Analyse et rectifiabilité dans les espaces métriques singuliers

Vincent Munnier

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 7 Août 2006

Présentée par

MUNNIER Vincent

Thèse dirigée par **PAJOT Hervé**

préparée au sein de **l'Institut Fourier, UMR 5582 CNRS-UJF**
et de **l'école doctorale, MSTII-UFR IMAG**

Analyse et rectifiabilité dans les espaces métriques à géométrie singulière

Thèse soutenue publiquement le **14 Septembre 2011**,
devant le jury composé de :

BALOGH Zoltàn
Professeur au Mathematisches Institut (Berne) en Suisse -Rapporteur
LANCIEN Gilles
Professeur à l'UFC (Besançon) -Rapporteur
BESSON Gérard
Directeur de recherche à l'UJF (Grenoble) -Examinateur
PANSU Pierre
Professeur à l'université Paris 11 (Orsay) -Examinateur
RUSS Emmanuel
Professeur à l'UJF (Grenoble) -Examinateur
PAJOT Hervé
Professeur à l'UJF (Grenoble) -Directeur de thèse

Table des matières

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à Hervé PAJOT pour avoir accepté de devenir mon directeur de thèse et pour m'avoir initié à cette fabuleuse expérience qu'est la recherche. Il a su guider mes recherches et m'a soutenu dans les périodes de doutes. Je le remercie aussi pour toutes les passionnantes discussions mathématiques que nous avons eues dans les endroits les plus insolites (la gare de Gières ou les couloirs de l'Institut Fourier) ainsi que pour son admirable patience dans les moments où l'avancée de mes travaux stagnait.

Je remercie Gilles LANCIEN d'avoir accepté de devenir l'un de mes rapporteurs et pour l'acceuil chaleureux qu'il m'a fait lorsque je suis allé exposer, pour la première fois, à Besançon.

I am very grateful to Zoltàn BALOGH for being one of my reviewers. It is a great honor to meet him for the first time.

Je remercie Gérard BESSON, Emmanuel RUSS et Pierre PANSU pour l'honnuer qu'ils me font en acceptant d'êtres membres de mon jury.

Je tiens à remercier l'Institut Fourier qui m'a acceuilli dans les meilleures conditions pendant ces quatre années de thèse. J'envoie une pensée amicale à l'ensemble des thésards de l'Institut Fourier.

Je voudrais remercier Guillaume POLY et Dominique MALICET -qui font leurs thèses à Paris- pour toutes les discussions que nous avons eues.

Enfin, je voudrais remercier ma famille notamment mes parents pour leur soutien constant. Je tiens à remercier mon frère Christophe pour les corrections d'anglais qu'il m'a suggérées.

Introduction générale

Le but de cette thèse est d'étudier des propriétés fines de différentiabilité de certaines classes d'applications sur les espaces métriques mesurés. Une hypothèse cruciale pour généraliser un certain type d'analyse valide dans les espaces euclidiens est la condition de doublement de la mesure supportée par l'espace métrique en question. L'autre hypothèse cruciale est la donnée d'inégalités de Poincaré sur notre espace métrique. Sous ces conditions, on s'intéressera principalement à l'extension d'une théorie de la différentiation valide dans de tels espaces. Une fois un calcul au premier ordre établi, on l'appliquera pour caractériser une généralisation des espaces de Sobolev sur les espaces métriques.

Il est à noter que l'analyse dans les espaces métriques PI est très féconde. En effet, la présence d'inégalités de Poincaré sur un espace métrique permet de développer une théorie des applications quasi-conformes dont une des pierres angulaires de cette théorie est l'article [**HeiK**]. Les inégalités de Poincaré apparaissent, de manière plus surprenante, en théorie géométrique des groupes. Elles permettent d'établir des théorèmes de rigidité sur les bords de groupes hyperboliques comme par exemple dans [**BP1**] ou [**BP2**]. Ou plus récemment dans [**Kl**], ces inégalités interviennent pour retrouver un théorème de Gromov sur les groupes à croissance polynomiale ou virtuellement nilpotents. De plus, la théorie de la différentiabilité a des applications aux problèmes de rectifiabilité. En effet, on peut, grâce au théorème de Rademacher dans le cadre euclidien, donner comme définition de la rectifiabilité euclidienne (ou classique) d'un ensemble mesurable A d'admettre en presque tout point de A un plan tangent. Il est à noter que la notion de différentiation métrique -établie dans [**AK**]- permet de developper une théorie de la rectifiabilité prolongeant la rectifiabilité euclidienne. Cependant, cette théorie n'est pas applicable dans le cadre du groupe d'Heisenberg. En effet, la théorie classique de la rectifiabilité des ensembles de dimension de Hausdorff plus grande que 2 est invalide dans le groupe d'Heisenberg à cause du manque de commutativité de ce dernier. Ce dernier point est plutôt flou et sera précisé dans la section concernant la description du groupe d'Heisenberg. Heureusement, même dans ce cadre, une théorie de la rectibialité des ensembles de dimension 1 (qui sont essentiellement des continua de courbes lipschiziennes et horizontales) reste encore valable. Enfin, les théorèmes de différentiation ou les théorèmes d'extension permettent d'obtenir des formules de l'aire ou de la co-aire pour des applications bien moins régulières que lipschiztiennes. En effet, grâce aux idées présentes dans [**EvGa**], on peut établir des théorèmes de changement de variables pour certaines applications des espaces de Sobolev euclidiens.

Nous décrivons sommairement le contenu de chaque chapitre de la thèse.

Dans le premier chapitre, on étudiera des exemples classiques qui sont ceux de l'espace euclidien et du groupe d'Heisenberg. Nous rappellerons ce que nous entendons par inégalités de Poincaré et nous verrons que cette définition est suffissamment souple pour être généralisée au cadre des espaces métriques mesurés. On rappellera dans $\mathbf{R}^n$ des théorèmes classiques de différentiation. Plus précisément, on donnera une preuve d'un théorème de Rademacher pour des fonctions à valeurs dans les espaces de Banach réflexifs. Cela nous permettra d'introduire la notion d'intégrale de Bochner (qui est une généralisation naturelle de l'intégrale de Lebesgue pour des fonctions à valeurs dans des espaces de Banach) et nous permettra d'introduire la propriété de Radon-Nikodym. Ensuite, on montrera que $\mathbf{R}^n$ muni de sa métrique euclidienne et de la mesure de Lebesgue est un PI-espace au sens de [**Che**]. On déduira de cette propriété un théorème de différentiation -du à Calderón- pour les applications de $W^{1,p}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ pour $p > n$. Enfin, on montrera qu'il n'y a pas d'analogue du théorème de Rademacher pour les fonctions α-holderiennes avec $0 \leq \alpha < 1$. Le deuxième exemple est le groupe d'Heisenberg. On le présentera brièvement. En général, les théorèmes de différentiation permettent de donner des obstructions à certains types de plongements entre deux espaces métriques. En effet, grace au théorème de Rademacher, on montrera un principe de non-plongement bilipchitzien du groupe d'Heisenberg dans un espace de Banach L^p pour $p > 1$. La stratégie de la preuve est librement inspirée de l'article [**CK1**]. On présentera aussi des outils essentiels d'analyse harmonique tels que la fonction maximale d'Hardy-Littlewood,les inégalités aux bons λ ou encore les lemmes de recouvrement.

Dans le deuxième chapitre, on se propose d'exposer la notion de structure de différentiabilité forte sur un PI-espace. Cette notion, développée par J. Cheeger dans [**Che**], permet de valider un calcul au premier ordre pour les applications lipschitziennes à valeurs dans des espaces euclidiens. Cette notion de différentiabilité a été ensuite reprise dans [**BRZ**] pour établir un théorème de type Rademacher-Stepanov pour les applications mesurables entre PI-espaces et espaces euclidiens. Ce calcul au premier ordre a été ensuite généralisé pour des fonctions à valeurs dans des espaces de Banach satisfaisant une certaine propriété géométrique dans [**CK1**] (la propriété GFDA) puis dans [**CK4**] (la propriété RNP). Nous utiliserons ce formalisme et rappellerons toutes les définitions de géométrie des Banach nécéssaires pour pouvoir établir la Cheeger-différentiabilité des applications à régularité Sobolev surcritique (par rapport à la dimension homogène de l'espace métrique initialement considéré). La preuve repose sur un contrôle de la constante de Lipschitz ponctuelle supérieure d'une application de l'espace de Sobolev surcritique considéré. Les inégalités de Poincaré et les théorèmes de densité et de prolongement des applications lipschitziennes permettent de conclure.

Le troisième chapitre utilise le calcul au premier ordre ainsi établi pour caractériser les espaces de Sobolev généralisés de manière intrinsèque sous la condition de doublement global de la mesure et d'une inégalité de Poincaré uniforme sur les boules. On peut alors déduire d'une telle analyse des critères locaux pour détecter si des fonctions mesurables sont constantes ou non sur les espaces métriques. Ce type d'analyse prolonge celle menée pour donner des caractérisations intrinsèques des espaces de Sobolev. On retouve en partie des résultats établis dans [**Br2**] pour le cadre euclidien ainsi que des résultats de [**Mo**] dans le groupe d'Heisenberg.

Dans le quatrième chapitre, on expose quelques propriétés des espaces métriques satisfaisant des inégalités de Poincaré non uniformes en le centre et le rayon des boules. On discutera l'importance de la dépendance des inégalités de Poincaré en le centre des boules et en le rayon des boules. De cette discussion, on pourra déduire un nouveau critère pour reconnaître si une fonction mesurable est constante ou non. Malheureusement, bien que l'on ait gagné du point de vue analytique en ayant des inégalités de Poincaré affaiblies, on doit supposer des conditions topologiques supplémentaires sur l'espace métrique en jeu.

Dans le cinquième chapitre, on généralise le résultat du deuxième chapitre. On obtient, plus précisément, les prémices d'un théorème de type Rademacher-Stepanov dans les PI-espaces pour des fonctions à valeurs dans les espaces de Banach RNP (qui est d'ailleurs l'ensemble maximal pour cette propriété de différentiabilité). On prouve également -grâce au théorème de Hahn-Banach et d'un chaînage de boules- une généralisation facile du théorème principal de [**KZ**] stipulant que les exposants admissibles dans les inégalités de Poincaré sont ouverts dans $[1, +\infty[$. Enfin, notre théorème de différentiation repose essentiellement sur l'utilisation d'un théorème de théorie descriptive des ensembles établi dans [**CK4**] et d'un affinement de la méthode utilisée dans le deuxième chapitre.

Enfin, le dernier chapitre expose la construction d'un contre-exemple lié à un résultat mineur sur les séries de Fourier.

Toutes les précisions historiques et techniques concernant le contenu d'un chapitre sont exposés dans la partie **Introduction** de ce dernier. Dans les parties introductives des chapitres 2, 3, 5 et 6 sont présentés les résultats que j'ai obtenus durant ma thèse. Le chapitre 4, quand à lui, est une digression possible sur les espaces métriqes PI. Je tiens à préciser que le choix des langues dans cette thèse est purement fonctionnelle. Schématiquement, la partie de la thèse rédigée en français fixe le cadre de travail et illustrent par des exemples les notions utilisées. J'y récapitule une grande partie de la littérature existante sur le type d'analyse dans les espaces métriques que j'aborde. Contrairement à la partie en anglais qui contient de nouveaux résultats s'appuyant sur des théorèmes récents.

CHAPITRE 1

Analyse dans les espaces métriques doublants

1.1. Introduction

Nous allons dans cette partie donner la définition d'un espace métrique PI et montrer que certains exemples classiques d'espaces métriques jouissent de cette propriété. De plus, nous verrons des conséquences topologiques générales sur les espaces métriques supportant des inégalités de Poincaré uniformes sur les boules. Enfin, nous montrerons -sur les exemples en question- comment utiliser cette dernière notion pour déduire soit des théorèmes de différentiation pour des classes d'applications peu régulières soit des obstructions à certains types de plongements entre les espaces métriques.

1.2. Espaces PI

On va fixer un cadre important où l'analyse euclidienne peut-être naturellement généralisée, celui des espaces métriques mesurés doublants, complets et supportant des inégalités de Poincaré. Nous allons préciser cette dernière notion dans la sous-section qui suit.

1.2.1. Définitions et premières propriétés. Dans cette partie, on introduit toutes les notions nécessaires pour parler de Cheeger-différentiabilité.

Soit X un espace métrique complet, muni d'une mesure extérieure μ qui est aussi de Radon.

On notera $B_r(x) = B(x, r)$ la boule ouverte de rayon r centrée en x de l'espace métrique X.

Définition 1. *Une mesure μ est doublante s'il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $r > 0$ et pour tout x appartenant à X :*

$$\mu(B_{2r}(x)) \leq \beta\mu(B_r(x)).$$

Un exemple typique de mesure doublante est une mesure Ahlfors-regulière. Rappelons qu'une mesure μ sur un espace métrique (X, d) est Ahlfors-régulière de dimension Q s'il existe une constante $C > 0$ telle que $C^{-1}R^Q\mu(B(x, R)) \leq CR^Q$ pour tout x appartenant à E et tout R dans $]0, \mathrm{diam}X[$. Notons qu'alors la dimension de Hausdorff de X est Q. Ces mesures ont un comportement comparable à celui de la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^Q$. Cette condition de doublement joue un rôle particulier en analyse. Un espace métrique muni d'une mesure doublante s'appelle un espace de type homogène au sens de Coiffman et Weiss. Beaucoup de faits d'analyse harmonique dans les espaces euclidiens ont leurs analogues dans ces espaces. Par exemple, la fonction maximale de Hardy-Littlewood est bornee dans L^p, $1 < p < +\infty$. Pour plus de détails pour l'analyse dans les espaces homogènes, on peut se référer à [**Hei**].

On peut énoncer une propriété topologique importante des espaces doublants et complets.

Proposition 2. *Si une mesure μ portée par un espace métrique complet (X,d) est doublante et non dégénérée, c'est-à-dire que la μ mesure d'une boule non réduite à un point est strictement positive, alors (X,d) est propre (les boules sont relativement compactes).*

Démonstration :

Choisissons une boule $B_{r_0}(x_0) = B_0$ avec $r_0 > 0$ et x_0 un point de X. Comme X est complet, il suffit de montrer que $\overline{B_0}$ est précompacte. Fixons $\varepsilon > 0$. Alors, on a :

$$\overline{B_0} \subset \bigcup_{x \in B_0} B_\varepsilon(x).$$

Par le lemme de 5-recouvrement de Vitali (dont on peut trouver une preuve dans [**Hei**]), il existe une famille I dénombrable et une suite $(x_i)_{i\in I}$ de points de B_0 tels que :

i) $\forall i, i' \in I : x_i, x_{i'} \in B_0$ et $B_\varepsilon(x_i) \cap B_\varepsilon(x_{i'}) = \emptyset$

ii) $\overline{B_0} \subset \bigcup_{x\in B_0} B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{i\in I} B_{5\varepsilon}(x_i)$

Ensuite, on obtient la chaîne d'inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mu(\overline{B_0}) &\leq \sum_{i\in I} \mu(B_{5\varepsilon}(x_i)) \text{ par le point } ii) \\ &\leq C \sum_{i\in I} \mu(B_\varepsilon(x_i)) \text{ car } \mu \text{ est doublante} \\ &\leq C\mu(B_{r_0+\varepsilon}(x_0)) < +\infty \text{ par le point } i) \end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que I soit un ensemble infini. Alors par le calcul précédent, il existe une suite (i_n) telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(B_\varepsilon(x_{i_n})) = 0.$$

Comme μ est doublante, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que :

$$\mu(B_\varepsilon(x_{i_n})) \geq C_\varepsilon \mu(B_0).$$

La non dégénérescence de μ donne $\mu(B_0) > 0$. Ainsi, lorsque n tend vers l'infini, on obtient une contradiction et donc, I est un ensemble fini. (X,d) est donc bien un espace propre.

1.2.2. Intégrale de Bochner. Par la suite, l'intégrale considérée sur les espaces de Banach sera l'intégrale de Bochner. Pour des propriétés de cette intégrale, on peut se référer à l'article [**HKST**]. Nous rappellons dans cette partie toutes les propriétés essentielles de l'intégrale de Bochner. Considérons (X,d,μ) un espace métrique mesuré et E un espace de Banach muni de la norme $||.||$. L'intégrale de Bochner est une généralisation naturelle de l'intégrale de Lebesgue lorsque les fonctions sont à valeurs dans des espaces de Banach.

Définition 3. *Nous appelerons une fonction $f : X \to E$* ***étagée*** *s'il existe des familles finies de vecteurs $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ de E et des ensembles $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ disjoints et mesurables* *inclus dans* X *tels que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} e_i \chi_{E_i}.$$

Définition 4. *On dira qu'une application* $f : X \to E$ *est mesurable s'il est la limite* μ*-pp d'une suite de fonctions étagées.*

En fait, on a l'équivalence suivante (cette équivalence constitue d'ailleurs le théorème de mesurablité de Pettis dont on peut trouver une preuve dans [**HKST**]). Une application $f : X \to E$ est mesurable si et seulement si $f : X \to E$ est essentiellement séparable (c'est-à-dire qu'il existe un ensemble mesurable $Z \subset X$ tel que $\mu(Z) = 0$ et $f(X \cap Z^c)$ soit inclus dans un sous-espace séparable de E) et faiblement mesurable (c'est-à-dire que pour tout forme linéaire π appartenant à E^* : $\pi(f)$ est mesurable au sens usuel, en tant que fonction à valeurs réelles).

Définition 5. *Soit* $f : X \to E$ *une application mesurable. On dit que* f *est Bochner intégrable s'il est la limite d'une suite de fonctions étagées* (f_ε) *telles que* f_ε *appartient à* $L^1(X, E)$ *(avec* $||f_\varepsilon||_1 = \int_X ||f_\varepsilon|| d\mu = \sum_{i \in I_\varepsilon} \mu(E_i^{(\varepsilon)}) e_i^{(\varepsilon)}$ *où* I_ε *est un ensemble fini) et* $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_X ||f - f_\varepsilon|| d\mu = 0$*. Sous ces conditions, on définit l'intégrale de Bochner de* f *pour tout ensemble mesurable* $Z \subset X$ *par :*

$$\int_Z f d\mu = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_Z f_\varepsilon d\mu.$$

Il est facile de voir que l'intégrale d'une fonction Bochner intégrable f est indépendante du choix de la suite d'applications intégrables et étagées qui convergent au sens L^1 vers f.

