i$  -pour laquelle il existe une unique classe d'universalité, la moyenne converge vers une loi gaussienne. Dans le cas de variables  $X_i$  corrélées, très peu de résultats sont connus. Les valeurs propres d'une matrice gaussienne sont fortement corrélées, elles ne tombent dans aucune des classes d'universalité ci-dessus, mais il est connu que la distribution de leur maximum  $\lambda_{\max}$  converge dans la limite  $N \rightarrow \infty$  ( $N$  est le nombre de valeurs propres) vers une loi dite de Tracy-Widom. On s'est aperçu depuis que la distribution de Tracy-Widom apparaît aussi dans divers modèles pas toujours directement reliés aux matrices aléatoires ("longest increasing subsequence", processus d'exclusion asymétrique ASEP, polymère dirigé, modèles de croissance stochastique...). La loi de Tracy-Widom décrit les fluctuations typiques de  $\lambda_{\max}$  près de sa moyenne. On peut aussi s'intéresser aux fluctuations de  $\lambda_{\max}$  sur une échelle beaucoup plus grande, c'est l'étude des grandes déviations qui décrivent des événements rares éloignés de la moyenne. Dans ce chapitre, j'énonce les résultats connus sur la distribution de la valeur propre maximale (loi de Tracy-Widom et ordre dominant des grandes déviations) ainsi que les résultats que nous avons obtenus récemment (calcul complet des grandes déviations) et que j'explique en détails aux chapitres 12 (grande déviation à droite de la moyenne et redérivation de Tracy-Widom) et 13 (grande déviation à gauche).

Dans une **deuxième partie** (chapitres 4, 5 et 6), je présente mes travaux sur des modèles de **marcheurs vicieux**, c'est-à-dire des marches aléatoires à une dimension (en version continue, ie mouvements browniens) dont les trajectoires sont contraintes de ne pas se croiser. Dans le chapitre 4, j'introduis le mouvement brownien ainsi qu'un processus brownien modifié "avec potentiel  $V$ ". Pour ces processus, je montre comment calculer la distribution marginale de la position à un temps donné. Pour cela, j'explique le formalisme de l'intégrale de chemin et de Feynman-Kac (beaucoup utilisé en physique) qui permet de transformer le modèle classique de mouvement brownien avec potentiel  $V$  en un modèle de particule quantique dans un potentiel externe  $V$ . Enfin j'étends ce formalisme au cas de  $N$  mouvements browniens indépendants ou avec contraintes de non-croisement ("marcheurs vicieux").

Dans le chapitre 5, je présente l'étude d'un modèle d'interfaces fluctuantes qui se ramène à un modèle de mouvements browniens vicieux avec potentiel. Ce modèle est le premier que j'ai étudié pendant ma thèse [NM09]. J'ai pu montrer grâce au formalisme de Feynman-Kac que la distribution transverse des hauteurs des interfaces (ie la distribution des positions des marcheurs à un instant donné) est donnée à un changement de variables près par la distribution des valeurs propres d'une matrice aléatoire de Wishart

(ou gaussienne, selon le choix du potentiel). J'ai ainsi pu utiliser des résultats et des techniques issus de la théorie des matrices aléatoires pour calculer un certain nombre de propriétés statistiques des interfaces : densité, hauteur maximale, hauteur minimale, position du centre de masse. En particulier j'ai montré en utilisant une méthode de gaz de Coulomb que la distribution du centre de masse des interfaces présente deux régimes avec une très faible non-analyticité au point de transition -une singularité essentielle. Ces régimes sont la conséquence directe d'une transition de phase dans le gaz de Coulomb associé.

Enfin, le chapitre 6 est consacré à l'étude du processus de Pearcey et à un gaz de Coulomb généralisé. C'est un travail que j'ai effectué selon une idée originale de Grégory Schehr et de mon directeur de thèse Satya Majumdar, mais qui n'a jamais été publié. Le processus de Pearcey est un modèle de marcheurs vicieux qui commencent tous au même point et qui finissent en deux points  $\pm a$  : les  $N/2$  premiers marcheurs finissent en  $+a$ , les  $N/2$  derniers marcheurs en  $-a$ . On peut montrer que la distribution jointe des positions des marcheurs à un instant donné est la même que celle des valeurs propres d'une matrice gaussienne avec terme de source supplémentaire. Ce processus présente comme le modèle de matrices associé une transition de phase à un temps critique  $t_c$  : pour  $t < t_c$  la densité moyenne de la position d'un marcheur a un support fini connexe ; pour  $t > t_c$ , cette densité a un support fini fait de deux segments disjoints. J'ai pu calculer la densité moyenne au point critique  $t_c$  pour le processus de Pearcey ainsi que pour un gaz de Coulomb généralisé fait de deux types de charges et qui présente une transition similaire.

Dans une **troisième partie** (chapitres 7, 8, 9 et 10), je me place dans un contexte très différent, celui des **états quantiques aléatoires et de leur intrication** qui est également relié à la théorie des matrices aléatoires. Dans le chapitre 7, j'introduis la notion d'intrication quantique et dans le chapitre 8 celle d'état quantique aléatoire, pour pouvoir arriver chapitre 9 au coeur du problème auquel je me suis intéressé : la distribution de l'entropie d'intrication pour des états aléatoires.

Dans le chapitre 7, j'introduis la notion d'intrication quantique. Je donne quelques exemples de ses applications en particulier dans le domaine du calcul quantique (ordinateur quantique). Il est utile d'avoir une version plus quantitative de l'intrication. Pour un état pur (ie vecteur de l'espace de Hilbert) dans un système fait de deux sous-systèmes ("bipartite"), l'entropie d'intrication est une bonne mesure de l'intrication entre les deux sous-systèmes. Habituellement, il s'agit de l'entropie de von Neumann qui est la version quantique de l'entropie de Shannon, mais on peut aussi de façon plus générale définir les entropies dites de Renyi. Pour un mélange statistique d'états purs -ou état quantique généralisé- la situation est plus compliquée, il faut faire appel à d'autres mesures d'intrication (par exemple l'entropie de formation ou encore la distance aux états non-intriqués).

Dans le chapitre 8, j'introduis la notion d'état aléatoire quantique. L'idée est de décrire l'état d'un gros système complexe par un état très général, un état aléatoire. Les états aléatoires peuvent être aussi vus comme des états de référence auxquels on peut comparer des états physiques réels. Les états purs aléatoires sont des vecteurs de norme 1 (dans un espace de Hilbert) aléatoires distribués selon la mesure de Haar, c'est-à-dire selon la loi uniforme. C'est l'unique façon de choisir au hasard des états purs si on impose l'invariance par changement de base. Dans le cas des états de mélanges statistiques, qui sont décrits par leur matrice densité, l'invariance par changement de base impose

seulement que la loi ne dépende que des valeurs propres de la matrice densité. Cela laisse une certaine liberté dans le choix de la mesure de probabilité pour ces états aléatoires.

Le chapitre 9 est consacré à l'étude de la distribution de l'entropie d'intrication pour des états purs aléatoires dans un système quantique bipartite  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . C'est le deuxième problème important auquel je me suis attaquée pendant ma thèse [NMV10, NMV11]. Pour un état pur aléatoire dans un système bipartite  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , la matrice densité  $\rho_A$  qui décrit le sous-système  $A$  ("matrice densité réduite") est une matrice aléatoire de Wishart avec une contrainte supplémentaire (sa trace doit être égale à 1). J'ai utilisé une méthode de gaz de Coulomb issue de la théorie des matrices aléatoires pour calculer la distribution de l'entropie d'intrication qui est une fonction des valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\rho_A$ . J'ai mis en évidence aussi bien analytiquement que numériquement deux transitions de phase dans le gaz de Coulomb associé qui ont pour conséquence l'existence de trois régimes différents et de deux points de transition avec une faible non-analyticité de la distribution de l'entropie en ces points de transition. En particulier j'ai montré que la seconde transition est caractérisée par le saut brutal d'une des valeurs propres (ie d'une charge du gaz de Coulomb), qui devient soudain beaucoup plus grande que les autres.

Au chapitre 10, je présente des résultats que j'ai obtenus très récemment sur des états de Bures aléatoires qui sont un cas particuliers d'états mélanges statistiques aléatoires. Ces résultats sont seulement partiels et ne sont pas encore publiés.

Dans une **quatrième partie** (chapitres 11, 12 et 13), je m'intéresse à certaines **propriétés des matrices aléatoires comme le nombre de valeurs propres positives ou la valeur propre maximale**. Dans le chapitre 11, je présente l'étude de la distribution du nombre de valeurs propres positives d'une matrice aléatoire gaussienne effectuée à l'aide d'une méthode de gaz de Coulomb. C'est un travail que j'ai réalisé avec mon directeur de thèse et en collaboration avec Pierpaolo Vivo et Antonello Scardicchio [MNSV09, MNSV11]. En particulier le gaz de Coulomb associé au problème n'est pas habituel car la densité de charge est ici à support fini fait de deux segments disjoints contrairement au cas habituel en matrices aléatoires ou la densité est à support fini fait d'un seul segment. Je présente dans ce chapitre deux méthodes pour résoudre les équations dans ce cas, dont l'une que j'ai trouvée moi-même.

Les deux chapitres 12 et 13 sont consacrés à l'étude de la valeur propre maximale d'une matrice aléatoire gaussienne. Au chapitre 12, j'explique comment, suivant la suggestion de mon directeur de thèse Satya, j'ai pu adapter une méthode développée par D. J. Gross et A. Matytsin dans le contexte de la chromodynamique quantique pour calculer la grande déviation à droite (ie à droite de la moyenne) pour la valeur propre maximale  $\lambda_{\max}$  d'une matrice gaussienne de taille  $N \times N$  [NM11]. C'est une méthode de polynômes orthogonaux définis sur un intervalle semi-infini qui permet d'obtenir les premiers ordres dans la limite  $N \rightarrow \infty$  pour la grande déviation de  $\lambda_{\max}$  (l'ordre dominant était déjà connu, il avait été calculé par méthode de gaz de Coulomb, ici on calcule aussi les ordres suivants). Cette méthode m'a également permis de trouver une dérivation relativement élémentaire de la loi de Tracy-Widom (qui décrit les petites fluctuations typiques au voisinage de la moyenne).

Dans le chapitre 13, j'explique comment nous avons pu dans une collaboration avec Gaëtan Borot et Bertrand Eynard [BEMN10] calculer les premiers ordres quand  $N \rightarrow \infty$  de la grande déviation à gauche de la valeur propre maximale d'une matrice gaussienne  $N \times N$ . Ce travail s'appuie sur une méthode développée par Bertrand Eynard qui permet

de calculer des intégrales de matrices sous forme d'un développement en puissances de  $1/N$ . Cette technique s'appuie fortement sur l'analyse complexe.

La **dernière partie** (chapitre 14) est consacrée aux **simulations numériques** que j'ai effectuées pendant ma thèse. La plupart des problèmes que j'ai étudiés dans ma thèse se ramènent d'une façon ou d'une autre à la théorie des matrices aléatoires, en général à des modèles de matrices pour lesquels la distribution des valeurs propres est connue et pour lesquels on s'intéresse à la distribution d'une fonction de ces valeurs propres. Pour vérifier et parfois deviner les résultats analytiques, j'ai effectué des simulations numériques de type Monte Carlo. L'idée est d'échantillonner la distribution des valeurs propres qui est supposée connue pour ensuite construire numériquement des histogrammes de diverses fonctions des valeurs propres (densité, valeur propre maximale,...). Je présente d'abord l'algorithme Monte Carlo Metropolis standard, qui est en fait une chaîne de Markov dans l'espace des configurations. Si l'algorithme vérifie un certain nombre de conditions, on peut montrer que la chaîne de Markov converge vers la loi stationnaire voulue. Ainsi après un grand nombre d'itérations l'algorithme génère des configurations tirées approximativement selon la loi voulue (la loi stationnaire). J'explique alors comment adapter cet algorithme au cas des valeurs propres d'une matrice aléatoire gaussienne comme me l'avait suggéré Massimo Vergassola. Cependant la distribution de fonctions des valeurs propres telles que la valeur propre maximale ou la somme des valeurs propres est en général très piquée autour de sa moyenne quand le nombre de valeurs propres est élevé. Il est alors difficile d'atteindre numériquement les queues de la distribution qui représentent des événements très peu probables. J'ai donc dû modifier l'algorithme, l'idée était de s'appuyer sur les probabilités conditionnelles pour forcer l'algorithme à atteindre des zones éloignées. Dans la suite du chapitre, j'explique comment j'ai adapté et modifié à nouveau l'algorithme dans deux contextes différents : l'entropie d'intrication pour un état aléatoire quantique où les effets de taille finie sont très importants, et le nombre de valeurs propres positives qui a l'inconvénient d'être une quantité discrète (à valeurs entières).

Enfin, la **conclusion** évoque quelques perspectives sur les suites possibles de ces travaux.

## QUELQUES NOTATIONS

Je considère dans l'essentiel du manuscrit des **matrices aléatoires hermitiennes** de taille  $N \times N$  et de valeurs propres  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Je m'intéresserai surtout à la limite  $N \rightarrow \infty$ .

J'utiliserai les symboles suivants pour décrire le **comportement asymptotique** de diverses fonctions :

- $\sim$  équivalent au sens mathématique
- $\approx$  équivalent logarithmique ( $f \approx g$  ssi  $\ln f \sim \ln g$ )
- $\asymp$  ordre de grandeur dans la limite  $N$  grand

Le symbole  $\asymp$  (ou grand theta dans la notation de Landau) signifie plus précisément :  $f \asymp g$  si et seulement si  $f = O(g)$  et  $g = O(f)$ . En pratique, on le rencontrera souvent sous la forme  $\lambda \asymp N^\alpha$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , ce qui correspondra en général à  $\lambda \sim kN^\alpha$

pour un certain  $k$  : cela signifiera qu'une valeur propre de la matrice aléatoire en question se comporte typiquement comme  $N^\alpha$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . Dans ce cas on notera  $x_i = \frac{\lambda_i}{N^\alpha}$  les valeurs propres "rescalées" que j'appellerai valeurs propres **adimensionnées**.

J'introduirai des **mesures** sur certains ensembles de matrices, c'est-à-dire des mesures sur les coefficients de ces matrices. La mesure "plate" pour les matrices hermitiennes (ou symétriques)  $H$  sera notée  $dH$  (cf section 1.1). La mesure uniforme sur l'espace des matrices unitaires (resp. orthogonales) dite mesure de Haar sera notée  $\mu(dU)$  (resp.  $\mu(dO)$ ), cf section 1.3.

La notation  $\delta H$  indiquera la matrice de coefficients infinitésimaux  $dH_{ij}$ .

Le paramètre  $\beta$  sera utilisé comme généralement en physique statistique pour désigner l'inverse d'une **température** :  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  où  $T$  est la température et  $k_B$  la constante de Boltzmann. Je n'utiliserai pas la notation  $T$  comme température dans le texte. La notation  $T$ , de même que  $t$  fera plutôt référence à un temps. L'indice de Dyson des matrices aléatoires, cf section 1.2, est noté aussi  $\beta$  car il a une interprétation comme température inverse (cf gaz de Coulomb chapitre 2).

Pour une matrice aléatoire,  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  représentera la densité de **probabilité** jointe de ses valeurs propres. Plus généralement  $\mathcal{P}$  indiquera une densité de probabilité tandis que  $\mathbb{P}$  représentera une probabilité.

J'introduirai au chapitre 2 la **densité** des valeurs propres  $\rho(\lambda, N) = \frac{1}{N} \sum_i \delta(\lambda - \lambda_i)$ . La densité moyenne  $\rho_N(\lambda) = \langle \rho(\lambda, N) \rangle$  (où  $\langle \dots \rangle$  indique la moyenne par rapport à la loi  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ ) n'est rien d'autre que la distribution marginale  $\mathcal{P}(\lambda)$  d'une valeur propre. J'introduirai aussi la densité adimensionnée  $\rho(x) = N^\alpha \rho(xN^\alpha, N)$  si  $\lambda \asymp N^\alpha$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$ .

Enfin on rencontrera souvent le déterminant de **Vandermonde** :

$$\Delta(\lambda_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\lambda_j - \lambda_i) = \det (\lambda_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq N}$$

Première partie

---

MATRICES ALÉATOIRES

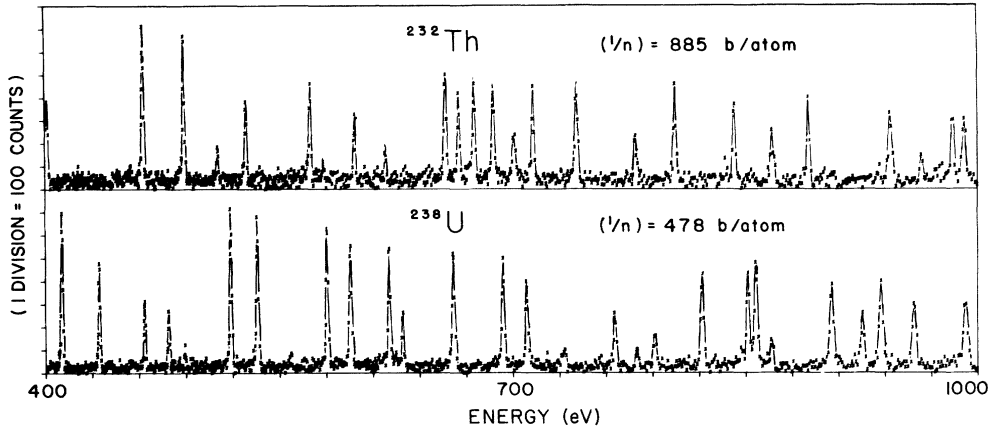


# Principaux ensembles de matrices aléatoires

---

C'est **Wigner** qui a introduit la **théorie des matrices aléatoires**, dans le contexte de la **physique nucléaire** [Wig51]. La figure 1.1 montre le spectre d'excitation d'un noyau d'atome de  $^{232}\text{Th}$  et de  $^{238}\text{U}$  obtenu expérimentalement par spectroscopie à résonance neutronique. Les pics de résonance indiquent les niveaux d'énergie du noyau. Les niveaux de basse énergie sont bien espacés, ce qui permet de les décrire par un modèle de nucléons indépendants dans un puits de potentiel moyen, c'est-à-dire un modèle de champ moyen. Les niveaux de haute énergie sont beaucoup plus rapprochés les uns des autres. Les processus entre états fortement excités font intervenir un grand nombre de nucléons, les *interactions* sont alors trop *complexes* pour être décrites simplement en termes d'états individuels comme dans le cas des états peu excités. On peut cependant espérer déterminer des *propriétés statistiques moyennes* des niveaux excités des gros noyaux. **Wigner** proposa ainsi de modéliser les propriétés spectrales du Hamiltonien très complexe d'un noyau atomique par celles d'une *matrice aléatoire*, c'est à dire une matrice à coefficients aléatoires, de grande taille. Plus précisément, il suggéra de décrire le Hamiltonien du système par un ensemble de matrices aléatoires, une dans chacun des sous-espaces auxquels le système est restreint par la conservation de quantités globales comme le spin total. On représente ainsi le gros noyau par une "boîte noire", comme un ensemble de nucléons interagissant de façon aléatoire. Cette approche est similaire à celle de la *physique statistique* pour un gaz ou un solide fait d'une grande quantité d'atomes dont on ne peut pas décrire précisément les vitesses et positions. La théorie des matrices aléatoires est apparue rapidement être une bonne description locale des niveaux fortement excités des *gros noyaux atomiques*. Il se trouve en effet que les écarts entre niveaux d'énergie réels des noyaux sont bien décrits par les écarts entre valeurs propres d'une matrice aléatoire. On observe en particulier une répulsion des niveaux d'énergie qui est typique du comportement des valeurs propres d'une matrice aléatoire. Cette description a ainsi connu un grand succès dans le domaine de la physique nucléaire. Depuis lors, la *théorie des matrices aléatoires* s'est développée comme un domaine de recherche à part entière et dont les applications à divers domaines de physique, mathématiques ou finance n'ont cessé de se multiplier.





**Figure 1.1** – Sections efficaces obtenues par résonance neutronique pour le thorium 232 et l’uranium 238. [source : Rahn et al [RCH<sup>+</sup> 72]]

Dans ce chapitre introductif je présente les ensembles de matrices aléatoires les plus connus. Je commence dans la section 1.1 par les premiers ensembles de matrices aléatoires introduits historiquement à savoir les ensembles gaussiens GOE (“Gaussian Orthogonal Ensemble”), GUE (“Gaussian Unitary Ensemble”) et GSE (“Gaussian Symplectic Ensemble”). J’explique ensuite dans la section 1.2 comment dériver la distribution des valeurs propres de ces matrices aléatoires gaussiennes. Dans la section 1.3, je définis la mesure de Haar, qui est essentiellement la mesure uniforme sur les matrices unitaires. Cette mesure correspond aux ensembles de matrices dits “circulaires”. Enfin je présente dans la section 1.4 les matrices de Wishart (parfois appelées “ensemble de Laguerre”). Ce sont des matrices de covariance aléatoires et que j’ai rencontrées durant ma thèse dans des contextes très variés.

## 1.1 ENSEMBLES GAUSSIENS

La structure microscopique d’un *gros noyau atomique* est très complexe. Cependant on connaît certaines constantes du mouvement liées à des quantités globales conservées telles que le spin total, la parité, etc. À ces quantités sont associés des nombres quantiques conservés. Le Hamiltonien du système prend alors une forme diagonale par blocs. Suivant l’idée de Wigner, on modélise alors chacun des blocs par une *matrice aléatoire (hermitienne) H, de grande taille*, à coefficients indépendants -on remplace les interactions complexes entre nucléons par des interactions aléatoires.

Suivant la *symétrie physique* sous-jacente, on distingue habituellement trois types de symétrie pour les matrices aléatoires, initialement introduits par Dyson [Dys62, Meh91]. Ces trois symétries conduisent naturellement aux trois *ensembles gaussiens* usuels comme on va le voir ci-dessous. Je m’inspire pour la présentation de ces ensembles du livre de Mehta [Meh91], sauf pour l’ensemble GSE que j’ai choisi de présenter différemment.

### 1.1.1 Ensemble gaussien unitaire (GUE)

L’ensemble gaussien unitaire ou *Gaussian Unitary Ensemble (GUE)* correspond au cas le plus général sans symétrie particulière. La **matrice**  $H$ , de taille  $N \times N$ , est à

coefficients complexes et **hermitienne** :  $H^\dagger = H$  (où  $H^\dagger$  dénote le conjugué hermitique de  $H$ ).

On veut choisir une distribution de probabilité  $\mathcal{P}(H)dH$ , où  $dH$  est la mesure plate sur les matrices hermitiennes  $H$  :

$$dH = \prod_{i=1}^N dH_{ii} \prod_{1 \leq i < j \leq N} d\text{Re}H_{ij} d\text{Im}H_{ij} \quad (1.1)$$

$H$  étant hermitienne, on a en effet  $H_{ii}$  réel et  $H_{ji} = H_{ij}^*$  (où l'étoile indique la conjugaison complexe).

Toute matrice hermitienne  $H$  est diagonalisable en base orthonormée, elle peut donc s'écrire  $H = U\Lambda U^\dagger$  où  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  est la matrice diagonale des valeurs propres de  $H$  (réels  $\lambda_i$ ) et où  $U$  est une matrice unitaire (ie  $U^\dagger = U^{-1}$ ). On notera que la mesure  $dH$  ci-dessus est invariante par changement de base unitaire  $H \rightarrow UHU^{-1}$  où  $U$  est une matrice unitaire quelconque (ie  $U^\dagger = U^{-1}$ ), ce qui signifie que  $dH$  ne dépend pas des vecteurs propres de  $H$  mais seulement des *valeurs propres* - qui représentent les niveaux d'énergie du noyau atomique.

Il existe en fait un lien profond entre les matrices hermitiennes et unitaires. L'ensemble des matrices antihermitiennes  $N \times N$ , ou de façon équivalente l'ensemble des matrices  $iH$  où  $H$  est hermitienne, forme l'algèbre de Lie associée au groupe de Lie  $\mathcal{U}(N)$  des matrices unitaires  $N \times N$  : les matrices antihermitiennes sont les générateurs du groupe de Lie  $\mathcal{U}(N)$ . Cela signifie que toute matrice  $U \in \mathcal{U}(N)$  peut être écrite comme l'exponentielle d'une matrice antihermitienne :  $U = e^{iH}$  où  $H = H^\dagger$ . Physiquement, à un système quantique décrit par un Hamiltonien  $H$  (ie une matrice hermitienne  $H$ ) est associé l'opérateur d'évolution dans le temps  $U(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$  (au temps  $t$ ) qui est une matrice unitaire. C'est pourquoi on parle d'"ensemble unitaire" pour les matrices aléatoires hermitiennes.

On veut choisir une mesure "naturelle"  $\mathcal{P}(H)dH$  sur les matrices hermitiennes  $H$ . D'après les considérations ci-dessus, il est raisonnable d'imposer sur cette mesure de probabilité les deux conditions suivantes :

- **Invariance par changement de base unitaire** (ie  $\mathcal{P}(H)$  ne dépend que des valeurs propres de  $H$ ) :

$$\mathcal{P}(UHU^\dagger) = \mathcal{P}(H) \quad \text{pour toute matrice unitaire } U \text{ (ie } U^\dagger = U^{-1}) \quad (1.2)$$

- **Indépendance statistique des coefficients**  $H_{ii}$  ( $1 \leq i \leq N$ ),  $\text{Re}H_{ij}$  et  $\text{Im}H_{ij}$  ( $1 \leq i < j \leq N$ ) -qui constituent les coefficients libres de la matrice hermitienne  $H$  :

$$\mathcal{P}(H) = \prod_{i=1}^N p_i(H_{ii}) \prod_{1 \leq i < j \leq N} p_{ij}^{(1)}(\text{Re}H_{ij}) p_{ij}^{(2)}(\text{Im}H_{ij}) \quad (1.3)$$

Les deux conditions précédentes sont en fait très contraignantes, elles imposent la forme de  $\mathcal{P}(H)$ . On peut en effet montrer que la **loi**  $\mathcal{P}(H)$  est nécessairement **gaussienne** :

$$\mathcal{P}(H)dH = e^{-a\text{Tr}H^2 + b\text{Tr}H + c} dH \quad (1.4)$$

où  $a > 0$ ,  $b$  et  $c$  sont réels,  $c$  joue le rôle de constante de normalisation. On notera que la mesure plate  $dH$  donnée dans l'Eq. (1.1), bien que satisfaisant les deux contraintes ci-dessus (1.2) et (1.3), ne peut pas être directement utilisée comme mesure de probabilité car elle n'est pas normalisable. C'est la raison pour laquelle on doit avoir  $a > 0$  dans l'Eq. (1.4).

Comme  $\text{Tr}H^2 = \text{Tr}(H^\dagger H) = \sum_{i,j} |H_{i,j}|^2 = \sum_{i,j} (\text{Re}H_{i,j})^2 + (\text{Im}H_{i,j})^2$  et  $\text{Tr}H = \sum_i H_{ii}$ , les **coefficients**  $H_{ii}$  ( $1 \leq i \leq N$ ),  $\text{Re}H_{ij}$  et  $\text{Im}H_{ij}$  ( $1 \leq i < j \leq N$ ) sont des **variables aléatoires réelles gaussiennes indépendantes**.

Un bon choix de l'origine et de l'unité des énergies (translation et dilatation de  $H$ ) permet de se ramener sans restriction de généralité à :

$$\mathcal{P}(H) = C_2 e^{-\text{Tr}H^2} \quad (1.5)$$

L'ensemble gaussien unitaire que nous venons de décrire est le cas le plus général, sans symétrie particulière. Les deux autres ensembles gaussiens usuels sont obtenus lorsqu'il y a symétrie par renversement du temps.

### 1.1.2 Ensemble gaussien orthogonal (GOE)

On suppose maintenant qu'il y a symétrie par renversement du temps. On peut montrer que si le spin total du noyau que l'on veut décrire est entier (boson) ou bien si on a invariance par rotation spatiale, on obtient l'ensemble gaussien orthogonal ou *Gaussian Orthogonal Ensemble* (**GOE**). Cet ensemble est caractérisé par des **matrices  $H$  réelles symétriques** :  $H = H^T$  où  $H^T$  est la transposée de  $H$ . On veut, comme pour le GUE, choisir une distribution de probabilité  $\mathcal{P}(H)dH$  où  $dH$  est la mesure plate sur les matrices réelles symétriques  $H$  :

$$dH = \prod_{1 \leq i \leq j \leq N} dH_{ij} \quad (1.6)$$

$H$  étant symétrique, ses coefficients sont réels et on a  $H_{ij} = H_{ji}$ .

Une matrice symétrique  $H$  est *diagonalisable* en base orthonormée, elle peut donc s'écrire  $H = O\Lambda O^T$  où  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  est la matrice diagonale des valeurs propres de  $H$  (réels  $\lambda_i$ ) et où  $O$  est une matrice réelle orthogonale (ie  $O^T = O^{-1}$ ). La mesure plate  $dH$  donnée dans l'Eq. (1.6) ci-dessus est invariante par changement de base orthogonal  $H \rightarrow OHO^{-1}$ , où  $O$  est une matrice orthogonale quelconque (ie  $O^T = O^{-1}$ ). Comme pour le GUE, elle dépend donc uniquement des *valeurs propres* de  $H$ . Du fait de cette symétrie, on parle donc d'“*ensemble orthogonal*” pour les matrices symétriques aléatoires.

Comme dans le cas GUE, on veut choisir une mesure “naturelle”  $\mathcal{P}(H)dH$  sur les matrices symétriques  $H$ . On impose de façon similaire les deux conditions suivantes :

- **Invariance par changement de base orthogonal** (ie  $\mathcal{P}(H)$  ne dépend que des valeurs propres de  $H$ ) :

$$\mathcal{P}(OHO^T) = \mathcal{P}(H) \quad \text{pour toute matrice orthogonale } O \text{ (ie } O^T = O^{-1}) \quad (1.7)$$

- **Indépendance statistique des coefficients**  $H_{ij}$  pour  $1 \leq i \leq j \leq N$  :

$$\mathcal{P}(H) = \prod_{i \leq j} p_{ij}(H_{ij}) \quad (1.8)$$

Les deux conditions précédentes imposent la forme de  $\mathcal{P}(H)$ , comme pour le GUE. On obtient à nouveau une **loi gaussienne** :

$$\mathcal{P}(H) = e^{-a\text{Tr}H^2 + b\text{Tr}H + c} \quad (1.9)$$

où  $a > 0$ ,  $b$  et  $c$  sont réels. La distribution de  $H$  et de ses coefficients est gaussienne. A nouveau, une translation et un changement d'échelle permettent de choisir :

$$\mathcal{P}(H) = C_1 e^{-\frac{1}{2}\text{Tr}H^2} \quad (1.10)$$

Le choix du facteur  $1/2$  est *arbitraire*, il est seulement utile comme on le verra par la suite pour obtenir une notation unifiée sur les trois ensembles gaussiens.

### 1.1.3 Ensemble gaussien symplectique (GSE)

On suppose comme pour le GOE qu'il y a symétrie par renversement du temps. On peut montrer que dans le cas où le spin total est demi-entier (fermion) et qu'il n'y a pas d'invariance par rotation spatiale, on obtient l'ensemble gaussien symplectique ou *Gaussian Symplectic Ensemble* (**GSE**). Cet ensemble est caractérisé par des **matrices**  $H$  à coefficients complexes, de taille  $2N \times 2N$ , **hermitiennes autoduales**. L'opération de dualité, que l'on notera  $H \rightarrow H^R$  est définie ci-dessous dans l'équation (1.13).

#### 1.1.3.1 Dualité et groupe symplectique

On considère une matrice  $H$  de taille  $2N \times 2N$  que l'on écrira (représentation par blocs) :

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

où  $A, B, C$  et  $D$  sont des matrices  $N \times N$  à coefficients complexes. Dans cette notation, le conjugué hermitique de  $H$  s'écrit

$$H^\dagger = \begin{bmatrix} A^\dagger & C^\dagger \\ B^\dagger & D^\dagger \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

On définit également l'opération de **dualité**  $H \rightarrow H^R$ , qui correspond en fait au *renversement du temps* (dans le cas d'un spin demi-entier), de la façon suivante :

$$H^R = \begin{bmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{bmatrix} = -ZH^T Z \quad \text{où } Z = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

où  $H^T$  est la transposée de  $H$  et  $I$  la matrice identité de taille  $N \times N$ .  $Z$  vérifie  $Z^{-1} = -Z = Z^T$ . La dualité est une involution, ie  $(H^R)^R = H$  et vérifie  $(AB)^R = B^R A^R$  (comme la conjugaison hermitienne).

• Les **matrices hermitiennes autoduales** sont donc les matrices de la forme (1.11) qui vérifient  $H^\dagger = H = H^R$ , soit :

$$A^\dagger = A = D^T \quad \text{et} \quad C^\dagger = B = -B^T \quad (1.14)$$

• D'autre part, les **matrices symplectiques** sont les matrices  $S$  de taille  $2N \times 2N$  à coefficients complexes telles que  $S^T Z S = Z$ . Toute matrice symplectique est inversible

et a pour inverse  $S^{-1} = -ZS^T Z = S^R$ . Les matrices symplectiques forment un groupe de Lie noté  $Sp(2N)$ , qui a pour générateurs les matrices  $M$  anti-autoduales, ie telles que  $M^R \equiv -ZM^T Z = -M$ . Ici on considère le **groupe unitaire-symplectique** des matrices complexes  $S$  qui sont unitaires et symplectiques, ie  $S^\dagger = S^{-1} = S^R$ .

Toute **matrice hermitienne autoduale**  $H$ , ie telle que  $H^\dagger = H = H^R$ , peut être *diagonalisée* sous la forme :

$$H = S\Lambda S^R \quad (1.15)$$

où  $S$  est une *matrice unitaire symplectique*, ie  $S^\dagger = S^{-1} = S^R$  et où  $\Lambda$  est la matrice diagonale des valeurs propres de  $H$ . Les valeurs propres de  $H$  sont réelles et apparaissent par paires : chaque valeur propre  $\lambda_i$  est présente deux fois, soit  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N, \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ . Comme  $H$  est diagonalisable par les matrices symplectiques, on parle d’*ensemble symplectique* pour décrire les matrices aléatoires hermitiennes autoduales.

### 1.1.3.2 Distribution $\mathcal{P}(H)$ et GSE

Comme pour les ensembles de matrices précédents, on veut choisir une distribution de probabilité  $\mathcal{P}(H)dH$ . Il faut donc d’abord caractériser la **mesure plate  $dH$  pour les matrices  $H$  hermitiennes autoduales**. Pour cela, on considère une matrice  $H$  de taille  $2N \times 2N$  que l’on représente sous la forme (1.11) et on définit les matrices  $N \times N$  suivantes :

$$Q^{(0)} = \frac{A+D}{2}, \quad Q^{(1)} = \frac{A-D}{2i}, \quad Q^{(2)} = \frac{B-C}{2}, \quad Q^{(3)} = \frac{B+C}{2i} \quad (1.16)$$

$H$  est caractérisée de façon équivalente par les matrices  $\{A, B, C, D\}$  ou par les matrices  $\{Q^{(0)}, Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}\}$ .

$H$  est *hermitienne autoduale*, ie  $H^\dagger = H = H^R$ , si et seulement si  $A^\dagger = A = D^T$  et  $C^\dagger = B = -B^T$  (voir Eq. (1.14)), ce qui équivaut à  $Q^{(0)}$  réelle symétrique ( $(Q^{(0)})^T = Q^{(0)}$ ) et  $Q^{(1)}, Q^{(2)}$ , et  $Q^{(3)}$  réelles antisymétriques ( $(Q^{(l)})^T = -Q^{(l)}$  pour  $l = 1, 2, 3$ ). Au total, cela fait donc  $N(N+1)/2 + 3N(N-1)/2 = N(2N-1)$  paramètres pour définir une matrice hermitienne autoduale. Cette représentation avec les matrices  $Q^{(l)}$  correspond en fait à la représentation de  $H$  dans la base des *quaternions* (qui peuvent être choisies comme étant les matrices de Pauli). Dans la suite, on notera  $q_{ij}^{(l)}$  le coefficient de la  $i^{\text{ième}}$  ligne et  $j^{\text{ième}}$  colonne de la matrice  $Q^{(l)}$ , soit :  $Q_{ij}^{(l)} = q_{ij}^{(l)}$ .

Il est alors aisé de voir que la **mesure plate sur les matrices  $H$  hermitiennes autoduales de taille  $2N \times 2N$**  est donnée par :

$$dH = \prod_{1 \leq i \leq j \leq N} dq_{ij}^{(0)} \prod_{l=1}^3 \prod_{1 \leq i < j \leq N} dq_{ij}^{(l)} \quad \text{où } Q_{ij}^{(l)} = q_{ij}^{(l)} \quad (1.17)$$

En effet,  $Q^{(0)}$  est réelle symétrique et  $Q^{(1)}, Q^{(2)}$ , et  $Q^{(3)}$  sont réelles antisymétriques.

Comme pour les deux ensembles de matrices précédents (GUE et GOE), on impose sur  $\mathcal{P}(H)$  les deux conditions suivantes :

- **Invariance sous transformation symplectique unitaire** (ie  $\mathcal{P}(H)$  ne dépend que des valeurs propres de  $H$ ) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(SHS^R) &= \mathcal{P}(H) \quad \text{pour toute matrice symplectique unitaire } S \\ &\quad (\text{ie } S^R = S^{-1} = S^\dagger) \end{aligned} \quad (1.18)$$

- **Indépendance statistique des coefficients**  $q_{ij}^{(0)}$  pour  $1 \leq i \leq j \leq N$  et  $q_{ij}^{(l)}$  pour  $l = 1, 2, 3$  et  $1 \leq i < j \leq N$  :

$$\mathcal{P}(H) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq N} p_{ij}^{(0)}(q_{ij}^{(0)}) \prod_{l=1}^3 \prod_{1 \leq i < j \leq N} p_{ij}^{(l)}(q_{ij}^{(l)}) \quad (1.19)$$

Les deux conditions précédentes imposent la forme de  $\mathcal{P}(H)$ , comme pour le GUE et GOE. On obtient à nouveau une **loi gaussienne** :

$$\mathcal{P}(H) = e^{-a\text{Tr}H^2 + b\text{Tr}H + c} \quad (1.20)$$

où  $a > 0$ ,  $b$  et  $c$  sont réels. A nouveau, une translation et un changement d'échelle permettent de choisir :

$$\mathcal{P}(H) = C_4 e^{-2\text{Tr}H^2} \quad (1.21)$$

Le choix du facteur 2 est ici encore *arbitraire*.

### 1.1.4 Généralisation des ensembles gaussiens

Pour les trois symétries considérées ci-dessus (matrices hermitiennes, symétriques ou hermitiennes autoduales), on a vu que les contraintes d'*invariance par changement de base* (resp. unitaire, orthogonal ou symplectique) et d'*indépendance des coefficients* de la matrice imposent la **forme gaussienne** de la distribution  $\mathcal{P}(H)$  :

$$\mathcal{P}(H) = e^{-a\text{Tr}H^2 + b\text{Tr}H + c} \quad (1.22)$$

On peut **généraliser** ces ensembles de matrices en relâchant la contrainte d'indépendance des coefficients. Reste seule la contrainte d'*invariance par changement de base*, qui signifie que les seuls degrés de liberté sont les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice  $H$ . Il n'est pas très difficile de voir que ce postulat d'invariance équivaut à dire que  $\mathcal{P}(H)$  dépend *uniquement* des  $\text{Tr}H^n$  pour  $1 \leq n \leq N$  (où  $N$  est la taille de la matrice). En effet fixer les traces  $\text{Tr}H^n = \sum_i \lambda_i^n$  pour  $1 \leq n \leq N$  équivaut à fixer les fonctions symétriques des  $N$  racines  $\lambda_i$  du polynôme caractéristique de  $H$ . Un cas particulier intéressant est le suivant :

$$\mathcal{P}(H) = e^{-\text{Tr}V(H)} \quad \text{où} \quad V(x) = a_{2k}x^{2k} + \dots + a_1x + a_0 \quad (1.23)$$

Le "potentiel"  $V(x)$  est un polynôme de degré  $2k \leq N$  (le degré du polynôme doit être pair pour que la mesure  $\mathcal{P}(H)$  soit normalisable).  $a_0$  est une constante de normalisation telle que  $\int \mathcal{P}(H)dH = 1$  sur l'ensemble de matrices considéré (resp. hermitien, symétrique ou hermitien autodual).

Lorsque  $k = 1$ , on retrouve le cas gaussien. Pour les trois **ensembles gaussiens usuels** (resp. GUE, GOE et GSE), on se ramène habituellement par translation et dilatation (sans restreindre la généralité) à :

$$\mathcal{P}(H) = C_\beta e^{-\frac{\beta}{2}\text{Tr}H^2} \quad \text{où} \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{pour GOE} \\ 2 & \text{pour GUE} \\ 4 & \text{pour GSE} \end{cases} \quad (1.24)$$

$\beta$  est généralement appelé **indice de Dyson**. Le choix de la valeur de  $\beta$  (resp. 1, 2, 4 selon l'ensemble) est arbitraire à ce stade mais il n'est pas anodin en réalité.  $\beta$  a une

*interprétation physique* qui prend tout son sens lorsqu'on considère la distribution des valeurs propres pour chacun des ensembles gaussiens (resp. GOE, GUE, GSE). On peut déjà remarquer que la notation avec  $\beta$  permet d'écrire la loi  $\mathcal{P}(H)$  comme un **poinds de Boltzmann** à température inverse  $\beta$ , avec une énergie effective  $E_H = \frac{\text{Tr}H^2}{2}$  :

$$\mathcal{P}(H) = C_\beta e^{-\beta E_H} \quad \text{où} \quad E_H = \frac{\text{Tr}H^2}{2} \quad (1.25)$$

## 1.2 DISTRIBUTION DES VALEURS PROPRES

On considère une *matrice aléatoire*  $H$  de taille  $N \times N$  réelle symétrique (resp. de taille  $N \times N$  hermitienne ou de taille  $2N \times 2N$  hermitienne autoduale), de loi  $\mathcal{P}(H) = e^{-\text{Tr}V(H)}$  avec  $V(x) = a_{2k}x^{2k} + \dots + a_1x + a_0$ . La matrice  $H$  est *diagonalisable* en base orthonormée et ses  $N$  valeurs propres  $\lambda_i$  sont *réelles* (dans le cas autodual, la matrice a  $2N$  valeurs propres, mais elles sont égales deux à deux, donc seulement  $N$  valeurs propres distinctes). Les  $N$  **valeurs propres**  $\lambda_i$  sont distribuées suivant la **densité de probabilité jointe** :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B_N(\beta, V) e^{-\sum_i V(\lambda_i)} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \quad (1.26)$$

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } H^T = H & \text{(réelle symétrique)} \\ 2 & \text{si } H^\dagger = H & \text{(hermitienne)} \\ 4 & \text{si } H^R = H = H^\dagger & \text{(hermitienne autoduale)} \end{cases}$$

$\beta$  est l'**indice de Dyson**. Il apparaît de façon naturelle dans la distribution des valeurs propres (1.26). En effet, ici  $\mathcal{P}(H)$  ne dépend pas de  $\beta$  mais  $\beta$  apparaît dans la distribution  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  comme la puissance du déterminant de Vandermonde  $\Delta(\lambda_i) = \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i)$ . Il dépend de la symétrie imposée, et plus précisément du nombre de "*degrés de liberté*" des coefficients de la matrice  $H$  selon la symétrie. Cette différence de degrés de liberté selon les ensembles se voit bien dans l'expression de la mesure plate  $dH$  (voir Eq. (1.6) pour  $H$  réelle symétrique, Eq. (1.1) pour  $H$  hermitienne, Eq. (1.17) pour  $H$  hermitienne autoduale). Quand  $H$  est symétrique, les coefficients sont réels, ils ont un seul degré de liberté, soit  $\beta = 1$ . Quand  $H$  est hermitienne, les coefficients sont complexes, ils ont deux degrés de liberté, soit  $\beta = 2$ . Quand  $H$  est hermitienne autoduale, les coefficients sont quaternioniques, ils ont quatre degrés de liberté (associés à  $Q^{(0)}$ ,  $Q^{(1)}$ ,  $Q^{(2)}$  et  $Q^{(3)}$ ), soit  $\beta = 4$ .

Pour les **ensembles gaussiens** usuels (GOE, GUE, GSE), on a par définition  $\mathcal{P}(H) = C_\beta e^{-\frac{\beta}{2}\text{Tr}H^2}$ , on trouve donc :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B_N(\beta) e^{-\frac{\beta}{2}\sum_i \lambda_i^2} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \quad \text{où} \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{pour GOE} \\ 2 & \text{pour GUE} \\ 4 & \text{pour GSE} \end{cases} \quad (1.27)$$

La constante de *normalisation*  $B_N(\beta)$  telle que  $\prod_i \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_i \mathcal{P} = 1$  peut être déterminée (dans le cas des ensembles gaussiens) par le calcul d'une intégrale de *Selberg* [Meh91] :

$$B_N(\beta) = \frac{\beta^{\frac{N}{2} + \beta \frac{N(N-1)}{4}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \frac{\Gamma(1 + \beta/2)^N}{\prod_{j=1}^N \Gamma(1 + \beta j/2)} \quad (1.28)$$

On voit ici l'intérêt de choisir d'ajouter arbitrairement un  $\beta$  dans le potentiel quadratique de la loi gaussienne ( $V(x) = \frac{\beta}{2}x^2$ ), il permet de récrire  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  (voir Eq. (1.27)) comme un *poinds de Boltzmann* à température inverse  $\beta$  et d'interpréter les  $\lambda_i$  comme les charges d'un gaz de Coulomb  $2D$ , comme on verra au chapitre suivant 2.

On remarque que pour tous ces ensembles de matrices, que ce soit dans le cas particulier gaussien (1.27) ou dans le cas d'un potentiel général  $V(x)$  (1.26), les valeurs propres  $\lambda_i$  sont **fortement corrélées** à cause de la présence du **déterminant de Vandermonde**

$$\Delta(\lambda_i) \equiv \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\lambda_j - \lambda_i) = \det (\lambda_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq N} \quad (1.29)$$

qui apparaît à la puissance  $\beta$  dans la distribution jointe des valeurs propres. Les valeurs propres ont tendance à se repousser : la densité de probabilité jointe  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  s'annule si  $\lambda_i = \lambda_j$  pour un couple  $i \neq j$ . Cet effet de **répulsion des niveaux d'énergie** est effectivement bien observé pour les états excités des gros noyaux atomiques. Cette propriété est caractéristique d'un comportement de type matrice aléatoire et diffère fortement du comportement de variables aléatoires indépendantes (lois poissoniennes). Sans le déterminant de Vandermonde, les  $\lambda_i$  seraient des variables aléatoires indépendantes, distribuées suivant la même loi (gaussienne centrée dans le cas où  $V(x)$  est quadratique).

### 1.2.1 Preuve dans le cas réel symétrique, $\beta = 1$

On part d'un ensemble de matrices aléatoires  $H$  de taille  $N \times N$ , réelles symétriques, ie  $H^T = H$ , distribuées selon la loi  $\mathcal{P}(H)dH = e^{-\text{tr}V(H)}dH$  où  $dH = \prod_{i \leq j} dH_{ij}$  (voir plus haut Eq. (1.6)) est la mesure plate sur les matrices symétriques (à coefficients réels) et  $V(x)$  un polynôme de coefficient dominant pair inférieur ou égal à  $N$ . On veut démontrer que les valeurs propres de  $H$  sont distribuées selon la loi (1.26) avec  $\beta = 1$ .

$H$  est symétrique, on peut la diagonaliser en base orthonormée :

$$H = O\Lambda O^T \quad \text{où} \quad O^T = O^{-1} \quad \text{et} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad (1.30)$$

$O$  est une matrice réelle orthogonale et les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $H$ , qui sont réelles.

On veut déterminer la distribution des valeurs propres  $\lambda_i$ , pour cela il faut faire un *changement de variables* des coefficients de  $H$ , les  $H_{ij}$  pour  $i \leq j$ , vers les valeurs propres  $\lambda_i$  et les coefficients de  $O$ . Ce changement de variables introduit un *jacobien* dans la distribution des valeurs propres.

D'après (1.30), on peut écrire la matrice infinitésimale  $\delta H$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta O \Lambda O^T + O \delta \Lambda O^T + O \Lambda \delta O^T \\ &= \delta O \Lambda O^T - O \Lambda O^T \delta O O^T + O \delta \Lambda O^T \end{aligned} \quad (1.31)$$

où on a utilisé le fait que  $\delta O^{-1} = -O^T \delta O O^T$  car  $O O^T = \mathbf{1}$  (soit  $O^T = O^{-1}$ ). On notera que  $\delta H$  désigne la matrice de coefficients  $dH_{ij}$ , à ne pas confondre avec la mesure plate  $dH = \prod_{i \leq j} dH_{ij}$ . Finalement on obtient :

$$\begin{aligned} \delta H &= O [O^T \delta O \Lambda - \Lambda O^T \delta O + \delta \Lambda] O^T \\ &= O [\delta \Omega \Lambda - \Lambda \delta \Omega + \delta \Lambda] O^T \end{aligned} \quad (1.32)$$



où  $O^T = O^{-1}$  et où on a noté  $\delta\Omega = O^T\delta O$ .  $\delta\Omega$  est une matrice antisymétrique (car  $O$  est orthogonale), elle représente les *coordonnées angulaires* associées au changement de base (voir section 1.3.2).

On introduit  $\delta\tilde{H} = \delta\Omega\Lambda - \Lambda\delta\Omega + \delta\Lambda$ . On passe de la matrice  $\delta H$  à la matrice  $\delta\tilde{H}$  par un changement de base orthogonal ( $\delta H = O\delta\tilde{H}O^T$ ). Le jacobien de cette transformation est donc égal à 1. En effet on a déjà vu que la mesure plate sur les matrices symétriques est invariante sous transformation orthogonale. On cherche maintenant le jacobien pour passer de  $\delta\tilde{H}$  à  $\{\delta\Lambda, \delta\Omega\}$ . On a

$$\delta\tilde{H} = \delta\Omega\Lambda - \Lambda\delta\Omega + \delta\Lambda \quad (1.33)$$

soit, en termes de coefficients :

$$d\tilde{H}_{ij} = d\Omega_{ij}(\lambda_j - \lambda_i) + d\lambda_i\delta_{ij} \quad (1.34)$$

car  $\Lambda$  est diagonale.  $\delta_{ij}$  est le symbole delta de Kronecker, il vaut 1 si  $i = j$ , 0 sinon. D'où

$$\frac{\partial\tilde{H}_{ij}}{\partial\lambda_k} = \delta_{ij}\delta_{ik} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\tilde{H}_{ij}}{\partial\Omega_{kl}} = \delta_{ik}\delta_{jl}(\lambda_j - \lambda_i) \quad (1.35)$$

Le jacobien est donc le déterminant de la matrice  $J_1$  de changement de variables des  $\tilde{H}_{ij}$  pour  $i \leq j$  vers les  $\lambda_k$  et les  $\Omega_{ij}$  pour  $i < j$  ( $\Omega$  est antisymétrique) :  $J_1 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$  où  $A_{ik} = \frac{\partial\tilde{H}_{ii}}{\partial\lambda_k} = \delta_{ik}$  soit  $A = I_N$  (matrice identité  $N \times N$ ) et  $B_{IK} = \frac{\partial\tilde{H}_I}{\partial\Omega_K}$  où  $I$  parcourt les couples  $(i, j)$  pour  $i < j$  et  $K$  les couples  $(k, l)$  pour  $k < l$ , soit  $B_{IK} = B_{ij,kl} = \frac{\partial\tilde{H}_{ij}}{\partial\Omega_{kl}} = \delta_{ik}\delta_{jl}(\lambda_j - \lambda_i)$ . Les deux blocs non-diagonaux de  $J_1$  sont nuls car  $\frac{\partial\tilde{H}_{ij}}{\partial\lambda_k} = 0$  pour  $i < j$  et  $\frac{\partial\tilde{H}_{ii}}{\partial\Omega_{kl}} = 0$  pour  $k < l$ .  $J_1$  est donc diagonale, son déterminant est facile à calculer, le jacobien est donc donné par  $|\det J_1| = \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|$ . Finalement, on obtient donc l'expression de la mesure plate dans les nouvelles variables (vecteurs propres, valeurs propres) :

$$dH = \prod_{i \leq j} dH_{ij} = \prod_{i \leq j} d\tilde{H}_{ij} = \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| \prod_{i=1}^N d\lambda_i \prod_{k < l} d\Omega_{kl} \quad (1.36)$$

On peut montrer que  $\mu(dO) \equiv c_N \prod_{k < l} d\Omega_{kl}$  (pour un bon choix de la constante  $c_N$ ) est la **mesure de Haar**, c'est à dire la **mesure uniforme sur les matrices orthogonales**  $O$  (voir section 1.3.2). On s'attend effectivement à trouver une distribution uniforme sur les matrices orthogonales (vecteurs propres) et non triviale seulement pour les valeurs propres car la loi initiale est par hypothèse invariante sous transformation orthogonale :  $\mathcal{P}(H) = \mathcal{P}(OHO^T)$  pour toute matrice orthogonale  $O$ , ie  $O^T = O^{-1}$ . On obtient donc l'expression de la mesure plate sous la forme :

$$\prod_{i \leq j} dH_{ij} = c_N^{-1} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| \prod_i d\lambda_i \times \mu(dO) \quad (1.37)$$

où  $\mu(dO)$  est la *mesure de Haar sur le groupe orthogonal*, cf section 1.3.2.

De plus, on a  $\mathcal{P}(H) = e^{-\text{tr}V(H)} = e^{-\sum_i V(\lambda_i)}$ . Ainsi on a  $\mathcal{P}(H)dH = \mathcal{P}(H) \prod_{i \leq j} dH_{ij} = c_N^{-1} e^{-\sum_i V(\lambda_i)} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| \prod_i d\lambda_i \times \mu(dO)$ . On intègre cette mesure sur les variables

angulaires  $O$  (intégration sur la mesure de Haar) pour obtenir la *loi marginale des valeurs propres*  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)d\lambda_1 \dots d\lambda_N$  :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B_N e^{-\sum_i V(\lambda_i)} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| \quad (1.38)$$

où  $B_N$  est une constante de normalisation. Cette expression correspond bien au cas  $\beta = 1$  dans l'équation (1.26).

### 1.2.2 Preuve dans le cas hermitien $\beta = 2$

La preuve fonctionne de la même façon dans les cas hermitien et hermitien auto dual, il faut simplement adapter la démonstration à la symétrie considérée.

On part d'une matrice aléatoire  $H$  de taille  $N \times N$ , complexe hermitienne, ie  $H^\dagger = H$ , distribuée selon la loi  $\mathcal{P}(H)dH = e^{-\text{tr}V(H)}dH$  où  $dH = \prod_{i=1}^N dH_{ii} \prod_{\leq i < j} d\text{Re}H_{ij}d\text{Im}H_{ij}$  (voir plus haut Eq. (1.1)) est la mesure plate sur les matrices hermitiennes (à coefficients complexes) et  $V(x)$  un polynôme de coefficient dominant pair inférieur ou égal à  $N$ . On veut montrer que les valeurs propres de  $H$  sont distribuées selon (1.26) avec  $\beta = 2$ .

$H$  est hermitienne, on peut la diagonaliser en base orthonormée :

$$H = U\Lambda U^\dagger \quad \text{où } U^\dagger = U^{-1} \quad \text{et } \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad (1.39)$$

$U$  est une matrice unitaire et les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $H$ , qui sont réelles.

On calcule  $\delta H$  (la matrice de coefficients  $dH_{ij}$ ) de la même façon que dans le cas réel symétrique, mais en remplaçant la matrice orthogonale  $O$  par la matrice unitaire  $U$ . On définit de même les coordonnées angulaires associées aux vecteurs propres  $\delta\Omega = U^\dagger\delta U$ .  $\delta\Omega$  est antihermitienne (ie  $i\delta\Omega$  est hermitienne) car  $U$  est unitaire. On obtient de même  $\delta H = U\delta\tilde{H}U^\dagger$  où  $\delta\tilde{H} = \delta\Omega\Lambda - \Lambda\delta\Omega + \delta\Lambda$ . On obtient donc de même :  $\frac{\partial\tilde{H}_{ij}}{\partial\lambda_k} = \delta_{ij}\delta_{ik}$  et  $\frac{\partial\tilde{H}_{ij}}{\partial\Omega_{kl}} = \delta_{ik}\delta_{jl}(\lambda_j - \lambda_i)$ .

La seule différence avec le cas symétrique vient du fait que les coefficients non diagonaux de  $H$  et donc de  $\tilde{H}$  sont complexes. Ainsi dans la mesure plate apparaît  $d\text{Re}\tilde{H}_{ij}d\text{Im}\tilde{H}_{ij}$  pour  $i < j$ . Dans le jacobien  $\det J_2$  de changement de variables, il faut donc prendre en compte  $\frac{\partial\text{Re}\tilde{H}_{ij}}{\partial\text{Re}\Omega_{kl}} = \delta_{ik}\delta_{jl}(\lambda_j - \lambda_i)$  et  $\frac{\partial\text{Im}\tilde{H}_{ij}}{\partial\text{Im}\Omega_{kl}} = \delta_{ik}\delta_{jl}(\lambda_j - \lambda_i)$  (car  $\lambda_j$  et  $\lambda_i$  sont réels). D'où  $|\det J_2| = \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^2$ . Le déterminant de Vandermonde apparaît ainsi élevé au carré du fait que les coefficients de  $H$  sont complexes et non réels, ils ont donc deux degrés de liberté réels. On obtient finalement :

$$dH = \prod_{i=1}^N dH_{ii} \prod_{1 \leq i < j \leq N} d\text{Re}H_{ij}d\text{Im}H_{ij} = c_N^{-1} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^2 \prod_i d\lambda_i \times \mu(dU) \quad (1.40)$$

où on peut montrer que  $\mu(dU) = c_N \prod_i d|\Omega_{ii}| \prod_{i < j} d\text{Re}\Omega_{ij}d\text{Im}\Omega_{ij}$  avec  $d\Omega = U^\dagger dU$  ( $\Omega$  est antihermitienne) est la **mesure de Haar**, c'est à dire la **mesure uniforme sur les matrices unitaires**  $U$ , cf section 1.3.1.

Après multiplication par la loi  $\mathcal{P}(H) = e^{-\text{Tr}V(H)}$  et après intégration sur les coordonnées angulaires, donc sur la mesure de Haar  $\mu(dU)$ , on obtient la distribution des

valeurs propres dans le cas hermitien :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B_N e^{-\sum_i V(\lambda_i)} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^2 \quad (1.41)$$

ce qui correspond bien au cas  $\beta = 2$  dans (1.26).

### 1.2.3 Preuve dans les cas hermitien autodual $\beta = 4$

On part d'un ensemble de matrices aléatoires  $H$  de taille  $2N \times 2N$ , complexes hermitiennes autoduales, ie  $H^\dagger = H = H^R$ , distribuées selon la loi  $\mathcal{P}(H)dH = e^{-\text{tr}V(H)}dH$  où  $dH = \prod_{1 \leq i < j \leq N} dq_{ij}^{(0)} \prod_{l=1}^3 \prod_{1 \leq i < j \leq N} dq_{ij}^{(l)}$  (voir plus haut Eq. (1.17)) est la mesure plate sur les matrices hermitiennes autoduales et  $V(x)$  un polynôme de coefficient dominant pair inférieur ou égal à  $N$ . On veut montrer que les valeurs propres de  $H$  sont distribuées selon (1.26) avec  $\beta = 4$ .

$H$  est hermitienne autoduale, on peut la diagonaliser en base orthonormée :

$$H = S \Lambda S^R \quad \text{où} \quad S^R = S^{-1} = S^\dagger \quad \text{et} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N, \lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad (1.42)$$

$S$  est une matrice symplectique unitaire et  $\Lambda$  est la matrice diagonale des valeurs propres de  $H$ .  $H$  a  $2N$  valeurs propres, toutes réelles, présentes par paires.  $H$  a donc  $N$  valeurs propres distinctes, les  $\lambda_i$  pour  $1 \leq i \leq N$ , chacune est présente deux fois dans  $\Lambda$ .

On calcule  $\delta H$  (matrice de coefficients  $dH_{ij}$ ) de la même façon que dans le cas réel symétrique, mais en remplaçant la matrice orthogonale  $O$  par la matrice unitaire symplectique  $S$ . On définit de même les coordonnées angulaires associées aux vecteurs propres  $\delta \Omega = S^R \delta S = S^\dagger \delta S$ . On obtient de même  $\delta H = S \delta \tilde{H} S^R$  où  $\delta \tilde{H} = \delta \Omega \Lambda - \Lambda \delta \Omega + \delta \Lambda$ . On obtient donc  $\frac{\partial \tilde{H}_{ij}}{\partial \lambda_k} = \delta_{ij} \delta_{ik}$  et  $\frac{\partial \tilde{H}_{ij}}{\partial \Omega_{kl}} = \delta_{ik} \delta_{jl} (\lambda_j - \lambda_i)$  où on note  $\lambda_{N+j} = \lambda_j$ . Comme  $H$ ,  $\tilde{H}$ ,  $S$  et  $\Omega$  sont de dimension  $2N$ , les indices  $i, j, k, l$  vont ici de 1 à  $2N$  contrairement aux cas  $\beta = 1, 2$ .

Comme dans le cas hermitien, les coefficients de  $H$  et donc de  $\tilde{H}$  sont complexes. Ainsi il faut prendre en compte  $d\text{Re}\tilde{H}_{ij}$  et  $d\text{Im}\tilde{H}_{ij}$ . De plus, les indices  $i, j$  vont de 1 à  $2N$  au lieu d'aller de 1 à  $N$  comme dans les cas précédents, avec toutefois une répétition :  $\lambda_{N+j} = \lambda_j$  donc  $\frac{\partial \tilde{H}_{N+i, N+j}}{\partial \Omega_{N+k, N+l}} = \delta_{ik} \delta_{jl} (\lambda_j - \lambda_i) = \frac{\partial \tilde{H}_{ij}}{\partial \Omega_{kl}}$  (et tous les termes croisés  $i, N+j$  sont nuls). Ainsi le jacobien  $\det J_4$  de changement de variables s'écrit  $|\det J_4| = \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^4$ . Le déterminant de Vandermonde apparaît élevé à la puissance 4 du fait que les coefficients de  $H$  sont complexes et que les matrices sont de taille  $2N \times 2N$ . On obtient donc finalement :

$$dH = \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^4 \prod_i d\lambda_i \times \mu(dS) \quad (1.43)$$

où  $\mu(dS)$  est la **mesure de Haar**, c'est à dire la **mesure uniforme sur les matrices symplectiques unitaires**  $S$ , cf section 1.3.3. D'où (1.26) avec  $\beta = 4$ .

## 1.3 MESURE DE HAAR : DISTRIBUTION UNIFORME

### 1.3.1 Mesure de Haar sur le groupe unitaire

On considère le groupe  $\mathcal{U}(N)$  des matrices complexes unitaires  $U$  de taille  $N \times N$ , soit  $U^\dagger = U^{-1}$ . Il existe une *unique mesure de probabilité uniforme sur les matrices unitaires*,

elle est appelée **mesure de Haar**, on la notera  $\mu(dU)$ .

En théorie des matrices aléatoires, l'ensemble des matrices unitaires  $U$  distribuées suivant la mesure de Haar  $\mu(dU)$  est appelé **ensemble unitaire circulaire** ou *Circular Unitary Ensemble (CUE)*. On peut également le définir de la façon suivante qui est équivalente. On écrit la matrice unitaire  $U$  sous la forme  $U = VW$  où  $V$  et  $W$  sont des matrices unitaires (un choix possible est par exemple  $V = U$  et  $W = 1$  mais beaucoup d'autres choix sont possibles). On définit alors  $\delta\tilde{\Omega}$  (matrice de coefficients  $d\tilde{\Omega}_{ij}$ ) par :

$$U + \delta U = V \left( 1 + i\delta\tilde{\Omega} \right) W \quad \text{soit} \quad \delta U = iV\delta\tilde{\Omega}W \quad \text{ie} \quad i\delta\tilde{\Omega} = V^\dagger \delta U W^\dagger \quad (1.44)$$

car  $V$  et  $W$  sont unitaires. Comme  $U$ ,  $V$  et  $W$  sont unitaires et que  $U = VW$ ,  $\tilde{\Omega}$  est hermitienne :  $\tilde{\Omega}^\dagger = \tilde{\Omega}$ . On définit l'élément de volume  $\nu(dU)$  sur la sphère comme la mesure plate sur  $\tilde{\Omega}$ , soit  $\nu(dU) = d\tilde{\Omega} = \prod_i d\tilde{\Omega}_{ii} \prod_{i<j} d\text{Re}\tilde{\Omega}_{ij} d\text{Im}\tilde{\Omega}_{ij}$ . On peut montrer que cette mesure  $\nu(dU)$  ne dépend pas du choix des matrices unitaires  $V$  et  $W$ . Une fois normalisée,  $\nu(dU)$  est donc la mesure uniforme sur le groupe unitaire, la mesure de Haar :

$$\begin{aligned} \mu(dU) &= c_N \nu(dU) = c_N \prod_i d\tilde{\Omega}_{ii} \prod_{i<j} d\text{Re}\tilde{\Omega}_{ij} d\text{Im}\tilde{\Omega}_{ij} \\ &\quad \text{où} \quad i\delta\tilde{\Omega} = V^\dagger dU W^\dagger \quad \text{avec} \quad U = VW \end{aligned} \quad (1.45)$$

On notera que les matrices hermitiennes ont bien le bon nombre de paramètres indépendants pour caractériser les matrices unitaires. En effet, une matrice unitaire  $U$  est caractérisée par la contrainte  $U^\dagger U = 1$ , ce qui impose  $N^2$  relations sur les parties réelle et imaginaire des coefficients de  $U$  (car  $U^\dagger U$  est hermitienne). Pour caractériser  $U$ , on a donc besoin de  $2N^2 - N^2 = N^2$  paramètres réels - comme pour les matrices hermitiennes.

Un choix particulier intéressant est celui où  $V = U$  et  $W = 1$ . Dans ce cas, on a  $i\delta\tilde{\Omega} = U^\dagger \delta U$ . On peut donc écrire en général :

$$\boxed{\mu(dU) = c_N \prod_{i=1}^N d\tilde{\Omega}_{ii} \prod_{1 \leq i < j \leq N} d\text{Re}\tilde{\Omega}_{ij} d\text{Im}\tilde{\Omega}_{ij} \quad \text{où} \quad i\delta\tilde{\Omega} = U^\dagger \delta U} \quad (1.46)$$

Si on note  $\delta\Omega = U^\dagger \delta U$ , ie  $\delta\Omega = i\delta\tilde{\Omega}$ ,  $\Omega$  représente la *matrice des coordonnées angulaires* de  $U$ . Cette interprétation apparaîtra plus claire dans le cas du groupe orthogonal (section 1.3.2).

### 1.3.2 Mesure de Haar sur le groupe orthogonal

On considère le groupe des matrices réelles orthogonales  $O$ , ie telles que  $O^T = O^{-1}$ . Il existe une *unique mesure de probabilité uniforme sur les matrices orthogonales*, elle est appelée **mesure de Haar**, on la notera  $\mu(dO)$ .

Comme dans le cas unitaire, on introduit la matrice des paramètres angulaires  $\delta\Omega = O^T \delta O$ .  $O$  est orthogonale donc  $\Omega$  est antisymétrique :  $\delta\Omega^T = -\delta\Omega$ . Une matrice orthogonale  $O$  est caractérisée par la relation  $O^T O = 1$ , ce qui fait  $N(N+1)/2$  contraintes (car  $O^T O$  est symétrique), donc restent  $N - N(N+1)/2 = N(N-1)/2$  paramètres libres. La matrice réelle antisymétrique  $\Omega$  est aussi caractérisée par  $N(N-1)/2$  paramètres.

De façon similaire au cas unitaire (1.46), on peut montrer que :

$$\boxed{\mu(dO) = c_N \prod_{i < j} d\Omega_{ij} \quad \text{où} \quad \delta\Omega = O^T \delta O} \quad (1.47)$$

En dimension  $N = 2$ , les matrices orthogonales sont les matrices de rotation  $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  ou réflexion  $S_\theta = R_\theta Y$  où  $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  ie  $S_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ . La mesure de Haar uniforme sur les matrices orthogonales  $2 \times 2$  est alors simplement donnée par :

$$\mu(dO) = \frac{d\theta}{2\pi} \quad (1.48)$$

Il est facile de vérifier que pour une matrice de rotation ou de réflexion, on a  $\delta\Omega = \begin{bmatrix} 0 & d\theta \\ -d\theta & 0 \end{bmatrix}$ . On retrouve donc comme attendu  $\mu(dO) = c_2 \prod_{i < j} d\Omega_{ij} = c_2 d\Omega_{12} = c_2 d\theta$ .

En dimension  $N$ , on peut généraliser le cas  $N = 2$  en introduisant les angles d'Euler  $\theta_{ki}$  pour  $k \in \{1, \dots, N\}$ ,  $i \in \{k+1, \dots, N\}$ . On a alors :

$$\mu(dO) = c_N \prod_{k=1}^{N-1} \prod_{i=k+1}^{N-1} (\sin \theta_{ki})^{N-i} \left( \prod_{k=1}^N \prod_{i=k+1}^N d\theta_{ki} \right) \quad (1.49)$$

où  $0 < \theta_{kN} < 2\pi$  et  $0 < \theta_{ki} < \pi$  pour  $i < N$ .  $c_N$  est une constante de normalisation qui peut être calculée :

$$c_N = 2^{1-N} \prod_{j=2}^N \frac{\Gamma(\frac{j}{2})}{\pi^{\frac{j}{2}}}$$

Pour  $N = 2$ , il y a un seul angle d'Euler  $\theta_{12} = \theta$  et on retrouve  $\mu(dO) = c_2 d\theta$  avec  $c_2 = 1/(2\pi)$ . Pour  $N = 3$ , il y a trois angles d'Euler,  $\theta_{12} = \theta$  (nutation),  $\theta_{13} = \psi$  (précession) et  $\theta_{23} = \phi$  (rotation propre). Les angles d'Euler à trois dimensions sont utilisés en physique du solide pour caractériser la rotation d'un solide. On trouve :  $\mu(dO) = c_3 \sin \theta_{12} d\theta_{12} d\theta_{13} d\theta_{23}$  avec  $c_3 = 1/(8\pi^2)$  car  $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ . Finalement :

$$\begin{aligned} \mu(dO) &= \frac{d\theta}{2\pi} \quad \text{en dimension 2} \\ \mu(dO) &= \sin \theta \frac{d\theta d\phi d\psi}{8\pi^2} \quad \text{en dimension 3} \end{aligned}$$

Par ailleurs on a bien  $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$  et  $\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi d\theta \sin \theta = 8\pi^2$ .

### 1.3.3 Mesure de Haar sur le groupe symplectique unitaire

Comme dans les cas unitaire et orthogonal ci-dessus, il existe une *unique mesure de probabilité uniforme sur les matrices symplectiques unitaires*  $S$  de taille  $2N \times 2N$  (ie  $S^R = S^{-1} = S^\dagger$ ), la **mesure de Haar** notée  $\mu(dS)$ .

La matrice de coordonnées angulaires  $\delta\Omega = S^R \delta S = S^\dagger \delta S$  est antihermitienne anti-autoduale, ie  $\delta\Omega^\dagger = -\delta\Omega$  et  $\delta\Omega^R = -\delta\Omega$ . Ainsi  $\delta\Omega$  est de la forme  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  avec  $A^\dagger = -A = D^T$  et  $B^T = B = -B^\dagger$ . En termes des matrices quaternioniques associées

à  $\delta\Omega$  (définies Eq. (1.16)), on a donc : la matrice  $Q^{(0)}$  est réelle antisymétrique et les matrices  $Q^{(1)}$ ,  $Q^{(2)}$  et  $Q^{(3)}$  sont réelles symétriques.

Finalement on peut donc écrire :

$$\mu(dS) = c_N \prod_{1 \leq i < j \leq N} dq_{ij}^{(0)} \prod_{l=1}^3 \prod_{1 \leq i < j \leq N} dq_{ij}^{(l)} \quad \text{où } Q_{ij}^{(l)} = q_{ij}^{(l)} \quad (1.50)$$

les matrices  $Q^{(l)}$  étant les matrices quaternioniques associées à  $\delta\Omega = S^R \delta S$  (voir Eq. (1.16)).

## 1.4 MATRICES DE WISHART (ENSEMBLE DE LAGUERRE)

Les matrices de **Wishart** constituent un autre ensemble de matrices aléatoires voisin des ensembles gaussiens. Ces matrices se rencontrent dans de nombreux problèmes d'analyse de données statistiques mais aussi dans des contextes plus inattendus comme les modèles de marcheurs aléatoires vicieux (cf chapitre 5) ou dans des problèmes d'intrication quantique pour des états aléatoires (cf chapitre 9) -que j'ai été amenée à étudier durant ma thèse. Les matrices de Wishart ont été introduites initialement en **statistiques**, elles représentent des matrices de **covariance** de données statistiques. Elles jouent en particulier un rôle très important dans la technique dite d'analyse de composantes principale (PCA) que j'explique brièvement ci-dessous (cf section 1.4.1).

### 1.4.1 Matrice de covariance et PCA

La technique d'**analyse des composantes principales** ou PCA ("principal component analysis") permet de réduire la dimensionalité d'un échantillon de données statistiques tout en gardant un maximum d'informations sur les caractéristiques de ces données, c'est-à-dire sur leurs corrélations. Elle permet de compresser et classifier des données. Cette technique s'applique à des domaines très variés comme le traitement d'images, la génétique, la finance, la météorologie ou encore l'océanographie.

Introduisons d'abord quelques notions élémentaires de statistiques. Pour  $M$  réalisations  $\{X_1, \dots, X_M\}$  d'une variable aléatoire  $X$ , on définit la **moyenne** et la **variance empiriques** sur ces réalisations comme :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^M X_i}{M}, \quad \mathbf{var}(X) = \frac{\sum_{i=1}^M (X_i - \bar{X})^2}{M-1} = \frac{\sum_i X_i^2}{M-1} - \frac{M\bar{X}^2}{M-1} \quad (1.51)$$

En statistiques, les moyenne et variance empiriques  $\bar{X}$  et  $\mathbf{var}(X)$  sont appelés respectivement estimateur de moyenne et estimateur de variance de la variable  $X$ . Elle sont elles-mêmes des variables aléatoires.

Avec cette définition, si les  $X_i$  sont  $M$  réalisations indépendantes de  $X$ , cela signifie que les  $X_i$  sont des variables aléatoires indépendantes distribuées selon la même loi, la loi de la variable aléatoire  $X$ , de moyenne  $\langle X \rangle$  et variance  $\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$ , alors on a :

$$\langle \bar{X} \rangle = \langle X \rangle \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{var}(X) \rangle = \text{Var } X = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \quad (1.52)$$

En effet  $\langle X_i \rangle = \langle X \rangle$  et  $\langle X_i^2 \rangle = \langle X^2 \rangle$ . De plus, comme les  $X_i$  sont indépendants on a  $\langle X_i X_j \rangle = \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle = m^2$  pour  $i \neq j$ , ainsi :

$$\langle \bar{X}^2 \rangle = \frac{\langle X^2 \rangle + (M-1)\langle X \rangle^2}{M} \quad (1.53)$$

d'où  $\langle \mathbf{var}(X) \rangle = \frac{M}{M-1}\langle X^2 \rangle - \left( \frac{\langle X^2 \rangle + (M-1)\langle X \rangle^2}{M-1} \right) = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$ .

Les variables  $X_i$  sont, comme on a vu ci-dessus, indépendantes identiquement distribuées (iid). D'après la loi des grands nombres, dans la limite d'un grand nombre de réalisations  $M \rightarrow \infty$ , la moyenne empirique  $\bar{X}$  tend vers  $\langle \bar{X} \rangle = \langle X \rangle$ . De même la variance empirique  $\mathbf{var}(X)$  tend vers  $\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$  dans la limite  $M \rightarrow \infty$ .

Dans un cas plus général où les réalisations  $X_i$  ne sont pas indépendantes, on utilisera aussi les notations  $\bar{X}$  et  $\mathbf{var}(X)$  pour les moyenne et variance empiriques bien que l'équation (1.52) ne soit plus nécessairement vérifiée.

Pour  $M$  réalisations de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , on définit la **covariance empirique** :

$$\mathbf{covar}(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^M (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{M-1} \quad (1.54)$$

Venons en maintenant à la technique de **PCA**. On considère un ensemble de données statistiques  $x_{ij} \in \mathbb{R}$ , plus précisément  $M$  **réalisations**  $\vec{X}_i$  ( $1 \leq i \leq M$ ) **d'une variable aléatoire  $\vec{X}$  de dimensionnalité  $p$** , ie  $\vec{X}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$ .  $x_{ij}$  est la  $i^{\text{ème}}$  réalisation de la variable  $j$ , pour  $1 \leq i \leq M$ ,  $1 \leq j \leq p$ . Par exemple  $x_{ij}$  peut représenter le prix atteint le  $i^{\text{ème}}$  jour par la  $j^{\text{ème}}$  marchandise.

On peut alors définir la **matrice de covariance empirique**  $W$  des données  $x_{ij}$  pour  $1 \leq i \leq M$ ,  $1 \leq j \leq p$  :

$$W_{kj} = \mathbf{covar}(X_{[k]}, X_{[j]}) \quad , \quad 1 \leq k, j \leq p \quad (1.55)$$

où  $X_{[j]} = \{x_{1j}, \dots, x_{Mj}\}$  est le vecteur des  $M$  réalisations de la  $j^{\text{ème}}$  variable.  $W$  est une matrice de taille  $p \times p$ .

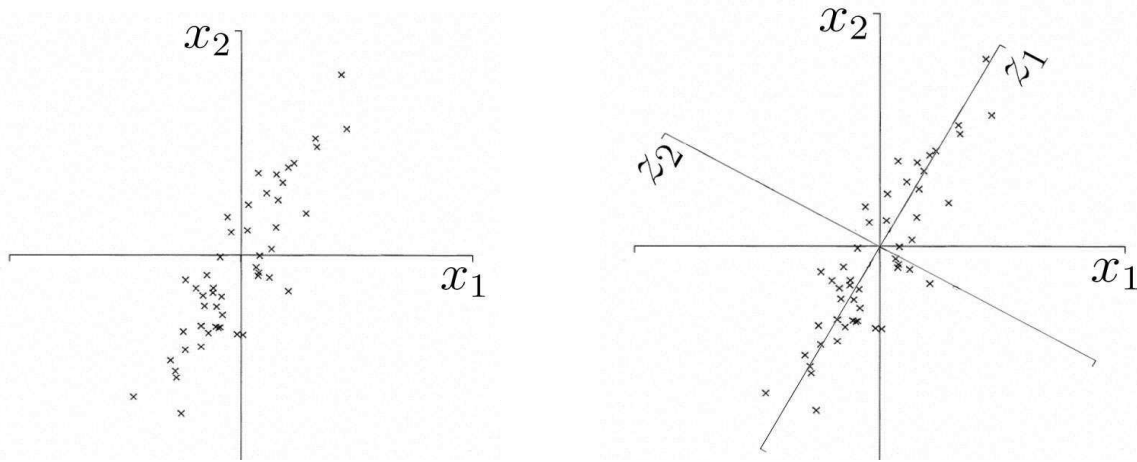
Si on note  $Y$  la matrice de coefficients  $Y_{ij} = x_{ij} - \bar{X}_{[j]}$  (les données centrées), on peut alors écrire sous forme matricielle :

$$W = \frac{Y^T Y}{M-1} \quad \text{où } Y_{ij} = x_{ij} - \bar{X}_{[j]} \quad (1.56)$$

La **première composante principale** est la combinaison linéaire des  $X_{[j]}$  de plus grande variance. Elle est par définition donnée par la variable  $Z = \{Z_i\}$  pour  $1 \leq i \leq M$  telle que :

$$Z = XA \quad \text{avec } A^T A = 1 \text{ et } \mathbf{var}(Z) \text{ maximale} \quad (1.57)$$

où  $X$  est la matrice  $M \times p$  de coefficients  $x_{ij}$ .  $A$  est un vecteur (colonne) de taille  $p$ ,  $A = (a_1, \dots, a_p)$ , c'est la direction qui définit la première composante principale.  $Z_i = \sum_{j=1}^p x_{ij} a_j$  et  $1 = A^T A = \sum_{j=1}^p a_j^2$ .  $A$  est choisi tel que  $\mathbf{var}(Z)$  soit maximale. C'est la direction principale selon laquelle s'étalent les données. Comme on le voit bien



**Figure 1.2** – *Interprétation géométrique de l'analyse de composantes principales de données de dimensionnalité  $p = 2$ . Chaque croix représente une donnée  $i$  ( $1 \leq i \leq M$ ) de coordonnées  $(x_{i1}, x_{i2})$ . La direction  $z_1$  est la première composante principale, celle qui a la plus grande variance. La direction  $z_2$  est la seconde composante principale, elle est orthogonale à  $z_1$ . [source : transparents de cours de N. Turenne, voir sur sa page <http://genome.jouy.inra.fr/turenne/cours/>]*

graphiquement, cf Fig. 1.2, c'est la direction qui permet de garder le plus d'informations possibles sur les données initiales tout en réduisant la dimensionnalité de  $p$  à 1 : initialement on avait comme données les  $\vec{X}_i$ , pour  $1 \leq i \leq M$  avec  $\vec{X}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$  tandis que la première composante principale est donnée par les  $Z_i$  pour  $1 \leq i \leq M$ .

En termes de variables centrées, on a :

$$Z - \bar{Z} = YA \quad \text{avec } A^T A = 1 \text{ et } \mathbf{var}(Z) \text{ maximale} \quad (1.58)$$

et où  $Y_{ij} = x_{ij} - \bar{X}_{[j]}$ , cf Eq. (1.56). Ainsi la variance empirique de  $Z$  (qui est un nombre réel) est donnée par :

$$\mathbf{var}Z = \frac{1}{M-1} (Z - \bar{Z})^T (Z - \bar{Z}) = \frac{A^T Y^T Y A}{M-1} = A^T W A \quad (1.59)$$

où  $Y_{ij} = x_{ij} - \bar{X}_{[j]}$ , cf Eq. (1.56). On veut maximiser  $\mathbf{var}(Z)$  avec contrainte  $A^T A = 1$ , on introduit un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ , alors on veut donc maximiser  $\mathbf{var}(Z) - \lambda(A^T A - 1)$  où  $\mathbf{var}(Z) = A^T W A$ . En écrivant que la dérivée par rapport à  $A$  doit s'annuler on trouve :

$$W A = \lambda A \quad (1.60)$$

$A$  doit donc être vecteur propre de la matrice de covariance  $W$ . De plus on veut maximiser  $\mathbf{var}(Z) = A^T W A = \lambda$ , donc  $\lambda$  doit être la **valeur propre maximale de la matrice de covariance  $W$**  et  $A$  le vecteur propre associé.

De même récursivement on définit la  $k^{\text{ième}}$  **composante principale**, elle est donnée par  $Z_{[k]} = X A_{[k]}$  où  $A_{[k]}$  est vecteur propre de  $W$  associé à la  $k^{\text{ième}}$  plus grande valeur propre  $\lambda_k$ .



Concrètement, pour un ensemble de données statistiques de dimensionnalité  $p$ , on choisit de comprimer les données en gardant seulement les  $k$  premières composantes principales pour un  $k < p$  (associées aux  $k$  plus grandes valeurs propres de  $W$ ). On **réduit** ainsi la **dimensionnalité des données** de  $p$  à  $k$  de façon optimale.

Il est donc crucial pour la méthode de PCA de savoir comment se comportent les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice de covariance  $W = \frac{1}{M-1}Y^TY$  où  $Y_{ij} = x_{ij} - \bar{X}_{[j]}$ , en particulier ses valeurs propres maximales. Il est important de déterminer combien de composantes principales, donc combien de valeurs propres il faut garder pour ne pas perdre d'information importante sur les données. Un modèle simple consiste à supposer que les éléments  $Y_{ij} = x_{ij} - \bar{X}_{[j]}$  de la matrice  $Y$  sont aléatoires indépendants identiquement distribués (iid) et gaussiens. Dans ce cas la matrice  $W$  est appelée matrice aléatoire de **Wishart**.

Pour plus de précisions sur la technique de PCA, je renvoie au tutoriel de Smith [Smi02].

### 1.4.2 Définition des matrices de Wishart

Une **matrice de Wishart** est une matrice  $N \times N$  de la forme

$$\boxed{W = X^\dagger X} \quad (1.61)$$

où  $X$  est une matrice rectangulaire  $M \times N$  à coefficients  $X_{ij}$  réels ou complexes. Si  $X$  est à coefficients complexes,  $X^\dagger$  désigne le conjugué hermitique de  $X$ . Si  $X$  est à coefficients réels,  $X^\dagger = X^T$  désigne la transposée de  $X$ . On a vu ci-dessus (cf Eq. (1.56)) que si les coefficients  $X_{ij}$  représentent des données statistiques centrées, alors  $W$  est la **matrice de covariance** (empirique) qui décrit les corrélations entre ces données.

L'**ensemble de Wishart** est constitué des matrices de Wishart  $W = X^\dagger X$  où  $X$  est une matrice aléatoire gaussienne, ie à coefficients  $X_{ij}$  aléatoires indépendants distribués selon la même loi gaussienne centrée. Comme dans le cas des ensembles gaussiens, on peut se ramener, sans restreindre la généralité, à :

$$\mathcal{P}(X)dX = C_W e^{-\frac{\beta}{2}\text{Tr}[X^\dagger X]} dX \quad (1.62)$$

où  $\beta$  est ici encore l'*indice de Dyson* :  $\beta = 1$  si  $X$  est à coefficients réels (alors  $X^\dagger = X^T$ ),  $\beta = 2$  si  $X$  est à coefficients complexes. On notera que  $X$  n'est pas tout à fait une matrice du type GOE ou GUE car elle est rectangulaire et ne peut donc en particulier pas être hermitienne. La mesure plate  $dX$  est ainsi également différente du cas hermitien, tous les coefficients de  $X$  peuvent être différents et sont indépendants :

$$dX = \prod_{1 \leq i, j \leq N} dX_{ij} \quad (1.63)$$

Les matrices de Wishart sont nommées d'après Wishart qui les introduisit dans le contexte de l'analyse de données statistiques. Ces matrices ont beaucoup d'applications, elles jouent en particulier un rôle important dans la technique de "PCA" (Principal Component Analysis), comme expliqué ci-dessus section 1.4.1.

### 1.4.3 Distribution des valeurs propres

Comme dans les cas gaussiens ou à potentiel présentés plus haut, le passage des coefficients de la matrice à ses valeurs propres ajoute un jacobien dans la distribution -un déterminant de Vandermonde. Une matrice de Wishart  $W = X^\dagger X$  où  $X$  est de taille  $M \times N$  avec  $M \geq N$  a  $N$  valeurs propres  $\lambda_i$  pour  $1 \leq i \leq N$ . Ces **valeurs propres** sont réelles positives, on peut montrer qu'elles sont distribuées selon la loi jointe [Jam64] :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = K_{M,N} e^{-\frac{\beta}{2} \sum_i \lambda_i} \prod_{k=1}^N \lambda_k^{\frac{\beta}{2}(M-N+1)-1} \prod_{i < j} |\lambda_j - \lambda_i|^\beta, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (1.64)$$

où  $K_{M,N}$  est une constante de normalisation et où  $\beta = 1$  dans le cas où  $X$  est à coefficients réels,  $\beta = 2$  dans le cas où  $X$  est à coefficients complexes.

Dans le cas “anti-Wishart”, c’est à dire quand  $N > M$ ,  $W$  a  $M$  valeurs propres positives  $\lambda_i$  pour  $1 \leq i \leq M$  (et  $N - M$  valeurs propres nulles) distribuées selon la même loi avec la seule différence qu’il faut intervertir  $N$  et  $M$  dans (1.64).



## - Chapitre 2 -

---

# Densité, gaz de Coulomb et fonctions de corrélation

---

Dans ce second chapitre introductif, je présente des résultats connus sur la **distribution marginale d'une ou de plusieurs valeur(s) propre(s)** d'une matrice aléatoire gaussienne (cf section 1.1) ou d'une matrice de Wishart (cf section 1.4). Je considère ici seulement la **limite**  $N \rightarrow \infty$ , où  $N$  est la taille de la matrice (son nombre de valeurs propres). A cause du déterminant de Vandermonde dans la distribution des valeurs propres, que ce soit dans le cas gaussien (1.27) ou de Wishart (1.64), les valeurs propres  $\lambda_i$  sont fortement corrélées, il est donc difficile d'obtenir des résultats exacts pour un  $N$  arbitraire. Par ailleurs, une matrice aléatoire décrit le Hamiltonien d'un gros noyau atomique, il est donc raisonnable de le considérer la limite  $N \gg 1$ .

J'introduis dans ce chapitre la **méthode du gaz de Coulomb**, qui consiste à voir les valeurs propres  $\lambda_i$  comme les charges d'un gaz de Coulomb à deux dimensions ( $2D$ )<sup>1</sup>. Cette méthode du gaz de Coulomb permet de calculer dans la limite  $N \rightarrow \infty$  la distribution marginale d'une valeur propre (la "densité moyenne"). Cette description en termes de gaz de Coulomb est fréquente en théorie des matrices aléatoires, elle est expliquée entre autres dans le livre de Mehta [Meh91] ainsi que sur un exemple concret dans l'article de Satya N. Majumdar et David Dean sur la valeur propre maximale [DM08]. Je l'ai beaucoup utilisée dans ma thèse.

On introduit la **densité moyenne** de valeurs propres :

$$\rho_N(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \delta(\lambda - \lambda_i) \rangle \quad (2.1)$$

où  $\langle \dots \rangle = \int \prod_i d\lambda_i \dots \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  indique la moyenne sur les configurations de valeurs propres  $\lambda_i$ . La quantité  $\rho_N(\lambda)d\lambda$  représente la *probabilité pour une valeur propre*

---

1. il est un peu abusif en réalité de parler de gaz de Coulomb  $2D$ , il s'agit de charges sur une ligne donc à  $1D$  (les  $\lambda_i$  sont des réels) qui interagissent avec un potentiel d'interaction logarithmique, c'est-à-dire l'interaction de Coulomb à  $2D$ , cf Eq. (2.9).

de se trouver dans l'intervalle  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ . Le nombre moyen de valeurs propres dans l'intervalle  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$  est donc donné par  $N\rho_N(\lambda)d\lambda$ . La densité  $\rho_N(\lambda)$  est par définition la **distribution marginale d'une valeur propre** (densité de probabilité d'une valeur propre) :

$$\rho_N(\lambda) = \mathcal{P}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_N \mathcal{P}(\lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \quad (2.2)$$

Elle est donc normalisée à 1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho_N(\lambda) = 1 \quad (2.3)$$

On intègre sur  $\mathbb{R}$  car les valeurs propres  $\lambda_i$  sont réelles. On notera dans la suite

$$\rho_N(\lambda) = \langle \rho(\lambda, N) \rangle \quad \text{où} \quad \rho(\lambda, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i) \quad (2.4)$$

La densité  $\rho(\lambda, N)$  est une variable aléatoire (comme les  $\lambda_i$ ) tandis que  $\rho_N(\lambda) = \mathcal{P}(\lambda)$  est la densité moyenne, c'est une fonction réelle positive.

De même on peut introduire la **densité à deux points** :

$$\rho_N^{(2)}(\lambda, \lambda') = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \delta(\lambda - \lambda_i) \delta(\lambda' - \lambda_j) \quad (2.5)$$

La densité à deux points moyenne est la distribution marginale de deux valeurs propres :

$$\langle \rho_N^{(2)}(\lambda, \lambda') \rangle = \int d\lambda_3 \dots \int d\lambda_N \mathcal{P}(\lambda, \lambda', \lambda_3, \dots, \lambda_N) \quad (2.6)$$

Elle est ainsi bien normalisée :  $\int d\lambda \int d\lambda' \rho_N^{(2)}(\lambda, \lambda') = 1$ . Souvent on appelle **fonction de corrélation à deux points** la quantité

$$\mathcal{R}_2(\lambda, \lambda') = N(N-1) \langle \rho_N^{(2)}(\lambda, \lambda') \rangle \quad (2.7)$$

De façon générale, on introduit la densité à  $n$  points et les fonctions de corrélation à  $n$  points pour tout  $1 \leq n \leq N$ , voir section 2.3.

## 2.1 GAZ DE COULOMB POUR UNE MATRICE ALÉATOIRE GAUSSIENNE

Les valeurs propres  $\lambda_i$  d'une matrice aléatoire gaussienne (GUE, GOE ou GSE) sont des variables aléatoires réelles corrélées, de densité de probabilité jointe (voir Eq. (1.27)) :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B_N(\beta) e^{-\frac{\beta}{2} \sum_i \lambda_i^2} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \quad \text{où} \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{pour GOE} \\ 2 & \text{pour GUE} \\ 4 & \text{pour GSE} \end{cases} \quad (2.8)$$

où la constante de normalisation  $B_N(\beta)$  est donnée par Eq. (1.28).

Je vais expliquer dans cette partie l'interprétation en gaz de Coulomb de la distribution (2.8), et je vais montrer grâce à cette interprétation que les valeurs propres  $\lambda_i$  se comportent typiquement comme  $\lambda_i \asymp \sqrt{N}$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$  et que la densité moyenne  $\rho_N(\lambda)$  définie Eq. (2.1) est à support fini  $[-\sqrt{2N}, \sqrt{2N}]$ . Plus précisément, on va voir que  $\rho_N(\lambda)$  a la forme d'un demi-cercle appelé demi-cercle de Wigner, voir (2.26).

### 2.1.1 Gaz de Coulomb

On peut interpréter la distribution jointe des valeurs propres  $\lambda_i$  (2.8) comme un **poinds de Boltzmann à température inverse**  $\beta$ . On peut en effet écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= \frac{1}{Z_N} e^{-\beta E_N[\{\lambda_i\}]} \\ \text{où } E_N[\{\lambda_i\}] &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 - \sum_{i<j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| \\ \text{et } Z_N &= \int \prod_i d\lambda_i e^{-\beta E_N[\{\lambda_i\}]} = B_N(\beta)^{-1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si les  $\lambda_i$  représentent les *positions de  $N$  particules sur une ligne*, alors  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  s'interprète comme la densité de probabilité des positions des particules en **situation canonique**, c'est à dire quand le système des particules est à l'**équilibre thermodynamique** en contact avec un réservoir à **température inverse**  $\beta$ .

$E_N[\{\lambda_i\}]$  est ainsi l'*énergie effective* de ces particules et  $Z_N$  la *fonction de partition* associée. L'énergie  $E_N[\{\lambda_i\}]$  comprend en particulier un terme d'interaction logarithmique répulsive  $-\ln |\lambda_i - \lambda_j|$  qui est exactement l'interaction de Coulomb entre deux charges de même signe dans un espace à deux dimensions. Les valeurs propres  $\lambda_i$  peuvent donc être considérées comme les positions des **charges d'un gaz de Coulomb 2D** plongées dans un potentiel externe quadratique  $V_{\text{ext}}(\lambda) = \lambda^2/2$ . Elles interagissent suivant la loi de Coulomb à deux dimensions, mais sont toutefois contraintes de rester sur une ligne (les valeurs propres  $\lambda_i$  sont réelles).

### 2.1.2 Scaling pour $N$ grand

On cherche à déterminer le comportement typique des  $\lambda_i$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . Si on suppose que dans la limite  $N \gg 1$  on a  $\lambda_i \asymp N^\alpha$  pour un  $\alpha$  réel, alors on peut noter  $x_i = \lambda_i/N^\alpha$  les **valeurs propres adimensionnées**. Dans ce cas la densité  $\rho(\lambda, N)$  définie Eq. (2.4) s'écrit :

$$\rho(\lambda, N) = \frac{1}{N^\alpha} \rho\left(\frac{\lambda}{N^\alpha}\right) \quad \text{où} \quad \rho(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \quad (2.10)$$

$\rho(x)$  est la **densité adimensionnée**, elle est aussi normalisée à 1. On s'attend à ce qu'elle ait une limite finie quand  $N \rightarrow \infty$  et que cette limite soit une fonction continue.

De même la densité à deux points, cf Eq. (2.5), s'écrit  $\rho_N^{(2)}(\lambda, \lambda') = \frac{1}{N^{2\alpha}} \rho^{(2)}\left(\frac{\lambda}{N^\alpha}, \frac{\lambda'}{N^\alpha}\right)$  où la densité à deux points adimensionnées  $\rho^{(2)}(x, x')$  est définie par :

$$\rho^{(2)}(x, x') = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \delta(x - x_i) \delta(x' - x_j) \quad (2.11)$$

$\rho^{(2)}(x, x')$  est normalisée à 1, ie  $\int dx \int dx' \rho^{(2)}(x, x') = 1$ . Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , on s'attend à ce que  $\rho^{(2)}(x, x')$  tende vers une limite finie continue.

Si on suppose  $\lambda_i \asymp N^\alpha$  pour  $N \gg 1$ , alors le terme quadratique de l'énergie effective  $E_N[\{\lambda_i\}]$  (2.9) est d'ordre

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 \asymp N \lambda_{\text{typ}}^2 \asymp N^{2\alpha+1} \quad \text{quand } N \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

où  $\lambda_{\text{typ}} \asymp N^\alpha$  est l'ordre de grandeur typique d'une valeur propre  $\lambda_i$ .

D'un autre côté, le terme d'interaction logarithmique  $-\sum_{i<j} \ln |\lambda_i - \lambda_j|$  (interaction de Coulomb) s'écrit :

$$-\sum_{i<j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| = -\alpha \frac{N(N-1)}{2} \ln N - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \ln |x_i - x_j| \quad (2.13)$$

Le terme  $-\alpha \frac{N(N-1)}{2} \ln N$  est une constante, il ne dépend pas des variables aléatoires  $x_i$ , il peut être absorbé dans la constante de normalisation  $Z_N$ , cf Eq. (2.9) et Eq. (2.18). On pourra donc essentiellement l'oublier dans la suite. D'autre part on va voir que la somme  $\sum_{1 \leq i < j \leq N} \ln |x_i - x_j|$  est d'ordre  $\asymp N^2$  dans la limite  $N \gg 1$ . En effet, en introduisant la densité à deux points adimensionnée définie par  $\rho_2(x, x') = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \delta(x - x_i) \delta(x' - x_j)$ , cf (2.11), on peut écrire :

$$-\sum_{1 \leq i < j \leq N} \ln |x_i - x_j| = -\frac{N(N-1)}{2} \int dx \int dx' \rho^{(2)}(x, x') \ln |x - x'| \asymp N^2 \quad (2.14)$$

Le terme ci-dessus est bien d'ordre  $\asymp N^2$  pour  $N \gg 1$  car on s'attend à ce que  $\rho^{(2)}$  tende vers une limite finie quand  $N \rightarrow \infty$  et car la fonction  $u \rightarrow \ln |u|$  est intégrable en  $u = 0$ . Le terme d'interaction coulombienne est donc d'ordre  $\asymp N^2$  quand  $N \rightarrow \infty$  (si on oublie la constante  $-\alpha \frac{N(N-1)}{2} \ln N$  en l'absorbant dans la normalisation  $Z_N$ ).

Les deux termes de l'énergie effective (le terme quadratique et le terme coulombien) s'équilibrent donc quand  $N \lambda_{\text{typ}}^2 \asymp N^2$ , soit  $\lambda_{\text{typ}}^2 \asymp N$ , ie  $\alpha = 1/2$  pour  $N$  grand. On s'attend donc à un **comportement typique des valeurs propres** en racine de  $N$

$$\boxed{|\lambda_{\text{typ}}| \asymp \sqrt{N}} \quad (2.15)$$

On notera l'effet très important de **répulsion** dû au déterminant de Vandermonde (qui est à l'origine de la répulsion coulombienne)  $\Delta(\lambda_i) = \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i)$  dans (2.8). Si les  $\lambda_i$  étaient des variables indépendantes, on aurait  $|\lambda_{\text{typ}}| \asymp 1$  pour  $N$  grand. Du fait de la répulsion coulombienne, les charges (valeurs propres) s'étalent sur un intervalle beaucoup plus large pour  $N$  grand :  $|\lambda_{\text{typ}}| \asymp \sqrt{N}$ .

La notation  $\asymp$  est utilisée pour indiquer l'ordre de grandeur, par opposition à  $\sim$  qui indique un équivalent.

### 2.1.3 Densité moyenne

En introduisant les densités adimensionnées à un et deux points, cf (2.10) et (2.11), et d'après (2.13), on peut récrire **l'énergie effective du gaz de Coulomb** (2.9) sous

la forme exacte suivante :

$$E_N [\{\lambda_i\}] = \frac{N^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho(x) x^2 - \frac{N(N-1)}{4} \ln N - \frac{N(N-1)}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \rho^{(2)}(x, x') \ln |x - x'| \quad (2.16)$$

On se place maintenant dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . On s'attend alors à ce que la densité  $\rho(x)$  et la densité à deux points  $\rho^{(2)}(x, x')$  (qui pour un  $N$  fini sont des sommes de pics delta) aient une **limite continue**. Or d'après la définition de  $\rho^{(2)}$  (2.11), on peut écrire  $\rho^{(2)}(x, x') = \frac{N}{N-1} \rho(x) \rho(x') - \frac{1}{N-1} \rho(x) \delta(x - x')$ , donc dans la limite  $N \rightarrow \infty$  on aura  $\rho^{(2)}(x, x') \sim \rho(x) \rho(x')$ . On peut alors écrire dans la limite continue (pour  $N \rightarrow \infty$ ) :

$$E_N [\{\lambda_i\}] = N^2 E[\rho] - N^2 \frac{\ln N}{4} + o(N^2) \quad \text{où} \quad (2.17)$$

$$E[\rho] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \rho(x) \rho(x') \ln |x - x'|$$

où  $\rho(x)$  est désormais une fonction continue, car on se place dans la limite  $N \rightarrow \infty$ .

D'après l'équation (2.17), **l'énergie effective**  $E_N [\{\lambda_i\}]$  **est d'ordre**  $\asymp N^2$  quand  $N$  est grand (à une constante additive près) et on peut écrire la probabilité d'une configuration des  $\lambda_i$  (donnée dans l'équation (2.9)) sous la forme :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{Z'_N} e^{-\beta N^2 E[\rho]} \quad (2.18)$$

où  $Z'_N = N^{-\frac{\beta N^2}{4}} Z_N$  avec  $E[\rho]$  d'ordre  $\asymp 1$  pour  $N$  grand. Cela revient à se placer à température inverse  $\beta N^2$ , ie à température nulle quand  $N \rightarrow \infty$ . Ainsi, dans la **limite**  $N \rightarrow \infty$ , la densité continue  $\rho(x)$  décrit une **configuration typique des "charges"  $\lambda_i$  à température nulle**. Elle doit donc **minimiser l'énergie effective du gaz de Coulomb** (ie maximiser la probabilité  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  de l'Eq. (2.9) ou (2.18)). On la notera alors  $\rho^*(x)$ . C'est aussi la moyenne de  $\rho(x)$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$  :  $\rho(x) \sim \langle \rho(x) \rangle \sim \rho^*(x)$ .

La densité moyenne  $\rho^*(x)$  doit minimiser l'énergie effective avec la contrainte de normalisation  $\int dx \rho^*(x) = 1$ . La minimisation fonctionnelle par rapport à  $\rho$  s'écrit :

$$0 = \left. \frac{\delta [E[\rho] + \mu_0 (\int dx' \rho(x') - 1)]}{\delta \rho(x)} \right|_{\rho=\rho^*} = \frac{x^2}{2} - \int_{-\infty}^{\infty} dx' \rho^*(x') \ln |x - x'| + \mu_0 \quad (2.19)$$

où on a introduit un multiplicateur de Lagrange  $\mu_0$  pour prendre en compte la contrainte de normalisation de la densité  $\int \rho^* = 1$ . On doit donc résoudre l'équation intégrale fonctionnelle suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \rho^*(x') \ln |x - x'| = \mu_0 + \frac{x^2}{2} \quad \text{pour } x \in \text{Supp}[\rho^*] \quad (2.20)$$

où  $\text{Supp}[\rho^*]$  est le support de la densité  $\rho^*$ ,  $\text{Supp}[\rho^*] \subset \mathbb{R}$ . Dérivant une fois par rapport à  $x$ , on obtient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\rho^*(x')}{x - x'} = x \quad \text{pour } x \in \text{Supp}[\rho^*] \quad (2.21)$$



où  $f$  désigne la partie principale de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\rho^*(x')}{x-x'} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-\infty}^{x-\epsilon} dx' \frac{\rho^*(x')}{x-x'} + \int_{x+\epsilon}^{\infty} dx' \frac{\rho^*(x')}{x-x'} \right) \quad (2.22)$$

Un théorème dû à Tricomi permet de résoudre l'équation intégrale (2.21). Ce théorème est expliqué dans la section 2.4. La solution de cette équation est une densité  $\rho^*$  à support fini  $\text{Supp}[\rho^*] = [a, b]$  et s'exprime sous forme d'une intégrale, voir (2.84) :

$$\rho^*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}} \left\{ C - \int_a^b \frac{dt}{\pi} \frac{\sqrt{t-a}\sqrt{b-t}}{x-t} t \right\} \quad (2.23)$$

où  $C = \int \rho^* = 1$  car  $\rho^*$  doit être normalisée. D'où :

$$\rho^*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}} \left\{ 1 - x^2 + \frac{1}{2}(a+b)x + \frac{1}{8}(b-a)^2 \right\} \quad \text{pour } x \in [a, b] \quad (2.24)$$

Par symétrie autour de l'origine 0, on s'attend à ce que  $a = -b$ . On s'attend aussi à ce que la densité soit **continue** et donc à ce qu'elle s'annule aux bords de son support. Comme  $\rho^*(x) = 0$  pour  $x > b$  et pour  $x < a$ , on doit avoir  $\rho^*(a) = 0 = \rho^*(b)$ . En imposant cette condition dans l'expression (2.24), on obtient :

$$b = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad a = -\sqrt{2} \quad (2.25)$$

Finalement, la densité moyenne est donc donnée pour  $N \gg 1$  par :

$$\boxed{\rho_N(\lambda) \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \rho^* \left( \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \right) \quad \text{où} \quad \rho^*(x) = \frac{\sqrt{2-x^2}}{\pi} \quad \text{pour } x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]} \quad (2.26)$$

La **densité moyenne**  $\rho_N(\lambda)$  des charges du gaz de Coulomb (ie des valeurs propres  $\lambda_i$ ) est donc **continue à support fini**  $[-\sqrt{2N}, \sqrt{2N}]$ , c'est un demi-cercle appelé habituellement **demi-cercle de Wigner**.

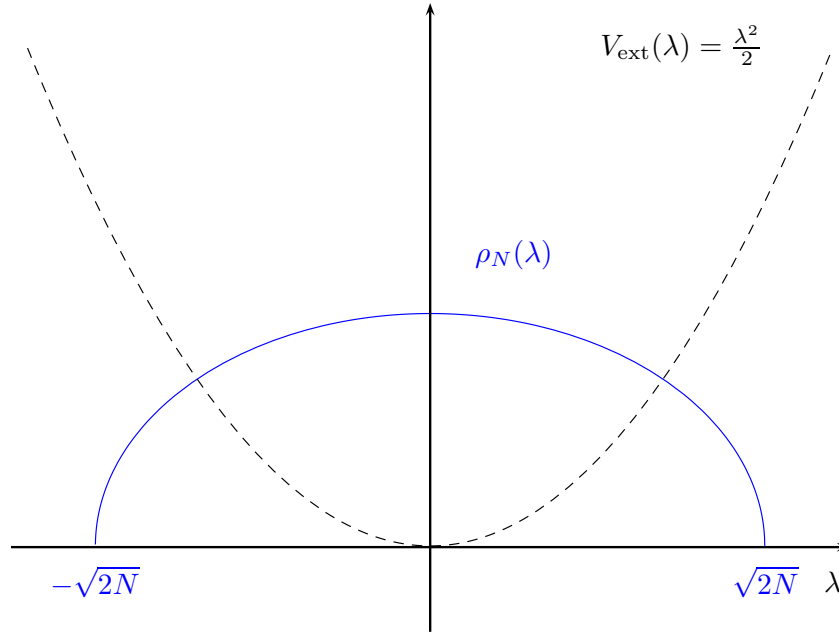
C'est bien ce à quoi on s'attend physiquement, voir Fig. 2.1. En effet, à température nulle, les charges ont tendance à s'accumuler près du minimum du potentiel externe effectif confinant  $V_{\text{ext}}(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2}$ , c'est à dire autour de l'origine. Mais du fait de la répulsion coulombienne, les charges ne peuvent pas toutes se placer à l'origine, elles s'étalent sur une zone de largeur d'ordre  $|\lambda_{\text{typ}}| \sim \sqrt{N}$ , plus précisément sur le segment  $[-\sqrt{2N}, \sqrt{2N}]$  (elles sont contraintes de rester sur une ligne car les  $\lambda_i$  sont réelles).

La densité moyenne  $\rho_N(\lambda)$  donnée Eq. (2.26) représente la distribution marginale pour une valeur propre, elle donne donc en particulier accès également à la **moyenne et aux moments d'une valeur propre** dans la limite  $N$  grand :

$$\langle \lambda^k \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \lambda^k \rho_N(\lambda) \sim N^{\frac{k}{2}} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx x^k \rho^*(x) \quad (2.27)$$

soit :

$$\langle \lambda^{2n+1} \rangle = 0 \quad , \quad \langle \lambda^{2n} \rangle \sim \frac{(2N)^n \Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(n+2)} \quad \text{pour } N \gg 1 \quad (2.28)$$



**Figure 2.1** – Densité moyenne  $\rho_N(\lambda)$  pour une matrice gaussienne (demi-cercle de Wigner, trait plein bleu) et potentiel externe  $V_{\text{ext}}(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2}$  vu par les charges du gaz de Coulomb associé (en pointillés). Les charges (valeurs propres) s'accumulent au minimum du potentiel, ie près de l'origine.

On retrouve ici comme attendu la symétrie  $\lambda \rightarrow -\lambda$  :  $\rho_N(\lambda)$  est paire et en particulier la moyenne est nulle  $\langle \lambda \rangle = 0$ . On obtient aussi la variance  $\text{Var}(\lambda) = \langle \lambda^2 \rangle - \langle \lambda \rangle^2$  soit

$$\text{Var}(\lambda) \sim \frac{N}{2} \text{ pour } N \text{ grand} \quad (2.29)$$

La densité moyenne  $\rho_N(\lambda)$  donne également accès à la **moyenne de la valeur propre maximale** (resp. minimale) dans la limite  $N$  grand. En effet l'écart typique entre deux valeurs propres successives est d'ordre  $\asymp \frac{\sqrt{N}}{N} \asymp \frac{1}{\sqrt{N}}$ , donc la valeur propre maximale doit se trouver dans un intervalle de largeur au plus  $\asymp \frac{1}{\sqrt{N}}$  autour de la borne supérieure du support de la densité, soit  $\sqrt{2N}$ . Ainsi on s'attend pour  $N \gg 1$  à :

$$\boxed{\langle \lambda_{\max} \rangle \sim \sqrt{2N} \quad \text{et} \quad \langle \lambda_{\min} \rangle \sim -\sqrt{2N}} \quad (2.30)$$

L'interprétation en termes de **gaz de Coulomb** est très utile car elle permet d'avoir une intuition physique sur le comportement des valeurs propres. Elle donne des résultats exacts à l'ordre dominant dans la limite  $N \rightarrow \infty$  pour les valeurs moyennes comme on vient de voir mais aussi pour la **distribution complète de fonctions symétriques des valeurs propres du type**  $\sum_{i=1}^N f(\lambda_i)$ . Ainsi j'ai utilisé durant ma thèse cette méthode pour calculer par exemple la distribution du nombre de valeurs propres positives d'une matrice gaussienne, ie  $f(\lambda) = \theta(\lambda)$  cf chapitre 11 ; la distribution du centre de masse des hauteurs d'interfaces dans un modèle d'interfaces fluctuantes, ce qui revient à considérer  $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$  pour des matrices de Wishart cf chapitre 5 ; ou encore la distribution de l'entropie pour des états aléatoires dans un système quantique bipartite, soit  $f(\lambda) = \lambda^q$  pour des matrices de Wishart avec contrainte supplémentaire  $\sum_i \lambda_i = 1$  cf chapitre 9. Dans ces modèles variés, j'ai pu utiliser une méthode de gaz de Coulomb pour calculer

la distribution d'une fonction symétrique des valeurs propres d'une matrice aléatoire, et j'ai mis en évidence des non-analyticités dans ces distributions liées à des **transitions de phase** dans le gaz de Coulomb associé.

## 2.2 GAZ DE COULOMB POUR UNE MATRICE DE WISHART

Dans cette partie, je présente l'étude du gaz de Coulomb associé à une matrice de Wishart -définie section 1.4. Comme dans le cas gaussien, on peut obtenir ainsi la densité moyenne des valeurs propres pour  $N$  grand.

### 2.2.1 Gaz de Coulomb

Considérons une matrice de Wishart  $W = X^\dagger X$  où  $X$  est rectangulaire gaussienne de taille  $M \times N$  avec  $N \leq M$ . Ses valeurs propres sont distribuées selon la loi (1.64) :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = K_{M,N} e^{-\frac{\beta}{2} \sum_i \lambda_i} \prod_{k=1}^N \lambda_k^{\frac{\beta}{2}(M-N+1)-1} \prod_{i<j} |\lambda_j - \lambda_i|^\beta \quad (2.31)$$

qui peut à nouveau (comme dans le cas gaussien) être vue comme un poids de Boltzmann à température inverse  $\beta$  :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= Z_{M,N}^{-1} e^{-\beta E_N[\{\lambda_i\}]} \quad \text{où} \\ E_N[\{\lambda_i\}] &= \sum_i V_{\text{ext}}(\lambda_i) - \sum_{i<j} \ln |\lambda_j - \lambda_i| \\ \text{avec } V_{\text{ext}}(\lambda) &= \frac{\lambda}{2} - \gamma \ln \lambda \quad , \quad \gamma = \frac{M - N + 1}{2} - \frac{1}{\beta} \end{aligned}} \quad (2.32)$$

où  $Z_{M,N}^{-1} = K_{M,N}$ . Les valeurs propres d'une matrice de Wishart peuvent donc aussi être considérées comme les **charges d'un gaz de Coulomb 2D** (répulsion logarithmique  $-\ln |\lambda_j - \lambda_i|$  entre charges de même signe) **plongées dans un potentiel externe**  $V_{\text{ext}}(\lambda) = \frac{\lambda}{2} - \gamma \ln \lambda$  (différent du cas des ensembles gaussiens). On notera que les valeurs propres des matrices de Wishart sont toujours **positives**,  $\lambda_i \geq 0$ , car  $W$  est semi-définie positive ( $W = X^\dagger X$ ).

### 2.2.2 Scaling typique

Si on suppose que dans la limite  $N \gg 1$  on a  $\lambda_i \asymp N^\alpha$  pour un  $\alpha$  réel, alors on peut noter  $x_i = \lambda_i/N^\alpha$  les valeurs propres adimensionnées. le terme d'interaction coulombienne s'écrit comme dans le cas gaussien (2.13)  $-\sum_{i<j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| = -\alpha \frac{N(N-1)}{2} \ln N - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \ln |x_i - x_j|$  où  $-\sum_{1 \leq i < j \leq N} \ln |x_i - x_j| \asymp N^2$  quand  $N \rightarrow \infty$ , cf (2.14).

Par contre le terme de potentiel externe  $V_{\text{ext}}$  est différent du cas gaussien, cf Eq. (2.32). Ici on a :

$$\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{2} \asymp N \lambda_{\text{typ}} \asymp N^{\alpha+1} \quad \text{et} \quad -\gamma \sum_{i=1}^N \ln \lambda_i = -\alpha \gamma N \ln N + O(\gamma N) \quad (2.33)$$

Pour équilibrer le terme d'interaction coulombienne et le terme de potentiel linéaire  $\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{2}$  il faut donc que les valeurs propres se comportent typiquement comme  $N$  quand  $N$  est grand :

$$\lambda_{\text{typ}} \asymp N \quad \text{soit } \alpha = 1 \quad (2.34)$$

Le terme logarithmique  $-\gamma \sum_{i=1}^N \ln \lambda_i$  dans  $V_{\text{ext}}$  dépend de  $\gamma$  donc de  $M$ , cf Eq. (2.32). D'après Eq. (2.33), ce terme s'écrit comme une constante  $-\alpha\gamma N \ln N$  (indépendante des variables aléatoires  $x_i$ ) qui peut être absorbée dans la normalisation  $Z_{M,N}$  (cf Eq. (2.32)) plus un terme d'ordre  $\asymp \gamma N$ . Si  $M = N$ , on a  $\gamma \asymp 1$  pour  $N$  grand, donc le terme logarithmique du potentiel externe est négligeable devant les autres termes de  $E_N$  (qui est d'ordre  $\asymp N^2$ ). Si  $N = cM$  avec  $0 < c < 1$  alors  $\gamma \asymp N$  et la partie non constante du terme logarithmique est d'ordre  $\asymp N^2$ , donc du même ordre que les autres termes de  $E_N$ . Si  $M \gg N$ , le terme logarithmique domine. Dans la suite, on supposera que  $N = cM$  avec  $0 < c \leq 1$ . On aura alors :

$$c = \frac{N}{M} \quad \text{avec } 0 < c \leq 1 \quad \text{et } \gamma \sim \frac{N}{2} \left( \frac{1-c}{c} \right) \quad \text{pour } N \gg 1 \quad (2.35)$$

Le terme logarithmique ne sera négligeable que si  $c = 1$ , ie  $M = N$ .

### 2.2.3 Densité moyenne

Comme dans le cas gaussien, la densité adimensionnée  $\rho(x) = \frac{1}{N} \sum_i \delta(x - x_i)$  où  $x_i = \lambda_i/N$  tend vers une limite continue quand  $N \rightarrow \infty$ . Dans ce cas, de façon similaire au cas gaussien, cf Eq. (2.17), l'énergie effective s'écrit dans la limite  $N \rightarrow \infty$  comme une fonctionnelle de la densité continue  $\rho$  :

$$\begin{aligned} E_N [\{\lambda_i\}] &= N^2 E[\rho] - N^2 \frac{\ln N}{2c} + o(N^2) \quad \text{où} \\ E[\rho] &= \int_0^\infty dx \rho(x) \frac{x}{2} - \left( \frac{1-c}{2c} \right) \int_0^\infty dx \rho(x) \ln x \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx' \rho(x) \rho(x') \ln |x - x'| \end{aligned} \quad (2.36)$$

Comme dans le cas gaussien encore (cf section 2.1.3), la limite  $N \rightarrow \infty$  correspond pour le gaz de Coulomb à la limite de **température nulle**. Ainsi dans cette limite la densité  $\rho(x)$  **minimise l'énergie**  $E[\rho]$ , on la note  $\rho^*(x)$ . La minimisation par rapport à  $\rho$  en présence de la contrainte  $\int \rho = 1$  s'écrit :

$$0 = \left. \frac{\delta [E[\rho] + \mu_0 (\int \rho - 1)]}{\delta \rho(x)} \right|_{\rho=\rho^*} = \frac{x}{2} - \left( \frac{1-c}{2c} \right) \ln x - \int dx' \rho^*(x') \ln |x - x'| \quad (2.37)$$

où  $\mu_0$  est un multiplicateur de Lagrange ajouté pour imposer la contrainte  $\int \rho = 1$ . En dérivant par rapport à  $x$ , on obtient :

$$\int_0^\infty dx' \frac{\rho^*(x')}{x - x'} = \frac{1}{2} - \left( \frac{1-c}{2c} \right) \frac{1}{x} \quad \text{pour } x \in \text{Supp}[\rho^*] \quad (2.38)$$

Cette équation intégrale peut se résoudre comme dans le cas gaussien à l'aide du théorème de Tricomi, voir section 2.4. La solution est une densité  $\rho^*(x)$  à support fini  $[a, b]$  où

$0 < a < b$  (les valeurs propres de  $W$  sont positives).  $\rho^*$  est donnée par :

$$\rho^*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}} \left\{ 1 - \int_a^b \frac{dt \sqrt{t-a}\sqrt{b-t}}{\pi(x-t)} \left( \frac{1}{2} - \left( \frac{1-c}{2c} \right) \frac{1}{t} \right) \right\} \quad (2.39)$$

d'où :

$$\rho^*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}} \left\{ 1 + \left( \frac{a+b}{4} - \frac{x}{2} \right) - \left( \frac{1-c}{2c} \right) \left( \frac{\sqrt{ab}}{x} - 1 \right) \right\} \quad (2.40)$$

On s'attend à nouveau à ce que  $\rho^*(x)$  soit continue, donc s'annule aux bords de son support :  $\rho^*(a) = 0 = \rho^*(b)$ . On trouve alors :

$$a = x_- = \left( \frac{1}{\sqrt{c}} - 1 \right)^2 \quad \text{et} \quad b = x_+ = \left( \frac{1}{\sqrt{c}} + 1 \right)^2 \quad (2.41)$$

où  $c = N/M \in ]0, 1]$ . Finalement on obtient une densité  $\rho^*$  à support fini  $[x_-, x_+]$  où  $x_{\pm} = \left( \frac{1}{\sqrt{c}} \pm 1 \right)^2$ .

La **densité moyenne** des valeurs propres d'une matrice de Wishart est donc donnée pour  $N \gg 1$  par :

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_N(\lambda) &\sim \frac{1}{N} \rho^* \left( \frac{\lambda}{N} \right) \quad \text{où} \quad \rho^*(x) = \frac{1}{2\pi x} \sqrt{(x-x_-)(x_+-x)} \\ &\text{avec} \quad x_{\pm} = \left( \frac{1}{\sqrt{c}} \pm 1 \right)^2 \end{aligned}} \quad (2.42)$$

Cette densité est appelée **loi de Marčenko-Pastur** [MP67]. Dans la limite où  $c = 1$ , soit  $M = N$ , on trouve  $x_- = 0$  et  $x_+ = 4$  et :

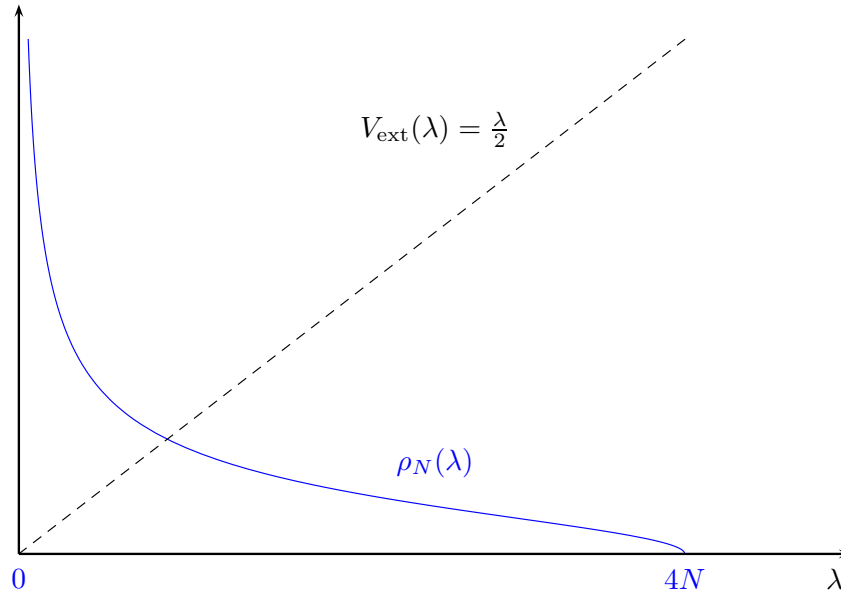
$$\rho^*(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4-x}{x}} \quad \text{quand } c = 1 \quad (2.43)$$

La densité a alors une divergence intégrable (en  $1/\sqrt{x}$ ) à l'origine, la borne inférieure de son support.

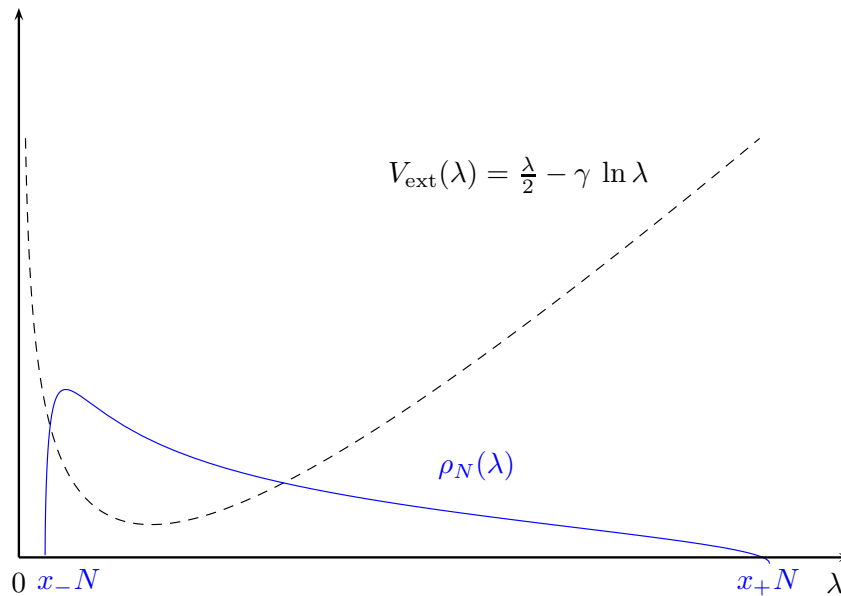
A nouveau, la forme de la densité se comprend par des arguments physiques, voir Fig. 2.2 et 2.2. Les charges doivent rester sur la demi-ligne  $\lambda > 0$ , elles sont repoussées par un mur en 0. Elles voient un potentiel externe effectif confinant  $V_{\text{ext}}(\lambda) = \frac{\lambda}{2} - \gamma \ln \lambda$  pour  $\lambda > 0$  où  $\gamma \sim \frac{N}{2} \left( \frac{1-c}{c} \right)$ . Ce potentiel a un minimum en  $\lambda^* = N \frac{1-c}{c}$ . A température nulle (ou grand  $N$ ), les charges s'accumulent autour de ce minimum. A nouveau, comme dans le cas gaussien, la répulsion coulombienne force les charges à s'étaler sur une largeur d'ordre  $|\lambda_{\text{typ}}| \asymp N$ , elles se répartissent donc sur un segment  $[x_-N, x_+N]$  avec  $x_-N < \lambda^* < x_+N$  (voir (2.42)). Quand  $c = 1$ , on a  $\lambda^* = 0$ , les charges s'accumulent près du mur à l'origine, on obtient donc la densité (2.43) qui diverge en 0.

Comme dans le cas gaussien, la densité moyenne est la distribution marginale d'une valeur propre, elle donne donc en particulier accès aux **moments d'une valeur propre pour  $N$  grand**  $\langle \lambda^n \rangle = \int_0^{+\infty} d\lambda \lambda^n \rho_N(\lambda)$ . Pour  $c = 1$ , on trouve :

$$\langle \lambda^n \rangle \sim \frac{(4N)^n \Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(n+2)} \quad \text{pour } N \text{ grand} \quad (2.44)$$



**Figure 2.2** – Densité moyenne  $\rho_N(\lambda)$  pour une matrice de Wishart (loi de Marčenko-Pastur, trait plein bleu) dans la cas  $c = 1$  (ie  $M = N$ ) et potentiel externe  $V_{\text{ext}}(\lambda) = \frac{\lambda}{2}$  vu par les charges du gaz de Coulomb associé (en pointillés). Les charges s'accumulent près de l'origine. Pour une matrice de Wishart on rappelle que les  $\lambda_i$  sont positives.



**Figure 2.3** – Densité moyenne  $\rho_N(\lambda)$  pour une matrice de Wishart (loi de Marčenko-Pastur, trait plein bleu) dans le cas  $0 < c < 1$ , ie  $M > N$ , et potentiel externe  $V_{\text{ext}}(\lambda) = \frac{\lambda}{2} - \gamma \ln \lambda$  vu par les charges du gaz de Coulomb associé (en pointillés). Les charges restent près du minimum positif du potentiel.

En général, pour  $0 < c \leq 1$  :

$$\langle \lambda^n \rangle \sim (1 + \sqrt{c})^{-2+2n} \left( \frac{N}{c} \right)^n {}_2F_1 \left( \frac{3}{2}, 1 - n, 3, \frac{4\sqrt{c}}{(1 + \sqrt{c})^2} \right) \quad (2.45)$$

où  ${}_2F_1(a, b, c, z)$  est une fonction hypergéométrique :

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} \quad (2.46)$$

où  $(a)_k$  est le symbole de Pochhammer  $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$  (“factorielle montante”). En particulier, pour les petites valeurs de  $n$ , on trouve (pour  $N$  grand) :

$$\langle \lambda \rangle \sim \frac{N}{c} \quad \text{et} \quad \langle \lambda^2 \rangle \sim \frac{(1+c)N^2}{c^2} \quad \text{et} \quad \langle \lambda^3 \rangle \sim \frac{(1+3c+c^2)N^3}{c^3} \quad (2.47)$$

donc en particulier on trouve la moyenne et la variance :

$$\langle \lambda \rangle \sim \frac{N}{c} \quad \text{et} \quad \text{Var}(\lambda) = \langle \lambda^2 \rangle - \langle \lambda \rangle^2 \sim \frac{N^2}{c} \quad (2.48)$$

L’expression de la densité moyenne nous donne aussi des informations sur les **valeurs propres maximale et minimale**. Leur moyenne est en effet donnée pour  $N$  grand par les extrémités  $x_{\pm}N$  du support de la densité  $\rho_N(\lambda)$ . Ainsi on trouve pour  $0 < c < 1$  :

$$\langle \lambda_{\max} \rangle \sim x_+ N \sim N \left( \frac{1}{\sqrt{c}} + 1 \right)^2 \quad \text{et} \quad \langle \lambda_{\min} \rangle \sim x_- N \sim N \left( \frac{1}{\sqrt{c}} - 1 \right)^2 \quad (2.49)$$

Pour  $c = 1$ , l’expression ci-dessus donne “ $\lambda_{\min} \sim 0$ ” ce qui signifie en fait que  $\langle \lambda_{\min} \rangle \ll N$  pour  $N$  grand, la densité ne nous donne alors pas accès à la moyenne de la valeur propre minimale. Par contre pour le maximum on trouve :

$$\boxed{\langle \lambda_{\max} \rangle \sim 4N \quad \text{pour } c = 1} \quad (2.50)$$

## 2.3 FONCTIONS DE CORRÉLATION POUR L’ENSEMBLE GAUSSIEN GUE ( $\beta = 2$ )

Jusqu’ici on a calculé la densité moyenne pour les différents ensembles de matrices. On peut aussi s’intéresser aux fonctions de corrélation à  $n$  points. Pour  $n > 1$ , la méthode de Coulomb ne donne pas facilement de résultats, il faut faire appel à d’autres méthodes, comme les polynômes orthogonaux pour évaluer ces fonctions de corrélation à grand  $N$ . Dans la première sous-partie, je définis ces fonctions de corrélation, dans la seconde j’introduis la méthode des polynômes orthogonaux et dans la troisième je donne le comportement asymptotique de la fonction de corrélation à  $n = 2$  points (mais sans le démontrer).

### 2.3.1 Fonctions de corrélation

On définit la **densité à  $n$  points** comme :

$$\rho_N^{(n)}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \frac{(N-n)!}{N!} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n} \delta(\mu_1 - \lambda_{i_1}) \dots \delta(\mu_n - \lambda_{i_n}) \quad (2.51)$$

Cette densité est bien normalisée, ie  $\int d\mu_1 \dots \int d\mu_n \rho_N^{(n)}(\mu_1, \dots, \mu_n) = 1$ . La densité moyenne à  $n$  points est la distribution marginale de  $n$  valeurs propres :

$$\begin{aligned} \langle \rho_N^{(n)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_{n+1} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_N \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \\ &= \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{aligned} \quad (2.52)$$

En particulier on retrouve pour  $n = 1$  la densité moyenne  $\rho_N^{(1)}(\lambda) = \rho_N(\lambda)$ .

On définit la **fonction de corrélation à  $n$  points** ( $1 \leq n \leq N$ ) de la façon suivante cf [Fyo05] :

$$\mathcal{R}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{N!}{(N-n)!} \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (2.53)$$

où  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est la distribution marginale de  $n$  valeurs propres ( $n \leq N$ ). En particulier, on a  $\mathcal{R}_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = N! \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  et  $\mathcal{R}_1(\lambda) = N \rho_N(\lambda)$ . De façon équivalente à (2.53), on peut écrire  $\mathcal{R}_n(\mu_1, \dots, \mu_n) = \left\langle \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n} \delta(\mu_1 - \lambda_{i_1}) \dots \delta(\mu_n - \lambda_{i_n}) \right\rangle$ .

Souvent on introduit aussi les **fonctions de corrélations connexes**  $\mathcal{T}_n$ . Pour les premières valeurs de  $n$ , elles sont définis de la façon suivante :

$$\mathcal{T}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{m=1}^n \sum_{\pi \text{ t.q. } |\pi| = m} (-1)^{n-m} (m-1)! \prod_{j=1}^m \mathcal{R}_{|\pi_j|}(\lambda_k, k \in \pi_j) \quad (2.54)$$

où  $\pi$  décrit une partition de  $\{1, 2, \dots, n\}$  de taille  $|\pi| = m$ . Les  $\pi_j$  pour  $1 \leq j \leq m$  sont donc des sous-ensembles disjoints de  $\{1, \dots, n\}$  tels que  $\cup_j \pi_j = \{1, \dots, n\}$ .  $|\pi_j|$  dénote le nombre d'éléments du sous-ensemble  $\pi_j$ . Par exemple, pour les premières valeurs de  $n$ , on trouve :

$$\mathcal{T}_1(\lambda) = \mathcal{R}_1(\lambda) \quad , \quad \mathcal{T}_2(\lambda, \lambda') = -\mathcal{R}_2(\lambda, \lambda') + \mathcal{R}_1(\lambda) \mathcal{R}_1(\lambda') \quad (2.55)$$

Le lien entre les fonctions de corrélation connexes  $\mathcal{T}_n$  et les  $\mathcal{R}_n$  est similaire au lien entre moments et cumulants pour une variable aléatoire.

### 2.3.2 Polynômes orthogonaux

J'introduis ici la technique des polynômes orthogonaux pour l'ensemble gaussien GUE. Cette technique est spécifique pour chaque ensemble : pour GOE et GSE il faut introduire d'autres polynômes dits "skew-orthogonaux". Elle permet d'exprimer de façon simple les fonctions de corrélations définies ci-dessus Eq. (2.53) et d'en déduire leur comportement asymptotique à  $N$  grand.

On a vu que la distribution des valeurs propres d'une matrice de l'ensemble GUE est donnée par :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B_N(2) e^{-\sum_i \lambda_i^2} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^2 \quad (2.56)$$



soit  $\beta = 2$  dans l'équation (1.27). L'idée est que l'on peut récrire le **déterminant de Vandermonde**  $\prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i)$  comme un déterminant de polynômes quelconques :

$$\prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i) = \det (\lambda_i^{j-1}) = \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_{N-1}} \det (p_{j-1}(\lambda_i)) \quad (2.57)$$

où les  $p_j(\lambda)$  sont des polynômes de degré  $j$  et coefficient dominant  $a_j \neq 0$  :  $p_j(\lambda) = a_j \lambda^j + \dots$ . On peut alors choisir ces polynômes  $p_j$  de façon à simplifier les expressions.

On considère la famille des **polynômes orthogonaux**  $p_j(\lambda)$  sur  $\mathbb{R}$  par rapport au poids gaussien  $e^{-\lambda^2}$ , soit :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-\lambda^2} p_i(\lambda) p_j(\lambda) = \delta_{ij}} \quad (2.58)$$

et  $p_j(\lambda)$  de degré  $j$ . Les  $p_j(\lambda)$  sont en fait à une constante près *les polynômes de Hermite*  $H_n$  :

$$p_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(x) \quad \text{où}$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}] = n! \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} \quad (2.59)$$

Avec cette définition, on a  $p_n(\lambda) = \left(\frac{2^n}{n! \sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \lambda^n + \dots \equiv a_n \lambda^n + \dots$ , donc d'après (2.57) :

$$\Delta(\lambda_i) e^{-\sum_j \frac{\lambda_j^2}{2}} = A_N \det (\phi_{j-1}(\lambda_i)) \quad \text{où } \phi_j(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}} p_j(\lambda) \quad (2.60)$$

et où  $A_N = \pi^{\frac{N}{4}} \sqrt{\prod_{n=1}^{N-1} n!} 2^{-\frac{N(N-1)}{4}}$ . La probabilité jointe des valeurs propres s'exprime en fonction des  $\phi_j$  :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{N!} \det \left( \sum_{k=1}^N \phi_{k-1}(\lambda_i) \phi_{k-1}(\lambda_j) \right)_{i,j} \quad (2.61)$$

car  $\det(M_1) \det(M_2) = \det(M_1 M_2)$  et car  $B_N(2) A_N^2 = 1/(N!)$ .

On définit le "**noyau**" suivant :

$$K_N(\lambda, \lambda') = \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k(\lambda) \phi_k(\lambda') \quad (2.62)$$

Alors (2.61) s'écrit :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{N!} \det (K_N(\lambda_i, \lambda_j))_{1 \leq i, j \leq N} \quad (2.63)$$

Du fait de la propriété d'orthogonalité des  $p_j(\lambda)$ , les  $\phi_j$  vérifient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \phi_i(\lambda) \phi_j(\lambda) = \delta_{ij} \quad (2.64)$$

Le noyau  $K_N$  est symétrique  $K_N(x, y) = K_N(y, x)$  et a les propriétés suivantes dues à (2.64) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx K_N(x, x) = N, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dy K_N(x, y) K_N(y, z) = K_N(x, z) \quad (2.65)$$

Enfin, on va montrer que toutes les fonctions de corrélation peuvent s'écrire comme un déterminant de  $K_N(\lambda_i, \lambda_j)$  :

$$\boxed{\mathcal{R}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \det (K_N(\lambda_i, \lambda_j))_{1 \leq i, j \leq n}} \quad (2.66)$$

En particulier on obtient pour les premières fonctions de corrélation connexes :

$$N\rho_N(\lambda) = \mathcal{T}_1(\lambda) = \mathcal{R}_1(\lambda) = K_N(\lambda, \lambda) \quad (2.67)$$

$$\mathcal{T}_2(\lambda, \lambda') = K_N(\lambda, \lambda')^2 \quad (2.68)$$

Montrons par récurrence l'égalité de l'équation (2.66). Pour  $n = N$  on a  $\mathcal{R}_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = N! \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \det (K_N(\lambda_i, \lambda_j))_{1 \leq i, j \leq N}$  comme on a vu plus haut, cf Eq. (2.63). De plus, on peut écrire la relation de récurrence suivante :

$$\int d\lambda_{n+1} \det (K_N(\lambda_i, \lambda_j))_{1 \leq i, j \leq n+1} = (N - n) \det (K_N(\lambda_i, \lambda_j))_{1 \leq i, j \leq n} \quad (2.69)$$

En effet, par définition du déterminant, on a :

$$\int d\lambda_{n+1} \det (K_N(\lambda_i, \lambda_j))_{1 \leq i, j \leq n+1} = \sum_{\sigma} \epsilon_{\sigma} \int d\lambda_{n+1} \prod_i K_N(\lambda_i, \lambda_{\sigma(i)}) \quad (2.70)$$

$$= A + B \quad (2.71)$$

où

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\sigma \text{ t.q. } \sigma(n+1)=n+1} \epsilon_{\sigma} \int d\lambda_{n+1} K_N(\lambda_{n+1}, \lambda_{n+1}) \prod_{i \leq n} K_N(\lambda_i, \lambda_{\sigma(i)}) \\ &= N \det (K_N(\lambda_i, \lambda_j))_{1 \leq i, j \leq n} \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} B &= \sum_{\sigma \text{ t.q. } \sigma(n+1) \neq n+1} \epsilon_{\sigma} \int d\lambda_{n+1} \prod_i K_N(\lambda_i, \lambda_{\sigma(i)}) \\ &= \sum_{k \leq n} \sum_{\sigma \text{ t.q. } \sigma(n+1)=k} \epsilon_{\sigma} K_n(\lambda_{i_0}, \lambda_k) \left[ \prod_{i \neq i_0, i \neq n+1} K_N(\lambda_i, \lambda_{\sigma(i)}) \right] \end{aligned} \quad (2.73)$$

où  $\sigma(i_0) = n + 1$  et  $\sigma(n + 1) = k$  et où on a utilisé l'équation (2.65), c'est-à-dire  $\int d\lambda_{n+1} K_n(\lambda_{i_0}, \lambda_{n+1}) K_N(\lambda_{n+1}, \lambda_k) = K_n(\lambda_{i_0}, \lambda_k)$ . On introduit alors  $\sigma' = \tau_{k, n+1} \circ \sigma$  où  $\tau_{k, n+1}$  est la permutation de  $k$  et  $n + 1$ . Alors :  $\sigma'(n + 1) = n + 1$  et  $\epsilon_{\sigma'} = -\epsilon_{\sigma}$  d'où :

$$B = -n \sum_{\sigma' \text{ t.q. } \sigma'(n+1)=n+1} \epsilon_{\sigma'} \left[ \prod_{i \leq n} K_N(\lambda_i, \lambda_{\sigma'(i)}) \right] = -n \det (K_N(\lambda_i, \lambda_j))_{1 \leq i, j \leq n} \quad (2.74)$$

On a donc prouvé la relation (2.69) et finalement on a aussi montré (2.66) par récurrence.

Toutes les fonctions de corrélation se déduisent donc du noyau  $K_N$  donné par

$$K_N(\lambda, \lambda') = \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k(\lambda) \phi_k(\lambda') \quad \text{où} \quad \phi_k(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}} p_k(\lambda) \quad (2.75)$$

où les  $p_k(\lambda)$  sont à une constante multiplicative les polynômes de Hermite. Pour déterminer le comportement des fonctions de corrélations dans la limite  $N$  grand (grande matrice), il faut donc étudier le **comportement asymptotique** du noyau et donc de ces polynômes.

### 2.3.3 Comportement asymptotique

L'étude du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux de Hermite et donc du noyau  $K_N(\lambda, \lambda')$  permet d'obtenir celui des fonctions de corrélation à  $n$  points. Je me contente ici de donner les résultats connus, cf [Meh91, TW94], je ne les démontre pas.

- Le cas  $n = 1$  permet de retrouver l'expression de la **densité moyenne dans la limite  $N$  grand** qu'on avait obtenue par une méthode plus simple de gaz de Coulomb (le demi-cercle de Wigner, cf (2.26)) :

$$\rho_N(\lambda) = \frac{K_N(\lambda, \lambda)}{N} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \rho^* \left( \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \right) \quad \text{où} \quad \rho^*(x) = \frac{\sqrt{2-x^2}}{\pi} \quad (2.76)$$

- Le comportement à  $N$  grand de la **fonction de corrélation à  $n = 2$  points** peut également s'obtenir à partir des polynômes orthogonaux. On peut montrer que pour  $N$  grand avec  $\lambda \asymp \sqrt{N}$  et  $\lambda'$  proche de  $\lambda$ , ie  $|\lambda - \lambda'| \asymp \frac{1}{\sqrt{N}}$ , on a :

$$\frac{K_N(\lambda, \lambda')}{K_N(\lambda, \lambda)} \sim K_\infty [N\rho_N(\lambda)(\lambda - \lambda')] \quad \text{où} \quad K_\infty[r] = \frac{\sin(\pi r)}{\pi r} \quad (2.77)$$

$K_\infty(r)$  est appelé **noyau de Dyson** ou encore **sine kernel**, il décrit le comportement à l'intérieur du support de la densité  $]-\sqrt{2N}, \sqrt{2N}[$  ou “**bulk scaling**”. Ce régime est valable pour  $\lambda, \lambda' \in ]-\sqrt{2N}, \sqrt{2N}[$  avec  $|\lambda - \lambda'| \asymp 1/\sqrt{N}$ .

Ainsi on trouve le comportement de la fonction de corrélation connexe  $\mathcal{T}_2$  dans ce régime :

$$\mathcal{T}_2(\lambda, \lambda') = K_N(\lambda, \lambda')^2 \sim (N\rho_N(\lambda))^2 \{K_\infty [N\rho_N(\lambda)(\lambda - \lambda')]\}^2 \quad (2.78)$$

On notera que le scaling  $|\lambda - \lambda'| \sim 1/\sqrt{N}$  était attendu, en effet on a  $N$  valeurs propres réparties sur un intervalle de longueur  $\sim \sqrt{N}$ , on s'attend donc typiquement à ce que les valeurs propres soient séparées de  $\sim 1/\sqrt{N}$ .

- De même on peut montrer que le **scaling au bord ou “edge scaling”**, c'est à dire au voisinage du bord du support de la densité  $\lambda = \sqrt{2N}$ , est donné par le **noyau d'Airy**. Pour

$$\lambda_i = \sqrt{2N} + \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_i N^{-\frac{1}{6}} \quad \text{avec} \quad \xi_i \text{ fixé et } N \text{ grand} \quad (2.79)$$

on a :

$$K_N(\lambda_1, \lambda_2) \sim \sqrt{\frac{2}{N}} \frac{\text{Ai}(\xi_1)\text{Ai}'(\xi_2) - \text{Ai}(\xi_2)\text{Ai}'(\xi_1)}{\xi_1 - \xi_2} \quad (2.80)$$

où  $\text{Ai}(x)$  est la fonction d'Airy, définie comme la solution de l'équation différentielle  $\text{Ai}''(x) = x\text{Ai}(x)$  avec condition au bord

$$\text{Ai}(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \quad \text{pour } x \rightarrow \infty \quad (2.81)$$

Le scaling (2.79)  $\lambda_i = \sqrt{2N} + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_i N^{-1/6}$  indique que les fluctuations de la valeur propre maximale près de sa moyenne  $\sqrt{2N}$  sont typiquement d'ordre  $\asymp N^{-1/6}$  ce qui n'est pas évident a priori.

C'est à partir de ce scaling au bord et du noyau d'Airy que fut démontrée pour la première fois la convergence de la distribution de la valeur propre maximale vers la loi dite de Tracy-Widom [TW94, TW96] (voir section 3.2).

## 2.4 EQUATIONS INTÉGRALES ET TRICOMI

J'explique dans cette section comment déterminer la solution  $\rho(x)$  d'une équation intégrale de la forme :

$$\boxed{\int_a^b dt \frac{\rho(t)}{t-x} = g(x) \quad \text{pour tout } x \in [a, b]} \quad (2.82)$$

où  $g(x)$  est une fonction réelle et  $f$  désigne la partie principale de l'intégrale :

$$\int_a^b dt \frac{\rho(t)}{t-x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{x-\epsilon} dt \frac{\rho(t)}{t-x} + \int_{x+\epsilon}^b dt \frac{\rho(t)}{t-x} \right) \quad (2.83)$$

Ce type d'équation intégrale apparaît très souvent en théorie des matrices aléatoires, en particulier avec la méthode du gaz de Coulomb.

Je présente ici deux méthodes pour résoudre (2.82). L'une (présentée section 2.4.1) utilise un théorème prouvé par Tricomi [Tri85]. Elle nécessite des calculs d'intégrales avec partie principale. L'autre méthode (cf section 2.4.2) fait appel à l'analyse complexe, elle permet d'éviter les calculs d'intégrales mais nécessite de plus ou moins deviner la forme de la solution.

### 2.4.1 Théorème de Tricomi

Selon un théorème prouvé par Tricomi [Tri85], la solution  $\rho(x)$  de l'équation (2.82) s'exprime comme une intégrale avec partie principale :

$$\boxed{\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}} \left\{ C - \int_a^b dt \frac{\sqrt{t-a}\sqrt{b-t}}{\pi(t-x)} g(t) \right\}} \quad (2.84)$$

où  $C$  est une constante arbitraire. On peut en fait montrer que  $C$  est alors l'intégrale de  $\rho$  :

$$C = \int_a^b dt \rho(t) \quad (2.85)$$

J'ai beaucoup rencontré ce genre d'équations intégrales pendant ma thèse, il peut donc être utile d'avoir en tête la solution pour des choix particuliers de  $g(x)$ . On notera

$$I_g(x) = \int_a^b \frac{dt}{\pi} \frac{\sqrt{t-a}\sqrt{b-t}}{t-x} g(t) \quad (2.86)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} g(x) = 1 &\rightarrow I_g(x) = \frac{a+b}{2} - x \\ g(x) = x &\rightarrow I_g(x) = \frac{(b-a)^2}{8} + \frac{(a+b)}{2}x - x^2 \\ g(x) = x^2 &\rightarrow I_g(x) = \frac{(b-a)^2(a+b)}{16} + \frac{(b-a)^2}{8}x + \frac{(a+b)}{2}x^2 - x^3 \\ \text{si } a > 0 \text{ et } g(x) = \frac{1}{x} &\rightarrow I_g(x) = \frac{\sqrt{ab}}{x} - 1 \\ g(x) = \ln|x-a| &\rightarrow I_g(x) = \frac{a-b}{2} + \left(\frac{a+b}{2} - x\right) \ln \left[\frac{b-a}{4}\right] \\ &\quad + 2\sqrt{x-a}\sqrt{b-x} \text{ArcCos} \left[\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\right] \end{aligned} \quad (2.87)$$

En général, en théorie des matrices aléatoires, on rencontre des équations intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\rho(t)}{t-x} = g(x) \quad \text{pour tout } x \in \text{Supp}[\rho] \quad (2.88)$$

où le support de la densité  $\text{Supp}[\rho] \subset \mathbb{R}$  est inconnu. Si on fait l'hypothèse que  $\text{Supp}[\rho] = \mathbb{R}$ , alors l'équation (2.88) s'inverse directement sous la forme :

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{g(t)}{t-x} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad (2.89)$$

ce qui correspond à la limite  $a \rightarrow -\infty$  et  $b \rightarrow +\infty$  dans la solution de Tricomi (2.84). Dans ce cas  $-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\rho(t)}{t-x}$  est appelée transformée de Hilbert de  $\rho$ .

Cependant très souvent en matrices aléatoires la fonction  $g(x)$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}$  (par exemple  $g(x)$  peut être polynomiale). Dans ce cas cela signifie que la densité  $\rho$  a un **support fini**  $\text{Supp}[\rho]$ . Souvent ce sera un support connexe de la forme  $\text{Supp}[\rho] = [a, b]$  où  $a < b$ . Dans ce cas on peut résoudre (2.88) par la méthode de Tricomi, la solution est donnée par (2.84). On détermine  $a$  et  $b$  avec les conditions spécifiques au problème considéré, par exemple la continuité de la densité (cf section 2.1.3). Dans certains cas, on peut avoir un support non connexe, par exemple de la forme  $\text{Supp}[\rho] = [a, b] \cup [c, d]$  où  $a < b < c < d$ . Dans ce cas la méthode de Tricomi ne suffit plus, il faut trouver d'autres méthodes, comme je l'explique section 11.2.

## 2.4.2 Equations intégrales et analyse complexe

L'équation intégrale (2.84) peut se résoudre par une autre méthode qui repose sur l'**analyse complexe** et marche de façon très générale mais nécessite de deviner plus ou moins la forme de la solution. Cette méthode est en particulier développée par Brézin, Itzykson, Paris et Zuber [BIPZ78] dans le contexte des graphes planaires.

On cherche à déterminer la densité réelle  $\rho(x)$  à support connexe  $[a, b]$  qui est normalisée à 1, ie  $\int \rho = 1$ , et qui vérifie l'équation intégrale (2.82) :

$$\oint_a^b dt \frac{\rho(t)}{t-x} = g(x) \quad \text{pour tout } x \in [a, b] \quad (2.90)$$

avec  $\oint$  la partie principale de l'intégrale.

On définit sur le plan complexe la fonction  $F$  :

$$\boxed{F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\rho(x)}{x-z} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \setminus [a, b]} \quad (2.91)$$

La fonction  $g(x)$  réelle sur  $[a, b]$  est donnée. On cherche  $\rho$ .  $F$  a les propriétés suivantes :

1/  $F(z)$  est analytique partout sur le plan complexe sauf sur le segment réel  $[a, b]$  où elle a une coupure.

2/  $F(z) \sim -\frac{1}{z}$  quand  $|z| \rightarrow \infty$ .

3/  $F(z)$  est réelle pour  $z \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ .

4/ Lorsqu'on approche de la coupure  $[a, b]$  on trouve deux valeurs différentes selon qu'on vienne d'au-dessus ou d'en-dessous :  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F(x \pm i\epsilon) = g(x) \pm i\pi\rho(x)$  pour  $x \in [a, b]$  où  $\rho(x)$  est réelle (à déterminer).

La propriété 2/ est vraie car  $\int \rho = 1$ .

Les quatre propriétés ci-dessus constituent ce qu'on appelle un **problème de Riemann-Hilbert**. Selon la théorie de l'analyse complexe, il existe une *unique* fonction  $F(z)$  qui les satisfait. Si on peut deviner la forme de  $F$  alors on a la solution

$$\boxed{\rho(x) = \frac{1}{\pi} \text{Im} [F(x + i0^+)] \quad \text{pour } x \in [a, b]} \quad (2.92)$$

Par exemple, supposons que  $g(x)$  est **affine** de la forme  $g(x) = a_0 + a_1x$ . On doit donc avoir  $F(x \pm i0^+) = a_0 + a_1x \pm i\pi\rho(x)$  d'après 4/. On veut que la partie imaginaire ait une coupure sur le segment  $[a, b]$  et change de signe lorsque  $z$  traverse la coupure. On s'attend donc à ce que  $\rho(x)$  contienne des termes de la forme  $\sqrt{x-a}$  et  $\sqrt{x-b}$ . On pose :

$$\rho(x) = \frac{c}{\pi} \sqrt{(x-a)(b-x)} \quad \text{et} \quad F(z) = a_0 + a_1z + c\sqrt{(z-a)(z-b)} \quad (2.93)$$

Quand  $z \rightarrow \infty$  on a :  $F(z) \approx a_0 + a_1z + cz \left[ 1 - \frac{a+b}{2z} - \frac{(b-a)^2}{8z^2} + \dots \right]$  or on doit avoir  $F(z) \sim -1/z$  par 2/. D'où :  $a_1 = -c$ ,  $a_0 = c\frac{a+b}{2}$ ,  $1 = c\frac{(b-a)^2}{8}$ . Donc  $c = -a_1$  et il ne peut donc y avoir de solution que si  $a_1 < 0$ , et alors on a  $a = -\sqrt{\frac{2}{-a_1}} - \frac{a_0}{a_1}$ ,  $b = \sqrt{\frac{2}{-a_1}} - \frac{a_0}{a_1}$  et  $\rho$  est bien solution de (2.84).

En général, avec **une coupure**  $[a, b]$  et  $g(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  **un polynôme en**  $x$ ,  $\rho$  doit être de la forme

$$\rho(x) = M(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} \quad \text{où } M \text{ est un polynôme.} \quad (2.94)$$

La *racine carrée* est en effet la fonction analytique sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  qui a une coupure sur  $\mathbb{R}_-$  et dont le saut entre  $-x + i0^+$  et  $-x - i0^+$  pour  $x > 0$  consiste en un *changement de signe* :  $\sqrt{-x + i0^+} = i\sqrt{x} = -\sqrt{-x - i0^+}$ .

Pour satisfaire la condition 2/,  $F(z) \sim -1/z$  en l'infini, il faut que  $M$  soit de même degré  $n$  que  $g(x)$ . En effet on a

$$F(z) = g(z) + \pi M(z) \sqrt{\frac{z-b}{z-a}} \quad (2.95)$$

Pour identifier les coefficients de  $M$ , on développe  $M(z) \sqrt{\frac{z-b}{z-a}} \approx b_n z^n + \dots + b_0 + b_{-1} z^{-1} + \dots$  dans la limite  $z \rightarrow \infty$  et on identifie les coefficients de sorte que  $F(z) \sim -1/z$  :  $a_k + b_k = 0$  pour  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  et  $-1 = b_{-1}$ . Pour cela on a besoin du développement de  $\sqrt{\frac{z-b}{z-a}}$  quand  $|z| \rightarrow \infty$  :

$$\sqrt{\frac{z-b}{z-a}} = 1 + \frac{a-b}{2z} + \frac{(a-b)(3a+b)}{8z^2} + \frac{(a-b)(5a^2+2ab+b^2)}{16z^3} + O\left(\frac{1}{z^4}\right) \quad (2.96)$$

On obtient alors l'expression des coefficients de  $M$  tels que  $\rho$  soit bien solution de (2.84).

## Statistique d'extrêmes et valeur propre maximale

---

La **statistique des valeurs extrêmes** ou *Extreme Value Statistics* (EVS) décrit les fluctuations d'une distribution de probabilité loin de sa moyenne. Elle modélise la probabilité que des **événements extrêmes et rares** se produisent, dans des contextes très variés comme les tremblements de terre, les inondations, la statistique des records humains, les mutations génétiques ou encore les risques liés aux variations de prix sur les marchés financiers. Ces nombreuses applications en font un domaine de recherche très important.

Dans ce contexte, une question particulièrement intéressante est de savoir quelle est la distribution du **maximum d'un ensemble de variables aléatoires**  $X_1, \dots, X_N$ . Dans le cas où les variables sont indépendantes identiquement distribuées (iid), on sait que la distribution du maximum dans la limite  $N \rightarrow \infty$  tombe dans l'une des trois classes d'universalité connues sous le nom de Gumbel, Fréchet et Weibull. J'énonce dans la section 3.1 cette loi universelle pour le maximum de variables iid qui est similaire au théorème central limite pour la moyenne de variables iid. Par contre peu de résultats exacts sont connus en général quand les variables aléatoires sont corrélées. Le cas où les  $X_i$  sont les valeurs propres  $\lambda_i$  d'une matrice aléatoire est un exemple intéressant de variables fortement corrélées où l'on peut calculer la distribution de  $\lambda_{\max} = X_{\max}$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$ .

J'énonce dans les parties 3.2 et 3.3 les résultats connus et ceux que j'ai démontrés dans ma thèse concernant la distribution de la **valeur propre maximale** d'une matrice gaussienne ou d'une matrice de Wishart. Depuis les travaux de Tracy et Widom [TW94, TW96], il est connu que la distribution de  $\lambda_{\max}$  converge dans la limite  $N \rightarrow \infty$  vers une **loi dite de Tracy-Widom** dans le cas des ensembles gaussiens GOE, GUE et GSE, cf section 3.2. Depuis, cette distribution est apparue dans des contextes très variés, pas seulement en théorie des matrices aléatoires. La distribution de Tracy-Widom décrit les fluctuations typiques au voisinage de la moyenne de  $\lambda_{\max}$ . Mais on peut aussi s'intéresser aux événements rares loin de la moyenne, c'est l'étude des **grandes déviations**, qui est plus récente. La méthode de gaz de Coulomb permet de déterminer l'ordre dominant de ces grandes déviations [DM06, DM08, MV09], voir section (3.3.1). Avec des méthodes



plus complexes, nous avons pu récemment calculer les premières corrections à l'ordre dominant pour la grande déviation à gauche de la moyenne [BEMN10] voir section 3.3.2 et chapitre 13 pour la démonstration, et pour la grande déviation à droite de la moyenne pour  $\beta = 2$  [NM11], voir section 3.3.3 et chapitre 12 pour la preuve.

### 3.1 MAXIMUM DE VARIABLES INDÉPENDANTES

On suppose que les  $X_i$  sont des **variables aléatoires indépendantes** distribuées selon la **même loi**  $p(x)$  (variables iid). Selon le *théorème de la limite centrale*, si la moyenne et la variance de  $X_i$  sont finies, ie  $m \equiv \langle X_i \rangle < \infty$  et  $\sigma^2 \equiv \langle X_i^2 \rangle - \langle X_i \rangle^2 < \infty$ , alors la moyenne empirique  $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_N}{N}$  des  $X_i$  converge pour  $N \rightarrow \infty$  vers une variable gaussienne de moyenne  $\langle \bar{X} \rangle = m$  et de variance  $\frac{\sigma^2}{N}$ , soit :

$$\mathcal{P} \left[ \sqrt{N} \frac{(\bar{X} - m)}{\sigma} = u \right] \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad \text{quand } N \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

La loi gaussienne apparaît comme la loi universelle associée à la moyenne de variables indépendantes.

Si on s'intéresse maintenant non plus à la moyenne  $\bar{X}$  mais au **maximum des variables**  $X_i$ , c'est-à-dire  $X_{\max} = \max_i \{X_i\}$ , il existe aussi une certaine **universalité**. Selon la forme de  $p(x)$ , la distribution de  $X_{\max}$  tombe dans une des **trois classes d'universalité** Gumbel, Fréchet ou Weibull décrites ci-dessous [Gum58, Gne43] :

- Si  $p(x)$  décroît de façon plus rapide que toute loi de puissance quand  $x \rightarrow \infty$  (par exemple loi exponentielle, gaussienne, etc), alors  $X_{\max}$  tend vers une **loi de Gumbel**. Plus précisément, il existe  $a_N \in \mathbb{R}$  et  $b_N > 0$  tels que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{X_{\max} - a_N}{b_N} \leq x \right] = F_I(x) = e^{-e^{-x}} \quad (3.2)$$

Par exemple, pour  $p(x) \sim e^{-x^\alpha}$  quand  $x \rightarrow \infty$ , avec  $\alpha > 0$ , on a :  $a_N \sim (\ln N)^{\frac{1}{\alpha}}$  et  $b_N \sim \frac{(\ln N)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha}$ .

- Si  $p(x)$  décroît comme une loi de puissance, ie  $p(x) \sim x^{-(\gamma+1)}$  quand  $x \rightarrow \infty$ , (lois à "queues lourdes", par exemple loi de Cauchy, Student, Pareto, etc), alors  $X_{\max}$  tend vers une **loi de Fréchet**. Plus précisément, il existe  $a_N \in \mathbb{R}$  et  $b_N > 0$  tels que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{X_{\max} - a_N}{b_N} \leq x \right] = F_{II}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-\frac{1}{x^\gamma}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Pour  $p(x) \sim x^{-(\gamma+1)}$ , on a  $a_N \sim \text{cste}$  et  $b_N \propto N^{\frac{1}{\gamma}}$ .

- Si  $p(x)$  est bornée, ie  $p(x) = 0$  pour  $x > 1$  par exemple, et  $p(x) \sim (1-x)^{\gamma-1}$  quand  $x \rightarrow 1$  avec  $\gamma > 0$ , (par exemple loi uniforme sur un segment, loi beta etc), alors  $X_{\max}$

tend vers une **loi de Weibull**. Plus précisément, il existe  $a_N \in \mathbb{R}$  et  $b_N > 0$  tels que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{X_{\max} - a_N}{b_N} \leq x \right] = F_{III}(x) = \begin{cases} e^{-|x|^\gamma} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Il existe donc une universalité (en fait trois classes d'universalité) pour le maximum de variables aléatoires indépendantes. Si des variables aléatoires sont peu corrélées, on peut se ramener à ce cas-là également. Par contre, si on considère des variables aléatoires fortement corrélées, on ne sait en général a priori rien dire du maximum. Seuls certains cas peuvent être résolus analytiquement - la valeur propre maximale d'une matrice aléatoire gaussienne en est un exemple important.

## 3.2 VALEUR PROPRE MAXIMALE D'UNE MATRICE ALÉATOIRE : TRACY-WIDOM

Les valeurs propres d'une matrice aléatoire sont fortement corrélées, la valeur propre maximale ne tombe donc pas dans l'une des classes d'universalité présentées ci-dessus. Dans cette section j'énonce la célèbre loi de Tracy-Widom pour les matrices aléatoires gaussiennes et pour celles de Wishart. Cette loi dit que la distribution de la valeur propre maximale d'une matrice aléatoire gaussienne ou de Wishart tend vers une loi dite de Tracy-Widom  $\mathcal{F}_\beta$  quand  $N \rightarrow \infty$ . Cette loi a été démontrée initialement par Tracy et Widom [TW94, TW96] pour les ensembles gaussiens GUE, GOE et GSE, et par Johansson [Joh00] et Johnstone [Joh01] pour les matrices de Wishart. Récemment j'ai pu dériver [NM11] une preuve plus simple et élémentaire de la loi de Tracy-Widom pour le cas GUE, voir chapitre 12.

### 3.2.1 Matrices aléatoires gaussiennes

Les **valeurs propres  $\lambda_i$  d'une matrice aléatoire gaussienne** sont des variables aléatoires réelles distribuées selon la loi jointe (cf Eq. (1.27)) :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B_N(\beta) e^{-\frac{\beta}{2} \sum_i \lambda_i^2} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \quad (3.5)$$

Pour  $\beta = 1, 2$  ou  $4$ , cette distribution est celle des valeurs propres d'une matrice aléatoire gaussienne de l'ensemble GOE, GUE ou GSE respectivement. Cependant on peut de manière générale considérer  $N$  variables aléatoires  $\lambda_i$  (que l'on appellera "valeurs propres" par extension) distribuées selon la loi jointe (3.5) pour un  $\beta > 0$  quelconque.

A cause du déterminant de Vandermonde  $\Delta(\lambda_i) = \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i)$ , les valeurs propres  $\lambda_i$  sont **fortement corrélées**, donc pas du tout indépendantes. Elles se repoussent. La distribution de la valeur propre maximale  $\lambda_{\max} = \max_i \lambda_i$  ne tombe donc aucune des classes d'universalité décrites plus haut (Gumbel, Fréchet, Weibull). En fait, on peut montrer que la distribution de la **valeur propre maximale**  $\lambda_{\max}$  tend vers une **loi dite de Tracy-Widom** quand  $N \rightarrow \infty$  avec un bon choix de scaling au voisinage de la moyenne  $\sqrt{2N}$ .

### 3.2.1.1 Loi de Tracy-Widom $\beta$

Les valeurs propres  $\lambda_i$  d'une matrice aléatoire gaussienne de l'ensemble GOE, GUE ou GSE respectivement sont réelles et distribuées selon la loi jointe (3.5) avec  $\beta = 1, 2$  ou 4 respectivement. Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , la valeur propre maximale  $\lambda_{\max} = \max_i \lambda_i$  tend, après un changement d'échelle approprié au voisinage de la moyenne, vers une variable aléatoire de loi dite de Tracy-Widom :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{\lambda_{\max} - \sqrt{2N}}{\left(N^{-\frac{1}{6}}/\sqrt{2}\right)} \leq x \right] = \mathcal{F}_\beta(x) \quad (3.6)$$

$\mathcal{F}_\beta(x)$  est appelée **distribution de Tracy-Widom  $\beta$** . La convergence vers une loi  $\mathcal{F}_\beta$  a été prouvée par Tracy et Widom dans les cas  $\beta = 1, 2$  et 4 [TW94, TW96] et ils ont explicité la forme de  $\mathcal{F}_\beta$  (voir (3.7) et (3.11)). On s'attend également à ce (3.6) reste valable pour un  $\beta > 0$  quelconque, mais on ne connaît pas la forme exacte de la limite  $\mathcal{F}_\beta(x)$  en général. On sait seulement à quoi doivent ressembler ses asymptotes en  $\pm\infty$ . Dans le cas général  $\beta > 0$ , les  $\lambda_i$  ne sont plus nécessairement valeurs propres d'une matrice gaussienne mais elles sont distribuées comme en (3.5).

Le **scaling en  $N^{-1/6}$**  près de la moyenne de  $\lambda_{\max}$  avait été trouvé par Forrester [For93] lors de l'étude du noyau  $K_N$  au bord ("edge scaling") qui tend vers le noyau d'Airy, voir Eq. (2.79) et (2.80).

Dans le cas  $\beta = 2$  (GUE), **Tracy et Widom** ont démontré dans un article publié en 1994 [TW94] qu'il y a convergence vers la loi limite  $\mathcal{F}_2(x)$  donnée par

$$\mathcal{F}_2(x) = \exp \left[ - \int_x^\infty (z - x) q^2(z) dz \right] \quad (3.7)$$

où  $q(x)$  satisfait l'équation de Painlevé II :

$$q''(x) = 2q^3(x) + xq(x) \quad (3.8)$$

avec condition au bord  $q(x) \sim \text{Ai}(x)$  quand  $x \rightarrow \infty$ .  $\text{Ai}(x)$  est la fonction d'Airy, elle est la solution de l'équation différentielle

$$\text{Ai}''(x) = x\text{Ai}(x) \quad \text{avec} \quad \text{Ai}(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \quad \text{pour} \quad x \rightarrow \infty \quad (3.9)$$

$q(x)$  est la solution Hastings-McLeod de Painlevé II [HM80]. On introduit habituellement les fonctions  $F(x)$  et  $E(x)$  :

$$F(x) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_x^\infty (z - x) q^2(z) dz \right] \quad \text{et} \quad E(x) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_x^\infty q(z) dz \right] \quad (3.10)$$

On a alors  $\mathcal{F}_2(x) = F^2(x)$ .

Dans les cas  $\beta = 1$  et  $\beta = 4$ , ce sont à nouveau Tracy et Widom [TW96] qui, quelques années plus tard, ont montré la convergence vers les lois  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_4$  suivantes :

$$\mathcal{F}_1(x) = F(x)E(x) \quad , \quad \mathcal{F}_4(2^{-\frac{2}{3}}x) = \frac{1}{2} \left\{ E(x) + \frac{1}{E(x)} \right\} F(x) \quad (3.11)$$

Dans l'article d'origine [TW96], la loi limite qu'ils obtiennent pour  $\beta = 4$  n'est pas tout à fait  $\mathcal{F}_4$  donnée ci-dessus : au lieu du facteur  $2^{-\frac{2}{3}}$  dans la définition, ils ont un facteur  $1/\sqrt{2}$ , soit finalement :  $\mathcal{F}_4(2^{-\frac{2}{3}}x) = F_4(x/\sqrt{2})$  ie  $\mathcal{F}_4(x) = F_4(2^{1/6}x)$ . Cependant, je pense que c'est une erreur, le facteur doit être  $2^{-\frac{2}{3}}$  dans (3.11) pour trouver le bon comportement de  $\mathcal{F}_4$  dans les limites  $x \rightarrow \pm\infty$  qui peuvent être obtenues par d'autres méthodes, cf Eq. (3.18) et (3.22).

La convergence vers la **loi de Tracy-Widom** (3.6) peut se récrire sous la forme :

$$\boxed{(\lambda_{\max} - \sqrt{2N}) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} N^{-1/6} \chi \quad \text{où } \mathbb{P}[\chi \leq x] = \mathcal{F}_\beta(x) \quad \text{pour } N \gg 1} \quad (3.12)$$

La **loi de Tracy-Widom**  $\mathbb{P}[\chi \leq x] = \mathcal{F}_\beta(x)$  est la **distribution cumulative** de  $\chi$ . La **densité de probabilité** de  $\chi$  est donnée par  $\mathcal{P}(\chi = x) = \mathcal{F}'_\beta(x)$ . C'est une distribution asymétrique. On peut déterminer la moyenne et la variance de  $\chi$  numériquement :

$$\begin{aligned} \beta = 1 : \langle \chi \rangle &\sim -1.2065 & \text{et } \text{Var}(\chi) &\sim 1.6078 \\ \beta = 2 : \langle \chi \rangle &\sim -1.7711 & \text{et } \text{Var}(\chi) &\sim 0.8132 \\ \beta = 4 : \langle \chi \rangle &\sim -2.0552 & \text{et } \text{Var}(\chi) &\sim 0.4109 \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.2.1.2 Comportement de $\mathcal{F}_\beta$ en $+\infty$ (queue droite)

Le comportement asymptotique en  $+\infty$  se déduit directement des conditions au bord imposées dans la définition de  $\mathcal{F}_\beta$  :  $q(x) \sim \text{Ai}(x)$  quand  $x \rightarrow \infty$ . Le développement en  $+\infty$  de la solution **Hastings-McLeod** de Painlevé II  $q(x)$  donne :

$$q(x) = \frac{e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \left[ 1 + \frac{5}{48x^{3/2}} + O(x^{-3}) \right] \quad \text{pour } x \rightarrow \infty \quad (3.14)$$

$$F(x) = 1 - \frac{e^{-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}}}{32\pi x^{3/2}} \left[ 1 - \frac{35}{24x^{\frac{3}{2}}} + O(x^{-3}) \right] \quad \text{pour } x \rightarrow \infty \quad (3.15)$$

$$E(x) = 1 - \frac{e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}}{4\sqrt{\pi}x^{3/4}} \left[ 1 - \frac{41}{48x^{\frac{3}{2}}} + O(x^{-3}) \right] \quad \text{pour } x \rightarrow \infty \quad (3.16)$$

On en déduit donc en particulier à l'ordre dominant quand  $x \rightarrow \infty$  :

$$1 - \mathcal{F}_1(x) \sim \frac{e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}}{4\sqrt{\pi}x^{3/4}}, \quad 1 - \mathcal{F}_2(x) \sim \frac{e^{-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}}}{16\pi x^{3/2}}, \quad 1 - \mathcal{F}_4(x) \sim \frac{e^{-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}}}{2^9 \pi x^3} \quad (3.17)$$

Ces comportements asymptotiques sont en accord avec le résultat récent de L. Dumaz et B. Virag [DV11] qui ont montré par une méthode probabiliste (en se ramenant au calcul d'un temps d'explosion pour un processus stochastique) que pour tout  $\beta > 0$  la **distribution de Tracy-Widom se comporte en  $+\infty$**  comme :

$$\boxed{1 - \mathcal{F}_\beta(x) = \mathbb{P}[\chi \geq x] \sim c_\beta \frac{e^{-\frac{2}{3}\beta x^{\frac{3}{2}}}}{x^{3\beta/4}} \quad \text{quand } x \rightarrow \infty} \quad (3.18)$$

où  $c_\beta$  est une constante qui dépend de  $\beta$ .

### 3.2.1.3 Comportement de $\mathcal{F}_\beta$ en $-\infty$ (queue gauche)

La limite  $x \rightarrow -\infty$  est beaucoup moins évidente à analyser. Récemment, Baik, Buckingham et DiFranco [BBD08] ont déterminé le **comportement asymptotique de  $\mathcal{F}_\beta$  en  $-\infty$** . Dans leur article, ils utilisent la notation  $F_\beta$  pour la loi de Tracy-Widom. La correspondance est la suivante :  $F_{1,2}(x) = \mathcal{F}_{1,2}(x)$  et  $F_4(x) = \mathcal{F}_4(2^{-\frac{2}{3}}x)$ . On notera que leur  $F_4$  n'est pas non plus tout à fait le même que celui de Tracy et Widom dans [TW96]. Par contre les fonctions  $F(x)$  et  $E(x)$  ci-dessous sont celles définies Eq. (3.10). Ils ont montré que pour  $x \rightarrow -\infty$  :

$$\begin{aligned} F(x) &= 2^{\frac{1}{48}} e^{\frac{1}{2}\zeta'(-1)} \frac{e^{-\frac{1}{24}|x|^3}}{|x|^{1/16}} \left( 1 + \frac{3}{27|x|^3} + O(|x|^{-6}) \right) \\ E(x) &= 2^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{3\sqrt{2}}|x|^{3/2}} \left( 1 - \frac{1}{24\sqrt{2}|x|^{3/2}} + O(|x|^{-3}) \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

où  $\zeta(s)$  est la fonction Zeta de Riemann. Ainsi on en déduit pour  $x \rightarrow -\infty$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x) &= \tau_1 \frac{e^{-\frac{1}{24}|x|^3 - \frac{1}{3\sqrt{2}}|x|^{3/2}}}{|x|^{1/16}} \left( 1 - \frac{1}{24\sqrt{2}|x|^{3/2}} + O(|x|^{-3}) \right) \\ \mathcal{F}_2(x) &= \tau_2 \frac{e^{-\frac{1}{12}|x|^3}}{|x|^{1/8}} \left( 1 + \frac{3}{26|x|^3} + O(|x|^{-6}) \right) \\ \mathcal{F}_4(x) &= \tau_4 \frac{e^{-\frac{1}{6}|x|^3 + \frac{\sqrt{2}}{3}|x|^{3/2}}}{|x|^{1/16}} \left( 1 + \frac{1}{48\sqrt{2}|x|^{3/2}} + O(|x|^{-3}) \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

où les constantes  $\tau_\beta$  sont données par :

$$\tau_1 = 2^{-\frac{11}{48}} e^{\frac{1}{2}\zeta'(-1)} \quad \tau_2 = 2^{\frac{1}{24}} e^{\zeta'(-1)} \quad \tau_4 = 2^{-\frac{37}{48}} e^{\frac{1}{2}\zeta'(-1)} \quad (3.21)$$

On notera que le choix de définition de  $\mathcal{F}_\beta$  étant légèrement différent de  $F_\beta$  dans l'article de Baik, le  $\tau_4$  n'est pas tout à fait le même que le leur. Mon choix de  $\mathcal{F}_\beta$  (cf Eq. (3.12)) correspond à une description unifiée des lois de Tracy-Widom pour tous les  $\beta$  (sans ajout de facteur dépendant de  $\beta$  dans la distribution de  $\lambda_{\max}$ ).

Pour un  $\beta > 0$  quelconque, grâce à une méthode développée par Bertrand Eynard, nous avons pu montrer récemment [BEMN10] (avec B. Eynard, G. Borot, S. N. Majumdar et moi-même) à partir de l'étude des grandes déviations de la distribution de  $\lambda_{\max}$ , voir chapitre 13, que :

$$\boxed{\mathcal{F}_\beta(x) \sim \tau_\beta \frac{e^{-\beta\frac{|x|^3}{24} + \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\beta}{2}-1\right)|x|^{3/2}}}{|x|^{\frac{1}{8}\left(3-\frac{2}{\beta}-\frac{\beta}{2}\right)}} \quad \text{pour } x \rightarrow -\infty} \quad (3.22)$$

où  $\tau_\beta$  est une constante donnée par :

$$\begin{aligned} \ln \tau_\beta &= \left( \frac{17}{8} - \frac{25}{24} \left( \frac{\beta}{2} + \frac{2}{\beta} \right) \right) \ln 2 - \frac{\ln(2\pi)}{4} - \frac{\ln(\beta/2)}{2} + \frac{\beta}{2} \left( \frac{1}{12} - \zeta'(-1) \right) \\ &\quad + \frac{\gamma_E}{6\beta} + \int_0^\infty d\sigma \left[ \frac{6\sigma \coth(\sigma/2) - 12 - \sigma^2}{12\sigma^2(e^{\beta\sigma/2} - 1)} \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

où  $\gamma_E$  est la constante d'Euler. Pour  $\beta = 1, 2, 4$  on retrouve (3.20) et on peut vérifier que les valeurs de  $\tau_\beta$  sont bien les mêmes que (3.21).

### 3.2.2 Matrices de Wishart

On a vu, cf (1.64), que les valeurs propres d'une matrice de Wishart (définie section 1.4.2) sont réelles positives et distribuées selon la loi jointe :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = K_{M,N} e^{-\frac{\beta}{2} \sum_i \lambda_i} \prod_{k=1}^N \lambda_k^{\frac{\beta}{2}(M-N+1)-1} \prod_{i < j} |\lambda_j - \lambda_i|^\beta \quad (3.24)$$

La densité moyenne  $\rho_N(\lambda)$  dans ce cas a un support fini  $[x_-N, x_+N]$  où  $x_\pm = \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \pm 1\right)^2$  avec  $c = N/M$ ,  $c \leq 1$ , voir (2.42). La moyenne de la valeur propre maximale est donnée par la borne supérieure du support de la densité  $\langle \lambda_{\max} \rangle \sim x_+N$  pour  $N$  grand.

Johansson [Joh00] et Johnstone [Joh01] ont montré indépendamment que **la distribution de  $\lambda_{\max}$  tend vers la distribution de Tracy-Widom** dans la limite  $N \rightarrow \infty$  :

$$(\lambda_{\max} - x_+N) \sim c^{\frac{1}{6}} x_+^{\frac{2}{3}} N^{\frac{1}{3}} \chi \quad \text{où } \mathbb{P}[\chi \leq x] = \mathcal{F}_\beta(x) \quad (3.25)$$

pour  $\beta = 1$  dans le cas réel,  $\beta = 2$  dans le cas complexe. Pour  $\beta = 1$ ,  $\mathcal{F}_1$  est définie Eq. (3.11) ; pour  $\beta = 2$ ,  $\mathcal{F}_2$  est définie Eq. (3.7).

Quand  $c = 1$ , ie  $M = N$ , on a donc :

$$\boxed{(\lambda_{\max} - 4N) \sim 2^{\frac{4}{3}} N^{\frac{1}{3}} \chi \quad \text{où } \mathbb{P}[\chi \leq x] = \mathcal{F}_\beta(x)} \quad (3.26)$$

La moyenne de  $\lambda_{\max}$  est donnée à l'ordre dominant en  $N$  par  $x_+N$ , soit  $4N$  pour  $c = 1$ . Les fluctuations typiques près de cette moyenne sont d'ordre  $\asymp N^{1/3}$ , soit des **fluctuations relatives d'ordre**  $\asymp \frac{N^{1/3}}{N} \asymp N^{-2/3}$ . On peut comparer avec le cas gaussien où les fluctuations étaient en  $N^{-1/6}$  mais avec une moyenne en  $\asymp \sqrt{N}$  d'où des fluctuations relatives en  $\asymp \frac{N^{-1/6}}{\sqrt{N}} \asymp N^{-2/3}$  comme pour les matrices de Wishart.

## 3.3 GRANDES DÉVIATIONS DE $\lambda_{\max}$

La distribution de **Tracy-Widom décrit les fluctuations typiques de  $\lambda_{\max}$  près de sa moyenne sur une échelle**  $\asymp N^{-1/6}$  (ou  $N^{1/3}$  dans le cas de Wishart) de même que la loi de Gumbel (ou Fréchet ou Weibull selon les cas) décrit les fluctuations typiques du maximum d'un ensemble de variables aléatoires iid.

On peut aussi s'intéresser aux *queues de la distribution* qui représentent les **fluctuations atypiques, les événements rares**. Ces queues ne sont pas décrites par la même loi. il faut les étudier séparément, ce sont les **“grandes déviations”**.

Les grandes déviations sont connues à l'ordre dominant, elles ont été calculées par la méthode de gaz de Coulomb [DM06, DM08, MV09]. J'explique dans la première sous-partie 3.3.1 comment on peut les obtenir avec cette méthode de gaz de Coulomb. Malheureusement l'ordre dominant obtenu ainsi donne seulement un équivalent logarithmique de la distribution de  $\lambda_{\max}$  loin de sa moyenne. Récemment nous avons pu calculer les premières corrections à l'ordre dominant, obtenant ainsi un véritable équivalent de la distribution pour  $N$  grand, voir sections 3.3.2 et 3.3.3. Pour la grande déviation à gauche de la moyenne, c'est un travail en collaboration avec G. Borot et B. Eynard [BEMN10] qui est valable pour tout  $\beta > 0$ , voir section 3.3.2 et chapitre 13 pour la démonstration. Pour la grande déviation à droite, j'ai pu adapter une méthode de polynômes orthogonaux pour le cas  $\beta = 2$  (GUE) [NM11], voir section 3.3.3 et chapitre 12 pour la preuve.

### 3.3.1 Ordre dominant : gaz de Coulomb

Dans cette partie, j'explique comment calculer les grandes déviations de la distribution de  $\lambda_{\max}$  à l'ordre dominant quand  $N \rightarrow \infty$ , pour une matrice gaussienne, par la méthode du gaz de Coulomb.

Les valeurs propres d'une matrice aléatoire gaussienne sont distribuées selon la loi jointe donnée Eq. (1.27). La distribution cumulative de la valeur propre maximale, soit  $\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y) = \mathbb{P}(\lambda_i \leq y, \forall i)$ , s'écrit par définition :

$$\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y) = \int_{-\infty}^y d\lambda_1 \dots \int_{-\infty}^y d\lambda_N \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad (3.27)$$

Dans la limite où  $N$  est grand, on s'attend à ce que  $\lambda_{\text{typ}} \asymp \sqrt{N}$  (cf (2.15)). En particulier on écrit  $y = s\sqrt{N}$ .

On s'attend aussi à ce que la densité adimensionnée, définie Eq. (2.10) par  $\rho(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i)$  où  $x_i = \lambda_i/\sqrt{N}$ , ait une limite finie continue quand  $N \rightarrow \infty$ . Dans ce cas on peut écrire la distribution des valeurs propres sous la forme, cf Eq. (2.18) et (2.17) :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{Z'_N} e^{-\beta N^2 E_s[\rho] + o(N^2)} \quad (3.28)$$

où l'énergie effective est une fonctionnelle de la densité continue  $\rho(x)$

$$E_s[\rho] = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^s dx \int_{-\infty}^s dx' \rho(x) \rho(x) \ln|x - x'| + \int_{-\infty}^s dx \rho(x) \frac{x^2}{2} \quad (3.29)$$

Les intégrales vont ici de  $-\infty$  à  $s$  et non  $+\infty$  du fait de la contrainte  $\lambda_{\max} \leq s\sqrt{N}$ .  $E_s[\rho]$  est l'énergie effective d'un **gaz de Coulomb** (ie avec interaction logarithmique  $\ln|x - x'|$ ) dans un potentiel externe quadratique  $x^2/2$  et **en présence d'un mur en**  $x = s$  qui comprime le gaz vers la gauche.

L'intégrale multiple (3.27) s'écrit alors comme une intégrale fonctionnelle sur  $\rho$  que l'on peut calculer par méthode du col dans la limite  $N \gg 1$  :

$$\mathbb{P}(\lambda_{\max} \leq s\sqrt{N}) \propto \int \mathcal{D}[\rho] e^{-\beta N^2 E_s[\rho]} \propto e^{-\beta N^2 E_s[\rho_c]} \quad (3.30)$$

L'intégrale fonctionnelle est dominée dans la limite  $N \rightarrow \infty$  par le minimum de l'énergie effective  $E_s[\rho_c]$ , ie  $\rho_c$  est la densité qui minimise l'énergie effective  $E_s$ .

Dans la limite  $N$  grand, on est donc ramené à un problème de **gaz de Coulomb à température nulle** (ou température inverse  $\beta N^2 \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow \infty$ ). Les charges de ce gaz de Coulomb sont placées **dans un potentiel externe quadratique**  $V(x) = \frac{x^2}{2}$  (cf eq. (3.29)) **et en présence d'un mur en**  $x = s$  : toutes les charges sont sur la demi-droite  $]-\infty, s]$ .

En l'absence de contrainte, ie dans le cas  $s = +\infty$ , on a vu plus haut que la densité moyenne  $\rho$  est le *demi-cercle de Wigner* centré en 0 et de rayon  $\sqrt{2}$ , donc à support  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ , cf (2.26). On comprend bien **physiquement** que l'**effet sur les charges** va être **très différent selon que le mur  $s$  est à droite ou à gauche de  $\sqrt{2}$** . Si  $s > \sqrt{2}$ , la densité de Wigner est entièrement à gauche du mur, les charges vont être très peu perturbées par ce mur. Au contraire si  $s < \sqrt{2}$  le mur va forcer les charges à se déplacer vers la gauche, le coût énergétique sera beaucoup plus important.

### 3.3.1.1 Branche gauche : $s < \sqrt{2}$

On suppose dans cette partie que  $s < \sqrt{2}$ . Le mur comprime les charges vers la gauche. La densité  $\rho_c$  décrit la répartition moyenne des charges à température nulle en présence du potentiel  $V(x) = \frac{x^2}{2}$  et du mur en  $x = s$ . Comme  $s < \sqrt{2}$  et que le support de la densité en absence de mur est  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ , on s'attend à une **accumulation des charges près du mur** et donc à un **support de la forme**  $[a, s[$  où  $a < s$  est à déterminer.

La minimisation de (3.29) avec contrainte  $\int \rho_c = 1$  (normalisation de la densité  $\rho_c$ ) s'écrit pour  $x \in [a, s[$  :

$$0 = \left. \frac{\partial [E_s[\rho] + \mu_0 (\int \rho_c - 1)]}{\partial \rho(x)} \right|_{\rho=\rho_c} = - \int_a^s dx' \rho_c(x') \ln |x - x'| + \frac{x^2}{2} + \mu_0 \quad (3.31)$$

On dérive (3.31) par rapport à  $x$  :

$$\int_a^s dx' \frac{\rho_c(x')}{x - x'} = x \quad \text{pour } x \in [a, s[ \quad (3.32)$$

où  $f$  désigne la partie principale de l'intégrale, cf (2.83). Cette équation se résout par la méthode de Tricomi, cf 2.4, on trouve :

$$\rho_c(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x-a} \sqrt{s-x}} \left[ 1 - x^2 + \frac{a+s}{2}x + \frac{(s-a)^2}{8} \right] \quad (3.33)$$

Ici on s'attend à  $\rho_c(a) = 0$  par continuité de la densité en  $a$  ( $\rho_c(x) = 0$  pour  $x < a$ ). Par contre la présence du mur en  $s$  force les charges à s'accumuler près de ce mur, il n'y a aucune raison pour que la densité s'annule près de  $x = s$ . Au contraire on va voir qu'en fait elle diverge en  $s$ . La contrainte  $\rho_c(a) = 0$  impose  $a^2 - \frac{2as}{3} - (8+a^2)\frac{1}{3} = 0$ , soit comme  $a < s$  :

$$a = \frac{s}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{s^2 + 6} \quad (3.34)$$

et la densité se réécrit alors :

$$\rho_c(x) = \frac{\sqrt{x-a}}{\pi \sqrt{s-x}} \left( \frac{s-a}{2} - x \right) \quad (3.35)$$

On reporte ensuite dans (3.31) pour calculer  $\mu_0$  :

$$\mu_0 = -\frac{3a^2}{16} - \frac{as}{8} - \frac{3a^2}{16} + \frac{1}{8}(a-s)(3a+s) \ln \left[ \frac{-a+s}{4} \right] \quad (3.36)$$

puis on revient à  $E_s[\rho]$  (3.29) dans laquelle on remplace  $\rho$  par (3.35) et on utilise (3.31) :

$$\begin{aligned} E_s[\rho_c] &= -\frac{\mu_0}{2} + \frac{1}{2} \int_a^s dx \rho_c(x) \frac{x^2}{2} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{s^2}{3} - \frac{s^4}{108} - \left( \frac{s^3}{108} + \frac{5s}{36} \right) \sqrt{6+s^2} - \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1}{6} \left( s + \sqrt{6+s^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$



On obtient donc pour la distribution de  $\lambda_{\max}$   $\mathbb{P}\left(\lambda_{\max} \leq s\sqrt{N}\right) \propto e^{-\beta N^2 E_s[\rho_c]}$ , soit une fois bien normalisée :

$$\mathbb{P}\left(\lambda_{\max} \leq s\sqrt{N}\right) \approx e^{-N^2 \psi_-(s)} \quad \text{où } \psi_-(s) = E_s[\rho_c] - E_{\sqrt{2}}[\rho_c] \quad \text{pour } s < \sqrt{2} \quad (3.38)$$

La normalisation est en effet donnée par l'énergie du gaz de Coulomb en absence de mur, donc pour une densité égale à la densité de Wigner, ie pour  $s = \sqrt{2} = -a$ . Finalement, on trouve

$$\psi_-(s) = \frac{s^2}{3} - \frac{s^4}{108} - \left(\frac{s^3}{108} + \frac{5s}{36}\right) \sqrt{6+s^2} - \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( s + \sqrt{6+s^2} \right) \right] + \frac{\ln 3}{2} \quad (3.39)$$

On retrouve l'expression démontrée initialement dans l'article [DM06, DM08]. On notera que le signe  $\approx$  dans l'équation (3.38) signifie ici que l'on donne un équivalent logarithmique, en réalité on a :  $\ln \mathbb{P}\left(\lambda_{\max} \leq s\sqrt{N}\right) \sim -N^2 \psi_-(s)$ .

### 3.3.1.2 Branche droite : $s > \sqrt{2}$

Pour calculer ce qui se passe à droite, il est plus simple de considérer directement la densité de probabilité de  $\lambda_{\max} = y$  :

$$\mathcal{P}(\lambda_{\max} = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_N \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \delta(\lambda_{\max} - y) \quad (3.40)$$

Le **gaz de Coulomb** associé est maintenant celui de  $N$  charges dans un **potentiel confinant**  $V(x) = \frac{x^2}{2}$  avec **une charge contrainte de rester éloignée** à la position  $y > \sqrt{2N}$ . Dans ce problème il n'y a plus de mur mais on tire de force une charge loin de la mer des autres charges (leur position d'équilibre).

L'énergie effective des  $N$  charges donnée Eq. (2.9) s'écrit ici :

$$\begin{aligned} E_N[\{\lambda_i\}] &= - \sum_{i < j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| + \sum_i \frac{\lambda_i^2}{2} \\ &= \frac{y^2}{2} - \sum_{i \neq \max} \ln |y - \lambda_i| + \sum_{i \neq \max} \frac{\lambda_i^2}{2} - \sum_{i < j, i, j \neq \max} \ln |\lambda_i - \lambda_j| \end{aligned}$$

Le **coût énergétique** pour éloigner une charge à la position  $y$ , par rapport à l'énergie de repos  $E_N[\rho_N]$  est donc donné par :

$$\Delta E(t) = \frac{y^2}{2} - N \int_{-\sqrt{2N}}^{\sqrt{2N}} d\lambda \rho_N(\lambda) \ln |y - \lambda| \quad (3.41)$$

où  $\rho_N(\lambda) = \frac{\sqrt{2N-\lambda^2}}{\pi N}$  est le demi-cercle de Wigner (cf Eq. (2.26)), c'est la densité des charges non perturbées, ie en l'absence de contrainte. Finalement avec le scaling typique  $\lambda_{\text{typ}} \sim \sqrt{N}$  et  $y = s\sqrt{N}$ , on a :

$$\Delta E(y = s\sqrt{N}) \sim N \left\{ \frac{s^2}{2} - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \rho(x) \ln |s - x| + \text{cste} \right\} \quad (3.42)$$

où  $\rho(x) = \frac{\sqrt{2-x^2}}{\pi}$ . Pour la normalisation, comme dans le cas  $s < \sqrt{2}$ , on doit soustraire à  $\Delta E$  sa valeur en  $s = \sqrt{2}$ . On trouve alors :

$$\mathcal{P}(\lambda_{\max} = y) \approx e^{-\beta N \psi_+(\frac{y}{\sqrt{N}})} \quad \text{pour } s > \sqrt{2} \quad (3.43)$$

ou encore (la dérivée ne change rien à l'ordre dominant) :

$$\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y) \approx e^{-\beta N \psi_+(\frac{y}{\sqrt{N}})} \quad \text{pour } s > \sqrt{2} \quad (3.44)$$

avec  $\psi_+(s) = \left( \Delta E(s\sqrt{N}) - \Delta E(\sqrt{2N}) \right) / N$  donné par :

$$\psi_+(s) = \frac{s^2}{2} \left[ \sqrt{1 - \frac{2}{s^2}} \right] + \ln \left\{ \sqrt{\frac{s^2}{2}} - \sqrt{\frac{s^2}{2} - 1} \right\} \quad \text{pour } s > \sqrt{2} \quad (3.45)$$

et qui a été obtenu initialement par S. N. Majumdar et M. Vergassola [MV09] (en fait ils ont obtenu une expression en termes de fonction hypergéométrique mais cette expression se simplifie pour redonner (3.45)). A nouveau dans les équations (3.43) et (3.44), le signe  $\approx$  signifie équivalent logarithmique.

### 3.3.2 Branche gauche : premières corrections

Avec la méthode de Bertrand Eynard et Gaëtan Borot (cf chapitre 13), nous avons pu calculer [BEMN10] les premières corrections à l'ordre dominant pour  $N \rightarrow \infty$  de la **grande déviation à gauche de la moyenne** de la valeur propre maximale d'une matrice gaussienne :  $\lambda_{\max} < \sqrt{2N}$ . Nous avons retrouvé l'ordre dominant, cf section 3.3.1.1 et nous avons aussi obtenu les premières corrections.

La méthode de B. Eynard permet de calculer la grande déviation sous forme d'un développement en puissances de  $N$  [BEMN10] :

$$\mathcal{P}(\lambda_{\max} = y) \sim e^{-\Phi_N(\beta, \frac{y}{\sqrt{N}})} \quad \text{pour } y < \sqrt{2N}, \quad |y - \sqrt{2N}| = O(\sqrt{N}) \quad (3.46)$$

où

$$\Phi_N(\beta, s) = \beta N^2 \psi_-(s) + N(\beta - 2)\Phi_1(s) + \phi_\beta \ln N + \Phi_2(\beta, s) \quad (3.47)$$

avec l'ordre dominant  $\psi_-(s)$  donné Eq. (3.45) et les premières corrections données explicitement au chapitre 13, cf Eq. (13.122) et (13.124). Ici les notations sont celles que j'utilise dans toute cette thèse, mais les notations de l'article [BEMN10] sont un peu différentes : le  $\beta$  utilisé dans l'article est égal à  $\beta/2$ , en particulier le GUE correspond à  $\beta = 1$  dans l'article au lieu de  $\beta = 2$ .

Si on regarde ce qui se passe **près de la moyenne**, on s'attend à ce que la **grande déviation se "recolle" bien avec la branche gauche de Tracy-Widom**  $\mathcal{F}_\beta(x \rightarrow -\infty)$  qui décrit les fluctuations typiques au voisinage de la moyenne. On pose  $y_x = \sqrt{2N} + \frac{1}{\sqrt{2}} N^{-\frac{1}{6}} x$  et on développe la grande déviation  $\Phi_N(\beta, y/\sqrt{N})$ . On obtient alors [BEMN10] l'expression donnée en (3.22) :

$$\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y_x) \sim \tau_\beta \frac{e^{-\beta \frac{|x|^3}{24} + \frac{\sqrt{2}}{3} (\frac{\beta}{2} - 1) |x|^{3/2}}}{|x|^{\frac{1}{8} (3 - \frac{2}{\beta} - \frac{\beta}{2})}} \quad \text{pour } x \rightarrow -\infty \quad (3.48)$$

où  $\tau_\beta$  est une constante donnée par (3.23). Pour  $\beta = 1, 2, 4$ , (3.48) redonne les expressions obtenues de façon très différente par Baik et al pour la queue gauche de Tracy-Widom, cf Eq. (3.20). Pour  $\beta > 0$  quelconque, cela donne le comportement asymptotique en  $-\infty$  de  $\mathcal{F}_\beta(x)$  qui est une fonction mal connue pour  $\beta \notin \{1, 2, 4\}$ .

### 3.3.3 Branche droite : premières corrections

Pour la branche droite de la distribution de  $\lambda_{\max}$ , ie  $\lambda_{\max} > \sqrt{2N}$  avec  $\lambda_{\max} - \sqrt{2N} = O(\sqrt{N})$ , l'ordre dominant pour  $N \gg 1$  est donné Eq. (3.44), mais les corrections à l'ordre dominant ne sont à ma connaissance pas connues pour  $\beta$  quelconque. Dans un article récent [NM11], j'ai calculé les premières corrections pour **la branche droite de la distribution de  $\lambda_{\max}$  pour le cas GUE**, ie  $\beta = 2$  grâce à une méthode de polynômes orthogonaux inspirée de techniques développées dans le contexte de la chromodynamique quantique (QCD), cf chapitre 12. J'ai montré que pour  $\beta = 2$  :

$$\mathcal{P}(\lambda_{\max} = y) \sim \frac{\sqrt{N} e^{-2N\psi_+(\frac{y}{\sqrt{N}})}}{2\pi\sqrt{2}(y^2 - 2N)} \quad \text{pour } y > \sqrt{2N}, \quad |y - \sqrt{2N}| = O(\sqrt{N}) \quad (3.49)$$

où  $\psi_+$  est donné Eq. (3.45).

A nouveau, on peut vérifier que **la grande déviation se recolle bien avec Tracy-Widom** si on regarde ce qui se passe près de la moyenne. On pose  $y_x = \sqrt{2N} + \frac{1}{\sqrt{2}} N^{-\frac{1}{6}} x$  et on développe la grande déviation ci-dessus. On obtient alors [NM11] l'expression donnée en (3.18)

$$1 - \mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y_x) \sim \frac{e^{-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}}}{16\pi x^{3/2}} \quad (3.50)$$

C'est bien la branche droite ( $x \rightarrow \infty$ ) de la distribution de Tracy-Widom  $\mathcal{F}_2(x)$ , cf Eq. (3.18).

### 3.3.4 Matrice de Wishart : ordre dominant

Avec une méthode de gaz de Coulomb, on peut calculer les grandes déviations de la distribution de la valeur propre maximale d'une matrice de Wishart [MV09].

Pour  $c = 1$  ( $M = N$ ), on peut montrer que :

$$\mathcal{P}(\lambda_{\max} = y) \approx \begin{cases} e^{-\beta N^2 \phi_-(\frac{y}{N})} & \text{pour } y < 4N \\ e^{-\beta N \phi_+(\frac{y}{N})} & \text{pour } y > 4N \end{cases} \quad \text{et } |y - 4N| = O(N) \quad (3.51)$$

où la grande déviation à gauche est donnée par

$$\phi_-(s) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{s}{4}\right) - \frac{s^2}{64} + \frac{s}{4} - \frac{3}{4} \quad (3.52)$$

et celle à droite par :

$$\phi_+(s) = \frac{\sqrt{s(s-4)}}{2} - 2 \ln\left[\frac{\sqrt{s} + \sqrt{s-4}}{2}\right] \quad (3.53)$$

## Deuxième partie

---

### MARCHEURS VICIEUX



## Marcheurs aléatoires vicieux

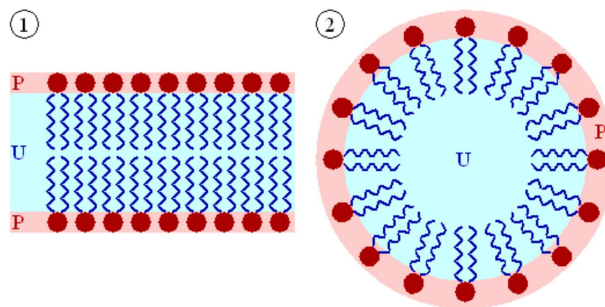
---

On considère un modèle de  $N$  **marches aléatoires à une dimension qui ne se croisent pas**. Ce modèle fut introduit dans sa version continue (mouvements browniens à  $1D$ ) par de Gennes [dG68] puis discrète (marches aléatoires sur réseau  $1D$ ) par Fisher [Fis84]. C'est Fisher qui donna son nom au modèle, celui des **marcheurs aléatoires vicieux** ou **vicious walkers**. L'idée était de considérer des marcheurs ivres, donc avançant ou reculant de façon aléatoire, qui se déplacent une arme à la main et s'entre-tuent lorsqu'ils se rencontrent : ils sont méchants ou "vicieux". On s'intéressera ici toujours au cas où les marcheurs ont survécu jusqu'au temps considéré, c'est-à-dire au cas de marcheurs ne se croisant pas. Lorsque je parlerai de marcheurs vicieux, il sera question sauf mention spécifique de ces marcheurs évitants (ie vicieux qui ont survécu). Ce modèle de marcheurs vicieux est très intéressant à la fois car il décrit bien de nombreuses situations physiques, cf section 4.1, et à la fois car on peut montrer que la distribution des positions de ces marcheurs à un temps donné est la même que la distribution des valeurs propres d'une matrice aléatoire.

J'explique d'abord dans quel contexte est apparu ce modèle, voir section 4.1, et je donne en particulier divers exemples de situations physiques qui peuvent être décrites par ce modèle (lignes élastiques fluctuantes, transition de mouillage, interfaces entre différentes phases près de la transition commensurable/incommensurable, surfaces vicinales de cristaux, etc). Dans la section 4.2 j'introduis quelques notions fondamentales sur le mouvement brownien. En particulier, j'introduis l'intégrale de chemin et le formalisme de Feynman-Kac, des outils très utilisés par les physiciens. La section (4.3) est consacrée aux marcheurs vicieux, plus précisément aux mouvements browniens vicieux. Je montre comment utiliser la technique de Feynman-Kac pour calculer la distribution des positions des marcheurs vicieux à un temps donné.

### 4.1 CONTEXTE HISTORIQUE ET PHYSIQUE

Initialement, **Pierre-Gilles de Gennes** [dG68] introduisit et étudia un modèle de **lignes élastiques fluctuantes à 2 dimensions ( $2D$ ) étirées selon une direction par une force (tension) externe**, pour modéliser la structure lamellaire observée dans



**Figure 4.1** – Structure lipidique en milieu aqueux : structure en bicouche (1) ou micelle (2). Les lipides ont une tête hydrophile (disque rouge P) et une queue hydrophobe (ligne ondulée bleue U). En milieu aqueux les lipides s’organisent en structures telles que les têtes hydrophiles soient en contact avec l’eau (en rose sur le schéma) mais pas les queues hydrophobes. [source : WikimediaCommons ou Nupedia]

certaines **solutions lipide-eau**. En milieu aqueux, les lipides, généralement constitués d’une tête hydrophile et d’une queue hydrophobe, s’organisent spontanément sous forme de micelles ou de structure en bicouche, cf Fig. 4.1. Par exemple, la membrane d’une cellule biologique est constituée d’une bicouche lipidique. Dans certains systèmes lipide-eau, on observe une structure **lamellaire**, avec alternance de fines couches de lipides et d’épaisses couches d’eau. De Gennes a proposé de modéliser ces systèmes par des *lignes élastiques ne se croisant pas* : les lignes représentent les fines couches de lipides, elles séparent les épaisses couches d’eau.

Pour simplifier, il suppose qu’il n’y a pas d’interaction entre les lignes mais qu’une force de tension les étire selon une direction privilégiée ( $Ox$ ). Si la force de tension est constante égale à  $A$ , alors l’énergie d’une ligne élastique de position  $h(x)$ , pour  $0 < x < L$ , est donnée par :

$$E[\{h(x)\}] = \int A \vec{e}_x \cdot d\vec{s} = A \int_0^L dx \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2} = cste + \frac{A}{2} \int_0^L dx \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 + \dots \quad (4.1)$$

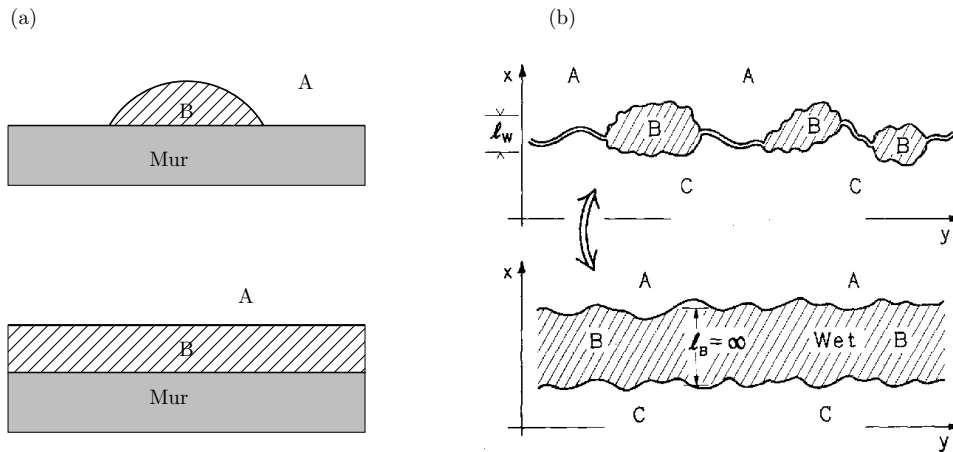
où  $d\vec{s}$  est l’élément de longueur le long de la ligne, ie  $s$  est l’abscisse curviligne :  $ds^2 = dx^2 + dh^2$ . La dernière égalité est une approximation valable quand les fluctuations sont assez faibles, c’est-à-dire quand  $\left|\frac{dh}{dx}\right| \ll 1$ .

À l’équilibre thermodynamique à température inverse  $\beta$  (ensemble canonique), la distribution de la configuration d’une ligne élastique  $\{h(x), 0 < x < L\}$ , où  $h(x)$  est la position de la ligne à l’abscisse  $x$ , est donnée par le poids de Boltzmann :

$$\mathcal{P}(\{h(x)\}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E[\{h(x)\}]} = \frac{1}{Z'} e^{-\beta \frac{A}{2} \int_0^L dx \left(\frac{dh}{dx}\right)^2} \quad (4.2)$$

$h(x)$  est donc un mouvement brownien à 1D où  $x$  joue le rôle du temps, comme expliqué section 4.2. Le modèle de de Gennes consiste donc en un *ensemble de mouvements browniens 1D dont les positions ne se croisent pas*, les  $h_i(x)$  où  $i$  est l’indice associé à la  $i^{\text{ème}}$  ligne élastique lipidique, c’est le modèle des *marcheurs vicieux* en version continue.

Fisher a étudié [Fis84] divers modèles de **marcheurs aléatoires** à 1D, “**inoffensifs**” (“harmless”) c’est à dire pouvant se croiser, ou “**vicieux**” (“vicious”) donc s’entre-tuant



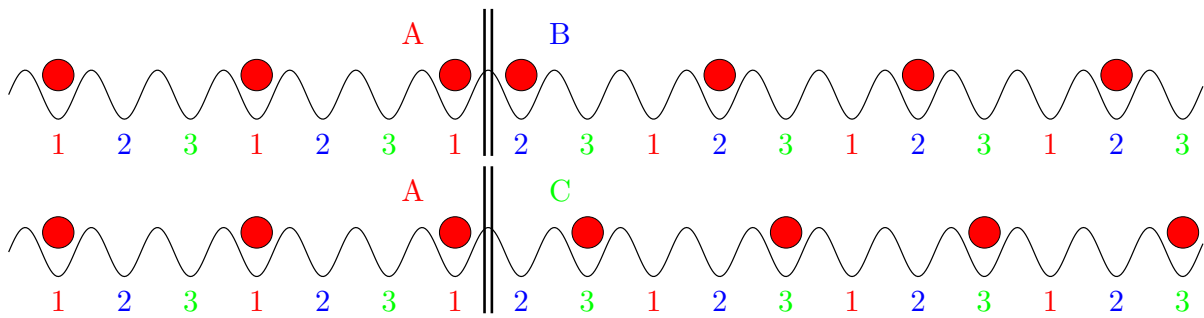
**Figure 4.2** – (a) Mouillage de l’interface mur/gaz A par un liquide B : mouillage partiel (en haut) ou complet (en bas). (b) Mouillage de l’interface entre deux phases A et C par une phase B : mouillage partiel (en haut) ou mouillage complet (en bas). Dans le cas du mouillage complet, on obtient deux interfaces qui peuvent être modélisées par deux marcheurs vicieux. [source pour (b) : Fisher [Fis84]]

dès qu’ils se rencontrent, et en présence ou non d’un mur. Il s’est intéressé en particulier à la probabilité de réunion des marcheurs après un certain temps, à la distribution des positions des marcheurs à un temps donné ou encore à la probabilité de survie dans le cas des marcheurs vicieux. Il applique ses résultats à la physique des transitions de phase de mouillage, de fusion ou encore de la transition commensurable/incommensurable.

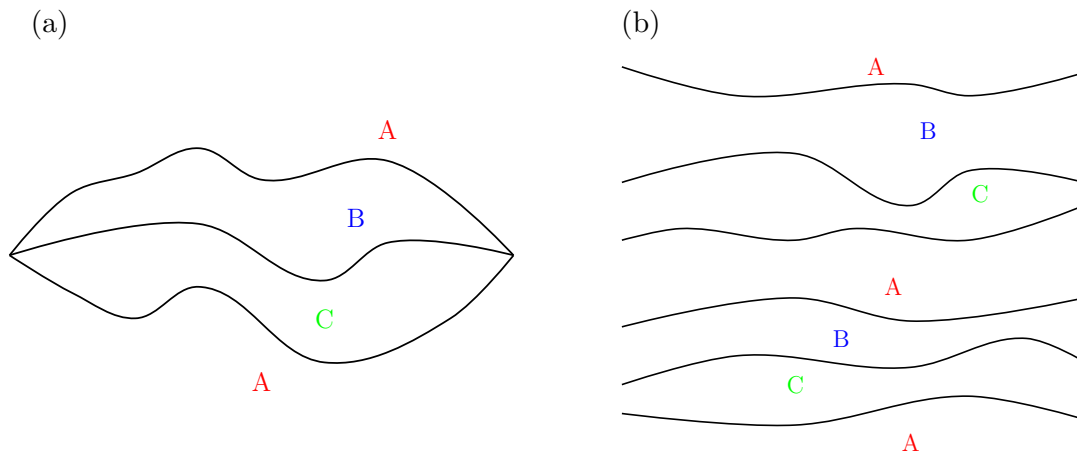
Si on a un gaz A au-dessus d’un substrat C solide et qu’on dépose quelques gouttes d’un liquide B sur le substrat (“mur”), il peut alors y avoir deux types de **mouillage** : il y aura mouillage partiel si le liquide B reste sous forme de gouttes, le gaz A reste alors en contact avec le substrat sur certaines zones ; il y aura mouillage total si le liquide B s’étale jusqu’à recouvrir complètement le substrat et former une couche qui sépare le substrat du gaz A, voir Fig. 4.2. Le passage de l’un à l’autre constitue la transition de mouillage. On peut aussi considérer un système multiphase  $2D$  où l’interface fluctuante entre deux phases A et C peut être mouillée par une phase intermédiaire B. Dans le régime “mouillé”, on observe donc une succession de trois phases A, B, C séparées par deux interfaces fluctuantes ne se croisant pas, voir figure 4.2. Ces interfaces peuvent être modélisées par deux marcheurs aléatoires vicieux.

On suppose maintenant qu’un gaz atomique est en équilibre au-dessus d’un substrat solide et que des atomes de gaz peuvent être adsorbés par la surface cristalline. Ce peut être par exemple de l’hydrogène dissocié adsorbé sur un cristal ferreux. On obtient alors une **phase “commensurable”** lorsque les atomes de gaz s’ordonnent sur la surface suivant la périodicité du cristal. Par exemple, si  $a$  est la maille du réseau cristallin, donc  $a$  est la périodicité du potentiel cristallin, et si les atomes de gaz sont déposés régulièrement espacés d’une distance  $pa$  où  $p$  est un entier, alors c’est une phase commensurable. Selon le choix du sous-réseau sur lequel sont déposés les atomes de gaz (périodicité  $pa$ ), il y a  $p$  phases  $p$ -commensurables possibles, cf Fig. 4.3. Dans la **phase incommensurable**, les  $p$  phases commensurables coexistent séparées par des murs de domaine. Si on a initialement une phase  $p$ -commensurable de type A, lorsque l’on approche de la **transition commensurable/incommensurable**, on observe la formation de bulles où apparais-





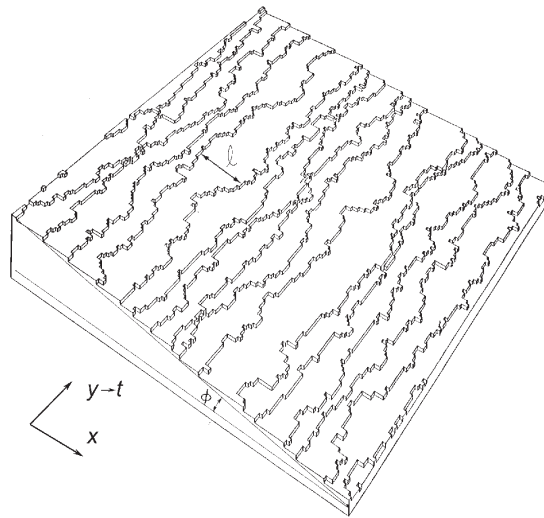
**Figure 4.3** – Atomes de gaz (disques rouges) adsorbés à la surface d’un cristal. La sinusoïde représente le potentiel périodique du solide cristallin. Ici sont représentées les trois phases 3-commensurables (ie  $p = 3$ ) A, B, C pour lesquelles la périodicité des atomes adsorbés est  $3a$  où  $a$  est la période du potentiel cristallin. La double barre verticale indique l’interface entre deux phases commensurables.



**Figure 4.4** – (a) Près de la transition commensurable-incommensurable, on observe des “pastèques”, ie des bulles de phases commensurables B, C au milieu d’une phase A. (b) Dans la phase incommensurable, on observe une succession de phases commensurables A, B, C, A, etc.

sent successivement les  $(p - 1)$  autres phases commensurables B,C, etc. Elle forment ainsi des configurations de “pastèques” faites d’interfaces fluctuantes sans intersection sauf aux bords où elles se rejoignent toutes, cf Fig. 4.4 (a) : on peut les décrire par un modèle de phases séparées par des interfaces, des marcheurs vicieux conditionnés à se réunir aux deux bords [SMCRF08]. Dans la phase incommensurable, on observe une succession de couches commensurables A,B,C, etc. séparées par des interfaces fluctuantes qui ne se croisent pas, cf Fig. 4.4 (b) : on peut les modéliser par des **marcheurs vicieux** sans conditions au bord.

Ce modèle de marcheurs vicieux se rencontre également dans d’autres contextes, en particulier dans le contexte des **surfaces vicinales de cristaux** [RE05, Ein03]. Une surface vicinale est obtenue en coupant un cristal selon un petit angle par rapport à un de ses plans de symétrie. Du fait de la structure périodique discrète du cristal, on obtient alors une succession de *terrasses séparées par des marches irrégulières*, voir Fig. 4.5. Vues du dessus, ces marches peuvent être décrites comme des marches aléatoires



**Figure 4.5** – *Surface vicinale d’un cristal : terrasses obtenues en coupant un cristal selon un petit angle par rapport à son axe de symétrie [Source : simulation Monte Carlo par Einstein [Ein03]]*

1D sans intersection (car les terrasses sont à hauteur constante), des marcheurs vicieux. Cependant, dans ce système, l’interaction entre les marches n’est pas négligeable, elle est inversement proportionnelle au carré de la largeur des terrasses.

Enfin on notera que le modèle de marcheurs vicieux sur réseau de dimension  $d$  (on a supposé jusqu’ici et on supposera toujours  $d = 1$  dans la suite) est équivalent à un modèle de polymères dirigés sur réseau de dimension  $d + 1$  [EG95] (la dimension ajoutée correspond au temps pour les marcheurs vicieux). Il existe également un lien très étroit avec des modèles de croissance stochastique comme le “polynuclear growth model” [FP06].

Considérant un modèle de marcheurs aléatoires vicieux, dans sa version discrète ou continue, on peut se poser diverses questions, par exemple quelle est la **probabilité de survie** des marcheurs au temps  $t$ ? ou encore quelle est la probabilité de “**réunion**” de ces marcheurs au bout d’un temps  $t$ ? Ce sont les questions auxquelles se sont intéressés Huse et Fisher [HF84, Fis84] ainsi qu’Essam et Guttmann [EG95]. Bray et Winkler [BW04] ont calculé la probabilité de survie pour des marcheurs vicieux dans un potentiel harmonique. Cardy et Katori [CK03] ont également étudié la probabilité de survie de marcheurs vicieux mais pour un modèle plus complexe où les marcheurs sont regroupés en  $p$  familles, les marcheurs d’une même famille étant inoffensifs les uns avec les autres mais deux marcheurs issus de familles différentes étant vicieux entre eux. On peut également se demander, si on suppose que les marcheurs ont tous survécu jusqu’au temps  $t$ , **quelle est la distribution transverse des marcheurs à ce temps  $t$ ?**

Il se trouve que la distribution transverse des marcheurs vicieux à un temps donné<sup>1</sup> suffisamment loin des bords est identique à celle des valeurs propres d’une **matrice aléatoire gaussienne**. Cette correspondance avec les matrices aléatoires a été montrée par K. Johansson [Joh02] dans le cas de  $N$  mouvements browniens 1D ne se croisant pas (version continue) considérés au temps  $T$ , et avec conditions au bord périodiques : les  $N$  mouvements browniens démarrent (au temps  $t = 0$ ) et finissent (au temps  $t = 2T$ )

1. en supposant que les marcheurs ont survécu jusqu’à ce temps

aux mêmes positions  $0, 1, \dots, N - 1$ . Johansson utilise pour cela la technique de **Karlin-McGregor** [KM59], qui permet d'écrire la probabilité que  $N$  particules suivent un processus stochastique depuis des positions initiales données  $i_1, \dots, i_N$  vers des positions finales données  $j_1, \dots, j_N$  sans jamais se croiser comme un déterminant des probabilités de transition  $P_{i_k, j_l}$ .

Katori et Tanemura [KT02] ont étudié la distribution transverse de  $N$  mouvements browniens contraints de commencer à la même position à  $t = 0$  et de ne pas se croiser jusqu'au temps  $T$ . Ils ont montré que si  $T \rightarrow \infty$ , alors la distribution transverse des positions des marcheurs à un temps  $t$  fini est donnée par la loi jointe des valeurs propres d'une matrice GUE, voir (1.27) avec  $\beta = 2$ . Au contraire, si  $t = T$ , on obtient la loi des valeurs propres de l'ensemble GOE, voir (1.27) avec  $\beta = 1$ . Ils utilisent pour leur preuve la méthode de **Lindström-Gessel-Viennot** [Lin73, GV85] qui permet d'énumérer les classes de partition plane et repose en particulier sur l'observation que le nombre de configurations de  $N$  chemins ne se croisant pas qui relient deux ensembles de  $N$  vertex peut s'exprimer comme un déterminant. Ils ont également étudié le cas d'excursions browniennes, c'est-à-dire des marcheurs vicieux en présence d'un mur [KTNK03].

## 4.2 MOUVEMENT BROWNIEN 1D

Dans cette partie je définis le mouvement brownien standard ainsi qu'une version généralisée du mouvement brownien que j'appellerai mouvement brownien "avec potentiel" et qui est aussi un processus stochastique markovien. Je montre ensuite comment calculer la distribution marginale de la position à un temps donné ainsi que la probabilité de transition pour ces processus markoviens. Pour cela, j'introduis l'intégrale de chemin et le formalisme de Feynman-Kac, qui permet de transformer le problème classique de mouvement brownien "avec potentiel  $V$ " en un problème quantique pour une particule dans un potentiel  $V$ .

### 4.2.1 Définition du mouvement brownien

#### 4.2.1.1 Mouvement brownien standard

Le **mouvement brownien standard** ou **processus de Wiener** réel à 1D est un processus stochastique  $\{x(t)\}_{t \geq 0}$  continu tel que :

- pour tous  $t > u$ , l'accroissement  $(x(t) - x(u))$  est indépendant du processus passé  $\{x(\tau)_{0 \leq \tau \leq u}\}$  (propriété de *Markov*).
- pour tous  $t > u$ , l'accroissement  $(x(t) - x(u))$  est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et variance  $(t - u)$  (accroissements *gaussiens* et *stationnaires*).

On appellera mouvement brownien **standard usuel** le mouvement brownien considéré sur un temps  $[0, T]$ , qui démarre à une position fixée  $x(0) = x_0$  mais qui est libre à l'autre extrémité ( $x(T)$  libre). Le mouvement brownien standard usuel est ainsi un **processus de Markov** caractérisé par sa **probabilité de transition**  $p_\tau(y|x)$

$$p_\tau(y|x) = \mathcal{P}[x(t + \tau) = y | x(t) = x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\tau}} \quad (4.3)$$

$p_\tau(y|x)$  est une gaussienne centrée et de variance  $\tau$ . Elle est normalisée :  $\int_{-\infty}^{+\infty} dy p_\tau(y|x) = 1$ .

La distribution jointe des positions  $\{x_1, \dots, x_n\}$  aux temps  $t_1 < \dots < t_n$  pour un mouvement brownien d'origine  $x(0) = x_0$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[x(t_i) = x_i, \forall i] &= p_{t_n - t_{n-1}}(x_n | x_{n-1}) \dots p_{t_2 - t_1}(x_2 | x_1) p_{t_1}(x_1 | x_0) \\ &\propto e^{-\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2(t_n - t_{n-1})}} \dots e^{-\frac{(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{(x_1 - x_0)^2}{2(t_1 - t_0)}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

où  $t_0 = 0$ . Dans la limite  $n \rightarrow \infty$  avec  $t_n = T$  fixé, les accroissements  $t_{i+1} - t_i$  seront très petits. Bien que mathématiquement la dérivée du mouvement brownien soit en fait infinie, on peut écrire formellement dans cette limite :

$$\frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2(t_{i+1} - t_i)} = \frac{dt}{2} \left( \frac{dx}{dt} \Big|_{t_i} \right)^2 \quad \text{d'où} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2(t_{i+1} - t_i)} = \frac{1}{2} \int_0^T dt \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (4.5)$$

Toujours formellement, la **distribution d'une configuration** du mouvement brownien  $\{x(t), 0 \leq t \leq T\}$  s'écrit donc :

$$\boxed{\mathcal{P}[\{x(t)\}_{0 \leq t \leq T}] \propto e^{-\frac{1}{2} \int_0^T dt \left( \frac{dx}{dt} \right)^2}} \quad (4.6)$$

Cette écriture prend tout son sens mathématiquement quand on la discrétise, en choisissant un grand nombre, mais un nombre fini de temps intermédiaires  $t_i$  (et  $x_i = x(t_i)$ ) comme en (4.4).

#### 4.2.1.2 Mouvement brownien avec potentiel $V$

On va considérer de façon un peu plus générale, un processus stochastique 1D,  $\{x(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ , de poids statistique donné formellement par :

$$\boxed{\mathcal{P}[\{x(t)\}_{0 \leq t \leq T}] \propto e^{-\frac{1}{2} \int_0^T dt \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - \int_0^T dt V(x(t))}} \quad (4.7)$$

Dans le cas où le potentiel  $V$  est identiquement nul, on retrouve le mouvement brownien standard (4.6). En général, on dira que  $\{x(t)\}$  (défini sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ ) est un *mouvement brownien avec potentiel*  $V(x)$ . On notera :

$$U(\{x(t)\}) = \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x(t)) \quad \text{soit} \quad \mathcal{P}[\{x(t)\}_{0 \leq t \leq T}] \propto e^{-\int_0^T dt U(x(t))} \quad (4.8)$$

$V$  ne correspond pas vraiment à un potentiel classique dans lequel la particule brownienne se déplace. L'idée d'ajouter ainsi un potentiel  $V(x)$  dans le poids stochastique de  $\{x(t)\}$  prend tout son sens en physique avec le formalisme de l'**intégrale de chemin** et de **Feynman-Kac** expliqué plus loin, cf section 4.2.3. Ce formalisme permet d'associer au processus stochastique  $\{x(t)\}$  une particule quantique de position  $x$  au temps  $t$  dans un potentiel externe  $V(x)$ .

Ce formalisme de Feynman-Kac permet en particulier d'étudier des *fonctionnelles du mouvement brownien standard*. Par exemple, si on choisit  $V(x) = \theta(x)$ , alors  $\int_0^t d\tau V(x(\tau))$  est le temps passé par le processus  $\{x(\tau)\}$  à droite de l'origine (le temps cumulé pendant

lequel  $x(\tau) > 0$ ). Le formalisme de Feynman-Kac, cf section 4.2.3, permet de calculer la transformée de Laplace de ce temps d'occupation  $\langle e^{-\int_0^t d\tau V_p(x(\tau))} \rangle = \langle e^{-p \int_0^t d\tau \theta(x(\tau))} \rangle$  où la moyenne est prise sur le mouvement brownien standard (et où  $V_p(x) = p\theta(x)$ ). En mathématiques d'autres méthodes que l'intégrale de chemin et le formalisme de Kac sont utilisées (martingales, intégration stochastique...), pour cela je renvoie au livre de D. Revuz et M. Yor [RY99]. Dans cette thèse je me contenterai des techniques d'intégrale de chemin et de Feynman-Kac.

Le processus  $\{x(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  est continu et **markovien** de par sa définition (4.7). En effet, pour tout temps intermédiaire  $t \in [0, T]$ , il y a factorisation du poids stochastique :

$$\mathcal{P} [\{x(u)\}_{0 \leq u \leq T}] = \mathcal{P} [\{x(u)\}_{0 \leq u \leq t}] \mathcal{P} [\{x(u)\}_{t \leq u \leq T}] \quad (4.9)$$

car  $\int_0^T du U(x(u)) = \int_0^t du U(x(u)) + \int_t^T du U(x(u))$ . Le processus  $\{x(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  est donc markovien au sens faible, c'est à dire que pour tous  $t > u$ , l'accroissement  $(x(t) - x(u))$  est indépendant du processus passé  $\{x(\tau)\}_{0 \leq \tau \leq u}$ . Par contre, et quelles que soient les conditions au bord choisies, ce processus n'est *pas en général stationnaire*. C'est à dire que la loi de l'accroissement  $(x(t) - x(u))$  sachant  $x(u)$  ne dépend pas uniquement de  $t - u$ , comme c'était le cas pour le mouvement brownien standard usuel (ie  $V \equiv 0$  et  $x(0)$  fixé mais  $x(T)$  libre). Le processus  $\{x(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  pour  $V \neq 0$  est en fait stationnaire seulement si on le considère sur un temps très long, ie  $T = +\infty$  comme on verra plus loin dans la section 4.2.5.2.

## 4.2.2 Distribution marginale de la position $x$ au temps $t$

On suppose ici que le processus  $\{x(t)\}$  (défini (4.7)) est fixé aux deux bords :  $x(0) = x_0$  et  $x(T) = y_0$ .

On veut calculer la **probabilité marginale**  $\mathcal{P}_t(x)$  que le "marcheur" soit à la position  $x$  au temps  $t$ , ie  $x(t) = x$ . Pour obtenir la densité de probabilité  $\mathcal{P}_t(x)$ , il faut intégrer sur les configurations  $\{x(t')\}_{0 \leq t' \leq T}$  telles que  $x(0) = x_0$ ,  $x(t) = x$  et  $x(T) = y_0$ . On peut donc écrire  $\mathcal{P}_t(x)$  comme une **intégrale de chemin**. On intègre sur les chemins  $\{x(t')\}_{0 \leq t' \leq t}$  tels que  $x(0) = x_0$  et  $x(t) = x$  puis sur les chemins  $\{x(t')\}_{t \leq t' \leq T}$  tels que  $x(t) = x$  et  $x(T) = y_0$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t(x) &\propto \int_{x(0)=x_0}^{x(t)=x} \mathcal{D}x(t') \int_{x(t)=x}^{x(T)=y_0} \mathcal{D}x(t') e^{-\int_0^T dt' U(x(t'))} \\ &\propto \int_{x(0)=x_0}^{x(t)=x} \mathcal{D}x(t') e^{-\int_0^t dt' U(x(t'))} \int_{x(t)=x}^{x(T)=y_0} \mathcal{D}x(t') e^{-\int_t^T dt' U(x(t'))} \end{aligned} \quad (4.10)$$

où  $U(x(t)) = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x(t))$ . L'intégrale sur les chemins  $\{x(t')\}$  notée  $\int_{x(t_a)=x_a}^{x(t_b)=x_b} \mathcal{D}x(t') \dots$  est la limite formelle quand  $n \rightarrow \infty$  d'une intégrale multiple sur  $(n - 1)$  positions intermédiaires  $x_i = x(t_i)$  pour une discrétisation  $\{t_i\}_{0 \leq i \leq n}$  de l'intervalle de temps considéré  $[t_a, t_b]$ , cf (4.13). L'intégrale de chemin initiale dans (4.10) se découpe en un produit de deux intégrales de chemin, une du temps 0 au temps  $t$ , l'autre de  $t$  à  $T$  d'après (4.9) et (4.8).

On peut montrer que l'**intégrale de chemin**  $\int_{x(0)=x}^{x(\tau)=y} \mathcal{D}x(t') e^{-\int_0^\tau dt' U(x(t'))}$  est invariante par translation dans le temps, c'est-à-dire que pour tout temps  $t$  on a :

$$\int_{x(0)=x}^{x(\tau)=y} \mathcal{D}x(t') e^{-\int_0^\tau dt' U(x(t'))} = \int_{x(t)=x}^{x(t+\tau)=y} \mathcal{D}x(t') e^{-\int_t^{t+\tau} dt' U(x(t'))} \quad (4.11)$$

Cette égalité se montre en effectuant le changement de variable  $x(t') \rightarrow x(t' + t)$  dans l'intégrale de chemin puis  $t' \rightarrow t' + t$  dans l'intégrale  $\int_0^\tau dt' U(x(t')) \rightarrow \int_0^\tau dt' U(x(t' + t)) = \int_t^{t+\tau} dt' U(x(t'))$ . On notera  $(y|x)_\tau$  la valeur commune de ces intégrales de chemin qui vont de  $x$  à  $y$  pendant un temps  $\tau$ , soit :

$$\boxed{(y|x)_\tau = \int_{x(0)=x}^{x(\tau)=y} \mathcal{D}x(t') e^{-\int_0^\tau dt' U(x(t'))} = \int_{x(t)=x}^{x(t+\tau)=y} \mathcal{D}x(t') e^{-\int_t^{t+\tau} dt' U(x(t'))}} \quad (4.12)$$

L'écriture en *intégrale de chemin* (4.12) correspond formellement à prendre la limite  $n \rightarrow \infty$  d'une intégrale multiple sur les positions  $x_i$  du processus aux temps  $t_i$  :

$$(y|x)_\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_{n-1} \left(\frac{n}{2\pi\tau}\right)^{n/2} \times \quad (4.13)$$

$$\times e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}\right)^2 - \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}-t_i) V(x_i)}$$

avec aux bords  $x_0 = x$ ,  $x_n = y$ ,  $t_0 = 0$  et  $t_n = \tau$ , et avec  $t_i = i\tau/n$ ,  $x_i = x(t_i)$  pour  $0 \leq i \leq n$ . Le choix de la *normalisation*  $\left(\frac{n}{2\pi\tau}\right)^{n/2}$  est important pour assurer  $|(y|x)_\tau| < \infty$  (comme on verra plus loin section 4.2.3) ainsi que le bon comportement de l'intégrale de chemin par *discrétisation*. On veut en effet pouvoir discrétiser l'intégrale de chemin sur les intervalles  $[0, t]$  et  $[t, T]$  séparément sans changer la limite  $n \rightarrow \infty$  par rapport à une discrétisation directe de  $[0, T]$ . On veut donc assurer la propriété suivante pour tout temps intermédiaire  $t$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{x(0)=x_0}^{x(t)=x} \mathcal{D}x(t') \int_{x(t)=x}^{x(T)=y_0} \mathcal{D}x(t') \dots = \int_{x(0)=x_0}^{x(T)=y_0} \mathcal{D}x(t') \dots \quad (4.14)$$

donc en particulier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx (y_0|x)_{T-t}(x|x_0)_t = (y_0|x_0)_T \quad (4.15)$$

Si on suppose qu'on a une discrétisation  $\{t_i = it/n_1\}_{0 \leq i \leq n_1}$  de  $[0, t]$  avec  $x(t_i) = x_i$  et une discrétisation  $\{t'_i = t + i(T-t)/n_2\}_{0 \leq i \leq n_2}$  de  $[t, T]$  avec  $x(t'_i) = x_{i+n_1}$ , on peut les rassembler pour former une discrétisation  $\{T_i = iT/n\}_{0 \leq i \leq n}$  de  $[0, T]$  avec  $x(T_i) = x_i$  si  $t/n_1 = T/n = (T-t)/n_2$ , c'est-à-dire  $n_1 = tn/T$  et  $n_2 = (T-t)n/T$  (et donc  $n_1 + n_2 = n$ ). L'égalité (4.14) est bien vérifiée car :  $\left(\frac{n_1}{2\pi t}\right)^{n_1/2} \left(\frac{n_2}{2\pi(T-t)}\right)^{n_2/2} = \left(\frac{n}{2\pi T}\right)^{n/2}$ .

Avec la notation (4.12) de l'intégrale de chemin, on peut donc récrire la distribution marginale de  $x$  (4.10) sous la forme  $\mathcal{P}_t(x) \propto (x|x_0)_t (y_0|x)_{T-t}$ , soit après normalisation :

$$\boxed{\mathcal{P}_t(x) = \frac{(y_0|x)_{T-t}(x|x_0)_t}{(y_0|x_0)_T}} \quad (4.16)$$

Il faut d'abord aller de  $x_0$  à  $x$  pendant un temps  $t$ , puis de  $x$  à  $y_0$  pendant  $(T-t)$ . D'après (4.15), le facteur au dénominateur  $(y_0|x_0)_T$  assure bien que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_t(x) = 1$ . Il permet de fixer les conditions au bord  $x(0) = x_0$  et  $y(T) = y_0$  (qui font partie des hypothèses).

Pour déterminer  $\mathcal{P}_t(x)$ , il faut calculer l'intégrale de chemin  $(y|x)_\tau$ , c'est l'objet de la section suivante.

### 4.2.3 Intégrale de chemin et propagateur quantique

On va montrer que l'intégrale de chemin (4.12) peut se récrire comme un **propagateur quantique** en temps imaginaire :

$$\boxed{(y|x)_\tau = \langle y|e^{-\hat{H}\tau}|x\rangle} \quad (4.17)$$

où  $(y|x)_\tau = \int_{x(0)=x}^{x(\tau)=y} \mathcal{D}x(t) e^{-\frac{1}{2} \int_0^\tau dt \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \int_0^\tau dt V(x(t))}$  et où  $\hat{H}$  est le Hamiltonien d'une *particule quantique* dans un potentiel  $V(x)$  à 1D :

$$\boxed{\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + V(\hat{x}) = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)} \quad (4.18)$$

où  $\hat{x}$  est l'opérateur de position,  $\hat{p}$  celui d'impulsion et où on a posé  $\hbar = 1$  ( $\hbar$  est la constante de Planck). Le membre de droite ci-dessus est l'expression du Hamiltonien dans la "base" des positions  $x \in \mathbb{R}$ .  $|x\rangle$  est l'état propre de l'opérateur position  $\hat{x}$  de valeur propre  $x$ .

Cette correspondance entre le processus stochastique  $\{x(t)\}$  et le problème quantique associé (décrit par le Hamiltonien  $\hat{H}$ ) s'appelle en physique le **formalisme de Feynman-Kac**. Le **potentiel**  $V(x)$  qu'on a ajouté un peu à la main pour définir le "mouvement brownien avec potentiel", cf Eq. (4.7), apparaît tout à fait naturellement dans le problème quantique comme le potentiel dans lequel évolue la particule quantique.

Démontrons maintenant (4.17). On peut introduire dans le propagateur quantique  $\langle y|e^{-\hat{H}\tau}|x\rangle$  (terme de droite dans Eq. (4.17)) l'identité  $(n-1)$  fois sous la forme  $\mathbb{1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_i |x_i\rangle \langle x_i|$  :

$$\langle y|e^{-\hat{H}\tau}|x\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \langle y|e^{-\frac{\hat{H}\tau}{n}}|x_{n-1}\rangle \dots \langle x_1|e^{-\frac{\hat{H}\tau}{n}}|x\rangle \right] \quad (4.19)$$

Pour  $n$  grand, on a de plus :

$$e^{-\frac{\hat{H}\tau}{n}} = e^{-\tau \left( \frac{\hat{p}^2/2 + V(\hat{x})}{n} \right)} = 1 - \tau \left( \frac{\hat{p}^2/2 + V(\hat{x})}{n} \right) + \dots \sim e^{-\frac{\tau \hat{p}^2}{2n}} e^{-\frac{\tau V(\hat{x})}{n}} \quad (4.20)$$

qui est valable dans la limite  $n \rightarrow \infty$  seulement (car  $\hat{p}$  et  $\hat{x}$  ne commutent pas). D'où :

$$\langle x_{i+1}|e^{-\frac{\hat{H}\tau}{n}}|x_i\rangle \sim \langle x_{i+1}|e^{-\frac{\tau \hat{p}^2}{2n}} e^{-\frac{\tau V(\hat{x})}{n}}|x_i\rangle = e^{-\frac{\tau V(x_i)}{n}} \langle x_{i+1}|e^{-\frac{\tau \hat{p}^2}{2n}}|x_i\rangle \quad (4.21)$$

On introduit ensuite la base propre  $|p\rangle$  associée à l'opérateur  $\hat{p}$  et on a :

$$\begin{aligned}
\langle x_{i+1} | e^{-\frac{\tau \hat{p}^2}{2n}} | x_i \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dp \langle x_{i+1} | e^{-\frac{\tau p^2}{2n}} | p \rangle \langle p | x_i \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-\frac{\tau p^2}{2n}} \langle x_{i+1} | p \rangle \langle p | x_i \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-\frac{\tau p^2}{2n}} \frac{1}{2\pi} e^{i(x_i - x_{i+1})p} \\
&= \sqrt{\frac{n}{2\pi\tau}} e^{-\frac{n}{2\tau}(x_i - x_{i+1})^2}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

car  $\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx}$  (avec la constante de Planck  $\hbar = 1$ ).

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle y | e^{-\hat{H}\tau} | x \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} \langle x_{i+1} | e^{-\frac{\hat{H}\tau}{n}} | x_i \rangle \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} \left\{ e^{-\frac{\tau V(x_i)}{n}} e^{-\frac{n}{2\tau}(x_i - x_{i+1})^2} \sqrt{\frac{n}{2\pi\tau}} \right\} \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \left( \frac{n}{2\pi\tau} \right)^{n/2} e^{-\sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \frac{n}{2\tau}(x_i - x_{i+1})^2 + \tau \frac{V(x_i)}{n} \right\}} \right]
\end{aligned} \tag{4.23}$$

avec  $t_n = \tau$ ,  $x_n = y$ ,  $x_0 = x$ . La dernière ligne est exactement (4.13) car  $t_{i+1} - t_i = \tau/n$ . D'où Eq. (4.17). On voit ici apparaître de façon naturelle le facteur de normalisation  $\left(\frac{n}{2\pi\tau}\right)^{n/2}$ , qui permet que  $|(y|x)_\tau| < \infty$  car  $|\langle y | e^{-\hat{H}\tau} | x \rangle| < \infty$  et que la relation de composition (Eq. 4.15) soit bien vérifiée.

#### 4.2.4 Le cas du mouvement brownien standard

Dans le cas du *mouvement brownien standard*, on a  $V \equiv 0$  et donc d'après (4.17) :

$$(y|x)_\tau = \langle y | e^{-\hat{H}\tau} | x \rangle \quad \text{où} \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \tag{4.24}$$

$\hat{H}$  est le Hamiltonien suivant d'une particule libre. Dans ce cas, on peut calculer explicitement le propagateur  $\langle y | e^{-\hat{H}\tau} | x \rangle = \langle y | e^{-\frac{\hat{p}^2}{2}\tau} | x \rangle$  en passant dans la base des états propres de  $\hat{p}$  comme on a vu plus haut (4.22). On obtient alors une gaussienne : cf (4.3) :

$$\boxed{(y|x)_\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\tau}}} \tag{4.25}$$

Ainsi la *distribution marginale* de  $x$  au temps  $t$  est donnée pour un mouvement brownien fixé aux deux bords ( $x(0) = x_0$  et  $x(T) = y_0$ ) par (cf (4.16)) :

$$\mathcal{P}_t(x) = \frac{(y_0|x)_{T-t} (x|x_0)_t}{(y_0|x_0)_T} = \sqrt{\frac{T}{2\pi t(T-t)}} e^{-\frac{(y_0-x)^2}{2(T-t)} - \frac{(x-x_0)^2}{2t} + \frac{(y_0-x_0)^2}{2T}} \tag{4.26}$$



soit

$$\mathcal{P}_t(x) = \sqrt{\frac{T}{2\pi t(T-t)}} e^{-\frac{(x-z_t)^2}{2t(T-t)}} \quad \text{où } z_t = \frac{ty_0 + (T-t)x_0}{T} \quad (4.27)$$

C'est une *gaussienne* centrée en  $z_t = \frac{ty_0 + (T-t)x_0}{T}$  et de variance  $t(T-t)/T$ .

On peut aussi calculer la **probabilité de transition** pour un mouvement brownien conditionné à démarrer en  $x(0) = x_0$  mais libre à l'autre extrémité ( $x(T)$  non fixé). Cette probabilité est par définition la probabilité de se trouver en  $y$  au temps  $t + \tau$  sachant qu'on était en  $x$  au temps  $t$ , ie  $\mathcal{P}[x(t + \tau) = y | x(t) = x]$  :

$$\mathcal{P}[x(t + \tau) = y | x(t) = x] = \frac{\int dz (z|y)_{s-(t+\tau)} (y|x)_\tau (x|x_0)_t}{\int dz (z|x)_{s-t} (x|x_0)_t} = (y|x)_\tau \quad (4.28)$$

On intègre sur la position finale  $z = x(T)$  car on considère par hypothèse un mouvement brownien d'extrémité droite non fixée. On a aussi utilisé le fait que pour le mouvement brownien on a  $(z|x)_\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2\tau}}$ , cf (4.25), donc en particulier  $\int_{-\infty}^{+\infty} dz (z|x)_\tau = 1$ . Finalement on retrouve, cf (4.3), que la probabilité de transition  $\mathcal{P}[x(t + \tau) = y | x(t) = x]$  du mouvement brownien standard usuel (libre à son extrémité droite) est gaussienne et stationnaire, ie elle dépend du temps  $\tau$  de transition mais pas du temps  $t$  :

$$p_\tau(y|x) = \mathcal{P}[x(t + \tau) = y | x(t) = x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\tau}} \quad (4.29)$$

Dans le cas général, pour  $V$  non nul, on pourra calculer l'intégrale de chemin  $(y|x)_\tau = \langle y | e^{-\hat{H}\tau} | x \rangle$  si on connaît les états propres du Hamiltonien  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + V(\hat{x})$  d'une particule dans un potentiel  $V(x)$ .

## 4.2.5 Le cas du mouvement brownien avec potentiel

On revient au cas général du mouvement brownien avec potentiel, c'est-à-dire en présence d'un potentiel  $V$  non nul.

### 4.2.5.1 Distribution marginale loin des bords

On suppose à nouveau *les extrémités du processus  $x(t)$  fixées*,  $x(0) = x_0$  et  $x(T) = y_0$ . On a vu que la **probabilité marginale**  $\mathcal{P}_t(x)$  que le "marcheur" soit à la position  $x$  au temps  $t$ , ie  $x(t) = x$  s'écrit, cf (4.16) :

$$\mathcal{P}_t(x) = \frac{(y_0|x)_{T-t} (x|x_0)_t}{(y_0|x_0)_T} \quad (4.30)$$

où l'intégrale de chemin  $(y|x)_\tau$  (4.12) est donnée comme le propagateur en temps imaginaire d'une particule quantique dans un potentiel  $V(x)$  :  $(y|x)_\tau = \langle y | e^{-\hat{H}\tau} | x \rangle$  où  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + V(\hat{x})$  (cf (4.17)). Finalement :

$$\mathcal{P}_t(x) = \frac{\langle y_0 | e^{-\hat{H}(T-t)} | x \rangle \langle x | e^{-\hat{H}t} | x_0 \rangle}{\langle y_0 | e^{-\hat{H}T} | x_0 \rangle} \quad (4.31)$$

On voit bien ici que  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{P}_t(x) = 1$ , en effet  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx |x\rangle\langle x| = \mathbb{1}$  est une décomposition de l'identité, car les  $|x\rangle$  forment une base de l'espace de Hilbert associé à la particule quantique.

On suppose ici qu'on connaît les **états propres du Hamiltonien**  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + V(\hat{x})$ . On notera  $\psi_\epsilon(x) = \langle x|\psi_\epsilon\rangle$  les fonctions d'onde des états propres  $|\psi_\epsilon\rangle$  d'énergie  $\epsilon$ , soit :

$$\hat{H}|\psi_\epsilon\rangle = \epsilon|\psi_\epsilon\rangle \quad \text{ie} \quad -\frac{d^2\psi_\epsilon(x)}{dx^2} + V(x)\psi_\epsilon(x) = \epsilon\psi_\epsilon(x) \quad (4.32)$$

On supposera que les énergies propres  $\epsilon$  forment un ensemble discret et que les  $|\psi_\epsilon\rangle$ , sont bien normalisables (ce sera le cas pour un potentiel  $V$  confinant mais pas pour  $V = 0$  par exemple). Dans ce cas, les  $|\psi_\epsilon\rangle$  où  $\epsilon$  parcourt l'ensemble des énergies propres (discrètes) de  $\hat{H}$  constituent une base orthonormée de l'espace de Hilbert du système quantique :  $\langle\psi_\epsilon|\psi_{\epsilon'}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\epsilon(x)^* \psi_{\epsilon'}(x) = \delta_{\epsilon,\epsilon'}$ .

On peut décomposer le propagateur (4.17) dans cette base sous la forme  $\langle y|e^{-\hat{H}\tau}|x\rangle = \sum_\epsilon \psi_\epsilon(y)\psi_\epsilon(x)^* e^{-\epsilon\tau}$ . Ainsi la distribution marginale de  $x$  au temps  $t$  s'écrit :

$$\mathcal{P}_t(x) = \frac{\sum_{\epsilon,\epsilon'} e^{-\epsilon(T-t)} e^{-\epsilon't} \psi_\epsilon(y_0)\psi_\epsilon(x)^* \psi_{\epsilon'}(x)\psi_{\epsilon'}(x_0)^*}{\sum_\epsilon e^{-\epsilon T} \psi_\epsilon(y_0)\psi_\epsilon(x_0)^*} \quad (4.33)$$

On considère maintenant la **limite où le temps  $t$  intermédiaire est loin des bords** :  $t \gg 1$  et  $(T-t) \gg 1$ . Dans les sommes ci-dessus, seule l'énergie minimale  $\epsilon_0$ , c'est-à-dire l'*énergie du fondamental* contribue dans la limite  $t \gg 1$  et  $(T-t) \gg 1$ . On garde donc seulement le terme tel que  $\epsilon = \epsilon_0 = \epsilon'$ , on trouve :

$$\mathcal{P}_t(x) = \frac{e^{-\epsilon_0(T-t)} e^{-\epsilon_0 t} |\psi_{\epsilon_0}(x)|^2 \psi_{\epsilon_0}(y_0)\psi_{\epsilon_0}(x_0)^*}{e^{-\epsilon_0 T} \psi_{\epsilon_0}(y_0)\psi_{\epsilon_0}(x_0)^*} = |\psi_{\epsilon_0}(x)|^2 \quad (4.34)$$

soit

$$\boxed{\mathcal{P}_t(x) = |\psi_{\epsilon_0}(x)|^2 \quad \text{quand } t \gg 1 \text{ et } (T-t) \gg 1} \quad (4.35)$$

$\mathcal{P}_t(x)$  est donc égale à la probabilité que la particule quantique se trouve à la position  $x$ , dans un **système quantique à température nulle**. En effet, à température nulle, la particule est dans l'état fondamental  $\psi_{\epsilon_0}$ .

On remarquera que si l'on se place suffisamment loin des bords, ie  $t \gg 1$  et  $(T-t) \gg 1$ , *les conditions au bord n'interviennent plus*,  $\mathcal{P}_t(x)$  (4.35) ne dépend ni du temps  $t$ , ni des conditions au bord  $x(0) = x_0$  et  $x(T) = y_0$ . Il est facile de voir que le résultat (4.35) reste valable encore si le processus est libre à l'un ou l'autre des bords (par exemple si  $x(T)$  non fixé). En effet, dans ce cas, cela ajoute simplement une intégrale sur  $y_0$  ou  $x_0$  aux numérateur et dénominateur de  $\mathcal{P}_t(x)$ , ce qui n'empêche pas que ces termes de bord disparaissent comme quand ils sont fixés.

#### 4.2.5.2 Probabilité de transition

Considérons le cas général d'un mouvement brownien avec potentiel  $V$  avec conditions au bord  $x(0) = x_0$  et  $x(T)$  libre.

On peut écrire la **probabilité de transition** du processus markovien  $\{x(t')\}_{0 \leq t' \leq T}$ , définie par  $\mathcal{P}[x(t+\tau) = y | x(t) = x]$ , comme un produit d'intégrales de chemins :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[x(t+\tau) = y | x(t) = x] &= \frac{\int dy_0 (y_0 | y)_{T-(t+\tau)} (y | x)_\tau (x | x_0)_t}{\int dy_0 (y_0 | x)_{T-t} (x | x_0)_t} \\ &= \frac{\int dy_0 (y_0 | y)_{T-(t+\tau)} (y | x)_\tau}{\int dy_0 (y_0 | x)_{T-t}} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Il faut en effet aller de  $x_0$  au temps 0 à  $x$  au temps  $t$ , puis de  $x$  au temps  $t$  à  $y$  au temps  $t+\tau$ , enfin de  $y$  au temps  $t+\tau$  à  $y_0$  au temps  $T$ . On intègre sur  $y_0$  car l'extrémité droite est supposée libre. Le dénominateur prend en compte les *conditions au bord*  $x(0) = x_0$ ,  $x(T)$  libre (hypothèses de départ) ainsi que la condition  $x(t) = x$  imposée par la probabilité conditionnelle  $\mathcal{P}[x(t+\tau) = y | x(t) = x]$ .

Dans l'expression (4.36) de la probabilité de transition, la contribution du passé  $(x | x_0)_t$  disparaît comme il se doit pour un *processus markovien*. Par contre, en général cette probabilité de transition  $\mathcal{P}[x(t+\tau) = y | x(t) = x]$  dépend à la fois de  $\tau$  et de  $t$ , le processus n'est *pas en général stationnaire*. Le processus  $\{x(t')\}_{0 \leq t' \leq T}$  sera stationnaire si  $V = 0$  (mouvement brownien standard usuel) ou bien pour un  $V$  quelconque si on considère ce processus sur un temps très long, ie  $T = +\infty$  comme on va voir ci-dessous.

L'écriture en termes de propagateurs quantiques donne :

$$\mathcal{P}[x(t+\tau) = y | x(t) = x] = \frac{\int dy_0 \langle y_0 | e^{-\hat{H}(T-t-\tau)} | y \rangle \langle y | e^{-\hat{H}\tau} | x \rangle}{\int dy_0 \langle y_0 | e^{-\hat{H}(T-t)} | x \rangle} \quad (4.37)$$

où  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + V(\hat{x})$ . Dans la limite où  $T = +\infty$  (processus sur un temps non borné), la décomposition sur les états propres de  $\hat{H}$  devient une décomposition sur l'état fondamental seul :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[x(t+\tau) = y | x(t) = x] &\sim \frac{\int dy_0 \psi_{\epsilon_0}(y_0) \psi_{\epsilon_0}(y)^* e^{-\epsilon_0(T-t-\tau)} \langle y | e^{-\hat{H}\tau} | x \rangle}{\int dy_0 \psi_{\epsilon_0}(y_0) \psi_{\epsilon_0}(x)^* e^{-\epsilon_0(T-t)}} \\ &\sim \frac{\psi_{\epsilon_0}(y)^* \langle y | e^{-(\hat{H}-\epsilon_0)\tau} | x \rangle}{\psi_{\epsilon_0}(x)^*} \end{aligned} \quad (4.38)$$

**Dans la limite**  $T = +\infty$ , la probabilité de transition donnée Eq. (4.38) dépend de  $\tau$  mais pas de  $t$ , ie  $\mathcal{P}[x(t+\tau) = y | x(t) = x] = p_\tau(y|x)$ , **le processus**  $\{x(t')\}_{0 \leq t' \leq T}$  **est stationnaire**. Par contre, on notera que si le potentiel  $V(x)$  est non trivial, alors  $p_\tau(y|x)$  dépendra de  $x$  et de  $y$  et pas seulement de  $(y-x)$  comme pour le mouvement brownien standard. De plus dans la limite  $T = \infty$  les conditions au bord n'interviennent plus, (4.38) reste valable que  $x(T)$  soit fixé ou non.

### 4.3 MOUVEMENTS BROWNIENS VICIEUX

On considère maintenant  $N$  **mouvements browniens** 1D avec potentiel  $V(x)$  comme dans (4.7), les  $\{x_i(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ . On s'intéressera à deux situations :

(i) les mouvements browniens sont *indépendants*, ces sont des “**marcheurs inoffensifs**”

(cf Fisher).

(ii) les mouvements browniens ne sont *pas autorisés à se croiser*, ce sont des “**marcheurs vicieux**”. A tout temps  $t$ , on a  $x_1(t) < x_2(t) < \dots < x_N(t)$ .

Le *poids statistique*  $\{\{x_i(t)\}_{0 \leq t \leq T}, 1 \leq i \leq N\}$  d'une configuration des  $N$  processus stochastiques est donné par le produit des poids statistiques pour chaque processus  $\{x_i(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  cf Eq. (4.7) :

$$\mathcal{P}[\{x_i(t)\}_{0 \leq t \leq T}, 1 \leq i \leq N] \propto e^{-\sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T dt \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \int_0^T dt V(x_i(t)) \right\}} \quad (4.39)$$

La situation (i) correspond exactement à (4.39) tandis que pour des marcheurs vicieux (ii) il faut ajouter une fonction indicatrice pour imposer  $x_1(t) < x_2(t) < \dots < x_N(t)$  à tout  $t \in [0, T]$ .

Comme dans le cas  $N = 1$ , cf (4.8), on notera  $U(\{x(t)\}) = \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x(t))$ .

### 4.3.1 Distribution marginale

On suppose maintenant *les extrémités des mouvements browniens fixées*,  $x_i(0) = z_i$  pour  $i \in \{1, \dots, N\}$  et  $x_i(T) = y_i$  pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ . On veut calculer la **probabilité marginale**  $\mathcal{P}_t(x_1, \dots, x_N)$  que les “marcheurs” soient à la position  $x_i$  au temps  $t$ , ie  $x_i(t) = x_i$  pour tout  $i$ . Exactement comme dans le cas  $N = 1$ , cf (4.16), la distribution marginale  $\mathcal{P}_t(x_1, \dots, x_N)$  s'écrit :

$$\mathcal{P}_t(x_1, \dots, x_N) = \frac{(y_1, \dots, y_N | x_1, \dots, x_N)_{T-t}(x_1, \dots, x_N | z_1, \dots, z_N)_t}{(y_1, \dots, y_N | z_1, \dots, z_N)_T} \quad (4.40)$$

où  $(y_1, \dots, y_N | x_1, \dots, x_N)_\tau$  est la généralisation à  $N$  processus  $\{x_i(t)\}$  de l'intégrale de chemin (4.12) :

$$\begin{aligned} (y_1, \dots, y_N | x_1, \dots, x_N)_\tau &= \prod_{i=1}^N \left( \int_{x_i(0)=x_i}^{x_i(\tau)=y_i} \mathcal{D}x_i(t') \right) e^{-\sum_i \int_0^\tau dt' U(x_i(t'))} \\ &= \prod_{i=1}^N \left( \int_{x_i(t)=x_i}^{x_i(t+\tau)=y_i} \mathcal{D}x_i(t') \right) e^{-\sum_i \int_t^{t+\tau} dt' U(x_i(t'))} \end{aligned} \quad (4.41)$$

où  $U(x(t)) = \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x(t))$ .

La probabilité  $\mathcal{P}_t(x_1, \dots, x_N)$  (4.40) s'écrit comme le produit de l'intégrale sur les chemins de  $(z_1, \dots, z_N)$  à  $(x_1, \dots, x_N)$  pendant le temps  $t$  par l'intégrale sur les chemins de  $(x_1, \dots, x_N)$  à  $(y_1, \dots, y_N)$  pendant le temps  $(T - t)$ . A nouveau cette factorisation est liée à la propriété de *Markov* des processus  $\{x_i(t)\}$ . Le facteur au dénominateur prend en compte les conditions au bord et assure la normalisation  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_N \mathcal{P}_t(x_1, \dots, x_N) = 1$ .

### 4.3.2 Propagateur quantique

Comme dans le cas  $N = 1$ , l'intégrale de chemin (4.41) se réécrit comme un propagateur quantique en temps imaginaire, ici un **propagateur à  $N$  particules quantiques**, cf (4.17) :

$$\boxed{(y_1, \dots, y_N | x_1, \dots, x_N)_\tau = \langle y_1, \dots, y_N | e^{-\hat{H}\tau} | x_1, \dots, x_N \rangle} \quad (4.42)$$

où  $\hat{H} = \sum_i \hat{H}_i$  est le Hamiltonien de  $N$  particules quantiques indépendantes chacune dans un potentiel extérieur  $V$  :

$$\boxed{\hat{H} = \sum_{i=1}^N \hat{H}_i = \sum_i \left( \frac{\hat{p}_i^2}{2} + V(\hat{x}_i) \right)} \quad (4.43)$$

La distribution marginale des  $x_i$  se réécrit donc en termes de propagateurs quantiques :

$$\mathcal{P}_t(x_1, \dots, x_N) = \frac{\langle y_1, \dots, y_N | e^{-\hat{H}(T-t)} | x_1, \dots, x_N \rangle \langle x_1, \dots, x_N | e^{-\hat{H}t} | z_1, \dots, z_N \rangle}{\langle y_1, \dots, y_N | e^{-\hat{H}T} | z_1, \dots, z_N \rangle} \quad (4.44)$$

Selon l'hypothèse initiale sur les mouvements browniens, le problème quantique associé est différent :

- (i) Processus **indépendants** : le problème quantique associé est celui de  $N$  particules quantiques *indépendantes* (ie sans interaction) identiques mais *discernables* (et dans un potentiel externe  $V$ ).

- (ii) Marcheurs **vicieux**, les  $x_i(t)$  ne peuvent pas se croiser :  $x_1(t) < \dots < x_N(t)$  à tout temps  $t$ . Le problème quantique associé est celui de  $N$  **fermions indépendants** (dans un potentiel externe  $V$ ). D'après le principe de Pauli, les fermions ne peuvent en effet pas se trouver dans le même état (ici au même endroit) au même moment.

On notera que dans le cas (i), il s'agit bien de *particules discernables* et pas de bosons. En effet, on suppose que le  $i^{\text{ème}}$  marcheur aléatoire est décrit par le processus  $\{x_i(t')\}$  qui va de  $z_i$  (au temps 0) à  $y_i$  (au temps  $T$ ) en passant par  $x_i$  au temps  $t$ . Les particules sont donc bien discernables car on peut leur attribuer un numéro ( $i$ ). Au contraire les bosons sont des particules indiscernables, ils ne peuvent pas être numérotés. Avec une interprétation bosonique,  $\mathcal{P}_t(x_1, \dots, x_N)$  décrirait alors la probabilité que les bosons partent des positions  $\{z_j\}$  et arrivent aux positions  $\{y_k\}$  en passant par les  $\{x_l\}$  globalement. Cette probabilité prendrait en compte toutes les permutations possibles entre les particules. Le propagateur  $\langle y_1, \dots, y_N | e^{-\hat{H}\tau} | x_1, \dots, x_N \rangle$  pour  $N$  bosons est en effet la somme sur toutes les permutations  $\sigma$  de  $\{1, \dots, N\}$  des trajectoires de particules discernables où la  $i^{\text{ème}}$  particule (pour  $1 \leq i \leq N$ ) va de  $x_i$  à  $y_{\sigma_i}$ .

Pour le cas des fermions (ii), le fait qu'ils soient indiscernables ne pose pas de problème car ce sont des fermions à  $1D$  (et sans spin) donc ils sont effectivement contraints de rester dans l'ordre initial  $x_1(t) < \dots < x_n(t)$  à tout instant (comme s'ils étaient discernables).

### 4.3.3 Distribution marginale loin des bords

On considère toujours  $N$  mouvements browniens avec potentiel  $V$  et avec conditions au bord fixées  $x_i(0) = z_i$  pour  $i \in \{1, \dots, N\}$  et  $x_i(T) = y_i$  pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

On suppose ici qu'on connaît les **états propres du Hamiltonien à  $N$  particules**  $\hat{H} = \sum_i \hat{H}_i$ . On notera  $\Psi_E(x) = \langle x | \Psi_E \rangle$  (où  $x = (x_1, \dots, x_N)$ ) les fonctions d'onde des états propres  $|\Psi_E\rangle$  d'énergie  $E$ , ce sont des états à  $N$  particules. On suppose de plus comme dans le cas  $N = 1$  que les énergies propres  $E$  sont discrètes et que les états propres  $|\Psi_E\rangle$  sont bien normalisables :  $\langle \Psi_E | \Psi_{E'} \rangle = \delta_{E, E'}$ . Ce sera le cas pour un potentiel  $V$  confinant (mais pas pour  $V = 0$  par exemple). On peut alors décomposer le propagateur (4.42) dans la base des  $|\Psi_E\rangle$ . Ainsi la distribution marginale des  $x_i$  au

temps  $t$  s'écrit (comme dans le cas  $N = 1$  (4.33)) :

$$\mathcal{P}_t(x_1, \dots, x_N) = \frac{\sum_{E, E'} e^{-E(T-t)} e^{-E't} \Psi_E(y)^* \Psi_E(x) \Psi_{E'}(x)^* \Psi_{E'}(z)}{\sum_E e^{-ET} \Psi_E(y)^* \Psi_E(z)} \quad (4.45)$$

où  $x = (x_1, \dots, x_N)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_N)$  et  $z = (z_1, \dots, z_N)$ .

On considère maintenant la **limite où le temps  $t$  intermédiaire est loin des bords** :  $t \gg 1$  et  $(T - t) \gg 1$ . Dans les sommes ci-dessus, seule l'énergie minimale  $E_0$ , c'est-à-dire l'énergie du *fondamental* à  $N$  particules contribue dans la limite  $t \gg 1$  et  $(T - t) \gg 1$ . On garde donc seulement le terme tel que  $E = E_0 = E'$ , on trouve :

$$\mathcal{P}_t(x_1, \dots, x_N) = |\Psi_{E_0}(x)|^2 \quad \text{quand } t \gg 1 \text{ et } (T - t) \gg 1 \quad (4.46)$$

$\mathcal{P}_t(x_1, \dots, x_N)$  est donc égale à la probabilité que pour  $1 \leq i \leq N$  la  $i^{\text{ème}}$  particule quantique se trouve à la position  $x_i$ , dans un **système quantique à température nulle**. En effet, à température nulle, les  $N$  **particules** sont dans l'état fondamental à  $N$  particules  $|\Psi_{E_0}\rangle$ .

On remarquera que si l'on se place suffisamment loin des bords, ie  $t \gg 1$  et  $(T - t) \gg 1$ , les conditions au bord n'interviennent plus,  $\mathcal{P}_t(x_1, \dots, x_N)$  (4.35) ne dépend ni du temps  $t$ , ni des conditions au bord  $x_i(0) = z_i$  et  $x_i(T) = y_i$ . On obtient également le même résultat avec des conditions au bord libres ou semi-libres.

Jusqu'ici on a pas fait d'hypothèse sur la statistique des particules (discernables ou non, bosoniques ou fermioniques).

- Dans le cas de **marcheurs inoffensifs**, c'est-à-dire complètement indépendants (i), on a vu que le problème quantique associé est celui de  $N$  **particules discernables indépendantes**. Dans ce cas, la fonction d'onde du fondamental à  $N$  particules est le produit des fonctions d'onde du fondamental à 1 particule :

$$\Psi_{E_0}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N \psi_{\epsilon_0}(x_i) \quad (4.47)$$

où  $E_0 = N\epsilon_0$ . Ainsi, comme on s'y attend pour des marches aléatoires complètement indépendantes, la distribution marginale des positions se factorise sous la forme :

$$\boxed{\mathcal{P}_t(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N \mathcal{P}_t(x_i)} \quad (4.48)$$

où  $\mathcal{P}_t(x)$  est la distribution marginale de la position  $x$  au temps  $t$  pour un marcheur isolé (cas  $N = 1$ ), cf (4.35).

- Dans le cas de **marcheurs vicieux** (ii), c'est-à-dire qui ne peuvent pas se croiser, on a vu que le problème quantique associé est celui de  $N$  **fermions sans interaction**. Dans ce cas, la fonction d'onde du fondamental à  $N$  fermions doit être antisymétrique, elle est donnée par le déterminant des  $N$  fonctions d'ondes d'énergies les plus basses, un

“*déterminant de Slater*” (les fermions ne peuvent pas être deux ou plus dans le même état) :

$$\Psi_{E_0}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det [\psi_{\epsilon_{i-1}}(x_j)]_{1 \leq i, j \leq N} \quad (4.49)$$

où les  $\epsilon_i$  sont les  $N$  énergies propres les plus basses associées au Hamiltonien à une particule. Ainsi on a :

$$\mathcal{P}_t(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N!} \left| \det [\psi_{\epsilon_{i-1}}(x_j)]_{1 \leq i, j \leq N} \right|^2 \quad (4.50)$$

Pour un bon choix du potentiel  $V(x)$ , les  $\psi_\epsilon$  peuvent être calculées explicitement. Par exemple pour un potentiel harmonique, les  $\psi_\epsilon \equiv \psi_n$  sont données par le produit d’une gaussienne par un polynôme de Hermite de degré  $n$ . Le déterminant de Slater des  $\psi_n$  fait alors apparaître un déterminant de Vandermonde, c’est ainsi que l’on retombe sur la distribution des valeurs propres d’une **matrice aléatoire**, comme on va voir dans le chapitre suivant.

On remarquera que de par son expression (4.50) comme un déterminant, il est clair que  $\mathcal{P}_t(x_1, \dots, x_N) = 0$  si  $x_i = x_j$  pour un  $i \neq j$ . Cette propriété est bien sûr impliquée par la contrainte de non-intersection des marcheurs vicieux.

# Modèle d'interfaces et matrices aléatoires

---

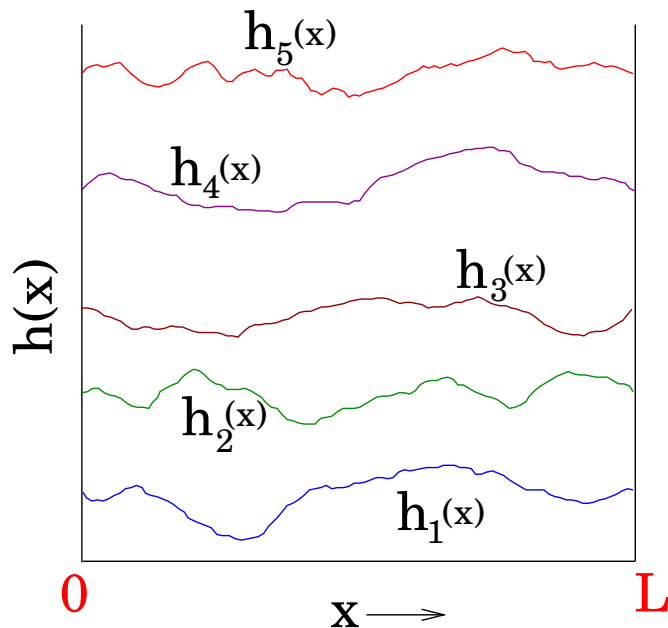
Dans ce chapitre, je présente le premier problème que j'ai étudié pendant ma thèse. C'est un **modèle d'interfaces fluctuantes** à  $(1 + 1)$  dimensions en présence d'un substrat qui induit un potentiel externe pour les interfaces [NM09], voir Fig. 5.1. Ces interfaces ne sont pas autorisées à se croiser, elles sont modélisées par des **mouvements browniens vicieux** ("marcheurs vicieux") **avec potentiel**, cf Eq. (4.39). Dans le modèle que j'ai étudié, on a pris un potentiel de la forme  $V(h) = \frac{b^2 h^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2h^2}$  où  $\alpha > 1$ ,  $b > 0$  et où  $h$  est la hauteur d'une interface,  $h > 0$  car le substrat joue le rôle d'un mur à hauteur 0. Ce potentiel comprend une partie harmonique confinante qui retient les interfaces près du substrat et une partie répulsive en  $1/h^2$  qui a une origine entropique liée à la présence du mur. J'ai montré grâce au formalisme de Feynman-Kac, cf chapitre 4, que la distribution transverse des hauteurs (ie la distribution des positions des marcheurs aléatoires en un temps donné) est exactement -après changement de variables  $bh_i^2 = \lambda_i$ - la distribution des **valeurs propres  $\lambda_i$  d'une matrice aléatoire de Wishart**.

En utilisant les résultats connus sur les matrices de Wishart, j'ai ainsi déduit un certain nombre de **propriétés statistiques des interfaces** (densité, hauteur maximale, hauteur minimale). J'ai aussi pu calculer la distribution complète du **centre de masse** des interfaces  $G_N = \frac{\sum_i h_i}{N} = \frac{\sum_i \sqrt{\lambda_i}}{N\sqrt{b}}$  grâce à une méthode de gaz de Coulomb. J'ai mis en évidence une transition de phase dans le gaz de Coulomb associé qui a pour conséquence une très faible non-analyticité de la distribution de  $G_N$ , en fait une singularité essentielle au point de transition.

## 5.1 MODÈLE D'INTERFACES

On considère  $N$  interfaces élastiques fluctuantes à  $(1+1)$ -dimensions à l'équilibre thermodynamique à température  $1/\beta$ , cf Fig. 5.1. Ces interfaces ne se croisent pas (marcheurs "vicieux") et sont soumises à un potentiel externe. La seule interaction entre les interfaces dans notre modèle est la contrainte de non-croisement.





**Figure 5.1** – Modèle d’interfaces fluctuantes évitantes (“marcheurs vicieux”) de hauteurs  $h_i(x)$  à la position  $x$  au-dessus d’un substrat de longueur  $L$  (à hauteur 0). Les conditions au bord sur cette figure sont celles de notre article [NM09], ce sont des conditions au bord périodiques, ie  $h_i(0) = h_i(L)$ .

### 5.1.1 Une interface

#### 5.1.1.1 Modèle

Considérons d’abord le cas de  $N = 1$  **interface**. L’interface est décrite par sa *hauteur*  $h(x)$  où  $x$  est la position longitudinale,  $0 < x < L$  pour un système de taille  $L$ . On considérera deux modèles, l’un avec un mur à hauteur 0 (ainsi  $h(x) > 0$  pour tout  $x$ ), l’autre sans mur ( $h(x) \in \mathbb{R}$ ).

L’**énergie** d’une configuration  $\{h(x)\}_{0 \leq x \leq L}$  de l’interface est donnée par :

$$E[\{h(x)\}] = E_{\text{elast}}[\{h(x)\}] + E_{\text{pot}}[\{h(x)\}] \quad (5.1)$$

où

$$E_{\text{elast}}[\{h(x)\}] = \frac{1}{2} \int_0^L dx \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \quad \text{et} \quad E_{\text{pot}}[\{h(x)\}] = \int_0^L dx V(h(x)) \quad (5.2)$$

$E_{\text{elast}}$  est l’énergie élastique de l’interface qui favorise une interface plate.  $V(h)$  est le potentiel externe auquel est soumise l’interface.

On considérera dans la suite les deux modèles suivants :

(1) Un **potentiel harmonique confinant** sans mur :

$$\boxed{V(h) = \frac{b^2 h^2}{2} \quad \text{pour } h \in \mathbb{R}} \quad (5.3)$$

avec  $b > 0$ . Le choix d'un potentiel confinant permet d'éviter l'invariance par translation qui crée un mode d'énergie nulle (dans le cas où les bords de l'interface ne sont pas fixés). Les interfaces restent proches de la hauteur 0.

(2) Un **potentiel confinant en présence d'un mur** à hauteur 0 :

$$V(h) = \frac{b^2 h^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2h^2} \quad \text{pour } h > 0 \quad (5.4)$$

avec  $b > 0$  et  $\alpha \geq 1$ . Ce potentiel comprend une partie harmonique confinante qui force les interfaces à rester près du mur ainsi qu'une partie répulsive en  $1/h^2$ . Ce terme en  $1/h^2$  a une origine physique, en effet Fisher [Fis84] a montré que l'énergie libre d'une interface près d'un mur se comporte en  $1/h^2$ . Dans ce cas, le mur peut représenter un substrat qui induit le potentiel externe  $V(h)$ . C'est le cas que nous avons considéré dans notre article [NM09].

A l'**équilibre thermodynamique** à température inverse  $\beta$  (ensemble canonique), le poids statistique d'une configuration  $\{h(x)\}_{0 \leq x \leq L}$  est donné par le **poids de Boltzmann** suivant :

$$\mathcal{P}[\{h(x)\}] = \frac{1}{Z} e^{-\beta E[\{h(x)\}]} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L dx \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 + \int_0^L dx V(h(x)) \right\}} \quad (5.5)$$

où  $E$  est l'énergie donnée dans (5.1) et  $Z$  la fonction de partition associée (pour normaliser la densité de probabilité  $\mathcal{P}$ ). Au facteur  $\beta$  près, c'est exactement la distribution d'une configuration  $\{h(x)\}_{0 \leq x \leq L}$  ( $h$  est la position,  $x$  le temps) d'un **mouvement brownien avec potentiel 1D** comme on l'a introduit au chapitre précédent Eq. (4.7). En l'absence de substrat et de potentiel externe  $V(h) \equiv 0$ , l'interface  $h(x)$  est un mouvement brownien standard à une dimension, où  $h$  est la position et  $x$  le temps.

Comme **conditions au bord**, on choisira de fixer les valeurs  $h(0) = h_0$  et  $h(L) = h_L$  ou bien on pourra aussi considérer des conditions au bord périodiques où on impose  $h(0) = h(L)$  (mais sans fixer cette valeur commune). Comme on a déjà vu dans le chapitre précédent 4, si on se place à une position  $x$  suffisamment loin des bords, les conditions au bord ne jouent aucun rôle.

### 5.1.1.2 Distribution marginale de la hauteur

Connaissant le poids statistique d'une configuration complète  $\{h(x)\}$  (5.5), on veut maintenant calculer la **distribution marginale** de la hauteur de l'interface en un point donné  $x$ , notée  $\mathcal{P}_x(h)$ .