On impose que deux applications mesurables sont égales si elles diffèrent sur un ensemble mesurable de μ-mesure nulle (ou de manière équivalente, on considère les classes d'équivalence d'applications égales presque partout). Ainsi, l'espace $L^1(X, E)$ consiste en l'ensemble des applications Bochner intégrables et devient complet muni de la norme $||.||_1$ définie pour une application $f : X \to E$ Bochner intégrable par :

$$||f||_1 = \int_X ||f|| d\mu.$$

On peut aussi définir l'espace $L^1_{loc.}(X, E)$ comme l'ensemble des applications mesurables $f : X \to E$ tel que $||f||$ appartient à $L^1_{loc.}(X, \mathbf{R})$. La construction des espaces $L^p(X, E)$ (pour $p > 1$) se fait de manière analogue et ces espaces sont munis d'une norme $||.||_p$ les rendant complet dont la définition est une adaptation directe du cas où les applications sont à valeurs réelles. On peut aussi en construire une version locale (pour $1 < p < +\infty$).

Par construction de l'intégrale de Bochner, les formes linéaire continues (les éléments de E^*) commutent avec cette intégrale. Cette remarque permet de voir que l'inégalité triangulaire s'applique aux intégrales de fonctions à valeurs banachiques. En effet, soit Φ appartentant à E^*. Considérons $f : X \to E$ une application Bochner-intégrable. Soit (f_n) une suite de fonction étagées convergeant dans $L^1(X, E)$ vers f. Alors, comme les applications f_n sont étagés, on a :

$$\Phi(\int_X f_n) = \int_X \Phi(f_n).$$

Comme Φ est une forme linéaire continue, on a d'un coté que :

$$\lim_{n\to+\infty} \Phi(\int_X f_n) = \Phi(\int_X f).$$

De l'autre, par convergence dominée, on obtient que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X \Phi(f_n) = \int_X \Phi(f).$$

D'où la relation de commutation. Enfin, on a :

$$|| \int_X f|| \leq \int_X ||f||$$

lorsque f est Bochner-intégrable. En effet, soit Φ un élément de E^*. On a par le premier point que :

$$|\Phi(\int_X f)| = |\int_X \Phi(f)| \leq |||\Phi||| \int_X ||f||.$$

Le théorème de Hahn-Banach appliqué au membre de gauche donne l'inégalité désirée. De plus, on peut remarquer lorsque la mesure μ est doublante que la fonction maximale d'Hardy-Littlewood est bornée L^1 dans L^1 faible. Ainsi, le théorème de différentiation de Lebesgue reste valable. Plus précisément, ce théorème stipule que lorsque f appartient à $L^1_{loc.}(X,E)$ alors on a pour μ-pp x de X :

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} ||f(y) - f(x)||d\mu(y) = 0.$$

On peut se référer à [**Hei**] pour une preuve du théorème de différentiation de Lebesgue.

1.2.3. Inégalités de Poincaré dans les espaces métriques.

Définition 6. *Une fonction $g : X \to \overline{\mathbf{R}^+}$ est appelée un gradient supérieur pour $f : X \to E$ (avec E un espace de Banach) si pour toute courbe rectifiable $c : [0,l] \to X$ paramétrée par la longueur d'arc, on a :*

$$|f(c(l)) - f(c(0))| \leq \int_0^l g(c(s))ds.$$

On peut remarquer que si f est lisse dans un espace euclidien, la longueur du gradient est un gradient supérieur et que c'est en fait le plus petit. De plus, si f est lipschitzienne, toute constante de Lipschitz raisonnable est un gradient supérieur. Enfin, un gradient supérieur existe toujours et n'est pas en général unique (on peut le modifier sur des ensembles de courbes de module nul).

Posons

$$f_{x,r} = \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f d\mu.$$

Définition 7. *On dit que X supporte une inégalité de Poincaré (faible) de type $(1,p)$ s'ils existent des constantes C, λ et τ telles que pour tout x appartenant à X et pour* *tout* $r > 0$ *alors pour toute fonction* f *dans* $L^1_{loc.}(X, E)$ *admettant un gradient supérieur* g *dans* $L^p_{loc.}(X, \overline{\mathbf{R}^+})$, *on a l'inégalité suivante :*

$$\frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f - f_{x,r}| d\mu \leq Cr \left(\frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_{\lambda r}(x)} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De plus, si μ est doublante alors, l'inégalité de Poincaré de type $(1, p)$ peut se réduire à :

$$\frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f - f_{x,r}| d\mu \leq C(\beta) r \left(\frac{1}{\mu(B_{\lambda r}(x))} \int_{B_{\lambda r}(x)} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Un choix possible pour $C(\beta)$ est alors $\tau\beta^l$ si $\lambda \leq 2^l$.

Par l'inégalité d'Holder, l'inégalité de type $(1, 1)$ est la plus forte. Sous certaines conditions géométriques sur X (par exemple, X est géodésique), on peut prendre $\tau = 1$. On peut se référer à [**HK**] ou encore à [**Hei**] pour des hypothèses géométriques précises (comme être un espace de Loewner par exemple). Il est aussi à noter que ce type d'inégalité joue un rôle particulier dans la théorie des applications quasi-conformes. On peut se référer à l'article [**HeiK**] pour plus de détails.

Définition 8. *Un espace PI est la donnée d'un espace métrique complet possédant une mesure de Radon doublante et vérifiant une inégalité de Poincaré de type* $(1, p)$.

Il y a beaucoup d'exemples d'espaces PI : les espaces euclidiens, les groupes de Carnot, les variétés à courbure de Ricci positive (si ces variétés possède la propriété du doublement du volume riemannien). De plus, il existe des espaces PI ayant une dimension de Haussdorf quelconque (les espaces de Bourdon-pajot ou les espaces de Laakso dont on peut trouver une construction dans [**BP1**] et [**La**] respectivement). La notion d'espaces PI est stable par passage à la limite au sens de Gromov-Hausdorff mesuré. Grâce à la proposition 2, on obtient ainsi en particulier qu'un espace PI est propre. De plus, de tels espaces sont quasi-convexes. C'est-à-dire qu'à une renormalisation près de la métrique initiale par une application quasi-conforme (et même bilipschitzienne), ces espaces deviennent géodésiques.

1.2.4. Quasiconvexité des espaces PI.

Les espaces PI sont quasi-convexes. C'est-à-dire qu'à une renormalisation près de la métrique initiale par une application quasi-conforme (et même bilipschitzienne), ces espaces deviennent géodésiques. Plus précisément, on a la proposition suivante.

Proposition 9. *Soit* (X, d, μ) *un espace PI tel que la mesure d'une boule non réduite à un point soit strictement positive. Alors* (X, d) *est quasi-convexe ; c'est à dire que pour tout* x, y *appartenant à* X, *il existe une courbe rectifiable joignant* x *à* y *de longueur plus petite que* $Cd(x, y)$ *où* C *est une constante ne dépendant que de la constante de doublement de* μ *et de la constante intervenant dans l'inégalité de Poincaré* $(1, p)$.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. On dit que x, y appartenant à X sont dans la même ε-composante s'il existe une suite finie de points $(z_i)_{i=0\ldots N}$ appartenant à X tels que $z_0 = x$, $z_N = y$ avec pour tout i appartenant à $\{0, \ldots, N-1\}$: $d(z_i, z_{i+1}) \leq \varepsilon$. La relation d'appartenance à une ε-composante définit une relation d'équivalence sur (X, d).

Soit C une ε-composante. Il existe un point z appartenant à C et par définition, C contient $B_\varepsilon(z)$. L'hypothèse faite sur μ implique que $\mu(C) > 0$.

Soient C_1, C_2 deux ε-composantes distinctes. Prenons x appartenant à C_1 et y appartenant à C_2. Comme il n'existe pas, en particulier, de courbes rectifiables joignant x à y alors un gradient supérieur pour $\mathbf{1}_{C_1}$ est 0 (par définition du gradient supérieur). Alors l'inégalité du gradient supérieur appliquée à $\mathbf{1}_{C_1}$ donne :

$$1 = |\mathbf{1}_{C_1}(x) - \mathbf{1}_{C_1}(y)| \leq 0.$$

On obtient donc une contradiction et (X, d) est ε-chainé (il n'existe qu'une seule ε-composante dans (X, d)).

Soit a appartenant à X. On peut alors définir $\rho_{a,\varepsilon}(z)$ par :

$$\rho_{a,\varepsilon}(z) = \inf_{z_i} \sum_{i=0}^{N-1} d(z_i, z_{i+1})$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des suites finies $(z_i)_{i=0\ldots N}$ d'éléments de X tels que $z_0 = a$, $z_N = z$ avec pour tout i appartenant à $\{0, \ldots, N-1\}$: $d(z_i, z_{i+1}) \leq \varepsilon$. On peut remarquer que $\rho_{a,\varepsilon}(a) = 0$ et que $(\rho_{a,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ est une famille croissante de fonctions mesurables donc converge ponctuellement dans $[0, +\infty[$ vers une fonction mesurable ρ_a lorsque ε tend vers 0. En fait, la famille de fonctions mesurables $(\rho_{a,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ est une famille de fonctions continues car si $d(z, z') \leq \varepsilon$ alors $|\rho_{a,\varepsilon}(z) - \rho_{a,\varepsilon}(z')| \leq d(z, z')$. En effet, soit $\varepsilon' > 0$ alors il existe une suite finie de points $(z_i)_{i=0\ldots N}$ appartenant à X tels que $z_0 = a$, $z_N = z$ avec

$$\sum_{i=0}^{N-1} d(z_i, z_{i+1}) \leq \rho_{a,\varepsilon}(z) + \varepsilon'.$$

On obtient donc pour tout $\varepsilon' > 0$:

$$\rho_{a,\varepsilon}(z') - \rho_{a,\varepsilon}(z) \leq \sum_{i=0}^{N-1} d(z_i, z_{i+1}) + d(z, z') - \sum_{i=0}^{N-1} d(z_i, z_{i+1}) + \varepsilon'.$$

En simplifiant l'expression précédente, en faisant tendre ε' vers 0 et en échangeant le rôle de z et z', on obtient l'inégalité voulue. Ainsi, un gradient supérieur pour $\rho_{a,\varepsilon}$ est la fonction constante 1.

Soit f une fonction L^1 à valeurs complexes admettant un gradient supérieur g. Soient x un point de X et $r > 0$. Par l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{\mu(B_{2r}(x))} \int_{B_{2r}(x)} f - \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f| &\leq \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f - \left(\frac{1}{\mu(B_{2r}(x))} \int_{B_{2r}(x)} f \right)| \\
&\leq \frac{\beta}{\mu(B_{2r}(x))} \int_{B_{2r}(x)} |f - \left(\frac{1}{\mu(B_{2r}(x))} \int_{B_{2r}(x)} f \right)| \\
&\leq C(\beta, \tau) r \left(\frac{1}{\mu(B_{2\lambda r}(x))} \int_{B_{2\lambda r}} g^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

On note $C(\beta,\tau)=C$. Ainsi, si x est un point de Lebesgue pour f alors en utilisant l'inégalité triangulaire et en sommant sur k les relations précédentes appliquées avec le rayon de la boule qui vaut $\frac{r}{2^k}$, on obtient :

$$|\frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)} f - f(x)| \leq Cr\,(M(g^p)(x))^{\frac{1}{p}}$$

où $M(g)(x)$ désigne la fonction maximale pour les boules centrées en x. En appliquant cette relation avec $f=\rho_{a,\varepsilon}$, $x=a$ et $g=1$, on obtient :

$$\int_{B_r(a)} \rho_{a,\varepsilon}(z)d\mu(z) \leq Cr\mu(B_r(a)).$$

Le lemme de Fatou permet de voir que $\rho(a)$ est $L^1(B_r(a),[0,+\infty[)$. De plus, la croissance de la famille de fonctions $(\rho_{a,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et le théorème de convergence dominée permet de voir que $\rho_{a,\varepsilon}$ converge dans $L^1(B_r(a),[0,+\infty[)$ vers ρ_a lorque ε tend vers 0. Ainsi, ρ_a est $L^1_{loc.}(X,[0,+\infty[)$ et donc μ-presque tout point de X est un point de Lebesgue pour ρ_a (car l'inégalité maximale de Hardy-Littlewood reste valable dans un espace doublant).

Soit b un point de X. Montrons que si $\rho_a(b)$ est finie alors il existe une courbe rectifiable joignant a à b.

Soit $\varepsilon'>0$. Soit $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante de nombres irrationnels tendant vers 0. Comme pour tout k, on a $\rho_{a,\varepsilon_k}(b)\leq\rho_a(b)$ alors il existe une suite $(z_i^k)_{i=0,\ldots,N(k)}$ vérifiant $z_0^k=a$, $z_{N(k)}^k=b$, $d(z_i^k,z_{i+1}^k)\leq\varepsilon_k$ et

$$\sum_{i=0}^{N(k)-1} d(z_i^k,z_{i+1}^k) \leq \rho_{a,\varepsilon_k}(b)+\frac{1}{k+1} \leq \rho_a(b)+\frac{1}{k+1}.$$

On prolonge la suite $(z_i^k)_{i=0,\ldots,N(k)}$ en une suite que l'on renomme $(z_i^k)_{i\in\mathbf{N}}$ qui coincide avec les $N(k)+1$ premiers termes de la suite précédente et qui stationne à b ensuite. On peut alors remarquer que pour tout i,k : z_i^k appartient à la boule $B_{\rho_a(b)+2}(a)$. On définit alors une application constante par morceaux $\gamma_k:[0,+\infty[\to B_{\rho_a(b)+2}(a)$ par

$$\gamma_k(t)=z_i^k \text{ si } t\in[i\varepsilon_k,(i+1)\varepsilon_k[.$$

Soit $(t_l)_{l\in\mathbf{N}}$ une énumération des rationnels de $[0,+\infty[$. Pour tout l, il existe une unique suite d'entiers (par la propriété des segments emboités dans $\mathbf{R}$) $(i_k^l)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que t_l appartient à $[i_k^l\varepsilon_k,(i_k^l+1)\varepsilon_k]$ et avec $\gamma_k(t_l)=z_{i_k^l}^k$. La relative compacité de $B_{\rho_a(b)+2}(a)$ (car l'hypothèse faite sur μ implique que les boules fermées sont compactes) permet par un procédé diagonal de Cantor d'avoir que pour tout l, $(z_{i_k^l}^k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers un point de l'adhérence de $B_{\rho_a(b)+2}(a)$ à une extraction près.

Par une inégalité triangulaire, on obtient pour tout t appartenant à $[0,+\infty[$:

$$d(\gamma_k(t),\gamma_{k'}(t)) \leq d(\gamma_k(t),\gamma_k(t_l))+d(\gamma_k(t_l),\gamma_{k'}(t_l))+d(\gamma_{k'}(t_l),\gamma_{k'}(t)).$$

On peut remarquer que pour tout k,t :

$$d(\gamma_k(t),\gamma_k(t_l)) \leq \varepsilon_k(\left[\frac{|t-t_l|}{\varepsilon_k}\right]+1) \leq |t-t_l|+\varepsilon_k.$$

Alors, on a pour tout t appartenant à $[0,+\infty[$:

$$d(\gamma_k(t),\gamma_{k'}(t)) \leq d(\gamma_k(t_l),\gamma_{k'}(t_l)) + 2|t-t_l| + \varepsilon_k + \varepsilon_{k'}.$$

Ainsi, en faisant tendre k,k' vers l'infini puis en utilisant le fait que la suite $(t_l)_{l\in\mathbf{N}}$ est dense dans $[0,+\infty[$, on obtient que $(\gamma_k(t))_{k\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans (X,d). Comme (X,d) est complet, on obtient que pour tout t : $\lim\limits_{k\to+\infty}\gamma_k(t)=\gamma(t)$ avec pour tout t, $\gamma(t)$ appartient à X et $\gamma(0)=a$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma(t)=b$ (car on peut se ramener par un changement de variables à paramétrer les γ_k sur $[0,1[$ que l'on prolonge naturellement par $\gamma_k(1)=b$).

Montrons que $\gamma:[0,+\infty[\to X$ est une application continue.
Soient t,t' deux éléments de $[0,+\infty[$. On a la majoration suivante :

$$\begin{aligned} d(\gamma(t),\gamma(t')) &\leq d(\gamma(t),\gamma_k(t)) + d(\gamma_k(t),\gamma_k(t')) + d(\gamma_k(t'),\gamma(t')) \\ &\leq d(\gamma(t),\gamma_k(t)) + d(\gamma(t'),\gamma_k(t')) + |t-t'| + \varepsilon_k. \end{aligned}$$

Ainsi, en faisant tendre k vers l'infini, on a que : γ est 1-lipschitzienne donc continue.
Notons $L(\gamma)$ la longueur de la courbe γ. Montrons que γ est une courbe de longueur finie.
Soient $(z_i)_{i=0,\ldots,N}$ une subdivision finie de $[0,+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(z_i),\gamma(z_{i+1})) &\leq \sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(z_i),\gamma_k(z_i)) + d(\gamma_k(z_i),\gamma_k(z_{i+1})) + d(\gamma_k(z_{i+1}),\gamma(z_i)) \\ &\leq 2N \max_{i=0,\ldots,N}\{d(\gamma(z_i),\gamma_k(z_i))\} + \rho_{a,\varepsilon_k}(b) + \frac{1}{k+1} \\ &\leq \rho_a(b) + \frac{1}{k+1} + 2N\max_{i=0,\ldots,N}\{d(\gamma(z_i),\gamma_k(z_i))\} \end{aligned}$$

En faisant tendre k vers l'infini puis en prenant le supremum sur toutes les subdivisions finies de $[0,+\infty[$, on a : $L(\gamma)\leq\rho_a(b)$. Ainsi, γ est une courbe rectifiable joignant a à b de longueur $\rho_a(b)$.