On a vu au chapitre précédent que pour une mouvement brownien avec potentiel  $\{h(x)\}_{0 \leq x \leq L}$  d'extrémités fixées  $h(0) = h_0$ ,  $h(L) = h_L$ , la distribution marginale de la position  $h$  (ici la hauteur) à un temps donné  $x$  (ici en une abscisse donnée) s'écrit comme un produit d'intégrales de chemins, cf Eq. (4.16) (avec  $L = T$ ,  $x = t$ ,  $h_0 = x_0$ ,  $h_L = y_0$ ) :

$$\mathcal{P}_x(h) = \frac{(h_L|h)_{L-x} (h|h_0)_x}{(h_L|h_0)_L} \quad (5.6)$$

où  $(h'|h)_x$  est l'intégrale de chemin définie Eq. (4.12) (avec seulement un facteur  $\beta$  en plus ici) :

$$(h'|h)_x = \int_{h(0)=h}^{h(x)=h'} \mathcal{D}h(x') e^{-\beta \int_0^x dx' E\{h(x')\}} \quad (5.7)$$

où l'énergie  $E$  est donnée Eq. (5.1).

D'après ce qu'on a vu également au chapitre précédent section 4.2.3 (formalisme de Feynman-Kac), à notre problème classique d'interfaces est associé un problème de **particule quantique** à 1D dans un potentiel externe  $V$ . Par rapport au mouvement brownien avec potentiel du chapitre précédent, il faut seulement ajouter un facteur  $\beta$ . On peut montrer en reprenant les étapes de la preuve de (4.17) que l'intégrale de chemin de l'Eq. (5.7) s'écrit comme un propagateur quantique en temps imaginaire  $\tau = \beta x$  :

$$(h'|h)_x = \langle h' | e^{-\hat{H}\beta x} | h \rangle \quad (5.8)$$

avec  $\hat{H}$  le Hamiltonien d'une particule 1D de masse  $m = \beta^2$  et dans un potentiel externe  $V(h)$  :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\beta^2} + V(\hat{h}) = -\frac{1}{2\beta^2} \frac{d^2}{dh^2} + V(h) \quad (5.9)$$

$h(x)$  est la position de la particule quantique au temps imaginaire  $\tau = \beta x$ .

L'équation (5.6) se réécrit alors en termes de propagateurs quantiques :

$$\mathcal{P}_x(h) = \frac{\langle h_L | e^{-\hat{H}\beta(L-x)} | h \rangle \langle h | e^{-\hat{H}\beta x} | h_0 \rangle}{\langle h_L | e^{-\hat{H}\beta L} | h_0 \rangle} \quad (5.10)$$

Plaçons nous maintenant **loin des bords du substrat**, ie  $x \gg 1$  et  $(L-x) \gg 1$ . Dans ce cas, la contribution de l'état fondamental (d'énergie la plus basse) domine dans Eq. (5.10). Plus précisément, d'après Eq. (4.35) (avec seulement un facteur  $\beta$  en plus), la **distribution marginale de  $h$  à la position  $x$**  est indépendante de  $x$  et des conditions aux bords dans la limite où  $x \gg 1$  et  $(L-x) \gg 1$  et est donnée par :

$$\mathcal{P}_x(h) = |\psi_{e_0}(h)|^2 \quad \text{quand } x \gg 1 \text{ et } (L-x) \gg 1 \quad (5.11)$$

où  $\psi_{e_0}(h)$  est la fonction d'onde de l'état fondamental du Hamiltonien  $\hat{H}$  à une particule donné Eq. (5.9). On est ramené au problème d'une **particule quantique** à 1D dans un potentiel externe  $V(h)$  et **à température nulle**.

On notera que, dans le cas de conditions au bord périodiques (qui est la situation choisie dans l'article [NM09]), l'équation (5.11) reste valable même si  $x$  n'est pas loin des bords, à condition que  $L \gg 1$  (gros système).

On notera que la *limite de température nulle dans le problème quantique* effectif associé ( $\tau \rightarrow \infty$ ) correspond à la limite où on se place loin des bords du substrat dans le cas d'un **grand système**  $L \rightarrow \infty$  dans le problème classique initial d'interface. Cette limite est très différente de la limite de température nulle dans le modèle classique  $\beta \rightarrow \infty$  car  $\beta$  n'apparaît pas seulement dans  $\tau = \beta L$  mais aussi dans la masse effective de la particule quantique  $m = \beta^2$ . En fait, la limite de température nulle dans le *modèle classique*  $\beta \rightarrow \infty$  n'est pas très intéressante : dans ce cas l'interface n'est plus fluctuante, elle est plate et se fixe au minimum  $h_{\min}$  du potentiel  $V(h)$ . Ainsi dans toute la suite

on supposera  $\beta = 1$  pour simplifier, ce qui correspond à fixer une température non nulle pour l'interface classique.

Si on choisit bien le potentiel, on peut se ramener à un problème quantique soluble, c'est à dire un Hamiltonien dont on peut déterminer les vecteurs et valeurs propres. C'est le cas pour les deux potentiels introduits plus haut Eq. (5.3) et (5.4).

### 5.1.1.3 Potentiel harmonique en absence de mur

Commençons par le cas simple (1) du **potentiel harmonique** en absence de mur, cf Eq. (5.3) :

$$V(h) = \frac{b^2 h^2}{2} \quad \text{pour } h \in \mathbb{R} \quad (5.12)$$

Dans ce cas, la **distribution marginale de la hauteur** de l'interface  $h$  loin des bords (en  $x$  où  $x \gg 1$  et  $(L - x) \gg 1$ ) et à température finie  $\beta = 1$  s'écrit d'après Eq. (5.11) :

$$\mathcal{P}_x(h) = \mathcal{P}(h) = |\psi_0(h)|^2 \quad (5.13)$$

où  $\psi_0$  est la fonction d'onde de l'état fondamental du Hamiltonien :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + V(\hat{h}) = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dh^2} + \frac{b^2 h^2}{2} \quad \text{pour } h \in \mathbb{R} \quad (5.14)$$

Les fonctions d'onde  $\psi_n(h) = \langle h | \psi_n \rangle$  et énergies propres  $\epsilon_n$  qui constituent les états propres de ce Hamiltonien sont connues, ce sont celles de l'**oscillateur harmonique quantique**, elles sont données par :

$$\boxed{\psi_n(h) = b^{\frac{1}{4}} (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(h\sqrt{b}) e^{-\frac{bh^2}{2}}, \quad \epsilon_n = b \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{où } n \in \mathbb{N}} \quad (5.15)$$

où  $H_n$  est le polynôme de Hermite de degré  $n$ , cf (2.59). Les fonctions d'onde sont ainsi bien normalisées :  $\int_{-\infty}^{+\infty} dh |\psi_n(h)|^2 = 1$ .

Les fonctions d'onde  $|\psi_n\rangle$  (5.15) sont bien solutions de l'équation aux valeurs propres  $\hat{H}|\psi_n\rangle = \epsilon_n|\psi_n\rangle$  avec  $\epsilon_n$  donnés ci-dessus car les polynômes de Hermite vérifient l'équation différentielle :

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \quad (5.16)$$

Le *fondamental* de  $\hat{H}$  est donné par  $\psi_0(h) = \left(\frac{b}{\pi}\right)^{1/4} e^{-bh^2/2}$  (car  $H_0 = 1$ ) d'énergie  $E_0 = b/2$  (pour  $n = 0$ ). Ainsi la **distribution marginale** de la hauteur d'une interface est :

$$\boxed{\mathcal{P}(h) = |\psi_0(h)|^2 = \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^{-bh^2}} \quad (5.17)$$

qui est bien normalisée :  $\int_{-\infty}^{+\infty} dh \mathcal{P}(h) = 1$ . La hauteur de l'interface suit donc une *loi gaussienne* centrée (par symétrie  $h \rightarrow -h$ ) et de variance  $\sigma^2 = 1/(2b)$  :

$$\langle h \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \text{Var } h = \langle h^2 \rangle - \langle h \rangle^2 = \frac{1}{2b} \quad (5.18)$$

Plus le potentiel harmonique est confinant, c'est-à-dire plus  $b$  augmente et plus l'interface est contrainte de rester très près de la hauteur nulle.

### 5.1.1.4 Confinement, répulsion et présence du mur

On considère maintenant le cas (2) de l'interface en présence d'un *mur* (substrat) à hauteur  $h = 0$  avec un potentiel de la forme, cf Eq. (5.4) :

$$V(h) = \frac{b^2 h^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2h^2} \quad \text{pour } h > 0 \text{ et avec } \alpha \geq 1 \quad (5.19)$$

Ce potentiel comprend une **partie harmonique confinante** comme dans le cas (1) ainsi qu'un **terme répulsif** en  $1/h^2$  qui repousse l'interface du mur. Ce terme en compétition avec la partie confinante du potentiel a l'avantage de ne pas modifier le caractère *intégrable* du modèle. Ce choix est aussi intéressant car il conduit aux *matrices de Wishart* dans le cas de  $N$  interfaces évitantes, comme on le verra plus loin.

Dans ce cas, on peut déterminer encore les états propres du Hamiltonien  $\hat{H}$  qui est donné par :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + V(\hat{h}) = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dh^2} + \frac{b^2 h^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2h^2} \quad \text{pour } h > 0 \quad (5.20)$$

Les fonctions propres  $|\psi_n\rangle$  et énergie propres  $\epsilon_n$ , ie qui vérifient  $\hat{H}|\psi_n\rangle = \epsilon_n|\psi_n\rangle$ , ie  $-\frac{1}{2} \frac{d^2 \psi_n(h)}{dh^2} + V(h)\psi_n(h) = \epsilon_n \psi_n(h)$  avec conditions au bord  $\psi_n(h = 0) = 0$  (à cause du mur en  $h = 0$ ) et  $\psi_n(h \rightarrow \infty) = 0$  sont de la forme :

$$\boxed{\psi_n(h) = c_n e^{-\frac{b}{2}h^2} h^\alpha \mathcal{L}_n^{(\alpha-\frac{1}{2})}(bh^2) \quad \text{avec } \epsilon_n = b(2n + \alpha + \frac{1}{2}) \text{ et } n \in \mathbb{N}} \quad (5.21)$$

où  $c_n$  est une constante de normalisation et  $\mathcal{L}_n^{(\alpha-\frac{1}{2})}$  le polynôme de Laguerre généralisé de degré  $n$  :

$$\mathcal{L}_n^\gamma(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n+\gamma}{n-i} \frac{(-x)^i}{i!} \quad (5.22)$$

On notera que pour  $\gamma = 0$ ,  $\mathcal{L}_n^0(x) = \mathcal{L}_n(x)$  est le polynôme de Laguerre usuel de degré  $n$  :

$$\mathcal{L}_n(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{(-x)^i}{i!}. \quad (5.23)$$

Dans le cas  $\alpha = 1$ , c'est à dire quand le potentiel se réduit au potentiel harmonique, on retrouve les fonctions d'onde du cas *harmonique* (1), cf Eq. (5.15), mais seulement celles d'indice impair du fait de la contrainte  $\psi_n(0) = 0$  en présence du *mur* :

$$\psi_n(h) = c_n e^{-\frac{b}{2}h^2} h \mathcal{L}_n^{(\frac{1}{2})}(bh^2) \propto e^{-\frac{b}{2}h^2} H_{2n+1}(h\sqrt{b}) \quad (5.24)$$

avec  $\epsilon_n = b(2n + 1 + \frac{1}{2})$  quand  $\alpha = 1$ .

Enfin, comme  $\mathcal{L}_0^\gamma(x) = 1$ , la **distribution marginale de la hauteur** d'une interface loin des bords du substrat est donnée par :

$$\boxed{\mathcal{P}(h) = |\psi_0(h)|^2 = |c_0|^2 e^{-bh^2} h^{2\alpha} \quad \text{avec } |c_0|^2 = \frac{2b^{\alpha+1/2}}{\Gamma(\alpha + 1/2)}} \quad (5.25)$$

La moyenne et la variance de la hauteur d'une interface peuvent à nouveau être calculées :

$$m \equiv \langle h \rangle = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{b} \Gamma(\alpha + 1/2)} \quad \text{et} \quad \sigma_1^2 \equiv \text{Var}(h) = \frac{1 + 2\alpha}{2b} - \frac{1}{b} \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1/2)} \right)^2 \quad (5.26)$$

Quand  $\alpha = 1$ , c'est-à-dire dans le cas d'un potentiel harmonique en présence de mur, on obtient :

$$m \equiv \langle h \rangle = \frac{2}{\sqrt{b} \pi} \quad \text{et} \quad \sigma_1^2 \equiv \text{Var}(h) = \frac{1}{b} \left( \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \quad \text{pour } \alpha = 1 \quad (5.27)$$

A nouveau l'interface est plus confinée quand  $b$  est plus grand. Par comparaison de l'Eq. (5.27) avec le cas sans mur Eq. (5.18), on notera que le *mur* a un effet important sur l'interface. Il brise la symétrie  $h \rightarrow -h$ , ainsi  $\langle h \rangle > 0$ . Les fluctuations sont également modifiées : elles sont un peu plus faibles en présence du mur (mais du même ordre en  $b$ , en  $1/b$ ) :  $(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}) < \frac{1}{2}$ .

### 5.1.2 $N$ interfaces

Considérons maintenant le cas de  $N$  interfaces décrites par leur hauteur  $h_i(x)$  à la position  $x$ , cf Fig. 5.1. L'énergie d'une configuration  $[\{h_i(x)\}_{0 \leq x \leq L}, i \in \{1, \dots, N\}]$  des  $N$  interfaces est donnée par :

$$E_N [\{h_i(x)\}_{i,x}] = \sum_{i=1}^N E [\{h_i(x)\}] \quad (5.28)$$

où l'énergie d'une interface est, d'après Eq. (5.1) :

$$E [\{h(x)\}] = E_{\text{elast}} [\{h(x)\}] + E_{\text{pot}} [\{h(x)\}] \quad (5.29)$$

avec  $E_{\text{elast}}$  l'énergie élastique et  $E_{\text{pot}}$  l'énergie potentielle :

$$E_{\text{elast}} [\{h(x)\}] = \frac{1}{2} \int_0^L dx \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \quad \text{et} \quad E_{\text{pot}} [\{h(x)\}] = \int_0^L dx V(h(x)) \quad (5.30)$$

A ce stade les interfaces sont indépendantes et l'énergie totale est la somme des énergies de chaque interface. Si on ajoute la contrainte de non-croisement de ces interfaces ("vicious walkers"), ie  $h_1(x) < \dots < h_N(x)$  à tout  $x$ , on obtient des interfaces corrélées du fait de cette contrainte (uniquement).

A l'**équilibre thermodynamique** à température inverse  $\beta = 1$  (ensemble canonique), le poids statistique d'une configuration des hauteurs  $[\{h_i(x)\}_{0 \leq x \leq L}, 1 \leq i \leq N]$  est donné par le **poids de Boltzmann** suivant :

$$\boxed{\mathcal{P} [\{h_i(x)\}_{i,x}] = \frac{1}{Z_N} e^{-\sum_{i=1}^N E[\{h_i(x)\}]} \quad (5.31)}$$

où  $E$  est l'énergie donnée Eq. (5.29) et  $Z_N$  la fonction de partition associée (pour normaliser la densité de probabilité  $\mathcal{P}$ ). C'est exactement le poids statistique de  $N$  **mouvements browniens avec potentiel**  $\{h_i(x)\}_{0 \leq x \leq L}$  pour  $i \in \{1, \dots, N\}$  ( $h_i(x)$  est la

position du  $i^{\text{ème}}$  marcheur au temps  $x$ ) comme décrits dans le chapitre précédent, cf Eq. (4.39).

A nouveau, les interfaces à ce stade sont indépendantes, Eq. (5.31) est le produit des poids statistiques de chaque interface  $i$ . Si on veut ajouter l'hypothèse de non-croisement (ie marcheurs vicieux), il faut ajouter à l'Eq. (5.31) une fonction indicatrice pour imposer  $h_1(x) < \dots < h_n(x)$  à tout  $x$ .

On veut calculer la **distribution transverse des hauteurs** des interfaces notée  $\mathcal{P}_x(h_1, \dots, h_N)$ , c'est-à-dire la distribution marginale des hauteurs  $h_1, \dots, h_N$  des  $N$  interfaces à une position  $x$  donnée. On se place **loin des bords** du substrat, ie  $x \gg 1$  et  $(L - x) \gg 1$ . Dans ce cas, on a vu au chapitre précédent, cf Eq. (4.46), que, comme dans le cas d'une interface, la distribution transverse des hauteurs est indépendante de la position  $x$  et est donnée par :

$$\boxed{\mathcal{P}_x(h_1, \dots, h_N) = \mathcal{P}(h_1, \dots, h_N) = |\Psi_{E_0}(h_1, \dots, h_N)|^2} \quad (5.32)$$

où  $|\Psi_{E_0}\rangle$  est la fonction d'onde à  $N$  particules de l'état fondamental du Hamiltonien  $\hat{H}$  ci-dessous :

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \hat{H}_i \quad \text{et} \quad \hat{H}_i = \frac{\hat{p}_i^2}{2} + V(\hat{h}_i) = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dh_i^2} + V(h_i) \quad (5.33)$$

Le problème quantique associé au modèle classique d'interfaces est un problème  $1D$  de  $N$  **particules quantiques sans interaction** dans un potentiel externe  $V$  et à **température nulle**.

On notera que dans le cas de conditions au bord périodiques, l'Eq. (5.32) reste valable pour n'importe quel  $x$ , pas nécessairement loin des bords, à condition que  $L \gg 1$ .

Il faut maintenant préciser la **statistique des  $N$  particules quantiques**, qui dépend du choix des contraintes imposées sur ces  $N$  interfaces, comme on a vu au chapitre précédent :

(i) Pour  $N$  interfaces indépendantes (**marcheurs inoffensifs**), les particules du problème quantique associé sont identiques mais **discernables** (et sans interaction).

(ii) Pour  $N$  interfaces contraintes à ne pas se croiser (**marcheurs vicieux**), les particules quantiques sont des **fermions** (sans interaction).

D'après ce qu'on a vu section 4.3.3, la distribution marginale  $\mathcal{P}(h_1, \dots, h_N)$  s'exprime dans les deux cas en fonction des états propres à une particule  $|\psi_\epsilon\rangle$  de  $\hat{H}_1$  :

(i) Pour des **interfaces indépendantes** (particules discernables) on aura, cf Eq. (4.48) :

$$\boxed{\mathcal{P}(h_1, \dots, h_N) = \prod_{i=1}^N |\psi_{\epsilon_0}(h_i)|^2 = \prod_{i=1}^N \mathcal{P}(h_i)} \quad (5.34)$$

où  $\mathcal{P}(h)$  est la distribution marginale de la hauteur d'une interface seule, donnée Eq. (5.17) pour le cas (1) où  $V(h)$  est harmonique et en l'absence de mur et Eq. (5.25) pour le cas (2) où  $V(h) = \frac{b^2 h^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2h^2}$  et avec un mur en  $h = 0$ .

(ii) Pour des **interfaces évitantes** (fermions),  $\mathcal{P}$  s'écrit comme un déterminant de Slater des  $N$  fonctions d'onde à une particule de plus basse énergie, cf (4.50) :

$$\mathcal{P}(h_1, \dots, h_N) = |\Psi_{E_0}(h_1, \dots, h_N)|^2 = \frac{1}{N!} \left| \det [\psi_{\epsilon_{i-1}}(x_j)]_{1 \leq i, j \leq N} \right|^2 \quad (5.35)$$

où les  $\psi_\epsilon$  sont données Eq. (5.15) dans le cas (1) d'un potentiel harmonique en l'absence de mur et Eq. (5.21) pour le cas (2)  $V(h) = \frac{b^2 h^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2h^2}$  avec un mur en  $h = 0$ .

### 5.1.2.1 Potentiel harmonique et absence de mur

Dans le cas (1) d'un **potentiel quadratique**  $V(h) = \frac{b^2 h^2}{2}$  et en l'absence de mur, d'après Eq. (5.17), la distribution marginale des hauteurs de  $N$  **interfaces indépendantes** (i) est donnée par :

$$\mathcal{P}(h_1, \dots, h_N) = \prod_i \mathcal{P}(h_i) = \left( \frac{b}{\pi} \right)^{\frac{N}{2}} e^{-b \sum_i h_i^2} \quad (5.36)$$

De plus, on a vu que les fonctions d'onde à une particule sont données par (5.15)  $\psi_n(h) = b^{\frac{1}{4}} (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(h\sqrt{b}) e^{-\frac{bh^2}{2}} = b^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{bh^2}{2}} p_n(h\sqrt{b})$  où les  $p_n$  sont les polynômes orthogonaux par rapport au poids gaussien  $e^{-x^2}$ , comme définis Eq. (2.59). Ainsi, pour  $N$  **interfaces évitantes** (ii) ("vicious walkers") on a d'après Eq. (5.35) :

$$\mathcal{P}(h_1, \dots, h_N) = \frac{1}{N!} \left| \det [\psi_{i-1}(h_j)]_{1 \leq i, j \leq N} \right|^2 \quad (5.37)$$

avec

$$\begin{aligned} \det [\psi_{i-1}(h_j)]_{i,j} &= b^{N/4} \det \left[ e^{-\frac{bh_j^2}{2}} p_{i-1}(h_j\sqrt{b}) \right]_{i,j} = b^{N/4} e^{-\frac{b \sum_j h_j^2}{2}} \det [p_{i-1}(h_j\sqrt{b})]_{i,j} \\ \text{donc } \det [\psi_{i-1}(h_j)]_{i,j} &\propto e^{-\frac{b \sum_j h_j^2}{2}} \prod_{i < j} (h_j - h_i) \end{aligned} \quad (5.38)$$

En effet,  $p_n$  est un polynôme de degré  $n$ , le déterminant des  $p_i(x) = a_i x^i + \dots$  pour  $0 \leq i \leq N-1$  est donc proportionnel à un déterminant de Vandermonde  $\Delta(x_i) = \det(x_j^{i-1})_{i,j} = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$  (par combinaison de lignes et colonnes) :

$$\det [p_{i-1}(x_j)]_{i,j} = (a_0 \dots a_{N-1}) \det(x_j^{i-1})_{i,j} \quad \text{où } \det(x_j^{i-1})_{i,j} = \Delta(x_i) \prod_{i < j} (x_j - x_i) \quad (5.39)$$

Finalement on obtient donc la **distribution marginale des hauteurs** à position donnée pour  $N$  **interfaces ne se croisant pas** (ii) :

$$\mathcal{P}(h_1, \dots, h_N) = B_N e^{-b \sum_j h_j^2} \prod_{i < j} |h_j - h_i|^2 \quad (5.40)$$

Cette distribution, après dilatation des  $h_i$  ( $\lambda_i = \sqrt{b} h_i$ ) est exactement la **distribution des valeurs propres d'une matrice aléatoire gaussienne de l'ensemble GUE**, cf Eq. (1.27) avec  $\beta = 2$ .



Du fait de la contrainte de *non-croisement* des interfaces, les hauteurs sont **fortement corrélées**, elles se repoussent comme en atteste le déterminant de Vandermonde dans (5.40). Ce déterminant contient toutes les corrélations des interfaces, c'est la seule différence avec le cas d'interfaces indépendantes Eq. (5.36).

En se ramenant au cas gaussien par le changement de variables  $\lambda_i = \sqrt{b}h_i$ , on voit que la constante de normalisation  $B_N$  est égale à  $B_N = b^{N^2/2} B_N(2)$  où  $B_N(\beta)$  est donnée Eq. (1.28).

### 5.1.2.2 Confinement, répulsion et présence du mur

Dans le cas (2) d'un **potentiel**  $V(h) = \frac{b^2 h^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2h^2}$  **et en présence d'un mur** (substrat) à hauteur 0, d'après Eq. (5.25), la distribution marginale des hauteurs de  $N$  **interfaces indépendantes** (i) est donnée par :

$$\mathcal{P}(h_1, \dots, h_N) = \prod_i \mathcal{P}(h_i) = |c_0|^{2N} e^{-b \sum_i h_i^2} \prod_i h_i^{2\alpha} \quad (5.41)$$

De plus, on a vu que les fonctions d'onde à une particule sont données par (5.21)  $\psi_n(h) = c_n e^{-\frac{b}{2}h^2} h^\alpha \mathcal{L}_n^{(\alpha-\frac{1}{2})}(bh^2)$  pour  $h > 0$  et avec  $\mathcal{L}_n^{(\gamma)}$  un polynôme de Laguerre généralisé de degré  $n$ . Ainsi, pour  $N$  **interfaces évitantes** (ii) (“vicious walkers”) on a :

$$\mathcal{P}(h_1, \dots, h_N) = \frac{1}{N!} \left| \det [\psi_{i-1}(h_j)]_{1 \leq i, j \leq N} \right|^2 \quad (5.42)$$

avec

$$\det [\psi_{i-1}(h_j)] = \left( \prod_{n=0}^{N-1} c_n \right) e^{-\frac{b}{2} \sum_i h_i^2} \left( \prod_i h_i^\alpha \right) \det \left[ \mathcal{L}_{i-1}^{(\alpha-\frac{1}{2})}(bh_j^2) \right]_{i,j} \quad (5.43)$$

Comme dans le cas sans mur, le déterminant des polynômes de Laguerre est proportionnel à un déterminant de Vandermonde :

$$\det \left[ \mathcal{L}_{i-1}^{(\alpha-\frac{1}{2})}(bh_j^2) \right]_{i,j} \propto \Delta(bh_j^2) \propto \prod_{i < j} (h_j^2 - h_i^2) \quad (5.44)$$

car  $\mathcal{L}_n^{(\gamma)}$  est de degré  $n$ . D'où pour  $N$  interfaces évitantes :

$$\mathcal{P}(h_1, \dots, h_N) = K_N e^{-b \sum_i h_i^2} \prod_i h_i^{2\alpha} \prod_{i < j} (h_j^2 - h_i^2)^2 \quad (5.45)$$

A nouveau, du fait de la contrainte de *non-croisement* des interfaces, les hauteurs sont **fortement corrélées**, elles se repoussent (cf le déterminant de Vandermonde dans Eq. (5.45)).

Si on fait le changement de variables  $bh_i^2 = \lambda_i$ , on obtient la distribution des valeurs propres d'une **matrice aléatoire de Wishart**, cf Eq. (1.64) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(h_1, \dots, h_N) dh_1 \dots dh_N &= \mathcal{P}_W(\lambda_1, \dots, \lambda_N) d\lambda_1 \dots d\lambda_N \quad \text{où } bh_i^2 = \lambda_i \\ \text{avec } \mathcal{P}_W(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= K_{M,N} e^{-\sum_i \lambda_i} \prod_i \lambda_i^{\alpha-\frac{1}{2}} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^2 \end{aligned} \quad (5.46)$$

On rappelle que le paramètre  $\alpha$  du potentiel  $V(h) = \frac{b^2 h^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2h^2}$  est en général  $\alpha$  réel et plus grand que 1. Lorsque  $(\alpha - \frac{1}{2})$  est un entier, la distribution  $\mathcal{P}_W$  est la densité de probabilité jointe des valeurs propres d'une matrice de Wishart  $W = X^\dagger X$  de taille  $N \times N$ , où  $X$  est une matrice aléatoire gaussienne complexe de taille  $M \times N$  où  $M = N + \alpha - \frac{1}{2}$  (voir (2.31) avec  $\beta = 2$  pour le cas complexe). En général pour  $\alpha > 1$ ,  $(\alpha - \frac{1}{2})$  est un réel quelconque, la distribution  $\mathcal{P}_W$  ne correspond plus exactement à un ensemble de matrices mais elle reste bien définie et a un sens physique dans notre modèle.

On notera qu'on peut en fait aussi générer la distribution des valeurs propres d'une matrice de Wishart avec un  $\beta > 0$  quelconque en introduisant un potentiel d'interaction répulsif entre les interfaces de la forme :

$$- \sum_{1 \leq j < k \leq N} \int_0^L dx \frac{\beta}{2} \left( \frac{\beta}{2} - 1 \right) \left[ \frac{1}{(h_j - h_k)^2} + \frac{1}{(h_j + h_k)^2} \right] \quad (5.47)$$

Dans ce cas, le formalisme d'intégrale de chemin permet de se ramener à un système quantique qui se trouve être un modèle connu et intégrable, celui de Calogero-Moser [Mos75]. En particulier on peut alors calculer la distribution jointe des hauteurs des interfaces (qui est donnée par le module au carré de la fonction d'onde du fondamental à  $N$  particules), on trouve alors après le changement de variables  $bh_i^2 = \lambda_i$  la distribution des valeurs propres de Wishart avec  $\beta > 0$  quelconque et  $M - N = \frac{2\alpha+1-\beta}{\beta}$ . Cependant le potentiel de paires pour les interfaces (5.47) n'est pas vraiment physique. Le terme  $\frac{1}{(h_j - h_k)^2}$  peut être vu comme une interaction dipolaire entre interfaces, mais le terme miroir  $\frac{1}{(h_j + h_k)^2}$  n'est pas physique. Dans la suite on se contentera donc du cas physique  $\beta = 2$ .

## 5.2 PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DES INTERFACES

On connaît maintenant la **distribution transverse des hauteurs des interfaces** en un point donné, dans le cas d'interfaces indépendantes ((i) "harmless walkers") ou contraintes de ne pas se croiser ((ii) "vicious walkers"), sans mur (1) ou avec mur (2). A partir de cette distribution, on peut en principe calculer des **propriétés statistiques** de notre modèle d'interfaces, comme la moyenne des hauteurs, la variance, la distribution de l'interface la plus haute ou de celle la plus près du mur... En particulier on cherche à analyser **l'effet des corrélations dues à la contrainte de non-croisement**.

Dans le cas d'interfaces indépendantes, la statistique des  $N$  interfaces ne contient rien de plus que celle d'une interface isolée, les calculs ne sont donc pas difficiles. Dans le cas d'interfaces qui ne se croisent pas, les hauteurs sont fortement corrélées. Pourtant dans ce cas après changement de variable on se ramène à la théorie des matrices aléatoires, voir Eq. (5.40) et Eq. (5.46). On peut alors utiliser des méthodes de type gaz de Coulomb comme expliqué dans la première partie pour déterminer des propriétés statistiques des interfaces dans la limite d'un grand nombre d'interfaces  $N \rightarrow \infty$ .

Je présente d'abord les résultats que j'ai obtenu pour la densité moyenne ainsi que la distribution de la hauteur maximale dans la limite  $N$  grand. Ce sont des conséquences directes des résultats connus en théorie des **matrices aléatoires** (GUE ou Wishart) à

laquelle on se ramène par changement variables. Ensuite j'explique comment, à partir d'une méthode proposée par Edelman dans le cas des matrices de Wishart avec  $\beta = 1$ , j'ai pu calculer exactement (pour tout  $N$ ) la distribution de la hauteur minimale dans le cas (2) avec mur, c'est-à-dire de la hauteur de l'interface la plus près du mur. Enfin je présente le calcul de la distribution du **centre de masse**  $G_N = \frac{h_1 + \dots + h_N}{N}$  des hauteurs dans la limite  $N$  grand par la méthode du **gaz de Coulomb** (dans le cas (2) avec mur). Cette partie constitue ma contribution principale à notre article [NM09], elle est intéressante en particulier car la distribution de  $G_N$  présente une **transition de phase** avec une singularité essentielle.

### 5.2.1 Densité moyenne

La **densité moyenne des hauteurs**  $\rho_N(h) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \delta(h - h_i) \rangle$ , qu'on a déjà introduite dans le contexte de la théorie des matrices aléatoires au chapitre 2, est la **distribution marginale** de la hauteur d'une interface du modèle (un modèle à  $N$  interfaces). Ainsi la quantité  $N\rho_N(h)dh$  représente le nombre d'interfaces dont la hauteur se situe entre  $h$  et  $h+dh$ ; autrement dit  $\rho_N(h)dh$  est la probabilité de trouver une interface de hauteur entre  $h$  et  $h+dh$ .

Dans le cas d'interfaces indépendantes,  $\rho_N$  est simplement la distribution de la hauteur d'une interface isolée :  $\rho_N(h) = \mathcal{P}(h)$ . Avec la contrainte de **non-croisement**, les hauteurs sont corrélées et  $\rho_N$  s'obtient par la théorie des *matrices aléatoires*.

#### 5.2.1.1 Potentiel harmonique et absence de mur

Commençons par le cas (1) du potentiel harmonique  $V(h) = b^2 h^2 / 2$  sans mur.

Pour  $N$  **interfaces indépendantes** (i), la densité  $\rho_N(h)$  est indépendante de  $N$ , elle est donnée par  $\rho_N(h) = \mathcal{P}(h)$  Eq. (5.17). Dans ce cas, la moyenne et la variance d'une des interfaces ne dépend pas de  $N$ , tout se passe comme si l'interface était isolée, elle ne "voit" pas les autres, cf Eq. (5.18) :

$$\langle h \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \text{Var}h = \langle h^2 \rangle - \langle h \rangle^2 = \frac{1}{2b} \quad (5.48)$$

Pour  $N$  **interfaces évitantes** (ii), le changement de variable  $\sqrt{b}h_i = \lambda_i$  permet de se ramener facilement au cas gaussien GUE étudié dans la première partie, cf section 5.1.2.1. Finalement on obtient quand  $N \gg 1$  le demi-cercle de Wigner comme pour le **GUE**, cf Eq. (2.26) :

$$\rho_N(h) \sim \sqrt{\frac{b}{N}} \rho^* \left( h \sqrt{\frac{b}{N}} \right) \quad \text{où} \quad \rho^*(x) = \frac{\sqrt{2-x^2}}{\pi} \quad (5.49)$$

Une première conséquence importante est l'ordre de grandeur d'une hauteur typique à  $N$  grand (le même que  $\lambda_{\text{typ}}$  pour GUE, cf Eq. (2.15)) :

$$|h_{\text{typ}}| \asymp \sqrt{N} \quad \text{pour } N \text{ grand} \quad (5.50)$$

On voit l'effet important de la contrainte de non-intersection. Dans le cas (i) d'interfaces indépendantes la hauteur typique, moyenne, ne dépend pas de  $N$ . Avec la **contrainte de non-intersection** les interfaces se repoussent et s'étalent sur un intervalle

de largeur d'ordre  $\sim \sqrt{N}$  pour  $N$  grand. Par symétrie  $h \rightarrow -h$ , on a  $\langle h \rangle = 0$ . La variance croît linéairement avec  $N$  :

$$\langle h \rangle = 0 \text{ et } \text{Var } h \sim \frac{N}{2b} \quad (5.51)$$

On notera que, contrairement à ce que l'on pourrait penser intuitivement, la densité moyenne  $\rho_N(h)$  est à **support fini** dans le cas de  $N$  interfaces **évitantes** (ii) avec  $N \gg 1$ , cf (5.49) (demi-cercle), tandis qu'elle s'étend sur tout  $\mathbb{R}$  pour des interfaces complètement indépendantes (i), cf (5.17) (loi gaussienne). Toutefois la largeur typique sur laquelle  $\rho_N$  est significative est d'ordre  $\asymp 1$  dans le cas (i) d'interfaces indépendantes mais augmente comme  $\asymp \sqrt{N}$  dans le cas (ii) d'interfaces évitantes.

### 5.2.1.2 Présence d'un substrat

Considérons maintenant le cas (2) d'un potentiel  $V(h) = b^2 h^2/2 + \alpha(\alpha - 1)/(2h^2)$  en présence d'un substrat (mur) à hauteur nulle.

Pour  $N$  **interfaces indépendantes**, la densité  $\rho_N(h)$  est indépendante de  $N$ , elle est donnée par  $\rho_N(h) = \mathcal{P}(h)$  Eq. (5.25). La moyenne et variance d'une des interfaces ne dépendent pas de  $N$ , cf Eq.(5.26) :

$$m \equiv \langle h \rangle = \frac{2}{\sqrt{b\pi}} \text{ et } \sigma_1^2 \equiv \text{Var}(h) = \frac{1}{b} \left( \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \text{ pour } \alpha = 1 \quad (5.52)$$

Pour  $N$  **interfaces évitantes**, le changement de variables  $bh_i^2 = \lambda_i$ , cf section 5.1.2.2, permet de se ramener facilement au cas des matrices de **Wishart** étudié dans la première partie (loi de Marčenko-Pastur Eq. (2.42)). On supposera dans toute la suite que  $\alpha$  est fixé, il ne croît pas avec  $N$ , ce qui correspond à  $c = 1$  où  $c = N/M$  quand  $N$  grand. Finalement on obtient quand  $N \gg 1$  une densité à support fini pour les interfaces évitantes :

$$\rho_N(h) \sim \sqrt{\frac{b}{N}} \rho \left( h \sqrt{\frac{b}{N}} \right) \text{ où } \rho(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{4 - x^2} \text{ pour } x > 0 \quad (5.53)$$

L'ordre de grandeur d'une hauteur typique à  $N$  grand est  $\sqrt{N}$  comme dans le cas sans mur :

$$h_{\text{typ}} \asymp \sqrt{N} \text{ pour } N \text{ grand} \quad (5.54)$$

A nouveau, avec la **contrainte de non-croisement** les interfaces se repoussent et s'étalent sur un intervalle de largeur d'ordre  $\asymp \sqrt{N}$  pour  $N$  grand. De l'expression de la densité on déduit la moyenne :

$$\langle h \rangle \sim \frac{8}{3\pi} \sqrt{\frac{N}{b}} \text{ pour } N \text{ grand} \quad (5.55)$$

## 5.2.2 Hauteur maximale

On s'intéresse ici à la **hauteur de l'interface la plus haute**, c'est à dire  $h_{\max} = \max_i h_i$ , dans le cas d'**interfaces évitantes** (ii). Comme on a vu dans le contexte de la

théorie des matrices aléatoires, la moyenne de  $h_{\max}$  est donnée par la borne supérieure du support de la densité moyenne pour  $N$  grand. On obtient respectivement dans la situation (1) où  $V(h) = \frac{b^2 h^2}{2}$  en l'absence de mur et (2) où  $V(h) = \frac{b^2 h^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2h^2}$  avec mur en  $h = 0$  :

$$\langle h_{\max} \rangle \sim \sqrt{\frac{2N}{b}} \text{ sans mur (1) ,} \quad \langle h_{\max} \rangle \sim 2\sqrt{\frac{N}{b}} \text{ avec mur (2)} \quad (5.56)$$

On retrouve ce scaling en  $\asymp \sqrt{N}$  dû à la contrainte de non-intersection. Les interfaces se repoussent fortement.

Les **fluctuations typiques de  $h_{\max}$  près de sa moyenne** sont décrites par une loi de **Tracy-Widom** comme pour la valeur propre maximale d'une matrice aléatoire, cf Eq. (3.6) dans le cas gaussien et Eq. (3.26) dans la cas de Wishart. En utilisant le changement de variables  $h_i \sqrt{b} = \lambda_i$  dans le cas (1) d'un potentiel harmonique sans mur et  $bh_i^2 = \lambda_i$  dans le cas (2) avec mur, on peut donc montrer en se ramenant à la théorie des matrices aléatoires que pour  $N \rightarrow \infty$  :

$$\begin{aligned} \left( h_{\max} - \sqrt{\frac{2N}{b}} \right) &\sim \frac{N^{-\frac{1}{6}}}{\sqrt{2b}} \chi && \text{dans le cas (1)} \\ \left( h_{\max} - 2\sqrt{\frac{N}{b}} \right) &\sim \frac{N^{-\frac{1}{6}}}{2^{2/3} \sqrt{b}} \chi && \text{dans le cas (2)} \end{aligned} \quad \text{où } \mathbb{P}[\chi \leq x] = \mathcal{F}_2(x) \quad (5.57)$$

où la loi de Tracy-Widom  $\mathcal{F}_2(x)$  est définie Eq. (3.7).

Les **fluctuations atypiques loin de la moyenne** (événements rares) sont décrites par les **grandes déviations**. En utilisant les mêmes changements de variables pour se ramener aux matrices aléatoires, on obtient pour  $h_{\max}$  les mêmes grandes déviations que pour une matrice de GUE dans le cas (1) avec  $h\sqrt{b} = \lambda$  et que pour une matrice de Wishart dans le cas (2) avec  $bh^2 = \lambda$ .

Dans le cas (1) d'un potentiel quadratique sans mur, on trouve :

$$\mathcal{P}(h_{\max} = t) \approx \begin{cases} e^{-2N^2 \psi_-\left(\frac{t\sqrt{b}}{\sqrt{N}}\right)} & \text{si } t < \sqrt{\frac{2N}{b}} \\ e^{-2N \psi_+\left(\frac{t\sqrt{b}}{\sqrt{N}}\right)} & \text{si } t > \sqrt{\frac{2N}{b}} \end{cases} \text{ et } |t - \sqrt{\frac{2N}{b}}| = O(\sqrt{N}) \quad (5.58)$$

où  $\psi_-$  est donné Eq. (3.39) et  $\psi_+$  Eq. (3.45).

Dans le cas (2) avec mur et avec  $V(h) = \frac{b^2 h^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2h^2}$ , on a :

$$\mathcal{P}(\lambda_{\max} = t) \approx \begin{cases} e^{-2N^2 \phi_-\left(\frac{bt^2}{N}\right)} & \text{pour } bt^2 < 4N \\ e^{-2N \phi_+\left(\frac{bt^2}{N}\right)} & \text{pour } bt^2 > 4N \end{cases} \text{ et } |bt^2 - 4N| = O(N) \quad (5.59)$$

où  $\phi_-$  est donné Eq. (3.52) et  $\phi_+$  Eq. (3.53).

On rappelle ici que le signe  $\approx$  est utilisé pour désigner un équivalent logarithmique par opposition à  $\sim$  qui indique un véritable équivalent.

### 5.2.3 Hauteur minimale

On s'intéresse maintenant à la **hauteur de l'interface la plus basse** c'est-à-dire la hauteur minimale  $h_{\min} = \min_i h_i$ . On considère dans toute cette partie le cas (ii) d'interfaces ne se croisant pas (**marcheurs vicieux**) et en **présence d'un mur**. En effet, en l'absence de mur, par symétrie  $h \rightarrow -h$ , on a simplement  $h_{\min} = -h_{\max}$ . Par contre, en présence du mur l'interface de hauteur minimale est celle qui est la plus près du mur donc à hauteur près de 0.

Plus précisément, dans le cas (2) d'un potentiel  $V(h) = \frac{b^2 h^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2h^2}$  avec un **mur** en  $h = 0$ , la moyenne de  $h_{\min}$  pour  $N$  grand est en première approximation donnée par la borne inférieure du support de la densité moyenne  $\rho_N(h)$ , donc " $\langle h_{\min} \rangle \sim 0$ ", ie  $\langle h_{\min} \rangle \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow \infty$ . Contrairement à  $h_{\max}$ , la hauteur  $h_{\min}$  n'est donc pas du même ordre que la hauteur typique  $h_{\text{typ}} \asymp \sqrt{N}$ . On ne peut pas utiliser de méthode de Coulomb dans ce cas, il faut une autre méthode.

Il se trouve que, suivant une méthode proposée par Edelman [Ede88] dans le contexte des matrices de Wishart, **on peut calculer exactement la distribution de la hauteur minimale**  $h_{\min}$  pour une valeur particulière du paramètre  $\alpha$ ,  $\alpha = \frac{3}{2}$ . Par définition, la distribution cumulative de  $h_{\min}$  s'écrit :

$$\mathbb{P}(h_{\min} \geq t) = \mathbb{P}(h_i \geq t \forall i) = \int_t^\infty dh_1 \dots \int_t^\infty dh_N \mathcal{P}(h_1, \dots, h_N) \quad (5.60)$$

où la distribution transverse  $\mathcal{P}(h_1, \dots, h_N)$  est donnée Eq. (5.45).

On effectue alors le changement de variable  $bh_i^2 = \lambda_i$  et on pose  $t = \sqrt{\zeta}$  pour se ramener aux valeurs propres de **Wishart**, cf (5.46) :

$$\mathbb{P}(h_{\min} \geq \sqrt{\zeta}) = K_{M,N} \int_{b\zeta}^\infty d\lambda_1 \dots \int_{b\zeta}^\infty d\lambda_N e^{-\sum_i \lambda_i} \prod_i \lambda_i^{\alpha-\frac{1}{2}} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^2 \quad (5.61)$$

On pose alors  $\lambda_i = b\zeta + x_i$  et on trouve :

$$\mathbb{P}(h_{\min} \geq \sqrt{\zeta}) = K_{M,N} e^{-Nb\zeta} w(b\zeta) \quad (5.62)$$

où  $w(z)$  est définie comme :

$$w(z) = \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_N e^{-\sum_i x_i} \prod_i (x_i + z)^{\alpha-\frac{1}{2}} \prod_{i<j} |x_i - x_j|^2 \quad (5.63)$$

Quand  $\alpha - \frac{1}{2}$  est un entier positif, c'est à dire dans le cas où les hauteurs au carré sont distribuées exactement comme les valeurs propres d'une matrice de Wishart avec tailles  $M$  et  $N$  où  $M - N = \alpha - \frac{1}{2}$ , la fonction  $w(z)$  est alors un polynôme de degré  $N$  ( $\alpha - \frac{1}{2}$ ). Considérons le cas particulier simple  $\alpha = \frac{3}{2}$ , soit  $M = N + 1$  :

$$w(z) = \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_N e^{-\sum_i x_i} \prod_i (x_i + z) \prod_{i<j} |x_i - x_j|^2 \quad (5.64)$$

On cherche à écrire une équation différentielle sur  $w(z)$ . En notant  $\Delta(x_i) = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$ , on a :

$$\begin{aligned} w'(z) &= \sum_{k=1}^N \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_N e^{-\sum_i x_i} \prod_{i \neq k} (x_i + z) \Delta(x_i)^2 \\ &= N \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_N e^{-\sum_i x_i} \prod_{i \neq 1} (x_i + z) \Delta(x_i)^2 \end{aligned} \quad (5.65)$$

par symétrie des variables muettes  $x_i$ . De même :

$$w''(z) = N(N-1) \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_N e^{-\sum_i x_i} \prod_{i \neq 1,2} (x_i + z) \Delta(x_i)^2 \quad (5.66)$$

Ainsi on peut écrire :

$$\begin{aligned} w(z) &= \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_N e^{-\sum_i x_i} (z + x_1) \prod_{i \neq 1} (x_i + z) \Delta(x_i)^2 \\ &= z \frac{w'(z)}{N} + \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_N e^{-\sum_i x_i} x_1 \prod_{i \neq 1} (x_i + z) \Delta(x_i)^2 \end{aligned} \quad (5.67)$$

Intégrons par parties la dernière intégrale par rapport à la variable  $x_1$  en remarquant que  $\frac{d(x_1 \Delta(x_i)^2)}{dx_1} = \Delta(x_i)^2 \left[ 1 + x_1 \sum_{k \neq 1} \frac{2}{x_1 - x_k} \right]$  et  $e^{-x_1} = -\frac{de^{-x_1}}{dx_1}$ , d'où :

$$w(z) = (z+1) \frac{w'(z)}{N} + (N-1) \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_N e^{-\sum_i x_i} \prod_{i \neq 1} (x_i + z) \Delta(x_i)^2 \frac{2x_1}{x_1 - x_2} \quad (5.68)$$

à nouveau par symétrie des variables muettes  $x_i$ . Calculons cette dernière intégrale :

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_N e^{-\sum_i x_i} \prod_{i \neq 1} (x_i + z) \Delta(x_i)^2 \frac{2x_1}{x_1 - x_2} \\ &= \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_N e^{-\sum_i x_i} \prod_{i \neq 1,2} (x_i + z) \Delta(x_i)^2 \frac{2x_1(x_2 + z)}{x_1 - x_2} \\ &\equiv J + K \end{aligned} \quad (5.69)$$

où

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_N e^{-\sum_i x_i} \prod_{i \neq 1,2} (x_i + z) \Delta(x_i)^2 \frac{2x_1 x_2}{x_1 - x_2} \\ K &= \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_N e^{-\sum_i x_i} \prod_{i \neq 1,2} (x_i + z) \Delta(x_i)^2 \frac{2x_1 z}{x_1 - x_2} \end{aligned} \quad (5.70)$$

$J$  est nulle. En effet, par symétrie  $x_1 \leftrightarrow x_2$  elle est égale à la même intégrale où on inverse  $x_1$  et  $x_2$ , c'est à dire qu'elle est égale à son opposé donc à zéro :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_N e^{-\sum_i x_i} \prod_{i \neq 1,2} (x_i + z) \Delta(x_i)^2 \frac{2x_1 x_2}{x_1 - x_2} \\ &= \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_N e^{-\sum_i x_i} \prod_{i \neq 1,2} (x_i + z) \Delta(x_i)^2 \frac{2x_1 x_2}{x_2 - x_1} \\ &= -J = 0 \end{aligned}$$

Pour  $K$ , à nouveau par symétrie on peut remplacer dans l'expression (5.69) le facteur  $\frac{2x_1z}{x_1-x_2}$  par  $\frac{2x_2z}{x_2-x_1}$  ou encore par la somme des deux divisée par deux qui vaut  $z$ , d'où :

$$K = z \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_N e^{-\sum_i x_i} \prod_{i \neq 1,2} (x_i + z) \Delta(x_i)^2 = z \frac{w''(z)}{N(N-1)} \quad (5.71)$$

Mettant tout ensemble, on obtient une équation différentielle du second ordre sur  $w(z)$  :

$$zw''(z) + (z+1)w'(z) - Nw(z) = 0 \quad (5.72)$$

$w(z)$  est donc le polynôme de degré  $N$  qui est solution de l'équation (5.72), il est donné à une constante multiplicative près par le polynôme de Laguerre de degré  $N$  :

$$w(z) \propto \mathcal{L}_N(-z) = \sum_{k=0}^N C_N^k \frac{z^k}{k!} \quad (5.73)$$

où  $C_N^k$  est le coefficient binomial " $k$  parmi  $N$ " :  $C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$ . Par ailleurs on a vu que  $\mathbb{P}(h_{\min} \geq \sqrt{\zeta}) = K_{M,N} e^{-N b \zeta} w(b\zeta)$  avec  $\zeta = \sqrt{t}$ . Comme toutes les hauteurs sont positives on doit avoir  $\mathbb{P}(h_{\min} \geq 0) = 1$  ce qui fixe la constante de normalisation.

On obtient donc le **résultat exact** suivant pour la **distribution cumulative de**  $h_{\min}$  (pour  $\alpha = 3/2$ ) :

$$\mathbb{P}(h_{\min} \geq t) = e^{-Nbt^2} \mathcal{L}_N(-bt^2) = e^{-Nbt^2} \sum_{k=0}^N C_N^k \frac{(bt^2)^k}{k!} \quad (5.74)$$

La **densité de probabilité de**  $h_{\min}$  est donc donnée par :

$$\mathcal{P}(h_{\min} = t) = -\frac{d}{dt} \mathbb{P}(h_{\min} \geq t) = 2b^2 t^3 e^{-bNt^2} \mathcal{L}_{N-1}^{(2)}(-bt^2) \quad (5.75)$$

où  $\mathcal{L}_n^\gamma(x)$  est le polynôme de Laguerre généralisé défini plus haut.

A partir de (5.75), on peut calculer explicitement les moments de  $h_{\min}$  :

$$\langle h_{\min}^k \rangle = \frac{\Gamma(k/2 + 2)}{2b^{k/2}} \frac{(N+1)}{N^{k/2+1}} {}_2F_1(-(N-1), k/2 + 2; 3; -1/N) \quad (5.76)$$

En particulier, dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , on trouve pour la **moyenne** :

$$\langle h_{\min} \rangle \sim \frac{c_1}{\sqrt{bN}} \text{ pour } N \rightarrow \infty \text{ où } c_1 = \sqrt{\frac{\pi e}{4}} I_0(1/2) = 1.5538 \dots \quad (5.77)$$

où  $I_n(z)$  est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'indice  $n$  :

$$I_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} \quad (5.78)$$

La hauteur minimale moyenne se comporte comme  $\asymp 1/\sqrt{N}$  à  $N$  grand, elle tend bien vers 0 quand  $N \rightarrow \infty$  comme attendu. A nouveau l'effet de **répulsion** dû à la contrainte de non-croisement des interfaces est très important, l'interface la plus basse est ainsi



poussée très près du mur (de façon à s'écarter des autres interfaces).

On peut aussi extraire le **comportement de la distribution de  $h_{\min}$  à  $N$  grand** à partir de la distribution exacte (5.75). Du fait du scaling  $h_{\min} \asymp 1/\sqrt{N}$  et de la normalisation de la probabilité, on s'attend à :

$$\boxed{\mathcal{P}(h_{\min} = t) \sim \sqrt{N} f_{\min}(t\sqrt{N}) \text{ pour } N \rightarrow \infty} \quad (5.79)$$

où  $f_{\min}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \mathcal{P}\left(h_{\min} = \frac{x}{\sqrt{N}}\right)$  soit  $f_{\min}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} b^2 x^3 e^{-bx^2} {}_1F_1(1 - N; 3; \frac{bx^2}{N})$  d'où :

$$f_{\min}(x) = b^2 x^3 e^{-bx^2} {}_0F_1(3; bx^2) = 2bx e^{-bx^2} I_2(2x\sqrt{b}) \quad (5.80)$$

où  ${}_1F_1$  et  ${}_0F_1$  sont des fonctions hypergéométriques définies par :

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n z^n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n n!} \quad (5.81)$$

avec  $(a)_n = (a)(a+1)\dots(a+n-1)$  le symbole de Pochhammer (factorielle croissante).

Cette fonction  $f_{\min}$  se comporte en  $\pm\infty$  comme :

$$f_{\min}(x) \begin{cases} \sim b^2 x^3 & \text{quand } x \rightarrow 0 \\ \sim \frac{b^{3/4}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} e^{-bx^2+2\sqrt{b}x} & \text{quand } x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (5.82)$$

### 5.3 CENTRE DE MASSE DES HAUTEURS

Dans cette partie, je présente le calcul de la **distribution du centre de masse  $G_N = \frac{h_1 + \dots + h_N}{N}$  des hauteurs** dans la limite  $N$  grand, que j'ai effectué avec la méthode du **gaz de Coulomb** [NM09]. Je me place dans toute cette partie dans le cas (2) d'un potentiel  $V(h) = \frac{b^2 h^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2h^2}$  avec  $b > 0$  et  $\alpha \geq 1$  fixés, avec mur à hauteur nulle. Je suppose aussi ici que les  $N$  interfaces ne sont pas autorisées à se croiser (cas (ii), marcheurs vicieux) et que  $N \gg 1$ .

Dans notre article [NM09], j'ai pu mettre en évidence une **transition de phase** pour une certaine valeur  $g_c$  de  $G_N$  dans le gaz de Coulomb associé. J'ai également montré qu'en ce point de transition  $g_c$ , la distribution de  $G_N$  admet une **singularité essentielle** : elle est indéfiniment dérivable mais non analytique, cf eq. (5.86).

On a déjà vu plus haut que dans ce cas la hauteur moyenne est  $\langle h \rangle \sim \frac{8}{3\pi} \sqrt{\frac{N}{b}}$  quand  $N \gg 1$ , cf eq. (5.55), ainsi on a :

$$\boxed{\langle G_N \rangle = \langle h \rangle \sim \mu \sqrt{N} \text{ où } \mu = \frac{8}{3\pi\sqrt{b}} \text{ pour } N \text{ grand}} \quad (5.83)$$

En particulier, on s'attend pour  $N$  grand à observer le **scaling typique**  $G_N \asymp \sqrt{N}$ . On veut donc calculer la densité de probabilité  $\mathcal{P}(G_N = \nu)$  avec  $\nu = s\sqrt{N}$  par la

méthode du **gaz de Coulomb**. Cette méthode va nous permettre de calculer les **grandes déviations** de  $\mathcal{P}$  à l'ordre dominant pour  $N \gg 1$ , ie la distribution à l'ordre dominant pour  $G_N = s\sqrt{N}$  avec  $|s - \mu| = O(1)$  et  $N \gg 1$ .

Par définition, la densité de probabilité de  $G_N$  s'écrit :

$$\mathcal{P}(G_N = \nu) = \int_0^\infty dh_1 \dots \int_0^\infty dh_N \mathcal{P}(h_1, \dots, h_N) \delta\left(\frac{h_1 + \dots + h_N}{N} - \nu\right) \quad (5.84)$$

où la distribution jointe des hauteurs  $\mathcal{P}(h_1, \dots, h_N)$  est donnée Eq. (5.45). Avec le changement de variable  $bh_i^2 = \lambda_i$ , on se ramène à une intégrale sur les valeurs propres  $\lambda_i$  d'une matrice de **Wishart** :

$$\mathcal{P}(G_N = \nu) = \int_0^\infty d\lambda_1 \dots \int_0^\infty d\lambda_N \delta\left(\frac{\sqrt{\lambda_1} + \dots + \sqrt{\lambda_N}}{N\sqrt{b}} - \nu\right) \mathcal{P}_W(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad (5.85)$$

où  $\mathcal{P}_W$  est la distribution des valeurs propres d'une matrice de Wishart pour  $\beta = 2$ , cf Eq. (5.46). Calculer la distribution de  $G_N$  pour les hauteurs est donc équivalent à calculer la distribution de  $\sum_i \sqrt{\lambda_i}$  pour les valeurs propres d'une matrice de Wishart -qui n'était pas connue avant notre travail.

On va montrer que les grandes déviations de la **distribution du centre de masse** sont données dans la limite  $N$  grand par :

$$\boxed{P(G_N = s\sqrt{N}) \approx e^{-N^2\Phi(s)} \quad \text{où } \Phi(s) = \begin{cases} \Phi_-(s) & \text{pour } s < \mu \\ \Phi_+(s) & \text{pour } s > \mu \end{cases} \quad \text{et } |s - \mu| = O(1)}$$

avec  $\mu = \frac{8}{3\pi\sqrt{b}}$  et où  $\Phi_-(s) = \frac{L(s)^2}{32} - \ln\left(\frac{L(s)}{4}\right) - \frac{1}{2}$ , voir Eq. (5.109) et où  $L(s)$  est donné Eq. (5.105) et  $\Phi_+$  est donné à une constante additive près par  $E_s[\rho_c]$  Eq. (5.96) où  $\rho_c$  est donné Eq. (5.116) (je n'ai pas pu dériver d'expression explicite simple pour  $\Phi_-$ ). La fonction de grande déviation  $\Phi(s)$  est tracée Fig. 5.2. On va voir aussi que  $\Phi$  a une très faible non-analyticité au point de transition  $s = \mu$  : une **singularité essentielle**.  $\Phi$  est donc indéfiniment dérivable mais non analytique en  $s = \mu$ , plus précisément on va montrer que :

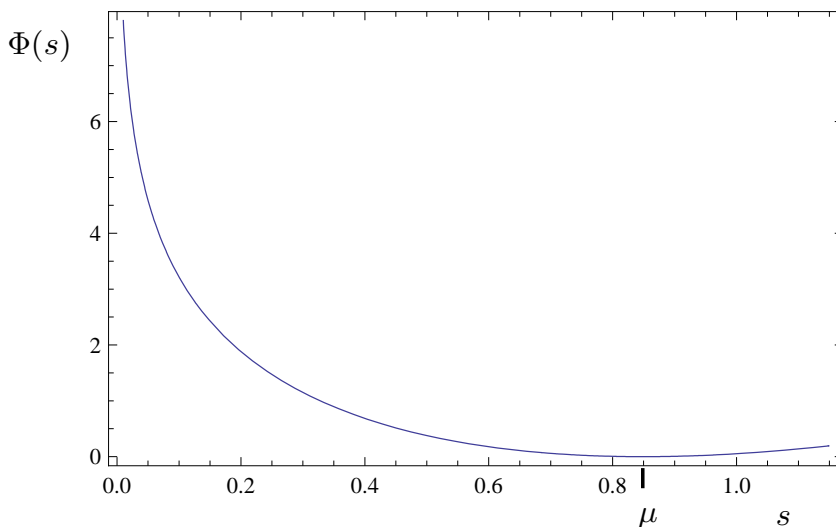
$$\boxed{\Phi_+(s) - \Phi_-(s) \sim -\pi\sqrt{b}(s - \mu) e^{-\frac{8}{\pi\sqrt{b}(s-\mu)}} e^{4(\ln 2 - 1)} \quad \text{quand } s \rightarrow \mu^+} \quad (5.86)$$

A nouveau, on rappelle que  $\sim$  et  $\approx$  signifie équivalent et  $\approx$  équivalent logarithmique.

### 5.3.1 Méthode du gaz de Coulomb

On a vu que la distribution jointe des hauteurs des interfaces  $\mathcal{P}(h_1, \dots, h_N)$  se ramène par changement de variable  $bh_i^2 = \lambda_i$  à la distribution des valeurs propres d'une matrice de **Wishart**, cf Eq. (5.46) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(h_1, \dots, h_N) dh_1 \dots dh_N &= \mathcal{P}_W(\lambda_1, \dots, \lambda_N) d\lambda_1 \dots d\lambda_N \quad \text{avec} \\ \mathcal{P}_W(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= K_{M,N} e^{-\sum_i \lambda_i} \prod_i \lambda_i^{\alpha - \frac{1}{2}} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^2 \end{aligned} \quad (5.87)$$



**Figure 5.2** – Grande déviation  $\Phi(s)$  pour le centre de masse  $G_N = \frac{h_1 + \dots + h_N}{N}$  des hauteurs des interfaces :  $\mathcal{P}(G_N = s\sqrt{N}) \approx e^{-N^2\Phi(s)}$  pour  $N \gg 1$ . Ici  $b = 1$  donc la moyenne de  $s$  est donnée par  $\mu = 8/(3\pi\sqrt{b}) \approx 0.85$  (c'est le minimum de  $\Phi(s)$ ).  $\Phi(s)$  a une très faible non-analyticité en  $s = \mu$ .

On veut calculer la distribution du centre de masse des hauteurs  $G_N = \frac{\sum_i h_i}{N}$ , soit après changement de variables cf Eq. (5.85) :

$$\mathcal{P}(G_N = \nu) = \int_0^\infty d\lambda_1 \dots \int_0^\infty d\lambda_N \delta\left(\frac{\sqrt{\lambda_1} + \dots + \sqrt{\lambda_N}}{N\sqrt{b}} - \nu\right) \mathcal{P}_W(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad (5.88)$$

La distribution  $\mathcal{P}_W$  (5.87) se réécrit comme un **poinds de Boltzmann** :

$$\mathcal{P}_W(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \propto e^{-E[\{\lambda_i\}]} \quad \text{où} \quad (5.89)$$

$$E[\{\lambda_i\}] = \sum_i \lambda_i - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \sum_i \ln \lambda_i - 2 \sum_{i < j} \ln |\lambda_i - \lambda_j|, \quad \lambda_i \geq 0$$

Le terme logarithmique  $-\ln |\lambda_i - \lambda_j|$  dans l'énergie effective  $E[\{\lambda_i\}]$  est exactement l'interaction de Coulomb à  $2D$  entre deux charges de même signe et de position  $\lambda_{i,j}$  sur l'axe réel. Les  $\lambda_i$  peuvent donc être vues comme les **charges d'un gaz de Coulomb**  $2D$ , toutefois contraintes de rester sur une ligne ( $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ ). Ces charges sont de plus dans un potentiel externe  $V_{\text{ext}}(\lambda) = \lambda - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \ln \lambda$ .

Une première conséquence de cette interprétation en gaz de Coulomb est le **scaling dans la limite**  $N \gg 1$ , comme on l'a déjà discuté au chapitre 2. On veut déterminer le scaling des  $\lambda_i$ . On suppose que  $\lambda_i \asymp N^\delta$  pour  $N \gg 1$ , on veut trouver  $\delta$ . On introduit les **variables adimensionnées**  $x_i = \lambda_i/N^\delta$ . On peut alors récrire l'énergie effective définie Eq. (5.89) en fonction de ces variables :

$$E[\{\lambda_i\}] = N^\delta \sum_i x_i - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \sum_i \ln x_i - 2 \sum_{i < j} \ln |x_i - x_j| + e_N \quad (5.90)$$

où  $e_N = -\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \delta N \ln N - \delta N(N-1) \ln N$  est une constante qui peut être absorbée dans la constante de normalisation de  $\mathcal{P}_W$ , et où  $x_i = \lambda_i/N^\delta$  est d'ordre  $\asymp 1$  quand  $N \rightarrow \infty$ .

Le terme d'interaction coulombienne est d'ordre  $N^2$  comme on l'a déjà vu au chapitre 2, ie  $-\sum_{1 \leq i < j \leq N} \ln |x_i - x_j| \asymp N^2$ , cf Eq. (2.14).

D'un autre côté le terme de potentiel linéaire est d'ordre  $N^\delta \sum_i x_i \asymp N^{\delta+1}$ , tandis que le terme de potentiel logarithmique est d'ordre  $-(\alpha - \frac{1}{2}) \sum_i \ln x_i \asymp N$  pour  $\alpha$  fixé ( $\alpha$  indépendant de  $N$ ). Le terme logarithmique est *négligeable* devant l'interaction coulombienne qui est d'ordre  $\asymp N^2$ . On n'apparaîtra donc plus dans toute la suite.

Pour équilibrer les différents termes de l'énergie effective, il faut donc que  $N^{\delta+1} \asymp N^2$ , soit  $\delta = 1$ , ie (comme on l'a déjà vu dans le contexte des matrices de Wishart, cf Eq. (2.34)) :

$$\boxed{\lambda_{\text{typ}} \asymp N \quad \text{quand } N \gg 1, \text{ soit } \delta = 1} \quad (5.91)$$

Ainsi on retrouve le comportement typique des hauteurs des interfaces  $h_i \asymp \sqrt{N}$  (car  $bh_i^2 = \lambda_i$ ) et donc également du centre de masse des hauteurs  $G_N = \frac{h_1 + \dots + h_N}{N} \asymp \sqrt{N}$  quand  $N \gg 1$ . On pose donc  $\nu = s\sqrt{N}$ .

On introduit la **densité adimensionnée**  $\rho(x) = \frac{1}{N} \sum_i \delta(x - x_i)$  où  $x_i = \lambda_i/N$  sont les variables adimensionnées (ie indépendantes de  $N$  pour  $N \rightarrow \infty$ ). On s'attend à ce que dans la limite  $N \rightarrow \infty$ ,  $\rho(x)$  tende vers une limite finie et continue (fonction continue de  $x$ ) et on peut alors écrire l'énergie effective Eq. (5.89) dans sa **limite continue** sous la forme d'une fonctionnelle de  $\rho$  (cf Eq. (2.36) avec  $c = 1$ ) :

$$E_N[\{\lambda_i\}] = N^2 E[\rho] - N^2 \ln N + o(N^2) \quad \text{où} \quad (5.92)$$

$$E[\rho] = \int_0^\infty dx \rho(x) x - \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx' \rho(x) \rho(x') \ln |x - x'|$$

Comme on vient de le voir, le terme logarithmique  $-(\alpha - \frac{1}{2}) \sum_i \ln \lambda_i$  disparaît à l'ordre dominant car, pour  $\alpha$  fixé, il est négligeable devant  $N^2$  pour  $N \gg 1$ .

L'intégrale multiple sur les  $\lambda_i$  (5.88) devient alors une **intégrale fonctionnelle** sur la densité  $\rho$  :

$$\mathcal{P}(G_N = s\sqrt{N}) \propto \int \mathcal{D}\rho \delta\left(\int \rho - 1\right) \delta\left(\int dx \rho(x) \sqrt{x} - s\sqrt{b}\right) e^{-N^2 E[\rho]} \quad (5.93)$$

où l'énergie effective continue est donnée Eq. (5.92) et où les deux fonctions delta fixent les contraintes  $\int_0^\infty \rho = 1$  (normalisation de la densité) et  $\int_0^\infty dx \rho(x) \sqrt{x} = s\sqrt{b}$ , ie  $G_N = s\sqrt{N}$ . On notera que le terme constant  $-N^2 \ln N$  dans l'Eq. (5.92) est absorbé dans la constante de normalisation de  $\mathcal{P}(G_N = s\sqrt{N})$ .

Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , on peut calculer l'intégrale fonctionnelle Eq. (5.93) par la méthode du **col**. L'énergie minimale domine l'intégrale. Cela revient physiquement à considérer la **gaz de Coulomb à température nulle**. Le col s'écrit :

$$\mathcal{P}(G_N = s\sqrt{N}) \propto e^{-N^2 E_s[\rho_c]} \quad (5.94)$$

où la densité  $\rho_c$  **minimise l'énergie effective**  $E_s[\rho]$  qui dépend de  $s$  (c'est-à-dire de la valeur de  $G_N$ ) et est donnée explicitement par :

$$E_s[\rho] = - \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx' \rho(x) \rho(x') \ln |x - x'| + \int_0^\infty dx \rho(x) x$$

$$+ D \left( \int_0^\infty dx \rho(x) - 1 \right) + R \left( \int_0^\infty dx \rho(x) \sqrt{x} - s\sqrt{b} \right) \quad (5.95)$$

où on a ajouté des termes avec multiplicateurs de Lagrange  $D$  et  $R$  pour prendre en compte les **contraintes** dans la minimisation de l'énergie, respectivement  $\int \rho = 1$  (normalisation de la densité) et  $\int \rho \sqrt{x} = s\sqrt{b}$  (ie  $G_N = s\sqrt{N}$ ). L'énergie effective ci-dessus peut se récrire :

$$E_s[\rho] = - \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx' \rho(x)\rho(x') \ln|x-x'| + \int_0^\infty dx \rho(x)V_{\text{eff}}(x) - K + \text{cste} \quad (5.96)$$

où  $K = D + Rs\sqrt{b}$  et où  $V_{\text{eff}}$  est le **potentiel effectif vu par les charges** du gaz de Coulomb :

$$V_{\text{eff}}(x) = x + D + R\sqrt{x} \quad (5.97)$$

On doit donc trouver la densité  $\rho_c(x)$  solution de l'équation de point col  $\left. \frac{\delta E_{\text{eff}}[\rho]}{\delta \rho(x)} \right|_{\rho=\rho_c} = 0$ , soit :

$$2 \int_0^\infty dx' \rho_c(x') \ln|x-x'| = V_{\text{eff}}(x) = x + R\sqrt{x} + D \text{ pour } x \in \text{Supp}[\rho_c] \quad (5.98)$$

L'objectif est maintenant de déterminer la densité  $\rho_c$  solution de l'équation intégrale (5.98) avec les deux contraintes  $\int \rho_c = 1$  et  $\int dx \sqrt{x}\rho_c(x) = s\sqrt{b}$  (qui fixent les multiplicateurs de Lagrange  $R$  et  $D$ ), cf section 5.3.2. On remplace alors  $\rho_c$  dans l'expression de l'énergie effective Eq. (5.95) pour obtenir la distribution de  $G_N$ , cf Eq. (5.94) :

$$\mathcal{P}(G_N = s\sqrt{N}) \propto e^{-N^2 E_s[\rho_c]} \quad (5.99)$$

### 5.3.2 Densité optimale et distribution de $G_N$

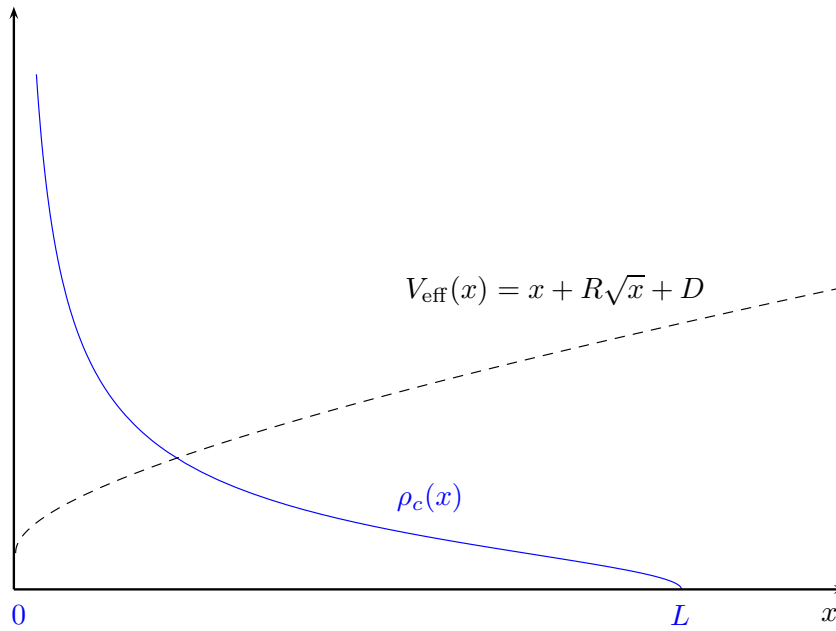
On cherche la **densité**  $\rho_c$  solution de (5.98) telle que

$$\int_0^\infty dx \rho_c(x) = 1 \text{ et } \int_0^\infty dx \sqrt{x}\rho_c(x) = s\sqrt{b} \quad (5.100)$$

La densité représente la **répartition des charges du gaz de Coulomb à  $G_N = s\sqrt{N}$  fixé et à température nulle**. Ces charges sont soumises à un **potentiel externe effectif**  $V_{\text{eff}}(x) = x + R\sqrt{x} + D$  pour  $x > 0$  qui dépend des multiplicateurs de Lagrange  $R$  et  $D$  qui ne sont pas encore fixés à ce stade mais devront dépendre de  $s$  (après qu'on aie imposé les contraintes (5.100)). Selon la valeur du centre de masse  $G_N = s\sqrt{N}$ , on s'attend donc à une forme différente pour  $V_{\text{eff}}$  et donc une répartition des charges  $\rho_c$  différente. On va voir que ceci est à l'origine d'une **transition de phase au point**  $s = \mu$ . Physiquement, si  $R > 0$  le potentiel est monotone croissant sur  $\mathbb{R}_+$ , les charges vont s'accumuler près de l'origine (près du mur), cf Fig. 5.3. Si  $R < 0$ , le potentiel  $V_{\text{eff}}$  a un minimum absolu en  $x_0 = \sqrt{-\frac{R}{2}} > 0$ , les charges s'accumuleront alors près de ce minimum, cf Fig 5.4.

On dérive (5.98) par rapport à  $x$ , on obtient :

$$\int_0^\infty dx' \frac{\rho_c(x')}{x-x'} = \frac{1}{2} + \frac{R}{4\sqrt{x}} \text{ pour } x \in \text{Supp}[\rho_c] \quad (5.101)$$



**Figure 5.3** – Schéma représentant la densité moyenne adimensionnée  $\rho_c(x)$  (trait plein bleu) et le potentiel externe effectif  $V_{\text{eff}}(x) = x + R\sqrt{x} + D$  vu par les charges du gaz de Coulomb (en pointillés) avec la valeur du centre de masse fixée à  $G_N = s\sqrt{b}$  dans le cas  $s \leq \mu = \frac{8}{3\pi\sqrt{b}}$  (ie  $R \geq 0$ ). Le potentiel a dans ce cas un minimum absolu à l'origine, les charges s'accumulent près de l'origine (ie près du mur) et la densité a un support fini  $]0, L]$ .

où  $f$  désigne la partie principale, voir Eq. (2.83). Cette équation intégrale peut être résolue par le théorème de Tricomi comme expliqué section 2.4. La solution est une densité  $\rho_c$  à support fini  $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$  donnée par (2.84) :

$$\rho_c(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}} \left\{ C + \int_a^b \frac{dt}{\pi} \frac{\sqrt{t-a}\sqrt{b-t}}{t-x} \left[ \frac{1}{2} + \frac{R}{4\sqrt{t}} \right] \right\} \quad (5.102)$$

où  $C = \int \rho_c = 1$ .

Physiquement on s'attend comme on a vu à un comportement très différent selon le signe de  $R$ . Considérons donc les deux cas  $R > 0$  et  $R < 0$  séparément et déterminons ensuite à quelles valeurs de  $G_N = s\sqrt{N}$  ils correspondent.

### 5.3.2.1 Branche gauche : $R > 0$

Supposons d'abord que  $R > 0$ . On verra plus loin que ce régime correspond en fait à  $s < \mu$ , c'est à dire à la branche gauche de la distribution du centre de masse  $G_N$  (de moyenne  $\mu\sqrt{N}$ ). Dans ce cas,  $V_{\text{eff}}$  est monotone croissant pour  $x > 0$ , on s'attend donc à une **accumulation des charges près du mur à l'origine**, cf Fig. 5.3, donc à une densité  $\rho_c$  à support  $]0, L]$  (ie  $a = 0, b = L$ ) qui s'annule en  $L$  pour assurer la continuité (car  $\rho_c(x) = 0$  pour  $x > L$ , c'est à dire en dehors du support) -tandis qu'à l'origine il y a le mur donc on ne s'attend pas à ce que la densité s'annule en 0. Dans ce cas, la solution Eq. (5.102) peut être calculée explicitement. Une fois la contrainte  $\rho_c(L) = 0$  imposée,

on trouve :

$$\boxed{\rho_c(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L-x}{x}} + \frac{R}{2\pi^2 \sqrt{x}} \operatorname{argth} \left( \sqrt{1 - \frac{x}{L}} \right) \quad \text{pour } 0 \leq x \leq L} \quad (5.103)$$

La densité est tracée schématiquement figure 5.3. Physiquement, la densité doit être positive pour  $0 < x < L$ . Cette condition équivaut à  $R \geq 0$ , ce qui est bien le cas ici par hypothèse.

On impose ensuite les conditions (5.100), ce qui donne :

$$\frac{L^{3/2}}{12\pi} + \frac{\sqrt{L}}{\pi} = s \sqrt{b} \quad \text{et} \quad R = \frac{2\pi}{\sqrt{L}} - \frac{\pi\sqrt{L}}{2} \quad (5.104)$$

On peut résoudre ces équations explicitement et trouver l'expression de  $L = L(s)$  :  
 $L = L(s)$  :

$$\boxed{L(s) = \left( -g_1(s)^{1/3} 2^{1/3} + 2^{5/3} g_1(s)^{-1/3} \right)^2} \quad (5.105)$$

$$\text{où} \quad g_1(s) = -3\pi s \sqrt{b} + \sqrt{16 + 9b\pi^2 s^2}$$

qui peut se simplifier avec la paramétrisation  $g_1(s) = 4e^{-\theta}$  :

$$L(s) = \left[ 4 \sinh \left( \frac{\theta}{3} \right) \right]^2 \quad \text{où} \quad 3\pi s \sqrt{b} = 4 \sinh \theta \quad (5.106)$$

Quand  $s = \mu$  ce qui correspond à la moyenne de  $G_N$ , on a  $L = 4$ ,  $R = 0$  et  $\rho_c(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4-x}{x}} = \rho^*(x)$  est la densité moyenne des valeurs propres de Wishart non perturbées (ie sans contrainte sur  $G_N$ ) pour  $c = 1$ , cf Eq. (2.43).

La **validité** de ce régime est donnée par la contrainte  $R > 0$ , soit d'après Eq. (5.104),  $L < 4$  ou encore  $s < \mu$ . Ce régime décrit donc comme annoncé la **branche gauche** de la distribution de  $G_N$ .

L'énergie de point col  $E_s[\rho_c]$  peut être calculée explicitement avec  $\rho_c$  donnée Eq. (5.103) :

$$E_s[\rho_c] = \frac{L(s)^2}{32} - \ln \left( \frac{L(s)}{4} \right) + 1 \quad (5.107)$$

On en déduit ainsi l'expression de la branche gauche de la distribution de  $G_N$ ,  $\mathcal{P}(G_N = s\sqrt{N}) \propto \exp[-N^2 E_s[\rho_c]]$ , soit en ajustant la constante de normalisation :

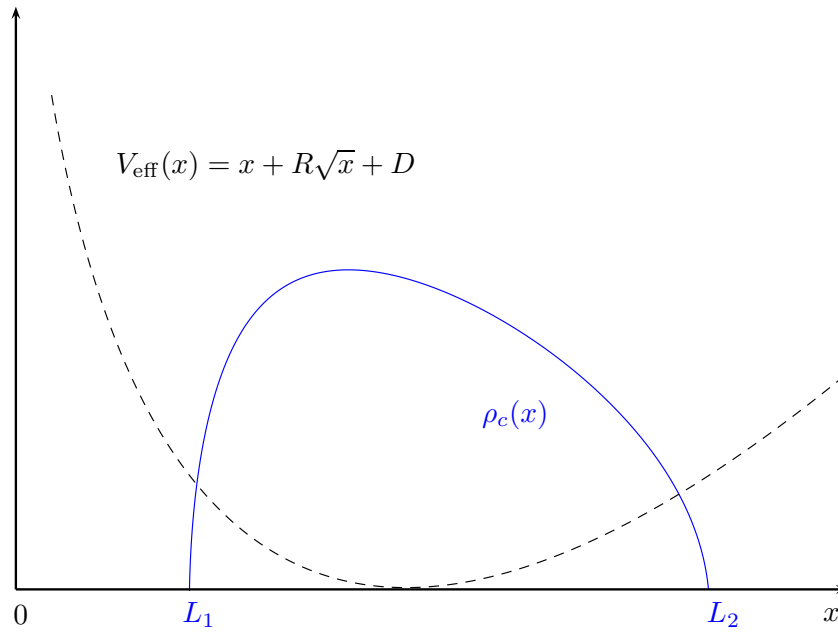
$$\mathcal{P}(G_N = s\sqrt{N}) \approx \frac{e^{-N^2 E_s[\rho_c]}}{e^{-N^2 E_\mu[\rho_c]}} \quad (5.108)$$

Le dénominateur est une constante de normalisation donnée par la même expression que le numérateur mais prise en  $s = \mu$  (moyenne de  $s$ ) qui correspond au gaz de Coulomb sans contrainte sur  $G_N$ . Ainsi on obtient l'expression de la **distribution de  $G_N$  à l'ordre dominant, à gauche de sa moyenne** :

$$\boxed{P(G_N = \nu) \approx e^{-N^2 \Phi_-\left(\frac{\nu}{\sqrt{N}}\right)} \quad \text{avec} \quad \Phi_-(s) = \frac{L(s)^2}{32} - \ln \left( \frac{L(s)}{4} \right) - \frac{1}{2}} \quad (5.109)$$

où  $L = L(s)$  est donné Eq. (5.105) et où  $\Phi_-(s)$  est obtenu à partir de la formule  $\Phi_-(s) = E_s[\rho_c] - E_\mu[\rho_c]$ , cf Eq. (5.108).

On rappelle ici encore que  $\approx$  signifie équivalent logarithmique.



**Figure 5.4** – Schéma représentant la densité moyenne adimensionnée  $\rho_c(x)$  (trait plein bleu) et le potentiel externe effectif  $V_{\text{eff}}(x) = x + R\sqrt{x} + D$  vu par les charges du gaz de Coulomb (en pointillés) avec la valeur du centre de masse fixée à  $G_N = s\sqrt{b}$  dans le cas  $s > \mu = \frac{8}{3\pi\sqrt{b}}$  (ie  $R < 0$ ). Le potentiel a dans ce cas un minimum absolu en un  $x > 0$ , les charges s’accumulent près de ce minimum et la densité a un support fini  $[L_1, L_2]$ .

### 5.3.2.2 Branche droite : $R < 0$

Considérons maintenant le cas  $R < 0$ . Par complémentarité du régime  $R > 0$ , le régime  $R < 0$  doit décrire la branche droite de la distribution de  $G_N$ , soit  $s > \mu$ . Dans ce cas, on s’attend physiquement à ce que le potentiel effectif  $V_{\text{eff}}(x) = x + R\sqrt{x} + D$  vu par les charges du gaz de Coulomb ait un **minimum absolu** en  $x_0 = \sqrt{-\frac{R}{2}} > 0$ , cf Fig. 5.4. Les charges doivent donc s’accumuler près de ce minimum. La densité  $\rho$  doit avoir un **support fini**  $[L_1, L_2]$  avec  $0 < L_1 < L_2$ . Dans ce cas, les charges sont un peu éloignées du mur, la densité doit s’annuler aux deux extrémités  $L_{1,2}$  par continuité.

La solution  $\rho_c$  donnée Eq. (5.102) avec  $a = L_1 > 0$ ,  $b = L_2 > L_1$  et normalisée à 1, ie  $\int \rho_c = 1$ , peut s’écrire sous la forme :

$$\rho_c(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x-L_1}\sqrt{L_2-x}} \left[ 1 + \frac{L_1 + L_2 - 2x}{4} + \frac{R\sqrt{L_2-L_1}}{4\pi} J\left(\frac{L_1}{L_2-L_1}, \frac{x-L_1}{L_2-L_1}\right) \right] \quad (5.110)$$

avec  $J$  l’intégrale avec partie principale suivante (cf Eq. (2.83) pour la définition de la partie principale)

$$J(\xi, y) = \oint_0^1 dt \frac{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}{(t-y)\sqrt{t+\xi}} \quad (5.111)$$



soit

$$J(\xi, y) = -2\sqrt{1+\xi} E\left(\frac{1}{1+\xi}\right) + \frac{2\xi\sqrt{1+\xi}}{\xi+y} K\left(\frac{1}{1+\xi}\right) - \frac{2\xi(1-y)}{(\xi+y)\sqrt{1+\xi}} \Pi\left(\frac{\xi+y}{y(1+\xi)}, \frac{1}{1+\xi}\right) \quad (5.112)$$

où  $K$  et  $E$  sont les intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèce respectivement,  $\Pi$  est l'intégrale elliptique incomplète de troisième espèce :

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-kt^2}{1-t^2}} dt, \quad K(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{(1-kt^2)(1-t^2)}} dt \quad (5.113)$$

$$\Pi(n, m) = \mathcal{P} \int_0^1 \frac{1}{(1-nt^2)\sqrt{1-mt^2}\sqrt{1-t^2}} dt \quad (5.114)$$

On impose la contrainte  $\rho_c(L_1) = 0 = \rho_c(L_2)$  pour que  $\rho_c$  soit bien continue aux bords  $L_{1,2}$  de son support. Cela donne deux équations :

$$\begin{aligned} \sqrt{L_2} &= -\frac{RK(k)}{\pi} \quad \text{où } k = \frac{L_2 - L_1}{L_2} = 1 - \frac{L_1}{L_2} \\ \text{et } \frac{2\pi^2}{R^2} &= -K(k) \left( E(k) + \left( \frac{k}{2} - 1 \right) K(k) \right) \end{aligned} \quad (5.115)$$

Avec les contraintes  $\rho_c(L_1) = 0 = \rho_c(L_2)$ ,  $\rho_c$  peut se récrire :

$$\boxed{\rho_c(x) = \frac{R}{4\pi^2\sqrt{L_2 - L_1}} \sqrt{y(1-y)} J_1(\xi, y) \quad \text{où } y = \frac{x - L_1}{L_2 - L_1}, \xi = \frac{L_1}{L_2 - L_1}} \quad (5.116)$$

avec  $y \in [0, 1]$  et où

$$J_1(\xi, y) = \frac{J(\xi, y)}{y(1-y)} - \frac{J(\xi, 0)}{y} - \frac{J(\xi, 1)}{1-y} = \int_0^1 dt \frac{1}{(t-y)\sqrt{t}\sqrt{1-t}\sqrt{t+\xi}} \quad (5.117)$$

où  $J(\xi, y)$  est défini Eq. (5.111). La densité  $\rho_c$  est tracée schématiquement figure 5.4.

La contrainte  $\int \rho_c = 1$  a déjà été prise en compte dans la solution de Tricomi Eq. (5.116). Reste à imposer  $\int \sqrt{x}\rho_c(x)dx = s\sqrt{b}$  qui fixe la valeur de  $G_N = s\sqrt{N}$ .  $\rho_c$  représente en effet la répartition des charges à  $G_N = s\sqrt{N}$  fixé. Cependant l'intégrale  $\int \sqrt{x}\rho_c(x)dx$  est en général trop difficile à calculer sauf dans certaines limites.

La dernière étape consiste à remplacer  $\rho_c$  par son expression (5.116) dans l'énergie effective  $E_s[\rho_c]$  donnée Eq. (5.96) et on obtient alors en principe la **branche droite de la distribution du centre de masse**  $G_N$ , cf Eq. (5.99) et (5.108) :

$$\boxed{\mathcal{P}(G_N = \nu) \approx e^{-N^2\Phi_+\left(\frac{\nu}{\sqrt{N}}\right)} \quad \text{pour } \nu > \mu\sqrt{N}, \text{ où } \Phi_+(s) = E_s[\rho_c] - E_\mu[\rho_c]} \quad (5.118)$$

où  $E_s[\rho]$  est donnée Eq. (5.96) et  $\rho_c$  Eq. (5.116) En pratique le calcul des intégrales dans  $E_s[\rho_c]$  est à nouveau trop difficile sauf dans certaines limites.

### 5.3.3 Asymptotes et point de transition

Les grandes déviations de la **distribution du centre de masse**  $G_N$  sont données dans la limite  $N \rightarrow \infty$  par :

$$P(G_N = s\sqrt{N}) \approx e^{-N^2\Phi(s)} \quad (5.119)$$

$$\text{où } \Phi(s) = \begin{cases} \Phi_-(s) & \text{pour } s < \mu \\ \Phi_+(s) & \text{pour } s > \mu \end{cases} \quad \text{et } |s - \mu| = O(1)$$

où  $\Phi_-(s) = \frac{L(s)^2}{32} - \ln\left(\frac{L(s)}{4}\right) - \frac{1}{2}$ , voir Eq. (5.109) (régime  $R > 0$ ) et  $\Phi_+$  est donné à une constante additive près par  $E_s[\rho_c]$  où  $\rho_c$  est donné Eq. (5.116) (régime  $R < 0$ ).

Cette distribution est très piquée autour de sa moyenne  $s = \mu$  pour  $N$  grand. On peut s'intéresser aux asymptotes  $s \rightarrow 0$  et  $s \rightarrow \infty$  ( $s > 0$  car il y a un mur en 0) qui décrivent des événements très rares. Surtout il reste à caractériser la transition de phase en  $s = \mu$  (ou  $R = 0$ ). On va montrer que  $\Phi(s)$  a une singularité essentielle en  $s = \mu$ .

#### 5.3.3.1 Queue gauche de la distribution : $s \rightarrow 0$

Pour  $s < \mu$ , le régime valable est celui de  $R > 0$ , cf section 5.3.2.1. On a alors :

$$\Phi_-(s) = -2 \ln s - \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{\pi^2 b}{4}\right) + O(s \ln s) \quad \text{quand } s \rightarrow 0^+ \quad (5.120)$$

La distribution de  $G_N$  tend vers 0 comme une loi de puissance quand  $s \rightarrow 0^+$  :

$$\boxed{P(G_N = s\sqrt{N}) \propto s^{2N^2} \quad \text{quand } s \rightarrow 0^+} \quad (5.121)$$

La probabilité que le centre de masse des interfaces se rapproche fortement du substrat à  $h = 0$  est donc très faible pour  $N$  grand.

#### 5.3.3.2 Queue droite de la distribution : $s \rightarrow +\infty$

Pour  $s > \mu$ , le régime valable est celui de  $R < 0$ , cf section 5.3.2.2. Dans ce cas on n'a pas d'expression explicite pour  $\Phi_+(s)$  pour un  $s > \mu$  quelconque, mais on peut extraire le comportement asymptotique  $s \rightarrow \infty$ .

Quand  $s \rightarrow \infty$ , on a  $R \rightarrow -\infty$  et  $L_2 \rightarrow \infty$  avec  $k = \frac{L_2 - L_1}{L_2} \rightarrow 0^+$  d'après (5.115). Dans cette limite on a :

$$R = \sqrt{2} \left[ -\frac{8}{k} + 4 + \frac{21}{32}k + O(k^2) \right] \quad \text{et} \quad \begin{cases} L_2 = \frac{32}{k^2} - \frac{16}{k} - \frac{9}{4} + O(k) \\ L_1 = \frac{32}{k^2} - \frac{48}{k} + \frac{55}{4} + O(k) \end{cases} \quad (5.122)$$

quand  $k = 1 - \frac{L_1}{L_2} \rightarrow 0^+$ . De plus  $\xi = \frac{L_1}{L_2 - L_1} \sim \frac{1}{k}$ . Finalement, pour  $k = 1 - \frac{L_1}{L_2} \rightarrow 0^+$  avec  $y = \frac{x - L_1}{L_2 - L_1}$  fixé,  $0 < y < 1$ , on a  $J_1(\xi, y) \sim \frac{-\pi}{2\xi^{3/2}} \sim \frac{-\pi k^{3/2}}{2}$  et :

$$\rho_c(x) \sim \frac{1}{4\pi} \sqrt{y(1-y)} \quad k \quad \text{pour } k \rightarrow 0 \quad (5.123)$$

où  $y = \frac{x - L_1}{L_2 - L_1}$ . La contrainte  $\int \sqrt{x} \rho_c(x) dx = s \sqrt{b}$  donne  $s = \frac{4}{k} \sqrt{\frac{2}{b}} + O(1)$  quand  $k \rightarrow 0^+$ , et l'énergie minimale associée diverge quadratiquement en  $s$  :

$$E_s[\rho_c] = \frac{32}{k^2} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{quand } k \rightarrow 0^+ \quad \text{donc } \Phi_+(s) \sim s^2 b \quad \text{quand } s \rightarrow +\infty \quad (5.124)$$

ce qui correspond à une queue gaussienne :

$$\boxed{P(G_N = s\sqrt{N}) \approx e^{-bN^2s^2} \text{ quand } s \rightarrow +\infty} \quad (5.125)$$

### 5.3.3.3 Transition de phase en $s = \mu$

Un développement de  $\Phi_-(s)$  au voisinage de  $s = \mu^-$  montre que  $P(G_N = \nu)$  a un **comportement gaussien près de sa moyenne** au moins juste à gauche de la moyenne. On verra un peu plus loin que ce comportement reste valable à droite de la moyenne, c'est à dire que  $\Phi$  est au moins continue avec ses deux premières dérivées continues au point de transition  $s = \mu$ .

Pour  $s < \mu$ , on a en effet  $\Phi_-(s) \sim \frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}$  pour  $s$  proche de  $\mu$  où  $\mu = \frac{8}{3\pi\sqrt{b}}$  et  $\sigma = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{b}}$ , soit :

$$\boxed{P(G_N = s\sqrt{N}) \approx e^{-\frac{N^2(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ quand } s \rightarrow \mu^-} \quad (5.126)$$

Dans la limite  $N \rightarrow \infty$  la distribution (5.109) est très piquée autour de sa moyenne. Une méthode du col montre donc facilement que la moyenne et la variance de  $G_N$  sont déterminées par le voisinage de la moyenne  $s = \mu$ , ce sont celles de la gaussienne (5.126) :

$$\langle G_N \rangle = \langle h \rangle \sim \mu\sqrt{N} \sim \frac{8}{3\pi}\sqrt{\frac{N}{b}} \quad (5.127)$$

$$\text{Var}(G_N) = \langle G_N^2 \rangle - \langle G_N \rangle^2 \sim \frac{\sigma^2}{N} \sim \frac{2}{\pi^2 b N} \quad (5.128)$$

Ce comportement est à nouveau très différent du cas d'interfaces indépendantes pour lequel  $\langle G_N \rangle = m = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{b}\Gamma(\alpha+1/2)}$  donné Eq (5.26) est indépendant de  $N$  et  $\sqrt{\text{Var}(G_N)} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{N}}$  où  $\sigma_1^2 \equiv \text{Var}(h) = \frac{1+2\alpha}{2b} - \frac{1}{b} \left( \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1/2)} \right)^2$  cf Eq. (5.26). En particulier, pour des interfaces indépendantes,  $\langle G_N \rangle$  et  $\text{Var}(G_N)$  dépendent fortement du paramètre  $\alpha$  du potentiel  $V(h) = \frac{b^2 h^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2h^2}$  vu par chaque interface, tandis qu'il n'apparaît pas à l'ordre dominant en  $N$  dans le cas d'interfaces qui ne se croisent pas.

Le développement de  $\Phi = \Phi_+$  à droite de la moyenne est beaucoup plus compliqué. J'ai pu montrer [NM09] que la **transition** de  $s = \mu$  se traduit par une non-analyticité très faible de la fonction  $\Phi$  au point  $\mu$ , plus précisément une **singularité essentielle** :

$$\boxed{\Phi_+(s) - \Phi_-(s) \sim -\pi\sqrt{b}(s-\mu)e^{-\frac{8}{\pi\sqrt{b}(s-\mu)}}e^{4(\ln 2-1)} \text{ quand } s \rightarrow \mu^+} \quad (5.129)$$

$\Phi$  n'est donc pas seulement deux fois dérivable mais indéfiniment dérivable en  $s = \mu$  et pourtant elle n'est pas analytique en ce point.

Pour mettre en évidence cette non-analyticité, il faut faire un développement précis de  $\Phi_+$  pour  $s \rightarrow \mu^+$ , ce qui correspond à  $R \rightarrow 0^-$ . On définit les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{L_1}{L_2 - L_1} \longrightarrow 0^+ \\ X &= -\frac{\ln \xi}{4} + \ln 2 \longrightarrow +\infty \end{aligned} \quad \text{pour } s \rightarrow \mu^+ \quad (5.130)$$

Dans la suite,  $\xi$  est le petit paramètre utilisé pour le développement asymptotique (pour  $s \rightarrow \mu^+$ ). Les termes qui apparaissent dans le développement seront en fait de la forme

$O(X^\eta \xi^\theta) = O(|\ln \xi|^\eta \xi^\theta)$  avec  $\theta \geq 0$ . Comme  $X^\eta \xi^\theta \gg X^{\eta'} \xi^{\theta'}$  ( $|\ln \xi|^\eta \xi^\theta \gg |\ln \xi|^{\eta'} \xi^{\theta'}$ ) pour  $0 \leq \theta < \theta'$  et pour tous  $\eta, \eta'$ , on peut faire un développement en puissances de  $\xi$  de la forme  $\sum_{\theta \geq 0} c_\theta(X) \xi^\theta$ , où les coefficients  $c_\theta(X)$  exacts peuvent être calculés comme fonctions de  $X$  sans les développer en le grand paramètre  $X$ . Ainsi on garde tous les ordres du développement en  $X$  (c'est à dire en  $\ln \xi$ ).

Dans la limite  $s \rightarrow \mu^+$ , ie  $\xi \rightarrow 0^+$  (et  $X = \ln \xi \rightarrow \infty$ ), on trouve :

$$\begin{aligned} L_1 &= \xi \left( \frac{4X}{X-1} \right) + O(\xi^2) \\ L_2 &= \left( \frac{4X}{X-1} \right) + \xi \left( -\frac{(4X+1)}{2(X-1)^2} \right) + O(\xi^2) \\ R &= \frac{-\pi}{\sqrt{X(X-1)}} + \xi \left( \frac{\pi(4X^2+2X-1)}{16[X(X-1)]^{3/2}} \right) + O\left(\frac{\xi^2}{X}\right) \end{aligned} \quad (5.131)$$

A l'ordre dominant, on retrouve les mêmes valeurs que dans la limite  $s \rightarrow \mu^-$  :  $L_2 \rightarrow 4$  comme  $L \rightarrow 4$ ,  $L_1 \rightarrow 0$  et  $R \rightarrow 0$ . On retrouve une densité à support  $]0, 4]$ , c'est la densité moyenne de Wishart en l'absence de contrainte sur la valeur de  $G_N$  (loi de Marčenko-Pastur, cf Eq. (2.42)).

On veut développer la densité  $\rho_c$  donnée Eq. (5.116) pour  $s \rightarrow \mu^+$ . Pour  $y \in ]0, 1[$  fixé et  $\xi \rightarrow 0$  ( $s \rightarrow \mu^+$ ), on a :

$$J(\xi, y) = -2 + 2\sqrt{1-y} \operatorname{argth}(\sqrt{1-y}) - \frac{\xi \ln \xi}{2y} + O(\xi) \quad \text{et} \quad L_1 = O(\xi) \quad (5.132)$$

A l'ordre zéro en  $\xi$ , la densité est la même que pour  $s \rightarrow \mu^-$  (5.103), elle diverge en  $x = 0$  :

$$\rho_c(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L_2-x}{x}} - \frac{1}{4\pi X} \sqrt{\frac{L_2}{x}} \operatorname{argth} \left( \sqrt{1 - \frac{x}{L_2}} \right) + O(\xi) \quad (5.133)$$

Pour  $s > \mu$ , ie  $R < 0$ , la densité  $\rho_c(x)$  a un support fini  $[L_1, L_2]$  avec  $L_1 > 0$  et s'annule en  $x = L_1$  et  $x = L_2$ . Mais la contrainte  $\rho_c(L_1) = 0$  n'est pas vérifiée dans Eq. (5.133). En fait, quand  $L_1 = O(\xi)$ , la région  $x$  proche de  $L_1$ , donc proche de 0, devient négligeable et ne contribue pas au premier ordre du développement. On s'aperçoit donc que la limite  $s \rightarrow \mu^+$  est singulière pour  $\rho_c$ . Il est ainsi préférable d'étudier directement la limite des intégrales de  $\rho_c$  :  $\rho_c$  n'apparaît dans le résultat final (l'énergie  $E_s[\rho_c]$ ) que dans des intégrales du type  $\int dx f_1(x) \rho_c(x)$  pour diverses fonctions  $f_1$ . Cela signifie qu'il vaut mieux développer les intégrales du type  $\int dy J(\xi, y) \sqrt{y+\xi}$  ou  $\int dy J(\xi, y) \ln y$  directement au lieu de développer  $J(\xi, y)$  au début. En fait, les limites  $y \rightarrow 0$  et  $\xi \rightarrow 0$  ne commutent pas. Le développement de  $J(\xi, y)$  en puissances de  $\xi$  génère des puissances de plus en plus négatives de  $y$  qui font diverger les intégrales du type  $\int dy J(\xi, y) \ln y$  en zéro.

Avant de calculer l'énergie au point col dans la limite  $s \rightarrow \mu^+$ , il faut d'abord développer la contrainte  $\int dx \rho_c(x) \sqrt{x} = s\sqrt{b}$  qui fixe la valeur du centre de masse  $G_N = s\sqrt{N}$ . On a :

$$s\sqrt{b} = \int_{L_1}^{L_2} dx \rho_c(x) \sqrt{x} = (L_2 - L_1)^{3/2} \int_0^1 dy \rho(y) \sqrt{y+\xi} \quad (5.134)$$

D'après l'expression de  $\rho_c$  (5.116), on voit qu'il faut développer pour  $\xi \rightarrow 0$  l'intégrale :

$$I(\xi) = \int_0^1 dy \frac{\sqrt{y+\xi} J(\xi, y)}{\sqrt{y(1-y)}} = \int_0^1 dy \frac{\sqrt{y+\xi}}{\sqrt{y(1-y)}} \int_0^1 dt \frac{\sqrt{t(1-t)}}{\sqrt{t+\xi}} \frac{1}{t-y} \quad (5.135)$$

$I(\xi)$  est une intégrale double impropre avec partie principale, elle n'est donc pas facile à développer directement. On la transforme d'abord pour se débarrasser de la partie principale :

$$I(\xi) = I(\xi = 0) + \xi f_0(\xi) \quad (5.136)$$

avec

$$f_0(\xi) = \int_0^1 dy \int_0^1 dt \frac{\sqrt{(1-t)}}{\sqrt{y(1-y)}} \frac{1}{\sqrt{t+\xi} \left[ \sqrt{t(y+\xi)} + \sqrt{y(t+\xi)} \right]} \quad (5.137)$$

où  $I(\xi = 0) = -2$  (se calcule facilement) et  $f_0$  est une intégrale double sans partie principale, plus facile à développer que  $I$ . Pourtant la limite  $\xi \rightarrow 0$  et l'intégration sur  $y$  ne commutent pas comme on a déjà remarqué, on ne peut donc pas directement développer l'intégrand. Il faut trouver une méthode plus subtile. Pour cela (voir annexe... pour les détails) j'ai coupé l'intégrale  $f_0(\xi)$  en une somme d'intégrales dont certaines sont négligeables et d'autres plus faciles à calculer. Finalement (voir annexe...) j'ai obtenu  $I(\xi)$  au premier ordre en  $\xi$  (mais à tous les ordres en  $X$ , ie en  $\ln \xi$ ) :

$$I(\xi) = -2 + \xi \left[ 8X^2 - 4X - 1 \right] + O(\xi^2 X^2) \quad \text{quand } \xi \rightarrow 0 \quad (5.138)$$

Finalement la contrainte  $\int dx \rho_c(x) \sqrt{x} = s\sqrt{b}$  est donnée dans la limite  $\xi \rightarrow 0$  par

$$s\sqrt{b} = \frac{2(4X-3)\sqrt{X}}{3\pi(X-1)^{3/2}} + \xi \left( \frac{-16X^3 + 12X^2 - 2X + 1}{8\pi(X-1)^{5/2}\sqrt{X}} \right) + O(\xi^2 X) \quad (5.139)$$

En particulier, quand  $\xi \rightarrow 0^+$  ( $X \rightarrow \infty$ ),  $s\sqrt{b}$  tend comme attendu vers la moyenne  $\mu\sqrt{b} = \frac{8}{3\pi}$ .

La formule ci-dessus (5.139) peut être inversée pour exprimer  $X$  et  $\xi$  comme fonctions de  $(s - \mu)$ . Comme  $\mu\sqrt{b} = \frac{8}{3\pi}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} X &= \frac{2}{\pi(s-\mu)\sqrt{b}} + 1 + O(s-\mu) \\ \xi &= e^{\frac{-8}{\pi(s-\mu)\sqrt{b}}} e^{4(\ln 2 - 1)} (1 + O(s-\mu)) \end{aligned} \quad \text{quand } s \rightarrow \mu^+ \quad (5.140)$$

L'énergie de point col est donnée par Eq. (5.95), donc en utilisant Eq. (5.98), on trouve :

$$E_s[\rho_c] = \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} dx \rho_c(x) x - \frac{R}{2} s\sqrt{b} - \frac{D}{2} \quad (5.141)$$

où le multiplicateur de Lagrange  $D$  est obtenu en remplaçant  $x$  par  $L_1$  dans l'équation (5.98). L'intégrale  $\int_{L_1}^{L_2} dx \rho_c(x) x$  se développe assez facilement pour  $\xi \rightarrow 0$ . Finalement

on obtient l'expression de l'énergie pour  $s \rightarrow \mu^+$  ( $\xi \rightarrow 0$ ), au premier ordre en  $\xi$  et à tous les ordres en  $X = \ln 2 - \frac{\ln \xi}{4}$  :

$$E_s[\rho_c] = \ln \left[ \frac{X-1}{X} \right] + \left( \frac{3X^2 - 4X + 2}{2(X-1)^2} \right) + \xi \left( \frac{-16X^3 + 16X^2 - 6X + 1}{8X(X-1)^3} \right) + O(\xi^2) \quad (5.142)$$

Avec (5.140) qui donne  $\xi$  en fonction de  $(s - \mu)$  quand  $s \rightarrow \mu^+$ , on peut ainsi déduire le comportement de  $\mathcal{P}(G_N = s\sqrt{N}) \propto e^{-N^2 E_s[\rho_c]}$  (pour grand  $N$ ) dans la limite  $s \rightarrow \mu^+$ .

Pour montrer que  $\Phi$  a une non-analyticité en  $s = \mu$ , il faut comparer  $E_s[\rho_c]$  à droite et à gauche de  $\mu$ . À l'ordre zéro en  $\xi$ , on retrouve exactement les mêmes expressions qu'à gauche de  $\mu$  ( $R \rightarrow 0^+$ ). La contrainte qui fixe la valeur de  $G_N = s\sqrt{N}$  devient :

$$s\sqrt{b} = \frac{2(4X-3)\sqrt{X}}{3\pi(X-1)^{3/2}} + O(\xi) = \frac{L_2^{3/2}}{12\pi} + \frac{L_2^{1/2}}{\pi} + O(\xi) \quad (5.143)$$

À tous les ordres en  $\ln \xi$  (ou  $X$  -mais à l'ordre zéro en  $\xi$ ), on retrouve exactement donc la même équation que pour  $s < \mu$  (5.104), qui donne  $L$  en fonction de  $s$ . Le multiplicateur de Lagrange  $R$  est de même donné à l'ordre zéro en  $\xi$  par la même fonction de  $L_2$  ( $L$ ) que pour  $s < \mu$ , voir Eq. (5.104) :

$$\frac{2\pi}{\sqrt{L_2}} - \frac{\pi\sqrt{L_2}}{2} = \frac{-\pi}{\sqrt{X(X-1)}} + O(\xi) = R + O(\xi) \quad (5.144)$$

L'énergie elle-même est à l'ordre zéro en  $\xi$  mais à tous les ordres en  $\ln \xi$  (ou  $X$ ) la même que pour  $s < \mu$ . Ainsi  $\Phi(s)$  est indéfiniment dérivable. Pour voir la non-analyticité de  $\Phi$ , il faut aller à l'ordre un en  $\xi$ .

Avec (5.142) on obtient la différence entre  $E_s[\rho_c]$  juste à droite et juste à gauche de  $\mu$  :

$$E_s[\rho_c]^+ - E_s[\rho_c]^- = \xi \left( \frac{-16X^3 + 16X^2 - 6X + 1}{8X(X-1)^3} \right) + O(\xi^2) \quad (5.145)$$

Avec l'expression de  $\xi$  et  $X = \ln 2 - \frac{\ln \xi}{4}$  en fonction de  $s$  quand  $s \rightarrow \mu^+$  données Eq. (5.140), on trouve finalement pour  $\Phi_+(s) - \Phi_-(s) = E_s[\rho_c]^+ - E_s[\rho_c]^-$  :

$$\Phi_+(s) - \Phi_-(s) \sim -\pi\sqrt{b}(s-\mu) e^{-\frac{s}{\pi\sqrt{b}(s-\mu)}} e^{4(\ln 2 - 1)} \quad \text{quand } s \rightarrow \mu^+ \quad (5.146)$$

C'est une singularité essentielle.



## - Chapitre 6 -

---

---

# Processus de Pearcey

---

Aptekarev, Bleher et Kuijlaars [ABK05], voir aussi [ADVM09], ont introduit un nouveau modèle de marcheurs vicieux qui consiste en  $N$  mouvements browniens à  $1D$  conditionnés à ne pas se croiser sur l'intervalle de temps  $0 < t < T$ , à démarrer tous à l'origine  $x = 0$  au temps  $t = 0$  et à se rejoindre en deux points au temps  $T$ , c'est à dire que les  $(N - r)$  mouvements browniens supérieurs se rejoignent en  $+a$  au temps  $T$ , et les  $r$  inférieurs en  $(-a)$  au même temps  $T$ . Ce modèle est appelé **processus de Pearcey**. Pour ce processus, la distribution transverse des positions à un temps  $t$  est donnée par la distribution des valeurs propres d'une **matrice aléatoire gaussienne avec terme de source**.

Ce chapitre est consacré au **processus de Pearcey** et à l'étude d'un **gaz de Coulomb généralisé** (qui comprend le cas du processus de Pearcey) que j'ai été amenée à considérer selon une idée originale de Grégory Schehr et de mon directeur de thèse Satya Majumdar. Ces modèles présentent une **transition de phase** intéressante entre un régime avec densité à support *connexe* et un régime avec densité à support fait de *deux segments disjoints*. A l'aide d'une méthode d'analyse complexe tirée d'un article de Bueckner [Bue66], nous avons pu calculer la densité au point critique de transition dans ces deux modèles. J'ai aussi trouvé une façon plus élémentaire mais calculatoire de déterminer la densité au point critique. Ma méthode s'appuie sur la solution connue d'une équation de type Tricomi généralisé. Ces résultats ne sont pas publiés.

Je présente d'abord, dans la section 6.1, un modèle simple avec un seul mouvement brownien ("marcheur aléatoire") conditionné à finir en  $+a$  avec probabilité  $1/2$ , en  $-a$  avec probabilité  $1/2$ . Dans ce modèle, on peut calculer facilement, à partir des résultats présentés au chapitre 4, la distribution exacte de la position de ce marcheur à un temps intermédiaire. Je définis ensuite le processus de **Pearcey** proprement dit, pour  $N$  marcheurs aléatoires, cf section 6.2. Je montre comment calculer à l'aide du formalisme de Feynman-Kac (cf section 4.2.3) la distribution jointe des positions de ces marcheurs à un temps donné (distribution transverse). Cela me permet de retrouver le résultat d'Aptekarev, Bleher et Kuijlaars : la distribution des positions des marcheurs à un temps donné est la même que celle des valeurs propres d'une **matrice aléatoire gaussienne avec source** -un modèle de matrices aléatoires introduit par Brézin et Hikami, voir



[BH98, BK04]. Ce modèle est connu pour présenter une transition de phase. Le processus de Pearcey a donc une transition de phase à un **temps critique**  $t_c$  : pour  $t < t_c$ , la densité des valeurs propres (ou positions des marcheurs) a un support fini connexe. Pour  $t > t_c$  la densité a un support fini fait de deux segments disjoints. J'explique comment calculer en principe par une méthode de gaz de Coulomb la densité moyenne des positions des marcheurs pour le processus de Pearcey, mais les équations intégrales auxquelles cela conduit ne peuvent pas être simplement résolues par la méthode de Tricomi, elles sont plus compliquées. Je présente alors dans la section 6.3 la méthode proposée par Bueckner [Bue66] pour résoudre un certain type d'équations intégrales correspondant à la situation au point critique  $t_c$ . Sa méthode s'appuie sur l'analyse complexe. Je présente aussi une autre méthode que j'ai trouvée moi-même et qui permet de résoudre ces équations en se ramenant à une équation intégrale de type Tricomi généralisé, cf section 6.4. Enfin je définis section 6.5 le **gaz de Coulomb généralisé** sous la forme proposée par Satya. Ce modèle présente une transition de phase comme dans le cas du processus de Pearcey et nous avons pu à nouveau calculer la densité moyenne au point critique avec ma méthode ainsi qu'avec celle de Bueckner.

## 6.1 UN MODÈLE SIMPLE AVEC UN SEUL MARCHEUR

Commençons par un modèle simple où l'on considère un seul mouvement brownien standard  $\{x(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  à  $1D$ , d'origine  $x(0) = 0$  et conditionné à terminer au temps  $T$  en  $x = +a$  avec probabilité  $1/2$ , en  $x = -a$  avec probabilité  $1/2$ . Avec ces conditions aux bord, on appellera  $\{x(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  "**mouvement brownien de Pearcey**". On s'intéresse comme dans le modèle d'interfaces précédent à la distribution marginale  $\mathcal{P}_t(x)$  de la position  $x$  de ce mouvement brownien à un temps  $t$  fixé,  $0 < t < T$ . J'ai regardé ce modèle proposé par Satya pour comprendre les effets du conditionnement sur la position finale sur un seul marcheur et distinguer ainsi dans le cas de  $N$  marcheurs vicieux les effets liés au conditionnement et ceux liés à la contrainte de non-croisement.

### 6.1.1 Mouvement brownien $1D$

On a déjà vu que le poids statistique d'un mouvement brownien standard sans conditions au bord spécifiques,  $\{x(t), 0 < t < T\}$ , est donné, cf Eq. (4.6), par :

$$\mathcal{P} [\{x(t)_{0 \leq t \leq T}\}] = \frac{1}{Z_T} e^{-\frac{1}{2} \int_0^T dt \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \quad (6.1)$$

où la fonction de partition  $Z_T$  (normalisation) s'exprime comme une intégrale de chemin :

$$Z_T = \int \mathcal{D}x(t) e^{-\frac{1}{2} \int_0^T dt \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \quad (6.2)$$

On a vu également que le mouvement brownien standard usuel (avec extrémité droite  $x(T)$  non fixée) est un processus de Markov avec probabilité de transition  $p_\tau(y|x)$  gaussienne, voir Eq. (4.3) :

$$p_\tau(y|x) = \mathcal{P} [x(t + \tau) = y | x(t) = x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\tau}} \quad (6.3)$$

Pour une trajectoire brownienne  $\{x(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  d'extrémités  $x(0) = 0$  et  $x(T) = a$ , la probabilité marginale  $\mathcal{P}_t(x|a)$  de se trouver en  $x$  au temps  $t$  (sachant que  $x(T) = a$ ) est donnée par :

$$\mathcal{P}_t(x|a) = \frac{p_{T-t}(a|x) p_t(x|0)}{p_T(a|0)} \quad (6.4)$$

En effet, le mouvement brownien étant markovien, ce qui se passe de  $t$  à  $T$  est indépendant de ce qui s'est passé avant, donc les probabilités de transition se multiplient. La normalisation  $p_T(a|0)$  permet de se restreindre aux trajectoires qui vont de 0 à  $a$  comme fixé dans les hypothèses. Finalement on retrouve comme Eq. (4.27) (avec  $x_0 = 0$  et  $y_0 = a$ ) :

$$\mathcal{P}_t(x|a) = \sqrt{\frac{T}{2\pi t(T-t)}} e^{-\left(x - a\frac{t}{T}\right)^2 \frac{T}{2t(T-t)}} \quad (6.5)$$

### 6.1.2 Mouvement brownien séparé en deux

Revenons maintenant au **mouvement brownien**  $\{x(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  **de Pearcey**, ie avec condition initiale  $x(0) = 0$  et condition finale  $x(T) = \pm a$ ,  $+a$  avec probabilité  $1/2$ ,  $-a$  avec probabilité  $1/2$ . On cherche la distribution marginale de  $x$  au temps  $t$  pour ce processus notée  $\mathcal{P}_t^{\text{pear}}(x)$ . Comme il y a probabilité  $1/2$  de finir en  $a$ ,  $1/2$  en  $-a$ , on a donc :

$$\mathcal{P}_t^{\text{pear}}(x) = \frac{1}{2} \mathcal{P}_t(x|a) + \frac{1}{2} \mathcal{P}_t(x|-a) \quad (6.6)$$

où  $\mathcal{P}_t(x|a)$  est la probabilité conditionnelle d'être en  $x$  à  $t$  sachant qu'on finit en  $a$ , elle est donnée Eq. (6.5). D'où finalement :

$$\mathcal{P}_t^{\text{pear}}(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{2\pi t(T-t)}} \left( e^{-\left(x - a\frac{t}{T}\right)^2 \frac{T}{2t(T-t)}} + e^{-\left(x + a\frac{t}{T}\right)^2 \frac{T}{2t(T-t)}} \right) \quad (6.7)$$

Pour  $T = 1$  et  $t = \tau$ , cela se simplifie un peu :

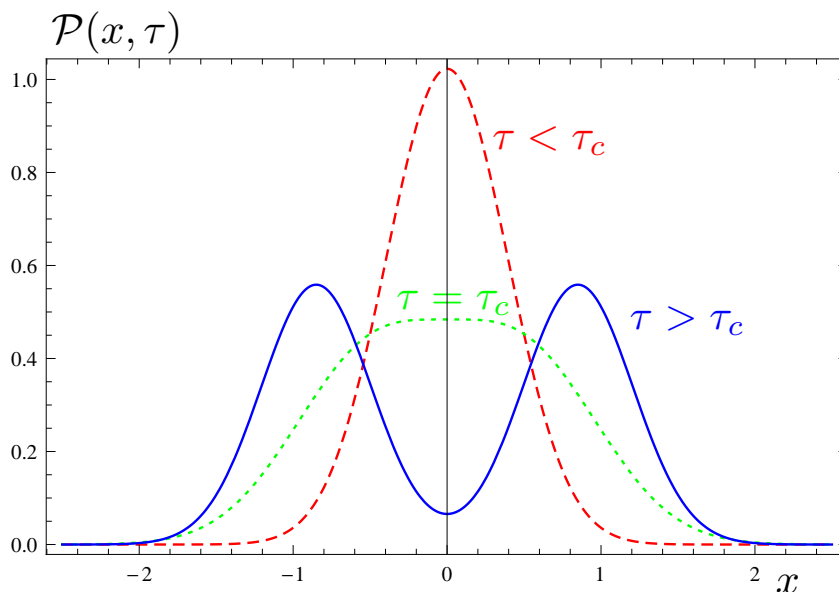
$$\mathcal{P}_\tau^{\text{pear}}(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau(1-\tau)}} \left( e^{-\frac{(x-a\tau)^2}{2\tau(1-\tau)}} + e^{-\frac{(x+a\tau)^2}{2\tau(1-\tau)}} \right) \quad (6.8)$$

Si on trace cette distribution, on s'aperçoit qu'il existe un **temps critique**  $\tau_c$  tel que la distribution a la forme d'un *unique pic* en 0 pour  $\tau < \tau_c$  mais elle est faite de *deux pics symétriques* par rapport à 0 pour  $\tau > \tau_c$  (avec un minimum local en 0), voir figure 6.1. Ce minimum local  $\mathcal{P}_\tau^{\text{pear}}(0)$  en 0 pour  $\tau > \tau_c$  est positif et diminue quand  $\tau$  augmente, il tend vers 0 quand  $\tau \rightarrow 1$ .

A tout temps  $\tau$  on a  $\left. \frac{d\mathcal{P}_\tau^{\text{pear}}(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0$ . Le temps  $\tau_c$  est caractérisé par un changement de concavité en  $x = 0$ .  $\mathcal{P}_\tau^{\text{pear}}(x)$  comme fonction de  $x$  est en effet concave en  $x = 0$  si  $\tau < \tau_c$  et convexe en  $x = 0$  si  $\tau > \tau_c$ . Ainsi on a :

$$\left. \frac{d^2\mathcal{P}_\tau^{\text{pear}}(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 0 \text{ si et seulement si } \tau = \tau_c = \frac{1}{1+a^2} \quad (6.9)$$

Pour  $a > 0$ , on a bien  $0 < \tau_c < 1$ . Si  $a = 0$  on a  $\tau_c = 1$ , c'est à dire que seul le régime à un pic subsiste. Dans ce cas en effet on a  $+a = -a$  donc il s'agit d'un mouvement



**Figure 6.1** – Distribution marginale  $\mathcal{P}(x, \tau)$  de  $x$  au temps  $\tau$  en fonction de  $x$  et à différents temps. Ici  $a = 1$ , donc  $\tau_c = 1/2$ . On voit bien le pic unique en 0 quand  $\tau < \tau_c$  (ligne rouge à tirets, ici  $\tau = 0.15$ ) et les deux pics quand  $\tau > \tau_c$  avec minimum local en 0 (ligne bleue pointillée, ici  $\tau = 0.85$ ). A  $\tau = \tau_c$  (ligne verte pleine, ici  $\tau_c = 0.5$ ), il y a une seule bosse en 0 mais son sommet est très plat car en 0 la dérivée seconde s’annule aussi dans ce cas.

brownien normal qui démarre à 0 et retourne en 0. Alors  $\mathcal{P}_\tau^{\text{pear}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau(1-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{2\tau(1-\tau)}}$  est simplement une gaussienne centrée en 0 à tout  $0 < \tau < 1$ . Au contraire, si  $a \rightarrow \infty$  alors  $\tau_c = 0$ , seul subsiste le régime à deux pics.

Par contre, quel que soit  $\tau$  ( $\tau < \tau_c$  ou  $\tau \geq \tau_c$ ), la distribution marginale de la position au temps  $\tau$ , ie  $\mathcal{P}_\tau^{\text{pear}}(x)$ , a pour support  $\mathbb{R}$  tout entier (le support est toujours connexe).

## 6.2 PROCESSUS DE PEARCEY

On considère maintenant le **processus de Pearcey** proprement dit, c’est à dire  $N$  trajectoires browniennes (à  $1D$ ), les  $\{x_i(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  pour  $1 \leq i \leq N$ , qui ne se croisent pas (“vicious walkers”), démarrent toutes en  $x = 0$  au temps  $t = 0$  et sont conditionnées à finir en  $\pm a$  à  $t = T$  : les  $r$  trajectoires inférieures se rejoignent en  $x = -a$  à  $T$ , les  $(N - r)$  supérieures en  $x = a$  à  $T$ .

### 6.2.1 Distribution marginale des positions

On veut calculer comme dans le cas des interfaces la **distribution marginale**  $\mathcal{P}_t^{\text{pear}}(x_1, \dots, x_N)$  des positions  $\{x_i\}$  des mouvements browniens au temps  $t$ . A cause de la contrainte de non-croisement, on ne peut pas imposer brutalement que plusieurs des trajectoires browniennes commencent (ou finissent) au même point. Ainsi on va d’abord supposer que les conditions aux bords sont les suivantes :

$$x_i(0) = (i - 1)\epsilon \equiv \epsilon_i \text{ et } x_i(T) = a_i \text{ avec } a_1 < a_2 < \dots < a_N \quad (6.10)$$

On fera tendre à la fin seulement  $\epsilon$  vers 0 et les  $a_i$  vers les deux valeurs  $\pm a$ . Le résultat final ne doit pas dépendre de  $\epsilon$ .

Comme le mouvement brownien est markovien, la probabilité jointe de  $\{x_1, \dots, x_N\}$  au temps  $t$  s'écrit à un facteur de normalisation près (mais en prenant en compte les conditions au bord) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t^{\text{pear}}(x_1, \dots, x_N) \propto & \prod_{i=1}^N \int_{x_i(t)=x_i}^{x_i(T)=a_i} \mathcal{D}x_i(t) e^{-\frac{1}{2} \sum_i \int_t^T d\tau \left(\frac{dx_i}{d\tau}\right)^2} \times \\ & \times \prod_{i=1}^N \int_{x_i(0)=\epsilon_i}^{x_i(t)=x_i} \mathcal{D}x_i(t) e^{-\frac{1}{2} \sum_i \int_0^t d\tau \left(\frac{dx_i}{d\tau}\right)^2} \end{aligned} \quad (6.11)$$

On va des  $\epsilon_i$  aux  $x_i$  du temps 0 au temps  $t$ , puis des  $x_i$  aux  $a_i$  du temps  $t$  au temps final  $T$ . Comme on a vu pour dans la section 4.3.2, on peut récrire les intégrales de chemin ci-dessus comme des **propagateurs quantiques à  $N$  particules, ici  $N$  fermions** du fait de la contrainte de *non-croisement* des trajectoires :

$$\mathcal{P}_t^{\text{pear}}(x_1, \dots, x_N) \propto \langle a_1, \dots, a_N | e^{-\hat{H}(T-t)} | x_1, \dots, x_N \rangle \langle x_1, \dots, x_N | e^{-\hat{H}t} | \epsilon_1, \dots, \epsilon_N \rangle \quad (6.12)$$

où  $\hat{H}$  le Hamiltonien de  $N$  **particules libres** :

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \hat{H}_i = \sum_i \frac{\hat{p}_i^2}{2} \quad (6.13)$$

Après normalisation de la densité de probabilité, on trouve donc :

$$\mathcal{P}_t^{\text{pear}}(x_1, \dots, x_N) = \frac{\langle a_1, \dots, a_N | e^{-\hat{H}(T-t)} | x_1, \dots, x_N \rangle \langle x_1, \dots, x_N | e^{-\hat{H}t} | \epsilon_1, \dots, \epsilon_N \rangle}{\langle a_1, \dots, a_N | e^{-\hat{H}T} | \epsilon_1, \dots, \epsilon_N \rangle} \quad (6.14)$$

Pour une particule, on sait d'après l'Eq.(4.22) que :

$$\langle x | e^{-\frac{\hat{p}^2}{2}\tau} | y \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau}} \quad (6.15)$$

Les fonctions d'onde à  $N$  fermions doivent être antisymétrisées. Ainsi l'état  $|x_1, \dots, x_N\rangle$  à  $N$  fermions est donné par une somme sur les permutations  $\sigma$  de  $\{1, \dots, N\}$  (de signature  $\epsilon_\sigma = \pm 1$ ) :

$$|x_1, \dots, x_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma} \epsilon_{\sigma} |x_{\sigma_1}\rangle \otimes \dots \otimes |x_{\sigma_N}\rangle \quad (6.16)$$

où  $|x_j\rangle$  est l'état à une particule quantique de position  $x_j$ . Comme  $\hat{H} = \sum_i \frac{\hat{p}_i^2}{2}$  est symétrique en les particules  $i$ , les propagateurs à  $N$  **fermions** de l'équation (6.12) s'expriment donc comme des **déterminants** des propagateurs à une particule, par exemple :

$$\langle x_1, \dots, x_N | e^{-\hat{H}t} | \epsilon_1, \dots, \epsilon_N \rangle = \det \left[ \langle x_i | e^{-\frac{\hat{p}^2}{2}t} | \epsilon_j \rangle \right]_{i,j} = \det \left[ e^{-\frac{(x_i - \epsilon_j)^2}{2t}} \right]_{i,j} \quad (6.17)$$

On a donc d'après Eq. (6.14) :

$$\mathcal{P}_t^{\text{pear}}(x_1, \dots, x_N) = \frac{\det \left[ e^{-\frac{(a_i - x_j)^2}{2(T-t)}} \right]_{i,j} \det \left[ e^{-\frac{(x_i - \epsilon_j)^2}{2t}} \right]_{i,j}}{\det \left[ e^{-\frac{(a_i - \epsilon_j)^2}{2T}} \right]_{i,j}} \quad (6.18)$$

Reste à calculer ces déterminants. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\det \left[ e^{-\frac{(x_i - \epsilon_j)^2}{2t}} \right]_{i,j} &= e^{-\sum_i \frac{x_i^2}{2t}} e^{-\sum_j \frac{\epsilon_j^2}{2t}} \det \left[ e^{\frac{x_i \epsilon_j}{t}} \right]_{i,j} \\
&= e^{-\sum_i \frac{x_i^2 + \epsilon_i^2}{2t}} \det \left[ e^{\frac{x_i \epsilon(j-1)}{t}} \right]_{i,j} \\
&= e^{-\sum_i \frac{x_i^2 + \epsilon_i^2}{2t}} \prod_{i < j} \left( e^{\frac{x_j \epsilon}{t}} - e^{\frac{x_i \epsilon}{t}} \right)
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Pour le passage à la dernière ligne ci-dessus, on utilise l'expression explicite du déterminant de *Vandermonde*  $\Delta(y_i) = \det [y_i^{j-1}]_{i,j} = \prod_{i < j} (y_j - y_i)$ . A l'ordre dominant en  $\epsilon$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , on trouve donc :

$$\det \left[ e^{-\frac{(x_i - \epsilon_j)^2}{2t}} \right]_{i,j} \sim \left( \frac{\epsilon}{t} \right)^{\frac{N(N-1)}{2}} e^{-\sum_i \frac{x_i^2}{2t}} \prod_{i < j} (x_j - x_i) \tag{6.20}$$

De même on montre quand  $\epsilon \rightarrow 0$  :

$$\det \left[ e^{-\frac{(a_i - \epsilon_j)^2}{2T}} \right]_{i,j} \sim \left( \frac{\epsilon}{T} \right)^{\frac{N(N-1)}{2}} e^{-\sum_i \frac{a_i^2}{2T}} \prod_{i < j} (a_j - a_i) \tag{6.21}$$

L'autre déterminant au numérateur s'exprime sous la forme :

$$\det \left[ e^{-\frac{(a_i - x_j)^2}{2(T-t)}} \right]_{i,j} = e^{-\sum_i \frac{a_i^2 + x_i^2}{2(T-t)}} \det \left[ e^{\frac{a_i x_j}{T-t}} \right]_{i,j} \tag{6.22}$$

En utilisant Eq. (6.20), (6.21) et (6.22), on peut donc récrire la distribution marginale des positions donnée Eq. (6.18) dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  sous la forme :

$$\mathcal{P}_t^{\text{pear}}(x_1, \dots, x_N) = c_N \frac{e^{-\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 T}{2t(T-t)} - \sum_{i=1}^N \frac{a_i^2 t}{T(T-t)}} \det \left[ e^{\frac{a_i x_j}{T-t}} \right]_{i,j} \Delta(x_i)}{\Delta(a_i)} \tag{6.23}$$

où  $\Delta(x_i) = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$  est le déterminant de Vandermonde des  $x_i$  et où  $c_N = (T/t)^{\frac{N(N-1)}{2}}$  est une constante de normalisation. La dépendance en  $\epsilon$  a donc bien disparu. On notera que la distribution ci-dessus est complètement symétrique en les  $x_i$ . Cela signifie qu'elle ne suppose pas  $x_1 < \dots < x_N$  mais seulement qu'il existe une permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, N\}$  telle que  $x_{\sigma(1)} < \dots < x_{\sigma(N)}$ . Cela vient du fait que les fermions sont indiscernables tandis que les marcheurs aléatoires sont en réalité discernables (on peut les numéroter et les ordonner).

La distribution des positions Eq. (6.23) est en fait, à un changement de variables près, celle des valeurs propres d'une **matrice aléatoire gaussienne avec source externe** -un modèle introduit par Brézin et Hikami, voir [BH98, BK04]. Considérons en effet une matrice gaussienne hermitienne  $H$  avec source externe  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_N)$  :

$$\mathcal{P}(H) dH \propto e^{-\text{Tr}[H^2 - AH]} \tag{6.24}$$

Quand  $a_1 < \dots < a_N$  les valeurs propres de  $H$  sont des réels  $\lambda_i$  distribués selon la loi jointe :

$$\boxed{\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B_N e^{-\sum_i \lambda_i^2} \det [e^{a_i \lambda_j}] \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i)} \quad (6.25)$$

Cette expression provient de l'intégration sur les degrés de liberté angulaires. On écrit en effet  $H = U \Lambda U^\dagger$  où  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  et  $U$  unitaire. L'intégration sur la mesure de Haar unitaire  $\mu(dU)$  (définie section 1.3) fait apparaître l'intégrale d'Itzykson-Zuber [IZ80]  $\int \mu(dU) e^{\text{Tr}[AU\Lambda U^\dagger]}$  :

$$\int \mu(dU) e^{\text{Tr}[AU\Lambda U^\dagger]} = \left( \prod_{j=0}^{N-1} j! \right) \frac{\det [e^{a_i \lambda_j}]_{i,j}}{\Delta(a_i) \Delta(\lambda_i)} \quad (6.26)$$

Après dilatation des positions  $x_i$  et  $a_i$  dans le processus de Pearcey, ie si on pose  $\lambda_i = x_i \sqrt{\frac{T}{2t(T-t)}}$  et  $a_i \rightarrow a_i \sqrt{\frac{t}{T(T-t)}}$ , la distribution des positions Eq. (6.23) est alors exactement celle des valeurs propres Eq. (6.25).

Pour décrire vraiment le processus de Pearcey, reste maintenant à prendre dans Eq. (6.23) la limite où  $a_i \rightarrow -a$  pour  $i \leq r$  et  $a_i \rightarrow a$  pour  $i > r$ . Dans Eq. (6.23), à la fois  $\det [e^{\frac{a_i x_j}{T-t}}]_{i,j}$  et  $\Delta(a_i)$  tendent vers 0 dans cette limite, mais le rapport des deux tend vers une valeur finie. D'après [BK04], on a dans la limite  $\{a_1, \dots, a_N\} \rightarrow \underbrace{\{-a, \dots, -a\}}_r \underbrace{\{a, \dots, a\}}_{N-r}$  :

$$\lim \frac{\det [e^{\frac{a_i x_j}{T-t}}]_{i,j}}{\Delta(a_i)} = c_{r,N} \frac{\det [x_j^{d_i-1} e^{\frac{s_i a_i x_j}{T-t}}]_{i,j}}{a^{r(N-r)}} \quad (6.27)$$

où  $\begin{cases} d_i = i, & s_i = -1 & \text{si } i \leq r \\ d_i = i - r, & s_i = +1 & \text{si } i > r \end{cases}$

et où  $c_{r,N}^{-1} = 2^{r(N-r)} (T-t)^{\frac{r(r-1)}{2} + \frac{(N-r)(N-r-1)}{2}} \prod_{k=1}^{r-1} k! \prod_{k=1}^{N-r-1} k!$  est une constante (indépendante de  $x_i$  et de  $a$ ).

Finalement, la **distribution marginale des positions**  $x_i$  à un temps  $t$  pour le processus de **Pearcey** est donc donnée par :

$$\boxed{\mathcal{P}_t^{\text{pear}}(x_1, \dots, x_N) = C_N e^{-\sum_i \frac{x_i^2 T}{2t(T-t)}} \det [x_j^{d_i-1} e^{\frac{s_i a_i x_j}{T-t}}]_{i,j} \Delta(x_i)} \quad (6.28)$$

avec  $C_N = C_N(a, t, T)$  une constante de normalisation et

$$\begin{aligned} d_i &= i, & s_i &= -1 & \text{si } i &\leq r \\ d_i &= i - r, & s_i &= +1 & \text{si } i &> r \end{aligned} \quad (6.29)$$

On rappelle que la distribution ci-dessus Eq. (6.28) ne suppose pas  $x_1 < \dots < x_N$  mais seulement  $x_i \neq x_j$  pour tout  $i \neq j$ , ou de façon équivalente  $x_{\sigma(1)} < \dots < x_{\sigma(N)}$  pour une *permutation*  $\sigma$  de  $\{1, \dots, N\}$ .

D'après ce qu'on a vu plus haut, cf Eq. (6.25), après une dilatation des positions  $x_i$  et  $\pm a$ , la distribution transverses des positions d'un **processus de Pearcey** Eq. (6.28) est la même distribution que celle des valeurs propres d'une **matrice aléatoire gaussienne avec source externe**  $A = \text{diag}(\underbrace{-a, \dots, -a}_r, \underbrace{a, \dots, a}_{N-r})$ .

## 6.2.2 Densité moyenne

On veut calculer la **densité moyenne** des positions transverses à un temps donné  $\rho_N(X) = \langle \rho(X, N) \rangle_t = \frac{1}{N} \sum_i \langle \delta(X - x_i) \rangle_t$  où  $\langle \dots \rangle_t$  indique la moyenne sur la distribution  $\mathcal{P}_t^{\text{pear}}(x_1, \dots, x_N)$ , cf Eq. (6.28). La densité moyenne  $\rho_N(X)$  est la distribution marginale de la position d'un marcheur (ou d'une valeur propre) :  $\rho_N(X) = \mathcal{P}_t(X)$ , cf section 2.1.3.