On va noter indifféremment toutes les constantes intervenant dans les calculs : C en ne conservant que les dépendances pertinentes par rapport à certains paramètres.

Soient x,y appartenant à $B_r(a)$ tels que $\rho_a(x)$ et $\rho_a(y)$ soient finis. Premièrement, on constate que les boules $B_{2r}(x)$ et $B_{2r}(y)$ contiennent la boule $B_r(a)$. Ensuite, les boules $B_r(x)$ et $B_r(y)$ sont incluses dans la boule $B_{2r}(a)$. Par l'inégalité de Poincaré appliquée à $\rho_{a,\varepsilon}$, on a :

$$\begin{aligned}
|\rho_{a,\varepsilon}(x) - \frac{1}{\mu(B_{2r}(a))}\int_{B_{2r}(a)} \rho_{a,\varepsilon}| &\leq |\rho_{a,\varepsilon}(x) - \frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)} \rho_{a,\varepsilon}| \\
&\quad + |\frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)} \rho_{a,\varepsilon}(z) - \frac{1}{\mu(B_{2r}(a))}\int_{B_{2r}(a)} \rho_{a,\varepsilon}| \\
&\leq Cr + \frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)} |\rho_{a,\varepsilon} - \left(\frac{1}{\mu(B_{2r}(a))}\int_{B_{2r}(a)} \rho_{a,\varepsilon}\right)| \\
&\leq Cr + \frac{\beta^2}{\mu(B_{2r}(a))}\int_{B_{2r}(a)} |\rho_{a,\varepsilon} - \left(\frac{1}{\mu(B_{2r}(a))}\int_{B_{2r}(a)} \rho_{a,\varepsilon}\right)| \\
&\leq Cr.
\end{aligned}$$

Ainsi, en faisant tendre ε vers 0, on obtient que :

$$|\rho_a(x) - \frac{1}{\mu(B_{2r}(a))}\int_{B_{2r}(a)} \rho_a| \leq Cr.$$

On procède de même avec y. Par une inégalité triangulaire, on obtient :

$$|\rho_a(x) - \rho_a(y)| \leq Cr.$$

En particulier, on a : $\rho_a(x) \leq Cr$.

Soit b un point de X. Notons $r = d(a,b)$. Comme ρ_a est $L^1_{loc.}(X, [0, +\infty[)$ alors, il existe z_1 appartenant à $B_{\frac{r}{2}}(b)$ tel que $\rho_a(z_1) \leq 2Cr$ (car $z_1 \in B_{2r}(a)$). Ainsi, il existe une courbe rectifiable c_1 joignant a à z_1 de longueur $\rho_a(z_1) \leq 2Cr$. Notons $\gamma_1 : [0,1] \to X$ la paramétrisation par la longueur d'arc de c_1. Alors, on a : $|\gamma_1(t) - \gamma_1(t')| = \rho_a(z_1)|t-t'| \leq 2Cr|t-t'|$.

Comme ρ_{z_1} est $L^1_{loc.}(X, [0, +\infty[)$ alors, il existe z_2 appartenant à $B_{\frac{d(z_1,b)}{2}}(b)$ tel que $\rho_a(z_2) \leq 2Cd(b, z_1) \leq Cr$ (car $z_2 \in B_{2d(z_1,b)}(z_1)$ et $d(z_1, b) \leq \frac{r}{2}$). Ainsi, il existe une courbe rectifiable c_2 joignant z_1 à z_2 de longueur $\rho_{z_1}(z_2) \leq Cr$. Notons $\gamma_2 : [0,1] \to X$ la paramétrisation par la longueur d'arc de $c_1 \cup c_2$. Alors, on a : $|\gamma_2(t) - \gamma_2(t')| \leq (\rho_a(z_1) + \rho_{z_1}(z_2))|t-t'| \leq (2+1)Cr|t-t'|$.

Par récurrence, on construit une suite $(z_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ de points de X tels que $d(z_i, b) \leq \frac{r}{2^i}$ et une suite de courbes rectifiables $(c_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ joignant z_i à z_{i+1} telles pour tout i : $L(c_1 \cup \ldots \cup c_i) \leq 4Cr$ et la paramétrisation γ_i par la longueur d'arc de $c_1 \cup \ldots \cup c_i$ vérifie $|\gamma_i(t) - \gamma_i(t')| \leq 4Cr|t-t'|$.

La famille $(\gamma_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ est une famille uniformément bornée et équicontinue de fonctions continues. Le théorème d'Ascoli permet à une extraction près d'avoir que γ_i converge uniformément lorsque i tend vers l'infini vers γ une courbe continue et de longueur finie. En effet, on a : $L(\gamma) \leq 4Cr$.

De plus, $d(\gamma(1), b) \leq d(\gamma(1), \gamma_k) + d(\gamma_k, b) \leq d(\gamma(1), \gamma_k) + \frac{r}{2^k}$. Ainsi, en faisant tendre k vers l'infini, on voit que γ relie a à b.

1.3. Etude d'exemples importants

1.3.1. Le cadre euclidien : $\mathbf{R}^n$. On prendra sur $\mathbf{R}^n$ la métrique euclidienne d définie par $d(x,y) = |x-y| = (\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2)^{\frac{1}{2}}$. De plus, la mesure considérée sur

$\mathbf{R}^n$ sera la mesure de Lebesgue n dimensionnelle notée $dx = dx_1 \ldots dx_n$ ou L^n. On désignera la mesure d'un borélien $A \subset \mathbf{R}^n$ par $|A|$ ou $L^n(A)$.

1.3.2. Fonction maximale d'Hardy-Littlewood. Les théorèmes de différentiation fins sur $\mathbf{R}^n$ pour des fonctions à valeurs réelles sont reliés au contrôle des oscillations de ces fonctions. C'est une information qui peut-être encodée par l'inégalité maximale d'Hardy-Littlewood que nous rappelons.

Définition 10. *Soit $f : \mathbf{R^n} \to R$ une application mesurable. On définit la fonction maximale centrée de Hardy-Littlewood Mf par*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy.$$

Remarque : On peut en fait définir une fonction maximale centrée pour des fonctions à valeurs banachiques sur un espace métrique mesuré supportant une mesure de Radon non dégénérée.

La fonction Mf est mesurable. De plus, on a l'estimation faible de type $(1,1)$ suivante appelée inégalité maximale de Hardy-Littlewood.

Théorème 11. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout f appartenant à L^1, on a :*

$$L^n\{|f| > \lambda\} \leq C \frac{||f||_1}{\lambda}.$$

Ce résultat se prouve par un lemme de recouvrement qui s'appelle le lemme de 5-recouvrement de Vitali et qui est utile lorsque la mesure en jeu est doublante (ce qui est la cas de la mesure de Lebesgue). On peut déduire du théorème 11 le théorème de différentiation de Lebesgue qui est une sorte de théorème fondamental de l'analyse en dimension supérieure. On va tout d'abord prouver le lemme de 5-recouvrement de Vitali.

Lemme 12. *Soit (X,d) un espace métrique. Soit $K \subset X$ un ensemble. Supposons qu'il existe un recouvrement fini de K par des boules ouvertes. Plus précisément, il existe un ensemble I fini et des points x_i de X ainsi que des réels $\delta_i > 0$ tels que*

$$K \subset \bigcup_{i \in I} B_{\delta_i}(x_i).$$

Alors il existe $J \subset I$ tel que

$$K \subset \bigcup_{i \in J} B_{5\delta_j}(x_j)$$

et pour tout $j, j' \in J, j \neq j'$:

$$B_{\delta_j}(x_j) \cap B_{\delta_{j'}}(x_{j'}) = \emptyset.$$

Démonstration : Construisons l'ensemble J par récurrence. Prenons une boule dans le recouvrement de K de plus grand diamètre possible. Notons la B_1. Prenons ensuite une boule de plus grand diamètre dans le recouvrement de K qui soit disjointe de B_1. Ou une telle boule existe et on la note B_2. Ou le processus se termine au premier pas. En intérant cette algorithme de sélection, on construit de proche en proche une famille de boules $(B_j)_{j \in J}$ maximale pour l'inclusion et telle que pour tout $j, j' \in J, j \neq j'$: $B_j \cap B_{j'} = \emptyset$. Montrons alors que $K \subset \bigcup_{j \in J} 5B_j$. Soit $x \in K$. On sait qu'il existe un certain indice i tel que $x \in B_{\delta_i}(x_i)$. Ou i appartient à J. Ou par maximalité de la famille de boules préalablement construite, il existe un certain indice $j \in J$ tel qu'il existe $y_{i,j} \in B_{\delta_i} \cap B_j$. De plus, en appellant δ_j le rayon de B_j (et x_j le centre de B_j), on a que $\delta_i \leq \delta_j$. Par une inégalité triangulaire, on a que :

$$d(x, x_j) \leq d(x, x_i) + d(x_i, y_{i,j}) + d(y_{i,j}, x_j) \leq 3\delta_j < 5\delta_j.$$

D'où le résultat.

On déduit du lemme 12 une inégalité maximale d'Hardy-Littlewood valide pour les mesures doublantes dans des espaces métriques mesurés σ-fini. Les hypothèses du théorème suivant sont naturellement satisfaites pour $(\mathbf{R}^n, d, L^n)$. En d'autres termes, le théorème 11 est impliqué par le théorème qui suit.

Théorème 13. *Soient (X, d, μ) un espace métrique mesuré σ-fini supportant une mesure μ doublante et de Radon et E un espace de Banach muni d'une norme $||.||$. Soit $f \in L^1(X, E)$. Alors, on a*

$$\mu\{|f| > \lambda\} \leq C\frac{||f||_1}{\lambda}.$$

Démonstration : Soit A un ensemble mesurable de μ-mesure fini. Notons

$$A_\lambda = \{x \in A | Mf(x) > \lambda\}.$$

Par définition de la fonction maximale de Hardy-Littlewood centrée, pour tout $x \in A_\lambda$, il existe $r_x > 0$ tel que :

$$\int_{B_{r_x}(x)} ||f(y)|| d\mu(y) \geq \frac{\lambda}{2}\mu(B_{r_x}(x)).$$

Il est clair que

$$A_\lambda \subset \bigcup_{x \in A_\lambda} B_{r_x}(x).$$

Or, par régularité intérieure de la mesure μ, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset A_\lambda$ tel que $\mu(A_\lambda \cap K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$. Par compacité, il existe un ensemble fini I (par soucis de lisibilité, on omet volontairement la dépendance en ε de l'ensemble I) tel que $\{x_i\}_{i \in I} \subset A_\lambda$ et tel que

$$K_\varepsilon \subset \bigcup_{i \in I} B_{r_{x_i}}(x_i).$$

En appliquant, le lemme 12, on obtient un ensemble $J \subset I$ et des boules B_j deux à deux disjointes satisfaisant

$$K_\varepsilon \subset \bigcup_{j \in J} 5B_j \text{ et } \mu(B_j) \leq \frac{2}{\lambda}\int_{B_j} ||f(y)|| d\mu(y).$$

On a alors la chaîne suivante d'inégalités :

$$\begin{aligned}
\mu(A_\lambda) &\leq \varepsilon + \mu(K_\varepsilon) \\
&\leq \varepsilon + \mu\Big(\bigcup_{j\in J} 5B_j\Big) \\
&\leq \varepsilon + \sum_{j\in J} \mu(5B_j) \\
&\leq \varepsilon + C\sum_{j\in J} \mu(B_j) \text{ car } \mu \text{ est doublante} \\
&\leq \varepsilon + C\sum_{j\in J} \frac{2}{\lambda}\int_{B_j} ||f(y)||d\mu(y) \\
&\leq \varepsilon + \frac{2C}{\lambda}\int_X ||f(y)||d\mu(y) \text{ car les boules } B_j \text{ sont deux à deux disjointes}
\end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0 puis en utilisant le fait que X est σ-fini, on déduit le résultat voulu par σ-additivité de la mesure μ.

Corollaire 14. ***[Théorème de différentiation de Lebesgue]*** *Si f est L^1 alors on a en presque tout x que :*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|dy = 0.$$

Démonstration :

Soit f une application localement intégrable. Considérons $\mathbf{f}$ une application continue. Le résultat est par définition de la continuité vérifié par $\mathbf{f}$ pour tout x. Soit $\lambda > 0$. On a la chaîne suivante d'inégalités :

$$\begin{aligned}
& L^n\{x \in \mathbf{R}^n | \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| \geq 2\lambda\} \\
\leq\ & L^n\{x \in \mathbf{R}^n | \big|f(x) - \mathbf{f}(x)\big| \geq \lambda\} + L^n\{x \in \mathbf{R}^n | M(f - \mathbf{f})(x) \geq \lambda\} \\
\leq\ & \frac{||f - \mathbf{f}||_1}{\lambda} + C\frac{||f - \mathbf{f}||_1}{\lambda} \text{ par respectivement l'inégalité de Tchebytchev et le théorème 11}
\end{aligned}$$

Comme par régularité de la mesure de Lebesgue les fonctions continues sont denses dans L^1, on a ainsi prouvé le résultat.

Remarque : Le résultat précédent est purement local et la conclusion est donc la même si l'on suppose seulement que f est $L^1_{loc.}$.

On déduit de l'inégalité évidente

$$||Mf||_\infty \leq ||f||_\infty$$

valable lorsque f est mesurable et bornée et du théorème d'interpolation réelle de Marcinkiewicz, le résultat fondamental suivant. En fait, on va proposer une preuve directe du théorème 15 par la formule de Cavalieri (ou layer cake reprensentation en anglais).

Théorème 15. *Pour tout $1 < p < +\infty$, il existe une constante $C_p > 0$ telle que pour tout f appartenant à L^p, on a :*

$$||Mf||_p \leq C_p||f||_p.$$

Démonstration : Soit $1 < p < +\infty$. Soit f appartenant à L^p. Par Fubini, on a que :

$$||f||_p = p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1}L^n\{|f| > \lambda\}d\lambda.$$

Pour tout $\lambda > 0$, posons

$$f_\lambda = f\chi_{\{|f|>\lambda\}} \text{ et } g_\lambda = f\chi_{\{|f|\leq\lambda\}}.$$

Par l'inégalité d'Holder, on a comme f est L^p que f_λ est L^1. On a clairement que g_λ est bornée par λ et donc que $M(g_\lambda)$ l'est aussi. On a alors la décomposition

$$f = f_\lambda + g_\lambda.$$

Par sous-additivité de M, on obtient la chaine suivante d'inégalités :

$$\begin{aligned}
||Mf||_p &\leq C_p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1}L^n\{|Mf| > 4\lambda\}d\lambda \\
&\leq C_p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1}L^n\{|M(f_\lambda)| > 2\lambda\}d\lambda + C_p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1}L^n\{|M(g_\lambda)| > 2\lambda\}d\lambda \\
&\leq C_p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-2}||f_\lambda||_1 d\lambda \text{ par le théorème 11 appliqué à } f_\lambda \\
&\leq C_p\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\int_0^{|f(x)|} \lambda^{p-2}d\lambda dx \text{ par Fubini et par définition de } f_\lambda \\
&\leq C_p||f||_p
\end{aligned}$$

Remarque : Evidemment, tous les résultats démontrés pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$ se transposent naturellement au cadre des espaces métriques mesurés supportant des mesures de Radon doublantes.

1.3.3. Quelques théorèmes de différentiation dans $\mathbf{R}^n$. Avant de présenter certaines preuves euclidiennes, il nous faut définir au préalable la notion d'espace de Banach RNP.

Définition 16. *Un espace de Banach E satisfait la propriété de Radon-Nykodim si pour tout n, toute application lipschitzienne $f : \mathbf{R}^n \to E$ est différentiable (Lebesgue) presque partout. La dérivée de f se représente par une application qui est dans $L^\infty(\mathbf{R}^n, E)$ et est notée f'. De plus, on a pour tout $x, x' \in \mathbf{R}$ que :*

$$f(x) - f(x') = \int_{x'}^{x} f'(t)dt.$$

On dira que E est un espace de Banach RNP si E satisfait la propriété de Radon-Nykodim.

Pour fixer les idées nous rappellons un théorème classique d'analyse réelle : le théorème de Rademacher. Nous en donnons une preuve dans un contexte un peu plus large pour d'une part familiariser le lecteur avec le formalisme de l'intégrale de Bochner et d'autre part illustrer notre propos concernant la grande variété d'espaces de Banach RNP. Plus précisément, ce théorème montre que la classe des espaces de Banach RNP contient les espaces de Banach réflexifs. Le but de cette sous-partie est de pouvoir extrapoler une définition de la différentiabilité valable dans les espaces métriques à partir de celle existant sur $\mathbf{R}^n$. De plus, beaucoup d'idées de la preuve du théorème 17 seront utiles pour pouvoir généraliser certains théorèmes de différentiation à des classes d'applications moins régulières que lipschitziennes comme par exemple ayant une régularité Sobolev surcritique.

Théorème 17. ***[Théorème de Rademacher généralisé]***
Toute application lipschitzienne de $\mathbf{R}^n$ *dans* E *où* E *est un espace de Banach réflexif est différentiable* $Lebesgue - pp$.

Démonstration :
Soit f une application M-lipschitzienne de $\mathbf{R}^n$ dans E.
Premièrement, on peut se restreindre au cas où E est séparable et donc comme E est réfexif alors E^* est séparable aussi. En effet, comme f est lipschitzienne et $\mathbf{R}^n$ est séparable alors $f(\mathbf{R}^n)$ vit dans un sous espace fermé et séparable de E. Comme E est réflexif, un tel sous-espace est lui aussi réflexif.
On commence par traiter le cas $n = 1$.
Considérons pour ϕ appartenant à $C_0^\infty(\mathbf{R})$, ψ appartenant à E^* et $h > 0$, l'application

$$T_h[\psi](\phi) = \int \psi \left(h^{-1}(f(x+h) - f(x)\right) \phi(x)dx.$$

Par construction de l'intégrale de Bochner, on a

$$T_h[\psi](\phi) = \psi \left(\int h^{-1}(f(x+h) - f(x))\phi(x)dx \right).$$

Par un changement de variable, on a :

$$T_h[\psi](\phi) = \psi \left(\int f(x)h^{-1}(\phi(x-h) - \phi(x)dx \right).$$

Comme f est M-lispchitzienne, on obtient par convergence dominée et par continuité de ψ l'inégalité :

$$|\psi(\int f(x)\phi^{'}(x)dx)| \leq |||\psi|||M||\phi||_1.$$

Ainsi, par le théorème de Riesz, on a l'existence et l'unicité d'un élément $g(\psi)$ appartenant à $L^\infty(\mathbf{R})$ tel que :

$$\psi(\int f(x)\phi^{'}(x)dx) = \int g(\psi)(x)\phi(x)dx.$$

Par unicité, $\psi \to g(\psi)$ est linéaire et en prenant pour ϕ des appromixations de l'unité et en passant à la limite, on obtient pour $pp-x$:

$$|g(\psi)(x)| \leq |||\psi|||M.$$

Prenons alors ψ_n pour n parcourant $\mathbf{N}$ une famille dense de E^* et notons

$$A_{\psi_n} = \{x \in \mathbf{R} : |g(\psi_n)(x)| \leq |||\psi_n|||M\}.$$

On sait que $\lambda^1(\mathbf{R} \cap A^c_{\psi_n}) = 0$ (où λ^1 désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$). Ainsi, en notant $A = \cap_{n\in\mathbf{N}} A_{\psi_n}$, on a $\lambda^1(\mathbf{R} \cap A^c) = 0$.

Pour tout x appartenant à A, on peut alors prolonger $\psi \to g(\psi)(x)$ définie sur un ensemble dense de E^* en $\psi \to \mathbf{g}(\psi)(x)$ définie pour tout élément de E^* et vérifiant l'inégalité $|\mathbf{g}(\psi)(x)| \leq |||\psi|||M$.

Ainsi pour x appartenant à A, l'évaluation $\mathbf{g}(\psi)(x)$ est un élément de E^{**}. Comme E est réflexif, alors $\mathbf{g}(\psi)(x) = \psi(\mathbf{h}(x))$ où $\mathbf{h}(x)$ appartient à E et l'application $x \to \mathbf{h}(x)$ definit un élément de $L^\infty(\mathbf{R}, E)$ car par le théorème de Hahn-Banach, on a pour Lebesgue $pp - x$: $|\mathbf{h}(x)| \leq M$.

En procédant à une intégration par parties (on utilise le théorème de différentiation de Lebesgue qui reste valable dans le cadre dans lequel on travaille) et en utilisant le fait qu'un élément de E^* commute avec l'intégrale de Bochner, on obtient pour ψ_n definie comme précedemment :

$$\int \psi_n \left(f(x) + \int_0^x \mathbf{h}(y)dy \right) \phi'(x)dx = 0.$$

Ainsi, pour $pp - x$

$$\psi_n \left(f(x) + \int_0^x \mathbf{h}(y)dy \right) = \psi_n(f(0)).$$

Ainsi, par le théorème de Hahn-Banach , on a pour $pp - x$

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \mathbf{h}(x)dx.$$

Les deux membres de l'egalité pp étant continu, cette égalité est vraie partout. Le théorème de différentiation de Lebesgue permet alors d'affirmer que f est différentiable pp.

Traitons maintenant le cas $n > 1$. Fixons un élément ϕ de E^*. La dérivée partielle suivant un vecteur e de $\mathbf{R}^n$ en x de $\phi(f)$ existe pp et vaut par le cas précedent $\phi(\partial_e f(x))$.

En procédant à une intégration par parties, on montre que le gradient faible existe pp et on a, grace au cas précedent, la relation :

$$\phi(e.\nabla f(x)) = \phi(\partial_e f(x))$$

où e est un vecteur de $\mathbf{R}^n$.

En prenant une famille dense de $\mathbf{S}^{n-1}$, on montre que $\phi(f)$ est différentiable pp et on a la relation valable pour $pp - x$:

$$\phi(f(x)) - \phi(f(y)) = \phi(\nabla f(x).(x-y)) + o_\phi(||x-y||)$$

avec $o_\phi(||x-y||) = |||\phi|||o(||x-y||)$.

Comme E^* est séparable, en prenant une famille dense et dénombable de E^* et en appliquant le théorème de Hahn-Banach, on obtient la relation valable pour $pp-x$:

$$f(x)-f(y)=\nabla f(x).(x-y)+o(||x-y||).$$

Ainsi, f est différentiable *pp*.

On va présenter une amélioration du théorème de Rademacher basée sur une inégalité maximale. Plus précisément, on va utiliser le théorème 15 pour démontrer un théorème de différentiation dont voici l'énoncé.

Théorème 18. ***(Théorème de Calderón)*** *Une fonction f de $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ avec $p>n$ est différentiable (Lebesgue) presque partout.*

Remarque 1 : Le théorème 18 est purement local et reste encore vrai si l'on suppose seulement que la dérivée faible de l'application f appartient à $L^p_{loc.}$.

Remarque 2 : Le théorème 18 implique le théorème de Rademacher. On retrouve le fait qu'une fonction lipschitzienne est différentiable presque partout. En effet, soit f une application L-lipschitzienne. Alors, pour tout $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, pour tout $e\in\mathbf{S}^{n-1}$ et pour tout $t>0$, on a :

$$|\int\frac{(f(x+te)-f(x))}{t}\phi(x)dx|\leq L||\phi||_1.$$

En faisant un changement de variable dans l'intégrale précédente et en faisant tendre t vers 0, on obtient :

$$|<\partial_e f,\phi>|\leq L||\phi||_1$$

où le crochet de dualité est celui de la dualité distribution-fonction $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Comme la relation précédente est vraie pour tout $e\in\mathbf{S}^{n-1}$, le théorème de Riesz permet d'affirmer que ∇f appartient à $L^\infty(\mathbf{R}^n)$. Ainsi, f appartient à $W^{1,\infty}(B)$ pour toute boule B de R^n. Alors comme la mesure d'une boule est finie, on a pour tout p que f appartient à $W^{1,p}(B)$. En prenant un recouvrement dénombrable de $\mathbf{R}^n$ par une famille de boules $(B_k)_{k\in\mathbf{N}}$, on obtient en utilisant le théorème 18 que f est différentiable presque partout.

Remarque 3 : L'inégalité maximale démontrée pour les besoins du théorème 18 montre en fait que les fonctions de $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ (avec $p>n$) peuvent être prolongées en des applications qui sont $1-\frac{n}{p}$ holdériennes.

Démonstration :

On appellera toutes les constantes intervenant dans les calculs C.

Soit u une fonction $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Soient B une boule de rayon r et x,y deux points distincts de B. Alors, on a par les accroissement finis :

$$u(x)-u(y)=-\int_0^t\nabla u(x+sz)ds$$

où $z=\dfrac{y-x}{||y-x||}$. En notant pour $z\in\mathbf{S}^{n-1}$, $\delta(z)=\sup_{\{t>0,x+tz\in B\}}t$, on obtient :

$$|u(x)-u(y)|\leq\int_0^{\delta(z)}|\nabla u(x+sz)|ds.$$

En notant $u_B = \dfrac{1}{|B|}\displaystyle\int_B f$, on a :

$$\begin{aligned}
|u(x) - u_B| &\leq \frac{1}{|B|}\int_B |u(x) - u(y)|dy \\
&\leq \frac{1}{|B|}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} d\sigma(\theta)\int_0^{\delta(\theta)} s^{n-1}|u(x) - u(x + s\theta)|ds \\
&\leq \frac{1}{|B|}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} d\sigma(\theta)\int_0^{\delta(\theta)} s^{n-1}ds\int_0^{\delta(\theta)} r^{n-1}\frac{|\nabla u(x + r\theta)|}{r^{n-1}}dr \\
&\leq \frac{(2\mathrm{diam(B)})^n}{n|B|}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} d\sigma(\theta)\int_0^{\delta(\theta)} r^{n-1}\frac{|\nabla u(x + r\theta)|}{r^{n-1}}dr \\
&\leq Cr\int_B \frac{|\nabla u(x)|}{|x - y|}dy
\end{aligned}$$

Soit y de norme plus petite que r. Comme $B_r(x)$ et $B_r(x + y)$ sont incluses dans $B = B_{2r}(x)$, on obtient par une inégalité triangulaire dans l'inégalité précedemment démontrée que :

$$|u(x + y) - u(x)| \leq Cr\int_B |\nabla u(z)|\left(\frac{1}{|x - z|^{n-1}} + \frac{1}{|x + y - z|^{n-1}}\right)dz.$$

Ensuite, on va évaluer la quantité de droite pour $|y| = \dfrac{r}{2}$. Par l'inégalité de Holder avec un exposant q tel que $n < q < p$ (l'exposant conjugué de q sera noté q'), on a :

$$\int_B \frac{|\nabla u(z)|}{|x - z|^{n-1}}dz \leq \left(\int_B |\nabla(z)|^q dz\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_B \frac{1}{|x - z|^{q'}}\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Or, un passage en coordonnées polaires donne :

$$\int_B \frac{1}{|x - z|^{q'}} \leq C\int_0^{2r} s^{(n-1)(1-q')}ds \leq Cr^{q'(-\frac{n}{q}+1)} \leq C(|y||B|^{-\frac{1}{q}})^{q'}.$$

L'autre terme dans l'intégrale se majore de manière analogue. En regroupant les deux inégalités, on a :

$$\frac{|u(x + y) - u(x)|}{|y|} \leq \frac{C}{|B|}\left(\int_B |\nabla u(z)|^q dz\right)^{\frac{1}{q}}.$$

On obtient donc l'inégalité maximale suivante :

$$\sup_{y\in\mathbf{R}^n}\frac{|u(x + y) - u(x)|}{|y|} \leq C\left(M(|\nabla u|^q)(x)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Cette inégalité maximale reste vraie pour toute fonction appartenant à $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$. En effet, on sait que les fonctions $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ sont denses dans $W^{1,p}(\mathbf{R}^n$ pour la norme $||u||_p + ||\nabla u||_p$. Le lemme de Fatou et la réciproque du théorème de Lebesgue permet de passer à la limite dans l'expression

$$\frac{|u(x+y)-u(x)|}{|y|} \leq \frac{C}{|B|}\left(\int_B |\nabla u(z)|^q dz\right)^{\frac{1}{q}}$$

qui reste donc valable pour tout u appartenant à $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$. Par passage au supremum, l'inégalité maximale prouvée précédemment reste donc vraie pour tout élément de $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ avec $p > n$.

Soit u appartenant à $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ avec $p > n$. Soient $\lambda > 0$ et $\mathbf{u}$ appartenant à $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. On veut montrer que u est différentiable Lebesgue-presque partout. Notons L^n la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$. On obtient pour un exposant q tel que $p > q > n$ la chaîne suivante d'inégalités :

$$\begin{aligned}
& L^n\{x \in \mathbf{R}^n | \lim_{y\to 0} \frac{|u(x+y)-u(x)-<y,\nabla u(x)>|}{|y|} > 2\lambda\} \\
\leq\ & L^n\{x \in \mathbf{R}^n | \sup_{y\in\mathbf{R}^n} \left\{\frac{|(u-\mathbf{u})(x+y)-(u-\mathbf{u})(x)-<y,\nabla(u-\mathbf{u})(x)>|}{|y|}\right\} > \lambda\} \\
\leq\ & \frac{C}{\lambda^p}\left(||(M(|\nabla(u-\mathbf{u})|^q))^{\frac{1}{q}}||_p^p + ||\nabla(u-\mathbf{u})||_p^p\right) \\
\leq\ & \frac{C}{\lambda^p}||\nabla(u-\mathbf{u})||_p^p
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé respectivement les inégalités de Tchebytchev et de Cauchy-Schwarz dans l'avant-dernière inégalité et dans la dernière inégalité, on a utilisé le théorème maximal de Hardy-Littlewood car $\frac{p}{q} > 1$. Par densité des fonctions $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ dans $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$, on obtient que u est différentiable Lebesgue-presque partout.

Pour terminer, nous citons sans preuve un théorème de différentiation optimal sur $\mathbf{R}^n$ dont une preuve remarquable (et facile) est donnée dans [**Ma**].

Théorème 19. ***[Théorème de Stepanov]*** *Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ une application mesurable. Si l'on note*

$$A = \{x \in \mathbf{R}^n | Lip(f)(x) < +\infty\}$$

alors f est différentiable en presque tout point de A.

Il est clair que le théorème 19 implique les théorèmes 17 et 18.

1.3.4. Inégalités de Poincaré sur $\mathbf{R}^n$. On va donner un premier exemple d'espace PI. Nous choisissons de donner une preuve qui passe par l'estimation de potentiels de Riesz.

Proposition 20. *: L'espace $(\mathbf{R}^n, d, dx)$ est un $(1,1)$ PI-espace.*

Démonstration : Prenons une application $f : X \to \mathbf{R}$ lipschitzienne. Soit $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+$ un gradient supérieur pour f dans $L^1_{loc.}$. En choisissant la courbe $\gamma : [0,1] \to$

$\mathbf{R}^n$ telle que $\gamma(t) = tx + (1-t)y$, on a que :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \int_0^1 g(tx + (1-t))dt \ (*).$$

Choisissons une boule B de rayon r. Si $x \in B$, on définit pour $u \in \mathbf{S}^{n-1}$ la fonction mesurable et bornée $\delta(u) := \sup_{\{x+tu \in B, t>0\}} t$. Ainsi, on obtient la chaîne suivante d'inégalités :

$$\begin{aligned}
|f(x) - \frac{1}{|B|}\int_B f| &\leq \frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f(y)|dxdy \\
&\leq \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \int_0^{\delta(u)} |f(x) - f(x+tu)| t^{n-1} dt d\sigma(u) \\
&\leq \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \int_0^{\delta(u)} \int_0^1 g(x + ltu) tdl \ t^{n-1} dt \ d\sigma(u) \text{ par le point } (*) \\
&\leq \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \int_0^{\delta(u)} \int_0^{2r} g(x + tu) dl \ t^{n-1} dt \ d\sigma(u) \text{ car } \delta(u) \leq 2r \\
&\leq 2r \int_B \frac{g(z)}{|x-z|^{n-1}} dz \text{ par un changement de variable en polaire}
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient l'estimation ponctuelle suivante lorsque $x, y \in B$:

$$|f(x) - f(y)| \leq 2r \int_B g(z) \big(\frac{1}{|x-z|^{n-1}} + \frac{1}{|y-z|^{n-1}} \big) dz.$$

Si $z \in B$ alors $B \subset B_{2r}(z)$. Par une utilisation de Fubini, on obtient :

$$\frac{1}{|B|}\int_B \int_B \frac{g(z)}{|x-z|^{n-1}} dzdx \leq \frac{1}{|B|}\int_B g(z) \int_{B_{2r}(z)} \frac{dx}{|x-z|^{n-1}} dz.$$

Un changement de variable en polaire donne alors que

$$\frac{1}{|B|}\int_B \int_B \frac{g(z)}{|x-z|^{n-1}} dzdx \leq C(n) \frac{1}{|B|}\int_B g(z) dz.$$

Par le calcul précédent, on a ainsi que :

$$\frac{1}{|B|^2}\int_B \int_B |f(x) - f(y)| dxdy \leq C(n) \frac{r}{|B|}\int_B g(z) dz.$$

Par une inégalité triangulaire, on a :

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f - \frac{1}{|B|}\int_B f| \leq \frac{1}{|B|^2}\int_B \int_B |f(x) - f(y)| dxdy.$$

Ainsi, $(\mathbf{R}^n, d, dx)$ est bien un $(1,1)$ PI-espace.

On définit la constante de Lipschitz ponctuelle supérieure de f par

$$\mathrm{Lip}(f)(x) = \limsup_{r \to 0} \sup_{|y-x| \leq r} \frac{|f(x) - f(y)|}{r}.$$

Une utilisation du théorème de Rademacher permet de voir que $\mathrm{Lip}(f)$ est un gradient supérieur pour f lorsque f est lipschitzienne. On veut comparer par la suite $\mathrm{Lip}(f)(x)$ et $|\nabla(f)|(x)$ lorsque f est lipschitzienne.

Proposition 21. *Lorsque $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est lipschiztienne, on a que pour presque tout x (en fait, en tous les points où f est différentiable) :*

$$Lip(f)(x) = |\nabla(f)|(x).$$

Démonstration : Si f est lipschitzienne, par le théorème de Rademacher $\nabla(f)$ est définie (Lebesgue) presque partout. Prenons un point x où f est différentiable. Par la définition de la différentiabilité en un point x, on a :

$$|\frac{|f(x) - f(y)|}{r}| = |\frac{\nabla(f)(x).(x-y)}{r} + o(\frac{|x-y|}{r})|.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a lorsque $|x - y| \leq r$ que

$$\frac{|\nabla(f)(x).(x-y)|}{r} \leq |\nabla(f)|(x).$$

Ainsi, on obtient que

$$\mathrm{Lip}(f)(x) \leq |\nabla(f)(x)|.$$

Si $|\nabla(f)(x)| = 0$ alors la proposition est vraie. Si $|\nabla(f)(x)| \neq 0$, alors pour $y(r)$ tel que : $x - y(r) = r\frac{\nabla(f)(x)}{|\nabla(f)|(x)}$, on a :

$$\sup_{|y-x|\leq r} \frac{|f(x) - f(y)|}{r} \geq ||\nabla(f)|(x) + o(1)| \geq |\nabla(f)|(x) + o(1).$$

D'où l'inégalité inverse lorsque r tend vers 0.

Remarque : Si f est lipschitzienne, on a par le théorème de Rademacher que $|\nabla(f)|$ est un gradient supérieur pour f. Par densité, on retrouve ainsi le fait que si f appartient à $W^{1,p}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ alors le couple $(f, |\nabla(f)|)$ satisfait une inégalité de Poincaré de type $(1, p)$.