Pour  $N$  mouvements browniens vicieux, on sait que la distribution des positions est celle des valeurs propres d'une matrice gaussienne avec source, on s'attend donc au **scaling**  $x_i \asymp \sqrt{N}$ , comme pour les valeurs propres d'une matrice gaussienne, cf Eq. (2.15). Ainsi la densité adimensionnée est donnée par

$$\rho(x) = \sqrt{N} \rho(x\sqrt{N}, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta\left(x - \frac{x_i}{\sqrt{N}}\right) \quad (6.30)$$

Par définition on a  $\langle \rho(x) \rangle_t = \int \prod_i dx_i \mathcal{P}_t^{\text{pear}}(x_1, \dots, x_N) \rho(x)$  avec  $\mathcal{P}_t^{\text{pear}}$  donnée Eq. (6.28). La densité  $\rho(x)$  Eq. (6.30) est une fonction symétrique des variables  $x_i$ . Or les  $x_i$  sont des variables d'intégration muettes interchangeables dans l'expression de  $\langle \rho(x) \rangle$ , on va voir qu'on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \langle \rho(x) \rangle &= C_N \int \prod_i dx_i e^{-\sum_i \frac{x_i^2 T}{2i(T-t)}} \det \left[ x_j^{d_i-1} e^{\frac{s_i a x_j}{T-t}} \right]_{i,j} \Delta(x_i) \rho(x) \\ &= C_N \int \prod_i dx_i e^{-\sum_i \frac{x_i^2 T}{2i(T-t)}} N! \prod_i \left( x_i^{d_i-1} e^{\frac{s_i a x_i}{T-t}} \right) \Delta(x_i) \rho(x) \end{aligned} \quad (6.31)$$

En effet, le déterminant est une somme sur les permutations. En posant  $g_i(x) = x^{d_i-1} e^{\frac{s_i a x}{T-t}}$ , on a donc  $\det [g_i(x_j)]_{i,j} = \sum_{\sigma} \epsilon_{\sigma} \prod_i g_i(x_{\sigma(i)})$  et

$$\begin{aligned} \langle \rho(x) \rangle &= C_N \sum_{\sigma} \epsilon_{\sigma} \int \prod_i dx_i e^{-\sum_i \frac{x_i^2 T}{2i(T-t)}} \prod_i g_i(x_{\sigma(i)}) \Delta(x_i) \rho(x) \\ &= C_N \sum_{\sigma} \int \prod_i dx'_i e^{-\sum_i \frac{x_i'^2 T}{2i(T-t)}} \prod_i g_i(x'_i) \epsilon_{\sigma} \Delta(\{x'_{\sigma^{-1}(i)}\}) \rho(x) \end{aligned} \quad (6.32)$$

en posant  $x_{\sigma(i)} = x'_i$ . Or  $\Delta(\{x_{\sigma^{-1}(j)}\}) = \prod_{i < j} (x_{\sigma^{-1}(j)} - x_{\sigma^{-1}(i)})$  donc  $\Delta(\{x_{\sigma^{-1}(j)}\}) = \epsilon_{\sigma^{-1}} \Delta(x_i) = \epsilon_{\sigma} \Delta(x_i)$ .

Ainsi Eq. (6.32) devient  $\langle \rho(x) \rangle = C_N N! \int \prod_i dx'_i e^{-\sum_i \frac{x_i'^2 T}{2i(T-t)}} \prod_i g_i(x'_i) \Delta(x'_i) \rho(x)$ , d'où Eq. (6.31).

Finalement, en explicitant  $g_i(x)$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \langle \rho(x) \rangle &= C_N N! \int \prod_i dx_i e^{-\sum_i \frac{x_i^2 T}{2t(T-t)}} \rho(x) \times \\ &\times \prod_{i=1}^r \left( x_i^{i-1} e^{\frac{-ax_i}{T-t}} \right) \prod_{i=r+1}^N \left( x_i^{i-r-1} e^{\frac{+ax_i}{T-t}} \right) \prod_{i < j} (x_j - x_i) \end{aligned} \quad (6.33)$$

Procédant comme précédemment mais à l'envers, on peut ensuite introduire une somme sur les permutations de  $\{1, \dots, r\}$  et de  $\{r+1, \dots, N\}$  pour reconstruire des déterminants de Vandermonde tronqués de la forme

$$\det[x_i^j]_{1 \leq i, j \leq k} = \Delta_k(x_i) = \prod_{i < j \leq k} (x_j - x_i) \quad (6.34)$$

On obtient alors une expression simplifiée pour la **densité des positions transverses** :

$$\boxed{\langle \rho(x) \rangle = C_N \frac{N!}{r!(N-r)!} \int \prod_i dx_i e^{-\sum_i \frac{x_i^2 T}{2t(T-t)}} \rho(x) \times e^{\frac{-a \sum_{i=1}^r x_i}{T-t}} e^{\frac{+a \sum_{i=r+1}^N x_i}{T-t}} \Delta_N(x_i) \Delta_r(x_i) \Delta_{N-r}(x_{i+r})} \quad (6.35)$$

où  $\rho(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta\left(x - \frac{x_i}{\sqrt{N}}\right)$ . L'expression ci-dessus a été obtenue par permutations successives des  $x_i$  dans la mesure  $\mathcal{P}_t^{\text{pear}}(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N$ . L'expression finale (6.35) singularise les  $x_i$  pour  $1 \leq i \leq r$  par rapport aux  $x_j$  pour  $j > r$ . Cela signifie qu'elle prend en compte **l'ordre des  $x_i$  en deux groupes** :  $x_i < x_j$  pour tous  $i \leq r < j$ . On peut donc interpréter les  $x_i$  pour  $1 \leq i \leq r$  comme les positions des  $r$  marcheurs inférieurs qui finissent en  $-a$  et les  $x_j$  pour  $j > r$  comme les  $(N-r)$  marcheurs supérieurs qui finissent en  $+a$  (mais sans préciser dans quel ordre s'ordonnent entre eux les  $x_i$  pour  $1 \leq i \leq r$ , ou de même dans quel ordre s'ordonnent entre eux les  $x_j$  pour  $r+1 \leq j \leq N$ ).

On peut donc introduire la distribution jointe  $\mathcal{P}_t^{\text{ord}}(x_1, \dots, x_N)$  des positions  $x_i$  des marcheurs de Pearcey avec la contrainte  $x_i < x_j$  pour tous  $i \leq r < j$  sur l'ordre des  $x_i$  :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{P}_t^{\text{ord}}(x_1, \dots, x_N) &= \frac{N!}{r!(N-r)!} \mathcal{P}_t^{\text{pear}}(x_1, \dots, x_N) \mathbb{1}_{\{x_i < x_j, \forall i \leq r < j\}} \\ &= C_N e^{-\sum_i \frac{x_i^2 T}{2t(T-t)}} e^{-a \sum_{i=1}^r \frac{x_i}{T-t} + a \sum_{i=r+1}^N \frac{x_i}{T-t}} \times \\ &\quad \times \Delta_N(x_i) \Delta_r(x_i) \Delta_{N-r}(x_{i+r}) \mathbb{1}_{\{x_i < x_j, \forall i \leq r < j\}} \end{aligned} \quad (6.36)$$

et où  $\mathbb{1}_{\{x_i < x_j, \forall i \leq r < j\}}$  est la fonction indicatrice qui vaut 1 si pour tous  $i \leq r < j$  on a  $x_i < x_j$ , zéro sinon.

La distribution réordonnée Eq. (6.36) peut se récrire comme un **pois de Boltzmann**  $\mathcal{P}_t^{\text{ord}}(x_1, \dots, x_N) \propto e^{-E_N[\{x_i\}]}$ , ainsi Eq. (6.35) se récrit :

$$\langle \rho(x) \rangle \propto \int \prod_i dx_i \rho(x) e^{-E_N[\{x_i\}]} \quad (6.37)$$



où l'énergie effective associée est :

$$E_N[\{x_i\}] = \sum_i \frac{x_i^2 T}{2t(T-t)} + a \sum_{i=1}^r \frac{x_i}{T-t} - a \sum_{i=r+1}^N \frac{x_i}{T-t} \quad (6.38)$$

$$- \sum_{1 \leq i < j \leq N} \ln |x_j - x_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq r} \ln |x_j - x_i| - \sum_{r+1 \leq i < j \leq N} \ln |x_j - x_i|$$

avec  $x_i < x_j$  pour tous  $i \leq r < j$ .  $E_N$  Eq. (6.38) est l'énergie effective d'un **gaz de Coulomb 2D** (répulsion logarithmique) modifié fait de **deux espèces de particules**. En effet cette énergie se réécrit

$$E_N[\{x_i\}] = \sum_i \frac{x_i^2 T}{2t(T-t)} + a \sum_{i=1}^r \frac{x_i}{T-t} - a \sum_{i=r+1}^N \frac{x_i}{T-t} \quad (6.39)$$

$$- \sum_{1 \leq i \leq r < j \leq N} \ln |x_j - x_i| - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq r} \ln |x_j - x_i| - 2 \sum_{r+1 \leq i < j \leq N} \ln |x_j - x_i|$$

Ainsi le gaz de Coulomb modifié d'énergie  $E_N$  est fait de  $r$  particules (de même charge) qui se repoussent entre elles avec une force 2 et de  $(N-r)$  autres particules qui se repoussent également entre elles avec une force 2. Mais l'interaction  $i-j$  pour  $i \leq r < j$  est deux fois plus faible (bien que répulsive également).

On définit la **densité** (adimensionnée)  $\rho_L(x)$  des positions des  $r$  **marcheurs inférieurs** (ou particules de type 1) et la **densité** (adimensionnée)  $\rho_R(x)$ , des  $(N-r)$  **marcheurs supérieurs** (ou particules de type 2) :

$$\rho_L(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^r \delta(x - x_i/\sqrt{N}) \quad \text{et} \quad \rho_R(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=r+1}^N \delta(x - x_i/\sqrt{N}) \quad (6.40)$$

On a alors :

$$\rho(x) = \rho_L(x) + \rho_R(x) \quad \text{et} \quad \int dx \rho_L(x) = \frac{r}{N}, \quad \int dx \rho_R(x) = \frac{N-r}{N} \quad (6.41)$$

Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , on s'attend à ce que les densités adimensionnées  $\rho_L(x)$ ,  $\rho_R(x)$  et  $\rho(x)$  aient une limite finie continue. Pour  $N$  grand, on peut donc remplacer l'intégrale multiple sur les  $x_i$  discrets par une intégrale fonctionnelle double sur les densités continues  $\rho_L(x)$  et  $\rho_R(x)$ . Pour  $N \gg 1$ , l'énergie effective est d'ordre  $\asymp N^2$  à cause de l'interaction logarithmique entre les  $x_i$  (cf Eq. (2.14)). Pour  $a = u\sqrt{TN}$ , l'énergie s'écrit, à l'ordre dominant en  $N$ ,  $E_N[\{x_i\}] = N^2 E[\rho_L, \rho_R] + \text{cste} + \dots$  où :

$$E[\rho_L, \rho_R] = \frac{T}{2t(T-t)} \int dx \rho(x) x^2 + \frac{u\sqrt{T}}{T-t} \int dx \rho_L(x) x - \frac{u\sqrt{T}}{T-t} \int dx \rho_R(x) x$$

$$- \frac{1}{2} \int dx \int dx' \rho(x) \rho(x') \ln |x - x'| - \frac{1}{2} \int dx \int dx' \rho_L(x) \rho_L(x') \ln |x - x'|$$

$$- \frac{1}{2} \int dx \int dx' \rho_R(x) \rho_R(x') \ln |x - x'| \quad \text{où } a = u\sqrt{TN} \quad (6.42)$$

Pour  $N$  grand, l'intégrale Eq. (6.37) est donc une intégrale fonctionnelle double qui se calcule par méthode du col :

$$\langle \rho(x) \rangle \sim \frac{\int \mathcal{D}\rho_L(x) \int \mathcal{D}\rho_R(x) (\rho_L(x) + \rho_R(x)) e^{-N^2 E[\rho_L, \rho_R]}}{\int \mathcal{D}\rho_L(x) \int \mathcal{D}\rho_R(x) e^{-N^2 E[\rho_L, \rho_R]}} \sim \rho_L^*(x) + \rho_R^*(x) \quad (6.43)$$

où  $(\rho_L^*, \rho_R^*)$  est le couple de densités qui minimise l'énergie (6.42). L'énergie minimale domine en effet l'intégrale dans la limite  $N \rightarrow \infty$  (limite de "température nulle"). Alors  $\rho^*(x)$  est la **densité optimale**  $\rho^*(x) = \rho_L^*(x) + \rho_R^*(x)$  où  $(\rho_L^*, \rho_R^*)$  **minimise l'énergie effective**  $E[\rho_L, \rho_R]$ . Le point col s'écrit  $\frac{\delta E}{\delta \rho_L(x)} = 0 = \frac{\delta E}{\delta \rho_R(x)}$ , soit :

$$\begin{aligned} \int dx' [2\rho_L^*(x') + \rho_R^*(x')] \ln|x - x'| &= \frac{x^2 T}{2t(T-t)} + \frac{u\sqrt{T}x}{T-t}, \quad x \in \text{Supp}[\rho_L^*] \\ \int dx' [2\rho_R^*(x') + \rho_L^*(x')] \ln|x - x'| &= \frac{x^2 T}{2t(T-t)} - \frac{u\sqrt{T}x}{T-t}, \quad x \in \text{Supp}[\rho_R^*] \end{aligned} \quad (6.44)$$

où  $\text{Supp}[\rho_{L,R}^*]$  est le support de  $\rho_{L,R}^*$ . D'où en dérivant par rapport à  $x$  :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{2\rho_L^*(x') + \rho_R^*(x')}{x - x'} &= \frac{xT}{t(T-t)} + \frac{u\sqrt{T}}{T-t}, \quad x \in \text{Supp}[\rho_L^*] \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{2\rho_R^*(x') + \rho_L^*(x')}{x - x'} &= \frac{xT}{t(T-t)} - \frac{u\sqrt{T}}{T-t}, \quad x \in \text{Supp}[\rho_R^*] \end{aligned} \quad (6.45)$$

Reste à résoudre ces équations, ce qui n'est pas du tout évident en général. La méthode de Tricomi ne suffit pas ici car on a deux densités  $\rho_L^*$  et  $\rho_R^*$  couplées et qui n'ont pas le même support.

D'après les résultats connus sur le modèle de Brézin et Hikami de matrice aléatoire gaussienne avec terme de source, il existe en fait un **temps critique**  $t_c$  **pour le processus de Pearcey** tel que (voir figure 6.2) :

- Si  $t < t_c$ , les supports de  $\rho_L^*$  et  $\rho_R^*$  se **chevauchent**.
- Si  $t > t_c$ , les supports de  $\rho_L^*$  et  $\rho_R^*$  sont **disjoints**.

On notera que le régime  $t > t_c$  ne peut pas exister pour un seul marcheur comme dans l'exemple présenté section 6.1.2. En effet dans le cas d'un seul marcheur, la densité s'étend sur tout  $\mathbb{R}$ . C'est seulement dans le cas de marcheurs vicieux que la densité a un support fini. Pour  $t > t_c$ , les marcheurs vicieux qui finissent en  $+a$  sont suffisamment éloignés de ceux finissant en  $-a$  pour que les supports de leurs densités ( $\rho_L^*$  et  $\rho_R^*$ ) soient disjoints.

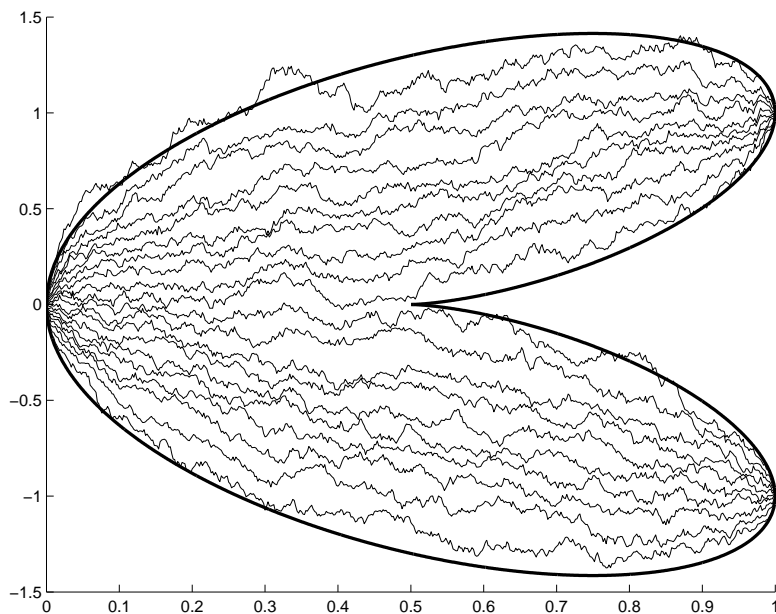
### 6.2.3 Densité moyenne au point critique

On supposera désormais pour simplifier  $r = N/2$ , ainsi le processus de Pearcey est symétrique sous  $x \rightarrow -x$ . D'où

$$\rho_L^*(x) = \rho_R^*(-x) \quad \text{pour } x \in \text{Supp}[\rho_L^*] = -\text{Supp}[\rho_R^*] \quad (6.46)$$

En remplaçant  $\rho_L^*(x)$  par  $\rho_R^*(-x)$  dans (6.45), on obtient donc :

$$\int dx' \frac{\rho_R^*(x')}{x - x'} + \frac{1}{2} \int dx' \frac{\rho_R^*(x')}{x + x'} = \frac{xT}{2t(T-t)} - \frac{u\sqrt{T}}{2(T-t)} \quad \text{pour } x \in \text{Supp}[\rho_R^*] \quad (6.47)$$



**Figure 6.2** – *Processus de Pearcey : mouvements browniens ne se croisant pas contraints de partir du même point et de se réunir en deux points  $\pm a$ . En abscisse, le temps  $t$  va de 0 à  $T = 1$ . En ordonnée est représentée la position adimensionnée  $x_i/\sqrt{N}$  des  $N$  mouvements browniens. Ici  $a = u\sqrt{N}$  avec  $u = 1$ . L'enveloppe noire indique la position des bornes du support de la densité des positions à chaque temps intermédiaire : pour  $t < t_c$  (ici  $t_c = 0.5$ ), la densité a un support connexe, pour  $t > t_c$  la densité a un support fait de deux segments disjoints. [source : Bleher et Kuijlaars [BK07]]*

La densité  $\rho_R^*$  (et donc  $\rho_L^*$ ) ne peut pas être calculée en général à un temps  $t \in [0, T]$  quelconque. Par contre, la méthode de **Bueckner** expliquée ci-dessous, voir section 6.3.2, ou de façon équivalente ma méthode par Tricomi généralisé, voir section 6.4, permet de calculer explicitement cette **densité au temps critique**  $t_c$ . En effet, au temps critique les supports de  $\rho_L^*$  et  $\rho_R^*$  se rejoignent sans se chevaucher. Par symétrie  $x \rightarrow -x$ , on en déduit que

$$\text{Supp}[\rho_R^*] = [0, l] \quad \text{et} \quad \text{Supp}[\rho_L^*] = [-l, 0] \quad \text{où } l > 0 \quad (6.48)$$

Pour appliquer la méthode de Bueckner expliquée section 6.3.2 (ou la mienne cf section 6.4), il faut d'abord se ramener à une équation intégrale de la forme Eq. (6.56). Pour cela, on effectue le changement de variables  $x \rightarrow X = \alpha x$  et  $\rho_R^*(x) = \alpha \rho_R^c(\alpha x)$  où  $\alpha = \sqrt{\frac{T}{2t_c(T-t_c)}}$ . On a alors  $dx \rho_R^*(x) = dX \rho_R^c(X)$ , d'où  $\frac{1}{2} = \int dx \rho_R^*(x) = \int dX \rho_R^c(X)$  et (6.47) devient alors :

$$\int dX' \frac{\rho_R^c(X')}{X' - X} - \frac{1}{2} \int dX' \frac{\rho_R^c(X')}{X' + X} = b - X \quad \text{pour } X \in \text{Supp}[\rho_R^c] \quad (6.49)$$

où  $b = u\sqrt{\frac{t_c}{2(T-t_c)}}$ . On peut maintenant appliquer la méthode de Bueckner, cf section 6.3.2, (ou la mienne cf section 6.4) pour le cas particulier  $\gamma = -J/2$  avec  $J = 1$  donc  $\mu = 1/3$  et  $g(X) = b - X$  polynomial de degré 1, et en faisant attention à la normalisation spécifique de la densité  $\int dX \rho_R^c(X) = 1/2$  et non 1.

Après quelques calculs (voir section 6.5), on trouve finalement la valeur du **temps critique pour un processus de Pearcey terminant en  $\pm a$  au temps  $T$**  :

$$\boxed{t_c = \frac{T}{1+u^2} \text{ avec } u = \frac{a}{\sqrt{TN}}} \quad (6.50)$$

On trouve également l'expression explicite de la **densité**  $\rho_R^*(x) = \alpha \rho_R^c(\alpha x)$  où  $\alpha = \sqrt{\frac{T}{2t_c(T-t_c)}}$  :

$$\boxed{\rho_R^c(x) = \frac{3}{2\sqrt{2}\pi} \left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \left[1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}}\right]^{\frac{2}{3}} - \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}}\right]^{\frac{2}{3}} \right\}} \quad (6.51)$$

où  $L$  est la borne supérieure du support de  $\rho_R^c$ , donc  $l = L/\alpha$  avec  $\alpha = \sqrt{\frac{T}{2t_c(T-t_c)}}$  la borne supérieure du support de la densité  $\rho_R^*$  avec explicitement :

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ donc } l = \frac{3\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{t_c(T-t_c)}{T}} \quad (6.52)$$

La **densité moyenne** du processus de Pearcey  $\rho^*(x) = \rho_L^*(x) + \rho_R^*(x)$  est donnée par

$$\rho^*(x) = \begin{cases} \rho_L^*(x) & \text{pour } x \in [-l, 0] \\ \rho_R^*(x) & \text{pour } x \in [0, l] \end{cases} \quad (6.53)$$

Elle est **continue à support**  $[-l, l]$  et **s'annule aux bords  $\pm l$  comme une racine** (comme pour le demi-cercle de Wigner ou la loi de Marčenko-Pastur). En effet,  $\rho_R^c(X) \sim \frac{2}{\pi\sqrt{L}}\sqrt{L-X}$  quand  $X \rightarrow L^-$  donc

$$\rho_R^*(x) \sim \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{l}}\sqrt{l-x} \text{ quand } x \rightarrow l^- \quad (6.54)$$

La densité  $\rho^*(x)$  **s'annule également en 0 mais comme  $|x|^{1/3}$  et non en racine de  $x$** . En effet comme  $\rho_R^c(X) \sim \frac{3}{2^{5/6}\pi} \left(\frac{X}{L}\right)^{\frac{1}{3}}$  quand  $X \rightarrow 0^+$ , on a :

$$\rho_R^*(x) \sim \frac{3\alpha}{2^{5/6}\pi} \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ quand } x \rightarrow 0^+ \quad (6.55)$$

## 6.3 SOLUTION DE BUECKNER POUR CERTAINES ÉQUATIONS INTÉGRALES

Je présente dans cette section des résultats obtenus par Bueckner [Bue66] et qui permettent de résoudre l'équation (6.89) quand  $\rho_R$  a pour support  $[0, L]$ . La méthode s'appuie amplement sur l'analyse complexe.

Considérons l'équation :

$$\boxed{\int_0^L dt \frac{\rho(t)}{t-x} + \gamma \int_0^L dt \frac{\rho(t)}{t+x} = g(x) \text{ , } x \in ]0, L[} \quad (6.56)$$

où  $\gamma \in ]-1, 1[$  et  $g(x)$  une fonction de  $x$  à valeurs réelles.  $\int$  indique la partie principale de l'intégrale. Dans le modèle  $O(n)$ , la même équation apparaît avec  $\gamma = n/2$ .

### 6.3.1 Analyse complexe et idée générale

On définit sur  $\mathbb{C}$  :

$$\boxed{\phi(z) = \int_0^L dt \frac{\rho(t)}{t-z} \text{ pour } z \in \mathbb{C} \setminus [0, L]} \quad (6.57)$$

$\phi(z)$  est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus [0, L]$  et s'annule comme  $-\frac{1}{z}$  quand  $z \rightarrow \infty$  (car la densité est normalisée, ie  $\int \rho = 1$ ).  $\phi$  a une coupure sur le segment réel  $[0, L]$  :

$$\phi(x + i0^+) - \phi(x - i0^+) = 2i\pi\rho(x) \text{ pour } x \in ]0, L[ \quad (6.58)$$

De plus :

$$\operatorname{Re} [\phi(x + i0^+)] = \int_0^L dt \frac{\rho(t)}{t-x} \text{ et } \operatorname{Im} [\phi(x + i0^+)] = \pi\rho(x) \text{ pour } x \in ]0, L[ \quad (6.59)$$

On pose  $\mathcal{L}^+ = \{x + i0^+ : x \in ]0, L[ \}$ . L'équation (6.56) à résoudre peut être écrite

$$\boxed{\operatorname{Re} [\phi(x)] + \gamma\phi(-x) = g(x) \text{ pour } x \in \mathcal{L}^+} \quad (6.60)$$

L'idée générale est de déterminer la fonction analytique  $\phi(z)$  puis de revenir à la densité  $\rho(x)$  en utilisant (6.59).

La fonction  $\phi(z)$  est la solution du problème de **Riemann-Hilbert** suivant (cf section 2.4.2) :

1/  $\phi(z)$  est analytique partout sur le plan complexe sauf sur le segment réel  $[0, L]$  où elle a une coupure.

2/  $\phi(z) \sim -\frac{1}{z}$  quand  $|z| \rightarrow \infty$ .

3/  $\phi(z)$  est réelle pour  $z \in \mathbb{R} \setminus [0, L]$ .

4/ Lorsqu'on approche de la coupure  $[0, L]$  on trouve deux valeurs différentes selon qu'on vienne d'au-dessus ou d'en-dessous : on a  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \phi(x \pm i\epsilon) = \operatorname{Re} [\phi(x)] \pm i\pi\rho(x)$  avec  $\rho(x)$  réelle et où  $\operatorname{Re} [\phi(x)]$  est solution de  $\operatorname{Re} [\phi(x)] + \gamma\phi(-x) = g(x)$  pour  $x \in \mathcal{L}^+$ .

### 6.3.2 Solution explicite pour $g(x)$ polynomial

On suppose ici que  $g(x)$  est un polynôme à coefficients réels. La solution générale  $\phi$  de (6.60) peut s'écrire  $\phi(z) = \tilde{\phi}(z) + h(z)$  où  $h(x)$  est solution **particulière** de (6.60) et  $\tilde{\phi}(z)$  solution générale de l'**équation homogène** :

$$\operatorname{Re} [\tilde{\phi}(x)] + \gamma\tilde{\phi}(-x) = 0 \text{ for } x \in \mathcal{L}^+ \quad (6.61)$$

La solution particulière peut être choisie de la forme :

$$h(z) = \frac{g(z) - \gamma g(-z)}{1 - \gamma^2} \quad (6.62)$$

$h(z)$  est alors un polynôme à coefficients réels. Les solutions de l'équation homogène Eq. (6.61) forment un module de dimension 2 sur l'anneau des polynômes en  $z^2$  à coefficients réels. En général, on a donc :

$$\tilde{\phi}(z) = A(z^2) \phi_0(z) + B(z^2) \phi_1(z) \quad (6.63)$$

où  $A$  et  $B$  sont des polynômes à coefficients réels et où  $\{\phi_0, \phi_1\}$  est une base du module. On fait des changements de variables en définissant  $w = w(z)$  et  $\mu$  (au lieu de  $\gamma$ ) comme :

$$\frac{z}{L} = \frac{1}{\sin w} \quad \text{et} \quad \gamma = -\cos(\mu\pi) \quad (6.64)$$

Les fonctions de base sont explicitement données par :

$$\boxed{\phi_0(z) = \frac{\cos\left[\mu\left(w + \frac{\pi}{2}\right)\right]}{\cos\left[\frac{\mu\pi}{2}\right]} \quad \text{et} \quad \phi_1(z) = \frac{\sin\left[\mu\left(w + \frac{\pi}{2}\right)\right]}{\tan w}} \quad (6.65)$$

Quand  $z \rightarrow \infty$ , la fonction  $\phi(z) = \int_0^L dt \frac{\rho(t)}{t-z}$  tend vers 0. Avec une densité bien normalisée, ie  $\int \rho = 1$ , on a plus précisément  $\phi(z) \sim -\frac{1}{z}$  quand  $z \rightarrow \infty$ . Ceci impose des contraintes sur  $A$  et  $B$  pour la solution de l'équation homogène. Les polynômes  $A$  et  $B$  sont en fait déterminés de façon unique par la contrainte  $\phi(z) = \tilde{\phi}(z) + h(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow \infty$ , où  $h(z)$  est le polynôme défini Eq. (6.62).

Finalement la solution  $\rho(x)$  de (6.56) s'obtient en prenant la partie imaginaire de  $\phi$  :

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} \text{Im}\phi(x) \quad \text{pour} \quad x \in \mathcal{L}^+ \quad (6.66)$$

où  $z = x \in \mathcal{L}^+$  correspond à  $w = \frac{\pi}{2} - i\eta$  avec  $\eta > 0$ , cf Eq. (6.64). Plus précisément on a  $\frac{L}{x} = \sin w = \cosh \eta$ . D'où :

$$e^{\pm\eta} = \frac{L}{x} \pm \sqrt{\frac{L^2}{x^2} - 1} \quad \text{pour} \quad x = \frac{L}{\sin w} = \frac{L}{\cosh \eta} \in \mathcal{L}^+ \quad (6.67)$$

ou encore  $e^{\pm\eta} = \frac{L}{x} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}} \right]$ .

Il est aussi utile pour le calcul explicite de  $\rho(x)$  de connaître  $\phi_0(x)$  et  $\phi_1(x)$  pour  $z \in \mathcal{L}_+$  :

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \frac{\cos\left[\mu\left(\pi - i\eta\right)\right]}{\cos\left[\frac{\mu\pi}{2}\right]} = \frac{e^{i\mu\pi}e^{\mu\eta} + e^{-i\mu\pi}e^{-\mu\eta}}{2\cos\left[\frac{\mu\pi}{2}\right]} \\ \phi_1(x) &= \tan(i\eta) \sin\left[\mu\left(\pi - i\eta\right)\right] = \tanh \eta \frac{e^{i\mu\pi}e^{\mu\eta} - e^{-i\mu\pi}e^{-\mu\eta}}{2} \end{aligned} \quad (6.68)$$

Enfin, pour déterminer  $A$  et  $B$ , on a besoin du développement asymptotique de  $\phi_0(z)$  et  $\phi_1(z)$  quand  $|z| \rightarrow \infty$  :

$$\begin{aligned} \phi_0(z) &= 1 - \mu \tan\left[\frac{\mu\pi}{2}\right] \frac{L}{z} - \frac{\mu^2 L^2}{2 z^2} + \frac{\mu(\mu^2 - 1)}{6} \tan\left[\frac{\mu\pi}{2}\right] \frac{L^3}{z^3} + O\left(\frac{1}{z^4}\right) \\ \phi_1(z) &= \sin\left[\frac{\mu\pi}{2}\right] \frac{z}{L} + \mu \cos\left[\frac{\mu\pi}{2}\right] - \left(\frac{\mu^2 + 1}{2}\right) \sin\left[\frac{\mu\pi}{2}\right] \frac{L}{z} \\ &\quad - \frac{\mu(\mu^2 + 2)}{6} \cos\left[\frac{\mu\pi}{2}\right] \frac{L^2}{z^2} + \frac{(\mu^4 + 2\mu^2 - 3)}{24} \sin\left[\frac{\mu\pi}{2}\right] \frac{L^3}{z^3} + O\left(\frac{1}{z^4}\right) \end{aligned} \quad (6.69)$$

## 6.4 SOLUTION PAR ÉQUATION DE TRICOMI GÉNÉRALISÉE

J'ai trouvé une méthode plus élémentaire (elle ne fait pas intervenir l'analyse complexe) mais calculatoire pour résoudre l'équation "de Bueckner" (6.56). Cette méthode s'appuie principalement sur la solution connue d'une équation intégrale de type Tricomi généralisé.

### 6.4.1 Equation de Tricomi généralisée

J'appelle équation de Tricomi généralisée une équation intégrale de la forme suivante :

$$Ah(x) + \frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 dt \frac{h(t)}{t-x} = g(x) \quad , \quad x \in [-1, 1] \quad (6.70)$$

$g(x)$  est donné, on veut trouver  $h(x)$ . La solution d'une telle équation est connue. On peut supposer sans restreindre la généralité que  $A^2 + B^2 = 1$  (quitte à diviser  $A$ ,  $B$  et  $g(x)$  par une constante). Si  $A = 0$ , l'équation ci-dessus est exactement l'équation de Tricomi, cf section 2.4. En général, la solution est donnée par :

$$h(x) = Ag(x) + \frac{B}{\pi} \frac{(1-x)^\alpha}{(1+x)^{1+\alpha}} \left( C - \int_{-1}^1 dt \frac{(1+t)^{1+\alpha}}{(1-t)^\alpha} \frac{g(t)}{t-x} \right) \quad (6.71)$$

avec  $\tan(\pi\alpha) = -\frac{B}{A}$ ,  $-1 \leq \alpha \leq 0$

où  $C$  est une constante arbitraire. Dans le cas  $A = 0$  (et donc  $B = 1$ ), qui correspond à l'intégrale de Tricomi, on a  $\alpha = -1/2$  et on retrouve bien la solution de Tricomi Eq. (2.84).

Dans Eq. (6.70), si on remplace  $h(t)$  dans l'intégrale par son expression  $h(x) = -\frac{B}{\pi A} \int_{-1}^1 dt \frac{\rho(t)}{t-x} + \frac{g(x)}{A}$ , on voit que  $h(x)$  vérifie aussi l'équation :

$$A^2 \rho(x) - \frac{B^2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{t-x} \int_{-1}^1 du \frac{\rho(u)}{u-t} = G(x) \quad , \quad x \in [-1, 1]$$

où  $G(x) = Ag(x) - \frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{t-x}$  (6.72)

On peut aussi alors résoudre une équation du type :

$$A^2 h(x) - \frac{B^2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{t-x} \int_{-1}^1 du \frac{h(u)}{u-t} = G(x) \quad , \quad x \in [-1, 1] \quad (6.73)$$

pour un  $G(x)$  connu et où on cherche  $h(x)$ . Il suffit en effet de déterminer  $g(x)$  solution de  $Ag(x) - \frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{t-x} = G(x)$  pour pouvoir remonter à  $h(x)$ . On trouve en utilisant les résultats ci-dessus pour  $A' = A$ ,  $B' = -B$  et donc  $\alpha' = -1 - \alpha$  (car  $\tan(\pi(-1 - \alpha)) = -\tan(\pi\alpha)$  et  $-1 < -1 - \alpha < 0$ ) :

$$g(x) = AG(x) + \frac{B}{\pi} \frac{(1+x)^\alpha}{(1-x)^{1+\alpha}} \left( C_0 + \int_{-1}^1 dt \frac{(1-t)^{1+\alpha}}{(1+t)^\alpha} \frac{G(t)}{t-x} \right) \quad (6.74)$$

où  $C_0$  est une constante arbitraire et où  $\tan(\pi\alpha) = -\frac{B}{A}$  avec  $-1 \leq \alpha \leq 0$ .

La solution  $h(x)$  de l'équation (6.73) (pour  $G(x)$  fixé) est donc donnée par (6.71) où  $g(x)$  est donné Eq. (6.74) en fonction de  $G(x)$ . Il y a ainsi deux constantes arbitraires  $C$  et  $C_0$ .

### 6.4.2 Equation de Bueckner

Revenons à l'équation intégrale que l'on cherche à résoudre, cf Eq. (6.56) :

$$\boxed{\int_0^L dt \frac{\rho(t)}{t-x} + \gamma \int_0^L dt \frac{\rho(t)}{t+x} = g(x) \text{ pour } x \in ]0, L[} \quad (6.75)$$

On pose  $t = L\sqrt{1-u^2}$  et  $x = L\sqrt{1-y^2}$ ,  $\rho(t) = \bar{\rho}(u)$ ,  $g(x) = \bar{g}(y)$ . Eq. (6.75) se récrit :

$$\int_0^1 du \frac{u \bar{\rho}(u)}{\sqrt{1-u^2}} \left[ \frac{(1-\gamma)\sqrt{1-y^2} + (1+\gamma)\sqrt{1-u^2}}{y^2 - u^2} \right] = \bar{g}(y), \quad y \in ]0, 1[ \quad (6.76)$$

On note  $\rho_+(u) = \frac{\bar{\rho}(u) + \bar{\rho}(-u)}{2}$  (partie paire) et  $\rho_-(u) = \frac{\bar{\rho}(u) - \bar{\rho}(-u)}{2}$  (partie impaire), soit  $\bar{\rho}(u) = \rho_+(u) + \rho_-(u)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 du \frac{u \rho_+(u)}{\sqrt{1-u^2}} \left[ \frac{(1-\gamma)\sqrt{1-y^2} + (1+\gamma)\sqrt{1-u^2}}{y^2 - u^2} \right] &= 0 \\ \int_{-1}^1 du \frac{u \rho_-(u)}{\sqrt{1-u^2}} \left[ \frac{(1-\gamma)\sqrt{1-y^2} + (1+\gamma)\sqrt{1-u^2}}{y^2 - u^2} \right] &= \bar{g}(y) \end{aligned} \quad (6.77)$$

soit  $\rho_+(u) = 0$  et  $\bar{\rho}(u) = \rho_-(u)$  est impaire et vérifie Eq. (6.77) qui peut se récrire :

$$\int_{-1}^1 du \frac{\bar{\rho}(u)}{y-u} \left[ (1-\gamma) \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-u^2}} + (1+\gamma) \right] = \bar{g}(y) \quad (6.78)$$

On pose

$$\boxed{h(y) = \frac{-1}{\pi\sqrt{1-y^2}} \int_{-1}^1 \frac{dt \bar{\rho}(t)}{\pi t - y}} \quad (6.79)$$

de sorte que  $h(y)$  vérifie  $\int_{-1}^1 dt h(t) = 0$  et :

$$\int_{-1}^1 dt \frac{h(t)}{t-u} = \frac{\bar{\rho}(u)}{\sqrt{1-u^2}}, \quad u \in [-1, 1] \quad (6.80)$$

En effet la solution  $h(y)$  de Tricomi (cf Eq. (2.84)) de l'équation ci-dessus avec  $\int_{-1}^1 dt h(t) = 0$  est bien donnée par Eq. (6.79).

Ainsi Eq. (6.78) se récrit (après division par  $2\pi^2\sqrt{1-y^2}$ ) :

$$\left( \frac{1-\gamma}{2\pi^2} \right) \int_{-1}^1 \frac{du}{y-u} \int_{-1}^1 dt \frac{h(t)}{t-u} + \left( \frac{1+\gamma}{2} \right) h(y) = \frac{\bar{g}(y)}{2\pi^2\sqrt{1-y^2}} \quad (6.81)$$

On s'est donc ramené à une équation intégrale du type (6.73) pour  $h(y)$  avec second membre  $G(y) = \frac{\bar{g}(y)}{2\pi^2\sqrt{1-y^2}}$  et avec  $A^2 = \frac{1+\gamma}{2}$ ,  $B^2 = \frac{1-\gamma}{2}$ . On peut donc résoudre cette équation, déterminer ainsi  $h(y)$  et revenir à  $\bar{\rho}(y)$  avec Eq. (6.80). Enfin  $\rho(x) = \bar{\rho}(y)$  avec  $x = L\sqrt{1-y^2}$ .



## 6.5 GAZ DE COULOMB GÉNÉRALISÉ ET TRANSITIONS DE PHASE

Dans cette section, on étudie un **gaz de Coulomb 2D** (avec répulsion logarithmique) **généralisé**, c'est-à-dire fait de **deux espèces de particules**. Le processus de Pearcey est un cas particulier du gaz de Coulomb généralisé considéré ici. Ce modèle présente la même transition de phase que le processus de Pearcey. En particulier on peut calculer la densité au point critique, ce qui dans le cas particulier du processus de Pearcey donne (6.51). C'est un modèle que j'ai étudié suivant l'idée proposée par Grégory Schehr et Satya N. Majumdar, mais ce travail n'a pas été publié, essentiellement car ce modèle ne correspond pas vraiment à un gaz de Coulomb physique.

### 6.5.1 Gaz de Coulomb généralisé

On considère un **gaz de Coulomb généralisé** constitué de  $N$  charges de positions  $x_i$  sur l'axe réel, de distribution à l'équilibre à température inverse  $\beta$  :

$$\mathcal{P}(x_1, \dots, x_N) \propto e^{-\beta E_N\{\{x_i\}\}} \quad (6.82)$$

avec une énergie  $E_N$  donnée par :

$$\boxed{E_N\{\{x_i\}\} = \sum_{i=1}^r \frac{(x_i + c)^2}{2} + \sum_{i=r+1}^N \frac{(x_i - c)^2}{2} - \frac{J}{2} \sum_{1 \leq i \leq N/2 < j \leq N} \ln |x_j - x_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq N/2} \ln |x_j - x_i| - \sum_{N/2+1 \leq i < j \leq N} \ln |x_j - x_i|} \quad (6.83)$$

L'interaction entre les particules  $x_i$  pour  $i \leq N/2$  est répulsive et d'amplitude 1, de même que celle entre les particules  $x_j$  pour  $j > N/2$ . Par contre l'interaction  $i - j$  pour  $i \leq N/2 < j$  est répulsive également mais de force  $J/2$  où  $-2 \leq J \leq 2$ . Le cas particulier  $J = 1$  correspond au processus de Pearcey.

On introduit les **densités  $\rho_L$  et  $\rho_R$  associées aux deux types de charges**, comme dans le cas du processus de Pearcey cf Eq. (6.40) avec ici  $r = N/2$  donc  $\int \rho_L = 1/2 = \int \rho_R$ . Dans la limite  $N \gg 1$  avec  $c = b\sqrt{N}$ , on a  $E_N = N^2 E[\rho_L, \rho_R] + O(N) + \text{cste}$  avec :

$$\begin{aligned} 2E[\rho_L, \rho_R] &= \int dx \rho_L(x) (x + b)^2 + \int dx \rho_R(x) (x - b)^2 \\ &\quad - \int dx \int dx' \rho_L(x) \rho_L(x') \ln |x - x'| - \int dx \int dx' \rho_R(x) \rho_R(x') \ln |x - x'| \\ &\quad - J \int dx \int dx' \rho_L(x) \rho_R(x') \ln |x - x'| \end{aligned} \quad (6.84)$$

La densité moyenne  $\rho^c$  de ce gaz de Coulomb est obtenue par méthode du col pour  $N$  grand comme dans le cas du processus de Pearcey :  $\rho^c(x) = \rho_L^c + \rho_R^c$  où  $(\rho_L^c, \rho_R^c)$  minimise

l'énergie effective. L'équation de point col s'écrit  $\frac{\delta E}{\delta \rho_L(x)} = 0 = \frac{\delta E}{\delta \rho_R(x)}$ , soit :

$$\begin{aligned} \int dx' [2\rho_L^c(x') + J\rho_R^c(x')] \ln|x-x'| &= (x+b)^2, \quad x \in \text{Supp}[\rho_L^c] \\ \int dx' [J\rho_R^c(x') + 2\rho_L(x')] \ln|x-x'| &= (x-b)^2, \quad x \in \text{Supp}[\rho_R^c] \end{aligned} \quad (6.85)$$

d'où en dérivant par rapport à  $x$  :

$$\begin{aligned} \int dx' \frac{\rho_L^c(x') + \frac{J}{2}\rho_R^c(x')}{x-x'} &= x+b, \quad x \in \text{Supp}[\rho_L^c] \\ \int dx' \frac{\rho_R^c(x') + \frac{J}{2}\rho_L^c(x')}{x-x'} &= x-b, \quad x \in \text{Supp}[\rho_R^c] \end{aligned} \quad (6.86)$$

Comme on a supposé  $r = N/2$ , le problème a la symétrie  $x \rightarrow -x$ . En particulier  $\rho_L^c(-x) = \rho_R^c(x)$  et  $x \in \text{Supp}[\rho_L^c]$  si et seulement si  $-x \in \text{Supp}[\rho_R^c]$ , d'où, après changement de variable :

$$\int dx' \left[ \frac{\rho_R^c(x')}{x-x'} + \frac{J}{2} \frac{\rho_R^c(x')}{x+x'} \right] = x-b, \quad x \in \text{Supp}[\rho_R^c] \quad (6.87)$$

ou encore, avec  $x' = t$  :

$$\int dt \rho_R^c(t) \left[ \frac{(1+\frac{J}{2})x + (1-\frac{J}{2})t}{x^2-t^2} \right] = x-b, \quad x \in \text{Supp}[\rho_R^c] \quad (6.88)$$

soit

$$\boxed{\int dt \frac{\rho_R^c(t)}{t-x} - \frac{J}{2} \int dt \frac{\rho_R^c(t)}{t+x} = b-x, \quad x \in \text{Supp}[\rho_R^c]} \quad (6.89)$$

Comme dans le cas du processus de Pearcey, cette équation conduit à une **transition**. Il existe une valeur critique de  $b$  notée  $b_c$  telle que :

- Pour  $b < b_c$  les supports des densités  $\rho_R^c$  et  $\rho_L^c$  se chevauchent.
- Pour  $b > b_c$  les supports des densités  $\rho_R^c$  et  $\rho_L^c$  sont disjoints.

Par symétrie, au point critique  $b = b_c$  on a  $\text{Supp}[\rho_R^c] = [0, L]$  où  $L > 0$  et  $\text{Supp}[\rho_L^c] = [-L, 0]$ . Grâce à la méthode de Bueckner expliquée ci-dessus section 6.3, on peut calculer explicitement la densité  $\rho_R^c$  (et donc  $\rho^c$ ) au point critique  $b = b_c$ .

## 6.5.2 Densité au point critique

Les résultats présentés dans la section 6.3 permettent de déterminer explicitement  $\rho_R^c(x)$  pour notre gaz de Coulomb généralisé au **point critique**, c'est-à-dire dans le cas où  $\text{Supp}[\rho_R^c] = [0, L]$ . Ma méthode expliquée section 6.4 permet aussi de calculer la densité au point critique. Ici je présente seulement le calcul explicite avec la méthode de Bueckner.  $\rho_R^c$  vérifie l'équation Eq. (6.89) qui est exactement (6.56) avec  $\gamma = -\frac{J}{2}$  et  $g(x) = b-x$  un polynôme de degré un.

Dans ce cas la solution particulière  $h(z)$  est simplement, cf (6.62)

$$h(z) = \frac{b}{1 - \frac{J}{2}} - \frac{z}{1 + \frac{J}{2}} \quad (6.90)$$

La solution générale du problème de Riemann-Hilbert s'écrit alors (cf (6.63)) :

$$\phi(z) = h(z) + A(z^2) \phi_0(z) + B(z^2) \phi_1(z) \quad (6.91)$$

donc dans la limite  $|z| \rightarrow \infty$ , d'après (6.69) :

$$\begin{aligned} \phi(z) = & \frac{b}{1 - \frac{J}{2}} - \frac{z}{1 + \frac{J}{2}} + A(z^2) \left[ 1 - \mu \tan \left[ \frac{\mu\pi}{2} \right] \frac{L}{z} \right] \\ & + B(z^2) \left[ \sin \left[ \frac{\mu\pi}{2} \right] \frac{z}{L} + \mu \cos \left[ \frac{\mu\pi}{2} \right] - \left( \frac{\mu^2 + 1}{2} \right) \sin \left[ \frac{\mu\pi}{2} \right] \frac{L}{z} \right] + \dots \end{aligned} \quad (6.92)$$

où

$$\boxed{\cos(\mu\pi) = \frac{J}{2} \text{ et } \frac{z}{L} = \frac{1}{\sin w}} \quad (6.93)$$

Ici la normalisation de la densité n'est pas 1 mais  $1/2$  :  $\int_0^L \rho_R(x) dx = 1/2$  donc  $\phi(z) \sim -\frac{1}{2z}$  quand  $|z| \rightarrow \infty$ . Ainsi,  $A(z^2) = A$  et  $B(z^2) = B$  sont des constantes telles que :

$$\begin{aligned} \sin \left[ \frac{\mu\pi}{2} \right] \frac{B}{L} - \frac{1}{1 + \frac{J}{2}} &= 0 \\ A + B\mu \cos \left[ \frac{\mu\pi}{2} \right] + \frac{b}{1 - \frac{J}{2}} &= 0 \\ -A\mu \tan \left[ \frac{\mu\pi}{2} \right] L - B \left( \frac{\mu^2 + 1}{2} \right) \sin \left[ \frac{\mu\pi}{2} \right] L &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (6.94)$$

soit

$$B = \frac{L}{\left(1 + \frac{J}{2}\right) \sin \left[ \frac{\mu\pi}{2} \right]} \text{ et } A = \frac{b}{\frac{J}{2} - 1} - \frac{L\mu}{\left(1 + \frac{J}{2}\right) \tan \left[ \frac{\mu\pi}{2} \right]} \quad (6.95)$$

$$L^2(\mu^2 - 1) + \frac{2b\mu}{\tan \left( \frac{\pi\mu}{2} \right)} L + 2 \cos \left( \frac{\pi\mu}{2} \right)^2 = 0 \quad (6.96)$$

et, comme  $\cos(\pi\mu) = \frac{J}{2}$ , on a alors

$$\cos \left( \frac{\pi\mu}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + J/2}{2}}, \quad \sin \left( \frac{\pi\mu}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - J/2}{2}}, \quad \tan \left( \frac{\pi\mu}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - J/2}{1 + J/2}} \quad (6.97)$$

et donc :

$$B = \frac{\sqrt{2}L}{\left(1 + \frac{J}{2}\right) \sqrt{1 - \frac{J}{2}}} \text{ et } A = \frac{b}{\frac{J}{2} - 1} - \frac{L\mu}{\sqrt{1 - \frac{J^2}{4}}} \quad (6.98)$$

$$L^2(\mu^2 - 1) + 2b\mu L \sqrt{\frac{1 + J/2}{1 - J/2}} + \left(1 + \frac{J}{2}\right) = 0 \quad (6.99)$$

On a donc explicité  $A$ ,  $B$  et  $L$  et on a l'expression de  $\phi(z)$  cf Eq. (6.91). Il faut maintenant revenir à la densité  $\rho_R^c(x) = \frac{1}{\pi} \text{Im}\phi(x)$  pour  $x \in \mathcal{L}_+$ .

On utilise les expressions de  $\phi_{0,1}(x)$  pour  $x \in \mathcal{L}_+$  (6.68) avec  $\frac{L}{x} = \cosh \eta$  ou encore  $e^{\pm\eta} = \frac{L}{x} \pm \sqrt{\frac{L^2}{x^2} - 1}$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\phi_0(x) &= \sin(\mu\pi) \frac{e^{\mu\eta} - e^{-\mu\eta}}{2 \cos \left[ \frac{\mu\pi}{2} \right]} \\ &= \sin \left[ \frac{\mu\pi}{2} \right] (e^{\mu\eta} - e^{-\mu\eta}) = \sqrt{\frac{1 - J/2}{2}} (e^{\mu\eta} - e^{-\mu\eta}) \\ \operatorname{Im}\phi_1(x) &= \tanh \eta \sin(\mu\pi) \frac{e^{\mu\eta} + e^{-\mu\eta}}{2} = \sqrt{1 - \frac{J^2}{4}} \tanh \eta \frac{e^{\mu\eta} + e^{-\mu\eta}}{2} \end{aligned} \quad (6.100)$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned} \pi\rho_R^c(x) &= A\operatorname{Im}\phi_0(x) + B\operatorname{Im}\phi_1(x) \quad (6.101) \\ &= \left[ -\frac{b}{\sqrt{1 - J/2}} - \frac{L\mu}{\sqrt{1 + J/2}} \right] \left( \frac{e^{\mu\eta} - e^{-\mu\eta}}{\sqrt{2}} \right) + \frac{L}{\sqrt{1 + \frac{J}{2}}} \tanh \eta \left( \frac{e^{\mu\eta} + e^{-\mu\eta}}{\sqrt{2}} \right) \\ &\equiv \pi\alpha (e^{\mu\eta} - e^{-\mu\eta}) + \pi\beta \tanh \eta (e^{\mu\eta} + e^{-\mu\eta}) \\ &= \frac{\pi}{\cosh \eta} \{(\alpha + \beta) \sinh [(\mu + 1)\eta] + (\alpha - \beta) \sinh [(\mu - 1)\eta]\} \end{aligned}$$

avec  $\cosh \eta = L/x$ , donc  $\tanh \eta = \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}}$  et où  $0 \leq \mu \leq 1$ . Donc

$$\begin{aligned} \rho_R^c(x) &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \left( \frac{L}{x} \right)^\mu \left\{ \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}} \right]^{\mu+1} - \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}} \right]^{\mu+1} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \left( \frac{x}{L} \right)^\mu \left\{ \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}} \right]^{1-\mu} - \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}} \right]^{1-\mu} \right\} \end{aligned} \quad (6.102)$$

Quand  $x \rightarrow 0$ , on a  $\sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}} \sim 1 - \frac{x^2}{2L^2}$  et comme  $\mu + 1 > 0$  et  $1 - \mu > 0$  :

$$\rho_R^c(x) \sim \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \left( \frac{L}{x} \right)^\mu 2^{\mu+1} + \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \left( \frac{x}{L} \right)^\mu 2^{1-\mu} \quad (6.103)$$

Si  $\alpha + \beta \neq 0$ , alors  $\rho^c$  diverge en 0. Ce n'est pas une solution physique car on s'attend à ce que la **densité totale**  $\rho^c(x)$  **soit continue** et en particulier continue en 0. Or, comme  $\operatorname{Supp}[\rho_R^c] = [0, L]$  et  $\operatorname{Supp}[\rho_L^c] = [-L, 0]$  et comme il y a symétrie  $x \rightarrow -x$ , cette densité est donnée par

$$\rho^c(x) = \rho_L^c(x) + \rho_R^c(x) = \begin{cases} \rho_R^c(x) & \text{pour } x \in ]0, L[ \\ \rho_L^c(x) = \rho_R^c(-x) & \text{pour } x \in [-L, 0[ \end{cases} \quad (6.104)$$

Donc on ne veut pas que  $\rho^c$  diverge à l'origine, on veut  $\rho_L^c(0) = \rho^c(0^+) = \rho^c(0^-) = \rho_R^c(0)$ . Nécessairement on doit avoir  $\alpha + \beta = 0$ .

Dans ce cas ( $\alpha + \beta = 0$ ),  $\rho$  **s'annule en 0 comme**  $|x|^\mu$  :

$$\rho_R^c(x) \sim \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \left( \frac{x}{L} \right)^\mu 2^{1-\mu} \quad \text{quand } x \rightarrow 0 \quad (6.105)$$

La condition  $\alpha + \beta = 0$  donne la **valeur critique**  $b_{\text{cr}}$  de  $b$  pour laquelle une solution  $\rho_R$  à support  $[0, L]$  existe,  $b_{\text{cr}}$  doit vérifier :

$$-\frac{b_{\text{cr}}}{\sqrt{1 - J/2}} - \frac{L\mu}{\sqrt{1 + J/2}} + \frac{L}{\sqrt{1 + J/2}} = 0 \quad (6.106)$$

soit :

$$\boxed{b_{\text{cr}} = L(1 - \mu) \sqrt{\frac{1 - J/2}{1 + J/2}}} \quad (6.107)$$

Si on remplace dans  $L^2(\mu^2 - 1) + 2b\mu L\sqrt{\frac{1+J/2}{1-J/2}} + (1 + \frac{J}{2}) = 0$ , on trouve :

$$b_{\text{cr}} = \sqrt{1 - \frac{J}{2}} \quad \text{et} \quad L = \frac{\sqrt{1 + J/2}}{1 - \mu} \quad (6.108)$$

Ainsi  $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\mu)}}$ ,  $\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\mu)}}$ , d'où  $\beta - \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\pi(1-\mu)}$ . Finalement la densité  $\rho_R^c(x)$  est donnée pour  $x \in [0, L]$  par :

$$\boxed{\rho_R^c(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}(1-\mu)} \left(\frac{x}{L}\right)^\mu \left\{ \left[1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}}\right]^{1-\mu} - \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}}\right]^{1-\mu} \right\}} \quad (6.109)$$

Quand  $x \rightarrow L$ , la densité s'annule comme une racine (comme le demi-cercle de Wigner ou la loi de Marčenko-Pastur) :

$$\rho^c(x) \sim \frac{2}{\pi\sqrt{L}} \sqrt{L - x} \quad \text{quand } x \rightarrow L \quad (6.110)$$

Par contre quand  $x \rightarrow 0$ , la densité s'annule comme  $|x|^\mu$ .

### 6.5.3 Transition de phase

Notre modèle de gaz de Coulomb généralisé présente comme on a vu une **transition de phase** pour  $b = b_c = \sqrt{1 - \frac{J}{2}}$ .

• Au **point critique**  $b = b_c$ , la densité  $\rho^c(x)$  a un support  $[-L, L]$ , elle s'annule en  $\pm L$  comme une racine et elle s'annule aussi en 0 mais comme  $\sim |x|^{\Delta(J)}$  où

$$\boxed{\Delta(J) = \mu = \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{J}{2}\right) \quad \text{avec } \cos(\pi\mu) = \frac{J}{2} \quad \text{et } 0 \leq \mu \leq 1} \quad (6.111)$$

La borne supérieure  $L$  du support de la densité est donnée au point critique par :

$$L = \frac{\sqrt{1 + J/2}}{1 - \mu} \quad (6.112)$$

Enfin la densité est explicitement donnée sur  $[-L, L]$  par (6.109) :

$$\rho^c(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}(1-\mu)} \left| \frac{x}{L} \right|^\mu \left\{ \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}} \right]^{1-\mu} - \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}} \right]^{1-\mu} \right\} \quad (6.113)$$

- Pour  $b > b_c$ ,  $\rho_L^c$  et  $\rho_R^c$  ont des **supports disjoints**. Par symétrie,  $\rho_R^c$  a un support  $[L_1, L_2]$  avec  $0 < L_1 < L_2$  et  $\text{Supp}[\rho_L^c] = [-L_2, -L_1]$ .

- Pour  $b < b_c$ , **les supports de  $\rho_L^c$  et  $\rho_R^c$  se chevauchent**, ie ils sont de la forme  $\text{Supp}[\rho_L^c] = [-L_1, L_2]$  et  $\text{Supp}[\rho_R^c] = [-L_2, L_1]$  où  $0 < L_1 < L_2$ . On notera que dans tous les cas, à cause de la contrainte de non-croisement (marcheurs vicieux), le support de la densité est fini (contrairement au cas du mouvement brownien de Pearcey, cf section 6.1.2).

### 6.5.3.1 Cas particulier $J = 0$

Dans le cas particulier  $J = 0$ , c'est-à-dire que les charges de type 1 n'interagissent pas du tout avec les charges de type 2, l'équation de Bueckner (6.56) se ramène simplement à un problème de Tricomi. Dans ce cas, le point critique  $b_c = 1$  est caractérisé par  $\mu = 1/2$ , une densité  $\rho^c$  à support  $[-L, L]$  avec  $L = 2$  et qui s'annule en 0 comme  $\sqrt{|x|}$  comme habituellement, ie  $\Delta(0) = 1/2$ . Explicitement, après simplification de on trouve :

$$\rho^c(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{x(2-x)} & \text{pour } x \in [0, 2] \\ \frac{1}{\pi} \sqrt{-x(x+2)} & \text{pour } x \in [-2, 0] \end{cases} \quad (6.114)$$

La densité est constituée de deux demi-cercles, l'un sur  $[-2, 0]$ , l'autre sur  $[0, 2]$ .

### 6.5.3.2 Cas particulier $J = -2$

Dans le cas  $J = -2$ , le gaz de Coulomb généralisé est un gaz physique de charges pour moitié +1, pour moitié -1. Le point critique  $b_c = \sqrt{2}$  correspond à  $\mu = 1$ . Pour trouver l'expression de  $L$  et de  $\rho^c$  dans cette limite, il faut considérer la limite  $J = -2 + \epsilon$  puis faire tendre  $\epsilon$  vers 0. On a alors  $\mu = 1 - \frac{\sqrt{\epsilon}}{\pi} + \dots$  et  $L \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ . La densité (6.113) devient dans cette limite :

$$\rho^c(x) = \frac{2|x|}{\pi^2} \ln \left[ \frac{|x|}{L - \sqrt{L^2 - x^2}} \right] \quad \text{où } L = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (6.115)$$

Quand  $x \rightarrow 0$ , on trouve  $\rho^c$  tend vers 0 comme :

$$\rho^c(x) \sim -\frac{2}{\pi^2} |x| \ln |x| \quad \text{quand } x \rightarrow 0 \quad (6.116)$$

### 6.5.3.3 Cas particulier $J = 2$

Dans le cas  $J = 2$ , le gaz de Coulomb généralisé est un gaz physique de charges +1, c'est un gaz de Coulomb usuel. Il n'y a pas de différence entre les deux ensembles de

charges. Le point critique  $b_c = 0$  correspond à  $\mu = 0$ ,  $L = \sqrt{2}$  et la densité (6.113) se simplifie dans cette limite :

$$\rho^c(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{2 - x^2} \quad (6.117)$$

La densité est un seul demi-cercle sur  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ . On s'y attend car il n'y a en fait qu'une seule sorte de charges. L'origine ne joue pas de rôle spécifique, en particulier  $\rho^c(x)$  ne s'annule pas en  $x = 0$  dans cette limite (contrairement à tous les autres cas  $J < 2$ ).

#### 6.5.3.4 Cas particulier $J = 1$

Le cas  $J = 1$  correspond au processus de Pearcey. Dans ce cas, le point critique  $b_c = \frac{1}{\sqrt{2}}$  est donné par  $\mu = 1/3$ ,  $L = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$  et une densité :

$$\rho^c(x) = \frac{3}{2\sqrt{2}\pi} \left| \frac{x}{L} \right|^{\frac{1}{3}} \left\{ \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}} \right]^{\frac{2}{3}} - \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}} \right]^{\frac{2}{3}} \right\} \quad (6.118)$$

qui donne (6.51). Le cas  $J = 1$  n'est pas vraiment spécifique par rapport à  $-2 < J < 2$  quelconque. dans ce cas, la densité critique  $\rho^c$  s'annule comme  $\sim |x|^{1/3}$  en  $x = 0$ .

## Troisième partie

---

# INTRICATION QUANTIQUE POUR DES ÉTATS ALÉATOIRES





# Intrication quantique

---

Pendant ma thèse, je me suis intéressée à des problèmes d'intrication quantique pour des états aléatoires, qui se trouvent être étroitement reliés à la théorie des matrices aléatoires. Dans ce chapitre introductif sur l'intrication quantique, j'introduis la notion d'intrication pour des états purs et pour des mélanges statistiques d'états pur. J'introduis également les principales mesures qui permettent d'avoir une version plus quantitative de l'intrication : l'entropie d'intrication pour des états purs, l'entropie de formation ou la distance aux états séparables pour des mélanges statistiques.

L'**intrication** est une propriété aussi fondamentale que fascinante de la physique **quantique**. Elle mesure les **corrélations non classiques et non locales** entre différentes parties d'un système quantique. Si on effectue une mesure sur une partie d'un système quantique intriqué, alors cette mesure peut affecter instantanément une autre partie de ce système même si cette autre partie est très éloignée physiquement de la première partie. L'intrication a de très nombreuses applications dans des domaines variés : théorie de l'information, cryptographie quantique, téléportation quantique, calcul quantique, etc. On peut en effet exploiter ces corrélations très puissantes pour inventer par exemple des algorithmes très efficaces ou de façon générale réaliser des tâches complètement impossibles en physique classique. L'intrication est aussi récemment apparue comme un élément clé pour caractériser certaines transitions de phase. Enfin elle serait d'après des travaux récents à l'origine des fondements de la physique statistique. Dans l'ensemble canonique par exemple c'est l'intrication du système avec le réservoir thermique qui est à l'origine de la thermalisation du système.

Dans ce chapitre, je présente quelques notions fondamentales sur l'intrication quantique. J'introduis d'abord dans la première partie 7.1 la notion d'intrication quantique de façon très générale pour un **état pur** ; je donne quelques exemples d'applications, en particulier dans le domaine du calcul quantique (algorithmique) ; et je définis l'entropie d'intrication (von Neumann et Renyi), qui est une mesure d'intrication pour les états purs. Dans la seconde partie 7.2, j'introduis les états **mélanges statistiques** d'états purs. Je définis alors l'intrication pour ces états et je donne quelques exemples de mesures d'intrication (entropie de formation, distance aux états séparables).

## 7.1 INTRICATION POUR UN ÉTAT PUR

### 7.1.1 Etats de Bell

La lumière est une onde électromagnétique classique. La **polarisation** de la lumière est un phénomène classique lié au caractère vectoriel des ondes électromagnétiques : par exemple, dans le cas d'une polarisation linéaire, l'angle  $\theta$  de polarisation définit le plan dans lequel oscille le champ électrique. Les photons sont les constituants élémentaires de la lumière. Un **photon** se comporte de façon analogue à une **onde** lumineuse bien qu'il soit une particule -c'est une **particule quantique**. Par analogie avec une onde lumineuse, l'**état de polarisation d'un photon**  $|\theta\rangle$  est une *superposition linéaire* des deux états de base de polarisation, l'état de polarisation verticale  $|v\rangle$  et l'état de polarisation horizontale  $|h\rangle$  :

$$|\theta\rangle = \cos\theta|v\rangle + \sin\theta|h\rangle \quad (7.1)$$

D'un point de vue quantique, cela signifie qu'une **mesure** dans la base de polarisation  $\{|v\rangle, |h\rangle\}$  donnera pour résultat  $|v\rangle$  avec probabilité  $(\cos\theta)^2$  et  $|h\rangle$  avec probabilité  $(\sin\theta)^2$ . Le résultat de la mesure quantique est discret et aléatoire.

Dans le cas de la lumière, les vecteurs de polarisation verticale et horizontale sont une base du plan transverse à la direction de propagation. Par analogie avec la lumière, les deux états quantiques de polarisation  $|v\rangle$  et  $|h\rangle$  sont orthogonaux et forment une **base** orthonormée des états de polarisation du photon :

$$\langle v|h\rangle = 0 \quad , \quad \langle h|h\rangle = 1 \quad \text{et} \quad \langle v|v\rangle = 1 \quad (7.2)$$

On suppose qu'Alice et Bob possèdent chacun un photon et que cette **paire de photons** est dans l'**état de Bell**  $|\Phi_+\rangle$  défini par :

$$|\Phi_+\rangle = \frac{|h\rangle_A|h\rangle_B + |v\rangle_A|v\rangle_B}{\sqrt{2}} \quad (7.3)$$

Cette paire de photons est **intriquée**, ce qui signifie qu'il y a de fortes *corrélations* entre l'état du photon d'Alice et celui du photon de Bob. Si Alice mesure son photon puis Bob le sien, quel que soit le résultat de la mesure d'Alice, Bob trouvera nécessairement le même résultat. Si Alice effectue une **mesure** dans la base de polarisation  $\{|v\rangle_A, |h\rangle_A\}$ , avec probabilité 1/2 elle va trouver une polarisation  $|v\rangle_A$ , avec probabilité 1/2 elle va mesurer  $|h\rangle_A$ . Mais si Alice obtient  $|v\rangle_A$ , alors Bob trouvera  $|v\rangle_B$  en effectuant une mesure dans la base  $\{|v\rangle_B, |h\rangle_B\}$ , et si elle obtient  $|h\rangle_A$ , alors Bob trouvera  $|h\rangle_B$ .

L'**intrication** consiste en des **corrélations** fortes et **non-classiques** entre les deux photons. En particulier, l'intrication a les propriétés suivantes :

(1) Ces corrélations **ne dépendent pas de la base** choisie pour la mesure. Jusqu'ici on s'est placés dans la base  $\{|v\rangle, |h\rangle\}$  (polarisation verticale ou horizontale). Mais si Alice et Bob préfèrent effectuer leurs mesures dans la base  $\{|g\rangle, |d\rangle\}$  (polarisation gauche ou droite) où

$$|g\rangle = \left|\frac{\pi}{4}\right\rangle = \frac{|v\rangle + |h\rangle}{\sqrt{2}} \quad , \quad |d\rangle = \left|-\frac{\pi}{4}\right\rangle = \frac{|v\rangle - |h\rangle}{\sqrt{2}} \quad (7.4)$$

alors Bob trouvera encore le même résultat qu’Alice, quel que soit le résultat de la mesure d’Alice. En effet  $|\Phi_+\rangle$  a la même expression quelle que soit la base choisie :

$$|\Phi_+\rangle = \frac{|g\rangle_A|g\rangle_B + |d\rangle_A|d\rangle_B}{\sqrt{2}} \quad (7.5)$$

(2) Ces corrélations sont **non-locales**. Si Alice effectue sa mesure, l’état du photon de Bob sera instantanément projeté dans le même état que celui d’Alice quelle que soit la distance physique séparant Alice et Bob.

L’**intrication**, qui consiste en des corrélations fortes et intrinsèquement **quantiques**, peut être utilisée pour réaliser des tâches impossibles classiquement dans le contexte du **calcul quantique**, de l’**information quantique**, la cryptographie, etc. par exemple des algorithmes très puissants pour ordinateurs quantiques. Un exemple célèbre est l’algorithme de Shor qui permet de factoriser un entier en produits de nombres premiers très efficacement et qui risque bien de casser le système actuel de cryptographie, le système RSA, le jour où on saura construire un ordinateur quantique... Cependant on est actuellement très loin expérimentalement d’obtenir un véritable ordinateur quantique, la difficulté principale étant la **décohérence**. Les superpositions quantiques ne survivent en effet pas ou presque pas à l’échelle macroscopique : le système interagit avec l’environnement, il s’intrique avec lui, ce qui détruit les corrélations quantiques internes au système.

A titre de remarque, les quatre **états de Bell** usuels sont définis comme :

$$\begin{aligned} |\Phi_+\rangle &= \frac{|v\rangle|v\rangle + |h\rangle|h\rangle}{\sqrt{2}} & |\Psi_+\rangle &= \frac{|v\rangle|h\rangle + |h\rangle|v\rangle}{\sqrt{2}} \\ |\Phi_-\rangle &= \frac{|v\rangle|v\rangle - |h\rangle|h\rangle}{\sqrt{2}} & |\Psi_-\rangle &= \frac{|v\rangle|h\rangle - |h\rangle|v\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (7.6)$$

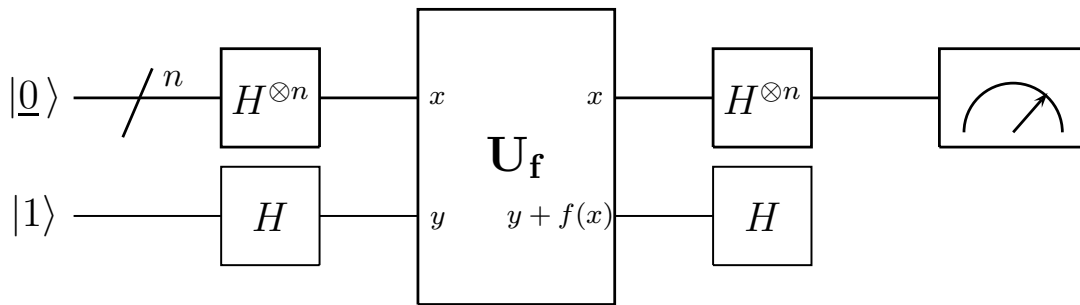
Ce sont les états à deux photons qui sont maximalelement intriqués (on verra plus loin comment quantifier l’intrication).

## 7.1.2 Calcul quantique

J’introduis brièvement dans cette partie la notion de qubit et de calcul quantique pour donner une idée de l’intérêt de la superposition quantique et de l’intrication dans le contexte de la théorie de l’information. Pour plus de détails sur la théorie de l’information quantique et le calcul quantique, on pourra se référer au livre très complet de Nielsen et Chuang [NC00].

### 7.1.2.1 Qubit et ordinateur quantique

L’idée de l’ordinateur quantique est de remplacer le bit classique qui vaut 0 ou 1 (binaire) par un bit quantique ou **qubit**, qui est une superposition linéaire  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  des états de base  $|0\rangle, |1\rangle$  (avec  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  pour la normalisation). Si on effectue une mesure dans la base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , on trouvera  $|0\rangle$  avec probabilité  $|\alpha|^2$  et  $|1\rangle$  avec probabilité  $|\beta|^2$ . Un qubit est un vecteur de norme 1 dans un espace de Hilbert de dimension 2. En termes de polarisations de photons, cela revient à autoriser toutes les polarisations



**Figure 7.1** – Schéma de l’algorithme de Deutsch-Josza : le premier registre comprend  $n$  qubits, il est initialisé à  $\otimes_i |0\rangle_i$ , le second registre comprend un qubit, il est initialisé à  $|1\rangle$ . On applique la porte de Hadamard  $H$  à chacun des qubits. Puis on applique la porte  $U_f$  aux  $(n + 1)$  qubits. Enfin on applique à nouveau  $H$  à chacun des qubits et on mesure le premier registre.

linéaires intermédiaires entre verticale et horizontale caractérisées par un angle  $\theta$  continu. Les effets de **superposition** et d’**intrication quantique** permettent de construire des algorithmes très puissants, complètement irréalisables avec un ordinateur classique.

Une **porte quantique** est une opération unitaire  $U$  sur un ou plusieurs qubit(s). Par exemple, pour un qubit, les portes possibles sont la rotation  $U_\theta$  d’angle  $\theta$  et la réflexion appelée encore porte de “Hadamard”  $H$  :

$$U_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Pour deux qubits, on peut par exemple avoir la porte CNOT inspirée du CNOT classique, où le second bit est retourné (ie  $0 \leftrightarrow 1$ ) si et seulement si le premier bit est 1. Pour les états de base, le CNOT quantique s’écrit :

$$\begin{aligned} U_{\text{CNOT}}|0\rangle|0\rangle &= |0\rangle|0\rangle, & U_{\text{CNOT}}|1\rangle|0\rangle &= |1\rangle|1\rangle \\ U_{\text{CNOT}}|0\rangle|1\rangle &= |0\rangle|1\rangle, & U_{\text{CNOT}}|1\rangle|1\rangle &= |1\rangle|0\rangle \end{aligned} \quad (7.8)$$

### 7.1.2.2 Exemple d’algorithme : l’algorithme de Deutsch-Josza

Dans cette section, je présente un des algorithmes quantiques connus qui utilisent le **parallélisme** et l’**intrication** pour effectuer une tâche plus efficacement qu’un algorithme classique.

On considère une fonction  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ . On suppose que soit  $f$  est constante, soit  $f(x_1, \dots, x_n)$  est exactement 0 pour la moitié des  $x_i$  et exactement 1 pour l’autre moitié ( $f$  est “équilibrée”). L’**algorithme de Deutsch-Josza** permet de déterminer si  $f$  est constante ou équilibrée. Je vais d’abord introduire les portes quantiques nécessaires à la réalisation de l’algorithme puis je présenterai l’algorithme lui-même.

A tout entier positif  $x < 2^n$  correspond une unique **décomposition binaire**  $x = \sum_{i=1}^n x_i 2^{n-i}$  où  $x_i \in \{0, 1\}$ . Si on a  $n$  qubits, on peut définir la base  $|\underline{x}\rangle = |x_1\rangle \dots |x_n\rangle = \otimes_i |x_i\rangle$  de l’espace de Hilbert produit  $\mathcal{H}^n = \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}$  où  $\mathcal{H}$  est l’espace associé à un qubit (dimension 2). Pour simplifier on notera  $f(x)$  pour désigner  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

Si on applique la porte de Hadamard  $H$ , cf Eq. (7.7), sur chacun des qubits de l’état

$|\underline{0}\rangle = \otimes_i |0\rangle_i$ , on trouve :

$$H^{\otimes n} |\underline{0}\rangle = \otimes_i \left( \frac{|0\rangle_i + |1\rangle_i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{\underline{y}=0}^{2^n-1} |\underline{y}\rangle \quad (7.9)$$

On obtient la somme de tous les états de base possibles. En effet on a  $\otimes_i (|0\rangle_i + |1\rangle_i) = \sum_{y_1=0,1} \sum_{y_2=0,1} \dots \sum_{y_n=0,1} |\underline{y}\rangle = \sum_{\underline{y}=0}^{2^n-1} |\underline{y}\rangle$  où  $|\underline{y}\rangle = \otimes_i |y_i\rangle$ . Partant de  $H^{\otimes n} |\underline{0}\rangle$  comme état initial dans l'algorithme, on va pouvoir tester en même temps toutes les valeurs de  $\underline{y}$  possibles. C'est ce qu'on appelle le **parallélisme quantique**.

Si on applique maintenant  $H^{\otimes n}$  à  $|\underline{x}\rangle = \otimes_i |x_i\rangle$ , on trouve :

$$H^{\otimes n} |\underline{x}\rangle = \otimes_i \left( \frac{|0\rangle + (-1)^{x_i} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{\underline{y}=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot \underline{y}} |\underline{y}\rangle \quad (7.10)$$

où  $x \cdot \underline{y} = \sum_i x_i y_i \pmod{2}$ . En effet pour un qubit on a  $H|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$  et  $H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ , soit  $H|x_i\rangle = \frac{|0\rangle + (-1)^{x_i} |1\rangle}{\sqrt{2}}$ .

On considère la porte quantique  $U_f$  à  $(n+1)$  qubits définie par son action sur les états de base :

$$U_f |\underline{x}\rangle |y\rangle = |\underline{x}\rangle |y + f(x)\rangle \quad \text{où } |\underline{x}\rangle = \otimes_{i=1}^n |x_i\rangle \text{ avec } x_i \in \{0, 1\}, y \in \{0, 1\} \quad (7.11)$$

soit, pour  $|\underline{x}\rangle = \otimes_i |x_i\rangle$  avec  $x_i \in \{0, 1\}$  :

$$U_f |\underline{x}\rangle |0\rangle = |\underline{x}\rangle |f(x)\rangle, \quad U_f |\underline{x}\rangle |1\rangle = |\underline{x}\rangle |1 + f(x)\rangle \quad (7.12)$$

L'**algorithme de Deutsch-Josza** est le suivant, voir schéma 7.1 : On initialise les  $(n+1)$  qubits dans l'état  $|\underline{0}\rangle |1\rangle = \otimes_i |0\rangle_i |1\rangle$ . On applique une porte de Hadamard à chacun des  $(n+1)$  qubits indépendamment. On obtient

$$H^{\otimes(n+1)} |\underline{0}\rangle |1\rangle = (H^{\otimes n} |\underline{0}\rangle) \otimes \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{\underline{x}=0}^{2^n-1} |\underline{x}\rangle \otimes \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad (7.13)$$

On applique alors  $U_f$  à ces  $(n+1)$  qubits :

$$U_f H^{\otimes(n+1)} |\underline{0}\rangle |1\rangle = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{\underline{x}=0}^{2^n-1} \left( \frac{|\underline{x}\rangle |f(x)\rangle - |\underline{x}\rangle |1 + f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad (7.14)$$

Puis on applique à nouveau une porte de Hadamard à chacun des qubits séparément :

$$\begin{aligned} H^{\otimes(n+1)} U_f H^{\otimes(n+1)} |\underline{0}\rangle |1\rangle &= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{\underline{x}=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{\underline{y}=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot \underline{y}} |\underline{y}\rangle \left[ \frac{\frac{|0\rangle + (-1)^{f(x)} |1\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|0\rangle + (-1)^{1+f(x)} |1\rangle}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \right] \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\underline{x}=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} \sum_{\underline{y}=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot \underline{y}} |\underline{y}\rangle |1\rangle \end{aligned} \quad (7.15)$$

Le résultat pour le dernier qubit est toujours  $|1\rangle$ . On effectue à la fin une mesure du registre des  $n$  premiers qubits.  $2^n$  résultats sont possibles (les  $|\underline{x}\rangle$  où  $0 \leq x < 2^n$ ). On veut savoir dans quels cas on peut obtenir  $|\underline{0}\rangle = \otimes_i |0\rangle_i$ . On calcule donc la projection de  $H^{\otimes(n+1)}U_f H^{\otimes(n+1)}|\underline{0}\rangle|1\rangle$  sur  $|\underline{0}\rangle = \otimes_i |0\rangle_i = |0\rangle^{\otimes n}$  :

$$\langle 1|\langle \underline{0}|H^{\otimes(n+1)}U_f H^{\otimes(n+1)}|\underline{0}\rangle|1\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot y} \langle \underline{0}|\underline{y}\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} \quad (7.16)$$

Finalement :

$$|\langle 1|\langle \underline{0}|H^{\otimes(n+1)}U_f H^{\otimes(n+1)}|\underline{0}\rangle|1\rangle|^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } f \text{ est constante} \\ 0 & \text{si } f \text{ est équilibrée} \end{cases} \quad (7.17)$$

Une simple mesure du registre des  $n$  premiers qubits à la fin permet donc de déterminer si  $f$  est constante ou équilibrée : si on trouve  $|\underline{0}\rangle = \otimes_i |0\rangle_i$ , alors cela signifie que  $f$  est constante, si on trouve autre chose que  $|\underline{0}\rangle$ , alors  $f$  est équilibrée. Une seule évaluation de l'“oracle”  $H^{\otimes(n+1)}U_f H^{\otimes(n+1)}$  permet donc de déterminer si  $f$  est constante ou équilibrée avec l'algorithme quantique de Deutsch-Jozsa. Au contraire, classiquement il faudrait un nombre d'opérations proportionnel à  $2^n$ , ce qui est beaucoup moins favorable pour  $n$  grand.

### 7.1.3 L'entropie d'intrication

Dans cette partie, on se place dans un contexte plus général. On considère un système quantique décrit par un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimension  $n$ .

#### 7.1.3.1 Etat pur versus mélange statistique

On se place pour commencer dans un système quantique décrit par un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  quelconque, de dimension  $n$ . On veut caractériser l'état du système quantique. On distingue état pur et mélange statistique.

- Un **état pur** est par définition un vecteur  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  normé à 1, ie  $\langle \psi|\psi\rangle = 1$ . Il décrit l'état du système quantique. Par exemple dans l'espace des polarisations qui est de dimension 2, on a vu qu'un état de polarisation du photon est un état pur  $|\theta\rangle = \cos \theta |v\rangle + \sin \theta |h\rangle$ .

- On peut généraliser la notion d'état quantique en introduisant une incertitude statistique. Un état quantique généralisé ou **mélange statistique** est décrit par une **matrice densité**  $\rho$ , c'est par définition une matrice sur  $\mathcal{H}$  (donc de taille  $n \times n$ ) qui est :

- hermitienne, ie  $\rho^\dagger = \rho$ ,

- semi-définie positive, ie  $\langle m|\rho|m\rangle \geq 0$  pour tout  $|m\rangle \in \mathcal{H}$ ,

- de trace 1, ie  $\text{Tr} \rho = 1$ .

La matrice  $\rho$  est alors diagonalisable en base orthonormée  $|m_i\rangle$  (ie  $\langle m_i|m_j\rangle = \delta_{i,j}$ ) et ses valeurs propres  $\lambda_i$  sont réelles positives de somme 1. La décomposition spectrale de

$\rho$  s'écrit donc

$$\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i |m_i\rangle \langle m_i| \quad \text{avec} \quad \lambda_i \geq 0, \forall i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (7.18)$$

Une **valeur propre**  $\lambda_i$  de  $\rho$  s'interprète comme la **probabilité que le système soit dans l'état pur**  $|m_i\rangle$ .  $\rho$  est une superposition statistique qui décrit un **manque d'information**, une incertitude classique sur le système. Si un seul  $\lambda_i$ , disons  $\lambda_{i_0}$ , est non nul, alors  $\lambda_{i_0} = 1$  et  $\rho = |m_{i_0}\rangle \langle m_{i_0}|$  est le projecteur sur  $|m_{i_0}\rangle$ ,  $\rho$  est simplement la représentation en matrice densité de l'état pur  $|m_{i_0}\rangle$  -on dira de façon raccourcie que  $\rho$  est état pur dans ce cas. Si plusieurs  $\lambda_i$  sont non nuls alors il y a une incertitude sur l'état système, on ne sait pas avec certitude dans lequel des états purs  $|m_i\rangle$  il est. De façon générale, un état mélange statistique correspond à l'état d'un système qui n'est pas isolé mais **en contact avec l'environnement**. L'interaction avec l'environnement est à l'origine d'une perte d'information pour l'observateur qui n'a accès qu'à des mesures sur le système.

Dans le formalisme, il faut bien distinguer la notion de **superposition cohérente (quantique)** avec celle de **superposition statistique classique** (mélange statistique). Par exemple, considérons un qubit, donc un espace de Hilbert de dimension 2, dans un état pur  $|\psi\rangle$  ou dans un état mélange statistique  $\rho$  définis comme :

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|}{2} = \frac{1}{2} \mathbb{1} \quad (7.19)$$

Ces deux superpositions sont très différentes. Il est vrai que dans les deux cas une mesure dans la base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  donnera  $|0\rangle$  avec probabilité 1/2 et  $|1\rangle$  avec probabilité 1/2. Mais si on fait la mesure dans une autre base, par exemple dans la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  où  $|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$  et  $|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ , on trouvera des résultats très différents. En effet, dans cette base on a :

$$|\psi\rangle = |+\rangle \quad \text{et} \quad \rho = \frac{|+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -|}{2} \quad (7.20)$$

- Ainsi dans le cas où l'état est  $|\psi\rangle$ , dans la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  on mesurera nécessairement  $|+\rangle$  (avec probabilité 1) :  $|\psi\rangle$  est une superposition cohérente (linéaire) quantique.

- Dans le cas où l'état est  $\rho$ , on mesurera  $|+\rangle$  avec probabilité 1/2 et  $|-\rangle$  avec probabilité 1/2. Quelle que soit la base, l'incertitude totale persiste,  $\rho$  est un mélange statistique total, une superposition statistique, classique.

Les deux notions sont donc intrinsèquement très différentes.

Cette **différence fondamentale** existe bien dans le **formalisme quantique**. On notera cependant que la mesure, qui doit être effectuée dans une certaine base, ne donne jamais accès directement à une superposition cohérente des deux états de base, mais seulement à l'un ou l'autre de ces états avec une certaine probabilité pour chaque état. Ainsi pour une superposition cohérente, *rien ne permet de conclure que l'état "réel" du système physique est bien un tel mélange de deux états*. Ainsi supposer dans la très célèbre expérience du chat de Schrödinger (voir plus loin section 7.1.3.3) le chat réellement à la fois vivant et mort avant ouverture de la boîte dans laquelle il se trouve est une pure spéculation philosophique. Physiquement, c'est seulement un formalisme qui permet de décrire parfaitement bien les observations que l'on peut faire *après* ouverture de la boîte (par la mesure).



### 7.1.3.2 Intrication

On considère maintenant un système quantique **bipartite**, c'est à dire fait de deux sous-systèmes  $A$  et  $B$ , décrit par un espace de Hilbert produit  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . On supposera dans la suite que  $\mathcal{H}_A$  est de dimension  $N$  et  $\mathcal{H}_B$  est de dimension  $M$ , avec  $M \geq N$ . Ainsi  $\mathcal{H}$  est de dimension  $n = NM$ . On s'intéresse à l'intrication entre les deux sous-systèmes  $A$  et  $B$ . Dans l'exemple plus haut de la paire de photons partagée par Alice et Bob, on avait  $\mathcal{H}_A$  de dimension  $N = 2$  et  $\mathcal{H}_B$  de dimension  $M = 2$ . On suppose que l'état du système total est décrit par un état pur  $|\psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ .

L'état  $|\psi\rangle$  est dit **séparable** s'il peut se factoriser sous la forme

$$|\psi\rangle = |\phi_A\rangle|\phi_B\rangle \quad \text{où } |\phi_A\rangle \in \mathcal{H}_A \text{ et } |\phi_B\rangle \in \mathcal{H}_B \quad (7.21)$$

Sinon il est dit **intriqué**.

L'état du sous-système  $A$  est décrit par sa **matrice densité réduite**  $\rho_A$ , qui est définie comme la trace partielle sur  $B$  de la matrice densité  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  du système total :

$$\rho_A = \text{Tr}_B [\rho] \quad \text{où } \rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (7.22)$$

soit

$$\langle i^A | \rho_A | j^A \rangle = \sum_{\alpha^B=1}^M \langle \alpha^B | \langle i^A | \rho | j^A \rangle | \alpha^B \rangle \quad (7.23)$$

où  $\{|i^A\rangle\}$  pour  $1 \leq i^A \leq N$  est une base de  $\mathcal{H}_A$ , et  $\{|\alpha^B\rangle\}$  pour  $1 \leq \alpha^B \leq M$  une base de  $\mathcal{H}_B$ .  $\rho_A$  décrit **l'information que l'on peut avoir sur le sous-système  $A$  si on ne sait rien du sous-système  $B$** . En particulier, si  $A$  et  $B$  sont intriqués, on aura un manque d'information sur  $A$ , une partie étant contenue dans l'intrication avec  $B$ . C'est pourquoi  $A$  doit être décrit de façon générale par un mélange statistique bien que le système total soit dans un état pur  $|\psi\rangle$ .

### 7.1.3.3 Le chat de Schrödinger

On va considérer une expérience de pensée assez simple pour comprendre le lien entre matrice densité réduite  $\rho_A$  et intrication de l'état  $|\psi\rangle$ , la fameuse expérience du **chat de Schrödinger**. On met un *chat* dans une boîte avec une *substance radioactive*. On attend un certain temps. Si un atome radioactif se désintègre, un mécanisme se déclenche, libérant un poison qui tue le chat. A la fin, on suppose qu'il y a une probabilité 1/2 pour qu'un atome se soit désintégré. On ouvre alors la boîte. Le résultat de l'expérience est illustré sur la figure 7.2.

A la fin, le chat (système  $A$ , espace de dimension 2) peut être vivant ou mort :

$$\left| \begin{array}{c} \text{chat} \\ \text{vivant} \end{array} \right\rangle = \text{chat vivant} \quad \left| \begin{array}{c} \text{chat} \\ \text{mort} \end{array} \right\rangle = \text{chat mort} \quad (7.24)$$

L'atome radioactif (système  $B$ ) peut s'être désintégré ou non, on notera :

$$\left| \bullet \right\rangle = \text{atome non désintégré} \quad \left| \bullet' \right\rangle = \text{atome désintégré} \quad (7.25)$$

• A la fin de l'expérience, juste **avant** d'ouvrir la boîte, le système {chat+atome radioactif} est dans un état **maximalement intriqué** :

$$|\psi\rangle = \frac{|\text{chat vivant}\rangle \otimes |\text{atome stable}\rangle + |\text{chat mort}\rangle \otimes |\text{atome désintégré}\rangle}{\sqrt{2}} \quad (7.26)$$

Si l'atome s'est désintégré (probabilité 1/2), alors le chat est mort. Si l'atome ne s'est pas désintégré (probabilité 1/2), alors le chat est vivant.  $|\psi\rangle$  est un état de Bell  $|\Phi_+\rangle$ , cf (7.6), donc il est maximalement intriqué. Dans ce cas la matrice densité réduite du chat est donnée par :

$$\rho_A = \text{Tr}_B [|\psi\rangle\langle\psi|] = \langle\text{atome stable}|\psi\rangle\langle\psi|\text{atome stable}\rangle + \langle\text{atome désintégré}|\psi\rangle\langle\psi|\text{atome désintégré}\rangle \quad (7.27)$$

soit :

$$\rho_A = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} \text{chat vivant} \\ \text{chat vivant} \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \text{chat vivant} \\ \text{chat vivant} \end{array} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} \text{chat mort} \\ \text{chat mort} \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \text{chat mort} \\ \text{chat mort} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \mathbb{1} \quad (7.28)$$

où  $\mathbb{1}$  est l'identité sur  $A$  (chat). Ainsi  $\rho_A$  est un **mélange statistique complet**,  $\rho_A$  est proportionnel à l'identité  $\mathbb{1}$ . On n'a aucune information sur l'état du chat ( $A$ ) car toute l'information est contenue dans l'intrication avec l'atome radioactif ( $B$ ).

• On ouvre alors la boîte. On découvre par exemple, avec probabilité 1/2 que le chat est vivant. Cela signifie que l'atome radioactif ne s'est pas désintégré. Dans ce cas, **après** l'ouverture de la boîte le système {atome+chat} est projeté dans un **état séparable, non intriqué** :

$$|\psi\rangle = |\text{chat vivant}\rangle \otimes |\text{atome stable}\rangle \quad (7.29)$$

La matrice densité du chat est alors :

$$\rho_A = \left| \begin{array}{c} \text{chat vivant} \\ \text{chat vivant} \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \text{chat vivant} \\ \text{chat vivant} \end{array} \right| \quad (7.30)$$

$\rho_A$  est un **état pur**. Il n'y a pas d'incertitude sur l'état du chat. On sait qu'il est vivant, aucune information n'est contenue dans l'intrication avec l'atome car  $|\psi\rangle$  n'est pas intriqué.

On voit bien sur cet exemple simple que selon que l'état du chat  $\rho_A$  est mélange statistique ou pur, on peut savoir si l'état du système total {chat+atome} est intriqué ou non.

### 7.1.3.4 Décomposition de Schmidt

On retourne au cas général d'un **système quantique bipartite**  $A \times B$  décrit par un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  de dimension  $N \times M$ . L'état du système est décrit par un état pur  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . L'état du sous-système  $A$  est décrit par sa matrice densité réduite  $\rho_A = \text{Tr}_B[\rho]$  (de taille  $N \times N$ ) où  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ . L'état du sous-système  $B$  est décrit par sa matrice densité réduite  $\rho_B = \text{Tr}_A[\rho]$ , de taille  $M \times M$ .

Pour  $N = M$ , on peut montrer (cf plus bas) que  $\rho_A$  et  $\rho_B$  ont les **mêmes valeurs propres**  $\lambda_i$ . Si  $M > N$ , et que les  $\lambda_i$  désignent les valeurs propres de  $\rho_A$ , on peut montrer

- Juste avant l'ouverture de la boîte, le système est **intriqué**:

$$|\psi\rangle = \frac{|\text{chat}\rangle_A \otimes |\text{vivant}\rangle_B + |\text{ange}\rangle_A \otimes |\text{mort}\rangle_B}{\sqrt{2}}$$

d'où  $\rho_A = \frac{1}{2} |\text{chat}\rangle\langle\text{chat}| + \frac{1}{2} |\text{ange}\rangle\langle\text{ange}|$

- Après l'ouverture de la boîte, le système est dans un état **séparable** (non intriqué):

$$|\psi\rangle = |\text{chat}\rangle_A \otimes |\text{vivant}\rangle_B \xrightarrow{1/2} |\psi\rangle = |\text{ange}\rangle_A \otimes |\text{mort}\rangle_B$$

d'où  $\rho_A = |\text{chat}\rangle\langle\text{chat}|$       d'où  $\rho_A = |\text{ange}\rangle\langle\text{ange}|$

Figure 7.2 – Expérience du chat de Schrödinger

que  $\rho_B$  a pour valeurs propres les  $\lambda_i$  et  $M - N$  zéros. dans tous les cas, pour  $M \geq N$ , si  $|m_i\rangle$  (resp.  $|\mu_i\rangle$ ) désigne le vecteur propre de  $\rho_A$  (resp.  $\rho_B$ ) associé à  $\lambda_i$ , on a donc

$$\rho_A = \sum_{i=1}^N \lambda_i |m_i\rangle_A \langle m_i| \quad \text{et} \quad \rho_B = \sum_{i=1}^N \lambda_i |\mu_i\rangle_B \langle \mu_i| \quad (7.31)$$

avec  $\lambda_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$  et où  $|m\rangle_A \langle m|$  désigne le projecteur sur l'état pur  $|m\rangle_A$  de  $\mathcal{H}_A$ . On peut aussi montrer que  $|\psi\rangle$  peut s'écrire :

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i} |m_i\rangle_A |\mu_i\rangle_B \quad (7.32)$$

Cette écriture de  $|\psi\rangle$  s'appelle **décomposition de Schmidt**. La différence avec une décomposition dans une base quelconque fixée de  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  est la somme simple sur  $i$ ,  $1 \leq i \leq N$  dans la décomposition de Schmidt par opposition à la somme double sur deux indices  $i, \alpha$ ,  $1 \leq i \leq N$  et  $1 \leq \alpha \leq M$  dans une décomposition standard. En effet, si on fixe une base de  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , par exemple une base produit  $|i\rangle_A |\alpha\rangle_B$  pour  $1 \leq i \leq N$ ,  $1 \leq \alpha \leq M$ , la décomposition de  $|\psi\rangle$  dans cette base est de la forme :

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^M x_{i,\alpha} |i\rangle_A |\alpha\rangle_B \quad \text{où} \quad \sum_{i,\alpha} |x_{i,\alpha}|^2 = 1 \quad (7.33)$$

La décomposition de Schmidt (7.32) est très utile pour **caractériser l'intrication**. En particulier, si  $n_S$  désigne le nombre de valeurs propres  $\lambda_i$  non nulles, plus  $n_S$  augmente, plus l'état  $|\psi\rangle$  est intriqué.  $n_S$  est appelé "nombre de Schmidt". En particulier on retrouve

les deux cas extrêmes d'un état séparable pour  $n_S = 1$  et d'un état maximalelement intriqué pour  $n_S = N$  et tous les  $\lambda_i$  égaux :

<p>(i) <math>\lambda_{i_0} = 1, \lambda_i = 0</math> pour <math>i \neq i_0</math></p> <p><math> \psi\rangle =  m_{i_0}\rangle_A  \mu_{i_0}\rangle_B</math> séparable (non intriqué)</p> <p><math>\rho_A =  m_{i_0}\rangle_A \langle m_{i_0} </math> <math>\rho_A</math> état pur</p>	<p>(ii) <math>\lambda_i = \frac{1}{N}</math> pour tout <math>i</math></p> <p><math> \psi\rangle = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{N}}  m_i\rangle_A  \mu_i\rangle_B</math> maximalelement intriqué</p> <p><math>\rho_A = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N}  m_i\rangle_A \langle m_i  = \frac{1}{N} \mathbb{1}</math> <math>\rho_A</math> mélange statistique complet</p>
--	--

Dans la **situation (i)**, on a  $n_S = 1$  c'est à dire qu'une seule valeur propre  $\lambda_{i_0}$  est non nulle. Comme  $\sum_i \lambda_i = 1$ , nécessairement  $\lambda_{i_0} = 1$ . Dans ce cas,  $\rho_A$  est le projecteur sur l'état pur  $|m_{i_0}\rangle_A$ . Ce cas (i) correspond à l'état du système {atome+chat} après ouverture de la boîte dans l'expérience du chat de Schrödinger (voir section 7.1.3.3), "on sait que le chat est vivant", il n'y a pas d'incertitude sur l'état du système  $A$  (chat). Le fait que le système  $A$  est dans un état pur signifie que l'état  $|\psi\rangle$  du système  $A \times B$  est non intriqué. On voit bien en effet grâce à la décomposition de Schmidt que dans ce cas  $|\psi\rangle$  est factorisé, il est **séparable, non intriqué**.

Dans la **situation (ii)**, on a  $n_S = N$  avec de plus tous les  $\lambda_i$  égaux, soit  $\lambda_i = \frac{1}{N}$  pour tout  $i$ . Dans ce cas,  $\rho_A = \frac{1}{N} \mathbb{1}$  est un mélange statistique complet. Avant l'ouverture de la boîte dans l'expérience de Schrödinger, "on n'a aucune information sur l'état du chat", l'incertitude est totale. L'information est contenue dans l'intrication avec  $B$ .  $|\psi\rangle$  est **maximalelement intriqué** dans ce cas. Dans sa décomposition de Schmidt,  $|\psi\rangle$  est une superposition cohérente à poids égal de tous les états factorisés  $|m_i\rangle_A |\mu_i\rangle_B$ .

### Preuve de la décomposition de Schmidt (7.32)

$\rho_A$  est une matrice densité, donc elle est diagonalisable en base orthonormée et ses valeurs propres  $\lambda_i$  sont positives ou nulles de somme 1,  $\lambda_i \geq 0$ , ie  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ . Sa décomposition spectrale s'écrit :

$$\rho_A = \sum_{i=1}^N \lambda_i |m_i\rangle_A \langle m_i| \quad (7.34)$$

On choisit une base orthonormée quelconque  $|\alpha\rangle_B$  de  $\mathcal{H}_B$ ,  $1 \leq \alpha \leq M$ .  $|m_i\rangle_A |\alpha\rangle_B$  est donc une base de  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , on décompose  $|\psi\rangle$  dans cette base :

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^M x_{i,\alpha} |m_i\rangle_A |\alpha\rangle_B \quad \text{avec} \quad \sum_{i,\alpha} |x_{i,\alpha}|^2 = \langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (7.35)$$

Comme  $\rho_A = \text{Tr}_B[\rho]$  où  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$  et comme  $|\alpha\rangle_B$ ,  $1 \leq \alpha \leq M$ , est une base orthonormée de  $\mathcal{H}_B$ , on a :

$$\rho_A = \sum_{\alpha=1}^M {}_B \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle_B = \sum_{1 \leq i, j \leq N} \sum_{\alpha=1}^M x_{j,\alpha}^* x_{i,\alpha} |m_i\rangle_A \langle m_j| \quad (7.36)$$

Mais par hypothèse, on a  $\rho_A = \sum_{i=1}^N \lambda_i |m_i\rangle_A \langle m_i|$ , d'où

$$\sum_{\alpha=1}^M x_{j,\alpha}^* x_{i,\alpha} = \lambda_i \delta_{i,j} \quad (7.37)$$

On définit ensuite les  $N$  vecteurs de  $\mathcal{H}_B$  suivants :  $|\mu_i\rangle_B = \sum_{\alpha=1}^M \frac{x_{i,\alpha}}{\sqrt{\lambda_i}} |\alpha\rangle_B$ . Ainsi  $|\psi\rangle$  s'écrit :

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i} |m_i\rangle_A |\mu_i\rangle_B \quad (7.38)$$

Reste à montrer que les  $|\mu_i\rangle_B$  forment une famille de vecteurs orthonormés et qu'il sont les vecteurs propres de  $\rho_B$ . Comme  $|\alpha\rangle_B$  pour  $1 \leq \alpha \leq M$  est une base orthonormée de  $\mathcal{H}_B$  et d'après (7.37), on a :

$${}_B \langle \mu_j | \mu_i \rangle_B = \sum_{\alpha=1}^M \sum_{\alpha'=1}^M \frac{x_{j,\alpha'}^* x_{i,\alpha}}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} {}_B \langle \alpha' | \alpha \rangle_B = \sum_{\alpha=1}^M \frac{x_{j,\alpha}^* x_{i,\alpha}}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} = \delta_{i,j} \quad (7.39)$$

Les  $|\mu_i\rangle_B$  forment donc bien une famille orthonormée de  $\mathcal{H}_B$ . Enfin, d'après la décomposition (7.38) où les  $|m_i\rangle$  forment une base orthonormée de  $\mathcal{H}_A$ , on en déduit :

$$\rho_B = \text{Tr}_A[|\psi\rangle \langle \psi|] = \sum_{i=1}^N {}_A \langle m_i | \psi \rangle \langle \psi | m_i \rangle_A = \sum_{i=1}^N \lambda_i |\mu_i\rangle_B \langle \mu_i| \quad (7.40)$$

Comme les  $|\mu_i\rangle_B$  forment une famille orthonormée de  $\mathcal{H}_B$ , on peut la compléter en base orthonormée de  $\mathcal{H}_B$  :  $|\mu_i\rangle_B$  pour  $1 \leq i \leq M$ . L'écriture ci-dessus est donc bien la décomposition spectrale de  $\rho_B$ , ainsi les valeurs propres de  $\rho_B$  sont les  $\lambda_i$  et  $(M - N)$  zéros (autrement dit la valeur propre zéro est dégénérée  $M - N + N - n_S = M - n_S$  fois où  $n_S$  est le nombre de  $\lambda_i$  non nuls). On a donc bien montré que  $\rho_A$  et  $\rho_B$  ont mêmes valeurs propres et que l'on peut écrire  $|\psi\rangle$  sous forme de décomposition de Schmidt Eq. (7.32).

### 7.1.3.5 Entropie d'intrication

On sait caractériser qualitativement l'intrication d'un état pur  $|\psi\rangle$  grâce à sa décomposition de Schmidt. On voudrait avoir une version plus *quantitative* de l'*intrication*. Par exemple, on voudrait pouvoir dire pour deux états purs donnés lequel est le plus intriqué des deux. Pour cela on introduit l'entropie d'intrication. La plus connue est l'**entropie de von Neumann**  $S_{\text{VN}}(\rho_A)$  du système  $A$  :

$$S_{\text{VN}}(\rho_A) = -\text{Tr} [\rho_A \ln \rho_A] = -\sum_{i=1}^N \lambda_i \ln \lambda_i \quad (7.41)$$

Si  $\lambda_i$  est vu comme la probabilité de trouver le sous-système  $A$  dans l'état  $|m_i\rangle_A$  (voir la décomposition spectrale de  $\rho_A$  (7.31)), alors  $S_{\text{VN}}$  est l'*entropie de Shannon* classique pour les probabilités  $\lambda_i$ . De façon plus générale, on peut définir les **entropies de Renyi de paramètre**  $q > 0$  :

$$S_q(\rho_A) = \frac{1}{1-q} \ln \left[ \sum_i \lambda_i^q \right] \quad (7.42)$$

On appellera **pureté généralisée** la grandeur  $\Sigma_q$  définie par :

$$\boxed{\Sigma_q = \text{Tr}[\rho_A^q] = \sum_i \lambda_i^q} \quad (7.43)$$

soit  $S_q = \frac{1}{1-q} \ln \Sigma_q$ . Pour  $q = 2$ ,  $\Sigma_2$  est en effet habituellement appelée pureté. L'entropie de Renyi est une généralisation de  $S_{\text{VN}}$  :

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q = S_{\text{VN}} \quad \text{et} \quad \lim_{q \rightarrow \infty} S_q = -\ln \lambda_{\max} \quad (7.44)$$

Ces **entropies**  $S_{\text{VN}}(\rho_A)$  et  $S_q(\rho_A)$ , que l'on notera  $S(\rho_A)$  de façon générique, vérifient un certain nombre de **propriétés** :

(S1)  $S(\rho_A) = 0$  si et seulement si  $\rho_A$  est un état pur, ie ssi  $\rho_A^2 = \rho_A$ , ie ssi  $\rho_A = |m_{i_0}\rangle_A \langle m_{i_0}|$ . Dans ce cas  $S$  est minimale<sup>1</sup>.

(S2)  $S(\rho_A)$  est maximale et égale à  $\ln N$  si  $\rho_A$  est un mélange statistique complet, ie  $\rho_A = \frac{1}{N} \mathbb{1}$  ( $\rho_A$  proportionnel à l'identité sur  $\mathcal{H}_A$ ).

(S3)  $S$  est invariante sous changement de base unitaire : pour  $U_A$  matrice unitaire de  $\mathcal{H}_A$ , on a  $S(U_A \rho_A U_A^\dagger) = S(\rho_A)$ .

(S4)  $S_{\text{VN}}$  et  $S_q$  pour  $0 < q < 1$  sont concaves :  $S\left(\sum_k p_k \rho_A^{(k)}\right) \geq \sum_k p_k S\left(\rho_A^{(k)}\right)$  où les  $p_k$  sont des probabilités, ie  $p_k \geq 0$ ,  $\sum_k p_k = 1$  et  $\rho_A^{(k)}$  des matrices densité sur  $\mathcal{H}_A$ . Pour  $q > 1$ , l'entropie de Renyi  $S_q$  n'est ni convexe ni concave ( $x \rightarrow x^q$  est convexe pour  $q > 1$ , concave pour  $q < 1$ ,  $x \rightarrow \ln x$  est concave).

(S5) L'entropie de von Neumann  $S_{\text{VN}}$  est la seule à avoir une propriété d'additivité : pour deux systèmes indépendants  $A$  et  $C$  décrits par une matrice densité produit tensoriel  $\rho_A \otimes \rho_C$  sur un espace de Hilbert produit  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_C$ , l'entropie de  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_C$  est la somme des entropies, ie  $S_{\text{VN}}(\rho_A \otimes \rho_C) = S_{\text{VN}}(\rho_A) + S_{\text{VN}}(\rho_C)$ .

Cette propriété d'additivité de l'entropie de von Neumann pour deux systèmes indépendants est la même propriété que l'additivité de l'entropie de Shannon classique. Si  $\rho_A$  a pour valeurs propres les "probabilités"  $\lambda_i$  et  $\rho_C$  les "probabilités"  $\mu_j$ , alors  $\rho_A \otimes \rho_C$  a pour valeurs propres les  $\lambda_i \mu_j$ . Ainsi  $S_{\text{VN}}(\rho_A \otimes \rho_C) = -\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \ln(\lambda_i \mu_j) = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i - \sum_j \mu_j \ln \mu_j = S_{\text{VN}}(\rho_A) + S_{\text{VN}}(\rho_C)$  car  $\sum_i \lambda_i = 1 = \sum_j \mu_j$ .

On notera que pour l'entropie de Renyi  $S_q$ , la propriété d'additivité n'est pas valable pour  $q > 1$ , mais elle est valable dans les limites  $q \rightarrow 1$  et  $q \rightarrow \infty$ . En effet pour  $q \rightarrow 1$ ,  $S_q$  tend vers l'entropie de von Neumann  $S_{\text{VN}}$ , tandis que pour  $q \rightarrow \infty$ ,  $S_q$  tend vers  $-\ln \lambda_{\max}$ .

Pour un état pur  $|\psi\rangle$  sur un espace de Hilbert produit  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , on définit une **mesure d'intrication** de cet état comme **l'entropie de la matrice densité réduite**

---

1. Pour  $q > 1$  on a en effet  $\lambda_i^q \leq \lambda_i$  (pour tout  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ ) donc  $\sum_i \lambda_i^q \leq \sum_i \lambda_i = 1$  d'où  $S_q \geq 0$  comme  $1 - q < 0$ . De même pour  $0 < q < 1$  :  $\sum_i \lambda_i^q \geq \sum_i \lambda_i = 1$  et  $1 - q > 0$  donc  $S_q \geq 0$ .

$\rho_A$  associée  $E[|\psi\rangle] = S(\rho_A)$ , soit :

$$\boxed{E_{\text{VN}}[|\psi\rangle] = S_{\text{VN}}(\rho_A), \quad E_q[|\psi\rangle] = S_q(\rho_A) \quad \text{où } \rho_A = \text{Tr}_B[|\psi\rangle\langle\psi|]} \quad (7.45)$$

Les propriétés (S1)-(S3) ci-dessus communes à toutes les entropies  $S$  ( $S_{\text{VN}}$  et  $S_q$  pour  $q > 0$ ) font de  $E$  (ie  $E_{\text{VN}}, E_q$ ) une **bonne mesure d'intrication pour un état pur**. En effet  $E$  a les propriétés suivantes :

(E1)  $E[|\psi\rangle] = 0$  si et seulement si  $|\psi\rangle$  est séparable (non intriqué).

(E2)  $E$  est invariante sous transformations locales unitaires, ie si  $U_A$  (resp.  $U_B$ ) est une matrice unitaire de  $\mathcal{H}_A$  (resp.  $\mathcal{H}_B$ ) alors  $E[U_A \otimes U_B |\psi\rangle] = E[|\psi\rangle]$ .

(E3)  $E$  ne peut pas augmenter par mesure locale généralisée et communication classique ou LOCC (Local Operations and Classical Communication), ie si on considère des opérateurs  $A_i$  sur  $\mathcal{H}_A$  et  $B_i$  sur  $\mathcal{H}_B$  tels que  $\sum_i A_i^\dagger A_i B_i^\dagger B_i = \mathbb{1}$ , alors

$$\sum_i p_i E \left[ \frac{V_i |\psi\rangle}{\sqrt{p_i}} \right] \leq E[|\psi\rangle] \quad \text{où } V_i = A_i B_i \text{ et } p_i = \langle \psi | V_i^\dagger V_i | \psi \rangle \quad (7.46)$$

L'idée de (E3) est que l'entropie d'intrication de doit pas pouvoir augmenter si Alice fait des opérations locales sur  $A$ , Bob sur  $B$  et que la seule interaction autorisée entre  $A$  et  $B$  est la communication classique. Cette propriété sera expliquée plus en détails dans la partie suivante sur les mélanges statistiques, voir section 7.2.1.

On notera aussi que, bien que cela ne soit pas évident au premier abord,  $E[|\psi\rangle]$  est symétrique par échange de  $A$  et de  $B$ . En effet, on a vu plus haut que les matrices densité  $\rho_A = \text{Tr}_B[|\psi\rangle\langle\psi|]$  et  $\rho_B = \text{Tr}_A[|\psi\rangle\langle\psi|]$  ont les mêmes valeurs propres non nulles  $\lambda_i$  (cf la preuve de la décomposition de Schmidt section 7.1.3.4), ainsi on a  $S_{\text{VN}}(\rho_A) = S_{\text{VN}}(\rho_B)$  et  $S_q(\rho_A) = S_q(\rho_B)$ .

On retrouve les deux cas extrêmes pour ces mesures d'intrication :

(i) $\lambda_{i_0} = 1, \lambda_i = 0$ pour $i \neq i_0$  $ \psi\rangle$ séparable  $S_{\text{VN}} = 0 = S_q$ ie $E = 0$ entropie minimale	(ii) $\lambda_i = \frac{1}{N}$ pour tout $i$  $ \psi\rangle$ maximalement intriqué  $S_{\text{VN}} = \ln N = S_q$ ie $E = \ln N$ entropie maximale
---	---

## 7.2 INTRICATION POUR UN ÉTAT MÉLANGE STATISTIQUE

Jusqu'ici j'ai expliqué comment définir et caractériser l'intrication pour un état pur  $|\psi\rangle$  sur un espace de Hilbert produit  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Pour un état mélange statistique décrit par sa matrice densité  $\rho$  de taille  $NM \times NM$ , définir et surtout caractériser l'intrication est plus compliqué. En particulier, la décomposition de Schmidt ne fonctionne plus dans le cas du mélange statistique. Il faut donc une autre mesure d'intrication que l'entropie,

voir [VP98].

On se place toujours dans un espace de Hilbert produit  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Un **mélange statistique** décrit par sa matrice densité  $\rho$  sur  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  (voir section 7.1.3.1) est dit **séparable** s'il est de la forme :

$$\rho = \sum_k p_k \rho_A^k \otimes \rho_B^k \quad \text{avec } p_k \geq 0 \text{ et } \sum_k p_k = 1 \quad (7.47)$$

où  $\rho_A^k$  (resp.  $\rho_B^k$ ) est une matrice de  $\mathcal{H}_A$  (resp.  $\mathcal{H}_B$ ) de taille  $N \times N$  (resp.  $M \times M$ ). Sinon, le mélange statistique est dit **intriqué**.

Cette définition généralise celle du cas d'un état pur  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ . On notera qu'on peut supposer  $\rho_A^k$  et  $\rho_B^k$  purs dans (7.47), ie  $\rho_A^k = |\phi_k\rangle_A\langle\phi_k|$  et  $\rho_B^k = |\phi_k\rangle_B\langle\phi_k|$ . Il suffit en effet pour cela de remplacer les  $\rho^k$  par leur décomposition spectrale. Ainsi  $\rho$  est séparable si et seulement s'il se décompose comme :

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \quad \text{avec } p_k \geq 0 \text{ et } \sum_k p_k = 1 \text{ et } |\psi_k\rangle = |\phi_k\rangle_A |\phi_k\rangle_B \quad (7.48)$$

c'est à dire  $\rho$  est **séparable** si et seulement s'il est une *superposition statistique d'états purs séparables*.

### 7.2.1 Mesure d'intrication

Dans le cas où  $\rho$  n'est pas pur, les matrices densité réduites  $\rho_A$  et  $\rho_B$  n'ont pas les mêmes valeurs propres, on ne peut pas utiliser l'entropie comme mesure d'intrication. Il faut faire appel à d'autres quantités. Une fonction  $E(\rho)$  définie sur l'espace des matrices densité  $\rho$  sur  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  sera considérée comme une **mesure d'intrication** si et seulement si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

(E1)  $E(\rho) = 0$  si et seulement si  $\rho$  est séparable (non intriqué, voir (7.47) ou (7.48)).

(E2)  $E$  est invariante sous transformations locales unitaires, ie si  $U_A$  (resp.  $U_B$ ) est une matrice unitaire de  $\mathcal{H}_A$  (resp.  $\mathcal{H}_B$ ) alors

$$E(U_A \otimes U_B \rho U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger) = E(\rho)$$

(E3)  $E$  ne peut pas augmenter par mesure locale généralisée et communication classique ou LOCC (Local Operations and Classical Communication), ie si on considère des opérateurs  $A_i$  sur  $\mathcal{H}_A$  et  $B_i$  sur  $\mathcal{H}_B$  tels que  $\sum_i A_i^\dagger A_i B_i^\dagger B_i = \mathbb{1}$ , alors

$$\sum_i p_i E\left(\frac{V_i \rho V_i^\dagger}{p_i}\right) \leq E(\rho) \quad \text{où } V_i = A_i B_i \text{ et } p_i = \text{Tr} [V_i \rho V_i^\dagger]$$

Donnons quelques explications sur la propriété (E3). L'évolution d'un système quantique **isolé** est une **évolution unitaire**  $\rho \rightarrow U\rho U^\dagger$  où  $U$  est unitaire. Si on autorise



l'interaction du système avec un espace auxiliaire ou l'environnement, l'évolution n'est plus nécessairement unitaire, de façon générale elle peut s'écrire  $\rho \rightarrow \sum_k S_k \rho S_k^\dagger$  où  $\sum_k S_k^\dagger S_k = \mathbb{1}$ . Les  $S_k$  sont appelés “**superopérateurs**” ou opérateurs de Kraus. Ils décrivent l'**évolution d'un système ouvert**. L'**action locale** d'Alice sur le système  $A$  et de Bob sur le système  $B$  grâce à des opérations unitaires et par interaction éventuelle avec un espace auxiliaire s'écrit donc grâce au formalisme des superopérateurs  $\rho \rightarrow \sum_{i,\alpha} A_i B_\alpha \rho A_i^\dagger B_\alpha^\dagger$  où  $\sum_i A_i^\dagger A_i = \mathbb{1}_A$  et  $\sum_\alpha B_\alpha^\dagger B_\alpha = \mathbb{1}_B$ . Si on ajoute la **communication classique** entre Alice et Bob, on autorise à corrélérer classiquement les mesures effectuées sur  $A$  et  $B$ , l'évolution de  $\rho$  sera donc de la forme  $\rho \rightarrow \sum_i A_i B_i \rho A_i^\dagger B_i^\dagger$  où  $\sum_i A_i^\dagger A_i B_i^\dagger B_i = \mathbb{1}$ . L'évolution ne se décompose pas nécessairement en produit d'une somme d'opérateurs sur  $A$  par une somme d'opérateurs sur  $B$ . Enfin on autorise la mesure du système. Pour retrouver une matrice densité bien normalisée après mesure, on doit avoir :  $\rho \rightarrow \frac{A_i B_i \rho A_i^\dagger B_i^\dagger}{\text{Tr}[\sum_i A_i B_i \rho A_i^\dagger B_i^\dagger]} = \frac{V_i \rho V_i^\dagger}{p_i}$  où  $V_i = A_i B_i$  et  $p_i = \text{Tr}[V_i \rho V_i^\dagger]$ , c'est la “postsélection”. La procédure complète d'opérations locales généralisées (autorisant l'interaction avec un espace auxiliaire) sur  $A$  et  $B$  avec communication classique entre  $A$  et  $B$  et mesure quantique s'appelle “**mesure locale généralisée et communication classique**” ou **LOCC** (Local Operations and Classical Communication). L'intrication entre  $A$  et  $B$  ne doit pas pouvoir augmenter sous ce genre d'opérations, car dans cette procédure il n'y a pas d'interaction quantique entre  $A$  et  $B$ . Après la postsélection, on a projeté le système avec probabilité  $p_i$  dans l'état  $\frac{V_i \rho V_i^\dagger}{p_i}$  d'intrication  $E\left(\frac{V_i \rho V_i^\dagger}{p_i}\right)$ . Or l'intrication moyenne mesurée après la postsélection doit être au plus égale à l'intrication de l'état initial, donc  $\sum_i p_i E\left(\frac{V_i \rho V_i^\dagger}{p_i}\right) \leq E(\rho)$ , c'est la propriété (E3).

### 7.2.2 Entropie de formation

Une possibilité pour caractériser l'intrication d'un mélange statistique est de définir l'**entropie de formation**  $E_f$  comme proposée par Bennett et al [BDSW96] :

$$E_f(\rho) = \min_{p_k, |\psi_k\rangle} \left\{ \sum_k p_k S(|\psi_k\rangle) \right\} \quad \text{où } \rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \quad (7.49)$$

Le minimum est pris sur toutes les décompositions  $\{p_k, |\psi_k\rangle\}$  possibles pour  $\rho$  de la forme  $\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$  avec  $p_k \geq 0$ ,  $\sum_k p_k = 1$  et  $\langle \psi_k | \psi_k \rangle = 1$ .  $S$  désigne ici l'entropie de von Neumann  $S_{VN}$  ou celle de Renyi  $S_q$ .

L'entropie de formation vérifie les propriétés (E1)-(E3) requises pour être une bonne mesure d'intrication.

De plus, si  $\rho$  est un état pur, ie  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ , alors nécessairement pour toute décomposition  $\{p_k, |\psi_k\rangle\}$ , on doit avoir  $|\psi_k\rangle = |\psi\rangle$ . Donc  $\sum_k p_k S(|\psi_k\rangle) = \sum_k p_k S(|\psi\rangle) = S(|\psi\rangle)$ . D'où :

$$E_f(\rho) = S(|\psi\rangle) \quad \text{quand } \rho = |\psi\rangle \langle \psi| \quad (7.50)$$

Bennett et al [BDSW96] ont montré que  $E_f(\rho)$  représente la quantité d'intrication minimale nécessaire à Alice et Bob pour construire l'état  $\rho$  (sur  $A \otimes B$ ), quand Alice et Bob sont limités aux opérations d'évolution/mesure locales et à la communication classique entre eux (LOCC). C'est à dire qu'Alice et Bob doivent au minimum partager initialement l'équivalent de  $(E_f(\rho)/\ln 2)$  paires de Bell (une paire de Bell a une entropie

d'intrication  $\ln 2$ , voir Eq. (7.3)) pour pouvoir construire l'état  $\rho$  par LOCC.

Une autre mesure d'intrication proposée également dans [BDSW96] est l'intrication de distillation. Mais cette mesure dépend du protocole de distillation associé. Je ne vais pas en parler ici.

### 7.2.3 Distance aux états séparables

Une autre mesure possible, très différente de l'entropie de formation, a été proposée par Vedral et Plenio [VP98]. Ils ont proposé de choisir pour  $E(\rho)$  **la distance à l'ensemble  $\mathcal{S}$  des états séparables** :

$$E_D(\rho) = \min_{\sigma \in \mathcal{S}} D(\rho, \sigma) \quad (7.51)$$

où  $D(\rho, \sigma)$  est une distance continue sur l'espace des matrices densité de  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  -mais pas forcément une distance au sens strict mathématique. Par continuité de  $D$  et comme  $\mathcal{S}$  est un ensemble fermé, le minimum est atteint pour un  $\sigma^* \in \mathcal{S}$  (qui dépend de  $\rho$  bien sûr), soit  $E_D(\rho) = D(\rho, \sigma^*)$ .

Pour que  $E$  satisfasse les trois propriétés (E1)-(E3), il suffit que  $D(\rho, \sigma)$  satisfasse les propriétés suivantes [VP98] pour toutes matrices densité  $\rho, \sigma$  :

(F1)  $D(\rho, \sigma) \geq 0$  pour tous  $\rho, \sigma$ . L'égalité  $D(\rho, \sigma) = 0$  est obtenue si et seulement si  $\rho = \sigma$ .

(F2)  $D$  est invariante sous transformations unitaires, ie si  $U$  est une matrice unitaire alors  $D(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) = D(\rho, \sigma)$ .

(F3)  $D(\text{Tr}_C[\rho], \text{Tr}_C[\sigma]) \leq D(\rho, \sigma)$  pour toute décomposition de  $\mathcal{H}$  sous la forme  $\mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_D$ ,  $\text{Tr}_C[\rho]$  désignant la trace partielle de  $\rho$  sur  $C$  (donc " $\rho_D$ ").

(F4)  $\sum_i p_i D\left(\frac{\rho_i}{p_i}, \frac{\sigma_i}{q_i}\right) \leq \sum_i D(\rho_i, \sigma_i)$  avec  $\rho_i = V_i \rho V_i^\dagger$ ,  $\sigma_i = V_i \sigma V_i^\dagger$  où  $\sum_i V_i^\dagger V_i = \mathbb{1}$  (les  $V_i$  ne sont pas forcément locaux) et  $p_i = \text{Tr}[\rho_i]$ ,  $q_i = \text{Tr}[\sigma_i]$ .

(F5 a)  $D(\sum_i P_i \rho P_i, \sum_i P_i \sigma P_i) = \sum_i D(P_i \rho P_i, P_i \sigma P_i)$  où les  $P_i$  sont des projecteurs, ie  $P_i^2 = P_i$ , orthogonaux, ie  $P_i P_j = 0$  si  $i \neq j$ .

(F5 b)  $D(\rho \otimes P, \sigma \otimes P) = D(\rho, \sigma)$  pour tout projecteur  $P$  sur un espace auxiliaire  $\mathcal{H}_{\text{aux}}$ .

On notera que  $D$  n'est pas nécessairement symétrique -donc en particulier pas nécessairement une distance au sens mathématique.

D'après (F1) et (F2), il est clair que (E1) et (E2) sont vérifiées par  $E_D$  (on notera que si  $\sigma$  est séparable alors  $U\sigma U^\dagger$  est séparable pour  $U$  unitaire). Prouver (E3) à partir de (F2)-(F5) est plus difficile, je renvoie à l'article [VP98] pour plus de détails. La preuve passe par la démonstration successive de deux théorèmes impliqués par (F2)-(F5), pour tous  $\rho, \sigma$  et des superopérateurs  $V_i$  :

Théorème 1 :  $D\left(\sum_i V_i \rho V_i^\dagger, \sum_i V_i \sigma V_i^\dagger\right) \leq D(\rho, \sigma)$  où  $\sum_i V_i^\dagger V_i = \mathbb{1}$ .

Théorème 2 :  $\sum_i D\left(V_i \rho V_i^\dagger, V_i \sigma V_i^\dagger\right) \leq D(\rho, \sigma)$  où  $\sum_i V_i^\dagger V_i = \mathbb{1}$ .

Le théorème 1 vient de (F2), (F3), (F5b). Le théorème 2 découle du théorème 1 et de (F2), (F3), (F5). (F4) et le théorème 2 permettent de prouver (E3), et c'est seulement pour cette dernière étape de la preuve qu'on a besoin de supposer les  $V_i$  locaux, ie  $V_i = A_i B_i$  (comme dans (E3)).

On va maintenant considérer deux exemples possibles de distances  $D$ , cf [VP98], l'entropie relative et la distance de Bures.

### 7.2.3.1 Entropie relative

L'**entropie relative** est définie de la façon suivante :

$$\boxed{D(\rho, \sigma) \equiv S(\rho||\sigma) = \text{Tr} [\rho(\ln \rho - \ln \sigma)]} \quad (7.52)$$

Ce n'est pas une distance au sens mathématique, en particulier  $D(\rho, \sigma) \neq D(\sigma, \rho)$  et l'inégalité triangulaire n'est pas non plus vérifiée. Mais on peut montrer qu'elle vérifie les propriétés (F1)-(F5) suffisantes pour que  $E_S[\rho]$  (7.51) soit bien une mesure d'intrication pour les matrices densité  $\rho$ .

A cause de la **dissymétrie** de  $D$ , il est important de définir  $E_S(\rho) = \min_{\sigma \in \mathcal{S}} D(\rho, \sigma) = \min_{\sigma \in \mathcal{S}} S(\rho||\sigma)$  et non  $\min_{\sigma \in \mathcal{S}} S(\sigma||\rho)$ . En effet, avec la seconde définition,  $E_S[\rho]$  divergerait pour un état pur  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ , ce qui n'est pas très physique. Il est ainsi important de choisir pour **mesure d'intrication** :

$$E_S(\rho) = \min_{\sigma \in \mathcal{S}} D(\rho, \sigma) = \min_{\sigma \in \mathcal{S}} S(\rho||\sigma) \quad (7.53)$$

De plus, avec cette définition, on a la propriété supplémentaire intéressante (qui est aussi vérifiée par l'entropie de formation, cf (7.50)) :

(E4) Pour un état pur  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  dans un système bipartite  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ,  $E_S(\rho)$  est donnée par l'entropie de von Neumann du sous-système  $A$  :

$$E_S(\rho) = E_{\text{VN}}[|\psi\rangle] = S_{\text{VN}}(\rho_A) \quad \text{quand } \rho = |\psi\rangle\langle\psi| \text{ et où } \rho_A = \text{Tr}_B[\rho] \quad (7.54)$$

Enfin  $E_S$  est **convexe** :  $E_S(p\rho_1 + q\rho_2) \leq pE_S(\rho_1) + qE_S(\rho_2)$  où  $p + q = 1$ . L'idée est que le mélange statistique n'augmente pas l'intrication. Il faut bien faire la différence entre cette propriété de convexité de  $E_S$  et la concavité de  $S_{\text{VN}}(\rho_A)$ . En effet, pour un état pur  $|\psi\rangle$  sur  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , plus  $\rho_A$  est mélangé statistiquement (moins pur), plus  $|\psi\rangle$  est intriqué (voir plus haut la partie sur les états purs). Pour un état décrit par une matrice densité  $\rho$  sur  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , si  $\rho$  est plus mélangé statistiquement, il n'y a aucune raison pour qu'il y ait plus d'intrication entre les sous-systèmes  $A$  et  $B$ . Cela veut simplement dire que le système total ( $A \times B$ ) est plus intriqué avec son environnement.

### 7.2.3.2 Distance de Bures

La **distance de Bures** est une véritable distance sur les matrices densité, elle est définie comme suit :

$$\boxed{D_B(\rho, \sigma)^2 = 2 - 2\sqrt{F(\rho, \sigma)} \quad \text{où} \quad \sqrt{F(\rho, \sigma)} = \text{Tr} \left\{ [\sqrt{\sigma}\rho\sqrt{\sigma}]^{1/2} \right\}} \quad (7.55)$$

où  $F(\rho, \sigma)$  est appelée **fidélité**.  $D_B$  est une vraie **distance** au sens mathématique, c'est à dire :

- (a) Elle est symétrique :  $D_B(\sigma, \rho) = D_B(\rho, \sigma)$ .
- (b)  $D_B(\rho, \sigma) \geq 0$ . L'égalité  $D_B(\rho, \sigma) = 0$  est obtenue si et seulement si  $\rho = \sigma$ .
- (c) Inégalité triangulaire :  $D_B(\rho, \sigma) \leq D_B(\rho, \sigma_1) + D_B(\sigma_1, \sigma)$ .

Si  $\rho$  et  $\sigma$  sont des états purs, ie  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  et  $\sigma = |\phi\rangle\langle\phi|$  alors  $\sqrt{\rho} = \rho$ , et on a  $\sqrt{F(\rho, \sigma)} = |\langle\phi|\psi\rangle|$  et  $D_B(\rho, \sigma) = 2 - 2|\langle\phi|\psi\rangle|$ .

On peut montrer que  $D_B(\rho, \sigma)$  satisfait les propriétés (F1)-(F5), voir [VP98]. Ainsi  $E_B(\rho)$  définie ci-dessous et comme (7.51) est bien une bonne **mesure d'intrication sur les matrices densité**  $\rho$  (elle vérifie (E1)-(E3)) :

$$E_B(\rho) = \min_{\sigma \in \mathcal{S}} D_B(\rho, \sigma) \quad (7.56)$$

où  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des matrices densité d'états séparables.

Cependant, contrairement à l'entropie relative, la mesure d'intrication de Bures  $E_B$  ne satisfait pas (E4), c'est à dire que pour les états purs on ne retrouve pas l'entropie usuelle. Cette mesure n'est pas pour autant inintéressante, la distance de Bures apparaît en effet naturellement dans diverses situations physiques, en particulier dans certaines procédures dites de purification [VP98].

### 7.2.3.3 Distance de Hilbert-Schmidt

J'introduis ici aussi la distance dite de Hilbert-Schmidt bien qu'elle ne soit pas discutée par Vedral et Plenio [VP98]. Elle nous sera utile par la suite. La distance de Hilbert-Schmidt est définie comme :

$$D_{\text{HS}}(\rho, \sigma) = \sqrt{\text{Tr}\{(\rho - \sigma)^2\}} \quad (7.57)$$

C'est une véritable distance au sens mathématique. (F1) et (F2) sont clairement vérifiées. Cependant Vedral et Plenio [VP98] qui ont proposé la mesure d'intrication (7.51) ne s'intéressent pas à cette distance, il resterait à voir si  $D_{\text{HS}}$  ou  $D_{\text{HS}}^2$  vérifie (F3)-(F5).

Pour des états purs  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ ,  $\sigma = |\phi\rangle\langle\phi|$ , cette distance devient :  $D_{\text{HS}}(\rho, \sigma)^2 = 2 - 2|\langle\psi|\phi\rangle|^2$ .



## Etats aléatoires

---

Pourquoi des états quantiques aléatoires? Dans un système quantique de grande taille, on peut se poser la question de savoir à quoi ressemblent les “**états typiques**”. Choisir un état quantique de façon aléatoire revient d’une certaine façon à supposer qu’on a a priori essentiellement aucune information sur le système. L’idée est proche de celle de Wigner lorsqu’il a introduit les matrices aléatoires pour modéliser le Hamiltonien de gros noyaux atomiques. Si le Hamiltonien du système quantique considéré n’est pas connu, on peut modéliser l’état du système par un état aléatoire. Les **états aléatoires** sont très généraux, ils peuvent être considérés comme des “états typiques” dans ce sens. On peut alors comparer les résultats obtenus par exemple expérimentalement pour un état physique réel avec ceux que l’on obtient pour un état aléatoire -qui constitue un état de référence.

Pour des états purs, il existe une seule façon naturelle de les choisir de manière aléatoire, c’est la mesure de Haar uniforme. Au contraire, il existe de nombreuses façons de tirer au hasard un état mélange statistique -la situation est beaucoup plus complexe dans ce cas.

Dans ce chapitre, je définis les principales distributions de probabilité que l’on rencontre dans la littérature pour des états quantiques. Dans la première partie 8.1, j’introduis les états purs aléatoires : ce sont des états aléatoires tirés selon une loi uniforme. Dans la seconde partie 8.2, je donne plusieurs exemples de distributions de probabilité pour des mélanges statistiques (ensemble corrélé aléatoirement, états de Bures aléatoires, etc). Dans toute la suite, on se place dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimension  $n$ .

### 8.1 ÉTAT PUR ALÉATOIRE

Il existe une **unique** mesure de probabilité sur les états purs de  $\mathcal{H}$  qui soit invariante sous transformations unitaires. C’est la **mesure de Haar, ie la mesure uniforme sur les états purs**  $|\psi\rangle$  (vecteurs de norme 1).

On a vu dans le premier chapitre, cf section 1.3, que la mesure de Haar sur les matrices unitaires notée  $\mu(dU)$  est la mesure uniforme sur les matrices unitaires de  $\mathcal{H}$ . Si  $|\psi_0\rangle$  est un vecteur de norme 1 fixé, alors pour tout état pur  $|\psi\rangle$ , il existe une matrice

unitaire  $U$  telle que  $|\psi\rangle = U|\psi_0\rangle$ . La mesure de Haar  $\mu(dU)$  induit la mesure uniforme sur les états purs  $|\psi\rangle$ .

Plus concrètement, on considère une base orthonormée  $|u_i\rangle$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de  $\mathcal{H}$ . Un état pur  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  est un vecteur normé à 1, ie  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ . Il peut se décomposer dans la base des  $|u_i\rangle$  :

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n x_i |u_i\rangle \quad \text{avec} \quad \sum_i |x_i|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 1 \quad (8.1)$$

où les  $x_i$  sont des coefficients complexes  $\sum_i |x_i|^2 = 1$ . Un **état pur aléatoire**  $|\psi\rangle$  est un état de la forme (8.1) où les  $x_i$  sont des variables aléatoires complexes distribuées uniformément parmi les ensembles de  $\{x_i\}$  tels que  $\sum_i |x_i|^2 = 1$ .

Cette distribution est bien invariante sous changement de base unitaire. C'est la mesure uniforme sur les états purs.

## 8.2 MÉLANGE STATISTIQUE ALÉATOIRE

Un état **mélange statistique** est décrit par sa matrice densité  $\rho$  de dimension  $n \times n$  sur  $\mathcal{H}$ , voir section 7.1.3.1.  $\rho$  est diagonalisable en base orthonormée  $|m_i\rangle$ ,  $1 \leq i \leq n$  de valeurs propres réelles  $\lambda_i \in [0, 1]$ , et s'écrit en décomposition spectrale, cf Eq. (7.18) :

$$\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i |m_i\rangle \langle m_i| \quad \text{avec} \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1 \quad (8.2)$$

$\lambda_i$  est la probabilité de trouver le système dans l'état pur  $|m_i\rangle$ .

On veut trouver une mesure de probabilité sur les mélanges statistiques  $\mathcal{P}(\rho)d\rho$ . Comme dans le cas des états purs, il est naturel d'imposer que cette mesure soit **invariante par changement de base unitaire**, ie sous transformation  $\rho \rightarrow U\rho U^\dagger$  (où  $U^\dagger = U^{-1}$ ). Pour les états purs cette condition impose la forme de la mesure de probabilité (mesure de Haar uniforme). Par contre, pour des mélanges statistiques, cette condition d'invariance impose seulement que la **loi de probabilité** sur les matrices densité **dépende uniquement des valeurs propres**  $\lambda_i$  de la matrice  $\rho$ .

Pour un mélange statistique aléatoire  $\rho$ , la distribution de ses valeurs propres  $\lambda_i$  contient toute l'information sur la loi de  $\rho$ . Il est donc important de savoir comment passer de la loi des éléments de  $\rho$  à celle de ses valeurs propres.

Explicitons d'abord la mesure plate  $d\rho$ .  $\rho$  est une matrice densité, c'est à dire qu'elle est hermitienne, semi-définie positive de trace 1. Pour une matrice  $H$  hermitienne, on a vu dans le premier chapitre Eq. (1.1) que la mesure plate est donnée par  $dH = \prod_i dH_{ii} \prod_{i<j} d\text{Re}H_{ij} d\text{Im}H_{ij}$ . Ainsi la **mesure plate  $d\rho$  sur les matrices densité** est donnée par :

$$d\rho = \left( \prod_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{M_k \geq 0\}} \right) \delta(\text{Tr}[\rho] - 1) \prod_{i=1}^n d\rho_{ii} \prod_{1 \leq i < j \leq n} d\text{Re}\rho_{ij} d\text{Im}\rho_{ij} \quad (8.3)$$

où  $M_k = \det [\rho_{ij}]_{1 \leq i, j \leq k}$

L'indicatrice  $\mathbb{1}_{\{M_k \geq 0\}}$  vaut 1 si le déterminant  $M_k = \det[\rho_{ij}]_{1 \leq i, j \leq k}$ , appelé “mineur principal dominant” d'ordre  $k$ , est positif ou nul, 0 sinon.  $\rho$  est semi-définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux dominants d'ordre 1 à  $n$  sont positifs ou nuls. De façon équivalente,  $\rho$  est semi-définie positive si et seulement si tous ses valeurs propres sont positives ou nulles, soit :  $\prod_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{M_k \geq 0\}} = \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\lambda_i \geq 0\}}$ .

Comme dans le cas des matrices hermitiennes, cf section (1.2.2), on écrit  $\rho$  sous la forme  $\rho = U\Lambda U^\dagger$  où  $U$  unitaire ( $UU^\dagger = \mathbb{1}$ ) et  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  (valeurs propres) et on peut montrer que le changement de variables des coefficients de  $\rho$  vers ses valeurs propres  $\lambda_i$  et vecteurs propres donne :

$$\boxed{d\rho \propto \left( \prod_{k=1}^n d\lambda_k \mathbb{1}_{\{\lambda_k \geq 0\}} \right) \delta \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)^2 \times \mu(dU)} \quad (8.4)$$

Le déterminant de Vandermonde est au carré ( $\beta = 2$ ) car  $\rho$  est complexe hermitienne.  $\mu(dU)$  est la mesure de Haar sur les matrices unitaires, cf section 1.3.1.

Si de plus  $\mathcal{P}(\rho)$  est invariante sous transformation unitaire, alors  $\mathcal{P}(\rho) = p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  ne dépend que des valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\rho$  et d'après Eq. (8.4), on peut donc écrire :

$$\boxed{\mathcal{P}(\rho)d\rho = \prod_{i=1}^n d\lambda_i \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \times \mu(dU)} \quad (8.5)$$

où  $\mu(dU)$  est la mesure de Haar sur les matrices unitaires  $U$  de  $\mathcal{H}$ , cf section 1.3.1 et où la distribution des valeurs propres est donnée par :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \propto (\mathbb{1}_{\{\lambda_k \geq 0\}}) \delta \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)^2 p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (8.6)$$

où  $p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathcal{P}(\rho)$ .

Reste à choisir selon des critères physiques la mesure  $\mathcal{P}(\rho)$  Eq. (8.5) telle que  $\mathcal{P}(U\rho U^\dagger) = \mathcal{P}(\rho)$  pour toute matrice unitaire  $U$ .

### 8.2.1 Ensemble corrélé aléatoirement

Une façon naturelle de choisir au hasard un état mélange statistique sur  $\mathcal{H}$  (de dimension  $N$ ) consiste à supposer que le système est **corrélé aléatoirement avec un second système** (un espace auxiliaire), ce qui permet de se ramener aux états purs aléatoires comme on va voir ci-dessous.

On considère un espace de Hilbert **auxiliaire**  $\mathcal{H}_E$  de taille  $m = n$  (pour simplifier), qui peut être vu comme l'environnement. On part d'un état pur  $|\psi\rangle$  aléatoire distribué selon la mesure de Haar uniforme sur l'espace de Hilbert produit  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E$  (voir plus haut section 8.1) ; puis on effectue la trace partielle sur l'environnement

$$\rho = \text{Tr}_E \{ |\psi\rangle\langle\psi| \} \quad \text{où } |\psi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E \quad (8.7)$$

(voir Eq. (7.23) pour la définition de la trace partielle).



On obtient de cette façon une mesure de probabilité  $\mathcal{P}(\rho)$  pour les mélanges statistiques  $\rho$ ; cette mesure est bien invariante sous transformation unitaire par construction. On peut montrer (cf chapitre 9) que cette mesure est en fait la distribution uniforme sur les matrices densité  $\rho$ , soit  $\mathcal{P}(\rho) = \text{cste}$ . D'après Eq. (8.4), la distribution marginale des valeurs propres de  $\rho$  dans ce cas est donnée par :

$$\mathcal{P}_{HS}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = A_N \delta \left( \sum_i \lambda_i - 1 \right) \prod_{j < k} (\lambda_j - \lambda_k)^2 \quad \text{avec } \lambda_i \geq 0, \forall i \quad (8.8)$$

où  $A_N^{-1} = \int_0^\infty d\lambda_1 \dots \int_0^\infty d\lambda_N \delta(\sum_i \lambda_i - 1) \prod_{j < k} (\lambda_j - \lambda_k)^2$  (constante de normalisation).

On notera que ces états aléatoires peuvent être également obtenus à partir de la distance de Hilbert-Schmidt (7.57) comme expliqué ci-dessous section 8.2.2.1.

## 8.2.2 Distance et mesure de probabilité

D'autres **mesures de probabilité** pour les mélanges statistiques  $\rho$  peuvent être obtenues à partir d'une **distance** (au sens mathématique) **sur l'espace des matrices densités** qui soit invariante sous transformation unitaire  $\rho \rightarrow U\rho U^\dagger$ . On a déjà rencontré de telles distances plus haut (distance de Bures  $D_B$  Eq. (7.55), de Hilbert-Schmidt  $D_{HS}$  Eq. (7.57)). Une telle distance induit une mesure sur l'espace des matrices densité, c'est l'élément de volume associé à cette distance. Par construction, la mesure obtenue est invariante sous transformations unitaires. Après normalisation, cette mesure devient donc une distribution de probabilité pour les matrices densité  $\rho$ , invariante sous transformation unitaire.

### 8.2.2.1 Distance de Hilbert-Schmidt

L'ensemble corrélé aléatoirement décrit ci-dessus section 8.2.1 peut également, comme on va le voir, être obtenu à partir de la distance de Hilbert-Schmidt définie plus haut Eq. (7.57) :

$$D_{HS}(\rho, \sigma) = \sqrt{\text{Tr} \{(\rho - \sigma)^2\}} \quad (8.9)$$

Il faut pour cela montrer que cette distance induit la loi jointe Eq. (8.8) pour les valeurs propres de  $\rho$ .

Par définition, la distance infinitésimale associée à  $D_{HS}$  s'écrit :

$$ds_{HS}^2 = D_{HS}(\rho, \rho + \delta\rho)^2 = \text{Tr} \{ \delta\rho^2 \} \quad (8.10)$$

où on note  $\delta\rho$  la matrice de coefficients  $d\rho_{ij}$ .

On diagonalise  $\rho$  :  $\rho = U\Lambda U^\dagger$  où  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  et  $U$  unitaire, ie  $UU^\dagger = \mathbb{1}$ . Alors  $\delta U^\dagger = -U^\dagger \delta U U^\dagger$  et, en posant  $\delta\Omega = U^\dagger \delta U$ , on a :

$$\delta\rho = U(\delta\Omega\Lambda - \Lambda\delta\Omega + \delta\Lambda)U^\dagger \quad \text{d'où} \quad \text{Tr}[\delta\rho^2] = \text{Tr}[(\delta\Omega\Lambda - \Lambda\delta\Omega + \delta\Lambda)^2] \quad (8.11)$$

Après simplification tenant compte du fait que  $\Lambda$  et  $\delta\Lambda$  sont diagonales, on obtient :

$$\begin{aligned} ds_{HS}^2 &= 2\text{Tr}[\delta\Omega\Lambda\delta\Omega\Lambda] - 2\text{Tr}[(\delta\Omega)^2\Lambda^2] + 2\text{Tr}[(\delta\Lambda)^2] \\ &= 2\sum_i d\lambda_i^2 + 2\sum_{i,j} |d\Omega_{ij}|^2 \lambda_i(\lambda_i - \lambda_j) \\ &= 2\sum_i d\lambda_i^2 + 2\sum_{i < j} |d\Omega_{ij}|^2 (\lambda_i - \lambda_j)^2 \end{aligned} \quad (8.12)$$

car  $\delta\Omega^\dagger = -\delta\Omega$  (soit  $d\Omega_{ij} = -d\Omega_{ji}^*$ ). A partir de l'élément de distance infinitésimal, on déduit le volume associé à cette distance :

$$\begin{aligned} dV_{\text{HS}} &\propto \prod_{i=1}^n d\lambda_i \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_i d|\Omega_{ii}| \prod_{i<j} d\text{Re}\Omega_{ij} d\text{Im}\Omega_{ij} \\ &\propto \prod_{i=1}^n d\lambda_i \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \times \mu(dU) \end{aligned} \quad (8.13)$$

car la mesure de Haar sur le groupe unitaire  $\mu(dU)$  s'écrit en fonction de  $i\delta\tilde{\Omega} = \delta\Omega = U^\dagger\delta U$  comme  $\mu(dU) = c_N \prod_{i=1}^N d\tilde{\Omega}_{ii} \prod_{1\leq i<j\leq N} d\text{Re}\tilde{\Omega}_{ij} d\text{Im}\tilde{\Omega}_{ij}$ , cf Eq. (1.46).

En ajoutant les contraintes  $\sum_i \lambda_i = 1$  et les  $\lambda_i \geq 0$  ( $\rho$  est une matrice densité) à  $dV_{\text{HS}}$  Eq. (8.13), on obtient bien la distribution des valeurs propres  $\mathcal{P}_{\text{HS}}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  de l'ensemble corrélé aléatoirement Eq. (8.8).

On notera qu'on peut aussi voir directement à partir de l'expression de l'élément de distance infinitésimal Eq. (8.10) que  $\mathcal{P}_{\text{HS}}(\rho)d\rho \propto d\rho$ , ie que la distance de Hilbert-Schmidt induit la **mesure uniforme sur les matrices densité**  $\rho$ . En effet, comme  $\rho$  est hermitienne, on a  $\delta\rho^\dagger = \delta\rho$  d'où  $\text{Tr}\{\delta\rho^2\} = \text{Tr}\{\delta\rho^\dagger\delta\rho\} = \sum_{ij} |d\rho_{ij}|^2$  Finalement on en déduit l'élément de volume  $dV_{\text{HS}}$  associé à cette distance :

$$ds_{\text{HS}}^2 = \sum_{ij} |d\rho_{ij}|^2 \quad \text{donc} \quad dV_{\text{HS}}(\rho) \propto \prod_{i=1}^n d\rho_{ii} \prod_{1\leq i<j\leq n} d\text{Re}\rho_{ij} d\text{Im}\rho_{ij} \quad (8.14)$$

En effet,  $ds_{\text{HS}}^2$  correspond à la distance euclidienne et donc  $dV_{\text{HS}}$  à la mesure plate sur les matrices hermitiennes. En ajoutant les contraintes sur  $\rho$  qui en font une matrice densité (semi-définie positive de trace 1), on trouve donc :

$$\mathcal{P}_{\text{HS}}(\rho)d\rho \propto \left(\prod_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{M_k \geq 0\}}\right) \delta(\text{Tr}[\rho] - 1) dV_{\text{HS}}(\rho) \propto d\rho.$$

### 8.2.2.2 Distance de Bures et états de Bures aléatoires

Un autre choix intéressant est celui de la **distance de Bures**, cf Eq. (7.55) et voir [SZ03, Hal98], qui est justifié physiquement pour des raisons tant expérimentales que statistiques (voir références 3, 12 et 13 dans [Hal98]).

On rappelle que la distance de Bures  $D_B$  sur les matrices densité est définie comme :

$$D_B(\rho, \sigma)^2 = 2 - 2\sqrt{F(\rho, \sigma)} \quad \text{où} \quad \sqrt{F(\rho, \sigma)} = \text{Tr} \left\{ [\sqrt{\sigma}\rho\sqrt{\sigma}]^{1/2} \right\} \quad (8.15)$$

On va montrer que la mesure infinitésimale de Bures s'écrit :

$$(ds_B)^2 = D_B(\rho, \rho + \delta\rho)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{|\langle v_i | \delta\rho | v_j \rangle|^2}{\lambda_i + \lambda_j} \quad (8.16)$$

où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $\rho$  et  $|v_i\rangle$  ses vecteurs propres, et où  $\delta\rho$  est la matrice de coefficients  $d\rho_{ij}$ .

En effet la fidélité infinitésimale  $F(\rho, \rho + \delta\rho)$  (comme définie section 7.2.3.2) s'écrit :

$$\sqrt{F(\rho, \rho + \delta\rho)} = \text{Tr} \left\{ [\sqrt{\rho}(\rho + \delta\rho)\sqrt{\rho}]^{1/2} \right\} = \text{Tr} \left\{ [\rho^2 + \sqrt{\rho}\delta\rho\sqrt{\rho}]^{1/2} \right\} \quad (8.17)$$

On développe la racine à l'ordre 2 sous la forme :

$$[\rho^2 + \sqrt{\rho}\delta\rho\sqrt{\rho}]^{1/2} = \rho + \delta A + \delta^2 B + \dots \quad (8.18)$$

En élevant au carré et en faisant bien attention à la non-commutation des matrices, on obtient dans la base  $|v_i\rangle$  des vecteurs propres de  $\rho$  :

$$\begin{aligned} \langle v_i|\delta A|v_k\rangle &= \frac{\sqrt{\lambda_i\lambda_k}}{\lambda_i + \lambda_k} \langle v_i|\delta\rho|v_k\rangle \\ \langle v_i|\delta^2 B|v_k\rangle &= - \sum_j \frac{\sqrt{\lambda_i\lambda_k} \lambda_j}{(\lambda_i + \lambda_k)(\lambda_j + \lambda_k)(\lambda_i + \lambda_j)} \langle v_i|\delta\rho|v_j\rangle \langle v_j|\delta\rho|v_k\rangle \end{aligned} \quad (8.19)$$

Pour calculer  $\sqrt{F}$ , il faut ensuite prendre la trace. On a  $\text{Tr}[\rho] = 1$  ( $\rho$  est une matrice densité),  $\text{Tr}\delta A = \frac{1}{2}\text{Tr}[\delta\rho] = 0$  ( $\rho + \delta\rho$  est une matrice densité) et :

$$\text{Tr}[\delta^2 B] = \sum_i \langle v_i|\delta^2 B|v_i\rangle = - \sum_{i,j} \frac{\lambda_j |\langle v_i|\delta\rho|v_j\rangle|^2}{2(\lambda_i + \lambda_j)^2} = - \sum_{i,j} \frac{|\langle v_i|\delta\rho|v_j\rangle|^2}{4(\lambda_i + \lambda_j)} \quad (8.20)$$

par symétrie  $i \leftrightarrow j$  dans la double somme. D'où Eq. (8.16).

En écrivant  $\rho$  sous sa forme diagonalisée  $\rho = U\Lambda U^\dagger$  avec  $U$  la matrice unitaire qui permet de passer dans la base  $|v_i\rangle$  des vecteurs propres de  $\rho$ , et en introduisant  $\delta\Omega = U^\dagger\delta U$ , on a :

$$\delta\rho = U (\delta\Omega\Lambda - \Lambda\delta\Omega + \delta\Lambda) U^\dagger \quad (8.21)$$

soit

$$\langle v_i|\delta\rho|v_j\rangle = (\delta\Omega\Lambda - \Lambda\delta\Omega + \delta\Lambda)_{ij} = d\Omega_{ij}(\lambda_j - \lambda_i) + d\lambda_i\delta_{ij} \quad (8.22)$$

d'où finalement en reportant dans Eq. (8.16) :

$$(ds_B)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{|\langle v_i|\delta\rho|v_j\rangle|^2}{\lambda_i + \lambda_j} = \sum_i \frac{(d\lambda_i)^2}{4\lambda_i} + \sum_{i<j} \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^2}{2(\lambda_i + \lambda_j)} |d\Omega_{ij}|^2 \quad (8.23)$$

Le **volume associé à la distance de Bures** est donc donné d'après Eq. (8.23) par :

$$\begin{aligned} dV_B &\propto \prod_i \frac{d\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}} \prod_{i<j} \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^2}{\lambda_i + \lambda_j} \prod_i d|\Omega_{ii}| \prod_{i<j} d\text{Re}\Omega_{ij} d\text{Im}\Omega_{ij} \\ &\propto \prod_i \frac{d\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}} \prod_{i<j} \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^2}{\lambda_i + \lambda_j} \times \mu(dU) \end{aligned} \quad (8.24)$$

où  $d\mu(U)$  est la mesure de Haar sur les matrices unitaires, cf Eq. (1.46). Pour obtenir Eq. (8.24), on fait le changement de variables  $\lambda'_i = \sqrt{\lambda_i}$ ,  $\Omega'_{ij} = \sqrt{\frac{(\lambda_j - \lambda_i)^2}{2(\lambda_i + \lambda_j)}} \Omega_{ij}$  dans Eq. (8.23), on se ramène ainsi à la distance infinitésimale euclidienne  $ds^2 = \sum_i (d\lambda'_i)^2 + \sum_{i<j} |d\Omega'_{ij}|^2$  associée à la mesure plate  $\prod_i d\lambda'_i \prod_i d|\Omega'_{ii}| \prod_{i<j} d\text{Re}\Omega'_{ij} d\text{Im}\Omega'_{ij}$ .

On obtient ainsi après normalisation (et ajout des contraintes  $\sum_k \lambda_i = 1$  et  $\lambda_i \geq 0$ ) une distribution de probabilité sur les matrices densité  $\rho$ , la “**mesure de Bures**”, caractérisée par la distribution des valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\rho$  :

$$\mathcal{P}_B(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = C_N \frac{\delta(\sum_i \lambda_i - 1)}{\prod_i \lambda_i^{1/2}} \prod_{j<k} \frac{(\lambda_j - \lambda_k)^2}{\lambda_j + \lambda_k} \quad \text{avec } \lambda_i \geq 0, \forall i \quad (8.25)$$

où  $C_N$  est une constante de normalisation.

# Entropie d'intrication pour un état pur aléatoire

---

Dans ce chapitre, je présente un des principaux problèmes auxquels je me suis intéressée pendant ma thèse, la **distribution de l'entropie d'intrication pour un état pur aléatoire** dans un gros système quantique, cf [NMV10, NMV11]. Des figures comparant les résultats analytiques à des données numériques se trouvent au chapitre 14 (cf Fig. 14.2, 14.3 et 14.4).

Les états purs aléatoires (cf chapitre 8) avaient déjà été beaucoup étudiés par le passé. En particulier, il est connu depuis longtemps que pour un grand système quantique l'entropie de von Neumann moyenne d'un état pur aléatoire est proche de sa valeur maximale [Pag93]. D'autres propriétés de ces états aléatoires avaient également été étudiées comme la concurrence [CSZ06] ou la pureté [FMP<sup>+</sup>08]. Cependant il y avait jusqu'à mon travail très peu de résultats connus sur la distribution de l'entropie pour ces états. Grâce à une technique de gaz de Coulomb issue de la théorie des matrices aléatoires, j'ai pu calculer complètement la distribution de l'entropie de Renyi pour  $q > 1$  et de l'entropie de von Neumann pour un état aléatoire dans un gros système quantique. Ces entropies que j'ai introduites au chapitre 7 mesurent la quantité d'intrication entre deux sous-parties d'un système quantique.

## 9.1 CONTEXTE PHYSIQUE

On considère un système quantique bipartite décrit par un produit d'espaces de Hilbert  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  où  $\mathcal{H}_A$  est de dimension  $N$  et  $\mathcal{H}_B$  de dimension  $M$ . On supposera  $M \geq N$  et on posera

$$c = \frac{N}{M}, \quad 0 < c \leq 1 \tag{9.1}$$

Dans toute la suite, on supposera que le système quantique est de grande taille, c'est à dire  $N$  et  $M$  grands. La limite  $c = 1$  correspond à  $M = N$ , tandis que  $c \rightarrow 0$  quand  $M \gg N$ , c'est le cas par exemple quand le système  $B$  représente l'environnement et  $A$  le système auquel on s'intéresse.

### 9.1.1 Etat pur aléatoire et matrice densité réduite

On suppose que le système total  $A \otimes B$  est décrit par un état pur aléatoire  $|\psi\rangle$ , c'est à dire un **état pur** (vecteur de norme 1, cf section 7.1.3.1) **aléatoire** distribué selon la loi de Haar, ie la loi **uniforme**, cf section 8.1. On se donne une base produit  $|i\rangle_A |\alpha\rangle_B$  de  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  et on décompose  $|\psi\rangle$  dans cette base :

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^M x_{i,\alpha} |i\rangle_A |\alpha\rangle_B \quad (9.2)$$

$|\psi\rangle$  est un état pur aléatoire, ce qui signifie que les  $x_{i,\alpha}$  sont des variables aléatoires complexes distribuées uniformément parmi les ensembles  $\{x_{i,\alpha}\}$  tels que  $\sum_{i,\alpha} |x_{i,\alpha}|^2 = 1$  (ie  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ ).

On s'intéresse à l'entropie d'intrication de  $|\psi\rangle$  (voir section 7.1.3.5) donc à la **matrice densité réduite**  $\rho_A = \text{Tr}_B [|\psi\rangle\langle\psi|]$  et ses valeurs propres  $\lambda_i$ . Par définition de  $\rho_A$  (cf Eq. (7.23)), on a dans la base orthonormée  $|i\rangle_A$  de  $\mathcal{H}_A$  :

$${}_A\langle i|\rho_A|j\rangle_A = \sum_{\alpha=1}^M {}_B\langle\alpha|{}_A\langle i|\psi\rangle\langle\psi|j\rangle_A|\alpha\rangle_B = \sum_{\alpha=1}^M x_{i,\alpha} x_{j,\alpha}^* \quad (9.3)$$

car  $|\alpha\rangle_B$  est une base orthonormée de  $\mathcal{H}_B$ . On définit la matrice  $X$  de taille  $N \times M$  et de coefficients  $X_{i,\alpha} = x_{i,\alpha}$ . Dans la base,  $|i\rangle_A$  de  $\mathcal{H}_A$ ,  $\rho_A$  s'écrit donc simplement :

$$\boxed{\rho_A = X X^\dagger \quad \text{où} \quad X_{i\alpha} = x_{i,\alpha}} \quad (9.4)$$

Comme les  $x_{i,\alpha}$  sont des variables aléatoires complexes, les matrices  $X$  et  $\rho_A$  sont des **matrices aléatoires** complexes. Les  $x_{i,\alpha}$  suivent une loi uniforme avec contrainte  $\sum_{i,\alpha} |x_{i,\alpha}|^2 = 1$ . Comme  $\sum_{i,\alpha} |x_{i,\alpha}|^2 = \text{Tr} [X X^\dagger]$ , la matrice  $X$  est donc distribuée selon la loi :

$$\mathcal{P}(X) dX \propto \delta(\text{Tr} [X X^\dagger] - 1) dX \quad (9.5)$$

où  $dX = \prod_{i=1}^N \prod_{\alpha=1}^M d\text{Re} X_{i\alpha} d\text{Im} X_{i\alpha}$  est la mesure plate sur les matrices rectangulaires  $N \times M$  à coefficients complexes. Comme  $\rho_A = X X^\dagger$ , on notera que la contrainte ci-dessus Eq. (9.5) est simplement la contrainte usuelle pour une matrice densité  $\text{Tr}[\rho_A] = 1$ . De plus  $\rho_A = X X^\dagger$  est automatiquement hermitienne semi-définie positive pour toute matrice  $X$  à coefficients complexes. En effet  $\rho_A^\dagger = \rho_A$  et pour tout vecteur  $|u\rangle$ , on a  $\langle u|\rho_A|u\rangle = \|X^\dagger|u\rangle\|^2 \geq 0$ , où  $\| |v\rangle\|^2 = \langle v|v\rangle$  est la norme au carré de  $|v\rangle$ .

Un jeu d'écriture permet d'interpréter  $\mathcal{P}(X)$  comme une loi **gaussienne** (au lieu d'une loi uniforme) **avec contrainte**. En effet :

$$\mathcal{P}(X) dX \propto \delta(\text{Tr}[X X^\dagger] - 1) dX \propto e^{-\frac{\beta}{2} \text{Tr}[X X^\dagger]} \delta(\text{Tr}[X X^\dagger] - 1) dX \quad (9.6)$$

A cause de la contrainte  $\text{Tr}[X X^\dagger] = 1$ , le facteur exponentiel est en effet une constante qui peut être absorbée dans la constante de normalisation. Le paramètre  $\beta > 0$  est arbitraire ici.

D'après Eq. (9.4) et (9.6),  $\rho_A$  est une matrice de la forme  $\rho_A = XX^\dagger$  où  $X$  est une matrice rectangulaire complexe ( $N \times M$ ) aléatoire gaussienne avec contrainte  $\text{Tr}[XX^\dagger] = 1$ . De façon équivalente,  $X^\dagger$  est une matrice rectangulaire complexe ( $M \times N$ ) aléatoire gaussienne avec contrainte  $\text{Tr}[X^\dagger X] = 1$ . Finalement  $\rho_A$  est une **matrice de Wishart** (cf section 1.4) avec **contrainte** supplémentaire  $\text{Tr}[\rho_A] = 1$ .

On connaît la distribution des valeurs propres d'une matrice de Wishart, cf Eq. (1.64). On en déduit facilement la **distribution des valeurs propres** de  $\rho_A$  [Pag93, ZS01] :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B_{M,N} \delta\left(\sum_i \lambda_i - 1\right) \prod_{i=1}^N \lambda_i^{\frac{\beta}{2}(M-N+1)-1} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \quad (9.7)$$

avec  $\lambda_i \geq 0$  pour tout  $i$  et avec  $\beta = 2$  (cas complexe), soit :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B_{M,N} \delta\left(\sum_i \lambda_i - 1\right) \prod_{i=1}^N \lambda_i^{M-N} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \quad (9.8)$$

On notera que dans le cas  $N = M$ , la matrice densité  $\rho_A = \text{Tr}_B [|\psi\rangle\langle\psi|]$  est une **matrice densité aléatoire de Hilbert-Schmidt**, ie de l'ensemble corrélé aléatoirement (associé à la distance de Hilbert-Schmidt), cf section 8.2.1 et 8.2.2.1. L'espace auxiliaire est ici  $\mathcal{H}_E = \mathcal{H}_B$  (et  $n = N$ ). Comme on l'a vu dans ce contexte, cela signifie que (pour  $M = N$ ) la matrice densité  $\rho_A$  est distribuée selon la loi uniforme sur les matrices densité, ie  $\mathcal{P}(\rho_A)d\rho_A \propto d\rho_A$ .

On a maintenant la distribution jointe des valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\rho_A$  (9.7), on peut donc *en principe* calculer la **distribution des entropies de von Neumann ou de Renyi** qui sont des fonctions de ces valeurs propres -et donc des variables aléatoires. Cependant les valeurs propres  $\lambda_i$  sont fortement corrélées à cause du déterminant de Vandermonde, ainsi il est en général impossible de calculer ces distributions pour  $N$  quelconque. Par contre, quand  $N$  est grand, on peut calculer le comportement dominant de ces distributions par une **méthode de gaz de Coulomb** issue de la théorie des matrices aléatoires (voir chapitre 2 pour une introduction au gaz de Coulomb). On rappelle la définition des **entropies de von Neumann**  $S_{\text{VN}}$  et **Renyi**  $S_q$ , cf Eq. (7.41) et (7.42) :

$$S_{\text{VN}} = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i, \quad S_q = \frac{1}{1-q} \ln \left[ \sum_i \lambda_i^q \right] \quad \text{pour } q > 0 \quad (9.9)$$

On définit également la **pureté généralisée** :

$$\Sigma_q = \text{Tr}[\rho_A^q] = \sum_i \lambda_i^q \quad (9.10)$$

Pour  $q = 2$ ,  $\Sigma_2$  est habituellement appelée pureté.

Avant mon étude de la distribution de l'entropie dans la limite  $N \gg 1$  par méthode de gaz de Coulomb, il y a avait eu des travaux sur la moyenne de l'entropie [Pag93, Sen96]

ainsi que sur les moments de la pureté  $\Sigma_2$  [Gir07] ou de la concurrence [CSZ06] ou encore sur la distribution de la valeur propre minimale de  $\rho_A$  [MBL08]. Page [Pag93] avait montré que l'entropie moyenne est donnée par  $\langle S_{VN} \rangle = \ln N - \frac{N}{M} + \dots = \ln N - c + o(1)$  pour  $N \gg 1$ , elle est donc proche de sa valeur maximale  $\ln N$ . D'autres travaux utilisant des arguments de "concentration de la mesure" montraient que l'entropie des états aléatoires est fortement concentrée autour de sa moyenne [HLW04]. Il y avait par contre très peu de résultats sur la distribution complète de l'entropie. La distribution de la pureté  $\Sigma_2$  (donc de  $S_2$  par changement de variable) était connue exactement pour les petites valeurs de  $N$  [Gir07]. Pour  $N \gg 1$ , la transformée de Laplace de la distribution de la pureté a été étudiée récemment par Facchi et al [FMP<sup>+</sup>08] mais elle ne fournit pas toutes les informations sur la distribution dans l'espace réel.

## 9.1.2 Densité des valeurs propres et moyennes

Les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice densité  $\rho_A$  sont distribuées selon la loi jointe Eq. (9.7) avec  $\beta = 2$ . On va considérer dans toute la suite  $\beta > 0$  quelconque, les résultats qu'on obtient par la méthode du gaz de Coulomb sont valables pour tout  $\beta > 0$  (dont le cas physique  $\beta = 2$ ).

### 9.1.2.1 Scaling

On se place dans la limite  $N \rightarrow \infty$  et  $M \rightarrow \infty$  avec  $c = N/M$  fixé,  $0 < c \leq 1$ . La contrainte  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$  impose le comportement typique d'une valeur propre  $\lambda_{\text{typ}}$  :

$$\lambda_{\text{typ}} \asymp \frac{1}{N} \text{ pour } N \rightarrow \infty \quad (9.11)$$

Ce scaling est très différent de celui des valeurs propres d'une matrice de Wishart (2.34) pour lesquelles la contrainte  $\sum_i \lambda_i = 1$  n'existe pas :  $\lambda_{\text{typ}}^W \asymp N$ .

Avec ce scaling, on s'attend à ce que la pureté généralisée se comporte typiquement (au moins autour de sa moyenne) comme  $\Sigma_q = \sum_i \lambda_i^q \asymp N \lambda_{\text{typ}}^q \asymp N^{1-q}$  et  $S_q = \frac{1}{1-q} \ln \Sigma_q = \ln N - O(1)$ , soit :

$$\Sigma_{q_{\text{typ}}} \asymp N^{1-q} \text{ , } S_{q_{\text{typ}}} = \ln N - O(1) \quad (9.12)$$

Pour  $N$  grand, on s'attend donc pour des simples raisons de **scaling** à ce que l'entropie typique soit proche de sa valeur maximale  $\ln N$ . On retrouve l'idée qu'**en moyenne un état aléatoire est fortement intriqué**, voir [Lub78, Pag93].

### 9.1.2.2 Densité moyenne

On peut calculer la densité moyenne des valeurs propres  $\rho_N(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_i \langle \delta(\lambda - \lambda_i) \rangle$  grâce à une méthode de gaz de Coulomb exactement comme pour les matrices de Wishart (voir section 2.2.3) avec simplement une contrainte en plus  $\sum_i \lambda_i = 1$ , donc un multiplicateur de Lagrange en plus.  $\rho_N(\lambda)d\lambda$  indique la fraction de valeurs propres qui se trouvent en moyenne dans l'intervalle  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ . Comme  $\lambda_{\text{typ}} \asymp 1/N$ , on s'attend à :

$$\rho_N(\lambda) \sim N \rho^*(\lambda N) \text{ pour } N \text{ grand} \quad (9.13)$$

Plus précisément, avec le gaz de Coulomb, on peut montrer que la densité des valeurs propres est à support fini et de la forme :

$$\boxed{\rho_N(\lambda) \sim N\rho^*(\lambda N) \quad \text{où} \quad \rho^*(x) = \frac{1}{2\pi cx} \sqrt{x - L_-} \sqrt{L_+ - x} \quad (9.14)}$$

$$\text{avec } L_{\pm} = c \left( \frac{1}{\sqrt{c}} \pm 1 \right)^2$$

donc pour  $M = N$ , ie  $c = 1$  :

$$\rho^*(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4-x}{x}} \quad \text{pour } c = 1 \quad (9.15)$$

Si on compare avec les matrices de Wishart, on voit que ce n'est pas seulement le scaling qui diffère. Quand  $c \neq 1$ , la densité  $\rho^*$  Eq. (9.14) n'est pas tout à fait la loi de Marčenko-Pastur Eq. (2.42), mais elle s'y ramène par changement de variable  $x \rightarrow cx$ .

### 9.1.2.3 Pureté et entropie moyennes

La densité moyenne  $\rho_N(\lambda)$  est aussi la distribution marginale  $\mathcal{P}(\lambda)$  d'une valeur propre. Grâce à son expression Eq. (9.14) dans la limite  $N$  grand, on peut calculer la **pureté généralisée moyenne**  $\langle \Sigma_q \rangle = N \langle \lambda^q \rangle = N \int d\lambda \rho_N(\lambda) \lambda^q \sim N^{1-q} \int dx \rho^*(x) x^q$ , soit :

$$\boxed{\langle \Sigma_q \rangle \sim N^{1-q} \bar{s}(q) \quad \text{où} \quad \bar{s}(q) = \frac{\Gamma(q+1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(q+2)} 4^q \quad \text{pour } c = 1 \quad (9.16)}$$

Par exemple pour la pureté  $q = 2$ , on a  $\langle \Sigma_2 \rangle \sim \frac{2}{N}$ . Pour  $q = 1$ , on retrouve bien la contrainte  $\sum_i \lambda_i = 1$  ( $\bar{s}(1) = 1$ ). Pour  $c \leq 1$ , on a :

$$\langle \Sigma_q \rangle \sim N^{1-q} (1 + \sqrt{c})^{-2+2q} {}_2F_1 \left( \frac{3}{2}, 1 - q, 3, \frac{4\sqrt{c}}{(1 + \sqrt{c})^2} \right) \quad (9.17)$$

où  ${}_2F_1$  est une fonction hypergéométrique, voir Eq. (5.81) pour la définition. Pour  $q = 2$ , on trouve  $\langle \Sigma_2 \rangle \sim \frac{1+c}{N}$ .

De même on peut calculer la **moyenne de l'entropie de von Neumann**, on trouve  $\langle S_{VN} \rangle = -N \int d\lambda \rho_N(\lambda) \lambda \ln \lambda = - \int dx \rho^*(x) x \ln \frac{x}{N} + o(1)$  :

$$\boxed{\langle S_{VN} \rangle = \ln N - \frac{c}{2} + o(1) \quad \text{où } c = \frac{N}{M} \quad (9.18)}$$

On retrouve le résultat de Page [Pag93] :  $\langle S_{VN} \rangle = \ln N - \frac{N}{2M} + \dots$ . L'entropie moyenne est très proche de sa valeur maximale  $\ln N$  (pour  $N$  grand). En moyenne un état aléatoire est fortement intriqué. Cette affirmation est d'autant plus vraie quand l'environnement  $B$  est grand ( $M \gg N$ ).

La densité moyenne n'est par contre pas suffisante a priori pour calculer la moyenne de l'**entropie de Renyi**  $S_q = \frac{1}{1-q} \ln \Sigma_q$ . Cependant, on verra plus loin que la distribution de  $\Sigma_q$ , donc de  $S_q$  est très piquée autour de sa moyenne pour  $N$  grand. Dans ce cas, une



méthode du col montre facilement que la moyenne est la valeur la plus probable et donc  $\langle S_q \rangle \sim \frac{1}{1-q} \ln \langle \Sigma_q \rangle$ , soit :

$$\boxed{\langle S_q \rangle = \ln N - \frac{\ln \bar{s}(q)}{q-1} + o(1) \quad \text{pour } N \text{ grand}} \quad (9.19)$$

et où  $\bar{s}(q)$  est donné Eq. (9.16) pour  $c = 1$ . A nouveau, l'entropie de Renyi moyenne est proche de sa valeur maximale  $\ln N$  quand  $N$  est grand.

## 9.2 DISTRIBUTION DE LA PURETÉ $\Sigma_q$

Dans cette partie, j'explique comment calculer la **distribution de la pureté généralisée**  $\Sigma_q = \sum_i \lambda_i^q$  avec une méthode de gaz de Coulomb. On se place dans toute la suite dans le cas  $q > 1$ .

On a vu que pour  $N$  grand, on a  $\Sigma_q \asymp N^{1-q}$ . On pose alors

$$\boxed{\Sigma_q = N^{1-q} s} \quad (9.20)$$

On veut calculer la distribution de  $\Sigma_q$ , soit par définition :

$$\mathcal{P}(\Sigma_q = N^{1-q} s) = \prod_i \left( \int_0^\infty d\lambda_i \right) \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \delta \left( \sum_i \lambda_i^q - N^{1-q} s \right) \quad (9.21)$$

où  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  est donnée Eq. (9.7) et se réécrit (comme dans le cas des matrices de Wishart, cf Eq. (2.32)) comme un **poids de Boltzmann** à température inverse  $\beta$  :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \propto e^{-\beta E[\{\lambda_i\}]} \quad \text{où } E[\{\lambda_i\}] = - \sum_{i < j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| - \gamma \sum_i \ln \lambda_i \quad (9.22)$$

avec  $\sum_i \lambda_i = 1$  et  $\gamma \sim \frac{N}{2} \left( \frac{1-c}{c} \right)$ , cf Eq. (2.35).

Les  $\lambda_i$  peuvent être interprétés comme les **charges d'un gaz de Coulomb 2D**. En effet le terme  $-\sum_{i < j} \ln |\lambda_i - \lambda_j|$  dans l'énergie effective  $E[\{\lambda_i\}]$  Eq. (9.22) est l'interaction de Coulomb à 2D entre deux charges  $i, j$  de position  $\lambda_{i,j}$ . Ces charges sont de plus dans un potentiel externe  $-\gamma \ln \lambda$ .

Pour  $N \gg 1$  on s'attend à un comportement typique des valeurs propres en  $\lambda_i \asymp 1/N$ , cf Eq. (9.11). On définit alors les variables adimensionnées  $x_i = \lambda_i N$  et la densité adimensionnée

$$\rho(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \quad \text{où } x_i = \lambda_i N \quad (9.23)$$

Dans la limite  $N \rightarrow \infty$  on s'attend à ce que  $\rho(x)$  tende vers une limite finie continue, cf chapitre 2. Cependant on verra que cette hypothèse n'est en fait pas valable dans tous les cas.

Les charges du gaz de Coulomb associé au problème d'intrication ont pour position les  $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$  avec  $\sum_i \lambda_i = 1$  et  $\sum_i \lambda_i^q = \Sigma_q = N^{1-q} s$ . Si la pureté  $\Sigma_q$  est maximale (donc égale à 1), ie si l'état quantique du système  $|\psi\rangle$  est dans un état séparable (non

intriqué), alors un seul  $\lambda_i$  est non nul, et il vaut 1. Si la pureté est élevée, on s'attend donc à ce qu'une valeur propre soit beaucoup plus grande que les autres, ie  $\lambda_{\max} \gg \lambda_i$  pour  $i \neq \max$ . Dans ce cas la densité  $\rho(x)$  ne peut plus avoir une limite continue quand  $N \rightarrow \infty$ . On verra effectivement que pour des valeurs assez grandes de la pureté  $s > s_2$  la densité  $\rho(x)$  tend quand  $N \rightarrow \infty$  vers la somme d'une fonction continue de  $x$  (densité des valeurs propres  $\lambda_i$  pour  $i \neq \max$ ) et d'un pic delta (en  $\lambda_{\max}$ ).

Je considère d'abord section 9.2.1 le cas où  $\rho(x)$  (définie Eq. (9.23)) tend vers une limite continue pour  $N \rightarrow \infty$ , ce cas nous conduira à deux régimes notés **I** (pour  $s < s_1$ ) et **II** pour ( $s_1 < s < s_2$ ); puis je présente le cas où une charge (valeur propre) reste isolée, cf section 9.2.2, ce sera le régime **III** ( $s > s_2$ ).

### 9.2.1 Régimes I et II : densité continue

Dans cette partie, on suppose que la densité adimensionnée définie Eq. (9.23) a une limite finie continue quand  $N \rightarrow \infty$ .

L'intégrale multiple sur les  $\lambda_i$  (9.21) devient une intégrale fonctionnelle sur  $\rho$ , à l'ordre dominant en  $N$  on a donc :

$$\mathcal{P}(\Sigma_q = N^{1-q}s) \propto \int \mathcal{D}\rho \delta\left(\int x\rho(x) - 1\right) \delta\left(\int x^q \rho(x) - s\right) e^{-\beta N^2 E[\rho]} \quad (9.24)$$

où l'énergie effective  $E[\rho]$  est une fonctionnelle de  $\rho$  (comme dans le cas des matrices de Wishart, cf Eq. (2.36)) :

$$E[\rho] = -\frac{1}{2} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx' \rho(x)\rho(x') \ln|x-x'| - \left(\frac{1-c}{2c}\right) \int_0^\infty dx \rho(x) \ln x \quad (9.25)$$

Quand  $N \rightarrow \infty$ , Eq. (9.24) se calcule par méthode du col. L'ordre dominant est donné par le **minimum de l'énergie effective**  $E[\rho]$ . Physiquement cette limite correspond à la limite de **température nulle** pour le gaz de Coulomb (température inverse  $\beta N^2 \rightarrow \infty$ ).

Finalement on obtient :

$$\mathcal{P}(\Sigma_q = N^{1-q}s) \propto e^{-\beta N^2 E_s[\rho_c]} \quad (9.26)$$

où  $\rho_c$  minimise l'énergie effective  $E_s$  qui dépend de la pureté  $s = N^{q-1}\Sigma_q$  et est donnée par :

$$\begin{aligned} E_s[\rho] = & -\frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty dx dx' \rho(x)\rho(x') \ln|x-x'| + \mu_0 \left(\int_0^\infty dx \rho(x) - 1\right) \\ & + \mu_1 \left(\int_0^\infty dx x \rho(x) - 1\right) + \mu_2 \left(\int_0^\infty dx x^q \rho(x) - s\right) \\ & - \left(\frac{1-c}{2c}\right) \int_0^\infty dx \rho(x) \ln x \end{aligned} \quad (9.27)$$

où les multiplicateurs de Lagrange  $\mu_{0,1,2}$  ont été ajoutés pour prendre en compte les **contraintes**, respectivement la normalisation de la densité ( $\int \rho = 1$ ), la somme des valeurs propres fixée à 1 ( $\sum_i \lambda_i = 1$ , ie  $\int dx x \rho(x) = 1$ ) et la pureté généralisée fixée à la valeur  $\Sigma_q = N^{1-q}s$  (ie  $\int dx x^q \rho(x) = s$ ).

Une fois bien normalisée, la distribution de  $\Sigma_q$  Eq. (9.26) s'écrit :

$$\mathcal{P}(\Sigma_q = N^{1-q}s) \approx \frac{e^{-\beta N^2 E_s[\rho_c]}}{e^{-\beta N^2 E_s[\rho^*]}} \approx e^{-\beta N^2 \Phi(s)} \quad \text{où } \Phi(s) = E_s[\rho_c] - E_s[\rho^*] \quad (9.28)$$

où  $\rho_c$  minimise  $E_s[\rho]$  Eq. (9.27) et où  $E_s[\rho^*]$  est l'énergie moyenne sans contrainte sur la pureté, ie  $E_s[\rho]$  calculée pour la densité moyenne sans contrainte  $\rho^*$ . Pour  $c = 1$  le calcul de  $s$  donne  $E_s[\rho^*] = \frac{1}{4}$ . On rappelle ici que le symbole  $\approx$  signifie équivalent logarithmique.

La densité  $\rho_c$  doit **minimiser**  $E_s[\rho]$  Eq. (9.27), donc pour  $x \in \text{Supp}[\rho_c]$  :

$$\int_0^\infty dx' \rho_c(x') \ln |x - x'| = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^q - \frac{(1-c)}{2c} \ln x \equiv V_{\text{eff}}(x) \quad (9.29)$$

où  $V_{\text{eff}}(x)$  est le **potentiel externe effectif** vu par les **charges** du gaz de Coulomb à pureté  $s$  fixée. Dérivons par rapport à  $x$  :

$$\int_0^\infty dx' \frac{\rho_c(x')}{x - x'} = \mu_1 + q \mu_2 x^{q-1} - \frac{(1-c)}{2cx} = V'_{\text{eff}}(x), \quad x \in \text{Supp}[\rho_c] \quad (9.30)$$

où  $\int$  dénote la partie principale de l'intégrale. Cette équation intégrale peut être résolue avec la méthode de **Tricomi** expliquée section 2.4. La solution quand elle existe est une densité  $\rho_c$  à support fini. Pour simplifier, on suppose dans la suite  $c = 1$ , donc

$$V_{\text{eff}}(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^q \quad \text{pour } c = 1 \quad (9.31)$$

Physiquement, le gaz de Coulomb à pureté  $s$  fixée est très différent selon la valeur de  $s$ . Les multiplicateurs de Lagrange  $\mu_{0,1,2}$  dépendent de  $s$  et donc  $V_{\text{eff}}$  pourra changer de forme selon  $s$ . Les charges vont voir un potentiel effectif  $V_{\text{eff}}$  différent selon  $s$ , elles se comporteront donc différemment selon  $s$ . Ce phénomène est à l'origine de deux **transitions de phase** comme on va voir. On rappelle ici que  $x > 0$  car les  $\lambda_i$  sont positives (ce sont les valeurs propres d'une matrice densité).

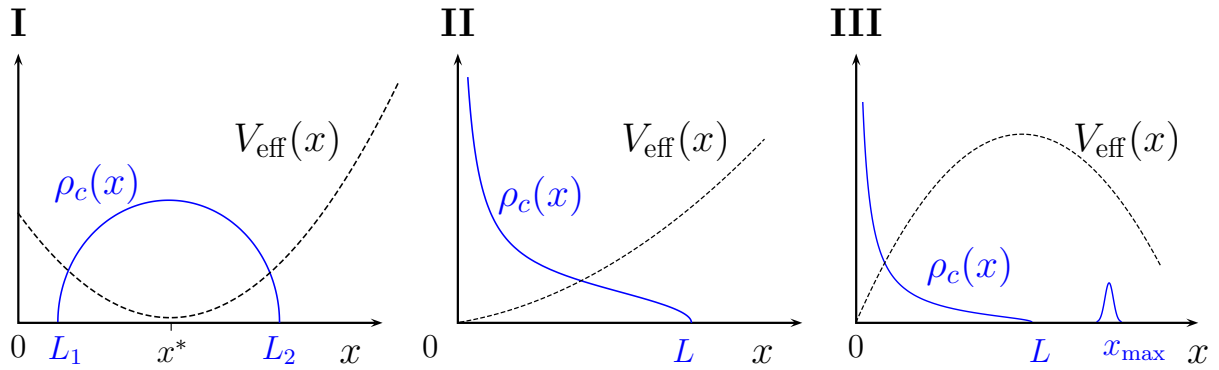
On va voir qu'il y a en fait **trois régimes**, cf Fig. 9.1 :

**Régime I**,  $s \leq s_1$  : le potentiel  $V_{\text{eff}}$  a un minimum absolu en un  $x_0 > 0$ , alors les charges s'accumulent près de ce minimum. La densité  $\rho_c$  a un *support fini*  $[L_1, L_2]$  avec  $0 < L_1 < L_2$  et s'annule aux deux bords.

**Régime II**,  $s_1 < s \leq s_2$  : pour  $s > s_1$ , le minimum  $x_0$  du potentiel  $V_{\text{eff}}$  se rapproche de 0 puis se fixe à 0,  $V_{\text{eff}}$  devient alors croissant monotone sur  $\mathbb{R}_+$ , les charges s'accumulent *près de l'origine*. La densité a un support  $]0, L]$ , diverge en 0 et s'annule en  $L$ .

Pour  $s > \bar{s}$  (où  $s_1 < \bar{s} < s_2$ ),  $V_{\text{eff}}$  n'est plus borné inférieurement, il est croissant au voisinage de l'origine, atteint un maximum, puis se met à décroître à partir d'un certain point. Le régime **II** (avec densité à support  $]0, L]$ ) reste malgré tout valable jusqu'à  $s = s_2$ , tant que le maximum de  $V_{\text{eff}}$  est suffisamment loin de l'origine. Puis c'est un autre régime qui commence à  $s = s_2$ .

**Régime III**,  $s > s_2$  : soudain la charge la plus éloignée de l'origine, c'est à dire la



**Figure 9.1** – Schéma de la densité de charge (adimensionnée)  $\rho_c(x)$  (trait plein bleu) et du potentiel externe effectif  $V_{\text{eff}}(x)$  (ligne pointillée noire) vu par les charges du gaz de Coulomb. Dans le régime **I**, les charges s’accumulent près du minimum absolu du potentiel  $x^* > 0$ , la densité  $\rho_c$  a un support  $[L_1, L_2]$ . dans le régime **II**, le potentiel est monotone croissant sur  $\mathbb{R}_+$ , les charges s’accumulent près de l’origine et la densité a un support  $]0, L]$ . Dans le régime **III**, le potentiel n’est plus borné inférieurement. Une charge saute par-dessus la barrière de potentiel et s’éloigne des autres  $x_{\text{max}} \gg L$ , tandis que les autres charges restent accumulées près de l’origine (qui est un minimum local du potentiel).

valeur propre maximale  $\lambda_{\text{max}}$  saute par-dessus la barrière de potentiel, elle s’éloigne brusquement des autres charges. Ainsi  $\lambda_{\text{max}} \gg \lambda_i$  pour  $i \neq \text{max}$ . Les charges ne sont plus décrites par une seule densité continue, mais par *une charge isolée*  $\lambda_{\text{max}} = t$  et une densité continue pour les autres (qui restent confinées dans le minimum local du potentiel à l’origine).

Des courbes de la grande déviation de la pureté pour  $q = 2$   $\Phi(s) = -\frac{\ln \mathcal{P}(\Sigma_2=s/N)}{\beta N^2}$  sont tracées au chapitre 14. Les résultats analytiques obtenus ici sont comparés dans les figures 14.2, 14.3 et 14.4, à des données que j’ai obtenues par des simulations de type Monte Carlo (avec un algorithme Metropolis non standard, cf chapitre 14).

### 9.2.1.1 Régime I

On suppose ici que la solution  $\rho_c$  de l’équation (9.30) avec  $c = 1$  est une **densité à support fini**  $[L_1, L_2]$  où  $0 < L_1 < L_2$ . Par continuité, on s’attend à ce que  $\rho_c$  s’annule aux deux bords  $\rho_c(L_1) = 0 = \rho_c(L_2)$ . On verra que ce régime correspond en fait à  $1 \leq s \leq s_1(q)$  où

$$s_1(q) = \frac{\Gamma(q + 3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(q + 2)} \left( \frac{4(q + 1)}{3q} \right)^q \quad (9.32)$$

On suppose pour simplifier que  $q = 2$ . Le calcul explicite de ce régime pour  $q > 1$  quelconque est trop difficile. La solution  $\rho_c$  de (9.30) avec  $c = 1$ , à support  $[L_1, L_2]$  s’annulant aux deux bords  $L_{1,2}$  est explicitement donnée par la solution de Tricomi (cf section 2.4) :

$$\rho_c(x) = \frac{2\mu_2}{\pi} \sqrt{x - L_1} \sqrt{L_2 - x} \quad (9.33)$$

C’est un demi-cercle. Il y a six paramètres inconnus pour le moment : la constante  $C$  dans la formule de Tricomi ; les bords du support de la densité  $L_1$  et  $L_2$  ; les multiplicateurs

de Lagrange  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . On a aussi six contraintes : la double contrainte de continuité  $\rho_c(L_1) = 0 = \rho_c(L_2)$  et les trois contraintes  $\int \rho_c = 1$ ,  $\int x\rho_c = 1$ ,  $\int x^2\rho_c = s$  fixent les valeurs de  $C$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$ ; enfin on obtient  $\mu_0$  en remplaçant dans Eq. (9.29)  $\rho_c$  par son expression et en choisissant une valeur particulière de  $x$ , par exemple  $x = L_2$ .

Après avoir imposé ces contraintes, on trouve  $C = \int \rho_c = 1$ ,  $L_{1,2} = 1 \mp 2\sqrt{s-1}$ ,  $\mu_1 = -\frac{1}{2(s-1)}$ ,  $\mu_2 = \frac{1}{4(s-1)}$  et  $\mu_0 = \frac{1}{2} \ln |s-1| + \frac{1}{4(s-1)} - \frac{1}{2}$ . Ainsi

$$\boxed{\rho_c(x) = \frac{\sqrt{L_2-x}\sqrt{x-L_1}}{2\pi(s-1)} \quad \text{avec } L_{1,2} = 1 \mp 2\sqrt{s-1}} \quad (9.34)$$

Cette solution est valable pour  $L_1 > 0$ , i.e. pour  $s < 5/4$ . Le régime **I** correspond donc à  $1 \leq s < s_1(2)$  avec  $s_1(2) = 5/4$ .

Dans ce régime on a  $\mu_1 = -\frac{1}{2(s-1)} < 0$ ,  $\mu_2 = \frac{1}{4(s-1)} > 0$ , le **potentiel effectif**  $V_{\text{eff}}(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2$  a donc un **minimum absolu** en  $x = x^* = 1 > 0$ , cf Fig. 9.1. A température nulle (ie  $N$  grand), les charges s'accumulent près de ce minimum : leur densité est un demi-cercle centré en  $x^* = 1 = (L_1 + L_2)/2$ . Le rayon du demi-cercle  $R = 2\sqrt{s-1}$  croît avec  $s$  jusqu'à ce que  $L_1$  atteigne l'origine (en  $s = 5/4$ ).

Enfin on peut calculer l'énergie de point col  $E_s[\rho_c]$ . Avec l'équation Eq. (9.29), on trouve  $E_s[\rho_c] = -\frac{1}{2}(\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 s) = -\frac{1}{4} \ln(s-1) + \frac{1}{8}$ , d'où d'après Eq. (9.28)  $\Phi_I(s) = E_s[\rho_c] - E_s[\rho^*] = E_s[\rho_c] - \frac{1}{4}$ . La **distribution de la pureté**  $\Sigma_2$  est donc donnée par :

$$\boxed{\mathcal{P}\left(\Sigma_2 = \frac{s}{N}\right) \approx e^{-\beta N^2 \Phi_I(s)}, \quad \Phi_I(s) = -\frac{1}{4} \ln(s-1) - \frac{1}{8}, \quad \text{si } 1 < s < \frac{5}{4}} \quad (9.35)$$

Quand  $s \rightarrow 1$ , ce qui correspond à des états quantiques  $|\psi\rangle$  maximalelement intriqués, on trouve  $\Phi_I(s) \rightarrow \infty$  et

$$\mathcal{P}(\Sigma_2 = s/N) \propto (s-1)^{\frac{\beta N^2}{4}} \quad \text{quand } s \rightarrow 1 \quad (9.36)$$

tend fortement vers 0. **La probabilité qu'un état aléatoire soit quasi-maximalement intriqué est extrêmement faible.** Ce constat qui nécessite d'avoir accès à la queue extrême gauche de la distribution (décrite par  $\Phi_I$ ) contraste avec l'idée selon laquelle un état aléatoire est en moyenne fortement intriqué.

Plus généralement, pour  $q > 1$  les résultats ci-dessus restent valables sur le plan qualitatif. Cependant je n'ai pas pu calculer explicitement la forme de  $\rho_c$  ni l'expression de  $\Phi_I(s)$  pour  $q$  quelconque, les calculs étant trop difficiles en général. La valeur du point de transition  $s_1(q)$  Eq. (9.32) se détermine explicitement grâce aux résultats pour  $q > 1$  du régime **II**.

### 9.2.1.2 Régime II

Quand  $s$  tend vers  $s_1(q)^-$ , la borne inférieure du support de la densité  $L_1$  tend vers 0. Les valeurs propres sont positives, donc  $L_1$  ne peut pas être négatif. Le régime **I** n'est plus valable pour  $s > s_1(q)$ . En  $s_1(q)$  commence le régime **II**, où **la densité  $\rho_c$  a un**

**support fini**  $]0, L]$  et **s'annule seulement en**  $L$ . On va voir que le régime **II** est valable pour  $s_1(q) \leq s \leq s_2(q, N)$  où  $s_1(q)$  est donné Eq. (9.32) et  $s_2(q, N)$  par :

$$s_2(q, N) = \bar{s}(q) + \frac{\left[ \sqrt{q/2} (q-1) \bar{s}(q) \right]^{2q/(2q-1)}}{N^{(q-1)/(2q-1)}} + \dots \quad \text{pour } N \gg 1 \quad (9.37)$$

donc  $s_2(q, N) \sim \bar{s}(q)$  quand  $N \rightarrow \infty$  (où  $\bar{s}$  est donné Eq. (9.16)), mais avec  $s_2(q, N)$  est légèrement supérieur à  $\bar{s}(q)$  quand  $N \gg 1$  fini : les effets de taille finie sont ici assez importants.

• Commençons pour simplifier par le **cas particulier**  $q = 2$ . On trouve la solution de l'équation (9.30) pour  $q = 2$  et  $c = 1$  avec la formule de Tricomi (cf section 2.4). La solution  $\rho_c$  à support fini  $[0, L]$  avec  $\rho_c(L) = 0$  est donnée par :

$$\rho_c(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{L-x}{x}} [A + Bx], \quad (9.38)$$

où  $A = \mu_1 + \mu_2 L$  et  $B = 2\mu_2$ .

On a cinq paramètres inconnus : la constante  $C$  de Tricomi ; la borne supérieure du support de la densité  $L$  ; les multiplicateurs de Lagrange  $\mu_{0,1,2}$ . D'un autre côté, on doit imposer les contraintes  $\rho_c(L) = 0$  ainsi que  $\int \rho_c = 1$ ,  $\int x \rho_c = 1$  et  $\int x^2 \rho_c = s$  puis obtenir  $\mu_0$  en remplaçant  $\rho_c$  par son expression dans (9.29) pour  $x = L$ .

On trouve  $C = \int \rho_c = 1$ ,  $\mu_1 = 8(L-3)/L^2$ ,  $\mu_2 = 4(4-L)/L^3$  et  $\mu_0 = \ln\left(\frac{L}{4}\right) - \frac{1}{2} - \mu_1 \frac{L}{4}$ . La borne supérieure du support  $L$  est solution de l'équation  $L^2 - 12L + 16s = 0$ . Ainsi  $L = 2(3 \pm \sqrt{9-4s})$ . Physiquement la densité  $\rho_c(x)$  doit rester positive pour  $0 < x < L$ . Cela détermine  $L$  :

$$L = L(s) = 2(3 - \sqrt{9-4s}) \quad (9.39)$$

$L$  croît avec  $s$  et se recolle de façon continue avec le régime **I** :  $L = 2 = L_2$  pour  $s = s_1(2) = 5/4$ . Le régime **II** existe tant que  $s < 9/4$ . Cependant, on va voir que pour  $s > 2$  il existe une autre solution qui devient plus favorable énergétiquement pour  $s > s_2$ , ce sera le régime **III**.

On a vu que  $\mu_1 = 8(L-3)/L^2$  et  $\mu_2 = 4(4-L)/L^3$ . Selon les signes de  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , on distingue trois régimes pour le potentiel effectif  $V_{\text{eff}}(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2$  :

(a)  $2 \leq L < 3$  (i.e.  $5/4 \leq s < 27/16$ ) :  $\mu_1 < 0$  et  $\mu_2 > 0$ . Le **potentiel**  $V_{\text{eff}}(x)$  **a un minimum absolu** en  $x = x^* = (-\mu_1)/(2\mu_2) = L(3-L)/(4-L) > 0$  (comme dans le régime **I**).  $x^*$  décroît quand  $L$  (ou  $s$ ) augmente, il atteint 0 quand  $L = 3$ .

(b)  $3 < L < 4$  (i.e.  $27/16 < s < 2$ ) :  $\mu_1 > 0$  et  $\mu_2 > 0$ . Le **potentiel est monotone croissant** sur  $\mathbb{R}_+$ . Il a un minimum absolu en  $x = 0$ .

(c)  $L > 4$  (i.e.  $2 < s \leq 9/4$ ) :  $\mu_1 > 0$  mais  $\mu_2 < 0$ . Le **potentiel n'est plus borné inférieurement**. Il croît au voisinage de l'origine, atteint un maximum en  $x = x^* = (\mu_1)/(-2\mu_2) = L(L-3)/(L-4)$  et décroît pour  $x > x^*$  jusqu'à  $-\infty$ . Dans cette phase, l'origine n'est plus qu'un minimum local. La solution de (9.38) devient **métastable**. Il y a en fait une autre solution dans cette phase, où une charge a passé la

barrière de potentiel et s'est éloignée fortement des autres charges. Cette seconde solution devient énergétiquement plus favorable à  $s = s_2 = 2 + \frac{2^{4/3}}{N^{1/3}} + \dots$ . Le régime **II** (9.38) est donc valable seulement pour  $s < s_2$ . Pour  $s > s_2$ , la seconde solution domine : c'est le régime **III**.

Finalement la grande déviation  $\Phi_{II} = E_s[\rho_c] - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}[\mu_1 + \mu_2 s + \mu_0] - \frac{1}{4}$  (cf Eq. (9.28)) se calcule explicitement. La **distribution de la pureté  $\Sigma_2$  dans le régime II** est alors donnée par :

$$\boxed{\mathcal{P}\left(\Sigma_2 = \frac{s}{N}, N\right) \approx e^{-\beta N^2 \Phi_{II}(s)} \quad \text{si } \frac{5}{4} < s < s_2} \quad (9.40)$$

$$\text{où } \Phi_{II}(s) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{L}{4}\right) + \frac{6}{L^2} - \frac{5}{L} + \frac{7}{8}, \quad L = 2(3 - \sqrt{9 - 4s})$$

Pour  $N$  grand, le régime **II** est valable pour  $s_1(2) < s \leq s_2(2, N)$  avec  $s_1(2) = 5/4$  et  $s_2(2, N) = 2 + \frac{2^{4/3}}{N^{1/3}} + \dots \rightarrow 2$  quand  $N \rightarrow +\infty$  (comme on va voir plus loin).

Au **point de transition**  $s = s_1 = 5/4$  entre les régimes **I** et **II**), la fonction  $\Phi(s)$  a une faible non-analyticité. Elle est continue,  $\Phi(5/4) = -\frac{1}{8} + \frac{\ln 2}{2}$ , et même deux fois dérivable,  $\frac{d\Phi}{ds}\big|_{s=5/4} = -1$  et  $\frac{d^2\Phi}{ds^2}\big|_{s=5/4} = 4$ . Mais sa **dérivée troisième** est **discontinue** :  $\frac{d^3\Phi}{ds^3}\big|_{s=5/4^-} = \frac{d^3\Phi_I}{ds^3}\big|_{s=5/4} = -32$  mais  $\frac{d^3\Phi}{ds^3}\big|_{s=5/4^+} = \frac{d^3\Phi_{II}}{ds^3}\big|_{s=5/4} = -16$ .

$\Phi$  atteint son minimum à  $s = 2$  dans le régime **II**. Comme la distribution de  $\Sigma_2$  est **très piquée pour  $N$  grand**, la **moyenne** de  $\Sigma_2$  est donnée à l'ordre dominant en  $N$  par la valeur la plus probable, soit le minimum de  $\Phi$ . On retrouve donc  $\langle \Sigma_2 \rangle \sim 2/N$ .

• Dans le cas général  $q > 1$ , les résultats qu'on obtient sont qualitativement les mêmes. Les expressions explicites sont plus compliquées mais j'ai pu les calculer dans ce régime. La densité du régime **II** est donnée par :

$$\rho_c(x) = \frac{\mu_1}{\pi} \sqrt{\frac{L-x}{x}} + \frac{2\mu_2 q L^{q-1} \Gamma(q + \frac{1}{2})}{\pi^{3/2} \Gamma(q)} \sqrt{\frac{L-x}{x}} {}_2F_1\left(1, 1-q, \frac{3}{2}, 1 - \frac{x}{L}\right) \quad (9.41)$$

où

$$\mu_1 = \frac{8(1+q)}{(1-q)L^2} - \frac{4q}{L(1-q)} \quad \text{et} \quad \mu_2 = \frac{(1+q)}{(1-q)} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(q)}{\Gamma(q+1/2)} \frac{L-4}{L^{q+1}} \quad (9.42)$$

et  $\mu_0 = \ln\left(\frac{L}{4}\right) + \mu_1 \frac{L(1-q)}{2q} - \frac{1}{q}$  et où la borne supérieure de la densité  $L$  est solution de :

$$\left(\frac{1-q}{1+q}\right) L^q + 4L^{q-1} = \frac{2\sqrt{\pi} \Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1/2)} s \quad (9.43)$$

La fonction  $f : L \rightarrow \left(\frac{1-q}{1+q}\right) L^q + 4L^{q-1}$  est croissante pour  $0 < L < L_0$  avec  $L_0 = 4(1+q)/q$ , et décroissante pour  $L > L_0$ . Elle est donc maximale en  $L = L_0$ , donc  $s$  ne peut pas être plus grand que  $s_0 = s(L = L_0)$  dans le régime **II**. Le régime **II** n'est donc pas valable pour  $s > s_0$ , où  $s_0 = s_0(q) = s(L = L_0) = \frac{\Gamma(q+1/2)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(q+2)} \left(\frac{4(1+q)}{q}\right)^q$ . Pour  $q = 2$  on retrouve  $s_0(2) = 9/4$ .

De plus, pour  $L < L_0/3$  et pour  $L > L_0$ , la densité  $\rho_c(x)$  devient négative quand  $x$  est proche d'une des bornes du support (0 pour  $L < L_0/3$ ,  $L$  pour  $L > L_0$ ), ce qui n'est pas physique.  $L$  doit donc rester dans l'intervalle  $[L_0/3, L_0]$ . Sur cet intervalle, la fonction  $f$  est croissante strictement, on peut l'inverser pour trouver  $L$  comme fonction de  $s$  :  $L = L(s)$ . L'intervalle  $[L_0/3, L_0]$  correspond à  $s_1(q) \leq s \leq s_0(q)$ , où  $s_1(q) = s(L = L_0/3)$  et  $s_0 = s(L = L_0)$ . Pour  $q = 2$ , on retrouve  $L_0 = 6$ ,  $L_0/3 = 2$ ,  $s_1 = 5/4$  et  $s_0 = 9/4$ .

Le régime **II** ne peut donc exister que pour  $s_1(q) \leq s \leq s_0(q)$ . Cependant, comme pour  $q = 2$ , ce régime n'est en fait plus valable pour  $s > s_2(q, N)$  (mais  $s_2 < s_0$ ), où une seconde solution existante se met à dominer, c'est le régime **III** comme on verra plus loin.

Finalement on obtient la **distribution de la pureté généralisée  $\Sigma_q$  dans le régime II** comme fonction de  $L = L(s)$  :

$$\mathcal{P}(\Sigma_q = N^{1-q}s, N) \approx e^{-\beta N^2 \Phi_{II}(s)} \quad \text{si } s_1 < s < s_2$$

$$\Phi_{II}(s) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{L}{4}\right) + \frac{4(1+q)}{qL^2} - \frac{2(1+2q)}{qL} + \frac{3q+1}{4q} \quad (9.44)$$

où  $L = L(s)$  est l'unique solution de l'équation (9.43) sur l'intervalle  $s_1 \leq s \leq s_2$ .

Comme pour  $q = 2$ , le paramètre  $\mu_2$  (voir (9.42)) est positif pour  $L < 4$  ( $s < \bar{s}(q)$ ) et devient négatif quand  $L > 4$  ( $s > \bar{s}(q)$ ). Ainsi, pour tout  $q > 1$  le potentiel effectif  $V_{\text{eff}}(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^q$  n'est plus borné inférieurement quand  $L$  dépasse 4, cf Fig. 9.1. Le régime **II** est donc métastable sur l'intervalle  $\bar{s}(q) < s < s_0(q)$  ( $4 < L < L_0$ ). Comme pour  $q = 2$ , il existe une seconde solution pour  $s > \bar{s}(q)$  qui devient énergétiquement favorable pour  $s > s_2(q)$ . C'est le début du régime **III**.

Comme la **distribution de  $\Sigma_q$  est très piquée pour  $N$  grand**, sa valeur **moyenne** est donnée par la valeur la plus probable, ie  $\langle \Sigma_q \rangle = N^{1-q} \bar{s}(q)$  où  $\bar{s}(q)$  minimise  $\Phi(s)$ . Le minimum  $s = \bar{s}(q)$  est atteint dans le régime **II** pour  $L(\bar{s}) = 4$ . On retrouve l'expression déjà calculée Eq. (9.16) :

$$\langle \Sigma_q \rangle \sim N^{1-q} \bar{s}(q) \quad \text{où } \bar{s}(q) = \frac{\Gamma(q+1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(q+2)} 4^q \quad \text{pour } c = 1 \quad (9.45)$$

Pour  $s$  proche de sa moyenne  $\bar{s}(q)$ , la fonction de grande déviation  $\Phi_{II}$  est quadratique :  $\Phi_{II}(s) \sim \frac{(s-\bar{s}(q))^2}{2\sigma_q^2}$ . La distribution de  $\Sigma_q$  est donc **gaussienne au voisinage de sa moyenne** :

$$\mathcal{P}(\Sigma_q = N^{1-q}s) \approx \exp\left\{-\beta N^2 \frac{(s-\bar{s}(q))^2}{2\sigma_q^2}\right\} \quad \text{pour } s \text{ proche de } \bar{s}(q). \quad (9.46)$$

La distribution étant très piquée pour  $N$  grand, la **variance de  $\Sigma_q$**  est donnée par la variance de la gaussienne près de la moyenne :

$$\text{Var } \Sigma_q = \langle \Sigma_q^2 \rangle - \langle \Sigma_q \rangle^2 \sim \frac{\sigma_q^2}{\beta N^{2q}}, \quad \sigma_q^2 = \frac{4^{2q}}{2\pi} q(q-1)^2 \frac{\Gamma(q+1/2)^2}{\Gamma(q+2)^2} \quad (9.47)$$

Par exemple, pour  $q = 2$ , on a  $\sigma_2^2 = 4$  et  $\text{Var} \Sigma_2 \sim \frac{4}{\beta N^4}$ .



### 9.2.2 Régime III : une charge isolée

Comme on a vu dans la section précédente, quand  $s > \bar{s}(q)$  le **potentiel effectif**  $V_{\text{eff}}$  **n'est plus borné inférieurement**. Il se peut alors qu'une ou plusieurs charge(s) passe(nt) la barrière de potentiel et se détache(nt) du continuum des autres charges. On peut vérifier que le détachement de plus d'une charge n'est pas favorable énergétiquement. On va donc supposer que seule **une charge se détache**, toutes les autres charges restent localisés près de l'origine, c'est à dire près d'un minimum local du potentiel.

On écrit  $\lambda_{\text{max}} = t$  et on décrit les  $(N-1)$  autres charges par leur densité continue non adimensionnée  $\rho(\lambda, N-1) = \frac{1}{N-1} \sum_{i \neq \text{max}} \delta(\lambda - \lambda_i)$ . Physiquement, comme le potentiel a un minimum relatif en  $x = 0$ , on s'attend à ce que la densité  $\rho_c(\lambda, N-1)$  ait un support fini  $]0, \zeta]$  avec  $\zeta < t$  et  $\rho_c(\zeta, N-1) = 0$  : tandis qu'une charge (la valeur propre maximale  $t$ ) se détache, les autres restent confinées près de l'origine.

Dans ce régime, on ne fait pas d'hypothèse sur le scaling des valeurs propres  $\lambda_i$ , on ne suppose plus que  $\lambda \asymp 1/N$ . On s'attend en effet à un changement de scaling au moins pour  $\lambda_{\text{max}} = t$  et donc pour l'énergie. L'énergie effective est maintenant une fonction à de  $t$  et de  $\rho(\lambda, N-1)$  qu'on notera pour simplifier  $\rho(\lambda)$  :

$$\begin{aligned}
 E_S[\rho, t] = & -\frac{(N-1)^2}{2} \int_0^\zeta \int_0^\zeta d\lambda d\lambda' \rho(\lambda) \rho(\lambda') \ln |\lambda - \lambda'| \\
 & -(N-1) \int_0^\zeta d\lambda \rho(\lambda) \ln |t - \lambda| + \mu_0 \left( \int_0^\zeta d\lambda \rho(\lambda) - 1 \right) \\
 & + \mu_1 \left( (N-1) \int_0^\zeta d\lambda \lambda \rho(\lambda) + t - 1 \right) + \mu_2 \left( (N-1) \int_0^\zeta d\lambda \lambda^q \rho(\lambda) + t^q - S \right)
 \end{aligned} \tag{9.48}$$

La configuration de charges qui domine à température nulle (ie  $N \rightarrow \infty$ ) est décrite par la **densité optimale**  $\rho_c$  et la valeur optimale  $t_c$  de  $t = \lambda_{\text{max}}$  telles que :

$$\left. \frac{\delta E_S}{\delta \rho(\lambda)} \right|_{\rho=\rho_c, t=t_c} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial E_S}{\partial t} \right|_{\rho=\rho_c, t=t_c} = 0. \tag{9.49}$$

La distribution de  $\Sigma_q$  est donnée pour  $N$  grand par l'intégrale multiple suivante :

$$\mathcal{P}(\Sigma_q = S) \propto \int \mathcal{D}\rho \int dt e^{-\beta E_S[\rho, t]} \tag{9.50}$$

La **méthode du col** à  $N$  **grand** (qui correspond à la limite de température nulle pour le gaz de Coulomb) donne donc, avec la bonne normalisation :

$$\mathcal{P}(\Sigma_q = S) \approx \exp \{ -\beta (E_S[\rho_c, t_c] - E_S[\rho^*, t^*]) \} \tag{9.51}$$

où  $E_S[\rho, t]$  est donnée Eq. (9.48). La configuration optimale  $(\rho_c, t_c)$  minimise  $E_S[\rho, t]$ . La normalisation est donnée par l'expression de la densité dans contrainte, donc pour  $S = \bar{S}$ , soit  $E_S[\rho^*, t^*] = E_S[\rho_c, t_c] \Big|_{S=\bar{S}}$  (où  $\bar{S} = 2/N$  pour  $q = 2$ ). On va voir que pour  $N$  grand on a :

$$E_S[\rho^*, t^*] = E_S[\rho_c, t_c] \Big|_{S=\bar{S}} = N^2 \left( \frac{\ln N}{2} + \frac{1}{4} \right) + \dots \tag{9.52}$$

Formellement, par analogie avec les régimes **I** et **II**, on peut écrire :

$$\mathcal{P}(\Sigma_q = S) \approx e^{-\beta N^2 \Phi(N, S)} \quad (9.53)$$

où  $\Phi$  est définie comme

$$\Phi(N, S) = (E_S[\rho_c, t_c] - E_S[\rho^*, t^*]) / N^2 \quad (9.54)$$

Cependant on va voir que le scaling de  $\Phi$  pour  $N$  grand est différent dans le régime **III**. Dans les régimes **I** et **II**,  $\Phi$  était indépendant de  $N$  pour  $N$  grand :  $\Phi(N, s/N) \rightarrow \Phi_I(s)$  (resp.  $\Phi_{II}(s)$ ). Dans le régime **III**, on va voir :  $\Phi(N, s/N) \sim \Psi_{III}(s) / N^{1-\frac{1}{q}}$  pour  $N$  grand.

Pour simplifier, on écrira  $t$  au lieu de  $t_c$  dans la suite.

### 9.2.2.1 Cas particulier $q = 2$

Suivant les mêmes étapes que dans le cas du régime **II** pour résoudre l'équation de point col  $\delta E_S / \delta \rho = 0$  cf Eq. (9.49), on trouve que la densité optimale  $\rho_c$  est donnée pour  $q = 2$  par :

$$\rho_c(\lambda) = \frac{1}{\pi(N-1)} \sqrt{\frac{\zeta - \lambda}{\lambda}} \left[ A + B\lambda + \frac{C}{t - \lambda} \right], \quad (9.55)$$

avec  $A = \frac{4}{\zeta^2} \left[ N\zeta - 2 + 2\sqrt{t(t - \zeta)} \right]$ ,  $B = \frac{8}{\zeta^3} \left[ 4 - N\zeta + \sqrt{\frac{t}{t - \zeta}} (3\zeta - 4t) \right]$  et  $C = \sqrt{\frac{t}{t - \zeta}}$ , où  $\zeta$  et  $t = t_c$  sont solutions de :

$$(a) 16S + N\zeta^2 - 12\zeta - \sqrt{\frac{t}{t - \zeta}} (16t^2 - 20t\zeta + 5\zeta^2) = 0 \quad (9.56)$$

$$(b) (8t^2 - 8t\zeta + \zeta^2)^2 = 8(t - \zeta)\sqrt{t(t - \zeta)} (8t - 2\zeta - 2Nt\zeta + N\zeta^2) \quad (9.57)$$

Ces équations peuvent être résolues numériquement pour  $\Sigma_2 = S$ . On peut aussi trouver les solutions analytiquement dans la limite  $N \rightarrow \infty$ .

Pour  $S = \frac{s}{N}$  avec  $2 < s < 9/4$ , il existe deux solutions pour le couple  $(\zeta, t)$ . La première solution est de la forme  $t \sim \zeta$  où  $\zeta \asymp 1/N$ . C'est exactement, à l'ordre dominant en  $N$ , la solution du régime **II** (voir ci-dessous, "première solution"). Il existe aussi une seconde solution, elle est telle que  $t \gg \zeta$  : la valeur propre maximale est beaucoup plus grande que les autres. Plus précisément,  $\zeta \asymp 1/N$  tandis que  $t \asymp 1/\sqrt{N}$  pour  $S \asymp 1/N$  (voir ci-dessous, "seconde solution"). On va voir que la première solution (régime **II**) est valable pour  $s < s_2$  où  $s_2 = 2 + \frac{2^{4/3}}{N^{1/3}} + \dots$  pour  $N$  grand, tandis que la solution où  $t \gg \zeta$  se met à dominer pour  $s > s_2$  (son énergie est plus basse) : c'est le régime **III**.

Pour  $S > \frac{9}{4N}$  ( $s > \frac{9}{4}$ ), seule la seconde solution continue d'exister, celle où  $\zeta = L/N$  et  $t \gg \zeta$ .

On notera que dans les deux cas, pour  $N$  grand (et  $\frac{2}{N} \leq S < 1$ ), la borne supérieure du support de la densité  $\zeta$  reste de l'ordre de  $\asymp 1/N$ . On écrira donc  $\zeta = \frac{L}{N}$  avec  $L \asymp 1$ . D'un autre côté, la valeur propre maximale  $t$  est au début d'ordre  $\asymp 1/N$  (quand  $S \rightarrow 2/N$ ) mais elle augmente brutalement au début du régime **III**. Elle croît ensuite jusqu'à être d'ordre 1 quand  $S \rightarrow 1$ .

Finalement on exprime **l'énergie de point col** comme une fonction de  $\zeta = L/N$  et  $t$ . Comme les effets de taille finie pour  $N$  grand mais fini sont importants dans ce régime, on garde tous les termes jusqu'à l'ordre  $O(N)$  :

$$\begin{aligned}
E_S[\rho_c, t] = E(\zeta, t) = & -\frac{(N-1)^2}{2} \ln \left[ \frac{\zeta}{4} \right] - 2N \ln \left[ \frac{\sqrt{t} + \sqrt{t-\zeta}}{2} \right] \\
& + \frac{1}{2} \ln [t(t-\zeta)] + \frac{9N^2}{8} + \frac{6(1+t^2)}{\zeta^2} - \frac{5(N+t)}{\zeta} + \frac{t}{8(t-\zeta)} \\
& + \sqrt{\frac{t}{t-\zeta}} \left[ -\frac{19N}{4} - \frac{12t}{\zeta^2} + \frac{11}{\zeta} + \frac{5Nt}{\zeta} \right] \tag{9.58}
\end{aligned}$$

où  $\zeta = \zeta(s)$  et  $t = t_c = t(s)$  sont donnés Eq. (9.56) et (9.57).

La fonction de grande déviation  $\Phi$  est donnée par  $\Phi(N, S) = \frac{E_S[\rho_c, t] - E_S[\rho^*, t^*]}{N^2} = \frac{E[\zeta, t] - E_S[\rho^*, t^*]}{N^2}$  avec  $E[\zeta, t]$  donnée Eq. (9.58).

• **Scaling  $S = s/N$  : première solution  $t \sim \zeta$  avec  $\zeta \asymp 1/N$  (régime II)**

Pour  $S = \frac{s}{N}$  avec  $s$  d'ordre 1 pour  $N$  grand, la solution du régime **II** existe tant que  $s < 9/4$  (où  $9/4 = s_0(2)$ ). On retrouve cette solution à partir des Eqs. (9.56) et (9.57) avec le scaling  $t = \frac{T}{N}$  et  $\zeta = \frac{L}{N}$  avec  $T \sim L$  d'ordre 1, i.e. la valeur propre maximale  $t$  reste très proche des autres valeurs propres ( $t \sim \zeta$  pour  $N$  grand).

Dans cette limite, les équations (9.56) et (9.57) donnent :

$$(a) \quad 16s + L^2 - 12L = 0 \tag{9.59}$$

$$(b) \quad (T - L)^{3/2} \sim \frac{L^{5/2}}{8(6-L)} \frac{1}{N} \tag{9.60}$$

L'équation (a) est la même que (9.43) dans le régime **II**. A l'ordre dominant en  $N$  (ordre  $N^2$ ), l'équation (9.58) devient simplement :

$$E_S[\rho_c, t] = E(L, t) = -\frac{N^2}{2} \ln \left( \frac{L}{4} \right) + 6\frac{N^2}{L^2} - 5\frac{N^2}{L} + N^2 \left( \frac{\ln N}{2} + \frac{9}{8} \right) \tag{9.61}$$

Ainsi, avec (9.52), on trouve  $\Phi(N, s/N) = \left( E_S[\rho_c, t] - E_S[\rho_c, t] \Big|_{s=2} \right) / N^2 = \Phi(s)$  où  $\Phi(s) = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{L}{4} \right) + \frac{6}{L^2} - \frac{5}{L} + \frac{7}{8} = \Phi_{II}(s)$ . On retrouve l'expression de (9.40) du régime **II**.

Cependant, pour  $S = s/N > 2/N$  il existe une seconde solution décrite ci-dessous et qui devient énergétiquement plus favorable à  $s = s_2 = 2 + \frac{2^{4/3}}{N^{1/3}} + \dots$ . Ainsi le régime **II** est seulement valable pour  $5/4 < s < s_2$ .

• **Scaling  $S = s/N$  : seconde solution  $t \gg \zeta$  (régime III)**

Pour  $S = s/N$  avec  $s > 2$ , il existe une solution où la valeur propre maximale ( $\lambda_{\max} = t$ ) est beaucoup plus grande que les autres :  $t \gg \zeta$ . Dans cette limite, Eq. (9.56) et (9.57) deviennent pour  $N$  grand :

$$t \sim \frac{\sqrt{s-2}}{\sqrt{N}} \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{4}{N} \left[ 1 + \frac{3-s}{\sqrt{s-2}} \frac{1}{\sqrt{N}} + \dots \right] \tag{9.62}$$

Pour  $S \rightarrow 1$ , qui implique  $s \rightarrow \infty$  quand  $N \rightarrow \infty$ , on trouve  $t \sim \sqrt{\frac{s}{N}} = \sqrt{S}$  et  $\zeta \sim \frac{4}{N} (1 - \sqrt{\frac{s}{N}}) \sim \frac{4}{N}(1 - t)$  comme dans (9.66).

On développe pour  $N$  grand l'énergie de point col (9.58) en remplaçant  $t$  et  $\zeta$  par leurs expressions données dans (9.62). On obtient :

$$E_S[\rho_c, t] = \frac{\sqrt{s-2}}{2} N^{3/2} + N^2 \left( \frac{\ln N}{2} + \frac{1}{4} \right) - \frac{N}{2} \ln N + O(N) \quad \text{pour } N \text{ grand} \quad (9.63)$$

Finalement on trouve  $N^2 \Phi(N, s/N) = E_{s/N}[\rho_c, t] - N^2 \left( \frac{\ln N}{2} + \frac{1}{4} \right)$  soit  $N^2 \Phi(N, s/N) = \frac{\sqrt{s-2}}{2} N^{3/2} - \frac{N}{2} \ln N + O(N)$  pour  $N$  grand et la distribution de  $\Sigma_2$  est donc donnée pour  $N$  grand par :

$$\boxed{\mathcal{P} \left( \Sigma_2 = \frac{s}{N}, N \right) \approx e^{-\beta N^{3/2} \Psi_{III}(s)}, \quad \Psi_{III}(s) = \frac{\sqrt{s-2}}{2} \quad \text{si } s > s_2} \quad (9.64)$$

En effet  $N^{3/2} \Psi_{III}(s) = N^2 \Phi(N, s/N)$ , soit  $\Psi_{III}(s) = \frac{\sqrt{s-2}}{2} - \frac{\ln N}{2\sqrt{N}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ .

La fonction de **grande déviation**  $\Phi$  a un comportement très différent à grand  $N$  dans les régimes **I-II** et **III**. Dans les régimes **I** et **II**, on a  $\mathcal{P}(\Sigma_2 = \frac{s}{N}) \approx e^{-\beta N^2 \Phi(s)}$ , tandis que dans le régime **III**  $\mathcal{P}(\Sigma_2 = \frac{s}{N}) \approx e^{-\beta N^{3/2} \Psi_{III}(s)}$ . Pour  $N$  grand mais fini et pour  $s > 2$  mais proche de  $\bar{s} = 2$ , on a  $N^{3/2} \Psi_{III}(s) > N^2 \Phi_{II}(s)$ . Ainsi le régime **II** domine près de  $s = 2$ . Par contre le régime **III** devient favorable énergétiquement au **point de transition**  $s = s_2$  défini par  $N^{3/2} \Psi_{III}(s_2) = N^2 \Phi_{II}(s_2)$ , soit

$$s_2 = 2 + \frac{2^{4/3}}{N^{1/3}} - \frac{2^{5/3} \ln N}{3N^{2/3}} + \dots \quad \text{pour } N \text{ grand} \quad (9.65)$$

On voit bien le changement de régime sur la figure 14.3 représentant la grande déviation  $\Phi(s) = -\frac{\ln \mathcal{P}(\Sigma_2 = s/N)}{\beta N^2}$  pour  $N = 1000$ . Dans cette figure, les résultats analytiques asymptotiques (limite  $N \rightarrow \infty$ ) sont comparés à des données que j'ai obtenues par des simulations de type Monte Carlo (avec un algorithme Metropolis non standard, cf chapitre 14).

A  $s = s_2$ , il y a une **transition brutale** de **II** vers **III**. La **valeur propre maximale**  $t$  **saute** d'une valeur  $t = \frac{T}{N}$  avec  $T$  d'ordre 1 avec  $t$  très proche de  $\zeta$  à une valeur  $t \sim \frac{\sqrt{s-2}}{\sqrt{N}}$  beaucoup plus grande que les autres valeurs propres ( $t \gg \zeta$ ), cf Fig. 14.4. La fonction  $\Phi$  est continue mais de **dérivée discontinue** :  $N^2 \frac{d\Phi_{II}}{ds} \Big|_{s=s_2^-} \sim \frac{N^{5/3}}{2^{2/3}}$ , tandis que  $N^{3/2} \frac{d\Psi_{III}}{ds} \Big|_{s=s_2^+} \sim \frac{N^{5/3}}{4^{2/3}}$  pour  $N$  grand. Au point de transition  $s = s_2$ , il y a aussi un changement de concavité de la courbe :  $\Phi$  est convexe dans le régime **II** ( $\frac{d^2\Phi_{II}}{ds^2} > 0$  pour tout  $s < 9/4$ ) et a son minimum à  $s = \bar{s} = 2$ , tandis que  $\Phi$  est concave dans le régime **III** ( $\frac{d^2\Psi_{III}}{ds^2} < 0$  pour tout  $s > 2$ ). On voit bien le changement de comportement de  $\Phi(s)$  au point de transition sur la figure 14.3.

- **Scaling**  $\Sigma_2 = S \approx O(1)$  et limite  $S \rightarrow 1$  (états séparables)

La queue extrême droite de la distribution de la pureté correspond à  $\Sigma_2 = S \asymp 1$  pour  $N \gg 1$  ( $S \gg s/N$ ,  $S \leq 1$ ) et la valeur propre maximale  $t \asymp 1$  tandis que  $\zeta$  et

toutes les autres valeurs propres restent d'ordre  $\asymp 1/N$ . Dans cette limite, Eq. (9.56) et (9.57) deviennent :

$$S \sim t^2 \text{ et } L \sim 4(1-t) \text{ quand } t \asymp 1 \quad (9.66)$$

L'énergie de point col Eq. (9.58) devient :  $E_S[\rho_c, t] = -\frac{N^2}{2} \ln(1-t) + N^2 \left(\frac{\ln N}{2} + \frac{1}{4}\right) - N \ln N + O(N)$  quand  $S \asymp 1$  avec  $t = \sqrt{S}$ . On obtient ainsi une expression explicite pour  $\Phi(N, S) = (E_S[\rho_c, t_c] - E[\rho^*, t^*]) / N^2$  pour  $N$  grand :

$$\Phi(N, S) \sim \frac{(E_S[\rho_c, t] - N^2 \left(\frac{\ln N}{2} + \frac{1}{4}\right))}{N^2} \sim -\frac{1}{2} \ln(1 - \sqrt{S}) \equiv \Phi_{III}(S) \quad (9.67)$$

D'où

$$\mathcal{P}(\Sigma_2 = S) \approx e^{-\beta N^2 \Phi_{III}(S)} \approx \left(1 - \sqrt{S}\right)^{\frac{\beta N^2}{2}} \text{ pour } N \text{ grand, } S \text{ fixé} \quad (9.68)$$

La différence de scaling avec les régimes **I** et **II** vient du scaling de  $\Sigma_2$  : dans les régimes **I** (resp. **II**), on avait  $\Phi(N, s/N) \rightarrow \Phi_I(s)$  (resp.  $\Phi_{II}(s)$ ) pour  $N$  grand, tandis qu'ici :  $\Phi(N, S) \rightarrow \Phi_{III}(S)$  pour  $N$  grand et  $S$  fixé d'ordre 1. Quand  $S = s/N$  avec  $s$  fixé et  $N$  grand, ce qui correspond à la limite  $S \rightarrow 0$  dans ce scaling, on trouve  $N^2 \Phi_{III}(S) \sim N^{3/2} \sqrt{s}/2$  ce qui est aussi la limite  $s \rightarrow \infty$  de  $N^{3/2} \Psi_{III}(s)$ . La queue droite (où  $S \asymp 1/N$ ) et extrême droite (où  $S$  d'ordre 1) de la distribution se recollent bien de façon continue.

Quand  $\Sigma_2 = S$  tend vers sa valeur maximale 1, la valeur propre maximale tend vers 1  $t \rightarrow 1$  et  $L \rightarrow 0$ . A  $S = 1$ , seule une valeur propre, la plus grande  $\lambda_{max} = t$ , est non nulle (et égale à 1). Cette situation correspond au cas séparable, ie non intriqué (situation (i)).

**La probabilité d'un état séparable (i.e.  $\Sigma_2 \rightarrow 1$ ) est donc très faible dans la limite  $N$  grand.**

### 9.2.2.2 Cas général $q > 1$

Dans le cas général  $q > 1$ , on utilise encore le théorème de Tricomi et on impose  $\int \rho_c = 1$  et  $\rho_c(\zeta) = 0$ , on trouve alors l'expression de la **densité optimale** pour les  $(N-1)$  plus petites valeurs propres, dans le cas  $q > 1$  quelconque :

$$\rho_c(\lambda) = \frac{1}{\pi(N-1)} \sqrt{\frac{\zeta - \lambda}{\lambda}} \left[ A + B {}_2F_1\left(1, 1-q, \frac{3}{2}, 1 - \frac{\lambda}{\zeta}\right) + \frac{C}{t - \lambda} \right] \quad (9.69)$$

où  $A = \mu_1$ ,  $B = \mu_2 2q \zeta^{q-1} \frac{\Gamma(q+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(q)}$  et  $C = \sqrt{\frac{t}{t-\zeta}}$  et  ${}_2F_1$  une fonction hypergéométrique. Les multiplicateurs de Lagrange  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{4}{(q-1)\zeta^2} \left[ qN\zeta - 2(q+1) + \sqrt{\frac{t}{t-\zeta}} \{(2q+2)t - (2q+1)\zeta\} \right] \\ \mu_2 &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(q+2)}{\zeta^{q+1}\Gamma(q+1/2)q(q-1)} \left[ 4 - N\zeta + \sqrt{\frac{t}{t-\zeta}} \{3\zeta - 4t\} \right] \end{aligned} \quad (9.70)$$

où  $\zeta$  et  $t$  sont solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} (a) \quad S - t^q &= \sqrt{\frac{t}{t-\zeta}} \frac{\zeta^{q+1}\Gamma(q+1/2)}{2t\sqrt{\pi}\Gamma(q+2)} {}_2F_1\left(1, q + \frac{1}{2}, 2+q, \frac{\zeta}{t}\right) \\ &+ \frac{\zeta^{q-1}\Gamma(q+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(q+1)} \left\{ 2 - \frac{N\zeta}{2} \left(\frac{q-1}{q+1}\right) + \sqrt{\frac{t}{t-\zeta}} \left[ \zeta \left(\frac{3q+1}{2q+2}\right) - 2t \right] \right\} \end{aligned} \quad (9.71)$$

$$(b) \quad \mu_1 \sqrt{\frac{t-\zeta}{t}} + q\mu_2 t^{q-1} = \frac{\zeta}{2t(t-\zeta)} + \mu_2 \frac{\zeta^q \Gamma(q+1/2)}{t\sqrt{\pi}\Gamma(q)} {}_2F_1\left(1, q, q+1, \frac{\zeta}{t}\right) \quad (9.72)$$

où  $\mu_1 = \mu_1(\zeta, t)$  et  $\mu_2 = \mu_2(\zeta, t)$  sont donnés Eq. (9.70).

Ces équations peuvent être résolues analytiquement pour  $N$  grand, les solutions ont le même comportement qualitatif que pour  $q = 2$ .

Pour  $S = N^{1-q} s$  avec  $\bar{s}(q) < s < s_0(q)$  (où  $s_0(q) = \frac{\Gamma(q+1/2)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(q+2)} \left(\frac{4(1+q)}{q}\right)^q$ , voir régime **II**), il existe deux solutions différentes pour le couple  $(\zeta, t)$ . La première est de la forme  $t \sim \zeta$  où  $\zeta \asymp 1/N$ . A l'ordre dominant en  $N$ , c'est exactement la solution du régime **II** (voir ci-dessous, "première solution"). Il y a aussi une seconde solution, elle est de la forme  $t \gg \zeta$ , plus précisément  $\zeta = L/N$  où  $L \asymp 1$  et  $t \asymp 1/N^{1-1/q}$  pour  $S = N^{1-q} s$ , et  $\zeta \asymp 1/N$  (voir ci-dessous, "seconde solution"). Pour  $s$  proche  $\bar{s}(q)$ , la première solution domine (régime **II**), mais quand  $s$  atteint  $s = s_2(q, N) > \bar{s}(q)$  donné Eq. (9.75), la seconde solution, celle où  $t \gg \zeta$ , se met à dominer (son énergie devient plus petite) : c'est le régime **III**.

Pour  $S > N^{1-q} s_0(q)$ , i.e.  $s > s_0$ , seule reste la seconde solution : la borne supérieure du support de la densité est de la forme  $\zeta = L/N$  où  $L \asymp 1$  tandis que la valeur propre maximale est beaucoup plus grande que les autres valeurs propres :  $t \gg \zeta$ .

Comme pour  $q = 2$ , pour  $N$  grand la borne supérieure du support  $\zeta$  reste d'ordre  $\asymp 1/N$  ( $\zeta \asymp \lambda_{\text{typ}}$ ) dans les deux cas. On écrira donc  $\zeta = \frac{L}{N}$  où  $L \asymp 1$ . Par contre, et comme pour  $q = 2$ , la valeur propre maximale  $t$  est d'abord d'ordre  $\asymp 1/N$  (quand  $S \rightarrow N^{1-q}\bar{s}(q)$ ) puis augmente jusqu'à être d'ordre  $\asymp 1$  (quand  $S \rightarrow 1^-$ ).

• **Scaling  $S = N^{1-q} s$  : première solution  $t \approx \zeta$  où  $\zeta \asymp 1/N$  (régime **II**)**

Pour  $S = N^{1-q} s$  où  $s \asymp 1$  pour  $N$  grand, la solution du régime **II** existe tant que  $s < s_0(q)$ . On retrouve cette solution (régime **II**) à partir des équations (9.71) et (9.72) avec le scaling  $t = \frac{T}{N}$  et  $\zeta = \frac{L}{N}$  où  $T \sim L \asymp 1$ , où la valeur propre maximale  $t$  reste proche des autres valeurs propres ( $t \sim \zeta$  pour  $N$  grand) et ne joue aucun rôle particulier. Finalement  $\Phi(N, s/N) = \left( E_S[\rho_c, t] - E_S[\rho_c, t] \Big|_{s=2} \right) / N^2 = \Phi_{II}(s)$ , c'est la même expression que (9.44) du régime **II**.

Mais pour  $s > \bar{s}(q)$ , il existe une seconde solution, qui devient énergétiquement favorable à  $s = s_2(q, N)$ . Le régime **II** n'est donc valable que pour  $s_1 < s < s_2$ .

• **Scaling  $S = N^{1-q} s$  : seconde solution  $t \gg \zeta$  (régime **III**)**

Pour  $S = N^{1-q} s$  où  $s > \bar{s}(q)$ , il existe une seconde solution où la valeur propre maximale  $\lambda_{\text{max}} = t$  est beaucoup plus grande que toutes les autres valeurs propres :  $t \gg \zeta$ . Dans cette limite, Eq. (9.71) et (9.72) deviennent :

$$t \sim \frac{[s - \bar{s}(q)]^{1/q}}{N^{1-1/q}} \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{4}{N} \left[ 1 - \left\{ \frac{s - \bar{s}(q)(1+q)/2}{[s - \bar{s}(q)]^{1-1/q}} \right\} \frac{1}{N^{1-1/q}} + \dots \right] \quad (9.73)$$

Pour  $S \rightarrow 1$ , donc  $s \rightarrow \infty$  quand  $N \rightarrow \infty$ , on trouve  $t \sim s^{1/q} N^{1/q-1} = S^{1/q}$  et  $\zeta \sim \frac{4}{N}(1-t)$ .

On peut alors calculer l'énergie de point col en remplaçant  $t$  et  $\zeta$  par leur expression (9.73) pour  $N$  grand. Finalement on obtient  $N^2 \Phi(N, s/N) = E_S[\rho_c, t] - N^2 \left( \frac{\ln N}{2} + \frac{1}{4} \right) \sim N^{1+\frac{1}{q}} \frac{[s - \bar{s}(q)]^{1/q}}{2}$  pour  $N$  grand et la distribution de  $\Sigma_q$  est donc donnée pour  $N$  grand

par :

$$\mathcal{P}(\Sigma_q = N^{1-q} s) \approx e^{-\beta N^{1+\frac{1}{q}} \Psi_{III}(s)}, \quad \Psi_{III}(s) = \frac{[s - \bar{s}(q)]^{1/q}}{2} \quad \text{si } s > s_2 \quad (9.74)$$

La solution du régime **III** devient plus favorable énergétiquement, ie  $N^{1+\frac{1}{q}} \Psi_{III}(s) < N^2 \Phi_{II}(s)$ , au point  $s_2(q, N)$  défini par  $N^{1+\frac{1}{q}} \Psi_{III}(s_2) = N^2 \Phi_{II}(s_2)$ . D'où

$$s_2(q, N) = \bar{s}(q) + \frac{\left[ \sqrt{q/2} (q-1) \bar{s}(q) \right]^{2q/(2q-1)}}{N^{(q-1)/(2q-1)}} + \dots \quad \text{pour } N \text{ grand} \quad (9.75)$$

A  $s = s_2$ , il y a une **transition brutale du régime II vers le régime III**. La valeur propre **maximale**  $t$  saute brutalement de  $t \sim \frac{T}{N}$  où  $T \asymp 1$  et  $t$  très proche de  $\zeta$  à une valeur  $t \sim \frac{[s - \bar{s}(q)]^{1/q}}{N^{1-1/q}}$  **beaucoup plus grande que les autres valeurs propres** ( $t \gg \zeta$ ). La fonction  $\Phi(N, s/N)$  est ainsi donnée par

$$N^2 \Phi(N, s/N) = \begin{cases} N^2 \Phi_{II}(s) & \text{pour } s < s_2 \\ N^{1+\frac{1}{q}} \Psi_{III}(s) & \text{pour } s > s_2 \end{cases} \quad (9.76)$$

Elle est continue mais sa **dérivée première est discontinue**. Pour  $N$  grand, on a en effet  $N^2 \frac{d\Phi}{ds} \Big|_{s_2^-} \sim N^{\frac{3q-1}{2q-1}} \left\{ (q-1) \sqrt{q/2} \bar{s}(q) \right\}^{\frac{2-2q}{2q-1}}$ , tandis que  $\frac{d\Phi}{ds} \Big|_{s_2^+} \sim \frac{d\Phi}{ds} \Big|_{s_2^-} / (2q)$ . Au point de transition  $s = s_2$ , la courbe change aussi de concavité :  $\Phi$  est convexe dans le régime **II** ( $\frac{d^2\Phi_{II}}{ds^2} > 0$ ) et est minimale en  $s = \bar{s}$ , tandis qu'elle est concave dans le régime **III** ( $\frac{d^2\Psi_{III}}{ds^2} < 0$ ).

### 9.3 DISTRIBUTION DE L'ENTROPIE

De la distribution de la pureté généralisée  $\Sigma_q$ , on peut facilement, par un simple changement de variable, déduire la distribution de l'entropie de Renyi  $S_q = \frac{1}{1-q} \ln \Sigma_q$  pour un état pur aléatoire. Puis la limite  $q \rightarrow 1$  donne accès à la distribution de l'entropie de von Neumann  $S_{VN}$ . La limite  $q \rightarrow \infty$  donne accès à la distribution de la valeur propre maximale  $\lambda_{\max}$ . On rappelle qu'on est toujours dans le cas  $M = N$  c'est-à-dire  $c = 1$  dans cette partie.

#### 9.3.1 Entropie de Renyi $S_q$

Par définition, l'entropie de Renyi est donnée par  $S_q = \frac{1}{1-q} \ln \Sigma_q$  où  $\Sigma_q = \sum_{i=1}^N \lambda_i^q$  est la pureté généralisée dont on a calculé la distribution dans la partie précédente pour  $q > 1$ . Le bon scaling quand  $N \rightarrow \infty$  est, comme on a vu plus haut :

$$\Sigma_q = N^{1-q} s \quad \text{donc} \quad S_q = \ln N - z \quad \text{où} \quad z = \frac{\ln s}{q-1} \quad (9.77)$$

avec  $s$  et  $z$  d'ordre 1. Le paramètre  $z$  est positif, son minimum 0 correspond à une entropie maximale  $S_q = \ln N$ , donc à l'état maximalelement intriqué.

De la distribution de  $\Sigma_q$ , on déduit directement la **distribution de l'entropie de Renyi**  $S_q$  à  $N$  grand. On observe les mêmes trois régimes pour  $q$  fixé,  $q > 1$  :

$$\mathcal{P}(S_q = \ln N - z) \approx \begin{cases} e^{-\beta N^2 \phi_I(z)} & \text{pour } 0 < z \leq z_1(q) \\ e^{-\beta N^2 \phi_{II}(z)} & \text{pour } z_1(q) < z \leq z_2(q) \\ e^{-\beta N^{1+\frac{1}{q}} \psi_{III}(z)} & \text{pour } z > z_2(q) \end{cases} \quad (9.78)$$

où les fonctions de scaling sont reliées aux fonctions de scaling pour  $\Sigma_q$  par :

$$\phi_{I,II}(z) = \Phi_{I,II}(e^{(q-1)z}) \quad , \quad \psi_{III}(z) = \Phi_{III}(e^{(q-1)z}) \quad (9.79)$$

où l'expression explicite de  $\Phi_I$  et  $\Phi_{II}$  est donnée Eq. (9.35) et (9.40) pour  $q = 2$ , et Eq. (9.44) pour  $q > 1$  général ; l'expression explicite de  $\Psi_{III}$  est donnée Eq. (9.74) pour  $q > 1$  général (et Eq. (9.64) pour  $q = 2$ ). De même, les points de transition sont donnés par :

$$z_1(q) = \frac{\ln s_1(q)}{q-1} \quad \text{et} \quad z_2(q, N) = \frac{\ln s_2(q, N)}{q-1} \quad (9.80)$$

où  $s_1$  et  $s_2$  sont les points de transition pour  $\Sigma_q$  (voir Eqs. (9.32) et (9.37)).

Qualitativement, la distribution de  $S_q$  a le même comportement que la distribution de  $\Sigma_q$ . En particulier c'est une **distribution très piquée pour  $N$  grand** comme le montre (9.78), ainsi sa **moyenne** est donnée par sa valeur la plus probable comme pour  $\Sigma_q$  :

$$\langle S_q \rangle = \ln N - \bar{z}(q) + o(1) \quad \text{où} \quad \bar{z}(q) = \frac{\ln \bar{s}(q)}{q-1} = \frac{1}{q-1} \ln \left[ \frac{\Gamma(q+1/2)}{\Gamma(q+2)} \frac{4^q}{\sqrt{\pi}} \right] \quad (9.81)$$

Comme la distribution de  $\Sigma_q$ , la distribution de  $S_q$  a un comportement **gaussien au voisinage de sa moyenne** :

$$\mathcal{P}(S_q = \ln N - z) \approx \exp \left\{ -\beta N^2 \frac{(z - \bar{z}(q))^2}{q} \right\} \quad \text{pour } z \approx \bar{z}(q) \quad (9.82)$$

et la distribution étant très piquée, la **variance de  $S_q$**  est donnée à l'ordre dominant en  $N$  par la variance de la gaussienne près de  $\langle S_q \rangle$  (seul compte le voisinage de la moyenne quand  $N$  grand, les queues ont un poids négligeable) :

$$\text{Var } S_q \sim \frac{q}{2\beta N^2} \quad \text{pour } N \gg 1 \quad (9.83)$$

La distribution de  $S_q$  est gaussienne au voisinage de sa moyenne mais a des queues non gaussiennes décrites par les grandes déviations  $\phi_{I,II}$  et  $\psi_{III}$  (9.78).

### 9.3.2 Entropie de von Neumann $S_{VN}$

On rappelle que la limite  $q \rightarrow 1$  de l'entropie de Renyi donne l'entropie de von Neumann :

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q = S_{VN} = - \sum_i \lambda_i \ln \lambda_i \quad (9.84)$$



On notera que la limite  $q \rightarrow 1$  est singulière pour la distribution de  $\Sigma_q$ . En effet, à cause de la contrainte  $\Sigma_1 = \sum_i \lambda_i = 1$ , la distribution tend vers une fonction  $\delta$  de Dirac. La variance de  $\Sigma_q$  tend ainsi vers 0 ( $\sigma_q^2 \rightarrow 0$ ) et la valeur moyenne  $\bar{s}(q)$  de même que les points de transition  $s_1(q)$  et  $s_2(q)$  convergent tous vers 1. Cependant, grâce au facteur  $1/(1-q)$  dans la définition de  $S_q = \frac{1}{1-q} \ln \Sigma_q$ , la limite  $q \rightarrow 1$  n'est pas singulière pour l'entropie  $S_q$ . Il faut seulement être prudent pour calculer correctement cette limite  $q \rightarrow 1$ .

En prenant la limite  $q \rightarrow 1$  dans (9.78), sans oublier que les fonctions de scaling  $\Phi_{I,II}$  et  $\Psi_{III}$  donc  $\phi_{I,II}$  et  $\psi_{III}$  (9.79) dépendent de  $q$ , j'ai pu montrer que la **distribution de l'entropie de von Neumann**  $S_{VN}$  à  $N \gg 1$  présente aussi trois régimes, mais avec un scaling en  $N$  un peu différent :

$$\mathcal{P}(S_{VN} = \ln N - z) \approx \begin{cases} e^{-\beta N^2 \phi_I(z)} & \text{pour } 0 < z \leq z_1 \\ e^{-\beta N^2 \phi_{II}(z)} & \text{pour } z_1 < z \leq z_2 \\ e^{-\beta \frac{N^2}{\ln N} \phi_{III}(z)} & \text{pour } z > z_2 \end{cases} \quad (9.85)$$

où  $\phi_{II}$  et  $\phi_{III}$  sont donnés ci-dessous Eq. (9.88) et (9.92). Je n'ai pas pu calculer explicitement  $\phi_I$  (de même que je n'avais pas pu calculer explicitement  $\Phi_I$  pour  $\Sigma_q$  pour un  $q > 1$  sauf pour  $q = 2$ ).

Les **points de transition** sont obtenus comme la limite des points de transition  $s_{1,2}(q)$  quand  $q \rightarrow 1$ . Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , on trouve :

$$z_1 = \frac{2}{3} - \ln \frac{3}{2} = 0.26... \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{2} + o(1) \quad (9.86)$$

La distribution de  $S_{VN}$  est à nouveau **très piquée** pour  $N$  grand autour de sa moyenne -qui est donc sa valeur la plus probable. La limite  $q \rightarrow 1$  donne  $\bar{z} = \lim_{q \rightarrow 1} \bar{z}(q)$  où  $\bar{z}(q) = \frac{\ln \bar{s}(q)}{q-1}$  donc  $\bar{z} = 1/2$  (cf (9.81)). On retrouve donc la **moyenne** attendue dans le cas  $c = 1$  ( $M \approx N$ ) :

$$\langle S_{VN} \rangle = \ln N - \frac{1}{2} + o(1) \quad \text{pour } N \text{ grand} \quad (9.87)$$

Pour le régime **II**, la fonction de scaling  $\phi_{II}$  s'obtient facilement avec la limite  $q \rightarrow 1$  dans (9.79). On obtient :

$$\phi_{II}(z) = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{L}{4} \right) + \frac{8}{L^2} - \frac{6}{L} + 1 \quad (9.88)$$

où  $L = L(z)$  est solution de (cf la limite  $q \rightarrow 1$  dans Eq. (9.43))

$$\ln \left( \frac{L}{4} \right) - \frac{L}{8} + 1 = z \quad (9.89)$$

Pour  $N$  grand, la valeur moyenne de  $S_{VN}$  est donnée par sa valeur la plus probable, donc le minimum de la fonction de scaling, soit ici le minimum de  $\phi_{II}$  :  $\bar{z} = 1/2$ . Le

comportement quadratique de  $\phi_{II}$  près de son minimum  $z \approx \bar{z}$  donne le comportement gaussien de  $\mathcal{P}(\Sigma_{VN})$  et donc la **variance** de  $S_{VN}$  dans la limite  $N$  grand. Finalement :

$$\boxed{\langle S_{VN} \rangle = \ln N - \frac{1}{2} + o(1) \quad , \quad \text{Var } S_{VN} \sim \frac{1}{2\beta N^2}} \quad (9.90)$$

Pour le régime **III**, la limite  $q \rightarrow 1$  est plus subtile. On s'attendrait à une grande déviation de la forme  $N^2\psi_{III}(z)$ , mais  $\psi_{III} = \Psi_{III}(e^{(q-1)z})$  où  $\Psi_{III}(s) = (s - \bar{s}(q))^{1/q}/2$  tend identiquement vers 0 quand  $q \rightarrow 1$ . La grande déviation se comporte en fait comme  $N^2/\ln N$  au lieu de  $N^2$  comme on pourrait s'y attendre naïvement pour  $q \rightarrow 1$ . J'ai pu en effet montrer grâce à une analyse détaillée des équations (9.71) et (9.72) dans la limite  $q \rightarrow 1$  que la solution  $t \gg \zeta$  est donnée pour  $q \rightarrow 1$  par :

$$t \sim \frac{z - 1/2}{\ln N} \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{4}{N} \left( 1 + \frac{1-z}{\ln N} + \dots \right) \quad (9.91)$$

J'ai aussi pu calculer l'énergie de point col dans cette limite et j'ai obtenu :

$$\mathcal{P}(S_{VN} = \ln N - z) \approx e^{-\beta \frac{N^2}{\ln N} (z-1/2)}; \quad \phi_{III}(z) = z - \frac{1}{2} \quad (9.92)$$

### 9.3.3 Valeur propre maximale

Quand  $q \rightarrow \infty$ , l'entropie de Renyi  $S_q$  tend vers  $-\ln \lambda_{\max}$  où  $\lambda_{\max}$  est la valeur propre maximale de  $\rho_A$ . Comme la limite  $q \rightarrow 1$ , cette limite est singulière pour  $\Sigma_q$  mais pas pour  $S_q$ . La distribution de  $\lambda_{\max}$  présente à nouveau dans la limite  $N$  grand trois régimes, issus des trois régimes de la distribution de  $\Sigma_q$ .

Pour  $N$  grand, les scaling typique est  $S_q \approx \ln N - z$ , d'où  $-\ln \lambda_{\max} \approx \ln N - z$  soit  $\lambda_{\max} \approx \frac{e^z}{N}$ . On pose  $t = e^z$  :

$$\lambda_{\max} = \frac{t}{N} \quad (9.93)$$

En particulier la valeur moyenne de la valeur propre maximale  $\lambda_{\max}$  est donnée par  $\bar{t}/N$  où  $\bar{t} = \lim_{q \rightarrow \infty} \exp(\bar{z}(q)) = \lim_{q \rightarrow \infty} [\bar{s}(q)]^{\frac{1}{q-1}} = 4$ , soit :

$$\langle \lambda_{\max} \rangle \approx \frac{4}{N} \quad (9.94)$$

J'ai pu montrer que la **distribution de**  $\lambda_{\max}$  est donnée par :

$$\boxed{\mathcal{P} \left( \lambda_{\max} = \frac{t}{N} \right) \approx \begin{cases} e^{-\beta N^2 \chi_I(t)} & \text{pour } 1 < t \leq 4/3 \text{ (rég. I)} \\ e^{-\beta N^2 \chi_{II}(t)} & \text{pour } 4/3 < t \leq 4 \text{ (rég. II)} \\ e^{-\beta N \chi_{III}(t)} & \text{pour } t > 4 \text{ (rég. III)} \end{cases}} \quad (9.95)$$

Les points de transition sont en effet  $t_1 = \lim_{q \rightarrow \infty} [s_1(q)]^{\frac{1}{q-1}} = 4/3$  et  $t_2 = \bar{t} = 4$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$ .

Dans ce cas les fonctions de scaling peuvent être toutes les trois calculées explicitement. Dans le régime **I** j'ai pu montrer par une méthode indépendante, cf ci-dessous (je n'avais pas pu calculer  $\Phi_I$  pour  $q > 1$  quelconque), que :

$$\chi_I(t) = -\frac{1}{2} \ln(t-1) \quad \text{pour } 1 < t \leq 4/3 \quad (9.96)$$

Dans le régime **II**, la limite  $q \rightarrow \infty$  donne :

$$\chi_{II}(t) = 4 \frac{(1-t)}{t^2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{t}{4}\right) + \frac{3}{4} \quad \text{pour } 4/3 < t \leq 4 \quad (9.97)$$

Enfin dans le régime **III**, la valeur propre maximale se détache des autres valeurs propres et on obtient :

$$\chi_{III}(t) = \frac{\sqrt{t(t-4)}}{2} - 2 \ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-4}) + 2 \ln 2 \quad \text{pour } t > 4 \quad (9.98)$$

Comme pour  $\Sigma_q$ , au premier point de transition  $t_1 = 4/3$ , la fonction de scaling  $\chi$  est continue deux fois dérivable mais sa dérivée troisième est discontinue :  $\frac{d^3\chi_I}{dt^3} = -27$  mais  $\frac{d^3\chi_{II}}{dt^3} = -999/64$ . La valeur moyenne  $\bar{t} = 4$  correspond au minimum de  $\chi_{II}$  (maximum de probabilité). Au second point de transition  $t_2 = 4$ , la fonction de scaling est continue mais pas dérivable.

Comme on l'a fait pour  $\Sigma_q$ , on peut aussi considérer la queue extrême droite de la distribution décrite par  $\lambda_{\max} = T$  ( $T \gg t/N$ ) :

$$\mathcal{P}(\lambda_{\max} = T) \approx e^{-\beta N^2 \chi_+(T)}, \quad \chi_+(T) = -\frac{1}{2} \ln(1-T) \quad \text{pour } 0 < T < 1 \quad (9.99)$$

qui se recolle de façon continue avec le régime **III**. En effet  $N\chi_{III}(t) \sim N\frac{t}{2}$  quand  $t \rightarrow \infty$  et  $N^2\chi_+(t) \sim N^2\frac{T}{2} \sim N\frac{t}{2}$  quand  $T \rightarrow 0$  où  $T = t/N$ .

### Preuve des équations (9.96), (9.97) et (9.98)

Les régimes **II** et **III** peuvent être obtenus en prenant précautionneusement la limite  $q \rightarrow \infty$  (directement dans l'expression de  $\phi_{II}$  pour le régime **II** mais de façon plus subtile dans le régime **III**). La distribution de  $\lambda_{\max}$  peut aussi être calculée directement par la méthode du gaz de Coulomb (sans prendre de limite  $q \rightarrow \infty$ ). Cela redonne les mêmes résultats que la limite  $q \rightarrow \infty$  pour les régimes **II** et **III** et donne de plus une expression explicite pour le régime **I** où je n'avais pas pu calculer la fonction de scaling pour un  $q > 1$  général.

En fait l'idée est de calculer directement la **distribution cumulative**  $\mathbb{P}(\lambda_{\max} \leq Z)$  par la méthode de **gaz de Coulomb**. Il est en effet plus facile de calculer la probabilité que  $\lambda_{\max} \leq Z$  qui est la probabilité que toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  soient plus petites que  $Z$ . On peut donc calculer cette probabilité avec le gaz de Coulomb décrit par une densité continue  $\rho(x) = 1/N \sum_i \delta(x - \lambda_i N)$  dans les régimes **I** et **II** et avec la contrainte qu'aucune valeur propre ne dépasse  $Z$ . C'est le même raisonnement que le calcul de la distribution de  $\lambda_{\max}$  pour une matrice gaussienne, sauf qu'on a une contrainte en plus,

$\sum_i \lambda_i = 1$ . La même démarche permet de calculer la probabilité par méthode du col. Dans les régimes **I** et **II**, cela donne :

$$\mathbb{P}(\lambda_{\max} \leq Z) \propto e^{-\beta N^2 E_Z[\rho_c]} \quad (9.100)$$

où  $\rho_c$  est la densité qui minimise l'énergie effective (après avoir pris en compte les contraintes) :

$$E_Z[\rho] = -\frac{1}{2} \int_0^Z \int_0^Z \rho(x)\rho(x') \ln|x-x'| dx dx' + \mu_0 \left( \int_0^Z \rho(x) dx - 1 \right) + \mu_1 \left( \int_0^Z x\rho(x) dx - 1 \right) \quad (9.101)$$

où les multiplicateurs de Lagrange  $\mu_{0,1}$  servent à prendre en compte les contraintes  $\int \rho = 1$  et  $\int x\rho = 1$  ( $\sum_i \lambda_i = 1$ ).

Dans le régime **III**, une charge (valeur propre maximale) se détache des autres charges, il faut en tenir compte séparément (en dehors de la densité continue).

Dans le régime **I**, la densité optimale  $\rho_c$  a un support  $[L_1, L_2]$  et s'annule en  $L_{1,2}$  (comme pour  $\Sigma_q$ ). On obtient ainsi la fonction de scaling  $\chi_I$  (9.96).

Dans le régime **II**, la densité optimale a un support  $]0, L]$ , s'annule en  $L$  mais diverge à l'origine (comme pour  $\Sigma_q$ ). On obtient ainsi la fonction de scaling  $\chi_{II}$  (9.97). Cette expression peut aussi s'obtenir avec la limite  $q \rightarrow \infty$  dans (9.44) de  $\Phi_{II}$  valable pour un  $q$  général (pour  $\Sigma_q$ ).

Dans le régime **III**, la valeur propre maximale est séparée des autres et on obtient  $\chi_{III}$  (9.98).

D'un autre côté, la limite  $q \rightarrow \infty$  pour  $\psi_{III}$  donne :  $\psi_{III} \rightarrow t/2$ . Elle est égale à  $\chi_{III}(t)$  seulement dans la limite  $t \rightarrow \infty$ , mais pas pour tout  $t > 4$ . Pour  $q > 1$ , le régime **III** est en fait caractérisé par  $t \sim T/N^{1-\frac{1}{q}} \gg \zeta$  quand  $\zeta \sim L/N$ , ce qui devient  $t \sim T/N > \zeta$  quand  $q \rightarrow \infty$ . La valeur propre maximale est alors plus grande que les autres valeurs propres et bien séparée de la densité continue, mais elle n'est pas beaucoup plus grande. On ne peut donc plus supposer  $t \gg \zeta$  dans le calcul de l'énergie de point col. On doit donc revenir à  $E_S[\rho_c, t]$  et la calculer précisément dans ce cas. Il faut utiliser l'expression complète de  $E_S$  : pour  $q = 2$ , l'expression était donnée Eq. (9.58) ; pour un  $q$  général, on obtient une expression similaire mais plus compliquée. J'ai utilisé cette expression quand  $t$  et  $\zeta$  sont du même ordre (avec  $t > \zeta$ ) et pour  $q \rightarrow \infty$ . Finalement j'ai bien retrouvé  $\chi_{III}(t)$  (9.98).

### 9.3.3.1 Fluctuations typiques près de la moyenne : Tracy Widom

On a vu que la moyenne de  $\lambda_{\max}$  est donnée pour  $N$  grand par  $\langle \lambda_{\max} \rangle \sim 4/N$ . La méthode du gaz de **Coulomb** nous a permis d'obtenir les **grandes déviations** de la distribution, c'est à dire les fluctuations d'ordre  $1/N$  autour de cette moyenne  $4/N$ , des fluctuations du même ordre que la moyenne elle-même. La probabilité de ces fluctuations est très faible comme on l'a vu (distribution très piquée, exponentielle en  $N$ ), ces fluctuations décrivent des **événements rares, atypiques**.

Les **fluctuations typiques près de la moyenne** doivent correspondre à une échelle beaucoup plus fine près de la moyenne, qui ne peut pas être atteinte par la méthode du

gaz de Coulomb. On peut toutefois obtenir ces fluctuations en se ramenant aux **matrices aléatoires**. On commence avec la distribution des valeurs propres. La distribution cumulative de  $\lambda_{\max}$  est par définition :

$$\mathbb{P}(\lambda_{\max} \leq Z) \propto \int_0^Z \dots \int_0^Z \mathcal{P}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_N \quad (9.102)$$

On remplace alors la fonction  $\delta\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i - 1\right)$  par sa représentation intégrale :  $\delta(x) = (1/2\pi i) \int dp e^{px}$  où l'intégrale est faite sur l'axe imaginaire pur. D'où, pour  $M = N$  ( $c = 1$ ),

$$\mathbb{P}(\lambda_{\max} \leq Z) \propto \int \frac{dp}{2\pi i} e^p \int_{[0, Z]} \left[ \prod_{i=1}^N d\lambda_i \right] e^{-p \sum_{i=1}^N \lambda_i} \prod_{i=1}^N \lambda_i^{\frac{\beta}{2}-1} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \quad (9.103)$$

Après changement de variables  $\lambda_i \rightarrow (\beta/2p)\lambda_i$ , on trouve :

$$\mathbb{P}(\lambda_{\max} \leq Z) \propto \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^p p^{-\beta N^2/2} \int_{[0, 2pZ/\beta]} \left[ \prod_{i=1}^N d\lambda_i \right] e^{-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i} \prod_{i=1}^N \lambda_i^{\frac{\beta}{2}-1} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \quad (9.104)$$

L'intégrale sur les  $\lambda_i$  est maintenant simplement proportionnelle à la distribution cumulative de la valeur propre maximale d'une matrice de **Wishart**  $\mathbb{P}^{Wishart}(\lambda_{\max} \leq 2pZ/\beta)$ . Or on sait que pour  $N$  grand cette quantité tend vers une distribution de **Tracy-Widom**  $\beta$  soit :

$$\mathbb{P}^{Wishart}(\lambda_{\max} \leq y) \rightarrow \mathcal{F}_\beta \left[ \frac{(y - 4N)}{2^{4/3} N^{1/3}} \right] \quad \text{pour } \beta = 1, 2 \quad (9.105)$$

où  $F_\beta(x)$  est la distribution de Tracy-Widom  $\beta$ . Utilisant ce résultat dans (9.104), on trouve pour  $N$  grand :

$$\mathbb{P}(\lambda_{\max} \leq Z) \propto \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{p - \frac{\beta}{2} N^2 \log(p)} F_\beta \left[ \frac{\frac{2p}{\beta} Z - 4N}{2^{4/3} N^{1/3}} \right] \quad (9.106)$$

L'intégrale sur  $p$  peut alors être calculée par la méthode du col. A l'ordre dominant en  $N$ , le point col correspond à  $p^* = \beta N^2/2$  qui minimise  $e^{p - \frac{\beta}{2} N^2 \log(p)}$ . Ainsi à l'ordre dominant en  $N$  on obtient :

$$\mathbb{P}(\lambda_{\max} \leq Z) \sim F_\beta \left[ \frac{Z - 4/N}{2^{4/3} N^{-5/3}} \right] \quad (9.107)$$

La **valeur propre maximale**  $\lambda_{\max}$  dans notre problème quantique (pour lequel  $\beta = 2$ ) fluctue donc sur une **échelle d'ordre**  $N^{-5/3}$  autour de sa moyenne  $4/N$ ,

$$\left( \lambda_{\max} - \frac{4}{N} \right) \sim 2^{4/3} N^{-5/3} \chi_\beta \quad \text{quand } N \rightarrow \infty \quad (9.108)$$

où la distribution cumulative de la variable aléatoire  $\chi_\beta$  est la **loi de Tracy-Widom**  $\beta = 2$ , ie  $\mathbb{P}(\chi_2 \leq x) = \mathcal{F}_2(x)$ . Sa densité de probabilité est donc  $g_2(x) = \frac{d\mathcal{F}_2(x)}{dx}$ . D'où :

$$\mathcal{P} \left( \lambda_{\max} = \frac{t}{N} \right) \sim N^{5/3} g_2(2^{-4/3} N^{2/3}(t - 4)) \quad (9.109)$$

### Recollement Tracy-Widom et les grandes déviations

On peut montrer que les grandes déviations de la distribution de  $\lambda_{\max}$  se recollent bien avec la distribution de Tracy-Widom intérieure, comme pour les matrices gaussiennes et de Wishart.

Pour la queue gauche de Tracy-Widom  $g_\beta(x) \approx \exp\left\{-\frac{\beta}{24}|x|^3\right\}$  pour  $x \rightarrow -\infty$ . D'où  $\mathcal{P}\left(\lambda_{\max} = \frac{t}{N}\right) \approx \exp\left\{-\beta N^2 \frac{|t-4|^3}{384}\right\}$ . D'un autre côté, la grande déviation à gauche de la moyenne qui décrit les fluctuations d'ordre  $1/N$  est donnée par (9.97). La limite  $t \rightarrow 4^-$  donne :  $\chi_{II}(t) \sim -\frac{(t-4)^3}{384}$ , la grande déviation à gauche de la moyenne se recolle donc bien près de la moyenne avec la queue gauche de Tracy-Widom.

Pour la queue droite :  $g_\beta(x) \approx \exp\left\{-\frac{2\beta}{3}x^{3/2}\right\}$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . D'où  $\mathcal{P}\left(\lambda_{\max} = \frac{t}{N}\right) \approx \exp\left\{-\beta N \frac{(t-4)^{3/2}}{6}\right\}$ . D'un autre côté, la grande déviation à droite est donnée par (9.98).

Pour  $t \rightarrow 4^+$ , on trouve :  $\chi_{III}(t) \sim \frac{(t-4)^{3/2}}{6}$  qui se recolle bien avec la queue droite de Tracy-Widom.



## - Chapitre 10 -

# Mélange statistique aléatoire : mesure de Bures

Je m'intéresse dans ce chapitre aux états **mélanges statistiques** (matrices densités  $\rho$ ) **aléatoires** distribués selon la **mesure de Bures**, voir section 8.2.2.2. On se place dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimension  $N$ . La mesure de Bures sur les matrices densité  $\rho$  sur  $\mathcal{H}$  (de taille  $N \times N$ ) correspond au volume associé à la distance de Bures définie par Eq. (8.15) :

$$D_B(\rho, \sigma)^2 = 2 - 2\sqrt{F(\rho, \sigma)} \quad \text{où} \quad \sqrt{F(\rho, \sigma)} = \text{Tr} \left\{ [\sqrt{\sigma}\rho\sqrt{\sigma}]^{1/2} \right\} \quad (10.1)$$

Pour une matrice densité  $\rho$  aléatoire tirée selon la mesure de Bures, ses **valeurs propres**  $\lambda_i$  sont distribuées selon la loi jointe Eq. (8.25) :

$$\mathcal{P}_B(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = C_N \frac{\delta(\sum_i \lambda_i - 1)}{\prod_i \lambda_i^{1/2}} \prod_{j < k} \frac{(\lambda_j - \lambda_k)^2}{\lambda_j + \lambda_k}, \quad \lambda_i \geq 0, \forall i \quad (10.2)$$

Cette distribution est très différente de celle des valeurs propres d'un mélange statistique aléatoire de **Hilbert-Schmidt** que l'on a étudié dans le chapitre précédent, cf Eq. (9.8) avec  $M = N$ . Les matrices densité aléatoires de Hilbert-Schmidt constituent ce qu'on appelle l'ensemble corrélé aléatoirement, cf section 8.2.1 et Eq. (8.8).

Au chapitre précédent 9, j'ai présenté le calcul de la distribution de l'entropie généralisée  $\Sigma_q = \sum_i \lambda_i^q$  pour des états aléatoires de Hilbert-Schmidt, ie quand les valeurs propres  $\lambda_i$  sont distribuées comme (9.8) avec  $M = N$ . Dans ce chapitre, je présente des résultats que j'ai obtenus récemment (et qui ne sont pas encore publiés) sur la **distribution de la pureté**  $\Sigma_2 = \sum_i \lambda_i^2$  **pour des états aléatoires de Bures**, c'est-à-dire pour des valeurs propres  $\lambda_i$  distribuées selon Eq. (10.2).

Commençons par une remarque sur les valeurs propres de Bures. La distribution (10.2) peut se récrire :

$$\mathcal{P}_B(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = D_N \delta \left( \sum_i \lambda_i - 1 \right) \frac{\prod_{j < k} (\lambda_j - \lambda_k)^2}{\prod_{j,k} (\lambda_j + \lambda_k)^{1/2}} \quad (10.3)$$



avec  $D_N = C_N 2^{N/2}$ . Cette distribution de valeurs propres peut en fait aussi être obtenue par un **modèle à deux matrices aléatoires** comme expliqué par Osipov et al [OSŻ10]. Ils montrent en effet que la densité de probabilité des matrices densité aléatoires de Bures  $\sigma$  peut s'écrire comme une double intégrale de matrices :

$$\mathcal{P}_B(\rho) \propto \int dA \int dH e^{-\text{Tr}[AA^\dagger + H^2 AA^\dagger]} \delta\left(\rho - \frac{AA^\dagger}{\text{Tr}AA^\dagger}\right) \quad (10.4)$$

où  $A$  est une matrice  $N \times N$  et  $H$  une matrice hermitienne  $N \times N$ .

Il est intéressant de noter que la distribution des valeurs propres de Bures (10.3) est aussi la même distribution que celle des valeurs propres du **modèle de matrice  $O(n)$  pour le cas  $n = 1$**  (dans ce cas le modèle  $O(n)$  est un modèle à deux matrices) avec seulement en plus la contrainte  $\sum_i \lambda_i = 1$ . Le modèle  $O(n)$  introduit initialement par I. Kostov [Kos89] est défini par sa fonction de partition  $Z$  qui s'écrit sous forme d'une intégrale de matrice :

$$Z = \int dM dA_1 \dots dA_n e^{-\frac{N}{g} \text{Tr}[V(M) + M(A_1^2 + \dots + A_n^2)]} \quad (10.5)$$

où les matrices  $M$  et  $A_i$  sont des matrices hermitiennes de taille  $N \times N$  et  $V(M)$  est un potentiel polynomial. L'intégrale gaussienne sur les matrices  $A_i$  peut être calculée. Ensuite  $M$  peut être paramétrisée par une transformation unitaire et ses valeurs propres et l'intégrale sur la matrice unitaire peut se calculer. Finalement  $Z$  devient une intégrale sur les valeurs propres  $\lambda_i$  :

$$Z = \int \prod_i d\lambda_i \frac{\prod_{j < k} (\lambda_j - \lambda_k)^2}{\prod_{j,k} (\lambda_j + \lambda_k)^{n/2}} e^{-\frac{N}{g} \sum_i V(\lambda_i)} \quad (10.6)$$

Sous cette forme le modèle peut être étendu à  $n$  réel (non nécessairement entier). Pour le cas particulier d'un potentiel linéaire  $V(\lambda) = \lambda$  et pour  $n = 1$  (modèle à deux matrices  $M$  et  $A_1$ ), si on ajoute la contrainte  $\sum_i \lambda_i = 1$ , on retrouve la distribution des valeurs propres de Bures Eq. (10.3).

Je présente dans ce chapitre des résultats que j'ai obtenus très récemment (c'est encore un travail en cours non publié pour le moment) sur la **distribution de la pureté  $\Sigma_2 = \sum_i \lambda_i^2$  pour des états de Bures**. La technique utilisée est celle du gaz de Coulomb. Les équations intégrales auxquelles elle conduit sont trop compliquées pour se résoudre simplement par le théorème de Tricomi. Il faut pour les résoudre faire appel à des techniques d'analyse complexe comme présentées dans le contexte du processus de Pearcey, voir section 6.3 et 6.4.

## 10.1 DENSITÉ MOYENNE DES VALEURS PROPRES

Le point de départ est la distribution jointe des valeurs propres de Bures Eq. (10.2). On s'intéresse d'abord à la densité moyenne des valeurs propres.

### 10.1.1 Densité moyenne

Dans un de leurs articles [SZ04], Sommers and Życzkowski donnent (mais sans expliquer comment ils l'obtiennent) l'expression de la **densité moyenne des valeurs propres de Bures**  $\rho_N(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \delta(\lambda - \lambda_i) \rangle$ . La quantité  $\rho_N(\lambda)d\lambda$  est la probabilité de trouver une valeur propre entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$ .  $\rho_N(\lambda)$  est simplement la distribution marginale d'une valeur propre  $\lambda$ . Pour un état de Bures aléatoire, ie une matrice densité  $\rho$  de valeurs propres  $\lambda_i$  distribuées selon (10.2), la densité moyenne est donnée par

$$\rho_N(\lambda) \sim N\rho^*(\lambda N) \quad \text{quand } N \rightarrow \infty \quad (10.7)$$

où la densité adimensionnée  $\rho^*$  est indépendante de  $N$  pour  $N \gg 1$  et a un support fini  $]0, L]$  avec  $L = 3\sqrt{3}$ , elle est explicitement donnée par

$$\rho^*(x) = \frac{1}{4\pi\sqrt{3}} \left\{ \left( \frac{L}{x} + \sqrt{\frac{L^2}{x^2} - 1} \right)^{2/3} - \left( \frac{L}{x} - \sqrt{\frac{L^2}{x^2} - 1} \right)^{2/3} \right\} \quad (10.8)$$

Le **scaling** de la densité pour  $N \gg 1$  donné Eq. (10.7) était attendu car une valeur propre typique se comporte comme  $\lambda_{\text{typ}} \sim 1/N$  pour  $N \gg 1$  à cause de la contrainte  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$  (exactement comme dans le cas de Hilbert-Schmidt, cf Eq. (9.11)).

On notera que la densité moyenne (10.8) est à **support**  $]0, L]$ , qu'elle s'annule en  $L$  comme  $\sqrt{L-x}$  et diverge en 0 comme  $x^{-2/3}$ . Cette divergence en  $x^{-2/3}$  à l'origine est spécifique au cas de Bures, dans le cas de Hilbert-Schmidt la divergence de la densité moyenne à l'origine est en  $1/\sqrt{x}$ , cf (9.15).

L'expression de la densité peut être obtenue par méthode de gaz de Coulomb et grâce à la **solution de Bueckner** pour les équations intégrales du modèle  $O(n)$  expliquée dans le contexte du processus de Pearcey section 6.3 dans le cas où  $g(x)$  est polynomial, et section 10.2.4 dans le cas général. De façon équivalente on peut utiliser ma méthode (par Tricomi généralisé) cf section 6.4, qui fonctionne pour  $g(x)$  quelconque. Le cas de la mesure de Bures correspond comme le processus de Pearcey au cas  $n = 1$  ie  $\gamma = 1$  dans Eq. (6.56). C'est pourquoi on retrouve des puissances  $1/3$  dans l'expression de la densité. Il y a seulement ici en plus la contrainte  $\sum_i \lambda_i = 1$ .

### 10.1.2 Dérivation de l'expression de la densité

Je montre ici comment obtenir l'expression de la densité moyenne (10.8) par méthode de gaz de Coulomb et avec la solution de Bueckner expliquée section 6.3.

La distribution jointe des valeurs propres de Bures  $\mathcal{P}_B(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  est donnée Eq. (10.2) et peut être vue comme un **poids de Boltzmann** :

$$\mathcal{P}_B(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \propto e^{-E\{\lambda_i\}} \quad (10.9)$$

où l'énergie effective associée est

$$E\{\{\lambda_i\}\} = - \sum_{j \neq k} \ln |\lambda_j - \lambda_k| + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \ln |\lambda_j + \lambda_k| \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \quad (10.10)$$

Les  $\lambda_i$  interagissent avec une interaction logarithmique de type Coulomb à  $2D$ . Ce sont les “charges” d’un **gaz de Coulomb**  $2D$  modifié (avec interaction coulombienne usuelle  $\ln|\lambda_i - \lambda_j|$  et interaction miroir  $\ln|\lambda_i + \lambda_j|$ ), contraintes de rester sur une ligne ( $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ ).

Du fait de la contrainte  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ , on s’attend typiquement à  $\lambda_i \asymp 1/N$  quand  $N \rightarrow \infty$ . On définit alors la densité adimensionnée  $\rho(x)$  :

$$\rho(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - \lambda_i N) \quad (10.11)$$

Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , on s’attend à ce que la densité  $\rho(x)$  tende vers une limite finie continue.