1.3.5. Un contre-exemple dans la classe des fonctions α-holderiennes. On notera l'ensemble des nombres complexes $\mathbf{C}$. Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est α-holderienne avec $0 \leq \alpha \leq 1$ si pour tout x, y appartenant à $\mathbf{R}$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}.$$

On notera $C_0^{\alpha}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ l'ensemble des applications α-holderienne définie sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$. On adoptera la convention qu'une fonction 0-holderienne est une fonction continue et bornée. Enfin, les fonctions 1-holdériennes sont appelées des applications lipschitziennes. On pourrait s'attendre à une variante du théorème de Rademacher valable pour les applications holderiennes. Malheureusement, sans hypothèse d'intégrabilité sur la dérivée faible d'une telle application, une fonction α-holderiennes (pour $0 \leq \alpha < 1$) n'est pas -en général- dérivable et même parfois en aucun point comme l'atteste le théorème suivant.

Théorème 22. *Il existe $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ telle que $\forall \alpha \in [0, 1[$, $f \in C_0^{\alpha}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ et pourtant f n'est dérivable en aucun point.*

Démonstration : Nous allons chercher un exemple du coté des series de Fourier lacunaires. Pour construire cet exemple, il nous faudra au préalable démontrer deux lemmes. On désignera le tore par $\mathbf{T}$. Toutes les constantes intervenant dans les calculs seront notées indifféremment C.

Lemme 23. *Soit $f : \mathbf{T} \to \mathbf{C}$ telle que*

$$\sum_{|k|\geq N} |c_k| \leq \frac{C}{N^\alpha}$$

pour un certain $\alpha \in]0,1[$ où

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}} f(x)\exp(-ikx)dx$$

alors $f \in C_0^\alpha(\mathbf{R},\mathbf{C})$.

Démonstration : On a pour x un point de $\mathbf{R}$ et $h > 0$:

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k \exp(ikx)(\exp(ikh) - 1).$$

Ainsi, pour $N > 0$, on a :

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C(|h| + \sum_{k=0}^{N} |h| \sum_{2^l \leq |k| < 2^{l+1}} k|c_k| + \sum_{|k|\geq 2^{N+1}} |c_k|).$$

On a les majoration suivantes :

$$\sum_{k=0}^{N} |h| \sum_{2^l \leq |k| < 2^{l+1}} k|c_k| \leq C|h| \sum_{l=0}^{N} 2^l 2^{-l\alpha} \leq C|h|2^{N(1-\alpha)}$$

puis

$$\sum_{|k|\geq 2^{N+1}} |c_k| \leq C2^{-N\alpha}.$$

Ainsi, pour $|h| \asymp 2^{-N}$, on obtient que

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^\alpha$$

avec une constante uniforme en $|h|$. Comme f est bornée sur $\mathbf{T}$ alors f appartient à $C_0^\alpha(\mathbf{R},\mathbf{C})$.

Nous présentons ici une preuve d'un théorème sur les propiétés de différentiabilité des séries lacunaires (plus précisément des fonctions de type Weierstrass) dont la preuve originale est du à G.H. Hardy. Nous choisissons de présenter une preuve plus moderne se situant dans [**Fre**].

Lemme 24. *Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\lambda_{k+1} \geq q\lambda_k$ pour un certain $q > 1$. Soit $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| < +\infty$. Considèrons la fonction*

$$f(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \exp(i\lambda_k x).$$

Alors si f est dérivable en x_0, on a : $a_k\lambda_k = o(1)$.

Démonstration : Comme f est dérivable en x_0 et f est bornée sur $\mathbf{R}$, il existe une application H mesurable et bornée telle que

$$\lim_{x\to x_0} H(x) = 0$$

et vérifiant

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = H(x) \ (*).$$

Ainsi, on obtient :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + H(x)(x-x_0).$$

Considérons Φ une fonction de $S(\mathbf{R})$ telle que $\mathbf{TF}(\Phi)(1) = 1$ et $\mathrm{Supp}(\Phi) \subset]\frac{1}{q}, q[$. Considérons

$$I_k = \int_{\mathbf{R}} f(\frac{x}{\lambda_k} + x_0)\Phi(x)dx.$$

Premièrement, on a en intervertissant série et intégrale que :

$$I_k = \sum_{l=0}^{+\infty} a_l \exp(i\lambda_l x_0) \int_{\mathbf{R}} \Phi(x)\exp(ix\frac{\lambda_l}{\lambda_k})dx.$$

On a la relation

$$\int_{\mathbf{R}} \Phi(x)\exp(ix\frac{\lambda_l}{\lambda_k})dx = \mathbf{TF}(\Phi)(\frac{\lambda_l}{\lambda_k}).$$

De plus, la condition de support imposée sur $\mathbf{TF}(\Phi)$ et la condition de lacunarité des λ_l nous permet d'obtenir que $I_k = a_k \exp(i\lambda_k x_0)$. En utilisant l'expression $(*)$ au point $\frac{x}{\lambda_k} + x_0$, on obtient :

$$I_k = (f(x_0) - x_0 f'(x_0)) \int_{\mathbf{R}} \Phi(x)dx + \frac{1}{\lambda_k}\int_{\mathbf{R}} x\Phi(x)dx + \frac{1}{\lambda_k}\int_{\mathbf{R}} H(\frac{x}{\lambda_k}+x_0)x\Phi(x)dx.$$

On a alors les relations suivantes :

$$\int_{\mathbf{R}} \Phi(x)dx = \mathbf{TF}(\Phi)(0) = 0$$

puis $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} x\Phi(x)dx = -i(\mathbf{TF}(\Phi))'(0) = 0$

et par convergence dominée $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} H(\frac{x}{\lambda_k}+x_0)x\Phi(x)dx = o(1).$

Ainsi, on obtient que $a_k\lambda_k = o(1)$.

Retour à la démonstration de la proposition 22 : Considérons par exemple la fonction suivante

$$f(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\exp(i2^k)}{2^k}.$$

On a clairement que $\sum_{2^k\geq N} \frac{1}{2^k} \leq \frac{C}{N}$. Ainsi par le lemme 23 : $\forall\alpha \in [0,1[$, $f \in C_0^\alpha(\mathbf{R},\mathbf{C})$. De plus, par le lemme 24, f n'est dérivable en aucun point car $\frac{2^k}{2^k} = 1 \neq o(1)$.

1.4. Le groupe d'Heisenberg : $\mathbf{H}^1$

1.4.1. Description du groupe d'Heisenberg. Une description précise du groupe d'Heisenberg est donnée dans [**HK**]

Le groupe d'Heisenberg noté $\mathbf{H}^1$ est un groupe de Lie simplement connexe dont l'algèbre de Lie est engendré par trois vecteurs (formant une base de l'algèbre de Lie) P, Q et Z satisfaisant les relations :

$$[P, Q] = Z, [P, Z] = [Q, Z] = 0.$$

De plus, le groupe d'Heisenberg $\mathbf{H}^1$ est topologiquement $\mathbf{R}^3$ (sa dimension topologique est alors 3). Notons Δ la distribution engendrée par les deux champs de vecteurs P et Q.

On peut aussi donner une description plus algébrique de $\mathbf{H}^1$. On peut le voir comme $\mathbf{R}^3$ muni d'une loi de groupe $*$ qui le rend non commutatif. On définit $*$ de la manière suivante :

$$(x_1, x_2, x_3) * (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + 2(x_2y_1 - x_1y_2)).$$

De plus, on peut donner explicitement la base de champ de vecteurs P, Q, Z. On choisit :

$$P = \partial_y - 2x\partial_t\, ;\, Q = \partial_x - 2y\partial_t\, ;\, Z = \partial_t.$$

De cette manière, on obtient la relation $[P, Q] = 4Z$ et les autres commutateurs sont nuls.

On peut voir P, Q, Z comme des opérateurs différentiels à coefficients C^∞ agissant sur l'ensemble des applications lipschitziennes. Il agissent de la manière suivante. Soit u une application lipschitzienne. On note

$$Pu(x, y, t) =< P(x, y, t), \nabla u(x, y, t) >$$

(les actions de Q et Z sur u sont analogues).

De plus, l'algèbre de Lie de $\mathbf{H}^1$ possède deux strates : l'une engendrée par $\{P, Q\} = \Delta$ et l'autre engendrée par $\{Z\}$.

La métrique de Carnot-Carathéodory est définie par rapport aux deux champs de vecteurs P, Q. On définit une métrique d sur $\mathbf{H}^1$ dite de Carnot-Carathéodory par : si x_1 et x_2 sont deux éléments de $\mathbf{H}^1$ alors $d(x_1, x_2)$ est l'infimum des longueurs des courbes rectifiables joignant x_1 à x_2 qui sont en tout point tangentes à Δ. Pour cette métrique le groupe d'Heisenberg est complet. De plus, étant un groupe localement compact, ce groupe dispose d'une mesure doublante (la mesure de Haar qui est en fait la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^4$) et satisfait une inégalité de Poincaré généralisée du type $(1, 1)$. Le groupe d'Heisenberg est donc un espace PI. De plus, ce groupe dispose d'une famille de dilatations définies pour $\lambda > 0$ par

$$\delta_\lambda(x, y, t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 t).$$

Ces dilatations font de

$$|(x, y, t)| = \left((x^2 + y^2)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

une norme homogène. De plus, la dimension topologique de $\mathbf{H}^1$ est 3 mais sa dimension de Haussdorf est 4. Cette dernière propriété fait du groupe d'Heisenberg un espace métrique relativement singulier où -on le verra plus tard- la définition de la rectifiabilité euclidienne est invalide.

1.4.2. Propriétés du groupe d'Heisenberg. On dit qu'une courbe absolument continue $\gamma : [a,b] \to \mathbf{H}^1$ est admissible s'il existe des fonctions mesurables $(c_j)_{j=1,2}$ vérifiant $\sum_{j=1}^{2} c_j(t)^2 \leq 1$ et telles que pour presque tout point t appartenant à $[a,b]$:

$$\gamma'(t) = c_1(t)P(\gamma(t)) + c_2(t)Q(\gamma(t)).$$

Pour x, y appartenant à $\mathbf{H}^1$, on définit $\rho(x,y)$ par l'infimum des T tel qu'il existe $\gamma : [0,T] \to \mathbf{H}^1$ une courbe admissible vérifiant $\gamma(0) = x$ et $\gamma(T) = y$. S'il n'existe pas de courbes admissibles reliant x à y, on pose $\rho(x,y) = +\infty$. En fait, on va montrer qu'il existe toujours une courbe admissible reliant deux point donnés de $\mathbf{H}^1$. On va même démontrer qu'en fait $\rho = d$.

Lemme 25. *Soit $B_R(x)$ une boule euclidienne contenue dans $\mathbf{H}^1$. Soit $\gamma : [0,T] \to \mathbf{H}^1$ un chemin admissible avec $\gamma(0) = x$. Posons $M = \sup_{B_R(x)} |A(.)|$. Si $T < \dfrac{R}{M}$ alors $\gamma([0,T])$ est inclus dans $B_R(x)$.*

Démonstration :

Notons $|x-y|$ la distance euclidienne de x à y dans $\mathbf{R}^3$. Par l'absurde, supposons que l'image de γ ne soit pas contenue dans la boule $B_r(x)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un plus petit temps $t_0 \leq T$ pour lequel $R = |x - \gamma(t_0)|$. Or, la définition d'un chemin admissible et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $|\gamma'(t)| \leq |A(\gamma(t))|$ pour presque tout t. Comme ce chemin est absolument continu alors

$$R = |x - \gamma(t_0)| = |\int_0^{t_0} \gamma'(t)dt| \leq \int_0^{t_0} |A(\gamma(t))dt| \leq MT.$$

C'est une contradiction et le résultat est ainsi prouvé.

Proposition 26. *Soit G une partie non vide de $\mathbf{H}^1$ compacte pour la distance euclidienne sur $\mathbf{R}^3$. Il existe une constante C telle que pour tout x, y appartenant à G : $\rho(x,y) \geq C|x-y|$.*

Démonstration :

Soit x un élément fixé de G.

Soit y un autre élément de G. Soit $\gamma : [0,T] \to \mathbf{H}^1$ un chemin admissible joignant x à y.

Comme $\mathbf{H}^1$ est ouvert dans $\mathbf{R}^3$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $G_\varepsilon = \{z \in \mathbf{R}^3 \mid \mathrm{dist}(x,G) \leq \varepsilon\}$ soit inclus dans $\mathbf{H}^1$. Posons $M = \sup_{G_\varepsilon} |A(.)|$. On peut remarquer que la boule $B_r(x)$ est incluse dans G_ε et ne contient pas y si $r = \min\{|x-y|, \varepsilon\}$.

Le lemme 25 donne que $T \geq \frac{r}{M}$.

Dans tous les cas, on a que :

$$T \geq M^{-1} \min\{1, \varepsilon(\mathrm{diam}(G))^{-1}\}|x-y|.$$

En passant à l'inf. sur T, on obtient que :

$$\rho(x,y) \geq M^{-1} \min\{1, \varepsilon(\mathrm{diam}(G))^{-1}\}|x-y|.$$

Soient y, z deux élément de G. Soient $\gamma_1 : [0, T_1] \to \mathbf{H}^1$ et $\gamma_2 : [0, T_2] \to \mathbf{H}^1$ deux chemins admissibles joignant respectivement y à x et x à z. Alors, on a :

$$T_1 + T_2 \geq C(|x-y| + |x-z|) \geq C|y-z|.$$

Soit γ le chemin formé en concaténant γ_1 et γ_2. Comme γ est un chemin admissible joignant y à z, on a :

$$\rho(y,z) \geq C|y-z|.$$

On est alors en mesure de démontrer le théorème suivant.

Théorème 27. ***(Cas particulier du théorème de Chow)*** *Une courbe $\gamma : [0,T] \to (\mathbf{H}^1, \rho)$ est une courbe admissible si et seulement si pour tout $x, y \in [0,T]$: $\rho(\gamma(x), \gamma(y)) \leq |x-y|$.*

Démonstration :

Si $\gamma : [0,T] \to (\mathbf{H}^1, \rho)$ est une courbe admissible, on a pour tout $x, y \in [0,T]$: $\rho(\gamma(x), \gamma(y)) \leq |x-y|$. Cela provient de la définition d'une courbe admissible (on peut toujours choisir la paramétrisation par longueur d'arc).

Soit $\gamma : [0,T] \to (\mathbf{H}^1, \rho)$ une courbe 1-lipschitzienne . Par le lemme précédent, la courbe γ est alors lipschitzienne pour la métrique euclidienne sur $\mathbf{R}^3$ (γ est, en particulier, une courbe absolument continue). Par le théorème de Rademacher, la courbe γ est donc differentiable en presque tout point. Soit $t_0 \in [0,T]$ un point où γ est différentiable. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, on a : $\rho(\gamma(t_0), \gamma(t_0+\varepsilon)) \leq \varepsilon$. Par définition de la distance ρ, pour tout $\delta > 0$, il existe $\eta : [0, \varepsilon+\delta] \to \mathbf{H}^1$ une courbe admissible telle que $\eta(0) = \gamma(t_0)$ et $\eta(\varepsilon+\delta) = \gamma(\varepsilon)$.

Premièrement, on a :

$$\int_0^{\varepsilon+\eta} \eta'(t)dt = \gamma(t_0+\varepsilon) - \gamma(t_0) = \varepsilon\gamma'(t_0) + o(\varepsilon).$$

De plus, il existe $(c_j)_{j=1,2}$ des fonctions mesurables telles que $\sum_{i=1}^2 c_j(t)^2 \leq 1$ et telles que pour presque tout $t \in [0, \varepsilon+\delta]$:

$$\eta'(t) = c_1(t)P(\eta(t)) + c_2(t)Q(\eta(t)).$$

On obtient donc :

$$\eta'(t) = c_1(t)P(\gamma(t_0)) + c_2(t)Q(\gamma(t_0)) + a(t)$$

où

$$a(t) = c_1(t)\left(P(\eta(t)) - P(\eta(0))\right) + c_2(t)\left(Q(\eta(t)) - Q(\eta(0))\right).$$

Ensuite, on a : $C|\eta(t) - \eta(t_0)| \leq \rho(\eta(t) - \eta(t_0)) \leq t$ avec une constante C uniforme en ε et δ du moment que ces deux quantités soient petites. Comme les champs de vecteurs P, Q, Z sont des opérateurs différentiels à coefficients C^∞ (donc localement lipschitziens), on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|a(t)| \leq |A(\eta(t)) - A(\eta(0))| \leq Ct$$

avec une constante C indépendante de ε et δ du moment que ces deux quantités soient petites.

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}\gamma'(t_0) &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon+\eta} \eta'(t)dt + o(1)\\ &= \frac{\varepsilon+\eta}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon+\eta}\int_0^{\varepsilon+\eta} c_1(t)dt\right) P(\gamma(t_0)) + \ldots + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon+\eta} a(t)dt + o(1)\end{aligned}$$

On a la majoration suivante :

$$|\int_0^{\varepsilon+\eta} a(t)dt| \leq C(\varepsilon+\delta)^2.$$

De plus, pour $i = 1, 2$, on a :

$$|\frac{1}{\varepsilon+\eta}\int_0^{\varepsilon+\eta} c_i(t)dt| \leq 1.$$

Soit ε_j une suite qui tend vers 0. En prenant $\delta_j = j^{-1}\varepsilon_j$, il existe une sous-suite de ε_j (que l'on nomme à nouveau ε_j) telle que pour $i = 1, 2$:

$$\frac{1}{(1+j^{-1})\varepsilon_j}\int_0^{(1+j^{-1})\varepsilon_j} c_i(t)dt$$

converge vers une limite que l'on va noter $b_i(t_0)$ lorsque ε_j tend vers 0. De plus, on peut vérifier que l'application $t_0 \to b_i(t_0)$ ainsi obtenue est mesurable.

Par l'inégalité de Jensen, on a :

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\varepsilon+\eta}\int_0^{\varepsilon+\eta} c_i(t)dt\right)^2 \leq \frac{1}{\varepsilon+\eta}\int_0^{\varepsilon+\eta}\sum_{i=1}^{2} c_i(t)^2 dt \leq 1.$$

En passant à la limite, on obtient : $\sum_{i=1}^{2} b_i(t_0)^2 \leq 1$.

En passant encore à la limite, on obtient pour presque tout $t_0 \in [0, T]$ que :

$$\gamma'(t_0) = b_1(t_0)P(\gamma(t_0)) + b_2(t_0)Q(\gamma(t_0)).$$

Ainsi, γ est une courbe admissible.

Corollaire 28. *Les deux distances d et ρ coincident.*

Rappel : La distance de Carnot-Carathéodory entre deux points de $\mathbf{H}^1$ est l'inf. des longueurs (pour la distance ρ) des courbes rectifiables et horizontales (en fait, ces 2 notions coïncident dans $\mathbf{H}^1$) qui joignent ces deux points (si ces deux points ne peuvent pas être reliés par une courbe rectifiable alors leur distance est infinie).

Démonstration :

Chaque courbe rectifiable peut-être paramétrée par sa longuer d'arc et devient donc 1-lipschitzienne vis-à-vis de la distance ρ. En appliquant le théorème 27, une telle courbe, ainsi paramétrée, est admissible.

Il ne reste plus qu'à montrer qu'une inégalité de Poincaré est valable sur le groupe d'Heisenberg. En fait, on a le théorème suivant.

Théorème 29. ***(Astuce de Varopoulos)*** *Le groupe d'Heisenberg $\mathbf{H}^1$ possède une inégalité de Poincaré généralisée du type* $(1, 1)$.

Démonstration :

Soit u une fonction admettant un gradient supérieur g. Il suffit de montrer que pour tout $B = B_r(x)$ (car la mesure de Lebesgue portée par $\mathbf{H}^1$ est doublante)

$$\int_B |u(x) - \left(\frac{1}{|B|}\int_B u(t)dt\right) dx| \leq Cr \int_{2B} g(x)dx.$$

On peut réduire le problème au cas où la boule B est centrée en 0 par invariance par translation de la mesure de Lebesgue. Notons $|z| = d(0,z)$. Il existe une courbe $\gamma_z : [0,|z|] \to \mathbf{H}^1$ qui minimise la distance de Carnot-Carathéodory entre 0 et z (un argument de compacité avec Ascoli permet de conclure). On peut remarquer que $s \to x\gamma_z(s)$ est le chemin le plus court qui relie x à xz. Ainsi, on a :

$$|u(x) - u(xz)| \leq \int_0^{|z|} g(x\gamma_z(s))ds.$$

Cette inégalité et l'invariance de la mesure de Lebesgue par translations à gauche permet d'obtenir la chaîne d'inégalités :

$$\begin{aligned}
\int_B |u(x) - \left(\frac{1}{|B|}\int_B u(t)dt\right) dx| &\leq \frac{1}{|B|}\int_B\int_B |u(x) - u(t)|dtdx \\
&\leq \frac{1}{|B|}\int_{\mathbf{H}}\int_{\mathbf{H}} \chi_B(x)\chi_B(xz)|u(x) - u(xz)|dzdx \\
&\leq \frac{1}{|B|}\int_{\mathbf{H}}\int_{\mathbf{H}}\int_0^{|z|} \chi_B(x)\chi_B(xz)g(x\gamma_z(s))dsdxdz.
\end{aligned}$$

En utilisant l'invariance de la mesure de Lebesgue par translations à droite, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{H}} \chi_B(x)\chi_B(xz)g(x\gamma_z(s))dx &= \int_{\mathbf{H}} \chi_{B\gamma_z(s)}(\xi)\chi_{Bz^{-1}\gamma_z(s)}(\xi)g(\xi)d\xi \\
&\leq \chi_{2B}(z)\int_{2B} g(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Justifions la dernière inégalité.

Si l'intégrande n'est pas nulle alors il existe $x, y \in B$ tel que $\xi = x\gamma_z(s) = yz^{-1}\gamma_z(s)$. On obtient ainsi que $z = x^{-1}y$ appartient à $2B$ et $\xi = x\gamma_{x^{-1}y}(s)$. On a donc que ξ appartient à la géodésique joignant x à y. Ceci implique que $d(x,\xi) + d(y,\xi) = d(x,y)$. Une inégalité triangulaire implique que ξ appartient à $2B$.

En utilisant le fait que la mesure de Lebesgue portée par $\mathbf{H}^1$ soit doublante, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_B |u(x) - \left(\frac{1}{|B|}\int_B u(t)dt\right) dx| &\leq \frac{1}{|B|}\int_{\mathbf{H}}\int_0^{|z|}\int_{2B} \chi_{2B}(z)g(\xi)d\xi ds dz \\ &\leq \frac{1}{|B|}\int_{2B}\int_{2B} |z|g(\xi)d\xi dz \\ &\leq Cr\int_{2B} g(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

C'est l'inégalité désirée et la preuve est ainsi terminée.

1.4.3. Non-plongement bilipschitzien de $\mathbf{H}^1$ dans L^p pour $p > 1$. Tout d'abord, on peut citer un théoréme du à Pansu dont une preuve d'un fait plus général se situe dans [**Pa1**].

Théorème 30. *Soit $A \subset \mathbf{R}^k$ un ensemble borélien. Considérons une application lipchitzienne $f : A \to \mathbf{H}^1$. Alors pour Lebesgue pp $x \in A$, il existe un morphisme de groupes noté $d_x f : \mathbf{R}^k \to \mathbf{H}^1$ tel que*

$$\lim_{t\to 0} \delta_{\frac{1}{t}}\left(f(x)^{-1} * f(x+tv)\right) = d_x f(v),\ \forall v \in \mathbf{R}^k.$$

On appelle $d_x f$ la différentielle de Pansu de f.

En utilisant le théorème 30, on déduit de la non commutativité du groupe d'Heisenberg l'impossibilité d'un plongement bilipschitzien du groupe d'Heisenberg dans un espace euclidien. De plus, le théorème 30 permet d'invalider la théorie classique de la rectifiabilité dans le groupe d'Heisenberg. Grossièrement, prenons pour $k = 2, 3, 4$ une application lipschitzienne $f : A \subset \mathbf{R}^k \to \mathbf{H}^1$. Considérons un point $x \in A$ où f est Pansu-différentiable. On a que $d_x f(\mathbf{R}^k)$ est un sous-groupe commutatif de $\mathbf{H}^1$. De plus, la spécificité de la métrique de Carnot-Carathéodory nous indique en fait que $d_x f(\mathbf{R}^k)$ est inclus dans une droite vectorielle. La formule de l'aire appliquée à f nous donne alors que $H^k(f(A)) = 0$. On peut trouver de plus amples explications dans [**AK**].

En fait, on peut donner une preuve directe du théorème de non plongement du groupe d'Heisenberg dans un espace euclidien. On peut même prouver plus comme le précise l'énoncé suivant.

Théorème 31. *Le groupe d'Heisenberg muni de sa métrique de Carnot-Carathéodory ne se plonge pas de manière bilipschitzienne dans un espace de Banach E satisfaisant la propriété de Radon-Nikodym (donc ne se plonge pas -en particulier- dans un espace L^p avec $p > 1$).*

Remarque : Ce résultat constraste fortement avec un résultat d'Assouad [**As**] qui affirme qu'un espace métrique (E, d) muni d'une mesure doublante μ vérifie que pour tout $\alpha < 1$ et pour tout $p \geq 1$ alors (E, d^α) se plonge de manière bilipschitzienne dans L^p.

Démonstration :
Soit $f : \mathbf{H}^1 \to E$ une application L-lipschitzienne.
La preuve se fait en trois temps.

Les courbes intégrales des champs P et Q sont des copies isométriques de la droite réelle. Soit $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{H}^1$ une courbe intégrale de P alors $f(\gamma) : \mathbf{R} \to E$ est une application lipschitzienne. Comme E possède la propriété RNP alors $f(\gamma)$ est différentiable Lebesgue presque partout. Alors l'ensemble des points où la dérivée partielle suivant P de f notée $P(f)$ (qui est un ensemble mesurable) intersecte chaque courbe intégrale de P en un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Le théorème de Fubini permet de conclure que $P(f)$ est définie presque partout. De plus, $P(f)$ est mesurable (comme limite ponctuelle de fonctions mesurables). Comme f est L-lipschitzienne alors $||P(f)|| \leq L$ preque partout. On procède de même avec $Q(f)$. On a montré que $P(f)$ et $Q(f)$ appartiennent à $L^\infty(\mathbf{H}^1, E)$.

On veut montrer que $P(f)$ et $Q(f)$ sont approximativement continues en presque tout point de $\mathbf{H}^1$.

Pour cela remarquons que comme f est lipschitzienne et que $\mathbf{H}^1$ est séparable alors f est à valeurs dans un sous-espace séparable de E qui possède lui aussi la propriété RNP (on dit que la propriété RNP est héréditairement séparable). En utilisant le lemme suivant, la conclusion suit.

Lemme 32. *Soit (X, d, μ) un espace métrique doublant (muni d'une mesure μ doublante), soit (Y, d') un espace métrique séparable et soit $u : X \to Y$ une application μ-mesurable. Alors μ-presque tout point de X est un point de continuité approchée de u.*

Démonstration :

Soit $j \in \mathbf{Z}$. Considérons un recouvrement dénombrable $(U_i^j)_{i\in\mathbf{N}}$ de Y par des ouverts de diamètre plus petit que 2^j. Notons $\Omega_i^j = u^{-1}(U_i^j)$. Alors ces éléments réalisent un recouvrement de X par des ensembles mesurables. Or, par le théorème de différentiation de Lebesgue appliqué à la fonction indicatrice de Ω_i^j, on sait qu'il existe un ensemble $\boldsymbol{\Omega_i^j}$ de μ-mesure pleine dans Ω_i^j vérifiant pour tout $x \in \boldsymbol{\Omega_i^j}$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu(B_r(x) \cap \Omega_i^j)}{\mu(B_r(x))} = 1.$$

Posons $A = \cap_{j\in\mathbf{Z}} \cup_{i\in\mathbf{N}} \boldsymbol{\Omega_i^j}$. Cet ensemble est de μ-mesure totale (comme é une intersection dénombrable d'ensembles de mesure pleine) et est un ensemble de points de continuité approchée pour u. En effet, soient $\varepsilon > 0$ et $r > 0$. Considérons $x \in A$. Alors pour tout j, il existe un certain indice i_j pour lequel $x \in \boldsymbol{\Omega_{i_j}^j}$. Définissons l'ensemble $S_\varepsilon(x, r) = \{x' \in B_r(x) | d'(u(x), u(x')) < \varepsilon\}$. Les ensembles $S_\varepsilon(x, r)$ sont emboités. Ainsi, pour j dans $\mathbf{Z}$ tel que $2^j \leq \varepsilon$ et par construction des différents recouvrements, on a :

$$\frac{\mu(S_\varepsilon(x, r) \cap B_r(x))}{\mu(B_r(x))} \geq \frac{\mu(S_{2^j}(x, r) \cap B_r(x))}{\mu(B_r(x))} \geq \frac{\mu(\Omega_{i_j}^j \cap B_r(x))}{\mu(B_r(x))}.$$

La dernière inégalité se justifie de la manière suivante. Par construction, on a que pour tout j, $u(x)$ appartient à $U_{i_j}^j$. Si x' appartient à $\Omega_{i_j}^j$ alors $u(x')$ appartient à $U_{i_j}^j$. Comme pour tout j, le diamètre de $U_{i_j}^j$ est plus petit que 2^j, on obtient que $d'(u(x), u(x')) \leq 2^j$. Ainsi, en faisant tendre r vers 0, on obtient que x est un point de continuité approchée pour u.

On veut montrer que si $x \in \mathbf{H}^1$ est un point de continuité approchée de $P(f)$ et $Q(f)$ alors $||f(x) - f(x')|| = o(d(x,x'))$ pour x' vivant le long de la courbe intégrale $\{x \exp(tZ)\}_{t \in \mathbf{R}}$ (courbe intégrale vivant dans le centre de $\mathbf{H}^1$). On dit que la différentielle de f s'effondre le long du centre du groupe d'Heisenberg.

Soit $\varepsilon > 0$. On peut supposer dans un premier temps que $x' = x \exp(t^2 Z)$. Le cas $x' = x \exp(-t^2 Z)$ se traite de manière analogue. Notons $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ les champs respectifs $P, Q, -P, -Q$. Il existe un quadrilatère $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ allant de x à x' tel que $\gamma_i : [0,t] \to \mathbf{H}^1$ soit une courbe intégrale de ξ_i. De plus, il existe une constante C tel que $d(x,x') \geq Ct$ (quitte à paramétrer chaque γ_i par longueur d'arc).

Comme x est un point de continuité approchée de $P(f)$ et de $Q(f)$ alors par une utilisation du théorème de Fubini, il existe une courbe intégrale λ_i de ξ_i proche de γ_i au sens suivant. Pour tout $s \leq t$ (avec t assez petit) alors $d(\gamma_i(s), \lambda i(s)) \leq \varepsilon t$. De plus, on a pour tout i :

$$\frac{1}{t} \int_{\lambda_i} ||\xi_i(f)(x) - \xi_i(f)(s)|| ds \leq \varepsilon \ (\mathbf{R_i}).$$

En utilisant la relation $(\mathbf{R_i})$ pour tout i, on obtient la chaîne suivante d'inégalités :

$$\begin{aligned}
||f(x') - f(x)|| &= ||f(\gamma_4(t)) - f(\gamma_1(0))|| \\
&\leq ||f(\gamma_4(t)) - f(\lambda_4(t))|| + ||f(\gamma_1(0)) - f(\lambda_1(0))|| + ||f(\lambda_4(t)) - f(\lambda_1(0))|| \\
&\leq ||f(\lambda_4(t)) - f(\lambda_1(0))|| + 2L\varepsilon t \\
&\leq ||\sum_{i=1}^{4} (f(\lambda_i(t)) - f(\lambda_i(0)))|| + 8L\varepsilon t \\
&\leq \sum_{i=1}^{4} \int_{\lambda_i} ||\xi_i(f)(x) - \xi_i(f)(s)|| ds + t||\sum_{i=1}^{4} \xi_i(f)(x)|| + 8L\varepsilon t \\
&\leq 8L\varepsilon t + 4\varepsilon t.
\end{aligned}$$

Comme $d(x,x') \geq Ct$, on obtient lorsque ε tend vers 0 que :

$$||f(x') - f(x)|| = o(d(x,x')).$$

Ainsi, on obtient l'impossiblité d'un plongement bilipschitzien du groupe d'Heinsenberg dans un espace de Banach RNP.

CHAPITRE 2

Cheeger-différentiabilité des fonctions de Sobolev généralisés

2.1. Introduction

Le but de ce chapitre est d'étendre un résultat de [**CK1**] pour une classe plus large de fonctions. On prouve la Cheeger-différentiabilité des applications de l'espace de Hajlasz $M^{1,p}(X,E)$ lorsque X est un espace métrique PI et E est un espace de Banach GFDA (ou est un espace de Banach satisfaisant la propriété de Radon-Nikodym) pour $p > N$ où N désigne la dimension homogène de X (la dimension homogène de X est reliée à la constante de doublement de la mesure portée par X). Les espaces de Hajlasz $M^{1,p}(X,E)$ sont une généralisation au cadre métrique des espaces de Sobolev $W^{1,p}$. En effet, lorsque $X = \mathbf{R}^n$ et $E = \mathbf{R}^m$ et lorsque $p > 1$, on a : $M^{1,p}(X,E) = W^{1,p}(X,E)$. Grace à cette remarque, notre théorème englobe un théorème classique de Calderón qui dit qu'une application de $W^{1,p}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$ est différentiable en Lebesgue presque tout point de $\mathbf{R}^n$ lorque $p > n$. Un contre-exemple de E. Stein montre que ce résultat de différentiation est optimal. Plus précisément, il existe une application de $W^{1,n}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$ qui n'est différentiable en aucun point. Ainsi, notre théorème est optimal au sens où dans $\mathbf{R}^n$, les exposants admissibles que nous avons sont les meilleurs possibles.

Nous voulons obtenir et généraliser certains théorèmes de différentiation valables dans $\mathbf{R}^n$ pour des classes d'applications peu régulières à valeurs dans un espace de Banach (le cas intéressant étant la dimension infinie). Nous allons donner un historique possible pour de tels théorèmes.

Citons avant toute chose l'état des faits dans $\mathbf{R}^n$. Un théorème central en analyse réelle est le théorème de Rademacher (dont une preuve est proposée dans la section intégrale de Bochner) qui affirme qu'une application lipschitzienne de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ est différentiable en Lebesgue presque tout point de $\mathbf{R}^n$. Ce résultat a été généralisé en un théorème désormais classique de Calderón (que nous nous proposons de généraliser dans le cadre des espaces métriques PI) à savoir que tout application de $W^{1,p}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$ avec $p > n$ est différentiable en Lebesgue presque tout point de $\mathbf{R}^n$. Ce théorème implique d'ailleurs le théorème de Rademacher car la dérivée faible d'une application lipschitzienne est dans L^∞. On peut pour terminer citer un fait remarquable car optimal concernant $\mathbf{R}^n$. En effet, le théorème de Rademacher-Stepanov affirme qu'une application $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ Lebesgue-mesurable est différentiable en Lebesgue presque tout point x où $\mathrm{Lip}(f)(x)$ est finie.