L’énergie effective devient alors une fonctionnelle de  $\rho$ , dans la limite continue  $N \rightarrow \infty$  on a donc :

$$\mathcal{P}_B(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \propto e^{-N^2 E[\rho] + o(N^2)} \quad (10.12)$$

où l’énergie effective  $E[\rho]$  est donnée par :

$$E[\rho] = - \int_0^\infty \int_0^\infty dx dx' \rho(x) \rho(x') \ln|x - x'| + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty dx dx' \rho(x) \rho(x') \ln|x + x'| \quad (10.13)$$

Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , la densité (adimensionnée) moyenne est donnée par la densité  $\rho^*(x)$  qui minimise l’énergie  $E[\rho]$  (10.13) avec contraintes  $\int \rho = 1$  et  $\int x\rho = 1$ , soit :

$$\left. \frac{\partial [E[\rho] + \mu_0(\int dx' \rho(x') - 1) + \mu_1(\int dx' x' \rho(x') - 1)]}{\partial \rho(x)} \right|_{\rho^*} = 0 \quad (10.14)$$

où les termes avec multiplicateurs de Lagrange  $\mu_{0,1}$  permettent de prendre en compte les contraintes : normalisation de la densité ( $\int \rho = 1$ ) et  $\sum_i \lambda_i = 1$  ( $\int x\rho = 1$ ). Eq. (10.14) se récrit :

$$\int_0^\infty dx' \rho^*(x') \ln|x - x'| - \frac{1}{2} \int_0^\infty dx' \rho^*(x') \ln|x + x'| = \frac{\mu_0}{2} + \frac{\mu_1}{2} x \equiv V(x) \quad (10.15)$$

$V(x)$  joue le rôle d’un potentiel externe pour les charges  $\lambda_i$ . En dérivant par rapport à  $x$  on obtient :

$$\int_0^\infty dx' \frac{\rho^*(x')}{x - x'} - \frac{1}{2} \int_0^\infty dx' \frac{\rho^*(x')}{x + x'} = \frac{\mu_1}{2} = V'(x) \quad (10.16)$$

La solution  $\rho^*(x)$  doit avoir un support fini. On suppose que le support est  $[0, L]$ , dans ce cas on sait résoudre avec la méthode de Bueckner (cf section 6.3) ou par méthode avec équations de Tricomi généralisées (cf section 6.4). On impose ensuite les contraintes et on vérifie que la solution obtenue est bien physique. C’est bien la solution attendue  $\rho^*(x)$ .

On applique la méthode de Bueckner expliquée section 6.3 à notre cas particulier avec  $g(x)$  polynomial ( $g(x)$  constant en fait) :

$$\gamma = \frac{1}{2}, \quad \mu = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{\mu_1}{2} \quad (10.17)$$

On détermine d'abord la fonction  $\phi(z) = \int_0^L dt \frac{\rho^*(t)}{t-z}$  définie sur le plan complexe sauf sur le segment réel  $[0, L]$  où  $\phi$  a une coupure.  $\phi$  est de la forme  $\phi(z) = h(z) + \tilde{\phi}(z)$  où  $h$  est une solution particulière de  $\operatorname{Re}[\phi(x)] + \gamma \phi(-x) = g(x)$  pour  $x \in [0, L]$ , et où  $\tilde{\phi}$  est solution de l'équation homogène  $\operatorname{Re}[\phi(x)] + \gamma \phi(-x) = 0$ . Ici la solution particulière (6.62) est simplement une constante :

$$h(x) = -\frac{\mu_1}{3} \quad (10.18)$$

Il faut ensuite déterminer les polynômes  $A(z)$  et  $B(z)$ , cf (6.63) tels que  $\phi(z) = h(z) + \tilde{\phi}(z) = -\frac{\mu_1}{3} + A(z^2)\phi_0(z) + B(z^2)\phi_1(z)$  tende vers 0 quand  $z \rightarrow \infty$ . Quand  $z \rightarrow \infty$  on a d'après (6.69) :

$$\begin{aligned} \phi(z) = & -\frac{\mu_1}{3} + A(z^2) \left[ 1 - \mu \tan \left[ \frac{\mu\pi}{2} \right] \frac{L}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right] \\ & + B(z^2) \left[ \sin \left[ \frac{\mu\pi}{2} \right] \frac{z}{L} + \mu \cos \left[ \frac{\mu\pi}{2} \right] + O\left(\frac{1}{z}\right) \right] \end{aligned} \quad (10.19)$$

La condition  $\phi(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow \infty$  impose  $B \equiv 0$  (sinon  $B(z)$  serait un polynôme de degré  $m \geq 0$  et on aurait  $\phi(z) \geq O(z^{2m+1})$  quand  $z \rightarrow \infty$ ) et  $A(z^2) \equiv \frac{\mu_1}{3}$  est une constante. D'où, d'après (6.65)

$$\phi(z) = \frac{\mu_1}{3} (\phi_0(z) - 1) = \frac{\mu_1}{3} \left( 2 \cos \left[ \frac{2}{3} \left( w + \frac{\pi}{2} \right) \right] - 1 \right) \quad \text{avec} \quad \sin w = \frac{L}{z} \quad (10.20)$$

De plus comme la densité est normalisée à 1, ie  $\int \rho = 1$ , on a  $\phi(z) \sim -\frac{1}{z}$  quand  $z \rightarrow \infty$ . Donc  $-1 = -A(z^2) \mu \tan \left[ \frac{\mu\pi}{2} \right] L = -A(z^2) \frac{2}{\sqrt{3}} L$  pour  $\mu = 2/3$ , soit :

$$\mu_1 L = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (10.21)$$

Il y a une autre contrainte à imposer,  $\int dt t \rho(t) = 1$  (ie  $\sum_i \lambda_i = 1$ ). Quand  $z \rightarrow \infty$ , on trouve

$$\phi(z) = \int dt \frac{\rho(t)}{t-z} = -\frac{1}{z} \left[ \int dt \rho(t) + \int dt \rho(t) \frac{t}{z} + \dots \right] = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \dots \quad (10.22)$$

Comme d'autre part  $\phi_0(z) = 1 - \mu \tan \left[ \frac{\mu\pi}{2} \right] \frac{L}{z} - \frac{\mu^2 L^2}{2 z^2} + \dots$  quand  $z \rightarrow \infty$ , on obtient donc  $-1 = -\mu^2 L^2 A(z^2)/2$ , et :

$$\frac{2\mu_1}{27} L^2 = 1 \quad (10.23)$$

Finalement, en combinant les deux équations (10.21) et (10.23) on obtient :

$$L = 3\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \mu_1 = \frac{1}{2} \quad (10.24)$$

Reste à calculer explicitement la densité  $\rho^*(x) = \pi \operatorname{Im}[\phi(x)]$  pour  $x \in \mathcal{L}^+$ . Pour  $x \in \mathcal{L}^+$  (où  $\mathcal{L}^+ = \{x + i0^+ : x \in ]0, L[ \}$ ), on a  $w = \frac{\pi}{2} - i\eta$  avec  $\eta > 0$ , soit  $e^{\pm\eta} = \frac{L}{x} \pm \sqrt{\frac{L^2}{x^2} - 1}$ , cf Eq. (6.67). Finalement :

$$\rho^*(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}[\phi(x)] = \frac{\mu_1}{3\pi} \operatorname{Im}[(\phi_0(x) - 1)] = \frac{\mu_1}{2\pi\sqrt{3}} \left( e^{\frac{2\eta}{3}} - e^{-\frac{2\eta}{3}} \right) \quad (10.25)$$

soit

$$\rho^*(x) = \frac{1}{4\pi\sqrt{3}} \left[ \left( \frac{L}{x} + \sqrt{\frac{L^2}{x^2} - 1} \right)^{\frac{2}{3}} - \left( \frac{L}{x} - \sqrt{\frac{L^2}{x^2} - 1} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \text{ pour } x \in ]0, L] \quad (10.26)$$

On retrouve bien l'expression annoncée Eq. (10.8).

## 10.2 DISTRIBUTION DE LA PURETÉ

Je présente ici le calcul de la distribution de la pureté  $\Sigma_2 = \text{Tr}[\rho^2] = \sum_{i=1}^N \lambda_i^2$  à  $N$  grand par méthode de gaz de Coulomb. Ce travail que j'ai effectué tout récemment et qui n'est pas complètement terminé n'est pas encore publié.

La **pureté**  $\Sigma_2$  mesure à quel point l'état  $\rho = \sum_{i=1}^N \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|$  est pur. En particulier, on obtient les deux cas limites :

- Si une seule valeur propre, disons  $\lambda_{i_0}$  est non nulle, donc égale à 1, alors la pureté est maximale  $\Sigma_2 = 1$ . Dans ce cas l'état du système quantique est **pur**,  $\sigma$  est le projecteur sur  $|v_{i_0}\rangle$  :  $\sigma = |v_{i_0}\rangle\langle v_{i_0}|$ .
- Quand toutes les valeurs propres sont égales, ie  $\lambda_j = 1/N$  pour tout  $j$ , la pureté est minimale  $\Sigma_2 = 1/N$ . L'état quantique est un **mélange statistique** complet, c'est une superposition statistique de tous les états de base  $|v_j\rangle$  avec probabilité égale  $1/N$ .

Dans l'article [SZ04], Sommers et Życzkowski ont calculé la pureté moyenne  $\langle \Sigma_2 \rangle = \langle \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 \rangle$  pour un état de Bures aléatoire et l'ont comparée au cas de Hilbert-Schmidt (qui correspond au chapitre précédent 9). Il ont montré que  $\langle \Sigma_2 \rangle \sim \frac{5}{2N}$  pour  $N \gg 1$  pour la mesure de Bures par opposition à  $2/N$  pour le cas Hilbert-Schmidt, cf (9.16) pour  $q = 2$ . Dans l'article [OSŻ10], Osipov, Sommers and Życzkowski ont calculé les moments de la pureté pour des états de Bures. Ils ont aussi montré comment générer numériquement des matrices densité aléatoires de Bures.

Dans le chapitre 9, j'ai montré comment calculer la distribution complète de la pureté généralisée  $\Sigma_q = \sum_{i=1}^N \lambda_i^q$  pour des matrices densité de Hilbert-Schmidt. Dans ce chapitre je montre comment calculer la **distribution de  $\Sigma_2$  pour des états de Bures aléatoires** (ie pour des  $\lambda_i$  distribués selon la loi Eq. (10.3)) dans la limite  $N \gg 1$  avec la méthode du gaz de Coulomb. Je mets en évidence des **transitions de phase** similaires au cas de Hilbert-Schmidt. Mais à cause de la forme exacte de la distribution des valeurs propres les équations intégrales de ce problème sont plus difficiles à résoudre.

### 10.2.1 Résultats

Comme dans le cas de Hilbert-Schmidt, on trouve **trois régimes** pour la **distribution de la pureté  $\Sigma_2$  pour des états de Bures aléatoires**. Ces régimes sont la conséquence de deux transitions de phase dans le gaz de Coulomb associé. Dans la limite

$N \gg 1$ , on montre que la distribution de la pureté est de la forme :

$$\mathcal{P}\left(\Sigma_2 = \frac{s}{N}\right) \approx \begin{cases} e^{-N^2\Phi_I(s)} & \text{si } 1 < s \leq s_1 \\ e^{-N^2\Phi_{II}(s)} & \text{si } s_1 < s \leq s_2 \\ e^{-N^{3/2}\Phi_{III}(s)} & \text{si } s > s_2 \end{cases} \quad (10.27)$$

avec  $s_1 = \frac{315}{256}$  et  $s_2 = \frac{5}{2} \left[1 + \left(\frac{5}{2N}\right)^{\frac{1}{3}} + \dots\right]$ . On rappelle que le symbole  $\approx$  indique un équivalent logarithmique.

J'ai pu calculer explicitement  $\Phi_{II}$  et  $\Phi_{III}$ , je donne leurs expressions ci-dessous Eq. (10.28) et (10.30). Le calcul de  $\Phi_I$  est en cours, c'est un travail en collaboration avec Gaëtan Borot.

J'ai trouvé :

$$\Phi_{II}(s) = -\frac{\ln L}{2} + \frac{81}{8L^2} - \frac{15\sqrt{3}}{4L} + \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \ln(3\sqrt{3}) \quad (10.28)$$

où  $L = L(s)$  est donné par :

$$L = L(s) = \frac{9\sqrt{3}}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{16s}{45}}\right) \quad (10.29)$$

et

$$\Phi_{III}(s) = \frac{\sqrt{s - 5/2}}{2} = \frac{\sqrt{s - \bar{s}}}{2} \quad \text{où } \bar{s} = \frac{5}{2} \quad (10.30)$$

La distribution de  $\Sigma_2$  est très piquée pour  $N$  grand. Sa **moyenne** est donc donnée par la valeur la plus probable. La valeur la plus probable est donnée par le minimum de  $\Phi$ , il est atteint dans le régime **II** pour  $s = \bar{s} = 5/2$  (ie  $\frac{d\Phi}{ds}|_{s=\bar{s}} = 0$ ). Ainsi on a :

$$\langle \Sigma_2 \rangle \sim \frac{5}{2N} \quad \text{pour } N \gg 1 \quad (10.31)$$

On retrouve le résultat de Sommers et Życzkowski [SZ04]. Ils ont montré en effet que  $\langle \Sigma_2 \rangle = \frac{5N^2+1}{2N(N^2+2)} \sim \frac{5}{2N}$  pour  $N$  grand.

Près de son minimum  $\bar{s} = 5/2$ , la fonction de grande déviation  $\Phi_{II}$  a un comportement quadratique  $\Phi_{II}(s) \sim \frac{2}{25} \left(s - \frac{5}{2}\right)^2$ , ainsi la distribution de la pureté est **gaussienne au voisinage de sa moyenne** :

$$\mathcal{P}\left(\Sigma_2 = \frac{s}{N}\right) \approx \exp\left\{-\frac{2N^2}{25} \left(s - \frac{5}{2}\right)^2\right\} \quad \text{pour } s \text{ proche de } \frac{5}{2} \quad (10.32)$$

A nouveau la **variance** de  $\Sigma_2$  est donnée à l'ordre dominant en  $N$  par la variance de la gaussienne ci-dessus, soit :

$$\text{Var}\Sigma_2 = \langle \Sigma_2^2 \rangle - \langle \Sigma_2 \rangle^2 \sim \frac{25}{4N^4} \quad \text{pour } N \gg 1 \quad (10.33)$$

Notre résultat est le même que celui d'Osipov, Sommers et Życzkowski [OSŻ10]. Ils ont calculé analytiquement les moments de la pureté pour tout  $N$ . En particulier ils trouvent  $\mu_1 \equiv \langle \Sigma_2 \rangle = \frac{5N^2+1}{2N(N^2+2)}$  pour la moyenne et  $\mu_2 \equiv \langle \Sigma_2^2 \rangle = \frac{5(5N^4+47N^2+32)}{4(N^2+2)(N^2+4)(N^2+6)}$  pour le moment d'ordre 2 (ils ont en fait dans l'article un facteur 2 au dénominateur de  $\mu_2$  au lieu de 4 mais c'est sûrement une faute de frappe car l'expression générale qu'ils obtiennent pour  $\mu_r$  quelconque donne un facteur 4), soit pour  $N$  grand :  $\text{Var}\Sigma_2 = \mu_2 - \mu_1^2 = \frac{25N^6-71N^4+70N^2-24}{4N^2(N^2+2)^2(N^2+4)(N^2+6)} \sim \frac{25}{4N^4}$ .

## 10.2.2 Gaz de Coulomb pour les régimes I et II

Dans cette section, je montre comment calculer en principe la distribution de la pureté avec une méthode de gaz de Coulomb.

Par définition, la distribution de la pureté est donnée par

$$\mathcal{P}(\Sigma_2 = S) = \int_0^\infty d\lambda_1 \dots \int_0^\infty d\lambda_N \mathcal{P}_B(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \delta\left(\sum_i \lambda_i^2 - S\right) \quad (10.34)$$

où la distribution jointe des valeurs propres de Bures  $\mathcal{P}_B(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  est donnée Eq. (10.2) et peut être vue comme un **poinds de Boltzmann**  $\mathcal{P}_B(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \propto e^{-E[\{\lambda_i\}]}$  où l'énergie effective associée est donnée Eq. (10.10) Les  $\lambda_i$  sont ainsi vues comme les "charges" d'un **gaz de Coulomb** 2D modifié, cf section 10.1.2.

Dans la limite  $N$  grand, les valeurs propres (ou charges) se comportent typiquement comme  $\lambda_{\text{typ}} \sim 1/N$  du fait de la contrainte  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$  (exactement comme dans le cas de Hilbert-Schmidt). La pureté se comporte donc comme  $\Sigma_2 = \sum_i \lambda_i^2 \asymp \frac{1}{N}$ , on notera  $\Sigma_2 = s/N$ . On définit aussi la densité adimensionnée  $\rho(x) = \frac{1}{N} \sum_i \delta(x - \lambda_i N)$ .

On s'attend à ce que  $\rho(x)$  tende dans la limite  $N \rightarrow \infty$  vers une limite finie continue. En fait, comme dans le cas de Hilbert-Schmidt, cette hypothèse est valable seulement pour des valeurs de la pureté pas trop grandes  $s < s_2$ . Pour  $s > s_2$  une valeur propre se détache des autres, elle devient beaucoup plus grande et doit être prise en compte séparément en dehors du continuum des autres valeurs propres.

On se place pour commencer dans le cas où  $\rho(x)$  a bien une limite finie continue. L'intégrale (10.34) devient une intégrale de chemin dans la limite continue :

$$\mathcal{P}\left(\Sigma_2 = \frac{s}{N}\right) \approx \int \mathcal{D}\rho \delta\left(\int \rho - 1\right) \delta\left(\int x\rho - 1\right) \delta\left(\int x^2\rho - s\right) e^{-N^2 E[\rho]} \quad (10.35)$$

où l'**énergie effective** est maintenant une fonctionnelle de  $\rho$  :

$$E[\rho] = \int_0^\infty \int_0^\infty dx dx' \rho(x)\rho(x') \left[\frac{1}{2} \ln|x+x'| - \ln|x-x'|\right] \quad (10.36)$$

Pour  $N \gg 1$  l'intégrale fonctionnelle (10.35) se calcule par méthode du col :

$$\mathcal{P}\left(\Sigma_2 = \frac{s}{N}\right) \approx e^{-N^2 E_s[\rho_c] + o(N^2)} \quad (10.37)$$

où  $\rho_c$  minimise l'**énergie effective**  $E_s[\rho]$  qui dépend de  $s$  :

$$\begin{aligned} E_s[\rho] = & \int_0^\infty \int_0^\infty dx dx' \rho(x)\rho(x') \left[\frac{1}{2} \ln|x+x'| - \ln|x-x'|\right] \\ & + \mu_0 \left[\int_0^\infty dx \rho(x) - 1\right] + \mu_1 \left[\int_0^\infty dx x \rho(x) - 1\right] + \mu_2 \left[\int_0^\infty dx x^2 \rho(x) - s\right] \end{aligned} \quad (10.38)$$

où  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont des multiplicateurs de Lagrange qui ont été ajoutés pour prendre en compte dans la minimisation les contraintes  $\int \rho = 1$  (normalisation de  $\rho$ ),  $\int x\rho = \sum_i \lambda_i = 1$  et  $\int x^2\rho = N \sum_i \lambda_i^2 = s$  (soit  $\Sigma_2 = s/N$ ).

La densité  $\rho_c$  **minimise l'énergie effective**, ie  $\left. \frac{\partial E_s}{\partial \rho} \right|_{\rho_c} = 0$  ou encore :

$$\int_0^\infty dx' \rho_c(x') \left[ \ln|x-x'| - \frac{1}{2} \ln|x+x'| \right] = \frac{\mu_0}{2} + \frac{\mu_1}{2}x + \frac{\mu_2}{2}x^2 \equiv V(x) \quad (10.39)$$

$V(x)$  joue le rôle d'un potentiel externe pour les charges  $\lambda_i$ . En dérivant par rapport à  $x > 0$  on trouve :

$$\boxed{\int_0^\infty dx' \frac{\rho_c(x')}{x-x'} - \frac{1}{2} \int_0^\infty dx' \frac{\rho_c(x')}{x+x'} = \frac{\mu_1}{2} + \mu_2 x = V'(x)} \quad (10.40)$$

où  $f$  est l'intégrale avec partie principale. Ces équations sont du même type que celles du **processus de Pearcey**, plus complexes que des intégrales de Tricomi. On peut en fait résoudre ces équations explicitement dans le cas d'une densité à support fini  $[0, L]$  avec la méthode de **Bueckner**, cf section 6.3 ou de façon équivalente avec une méthode se ramenant à des équations de Tricomi généralisées (cf section 6.4).

### 10.2.2.1 Régime II

On suppose ici que la densité  $\rho_c$  solution de l'équation de point col (10.40) a un support fini  $[0, L]$ . On peut alors déterminer explicitement  $\rho_c$  avec la méthode de Bueckner. On montrera ensuite que cette solution est en fait valable sur un régime  $s_1 < s < s_2$  (où  $s_1 > 1$ ) comprenant la moyenne de la pureté  $\bar{s}$  ( $\langle \Sigma_2 \rangle \sim \bar{s}/N$ ). Ce sera le régime **II**.

Pour résoudre l'équation (10.40), on utilise la méthode de **Bueckner** expliquée section 6.3 avec  $g(x)$  un polynôme de degré 1,  $g(x) = -V'(x) = -\frac{\mu_1}{2} - \mu_2 x$ , et avec  $\gamma = 1/2$  soit  $\mu = 2/3$ .

Les multiplicateurs de Lagrange  $\mu_{0,1,2}$  et la borne supérieure  $L$  sont déterminés comme fonctions de  $s$  par les contraintes  $\int_0^L \rho_c = 1$ ,  $\int x\rho = 1$  et  $\int x^2\rho = s$  ainsi que  $\rho_c(L) = 0$ .

On trouve :

$$\begin{aligned} \rho_c(x) = & \frac{A}{\pi} \left\{ \left( \frac{L}{x} - \sqrt{\frac{L^2}{x^2} - 1} \right)^{\frac{2}{3}} - \left( \frac{L}{x} + \sqrt{\frac{L^2}{x^2} - 1} \right)^{\frac{2}{3}} \right\} \\ & + \frac{B x}{\pi L} \left\{ \left( \frac{L}{x} - \sqrt{\frac{L^2}{x^2} - 1} \right)^{\frac{5}{3}} - \left( \frac{L}{x} + \sqrt{\frac{L^2}{x^2} - 1} \right)^{\frac{5}{3}} \right\} \end{aligned} \quad (10.41)$$

où

$$\boxed{L = L(s) = \frac{9\sqrt{3}}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{16s}{45}} \right)} \quad (10.42)$$

et où  $A$  et  $B$  sont des fonctions de  $L$  et donc de  $s$  :

$$A = \frac{3}{4L^2} (45\sqrt{3} - 16L) \quad , \quad B = \frac{27}{5L^2} (L - 3\sqrt{3}) \quad (10.43)$$



Finalement, une fois bien normalisée la densité de probabilité de  $\Sigma_2$  s'écrit :

$$\mathcal{P}(\Sigma_2 = s/N) \approx \frac{e^{-N^2 E_s[\rho_c]}}{e^{-N^2 E[\rho^*]}} \approx e^{-N^2 \Phi_{II}(s)} \quad (10.44)$$

La normalisation est en effet donnée par l'énergie dans contrainte sur la pureté  $s$ , soit  $E[\rho^*] = E_{\bar{s}}[\rho_c]$  où  $\bar{s} = 5/2$ . La fonction  $\Phi_{II}(s) = E_s[\rho_c] - E_{\bar{s}}[\rho_c]$  est donnée explicitement par :

$$\Phi_{II}(s) = -\frac{\ln L}{2} + \frac{81}{8L^2} - \frac{15\sqrt{3}}{4L} + \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \ln(3\sqrt{3}) \quad (10.45)$$

où  $L = L(s)$  est donné Eq. (10.42).

Ce régime existe pour  $\frac{315}{256} < s < \frac{45}{16}$ . En effet  $L(s)$  est réel positif seulement pour  $s < \frac{45}{16}$ ; de plus pour  $s < \frac{315}{256}$  la densité  $\rho_c$  devient négative, ce qui n'est pas physique. On notera  $s_1 = \frac{315}{256}$ .

### 10.2.2.2 Régime I

Par analogie avec le cas de Hilbert-Schmidt, on s'attend à trouver un régime **I** pour  $1 < s < s_1$  avec densité à support  $[L_1, L_2]$  où  $0 < L_1 < L_2$  et tel que la densité s'annule aux deux bords  $L_{1,2}$ . Le calcul explicite de la densité dans le régime **I** peut être aussi effectué par une méthode d'analyse complexe -mais pas directement avec celle de Bueckner. C'est un travail en cours en collaboration avec Gaëtan Borot.

### 10.2.3 Régime III

Pour  $s$  assez grand, exactement comme dans le cas de Hilbert-Schmidt cf section 9.2.2, **la valeur propre maximale devient beaucoup plus grande** que les autres valeurs propres, il faut en tenir compte séparément. On la décrit par  $\lambda_{\max} = t$  et les autres valeurs propres sont décrites par leur densité continue  $\rho(\lambda) = \frac{1}{N-1} \sum_{i \neq \max} \delta(\lambda - \lambda_i)$  à support  $]0, \zeta]$ . Donc, dans la limite  $N \rightarrow \infty$  :

$$\mathcal{P}(\Sigma_2 = S) \propto e^{-E_S[\rho, t^*]} \quad (10.46)$$

où  $(\rho_c, t^*)$  minimise l'énergie effective  $E_S[\rho, t]$  :

$$\begin{aligned} E_S[\rho, t] = & -2(N-1) \int_0^\zeta d\lambda \rho(\lambda) \ln|t - \lambda| + (N-1) \int_0^\zeta d\lambda \rho(\lambda) \ln|t + \lambda| \\ & + (N-1)^2 \int_0^\zeta \int_0^\zeta d\lambda d\lambda' \rho(\lambda) \rho(\lambda') \left[ \frac{1}{2} \ln|\lambda + \lambda'| - \ln|\lambda - \lambda'| \right] \\ & + \mu_0 \left[ \int_0^\zeta d\lambda \rho(\lambda) - 1 \right] + \mu_1 \left[ (N-1) \int_0^\zeta d\lambda \lambda \rho(\lambda) + t - 1 \right] \\ & + \mu_2 \left[ (N-1) \int_0^\zeta d\lambda \lambda^2 \rho(\lambda) + t^2 - S \right] \end{aligned} \quad (10.47)$$

où  $\mu_0, \mu_1$  et  $\mu_2$  sont des multiplicateurs de Lagrange.

Pour  $N$  grand, les équations de point col sont données par  $\frac{\delta E_s}{\delta \rho} = 0$  et  $\frac{\partial E_s}{\partial t} = 0$ . La première s'écrit :

$$\int_0^\zeta d\lambda' \rho(\lambda') \left[ \ln |\lambda - \lambda'| - \frac{1}{2} \ln |\lambda + \lambda'| \right] = \frac{\mu_0}{2(N-1)^2} + \frac{\mu_1 \lambda + \mu_2 \lambda^2}{2(N-1)} - \frac{\ln |t - \lambda|}{N-1} + \frac{\ln |t + \lambda|}{2(N-1)} \quad (10.48)$$

En dérivant par rapport à  $\lambda$  on trouve :

$$\int_0^\zeta d\lambda' \frac{\rho(\lambda')}{\lambda' - \lambda} + \frac{1}{2} \int_0^\zeta d\lambda' \frac{\rho(\lambda')}{\lambda' + \lambda} = g(\lambda) \quad (10.49)$$

où  $g(\lambda) = \frac{-1}{N-1} \left\{ \frac{\mu_1}{2} + \mu_2 \lambda + \frac{1}{t - \lambda} + \frac{1}{2(t + \lambda)} \right\}$

Cette équation peut être résolue par la méthode de Bueckner avec  $\gamma = \frac{1}{2}$  et une fonction  $g(\lambda)$  non polynomiale, expliquée section 10.2.4.

Le changement de variables  $\lambda = \zeta \sqrt{1 - u^2}$  donne

$$\bar{g}(u) = g(\lambda) = \frac{-1}{N-1} \left\{ \frac{\mu_1}{2} + \mu_2 \zeta \sqrt{1 - u^2} + \frac{3t}{2\zeta^2(a^2 + u^2)} + \frac{\sqrt{1 - u^2}}{2\zeta(a^2 + u^2)} \right\} \quad (10.50)$$

où  $a^2 = \frac{t^2 - \zeta^2}{\zeta^2}$  (avec  $a > 0$ ).

Avec la méthode de Bueckner générale on trouve :

$$\begin{aligned} \rho(\lambda = \zeta \sqrt{1 - y^2}) &= \frac{A_1}{\pi} \sinh(\mu\eta) + \frac{B_1}{\pi} \tanh \eta \cosh(\mu\eta) \\ &+ \frac{1}{a^2 + y^2} \left[ \frac{C_1}{\pi} \sinh(\mu\eta) + \frac{D_1}{\pi} \tanh \eta \cosh(\mu\eta) \right] \\ &= \left( \frac{A_1}{2\pi} + \frac{C_1}{2\pi(a^2 + y^2)} \right) \left\{ \left( \frac{1+y}{1-y} \right)^{\frac{\mu}{2}} - \left( \frac{1-y}{1+y} \right)^{\frac{\mu}{2}} \right\} \\ &+ \left( \frac{B_1}{2\pi} + \frac{D_1}{2\pi(a^2 + y^2)} \right) \left\{ \left( \frac{1+y}{1-y} \right)^{\frac{\mu}{2}} + \left( \frac{1-y}{1+y} \right)^{\frac{\mu}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (10.51)$$

où  $\tanh \eta = y$  ie  $e^\eta = \left( \frac{1+y}{1-y} \right)^{\frac{1}{2}}$  et où  $\mu = 2/3$ . les coefficients sont donnés par

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{N-1} \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{3}} - \frac{4\mu_2\zeta}{3} \right), & B_1 &= \frac{2\mu_2\zeta}{N-1} \\ C_1 &= \frac{2}{(N-1)\zeta} \frac{\sin\left(\frac{\pi-2\theta}{3}\right)}{\sin\theta}, & D_1 &= \frac{2}{(N-1)\zeta} \frac{\cos\left(\frac{\pi-2\theta}{3}\right)}{\cos\theta} \end{aligned} \quad (10.52)$$

où  $\theta$  est défini comme :

$$\boxed{\frac{t}{\zeta} = \sqrt{1 + a^2} = \frac{1}{\sin\theta}} \quad (10.53)$$

soit  $\tan\theta = 1/a$ ,  $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$  et  $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ .

Les trois contraintes  $\int \rho = 1$ ,  $\int \lambda \rho = \frac{1-t}{N-1}$  et  $\int \lambda^2 \rho = \frac{s-t^2}{N-1}$  donnent  $\mu_1$  et  $\mu_2$  comme fonctions de  $\zeta$  et  $t$  (ou de façon équivalente  $\zeta$  et  $\theta$ ) ainsi que la relation suivante entre  $\zeta$  et  $\theta$  (ou  $t$ ) :

$$108S - 45\sqrt{3}\zeta + 5N\zeta^2 = \frac{\zeta^2}{\cos\theta(\sin\theta)^2} \left[ 110 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{4\theta}{3}\right) + 113 \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\theta}{3}\right) - 7 \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{8\theta}{3}\right) \right] \quad (10.54)$$

Une seconde relation entre  $\zeta$  et  $t$  est obtenue par la deuxième équation de point col  $\frac{\partial E_S}{\partial t} = 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1 + 2\mu_2\zeta\sqrt{1+a^2}}{N-1} &= A_1 \left[ \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right) + \sqrt{3} - \sqrt{3}\cos\left(\frac{2\theta}{3}\right) \right] \\ &+ B_1 \left[ \sqrt{1+a^2} - a\cos\left(\frac{2\theta}{3}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} - a\sqrt{3}\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right) \right] \\ &+ C_1 \left[ \frac{\cos\left(\frac{2\theta}{3}\right) + \frac{3a}{2}\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)}{3a(1+a^2)} + \frac{\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)}{a\sqrt{3}(1+a^2)} \right] \\ &+ D_1 \left[ \frac{\frac{3}{2}\cos\left(\frac{2\theta}{3}\right)\sin\theta + \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)\cos\theta}{3a(1+a^2)} + \frac{3(1+a^2)\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right) - 2a\cos\left(\frac{2\theta}{3}\right)}{3\sqrt{3}a(1+a^2)} \right] \end{aligned} \quad (10.55)$$

Dans la limite  $N$  grand et pour  $S = \frac{s}{N}$  avec  $s$  fixé les équations (10.54) et (10.55) pour  $\{t, \zeta\}$  ont deux solutions. La première avec  $t \sim \zeta \asymp \frac{1}{N}$  est la solution du régime **II**. La seconde avec  $t \gg \zeta$ , plus précisément  $t \asymp \frac{1}{\sqrt{N}}$  et  $\zeta \asymp \frac{1}{N}$ , donne le régime **III**.

Pour  $N \gg 1$ , la solution du régime **III** est donnée par  $a = \frac{1}{\tan\theta} = \sqrt{N} \left( \frac{\sqrt{2s-5}}{3\sqrt{6}} \right) + \frac{75\sqrt{3}-120\sqrt{3}s+32\sqrt{3}s^2}{144(2s-5)} + \dots$  donc

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{2s-5}} \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{N} \left[ \frac{3\sqrt{3}}{8} \left( \frac{-32s^2 + 120s - 75}{(2s-5)^2} \right) \right] + \dots \\ \zeta &= \frac{3\sqrt{3}}{N} + \frac{1}{N^{3/2}} \left( \frac{3}{2} \right)^{3/2} \frac{(15-4s)}{\sqrt{2s-5}} + \dots \\ t &= \zeta\sqrt{1+a^2} = \frac{\zeta}{\sin\theta} \approx \sqrt{\frac{s-5/2}{N}} + \frac{5}{16N} \left( \frac{16s-45}{2s-5} \right) + \dots \end{aligned} \quad (10.56)$$

On a maintenant l'expression explicite pour  $t$ ,  $\zeta$  et la densité  $\rho_c$  dans le régime **III** (comme fonctions de  $s$ ). On peut maintenant calculer l'énergie de point col  $E_S[\rho_c, t]$ . On trouve à l'ordre dominant en  $N$ , que l'énergie se comporte comme  $E_S[\rho_c, t] \sim N^{3/2}e_S$ . La fonction de **grande déviation du régime III**  $\Phi_{III}(s)$  est donnée par  $E_S[\rho_c, t] - E_{\bar{S}}[\rho_c, t]$  soit :

$$\Phi_{III}(s) = \frac{\sqrt{s-5/2}}{2} = \frac{\sqrt{s-\bar{s}}}{2} \quad (10.57)$$

Le scaling  $N^{3/2}$  et l'expression de  $\Phi_{III}$  sont les mêmes que dans le cas de Hilbert-Schmidt (sauf qu'ici  $\bar{s} = 5/2$  au lieu de  $\bar{s} = 2$ ).

On a déjà vu que la solution du régime **II** existe pour  $s_1 < s < \frac{45}{16}$  avec  $s_1 = \frac{315}{256} < \bar{s}$  ( $\bar{s} = 5/2$ ). Le régime **III** existe pour  $s > \bar{s}$ . Sur l'intervalle  $\bar{s} < s < \frac{45}{16}$  les deux solutions coexistent. pour  $N$  grand, la **solution stable** est celle d'**énergie la plus basse**. La transition entre **II** et **III** a lieu à  $s = s_2$  tel que  $N^2\Phi_{II}(s_2) = N^{3/2}\Phi_{III}(s_2)$ . On trouve :

$$s_2 = \frac{5}{2} \left[ 1 + \left( \frac{5}{2N} \right)^{\frac{1}{3}} \right] + \dots \quad (10.58)$$

Pour  $N \rightarrow \infty$ , la transition a lieu au point  $s_2 = \bar{s} = 5/2$ .

### 10.2.4 Solution de Bueckner : cas général

Dans son article [Bue66], Bueckner explique comment résoudre l'équation suivante :

$$\int_0^L dt \frac{\rho(t)}{t-x} + \gamma \int_0^L dt \frac{\rho(t)}{t+x} = g(x) \quad \text{pour } x \in ]0, L[ \quad (10.59)$$

où  $\rho(x)$  est une densité continue à support fini  $[0, L]$ . Bueckner introduit la fonction  $\phi(z)$ , cf section 6.3 :

$$\phi(z) = \int_0^L dt \frac{\rho(t)}{t-z} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \setminus [0, L] \quad (10.60)$$

$\phi(z)$  est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus [0, L]$  et s'annule comme  $-\frac{1}{z}$  quand  $z \rightarrow \infty$  (car la densité est normalisée, ie  $\int \rho = 1$ ). Enfin  $\phi$  a une coupure sur le segment réel  $[0, L]$  et est solution de l'équation :

$$\text{Re}[\phi(x)] + \gamma \phi(-x) = g(x) \quad \text{pour } x \in \mathcal{L}^+ \quad (10.61)$$

où  $\mathcal{L}^+ = \{x + i0^+ : x \in ]0, L[ \}$

Dans le cas où  $g(x)$  est un polynôme, la résolution passe par des méthodes d'analyse complexe et est expliquée section 6.3.

En général, quand  $g(x)$  n'est **pas nécessairement polynomial**, la solution de (10.61) est donnée par une intégrale :

$$\phi(z) = \frac{L}{\gamma+1} \int_0^L \frac{dt t \sqrt{L^2 - t^2}}{\pi (t^2 - z^2)} g(t) \{ \psi_1(z) \phi_0(-t) - \phi_0(z) \psi_1(-t) \} + c \psi_1(z) \quad (10.62)$$

où  $c$  est une contante à déterminer et où  $\phi_0$  et  $\psi_1$  forment une base de l'équation homogène  $\text{Re}[\phi(x)] + \gamma \phi(-x) = 0$  exactement comme  $\phi_0$  et  $\phi_1$  (c'est juste un choix différent de base) :

$$\phi_0(z) = \frac{\cos \left[ \mu \left( w + \frac{\pi}{2} \right) \right]}{\cos \left[ \frac{\mu\pi}{2} \right]} \quad \text{et} \quad \psi_1(z) = 2 \sin \left( \frac{\mu\pi}{2} \right) \tan w \sin \left[ \mu \left( w + \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (10.63)$$

donc  $\psi_1(z) = 2 \sin \left( \frac{\mu\pi}{2} \right) (\tan w)^2 \phi_1(z)$ .

La densité est donc donnée par  $\rho(x) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \phi(x + i0^+)$  soit

$$\rho(x) = \frac{L}{\gamma+1} \text{Pr} \int_0^L \frac{dt t \sqrt{L^2 - t^2}}{\pi^2 (t^2 - x^2)} g(t) \{ v_1(x) \phi_0(-t) - v_0(z) \psi_1(-t) \} + c v_1(x) \quad (10.64)$$

où  $v_0(x) = \text{Im}\phi_0(x + i0^+)$  et  $v_1(x) = \text{Im}\psi_1(x + i0^+)$ .

Rappelons que  $z = x \in \mathcal{L}^+$  correspond à  $w = \frac{\pi}{2} - i\eta$  où  $\eta > 0$ . Donc  $\frac{L}{x} = \sin w = \cosh \eta$ , voir (6.67). Ainsi pour  $x \in \mathcal{L}^+$  :

$$v_0(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) \sinh(\mu\eta) \quad \text{et} \quad v_1(x) = -2 \sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) \sin(\pi\mu) \frac{\cosh(\mu\eta)}{\tanh \eta} \quad (10.65)$$

où  $\gamma = -\cos(\pi\mu)$ . On a aussi :

$$\phi_0(-x) = \frac{\cosh(\mu\eta)}{\cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \psi_1(-x) = -2 \sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) \frac{\sinh(\mu\eta)}{\tanh \eta} \quad (10.66)$$

Faisons le changement de variable  $t = L\sqrt{1-u^2}$  dans (10.64). On définit aussi  $y$  tel que  $x = L\sqrt{1-y^2}$ . Avec ces définitions on a  $y = \tanh \eta$  et on obtient après quelques réarrangements :

$$\boxed{\rho(x = L\sqrt{1-y^2}) = \frac{\sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)^2}{\pi(\gamma+1)} \int_{-1}^1 \frac{du}{\pi} \bar{g}(u) \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{\mu}{2}} \left[ \frac{e^{-\mu\eta}}{u-y} - \frac{e^{\mu\eta}}{u+y} \right]} \quad (10.67)$$

où  $\gamma = -\cos(\pi\mu)$  et  $\bar{g}(u) = g(x)$  avec  $x = L\sqrt{1-u^2}$ .

L'expression (10.67) pour  $\rho$  peut également être obtenue par ma méthode, cf section 6.4.

## Quatrième partie

---

# PROPRIÉTÉS DES MATRICES ALÉATOIRES



## - Chapitre 11 -

---

# Nombre de valeurs propres positives

---

Dans les **systèmes désordonnés**, il n'est pas rare de rencontrer des paysages de potentiel aléatoire à  $N$  dimensions  $V(x_1, \dots, x_N)$  où  $\{x_1, \dots, x_N\}$  représente une configuration du système (par exemple des spins). Dans ce cas la **stabilité** d'un point stationnaire  $x^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$  de  $V$ , ie tel que  $\frac{\partial V}{\partial x_i} \Big|_{x^*} = 0$ , dépend du signe des valeurs propres de la **matrice hessienne**  $H$  de coefficients  $H_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x^*}$  en ce point. Une valeur propre  $\lambda_i$  positive de  $H$  caractérise une direction selon laquelle  $x^*$  est stable, en particulier si tous les  $\lambda_i$  sont positifs,  $x^*$  est un minimum local de  $V$ , il est stable. Ainsi le nombre de valeurs propres positives de la matrice hessienne est crucial pour l'étude de stabilité des points stationnaires de  $V$ . Bien qu'en général les éléments de la matrice hessienne  $H$  soient corrélés, on peut considérer un modèle simplifié où les éléments de  $H$  sont des variables aléatoires indépendantes distribuées selon une loi gaussienne centrée, c'est-à-dire où  $H$  est une matrice aléatoire gaussienne (cf chapitre 1) : c'est le modèle de **matrice hessienne aléatoire** ("random Hessian model"). L'étude du nombre  $\mathcal{N}_+$  de valeurs propres positives de  $H$  dans ce modèle simplifié permet déjà d'obtenir des informations intéressantes sur la stabilité des points stationnaires.

Dans ce chapitre, j'explique donc comment calculer la distribution du **nombre  $\mathcal{N}_+$  de valeurs propres positives d'une matrice aléatoire gaussienne** de taille  $N \times N$  (cf section 1.1) dans la limite  $N$  grand. Cette étude est un travail que j'ai réalisé avec mon directeur de thèse Satya et en collaboration avec P. Vivo et A. Scardicchio [MNSV09, MNSV11]. La technique que nous avons utilisée est la méthode du **gaz de Coulomb** qui donne accès aux grandes déviations de la distribution de  $\mathcal{N}_+$ . Cependant les équations intégrales associées au gaz de Coulomb pour ce problème font apparaître des densités à **support fait de deux segments disjoints**. Dans ce cas la méthode de Tricomi (cf section 2.4) ne permet pas de résoudre directement ces équations, nous avons dû trouver une autre méthode. Je présenterai deux méthodes. L'une s'appuie sur l'analyse complexe, cf section 11.2.2. L'autre est une méthode que j'ai trouvée moi-même, elle ne fait pas appel à l'analyse complexe mais repose sur l'application du théorème de Tricomi successivement à deux fonctions bien choisies, cf section 11.2.1.



## 11.1 INTRODUCTION ET CONTEXTE

On considère une **matrice aléatoire gaussienne**  $H$  de l'ensemble GUE, GOE ou GSE comme définis dans le premier chapitre (cf section 1.1 et Eq. (1.24)) :

$$\mathcal{P}(H)dH \propto e^{-\frac{\beta}{2}\text{Tr}H^2} dH \quad (11.1)$$

où l'indice de Dyson  $\beta$  vaut  $\beta = 1$  pour le GOE,  $\beta = 2$  pour le GUE et  $\beta = 4$  pour le GSE. On rappelle que dans le cas GOE,  $H$  est réelle symétrique ( $N \times N$ ) ; dans le cas GUE,  $H$  est complexe hermitienne ( $N \times N$ ) ; et dans le cas GSE,  $H$  est hermitienne autoduale ( $2N \times 2N$ ).

Pour ces ensembles gaussiens, les  $N$  **valeurs propres**  $\lambda_i$  de  $H$  sont réelles et distribuées selon la loi jointe, cf Eq. (1.27)

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B_N(\beta) e^{-\frac{\beta}{2}\sum_i \lambda_i^2} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \quad (11.2)$$

Dans le cas GSE, on rappelle que  $H$  a  $2N$  valeurs propres données par l'ensemble  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N, \lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  (elles sont deux à deux égales).

On peut se poser la question suivante : connaissant la distribution jointe des valeurs propres réelles  $\lambda_i$  Eq. (11.2), **quelle est la distribution du nombre de valeurs propres positives**  $\mathcal{N}_+$  ?

Le nombre de valeurs propres positives est par définition :

$$\mathcal{N}_+ = \sum_{i=1}^N \theta(\lambda_i) \quad \text{où } \theta(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \geq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda < 0 \end{cases} \quad (11.3)$$

$\theta$  est la fonction theta de Heaviside, c'est la fonction indicatrice de  $\mathbb{R}_+$ . Avec la méthode du gaz de Coulomb, on peut calculer les grandes déviations de la distribution de  $\mathcal{N}_+$  à  $N$  grand. On notera que cette méthode est générale et fonctionne quel que soit  $\beta > 0$  dans la distribution jointe des  $\lambda_i$  Eq. (11.2), pas seulement pour  $\beta = 1, 2, 4$ .

### 11.1.1 Contexte physique

Avant de rentrer dans les détails des calculs, il est important de préciser quel est l'**intérêt physique** de la distribution de  $\mathcal{N}_+$  pour une matrice aléatoire. Cette question apparaît naturellement lors de l'étude de la **stabilité d'un paysage de potentiel à  $N$  dimensions**  $V(x_1, \dots, x_N)$  [Wal04]. Par exemple, dans le contexte des systèmes désordonnés, des verres ou verres de spin,  $V(\{x_i\})$  peut représenter l'énergie libre pour une configuration  $\{x_i\}$ . L'étude de stabilité d'un tel paysage d'énergie à  $N$  dimensions peut se révéler très complexe. Pour savoir si un point stationnaire, ie tel que  $\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$  pour tout  $i$ , est **stable ou non**, il faut déterminer **les valeurs propres de la matrice hessienne**  $H_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ . Si toutes les valeurs propres de  $H$  sont positives, le point stationnaire est stable (minimum local de  $V$ , stabilité selon toutes les directions). Si toutes les valeurs propres sont négatives, le point stationnaire est complètement instable (maximum local de  $V$ ). Si  $\mathcal{N}_+$  valeurs propres sont positives et donc  $(N - \mathcal{N}_+)$  sont négatives, le point

stationnaire est un col, il est stable selon  $\mathcal{N}_+$  directions mais instable selon les  $(N - \mathcal{N}_+)$  autres directions. Le nombre de valeurs propres positives de la matrice hessienne est donc crucial pour déterminer selon combien de directions un point stationnaire est stable.

Dans les **systèmes physiques désordonnés**, le potentiel  $V$  est aléatoire. Dans ce cas la matrice hessienne  $H$  est également aléatoire, mais en général ses éléments  $H_{ij}$  seront corrélés. Pourtant, dans beaucoup de cas on peut déjà déduire des propriétés physiques intéressantes d'un modèle simplifié où la matrice hessienne est aléatoire gaussienne -et donc à coefficients décorrélés. Ce modèle de **matrice hessienne aléatoire gaussienne** ou "**random Hessian model**" a été beaucoup étudié en particulier dans le contexte des systèmes désordonnés. Par exemple Cavagna, Garrahan et Giardina [CGG00] étudient la géométrie du paysage de stabilité des points stationnaires pour un modèle de spins sphériques avec interaction à  $p$  spins ("p-spin spherical model"), pour lequel la hessienne est effectivement une matrice aléatoire gaussienne. Ce modèle consiste en  $N$  variables réelles  $s_i$  contraintes par  $\sum_{i=1}^N s_i^2 = N$ . L'énergie d'une configuration  $\{s_i\}$  est donnée par  $E(\{s_i\}) = -\sum_{i_1 < \dots < i_p} J_{i_1, \dots, i_p} s_{i_1} \dots s_{i_p}$  où les couplages à  $p$  spins  $J_{i_1, \dots, i_p}$  sont des variables aléatoires gaussiennes décorrélés, centrées et de variance  $\overline{J_{i_1, \dots, i_p}^2} = \frac{p!}{2N^{p-1}}$ .

### 11.1.2 Gaz de Coulomb à $\mathcal{N}_+$ fixé

On veut calculer avec une méthode de gaz de Coulomb (cf chapitre 2 pour une introduction au gaz de Coulomb) la distribution du nombre de valeurs propres positives  $\mathcal{N}_+$ , cf Eq. (11.3), pour une matrice aléatoire gaussienne - dont les valeurs propres sont des réels  $\lambda_i$  distribués selon Eq. (11.2) avec  $\beta > 0$ .

On note  $\mathcal{P}(\mathcal{N}_+ = N_+)$  la **probabilité** de  $\mathcal{N}_+$ . Par définition, cf Eq. (11.3), on a :

$$\mathcal{P}(\mathcal{N}_+ = N_+) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_N \delta\left(\sum_i \theta(\lambda_i) - N_+\right) \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad (11.4)$$

où  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  est donnée Eq. (11.2). Par symétrie  $\lambda_i \rightarrow -\lambda_i$  dans la distribution des valeurs propres Eq. (11.2), la distribution de  $\mathcal{N}_+$  doit vérifier  $\mathcal{P}(\mathcal{N}_+ = N_+) = \mathcal{P}(\mathcal{N}_+ = N - N_+)$ . Donc d'une part  $\langle \mathcal{N}_+ \rangle = N/2$ , et d'autre part il suffit de se restreindre à l'étude de  $N_+ \geq N/2$ .

D'après la définition Eq. (11.3) de  $\mathcal{N}_+$ , on s'attend pour  $N$  grand à un scaling  $\mathcal{N}_+ \asymp N$  (en particulier par symétrie on sait que la moyenne est  $\langle \mathcal{N}_+ \rangle = N/2$ ). On notera donc  $N_+ = cN$  avec  $0 \leq c \leq 1$ . Par **symétrie**  $c \rightarrow (1 - c)$ , il suffit de se restreindre à  $c \geq 1/2$ . On notera que dans la limite  $N \rightarrow \infty$ ,  $\mathcal{P}(\mathcal{N}_+ = cN)$  devient une fonction continue de la variable  $0 < c < 1$  (et non plus une probabilité discrète pour l'entier  $\mathcal{N}_+$ ).

La distribution jointe des valeurs propres d'une matrice gaussienne Eq. (11.2) se récrit comme un **poids de Boltzmann à température inverse**  $\beta$  cf Eq. (2.9) :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \propto e^{-\beta E_N[\{\lambda_i\}]} \quad (11.5)$$

$$E_N[\{\lambda_i\}] = -\sum_{i < j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| + \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i^2 \quad (11.6)$$

Le terme logarithmique est exactement l'interaction (répulsive) de Coulomb à  $2D$ . Les  $\lambda_i$  peuvent donc être vues comme les positions sur une ligne ( $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ) des charges d'un **gaz de Coulomb à  $2D$** . Ces charges sont de plus dans un potentiel externe harmonique ( $\lambda^2/2$ ).

Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , on s'attend à un comportement typique des valeurs propres  $\lambda_i \asymp \sqrt{N}$  cf Eq. (2.15). On rappelle en effet que si on suppose un comportement typique  $\lambda_i \asymp N^\alpha$  pour un  $\alpha$  réel, alors on peut introduire les variables adimensionnées  $x_i = \lambda_i/N^\alpha$  et récrire l'énergie effective (11.6) sous la forme :

$$E_N[\{\lambda_i\}] = -\alpha \frac{N(N-1)}{2} \ln N - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \ln |x_i - x_j| + \frac{N^{2\alpha}}{2} \sum_i x_i^2, \quad x_i = \frac{\lambda_i}{N^\alpha} \quad (11.7)$$

Le premier terme  $-\alpha \frac{N(N-1)}{2} \ln N$  est une constante qui peut être absorbée dans la constante de normalisation de la probabilité Eq. (11.5). Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , les variables adimensionnées  $x_i$  sont indépendantes de  $N$ . Ainsi, comme on a vu au premier chapitre, on s'attend à ce que le second terme (interaction coulombienne) soit d'ordre  $-\sum_{1 \leq i < j \leq N} \ln |x_i - x_j| \asymp N^2$ , cf section 2.1.2. Le troisième terme (potentiel harmonique) est quant à lui d'ordre  $\frac{N^{2\alpha}}{2} \sum_i x_i^2 \asymp N^{1+2\alpha}$ . Pour équilibrer les différents termes de l'énergie effective (Coulomb et potentiel), il faut donc que  $N^{1+2\alpha} \asymp N^2$  soit  $\alpha = 1/2$ , ie  $\lambda_i \asymp \sqrt{N}$ .

On introduit alors la densité adimensionnée

$$\rho(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i), \quad x_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{N}} \quad (11.8)$$

dans la limite  $N \rightarrow \infty$  on s'attend à ce que la densité adimensionnée  $\rho(x)$  tende vers une limite finie continue. Dans ce cas, l'énergie effective  $E_N[\{\lambda_i\}]$  s'écrit dans sa version continue à  $N \gg 1$  comme une fonctionnelle de la densité continue  $\rho(x)$  et  $\mathcal{P}(\mathcal{N}_+ = cN)$  Eq. (11.4) devient une intégrale de chemin sur la densité  $\rho(x)$  :

$$\mathcal{P}(\mathcal{N}_+ = cN) \propto \int \mathcal{D}\rho(x) \delta\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx \theta(x)\rho(x) - c\right) e^{-\beta N^2 E[\rho] + O(N)} \quad (11.9)$$

où on intègre sur les densités  $\rho(x)$  normalisées à 1 et où l'énergie effective adimensionnée est donnée par :

$$E[\rho] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 \rho(x) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \rho(x)\rho(x') \ln |x - x'| \quad (11.10)$$

Pour  $N \rightarrow \infty$ , l'intégrale fonctionnelle Eq. (11.9) peut être évaluée par **méthode du col** :

$$\mathcal{P}(\mathcal{N}_+ = cN) \propto e^{-\beta N^2 E_c[\rho_c]} \quad (11.11)$$

où  $\rho_c(x)$  **minimise l'énergie effective**  $E_c[\rho]$  donnée par :

$$E_c[\rho] = -\frac{1}{2} \int dx \int dx' \rho(x)\rho(x') \ln |x - x'| + \frac{1}{2} \int dx x^2 \rho(x) + \mu_0 \left( \int dx \rho(x) - 1 \right) + \mu_1 \left( \int dx \theta(x)\rho(x) - c \right) \quad (11.12)$$

Des termes avec multiplicateurs de Lagrange  $\mu_0$  et  $\mu_1$  ont été ajoutés pour prendre en compte dans la minimisation les **contraintes**  $\int \rho = 1$  (normalisation de la densité) et  $\int dx \theta(x)\rho(x) = c$  (ie  $\mathcal{N}_+$  est fixé à la valeur  $\mathcal{N}_+ = cN$ ).

Le gaz de Coulomb associé à notre problème est donc un **gaz de Coulomb** en présence de la **contrainte**  $\mathcal{N}_+ = cN$  et à **température nulle** (à température inverse effective  $\beta N^2 \rightarrow \infty$ ). Il est décrit par la densité de charge continue (et adimensionnée)  $\rho_c(x)$ .

La densité optimale  $\rho_c$  minimise l'énergie effective donc  $\left. \frac{\delta E_c}{\delta \rho(x)} \right|_{\rho_c} = 0$ , soit :

$$\int dx' \rho_c(x') \ln |x - x'| = \frac{x^2}{2} + \mu_0 + \mu_1 \theta(x) \quad , \quad x \in \text{Supp}[\rho_c] \quad (11.13)$$

soit après dérivation par rapport à  $x$  pour  $x \neq 0$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{\rho_c(x')}{x - x'} = x \quad , \quad x \in \text{Supp}[\rho_c], x \neq 0 \quad (11.14)$$

avec les contraintes  $\int \rho_c = 1$  et  $\int \rho_c \theta(x) = c$ , ie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho_c(x) = 1 \quad , \quad \int_0^{+\infty} dx \rho_c(x) = c \quad (11.15)$$

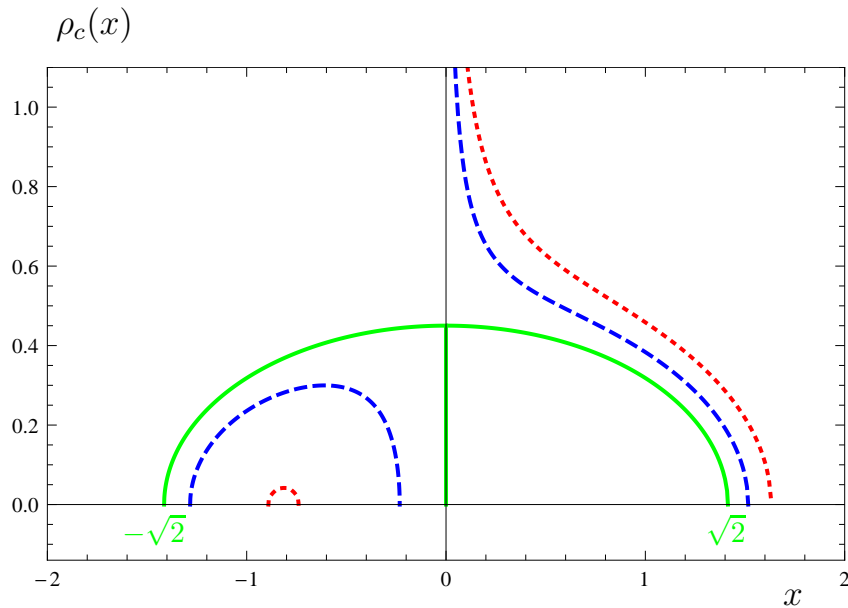
$\int$  désigne la partie principale de l'intégrale, cf Eq. (2.22).

A cause de la dissymétrie entre  $\mathbb{R}_+$  et  $\mathbb{R}_-$ , on s'attend ici à une densité  $\rho_c(x)$  à **support fait de deux segments disjoints**  $\mathcal{S} = [l_1, l_2] \cup [L_1, L_2]$  avec  $l_1 < l_2 \leq 0 \leq L_1 < L_2$ . Cette affirmation qui peut ne pas paraître évidente au premier abord peut se deviner grâce à des simulations numériques cf chapitre 14. Les résultats analytiques confirment cette hypothèse des deux supports (en particulier on ne peut pas trouver pour Eq. (11.14) de solution à un support qui satisfasse les contraintes Eq. (11.15)). Dans ce cas la méthode de Tricomi ne permet pas de résoudre directement l'équation (11.14). Il faut trouver une autre méthode.

Avant d'expliquer comment résoudre (11.14), commençons par quelques remarques sur les **conditions au bord** pour la densité  $\rho_c$ . Physiquement on s'attend à une densité  $\rho_c(x)$  continue en tout  $x \neq 0$ . En particulier  $\rho_c$  doit être continue aux bords extrêmes de son support, ie en  $l_1 < 0$  et en  $L_2 > 0$ . D'où  $\rho_c(l_1) = 0 = \rho_c(L_2)$ . De plus, pour  $c > 1/2$  on s'attend à une accumulation de valeurs propres juste à droite de l'origine. En effet la contrainte  $\int_{L_1}^{L_2} dx \rho_c(x) = c$  avec  $c > 1/2$  force des valeurs propres qui en moyenne seraient négatives à être positives, elles seront donc positives mais peu éloignées de 0. On s'attend donc physiquement à  $L_1 = 0$  pour  $c > 1/2$  et  $\rho_c(x)$  non nul en  $x = 0$ . Dans ce cas, comme on a supposé les deux supports disjoints, on aura  $l_2 < 0$  et par continuité  $\rho_c(l_2) = 0$ , cf figure 11.1.

## 11.2 DENSITÉ À DEUX SUPPORTS

On cherche les solutions  $\rho(x)$  à **support fait de deux segments disjoints**  $\mathcal{S} = \text{Supp}[\rho] = [l_1, l_2] \cup [L_1, L_2]$  avec  $l_1 < l_2 \leq 0 \leq L_1 < L_2$  de l'équation suivante avec



**Figure 11.1** – Densité optimale (adimensionnée)  $\rho_c(x)$  avec  $N_+ = cN$  valeurs propres positives (pour une matrice gaussienne  $N \times N$ ) dans la limite  $N \rightarrow \infty$  tracée en fonction de  $x$  pour  $c = 1/2$  (trait plein vert, demi-cercle de Wigner),  $c = 3/4$  (ligne pointillée bleue) et  $c = 0.995$  (ligne pointillée rouge).

contraintes :

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} dx' \frac{\rho(x')}{x-x'} &= g(x) \quad , \quad x \in \mathcal{S} = [l_1, l_2] \cup [L_1, L_2] \quad (l_2 \leq 0 \leq L_1) \\ \text{avec} \quad \int_{\mathcal{S}} dx \rho(x) &= 1 \quad , \quad \int_{L_1}^{L_2} dx \rho(x) = c \quad , \quad c \in [0, 1] \end{aligned}} \quad (11.16)$$

où  $g(x)$  est un polynôme à coefficients réels. Pour  $g(x) = x$ , on retrouve Eq. (11.14) et le paramètre  $c = N_+/N$  représente la fraction de valeurs propres positives.

Comme expliqué ci-dessus, on s'attend pour des raisons physiques à une densité  $\rho(x)$  continue en tout  $x \neq 0$  et donc à  $\rho(l_1) = 0 = \rho(L_2)$ . De plus on a vu aussi que pour  $c > 1/2$ , on s'attend à  $L_1 = 0$  et  $\rho(l_2) = 0$

J'explique dans cette section deux méthodes pour calculer  $\rho$ . La première, voir section 11.2.1, est une méthode que j'ai trouvée moi-même, l'idée est d'appliquer deux fois Tricomi à des fonctions bien choisies. La deuxième, voir section 11.2.2, qui suit une méthode de E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi et J.-B. Zuber utilisée dans le contexte des graphes planaires [BIPZ78], s'appuie sur l'analyse complexe, elle est efficace mais a pour inconvénient la nécessité de deviner la solution.

### 11.2.1 Double Tricomi

J'explique ici une méthode que j'ai trouvée moi-même et qui permet de résoudre Eq. (11.16) en appliquant le théorème de **Tricomi deux fois** à des fonctions bien choisies.

On cherche  $\rho(x)$  sous la forme d'une densité à support  $\text{Supp}[\rho] = [l_1, l_2] \cup [L_1, L_2]$

avec  $l_1 < l_2 \leq 0 \leq L_1 < L_2$ . On pose

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1(x) & \text{pour } x \in [l_1, l_2] \\ \rho_2(x) & \text{pour } x \in [L_1, L_2] \end{cases} \quad (11.17)$$

avec  $\int_{l_1}^{l_2} dx \rho_1(x) = 1 - c$  et  $\int_{L_1}^{L_2} dx \rho_2(x) = c$ . Dans un premier temps, on supposera seulement  $\rho_1(l_1) = 0 = \rho_2(L_2)$ . Ce n'est qu'à la fin qu'on ajoutera les conditions  $L_1 = 0$  et  $\rho_1(l_2) = 0$ .

### 11.2.1.1 Solution pour $g(x)$ polynomial

L'équation (11.16) s'écrit en termes des densités  $\rho_{1,2}$  :

$$\int_{l_1}^{l_2} dx' \frac{\rho_1(x')}{x - x'} + \int_{L_1}^{L_2} dx' \frac{\rho_2(x')}{x - x'} = g(x) \quad , \quad x \in [L_1, L_2] \quad (11.18)$$

$$\int_{l_1}^{l_2} dx' \frac{\rho_1(x')}{x - x'} + \int_{L_1}^{L_2} dx' \frac{\rho_2(x')}{x - x'} = g(x) \quad , \quad x \in [l_1, l_2] \quad (11.19)$$

On remarquera que pour  $x \in [L_1, L_2]$ ,  $\int_{l_1}^{l_2} dx' \frac{\rho_1(x')}{x - x'}$  est une intégrale normale sans partie principale. De même pour  $x \in [l_1, l_2]$  et l'intégrale sur  $[L_1, L_2]$ .

L'idée est de **résoudre d'abord la première équation** (11.18) pour  $\rho_2(x)$  sur  $[L_1, L_2]$  par la méthode de **Tricomi**, cf section 2.4, **comme si  $\rho_1$  était connue**. On remplace ensuite dans la seconde équation (11.19).

L'équation (11.18) se réécrit :

$$\int_{L_1}^{L_2} dx' \frac{\rho_2(x')}{x - x'} = \tilde{g}(x) = g(x) - \int_{l_1}^{l_2} dx' \frac{\rho_1(x')}{x - x'} \quad \text{pour } x \in [L_1, L_2] \quad (11.20)$$

Cette équation peut se résoudre pour  $\rho_2$  sur  $[L_1, L_2]$  par Tricomi avec second membre  $\tilde{g}(x)$ , cf Eq. (2.84) :

$$\rho_2(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x - L_1} \sqrt{L_2 - x}} \left[ c + \int_{L_1}^{L_2} \frac{dt \sqrt{t - L_1} \sqrt{L_2 - t}}{\pi (t - x)} \tilde{g}(t) \right] \quad (11.21)$$

où  $c = \int_{L_1}^{L_2} dx \rho_2(x)$  et  $\tilde{g}(x) = g(x) - \int_{l_1}^{l_2} dx' \frac{\rho_1(x')}{x - x'}$ .

On peut alors simplifier l'expression. En effet pour  $x \in [L_1, L_2]$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{L_1}^{L_2} \frac{dt \sqrt{t - L_1} \sqrt{L_2 - t}}{\pi (t - x)} \int_{l_1}^{l_2} du \frac{\rho_1(u)}{t - u} &= \int_{l_1}^{l_2} du \rho_1(u) \int_{L_1}^{L_2} \frac{dt \sqrt{t - L_1} \sqrt{L_2 - t}}{\pi (t - x)(t - u)} \\ &= \int_{l_1}^{l_2} du \rho_1(u) \left[ -1 + \frac{\sqrt{L_1 - u} \sqrt{L_2 - u}}{x - u} \right] \\ &= (c - 1) + \int_{l_1}^{l_2} du \frac{\sqrt{L_1 - u} \sqrt{L_2 - u}}{x - u} \rho_1(u) \end{aligned} \quad (11.22)$$

D'où, pour  $x \in [L_1, L_2]$  :

$$\rho_2(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x-L_1} \sqrt{L_2-x}} \left[ 1 + \int_{L_1}^{L_2} \frac{dt}{\pi} \frac{\sqrt{t-L_1} \sqrt{L_2-t}}{t-x} g(t) - \int_{l_1}^{l_2} du \frac{\sqrt{L_1-u} \sqrt{L_2-u}}{x-u} \rho_1(u) \right] \quad (11.23)$$

On veut que  $\rho$  soit continue aux bords de son support global  $l_1$  et  $L_2$ , donc on impose en particulier  $\rho_2(L_2) = 0$ . On trouve alors la condition :

$$1 - \int_{L_1}^{L_2} \frac{dt}{\pi} \frac{\sqrt{t-L_1}}{\sqrt{L_2-t}} g(t) - \int_{l_1}^{l_2} du \frac{\sqrt{L_1-u}}{\sqrt{L_2-u}} \rho_1(u) = \rho_2(L_2) = 0 \quad (11.24)$$

et la densité se récrit pour  $x \in [L_1, L_2]$  :

$$\rho_2(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{L_2-x}{x-L_1}} \left[ \int_{L_1}^{L_2} \frac{dt}{\pi} \sqrt{\frac{t-L_1}{L_2-t}} \frac{g(t)}{(t-x)} - \int_{l_1}^{l_2} du \sqrt{\frac{L_1-u}{L_2-u}} \frac{\rho_1(u)}{(x-u)} \right] \quad (11.25)$$

On **remplace** alors l'expression de  $\rho_2$  Eq. (11.25) dans l'équation initiale Eq. (11.19) pour  $x \in [l_1, l_2]$  :

$$- \int_{l_1}^{l_2} dx' \frac{\rho_1(x')}{x-x'} + g(x) = \int_{L_1}^{L_2} dx' \frac{\rho_2(x')}{x-x'} = I + J \quad (11.26)$$

où on peut écrire par interversion des intégrales sur  $x'$  et  $t$  (ou sur  $x'$  et  $u$ ) :

$$\begin{aligned} I &= \int_{L_1}^{L_2} \frac{dx'}{\pi} \sqrt{\frac{L_2-x'}{x'-L_1}} \int_{L_1}^{L_2} \frac{dt}{\pi} \sqrt{\frac{t-L_1}{L_2-t}} \frac{g(t)}{(t-x')(x-x')} \\ &= \int_{L_1}^{L_2} \frac{dt}{\pi} \sqrt{\frac{t-L_1}{L_2-t}} \frac{g(t)}{(x-t)} \sqrt{\frac{L_2-x}{L_1-x}} \end{aligned} \quad (11.27)$$

$$\begin{aligned} J &= - \int_{L_1}^{L_2} \frac{dx'}{\pi} \sqrt{\frac{L_2-x'}{x'-L_1}} \int_{l_1}^{l_2} du \sqrt{\frac{L_1-u}{L_2-u}} \frac{\rho_1(u)}{(x'-u)(x-x')} \\ &= - \int_{l_1}^{l_2} du \sqrt{\frac{L_1-u}{L_2-u}} \frac{\rho_1(u)}{(u-x)} \left[ \sqrt{\frac{L_2-x}{L_1-x}} - \sqrt{\frac{L_2-u}{L_1-u}} \right] \\ &= - \sqrt{\frac{L_2-x}{L_1-x}} \int_{l_1}^{l_2} du \sqrt{\frac{L_1-u}{L_2-u}} \frac{\rho_1(u)}{(u-x)} - \int_{l_1}^{l_2} dx' \frac{\rho_1(x')}{(x-x')} \end{aligned} \quad (11.28)$$

Après simplification (en particulier le terme  $-\int_{l_1}^{l_2} dx' \frac{\rho_1(x')}{(x-x')}$  disparaît car il est à la fois dans les membres de gauche et de droite -dans  $J$ - de l'équation (11.26)) pour  $x \in [l_1, l_2]$  :

$$\int_{l_1}^{l_2} du \sqrt{\frac{L_1-u}{L_2-u}} \frac{\rho_1(u)}{(u-x)} = G(x) \quad , \quad x \in [l_1, l_2] \quad (11.29)$$

$$\text{où } G(x) = -g(x) \sqrt{\frac{L_1-x}{L_2-x}} + \int_{L_1}^{L_2} \frac{dt}{\pi} \sqrt{\frac{t-L_1}{L_2-t}} \frac{g(t)}{(x-t)}$$

L'équation ci-dessus (11.29) peut maintenant être résolue par la méthode de Tricomi (cf section 2.4) pour  $f(u) = \sqrt{\frac{L_1-u}{L_2-u}} \rho_1(u)$  sur  $[l_1, l_2]$  et avec la fonction second membre  $G(x)$ . On trouve pour  $x \in [L_1, l_2]$  :

$$\sqrt{\frac{L_1-x}{L_2-x}} \rho_1(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x-l_1} \sqrt{l_2-x}} \left[ C - \int_{l_1}^{l_2} \frac{dx'}{\pi} \frac{\sqrt{x'-l_1} \sqrt{l_2-x'}}{x'-x} G(x') \right] \quad (11.30)$$

où  $C = \int_{l_1}^{l_2} dx \sqrt{\frac{L_1-x}{L_2-x}} \rho_1(x)$ . Pour que  $\rho$  soit continue aux bords, on impose de plus  $\rho_1(l_1) = 0$ , ce qui donne la condition :

$$C - \int_{l_1}^{l_2} \frac{dx'}{\pi} \sqrt{\frac{l_2-x'}{x'-l_1}} G(x') = 0 \quad (11.31)$$

et la densité  $\rho_1$  est alors donnée par :

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_1(x) &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x-l_1}{l_2-x}} \sqrt{\frac{L_2-x}{L_1-x}} \int_{l_1}^{l_2} \frac{dx'}{\pi} \sqrt{\frac{l_2-x'}{x'-l_1}} \frac{G(x')}{x-x'} , \quad x \in [l_1, l_2] \\ \text{où } G(x) &= -g(x) \sqrt{\frac{L_1-x}{L_2-x}} + \int_{L_1}^{L_2} \frac{dt}{\pi} \sqrt{\frac{t-L_1}{L_2-t}} \frac{g(t)}{(x-t)} \end{aligned}} \quad (11.32)$$

La fonction  $G(x)$  est complètement déterminée par  $g(x)$ . On a donc déterminé  $\rho_1$  en fonction de la donnée  $g(x)$ . Ici on a supposé seulement  $\rho(l_1) = 0 = \rho(L_2)$ . On n'a pas fait d'hypothèse sur les bords intérieurs  $l_2$  et  $L_1$ .

### 11.2.1.2 Solution pour $g(x) = x$

Revenons à notre problème de valeurs propres positives. Dans ce cas on a  $g(x) = x$ . On peut donc calculer explicitement  $G(x)$  Eq. (11.32). On trouve :

$$G(x) = \frac{L_1 - L_2}{2} - x \quad (11.33)$$

D'où l'expression explicite de  $\rho_1$ , cf Eq. (11.32) :

$$\rho_1(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x-l_1}{l_2-x}} \sqrt{\frac{L_2-x}{L_1-x}} \left[ \frac{l_2-l_1}{2} + \frac{L_1-L_2}{2} - x \right] , \quad x \in [l_1, l_2] \quad (11.34)$$

Les conditions  $\rho_1(l_1) = 0 = \rho_2(L_2)$ , resp. (11.31) et (11.24) imposées plus haut deviennent dans ce cas particulier  $C = \frac{(l_1-l_2)}{8} (3l_1 + l_2 + 2L_2 - 2L_1)$  et  $1 = \frac{(L_2-L_1)}{8} (L_1 + 3L_2) + \frac{(l_1-l_2)}{8} (3l_1 + l_2 + 2L_2 - 2L_1)$ , soit :

$$1 = \frac{(L_2 - L_1)}{8} (L_1 + 3L_2) + \frac{(l_1 - l_2)}{8} (3l_1 + l_2 + 2L_2 - 2L_1) \quad (11.35)$$

De plus on doit avoir  $\int_{l_1}^{l_2} dx \rho_1(x) = 1 - c$ , ce qui donne une condition supplémentaire sur les  $l_{1,2}$  et  $L_{1,2}$ .



Enfin il reste à imposer des conditions en  $l_2$  et  $L_1$ . Comme on a vu plus haut, on s'attend physiquement pour  $c > 1/2$  à  $L_1 = 0$  et  $\rho_2(x)$  non nul en  $x = L_2$ . dans ce cas on aura  $l_2 < 0$  et par continuité de  $\rho$  (attendue en tout  $x \neq 0$ ), on doit avoir  $\rho_1(l_2) = 0$ .

Finalement on trouve donc :

$$\rho_1(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{x-l_1} \sqrt{l_2-x} \sqrt{\frac{L_2-x}{-x}} \quad \text{pour } x \in [l_1, l_2] \quad (11.36)$$

avec (11.35) et la condition  $\rho_1(l_2) = 0$  pour  $L_1 = 0$ , soit :

$$1 = \frac{3L_2^2}{8} + \frac{(l_1-l_2)}{8} (3l_1+l_2+2L_2) \quad \text{et} \quad L_2 = -(l_1+l_2) \quad (11.37)$$

On pose  $a = -\frac{L_2}{l_1} = 1 + \frac{l_2}{l_1}$  d'après (11.37). On a alors :

$$\boxed{L_2 = L = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2-a+1}}, \quad l_1 = -\frac{L}{a}, \quad l_2 = -L(a) \left(1 - \frac{1}{a}\right), \quad a \in [1, 2]} \quad (11.38)$$

Finalement la densité  $\rho(x)$  donnée par  $\rho_1(x)$  sur  $[l_1, l_2]$  et  $\rho_2(x)$  sur  $[L_1, L_2] = [0, L_2]$  s'écrit :

$$\boxed{\rho(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{(x-l_1)(x-l_2)(L_2-x)}{x}}, \quad x \in [l_1, l_2] \cup [L_1, L_2]} \quad (11.39)$$

avec  $l_{1,2}$  et  $L_2$  donnés Eq. (11.38) comme fonctions du paramètre  $a$ , et où  $a = a(c)$  est déterminé implicitement comme fonction de  $c$  avec la condition  $\int_0^{L_2} dx \rho_2(x) = c$ , soit après réarrangement :

$$\int_0^1 dy \sqrt{\frac{1-y}{y}} \sqrt{y^2+y+\frac{a-1}{a^2}} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{a-1}{a^2}\right) c \quad (11.40)$$

Le paramètre  $a$  varie entre  $1 \leq a \leq 2$  pour  $1/2 \leq c \leq 1$ .

## 11.2.2 Analyse complexe

On peut également résoudre l'équation (11.16) par une méthode d'analyse complexe similaire à celle qu'on a vue section 2.4.2, mais ici pour une densité à deux supports disjoints  $\mathcal{S} = [l_1, l_2] \cup [L_1, L_2]$ . Le seul inconvénient est qu'il faut plus ou moins deviner la solution.

### 11.2.2.1 Solution pour $g(x)$ polynomial

On définit sur le plan complexe la fonction  $F$  :

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\rho(x)}{z-x}, \quad z \in \mathbb{C}, z \notin [l_1, l_2] \cup [L_1, L_2] \quad (11.41)$$

La fonction  $g(x)$  est donnée, elle est réelle sur  $[l_1, l_2] \cup [L_1, L_2]$ . On cherche  $\rho$ .  $F$  a les propriétés suivantes :

1/  $F(z)$  est analytique partout sur le plan complexe sauf sur les segments réels  $[l_1, l_2] \cup [L_1, L_2]$  où elle a une coupure.

2/  $F(z) \sim \frac{1}{z}$  quand  $|z| \rightarrow \infty$  (car  $\int_{\mathcal{S}} \rho = 1$ ).

3/  $F(z)$  est réelle pour  $z \in \mathbb{R} \setminus [l_1, l_2] \cup [L_1, L_2]$ .

4/ Lorsqu'on approche de la coupure  $[l_1, l_2] \cup [L_1, L_2]$  on trouve deux valeurs différentes selon qu'on vienne d'au-dessus ou d'en-dessous :  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F(x \pm i\epsilon) = g(x) \mp i\pi\rho(x)$  pour  $x \in [l_1, l_2] \cup [L_1, L_2]$  où  $\rho(x)$  est réelle (à déterminer).

Les quatre propriétés ci-dessus constituent un **problème de Riemann-Hilbert**, cf section 2.4.2. Selon la théorie de l'analyse complexe, il existe une *unique* fonction  $F(z)$  qui les satisfait. Si on peut deviner la forme de  $F$  alors on a la solution  $\rho(x)$  :

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} \text{Im} [F(x - i0^+)] \quad \text{pour } x \in [l_1, l_2] \cup [L_1, L_2] \quad (11.42)$$

On a vu qu'on s'attend physiquement (cf plus haut section 11.1.2) à  $\rho(l_1) = 0 = \rho(l_2)$ ,  $\rho(L_2) = 0$  et  $L_1 = 0$  (ces conditions peuvent aussi se deviner à l'aide de simulations numériques). On pose  $L_2 = L$ ,  $l_1 = -L/a$  et  $l_2 = -bL$ . Avec ces conditions et connaissant la forme habituelle des solutions d'équations de type Tricomi, ie des solutions sous forme de racines associées aux coupures de  $F$  et multipliées par des polynômes, on s'attend à une densité de la forme :

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{(x - l_1)(x - l_2)(L_2 - x)}{x}} h(x) \quad (11.43)$$

où  $h(x)$  est un polynôme à coefficients réels. On notera  $L_2 = L$  et  $a = -L_2/l_1$  soit  $l_1 = -L/a$  et  $l_2 = -bL$ . La condition 4/ suggère de poser sur  $\mathbb{C} \setminus [-L/a, -bL] \cup [0, L]$  l'ansatz :

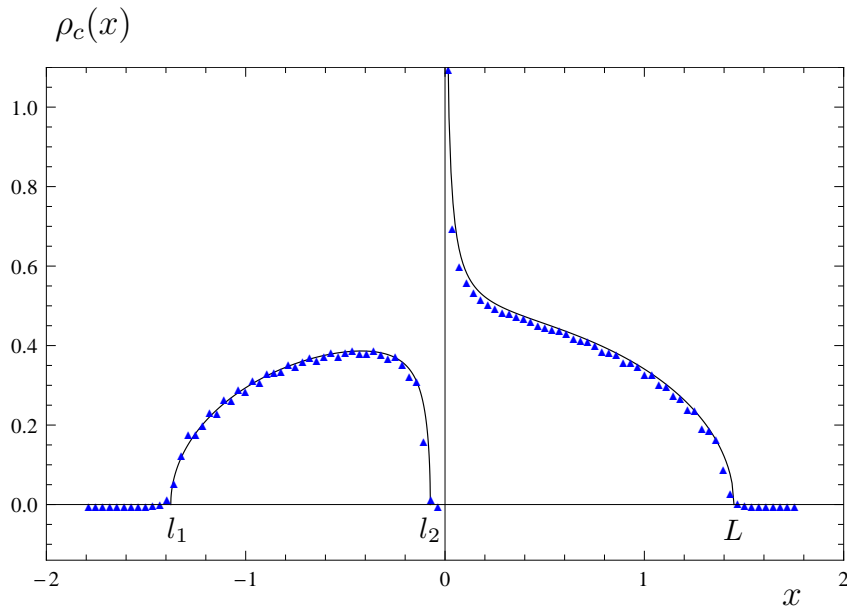
$$F(z) = g(z) - \pi \sqrt{\frac{(z + L/a)(z + bL)(z - L)}{z}} h(z) \quad (11.44)$$

En effet, dans ce cas on aura bien pour  $x \in \mathcal{S}$  :  $F(x + i0^+) = g(x) - i\pi\rho(x)$ .

L'ansatz (11.44) pour  $F(z)$  est bien analytique sur  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$  et réelle sur  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{S}$ . Reste à imposer la condition 2/ pour  $|z| \rightarrow \infty$ . Quand  $|z| \rightarrow \infty$  on doit avoir  $F(z) \sim 1/z$ , d'où :

$$\frac{1}{z} = g(z) - \pi h(z) \left[ z + \frac{L}{2} \left( (b-1) + \frac{1}{a} \right) + \frac{L^2}{8a^2z} (-1 - 2a - a^2 + 2ab - 2a^2b - a^2b^2) + \dots \right] \quad (11.45)$$

Si  $g(z)$  est un polynôme de degré  $n$  alors  $h(z)$  devra être un polynôme de degré  $(n-1)$  et il faut développer la racine carrée pour  $|z| \rightarrow \infty$  jusqu'à l'ordre  $O(z^{-n})$ . Ensuite on identifie les termes du membre de gauche et de droite à tous les ordres en  $z$  jusqu'à l'ordre  $O(1/z)$ .



**Figure 11.2** – Densité optimale (adimensionnée)  $\rho_c(x)$  avec  $N_+ = cN$  valeurs propres positives (pour une matrice gaussienne  $N \times N$  de l'ensemble GUE) tracée en fonction de  $x$  pour  $c = 0.6$ . Le trait plein noir est la prédiction analytique :  $\rho_c(x)$  est donnée Eq. (11.49) dans la limite  $N \rightarrow \infty$  (elle est indépendante de  $N$ ). Les triangles bleus sont des données numériques obtenues par simulation Monte Carlo pour  $N = 50$ , cf chapitre 14.

### 11.2.2.2 Solution pour $g(x) = x$

Considérons maintenant le cas  $g(x) = x$  (polynôme de degré 1) qui est celui de la distribution de  $\mathcal{N}_+$ . Dans ce cas, l'équation (11.45) avec  $g(z) = z$  impose que  $h(z)$  soit une constante  $h$  et donne plus précisément :

$$\pi h = 1, \quad b = 1 - \frac{1}{a}, \quad 1 = \frac{L^2}{8a^2z} (-1 - 2a - a^2 + 2ab - 2a^2b - a^2b^2) \quad (11.46)$$

On retrouve donc les résultats obtenus par double Tricomi : la densité  $\rho$  est donnée par (11.43) avec

$$h(z) = h = \frac{1}{\pi}, \quad b = 1 - \frac{1}{a}, \quad L = L(a) = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 - a + 1}} \quad (11.47)$$

Reste à imposer la contrainte  $\int_0^L dx \rho(x) = c$ , qui donne comme précédemment (11.40).

## 11.3 DISTRIBUTION DU NOMBRE DE VALEURS PROPRES POSITIVES $\mathcal{N}_+$

### 11.3.1 Densité optimale

On a vu dans la section précédente 11.2 que la densité optimale  $\rho_c$ , ie solution de l'équation de point col (11.14) (ou Eq. (11.16)) avec les contraintes (11.15) est une **densité à support fini** fait de **deux segments disjoints**  $\mathcal{S} = [l_1, l_2] \cup [L_1, L_2]$  avec  $l_1, 2$

et  $L_{1,2}$  donnés Eq. (11.38) :

$$L_2 = L = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 - a + 1}}, \quad L_1 = 0, \quad l_1 = -\frac{L}{a}, \quad l_2 = -L \left(1 - \frac{1}{a}\right) \quad (11.48)$$

où  $a$  est une fonction de  $c$  donnée implicitement par (11.50). La densité  $\rho_c$  est tracée Fig. 11.2 et 11.1, elle est explicitement donnée par (11.39)

$$\rho_c(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{(x - l_1)(x - l_2)(L_2 - x)}{x}}, \quad x \in [l_1, l_2] \cup [L_1, L_2] \quad (11.49)$$

avec  $l_{1,2}$  et  $L_2$  donnés Eq. (11.48) comme fonctions du paramètre  $a$ , et où  $a = a(c)$  est déterminé implicitement comme fonction de  $c$  avec la condition  $\int_0^{L_2} dx \rho_2(x) = c$ , cf (11.40), soit :

$$\int_0^1 dy \sqrt{\frac{1-y}{y}} \sqrt{y^2 + y + \frac{a-1}{a^2}} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{a-1}{a^2}\right) c \quad (11.50)$$

Le paramètre  $a$  varie entre  $1 \leq a \leq 2$  pour  $1/2 \leq c \leq 1$ .

- Considérons le cas  $c = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire quand la moitié des valeurs propres sont positives, ce qui correspond à la **situation moyenne**. Dans ce cas  $a = 1$  et on a d'après (11.48)

$$L_2 = \sqrt{2}, \quad L_1 = 0, \quad l_1 = -\sqrt{2}, \quad l_2 = 0 \quad (11.51)$$

et la densité est simplement le **demi-cercle de Wigner** comme en l'absence de contrainte sur le nombre de valeurs propres positives, cf Eq. (2.26) :

$$\rho_c(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{2 - x^2}, \quad x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \quad (11.52)$$

$\rho_c$  est alors continue en  $x = 0$  et le double support se réunit en un seul support connexe, cf figure 11.1.

- Considérons le cas  $c = 1$ , c'est-à-dire quand **toutes les valeurs propres sont positives**, ce qui correspond à une situation extrême. Dans ce cas  $a = 2$  et on a d'après Eq. (11.48)

$$L_2 = \sqrt{\frac{8}{3}}, \quad L_1 = 0, \quad l_1 = -\frac{L}{2} = -\sqrt{\frac{2}{3}} = l_2 \quad (11.53)$$

Le support  $[l_1, l_2]$  disparaît, reste seul  $[0, L]$ . En effet aucune valeur propre n'est négative, donc  $\rho_1 = 0$ . La densité est alors donnée par :

$$\rho_c(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{L-x}{x}} \left(x + \frac{L}{2}\right) \quad \text{pour } x \in ]0, L] \quad \text{avec } L = \sqrt{\frac{8}{3}} \quad (11.54)$$

$\rho_c$  diverge comme une racine en  $0^+$  (comme dans le cas général).

- **Cas général** : Pour  $1/2 < c < 1$ , le paramètre  $a$  varie entre 1 et 2 et la densité est non nulle sur deux supports disjoints non dégénérés  $[-L/a, -L(1-1/a)] \cup ]0, L]$ . Elle s'annule comme une racine en  $-L/a, -L(1-1/a)$  et  $L$ . Elle diverge en  $0^+$  comme  $1/\sqrt{x}$ .

### 11.3.2 Energie de point col

Pour calculer la distribution de  $\mathcal{N}_+$ , on a besoin de l'expression de l'énergie effective  $E_c[\rho]$  (11.12) minimale, c'est-à-dire calculée pour  $\rho = \rho_c$ . Comme  $\rho_c$  satisfait les contraintes  $\int_S dx \rho_c(x) = 1$  et  $c = \int_0^L dx \rho_c(x) = \int dx \theta(x) \rho_c(x)$  ainsi que l'équation de point col Eq. (11.13), l'énergie minimale se simplifie sous la forme :

$$\begin{aligned} E_c[\rho_c] &= -\frac{1}{2} \int_S dx \rho_c(x) \left( \frac{x^2}{2} + \mu_0 + \mu_1 \theta(x) \right) + \frac{1}{2} \int_S dx x^2 \rho_c(x) \\ &= -\frac{\mu_0}{2} - \mu_1 \frac{c}{2} + \frac{1}{4} \int_S dx x^2 \rho_c(x) \end{aligned} \quad (11.55)$$

Les multiplicateurs de Lagrange  $\mu_{0,1}$  sont calculés en remplaçant  $x$  successivement par deux valeurs particulières, par exemple  $x = -L/a$  et  $x = L$  dans (11.13) :

$$\begin{aligned} \int_S dx' \rho_c(x') \ln |x' + L/a| &= \frac{L^2}{2a^2} + \mu_0 \\ \int_S dx' \rho_c(x') \ln |L - x'| &= \frac{L^2}{2} + \mu_0 + \mu_1 \end{aligned} \quad (11.56)$$

On voudrait trouver une expression un peu simplifiée des intégrales ci-dessus Eq. (11.56). On a introduit plus haut la fonction  $F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\rho_c(x)}{z-x}$  sur le plan complexe, cf Eq. (11.41). On a vu que  $F(z)$  est donnée explicitement ici par Eq. (11.44) avec  $h(z) = 1/\pi$  et  $g(z) = z$ .

On peut donc écrire :

$$\frac{d}{dz} \left[ \int_S dx \rho_c(x) \ln |z - x| \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\rho_c(x)}{z - x} = F(z) \quad \text{pour } z \in \mathbb{R}, z > L \quad (11.57)$$

D'où, en intégrant l'équation ci-dessus :

$$\int_S dx \rho_c(x) \ln |L - x| - \int_S dx \rho_c(x) \ln |z - x| = \int_z^L du F(u) \quad \text{pour } z > L \quad (11.58)$$

Or quand  $z \rightarrow \infty$ , on a  $\int_S dx \rho_c(x) \ln |z - x| \sim \ln z \int_S dx \rho_c(x) \sim \ln z$ . En ajoutant  $\ln \left( \frac{z}{L} \right) = -\int_z^L dx/x$  de chaque côté, on trouve une expression dans laquelle il est facile de prendre la limite  $z \rightarrow \infty$  :

$$\int_S dx \rho_c(x) \ln \left| \frac{L - x}{L} \right| - \int_S dx \rho_c(x) \ln \left| \frac{z - x}{z} \right| = \int_z^L du \left( F(u) - \frac{1}{u} \right), \quad z > L \quad (11.59)$$

donc quand  $z \rightarrow \infty$  :

$$\int_S dx \rho_c(x) \ln \left| \frac{L - x}{L} \right| = - \int_L^\infty du \left( F(u) - \frac{1}{u} \right) \quad (11.60)$$

De même sur  $] -\infty, -L/a]$ , on a :

$$\int_S dx \rho_c(x) \ln \left| \frac{L/a + x}{L/a} \right| = \int_{-\infty}^{-L/a} du \left( F(u) - \frac{1}{u} \right) \quad (11.61)$$

Or on a vu que  $F(z)$  est donnée explicitement ici par Eq. (11.44) avec  $h(z) = 1/\pi$  et  $g(z) = z$ , soit pour  $z \in \mathbb{C} \setminus [-\frac{L}{a}, -L(1 - \frac{1}{a})] \cup [0, L]$  :

$$F(z) = z - \sqrt{\frac{(z + L/a)(z + (1 - 1/a)L)(z - L)}{z}} \quad (11.62)$$

La détermination de la racine ici est telle que  $\sqrt{z^2} = z$  pour  $z$  complexe. donc pour  $y \in \mathbb{R}_+$ , on  $\sqrt{y^2} = y$  et  $\sqrt{(-y)^2} = -y$ .

On note  $W_1(x) = F(x) - \frac{1}{x}$  pour  $x > L$  et  $W_2(x) = -\frac{1}{x} - F(-x)$  pour  $x > L/a$ , on a donc :

$$W_1(x) = x - \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{(x + \frac{L}{a})(x + (1 - \frac{1}{a})L)(x - L)}{x}}, \quad x > L \quad (11.63)$$

$$W_2(x) = x - \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{(-x + \frac{L}{a})(-x + (1 - \frac{1}{a})L)(x + L)}{x}}, \quad x > \frac{L}{a}$$

Le signe devant la racine pour  $W_2$  est bien  $-$  du fait de la détermination de la racine spécifique choisie pour  $F(z)$ , cf (11.62). On a alors :

$$\int_{\mathcal{S}} dx \rho_c(x) \ln \left| \frac{L-x}{L} \right| = - \int_L^\infty du W_1(u)$$

$$\int_{\mathcal{S}} dx \rho_c(x) \ln \left| \frac{L/a+x}{L/a} \right| = - \int_{L/a}^\infty du W_2(u) \quad (11.64)$$

soit comme  $\int_{\mathcal{S}} dx \rho_c(x) = 1$  :

$$\int_{\mathcal{S}} dx \rho_c(x) \ln |L-x| = \ln L - \int_L^\infty du W_1(u)$$

$$\int_{\mathcal{S}} dx \rho_c(x) \ln |L/a+x| = \ln \left( \frac{L}{a} \right) - \int_{L/a}^\infty du W_2(u) \quad (11.65)$$

Finalement, d'après (11.56), on obtient donc l'expression suivante pour les **multipliateurs de Lagrange**  $\mu_{0,1}$  :

$$\mu_0 + \mu_1 = -\frac{L^2}{2} + \ln L - \int_L^\infty du W_1(u)$$

$$\mu_0 = -\frac{L^2}{2a^2} + \ln \left( \frac{L}{a} \right) - \int_{L/a}^\infty du W_2(u) \quad (11.66)$$

Par ailleurs, comme  $F(z)$  est définie par (11.41), on a :

$$F(z) = \frac{1}{z} + \frac{\int_{\mathcal{S}} dx x \rho_c(x)}{z^2} + \frac{\int_{\mathcal{S}} dx x^2 \rho_c(x)}{z^3} + \dots \quad \text{quand } |z| \rightarrow \infty \quad (11.67)$$

car  $\int \rho_c = 1$ . Le développement de l'expression explicite de  $F(z)$  donnée Eq. (11.62) permet de déterminer les moments de  $x$ . En particulier on trouve :

$$\int_{\mathcal{S}} dx x^2 \rho_c(x) = \frac{1}{2} \quad (11.68)$$

On remplace alors Eq. (11.66) et (11.68) dans l'expression de l'énergie Eq. (11.55)  $E_c[\rho_c] = -\frac{\mu_0}{2} - \mu_1 \frac{c}{2} + \frac{1}{4} \int dx x^2 \rho_c(x)$ , on trouve :

$$E_c[\rho_c] = \frac{L^2}{4a^2}(1 - c + ca^2) - \frac{1}{2} \ln L + \frac{(1 - c)}{2} \ln a + \frac{(1 - c)}{2} \int_{L/a}^{\infty} du W_2(u) + \frac{c}{2} \int_L^{\infty} du W_1(u) + \frac{1}{8} \quad (11.69)$$

La **densité de probabilité de  $\mathcal{N}_+$**  est donnée quand  $N \rightarrow \infty$  par la méthode du col, cf (11.11). Après normalisation de cette distribution, on trouve :

$$\mathcal{P}(\mathcal{N}_+ = cN) \approx \frac{e^{-\beta N^2 E_c[\rho_c]}}{e^{-\beta N^2 E_{1/2}[\rho_c]}} \approx e^{-\beta N^2 \Phi(c)} \quad (11.70)$$

où  $\Phi(c) = E_c[\rho_c] - E_{1/2}[\rho_c]$ . Le dénominateur (normalisation) ci-dessus est calculé comme le numérateur mais en l'absence de contrainte sur  $\mathcal{N}_+$ , ie pour  $\mathcal{N}_+ = N/2$  (ie  $c = 1/2$ ), ainsi il fait apparaître l'énergie de point col sans contrainte  $E_{1/2}[\rho_c]$ . On trouve donc :

$$\Phi(c) = \frac{L^2}{4a^2}(1 - c + ca^2) - \frac{1}{2} \ln L + \frac{(1 - c)}{2} \ln a - \frac{1}{4} - \frac{\ln 2}{4} + \frac{(1 - c)}{2} \int_{L/a}^{\infty} du W_2(u) + \frac{c}{2} \int_L^{\infty} du W_1(u) \quad (11.71)$$

où  $L = L(a)$  et  $a = a(c)$  donnés par Eq. (11.73) et (11.74).  $\Phi(c)$  est tracée figure 14.5.

Finalement on obtient donc **les grandes déviations de la distribution de  $\mathcal{N}_+$  pour  $N$  grand** :

$$\mathcal{P}(\mathcal{N}_+ = cN) \approx \begin{cases} e^{-\beta N^2 \Phi(c)} & \text{si } \frac{1}{2} \leq c \leq 1 \\ e^{-\beta N^2 \Phi(1-c)} & \text{si } 0 \leq c < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (11.72)$$

où  $\Phi(c)$  est donnée Eq. (11.71) avec  $L = L(a)$  donné par (cf (11.48))

$$L(a) = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 - a + 1}} \quad (11.73)$$

et où  $a$  est une fonction de  $c$  donnée implicitement par (cf (11.50))

$$\int_0^1 dy \sqrt{\frac{1-y}{y}} \sqrt{y^2 + y + \frac{a-1}{a^2}} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{a-1}{a^2}\right) c \quad (11.74)$$

On notera que comme toujours avec la méthode du gaz de Coulomb, Eq. (11.72) donne un équivalent logarithmique (symbole  $\approx$ ) de la distribution de probabilité de  $\mathcal{N}_+$  à  $N$  grand, mais pas un équivalent. En effet on a négligé des termes d'ordre  $N$  dans l'exponentielle.

### 11.3.3 Voisinage de $c = \frac{1}{2}$

On veut déterminer le comportement de la distribution de  $\mathcal{N}_+$  au voisinage de sa moyenne  $\frac{N}{2}$ , c'est-à-dire qu'on veut trouver étudier la grande déviation  $\Phi(c)$  Eq. (11.71) dans la limite  $c \rightarrow \frac{1}{2}$ , qui correspond à  $a \rightarrow 1$  (cf Eq. (11.74)). On pose

$$c = \frac{1}{2} + \delta, \quad \frac{a-1}{a^2} = \epsilon \text{ soit } a = \frac{1 - \sqrt{1-4\epsilon}}{2\epsilon} = 1 + \epsilon + 2\epsilon^2 + \dots \quad (11.75)$$

donc  $L = \sqrt{2} + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} + \frac{3\epsilon^2}{4\sqrt{2}} + \dots$ . Le développement de la condition (11.50) dans cette limite donne :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2}(1-\epsilon) \left( \frac{1}{2} + \delta \right) - \frac{\pi}{4} &= \int_0^1 dy \sqrt{\frac{1-y}{y}} \sqrt{y^2+y+\epsilon} - \int_0^1 dy \sqrt{1-y^2} \\ &= \epsilon \int_0^1 dy \sqrt{\frac{1-y}{y}} \frac{1}{\sqrt{y^2+y+\epsilon} + \sqrt{y^2+y}} \end{aligned} \quad (11.76)$$

Dans l'intégrale ci-dessus on ne peut pas prendre la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  directement car alors l'intégrale diverge quand  $y \rightarrow 0$  en  $\frac{1}{y}$ . Pour calculer un équivalent de cette intégrale quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , il suffit de regarder comment elle se comporte au voisinage de  $y = 0$ , soit quand  $\epsilon \rightarrow 0$  :

$$\int_0^1 dy \sqrt{\frac{1-y}{y}} \frac{1}{\sqrt{y^2+y+\epsilon} + \sqrt{y^2+y}} \sim \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{y}(\sqrt{y+\epsilon} + \sqrt{y})} \quad (11.77)$$

Cette dernière intégrale se calcule exactement. On trouve alors dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$   $\int_0^1 dy \sqrt{\frac{1-y}{y}} \frac{1}{\sqrt{y^2+y+\epsilon} + \sqrt{y^2+y}} \sim -\frac{\ln \epsilon}{2}$ . D'où :

$$\frac{\pi}{2}(1-\epsilon) \left( \frac{1}{2} + \delta \right) - \frac{\pi}{4} \sim -\frac{\epsilon \ln \epsilon}{2} \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0 \quad (11.78)$$

soit

$$\delta \sim -\frac{\epsilon \ln \epsilon}{\pi} \text{ ou encore } \epsilon \sim -\frac{\pi \delta}{\ln \delta} \quad (11.79)$$

On peut aussi développer dans cette limite  $L(a)$  la borne supérieure du support de la densité optimale

$$L(a) = \sqrt{2} + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} + \frac{3\epsilon^2}{4\sqrt{2}} + \dots \quad (11.80)$$

ainsi que les intégrales des fonctions  $W_{1,2}$  qui apparaissent dans l'expression de  $\Phi(s)$ ,  $\int_L^\infty du W_1(u) = \int_{\sqrt{2}}^\infty dx W_1(x + L - \sqrt{2})$  et  $\int_{L/a}^\infty du W_2(u) = \int_{\sqrt{2}}^\infty dx W_2(x + L/a - \sqrt{2})$  :

$$\begin{aligned} \int_L^\infty du W_1(u) &= -\frac{1}{2} + \ln 2 + \left( \frac{\pi-1}{2} \right) \epsilon + \left( \frac{3\pi-5}{4} \right) \epsilon^2 + \dots \\ \int_{L/a}^\infty du W_2(u) &= -\frac{1}{2} + \ln 2 - \left( \frac{\pi-1}{2} \right) \epsilon + \left( \frac{1-3\pi}{4} \right) \epsilon^2 + \dots \end{aligned} \quad (11.81)$$

De plus on a

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{4a^2}(1-c+ca^2) - \frac{1}{2} \ln L + \frac{(1-c)}{2} \ln a - \frac{1}{4} - \frac{\ln 2}{4} \\ = \frac{1}{4} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{c}{2} \right) \epsilon + \left( -\frac{3}{8} + \frac{3c}{4} \right) \epsilon^2 - \frac{\ln 2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (11.82)$$



avec  $c = \frac{1}{2} + \delta$  et  $\delta \sim -\frac{\epsilon \ln \epsilon}{\pi}$ , ie  $\epsilon \sim -\frac{\pi \delta}{\ln \delta}$  d'où d'après Eq. (11.71)

$$\Phi(c) \approx \frac{\pi \delta \epsilon}{2} \approx -\frac{\pi^2}{2} \frac{\delta^2}{\ln \delta} \quad \text{pour } c = \frac{1}{2} + \delta \text{ et } \delta \rightarrow 0 \quad (11.83)$$

Finalement pour  $N_+ = \frac{N}{2} + \delta N$  où  $\delta \ll 1$ , on a  $\ln \delta = \ln \left( \frac{N_+ - N/2}{N} \right) \sim -\ln N$  à l'ordre dominant pour  $N \gg 1$  et  $|N_+ - N/2| = \delta N \ll N$ . D'où  $\Phi(c = N_+/N) \sim -\frac{\pi^2}{2} \frac{\delta^2}{\ln \delta} \sim \frac{\pi^2}{2N^2} \frac{(N_+ - \frac{N}{2})^2}{\ln N}$  et **la distribution de  $\mathcal{N}_+$  est gaussienne près de sa moyenne** :

$$\mathcal{P}(\mathcal{N}_+ = N_+) \approx e^{-\frac{\beta \pi^2}{2 \ln N} (N_+ - \frac{N}{2})^2} \quad \text{pour } \left| N_+ - \frac{N}{2} \right| \ll N \quad (11.84)$$

Ce comportement gaussien près de la moyenne avait déjà été montré pour  $\beta = 1$  par Cavagna, Garrahan et Giardina [CGG00]. Comme la distribution de  $\mathcal{N}_+$  est très piquée autour de sa moyenne pour  $N$  grand, **la moyenne et la variance** de  $\mathcal{N}_+$  peuvent être calculées par méthode du col, seul le voisinage de la moyenne domine. La moyenne et variance de  $\mathcal{N}_+$  sont donc données à l'ordre dominant par celles de la gaussienne (11.84) :

$$\boxed{\langle \mathcal{N}_+ \rangle \sim \frac{N}{2}, \quad \text{Var } \mathcal{N}_+ \sim \frac{\ln N}{\beta \pi^2} \quad \text{pour } N \gg 1} \quad (11.85)$$

## 11.4 PROBABILITÉ D'UN GAP DANS LE SPECTRE

Grâce aux techniques que nous avons développées pour déterminer la solution d'une équation intégrale de type Tricomi quand cette solution est une densité à support fait de deux segments disjoints (cf section 11.2), nous pouvons maintenant résoudre d'autres problèmes analogues. Par exemple on peut se demander quelle est la **probabilité d'un gap dans le spectre d'une matrice gaussienne**, ie quelle est la probabilité qu'aucune valeur propre ne se trouve dans l'intervalle  $[\zeta_1, \zeta_2]$  pour  $\zeta_1 < \zeta_2$ .

Le scaling typique pour les valeurs propres d'une matrice gaussienne est  $\lambda_{\text{typ}} \asymp \sqrt{N}$  quand  $N \gg 1$  (cf Eq. 2.15), il est donc naturel de poser  $\boxed{\zeta_{1,2} = \sqrt{N} w_{1,2}}$  où  $w_i$  est d'ordre 1. On cherche à déterminer la probabilité d'un gap  $[w_1 \sqrt{N}, w_2 \sqrt{N}]$  dans le spectre que l'on notera  $\mathcal{P}(w_1, w_2)$ . Si on note  $c$  la fraction de valeurs propres  $\lambda_i$  telles que  $\lambda_i > w_2$  (à droite du spectre) et  $\mathcal{P}(w_1, w_2, c)$  la **probabilité d'un gap  $[w_1 \sqrt{N}, w_2 \sqrt{N}]$  avec exactement  $cN$  valeurs propres supérieures à  $w_2 \sqrt{N}$** , on peut alors écrire :

$$\mathcal{P}(w_1, w_2) = \int_0^1 dc \mathcal{P}(w_1, w_2, c) \quad (11.86)$$

On ne considérera dans la suite uniquement le cas  $w_1 < 0 < w_2$ .

### 11.4.1 Gap avec proportions fixées

Par définition la **probabilité d'un gap**  $[w_1\sqrt{N}, w_2\sqrt{N}]$  avec exactement  $cN$  valeurs propres supérieures à  $w_2\sqrt{N}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(w_1, w_2, c) = & \int d\lambda_1 \dots \int d\lambda_N \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \times \\ & \times \delta \left( \sum_i \theta(\lambda_i - w_2) - cN \right) \delta \left( \sum_i \theta(w_1 - \lambda_i) - (1-c)N \right) \end{aligned} \quad (11.87)$$

Quand  $N \rightarrow \infty$ , typiquement  $\lambda_i \asymp \sqrt{N}$ . On introduit les variables adimensionnées  $x_i = \lambda_i/\sqrt{N}$  et la densité adimensionnée  $\rho(x) = \frac{1}{N} \sum_i \delta(x - x_i)$ , cf Eq. (11.8). On s'attend à ce que  $\rho(x)$  tende vers une limite finie continue quand  $N \rightarrow \infty$ . L'intégrale multiple sur les  $\lambda_i$  Eq. (11.87) devient une intégrale fonctionnelle sur  $\rho$  qui peut se calculer à  $N$  grand par une **méthode du col** (comme dans le cas de  $\mathcal{N}_+$ ). Finalement, en tenant compte des contraintes, on obtient :

$$\mathcal{P}(w_1, w_2, c) \propto e^{-\beta N^2 E_{w_1, w_2, c}[\rho_c]} \quad \text{pour } N \gg 1 \quad (11.88)$$

où  $\rho_c$  est la densité optimale, ie qui minimise l'énergie effective  $E_{w_1, w_2, c}[\rho]$  donnée par :

$$\begin{aligned} E_{w_1, w_2, c}[\rho] = & -\frac{1}{2} \int dx \int dx' \rho(x) \rho(x') \ln |x - x'| + \frac{1}{2} \int dx x^2 \rho(x) \\ & + \mu_0 \left( \int dx \rho(x) - 1 \right) + \mu_1 \left( \int dx \theta(x - w_2) \rho(x) - c \right) \\ & + \mu_2 \left( \int dx \theta(w_1 - x) \rho(x) - (1 - c) \right) \end{aligned} \quad (11.89)$$

Des termes avec multiplicateurs de Lagrange  $\mu_{0,1,2}$  ont été ajoutés pour prendre en compte lors de la minimisation de l'énergie les contraintes  $\int \rho = 1$  (normalisation de la densité), et  $\int \theta(x - w_2) \rho = c$  et  $\int \theta(w_1 - x) \rho = (1 - c)$  qui imposent un gap  $[w_1\sqrt{N}, w_2\sqrt{N}]$  dans le spectre avec  $cN$  valeurs propres à droite de  $w_2$  et  $(1 - c)N$  à gauche de  $w_1$ .

La densité optimale  $\rho_c$  **minimise**  $E_{w_1, w_2, c}[\rho]$ , ie elle vérifie :

$$\int dx' \rho_c(x') \ln |x - x'| = \frac{x^2}{2} + \mu_0 + \mu_1 \theta(x - w_2) + \mu_2 \theta(w_1 - x), \quad x \in \text{Supp}[\rho_c] \quad (11.90)$$

soit après dérivation par rapport à  $x$  pour  $x < w_1$  ou  $x > w_2$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{\rho_c(x')}{x - x'} = x, \quad x \in \text{Supp}[\rho_c], x \notin [w_1, w_2] \quad (11.91)$$

C'est la même équation intégrale que pour le nombre de valeurs propres positives Eq. (11.14), mais les **conditions** imposées sur  $\rho_c$  ne sont pas les mêmes. Ici on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho_c(x) = 1, \quad \int_{w_2}^{+\infty} dx \rho_c(x) = c, \quad \int_{-\infty}^{w_1} dx \rho_c(x) = 1 - c \quad (11.92)$$

Discutons d'abord des conditions au bord physiques pour la densité optimale  $\rho_c(x)$ . On a supposé  $w_1 < 0 < w_2$ . Dans ce cas on s'attend à une accumulation de valeurs

propres juste au-dessus de  $w_2$  et de même juste au-dessous de  $w_1$ . En effet en moyenne un grand nombre de valeurs propres sont proches de l'origine quand il n'y a aucune contrainte. On s'attend donc à une **densité  $\rho_c$  à support fait de deux segments disjoints**  $[l_1, l_2] \cup [L_1, L_2]$  avec par continuité  $\rho_c(l_1) = 0 = \rho_c(L_2)$ . Comme on s'attend à une **accumulation de valeurs propres près de  $w_{1,2}$** , on doit avoir  $l_2 = w_1$  et  $L_1 = w_2$  avec une densité non nulle en  $w_{1,2}$ .

S'inspirant des résultats dans le cas du nombre de valeurs propres positives, on peut deviner la solution  $\rho_c$  de (11.91) à support  $\mathcal{S} = [l_1, w_1[\cup]w_2, L_2]$  telle que  $\rho_c(l_1) = 0 = \rho_c(L_2)$  :

$$\rho_c(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{(x-l_1)(L_2-x)}{(x-w_2)(x-w_1)}} h(x) \quad (11.93)$$

où  $h(x)$  est un polynôme à coefficients réels. Dans la méthode d'analyse complexe expliquée section 11.2.2, on prend pour  $F(z)$  l'ansatz :

$$F(z) = z - \sqrt{\frac{(z-l_1)(z-L_2)}{(z-w_2)(z-w_1)}} h(z) \quad (11.94)$$

Quand  $|z| \rightarrow \infty$  on doit avoir  $F(z) \sim \frac{1}{z}$  car  $\int \rho_c = 1$ . D'où  $h(z) = z + \frac{l_1+L_2-w_1-w_2}{2}$  et

$$8 = 3(l_1^2 + L_2^2) + 2l_1L_2 - 2(l_1 + L_2)(w_1 + w_2) - (w_2 - w_1)^2 \quad (11.95)$$

D'où l'expression de  $\rho_c(x)$  pour  $x \in \mathcal{S} = [l_1, w_1[\cup]w_2, L_2]$  :

$$\rho_c(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{(x-l_1)(L_2-x)}{(x-w_2)(x-w_1)}} \left| x + \frac{l_1 + L_2 - w_1 - w_2}{2} \right| \quad (11.96)$$

Reste à imposer la condition  $\int_{w_2}^{L_2} dx \rho_c(x) = c$  qui ne peut en fait pas se calculer explicitement (comme dans le cas de  $\mathcal{N}_+$ ). Cette dernière condition associée à Eq. (11.95) donne  $l_1$  et  $L_2$  à  $c$  fixé.

En utilisant Eq. (11.90), on voit que l'**énergie de point col** (cf Eq. (11.89)) s'écrit :

$$E_{w_1, w_2, c}[\rho_c] = -\frac{\mu_0}{2} - \frac{\mu_1 c}{2} - \frac{\mu_2(1-c)}{2} + \frac{1}{4} \int dx x^2 \rho(x) \quad (11.97)$$

Pour simplifier, on va **supposer** dans toute la suite que  $w_1 = -w_2 = -w$ . Dans ce cas,  $\rho_c$  Eq. (11.96) s'écrit :

$$\rho_c(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{(x-l_1)(L_2-x)}{(x^2-w^2)}} \left| x + \frac{l_1 + L_2}{2} \right|, \quad x \in [l_1, -w[\cup]w, L_2] \quad (11.98)$$

et Eq. (11.95) devient :

$$8 = 3l_1^2 + 3L_2^2 + 2l_1L_2 - 4w^2 \quad (11.99)$$

D'après Eq.(11.67), le comportement de  $F(z)$  (donnée explicitement Eq. (11.94)) en  $+\infty$  à l'ordre 3 en  $z$  donne, en utilisant Eq. (11.99) :

$$\int dx x^2 \rho_c(x) = w^2 \left( 1 - \frac{l_1L_2}{6} \right) + \frac{1}{2} - \frac{l_1L_2}{3} - \frac{l_1^2L_2^2}{6} \quad (11.100)$$

On peut calculer les **multiplicateurs de Lagrange** comme dans la section précédente en utilisant Eq. (11.90) :

$$\begin{aligned}\mu_0 + \mu_1 &= -\frac{L_2^2}{2} + \int_S dx \rho_c(x) \ln |L_2 - x| = -\frac{L_2^2}{2} + \ln L_2 - \int_{L_2}^{\infty} du W_1(u) \\ \mu_0 + \mu_2 &= -\frac{l_1^2}{2} + \int_S dx \rho_c(x) \ln |l_1 - x| = -\frac{l_1^2}{2} + \ln |l_1| - \int_{-l_1}^{\infty} du W_2(u)\end{aligned}\quad (11.101)$$

où  $W_1(x) = F(x) - \frac{1}{x}$  et  $W_2(x) = -\frac{1}{x} - F(-x)$ , soit :

$$\begin{aligned}W_1(x) &= x - \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{(x-l_1)(x-L_2)}{(x^2-w^2)}} \left(x + \frac{l_1+L_2}{2}\right), \quad x > L_2 \\ W_2(x) &= x - \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{(x+l_1)(x+L_2)}{(x^2-w^2)}} \left(x - \frac{l_1+L_2}{2}\right), \quad x > -l_1\end{aligned}\quad (11.102)$$

Finalement l'énergie de point col  $E_{w,c}[\rho_c] = E_{-w,w,c}[\rho_c]$  avec gap  $[-w\sqrt{N}, w\sqrt{N}]$  avec  $cN$  valeurs propres à droite de  $w\sqrt{N}$  s'écrit donc, cf Eq. (11.97),  $E_{w,c}[\rho_c] = -\frac{(\mu_0+\mu_1)c}{2} - \frac{(\mu_0+\mu_2)(1-c)}{2} + \frac{1}{4} \int dx x^2 \rho_c(x)$ , soit :

$$\begin{aligned}E_{w,c}[\rho_c] &= \frac{L_2^2 c}{4} + \frac{l_1^2(1-c)}{4} - \frac{c}{2} \ln L_2 - \frac{(1-c)}{2} \ln |l_1| + \frac{c}{2} \int_{L_2}^{\infty} du W_1(u) \\ &+ \frac{1}{4} \left[ w^2 \left(1 - \frac{l_1 L_2}{6}\right) + \frac{1}{2} - \frac{l_1 L_2}{3} - \frac{l_1^2 L_2^2}{6} \right] + \frac{(1-c)}{2} \int_{-l_1}^{\infty} du W_2(u)\end{aligned}\quad (11.103)$$

La **probabilité d'un gap**  $[-w\sqrt{N}, w\sqrt{N}]$  avec exactement  $cN$  valeurs propres à droite de  $w\sqrt{N}$  (et donc  $(1-c)N$  à gauche de  $-w\sqrt{N}$ ) est donnée par, cf Eq. (11.88) :

$$\boxed{\mathcal{P}(-w, w, c) \approx e^{-\beta N^2 \Phi(w, c)} \quad \text{où} \quad \Phi(w, c) = E_{w,c}[\rho_c] - E_{0,1/2}[\rho_c]}\quad (11.104)$$

où  $E_{w,c}[\rho_c]$  est donnée Eq. (11.103) et  $\Phi(w, c)$  Eq. (11.105). En effet la normalisation est donnée par l'énergie du gaz de Coulomb sans contrainte (sans gap), soit  $w = 0$  et  $c = 1/2$ .

D'après Eq. (11.103), on a :

$$\begin{aligned}\Phi(w, c) &= \frac{L_2^2 c}{4} + \frac{l_1^2(1-c)}{4} - \frac{c}{2} \ln L_2 - \frac{(1-c)}{2} \ln |l_1| \\ &+ \frac{1}{4} \left[ w^2 \left(1 - \frac{l_1 L_2}{6}\right) + \frac{1}{2} - \frac{l_1 L_2}{3} - \frac{l_1^2 L_2^2}{6} \right] \\ &+ \frac{c}{2} \int_{L_2}^{\infty} du W_1(u) + \frac{(1-c)}{2} \int_{-l_1}^{\infty} du W_2(u) - \frac{3}{8} - \frac{\ln 2}{4}\end{aligned}\quad (11.105)$$

où  $L_2 = L$  et  $l_1 = -L/a$  sont des fonctions de  $w$  déterminées par les deux contraintes  $\int_w^{L_2} dx \rho_c(x) = c$  et Eq. (11.99)

$$L_2 = L, \quad l_1 = -\frac{L}{a}, \quad \text{où} \quad L^2 = \frac{4(2+w^2)a^2}{3a^2 - 2a + 3}\quad (11.106)$$

où  $a$  est une fonction de  $c$  déterminée par  $\int_w^{L_2} dx \rho_c(x) = c$ .

• Cas  $\boxed{c = 1/2}$ . Dans ce cas par symétrie on aura  $l_1 = -L_2$ , soit  $a = 1$ . Alors Eq. (11.106) devient

$$L_2 = L = \sqrt{2 + w^2}, \quad l_1 = -L \quad (11.107)$$

La densité (11.98) devient

$$\rho_c(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{L^2 - x^2}{x^2 - w^2}} |x| \quad \text{pour } x \in [-L, -w \cup] w, L] \quad (11.108)$$

Dans ce cas on a  $\int dx x^2 \rho_c(x) = w^2 + \frac{1}{2}$  et  $\int_L^\infty du W_1(u) + \int_L^\infty du W_2(u) = -1 + \ln 2 + \ln(2 + w^2)$ . D'où :

$$E_{w,1/2}[\rho_c] = \frac{w^2}{2} + \frac{3}{8} + \frac{\ln 2}{4} \quad (11.109)$$

La probabilité qu'il y ait un gap  $[-w\sqrt{N}, w\sqrt{N}]$  dans le spectre avec **la moitié des valeurs propres supérieures à  $w\sqrt{N}$  et l'autre moitié inférieure à  $-w\sqrt{N}$**  est donnée par (cf Eq. (11.104)) :

$$\boxed{\mathcal{P}(-w, w, 1/2) \approx e^{-\beta N^2 \frac{w^2}{2}}} \quad (11.110)$$

• Cas  $\boxed{c = 1}$ . Dans ce cas il n'y a **aucune valeur propre inférieure à  $w\sqrt{N}$** . Donc  $l_1 = -w$ , on note  $L = L_2$ . D'après Eq. (11.99)

$$8 = w^2 + 3L^2 - 2wL - w^2 \quad \text{donc } L = \frac{w + 2\sqrt{w^2 + 6}}{3} \quad (11.111)$$

D'après Eq. (11.98) :

$$\rho_c(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{L-x}{x-w}} \left( x + \frac{L-w}{2} \right), \quad x \in [w, L] \quad (11.112)$$

On a alors  $\int dx x^2 \rho_c(x) = \frac{1}{2} + \frac{2w^2}{3} - \frac{w^4}{27} + \frac{2}{9}w\sqrt{6+w^2} + \frac{1}{27}w^3\sqrt{6+w^2}$  et  $\int_L^\infty du W_1(u) = -\frac{5}{6} + \frac{w^2}{18} - \frac{1}{18}w\sqrt{6+w^2} + 2\operatorname{argth} \left[ \frac{1}{3} + \frac{2w}{3\sqrt{6+w^2}} \right] + \ln 2$ .

Ainsi la **probabilité qu'il n'y ait aucune valeur propre inférieure à  $w\sqrt{N}$**  est donnée par (cf Eq. (11.104)) :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{P}(-w, w, 1) &\approx e^{-\beta N^2 \phi_1(w)} \\ \phi_1(w) &= \frac{w^2}{3} - \frac{w^4}{108} + \frac{5}{36}w\sqrt{6+w^2} \\ &\quad + \frac{1}{108}w^3\sqrt{6+w^2} + \frac{\ln 6}{4} - \frac{1}{2} \ln \left( -w + \sqrt{6+w^2} \right) \end{aligned}} \quad (11.113)$$

La fonction de grande déviation  $\phi_1(w)$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .  $\phi_1(w) \sim \frac{w^2}{2}$  quand  $w \rightarrow \infty$  et  $\phi_1(w) \sim -\frac{w^4}{54}$  quand  $w \rightarrow -\infty$ .

### 11.4.2 Probabilité d'un gap symétrique

On veut maintenant calculer la **probabilité d'un gap**  $[-w\sqrt{N}, w\sqrt{N}]$  **dans le spectre** de valeurs propres sans préciser la fraction de valeurs propres à droite de  $w$  et celle à gauche de  $-w$ . D'après Eq. (11.86), on a :

$$\mathcal{P}(-w, w) = \int_0^1 dc \mathcal{P}(-w, w, c) \approx \int_0^1 dc e^{-\beta N^2 \Phi(w, c)} \approx e^{-\beta N^2 \Phi(w, 1/2)} \quad (11.114)$$

La dernière égalité est obtenue par méthode du col quand  $N \gg 1$ . Le point col est atteint en  $c = 1/2$  car  $c = 1/2$  minimise  $\Phi(w, c)$ . En effet, par symétrie, pour un gap  $[-w\sqrt{N}, w\sqrt{N}]$ , il y aura en moyenne autant de valeurs propres à gauche de  $-w\sqrt{N}$  qu'à droite de  $w\sqrt{N}$ , soit  $c = 1/2$ . D'où

$$\boxed{\mathcal{P}(-w, w) \approx e^{-\beta N^2 \frac{w^2}{2}} \quad \text{pour } N \gg 1} \quad (11.115)$$

La probabilité d'un gap symétrique est une **gaussienne** centrée de variance  $\text{Var } w = \frac{1}{\beta N^2}$ .



## - Chapitre 12 -

---

# Valeur propre maximale : Tracy-Widom

---

L'objet de ce chapitre et du suivant est la distribution de la **valeur propre maximale**  $\lambda_{\max} = \max_i \lambda_i$  d'une matrice aléatoire gaussienne. Je présente la preuve d'un certain nombre de résultats que j'ai déjà annoncés au chapitre 3. Le point de départ est la distribution jointe des valeurs propres d'une **matrice gaussienne**, cf Eq. (3.5) :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B_N(\beta) e^{-\frac{\beta}{2} \sum_i \lambda_i^2} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad (12.1)$$

Cette distribution est celle des valeurs propres d'une matrice aléatoire gaussienne de l'ensemble GOE pour  $\beta = 1$ , GUE pour  $\beta = 2$  et GSE pour  $\beta = 4$ . Mais on peut également considérer la distribution (12.1) pour un  $\beta > 0$  quelconque.

Rappelons pour commencer l'expression de la densité moyenne pour une matrice gaussienne  $\rho_N(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \delta(\lambda - \lambda_i) \rangle$ . Dans la limite  $N \gg 1$ , cette densité est à support fini  $[-\sqrt{2N}, \sqrt{2N}]$ . Elle est donnée par le demi-cercle de Wigner, cf Eq. (2.26) :

$$\rho_N(\lambda) \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \rho^* \left( \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \right), \quad \rho^*(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{2 - x^2} \quad \text{pour } N \rightarrow \infty \quad (12.2)$$

La moyenne de la valeur propre maximale est donnée pour  $N \gg 1$  par la borne supérieure du support de la densité, soit :

$$\boxed{\langle \lambda_{\max} \rangle \sim \sqrt{2N} \quad \text{quand } N \rightarrow \infty} \quad (12.3)$$

Je montre dans ce chapitre comment j'ai pu calculer la **grande déviation droite** (ie à droite de la moyenne) de la distribution de la **valeur propre maximale d'une matrice GUE**, ie  $\beta = 2$  [NM11] dont j'ai déjà donné l'expression au chapitre 3, cf Eq.



(3.49). La méthode que j'ai utilisée s'appuie sur une technique de polynômes orthogonaux inspirée d'un article de Gross et Matytsin [GM94] dans le contexte de la chromodynamique quantique (QCD). Cette méthode m'a permis également de donner une **nouvelle dérivation**, plus élémentaire que celle d'origine, **de la loi de Tracy-Widom** pour  $\lambda_{\max}$  (toujours dans le cas GUE  $\beta = 2$ ), cf section 3.2.1. Ce chapitre correspond essentiellement à mon article récent avec mon directeur de thèse Satya [NM11].

## 12.1 IDÉE GÉNÉRALE ET NOTATIONS

Dans tout ce chapitre, on s'intéresse à la **distribution cumulative de la valeur propre maximale d'une matrice gaussienne de l'ensemble GUE**, ie  $\beta = 2$ . Cette distribution est la probabilité que la valeur propre maximale soit inférieure à  $y$ , c'est-à-dire la probabilité que toutes les valeurs propres soient inférieures à  $y$ . Elle est donnée par :

$$\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y) = \int_{-\infty}^y d\lambda_1 \dots \int_{-\infty}^y d\lambda_N \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad (12.4)$$

où la distribution des valeurs propres est celle de l'ensemble GUE, cf Eq. (12.1) avec  $\beta = 2$  :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B_N(2) e^{-\sum_i \lambda_i^2} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \quad (12.5)$$

Les fluctuations typiques de la valeur propre maximale  $\lambda_{\max}$  d'une matrice aléatoire gaussienne au voisinage de sa moyenne sont décrites par la **loi de Tracy-Widom**, cf section 3.2.1 :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_N \left[ \frac{\lambda_{\max} - \sqrt{2N}}{\left(N^{-\frac{1}{6}}/\sqrt{2}\right)} \leq x \right] = \mathcal{F}_\beta(x) \quad (12.6)$$

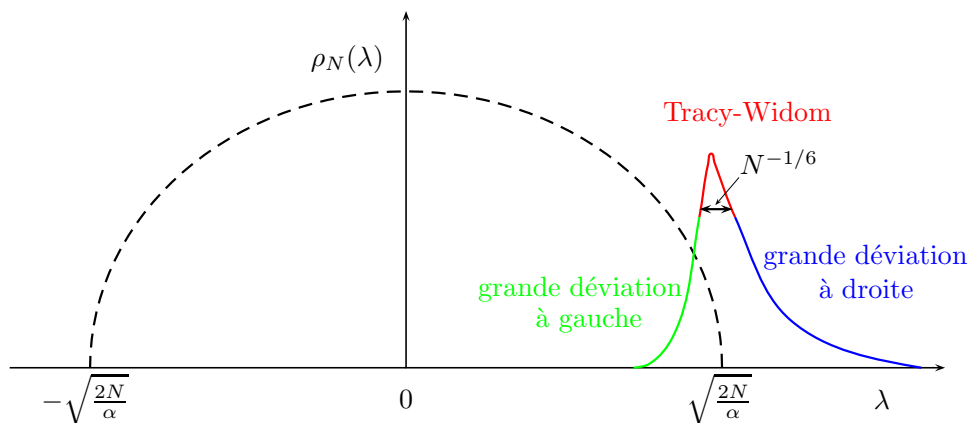
où  $\mathcal{F}_\beta$  est la loi de Tracy-Widom  $\beta$ , cf section 3.2.1. L'ensemble GUE correspond au cas  $\beta = 2$ .

La dérivation initiale de cette loi par Tracy et Widom [TW94, TW96] repose sur l'analyse asymptotique du déterminant de Fredholm du noyau d'Airy, elle est assez complexe. Cette distribution de Tracy-Widom  $\mathcal{F}_\beta(x)$  apparaît dans d'innombrables contextes, il est donc naturel de se demander s'il existe une preuve plus élémentaire de cette loi pour les matrices gaussiennes. Suivant la suggestion de mon directeur de thèse Satya, j'ai pu m'inspirer d'une technique développée par **Gross et Matytsin** [GM94] dans le contexte de la QCD et dériver de façon relativement élémentaire la loi de Tracy-Widom dans le cas GUE, ie  $\beta = 2$ .

Cette méthode permet en fait également de calculer la **grande déviation à droite** de la moyenne de  $\lambda_{\max}$ . Les grandes déviations décrivent les fluctuations de la valeur propre maximale d'ordre  $\sqrt{N}$  autour de sa moyenne  $\sqrt{2N}$ , elles décrivent des événements rares, loin de la moyenne, cf Fig. 12.1.

### 12.1.1 Méthode de Gross et Matytsin

Je présente ici l'idée générale de l'article de Gross et Matytsin [GM94] dont nous nous sommes inspirés.



**Figure 12.1** – Densité moyenne des valeurs propres d’une matrice gaussienne du GUE  $\rho_N(\lambda)$  comme fonction de  $\lambda$  (ligne pointillée noire) :  $\rho_N$  est donnée par le demi-cercle de Wigner, elle a un support  $[-\sqrt{\frac{2N}{\alpha}}, \sqrt{\frac{2N}{\alpha}}]$ . La moyenne de la valeur propre maximale est donnée par  $\langle \lambda_{\max} \rangle \sim \sqrt{\frac{2N}{\alpha}}$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . La distribution de  $\lambda_{\max}$  près de sa moyenne sur une échelle d’ordre  $N^{-1/6}$  est décrite par la loi de Tracy-Widom  $\mathcal{F}_\beta(x)$  (trait plein rouge). Par contre les fluctuations d’ordre  $\sqrt{N}$  sont décrites par les grandes déviations à gauche (trait plein vert) et à droite (trait plein bleu).

Dans la **théorie de Yang-Mills** à  $2D$  continue sur une sphère (avec groupe de jauge  $U(N)$ ), la **fonction de partition** peut être écrite comme une somme multiple :

$$Z(A, N) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N = -\infty}^{\infty} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (n_i - n_j)^2 e^{-(A/2N) \sum_{j=1}^N n_j^2} \quad (12.7)$$

où  $A$  est la surface de la sphère. Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , l’énergie libre  $\ln Z$  présente, quand on varie le paramètre  $A$ , une transition de phase du troisième ordre au point critique  $A_c = \pi^2$ . Cette transition est connue sous le nom de **transition de Douglas-Kazakov** [DK93].

Pour  $A > A_c$ , le système est dans la phase de “couplage fort”, tandis que pour  $A < A_c$  il est dans la phase de “couplage faible”. Pour une valeur de  $N$  grande mais finie, il y a un régime intermédiaire (crossover) de passage d’une phase à l’autre. Gross et Matytsin [GM94] ont montré qu’au voisinage du point critique, il existe une **limite de “double échelle”** (double scaling limit), définie par  $A \rightarrow A_c$  et  $N \rightarrow \infty$  mais avec le produit  $(A - A_c)N^{2/3}$  fixé, dans laquelle la partie singulière de l’énergie libre  $\ln Z$  est solution de l’équation de **Painlevé II** (cf Eq. (3.8)).

Gross et Matytsin ont utilisé une technique de **polynômes orthogonaux** pour analyser la somme multiple (12.7) dans la limite de double-échelle. Ils ont aussi pu analyser avec cette méthode le régime de **couplage faible**  $A < A_c$  et calculer dans ce régime des **corrections non-perturbatives** pour l’énergie libre (décroissant comme  $\sim e^{-kN}$  et non comme une puissance de  $1/N$ ).

En fait une transition du troisième ordre similaire avec une limite de double-échelle décrite par une équation de Painlevé II avait déjà été observée auparavant dans la théorie de jauge  $U(N)$  à  $2D$  sur réseau et avec action de Wilson [GW80, Wad80, PS90].

Il est intéressant de noter aussi qu’une telle transition du troisième ordre a également récemment été mise en évidence dans un modèle de marcheurs vicieux. Dans ce cas une

correspondance exacte entre la probabilité de réunion des marcheurs et la fonction de partition de Yang-Mills  $2D$  (12.7) a pu être établie [FMS11].

Dans notre cas, on veut analyser le comportement asymptotique pour  $N \rightarrow \infty$  de la **distribution cumulative de la valeur propre maximale d'une matrice du GUE**, donnée par l'intégrale multiple Eq. (12.4). Bien que ce soit une intégrale et non une somme multiple, on peut adapter comme on va le voir la méthode de Gross et Matytsin à notre problème.

On trouve une **transition de phase** du troisième ordre similaire à celle de la fonction de partition de QCD. Le paramètre est ici  $y$  (au lieu de  $A$ ), la transition a lieu à  $y_c = \sqrt{2N}$ , qui correspond à la moyenne de  $\lambda_{\max}$ . La grande déviation à gauche de la moyenne  $y < y_c$  est similaire au régime de couplage fort de la théorie de Yang-Mills ( $A > A_c$ ) tandis que la grande déviation à droite  $y > y_c$  correspond au couplage faible ( $A > A_c$ ).

Suivant l'idée de Gross et Matytsin, on peut donc dériver **la loi de Tracy-Widom dans le régime de double-échelle**  $y \rightarrow y_c = \sqrt{2N}$ ,  $N \rightarrow \infty$  avec le produit  $(y - y_c)N^{1/6}$  fixé. On peut également étudier le régime  $y > y_c$  ("couplage faible") et calculer ainsi un équivalent de la **grande déviation de  $\lambda_{\max}$  à droite** de sa moyenne  $y_c$ . On notera qu'on calcule bien ici un équivalent de la distribution cumulative  $\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y)$  et non pas seulement un équivalent logarithmique (comme on peut l'obtenir par méthode de gaz de Coulomb).

### 12.1.2 Notations et scaling

Le point de départ est l'**ensemble GUE** des matrices complexes hermitiennes  $H$ , aléatoires de distribution  $\mathcal{P}(H)dH \propto e^{-\alpha \text{Tr}(H^2)} dH$ . J'ai introduit ici un **paramètre supplémentaire**  $\alpha > 0$  qui est utile pour les calculs comme on le verra dans la suite. Pour  $\alpha = 1$ , on retrouve l'ensemble GUE habituel. Avec ce paramètre  $\alpha$ , la **distribution jointe des valeurs propres** de  $H$  devient :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B_{N,\alpha} e^{-\alpha \sum_{i=1}^N \lambda_i^2} \prod_{j < k} (\lambda_j - \lambda_k)^2 \quad (12.8)$$

avec  $B_{N,\alpha} = (2\alpha)^{\frac{N^2}{2}} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} / \left[ \prod_{n=1}^N n! \right]$ .

Le déterminant de Vandermonde apparaît ici à la puissance  $\beta = 2$  car on considère le GUE. La méthode de polynômes orthogonaux que l'on utilise, inspirée de l'article de Gross et Matytsin [GM94], fonctionne seulement pour le cas spécifique  $\beta = 2$ .

Par définition, la **distribution cumulative de la valeur propre maximale** s'écrit

$$\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y) = \frac{Z_N(y, \alpha)}{Z_N(\infty, \alpha)} \quad (12.9)$$

où la **fonction de partition**  $Z_N$  est donnée par l'intégrale multiple suivante :

$$Z_N(y, \alpha) = \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^y d\lambda_i \prod_{j < k} (\lambda_j - \lambda_k)^2 e^{-\alpha \sum_{i=1}^N \lambda_i^2} \quad (12.10)$$

La normalisation  $Z_N(\infty, \alpha)$  est telle que  $B_{N,\alpha} = 1/(N! Z_N(\infty, \alpha))$  où  $B_{N,\alpha}$  était la normalisation dans (12.8). On notera qu'avec le changement de variables  $\sqrt{\alpha}\lambda_i \rightarrow \lambda_i$  dans Eq. (12.10), on montre à partir de (12.9) que

$$\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y) = \frac{Z_N(y, \alpha)}{Z_N(\infty, \alpha)} = \frac{Z_N(y\sqrt{\alpha}, 1)}{Z_N(\infty, 1)}. \quad (12.11)$$

Ainsi  $t$  et  $\alpha$  apparaissent toujours sous la forme de la combinaison  $t\sqrt{\alpha}$ .

Dans toute la suite, on considère la **limite**  $N \gg 1$ . Pour  $\alpha$  fixé, on s'attend (comme pour  $\alpha = 1$ ) au **comportement typique**  $\lambda_{\text{typ}} \asymp \sqrt{N}$  pour une valeur propre, cf Eq. (2.15). La densité moyenne avec  $\alpha > 0$  fixé est donnée par :

$$\rho_N(\lambda) \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \rho^* \left( \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \right) \quad \text{avec} \quad \rho^*(x) = \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\alpha} - x^2} \quad (12.12)$$

Pour  $\alpha = 1$ , on retrouve le demi-cercle de Wigner, cf Eq. (2.26). La **moyenne de la valeur propre maximale** est à nouveau donnée par la borne supérieure du support de la densité, donc dans ce cas

$$\boxed{\langle \lambda_{\max} \rangle \sim \sqrt{\frac{2N}{\alpha}} \quad \text{pour } N \gg 1} \quad (12.13)$$

## 12.2 POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Dans cette partie, j'introduis la méthode des polynômes orthogonaux pour calculer la fonction de partition Eq. (12.10). Comme je l'ai mentionné dans l'introduction, j'adapte ici une méthode développée par Gross et Matytsin [GM94] pour évaluer la fonction de partition dans la théorie de Yang-Mills à  $2D$ , cf Eq. (12.7).