Ensuite, le théorème de Rademacher a été étendu pour des applications lipschitziennes définies sur des groupes de Carnot. En effet, P. Pansu, dans [**Pa1**], a montré un tel théorème pour des applications lipschitziennes $f : A \to B$ avec A et B des groupes de Carnot. Il montre d'ailleurs que la différentielle ainsi obtenue est un morphisme entre les algèbre de Lie des groupes concernés. Ce résultat permet de prouver l'impossibilité d'un plongement bilipschitzien du groupe d'Heisenberg dans $\mathbf{R}^n$ et permet d'invalider pour les groupes de Carnot la théorie de la rectifiabilité classique en grande dimension. Les deux points reposent sur une remarque algébrique simple : la différentielle de Pansu entre un groupe de Carnot non commutatif et $\mathbf{R}^n$ n'est jamais injective. Ainsi, pour obtenir le premier point, prenons un point où l'application est Pansu-différentiable. Etant bilipschitzienne, la différentielle de cette application est injective contredisant le fait que le groupe d'Heisenberg n'est pas commutatif. Le second point est plus technique et repose sur une formule de l'aire valable dans les groupes de Carnot. Grossièrement, la dimension de Hausdorff de l'image d'une application lipschitzienne est reliée au rang de la différentielle de Pansu de cette application (et donc à la dimension de son noyau par le théorème du rang). A partir de là, il suffit de remarquer que la différentielle de Pansu s'effondre le long du centre du groupe d'Heisenberg. En d'autres termes, le noyau de la différentielle de Pansu est assez gros et donc l'image de l'application lipschitzienne est de petite dimension. De plus, grace à ce théorème de différentiation, P. Pansu a obtenu des critères de rigidité de type Mostow pour certains espaces symétriques (ce qui est la motivation essentielle de [**Pa1**]).

Ces résultats illustrent une idée puissante : comment à partir d'un problème hautement non-linéaire comme decider si oui ou non deux espaces métriques sont bilipschitz équivalents, on peut se ramener à un problème d'algèbre linéaire par le biais d'un théorème de différentiation. Cette idée naturelle a été développée dans le travail séminal de J. Cheeger dans [**Che**]. Cet article offre un cadre nouveau mais naturel pour étendre ces théorèmes de différentiation. En effet, il développe une théorie de la différentiation dans les espaces PI. Certains espaces métriques PI apparaissent comme des limites au sens de Hausdorff-Gromov de variétés riemanniennes complètes à courbure de Ricci minorée. Des exemples de tels espaces métriques sont évidemment : $\mathbf{R}^n$ et les variétés riemaniennes compactes pour les plus simples. Pour les plus exotiques, il y a : les groupes de Carnot (qui sont de dimension Haussdorf entière), les espaces de Laakso ainsi que les espaces de Bourdon-Pajot dont les constructions sont détaillées respectivement dans [**La**] et [**BP1**] (d'ailleurs, ces derniers espaces peuvent être de toute dimension de Hausdorff entière ou non et ne sont pas bilipschitziens à un espace euclidien). L'article [**Che**] est majeur au sens où J. Cheeger a su développer un calcul au premier ordre dans les espaces métriques pour les applications lipschitziennes. Plus précisément, un théorème de type Rademacher est démontré dans le cadre des espaces métriques PI. Plus tard, dans l'article [**BRZ**], dans le même contexte que celui proposé par [**Che**], est montré un théorème de type Rademacher-Stepanov.

Tous ces résultats concernent la différentiation des applications lipschitziennes (ou à constante de Lipschitz ponctuelle supérieure finie en presque tout point) mais à valeurs dans des espaces euclidiens. Une difficulté intervient lorsque l'on veut établir des théorèmes de différentiation dans les espaces de Banach de dimension infinie. En toute généralité, de tels résultats sont faux. En effet, considérons l'application $f : [0,1] \to L^1([0,1])$ définie par $f : x \to \chi_{[0,x]}$. L'application f ainsi définie est une isométrie. Malheureusement, f n'est fortement différentiable en aucun point x de $]0,1[$ car sa différentielle faible en x est δ_x qui n'est clairement pas un élément de L^1. De plus, très peu de théorèmes concernant l'extension ou la densité des applications lipschitziennes qui sont à valeurs dans des espaces de Banach de dimension infinie sont connus. Heureusement, dans l'article [**CK1**], J. Cheeger et B. Kleiner, motivés par des questions d'informatique théorique (ces motivations sont plus longuement expliquées dans le compte rendu d'activités de [**Pa2**]), surmontent ces difficultés et trouvent une condition géométrique satisfaisante sur l'espace de Banach à l'arrivée pour obtenir un théorème de type Rademacher. Plus précisément, ils obtiennent un théorème de type Rademacher pour des applications lipschitziennes entre espaces métriques PI et espaces de Banach GFDA. Ils obtiennent aussi des obstructions au plongement bilipschitzien des espaces métriques PI dans les espaces de Banach GFDA. Ce qui a pour corollaire que le groupe de Heisenberg n'est pas bilipschitz équivalent à un espace L^p (avec $p > 1$) par exemple. Grace à la théorie développée par J. Cheeger et B. Kleiner dans le cadre des espaces de Banach GFDA, nous sommes à même d'énoncer un des résultats principaux de cette partie.

Théorème 33. *Soient X un $(1,q)$-PI espace possédant une mesure μ de constante de doublement β avec $q > \frac{\log\beta}{\log 2}$ et E un espace de Banach possédant la propriété GFDA. Si f appartient à $M^{1,q}_{loc.}(X,E)$ alors f est Cheeger-différentiable μ-pp.*

La preuve est fondée sur un argument d'approximation des applications de $M^{1,p}(X,E)$ par les fonctions lipschitziennes. De plus, grace aux inégalités de Poincaré supportées par X et grace à l'inégalité maximale de Hardy-Littlewood (qui permettent un contrôle des oscillations de l'approximation), nous montrons comment les théorèmes de différentiation vraies pour les applications lipschitziennes se transmettent aux applications de l'espace $M^{1,p}(X,E)$ (qui est lorsque p est assez grand un espace de fonctions continues). En fait, pour pouvoir appliquer la construction de l'article [**CK1**], il faut obtenir l'analogue d'un théorème de [**K**]. C'est-à-dire pouvoir comparerer la norme de la différentielle faible avec la constante de Lipschitz ponctuelle supérieure d'une application de $M^{1,p}$ pour p assez grand. Ce résultat est possible grace à la caractérisation des espaces $N^{1,p}$ et $M^{1,p}$ donnée dans l'article [**Sh**] et grace au théorème principal de [**KZ**] - satisfaire des inégalités de Poincaré faibles est une propriété ouverte en la régularité du gradient supérieur- étendu au cadre des espaces de Banach. Ce type de résultats, sans dépendance de la dimension, est crucial pour pouvoir appliquer la stratégie de l'article [**CK1**]. Enfin, un lemme de théorie descriptive des ensembles démontré dans l'article [**CK4**] montre comment -lorsque E possède la propriété de Radon-Nikodym- se ramener au cas d'un espace de Banach GFDA. Grace à cela nous pouvons énoncer le second résultat principal de cette partie.

Théorème 34. *Soient X un $(1,q)$-PI espace possédant une mesure μ de constante de doublement β avec $q > \frac{\log\beta}{\log 2}$ et E un espace de Banach possédant la propriété RNP. Si f appartient à $M^{1,q}_{loc.}(X,E)$ alors f est Cheeger-différentiable μ-pp.*

Comme les espaces de Hajlasz généralisent les espaces de Sobolev, ce théorème constitue une généralisation du théorème de Calderón cité au début de l'introduction. De plus, ce résultat est optimal. En effet, grace à un contre-exemple de E. Stein, il existe une application de $W^{1,n}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$ qui n'est différentiable en aucun point. Plus précisément, des conditions d'intégrabilité de la dérivée faible d'une appplication d'un espace de Sobolev sont discutées dans [**AC**] pour garantir ou non sa différentiabilité en

Lebesgue presque tout point. De plus, le théorème 34 offre une nouvelle caractérisation des espaces de Banach satisfaisant la propriété de Radon-Nikodym.

Dans une première partie, nous allons donner le contexte ainsi que certaines définitions nécessaires pour mieux comprendre la Cheeger-différentiabilité dans les espaces de Banach (de dimension infinie).

Dans une seconde partie, nous allons rappeler des propriétés géométriques importantes des espaces de Banach.

Dans une troisième partie, nous allons démontrer certaines propriétés concernant les applications de l'espace $M^{1,p}$ et nous intéresser à la régularité de ces applications lorsque p est assez grand. Nous allons dans cette même partie, donner des propriétés utiles valables dans les espaces métriques doublant.

Dans une quatrième partie, nous allons construire un bon candidat pour être la différentielle de Cheeger pour des fonctions à valeurs banachiques ayant une régularité Sobolev surcritique (c'est-à-dire dont l'exposant d'intégrablité d'un gradient supérieur est strictement plus grand que la dimension homogène de l'espace métrique ambiant).

La dernière partie concerne la preuve du théorème 33 à proprement parlé. Cette preuve suit la méthode proposée dans l'article [**CK1**] et est fondée sur des découpages intégraux assez fins. Enfin, cette méthode couplée à une remarque présente dans l'article [**CK4**] permet de prouver le théorème 34.

2.2. Différentielle de Cheeger

2.2.1. Le cadre des espaces métriques. Le but cette sous-partie est de pouvoir expliquer pourquoi les définitions proposées dans [**Che**] et [**CK1**] généralisent celles du cadre euclidien.

Soient (X, d, μ) un espace métrique mesuré et A une partie μ-mesurable de X. Soient $f_1, \dots f_k : A \to \mathbf{R}$ des fonctions lipschitziennes.

Définition 35. *On dit que la famille des $\{f_i\}$ est dépendante au premier ordre en A si pour μ-pp x appartenant à A, il existe une suite $(a_i(x))$ de réels non tous nuls telle que pour tout x' appartenant à A :*

$$\sum_i a_i(x)(f_i(x) - f_i(x')) = o(d(x, x')).$$

Exemple : Considérons $X = \mathbf{R}^n$. Si x est un point de différentiabilité des f_i (on sait que Lebesgue-presque tout point de $\mathbf{R}^n$ est un point de différentiabilité des f_i par le théorème de Rademacher) alors dire que la famille des $\{f_i\}$ est dépendante au premier ordre en x est équivalent à dire que la famille des $\{D_x f_i\}$ est liée. En effet, considérons une suite (a_i) de réels non tous nuls telle que pour tout x' appartenant à A :

$$\sum_i a_i(f_i(x) - f_i(x')) = o(|x - x'|) \ (*).$$

Soit ξ appartenant à $\mathbf{S}^{n-1}$. Prenons $x' = x + t\xi$ avec $t > 0$. En se rappellant que x est un point de différentiabilité des applications f_i, on obtient en divisant par $t > 0$ puis en faisant tendre t vers 0 dans la relation $(*)$ que pour tout $\xi \in \mathbf{S}^{n-1}$:

$$\sum_i a_i D_x f_i(\xi) = 0.$$

Ainsi, la famille des $\{D_x f_i\}$ est liée. Réciproquement, s'il existe une suite (a_i) de réels non tous nuls telle que :

$$\sum_i a_i D_x f_i = 0$$

alors, en utilisant la définition de la différentiabilité au point x pour chacune des applications f_i, on obtient que la famille des $\{f_i\}$ est dépendante au premier ordre en x.

Soit f une application lipschitzienne définie sur A à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Définition 36. *On dit que f dépend au premier ordre de la famille $\{f_i\}$ en A si la famille $\{f, f_1, \ldots, f_k\}$ est dépendante au premier ordre en A.*

Exemple : Prenons $A = \mathbf{R}^n$. Considèrons pour tout i appartenant à $[|1, \ldots, n|]$, f_i comme étant la projection sur la i-ème composante (si (e_i) désigne la base canonique de $\mathbf{R}^n$, $f_i(x) =< x, e_i >$). Par le théorème de Rademacher sur $\mathbf{R}^n$, on a que toute application lipschitzienne $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ dépend au premier ordre de la famille des $\{f_i\}$ en Lebesgue-presque tout x de $\mathbf{R}^n$.

Définition 37. *On dit que la famille des $\{f_i\}$ est indépendante au premier ordre en A si pour μ-pp x de A, pour tout x' appartenant à A, une relation du type :*

$$\sum_i a_i(x)(f_i(x) - f_i(x')) = o(d(x, x'))$$

implique que $a_i(x) = 0$ pour tout i.

Exemple : Considérons $X = \mathbf{R}^n$. Si x est un point de différentiabilité des f_i (on sait que Lebesgue-presque tout point de $\mathbf{R}^n$ est un point de différentiabilité des f_i par le théorème de Rademacher) alors dire que la famille des $\{f_i\}$ est indépendante au premier ordre en x est équivalent à dire que que la famille des $\{D_x f_i\}$ est libre. En effet, considérons une suite (a_i) de réels que pour tout x' appartenant à A :

$$\sum_i a_i(f_i(x) - f_i(x')) = o(|x - x'|) \ (*).$$

Soit ξ appartenant à $\mathbf{S}^{n-1}$. Prenons $x' = x + t\xi$ avec $t > 0$. En se rappellant que x est un point de différentiabilité des applications f_i, on obtient en divisant par $t > 0$ puis en faisant tendre t vers 0 dans la relation $(*)$ que pour tout $\xi \in \mathbf{S}^{n-1}$:

$$\sum_i a_i D_x f_i(\xi) = 0.$$

Ainsi, si la famille des $\{D_x f_i\}$ est libre alors la famille des $\{f_i\}$ est indépendante au premier ordre en x. Réciproquement, considérons une relation du type :

$$\sum_i a_i D_x f_i = 0.$$

En utilisant la définition de la différentiabilité au point x pour chacune des applications f_i, on obtient si la famille des $\{f_i\}$ est indépendante au premier ordre en x que la famille des $\{D_x f_i\}$ est libre.

D'après [**Che**], lorsque X est un espace PI, il existe une constante N ne dépendant que de la constante de doublement de la mesure μ et des constantes interventant dans l'inégalité de Poincaré pour laquelle toute famille de $N+1$ fonctions lipschitziennes définies sur X à valeurs dans $\mathbf{R}$ est dépendante au premier ordre en X.

Définition 38. *Une famille dénombrable de couples $\{A_\alpha, u_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{N}^*}$ est appelée un atlas si : les ensembles A_α sont μ-mesurables et s'il existe un entier N tel que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^*$, il existe un entier $n_\alpha \leq N$ et une application lipschitzienne $u_\alpha : A_\alpha \to \mathbf{R}^{n_\alpha}$. De plus, cette famille satisfait les propriétés suivantes :*

i) *$\cup_\alpha A_\alpha$ est de mesure pleine dans X c'est-à-dire $\mu(X \cap (\cup_\alpha A_\alpha)^c) = 0$.*

ii) *pour chaque fonction lipschitzienne $f : X \to \mathbf{R}$, on a pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^*$, f dépend au premier ordre de la famille des $\{u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^n\}$ (où les u_α^i désignent la i-ème composante de u_α) en A_α.*

iii) *pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^*$, la famille des composantes $\{u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^n\}$ est indépendante au premier ordre en A_α.*

En fait, les u_α sont à voir comme un système de cartes locales où les changements de cartes sont compatibles seulement presque partout. D'après [**Che**], un espace PI admet un atlas (la selection des éléments constituant cet atlas fait penser à la manière dont on construit une base d'un espace vectoriel).

On peut alors définir une notion de différentiabilité relative à un atlas (ou ensemble de cartes) $\{A_\alpha, u_\alpha\}$ pour un espace métrique X.

Définition 39. *Soit f une application définie sur X -un espace PI muni d'un atlas $\{A_\alpha, u_\alpha\}$- à valeurs dans un espace de Banach E. On dit que f est **Cheeger-différentiable** en $x \in A_\alpha$ s'il existe une application linéaire continue $\Phi_\alpha(x) : \mathbf{R}^{n_\alpha} \to E$ telle que pour tout $x' \in A_\alpha$, on ait :*

$$f(x') = f(x) + \Phi_\alpha(x)(u_\alpha(x') - u_\alpha(x)) + o(d(x, x')).$$

Remarque : Le point **ii**) de la définition 38 met en évidence le fait que toute application lipschitzienne $f : X \to \mathbf{R}^m$ est Cheeger-différentiable. De plus, considérons $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ une application lipschitzienne. Grâce au théorème de différentiation de [**Che**], on a l'équivalence suivante : f est différentiable Lebesgue-pp si et seulement si f est Cheeger-différentiable Lebesgue-pp et ceci relativement à n'importe quel atlas.

2.3. Quelques notions de géométrie des Banach

Dans cette partie, on construit une limite projective d'espaces de Banach dans laquelle vivra la différentielle faible (notion développée dans le chapitre éponyme). Plus précisément, on essaie de se ramener au cas de la dimension finie et de construire à partir d'une approximation par des espaces de Banach -croissants pour l'inclusion- de dimension finie de l'espace de Banach initial une différentielle généralisée qui est définie en restriction à chacun des espaces constituant l'exhaustion croissante. Cette différentielle est bien définie modulo quelques propriétés de régularité sur l'application initiale (nous considérons le cas de la régularité Sobolev surcritrique, le cas des applications lipschitziennes étant traité dans [**CK1**] et [**CK4**]). Les conditions géométriques imposées sur l'espace de Banach ambient permettront de montrer que cette différentielle est en fait la différentielle de Cheeger.

2.3.1. Propriété de bonne approximation. Toutes les notions introduites dans cette partie fixent un cadre naturelle pour étendre les théorèmes de différentiation pour certaines classes d'applications à valeurs banachiques. Cette partie recense les preuves ainsi que certaines remarques de l'article [**CK1**]. La récapitulation de ces preuves est nécessaire pour voir d'une part que la classe d'espaces de Banach que l'on considère est assez large et pour d'autre part fixer les idées et notions essentielles pour différentier en dimension infinie. Soit E un espace de Banach. Notons $||.||$ sa norme.