Les **polynômes orthogonaux** sont très utiles pour se débarrasser du déterminant de Vandermonde au carré dans la distribution jointe des valeurs propres (12.8). Un déterminant de **Vandermonde** peut en effet s'écrire  $\prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i) = \det(\lambda_i^{j-1})_{i,j} = \det(p_{j-1}(\lambda_i))_{i,j}$  où  $p_j(\lambda) = \lambda^j + \dots$  est n'importe quel polynôme de degré  $j$  et de coefficient dominant 1. L'idée est de bien choisir ces polynômes  $p_j$  de façon à simplifier au maximum le calcul de l'intégrale multiple Eq. (12.10).

On définit l'opération  $(f, g) \rightarrow \langle f, g \rangle$  sur les couples de polynômes  $(f, g)$  de la façon suivante :

$$\boxed{\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^y d\lambda e^{-\alpha\lambda^2} f(\lambda) g(\lambda)} \quad (12.14)$$

On considère une famille  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  de **polynômes orthogonaux** par rapport à l'opération (12.14), c'est-à-dire par rapport au poids gaussien  $e^{-\alpha\lambda^2}$  sur l'intervalle  $] -\infty, y]$ . La différence avec les polynômes de Hermite qu'on a rencontrés section 2.3.2 est que l'intervalle considéré est ici  $] -\infty, y]$  et non  $\mathbb{R}$  tout entier. Sans restreindre la généralité, on peut définir les polynômes  $p_n(\lambda)$  de degré  $n$  tels que le coefficient dominant de  $p_n$  soit 1,

i.e.  $p_n(\lambda) = \lambda^n + \dots$ . Ces polynômes satisfont la **relation d'orthogonalité**  $\langle p_n, p_m \rangle = 0$  pour tous  $n \neq m$ . On note  $h_n = \langle p_n, p_n \rangle$ . Alors on a

$$\boxed{\langle p_n, p_m \rangle = \delta_{n,m} h_n, \quad \forall n, m \geq 0} \quad (12.15)$$

On notera que  $p_n(\lambda)$  et  $h_n$  sont des fonctions de  $\alpha$  et  $y$ , i.e.  $p_n(\lambda) = p_n(\lambda|y, \alpha)$  et  $h_n = h_n(y, \alpha)$ .

On peut facilement calculer les  $p_n(\lambda)$  pour les petites valeurs de  $n$ , pour  $\alpha > 0$  et  $y$  fixés, mais l'expression de  $p_n$  est de plus en plus compliquée quand  $n$  augmente, et il n'est pas possible en général de trouver une expression analytique explicite de  $p_n$  pour  $n$  arbitraire (sauf dans la limite  $y \rightarrow \infty$ ). Pour les premières valeurs de  $n$  on trouve :

$$p_0(\lambda) = 1, \quad p_1(\lambda) = \lambda + \frac{e^{-\alpha y^2}}{\sqrt{\pi\alpha} [1 + \operatorname{erf}(y\sqrt{\alpha})]} \quad (12.16)$$

En particulier on a donc

$$\begin{aligned} h_0 = \langle p_0|p_0 \rangle &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} [1 + \operatorname{erf}(y\sqrt{\alpha})] \\ h_1 = \langle p_1|p_1 \rangle &= \frac{-2y\sqrt{\alpha} e^{-\alpha y^2} + \sqrt{\pi} [1 + \operatorname{erf}(y\sqrt{\alpha})] - \frac{2e^{-2\alpha y^2}}{\sqrt{\pi} [1 + \operatorname{erf}(y\sqrt{\alpha})]}}{4\alpha^{3/2}} \end{aligned} \quad (12.17)$$

Dans la limite  $y \rightarrow \infty$ , on retrouve comme attendu les polynômes de Hermite (à une constante multiplicative près) :

$$p_0 = 1, \quad p_1 = \lambda, \quad p_2 = \lambda^2 - \frac{1}{2\alpha}; \quad h_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}, \quad h_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}}, \quad h_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{5/2}} \quad (12.18)$$

### 12.2.1 Fonction de partition

On va voir dans cette partie que la fonction de partition  $Z_N(y, \alpha)$  donnée Eq. (12.10) peut être exprimée en fonction des  $h_n$ . Par combinaison de lignes, on peut écrire le déterminant de Vandermonde sous la forme :

$$\prod_{j < k} (\lambda_k - \lambda_j) = \det (\lambda_i^{j-1})_{i,j} = \det (p_{j-1}(\lambda_i))_{i,j} \quad (12.19)$$

Ainsi la fonction de partition devient :

$$\begin{aligned} Z_N(y, \alpha) &= \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^y d\lambda_i \prod_{j < k} (\lambda_j - \lambda_k)^2 e^{-\alpha \sum_{i=1}^N \lambda_i^2} \\ &= \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^y d\lambda_i \det (p_{j-1}(\lambda_i))_{i,j} \det (p_{l-1}(\lambda_k))_{k,l} e^{-\alpha \sum_{i=1}^N \lambda_i^2} \\ &= \det \left[ \int_{-\infty}^y d\lambda e^{-\alpha \lambda^2} p_{i-1}(\lambda) p_{j-1}(\lambda) \right]_{i,j} \\ &= \det (\langle p_{i-1} | p_{j-1} \rangle)_{i,j} = \det (\delta_{i,j} h_{i-1})_{i,j} = \prod_{i=0}^{N-1} h_i \end{aligned} \quad (12.20)$$

où on a utilisé la formule de Cauchy-Binet pour passer de la deuxième à la troisième ligne, cf le livre de Mehta [Meh91].

On notera que pour cette étape il est crucial que  $\beta = 2$ . La **fonction de partition** s'exprime donc simplement comme le produit des  $h_n$  pour  $0 \leq n \leq N - 1$  :

$$\boxed{Z_N(y, \alpha) = \prod_{n=0}^{N-1} h_n(y, \alpha)} \quad (12.21)$$

Le but de la partie suivante est de trouver des relations de récurrence pour les polynômes orthogonaux et donc les  $h_n$  afin de les calculer et d'analyser leur produit  $Z_N$  (12.21) dans la limite  $N \rightarrow \infty$ .

### 12.2.2 Relations de récurrence

En général pour des polynômes orthogonaux on peut écrire une **relation de récurrence** de la forme :

$$\boxed{\lambda p_n(\lambda) = p_{n+1}(\lambda) + S_n p_n(\lambda) + R_n p_{n-1}(\lambda)} \quad (12.22)$$

où  $S_n$  et  $R_n$  sont des coefficients réels. La relation vient du fait que  $p_n = \lambda^n + \dots$  et que  $\langle p_n | q \rangle = 0$  pour tout polynôme  $q(\lambda)$  de degré strictement inférieur à  $n$ . Les coefficients  $S_n$  et  $R_n$  sont implicitement des fonctions de  $\alpha$  et  $y$ , i.e.  $S_n = S_n(y, \alpha)$  et  $R_n = R_n(y, \alpha)$ .

Montrons d'abord que **les coefficients  $R_n$  et  $S_n$  peuvent s'exprimer à partir des  $h_n$** . A partir de l'équation (12.22), on montre que  $\langle p_{n-1} | \lambda p_n \rangle = R_n \langle p_{n-1} | p_{n-1} \rangle = R_n h_{n-1}$ . D'un autre côté on a  $\langle p_{n-1} | \lambda p_n \rangle = \langle \lambda p_{n-1} | p_n \rangle = \langle p_n + S_{n-1} p_{n-1} + R_{n-1} p_{n-2} | p_n \rangle = \langle p_n | p_n \rangle = h_n$ . D'où  $R_n h_{n-1} = h_n$ , soit  $R_n = h_n / h_{n-1}$ .

D'autre part, de l'équation (12.22) encore, on tire  $\langle p_n | \lambda p_n \rangle = S_n \langle p_n | p_n \rangle$  soit  $\langle p_n | \lambda p_n \rangle = S_n h_n$ . Par définition de l'opération  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  et après une intégration par parties on trouve :

$$\langle p_n | \lambda p_n \rangle = \int_{-\infty}^y d\lambda e^{-\alpha\lambda^2} \lambda p_n^2(\lambda) = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha y^2} p_n^2(y) = -\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial h_n(y, \alpha)}{\partial y} \quad (12.23)$$

La dernière égalité vient de la définition de  $h_n$ . En effet, comme  $h_n = \int_{-\infty}^y d\lambda e^{-\alpha\lambda^2} p_n^2(\lambda)$ , on a  $\frac{\partial h_n(y, \alpha)}{\partial y} = e^{-\alpha y^2} p_n^2(y, \alpha) + 2 \langle p_n | \frac{\partial p_n}{\partial y} \rangle$ . Mais on a  $\langle p_n | \frac{\partial p_n}{\partial y} \rangle = 0$  car  $\frac{\partial p_n}{\partial y}$  est un polynôme de degré strictement inférieur à  $n$  (puisque  $p_n(\lambda | y, \alpha) = \lambda^n + \dots$ ). D'où finalement  $-\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial h_n(y, \alpha)}{\partial y} = \langle p_n | \lambda p_n \rangle = S_n h_n$ , soit  $S_n = -\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial \ln h_n}{\partial y}$ .

On a donc bien obtenu  $R_n$  et  $S_n$  en fonction des  $h_n$  :

$$\boxed{R_n(y, \alpha) = \frac{h_n(y, \alpha)}{h_{n-1}(y, \alpha)}, \quad S_n(y, \alpha) = -\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial \ln h_n(y, \alpha)}{\partial y}} \quad (12.24)$$

En itérant la relation de récurrence  $h_n = R_n h_{n-1}$  (12.24) à partir de  $n = 1$ , on peut maintenant écrire  $h_n$  en fonction des  $R_k$  :

$$\boxed{h_n = \left( \prod_{k=1}^n R_k \right) h_0} \quad (12.25)$$

En remplaçant l'expression de  $h_n$  dans (12.21), on voit que la **fonction de partition**  $Z_N$  **s'exprime comme un produit des**  $R_n$ . Si on détermine les  $R_n$ , on pourra donc évaluer explicitement la fonction de partition.

La prochaine étape est de déterminer les  $R_n$ . Pour cela, on va commencer par dériver des **relations de récurrence pour les**  $R_n$  **et les**  $S_n$ . On a

$$\frac{\partial h_n}{\partial \alpha} = \frac{\partial \langle p_n | p_n \rangle}{\partial \alpha} = - \int_{-\infty}^y d\lambda e^{-\alpha \lambda^2} \lambda^2 p_n^2(\lambda) = - \langle \lambda p_n | \lambda p_n \rangle \quad (12.26)$$

où on a utilisé le fait que  $\langle p_n | \frac{\partial p_n}{\partial \alpha} \rangle = 0$  (en effet  $\frac{\partial p_n}{\partial \alpha}$  est un polynôme de degré strictement inférieur à  $n$  donc on doit trouver 0 par orthogonalité). D'un autre côté, on trouve à partir de (12.22) :

$$\begin{aligned} \langle \lambda p_n | \lambda p_n \rangle &= \langle p_{n+1} + S_n p_n + R_n p_{n-1} | p_{n+1} + S_n p_n + R_n p_{n-1} \rangle \\ &= h_{n+1} + S_n^2 h_n + R_n^2 h_{n-1} \\ &= h_n (R_{n+1} + S_n^2 + R_n) \end{aligned} \quad (12.27)$$

D'où, d'après (12.26) et (12.27) :

$$- \frac{\partial \ln h_n}{\partial \alpha} = R_n + R_{n+1} + S_n^2 \quad (12.28)$$

On peut alors éliminer  $h_n$  des relations (12.24) et (12.28) pour obtenir **un système de deux équations pour**  $R_n$  **et**  $S_n$ . En utilisant (12.28) pour  $n$  et  $(n-1)$ , et comme  $R_n = h_n/h_{n-1}$ , on trouve  $-\frac{\partial \ln R_n}{\partial \alpha} = R_{n+1} - R_{n-1} + S_n^2 - S_{n-1}^2$ . A partir de (12.24), on trouve aussi  $\frac{\partial \ln R_n}{\partial y} = 2\alpha (S_{n-1} - S_n)$ . Finalement on obtient les **relations de récurrence** suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} R_{n+1} &= -\frac{\partial \ln R_n}{\partial \alpha} + R_{n-1} - S_n^2 + S_{n-1}^2 \\ S_n &= S_{n-1} - \frac{1}{2\alpha} \frac{\partial \ln R_n}{\partial y} \end{aligned}} \quad (12.29)$$

Il n'est pas difficile de montrer par récurrence que les équations (12.29) associées aux conditions initiales donnant  $R_0$ ,  $R_1$  et  $S_0$  (voir ci-dessous Eq. (12.32)) déterminent de façon **unique**  $R_n$  et  $S_n$ . La condition initiale supplémentaire  $h_0$  est suffisante pour déterminer les  $h_n$  d'après (12.25).

Reste à fixer les conditions initiales. Par définition  $p_0$  est un polynôme de degré 0 et coefficient dominant 1, donc  $p_0(\lambda|y, \alpha) = 1$ . Ainsi

$$h_0(y, \alpha) = \langle p_0 | p_0 \rangle = \int_{-\infty}^y d\lambda e^{-\alpha \lambda^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} (1 + \operatorname{erf}(y\sqrt{\alpha})) \quad (12.30)$$

De plus  $R_0(y, \alpha) = 0$  car la relation de récurrence (12.22) doit pour  $n = 0$  se ramener à  $\lambda p_0(\lambda) = p_1(\lambda) + S_0 p_0(\lambda)$ , i.e.  $p_1(\lambda) = \lambda - S_0$ . Par ailleurs à partir de (12.24), on obtient

$$S_0 = -\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial \ln h_0}{\partial y} = -\frac{e^{-\alpha y^2}}{2\alpha h_0} = -\frac{e^{-\alpha y^2}}{\sqrt{\pi\alpha} (1 + \operatorname{erf}(y\sqrt{\alpha}))} \quad (12.31)$$

Maintenant on a donc trouvé  $R_0$ ,  $S_0$  et  $h_0$ , on peut déterminer  $R_1$  avec (12.28) pour  $n = 0$  :  $R_1 = -\frac{\partial \ln h_0}{\partial \alpha} - R_0 - S_0^2 = yS_0 + 1/(2\alpha) - S_0^2$ . En résumé, les **conditions initiales** sont données par :

$$\begin{aligned} R_0(y, \alpha) &= 0, & p_0(\lambda|y, \alpha) &= 1, \\ h_0(y, \alpha) &= \int_{-\infty}^y d\lambda e^{-\alpha\lambda^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} (1 + \operatorname{erf}(y\sqrt{\alpha})) \\ S_0(y, \alpha) &= -\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial \ln h_0}{\partial y} = -\frac{e^{-\alpha y^2}}{2\alpha h_0} = -\frac{e^{-\alpha y^2}}{\sqrt{\pi\alpha} (1 + \operatorname{erf}(y\sqrt{\alpha}))} \\ R_1(y, \alpha) &= yS_0 + \frac{1}{2\alpha} - S_0^2 \end{aligned} \quad (12.32)$$

### 12.2.3 Normalisation : limite $y \rightarrow \infty$

Quand  $y \rightarrow \infty$ , on peut calculer explicitement les coefficients  $S_n$ ,  $R_n$  et  $h_n$ . En effet dans la limite  $y \rightarrow \infty$  les polynômes orthogonaux  $p_n$  sont simplement les polynômes de **Hermite**, cf Eq. (2.59) (à une constante multiplicative près). Ainsi on peut tout calculer explicitement dans ce cas. On a  $h_0(\infty, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-\alpha\lambda^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$  et  $S_0(\infty, \alpha) = 0$ . Par récurrence, on montre :

$$S_n(\infty, \alpha) = 0 \quad R_n(\infty, \alpha) = \frac{n}{2\alpha} \quad (12.33)$$

Finalement avec (12.25) on obtient

$$h_n = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{n!}{(2\alpha)^n} \quad (12.34)$$

et donc d'après Eq. (12.21) :

$$Z_N(\infty, \alpha) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} (2\alpha)^{-\frac{N^2}{2}} \prod_{n=1}^N \Gamma(n) \quad (12.35)$$

qui aurait aussi pu être calculé directement par intégrale de Selberg. On retrouve bien ici la normalisation  $B_{N,\alpha} = 1/(N! Z_N)$  de (12.8).

## 12.3 BRANCHE DROITE DE LA DISTRIBUTION DE $\lambda_{\max}$ : GRANDE DÉVIATION

Dans la partie précédente j'ai dérivé un système couplé de deux équations Eq. (12.29) qui, avec les conditions initiales Eq. (12.32) détermine entièrement  $R_n$ ,  $S_n$  et donc  $h_n$  et enfin  $Z_N$  via Eq. (12.21). Cependant ces équations de **récurrence** sont difficiles à résoudre en général pour  $n$  et  $y$  arbitraires (sauf dans limite  $y \rightarrow +\infty$ , cf section 12.2.3). Dans cette partie, je dérive une **expression approchée pour  $Z_N$**  et donc pour la distribution cumulative  $\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y)$  de  $\lambda_{\max}$ , cf (12.9), **dans la limite  $N \gg 1$** , où  $N$  est le nombre de valeurs propres. On va voir que cette expression pour la distribution cumulative est en fait valable seulement pour  $y > \langle \lambda_{\max} \rangle = \sqrt{2N/\alpha}$ , c'est-à-dire que cela



permet de décrire la branche droite de la distribution seulement.

Pour  $N \gg 1$  et  $\alpha$  fixé, la valeur propre maximale moyenne est donnée par  $\langle \lambda_{\max} \rangle \sim \sqrt{2N/\alpha}$ . On veut calculer les grandes déviations qui décrivent les fluctuations d'ordre  $\sqrt{N}$  autour de la moyenne. On se place donc à cette échelle : on pose  $y = s\sqrt{N}$  dans la distribution de  $\lambda_{\max}$  et la fonction de partition Eq. (12.9) et (12.10). On prendra ensuite la **limite**  $N \rightarrow \infty$  avec  $s$  fixé.

Avec ce scaling, l'opération  $\langle f, g \rangle$  définie Eq. (12.14) pour les polynômes dépend maintenant de  $N$  (car la borne supérieur de l'intégration dans (12.14) est maintenant  $s\sqrt{N}$ ). Les coefficients  $R_n$ ,  $S_n$  et  $h_n$  pour un  $n$  donné sont de même des fonctions implicites de  $N$ . On peut développer alors ces paramètres pour  $N$  grand et  $n$  fixé. L'**ordre dominant** sera donné par la limite  $y \rightarrow +\infty$  (voir section 12.2.3) car  $y = s\sqrt{N} \rightarrow \infty$  quand  $N \rightarrow \infty$  avec  $s$  fixé. Dans cette partie, on cherche à déterminer la **première correction pour**  $N \gg 1$ .

On notera que la fonction de partition  $Z_N$  et donc la distribution cumulative de  $\lambda_{\max}$  sont des fonctions de tous les  $h_n$  pour  $0 \leq n < N$ . Notre développement à  $N$  grand donnera donc bien le comportement de la distribution de  $\lambda_{\max}$  à  $N$  grand seulement si on peut montrer qu'il est valable pas seulement pour  $n$  fixé mais aussi pour  $n$  d'ordre  $N$ . Cette contrainte sur la **validité du développement** sera discutée un peu plus loin. On verra que le développement est en fait valable seulement **à droite de la moyenne**, c'est-à-dire pour  $y > \sqrt{\frac{2N}{\alpha}}$  ie  $s > \sqrt{\frac{2}{\alpha}}$ . Cette méthode nous permettra donc de décrire la branche droite de la distribution de  $\lambda_{\max}$ , i.e.  $\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y)$  où  $y > \sqrt{\frac{2N}{\alpha}}$  et  $|y - \sqrt{\frac{2N}{\alpha}}| = O(\sqrt{N})$ .

### 12.3.1 Développement de $R_n$ et $S_n$ à $N$ grand

Commençons par le développement des conditions initiales à  $N$  grand. Avec le scaling  $y = s\sqrt{N}$ , les équations Eq. (12.32) deviennent (pour  $s > 0$ ) pour  $N \gg 1$  :

$$\begin{aligned} h_0(s\sqrt{N}, \alpha) &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} - \frac{1}{2s\alpha\sqrt{N}} e^{-N\alpha s^2} + \dots \\ S_0(s\sqrt{N}, \alpha) &= -\frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi}} e^{-N\alpha s^2} + \dots \\ R_1(s\sqrt{N}, \alpha) &= \frac{1}{2\alpha} - \frac{s\sqrt{N}}{2\sqrt{\alpha\pi}} e^{-N\alpha s^2} + \dots \end{aligned} \quad (12.36)$$

L'**ordre dominant pour**  $N$  **grand** correspond à la limite  $y \rightarrow \infty$  (voir section 12.2.3) :  $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-\alpha\lambda^2} = h_0(\infty, \alpha)$ . Ainsi, si on néglige les corrections exponentiellement petites quand  $N \rightarrow \infty$ , on obtient  $R_n(s\sqrt{N}, \alpha) \sim R_n(\infty, \alpha) \sim \frac{n}{2\alpha}$  et  $S_n(s\sqrt{N}, \alpha) \ll 1$ .

On veut maintenant déterminer les **premières corrections** à l'ordre dominant. Guidés par la forme des conditions initiales (12.36) pour  $N \gg 1$ , posons l'**ansatz** suivant :

$$\boxed{R_n(s\sqrt{N}, \alpha) = \frac{n}{2\alpha} + c_n e^{-N\alpha s^2} + \dots, \quad S_n(s\sqrt{N}, \alpha) = d_n e^{-N\alpha s^2} + \dots} \quad (12.37)$$

où on s'attend à ce que  $c_n = c_n(s\sqrt{N}, \alpha)$  et  $d_n = d_n(s\sqrt{N}, \alpha)$  soient des polynômes en  $s\sqrt{N}$ . Ce développement sera valable tant que la condition  $c_n(s\sqrt{N}, \alpha)e^{-N\alpha s^2} \ll \frac{n}{2\alpha}$  sera vérifiée.

Les conditions initiales (12.36) s'écrivent alors :

$$c_0(y, \alpha) = 0, \quad c_1(y, \alpha) = -\frac{y}{2\sqrt{\alpha\pi}}, \quad d_0(y, \alpha) = -\frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi}} \quad (12.38)$$

On remplace  $R_n$  et  $S_n$  dans le système d'équations de récurrence (12.29) par l'ansatz donné Eq. (12.37). On voit alors que  $S_n^2$  et  $S_{n-1}^2$  sont en fait négligeables dans l'équation (12.29) qui donne  $R_{n+1}$ , ils sont en effet beaucoup plus petits (exponentiellement plus petits) que les  $R_k$ . On obtient ainsi les **relations de récurrence** suivantes pour les  $c_n(y, \alpha)$  et  $d_n(y, \alpha)$  :

$$\boxed{\begin{aligned} c_{n+1} - c_{n-1} &= \frac{2}{n} \left\{ -\frac{\partial(\alpha c_n)}{\partial\alpha} + \alpha y^2 c_n \right\} \\ d_n - d_{n-1} &= \left( 2\alpha y c_n - \frac{\partial c_n}{\partial y} \right) \frac{1}{n} \end{aligned}} \quad (12.39)$$

D'après (12.25),  $h_n$  est le produit des  $R_k$  pour  $1 \leq k \leq n$ , il peut donc s'exprimer en fonction des  $c_k$  pour  $1 \leq k \leq n$ . Comme  $Z_N$  est une fonction des  $h_n$ , c'est une fonction de  $h_0$  et des  $R_n$  pour  $1 \leq n < N$ , on peut donc utiliser l'ansatz (12.37) seulement si

$$c_n(s\sqrt{N}, \alpha)e^{-N\alpha s^2} \ll \frac{n}{2\alpha} \quad \text{pour tout } n < N \quad (12.40)$$

Dans ce cas on pourra écrire d'après Eq. (12.25) :

$$\begin{aligned} \ln h_n(y, \alpha) &= \ln h_0 + \sum_{k=1}^n \ln R_k = \ln h_0 + \sum_{k=1}^n \left[ \ln \left( \frac{k}{2\alpha} \right) + \frac{2\alpha c_k}{k} e^{-N\alpha s^2} + \dots \right] \\ &= \ln h_n(\infty, \alpha) + \left[ -\frac{1}{2y\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^n \frac{2\alpha c_k(y, \alpha)}{k} \right] e^{-N\alpha s^2} + \dots \end{aligned} \quad (12.41)$$

où  $y = s\sqrt{N}$ . Le logarithme de la fonction de partition (cf Eq. (12.21))  $\ln Z_N(y, \alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} \ln h_n(y, \alpha)$  est donc donné par :

$$\ln Z_N(y, \alpha) = \ln Z_N(\infty, \alpha) + \left[ -\frac{N}{2y\sqrt{\pi}} + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^n \frac{2\alpha c_k(y, \alpha)}{k} \right] e^{-N\alpha s^2} + \dots \quad (12.42)$$

La première correction à l'ordre dominant pour la fonction de partition dépend uniquement des  $c_k$  (et pas des  $d_k$ ) d'après Eq. (12.42). On veut maintenant résoudre la relation de récurrence pour les  $c_k$  (12.39). On n'a pas besoin de déterminer les  $d_k$ .

### 12.3.2 Solution de la récurrence pour les $c_n$

On définit  $\xi$  et  $G_n$  de telle sorte que

$$\boxed{\xi = \alpha y^2 = N\alpha s^2 \quad \text{et} \quad c_n(y, \alpha) = -\frac{y^2}{2\sqrt{\pi\xi}} G_n(\xi)} \quad (12.43)$$

$\xi \rightarrow \infty$  quand  $N \rightarrow \infty$  (car  $\xi \asymp N$ ).  $G_n(\xi)$  dépend seulement de  $\xi = \alpha y^2$  comme on peut le montrer facilement par récurrence. On a comme condition initiale  $G_1(\xi) = 1$  (car  $c_1$  est donné Eq. (12.38)). La relation de récurrence (12.39) pour les  $c_n$  devient une relation de **réurrence** pour les  $G_n$  :

$$G_{n+1}(\xi) - G_{n-1}(\xi) = \frac{2}{n} \left\{ \left( \xi - \frac{1}{2} \right) G_n(\xi) + \xi G'_n(\xi) \right\} \quad (12.44)$$

avec conditions initiales  $G_0(\xi) = 0$  et  $G_1(\xi) = 1$ . Par récurrence aussi, il n'est pas difficile de montrer que  $G_n(\xi)$  est un **polynôme en  $\xi$**  de degré  $(n-1)$  et coefficient dominant  $\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$ .

On considère la **fonction génératrice** des  $\{G_n(\xi)\}$  définie par :

$$F(\xi, x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n G_n(\xi) \quad (12.45)$$

Les  $G_n(\xi)$  s'obtiennent réciproquement à partir de  $F$  par une intégrale sur un contour dans le plan complexe :

$$G_n(\xi) = \oint_C \frac{dx}{2i\pi} \frac{1}{x^{n+1}} F(\xi, x) \quad (12.46)$$

où  $C$  est un contour qui entoure l'origine  $x = 0$  de telle façon que les singularités de  $F(\xi, x)$  (comme fonction de  $x$  pour  $\xi$  fixé) soient laissées hors du contour.

A partir de (12.44) et de la définition de  $F$ , on montre que  $F(\xi, x)$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2) \frac{\partial F}{\partial x} + 2\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} = \left[ x + \frac{1}{x} + 2\xi - 1 \right] F \quad (12.47)$$

Cette équation associée à la condition au bord  $F(\xi, x) \approx x + O(x^2)$  quand  $x \rightarrow 0$  (car  $G_1 = 1$ ) détermine  $F(\xi, x)$  de façon unique. On trouve :

$$F(\xi, x) = \frac{x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} e^{\frac{2\xi x}{x+1}} \quad (12.48)$$

$G_n(\xi)$  est alors donné par l'**intégrale de contour** (12.46) où le contour  $C$  entoure  $x = 0$  de telle façon que  $x = 1$  et  $x = -1$  soient hors du contour.

On veut calculer  $G_n(\xi)$  avec  $\xi = N\alpha s^2$  pour  $N \gg 1$ ,  $s$  fixé et  $n = cN$  avec  $c$  fixé,  $0 < c \leq 1$ . On a

$$G_n(\xi) = \oint_C \frac{dx}{2i\pi} \frac{1}{x^{n+1}} F(\xi, x) = \oint_C \frac{dx}{2i\pi} \frac{e^{N\Phi_c(x)}}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} \quad (12.49)$$

où

$$\Phi_c(x) = \frac{2\alpha s^2 x}{x+1} - c \ln x \quad \text{avec} \quad c = \frac{n}{N} \quad (12.50)$$

est d'ordre  $\sim 1$  pour  $N$  grand quand  $n = cN$  avec  $c$  d'ordre un. Pour  $c \leq 1$  fixé et pour  $N \gg 1$ , l'intégrale de contour peut être calculée par la **méthode du col**. L'intégrale sera dominée par le voisinage de  $x^*$  tel que :

$$\left. \frac{d\Phi_c}{dx} \right|_{x^*} = 0 \quad \text{ie} \quad \frac{2\alpha s^2}{(1+x^*)^2} = \frac{n}{Nx^*} = \frac{c}{x^*} \quad (12.51)$$

Il existe une solution réelle  $x^*$  si et seulement si  $s^2 > 2c/\alpha$  ie  $s^2 > 2n/(\alpha N)$ . On veut que cette condition soit satisfaite pour tout  $n < N$ , donc on doit avoir  $s^2 > 2/\alpha$ , i.e.  $s > \sqrt{2/\alpha}$ . Notre méthode décrit ainsi le régime  $s > \sqrt{2/\alpha}$ , ie  $y > \sqrt{2N/\alpha}$ , ce qui correspond à la **branche droite** de  $\mathbb{P}(\lambda_{\max} \leq y)$ , ie la région où  $\lambda_{\max}$  est plus grande que sa valeur moyenne. Notons  $y_{\text{cr}} = \sqrt{2N/\alpha}$  soit  $s_{\text{cr}} = \sqrt{2/\alpha}$  le **point critique de validité** de notre développement.

Pour  $y > y_{\text{cr}}$ , il y a deux solutions réelles  $x^* = -1 + \frac{N\alpha s^2}{n} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2n}{N\alpha s^2}} \right]$ . Le contour  $C$  doit entourer 0 mais pas 1 et  $-1$ , donc on impose  $-1 < x^* < 1$ . Ainsi nécessairement le point stationnaire  $x^*$  est donné par :

$$x^* = -1 + \frac{N\alpha s^2}{n} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{2n}{N\alpha s^2}} \right] = \frac{N\alpha s^2}{2n} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{2n}{N\alpha s^2}} \right]^2 \quad (12.52)$$

Le point col pour  $N \gg 1$  donne donc :

$$G_n(\xi) \approx \frac{1}{2\pi} \frac{e^{N\Phi_c(x^*)}}{(1+x^*)\sqrt{1-x^{*2}}} \sqrt{\frac{2\pi}{N \left| \frac{d^2\Phi_c}{dx^2} \right|_{x^*}}} \quad (12.53)$$

avec  $x^*$  donné Eq. (12.52) et où

$$\Phi_c(x^*) = \alpha s^2 \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{2c}{\alpha s^2}} \right] - 2c \ln \left\{ \sqrt{\frac{\alpha s^2}{2c}} - \sqrt{\frac{\alpha s^2}{2c} - 1} \right\} \quad (12.54)$$

et

$$\left| \frac{d^2\Phi_c}{dx^2} \right|_{x^*} = \frac{4 \sqrt{\frac{\alpha s^2}{c} - 2}}{\left( \sqrt{\frac{\alpha s^2}{c}} - 2 - \sqrt{\frac{\alpha s^2}{c}} \right)^4 \sqrt{\frac{\alpha s^2}{c}}} \quad (12.55)$$

Dans cette section on a trouvé l'expression de  $G_n(\xi)$ , cf Eq. (12.53), donc la solution  $c_n(y, \alpha) = -\frac{y^2}{2\sqrt{\pi\xi}} G_n(\xi)$  (avec  $\xi = N\alpha s^2 = \alpha y^2$ ) de la relation de récurrence (12.39) pour  $N$  grand et  $n = cN$  avec  $0 < c \leq 1$  fixé. On a aussi montré que notre développement est valable seulement pour le régime  $y > y_{\text{cr}}$  où  $y_{\text{cr}} = \sqrt{\frac{2N}{\alpha}} = \langle \lambda_{\max} \rangle$ . On peut maintenant calculer explicitement la fonction de partition  $Z_N$  pour  $y > y_{\text{cr}}$  et  $N \gg 1$ .

### 12.3.3 Distribution de $\lambda_{\max}$ pour $N$ grand

On veut calculer dans la limite  $N \gg 1$  et pour  $y > y_{\text{cr}}$  la distribution cumulative  $\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y) = \frac{Z_N(y, \alpha)}{Z_N(\infty, \alpha)}$ . Avec (12.42) et la définition de  $G_n$  (12.43), on trouve :

$$\begin{aligned} \ln \mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y) &= \ln Z_N(y, \alpha) - \ln Z_N(\infty, \alpha) \\ &= -\frac{e^{-\xi}}{2\sqrt{\pi\xi}} \left\{ 1 + 2\xi \sum_{n=1}^{N-1} \left( \frac{N-n}{n} \right) G_n(\xi) \right\} + \dots \end{aligned} \quad (12.56)$$

Ainsi il faut calculer  $I_N(\xi) \equiv \sum_{n=1}^{N-1} \left( \frac{N-n}{n} \right) G_n(\xi)$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$  avec  $\xi = N\alpha s^2$  où  $\alpha$  et  $s$  sont fixés. Pour cela on n'a pas besoin d'utiliser l'expression approchée de  $G_n$  pour  $n$  d'ordre  $N$  qu'on a dérivée dans la section précédente Eq. (12.53). On peut utiliser l'équation qui donne  $G_n$  comme une intégrale de contour  $G_n(\xi) = \oint_C \frac{dx}{2i\pi} \frac{1}{x^{n+1}} F(\xi, x)$  et calculer d'abord la somme sur  $n$  avant d'estimer l'intégrale de contour par méthode du col. En particulier on a :

$$\sum_{n=1}^{N-1} G_n(\xi) = \oint_C \frac{dx}{2i\pi} \frac{F(\xi, x)}{x(x-1)} + \oint_C \frac{dx}{2i\pi} \frac{F(\xi, x)}{x^N(1-x)} = \oint_C \frac{dx}{2i\pi} \frac{F(\xi, x)}{x^N(1-x)} \quad (12.57)$$

En effet, l'intégrale de  $F$  sur le contour  $C$  est nulle car la fonction  $\frac{F(\xi, x)}{x(x-1)} = \frac{\frac{2\xi x}{e^{x+1}}}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}$  n'a pas de singularité à l'origine. D'un autre côté on a :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{G_n(\xi)}{n} = \oint_C \frac{dx}{2i\pi} \left( \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{nx^{n+1}} \right) F(\xi, x) = \oint_C \frac{dx}{2i\pi} \frac{F(\xi, x)}{x^N} \frac{{}_2F_1(1, 1-N, 2-N, x)}{N-1} \quad (12.58)$$

où  ${}_2F_1$  est une fonction hypergéométrique :  ${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}$  où  $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$ . Pour  $N \gg 1$  on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{{}_2F_1(1, 1-N, 2-N, x)}{N-1} &= \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{-1-k+N} = \sum_{k \geq 0} x^k \left( \frac{1}{N} + \frac{1-k}{N^2} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{N(1-x)} + \frac{1}{(1-x)^2 N^2} + \dots \end{aligned} \quad (12.59)$$

Ainsi on obtient quand  $N \rightarrow \infty$  :

$$I_N(\xi) \equiv \sum_{n=1}^{N-1} \left( \frac{N-n}{n} \right) G_n(\xi) \sim \frac{1}{N} \oint_C \frac{dx}{2i\pi} \frac{F(\xi, x)}{x^N(1-x)^2} \quad (12.60)$$

De façon équivalente :

$$I_N(\xi) \sim \frac{1}{N} \oint_C \frac{dx}{2i\pi} \frac{x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{5}{2}}} e^{N\Phi_1(x)} \quad (12.61)$$

où  $\Phi_1(x) = \frac{2\alpha s^2 x}{x+1} - \ln x$  (voir Eq. (12.50)).  $I_N$  est calculée par méthode du col dans la limite  $N \rightarrow \infty$  :

$$I_N(\xi) \sim \frac{1}{N} \frac{1}{2\pi} \frac{x^*}{(1+x^*)^{\frac{3}{2}}(1-x^*)^{\frac{5}{2}}} e^{N\Phi_1(x^*)} \sqrt{\frac{2\pi}{N \left| \frac{d^2\Phi_1}{dx^2} \right|_{x^*}}} \quad (12.62)$$

où  $x^*$  est donné Eq. (12.52) avec  $n = N$  :

$$x^* = -1 + \alpha s^2 \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{2}{\alpha s^2}} \right] = \frac{\alpha s^2}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{2}{\alpha s^2}} \right]^2 \quad (12.63)$$

Ainsi

$$I_N(\xi) \sim \frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{4\sqrt{\alpha s^2}(\alpha s^2 - 2)^{\frac{3}{2}}} e^{N\Phi_1(x^*)} \quad (12.64)$$

où

$$\Phi_1(x^*) = \alpha s^2 \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{2}{\alpha s^2}} \right] - 2 \ln \left\{ \sqrt{\frac{\alpha s^2}{2}} - \sqrt{\frac{\alpha s^2}{2} - 1} \right\} \quad (12.65)$$

Finalement d'après Eq. (12.56), on trouve pour la distribution de  $\lambda_{\max}$  :

$$\begin{aligned} \ln \mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y) &= \ln Z_N(y, \alpha) - \ln Z_N(\infty, \alpha) \\ &= -\frac{e^{-\xi}}{2\sqrt{\pi\xi}} \{2\xi I_N(\xi) + 1 + \dots\} \\ &= -\frac{e^{-N\alpha s^2}}{2\sqrt{\pi N\alpha s^2}} \left\{ \frac{\sqrt{\alpha s^2}}{\sqrt{N}2\sqrt{2\pi}(\alpha s^2 - 2)^{\frac{3}{2}}} e^{N\Phi_1(x^*)} + 1 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (12.66)$$

Comme  $\Phi_1(x^*) > 0$  pour  $s > s_{\text{cr}}$ , i.e.  $\alpha s^2 > 2$ , le premier terme dans la parenthèse peut être négligé pour  $N \gg 1$  :

$$\ln \mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y) \sim -\frac{e^{-N\alpha s^2}}{4\pi N} \frac{1}{\sqrt{2}(\alpha s^2 - 2)^{\frac{3}{2}}} e^{N\Phi_1(x^*)} \quad (12.67)$$

avec  $y = s\sqrt{N}$ . Ainsi on obtient l'expression de la branche droite de la distribution cumulative de  $\lambda_{\max}$  pour  $N \gg 1$  :

$$\ln \mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq s\sqrt{N}) \sim -\frac{1}{4\pi N\sqrt{2}(\alpha s^2 - 2)^{\frac{3}{2}}} e^{-2N\psi_+(s)} \quad \text{pour } s > \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \quad (12.68)$$

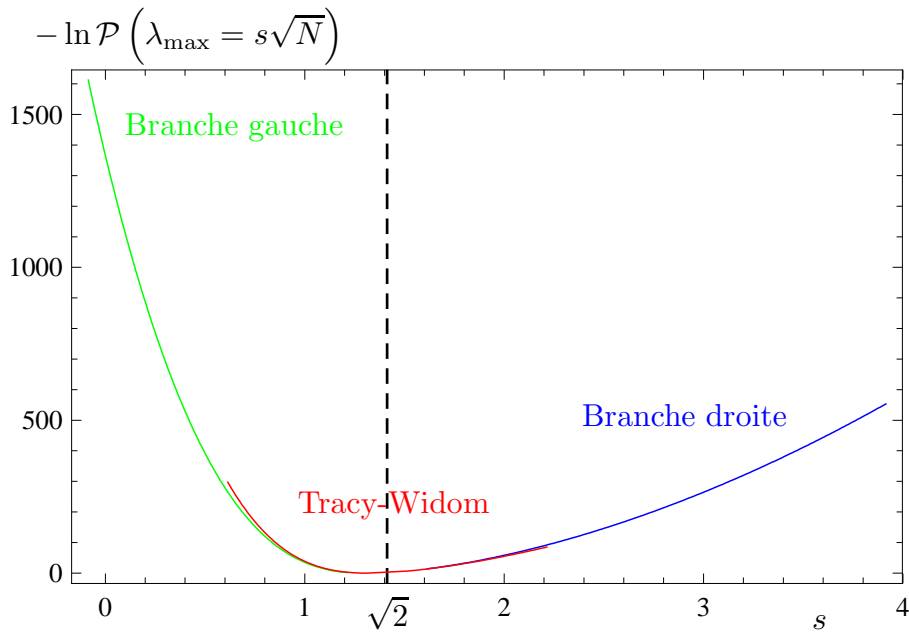
où la fonction de scaling est donnée par  $\psi_+(s) = \frac{\alpha s^2 - \Phi_1(x^*)}{2}$ .

On obtient donc l'expression de la **branche droite de la distribution de  $\lambda_{\max}$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$**  (grande déviation à droite) :

$$\boxed{\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} > s\sqrt{N}) \sim \frac{-1}{4\pi N\sqrt{2}(\alpha s^2 - 2)^{\frac{3}{2}}} e^{-2N\psi_+(s)} \quad \text{pour } s > \sqrt{\frac{2}{\alpha}}} \quad (12.69)$$

car  $\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq s\sqrt{N}) = 1 - \mathbb{P}_N(\lambda_{\max} > s\sqrt{N})$ , et avec

$$\boxed{\psi_+(s) = \frac{\alpha s^2}{2} \left[ \sqrt{1 - \frac{2}{\alpha s^2}} \right] + \ln \left\{ \sqrt{\frac{\alpha s^2}{2}} - \sqrt{\frac{\alpha s^2}{2} - 1} \right\}} \quad (12.70)$$



**Figure 12.2** – Fonction de grande déviation  $-\ln \mathcal{P}(\lambda_{\max} = s\sqrt{N})$  pour la distribution de la valeur propre maximale d’une matrice gaussienne GUE  $\mathcal{P}(\lambda_{\max} = y)$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . Près de la moyenne  $y = \sqrt{2N}$ , la distribution tend vers une loi de Tracy-Widom qui décrit les fluctuations typiques d’ordre  $N^{-1/6}$  au voisinage de la moyenne. Les grandes fluctuations d’ordre  $\sqrt{N}$  (événements rares) sont décrites par les grandes déviations à gauche ie  $s < \sqrt{2}$  (en vert) et à droite ie  $s > \sqrt{2}$  (en bleu).

En dérivant par rapport à  $y = s\sqrt{N}$  on obtient un équivalent à  $N$  grand de la densité de probabilité de  $\lambda_{\max}$  :

$$\mathcal{P}(\lambda_{\max} = y) \sim \frac{\sqrt{\alpha N} e^{-2N\psi_+(\frac{y}{\sqrt{N}})}}{2\pi\sqrt{2}(\alpha y^2 - 2N)} \quad \text{si } y > \sqrt{\frac{2N}{\alpha}}, \quad \left| y - \sqrt{\frac{2N}{\alpha}} \right| = O(\sqrt{N}) \quad (12.71)$$

La fonction de grande déviation  $-\mathcal{P}(\lambda_{\max} = s\sqrt{N})$  est tracée Fig. 12.2 (la branche droite est en bleu).

Pour  $\alpha = 1$ , on trouve l’expression annoncée au chapitre 3, cf Eq. (3.49). On retrouve en particulier l’ordre dominant pour  $N \rightarrow \infty$  donné par  $\psi_+(s)$  qui avait été calculé auparavant par méthode de gaz de Coulomb [MV09]. Notre méthode donne en plus les premières corrections à l’ordre dominant et permet d’avoir un véritable équivalent de  $\mathcal{P}(\lambda_{\max} = t)$  et pas seulement un équivalent logarithmique.

Voyons maintenant comment cette grande déviation droite (12.69) se comporte **au voisinage de la moyenne**, c’est-à-dire quand  $s \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\alpha}}$  par la droite. Le développement de  $\psi_+(s)$  autour de  $s = \sqrt{2}$  avec le scaling  $y = \sqrt{\frac{2N}{\alpha}} + N^{-1/6} \frac{x}{\sqrt{2\alpha}}$  soit  $s = \frac{y}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} + N^{-2/3} \frac{x}{\sqrt{2\alpha}}$  donne d’après (12.69) :

$$(1 - \mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y)) = \mathbb{P}_N(\lambda_{\max} > y) \sim \frac{1}{16\pi x^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}} \quad (12.72)$$

D’un autre côté d’après Eq. (3.18) pour  $\beta = 2$ , la distribution de Tracy-Widom qui décrit les fluctuations au voisinage de la moyenne pour  $y = \sqrt{\frac{2N}{\alpha}} + N^{-1/6} \frac{x}{\sqrt{2\alpha}}$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$  avec  $x$  fixé (cf Eq. (12.6)), se comporte comme  $(1 - \mathcal{F}_2(x)) \sim \frac{1}{16\pi x^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}}$  quand  $x \rightarrow \infty$ . Ainsi la grande déviation zoomée près de la moyenne se **recolle** de façon continue avec la queue droite de Tracy-Widom  $\mathcal{F}_2(x)$ , cf Eq. (12.72).

Dans la partie suivante, je vais montrer comment utiliser la méthode de polynômes orthogonaux que j’ai introduite ci-dessus pour redériver cette loi de Tracy-Widom pour le voisinage de la moyenne de  $\lambda_{\max}$ .

## 12.4 LIMITE DE “DOUBLE ÉCHELLE” ET DISTRIBUTION DE TRACY-WIDOM

Dans cette partie, je donne une **dérivation élémentaire de la loi de Tracy-Widom** pour le GUE fondée que une simple analyse de **scaling** des relations de récurrence dérivées dans la section précédente au voisinage du point critique  $y = y_{\text{cr}} = \sqrt{\frac{2N}{\alpha}}$ . Cette preuve, me semble-t-il, est mathématiquement plus simple que la dérivation d’origine de Tracy et Widom [TW94, TW96] car elle évite l’analyse asymptotique très complexe des déterminants de Fredholm. La dérivation de l’équation de Painlevé II à partir de l’analyse de scaling des relations de récurrence est dans le même esprit (bien que très différente dans les détails) que l’analyse de la fonction de partition de la théorie de Yang-Mills  $2D$  sur la sphère par Gross et Matytsin [GM94].

Rappelons, cf Eq. (3.7), que la distribution de **Tracy-Widom**  $\mathcal{F}_2(x)$  est définie par :

$$\mathcal{F}_2(x) = \exp \left\{ - \int_x^\infty ds (s-x) q^2(s) \right\} \quad (12.73)$$

où  $q(x)$  est solution de l’équation de **Painlevé II** avec condition au bord  $q(x) \sim \text{Ai}(x)$  quand  $x \rightarrow \infty$ , soit :

$$\begin{aligned} q''(x) &= 2q^3(x) + xq(x) \\ \text{avec } q(x) &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \quad \text{quand } x \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (12.74)$$

A partir de (12.73), on trouve  $\frac{d^2 \ln \mathcal{F}_2(x)}{dx^2} = -q^2(x)$ .

On veut montrer que dans la limite  $N \gg 1$  les petites **fluctuations typiques de  $\lambda_{\max}$  autour de sa moyenne**  $\sqrt{\frac{2N}{\alpha}}$  sont décrites par la distribution de Tracy-Widom. Pour cela, il faut d’abord trouver la **loi d’échelle** (scaling) des fluctuations près de la moyenne dans la limite  $N \rightarrow \infty$ .



### 12.4.1 Limite de double échelle

On veut décrire les fluctuations typiques près de la moyenne de  $\lambda_{\max}$ . On écrit donc **au voisinage de la moyenne**  $\sqrt{\frac{2N}{\alpha}}$  :

$$\left( \lambda_{\max} - \sqrt{\frac{2N}{\alpha}} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} N^\gamma x \quad (12.75)$$

où  $N^\gamma$  est l'échelle typique des fluctuations et la variable  $x$  a une distribution indépendante de  $N$  quand  $N \rightarrow \infty$ . Bien sûr on doit avoir  $\gamma < 1/2$  (pour que les fluctuations soient plus petites que la moyenne) mais la valeur exacte de  $\gamma$  reste à déterminer.

On notera que  $\lambda_{\max}$  apparaît toujours dans  $\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y)$  sous la forme  $y\sqrt{\alpha}$  (voir Eq. (12.11)), on a donc choisi le préfacteur des fluctuations comme  $1/\sqrt{2\alpha}$  pour assurer que la variable  $x$  soit complètement indépendante de  $\alpha$ .

Une façon de déterminer l'exposant  $\gamma$  est d'utiliser la branche droite de la distribution cf (12.69). La **branche droite** décrit la probabilité de grandes fluctuations d'ordre  $\sqrt{N}$  à droite de la moyenne. En supposant qu'il y a un **recollement continu** entre les fluctuations d'ordre  $N$  et d'ordre  $\leq \sqrt{N}$ , on remplace  $y$  par  $y = s\sqrt{N} = \sqrt{\frac{2N}{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} N^\gamma x$  au voisinage de la moyenne dans Eq. (12.69), ce qui donne :

$$\mathbb{P}_N \left( \lambda_{\max} \leq \sqrt{\frac{2N}{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} N^\gamma x \right) = 1 - \frac{1}{N^{\frac{1}{4} + \frac{3\gamma}{2}}} \frac{1}{16\pi x^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{4}{3}x^{3/2}N^{\frac{3\gamma}{2} + \frac{1}{4}}} + \dots \quad (12.76)$$

qui est valable pour  $x > 0$ ,  $x$  grand. On suppose que ce comportement est valable encore pour  $x$  pas trop grand, de sorte que (12.76) décrit la queue de la distribution des petites fluctuations typiques. On s'attend alors à ce que la queue de la distribution (12.76) exprimée en fonction de la variable  $x$  soit indépendante de  $N$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . La puissance de  $N$  doit donc être nulle à l'intérieure de l'exponentielle ainsi que dans le préfacteur dans Eq. (12.76), d'où  $\frac{1}{4} + \frac{3\gamma}{2} = 0$ , soit  $\gamma = -\frac{1}{6}$ .

Ainsi la bonne **loi d'échelle pour les fluctuations typiques** est la suivante :

$$\boxed{\left( \lambda_{\max} - \sqrt{\frac{2N}{\alpha}} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} N^{-\frac{1}{6}} x} \quad (12.77)$$

où  $x$  a une distribution indépendante de  $N$  quand  $N \rightarrow \infty$ , qu'on va montrer être donnée par la distribution de Tracy-Widom  $\mathcal{F}_2(x)$ .

De façon équivalente, la **limite de double échelle** est donnée ici par  $N \rightarrow \infty$  et  $\lambda_{\max} \rightarrow \sqrt{2N/\alpha}$  avec le produit  $(\lambda_{\max} - \sqrt{2N/\alpha}) N^{1/6}$  fixé. La distribution cumulative  $\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y)$  est en général une fonction de deux variables  $y$  et  $N$ . Mais au **voisinage de la moyenne**, soit  $y \rightarrow \sqrt{\frac{2N}{\alpha}}$ , dans la limite  $y - \sqrt{\frac{2N}{\alpha}} \rightarrow 0$  et  $N \rightarrow \infty$ , mais en gardant  $x = \sqrt{2\alpha} N^{1/6} \left( y - \sqrt{\frac{2N}{\alpha}} \right)$  fixé, la fonction de deux variables devient une fonction d'une seule variable  $x$  :

$$\boxed{\ln \mathbb{P}_N \left[ \frac{\lambda_{\max} - \sqrt{2N/\alpha}}{N^{-1/6}/\sqrt{2\alpha}} \leq x \right] \rightarrow f(x) \quad \text{quand } N \rightarrow \infty} \quad (12.78)$$

ou encore de façon équivalente :

$$\ln \mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y) \sim f \left( \sqrt{2\alpha} N^{1/6} \left( y - \sqrt{\frac{2N}{\alpha}} \right) \right) \quad \text{quand } N \gg 1 \quad (12.79)$$

Il reste maintenant à montrer que la **fonction de scaling**  $f$  est donnée par  $f(x) = \ln \mathcal{F}_2(x)$  où  $\mathcal{F}_2(x)$  est la fonction de Tracy-Widom définie Eq. (12.73). En d’autres termes, on veut montrer que  $f''(x) = -q^2(x)$  où  $q(x)$  est solution de l’équation de Painlevé II (12.74).

### 12.4.2 Equation de Painlevé et loi de Tracy-Widom

Le point de départ est la distribution cumulative (12.9). A partir de (12.21) on voit que la **fonction de partition**  $Z_N$  vérifie :

$$\frac{Z_{N-1}(y, \alpha) Z_{N+1}(y, \alpha)}{Z_N^2(y, \alpha)} = \frac{h_N(y, \alpha)}{h_{N-1}(y, \alpha)} = R_N(y, \alpha) \quad (12.80)$$

On prend le logarithme de l’équation ci-dessus, d’après (12.9) on a donc :

$$\ln \mathbb{P}_{N+1}(\lambda_{\max} \leq y) + \ln \mathbb{P}_{N-1}(\lambda_{\max} \leq y) - 2 \ln \mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y) = \ln \left( \frac{R_N(y, \alpha)}{R_N(\infty, \alpha)} \right) \quad (12.81)$$

Dans la limite de **double échelle** on substitue la forme attendue (12.79) pour le logarithme de la distribution cumulative dans le membre de gauche de (12.81). On a besoin de calculer  $\ln \mathbb{P}_{N\pm 1}(\lambda_{\max} \leq y)$ . Remplaçant  $N$  par  $(N \pm 1)$  dans (12.79) et développant pour  $N \gg 1$  à  $x = \sqrt{2\alpha} N^{1/6} \left( y - \sqrt{\frac{2N}{\alpha}} \right)$  fixé, on trouve :

$$\begin{aligned} \ln \mathbb{P}_{N\pm 1}(\lambda_{\max} \leq y) &= f \left( \sqrt{2\alpha} (N \pm 1)^{1/6} \left( y - \sqrt{\frac{2(N \pm 1)}{\alpha}} \right) \right) \\ &= f \left( x \mp N^{-1/3} \pm \frac{x}{6N} \pm \frac{N^{-4/3}}{12} + \dots \right) \\ &= f(x) \mp N^{-1/3} f'(x) + \frac{N^{-2/3}}{2} f''(x) + O(N^{-1}) \end{aligned} \quad (12.82)$$

Remplaçant ce résultat dans (12.81) on obtient pour le membre de gauche :

$$\ln \mathbb{P}_{N+1}(\lambda_{\max} \leq y) + \ln \mathbb{P}_{N-1}(\lambda_{\max} \leq y) - 2 \ln \mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y) = N^{-2/3} f''(x) + O(N^{-1}) \quad (12.83)$$

A partir des Eq. (12.81) et (12.83), on trouve pour  $N \gg 1$

$$N^{-2/3} f''(x) \sim \ln \left( \frac{R_N(y, \alpha)}{R_N(\infty, \alpha)} \right) \sim \ln \left( \frac{R_N(y, \alpha)}{N/(2\alpha)} \right) \quad (12.84)$$

car  $R_N(\infty, \alpha) = N/(2\alpha)$  (voir Eq. (12.33)). Ceci suggère que dans cette limite  $R_N$  doit se comporter comme  $R_N(y, \alpha) = \frac{N}{2\alpha} \left( 1 + N^{-\frac{2}{3}} f''(x) + \dots \right)$ . Plus précisément on trouve que  $R_N(y, \alpha)$  **se développe comme suit dans la limite de double échelle** :

$$\boxed{R_N(y, \alpha) = \frac{N}{2\alpha} \left( 1 + N^{-\frac{2}{3}} r_1(x) + N^{-1} r_2(x) + N^{-\frac{4}{3}} r_3(x) + \dots \right)} \quad (12.85)$$

où

$$\boxed{f''(x) = r_1(x)} \quad (12.86)$$

et  $r_2(x), r_3(x)$  etc. décrivent les corrections aux ordres suivants. Ainsi si on peut déterminer  $r_1(x)$  dans le développement de  $R_N(y, \alpha)$ , alors on peut déterminer  $f(x)$  en intégrant  $r_1(x)$  deux fois. On veut donc maintenant déterminer  $r_1(x)$  en analysant les relations de récurrence (12.29) (avec  $n = N$ ) dans la limite de double échelle.

On sait maintenant, cf (12.85), comment  $R_N(y, \alpha)$  se comporte dans la limite de double échelle. Pour analyser les relations de récurrence (12.29). on a aussi besoin de savoir comment  $S_N(y, \alpha)$  se comporte dans cette limite. Pour que l'ordre dominant de  $R_N(y, \alpha)$  avec  $x$  fixé soit compatible avec la seconde équation dans (12.29), il faut que  $S_N(y, \alpha)$  **se comporte comme**

$$\boxed{S_N(y, \alpha) = \frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2\alpha}} s_1(x) + O(N^{-1/2})} \quad (12.87)$$

où  $s_1(x)$  est la fonction d'échelle à l'ordre dominant pour  $N \rightarrow \infty$  avec la variable  $x = \sqrt{2\alpha} N^{1/6} \left( y - \sqrt{\frac{2N}{\alpha}} \right)$  fixée.

Évaluons d'abord la différence  $S_{N-1}(y, \alpha) - S_N(y, \alpha)$  qui apparaît dans Eq. (12.29). En remplaçant  $N$  par  $(N - 1)$  dans (12.87), on obtient pour  $N \gg 1$  :

$$S_{N-1}(y, \alpha) - S_N(y, \alpha) = \frac{N^{-1/2}}{\sqrt{2\alpha}} s_1'(x) + O(N^{-5/6}) \quad (12.88)$$

Il reste à évaluer la dérivée partielle  $\frac{\partial \ln R_N(y, \alpha)}{\partial y}$  dans (12.29). A partir de la définition de  $x = \sqrt{2\alpha} N^{1/6} \left( y - \sqrt{\frac{2N}{\alpha}} \right)$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln R_N(y, \alpha)}{\partial y} &= \frac{\partial \ln R_N(y, \alpha)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \\ &= \sqrt{2\alpha} N^{1/6} \frac{\partial \ln R_N(y, \alpha)}{\partial x} \\ &= \sqrt{2\alpha} N^{-1/2} r_1'(x) + O(N^{-5/6}) \end{aligned} \quad (12.89)$$

Finalement, en remplaçant (12.88) et (12.89) dans la seconde équation dans (12.29) (avec  $n = N$ ) on trouve :

$$\begin{aligned} \sqrt{2\alpha} \left( r_1'(x) N^{-\frac{1}{2}} + O(N^{-\frac{5}{6}}) \right) &= \frac{\partial \ln R_N}{\partial y} = 2\alpha (S_{N-1} - S_N) \\ &= \sqrt{2\alpha} \left( N^{-\frac{1}{2}} s_1'(x) + O(N^{-\frac{5}{6}}) \right) \end{aligned} \quad (12.90)$$

On égalise l'ordre dominant en  $N^{-1/2}$  des deux côtés, cela donne une relation entre  $s_1(x)$  et  $r_1(x)$  :

$$s_1'(x) = r_1'(x) \quad \text{ie} \quad s_1(x) = r_1(x) + c_0 \quad (12.91)$$

avec  $c_0$  une constante. A partir de (12.33) et du fait que  $y \rightarrow \infty$  quand  $x \rightarrow \infty$ , on en déduit que les deux fonctions  $r_1(x)$  et  $s_1(x)$  doivent s'annuler quand  $x \rightarrow \infty$ . Ainsi la constante  $c_0 = 0$  et on a pour tout  $x$

$$\boxed{r_1(x) = s_1(x)} \quad (12.92)$$

Il nous faut maintenant une dernière relation pour déterminer explicitement  $r_1$  (ou  $s_1 = r_1$ ). Pour cela on remplace l'expression de  $R_N(y, \alpha)$  (12.85) et  $S_N(y, \alpha)$  (12.87) dans la première relation de récurrence dans (12.29).

Pour analyser la première équation de (12.29) (avec  $n = N$ ), il faut évaluer  $\frac{\partial \ln R_N(y, \alpha)}{\partial \alpha}$ . De la définition de  $x$ ,  $x = \sqrt{2\alpha} N^{1/6} \left( y - \sqrt{\frac{2N}{\alpha}} \right)$ , on déduit  $\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{x}{2\alpha} + \frac{N^{2/3}}{\alpha}$ . Avec (12.85) on trouve :

$$\frac{\partial \ln R_N(y, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{r_1'(x) - 1}{\alpha} + \frac{N^{-\frac{1}{3}}}{\alpha} r_2'(x) + \frac{N^{-\frac{2}{3}}}{2\alpha} [xr_1'(x) - 2r_1(x)r_1'(x) + 2r_3'(x)] + \dots \quad (12.93)$$

D'autre part, en remplaçant  $N$  par  $(N \pm 1)$  dans l'expression de  $R_N$  (12.85) et en développant à  $N$  grand avec  $x = \sqrt{2\alpha} N^{1/6} \left( y - \sqrt{\frac{2N}{\alpha}} \right)$  fixé on trouve :

$$R_{N-1} - R_{N+1} = \frac{r_1'(x) - 1}{\alpha} + \frac{N^{-\frac{1}{3}}}{\alpha} r_2'(x) + \frac{N^{-\frac{2}{3}}}{6\alpha} [-2r_1(x) - xr_1'(x) + 6r_3'(x) + r_1'''(x)] + \dots \quad (12.94)$$

et de façon similaire pour  $S_N$ , cf (12.87) :

$$S_{N-1}^2 - S_N^2 = \frac{N^{-\frac{2}{3}}}{\alpha} s_1(x) s_1'(x) + \dots \quad (12.95)$$

On substitue ces résultats dans la première relation de (12.29) et on égalise des deux côtés l'ordre dominant ( $N^{-2/3}$ ), on obtient finalement :

$$xr_1'(x) - 2r_1(x)r_1'(x) = -\frac{2}{3}r_1(x) - \frac{x}{3}r_1'(x) + \frac{1}{3}r_1'''(x) + 2s_1(x)s_1'(x) \quad (12.96)$$

On élimine  $s_1(x)$  sachant que  $s_1(x) = r_1(x)$ , on trouve donc une équation pour  $r_1(x)$  :

$$2xr_1'(x) + r_1(x) = \frac{1}{2}r_1'''(x) + 6r_1(x)r_1'(x) \quad (12.97)$$

On écrit alors

$$\boxed{r_1(x) = -u^2(x)} \quad (12.98)$$

Eq. (12.97) devient alors une équation pour  $u(x)$  :

$$u(u''' - 6u^2u' - xu' - u) = -3u'(u'' - xu - 2u^3) \quad (12.99)$$

Posons  $W(x) = u''(x) - xu(x) - 2u^3(x)$ . Ainsi Eq. (12.99) devient :

$$u(x) \frac{dW(x)}{dx} = -3u'(x)W(x) \quad (12.100)$$

qui donne après intégration :

$$W(x) = \frac{A}{u(x)^3} \quad (12.101)$$

où  $A$  est une constante arbitraire. D'où

$$u''(x) - xu(x) - 2u^3(x) = \frac{A}{u(x)^3} \quad (12.102)$$

La condition au bord  $r_1(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow \infty$  (d'après Eq. (12.33)) implique, comme  $r_1(x) = u^2(x)$ , que  $u(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow \infty$ . La limite  $x \rightarrow \infty$  dans Eq. (12.102) fixe la valeur de la constante  $A = 0$ .

Finalement (12.86) donne  $f''(x) = r_1(x) = -u^2(x)$  où  $u(x)$  est **solution de l'équation de Painlevé II** :

$$\boxed{u''(x) = x u(x) + 2 u^3(x)} \quad (12.103)$$

Pour fixer la **condition en**  $x \rightarrow \infty$  pour  $u(x)$ , on peut à nouveau se servir du recollement avec la grande déviation à droite (12.76). En prenant le logarithme dans (12.76) avec  $\gamma = -1/6$  et comme  $\ln \mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y, \alpha) = f(x)$  on trouve :

$$\boxed{f(x) \sim -\frac{1}{16\pi x^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}} \text{ quand } x \rightarrow \infty} \quad (12.104)$$

D'où  $u^2(x) = -f''(x) \approx e^{-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{4\pi\sqrt{x}}$  donc quand  $x \rightarrow \infty$

$$u(x) = \sqrt{-f''(x)} \sim e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \quad (12.105)$$

Finalement intégrant  $f''(x)$  deux fois avec les bonnes conditions au bord quand  $x \rightarrow \infty$ , on trouve

$$\boxed{f(x) = -\int_x^\infty ds (s-x) u^2(s)} \quad (12.106)$$

où  $u(x)$  est solution de l'équation de Painlevé II (12.103) avec condition au bord (12.105). En comparant avec Eq. (12.73), on a donc montré que la fonction d'échelle  $f(x) = \ln \mathcal{F}_2(x)$  où  $\mathcal{F}_2(x)$  est la fonction de Tracy-Widom ( $\beta = 2$ ). On a donc redérivé la **loi de Tracy-Widom pour le GUE** ( $\beta = 2$ ).

## - Chapitre 13 -

---

# Valeur propre maximale : grande déviation gauche

---

Je poursuis dans ce chapitre l'étude de la **valeur propre maximale**  $\lambda_{\max}$  **d'une matrice aléatoire gaussienne** commencée au chapitre précédent 12. Les fluctuations typiques de  $\lambda_{\max}$  au voisinage de sa moyenne  $\sqrt{2N}$  sur une échelle d'ordre  $N^{-1/6}$  sont décrites par la loi de Tracy-Widom, cf Eq. (3.6). Les grandes fluctuations de  $\lambda_{\max}$  sur une échelle d'ordre  $\sqrt{N}$  autour de sa moyenne  $\sqrt{2N}$  sont décrites par les **grandes déviations** : elles représentent des événements rares assez éloignés de la moyenne. Dans le chapitre 12, j'ai montré comment calculer la branche droite (ie à droite de la moyenne  $\lambda_{\max} > \sqrt{2N}$ ) de la grande déviation de  $\lambda_{\max}$ . Dans ce chapitre, j'explique comment calculer la **branche gauche** de la grande déviation ( $\lambda_{\max} < \sqrt{2N}$ ). C'est un travail réalisé en collaboration avec G. Borot et B. Eynard [BEMN10] qui s'appuie sur une méthode développée dans un contexte très général en théorie des matrices aléatoires par B. Eynard.

Dans ce chapitre, comme dans le précédent, le point de départ est la distribution jointe des **valeurs propres d'une matrice aléatoire gaussienne**, cf (3.5) :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B_N(\beta) e^{-\frac{\beta}{2} \sum_i \lambda_i^2} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad (13.1)$$

Cette distribution correspond aux valeurs propres d'une matrice aléatoire gaussienne de l'ensemble GOE pour  $\beta = 1$ , GUE pour  $\beta = 2$  et GSE pour  $\beta = 4$ . Mais on peut également considérer la distribution (13.1) pour un  $\beta > 0$  quelconque. C'est ce qu'on va faire dans ce chapitre.

On s'intéresse plus précisément à la distribution de la valeur propre maximale  $\lambda_{\max} = \max_i \lambda_i$  où les  $\lambda_i$  sont distribués selon la loi jointe (13.1) pour un  $\beta > 0$  quelconque. On a déjà vu que la moyenne de  $\lambda_{\max}$  est donnée par :

$$\langle \lambda_{\max} \rangle \sim \sqrt{2N} \quad \text{pour } N \gg 1 \quad (13.2)$$

L'objet de ce chapitre est le calcul de la branche gauche de la distribution de  $\lambda_{\max}$ , ie à gauche de la moyenne  $\lambda_{\max} < \sqrt{2N}$  et pour un  $\beta > 0$  quelconque. L'ordre dominant

de la grande déviation dans la limite  $N \rightarrow \infty$  avait déjà été calculé par la méthode du gaz de Coulomb [DM06, DM08] comme je l'ai expliqué section 3.3.1.1. Dans ce chapitre je montre comment calculer les premières corrections à l'ordre dominant.

La méthode utilisée ici est une technique développée par Bertrand Eynard pour calculer des intégrales de matrices qui admettent un **développement en puissances de  $N$**  quand  $N \rightarrow \infty$ . Cette technique fait largement appel à l'**analyse complexe**. J'explique dans ce chapitre des résultats qui ont été obtenus en collaboration avec Gaëtan Borot et Bertrand Eynard [BEMN10]. Dans l'article, le cas général d'un modèle de matrice avec potentiel polynomial est considéré, ce qui rend les expressions assez lourdes. J'ai choisi de suivre ici une démarche différente en expliquant en détails dans ce chapitre le cas gaussien (potentiel quadratique) qui est plus simple et dans lequel on obtient plus aisément des formules explicites. Cela permet aussi d'expliquer plus simplement l'intérêt de ces techniques d'analyse complexe sur un cas concret.

On notera que dans l'article [BEMN10], la notation utilisée est différente de celle que j'utilise ici comme dans toute ma thèse. Le  $\beta$  de l'article est égal à l'indice de Dyson  $\beta$  (que j'utilise) divisé par 2.

### 13.1 IDÉE GÉNÉRALE ET NOTATIONS

Dans tout ce chapitre, on s'intéresse à la distribution cumulative de la **valeur propre maximale d'une matrice gaussienne**  $\lambda_{\max} = \max_i \lambda_i$  où les  $\lambda_i$  sont distribués selon la loi jointe (13.1). La distribution cumulative de  $\lambda_{\max}$  est donc donnée par :

$$\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y) = B_N(\beta) \int_{-\infty}^y d\lambda_1 \dots \int_{-\infty}^y d\lambda_N e^{-\frac{\beta}{2} \sum_i \lambda_i^2} |\Delta(\lambda_i)|^\beta \quad (13.3)$$

où  $\Delta(\lambda_i)$  est le déterminant de Vandermonde des  $\lambda_i$  :

$$\Delta(\lambda_i) = \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i) \quad (13.4)$$

L'ordre de grandeur typique d'une valeur propre est  $\lambda_i \asymp \sqrt{N}$ , cf Eq. (2.15). On introduit les variables adimensionnées  $x_i = \lambda_i / \sqrt{N}$ . On pose  $y = s\sqrt{N}$ . On peut alors écrire la distribution cumulative de  $\lambda_{\max}$  sous la forme

$$\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq s\sqrt{N}) = C_N(\beta) \int_{-\infty}^s dx_1 \dots \int_{-\infty}^s dx_N e^{-\frac{\beta N}{2} \sum_i x_i^2} |\Delta(x_i)|^\beta \quad (13.5)$$

où  $C_N(\beta) = B_N(\beta) N^{\frac{N}{2} + \beta \frac{N(N-1)}{4}}$ .

On définit la **fonction de partition** comme :

$$Z_N(s) = \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^s dx_i |\Delta(x_i)|^\beta e^{-\frac{\beta N}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (13.6)$$

On peut alors écrire la **distribution cumulative de  $\lambda_{\max}$**  sous la forme :

$$\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq s\sqrt{N}) = \frac{Z_N(s)}{Z_N(\infty)} \quad (13.7)$$

Le but est d'estimer la fonction de partition  $Z_N(s)$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$  et pour  $s$  fixé.

Dans toute la suite on notera  $\langle \dots \rangle_s$  la **moyenne** d'une grandeur sur les variables aléatoires  $x_i$  ("valeurs propres adimensionnées") **conditionnées** à être toutes inférieures à  $s$  (ie  $x_{\max} \leq s$ ) :

$$\langle \dots \rangle_s = \frac{1}{Z_N(s)} \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^s dx_i \dots |\Delta(x_i)|^\beta e^{-\frac{\beta N}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (13.8)$$

### 13.1.1 Energie libre et développement perturbatif

On définit l'**énergie libre** :

$$F_N(s) = \ln Z_N(s) \quad (13.9)$$

Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que  $F_N(s)$  admet dans la limite  $N \rightarrow \infty$  et pour  $s$  fixé un **développement en puissances de  $1/N$** . On va voir que cette hypothèse est valable seulement à gauche de la moyenne de  $\lambda_{\max}$  soit pour  $s < \sqrt{2}$ .

Par des méthodes de **gaz de Coulomb** [DM06, DM08, MV09], on connaît déjà l'ordre dominant des grandes déviations de la densité de probabilité de  $\lambda_{\max}$  :

$$\mathcal{P}(\lambda_{\max} = y) \approx \begin{cases} e^{-\beta N^2 \psi_-\left(\frac{y}{\sqrt{N}}\right)} & \text{si } y < \sqrt{2N} \text{ et } |y - \sqrt{2N}| = O(\sqrt{N}) \\ e^{-\beta N \psi_+\left(\frac{y}{\sqrt{N}}\right)} & \text{si } y > \sqrt{2N} \text{ et } |y - \sqrt{2N}| = O(\sqrt{N}) \end{cases} \quad (13.10)$$

où, cf Eq.(3.39), pour  $s < \sqrt{2}$  :

$$\psi_-(s) = \frac{s^2}{3} - \frac{s^4}{108} - \sqrt{s^2 + 6} \frac{(s^3 + 15s)}{108} - \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\sqrt{s^2 + 6} + s}{\sqrt{2}} \right] + \frac{\ln 3}{2} \quad (13.11)$$

et où, cf Eq. (3.45), pour  $s > \sqrt{2}$  :

$$\psi_+(s) = \frac{s^2}{2} \left[ \sqrt{1 - \frac{2}{s^2}} \right] + \ln \left\{ \sqrt{\frac{s^2}{2}} - \sqrt{\frac{s^2}{2} - 1} \right\} \quad (13.12)$$

On rappelle que  $\approx$  signifie équivalent logarithmique.

Ainsi, en intégrant par rapport à  $y$  et en posant ensuite  $y = s\sqrt{N}$ , on trouve que la **distribution cumulative** de  $\lambda_{\max}$  doit être de la forme :

$$\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq s\sqrt{N}) = \begin{cases} e^{-\beta N^2 \psi_-(s) + O(N)} & \text{si } s < \sqrt{2} \text{ et } |s - \sqrt{2}| = O(1) \\ 1 - e^{-\beta N \psi_+(s) + O(N)} & \text{si } s > \sqrt{2} \text{ et } |s - \sqrt{2}| = O(1) \end{cases} \quad (13.13)$$

En effet, comme toute distribution cumulative,  $\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq s\sqrt{N})$  doit tendre vers 0 quand  $s \rightarrow -\infty$  et vers 1 quand  $s \rightarrow \infty$ . En prenant le logarithme dans Eq. (13.13) on trouve pour l'**énergie libre** :

$$F_N(s) - F_N(\infty) = \ln \mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq s\sqrt{N}) \quad (13.14)$$

$$= \begin{cases} -\beta N^2 \psi_-(s) + O(N) & \text{si } s < \sqrt{2} \text{ et } |s - \sqrt{2}| = O(1) \\ -e^{-\beta N \psi_+(s) + O(N)} & \text{si } s > \sqrt{2} \text{ et } |s - \sqrt{2}| = O(1) \end{cases}$$



On voit bien ici la dissymétrie entre la branche gauche (ie à gauche de la moyenne  $s < \sqrt{2}$ ) et la branche droite (ie  $s > \sqrt{2}$ ) de la moyenne. Pour  $s < \sqrt{2}$ , l'énergie libre admet un développement perturbatif en puissances de  $(1/N)$  avec à l'ordre dominant  $F_N(s) \asymp N^2$ . C'est dans ce régime qu'on se place dans ce chapitre. Au contraire pour  $s > \sqrt{2}$ , un développement de l'énergie libre en puissances de  $(1/N)$  donnerait 0 à tous les ordres. La première correction pour  $N \rightarrow \infty$  est un terme non-perturbatif de la forme  $-e^{-\beta N \psi_+(s)}$ . Ce sont ces corrections non-perturbatives qu'on a pu calculer grâce à la méthode de Gross et Matytsin dans le chapitre précédent 12.

Dans toute la suite on suppose que **l'énergie libre  $F_N(s)$  admet un développement perturbatif en puissances de  $(1/N)$** , c'est-à-dire qu'on se place **à gauche de la moyenne, soit  $s < \sqrt{2}$** .

## 13.1.2 Corrélateurs

### 13.1.2.1 Densité moyenne et résolvante

On introduit  $\rho_N(\lambda)$ , la **densité moyenne des valeurs propres  $\lambda_i$  sachant que  $\lambda_{\max} \leq s\sqrt{N}$** . La quantité  $\rho_N(\lambda)d\lambda$  est donc la probabilité de trouver une valeur propre entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$  sachant que toutes les valeurs propres sont plus petites que  $y = s\sqrt{N}$  (ie  $\lambda_{\max} \leq s\sqrt{N}$ ). Cette densité moyenne est donnée par :

$$\rho_N(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left\langle \rho \left( \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \right) \right\rangle_s \quad (13.15)$$

où  $\rho(x) = \frac{1}{N} \sum_i \delta(x - x_i)$  est la densité adimensionnée avec  $x_i = \lambda_i/\sqrt{N}$ .  $\langle \rho(x) \rangle_s$  est la **densité moyenne des valeurs propres adimensionnées  $x_i$  sachant que  $x_{\max} \leq s$**  (avec  $x_i = \lambda_i/\sqrt{N}$ ) :

$$\langle \rho(x) \rangle_s = \frac{1}{N} \sum_i \langle \delta(x - x_i) \rangle_s \quad (13.16)$$

où la moyenne conditionnelle  $\langle \dots \rangle_s$  a été définie Eq. (13.8) :

$$\langle \dots \rangle_s = \frac{1}{Z_N(s)} \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^s dx_i \dots |\Delta(x_i)|^\beta e^{-\frac{\beta N}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (13.17)$$

où la fonction de partition  $Z_N(s)$  est donnée Eq. (13.6). La densité  $\langle \rho(x) \rangle_s$  est la distribution marginale d'une valeur propre adimensionnée  $x_i = \lambda_i/\sqrt{N}$  avec la contrainte que  $x_{\max} \leq s$ . Les densités  $\rho_N(\lambda)$  et  $\langle \rho(x) \rangle_s$  sont par définition **normalisées** à 1 :  $\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \rho_N(\lambda) = 1$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle \rho(x) \rangle_s = 1$ .

Pour  $s < \sqrt{2}$ , on s'attend à ce que la **densité  $\langle \rho(x) \rangle_s$  ait un support fini de la forme  $[a, s]$**  où  $a < s$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . En effet, en l'absence de contrainte sur  $x_{\max}$ , la densité  $\langle \rho(x) \rangle_s$  est à l'ordre dominant le demi-cercle de Wigner à support  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ , cf Eq. (2.26). Si on met maintenant un **mur en  $s$**  où  $s < \sqrt{2}$ , on force  $x_{\max}$  et donc tous les  $x_i$  à être inférieurs à  $s$ . On comprime la densité vers la gauche, on s'attend à une accumulation de valeurs propres juste à gauche de  $s$  et à une densité à support fini  $[a, s]$  où  $a \leq -\sqrt{2} < s$  (voir aussi section 3.3.1.1).

La **résolvante** d'une matrice  $H$  est définie par

$$\boxed{\mathcal{R}(z) = \text{Tr} \left( \frac{1}{z - H} \right) = \sum_i \frac{1}{z - x_i}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(H)} \quad (13.18)$$

où  $\text{Sp}(H) = \{x_i\}_i$  est le spectre (valeurs propres) de  $H$ .  $\mathcal{R}(z)$  est méromorphe sur  $\mathbb{C}$ , ie elle est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus \{x_i\}_i$  et a un pôle simple en chaque  $x_i$ .

On introduit alors la fonction  $W_1(z)$  définie comme la **moyenne de la résolvante** pour les valeurs propres adimensionnées :

$$\boxed{W_1(z) = \langle \mathcal{R}(z) \rangle_s = \left\langle \sum_{i=1}^N \frac{1}{z - x_i} \right\rangle_s} \quad (13.19)$$

où la notation  $\langle \dots \rangle_s$  est rappelée Eq. (13.17). On voit que la fonction  $W_1(z)$  s'écrit simplement en fonction de la densité moyenne des valeurs propres adimensionnées donnée Eq. (13.16) comme :

$$W_1(z) = N \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\langle \rho(x) \rangle_s}{z - x} \quad (13.20)$$

Or  $\langle \rho(x) \rangle_s$  a un support fini  $[a, s] \subset \mathbb{R}$ . Ainsi, pour  $N \rightarrow \infty$ ,  $W_1(z)$  est **analytique** sur  $\mathbb{C} \setminus [a, s]$  et a une **coupure** sur le segment réel  $[a, s]$  (comme la fonction  $F(z)$  étudiée section 2.4.2).

### 13.1.2.2 Corrélateur à $n$ points

On définit de façon générale les **corrélateurs à  $n$  points**  $\overline{W}_n(z_1, \dots, z_n)$  comme les fonctions de corrélation de  $n$  résolvantes :

$$\boxed{\overline{W}_n(z_1, \dots, z_n) = \langle \mathcal{R}(z_1) \dots \mathcal{R}(z_n) \rangle_s} \quad (13.21)$$

où la moyenne conditionnelle  $\langle \dots \rangle_s$  est définie Eq. (13.17). Pour  $n = 1$ , on retrouve  $\overline{W}_1(z) = W_1(z)$  défini précédemment Eq. (13.19).

On introduit la **fonctionnelle génératrice des corrélateurs** à  $n$  points, notée  $G_N[j]$  :

$$G_N[j] = \left\langle e^{\int dz j(z) \mathcal{R}(z)} \right\rangle_s \quad \text{où} \quad \mathcal{R}(z) = \sum_i \frac{1}{z - x_i} \quad (13.22)$$

$G_N[j]$  est une fonctionnelle du terme de source  $j(z)$ . On peut écrire la fonctionnelle génératrice  $G_N[j]$  sous la forme :

$$G_N[j] = \frac{Z_N^{[j]}(s)}{Z_N(s)} \quad (13.23)$$

où la **fonction de partition avec source**  $Z_N^{[j]} = Z_N^{[j]}(s)$  est donnée par :

$$\boxed{Z_N^{[j]}(s) = \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^s dx_i |\Delta(x_i)|^\beta e^{-\frac{\beta N}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2} e^{\int dz \sum_i \frac{j(z)}{z - x_i}} \quad (13.24)}$$

En particulier  $Z_N^{[0]}(s) = Z_N(s)$ , cf Eq. (13.6).

Comme  $G_N[j] = \frac{Z_N^{[j]}(s)}{Z_N(s)}$  est la fonctionnelle génératrice des corrélateurs à  $n$  points, on a donc :

$$\overline{W}_n(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{Z_N(s)} \left[ \frac{\delta}{\delta j(z_n)} \dots \frac{\delta}{\delta j(z_1)} Z_N^{[j]}(s) \right]_{j=0} \quad (13.25)$$

On définit aussi les **corrélateurs connexes à  $n$  points** :

$$W_n(z_1, \dots, z_n) = \langle \mathcal{R}(z_1) \dots \mathcal{R}(z_n) \rangle_C \quad (13.26)$$

Ce sont les corrélateurs générés par la série  $\ln Z_N^{[j]}$  :

$$W_n(z_1, \dots, z_n) = \left[ \frac{\delta}{\delta j(z_n)} \dots \frac{\delta}{\delta j(z_1)} \ln Z_N^{[j]}(s) \right]_{j=0} \quad (13.27)$$

Par exemple, on a :

$$W_1(z) = \overline{W}_1(z) \quad \text{et} \quad W_2(z_1, z_2) = \overline{W}_2(z_1, z_2) - W_1(z_1)W_1(z_2) \quad (13.28)$$

On notera que les corrélateurs  $\overline{W}_n(z_1, \dots, z_n)$  et  $W_n(z_1, \dots, z_n)$  sont **symétriques** en leurs variables  $z_i$ . Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , si la densité  $\langle \rho(x) \rangle_s$  (13.16) a un support fini  $[a, s]$ , on s'attend à ce que  $W_n(z_1, \dots, z_n)$  comme fonction de  $z_1$  soit **analytique** sur  $\mathbb{C} \setminus [a, s]$ . En effet la résolvante  $\mathcal{R}(z) = \sum_i \frac{1}{z-x_i}$  est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$ , donc les corrélateurs de la résolvante sont analytiques sur  $\mathbb{C} \setminus [a, s]$  où  $[a, s]$  est le support de la densité  $\langle \rho(x) \rangle_s$  des valeurs propres adimensionnées.

### 13.1.2.3 Corrélateurs en présence de source

On définira aussi dans la suite les **corrélateurs à  $n$  points en présence de source** :

$$\overline{W}_n^{[j]}(z_1, \dots, z_n) = \langle \mathcal{R}(z_1) \dots \mathcal{R}(z_n) \rangle_s^{[j]} \quad (13.29)$$

où  $\mathcal{R}(z) = \sum_i \frac{1}{z-x_i}$  est la résolvante et où on note  $\langle \dots \rangle_s^{[j]}$  la moyenne en présence de source :

$$\langle \dots \rangle_s^{[j]} = \frac{1}{Z_N^{[j]}(s)} \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^s dx_i \quad (\dots) \quad |\Delta(x_i)|^\beta e^{-\frac{\beta N}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2} e^{\int dz \sum_i \frac{j(z)}{z-x_i}} \quad (13.30)$$

où  $Z_N^{[j]}(s)$  est la fonction de partition avec source, cf Eq. (13.24). Quand  $j = 0$ , on retrouve  $\langle \dots \rangle_s$  défini Eq. (13.17).

Les corrélateurs avec source définis ainsi sont générés par la fonctionnelle  $Z_N^{[j]}(s)$  :

$$\overline{W}_n^{[j]}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{Z_N^{[j]}(s)} \left[ \frac{\delta}{\delta j(z_n)} \dots \frac{\delta}{\delta j(z_1)} Z_N^{[j]}(s) \right] \quad (13.31)$$

La différence avec les corrélateurs sans source est qu'on ne prend pas  $j = 0$  après les dérivation par rapport à  $j(z_i)$ , cf (13.25).

On définit aussi les **corrélateurs connexes en présence de source** :

$$W_n^{[j]}(z_1, \dots, z_n) = \left[ \frac{\delta}{\delta j(z_n)} \dots \frac{\delta}{\delta j(z_1)} \ln Z_N^{[j]}(s) \right] \quad (13.32)$$

L'intérêt de définir les corrélateurs avec source est que les corrélateurs connexes avec source vérifient une **relation de récurrence** utile :

$$\frac{\delta W_n^{[j]}(z_1, \dots, z_n)}{\delta j(z_{n+1})} = W_{n+1}^{[j]}(z_1, \dots, z_{n+1}) \quad (13.33)$$

En l'absence de source, ie  $j = 0$ , on retrouve les moyennes et corrélateurs normaux  $\langle \dots \rangle_s^{[0]} = \langle \dots \rangle_s$ ,  $Z_N^{[0]}(s) = Z_N(s)$ ,  $\overline{W}_n^{[0]}(z_1, \dots, z_n) = \overline{W}_n(z_1, \dots, z_n)$  et  $W_n^{[0]}(z_1, \dots, z_n) = W_n(z_1, \dots, z_n)$ .

Les relations  $W_1(z) = \overline{W}_1(z)$  et  $W_2(z_1, z_2) = \overline{W}_2(z_1, z_2) - W_1(z_1)W_1(z_2)$  en l'absence de source, cf (13.28), sont aussi vérifiées en présence de source :

$$W_1^{[j]}(z) = \overline{W}_1^{[j]}(z) \quad (13.34)$$

$$W_2^{[j]}(z_1, z_2) = \overline{W}_2^{[j]}(z_1, z_2) - W_1^{[j]}(z_1)W_1^{[j]}(z_2) \quad (13.35)$$

### 13.1.3 Equations de boucle

Dans cette section, on va établir des relations de récurrence sur les corrélateurs connexes  $W_n$ . Les relations de ce type sont appelées équations de boucle ou équations de Schwinger-Dyson (en physique) ou encore équations de Pastur (en mathématiques).

Le point de départ est la **fonction de partition avec source**  $Z_N^{[j]}(s)$ , cf Eq. (13.24) :

$$Z_N^{[j]}(s) = \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^s dx_i |\Delta(x_i)|^\beta e^{-\frac{\beta N}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2} e^{\int dz' \sum_i \frac{j(z')}{z' - x_i}} \quad (13.36)$$

On effectue dans l'intégrale multiple (13.36) le **changement de variables**

$$x'_i = x_i - \frac{\epsilon}{z - x_i} \quad \text{où } \epsilon \ll 1 \quad (13.37)$$

avec  $z \in \mathbb{C} \setminus [b, s]$  où  $[b, s]$  est le support moyen des valeurs propres adimensionnées  $x_i$  dans la limite  $N \gg 1$  (si on ne se place pas dans la limite  $N \gg 1$ , alors il faut prendre  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ). On écrit alors que les expressions de  $Z_N^{[j]}(s)$  avant et après changement de variables sont égales, cela donne une équation qui relie les corrélateurs avec source  $W_1^{[j]}$  et  $W_2^{[j]}$ , comme on va voir. Comme on s'intéresse seulement à l'ordre un en  $\epsilon$ , le changement de variables équivaut à :

$$x'_i = x_i - \frac{\epsilon}{z - x'_i} + O(\epsilon^2) \quad (13.38)$$

• L'intégration se fait sur  $x_i \in ]-\infty, s]$ . La borne supérieure  $x_i = s$  devient  $x'_i = s - \frac{\epsilon}{z-s} + \dots$  au premier ordre en  $\epsilon$ . Ainsi le changement de bornes crée un terme  $-\frac{\epsilon}{(z-s)} \partial_s \left( Z_N^{[j]}(s) \right)$  à l'ordre un en  $\epsilon$ .

• La mesure d'intégration devient :

$$\prod_{i=1}^N dx_i = \prod_{i=1}^N dx'_i \left( 1 + \frac{\epsilon}{(z-x'_i)^2} \right) = \left( \prod_{i=1}^N dx'_i \right) \left[ 1 + \epsilon \sum_{i=1}^N \frac{1}{(z-x'_i)^2} \right] + O(\epsilon^2) \quad (13.39)$$

• Le déterminant de Vandermonde devient :

$$\begin{aligned} \Delta(x_i) &= \prod_{i < j} \left( x'_j - x'_i + \epsilon \frac{(x'_j - x'_i)}{(z-x'_i)(z-x'_j)} \right) \\ &= \Delta(x'_i) \left( 1 + \epsilon \sum_{i < j} \frac{1}{(z-x'_i)(z-x'_j)} \right) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (13.40)$$

• Le terme gaussien devient :

$$e^{-\frac{\beta N}{2} \sum_i x_i^2} = e^{-\frac{\beta N}{2} \sum_i x_i'^2} \left( 1 - \epsilon \beta N \sum_i \frac{x'_i}{z-x'_i} \right) + O(\epsilon^2) \quad (13.41)$$

• Le terme de source devient :

$$e^{\int dz' \sum_i \frac{j(z')}{z'-x_i}} = e^{\int dz' \sum_i \frac{j(z')}{z'-x'_i}} \left( 1 + \epsilon \sum_i \frac{1}{(z-x'_i)} \int dz' \frac{j(z')}{(z'-x'_i)^2} \right) + O(\epsilon^2) \quad (13.42)$$

Si on met tout ensemble et qu'on tient compte du changement de bornes d'intégration on obtient à l'ordre 1 en  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} Z_N^{[j]}(s) &= Z_N^{[j]}(s) - \frac{\epsilon}{(z-s)} \partial_s Z_N^{[j]}(s) \\ &\quad + \epsilon \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^s dx'_i |\Delta(x'_i)|^\beta e^{-\frac{\beta N}{2} \sum_{i=1}^N x_i'^2} e^{\int dz' \sum_i \frac{j(z')}{z'-x'_i}} f_z(\{x'_i\}) + O(\epsilon^2) \\ \text{où } f_z(\{x'_i\}) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{(z-x'_i)^2} + \sum_{i < j} \frac{\beta}{(z-x'_i)(z-x'_j)} \\ &\quad - \beta N \sum_i \frac{x'_i}{z-x'_i} + \sum_i \frac{1}{(z-x'_i)} \int dz' \frac{j(z')}{(z'-x'_i)^2} \end{aligned} \quad (13.43)$$

et où le terme  $-\frac{\epsilon}{(z-s)} \partial_s Z_N^{[j]}(s)$  est dû au changement de bornes d'intégration. Finalement, en divisant par  $Z_N^{[j]}(s)$ , on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{z-s} \partial_s Z_N^{[j]}(s)}{Z_N^{[j]}(s)} &= \left\langle \sum_{i=1}^N \frac{1}{(z-x'_i)^2} \right\rangle_s^{[j]} + \left\langle \sum_{i < j} \frac{\beta}{(z-x'_i)(z-x'_j)} \right\rangle_s^{[j]} \\ &\quad - \beta N \left\langle \sum_i \frac{x'_i}{z-x'_i} \right\rangle_s^{[j]} + \int dz' j(z') \left\langle \sum_i \frac{1}{(z-x'_i)} \frac{1}{(z'-x'_i)^2} \right\rangle_s^{[j]} \end{aligned} \quad (13.44)$$

où  $\langle \dots \rangle_s^{[j]}$  est la moyenne avec source, cf Eq. (13.30). Or on peut écrire  $\frac{1}{(z-x'_i)^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z-x'_i}$ .  
On a aussi :

$$\frac{1}{(z-x'_i)(z'-x'_i)^2} = -\frac{\partial}{\partial z'} \left[ \frac{1}{(z-x'_i)(z'-x'_i)} \right] = \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \frac{\frac{1}{z-x'_i} - \frac{1}{z'-x'_i}}{z-z'} \right] \quad (13.45)$$

De plus  $\langle 1 \rangle_s^{[j]} = 1$ , donc d'après (13.34) et (13.35), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial_s \ln Z_N^{[j]}(s)}{(z-s)} &= \left( \frac{\beta}{2} - 1 \right) \frac{dW_1^{[j]}(z)}{dz} + \frac{\beta}{2} \overline{W}_2^{[j]}(z, z) + \beta N^2 - \beta N z W_1^{[j]}(z) \\ &+ \int dz' j(z') \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{W_1^{[j]}(z) - W_1^{[j]}(z')}{z-z'} \right) \end{aligned} \quad (13.46)$$

L'équation ci-dessus est vraie pour toute source  $j(z')$ . C'est l'équation de boucle avec source. On peut encore remplacer dans cette équation  $\overline{W}_2$  en fonction des corrélateurs connexes  $W_1$  et  $W_2$  en utilisant (13.35). On obtient ainsi **l'équation de boucle avec source** pour les corrélateurs connexes :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial_s \ln Z_N^{[j]}(s)}{(z-s)} &= \left( \frac{\beta}{2} - 1 \right) \frac{dW_1^{[j]}(z)}{dz} + \frac{\beta}{2} W_2^{[j]}(z, z) + \frac{\beta}{2} W_1^{[j]}(z)^2 \\ &+ \beta N^2 - \beta N z W_1^{[j]}(z) + \int dz' j(z') \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{W_1^{[j]}(z) - W_1^{[j]}(z')}{z-z'} \right) \end{aligned}} \quad (13.47)$$

En prenant  $j = 0$  dans l'équation de boucle avec source (13.47), on obtient **l'équation de boucle principale** pour les corrélateurs connexes  $W_1$  et  $W_2$  :

$$\boxed{\frac{\partial_s F_N(s)}{z-s} = \left( \frac{\beta}{2} - 1 \right) W_1'(z) + \frac{\beta}{2} W_2(z, z) + \frac{\beta}{2} W_1(z)^2 + \beta N^2 - \beta N z W_1(z)} \quad (13.48)$$

car  $Z_N^{[0]} = 1$  et  $W_n^{[0]} = W_n$  et où on a utilisé le fait que  $F_N(s) = \ln Z_N(s)$  par définition. On a noté  $W_1'(z) = \frac{dW_1(z)}{dz}$ .

Si on dérive (13.47) par rapport à  $j(z_1), \dots, j(z_n)$ , on obtient à la fin en prenant  $j = 0$  une équation de boucle pour les corrélateurs à  $k$  points pour  $1 \leq k \leq n+2$ . En particulier si on dérive une fois par rapport à  $j(z_1)$  on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial_s W_1^{[j]}(z_1)}{(z-s)} &= \left( \frac{\beta}{2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial z} W_2^{[j]}(z, z_1) + \frac{\beta}{2} W_3^{[j]}(z, z, z_1) + \beta W_2^{[j]}(z, z_1) W_1^{[j]}(z) \\ &- \beta N z W_2^{[j]}(z, z_1) + \frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{W_1^{[j]}(z) - W_1^{[j]}(z_1)}{z-z_1} \right) \\ &+ \int dz' j(z') \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{W_2^{[j]}(z, z_1) - W_2^{[j]}(z', z_1)}{z-z'} \right) \end{aligned} \quad (13.49)$$

car  $\frac{\delta \ln Z_N^{[j]}}{\delta j(z_1)} = W_1^{[j]}(z_1)$  et  $\frac{\delta W_n^{[j]}(z_2, \dots, z_{n+1})}{\delta j(z_1)} = W_{n+1}^{[j]}(z_1, \dots, z_{n+1})$ , cf (13.33). Si on prend  $j = 0$  dans (13.49) on trouve l'équation de boucle pour  $W_1$ ,  $W_2$  et  $W_3$  :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial_s W_1(z_1)}{(z-s)} &= \left(\frac{\beta}{2} - 1\right) \frac{\partial}{\partial z} W_2(z, z_1) + \frac{\beta}{2} W_3(z, z, z_1) + \beta W_2(z, z_1) W_1(z) \\ &\quad - \beta N z W_2(z, z_1) + \frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{W_1(z) - W_1(z_1)}{z - z_1} \right) \end{aligned}} \quad (13.50)$$

De façon générale, l'équation de boucle pour  $W_k$ ,  $1 \leq k \leq n+2$  est obtenue en dérivant (13.47) par rapport à  $j(z_1), \dots$  puis  $j(z_n)$  et en prenant à la fin  $j = 0$ . On peut montrer que **l'équation de boucle pour les  $W_k$** ,  $1 \leq k \leq n+2$ , avec les variables  $z$  et  $I = \{z_1, \dots, z_n\}$ , s'écrit pour  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial_s W_n(I)}{(z-s)} &= \left(\frac{\beta}{2} - 1\right) \frac{\partial W_{n+1}(z, I)}{\partial z} + \frac{\beta}{2} W_{n+2}(z, z, I) \\ &\quad + \frac{\beta}{2} \sum_{J \subset I} W_{|J|+1}(z, J) W_{n+1-|J|}(z, I \setminus J) \\ &\quad - \beta N z W_{n+1}(z, I) + \sum_{z_i \in I} \frac{\partial}{\partial z_i} \left( \frac{W_n(z, I \setminus \{z_i\}) - W_n(I)}{z - z_i} \right) \end{aligned} \quad (13.51)$$

où  $|J|$  indique la taille de l'ensemble  $J$ . Par exemple, pour  $J = \{z_{i_1}, \dots, z_{i_k}\}$ , on a  $|J| = k$ .

Enfin on peut montrer une dernière relation utile. Pour cela on effectue le changement de variables  $x'_i = x_i - \epsilon$  avec  $\epsilon \ll 1$  dans  $Z_N(s) = Z_N^{[0]}(s)$ . Pour ce changement de variables  $\Delta(x_i) = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$  reste inchangé de même que la mesure d'intégration. On a aussi alors  $e^{-\frac{\beta N}{2} x_i^2} = e^{-\frac{\beta N}{2} x_i'^2} (1 - \epsilon \beta N x_i') + O(\epsilon^2)$  d'où :

$$\begin{aligned} Z_N(s + \epsilon) &= \prod_i \left( \int_{-\infty}^s dx'_i \right) \Delta(x'_i) e^{-\frac{\beta N}{2} x_i'^2} \prod_i (1 - \epsilon \beta N x'_i + O(\epsilon^2)) \\ &= Z_N(s) - \epsilon \beta N Z_N(s) \left\langle \sum_i x_i \right\rangle_s + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (13.52)$$

Comme  $Z_N(s + \epsilon) = Z_N(s) + \epsilon \partial_s Z_N(s) + O(\epsilon^2)$  et  $F_N(s) = \ln Z_N(s)$ , on en déduit :

$$\boxed{\partial_s F_N(s) = -\beta N \left\langle \sum_{i=1}^N x_i \right\rangle_s} \quad (13.53)$$

où la moyenne conditionnelle  $\langle \dots \rangle_s$  est définie Eq. (13.17).

## 13.2 DÉVELOPPEMENT EN PUISSANCES DE $1/N$

On suppose maintenant que l'énergie libre  $F_N(s) = \ln Z_N(s)$  (où la fonction de partition est donnée Eq. (13.6)) se développe dans la limite  $N \rightarrow \infty$  avec  $s$  fixé en puissances de  $1/N$ . Comme on a discuté dans la section précédente 13.1.1, on s'attend à ce que

cette hypothèse soit valable pour la **branche gauche**, ie  $s < \sqrt{2}$ . Par méthode de gaz de Coulomb, on sait déjà que l'ordre dominant pour  $F_N(s) - F_N(0)$  est  $\asymp N^2$  du fait du déterminant de Vandermonde (interaction coulombienne  $2D$  pour les "charges-valeurs propres", cf section 3.3.1.1).

On fait donc l'hypothèse suivante pour l'énergie libre  $F_N(s) = \ln Z_N(s)$  :

$$F_N(s) = F_N(0) + \sum_{k \geq 0} N^{2-k} F^{(k)}(s) \quad (13.54)$$

où les  $F^{(k)}(s)$  sont indépendants de  $N$ . Pour fixer la constante  $F_N(0)$ , on impose  $F^{(k)}(0) = 0$ .  $F_N(s)$  dépend de  $s$ ,  $\beta$  et  $N$ .  $F_N(0)$  est une constante qui dépend de  $N$  et  $\beta$  (mais pas de  $s$ ). Il se trouve que cette constante n'admet en fait pas de développement en puissances de  $1/N$  (elle comprend des termes en  $\ln N$ ). On la calculera à la fin. En fait c'est  $\partial_s F_N(s)$  qui admet véritablement un développement en puissances de  $1/N$  :

$$\partial_s F_N(s) = \sum_{k \geq 0} N^{2-k} \partial_s F^{(k)}(s) \quad (13.55)$$

On notera d'ailleurs que  $F_N(s)$  n'apparaît jamais directement dans les équations de boucle, seul apparaît  $\partial_s F_N(s)$ .

On fait aussi l'hypothèse que les corrélateurs connexes  $W_n(z_1, \dots, z_n)$  se développent en puissances de  $1/N$ . En fait cela revient à faire l'hypothèse que l'énergie libre avec source  $F_N^{[j]}(s) = \ln Z_N^{[j]}(s)$  où  $Z_N^{[j]}(s)$  est définie Eq. (13.24) se développe en puissances de  $1/N$ .

À l'ordre dominant en  $N$ , on s'attend à ce que la densité  $\langle \rho(x) \rangle_s$  (13.16) soit indépendante de  $N$  :  $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \rho(x) \rangle_s = \rho_c(x)$ . Ainsi, pour  $z$  fixé et  $N \gg 1$ , on s'attend à

$$W_1(z) = N \int dx \frac{\langle \rho(x) \rangle_s}{x-z} \asymp N \quad \text{pour } N \rightarrow \infty \quad (13.56)$$

L'interprétation en gaz de Coulomb permet de voir que pour que les différents termes de l'énergie effective du gaz s'équilibrent pour  $N \rightarrow \infty$ , il faut que  $j(z) \asymp N$  à l'ordre dominant en  $N$ . Ainsi une dérivée fonctionnelle par rapport à  $j(z_i)$  fait diminuer de 1 la puissance de  $N$ . D'après Eq. (13.32), on en déduit que le corrélateur connexe  $W_n$  est d'ordre  $W_n \asymp N^{2-n}$  pour  $N \gg 1$  (car  $\ln Z_N \asymp N^2$ ). On notera que par contre les corrélateurs non connexes  $\overline{W}_n$  sont d'ordre  $\overline{W}_n \asymp W_1^n \asymp N^n$ . Par exemple pour  $\overline{W}_2$ , on a  $\overline{W}_2(z_1, z_2) = W_2(z_1, z_2) + W_1(z_1)W_1(z_2) \asymp N^2$  car  $W_1 \asymp N$  et  $W_2 \asymp 1$ .

On écrit alors :

$$W_n(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} N^{2-n-k} W_n^{(k)}(z_1, \dots, z_n) \quad (13.57)$$

où les  $W_n^{(k)}(z_1, \dots, z_n)$  sont indépendants de  $N$  (mais dépendent des  $z_i$ , de  $s$  et de  $\beta$ ).

Si on s'arrête aux premiers ordres, on peut écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} F_N(s) - F_N(0) &= N^2 F^{(0)}(s) + N F^{(1)}(s) + F^{(2)}(s) + O(1/N) \\ W_1(z) &= N W_1^{(0)}(z) + W_1^{(1)}(z) + W_1^{(2)}(z)/N + O(1/N^2) \\ W_2(z_1, z_2) &= W_2^{(0)}(z_1, z_2) + O(1/N) \end{aligned}} \quad (13.58)$$



### 13.2.1 Développement des équations de boucle

A l'ordre dominant (ordre  $N^2$ ), l'équation de boucle principale Eq. (13.48) devient :

$$\boxed{\frac{\beta}{2} W_1^{(0)}(z)^2 - \beta z W_1^{(0)}(z) = -\beta - \frac{c^{(0)}}{z-s}} \quad (13.59)$$

où  $c^{(0)} = -\partial_s F^{(0)}(s)$  Cette relation est appelée souvent **équation de boucle maîtresse**.

Aux premiers ordres suivants (ordre  $N$  et ordre 1), l'équation de boucle principale Eq. (13.48) donne :

$$\beta \left( z - W_1^{(0)}(z) \right) W_1^{(1)}(z) = \left( \frac{\beta}{2} - 1 \right) \frac{dW_1^{(0)}(z)}{dz} + \frac{c^{(1)}}{z-s} \quad (13.60)$$

$$\beta \left( z - W_1^{(0)}(z) \right) W_1^{(2)}(z) = \left( \frac{\beta}{2} - 1 \right) \frac{dW_1^{(1)}(z)}{dz} + \frac{\beta}{2} W_1^{(1)}(z)^2 + \frac{\beta}{2} W_2^{(0)}(z, z) + \frac{c^{(2)}}{z-s} \quad (13.61)$$

où  $c^{(1)} = -\partial_s F^{(1)}(s)$  et  $c^{(2)} = -\partial_s F^{(2)}(s)$ .

A l'ordre dominant ( $N$ ), l'équation de boucle secondaire qui relie  $W_1$ ,  $W_2$  et  $W_3$  et est donnée Eq. (13.50) s'écrit :

$$\beta \left( z - W_1^{(0)}(z) \right) W_2^{(0)}(z, z_1) = \frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{W_1^{(0)}(z) - W_1^{(0)}(z_1)}{z - z_1} \right) + \frac{d_1^{(0)}(z_1)}{(z-s)} \quad (13.62)$$

où  $d^{(0)}(z_1) = -\partial_s W_1^{(0)}(z_1)$ .

L'idée est maintenant de **résoudre récursivement ces équations de boucles**. L'équation de boucle principale (13.59) associée aux conditions d'analyticité de  $W_1(z)$  permet de déterminer  $W_1^{(0)}(z)$  bien que la constante  $c^{(0)}$  soit inconnue. Une fois  $W_1^{(0)}(z)$  déterminé, on remplace dans (13.59) et on en déduit le premier ordre de l'énergie libre  $\partial_s F^{(0)}(s) = -c^{(0)}$ .

De même et de façon récursive, on détermine  $W_1^{(1)}(z)$  grâce à (13.60) et donc  $\partial_s F^{(1)}(s) = -c^{(1)}$ , puis on trouve  $W_2^{(0)}(z, z_1)$  grâce à (13.62) et enfin on détermine  $W_1^{(2)}(z)$  grâce à (13.61) et donc  $\partial_s F^{(2)}(s) = -c^{(2)}$ . Cette méthode permet d'obtenir récursivement tous les termes du développement de la dérivée de l'énergie libre  $\partial_s F_N(s) = \partial_s \ln Z_N(s)$ . On remonte à  $F_N(s)$  en intégrant sur  $s$ . A la fin, on détermine par une méthode complètement différente la constante  $F_N(0)$ .

Pour calculer  $\partial_s F^{(k)}(s)$  une fois qu'on a déterminé  $W_1^{(k)}(z)$ , on peut remplacer dans l'équation de boucle principale à l'ordre  $k$  mais on peut également utiliser une relation qu'on a démontrée un peu plus haut, cf Eq. (13.53) :

$$\partial_s F_N(s) = -\beta N \left\langle \sum_{i=1}^N x_i \right\rangle_s \quad (13.63)$$

Or on peut écrire pour toute fonction analytique  $g(z)$  :

$$\sum_i g(x_i) = - \operatorname{Res}_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{g(z)}{z - x_i} \quad (13.64)$$

En effet, pour une fonction  $f$  holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus D(0, R)$  où  $D(0, R)$  est le disque de centre 0 et rayon  $R$ , le résidu en l'infini est défini tel que pour tout  $r > R$  on ait :

$$\operatorname{Res}_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0,r)} f(z) dz \quad (13.65)$$

où  $\mathcal{C}(0, r)$  est un contour circulaire de rayon  $r$  parcouru en sens trigonométrique. Le résidu en  $+\infty$  est donc l'opposé de la somme des résidus en des valeurs finies. Dans Eq. (13.64), le résidu en l'infini est l'opposé de la somme des résidus en les  $x_i$ .

Ainsi on a :

$$\partial_s F(s) = -\beta N \left\langle \sum_{i=1}^N x_i \right\rangle = \beta N \operatorname{Res}_{z \rightarrow \infty} z W_1(z) \quad \text{où } W_1(z) = \left\langle \sum_i \frac{1}{z - x_i} \right\rangle_s \quad (13.66)$$

On peut donc déterminer  $\partial_s F^{(k)}(s)$  à partir des résidus en  $+\infty$  de  $z W_1^{(k)}(z)$ .

### 13.2.2 Solution à l'ordre dominant

L'équation de boucle maîtresse Eq. (13.59) se récrit :

$$\left( W_1^{(0)}(z) - z \right)^2 = z^2 - 2 - \frac{2}{\beta} \frac{c^{(0)}}{z - s} \quad (13.67)$$

où  $c^{(0)} = c^{(0)}(s) = -\partial_s F^{(0)}(s)$  dépend de  $s$  mais pas de  $z$ . Finalement :

$$W_1^{(0)}(z) = z \pm \sqrt{z^2 - 2 - \frac{2}{\beta} \frac{c^{(0)}}{z - s}} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \setminus [a, s] \quad (13.68)$$

On rappelle que la fonction  $W_1(z)$  donc en particulier  $W_1^{(0)}(z)$  est **analytique** sur  $\mathbb{C} \setminus [a, s]$  et a une **coupure** sur le support  $[a, s]$  de la densité  $\langle \rho(x) \rangle_s$ . On a aussi vu que  $W_1(z) = N \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\langle \rho(x) \rangle_s}{z - x}$  donc  $W_1^{(0)}(z) = \int dx \frac{\rho_c(x)}{z - x}$  où  $\rho_c$  est la limite de la densité quand  $N \rightarrow \infty$ . Elle est normalisée à 1,  $\int \rho_c = 1$ .

#### 13.2.2.1 Détermination de $W_1^{(0)}(z)$ et de la densité

D'après (13.68) et les propriétés d'analyticité de  $W_1^{(0)}(z)$ , la fonction  $W_1^{(0)}(z)$  doit être de la forme :

$$W_1^{(0)}(z) = z - M(z) \sqrt{\frac{z - a}{z - s}} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \setminus [a, s] \quad (13.69)$$

où  $M(z)$  est un polynôme en  $z$ . En effet  $W_1^{(0)}(z)$  est de la forme  $W_1^{(0)}(z) = z \pm \sqrt{\frac{P(z)}{z - s}}$  où  $P(z)$  est un polynôme en  $z$  à coefficients réels d'après (13.68). On note  $s_i$  les racines de  $P(z)$  sur  $\mathbb{C}$ , ie  $P(z) = p \prod_i (z - s_i)$ . Si une racine  $s_i$  est simple alors c'est un point de branchement pour  $W_1^{(0)}(z)$ . Or on sait que  $W_1^{(0)}(z)$  est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus [a, s]$  avec une coupure sur  $[a, s]$ , ce qui signifie que  $W_1^{(0)}(z)$  a exactement deux **points de branchement**, l'un en  $s$  l'autre en  $a$ . Ainsi toutes les racines  $s_i$  sont doubles sauf une qui vaut

nécessairement  $s_1 = a$ . Donc  $P(z)/(z - a)$  est un carré et  $W_1^{(0)}(z)$  est bien de la forme (13.69).

Une autre façon de comprendre (13.69) est de remarquer que  $W_1^{(0)}(z)$  est en fait solution du problème de **Riemann-Hilbert** suivant (similaire à celui rencontré section 2.4.2) :

1/  $W_1^{(0)}(z)$  est analytique partout sur le plan complexe sauf sur le segment réel  $[a, s]$  où elle a une coupure.

2/  $W_1^{(0)}(z) \sim \frac{1}{z}$  quand  $|z| \rightarrow \infty$  (car  $\int \rho_c = 1$ ).

3/  $W_1^{(0)}(z)$  est réelle pour  $z \in \mathbb{R} \setminus [a, s]$ .

4/ Lorsqu'on approche de la coupure  $[a, s]$  on trouve deux valeurs différentes selon qu'on vienne d'au-dessus ou d'en-dessous :  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} W_1^{(0)}(x \pm i\epsilon) = g(x) \mp i\pi\rho_c(x)$  pour  $x \in [a, s]$  et avec  $g(x) = x$ .

La propriété 4/ dit que la partie réelle de  $W_1^{(0)}(x \pm i\epsilon)$  pour  $x \in [a, s]$  est donnée par  $g(x) = x$ . En effet la racine dans (13.68) change de signe au niveau de la coupure, c'est le terme  $\mp i\pi\rho_c(x)$ . La solution (13.69) avec  $M(z)$  fixé par la condition 2/ est bien la solution de ce problème de Riemann-Hilbert (qui est unique).

On détermine le polynôme  $M(z)$  avec la condition 2/, ie  $W_1^{(0)}(z) \sim \frac{1}{z}$  quand  $|z| \rightarrow \infty$ . En  $+\infty$  on a d'après (13.69) :

$$\frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right) = W_1^{(0)}(z) = z - M(z) \left(1 + \frac{s-a}{2z} + \frac{3s^2 - 2sa - a^2}{8z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right) \quad (13.70)$$

Donc  $M(z)$  est de degré 1 et :

$$M(z) = z + \frac{a-s}{2}, \quad 3a^2 - 2sa - s^2 = 8 \quad (13.71)$$

donc la borne inférieure du **support** de la densité est donnée par :

$$a = \frac{s - 2\sqrt{s^2 + 6}}{3} \quad (13.72)$$

car  $a < s$ . D'où l'expression de la fonction  $W_1^{(0)}(z)$ , ie **l'ordre dominant de  $W_1(z)$**  :

$$W_1^{(0)}(z) = z - \left(z + \frac{a-s}{2}\right) \sqrt{\frac{z-a}{z-s}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [a, s] \quad (13.73)$$

Enfin la **densité à l'ordre dominant en  $N$**  est donnée par  $\rho_c(x) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} W_1^{(0)}(x + i0^+)$  pour  $x \in [a, s]$  (voir aussi section 3.3.1.1) :

$$\rho_c(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{x-a}{s-x}} \left(\frac{s-a}{2} - x\right), \quad x \in [a, s] \quad (13.74)$$

### 13.2.2.2 Retour à l'énergie libre

On veut calculer l'ordre dominant de l'énergie libre  $F^{(0)}(s)$ . On a vu plus haut que  $F^{(0)}(s)$  s'exprime directement en fonction de  $W_1^{(0)}(z)$ , cf (13.66) :

$$\partial_s F^{(0)}(s) = \beta \operatorname{Res}_{z \rightarrow \infty} z W_1^{(0)}(z) \quad (13.75)$$

Or on connaît maintenant l'expression de  $W_1^{(0)}(z)$ , cf (13.73). On peut donc calculer explicitement les résidus de  $z W_1^{(0)}(z)$  en  $+\infty$  en utilisant la formule  $\operatorname{Res}_{x \rightarrow \infty} f(x) = \operatorname{Res}_{x \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$  :

$$\begin{aligned} \partial_s F^{(0)}(s) &= \beta \operatorname{Res}_{z \rightarrow \infty} \left[ z^2 - \left( z^2 + \frac{a-s}{2} z \right) \sqrt{\frac{z-a}{z-s}} \right] \\ &= -\beta \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^2} \left[ \frac{1}{z^2} - \left( \frac{1}{z^2} + \frac{a-s}{2z} \right) \sqrt{\frac{1-az}{1-sz}} \right] \end{aligned} \quad (13.76)$$

D'où, avec  $a = \frac{s-2\sqrt{s^2+6}}{3}$ , cf (13.72) :

$$\partial_s F^{(0)}(s) = \beta \frac{s^3 + s^2 a - s a^2 - a^3}{8} = \beta \left[ \frac{s^3}{27} - \frac{2s}{3} + \frac{1}{27} (6 + s^2)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (13.77)$$

Pour revenir à  $F^{(0)}(s)$ , il faut intégrer une fois par rapport à  $s$  :

$$\boxed{ \begin{aligned} F^{(0)}(s) &= 2\beta F^{0,0}(s) \quad \text{où} \\ F^{0,0}(s) &= \frac{s^4}{216} - \frac{s^2}{6} + \frac{s(15+s^2)}{216} \sqrt{6+s^2} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{s + \sqrt{6+s^2}}{6} \right) + \frac{\ln 6}{8} \end{aligned} } \quad (13.78)$$

où la constante d'intégration est choisie telle que  $F^{(0)}(0) = 0$ .

### 13.2.3 Première correction

L'équation de boucle principale à l'ordre suivant ( $N$ ) s'écrit, cf (13.60) :

$$\beta \left( z - W_1^{(0)}(z) \right) W_1^{(1)}(z) = \left( \frac{\beta}{2} - 1 \right) \frac{dW_1^{(0)}(z)}{dz} + \frac{c^{(1)}}{z-s} \quad (13.79)$$

où  $c^{(1)} = -\partial_s F^{(1)}(s)$ . Or on connaît l'expression de  $W_1^{(0)}$ , cf Eq. (13.73) :

$$\begin{aligned} W_1^{(0)}(z) &= z - \left( z + \frac{b-s}{2} \right) \sqrt{\frac{z-b}{z-s}} \\ \frac{dW_1^{(0)}(z)}{dz} &= 1 + \sqrt{\frac{z-b}{z-s}} \left( -1 + \frac{(s-b)(z + \frac{b-s}{2})}{2(z-s)(z-b)} \right) \end{aligned} \quad (13.80)$$

On remplace  $W_1^{(0)}$  par son expression ci-dessus dans Eq. (13.79), on a alors :

$$\begin{aligned} W_1^{(1)}(z) &= \left( 1 - \frac{2}{\beta} \right) \left[ \frac{1}{4(z-s)} - \frac{1}{4(z-b)} + \frac{1}{s-b-2z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{Q(z)}{\sqrt{z-s}\sqrt{z-b}(s-b-2z)} \right] \end{aligned} \quad (13.81)$$

où  $Q(z)$  est un polynôme.

Or on sait que  $W_1(z) = \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$  quand  $z \rightarrow \infty$ . L'ordre dominant en  $z$  (soit  $1/z$ ) est indépendant de  $N$ , il est contenu dans  $W_1^{(0)}(z)$ . Ainsi on a  $W_1^{(1)}(z) = O(1/z^2)$  quand  $|z| \rightarrow \infty$ . On impose cette contrainte dans Eq. (13.81), on trouve alors  $Q(z) = -z + q_0$  avec  $q_0$  une constante.

De plus  $W_1^{(1)}(z)$  est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus [a, s]$ . Or  $\frac{s-a}{2} \notin [a, s]$ . En effet  $\frac{s-a}{2} = \frac{s+\sqrt{s^2+6}}{3}$  d'après (13.72) donc  $\frac{s-a}{2} > s$  pour  $s < \sqrt{2}$ . Ainsi  $W_1^{(1)}(z)$  ne peut pas avoir de pôle en  $z = \frac{s-a}{2}$ . D'où :

$$Q(z) = -z + q_0 \quad \text{où} \quad q_0 = \frac{s-a - \sqrt{(3a-s)(s+a)}}{2} \quad (13.82)$$

On notera que  $q_0$  est réel car  $s+a = \frac{4s-2\sqrt{s^2+6}}{3} < 0$  pour  $s < \sqrt{2}$ , et  $s-3a = 2\sqrt{s^2+6} > 0$ .

On a donc déterminé  $W_1^{(1)}(z)$  explicitement, il est donné par (13.81) où le polynôme  $Q(z)$  est donné Eq. (13.82). On retourne enfin à l'énergie libre en utilisant à nouveau (13.66), mais maintenant à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \partial_s F^{(1)}(s) &= \beta \operatorname{Res}_{z \rightarrow \infty} z W_1^{(1)}(z) = -\beta \operatorname{Res}_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{z^2} \frac{1}{z} W_1^{(1)}(1/z) \right) \\ &= (\beta - 2) \left( \frac{q_0 - s}{2} \right) \\ &= (\beta - 2) \left[ -\frac{s}{3} + \frac{\sqrt{6+s^2}}{6} - \frac{1}{2\sqrt{3}} (6+s^2)^{\frac{1}{4}} \left( \sqrt{6+s^2} - 2s \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \quad (13.83)$$

d'après (13.82) et (13.72). On intègre enfin par rapport à  $s$ , on trouve :

$$\begin{aligned} F^{(1)}(s) &= (\beta - 2) F^{0,1}(s) \quad \text{où} \\ F^{0,1}(s) &= -\frac{s^2}{6} + \frac{s}{12} \sqrt{6+s^2} - \frac{s \sqrt{6+s^2} - 2s \sqrt{6+s^2}}{4\sqrt{3}} - \frac{\ln 6}{4} \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln \left[ \sqrt{6+s^2} \right] + \ln \left[ \sqrt{3} + \sqrt{1 - \frac{2s}{\sqrt{6+s^2}}} \right] - \ln \left( 1 + \sqrt{3} \right) \end{aligned} \quad (13.84)$$

A nouveau la constante d'intégration a été choisie telle que  $F^{(1)}(0) = 0$ .

### 13.2.4 Seconde correction

Pour pouvoir déterminer  $W_1^{(2)}(z)$  avec l'équation (13.61), on a besoin de déterminer d'abord  $W_2^{(0)}(z, z_1)$  grâce à la seconde équation de boucle (13.62).

#### 13.2.4.1 Détermination de $W_2^{0,0}(z, z_1)$

On veut déterminer le corrélateur connexe à 2 points à l'ordre dominant. On se sert pour cela de l'équation de boucle (13.62) :

$$\beta \left( z - W_1^{(0)}(z) \right) W_2^{(0)}(z, z_1) = \frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{W_1^{(0)}(z) - W_1^{(0)}(z_1)}{z - z_1} \right) + \frac{d_1^{(0)}(z_1)}{(z - s)} \quad (13.85)$$

où  $d^{(0)}(z_1) = -\partial_s W_1^{(0)}(z_1)$ .

On connaît l'expression explicite de  $W_1^{(0)}(z)$ , cf Eq. (13.73). En remplaçant dans (13.85), on obtient donc explicitement  $W_2(z, z_1)$ .

Une autre façon de résoudre (13.85) est d'utiliser les propriétés d'**analyticité** de  $W_2(z, z_1)$  comme fonction de  $z$  à  $z_1$  fixé. On écrit :

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{W_1^{(0)}(z) - W_1^{(0)}(z_1)}{z - z_1} \right) = \frac{W_1^{(0)}(z) - z}{(z - z_1)^2} + \frac{P(z|z_1)}{(z - z_1)^2} \quad (13.86)$$

où  $P(z|z_1)$  est un polynôme en  $z$  (à coefficients qui dépendent de  $z_1$ ). Ainsi d'après Eq. (13.86) et l'équation de boucle (13.85),  $W_2^{(0)}(z, z_1)$  s'écrit :

$$\beta W_2^{(0)}(z, z_1) = -\frac{1}{(z - z_1)^2} + \frac{R(z|z_1)}{(z - z_1)^2 \sqrt{z - s} \sqrt{z - a} (z + \frac{a-s}{2})} \quad (13.87)$$

où  $R(z|z_1)$  est un polynôme en  $z$  (à coefficients qui dépendent de  $z_1$ ).

La fonction  $W_2^{(0)}(z, z_1)$  doit vérifier l'équation (13.87) ainsi que les conditions suivantes :

1/  $W_2^{(0)}(z, z_1)$  comme fonction de  $z$  est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus [a, s]$ .

2/  $W_2^{(0)}$  est symétrique en  $z$  et  $z_1$  :  $W_2^{(0)}(z, z_1) = W_2^{(0)}(z_1, z)$ .

3/ Quand  $|z| \rightarrow \infty$  à  $z_1$  fixé,  $W_2^{(0)}(z, z_1) = O(1/z^2)$ .

On a déjà vu que  $z = \frac{s-a}{2} \notin [a, s]$ . Comme  $W_2^{(0)}(z, z_1)$  en tant que fonction de  $z$  est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus [a, s]$  d'après 1/, on doit donc avoir  $(z + \frac{a-s}{2})|R(z|z_1)|$ , ie  $R(z|z_1) = (z + \frac{a-s}{2})S(z|z_1)$  où  $S(z|z_1)$  est un polynôme en  $z$ . Finalement :

$$\beta W_2^{(0)}(z, z_1) = -\frac{1}{(z - z_1)^2} + \frac{S(z|z_1)}{(z - z_1)^2 \sqrt{z - s} \sqrt{z - a}} \quad (13.88)$$

La condition 3/ impose que  $S(z|z_1)$  est un polynôme de degré au plus un. Comme  $W_2^{(0)}(z, z_1)$  est symétrique par échange de  $z$  et  $z_1$  (cf condition 2/), on doit avoir :  $S(z|z_1) = \frac{ez z_1 + (z+z_1)f + g}{\sqrt{z_1 - s} \sqrt{z_1 - a}}$  où  $e, f$  et  $g$  sont des constantes (qui ne dépendent ni de  $z$  ni de  $z_1$ ), soit :

$$\beta W_2^{(0)}(z, z_1) = -\frac{1}{(z - z_1)^2} + \frac{ez z_1 + (z + z_1)f + g}{(z - z_1)^2 \sqrt{(z - s)(z - a)} \sqrt{(z_1 - s)(z_1 - a)}} \quad (13.89)$$

Pour  $z_1 \in \mathbb{C} \setminus [a, s]$  fixé,  $W_2^{(0)}(z, z_1)$  ne peut pas avoir de pôle en  $z = z_1$  (d'après 1/). D'où :

$$1 = \frac{ez_1^2 + 2fz_1 + g}{(z_1 - s)(z_1 - a)} \quad \text{pour tout } z_1 \in \mathbb{C} \setminus [a, s] \quad (13.90)$$

d'où  $e = 1$  et  $f = -\frac{s+a}{2}$  et  $g = sa$ , soit finalement

$$\boxed{W_2^{(0)}(z, z_1) = \frac{2}{\beta} W_2^{0,0}(z, z_1) \quad \text{avec} \quad (13.91)}$$

$$W_2^{0,0}(z, z_1) = -\frac{1}{2(z - z_1)^2} + \frac{2z z_1 - (s + a)(z + z_1) + 2sa}{4(z - z_1)^2 \sqrt{(z - s)(z - a)} \sqrt{(z_1 - s)(z_1 - a)}}$$

où  $a$  est donné Eq. (13.72) en fonction de  $s$ .

En particulier on trouve le comportement de  $W_2^{(0)}(z, z_1,)$  en l'infini :

$$W_2^{(0)}(z, z_1) \sim \frac{2}{\beta} \frac{(s-a)^2}{16z^2z_1^2} \quad \text{quand } |z| \rightarrow \infty \text{ et } |z_1| \rightarrow \infty \quad (13.92)$$

On trouve aussi l'expression de  $W_2^{(0)}(z, z) = \lim_{z_1 \rightarrow z} W_2^{(0)}(z, z_1)$  :

$$W_2^{(0)}(z, z) = \frac{2}{\beta} \frac{(s-a)^2}{16(z-s)^2(z-a)^2} \quad (13.93)$$

### 13.2.4.2 Deuxième correction $W_1^{(2)}(z)$

Maintenant qu'on connaît  $W_2^{(0)}(z, z_1)$ , on peut déterminer  $W_1^{(2)}(z)$  avec l'équation de boucle principale à l'ordre 2 Eq. (13.61) :

$$\begin{aligned} \beta \left( z - W_1^{(0)}(z) \right) W_1^{(2)}(z) &= \left( \frac{\beta}{2} - 1 \right) \frac{dW_1^{(1)}(z)}{dz} + \frac{\beta}{2} W_1^{(1)}(z)^2 \\ &+ \frac{\beta}{2} W_2^{(0)}(z, z) + \frac{c^{(2)}}{z-s} \end{aligned} \quad (13.94)$$

On connaît les expressions explicites de  $W_1^{(0)}(z)$  (13.73),  $W_1^{(1)}(z)$  (13.81) et  $W_2^{(0)}(z, z)$  (13.93). La seule inconnue restante est la constante  $c^{(2)}$ . On la détermine avec la condition que  $W_1^{(2)}(z)$  ne peut pas avoir de pôle en  $z = \frac{s-a}{2} > s$  car il doit être analytique sur  $\mathbb{C} \setminus [a, s]$ . On obtient finalement :

$$\partial_s F^{(2)}(s) = -c^{(2)}(s) = -c^{1,0}(s) - \left( \frac{\beta}{2} + \frac{2}{\beta} - 2 \right) c^{0,2}(s) \quad (13.95)$$

où, en utilisant  $a = \frac{s-2\sqrt{6+s^2}}{3}$  (cf Eq. (13.72)) :

$$\begin{aligned} -c^{1,0} &= -\frac{(s-a)^2}{2(s+a)(s-3a)^2} = \frac{(s+\sqrt{6+s^2})^2}{12(6+s^2)(\sqrt{6+s^2}-2s)} \\ -c^{0,2} &= \frac{12(2s-\sqrt{s^2+6})}{(s+\sqrt{s^2+6})^2} \frac{s_1(s)^2(2s_1(s)^3-3s_1(s)^2+4s_1(s)-2)}{(s_1(s)^2-1)^4} \end{aligned} \quad (13.96)$$

où  $s_1(s) = \frac{2\sqrt{6+s^2}-s+\sqrt{3(6+s^2)}\frac{1}{4}(\sqrt{6+s^2}-2s)^{\frac{1}{2}}}{s+\sqrt{6+s^2}}$ . En intégrant par rapport à  $s$ , on remonte à  $F^{(2)}(s)$  :

$$\boxed{F^{(2)}(s) = F^{1,0}(s) + \left( \frac{\beta}{2} + \frac{2}{\beta} - 2 \right) F^{0,2}(s)} \quad (13.97)$$

avec  $\partial_s F^{1,0}(s) = -c^{1,0}$  et  $\partial_s F^{0,2}(s) = -c^{0,2}$ , soit après simplification :

$$\boxed{F^{1,0}(s) = -\frac{1}{8} \ln \left[ 1 - \frac{2s}{\sqrt{6+s^2}} \right] - \frac{1}{6} \ln \left[ \sqrt{6+s^2} (s + \sqrt{6+s^2}) \right] + \frac{\ln 6}{6}} \quad (13.98)$$

de sorte que  $F^{1,0}(0) = 0$ , et

$$\boxed{F^{0,2}(s) = \frac{1}{8} \ln \left[ 1 - \frac{2s}{\sqrt{6+s^2}} \right] + \frac{1}{6} \ln \left[ \sqrt{6+s^2} \left( s + \sqrt{6+s^2} \right) \right] + \ln \left[ \sqrt{3} + \sqrt{1 - 2\frac{s}{\sqrt{6+s^2}}} \right] - \frac{\ln 6}{6} - \ln \left[ 1 + \sqrt{3} \right]} \quad (13.99)$$

de sorte que  $F^{0,2}(0) = 0$ .

## 13.3 GRANDE DÉVIATION À GAUCHE

### 13.3.1 Détermination de la constante $F_N(0)$

Les équations de boucle ne donnent pas accès à la constante  $F_N(0)$  car elles font apparaître seulement la dérivée de l'énergie libre  $\partial_s F_N(s)$ . Il faut trouver une autre méthode pour calculer la constante. L'idée est de considérer la **limite**  $s \rightarrow -\infty$  **dans la fonction de partition**  $Z_N(s)$ . En effet on peut calculer un équivalent de  $Z_N(s)$  dans cette limite directement à partir de l'expression sous forme d'intégrale multiple (13.6) :

$$Z_N(s) = \int_{-\infty}^s dx_1 \dots \int_{-\infty}^s dx_N |\Delta(x_i)|^\beta e^{-\beta N \sum_i \frac{x_i^2}{2}} \quad (13.100)$$

On suppose  $s < 0$ . On effectue le changement de variables  $\beta N |s|(s - x_i) = y_i$  :

$$Z_N(s) = \frac{e^{-\beta N^2 \frac{s^2}{2}}}{(\beta N |s|)^{N+\beta \frac{N(N-1)}{2}}} \int_0^\infty dy_1 \dots \int_0^\infty dy_N |\Delta(y_i)|^\beta e^{-\sum_i \frac{y_i^2}{2\beta N s^2}} e^{-\sum_i y_i} \quad (13.101)$$

Quand  $s \rightarrow -\infty$ , l'intégrale multiple sur les  $y_i$  tend vers une constante car  $\sum_i \frac{y_i^2}{2\beta N s^2} \rightarrow 0$ . D'où un équivalent de  $Z_N(s)$  quand  $s \rightarrow -\infty$  :

$$Z_N(s) \sim \frac{K_\beta(N)}{(\beta N)^{N+\beta \frac{N(N-1)}{2}}} |s|^{-N-\beta \frac{N(N-1)}{2}} e^{-\beta N^2 \frac{s^2}{2}} \quad \text{quand } s \rightarrow -\infty \quad (13.102)$$

où

$$K_\beta(N) = \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_N |\Delta(x_i)|^\beta e^{-\sum_i x_i} = \frac{\left[ \prod_{j=1}^N \Gamma \left( 1 + \frac{j\beta}{2} \right) \right]^2}{\Gamma \left( 1 + \frac{N\beta}{2} \right) \Gamma \left( 1 + \frac{\beta}{2} \right)^N} \quad (13.103)$$

Cette intégrale multiple se ramène en effet à une intégrale de Selberg :

$$\begin{aligned} S_N(\alpha, \delta, \gamma) &= \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_N |\Delta(t_i)|^{2\gamma} \prod_{i=1}^N (t_i^{\alpha-1} (1-t_i)^{\delta-1}) \\ &= \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(\alpha + j\gamma) \Gamma(\delta + j\gamma) \Gamma(1 + (j+1)\gamma)}{\Gamma(\alpha + \delta + (N+j-1)\gamma) \Gamma(1 + \gamma)} \end{aligned} \quad (13.104)$$



Avec le changement de variable  $t_i = 1 - x_i/L$  dans l'intégrale de Selberg (13.104), on obtient dans la limite  $L \gg 1$  en écrivant  $e^{-x} = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^L$  que :

$$K_\beta(N) = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[ L^{N+\beta \frac{N(N-1)}{2}} S_N \left(1 + L, 1, \frac{\beta}{2}\right) \right] \quad (13.105)$$

d'où (13.103). Finalement l'énergie libre  $F_N(s) = \ln Z_N(s)$  se comporte quand  $s \rightarrow \infty$  comme :

$$\begin{aligned} F_N(s) = \ln Z_N(s) = & -\beta N^2 \frac{s^2}{2} - \left(N + \beta \frac{N(N-1)}{2}\right) \ln(|s|\beta N) \\ & + 2 \sum_{j=1}^N \ln \Gamma \left(1 + \frac{j\beta}{2}\right) - \ln \Gamma \left(1 + \frac{N\beta}{2}\right) - N \ln \Gamma \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) + o(s) \end{aligned} \quad (13.106)$$

Par ailleurs, on connaît à une constante additive près le développement de l'énergie libre en puissances de  $1/N$  :  $F_N(s) = F_N(0) + N^2 F^{(0)}(s) + N F^{(1)}(s) + F^{(2)}(s) + O(1/N) = F_N(0) + 2\beta N^2 F^{0,0}(s) + N(\beta - 2) F^{0,1}(s) + F^{1,0}(s) + \left(\frac{\beta}{2} + \frac{2}{\beta} - 2\right) F^{0,2}(s) + O(1/N)$  où  $F^{0,0}$  est donné Eq. (13.78),  $F^{0,1}$  est donné Eq. (13.84),  $F^{1,0}$  Eq. (13.98) et  $F^{0,2}$  Eq. (13.99). Dans la limite  $s \rightarrow -\infty$ , on trouve :

$$\begin{aligned} F_N(s) = & -\beta N^2 \frac{s^2}{2} - \left(N + \beta \frac{N(N-1)}{2}\right) \ln |s| + \beta \frac{N^2}{8} (-3 - 2 \ln 2 + 2 \ln 3) \\ & + \frac{1}{4} N(\beta - 2) \left(1 + 3 \ln 2 + \ln 3 - 4 \ln [1 + \sqrt{3}]\right) + \frac{\ln 2}{6} + F_N(0) \\ & - \frac{\ln 3}{8} + \frac{(4 - 4\beta + \beta^2) (20 \ln 2 + 15 \ln 3 - 24 \ln [1 + \sqrt{3}])}{48\beta} + o(1) \end{aligned} \quad (13.107)$$

En comparant Eq. (13.106) et (13.107), on obtient donc :

$$\begin{aligned} F_N(0) = & -\frac{\beta}{2} N^2 \ln N + \beta N^2 \left[ \frac{3}{8} - \frac{\ln \beta}{2} - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{3}{2}\right) \right] + \left(\frac{\beta}{2} - 1\right) N \ln N \\ & + \left(\frac{\beta}{2} - 1\right) N \left[ \ln \beta - \frac{1}{2} + \ln \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right) \right] - N \ln \Gamma \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \\ & - \frac{\ln 2}{6} + \frac{\ln 3}{8} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{2} + \frac{2}{\beta} - 2\right) \ln \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{5}{4}}}\right) \\ & + 2 \sum_{j=1}^N \ln \Gamma \left(1 + \frac{j\beta}{2}\right) - \ln \Gamma \left(1 + \frac{N\beta}{2}\right) + o(1) \end{aligned} \quad (13.108)$$

Reste à déterminer le comportement asymptotique de  $\sum_{j=1}^N \ln \Gamma \left(1 + \frac{j\beta}{2}\right)$  et  $\ln \Gamma \left(1 + \frac{N\beta}{2}\right)$  quand  $N \rightarrow \infty$ . D'après le développement de Stirling :

$$\ln \Gamma \left(1 + \frac{N\beta}{2}\right) = \frac{\beta}{2} N \ln N + \frac{\beta}{2} N \left[ \ln \left(\frac{\beta}{2}\right) - 1 \right] + \frac{1}{2} \ln N + \frac{1}{2} \ln(\pi\beta) + \dots \quad (13.109)$$

Le comportement asymptotique de  $\sum_{j=1}^N \ln \Gamma \left(1 + \frac{j\beta}{2}\right)$  est beaucoup plus difficile à déterminer. Je ne vais pas entrer dans les détails du calcul ici, je renvoie à l'article [BEMN10] pour plus de précisions. On a montré finalement que :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \ln \Gamma \left(1 + \frac{j\beta}{2}\right) &= \frac{\beta}{4} N^2 \ln N + \beta N^2 \left[ -\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\beta}{2}\right) \right] + \frac{(\beta+2)}{4} N \ln N \\ &+ \frac{N}{2} \left[ \ln(2\pi) - 1 - \frac{\beta}{2} + \left(\frac{\beta}{2} + 1\right) \ln \left(\frac{\beta}{2}\right) \right] \\ &+ \left(\frac{\beta}{2} + \frac{2}{\beta} + 3\right) \frac{\ln N}{12} + \kappa_\beta + o(1) \end{aligned} \quad (13.110)$$

où la constante  $\kappa_\beta$  est donnée en général par :

$$\kappa_\beta = \frac{\ln(2\pi)}{4} + \frac{\beta}{2} \left( \frac{1}{12} - \zeta'(-1) \right) + \frac{\gamma_E}{6\beta} + \int_0^\infty d\sigma \left[ \frac{6\sigma \coth(\sigma/2) - 12 - \sigma^2}{12\sigma^2 (e^{\beta\sigma/2} - 1)} \right] \quad (13.111)$$

avec  $\gamma_E$  la constante d'Euler-Mascheroni,  $\gamma_E \sim 0.5772$ , et  $\zeta(s)$  la fonction zeta de Riemann qui est définie sur le demi-plan complexe  $\text{Res} > 1$  par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{pour } \text{Res} > 1 \quad (13.112)$$

Elle est prolongée au plan complexe de façon analytique et telle que :

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{\frac{1-s}{2}} \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{s/2} \zeta(1-s) \quad (13.113)$$

Si  $\beta/2$  est entier, on peut montrer que l'expression de  $\kappa_\beta$  se simplifie en :

$$\kappa_\beta = \left(\frac{\beta+2}{8}\right) \ln(2\pi) + \frac{\beta}{2} \zeta'(-1) - \sum_{m=0}^{\beta/2-1} \ln G\left(1 + \frac{2m}{\beta}\right) \quad (13.114)$$

où  $G(z)$  est la fonction Barnes G. Cette fonction vérifie sur tout le plan complexe la relation  $G(z+1) = \Gamma(z)G(z)$ . Elle est définie sur les entiers par :

$$\ln G(N+2) = \sum_{j=1}^N \ln \Gamma(j+1) \quad (13.115)$$

Finalement avec Eq. (13.108) et (13.110) on obtient donc l'expression de la constante  $F_N(0)$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , cf :

$$\begin{aligned} F_N(0) &= -\beta N^2 \left( \frac{3}{8} + \frac{\ln 6}{4} \right) + \frac{\beta}{2} N \ln N + N \left( \frac{\beta}{2} - 1 \right) \left[ \ln \left( \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{6}} \right) - \frac{1}{2} \right] \\ &+ N \left[ \ln \pi - 1 + \frac{\beta}{2} \ln \beta - \ln \Gamma \left( 1 + \frac{\beta}{2} \right) \right] + \frac{\ln N}{6} \left( \frac{2}{\beta} + \frac{\beta}{2} \right) + \frac{\ln 3}{8} \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\beta} + \frac{\beta}{2} - 2 \right) \ln \left( \frac{\sqrt{3} + 2}{2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{5}{4}}} \right) - \frac{\ln 2}{6} - \frac{1}{2} \ln(\pi\beta) + 2\kappa_\beta + o(1) \end{aligned} \quad (13.116)$$

### 13.3.2 Distribution de la valeur propre maximale

On a maintenant déterminé complètement  $F_N(s) = \ln Z_N(s)$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . Mais on veut la distribution de  $\lambda_{\max}$  donnée par  $\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq s\sqrt{N}) = \frac{Z_N(s)}{Z_N(\infty)}$ . La constante  $Z_N(\infty)$  se calcule en fait exactement par intégrale de Selberg :

$$\begin{aligned} Z_N(\infty) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_N |\Delta(\lambda_i)|^\beta e^{-\beta N \sum_i \frac{\lambda_i^2}{2}} \\ &= (\beta N)^{-\frac{N}{2} - \beta \frac{N(N-1)}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_N |\Delta(\lambda_i)|^\beta e^{-\sum_i \frac{\lambda_i^2}{2}} \\ &= (\beta N)^{-\frac{N}{2} - \beta \frac{N(N-1)}{4}} (2\pi)^{\frac{N}{2}} \frac{\prod_{j=1}^N \Gamma\left(1 + \frac{j\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta}{2}\right)^N} \end{aligned} \quad (13.117)$$

En utilisant Eq. (13.110), on obtient donc dans la limite  $N \rightarrow \infty$  :

$$\begin{aligned} \ln Z_N(\infty) &= -\frac{\beta}{8} (3 + 2 \ln 2) N^2 + \frac{\beta}{2} N \ln N \\ &\quad + \left[ \frac{\beta}{2} \ln \left( \frac{\beta}{2} \right) - \ln \Gamma \left( 1 + \frac{\beta}{2} \right) - \frac{1}{2} - \frac{\beta}{4} + \ln(2\pi) + \left( \frac{\beta - 2}{4} \right) \ln 2 \right] N \\ &\quad + \left( \frac{\beta}{2} + \frac{2}{\beta} + 3 \right) \frac{\ln N}{12} + \kappa_\beta + o(1) \end{aligned} \quad (13.118)$$

où  $\kappa_\beta$  est donné Eq. (13.111).

Finalement la distribution cumulative de  $\lambda_{\max}$  à gauche de sa moyenne est donnée par  $\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq s\sqrt{N}) = \frac{Z_N(s)}{Z_N(\infty)}$  soit :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq s\sqrt{N}) &\sim D_{N,\beta} \exp\{N^2 F^{(0)}(s) + N F^{(1)}(s) + F^{(2)}(s)\} \\ \text{où } F^{(0)}(s) &= 2\beta F^{0,0}(s), \quad F^{(1)}(s) = (\beta - 2)F^{0,1}(s), \\ F^{(2)}(s) &= F^{1,0}(s) + \left( \frac{\beta}{2} + \frac{2}{\beta} - 2 \right) F^{0,2}(s) \end{aligned}} \quad (13.119)$$

où  $F^{0,0}$  est donné Eq. (13.78),  $F^{0,1}$  est donné Eq. (13.84),  $F^{1,0}$  Eq. (13.98) et  $F^{0,2}$  Eq. (13.99) et avec  $\ln D_{N,\beta} = F_N(0) - \ln Z_N(\infty)$ , soit :

$$\begin{aligned} \ln D_{N,\beta} &= -\beta N^2 \frac{\ln 3}{4} + N \left( \frac{\beta}{2} - 1 \right) \ln \left( \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\ln N}{12} \left( \frac{\beta}{2} + \frac{2}{\beta} - 3 \right) \\ &\quad + \frac{\ln 3}{8} - \frac{1}{2} \ln(\pi\beta) - \frac{\ln 2}{6} + \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{2} + \frac{2}{\beta} - 2 \right) \ln \left( \frac{2 + \sqrt{3}}{2^{2/3} 3^{5/4}} \right) + \kappa_\beta \end{aligned} \quad (13.120)$$

où la constante  $\kappa_\beta$  est donnée Eq. (13.111) en général et se simplifie en Eq. (13.114) dans le cas particulier où  $\beta/2$  est entier. En particulier dans les cas GOE ( $\beta = 1$ ), GUE

( $\beta = 2$ ) et GSE ( $\beta = 4$ ) on trouve :

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \frac{\zeta'(-1)}{2} + \frac{\ln(\pi)}{2} + \frac{\ln 2}{4} \\ \kappa_2 &= \zeta'(-1) + \frac{\ln(2\pi)}{2} \\ \kappa_4 &= \frac{\zeta'(-1)}{2} + \frac{\ln(\pi)}{2} + \frac{17}{24} \ln 2\end{aligned}\tag{13.121}$$

En dérivant  $\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq y)$  Eq. (13.119) par rapport à  $y = s\sqrt{N}$ , on obtient un équivalent de la densité de probabilité de  $\lambda_{\max}$  à gauche de sa moyenne :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\lambda_{\max} = y) &\sim e^{-\Phi_N(\beta, \frac{y}{\sqrt{N}})} \quad \text{si } y < \sqrt{2N}, |y - \sqrt{2N}| = O(\sqrt{N}) \\ \text{où } \Phi_N(\beta, s) &= \beta N^2 \psi_-(s) + N(\beta - 2)\Phi_1(s) + \phi_\beta \ln N + \Phi_2(\beta, s)\end{aligned}\tag{13.122}$$

où l'ordre dominant est donné par  $\psi_-(s) = -(2F^{0,0}(s) - \ln 3/4)$ , on retrouve les résultats obtenus par la méthode du gaz de Coulomb, cf Eq. (3.39) :

$$\psi_-(s) = \frac{s^2}{3} - \frac{s^4}{108} - \left( \frac{s^3}{108} + \frac{5s}{36} \right) \sqrt{6+s^2} - \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{s + \sqrt{6+s^2}}{3\sqrt{2}} \right]\tag{13.123}$$

et où les ordres suivants sont donnés par (en faisant attention que  $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\partial}{\partial s}$ )  $\Phi_1(s) = -\left(F^{0,1}(s) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right)\right)$ ,  $\phi_\beta = -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{12} \left(\frac{2}{\beta} + \frac{\beta}{2} - 3\right)\right)$  et  $-\Phi_0(\beta, s) = F^{(2)}(s) + \ln \partial_s F^{(0)}(s) + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{2} + \frac{2}{\beta} - 2\right) \ln \left( \frac{2+\sqrt{3}}{2^{2/3} 3^{5/4}} \right) - \frac{\ln 2}{6} + \frac{\ln 3}{8} - \frac{1}{2} \ln(\pi\beta) + \kappa_\beta$ , soit :

$$\begin{aligned}\Phi_1(s) &= \frac{s^2}{6} - s \frac{\sqrt{s^2+6}}{12} + \frac{s}{4\sqrt{3}} \sqrt{s^2+6} - 2s\sqrt{s^2+6} - \frac{1}{2} \ln \left[ \sqrt{6+s^2} \right] \\ &\quad - \ln \left[ \sqrt{3} + \sqrt{1 - 2 \frac{s}{\sqrt{6+s^2}}} \right] + \frac{\ln 3}{2} + \frac{3 \ln 2}{4} \\ \phi_\beta &= -\frac{5}{4} - \frac{1}{12} \left( \frac{\beta}{2} + \frac{2}{\beta} \right) \\ \Phi_2(\beta, s) &= -\left( -2 + \frac{2}{\beta} + \frac{\beta}{2} \right) \ln \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{3} + \sqrt{1 - \frac{2s}{\sqrt{6+s^2}}} \right) \right] + \frac{\ln \pi}{2} - \frac{\ln \beta}{2} \\ &\quad - \ln \left[ (6+s^2)^{\frac{3}{2}} + s(-18+s^2) \right] + \left( \frac{9}{8} + \frac{19}{24} \left( \frac{2}{\beta} + \frac{\beta}{2} \right) \right) \ln 3 - \kappa_\beta \\ &\quad + \left( 3 - \frac{2}{\beta} - \frac{\beta}{2} \right) \left\{ \frac{1}{8} \ln \left[ 1 - \frac{2s}{\sqrt{6+s^2}} \right] + \frac{1}{6} \ln \left[ \sqrt{6+s^2} (s + \sqrt{6+s^2}) \right] \right\}\end{aligned}\tag{13.124}$$

La fonction de grande déviation  $-\ln \mathcal{P}(\lambda_{\max} = s\sqrt{N})$  est tracée Fig. 12.2 (la branche gauche est en vert).

### 13.3.3 Loi de Tracy-Widom $\beta$

On veut maintenant vérifier que la grande déviation à gauche se recolle bien au voisinage de la moyenne  $s = \sqrt{2}$  avec la distribution de Tracy-Widom. On se place dans la limite de double-échelle :

$$s_{\text{TW}} = \sqrt{2} + N^{-\frac{2}{3}} \frac{x}{\sqrt{2}} \quad (13.125)$$

On développe dans cette limite la distribution  $\mathbb{P}(\lambda_{\max} \leq s)$  donnée Eq. (13.119). On obtient :

$$\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} \leq s_{\text{TW}}) \sim \tau_\beta e^{-\frac{\beta|x|^3}{24} + \frac{\sqrt{2}}{3}(\frac{\beta}{2}-1)|x|^{\frac{3}{2}} + (\frac{\beta}{2} + \frac{2}{\beta} - 3)\frac{\ln|x|}{8}} \quad (13.126)$$

où

$$\ln \tau_\beta = \kappa_\beta + \left( \frac{17}{8} - \frac{25}{24} \left( \frac{2}{\beta} + \frac{\beta}{2} \right) \right) \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(\pi\beta) \quad (13.127)$$

et où  $\kappa_\beta$  est donné Eq. (13.111) en général et se simplifie en Eq. (13.114) dans le cas particulier où  $\beta/2$  est entier. En particulier dans les cas GOE ( $\beta = 1$ ), GUE ( $\beta = 2$ ) et GSE ( $\beta = 4$ ) on trouve, cf Eq. (13.121) :

$$\begin{aligned} \ln \tau_1 &= \frac{\zeta'(-1)}{2} - \frac{11}{48} \ln 2 \\ \ln \tau_2 &= \zeta'(-1) + \frac{\ln 2}{24} \\ \ln \tau_4 &= \frac{\zeta'(-1)}{2} - \frac{37}{48} \ln 2 \end{aligned} \quad (13.128)$$

Pour les ensembles gaussiens usuels, ie pour  $\beta = 1, 2$  ou  $4$  Eq. (13.126) on retrouve bien l'asymptote gauche (ie  $x \rightarrow -\infty$ ) connue de la loi de Tracy-Widom respectivement  $\mathcal{F}_1(x)$ ,  $\mathcal{F}_2(x)$  ou  $\mathcal{F}_4(x)$ , cf Eq. (3.20). Pour un  $\beta > 0$  quelconque, Eq. (13.126) donne l'asymptote  $x \rightarrow -\infty$  de la loi de Tracy-Widom  $\mathcal{F}_\beta(x)$ . Cette asymptote coïncide en particulier à l'ordre dominant avec les résultats connus par méthode de gaz de Coulomb.

## Cinquième partie

---

### SIMULATIONS NUMÉRIQUES



## Monte Carlo par chaînes de Markov

---

Les modèles que j'ai étudiés durant ma thèse sont issus de contextes physiques variés (physique statistique, intrication quantique, etc) mais ont pour point commun de tous se rattacher à la théorie des **matrices aléatoires**. Dans les modèles que j'ai étudiés, la distribution des **valeurs propres**  $\lambda_i$  de la matrice aléatoire associée est en général connue. On cherche à calculer alors la densité moyenne des valeurs propres ou plus généralement la distribution d'une fonction des valeurs propres (nombre de valeurs propres positives, valeur propre maximale,  $\sum_i \lambda_i^q$ , etc). Pour vérifier les résultats obtenus analytiquement, mais aussi parfois pour deviner certains résultats, j'ai eu recours à des **simulations numériques de type Monte Carlo**.

On suppose connue la distribution jointe  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  des valeurs propres  $\lambda_i$ , par exemple cette distribution est donnée Eq. (1.27) pour les matrices gaussiennes, Eq. (1.64) pour les matrices de Wishart. On souhaite **échantillonner numériquement cette distribution**, c'est-à-dire que l'on veut générer numériquement des configurations de valeurs propres tirées selon la loi jointe  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  pour pouvoir ensuite tracer des histogrammes de la densité ou de toute autre fonction des valeurs propres. En général il n'est pas possible de l'échantillonner directement car les  $\lambda_i$  sont des variables aléatoires fortement corrélées. Une possibilité est d'utiliser un algorithme Monte Carlo de type **Metropolis**, comme je l'explique dans la première section 14.1.1. Je renvoie aussi au livre de W. Krauth [Kra06] pour plus de détails sur les simulations numériques en physique statistique.

Je présente dans la première partie 14.1 les principes de base des algorithmes que j'ai utilisés et développés au cours de ma thèse. J'explique d'abord le fonctionnement de l'algorithme Monte Carlo **Metropolis** standard -qui repose essentiellement sur la convergence d'une **chaîne de Markov** vers un état stationnaire sous certaines conditions. Je me place d'abord dans un cadre très général puis dans le cas des valeurs propres  $\lambda_i$  d'une matrice gaussienne. J'explique alors comment j'ai été amenée à modifier l'algorithme standard pour pouvoir construire numériquement un histogramme de la distribution de la valeur propre maximale  $\lambda_{\max}$ . En effet, la distribution de  $\lambda_{\max}$  est très piquée pour  $N$  grand, ainsi ses grandes déviations décrivent des événements très **rare**s qui sont très difficiles à observer numériquement. L'algorithme modifié s'appuie principalement sur



les **probabilités conditionnelles**. Dans la deuxième partie 14.2, je me place dans le contexte des états aléatoires en physique quantique, cf chapitre 9. Dans ce cas apparaît une difficulté supplémentaire liée à des **effets de taille finie** importants. J'ai dû à nouveau modifier fortement l'algorithme pour pouvoir simuler des systèmes de grande taille. Enfin dans la dernière partie 14.3 je présente le cas spécifique de la distribution du nombre  $\mathcal{N}_+$  de valeurs propres positives d'une matrice gaussienne, cf chapitre 11. Il a encore ici fallu adapter l'algorithme à un nouveau problème :  $\mathcal{N}_+$  ne prend que des **valeurs discrètes** (entières) alors que l'algorithme avec probabilités conditionnelles de la section 14.1 nécessite que la quantité dont on trace l'histogramme soit continue.

## 14.1 ALGORITHME MONTE CARLO METROPOLIS ET GRANDES DÉVIATIONS

Dans cette partie, je prends l'exemple de la distribution de la valeur propre maximale d'une matrice gaussienne pour expliquer l'algorithme Monte Carlo Metropolis. Je présente d'abord l'algorithme dans sa version générale standard, voir section 14.1.1. J'introduis alors les chaînes de Markov (Metropolis en est un cas particulier) section 14.1.2 et j'énonce des conditions suffisantes pour qu'une chaîne de Markov converge vers sa loi stationnaire. Je reviens ensuite au cas particulier des valeurs propres d'une matrice gaussienne, cf section 14.1.3. Enfin j'explique section 14.1.4 comment j'ai modifié l'algorithme Metropolis pour voir numériquement les grandes déviations de la distribution de la valeur propre maximale  $\lambda_{\max}$  - c'est une distribution très piquée, donc cela nécessite de générer numériquement des événements très rares, ce qui n'est pas évident a priori.

### 14.1.1 Algorithme Metropolis standard

On veut échantillonner une distribution de probabilité  $\pi(a)$  où  $a$  dénote une configuration, par exemple dans le cas des matrices aléatoires  $a = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  et  $\pi(a) = \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  (cf Eq. (14.18)). On notera  $\mathcal{C}$  l'ensemble des configurations possibles. Par définition  $\pi(a) > 0$  pour tout  $a \in \mathcal{C}$ . La procédure générale pour **échantillonner** la distribution  $\pi(a)$  avec l'algorithme **Metropolis** est la suivante :

- On part d'une configuration initiale "quelconque"  $a \in \mathcal{C}$  (il est en fait préférable de bien choisir cette configuration comme expliqué plus loin).

- A chaque itération de l'algorithme, on effectue les étapes suivantes :

(i) On propose une modification aléatoire de la configuration  $a \rightarrow b$ , c'est un "**pas aléatoire**" dans l'espace des configurations. On suppose ici ce pas aléatoire symétrique, c'est-à-dire que la probabilité  $\mathcal{A}(a \rightarrow b)$  de proposer  $b$  à partir de  $a$  est égale à celle de proposer  $a$  à partir de  $b$ , ie  $\mathcal{A}(a \rightarrow b) = \mathcal{A}(b \rightarrow a)$ .

(ii) Cette modification est **acceptée** avec la probabilité  $p(a \rightarrow b)$  suivante (et donc rejetée avec probabilité  $1 - p(a \rightarrow b)$ ) :

$$\boxed{p(a \rightarrow b) = \min \left[ 1, \frac{\pi(b)}{\pi(a)} \right]} \quad (14.1)$$

On passe alors à l'itération suivante : on propose à nouveau un changement de configuration  $b \rightarrow c$  à partir de la nouvelle configuration  $b$ , etc.

Dans l'algorithme on suppose que les pas aléatoires  $a \rightarrow b$  proposés à l'étape (i) sont choisis de telle sorte que toute configuration  $c \in \mathcal{C}$  puisse être atteinte à partir de n'importe quelle autre configuration  $a \in \mathcal{C}$  en un nombre fini de pas, c'est-à-dire que pour tout  $c \in \mathcal{C}$  il existe un chemin de pas aléatoires (i)  $a \rightarrow a_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_{n-1} \rightarrow c$  pour un  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose aussi que la probabilité de ne proposer aucune modification, ie  $a \rightarrow a$ , à l'étape (i) est non nulle. Dans ce cas on peut montrer que l'algorithme tend après un grand nombre d'itérations vers un **régime stationnaire** où les configurations  $a$  générées ainsi sont tirées selon la distribution  $\pi(a)$ .  $\pi(a)$  est appelée distribution stationnaire.

La probabilité d'acceptation  $p(a \rightarrow b)$  Eq. (14.1) vérifie automatiquement la relation dite de **bilan détaillé** ("detailed balance") :

$$\boxed{\pi(a)p(a \rightarrow b) = \pi(b)p(b \rightarrow a)} \quad (14.2)$$

En effet si  $\pi(a) > \pi(b)$  alors  $p(a \rightarrow b) = \pi(b)/\pi(a)$  et  $p(b \rightarrow a) = 1$  d'après Eq. (14.1), donc (14.2) est bien vérifié. De même pour  $\pi(a) < \pi(b)$  en échangeant  $a$  et  $b$ .

On notera que le bilan détaillé Eq. (14.2) est bien vérifié à condition que le pas aléatoire (i) à chaque itération  $a \rightarrow b$  soit bien symétrique comme on l'a supposé, c'est-à-dire que le choix  $b \rightarrow a$  ait la même probabilité que  $a \rightarrow b$ . Si ce n'est pas le cas, on note  $\mathcal{A}(a \rightarrow b)$  la "**probabilité a priori**", c'est-à-dire la probabilité de proposer la configuration  $b$  partant de  $a$ , alors la probabilité d'acceptation (ii)  $p(a \rightarrow b)$  doit être modifiée de sorte que le bilan détaillé soit vérifié :

$$\pi(a)\mathcal{A}(a \rightarrow b)p(a \rightarrow b) = \pi(b)\mathcal{A}(b \rightarrow a)p(b \rightarrow a) \quad (14.3)$$

Il suffit de choisir la probabilité d'acceptation (ii) comme suit (au lieu de Eq. (14.1)) :

$$p(a \rightarrow b) = \min \left[ 1, \frac{\pi(b)}{\mathcal{A}(a \rightarrow b)} \frac{\mathcal{A}(b \rightarrow a)}{\pi(a)} \right] \quad (14.4)$$

L'algorithme Metropolis est en fait une marche aléatoire dans l'espace des configurations  $\mathcal{C}$ . On peut donc comprendre et interpréter cet algorithme en termes de chaînes de Markov, c'est l'objet de la partie suivante.

### 14.1.2 Convergence d'une chaîne de Markov

Un processus stochastique  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans un espace fini ou dénombrable  $E$  est appelé **chaîne de Markov** si la loi conditionnelle de  $X_{n+1}$  sachant  $X_1, \dots, X_n$  est égale à la loi conditionnelle de  $X_{n+1}$  sachant  $X_n$ , c'est-à-dire si pour tous  $x_0, \dots, x_n$  et  $y$  dans  $E$  on a

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x_n)} \quad (14.5)$$

On supposera dans toute la suite la chaîne de Markov homogène, ie  $\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)$  indépendant du "temps"  $n$ . On note alors  $P_{x,y}$  la probabilité de transition de  $x$  vers  $y$  :

$$\boxed{P_{x,y} = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)} \quad (14.6)$$

La normalisation de cette probabilité s'écrit  $\sum_{y \in E} P_{x,y} = 1$ . On a par récurrence immédiate :

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0) P_{x_0, x_1} P_{x_1, x_2} \dots P_{x_{n-1}, x_n} \quad (14.7)$$

$P_{x,y}$  vérifie aussi la propriété dite de Chapman Kolmogorov :

$$\mathbb{P}(X_2 = y | X_0 = x) = \sum_{z \in E} P_{x,z} P_{z,y} \quad (14.8)$$

Si on note  $P_{x,y}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) = \mathbb{P}(X_{k+n} = y | X_k = x)$  pour tout  $k \geq 0$ , on a alors plus généralement :

$$P_{x,y}^{(n)} = \sum_{z_1 \in E} \dots \sum_{z_{n-1} \in E} P_{x,z_1} P_{z_1, z_2} \dots P_{z_{n-1}, y} \quad (14.9)$$

Si  $E$  est discret,  $P$  est une matrice ("matrice stochastique") et  $P^{(n)}$  est simplement la puissance  $n$  de la matrice  $P$ .

Une loi de probabilité  $\pi(x)$  sur  $E$  est dite **loi stationnaire** pour la chaîne de Markov de probabilité de transition  $P_{x,y}$  si la propriété  $\mathbb{P}(X_n = x) = \pi(x)$  pour tout  $x$  implique  $\mathbb{P}(X_{n+1} = y) = \pi(y)$  pour tout  $y$ , autrement dit si on a :

$$\pi(y) = \sum_{x \in E} \pi(x) P_{x,y} \quad (14.10)$$

Par récurrence immédiate, si  $\pi(x)$  est une loi stationnaire alors la condition initiale  $\mathbb{P}(X_0 = x) = \pi(x)$  pour tout  $x$  implique que  $\mathbb{P}(X_n = x) = \pi(x)$  pour tout  $n$  et tout  $x$ .

Une condition suffisante et plus facile à vérifier pour qu'une loi  $\pi(x)$  soit stationnaire est la condition dite de **bilan détaillé** ("detailed balance") :

$$\pi(y) P_{y,x} = \pi(x) P_{x,y} \quad (14.11)$$

Le bilan détaillé implique bien  $\pi(y) = \sum_{y \in E} \pi(y) P_{y,x} = \sum_{x \in E} \pi(x) P_{x,y}$  d'où Eq. (14.10).

Une chaîne de Markov est dite **irréductible** si tout point  $y \in E$  peut être atteint en un nombre fini de pas à partir de n'importe quel point  $x \in E$ , ie si :

$$\forall x, y \in E, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists x_1, \dots, x_{n-1} \in E, P_{x, x_1} P_{x_1, x_2} \dots P_{x_{n-1}, y} > 0 \quad (14.12)$$

Un état  $x \in E$  est dit **récurrent** si le temps de premier retour en  $x$  est fini presque sûrement, ie si  $\mathbb{P}(T_x < \infty | X_0 = x) = 1$  où  $T_x = \inf\{n \geq 1, X_n = x\}$ . Si  $x$  est récurrent, alors s'il est atteint une fois par la chaîne de Markov, il le sera une infinité de fois.

La chaîne de Markov est dite **récurrente positive** si tous les  $x \in E$  sont récurrents.

Pour une chaîne de Markov irréductible, on peut montrer que la chaîne est récurrente positive si et seulement si elle admet une probabilité stationnaire. Dans ce cas la mesure

de **probabilité stationnaire**  $\pi(x)$  est unique, elle est donnée par l'inverse du temps moyen de premier retour en  $x$  :

$$\pi(x) = \frac{1}{\langle T_x | X_0 = x \rangle} \quad \text{où} \quad T_x = \inf\{n \geq 1, X_n = x\} \quad (14.13)$$

et où  $\langle \dots | X_0 = x \rangle$  est la moyenne sachant que  $X_0 = x$ .

Un état  $x \in E$  est dit **apériodique** si :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, P_{x,x}^{(n)} > 0 \quad (14.14)$$

Si  $x$  est périodique et sa période est donnée par le plus grand diviseur commun de tous les  $n$  tels que  $P_{x,x}^{(n)} > 0$ . Dans le cas particulier où la probabilité de rester en  $x$  après un pas est non nulle, ie si  $P_{x,x} > 0$ , alors  $x$  est apériodique. Une chaîne de Markov irréductible qui a un état apériodique au moins a nécessairement tous ses états apériodiques. Dans ce cas on dira que le chaîne est apériodique.

### Convergence d'une chaîne de Markov

On peut montrer que si une chaîne de Markov est irréductible, récurrente positive et apériodique, alors elle admet une unique loi de probabilité stationnaire  $\pi(x)$  et elle converge vers cette loi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = y) = \pi(y) \quad \text{pour tout } y \in E \quad (14.15)$$

De façon équivalente, si une chaîne de Markov est irréductible et apériodique et qu'elle admet une **probabilité stationnaire**  $\pi(x)$ , alors cette probabilité est unique et la chaîne de Markov converge vers cette loi  $\pi(x)$ .

On peut aussi donner une version moins forte de cette proposition : si une chaîne de Markov est irréductible et apériodique et qu'elle vérifie le bilan détaillé pour une loi  $\pi(x)$ , alors  $\pi(x)$  est l'unique loi stationnaire de la chaîne et la chaîne converge vers cette loi  $\pi(x)$ .

Retournons maintenant à l'algorithme de Monte Carlo **Metropolis**. Cet algorithme est une chaîne de Markov dans l'espace des configurations  $E = \mathcal{C}$ . La  $n^{\text{ième}}$  itération de l'algorithme est donnée par le  $n^{\text{ième}}$  pas de la chaîne de Markov  $X_n$ . La transition  $X_n \rightarrow X_{n+1}$  est décrite par les étapes (i) et (ii), ainsi la probabilité de transition de la chaîne de Markov est donnée par :

$$\begin{cases} P_{a,b} = \mathcal{A}(a \rightarrow b)p(a \rightarrow b) & \text{si } a \neq b \\ P_{a,a} = \mathcal{A}(a \rightarrow a) + \sum_{b \neq a} \mathcal{A}(a \rightarrow b)(1 - p(a \rightarrow b)) \end{cases} \quad (14.16)$$

où  $\mathcal{A}(a \rightarrow b)$  est la probabilité de proposer la modification  $a \rightarrow b$  (i) (probabilité a priori) et où  $p(a \rightarrow b)$  est la probabilité d'accepter cette modification (ii).  $P_{a,a}$  est la somme de la probabilité de proposer  $a$  (qui est dans ce cas toujours accepté car  $p(a \rightarrow a) = 1$ ) et de celle de proposer un mouvement  $a \rightarrow b$  qui est ensuite refusé.

L'algorithme de Metropolis avec la probabilité d'acceptation  $p(a \rightarrow b)$  définie Eq. (14.4) est une chaîne de Markov qui vérifie le bilan détaillé Eq. (14.11) pour la loi  $\pi(a)$ .

Si l'étape (i) est choisie telle que pour tout  $c \in \mathcal{C}$  il existe un chemin de pas aléatoires (i) de  $a$  vers  $c$  :  $a \rightarrow a_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_{n-1} \rightarrow c$  pour un  $n \in \mathbb{N}^*$ , tel que  $\mathcal{A}(a \rightarrow a_1) \dots \mathcal{A}(a_{n-1} \rightarrow c) > 0$ . De plus  $\pi(b) > 0$  pour tout  $b$  donc  $p(a \rightarrow b) > 0$  pour tous  $a, b$ . Ainsi on a bien pour tout  $c \in \mathcal{C}$  un chemin  $a \rightarrow a_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_{n-1} \rightarrow c$  tel que  $P_{a,a_1} \dots P_{a_{n-1},c} > 0$ , et la chaîne de Markov est irréductible.

Si de plus la chaîne est apériodique (il suffit par exemple que  $\mathcal{R}(a \rightarrow a) > 0$ ), la chaîne de Markov **Metropolis** est alors irréductible et apériodique et vérifie le bilan détaillé pour la loi  $\pi(a)$ . Elle **converge** donc comme voulu **vers la loi**  $\pi(a)$  qui est son unique probabilité stationnaire. L'algorithme Metropolis permet donc bien de générer au bout d'un grand nombre d'itérations des configurations tirées approximativement selon la loi de probabilité  $\pi(a)$ .

Toute la difficulté en général est d'**optimiser l'algorithme** pour que la convergence vers la loi stationnaire soit **rapide**. Dans les simulations, on veut en effet obtenir de bons résultats à partir d'un nombre assez grand mais "raisonnable" d'itérations (pour éviter un temps de calcul trop grand).

Il faut en particulier adapter au problème considéré la proposition de modification (i) pour que l'algorithme parcoure en un temps assez rapide une très grande partie de l'espace des configurations. Si la modification  $a \rightarrow b$  est un pas très petit dans l'espace des configurations, il faudra un temps très long pour atteindre une zone éloignée. D'un autre côté il faut faire attention à ne pas oublier de zone entière de l'espace des configurations. En général, ces critères empiriques sont à adapter selon la forme de  $\pi(a)$ .

Un critère empirique souvent utilisé (mais pas suffisant) est que le **taux de rejet** à l'étape (ii) soit en moyenne **approximativement** 1/2. Il est important que l'algorithme n'accepte pas tout le temps à l'étape (ii) les modifications proposées à l'étape (i) sinon cela signifie que les configurations générées sont de plus en plus probables, l'algorithme ne verra pas du tout en un temps raisonnable des configurations moins probables. D'un autre côté si le taux de rejet est très élevé, la marche aléatoire va très peu se déplacer dans l'espace des configurations  $\mathcal{C}$  et risque de ne pas atteindre assez vite toutes les zones de  $\mathcal{C}$ .

### 14.1.3 Valeurs propres d'une matrice aléatoire gaussienne

Revenons maintenant au cas qui nous intéresse, celui où  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des configurations de **valeurs propres**  $a = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  et la loi stationnaire que l'on veut échantillonner est  $\pi(a) = \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  où  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  est la distribution jointe des valeurs propres  $\lambda_i$  d'une matrice gaussienne donnée Eq. (1.27) :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B_N(\beta) e^{-\frac{\beta}{2} \sum_i \lambda_i^2} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad (14.17)$$

où la constante de normalisation  $B_N(\beta)$  est donnée Eq. (1.28) et où  $\beta$  est l'indice de Dyson. Pour l'ensemble GUE, il vaut  $\beta = 2$ , pour le GOE il vaut  $\beta = 1$  et pour le GSE  $\beta = 4$ . Mais on peut aussi choisir  $\beta > 0$ , la distribution donnée Eq. (14.17) reste bien définie.

Cette distribution s'écrit comme un poids de Boltzmann à température inverse  $\beta$ , cf Eq. (2.9)

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{Z_N} e^{-\beta E_N[\{\lambda_i\}]} \quad \text{où} \quad (14.18)$$

$$E_N[\{\lambda_i\}] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 - \sum_{i<j} \ln |\lambda_i - \lambda_j|, \quad Z_N = B_N(\beta)^{-1}$$

L'espace des **configurations**  $\mathcal{C}$  est une version discrétisée de  $\mathbb{R}^N$  (un ordinateur traite les nombres réels comme des séquences finies de bits, ils sont donc codés par un nombre fini de valeurs).

Le choix de la **configuration initiale** de réels  $(\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)})$  est a priori quelconque. Cependant pour que l'algorithme Metropolis converge plus vite vers son régime stationnaire, il est préférable de choisir une configuration la plus "typique" possible (ie plus probable selon  $\pi(a)$ ). Pour une matrice gaussienne, on s'attend pour  $N$  grand à un scaling typique  $\lambda_{\text{typ}} \asymp \sqrt{N}$ , cf Eq. (2.15). On sait aussi que la densité moyenne des valeurs propres  $\rho_N(\lambda)$  (qui est aussi la distribution marginale d'une valeur propre) a un support fini  $[-\sqrt{2N}, \sqrt{2N}]$  pour  $N \gg 1$  (demi-cercle de Wigner, cf Eq. (2.26)). Il est donc préférable de prendre pour configuration initiale des  $\lambda_i^{(0)}$  inclus dans  $[-\sqrt{2N}, \sqrt{2N}]$ . Une possibilité est par exemple de choisir indépendamment chaque  $\lambda_i^{(0)}$  de façon aléatoire selon une loi uniforme sur le segment  $[-\sqrt{2N}, \sqrt{2N}]$ .

Il faut ensuite savoir comment proposer lors de chaque étape une modification aléatoire de configuration  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \rightarrow (\lambda'_1, \dots, \lambda'_N)$  (i). Il y a plusieurs façons de proposer une modification, celle que j'ai retenue sur la suggestion de Massimo Vergassola est la suivante. On **choisit un  $\lambda_j$  particulier** de façon aléatoire selon une loi uniforme sur  $\{1, \dots, N\}$  et on **propose de le modifier comme**  $\lambda_j \rightarrow \lambda_j + \epsilon$  où  $\epsilon$  est un nombre réel choisi aléatoirement selon une loi gaussienne  $\mathcal{P}(\epsilon)$  de variance  $\sigma^2$  à adapter empiriquement pour avoir un taux de rejet de 1/2. Les autres  $\lambda_i$  restent inchangés.

On **accepte** alors cette modification avec la probabilité Metropolis (ii)  $p$  (et on la refuse avec probabilité  $(1 - p)$ ) :

$$p = p(\{\lambda_i\} \rightarrow \{\lambda'_i\}) = \min \left[ 1, \frac{\mathcal{P}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_N)}{\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)} \right] = \min \left[ 1, e^{-\beta(E_N[\{\lambda'_i\}] - E_N[\{\lambda_i\}])} \right] \quad (14.19)$$

L'étape (i) est symétrique : la probabilité de proposer la modification  $\{\lambda_i\} \rightarrow \{\lambda'_i\}$  est égale à celle de proposer le changement inverse  $\{\lambda_i\} \rightarrow \{\lambda'_i\}$ , ie  $\mathcal{A}(\{\lambda_i\} \rightarrow \{\lambda'_i\}) = \mathcal{A}(\{\lambda'_i\} \rightarrow \{\lambda_i\})$ . En effet, d'une part le choix d'un  $j \in \{1, \dots, N\}$  ne dépend pas de la configuration initiale, d'autre part la loi gaussienne centrée selon laquelle est tiré  $\epsilon$  tel que  $\lambda'_j = \lambda_j + \epsilon$  est symétrique autour de 0, ie  $\mathcal{P}(\epsilon) = \mathcal{P}(-\epsilon)$ . Ainsi le choix de la probabilité d'acceptation Eq. (14.19) permet que le bilan détaillé soit bien vérifié.

Cet algorithme vérifie bien la condition d'irréductibilité. En effet à partir d'une configuration  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ , on peut proposer à l'étape (i) n'importe quelle configuration de la forme  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda'_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_N)$  où  $\lambda'_j \in \mathbb{R}$  (mais avec une plus forte probabilité

de proposer une configuration où  $\lambda'_j$  proche de  $\lambda_j$ ). En particulier on peut proposer  $(\lambda'_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ . L'étape suivante propose de modifier un  $\lambda_k$  à nouveau, par exemple ce peut être  $\lambda_2$ , et ainsi de suite. Finalement on peut atteindre n'importe quelle configuration  $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_N) \in \mathbb{R}^N$  à partir de  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  en  $N$  itérations. La chaîne de Markov correspondante est donc bien irréductible.

A l'étape (i),  $\epsilon$  peut être nul, c'est-à-dire qu'il peut arriver de proposer de ne pas faire de modification  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ . La chaîne de Markov est donc apériodique.

Les conditions de bilan détaillé, d'irréductibilité et d'apériodicité sont vérifiées ici d'après ce qui précède. La chaîne de Markov associée **converge** bien vers la **loi stationnaire**  $\pi(a) = \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ . Avec cet algorithme Metropolis, on génère donc après un grand nombre d'itérations des **configurations de valeurs propres**  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  approximativement distribuées selon la loi jointe  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ .

Une fois le régime stationnaire atteint, on peut donc commencer à tracer des **histogrammes** pour les quantités qui nous intéressent (densité, valeur propre maximale ou toute autre fonction des valeurs propres). On notera  $I$  le nombre total d'itérations et  $K$  le nombre d'itérations à partir duquel on commence à construire les histogrammes.  $K$  doit être choisi de sorte que le **régime stationnaire** soit essentiellement atteint au bout de  $K$  itérations. En général le choix de  $K$  est plus ou moins empirique. Comme les configurations générées numériquement successivement sont fortement **corrélées** (on modifie un seul  $\lambda_j$  et d'une petite valeur  $\epsilon$ ), il n'est pas nécessaire de garder les configurations obtenues à toutes les itérations. On choisit de retenir seulement les configurations obtenues une itération sur  $l$  après  $K$  itérations. Garder plus de configurations n'augmenterait pas la précision. On ne garde donc que les configurations obtenues aux itérations  $K, K+l, K+2l, \dots, I$ . L'ensemble de ces configurations que l'on notera  $\mathcal{E}$  constitue notre **échantillonnage** (numérique) de la distribution  $\pi(a) = \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ . L'échantillonnage est de taille  $n_s = \frac{I-K}{l}$ . On construit alors des histogrammes à partir des configurations de l'échantillonnage  $\mathcal{E}$ .

- On veut par exemple construire un **histogramme de la densité moyenne**. On doit d'abord discrétiser l'intervalle que l'on veut considérer, ici un intervalle symétrique autour de l'origine  $[-\zeta, \zeta]$  avec  $\zeta > \sqrt{2N}$ , ainsi notre intervalle comprend au moins le segment  $[-\sqrt{2N}, \sqrt{2N}]$  qui est le support de la densité dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . On discrétise l'intervalle  $[-\zeta, \zeta]$  en introduisant  $n > N$  points intermédiaires équidistants  $\zeta_k = -\zeta + 2\zeta k/n$  pour  $0 \leq k \leq n$ . Le pas de discrétisation est  $\delta = 2\zeta/n$ . On crée un tableau de  $(n+1)$  cases  $h_\rho[k]$  initialisées à 0. Une fois rempli, ce sera l'histogramme de la densité moyenne  $\rho_N$ . Pour chaque configuration  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  de l'échantillonnage  $\mathcal{E}$ , on modifie l'histogramme  $h_\rho[k]$  : pour chaque  $\lambda_i$  de la configuration, on regarde dans quel intervalle  $[\zeta_k, \zeta_{k+1}[$  il tombe et on ajoute 1 dans la case  $k$  correspondante du tableau.

A la fin on divise chaque case du tableau par  $Nn_s\delta$  où  $n_s$  est la taille de l'échantillonnage et  $\delta$  le pas de la discrétisation. Ainsi l'intégrale discrète de la densité est bien  $\int \rho_N(\lambda) d\lambda = \sum_{k=0}^n h_\rho[k] \delta = 1$ , ie la densité est bien normalisée. On peut alors tracer l'histogramme de la densité  $h_\rho[k]$ .

- Pour tracer numériquement la distribution de la valeur propre maximale (ou d'une autre fonction des  $\lambda_i$ ), on procède de même. On construit un histogramme des valeurs prises par  $\lambda_{\max}$  (qui doit être en moyenne  $\sqrt{2N}$ ) pour les configurations de l'échantillon-

nage  $\mathcal{E}$ .

Avec cet algorithme Metropolis, on peut donc en principe reconstruire la densité moyenne des  $\lambda_i$  ainsi que la distribution de la valeur propre maximale. En pratique, cela fonctionne bien pour la densité, la convergence est rapide et il n'y a pas besoin de choisir une très grande valeur de  $N$  pour observer le comportement asymptotique. Typiquement  $N = 50$  donne de très bons résultats si on fait tourner l'algorithme pour  $I \sim 10^8$  itérations. Dans ce cas dès  $K \sim 10^5$  itérations l'état stationnaire est à peu près atteint. On peut par exemple garder pour notre échantillonnage une itération sur  $l = 100$ .

Par contre, cet algorithme **ne suffit pas** pour reconstruire les **grandes déviations** de la distribution de  $\lambda_{\max}$ . En effet ces grandes déviations décroissent exponentiellement avec  $N$ , donc elles décrivent des **événements très rares**. Il est quasi impossible de voir véritablement les branches des grandes déviations avec un algorithme Metropolis standard en un temps raisonnable.

Pour accéder efficacement aux queues de la distribution, j'ai développé un algorithme de Metropolis modifié que j'ai utilisé de nombreuses fois pendant ma thèse. Cet algorithme repose sur les probabilités conditionnelles comme je l'explique ci-dessous.

#### 14.1.4 Probabilités conditionnelles

J'explique ici un algorithme Metropolis modifié que j'ai développé pour pouvoir explorer les queues de la distribution de  $\lambda_{\max}$ , ou de façon générale atteindre des zones de configurations **très peu probables** (événements rares). Par exemple on veut obtenir un histogramme pour la distribution de  $\lambda_{\max}$  à gauche de sa moyenne. On veut atteindre des valeurs de  $\lambda_{\max}$  assez faibles. L'idée est de **forcer l'algorithme à explorer la région**  $\lambda_{\max} < y_c$  pour un  $y_c < \sqrt{2N}$  donné (où  $\sqrt{2N}$  est la moyenne de  $\lambda_{\max}$  dans la limite  $N \gg 1$ ). Pour cela on met dans l'algorithme la contrainte  $\lambda_{\max} < y_c$  de la façon suivante :

- On commence avec une configuration de valeurs propres  $(\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)})$  qui satisfait la contrainte  $\lambda_{\max} < y_c$ . Pour cela il suffit par exemple de tirer aléatoirement tous les  $\lambda_i^{(0)}$  dans un intervalle de la forme  $[-a\sqrt{N}, y_c]$  avec un  $a > \sqrt{2}$ .

- A chaque itération on réalise les étapes suivantes :

(i) On propose une nouvelle configuration comme dans l'algorithme standard en modifiant un seul  $\lambda_j$  :  $\lambda_j \rightarrow \lambda_j + \epsilon$ .

(ii) Si la nouvelle configuration ne vérifie pas la contrainte  $\lambda_{\max} < y_c$ , ie si  $\lambda_j + \epsilon \geq y_c$ , alors la modification est rejetée. Sinon on procède ensuite comme dans le Metropolis standard : on accepte la modification avec la probabilité  $p(\{\lambda_i\} \rightarrow \{\lambda'_i\})$  donnée Eq. (14.19), on la rejette sinon.

L'espace  $\mathcal{C}_{y_c}$  des **configurations** possibles pour cet algorithme modifié est une version discrétisée de  $] -\infty, y_c]^N$  au lieu de  $\mathbb{R}^N$ . L'étape (ii) équivaut à accepter le pas  $a \rightarrow b$  avec la nouvelle probabilité Metropolis  $p_{y_c}$  :

$$p_{y_c} = \min \left[ 1, \frac{\mathcal{P}(\{\lambda'_i\} | \lambda'_{\max} < y_c)}{\mathcal{P}(\{\lambda_i\} | \lambda_{\max} < y_c)} \right] \quad (14.20)$$

où  $\mathcal{P}(\{\lambda_i\} | \lambda_{\max} < y_c)$  est la **probabilité conditionnelle** des  $\lambda_i$  sachant que tous les  $\lambda_i$



sont inférieurs à  $y_c$ . Cette probabilité est donnée par :

$$\mathcal{P}(\{\lambda_i\} | \lambda_{\max} < y_c) = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists j, \lambda_j \geq y_c \\ K_{y_c} \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) & \text{si } \lambda_i < y_c \text{ pour tout } i \end{cases} \quad (14.21)$$

où  $K_{y_c}$  est une constante, elle donnée par  $K_{y_c} = 1/\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} < y_c)$  (on rappelle que de façon générale  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A, B)/\mathbb{P}(B)$ ).

L'algorithme Metropolis sur  $\mathcal{C}_{y_c}$  (où  $\mathcal{C}_{y_c}$  est une version discrétisée de  $] -\infty, y_c]^N$ ) vérifie donc bien aussi le bilan détaillé. L'étape (i) de proposition de modification  $\{\lambda_i\} \rightarrow \{\lambda'_i\}$  est la même que dans l'algorithme sur  $\mathbb{R}^N$  (plus précisément sur  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\infty$ , une version discrétisée de  $\mathbb{R}^N$ ), elle a donc bien les propriétés requises (symétrie, irréductibilité, apériodicité) de sorte que la chaîne de Markov converge vers la loi stationnaire ici  $\pi(a) = \mathcal{P}(\{\lambda_i\} | \lambda_{\max} < y_c)$  (cf Eq. (14.21)).

Ce nouvel algorithme permet d'**échantillonner la loi conditionnelle** des  $\lambda_i$  sachant que  $\lambda_{\max} < y_c$ , soit  $\mathcal{P}(\{\lambda_i\} | \lambda_{\max} < y_c)$ , donc de construire un histogramme de la probabilité conditionnelle  $\mathcal{P}(\lambda_{\max} = y | \lambda_{\max} < y_c)$ . En réalité, comme la distribution est très piquée, on explore seulement une très petite région de la forme  $y_c - \delta < \lambda_{\max} < y_c$ . Cette région est certes petite mais on ne pouvait pas l'atteindre par l'algorithme standard qui explorait une petite région au voisinage de la moyenne de  $\lambda_{\max}$  (donc à droite de  $y_c$ ). La distribution conditionnelle  $\mathcal{P}(\lambda_{\max} = y | \lambda_{\max} < y_c)$  est par définition donnée par :

$$\mathcal{P}(\lambda_{\max} = y | \lambda_{\max} < y_c) = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists j, \lambda_j \geq y_c \\ K_{y_c} \mathcal{P}(\lambda_{\max} = y) & \text{si } \lambda_i < y_c \text{ pour tout } i \end{cases} \quad (14.22)$$

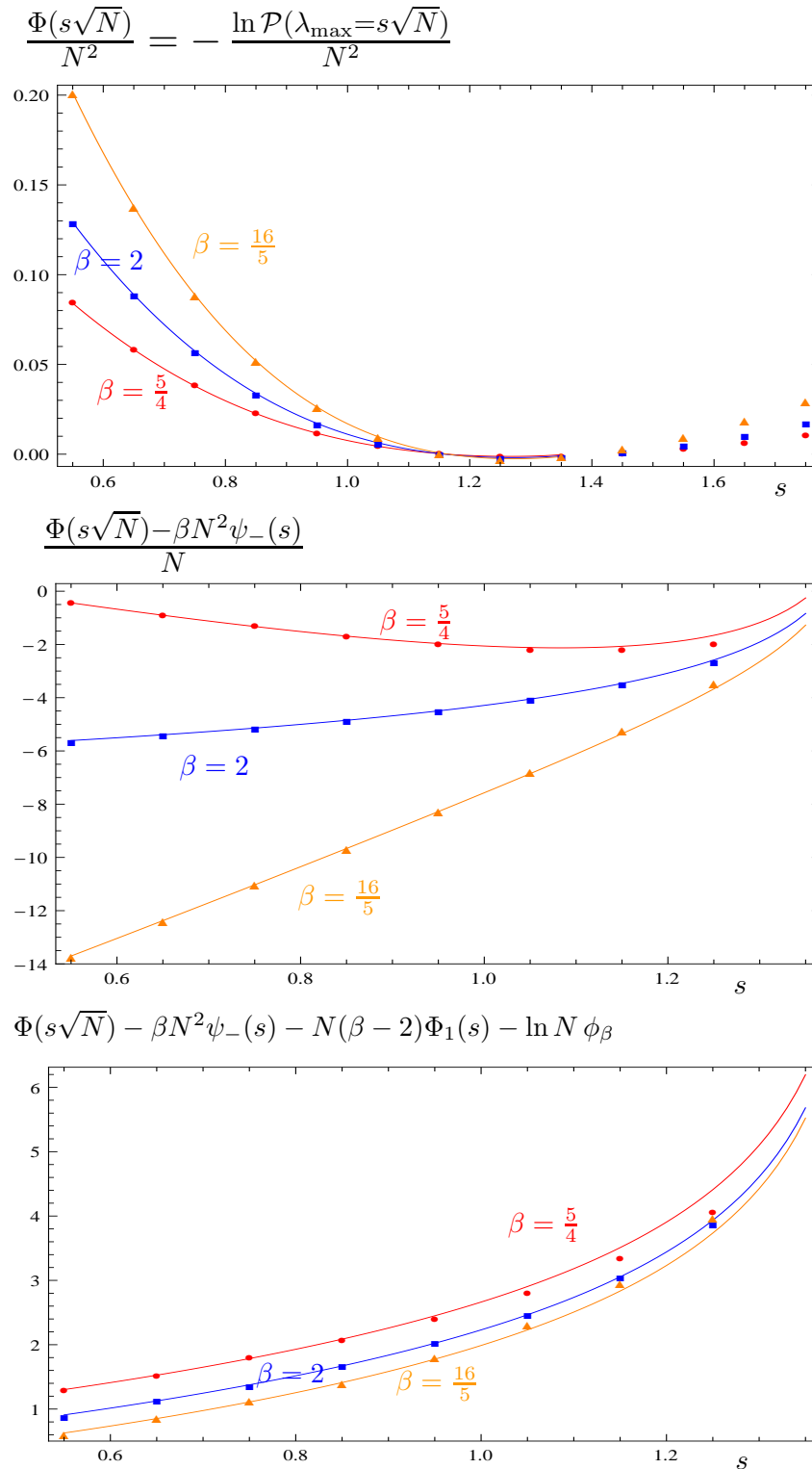
où  $K_{y_c} = 1/\mathbb{P}_N(\lambda_{\max} < y_c)$ .

On veut à la fin construire un histogramme de  $\mathcal{P}(\lambda_{\max} = y)$  et tracer la fonction de grande déviation  $\Phi(y) = -\ln \mathcal{P}(\lambda_{\max} = y)$ .

Pour une valeur de  $y_c < \sqrt{2N}$  donnée, on peut construire un histogramme de  $\mathcal{P}(\lambda_{\max} = y | \lambda_{\max} < y_c)$  et donc tracer  $\Phi_{y_c}(y) = -\ln \mathcal{P}(\lambda_{\max} = y | \lambda_{\max} < y_c)$  sur un petit intervalle de la forme  $y \in [y_c - \delta, y_c]$ . On peut alors calculer numériquement à partir de cet histogramme la dérivée de  $\Phi_{y_c}(y)$  au point  $y = y_c - \frac{\delta}{2}$ , ce qui permet de se débarrasser de la constante  $K_{y_c}$ . En effet on a  $\partial_y \Phi_{y_c}(y) = \partial_y \Phi(y)$  pour tout  $y < y_c$  car d'après Eq. (14.22) on sait que  $\Phi_{y_c}(y) = \Phi(y) - \ln K_{y_c}$ .

En pratique, on fait tourner le programme pour de nombreuses valeurs de  $y_c < \sqrt{2N}$  (écartées d'environ  $\delta$ ). On construit ainsi morceau par morceau une **courbe de la dérivée**  $\partial_y \Phi(y)$  où  $\Phi(y) = -\ln \mathcal{P}(\lambda_{\max} = y)$ . On peut enfin remonter à la grande déviation  $\Phi(y)$  en intégrant numériquement la courbe de  $\partial_y \Phi(y)$  après interpolation de la dérivée (l'interpolation et l'intégration permettent de plus de réduire les fluctuations et d'améliorer la précision des résultats).

Reste à déterminer numériquement la **constante d'intégration**. Pour cela on construit d'abord la courbe de  $\partial_y \Phi(y)$  pour un large domaine de valeurs de  $y$  à gauche et à droite de la moyenne  $\sqrt{2N}$ . À gauche, on utilise l'algorithme ci-dessus avec probabilités conditionnelles. À droite, on utilise un algorithme symétrique avec contrainte  $\lambda_{\max} > y_c$  (pour plusieurs valeurs de  $y_c$ ). À la fin, on adapte la constante d'intégration dans  $\Phi(y)$  pour que l'intégrale de  $\mathcal{P}(\lambda_{\max} = y) = e^{-\Phi(y)}$  calculée numériquement soit égale à 1, c'est-à-dire de telle sorte que la densité de probabilité de  $\lambda_{\max}$  soit bien normalisée.



**Figure 14.1** – Grande déviation de la valeur propre maximale d’une matrice gaussienne  $\Phi(s\sqrt{N}) = -\ln \mathcal{P}(\lambda_{\max} = s\sqrt{N})$  tracée en fonction de  $s$  pour différentes valeurs de l’indice de Dyson  $\beta$  :  $\beta = 5/4 = 1.25$  (disques rouges et ligne rouge),  $\beta = 2$  (carrés bleus et ligne bleue) et  $\beta = 16/5 = 3.2$  (triangles oranges et ligne orange). Les points (disques, carrés, triangles) sont les données numériques obtenues par algorithme Monte Carlo modifié (avec probabilités conditionnelles). Les lignes sont les résultats analytiques pour la grande déviation à gauche de la moyenne dans la limite  $N \rightarrow \infty$  obtenus au chapitre 13 :  $\mathcal{P}(\lambda_{\max} = s\sqrt{N}) \sim e^{-\Phi_N(\beta,s)}$ , cf Eq. (13.122). Les trois figures représentent successivement les trois ordres de la grande déviation  $N^2, N$  et  $1$  :  $\Phi_N(\beta, s) = \beta N^2 \psi_-(s) + N(\beta - 2)\Phi_1(s) + \phi_\beta \ln N + \Phi_2(\beta, s)$ .

On peut à la fin **comparer avec les résultats analytiques** obtenus pour la grande déviation à gauche de la distribution de  $\lambda_{\max}$  pour une matrice gaussienne, cf chapitre 13. La comparaison graphique entre les simulations numériques et les prédictions théoriques pour la limite  $N \rightarrow \infty$  est présentée Fig. 14.1. Les résultats numériques sont donnés par  $\Phi(y) = -\ln \mathcal{P}(\lambda_{\max} = y)$  tandis que les prédictions analytiques (cf Eq. (13.122)) donnent  $e^{-\Phi(s\sqrt{N})} = \mathcal{P}(\lambda_{\max} = s\sqrt{N}) \sim e^{-\Phi_N(\beta, s)}$  avec la fonction de grande déviation donnée par  $\Phi_N(\beta, s) = \beta N^2 \psi_-(s) + N(\beta - 2)\Phi_1(s) + \phi_\beta \ln N + \Phi_2(\beta, s)$ .

La distribution de  $\lambda_{\max}$  est très piquée pour  $N$  grand, de la forme  $\approx e^{-N^2 \psi_-}$ , on peut donc déjà voir pour des valeurs pas très élevées de  $N$  la convergence vers la forme asymptotique.

La précision obtenue numériquement pour  $N = 30$  est assez bonne, on peut voir les trois premiers ordres  $N^2$ ,  $N$  et 1 de la grande déviation  $\Phi(y) = -\ln \mathcal{P}(\lambda_{\max} = y)$ . Il faut choisir une valeur de  $N$  assez grande pour observer le comportement asymptotique, mais pas trop élevée pour avoir une bonne précision numérique sur les trois ordres  $N^2$ ,  $N$  et 1,  $N = 30$  m'a semblé empiriquement être un bon compromis.

Les **limitations de précision** numérique peuvent avoir diverses origines. La précision peut être améliorée en faisant tourner l'algorithme plus longtemps (plus d'itérations) pour avoir un échantillonnage de plus grande taille. On peut aussi augmenter le nombre de points  $y_c$  choisis pour faire tourner les algorithmes avec probabilités conditionnelles. On peut affiner les histogrammes en réduisant le pas de discrétisation. Enfin la détermination numérique de la constante d'intégration dans  $\Phi$  demande de connaître toute la distribution  $\mathcal{P}(\lambda_{\max} = y)$ , en pratique on la détermine numériquement sur un segment borné, augmenter la taille de ce segment (en faisant tourner le code pour des valeurs de  $y_c$  encore plus petites ou encore plus grandes) peut améliorer la précision de la constante.

## 14.2 ENTROPIE D'INTRICATION D'UN ÉTAT ALÉATOIRE

J'explique dans cette partie comment j'ai adapté l'algorithme Metropolis pour vérifier numériquement les résultats analytiques que j'ai obtenus sur la distribution de l'entropie d'intrication d'un état pur aléatoire, cf chapitre 9 et voir [NMV11].

Le contexte physique est expliqué au chapitre 9. On se place dans un espace de Hilbert produit  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  de dimension  $N \times M$ . On considère un état pur aléatoire  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Le sous-système  $A$  est décrit par sa matrice densité réduite  $\rho_A = \text{Tr}_B [|\psi\rangle\langle\psi|]$ .  $\rho_A$  est diagonalisable en base orthonormée, ses  $N$  valeurs propres  $\lambda_i$  sont réelles positives de somme 1. L'intrication entre les sous-systèmes  $A$  et  $B$  est mesurée par l'entropie d'intrication de von Neumann  $S_{VN} = -\text{Tr} \rho_A \ln \rho_A = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i$  ou bien l'entropie de Renyi  $S_q = \frac{1}{1-q} \ln [\Sigma_q]$  où  $\Sigma_q = \sum_i \lambda_i^q$  est la pureté généralisée.

Pour un état pur aléatoire, les valeurs propres de la matrice densité  $\rho_A$  sont distribuées selon la loi jointe Eq. (9.8) (avec  $\beta = 2$ ) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= B_{M,N} \delta\left(\sum_i \lambda_i - 1\right) \prod_{i=1}^N \lambda_i^{M-N} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \\ &= B_{M,N} \delta\left(\sum_i \lambda_i - 1\right) e^{-2E_N[\{\lambda_i\}]} \end{aligned} \quad (14.23)$$

où l'énergie effective  $E_N[\lambda_i]$  est donnée par

$$E_N[\lambda_i] = -\gamma \sum_{i=1}^N \ln \lambda_i - \sum_{i<j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{M-N}{2}, \quad \sum_i \lambda_i = 1 \quad (14.24)$$

L'idée est d'échantillonner cette distribution de probabilité par un algorithme de Monte Carlo Metropolis et de construire un histogramme de la distribution de la pureté  $\Sigma_2 = \sum_{i=1}^N \lambda_i^2$ . A nouveau la distribution de la pureté est très piquée autour de sa moyenne quand  $N \gg 1$ , ainsi un algorithme Metropolis standard ne permet pas en un temps raisonnable d'explorer les grandes déviations de cette distribution. J'ai eu alors recours à mon algorithme modifié avec probabilités conditionnelles, que j'ai adapté au cas de la distribution Eq. (14.23). Dans toute la suite on se placera dans le cas  $M = N$ , soit  $\gamma = 0$ .

### 14.2.1 Méthode 1 : Metropolis avec probabilités conditionnelles

Je donne ici l'adaptation de mon algorithme avec probabilités conditionnelles (présenté section 14.1.4) au cas de la pureté  $\Sigma_2 = \sum_i \lambda_i^2$  pour des  $\lambda_i$  de loi donnée Eq. (14.23). J'impose dans l'algorithme la condition  $\Sigma_2 > s_c/N$  pour explorer la **branche droite de la distribution de la pureté**  $\Sigma_2$ . L'espace des configurations  $\mathcal{C}$  est donné par une version discrétisée de  $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}_+^N, \sum_i \lambda_i = 1\}$ .

- On commence avec une configuration initiale des  $\lambda_i$  qui satisfait les contraintes  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$  et  $\lambda_i > 0$  pour tout  $i$  ainsi que la condition  $\Sigma_2 = \sum_i \lambda_i^2 > s_c/N$ . On s'attend à un comportement typique des valeurs propres  $\lambda_i \asymp 1/N$  pour  $N \gg 1$  donc on peut choisir les  $\lambda_i$  en tenant compte de ce scaling. Pour que la contrainte  $\Sigma_2 > s_c/N$  soit vérifiée initialement, il suffit de forcer une valeur propre de la configuration initiale à être suffisamment grande par rapport aux autres.

- A chaque itération, on effectue les deux étapes suivantes :

(i) On propose une modification aléatoire  $\{\lambda_i\} \rightarrow \{\lambda'_i\}$  dans l'espace des configurations. Pour cela on choisit au hasard un couple  $(\lambda_j, \lambda_k)$  avec  $j \neq k$  (choix uniforme de  $(j, k)$  parmi les couples d'éléments différents de  $\{1, \dots, N\}$ ) et on propose de le modifier selon  $\lambda_j \rightarrow \lambda_j + \epsilon$ ,  $\lambda_k \rightarrow \lambda_k - \epsilon$  où  $\epsilon$  est tiré selon une loi gaussienne centrée  $\mathcal{P}(\epsilon)$  de variance assez faible  $\sigma^2$  (à adapter pour obtenir un taux de rejet de l'ordre de 1/2 après (ii)). Ainsi la contrainte  $\sum_i \lambda_i = 1$  reste automatiquement vérifiée.

(ii) Si la nouvelle configuration n'est plus dans l'espace des configurations autorisées, ie si  $\lambda_j > 1$  ou  $\lambda_k > 1$  ou si  $\lambda_j < 0$  ou  $\lambda_k < 0$ , ou bien encore si  $\Sigma_2 \leq s_c$ , la modification est rejetée. Sinon la modification est acceptée avec la probabilité standard  $p$  (rejetée avec probabilité  $(1-p)$ ) :

$$p = \min \left[ 1, \frac{\mathcal{P}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_N)}{\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)} \right] = \min \left[ 1, e^{-\beta(E_N[\{\lambda'_i\}] - E_N[\{\lambda_i\}])} \right] \quad (14.25)$$

L'étape (i) est symétrique, ie  $\mathcal{A}(\{\lambda_i\} \rightarrow \{\lambda'_i\}) = \mathcal{A}(\{\lambda'_i\} \rightarrow \{\lambda_i\})$  par symétrie  $\epsilon \rightarrow -\epsilon$  de la loi gaussienne centrée  $\mathcal{P}(\epsilon)$ . La chaîne de Markov associée est irréductible, ie toute configuration de  $\mathcal{C}$  peut être atteinte à partir d'une autre configuration en un

nombre fini d'itérations. En effet, si on part d'une configuration  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  et qu'on veut atteindre  $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_N)$ , on peut choisir de modifier successivement en  $(N - 1)$  itérations les couples  $(\lambda_1, \lambda_N), (\lambda_2, \lambda_N), \dots$ , puis  $(\lambda_{N-1}, \lambda_N)$  pour obtenir  $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_{N-1}, 1 - \lambda'_1 - \dots - \lambda'_{N-1}) = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{N-1}, \lambda'_N)$ . De plus la probabilité de conserver lors d'une itération la même configuration est non nulle car  $\mathcal{P}(\epsilon = 0) \neq 0$ , donc la chaîne est apériodique. Enfin la chaîne de Markov vérifie bien le bilan détaillé d'après Eq. (14.25). Finalement elle converge vers sa loi stationnaire  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ .

Après un grand nombre d'itérations, l'algorithme génère donc des configurations de  $\lambda_i$  tirées approximativement selon la loi  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ . Comme expliqué plus haut, on obtient un échantillonnage de cette loi en conservant les configurations générées une itération sur  $l$  à partir de la  $K^{\text{ième}}$  itération.

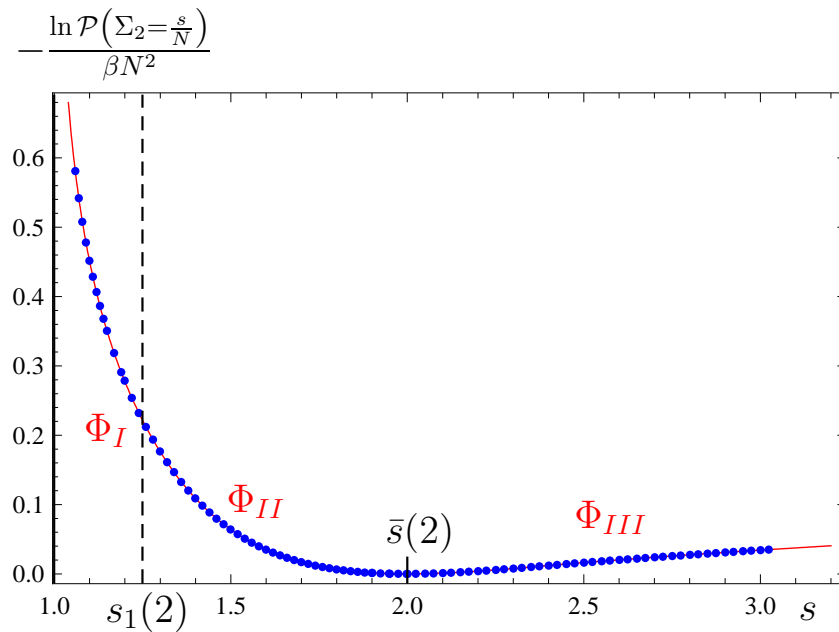
On peut alors reconstruire numériquement la fonction de grande déviation de la pureté  $\Phi(s) = -\frac{1}{\beta N^2} \ln \mathcal{P}(\Sigma_2 = \frac{s}{N})$  à partir de la procédure avec probabilités conditionnelles : on la construit par morceaux, pour chaque  $s_c$  on obtient la forme de  $\Phi_{s_c}(s) = \Phi(s) - \frac{\ln K_{s_c}}{\beta N^2}$  (où  $K_{s_c} = 1/\mathbb{P}(\Sigma_2 > s_c/N)$ ) sur un segment  $[s_c/N, (s_c + \delta)/N]$  donc on récupère la dérivée  $\Phi'(s) = \Phi'_{s_c}(s)$  au point  $s_c + \frac{\delta}{2}$ ; puis on intègre la dérivée obtenue avec les différents  $s_c$  pour revenir à  $\Phi(s)$ .

Ici j'ai fait tourner l'algorithme pour  $N = 50$  et environ 20 valeurs différentes de  $s_c$ . Le nombre d'itérations pour chaque  $s_c$  est  $I = 10^8$  et  $K = 10^6$ ,  $l = 100$ .

On peut suivre les mêmes étapes avec  $\Sigma_2 < s_c/N$  pour construire l'histogramme à gauche de la moyenne de  $\Sigma_2$ , ie  $s < 2$ .

Comme on le voit sur la figure 14.2, les simulations numériques concordent avec les résultats analytiques dans les régimes **I** et **II**, cf Eq. (9.35) et (9.40). Par contre dans le régime **III** les **effets de taille finie** sont très importants,  $N = 50$  n'est pas suffisant pour voir le saut de la valeur propre maximale prédit analytiquement (cf points oranges/ligne jaune figure 14.4). On peut vérifier que les formules analytiques pour  $N$  grand mais fini (en prenant l'énergie Eq. (9.58) avec  $t$  et  $\zeta$  solutions numériques du système Eq. (9.56) et (9.57)) correspondent bien aux simulations numériques (cf Fig. 14.2), mais cette expression est assez différente du comportement asymptotique dans la limite  $N \rightarrow \infty$  donné à l'ordre dominant par Eq. (9.64). Les effets de taille finie sont aussi très importants au voisinage de la transition du régime **II** au régime **III**. Il est alors crucial d'obtenir des données numériques pour  $N$  très grand, beaucoup plus grand que  $N = 50$ , pour voir le saut brutal de la valeur propre maximale à la transition **II**  $\rightarrow$  **III**. Pour  $N = 50$  la transition est régularisée. En effet, au point de transition  $s = s_2$  on s'attend à ce que la valeur propre maximale  $t$  saute d'une valeur environ  $\frac{5}{N}$  à une valeur beaucoup plus grande  $\sqrt{\frac{s-2}{N}}$  pour  $N \gg 1$ , mais pour  $N = 50$  on a  $\frac{5}{N} > \sqrt{\frac{s-2}{N}}$  pour tout  $s < 9/4$ . Ainsi il est clair qu'on ne peut pas voir de saut pour  $\lambda_{\max}$  pour  $N = 50$ , il faut augmenter sensiblement  $N$ .

Pour pouvoir simuler les valeur propres pour un  $N$  beaucoup plus grand, j'ai dû modifier de façon importante l'algorithme (pour éviter un temps de simulation démesurément long). C'est l'objet de la partie suivante.



**Figure 14.2** – Distribution de la pureté  $\Sigma_2$  : la figure montre la fonction de grande déviation  $\Phi(s) = -\frac{\ln \mathcal{P}(\Sigma_2 = s/N)}{\beta N^2}$  tracée en fonction de  $s$  pour  $N = 50$ . Les points bleus sont des données numériques que j’ai obtenues par simulations numériques Monte Carlo Metropolis (méthode 1, cf section 14.2.1). Le trait plein rouge représente les prédictions analytiques dans la limite où  $N$  est grand mais fini : pour les deux régimes **I** et **II** la courbe analytique est le résultat asymptotique pour  $N \rightarrow \infty$  (cf  $\Phi_I$  Eq. (9.35) et  $\Phi_{II}$  Eq. (9.40)) ; pour le régime **III** la courbe analytique correspond aux formules analytiques obtenues pour  $N$  grand mais fini (en prenant pour  $\Phi_{III}$  l’énergie Eq. (9.58) avec  $t$  et  $\zeta$  solutions numériques du système Eq. (9.56) et (9.57)) mais pas à la limite asymptotique  $\Psi_{III}$ . Les effets de taille finie sont en effet très visibles pour le régime **III** quand  $N$  est de l’ordre de  $N = 50$  : la transition paraît régularisée (pas de discontinuité de la dérivée au point de transition **II**→**III**).

## 14.2.2 Méthode 2 : Simulation avec densité et probabilités conditionnelles

Pour échantillonner la distribution  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  Eq. (14.23) pour des **valeurs de  $N$  très élevées**, j'ai modifié de façon importante l'algorithme Monte Carlo en m'appuyant sur les résultats analytiques qui montraient clairement une singularisation de la valeur propre maximale par rapport aux autres valeurs propres. La question était plutôt de savoir si cette valeur propre maximale se détachait de façon continue des autres valeurs propres ou sautait brutalement à une valeur beaucoup plus grande en un point  $s$  précis, et dans ce cas en quel point  $s$ . Ces simulations à  $N$  très grand m'ont en fait aidée à comprendre la limite asymptotique  $N \rightarrow \infty$  dans le régime **III** et m'ont guidée pour la résolution analytique des équations dans cette limite.

L'idée pour simuler  $N$  valeurs propres pour des valeurs élevées de  $N$  est qu'au lieu de simuler directement les valeurs propres **on simule leur densité**. Comme on s'attend à un rôle spécifique joué par  $\lambda_{\max}$ , on simule donc d'une part la valeur propre maximale  $\lambda_{\max} = t$  et d'autre part la densité des  $(N - 1)$  valeurs propres inférieures  $\rho(\lambda) = \frac{1}{N-1} \sum_{i \neq \max} \delta(\lambda - \lambda_i)$ . Dans les algorithmes précédents, une configuration consistait en  $N$  variables, les  $N$  valeurs propres. Dans le nouvel algorithme avec densité, l'espace  $\mathcal{C}$  des configurations est donné par les  $k + 2 \ll N$  variables suivantes :

- (1) la valeur propre maximale  $t$ .
- (2) la borne supérieure du support de la densité  $\zeta$  ( $\zeta < t$ ).
- (3) la valeur de la densité en les points  $x_i = \frac{i\zeta}{k}$  (pour  $0 \leq i < k$ ).

On doit imposer la condition  $\rho(\zeta) = 0$ , i.e.  $\rho(x_k) = 0$  par définition de la borne supérieure  $\zeta$  du support de la densité (et par continuité de la densité) L'idée est de remplacer la densité réelle par une approximation affine par morceaux de la densité définie par sa valeur en tous les  $x_i$  pour  $0 \leq i \leq k$ .

Ces  $(k + 2)$  variables décrivant les valeurs propres permettent de simuler des configurations de  $N \gg k$  valeurs propres, par exemple  $N = 1000$  avec  $k = 50$ . Le nombre de valeurs propres  $N$  apparaît dans l'expression de l'énergie  $E_N$  (et dans les contraintes). Avec ce nouveau code on peut maintenant simuler des configurations à un grand nombre  $N$  de valeurs propres en un temps raisonnable.

### 14.2.2.1 L'algorithme

D'après les prédictions analytiques, on s'attend à ce que la densité diverge quand  $\lambda \rightarrow 0^+$  comme  $\rho(\lambda) \propto \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ . Pour obtenir une meilleure approximation de la densité dans le code, on choisit de **discrétiser une forme régularisée de la densité**  $\bar{\rho}(\lambda) \equiv \sqrt{\lambda}\rho(\lambda)$ . Nos  $(k + 2)$  **variables** sont donc en fait :

- (1) la valeur propre maximale  $t$ .
- (2) la borne supérieure du support de la densité régularisée  $\zeta$  ( $\zeta < t$ ), qui est la même que la borne supérieure du support de la densité.
- (3) la valeur de la densité régularisée en les points  $x_i = \frac{i\zeta}{k}$  (pour  $0 \leq i < k$ ) :  $z_i \equiv \bar{\rho}(x_i)$ .

L'espace  $\mathcal{C}$  des configurations est donc donné par  $\{t, \zeta, z_i\}$  pour  $0 \leq i < k$  qui vérifient les deux contraintes  $\int \rho = 1$  (normalisation de la densité) et  $t + (N - 1) \int \lambda \rho = 1$  (ie  $\sum_i \lambda_i = 1$ ) où la densité  $\rho(\lambda) = \bar{\rho}(\lambda)/\sqrt{\lambda}$  est discrétisée sous la forme  $\bar{\rho}(x_i) = z_i$  où  $x_i = i\zeta/k$ .

Dans l'algorithme Metropolis, on calcule l'énergie  $E_N[\{\lambda_i\}]$  (qui apparaît dans la probabilité d'acceptation (ii)) ainsi que des contraintes du type  $\sum_i \lambda_i = 1$  en utilisant une **interpolation linéaire de la densité régularisée**  $\bar{\rho}(\lambda)$  :

$$\tilde{\rho}(\lambda) = z_i + \frac{z_{i+1} - z_i}{x_{i+1} - x_i} (\lambda - x_i) \text{ pour } \lambda \in [x_i, x_{i+1}] \quad (14.26)$$

où  $z_i = \bar{\rho}(x_i)$  ( en particulier  $z_k = 0$ ). Les intégrales du type  $\int d\lambda \lambda \rho(\lambda)$  sont calculées par interpolation linéaire :

$$\int_0^\zeta d\lambda \rho(\lambda) \lambda = \frac{4}{15} \left( \frac{\zeta}{k} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ z_0 + \sum_{i=1}^{k-1} z_i \left\{ (i+1)^{\frac{5}{2}} + (i-1)^{\frac{5}{2}} - 2i^{\frac{5}{2}} \right\} \right] \quad (14.27)$$

J'explique ci-dessous l'algorithme Metropolis avec condition  $\Sigma_2 > s_c/N$  que j'ai adapté à l'espace  $\mathcal{C}$  des configurations définies par  $\lambda_{\max} = t$  et la densité discrétisée des autres  $\lambda_i$ , ie  $\{t, \zeta, z_i\}$  ( $\mathcal{C}$  inclut les contraintes de normalisation de la densité et de somme 1, ie  $\sum_i \lambda_i = 1$ ).

- Il y a deux contraintes pour la densité : la normalisation  $\int \rho = 1$  et la somme des valeurs propres fixées à 1, ie  $t + (N-1) \int \lambda \rho = 1$ . On démarre avec une configuration initiale qui satisfait ces contraintes : par exemple, on prend pour  $\rho$  initial une densité de la forme  $\rho(\lambda) = \frac{2}{\pi\zeta} \sqrt{\frac{\zeta-\lambda}{\lambda}}$  et  $t$  est alors fixé par la contrainte  $t = -(N-1) \int \lambda \rho + 1$ . Initialement on choisit aussi  $\zeta$  pas trop grand pour que la condition  $\sum_i \lambda_i^2 > s_c/N$  soit satisfaite (pour une valeur fixée de  $s_c$ ), exactement comme dans le code avec probabilités conditionnelles.

- A chaque itération on **propose une modification (i)** dans l'espace des configurations (nos  $k+2$  variables) qui vérifie naturellement les deux contraintes  $\int \rho = 1$  et  $t + (N-1) \int \lambda \rho = 1$  (somme 1). Plus précisément à chaque itération on choisit au hasard trois entiers entre 0 et  $(k+1)$  :  $i_1 < i_2 < i_3$ . Puis, selon la valeur de  $i_{1,2,3}$ , on propose la modification suivante :

- **Cas 1** :  $i_3 < k$ . On propose alors une modification  $(z_{i_1}, z_{i_2}, z_{i_3}) \rightarrow (z_{i_1} + \alpha_1 \epsilon, z_{i_2} + \alpha_2 \epsilon, z_{i_3} + \alpha_3 \epsilon)$ , où  $\epsilon$  est tiré selon une loi gaussienne centrée et de variance  $\sigma^2$  (adaptée pour que le taux de rejet final soit proche de 1/2).  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont des constantes fixées par les contraintes  $\int \rho = 1$  et  $t + (N-1) \int \lambda \rho = 1$  (somme des valeurs propres) :

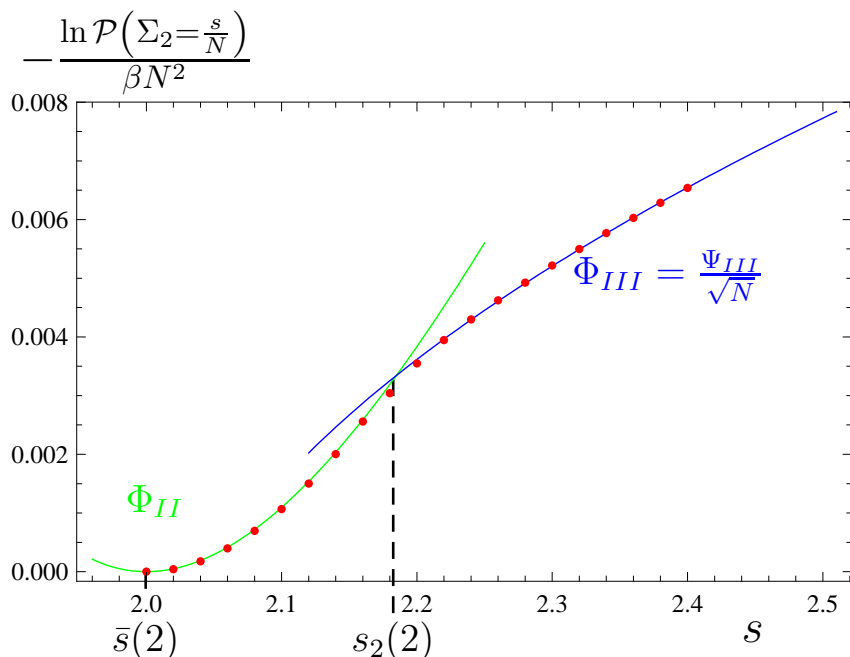
$$\alpha_1 = \frac{\left[ (i_3 + 1)^{3/2} + (i_3 - 1)^{3/2} - 2i_3^{3/2} \right] \left[ (i_2 + 1)^{5/2} + (i_2 - 1)^{5/2} - 2i_2^{5/2} \right]}{\left[ (i_2 + 1)^{3/2} + (i_2 - 1)^{3/2} - 2i_2^{3/2} \right] \left[ (i_3 + 1)^{5/2} + (i_3 - 1)^{5/2} - 2i_3^{5/2} \right]}$$

$\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont obtenus à partir de  $\alpha_1$  par permutations cycliques de  $i_1, i_2$  et  $i_3$ .

- **Cas 2** :  $i_1 < i_2 < i_3 = k$ . On propose une modification  $(\zeta, z_{i_1}, z_{i_2}) \rightarrow (\zeta + \epsilon, z_{i_1} + \epsilon_1, z_{i_2} + \epsilon_2)$  où  $\epsilon$  est tiré selon une loi gaussienne centrée de variance  $\sigma_1^2$  (adaptée pour ajuster le taux de rejet), et où  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont des fonctions de  $\epsilon$ . Enfin  $i_1$  et  $i_2$  sont fixés par les deux contraintes ( $\int \rho = 1$  et somme des valeurs propres).

- **Cas 3** :  $i_1 < i_2 < k$  et  $i_3 = k+1$ . On propose une modification  $(t, z_{i_1}, z_{i_2}) \rightarrow (t + \epsilon, z_{i_1} + \epsilon_1, z_{i_2} + \epsilon_2)$ , où exactement comme dans le cas 2  $\epsilon$  est tiré selon une loi gaussienne centrée et où  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont des fonctions de  $\epsilon$ . Enfin  $i_1$  et  $i_2$  sont fixés par les deux contraintes ( $\int \rho = 1$  et  $\sum_i \lambda_i = 1$ ).



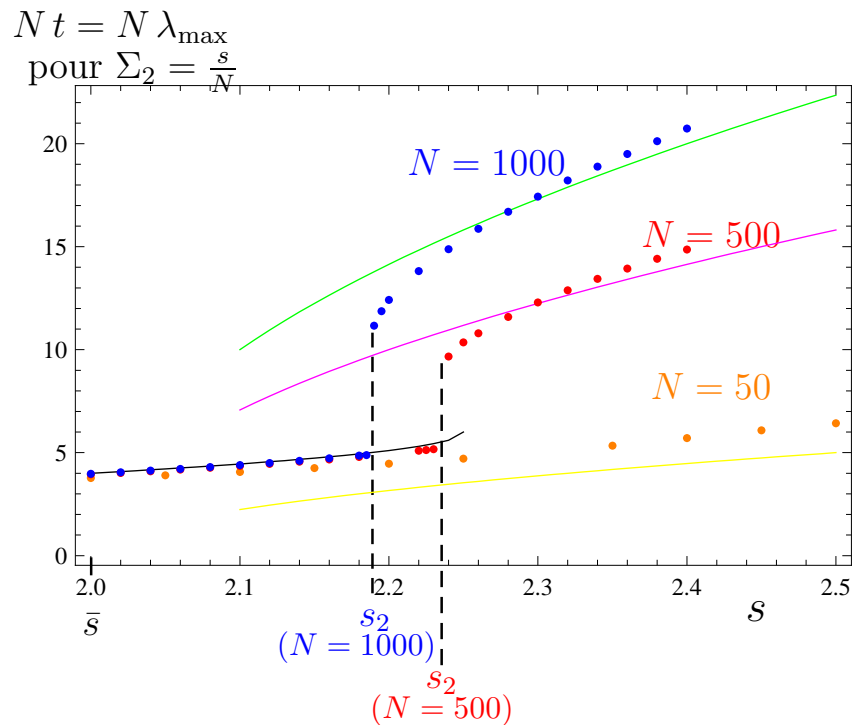


**Figure 14.3** – Distribution de la pureté  $\Sigma_2$  : fonction de grande déviation  $\Phi(s) = -\frac{\ln \mathcal{P}(\Sigma_2 = s/N)}{\beta N^2}$  tracée en fonction de  $s$  pour  $N = 1000$ . Les points rouges sont des données numériques que j’ai obtenues par simulations Metropolis (méthode 2, cf section 14.2.2) pour  $N = 1000$  (à partir d’une densité à  $k = 50$  points). Le trait plein représente les résultats analytiques asymptotiques pour  $N \rightarrow \infty$  :  $\Phi(s) \sim \Phi_{II}(s)$  dans le régime **II** ( $s_1 < s < s_2$ , en vert), cf Eq. (9.40) ;  $\Phi(s) \sim \frac{\Psi_{III}(s)}{\sqrt{N}}$  pour le régime **III** ( $s > s_2$ , en bleu), cf Eq. (9.64). La transition entre les régimes **II** et **III** est brutale, on voit la discontinuité de la dérivée première de  $\Phi(s)$  au point de transition  $s_2 = 2 + \frac{2^{4/3}}{N^{1/3}} - \frac{2^{5/3} \ln N}{3N^{2/3}} \sim 2.18$  pour  $N = 1000$ .

- **Cas 4** :  $i_1 < i_2 = k$  et  $i_3 = k + 1$ . On propose une modification  $(\zeta, z_{i_1}, t) \rightarrow (\zeta + \epsilon, z_{i_1} + \epsilon_1, t + dt)$ , où  $\epsilon$  est tiré selon une loi gaussienne centrée (même que dans le cas 2), et  $\epsilon_1$  et  $dt$  sont des fonctions de  $\epsilon$  et  $i_1$  fixées par les deux contraintes ( $\int \rho = 1$  et somme des valeurs propres).

(ii) Ensuite, si  $\zeta > t$ , si  $\zeta < 0$ , si  $z_i < 0$  ou si  $\sum_i \lambda_i^2 < s_c/N$ , c’est-à-dire si  $(N - 1) \int \lambda^2 \rho + t^2 < s_c/N$ , la modification est **rejetée**. Sinon on calcule l’énergie de la nouvelle configuration  $E'$  et on **accepte** la modification avec la probabilité Metropolis habituelle  $p = \min [e^{-2(E' - E)}, 1]$  (et on la rejette avec la probabilité  $(1 - p)$ ).

Une observation directe des règles ci-dessus montre que le bilan détaillé est bien vérifié. Comme on utilise la probabilité Metropolis usuelle, il suffit en effet de vérifier que l’étape (i) est bien symétrique, ie que la probabilité a priori  $\mathcal{A}(\{t, \zeta, z_i\} \rightarrow \{t', \zeta', z'_i\})$  de proposer une modification  $\{t, \zeta, z_i\} \rightarrow \{t', \zeta', z'_i\}$  est bien égale à celle de proposer la modification inverse, soit  $\{t', \zeta', z'_i\} \rightarrow \{t, \zeta, z_i\}$ . Dans le cas 1 par exemple on propose la modification  $(z_{i_1}, z_{i_2}, z_{i_3}) \rightarrow (z'_{i_1}, z'_{i_2}, z'_{i_3}) = (z_{i_1} + \alpha_1 \epsilon, z_{i_2} + \alpha_2 \epsilon, z_{i_3} + \alpha_3 \epsilon)$  où  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont des fonctions de  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$  uniquement. Or la proposition  $(z'_{i_1}, z'_{i_2}, z'_{i_3}) \rightarrow (z_{i_1}, z_{i_2}, z_{i_3}) = (z'_{i_1} - \alpha_1 \epsilon, z'_{i_2} - \alpha_2 \epsilon, z'_{i_3} - \alpha_3 \epsilon)$  a bien la même probabilité du fait que la probabilité de tirer  $-\epsilon$  est la même que celle de tirer  $\epsilon$  ie  $\mathcal{P}(\epsilon) = \mathcal{P}(-\epsilon)$  (car la variable



**Figure 14.4** – Valeur propre maximale  $\lambda_{\max} = t$  pour une valeur fixée de la pureté  $\Sigma_2 = s/N$  tracée en fonction de  $s$  pour différents  $N$ . Les points sont des données numériques que j’ai obtenues par simulations Metropolis (méthode 2, cf section 14.2.2) pour  $N = 50$  (points oranges),  $N = 500$  (points rouges) et  $N = 1000$  (points bleus). Les prédictions analytiques sont en trait plein. La théorie prédit un saut de  $\lambda_{\max} = t$  au point de transition  $s = s_2$ , d’une valeur  $t \sim \zeta = \frac{L(s)}{N}$  avec  $L(s) = 2(3 - \sqrt{9 - 4s})$  (régime **II**,  $s < s_2$ ) à une valeur  $t \sim \frac{\sqrt{s-2}}{\sqrt{N}}$  (régime **III**,  $s > s_2$ ) beaucoup plus grande quand  $N \gg 1$ . Pour  $N = 50$  les effets de taille finie sont trop importants pour que l’on puisse voir le saut (la différence entre  $1/N$  et  $1/\sqrt{N}$  n’est pas assez sensible). Par contre, pour  $N = 500$  ou  $N = 1000$  on voit clairement un changement brutal de comportement de  $\lambda_{\max}$ . Dans le régime **II** ( $s < s_2$ ),  $t \sim L(s)/N$ , ainsi  $tN$  est indépendant de  $N$ , les courbes pour les différents  $N$  sont confondues, contrairement au régime **III** ( $s > s_2$ ) où  $tN \asymp \sqrt{N}$ .

$\epsilon$  est tirée selon une loi gaussienne centrée  $\mathcal{P}(\epsilon)$ . De même pour les cas 2, 3 et 4.

De plus on peut montrer assez facilement que l'algorithme est irréductible, c'est-à-dire que pour tout couple de configurations  $\{t, \zeta, z_i\}, \{t', \zeta', z'_i\}$  il est possible de proposer des changements de configuration successifs (à l'étape (i)) pour passer en plusieurs itérations de  $\{t, \zeta, z_i\}$  à  $\{t', \zeta', z'_i\}$ . En effet on peut modifier un  $z_i$  avec le cas 1,  $\zeta$  avec le cas 2 et  $t$  avec le cas 3. En au plus  $(k+2)$  étapes on peut changer toute la configuration. Enfin, comme  $\epsilon$  est toujours tiré selon une loi gaussienne centrée (dans les cas 1, 2, 3 et 4), il peut être nul parfois. Il est donc possible de proposer à l'étape (i) de ne faire aucune modification, donc la condition d'apériodicité est bien vérifiée.

Les conditions de bilan détaillé, d'irréductibilité et d'apériodicité sont bien vérifiées comme on vient de le voir. Ainsi l'algorithme **converge vers sa loi stationnaire**. Ainsi après un grand nombre d'itérations l'algorithme génère des configurations selon la bonne loi stationnaire  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N | \Sigma_2 > s_c/N)$ . On peut alors construire des histogrammes pour la densité et la pureté  $\Sigma_2$ .

Pour  $N = 50$  (simulé avec  $(k+2)$  variables,  $k = 20$ ), j'ai vérifié qu'on retrouve les résultats précédents obtenus par Monte Carlo direct (simulation explicite des valeurs propres). Pour  $N = 500$  et  $N = 1000$  (avec  $k = 50$ ), j'ai obtenu des résultats intéressants montrant une transition brutale avec **saut de la valeur propre maximale**, cf Fig. 14.4. La figure 14.3 montre que, pour la distribution de la pureté  $\Sigma_2 = \sum_i \lambda_i^2$ , ces nouvelles simulations réalisées pour  $N = 1000$  (avec  $k = 50$ ) sont en bon accord avec les prédictions analytiques asymptotiques dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , voir Eq. (9.35) et (9.40) pour les régimes **I** et **II** et surtout Eq. (9.64) pour le régime **III**. En particulier on voit bien le changement de pente au second point de transition (discontinuité de la dérivée première).

### 14.3 NOMBRE DE VALEURS PROPRES POSITIVES

Dans cette partie, j'explique comment j'ai adapté l'algorithme Metropolis avec probabilités conditionnelles (cf section 14.1.4) au cas du nombre de valeurs propres positives d'une matrice gaussienne, pour lequel les résultats analytiques sont présentés au chapitre 11.

On rappelle que la distribution des valeurs propres d'une matrice gaussienne est donnée par :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{Z_N} e^{-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2} \prod_{j < k} |\lambda_j - \lambda_k|^\beta = \frac{1}{Z_N} e^{-\beta E_N[\{\lambda_i\}]} \quad (14.28)$$

avec  $E_N[\{\lambda_i\}] = \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i^2 - \sum_{i < j} \ln |\lambda_i - \lambda_j|$  et où  $\beta > 0$  est l'indice de Dyson.

On veut échantillonner la loi  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  et construire un **histogramme du nombre de valeurs propres positives**  $\mathcal{N}_+ = \sum_{i=1}^N \theta(\lambda_i)$ . On s'attend à nouveau à une distribution très piquée pour  $N$  grand de la forme :

$$\mathcal{P}(\mathcal{N}_+ = cN, N) \approx \exp[-\beta N^2 \Phi(c)] \quad \text{pour } 0 < c < 1 \quad (14.29)$$

En principe, on peut utiliser l'algorithme Metropolis avec probabilités conditionnelles (cf section 14.1.4) pour atteindre les queues de la distribution de  $\mathcal{N}_+$ , reconstruire

numériquement la grande déviation  $\Phi_{\text{num}}(c) \equiv -\frac{\ln \mathcal{P}(\mathcal{N}_+ = cN)}{\beta N^2}$  et comparer ensuite avec son expression analytique  $\Phi(c)$  pour  $N \rightarrow \infty$  donnée Eq. (11.71) (pour  $c \geq 1/2$ ).

Cependant,  $\mathcal{N}_+$  est une fonction **discrète**, elle prend des valeurs entières entre 0 et  $N$ . Numériquement il est plus facile de considérer des fonctions continues et de revenir seulement à la fin à  $\mathcal{N}_+$ . En effet, dans l'algorithme avec probabilités conditionnelles, on explore des zones de faible largeur de la forme  $s_c < \mathcal{N}_+ < s_c + \delta$ . Si  $\delta < 1$ ,  $\mathcal{N}_+$  reste égal à la même valeur dans tout l'intervalle et on ne peut rien déduire d'une telle simulation. Ainsi on introduit une version régularisée  $\theta_\eta(\lambda)$  de la fonction theta de Heaviside  $\theta(\lambda)$  et par conséquent une **version régularisée**  $\mathcal{N}_\eta$  de  $\mathcal{N}_+$ . Pour  $\eta > 0$ , on pose :

$$\theta_\eta(\lambda) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{\lambda}{\eta}}} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_\eta = \sum_{i=1}^N \theta_\eta(\lambda_i) \quad (14.30)$$

La fonction  $\theta_\eta$  croît de 0 (quand  $\lambda \rightarrow -\infty$ ) à 1 (quand  $\lambda \rightarrow \infty$ ). Elle a la même symétrie que  $\theta(\lambda)$  par rapport à l'origine :  $\theta_\eta(-\lambda) = 1 - \theta_\eta(\lambda)$ . Ainsi on a  $\mathcal{P}(\mathcal{N}_\eta = cN) = \mathcal{P}(\mathcal{N}_\eta = (1 - c)N)$ . Le paramètre  $\eta$  donne la largeur du saut de 0 à 1 et  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \theta_\eta(\lambda) = \theta(\lambda)$ , soit  $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_+$ .

### 14.3.1 Distribution de $\mathcal{N}_\eta$

Dans cette partie, j'explique comment construire un histogramme pour la distribution de  $\mathcal{N}_\eta$  avec l'algorithme Metropolis à probabilités conditionnelles, pour une valeur de  $\eta$  suffisamment grande pour que  $\mathcal{N}_\eta$  soit bien continue (lissée). On met dans l'algorithme la condition  $\mathcal{N}_\eta > Nc^*$  pour un  $c^* > 1/2$  (et  $c^* < 1$ ).

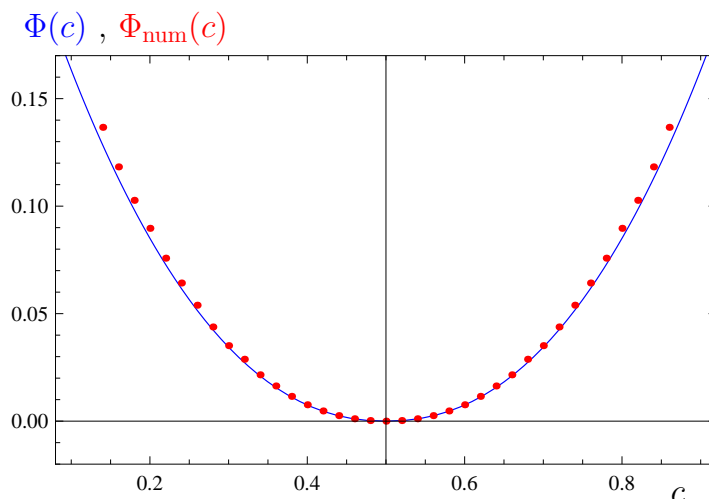
- On commence avec une configuration initiale des  $\lambda_i$  qui vérifie  $\mathcal{N}_\eta > Nc^*$ . En pratique, si  $\eta$  n'est pas trop grand, il suffit d'imposer qu'un grand nombre de valeurs propres soient positives ( $\mathcal{N}_+ > Nc^* + 2$  par exemple pour  $\eta < 1$ ). A part cette contrainte, on choisit les  $\lambda_i$  de façon plus ou moins arbitraire en tenant compte toutefois du scaling typique attendu  $\lambda_i \asymp \sqrt{N}$ .

- A chaque itération, **(i)** on propose la modification d'une valeur propre  $\lambda_j \rightarrow \lambda_j + \epsilon$  comme plus haut. Cette modification est refusée si pour la nouvelle configuration  $\mathcal{N}_\eta \leq Nc^*$ . Sinon **(ii)** on accepte cette modification avec la probabilité standard  $p$ , on la refuse donc avec probabilité  $(1 - p)$  :

$$p = \min \left( \frac{\mathcal{P}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_N)}{\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)}, 1 \right) = \min \left( e^{-\beta(E_N[\{\lambda'_i\}] - E_N[\{\lambda_i\}])}, 1 \right) \quad (14.31)$$

Cet algorithme, comme on l'a déjà vu plus haut, vérifie des conditions suffisantes pour que le théorème de convergence des chaînes de Markov s'applique. Après un grand nombre d'itérations, l'algorithme converge donc vers la **loi stationnaire** (conditionnelle)  $\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_N | \mathcal{N}_\eta > Nc^*)$ .

Grâce à la procédure expliquée section 14.1.4, on peut faire tourner le programme ci-dessus pour de nombreuses valeurs de  $c^*$  et construire alors une courbe de la dérivée de la fonction de grande déviation  $\Phi_\eta(c) = -\frac{\ln \mathcal{P}(\mathcal{N}_\eta = cN)}{\beta N^2}$  puis de la grande déviation proprement dite  $\Phi_\eta(c)$ .



**Figure 14.5** – Fonction de grande déviation  $\Phi_{\text{num}}(c) = -\ln \mathcal{P}(\mathcal{N}_+ = cN) / (\beta N^2)$  tracée comme fonction de  $c$  pour  $N = 50$ . Les points rouges sont les données numériques obtenues par méthode Monte Carlo avec  $\eta = 0.5$  (et  $10^8$  itérations). Chaque point correspond à une valeur entière de  $\mathcal{N}_+ = cN$ . Le trait plein bleu est la prédiction analytique dans la limite  $N \rightarrow \infty$   $\Phi(c)$  donnée Eq. (11.71).

### 14.3.2 Retour à $\mathcal{N}_+$

Grâce à l’algorithme avec probabilités conditionnelles, on peut donc (cf ci-dessus) obtenir la distribution de  $\mathcal{N}_\eta$  à condition que  $\eta$  soit suffisamment grand. En effet une simulation avec condition  $\mathcal{N}_\eta > c^*N$  explore en fait une petite région de la forme  $c^*N < \mathcal{N}_\eta < (c^* + \delta)N$ . Pour obtenir un histogramme non trivial sur cet intervalle, il faut que  $\mathcal{N}_\eta$  prenne des valeurs suffisamment différentes sur ce petit intervalle afin de pouvoir en déduire un point de la dérivée de  $\Phi_\eta(c) = -\frac{\ln \mathcal{P}(\mathcal{N}_\eta = cN)}{\beta N^2}$ . Si  $\eta$  est trop faible,  $\mathcal{N}_\eta$  n’est pas une fonction assez régulière et on ne peut rien déduire de la simulation avec condition  $\mathcal{N}_\eta > c^*N$ .

On cherche à construire un histogramme pour  $\mathcal{N}_+ = \lim_{\eta \rightarrow 0} \mathcal{N}_\eta$ . Cependant, on ne peut pas simplement diminuer la valeur de  $\eta$  pour revenir à  $\mathcal{N}_+$  d’après la remarque ci-dessus (numériquement on ne peut pas descendre en-dessous d’un certain seuil pour  $\eta$ ), il faut trouver une autre méthode.

L’idée est alors de faire tourner le programme pour un  $\eta$  donné pas trop petit (par exemple  $\eta = 0.5$ ) et de noter à chaque itération (ou mieux une itération sur dix ou cent) la valeur de  $\mathcal{N}_\eta$  et  $\mathcal{N}_+$  pour ensuite exploiter ces **données jointes** afin de remonter à  $\mathcal{N}_+$ . Avec l’algorithme expliqué section 14.3.1, on peut en effet pour un  $1/2 < c^* < 1$  construire un histogramme joint pour  $\mathcal{N}_+$  et  $\mathcal{N}_\eta$  sachant que  $\mathcal{N}_\eta > c^*N$ , en pratique sachant que  $(c^* + \delta)N > \mathcal{N}_\eta > c^*N$ . En faisant tourner le code pour plusieurs valeurs de  $c^*$  et en complétant ensuite par symétrie autour de  $1/2$ , on obtient alors un **histogramme complet de la probabilité conditionnelle**  $\mathcal{P}(\mathcal{N}_+ | \mathcal{N}_\eta)$ .

A la fin, comme on connaît maintenant à la fois  $\mathcal{P}(\mathcal{N}_+ | \mathcal{N}_\eta)$  et  $\mathcal{P}(\mathcal{N}_\eta)$  numériquement, on peut remonter à la distribution de  $\mathcal{N}_+$  en intégrant numériquement sur  $\mathcal{N}_\eta$  :

$$\mathcal{P}(\mathcal{N}_+) = \int d\mathcal{N}_\eta \mathcal{P}(\mathcal{N}_+ | \mathcal{N}_\eta) \mathcal{P}(\mathcal{N}_\eta) \quad (14.32)$$

---

La figure 14.5 montre la comparaison des données numériques obtenues selon la procédure ci-dessus avec les prédictions analytiques, cf Eq. (11.71). Globalement la concordance entre les deux est plutôt assez bonne. Cependant, comme la distribution de  $\mathcal{N}_+$  n'est pas continue pour  $N$  fini ( $\mathcal{N}_+$  prend des valeurs entières), il y a des effets de taille finie assez importants qui rendent la convergence numérique assez lente, ce qui explique les différences entre les simulations et la théorie loin de  $c = 1/2$ .



---

---

# Conclusion et perspectives

---

J'ai étudié dans cette thèse divers aspects de la théorie des matrices aléatoires ainsi que ses applications à des modèles de physique statistique ou de physique quantique. La théorie des matrices aléatoires, initialement introduite par Wigner dans le contexte de la physique nucléaire, a trouvé depuis un très grand nombre d'applications. Elle est devenue et reste aujourd'hui encore un domaine de recherche très actif aussi bien en mathématiques (probabilités, théorie des nombres) qu'en physique (chaos quantique, chromodynamique quantique, graphes aléatoires, marcheurs vicieux, états quantiques aléatoires, etc).

Pendant ma thèse, j'ai étudié un certain nombre de propriétés des matrices aléatoires, comme la distribution du nombre de valeurs propres positives [MNSV09, MNSV11] (cf chapitre 11) ou encore la valeur propre maximale d'une matrice gaussienne [BEMN10, NM11] (cf chapitres 12 et 13). Pour le calcul du nombre de valeurs propres positives, nous avons utilisé une méthode de gaz de Coulomb qui nous a conduits à des équations intégrales dont la solution est une densité à support fait de deux segments disjoints. Nous avons alors développé une méthode pour résoudre ces équations qui pourrait aussi être appliquée à d'autres contextes, en particulier à l'étude du nombre de valeurs propres positives d'une matrice aléatoire de Wishart ou d'un autre ensemble (au lieu des ensembles gaussiens) ou encore au calcul de la probabilité d'un gap dans le spectre des valeurs propres.

D'un autre côté, j'ai beaucoup étudié la valeur propre maximale d'une matrice gaussienne. Les valeurs propres d'une matrice aléatoire constituent un exemple très intéressant de variables aléatoires fortement corrélées pour lesquelles on sait calculer la distribution du maximum (dans la limite  $N \rightarrow \infty$  où  $N$  est le nombre de valeurs propres). Les fluctuations typiques au voisinage de la moyenne de la valeur propre maximale  $\lambda_{\max}$  sont décrites par la loi de Tracy-Widom. Ce résultat est connu depuis les travaux de Tracy et Widom dans les années 90. Cependant la preuve initiale est assez compliquée, j'ai pu récemment en dériver une preuve plus élémentaire grâce à une technique développée dans le contexte de la chromodynamique quantique. Cette méthode fait appel à des polynômes orthogonaux sur un intervalle semi-infini. Elle fonctionne bien dans le cas de l'ensemble GUE et pourrait être étendue aux cas GOE et GSE en introduisant des polynômes "skew-orthogonaux". Elle pourrait également être appliquée aux matrices de Wishart. De plus cette technique permet aussi de calculer la grande déviation à droite de la moyenne pour la valeur propre maximale. Les grandes déviations décrivent les fluctuations importantes



atypiques loin de la moyenne (événements rares).

Nous avons pu aussi calculer en collaboration avec Gaëtan Borot et Bertrand Eynard la grande déviation de la valeur propre maximale d'une matrice gaussienne à gauche de sa moyenne. La méthode est très différente, elle s'appuie beaucoup sur l'analyse complexe et permet de traiter le cas d'un  $\beta > 0$  arbitraire (pas seulement  $\beta = 1, 2$  ou  $4$  qui correspondent aux ensembles GOE, GUE ou GSE). On pourrait l'adapter pour calculer la grande déviation à droite de la moyenne pour  $\beta > 0$  quelconque à condition de singulariser la valeur propre maximale. En effet, les configurations où la valeur propre maximale est à droite de sa moyenne correspondent en général à avoir un continuum de valeurs propres peu perturbé par rapport à la configuration moyenne plus une valeur propre isolée, la valeur propre maximale.

Au début de ma thèse, je me suis intéressée à un système physique d'interfaces fluctuantes à l'équilibre [NM09] que l'on modélise par des marcheurs aléatoires vicieux (ie ne se croisant pas) à une dimension en présence d'un potentiel externe induit par un substrat (qui joue le rôle d'un mur). J'ai présenté en détails l'étude de ce modèle au chapitre 5. J'ai montré que la distribution transverse des hauteurs des interfaces (autrement dit la distribution des positions des marcheurs à un instant donné) est exactement celle des valeurs propres d'une matrice aléatoire de type Wishart (à un changement de variables près). Grâce à cette connexion avec les matrices aléatoires, j'ai pu utiliser des résultats ainsi que des techniques issues de la théorie des matrices aléatoires -par exemple la méthode du gaz de Coulomb- pour dériver un certain nombre de propriétés statistiques du modèle d'interfaces (distribution marginale de la hauteur d'une interface, hauteur de l'interface la plus haute, hauteur de l'interface la plus près du mur, centre de masse des hauteurs...). En particulier, j'ai pu calculer la distribution du centre de masse des interfaces par la méthode du gaz de Coulomb. J'ai mis en évidence une transition de phase dans le gaz de Coulomb associé, qui a pour conséquence une faible non-analyticité de la distribution du centre de masse au point de transition (plus précisément une singularité essentielle).

Plus tard, j'ai été amenée à étudier le processus de Pearcey, un modèle de marcheurs vicieux conditionnés à partir tous du même point et à se rejoindre en deux points  $\pm a$  : les  $N/2$  marcheurs supérieurs se rejoignent en  $a$ , les  $N/2$  inférieurs en  $-a$ . Ce modèle est à nouveau relié étroitement à la théorie des matrices aléatoires : plus précisément la distribution des positions des marcheurs à un temps donné est la même que celle des valeurs propres d'une matrice aléatoire gaussienne avec terme de source. Ce modèle présente une transition de phase à un temps critique  $t_c$  : la densité de position des marcheurs à un temps donné  $t$  a un support fini connexe pour  $t < t_c$ , et un support fait de deux segments disjoints pour  $t > t_c$ . J'ai pu calculer l'expression de cette densité au temps critique  $t_c$  par la méthode du gaz de Coulomb (bien que les équations intégrales associées au problème soient plus compliquées que les équations de Tricomi habituelles en matrices aléatoires). J'ai aussi étudié un modèle de gaz de Coulomb généralisé qui comprend le cas du processus de Pearcey et qui présente la même transition de phase. J'ai pu calculer dans ce cas également la densité au point critique.

La connexion entre modèles de marcheurs vicieux et matrices aléatoires est connue aussi bien des mathématiciens que des physiciens. Elle relie en général la distribution transverse des positions des marcheurs vicieux à un temps donné ( $0 < t < 1$ ) à la distribution des valeurs propres de matrices aléatoires. Le déterminant de Vandermonde  $\prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i)$  qui apparaît dans la distribution des valeurs propres  $\lambda_i$  traduit la con-

trainte de non-croisement entre les marcheurs (“répulsion des trajectoires”). Selon les conditions imposées sur les marcheurs (conditions au bord, présence ou non de potentiel externe), le modèle de matrices associé varie (gaussien avec ou sans source, Wishart...). Il est apparu récemment que ces modèles de marcheurs vicieux sont également reliés à des modèles de croissance stochastique comme le “PNG” (polynuclear growth model) ou encore au modèle du polymère dirigé. Il existe aussi une connexion avec la chromodynamique quantique (QCD) sur réseau. Tous ces liens ont permis de montrer entre autres que la distribution de Tracy-Widom, qui décrit les fluctuations de la valeur propre maximale d’une matrice gaussienne (ou de Wishart) au voisinage de sa moyenne, apparaît aussi dans tous ces contextes. Ces liens cependant sont prouvés au cas par cas, reliant un modèle de marcheurs vicieux avec telles conditions au bord à tel modèle de matrices ou encore à la fonction de partition QCD pour tel groupe de jauge. Il serait intéressant de comprendre s’il existe une connexion plus profonde et générale entre tous ces modèles.

Enfin je me suis intéressée à des problèmes dans un domaine tout à fait différent -celui de la physique quantique et de l’intrication. J’ai étudié l’intrication pour des états purs aléatoires dans un système quantique bipartite [NMV10, NMV11]. J’ai présenté au chapitre 9 le calcul de la distribution de l’entropie d’intrication pour un tel système. L’intrication est une propriété fondamentale et fascinante de la physique quantique. Elle décrit les corrélations non-classiques non-locales entre deux sous-parties d’un système quantique. Ces corrélations puissantes ont beaucoup d’applications dans les domaines de l’information, la cryptographie, la téléportation, l’algorithmique quantiques, etc. Par exemple, l’intrication a permis d’imaginer pour l’ordinateur quantique des algorithmes bien plus efficaces que leurs analogues classiques. Dans un système quantique bipartite  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  fait de deux sous-parties  $A$  et  $B$  dont l’état est décrit par un état pur  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , l’état du sous-système  $A$  est décrit par sa matrice densité réduite  $\rho_A = \text{Tr}_B[|\psi\rangle\langle\psi|]$ . Cette matrice  $\rho_A$  représente l’information que l’on peut avoir sur le sous-système  $A$  si on ne sait rien de  $B$ . Or si  $\rho_A$  ne donne accès qu’à une information très partielle sur  $A$  (grande incertitude sur l’état de  $A$ ), c’est qu’une grande partie de l’information est contenue dans l’intrication avec  $B$ . Une valeur propre  $\lambda_i$  de la matrice  $\rho_A$  peut être interprétée comme la probabilité que  $A$  soit dans l’état pur  $i$  (vecteur propre associé à  $\lambda_i$ ). Ainsi l’entropie de von Neumann  $S_{\text{VN}} = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i$ , qui est simplement l’entropie de Shannon des probabilités  $\lambda_i$ , caractérise l’intrication entre les deux sous-systèmes  $A$  et  $B$ .

Dans ma thèse je me suis intéressée aux propriétés d’intrication des états purs aléatoires. L’idée est proche de celle de Wigner pour la théorie des matrices aléatoires : si on ne connaît pas le Hamiltonien du système quantique, on peut supposer que l’état du système est décrit par un état aléatoire. Qui plus est, un état aléatoire est un état très général, un état “typique” qui peut être vu comme un état de référence auquel on peut comparer un état physique donné. Un état pur aléatoire  $|\psi\rangle$  est un vecteur de norme 1 tiré aléatoirement selon une distribution uniforme (mesure de Haar). On a vu que pour un état pur aléatoire  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice densité  $\rho_A = \text{Tr}_B[|\psi\rangle\langle\psi|]$  sont des variables aléatoires distribuées exactement comme les valeurs propres d’une matrice aléatoire de Wishart avec seulement la contrainte supplémentaire  $\sum_i \lambda_i = \text{Tr}\rho_A = 1$ . Ainsi j’ai pu utiliser une méthode de gaz de Coulomb pour calculer la distribution de l’entropie d’intrication  $S_{\text{VN}} = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i$  pour un état pur aléatoire. J’ai mis en évidence deux transitions de phase dans le gaz de Coulomb associé. En particulier

la seconde transition est assez brutale : la valeur propre maximale se détache soudain du continuum des autres valeurs propres pour devenir beaucoup plus grande. La conséquence est une discontinuité de la dérivée première de la distribution de l'entropie au point de transition.

J'ai également commencé à m'intéresser à la fin de ma thèse aux états de Bures aléatoires (cf chapitre 10), qui sont des états mélanges statistiques aléatoires (matrices densité aléatoires). Ces états décrivent des systèmes ouverts, en interaction avec l'environnement. Pour ces états, j'ai calculé la distribution de la pureté qui décrit l'intrication du système avec l'environnement. Il serait intéressant d'étudier pour ces états de Bures aléatoires l'intrication entre deux sous-parties  $A$  et  $B$  du système lui-même (et pas avec l'environnement). Cependant dans le cas des mélanges statistiques, l'intrication ne peut pas être simplement caractérisée par l'entropie, il faut faire appel à d'autres mesures plus compliquées (voir chapitre 7), ce qui rend le problème assez difficile.

Une autre extension de mon travail serait l'étude de l'intrication pour des états aléatoires choisis non pas parmi tous les états de l'espace de Hilbert mais parmi un sous-ensemble d'états plus "physiques". Par exemple on pourrait considérer des états aléatoires de types MPS, "matrix product states", qui sont connus pour bien décrire l'état fondamental d'Hamiltoniens avec interactions de courte portée et sont très utilisés dans les techniques numériques de DMRG (Density Matrix Renormalisation Group). On s'attend pour ces états à une intrication beaucoup plus faible en moyenne que dans le cas d'états aléatoires sur l'espace de Hilbert complet. Une autre façon de se restreindre à un ensemble d'états plus physiques est d'ajouter une contrainte sur le système, en fixant par exemple l'énergie du système pour un Hamiltonien donné. Une approche récente de la physique statistique quantique suggère que l'intrication avec l'environnement est la clé de la thermalisation d'un système. Si on choisit au hasard un état sur l'espace total fait du système et d'un gros environnement, avec une énergie totale fixée, les propriétés du système sont en fait très proches de l'état moyen -l'état thermalisé (ensemble canonique). D'où vient cette "typicalité" ? Il serait intéressant de comprendre plus en détails ce phénomène.

On peut également étudier la dynamique aléatoire d'un état quantique au lieu de considérer des états aléatoires statiques. Pour cela, on peut choisir un Hamiltonien aléatoire (matrice aléatoire si le système est de dimension finie) et voir sous quelles conditions l'évolution unitaire avec ce Hamiltonien conduit au bout d'un temps assez long à des états aléatoires.

Enfin j'ai aussi développé au cours de ma thèse un algorithme Monte Carlo Metropolis modifié qui permet en particulier d'atteindre les queues de distributions très piquées (cf chapitre 14) et de générer numériquement des événements pourtant très rares. Cet algorithme peut être facilement adapté à l'étude de n'importe quelle fonction des valeurs propres d'une matrice aléatoire de grande taille.

---

---

# Bibliographie

---

- [ABK05] A.I. APTEKAREV, P.M. BLEHER, AND A.B.J. KUIJLAARS. *Large  $n$  limit of Gaussian random matrices with external source, part II*. Communications in mathematical physics, **259**, 367–389 (2005), arXiv:math-ph/0408041. 107
- [ADVM09] M. ADLER, J. DELÉPINE, AND P. VAN MOERBEKE. *Dyson’s nonintersecting Brownian motions with a few outliers*. Communications on Pure and Applied Mathematics, **62**, 334–395 (2009), arXiv:0707.0442. 107
- [BBD08] J. BAIK, R. BUCKINGHAM, AND J. DIFRANCO. *Asymptotics of Tracy-Widom distributions and the total integral of a Painlevé II function*. Communications in Mathematical Physics, **280**, 463–497 (2008), arXiv:0704.3636. 48
- [BDSW96] C.H. BENNETT, D.P. DIVINCENZO, J.A. SMOLIN, AND W.K. WOOTTERS. *Mixed-state entanglement and quantum error correction*. Physical Review A, **54**, 3824 (1996), arXiv:quant-ph/9604024. 148, 149
- [BEMN10] G. BOROT, B. EYNARD, S.N. MAJUMDAR, AND C. NADAL. *Large deviations of the maximal eigenvalue of random matrices*. Arxiv preprint arXiv :1009.1945 (2010). xviii, 44, 48, 49, 53, 249, 250, 269, 299
- [BH98] E. BRÉZIN AND S. HIKAMI. *Universal singularity at the closure of a gap in a random matrix theory*. Physical Review E, **57**, 4140 (1998), arXiv:cond-mat/9804023. 108, 112
- [BIPZ78] E. BRÉZIN, C. ITZYKSON, G. PARISI, AND J.B. ZUBER. *Planar diagrams*. Communications in Mathematical Physics, **59**, 35–51 (1978). 40, 208
- [BK04] P.M. BLEHER AND A.B.J. KUIJLAARS. *Random matrices with external source and multiple orthogonal polynomials*. International Mathematics Research Notices, **2004**, 109 (2004), arXiv:math-ph/0307055. 108, 112, 113
- [BK07] P.M. BLEHER AND A.B.J. KUIJLAARS. *Large  $n$  limit of Gaussian random matrices with external source, part III : double scaling limit*. Communications in mathematical physics, **270**, 481–517 (2007), arXiv:math-ph/0602064. 118

- [Bue66] H.F. BUECKNER. *On a class of singular integral equations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, **14**, 392–426 (1966). 107, 108, 119, 199
- [BW04] A.J. BRAY AND K. WINKLER. *Vicious walkers in a potential*. Journal of Physics A : Mathematical and General, **37**, 5493 (2004), arXiv:cond-mat/0403220. 61
- [CGG00] A. CAVAGNA, J.P. GARRAHAN, AND I. GIARDINA. *Index distribution of random matrices with an application to disordered systems*. Physical Review B, **61**, 3960 (2000), arXiv:cond-mat/9907296. 205, 220
- [CK03] J. CARDY AND M. KATORI. *Families of vicious walkers*. Journal of Physics A : Mathematical and General, **36**, 609 (2003), arXiv:cond-mat/0208228. 61
- [CSŻ06] V. CAPPELLINI, H.J. SOMMERS, AND K. ŻYCZKOWSKI. *Distribution of  $G$  concurrence of random pure states*. Physical Review A, **74**, 062322 (2006), arXiv:quant-ph/0605251. 159, 162
- [dG68] P.G. DE GENNES. *Soluble model for fibrous structures with steric constraints*. The Journal of Chemical Physics, **48**, 2257( March 1968). 57
- [DK93] M.R. DOUGLAS AND V.A. KAZAKOV. *Large  $N$  phase transition in continuum  $QCD_2$* . Physics letters B, **319**, 219–230 (1993), arXiv:hep-th/9305047. 229
- [DM06] D.S. DEAN AND S.N. MAJUMDAR. *Large deviations of extreme eigenvalues of random matrices*. Physical review letters, **97**, 160201 (2006), arXiv:cond-mat/0609651. 43, 49, 52, 250, 251
- [DM08] D.S. DEAN AND S.N. MAJUMDAR. *Extreme value statistics of eigenvalues of Gaussian random matrices*. Physical Review E, **77**, 041108 (2008), arXiv:0801.1730. 23, 43, 49, 52, 250, 251
- [DV11] L. DUMAZ AND B. VIRÁG. *The right tail exponent of the Tracy-Widom-beta distribution*. Arxiv preprint arXiv :1102.4818 (2011). 47
- [Dys62] F.J. DYSON. *The Threefold Way. Algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics*. J. Math. Phys., **3**, 1199–1215 (1962). 4
- [Ede88] A. EDELMAN. *Eigenvalues and Condition Numbers of Random Matrices*. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, **9**, 543 (1988). 89
- [EG95] J.W. ESSAM AND A.J. GUTTMANN. *Vicious walkers and directed polymer networks in general dimensions*. Phys. Rev. E, **52**, 5849–5862 (1995). 61
- [Ein03] T.L. EINSTEIN. *Applications of ideas from random matrix theory to step distributions on “misoriented” surfaces*. In Annales Henri Poincaré, volume 4, p. S 811–824. Springer, (2003). 60, 61
- [Fis84] M.E. FISHER. *Walks, walls, wetting, and melting*. Journal of Statistical Physics, **34**, 667–729 (1984). 57, 58, 59, 61, 77
- [FMP<sup>+</sup>08] P. FACCHI, U. MARZOLINO, G. PARISI, S. PASCAZIO, AND A. SCARDICCHIO. *Phase transitions of bipartite entanglement*. Physical Review Letters, **101**, 50502 (2008), arXiv:0712.0015. 159, 162

- [FMS11] P.J. FORRESTER, S.N. MAJUMDAR, AND G. SCHEHR. *Non-intersecting brownian walkers and yang–mills theory on the sphere*. Nuclear Physics B, **844**, 500–526 (2011), arXiv:1009.2362. 230
- [For93] P.J. FORRESTER. *The spectrum edge of random matrix ensembles*. Nuclear Physics B, **402**, 709 – 728 (1993). 46
- [FP06] P. FERRARI AND M. PRAEHOFFER. *One-dimensional stochastic growth and Gaussian ensembles of random matrices*. In Markov Processes Relat. Fields, editor, Inhomogeneous Random Systems 2005, volume 12, p. 203–234, (2006). 61
- [Fyo05] YAN FYODOROV. *Recent Perspectives in Random Matrix Theory and Number Theory*, chapter Introduction to the random matrix theory : Gaussian Unitary Ensemble and beyond, p. 31–78. Cambridge University Press, London Mathematical Society Lecture Note Series edition, (2005). 35
- [Gir07] O. GIRAUD. *Distribution of bipartite entanglement for random pure states*. Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical, **40**, 2793 (2007), arXiv:quant-ph/0611285. 162
- [GM94] D.J. GROSS AND A. MATYTSIN. *Instanton induced large  $N$  phase transitions in two-and four-dimensional QCD*. Nuclear Physics B, **429**, 50–74 (1994), arXiv:hep-th/9404004. 228, 229, 230, 231, 243
- [Gne43] B. GNEDENKO. *Sur la distribution limite du terme maximum d’une série aléatoire*. The annals of Mathematics 2nd Ser., **44**, 423–453 (1943). 44
- [Gum58] E.J. GUMBEL. *Statistics of Extremes*. Columbia University Press, NY, (1958). 44
- [GV85] I. GESSEL AND G. VIENNOT. *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*. Advances in mathematics, **58**, 300–321 (1985). 62
- [GW80] D.J. GROSS AND E. WITTEN. *Possible third-order phase transition in the large- $N$  lattice gauge theory*. Physical Review D, **21**, 446–453 (1980). 229
- [Hal98] M.J.W. HALL. *Random quantum correlations and density operator distributions*. Physics Letters A, **242**, 123–129 (1998), arXiv:quant-ph/9802052. 157
- [HF84] D.A. HUSE AND M.E. FISHER. *Commensurate melting, domain walls, and dislocations*. Physical Review B, **29**, 239 (1984). 61
- [HLW04] P. HAYDEN, D.W. LEUNG, AND A. WINTER. *Aspects of generic entanglement*. Communications in Mathematical Physics, **265**, 95–117 (2004), arXiv:quant-ph/0407049. 162
- [HM80] S.P. HASTINGS AND J.B. MCLEOD. *A boundary value problem associated with the second Painlevé transcendent and the Korteweg-de Vries equation*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, **73**, 31–51 (1980). 46
- [IZ80] C. ITZYKSON AND J.B. ZUBER. *The planar approximation. II*. Journal of Mathematical Physics, **21**, 411 (1980). 113
- [Jam64] A.T. JAMES. *Distributions of matrix variates and latent roots derived from normal samples*. The Annals of Mathematical Statistics, **35**, 475–501 (1964). 21

- [Joh00] K. JOHANSSON. *Shape fluctuations and random matrices*. Communications in mathematical physics, **209**, 437–476 (2000), [arXiv:math/9903134](#). 45, 49
- [Joh01] I.M. JOHNSTONE. *On the distribution of the largest eigenvalue in principal components analysis*. Annals of Statistics, **29**, 295–327 (2001). 45, 49
- [Joh02] K. JOHANSSON. *Non-intersecting paths, random tilings and random matrices*. Probability theory and related fields, **123**, 225–280 (2002), [arXiv:math.PR/0011250](#). 61
- [KM59] S. KARLIN AND J. MCGREGOR. *Coincidence probabilities*. Pacific J. Math, **9**, 1141–1164 (1959). 62
- [Kos89] I.K. KOSTOV.  *$O(n)$  vector model on a planar random lattice : spectrum of anomalous dimensions*. Mod. Phys. Lett. A, **4**, 217 (1989). 188
- [Kra06] W. KRAUTH. *Statistical Mechanics : Algorithms and Computations*. "Oxford Master Series in statistical, computational, and theoretical physics". Oxford University Press, (2006). 275
- [KT02] M. KATORI AND H. TANEMURA. *Scaling limit of vicious walks and two-matrix model*. Phys. Rev. E, **66**, 011105 (2002), [arXiv:cond-mat/0203549](#). 62
- [KTNK03] M. KATORI, H. TANEMURA, T. NAGAO, AND N. KOMATSUDA. *Vicious walks with a wall, noncolliding meanders, and chiral and Bogoliubov-de Gennes random matrices*. Phys. Rev. E, **68**, 021112 (2003), [arXiv:cond-mat/0303573](#). 62
- [Lin73] B. LINDSTRÖM. *On the vector representations of induced matroids*. Bulletin of the London Mathematical Society, **5**, 85 (1973). 62
- [Lub78] E. LUBKIN. *Entropy of an  $n$ -system from its correlation with a  $k$ -reservoir*. Journal of Mathematical Physics, **19**, 1028 (1978). 162
- [MBL08] S.N. MAJUMDAR, O. BOHIGAS, AND A. LAKSHMINARAYAN. *Exact minimum eigenvalue distribution of an entangled random pure state*. Journal of Statistical Physics, **131**, 33–49 (2008), [arXiv:0711.0677](#). 162
- [Meh91] M.L. MEHTA. *Random matrices*. Academic Press, 2nd edition edition, (1991). 4, 10, 23, 38, 233
- [MNSV09] S.N. MAJUMDAR, C. NADAL, A. SCARDICCHIO, AND P. VIVO. *Index Distribution of Gaussian Random Matrices*. Physical Review Letters, **103**, 220603 (2009), [arXiv:0910.0775](#). xviii, 203, 299
- [MNSV11] S.N. MAJUMDAR, C. NADAL, A. SCARDICCHIO, AND P. VIVO. *How many eigenvalues of a Gaussian random matrix are positive ?* Physical Review E, **83**, 041105 (2011), [arXiv:1012.1107](#). xviii, 203, 299
- [Mos75] J. MOSER. *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*. Advances in mathematics, **16**, 197–220 (1975). 85
- [MP67] V.A. MARČENKO AND L.A. PASTUR. *Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices*. Mathematics of the USSR-Sbornik, **1**, 457 (1967). 32

- [MV09] S.N. MAJUMDAR AND M. VERGASSOLA. *Large deviations of the maximum eigenvalue for Wishart and Gaussian random matrices*. Physical review letters, **102**, 060601 (2009), arXiv:0811.2290. 43, 49, 53, 54, 242, 251
- [NC00] M.A. NIELSEN AND I.L. CHUANG. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, (2000). 135
- [NM09] C. NADAL AND S.N. MAJUMDAR. *Nonintersecting Brownian interfaces and Wishart random matrices*. Physical Review E, **79**, 061117 (2009), arXiv:0903.1494. xvi, 75, 76, 77, 78, 86, 92, 102, 300
- [NM11] C. NADAL AND S.N. MAJUMDAR. *A simple derivation of the Tracy–Widom distribution of the maximal eigenvalue of a Gaussian unitary random matrix*. J. Stat. Mech., p. P04001 (2011), arXiv:1102.0738. xviii, 44, 45, 49, 54, 227, 228, 299
- [NMV10] C. NADAL, S.N. MAJUMDAR, AND M. VERGASSOLA. *Phase transitions in the distribution of bipartite entanglement of a random pure state*. Physical Review Letters, **104**, 110501 (2010), arXiv:0911.2844. xviii, 159, 301
- [NMV11] C. NADAL, S.N. MAJUMDAR, AND M. VERGASSOLA. *Statistical distribution of quantum entanglement for a random bipartite state*. Journal of Statistical Physics, **142**, 403–438 (2011), arXiv:1006.4091. xviii, 159, 286, 301
- [OSŻ10] V.A. OSIPOV, H.J. SOMMERS, AND K. ŻYCZKOWSKI. *Random Bures mixed states and the distribution of their purity*. Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical, **43**, 055302 (2010), arXiv:0909.5094. 188, 192, 194
- [Pag93] D.N. PAGE. *Average entropy of a subsystem*. Phys. Rev. Lett., **71**, 1291–1294 (1993), arXiv:gr-qc/9305007. 159, 161, 162, 163
- [PS90] V. PERIWAL AND D. SHEVITZ. *Unitary-matrix models as exactly solvable string theories*. Physical Review Letters, **64**, 1326–1329 (1990). 229
- [RCH<sup>+</sup>72] F. RAHN, H.S. CAMARDA, G. HACKEN, W.W. HAVENS JR, H.I. LIOU, J. RAINWATER, M. SLAGOWITZ, AND S. WYNCHANK. *Neutron Resonance Spectroscopy. X*. Physical Review C, **6**, 1854 (1972). 4
- [RE05] H.L. RICHARDS AND T.L. EINSTEIN. *Beyond the Wigner distribution : Schrödinger equations and terrace width distributions*. Phys. Rev. E, **72**, 016124 (2005). 60
- [RY99] D. REVUZ AND M. YOR. *Continuous Martingales and Brownian Motion (3rd edition)*. Springer, (1999). 64
- [Sen96] S. SEN. *Average entropy of a subsystem*. Phys. Rev. Lett., **77**, 1–3 (1996), arXiv:hep-th/9601132. 161
- [SMCRF08] G. SCHEHR, S.N. MAJUMDAR, A. COMTET, AND J. RANDON-FURLING. *Exact distribution of the maximal height of  $p$  vicious walkers*. Physical review letters, **101**, 150601 (2008), arXiv:0807.0522. 60
- [Smi02] L.I. SMITH. *A tutorial on principal components analysis*. <http://users.ecs.soton.ac.uk/hbr03r/pa037042.pdf> (2002). 20



- [SZ03] H.J. SOMMERS AND K. ŻYCZKOWSKI. *Bures volume of the set of mixed quantum states*. Journal of Physics A : Mathematical and General, **36**, 10083 (2003), arXiv:quant-ph/0304041. 157
- [SZ04] H.-J. SOMMERS AND K. ŻYCZKOWSKI. *Statistical properties of random density matrices*. Journal Phys. A : Math. Gen., **37**, 8457 (2004), arXiv:quant-ph/0405031. 189, 192, 193
- [Tri85] F.G. TRICOMI. *Integral equations*. Dover publications, (1985). 39
- [TW94] C.A. TRACY AND H. WIDOM. *Level-spacing distributions and the Airy kernel*. Communications in Mathematical Physics, **159**, 151–174 (1994), arXiv:hep-th/9211141. 38, 39, 43, 45, 46, 228, 243
- [TW96] C.A. TRACY AND H. WIDOM. *On orthogonal and symplectic matrix ensembles*. Communications in Mathematical Physics, **177**, 727–754 (1996), arXiv:solv-int/9509007. 39, 43, 45, 46, 47, 48, 228, 243
- [VP98] V. VEDRAL AND M.B. PLENIO. *Entanglement measures and purification procedures*. Phys. Rev. A, **57**, 1619–1633 (1998), arXiv:quant-ph/9707035. 147, 149, 150, 151
- [Wad80] S.R. WADIA.  *$N = \infty$  phase transition in a class of exactly soluble model lattice gauge theories*. Physics Letters B, **93**, 403–410 (1980). 229
- [Wal04] D. WALES. *Energy Landscapes : Applications to Clusters, Biomolecules and Glasses*. Cambridge University Press, Cambridge Molecular Science edition, (2004). 204
- [Wig51] E.P. WIGNER. *On the statistical distribution of the widths and spacings of nuclear resonance levels*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **47**, 790–798 (1951). xiii, 3
- [ZS01] K. ŻYCZKOWSKI AND H.-J. SOMMERS. *Induced measures in the space of mixed quantum states*. Journal of Physics A : Math. Gen., **34**, 7111 (2001), arXiv:quant-ph/0012101. 161

---

---

## Mes articles

---

- [NM09] C. NADAL AND S.N. MAJUMDAR. *Nonintersecting Brownian interfaces and Wishart random matrices*. Physical Review E, **79**, 061117 (2009), arXiv:0903.1494. xvi, 75, 76, 77, 78, 86, 92, 102, 300
- [MNSV09] S.N. MAJUMDAR, C. NADAL, A. SCARDICCHIO, AND P. VIVO. *Index Distribution of Gaussian Random Matrices*. Physical Review Letters, **103**, 220603 (2009), arXiv:0910.0775. xviii, 203, 299
- [NMV10] C. NADAL, S.N. MAJUMDAR, AND M. VERGASSOLA. *Phase transitions in the distribution of bipartite entanglement of a random pure state*. Physical Review Letters, **104**, 110501 (2010), arXiv:0911.2844. xviii, 159, 301
- [BEMN10] G. BOROT, B. EYNARD, S.N. MAJUMDAR, AND C. NADAL. *Large deviations of the maximal eigenvalue of random matrices*. Arxiv preprint arXiv :1009.1945 (2010). xviii, 44, 48, 49, 53, 249, 250, 269, 299
- [NMV11] C. NADAL, S.N. MAJUMDAR, AND M. VERGASSOLA. *Statistical distribution of quantum entanglement for a random bipartite state*. Journal of Statistical Physics, **142**, 403–438 (2011), arXiv:1006.4091. xviii, 159, 286, 301
- [MNSV11] S.N. MAJUMDAR, C. NADAL, A. SCARDICCHIO, AND P. VIVO. *How many eigenvalues of a Gaussian random matrix are positive ?* Physical Review E, **83**, 041105 (2011), arXiv:1012.1107. xviii, 203, 299
- [NM11] C. NADAL AND S.N. MAJUMDAR. *A simple derivation of the Tracy–Widom distribution of the maximal eigenvalue of a Gaussian unitary random matrix*. J. Stat. Mech., p. P04001 (2011), arXiv:1102.0738. xviii, 44, 45, 49, 54, 227, 228, 299