Définition 40. *On appelle un système inverse d'espaces de Banach la donnée d'une famille* $\{V_i, \theta_i\}_{i\in\mathbf{N}^*}$ *où les* V_i *sont des sous-espaces de dimension finie de* E *et les* $\theta_i : V_{i+1} \to V_i$ *sont des applications* 1*-lipschitziennes. De plus, une suite* (v_i) *est dite compatible si tout* i*,* v_i *appartient à* V_i *et vérifie :* $\theta_i(v_i) = v_{i-1}$*. On dira que les applications* θ_i *sont* ***compatibles*** *si elles satisfont la relation précédente pour toute suite compatible.*

On note la limite inverse de ce système inverse d'espaces de Banach : $\lim\limits_{\leftarrow} V_i$. Elle consiste en l'ensemble des suites (v_i) compatibles pour lesquelles $\sup\limits_i ||v_i||$ est fini et est munie d'une structure naturelle d'espace vectoriel normé. On munit $\lim\limits_{\leftarrow} V_i$ de la norme $||\{v_i\}|| = \lim\limits_{i\to+\infty} ||v_i||$ où les éléments de $\lim\limits_{\leftarrow} V_i$ sont notés $\{v_i\}$.

Définition 41. *Une approximation de dimension finie (ou FDA en abrégé) de* E *est la donnée d'une suite de triplets* $\{(V_i, \theta_i, \pi_i)\}$ *avec* $\{V_i, \theta_i\}_{i\in\mathbf{N}^*}$ *désignant un système inverse d'espaces de Banach et où les applications compatibles* θ_i *induisent naturellement une projection* $\pi_i : E \to V_i$ *donnée par* $\pi_i(\{v_i\}) = v_i$

Exemple : Considérons $E = l^1(\mathbf{N}^*, \mathbf{R})$. Notons $(e_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ la base canonique de E. Autrement dit, on choisit $e_i = (0, \dots 0, 1, 0, \dots$ où le 1 apparait une seule fois à la $i$ème coordonnée. Dans ce cas là, on peut construire une FDA de prédilection pour E. On choisit tout bonnement $E_i = Vect_{j\leq i}\{e_j\}$. Les projections π_i sont alors définies par : $\pi_i(u) = (u_1, \dots, u_i)$. De plus, les applications θ_i sont les applications de restriction $\theta_i : \mathbf{R}^i \to \mathbf{R}^{i-1}$.

Sous ces conditions, on peut définir l'application

$$\pi : E \to \lim_{\leftarrow} V_i$$

par restriction et compatibilité : $\pi_{|V_i} = \pi_i$. De plus, π est une isométrie linéaire d'espaces de Banach. On peut remarquer qu'en fait les π_i ainsi obtenues sont de norme 1. En fait, ce qui compte est que les applications π soient uniformément bornées en norme d'opérateur. On peut aussi voir ce fait grâce à une utilisation du théorème de Banach-Steinhauss et ainsi obtenir qu'il existe une constante $C > 0$ tel que $||\pi_i|| \leq C$ pour tout i. On écrira en abrégé qu'une FDA de E est juste la donnée d'un couple $\{V_i, \pi_i\}$ satisfaisant les conditions de la définition 41 en omettant volontairement de parler des applications compatibles θ_i. Ceci se justifie de la manière suivante. Une FDA de E est équivalente au choix d'un systeme inverse d'espaces fermés de codimension finie (de tels espaces admettent un supplémentaire topologique - c'est à dire qu'il existe une projection continue sur cet espace). Pour des précisions sur les supplémentaires topologiques et la complémentation, on peut se référer aux livres de [**Br1**] et [**CQ**].

Proposition 42. *Un espace de Banach **séparable** E admet une FDA.*

Démonstration :

Prenons (v_i) une famille dénombrable et dense dans la sphère unité de E. Pour chaque i, on peut appliquer le théorème de Hahn-Banach pour obtenir une forme linéaire ϕ_i de norme 1 et pour laquelle $\phi_i(v_i) = 1$. Notons $V_i = \cap_{j \leq i} \ker \phi_j$. La codimension de V_i est au plus i (donc V_i est de codimension finie). Soit $x \in E$ tel que $x \in V_i$ pour tout i. Montrons alors que $x = 0$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $x \neq 0$. Quitte à diviser x par $||x||$, on peut supposer que $||x|| = 1$. Ainsi, par la construction des v_i, il existe i tel que $||x - v_i|| \leq \frac{1}{2}$. Or, $1 = |\phi_i(x) - \phi_i(v_i)| \leq ||x - v_i|| \leq \frac{1}{2}$. On obtient une contradiction et $x = 0$. On a donc construit une FDA de E en considérant $\{W_i, \pi_i\}$ avec $W_i = V/V_i$ (muni de la norme quotient) et en prenant pour projection $\pi_i : V \to V/V_i$ (une projection continue existe sur V_i car cet espace est de codimension finie). Les applications compatibles θ_i sont obtenues en considérant les applications suivantes obtenues par factorisation : $\theta_i : V/V_{i+1} \to V/V_i$.

2.3.2. Propriété GFDA. Soit $\{V_i, \pi_i\}$ une FDA d'un espace de Banach E.

Définition 43. *On appelle une suite décroissante et positive $\rho_1, \ldots, \rho_N$ ε-déterminée (avec $\varepsilon > 0$)*

si pour tout i appartenant à $1, \ldots, N$, les conditions :
$||v|| - ||\pi_i(v)|| \leq \rho_i ||v||$, $||v'|| - ||\pi_i(v')|| \leq \rho_i ||v'||$ *et* $||\pi_N(v) - \pi_N(v')|| \leq N^{-1} \max(||v||, ||v'||)$
impliquent que $||v - v'|| \leq \varepsilon \max(||v||, ||v'||)$.

On peut remarquer que dans cette définition, on peut se limiter aux couples v, v' vérifiant $\max(||v||, ||v'||) = 1$ quitte à diviser chaque vecteur cette dernière quantité.

Définition 44. *Une FDA $\{V_i, \pi_i\}$ de E est dite une bonne approximation de dimension finie pour l'espace E si :*

pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute suite $\{\rho_i\}_{i \in \mathbf{N}^*}$ décroissante et tendant vers 0, il existe un entier N pour lequel $\rho_1, \ldots, \rho_N$ est ε-déterminée.

On dit que E satisfait la propriété GFDA s'il possède une bonne approximation de dimension finie.

Un corrollaire du théorème de différentiation de l'article [**CK1**] est que $L^1(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ n'a pas la propriété GFDA. En effet, il suffit pour celà de considérer l'application $\Phi : \mathbf{R}^+ \to L^1(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ définie par $\phi(x)(t) = \chi_{[0,x]}(t)$. L'application Φ est alors une isométrie et n'est différentiable en aucun point et donc n'est Cheeger-différentiable en aucun point. La propriété GFDA est une propriété difficile à vérifier dans la pratique mais heureusement, beaucoup d'espaces de Banach classiques ont cette propriété. C'est ce que nous allons montrer par la suite.

On va tout d'abord établir quelques propriétés des espaces de Banach GFDA.

Lemme 45. *Si $\{V_i, \pi_i\}$ est une bonne approximation de dimension finie de E alors l'application $\pi : E \to \varprojlim V_i$ induite par les π_i est une isométrie surjective d'espaces de Banach.*

Démonstration :

On sait déjà par construction que π est une isométrie. Montrons que π est surjective. Soit $\{v_i\}$ un élément de $\lim\limits_{\leftarrow} V_i$ et choisissons une suite $\{\rho_i\}_{i\in\mathbf{N}^*}$ décroissante et tendant vers 0. Considérons l'ensemble :

$$C_i = \{v \in E \text{ tel que } \pi_i(v) = v_i \text{ et tel que pour tout } 1 \leq j \leq i : ||v|| - ||v_j|| \leq \rho_j\}.$$

Comme les applications π_i sont des projections induites par des applications compatibles alors C_i est non vide. La partie C_i est un fermé dont le diamètre tend vers 0 car $\{V_i, \pi_i\}$ est une bonne approximation de dimension finie de E. Les parties (C_i) forment une suite d'ensembles emboités donc comme E est complet, $\cap_i C_i$ est non vide et consiste en un unique vecteur v tel que $\pi(v) = \{v_i\}$.

On peut aussi remarquer que la classe des espaces de Banach possédant la propriété GFDA est plutôt large. Elle contient la classe des espaces de Banach réflexifs et la classe des espaces de Banach qui sont des duaux d'espaces de Banach séparables. En fait, un résultat prouvé dans [**CK3**] montre que les espaces de Banach GFDA séparables sont précisément les duaux d'espaces de Banach séparables.

Proposition 46. *Si $V = E^*$ est un espace dual séparable alors V est isomorphe à un espace de Banach GFDA.*

Pour les besoins de la preuve, on admettra le lemme suivant cité dans [**LT**] (et appelé le lemme de renormalisation de Kadec-Klee).

Lemme 47. *Soient E un espace de Banach séparable et F un sous-espace séparable de E^*. Alors E peut être renormé (c'est à dire qu'il existe une norme équivalente à la norme de départ sur E) de sorte que si $e_i^* \in E^*$ converge faiblement vers $e_\infty^* \in F$ avec $||e_i^*|| \to ||e_\infty^*||$ alors $||e_i^* - e_\infty^*|| \to 0$.*

Démonstration :

On construit un système inverse $\{V_i, \theta_i\}$ d'espaces de Banach en prenant une suite (E_i) croissante de sous-espaces de E de dimension finie tels que leur union soit dense dans E (une telle suite existe car E est séparable). On prend alors pour π_i l'application de restriction $E^* \to E_i^* = V_i$ où V_i est muni de la norme du dual de E_i. Par le théoréme de Hahn-Banach, il vient que $\{V_i, \pi_i\}$ est une FDA de $V = E^*$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\{V_i, \pi_i\}$ ne soit pas une bonne approximation finie-dimensionnelle pour V. Alors, il existe une suite décroissante $\{\rho_i\}$ tendant vers 0, un réel $\varepsilon > 0$ et une suite v_k, v'_k d'éléments de V tels que pour tout k :

$||v_k||, ||v'_k|| \leq 1$,
$\max(||v_k|| - ||\pi_i(v_k)||, ||v_{k'}|| - ||\pi_i(v'_k)||) \leq \rho_i$ pour $1 \leq i \leq k$,
$||\pi_j(v_k) - \pi_j(v'_k)|| \leq \frac{1}{k}$ pour tout j
et $||v_k - v_{k'}|| \geq \varepsilon$.

Par le théoréme de Banach-Alaoglu (les fermés bornés pour la topologie faible-étoile sont faible-étoile compacts), quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $v_k \to^* v_\infty$ et $v'_k \to^* v'_\infty$. De plus, le théorème de Banach-Steinhauss implique :

$$||v_\infty|| \leq \liminf_{k\to+\infty} ||v_k|| \leq 1,\ ||v'_\infty|| \leq \liminf_{k\to+\infty} ||v'_k|| \leq 1.$$

On a à i fixé : $\lim\limits_{k\to+\infty} \pi_i(v_k)$ existe car π_i est un opérateur de rang fini (donc un opérateur compact) et transforme donc l'image d'une suite faible-étoile convergente en une suite fortement convergente. En effet, comme la suite v_k est bornée, $\{\pi_i(v_k)\}$ est un ensemble relativement compact. Soient e_i et e'_i deux valeurs d'adhérence de $\pi_i(v_k)$. Soit ϕ un élément de E^*. Par définition de la convergence faible-étoile, on a : $\lim_{k\to+\infty} \phi(\pi_i)(v_k) = \phi(\pi_i)(v_\infty)$. Ainsi, $\phi(e_i) = \phi(e'_i)$ par continuité de ϕ et le théorème de Hahn-Banach implique que $e_i = e'_i$. On a ainsi prouvé le résultat. Enfin, une autre application du théorème de Hahn-Banach donne : $\lim_{k\to+\infty} \pi_i(v_k) = \pi_i(v_\infty)$.

On a : $||\pi_i(v_k)|| \geq ||v_k|| - \rho_i$ par hypothèse.

Ainsi, en prenant la limite supérieure lorsque k tend vers l'infini puis en faisant tendre i vers l'infini, on obtient (comme π_i vérifie $||v_\infty|| \geq \limsup_{k\to+\infty} ||v_k||$) que : $\lim_{i\to+\infty} ||\pi_i(v)|| = ||v||$. On vient précisément de montrer que $||v_k||$ converge vers $||v_\infty||$. Il en est de même pour $||v'_k||$.

Le lemme de renormalisation de Kadec-Klee implique que $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(v'_k)_{k\in\mathbf{N}}$ convergent fortement vers leur limite faible-étoile respective. Cependant, la relation $||\pi_j(v_k) - \pi_j(v'_k)|| \leq \frac{1}{k}$ implique en faisant tendre k vers l'infini puis j vers l'infini que $v_\infty = v'_\infty$. Les deux suites convergent donc fortement vers la même limite contredisant la relation valable pour tout k : $||v_k - v_{k'}|| \geq \varepsilon$.

2.3.3. Propriété RNP. Considérons dans cette courte sous-partie E comme étant un espace de Banach muni d'une norme $||.||$.

Définition 48. *On dit que E possède la propriété de Radon-Nikodym (en abrégé RNP) si pour tout espace mesuré (T, Σ, μ) et toute mesure m sur Σ à valeurs dans E absolument continue par rapport à μ et de variation finie, il existe $f : T \to E$ tel que $f \in L^1(\mu)$ et*

$$m(A) = \int_A f d\mu \text{ pour tout } A \in \Sigma.$$

On dira que E est un espace de Banach RNP s'il possède la propriété de Radon-Nikodym.

Exemples : On sait que tout espace de Banach réflexif (comme les espaces L^p pour $1 < p < +\infty$) est un espace de Banach RNP. En revanche, $L^1([0,1])$ n'est pas un espace de Banach RNP comme le montre l'exemple de l'introduction.

2.4. Espaces de Hajlasj-Sobolev à valeurs dans un espace de Banach

2.4.1. Rappels sur les espaces de Sobolev et les espaces de Hajlasz. Pour pouvoir définir convenablement la notion de différentielle faible dans notre contexte, il faut au préalable définir certaines notions et certains espaces fonctionnels qui sont le pendant des espaces des Sobolev euclidiens mais fondés sur des espaces métriques.

2.4.2. Définition des espaces de Hajlasz. Ici, (X, d, μ) désigne un espace métrique mesuré muni d'une distance d et d'une mesure de Radon positive μ. Considérons $(E, ||.||)$ un espace de Banach muni d'une norme $||.||$.

Définition 49. *On définit l'espace $M^{1,p}(X, E)$ comme l'ensemble des applications $f : X \to E$ appartenant à $L^p(X, E)$ pour lesquelles il existe une application $g : X \to \overline{\mathbf{R}}^+$ appartenant à $L^p(X, \overline{\mathbf{R}}^+)$ telle que pour μ-pp x, y de X :*

$$||f(x) - f(y)|| \leq d(x,y)(g(x) + g(y)).$$

De plus, si f appartient à $M^{1,p}(X,E)$, définissons :

$$||f||_{1,p} = ||f||_p + \inf ||g||_p$$

où l'infimum est pris sur toutes les application g dans $L^p(X, \overline{\mathbf{R}}^+)$ qui satisfont l'inégalité précédente. On peut alors remarquer que, muni de cette norme, l'espace $M^{1,p}(X,E)$ devient un espace de Banach.

On peut aussi définir une version locale de $M^{1,p}(X,E)$ noté $M^{1,p}_{loc.}(X,E)$ où l'on demande seulement sur les fonctions f et g précédentes une p-intégrabilité locale.

Remarque 1 : Lorsque $X = \mathbf{R}^n$, on peut montrer lorsque $p > 1$ que

$$M^{1,p}(X,E) = W^{1,p}(X,E).$$

Une preuve de ce fait est dans [**HK**]. L'inclusion $W^{1,p}(X,E) \subset M^{1,p}(X,E)$ provient des inégalités de Poincaré et d'un chainage de boules ainsi que de la bornitude dans L^p de la fonction maximale de Hardy-Littlewood . En revanche, l'autre inclusion provient du fait que les applications de $M^{1,p}(X,E)$ sont ACL. Une simple utilisation du théorème de représentation de Riesz permet alors de conclure.

Remarque 2 : On peut montrer lorsque X supporte des inégalités de Poincaré que l'ensemble des applications lipschitziennes bornées $Lip_\infty(X,E)$ est égal à $M^{1,\infty}(X,E)$. On a en particulier par la première remarque que $W^{1,\infty}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) = Lip_\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$.

Remarque 3 : Les applications lipschitziennes définies sur $\mathbf{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ sont bien différentes des applications de $W^{1,n}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. En effet, des exemples dus à Stein montrent qu'ils existent des applications de $W^{1,n}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ qui ne sont différentiables en aucun point. Enfin, pour plus de précisions, on peut se référer à l'article [**AC**] où des conditions optimales d'intégrabilité de la dérivée faible d'une application sont données pour garantir qu'une telle application est différentiable en Lebesgue presque tout point.

2.4.3. Lemmes d'approximation. Le lemme d'approximation suivant figure dans [**Hei**]. Nous en donnons une preuve complète par soucis de lisibilité. De plus, un analogue de ce type de résultat d'approximation existe pour des fonctions à valeurs banachiques mais s'appuie sur un résultat de densité très difficile prouvé dans [**LN**]. Nous voulions insister sur le fait que tous les résultats de cette partie pouvaient être démontrés de manière plus ou moins élémentaire.

Lemme 50. *Etant donné une fonction f de $M^{1,p}(X,\mathbf{R})$ (avec $1 \leq p < +\infty$) alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\Phi : X \to R$ lipschitzienne telle que $\mu(\{f \neq \Phi\}) \leq \varepsilon$ et $||f - \Phi||_{1,p} \leq \varepsilon$.*

Démonstration :

Soit $\lambda > 0$. Considérons l'ensemble

$$E_\lambda = \{x \in X : |f(x)| \leq \lambda, |g(x)| \leq \lambda\}.$$

Premièrement, on a : $\lambda^p \mu(E_\lambda^c)$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

En effet, on a :

$$\mu(E_\lambda^c) \leq \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) + \mu(\{x \in X : |g(x)| > \lambda\}).$$

De plus, par l'inégalité de Tchebytchev :

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda^p} \int_{\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}} |f(x)|^p d\mu(x)$$

$$\text{et } \mu(\{x \in X : |g(x)| > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda^p} \int_{\{x \in X : |g(x)| > \lambda\}} |g(x)|^p d\mu(x).$$

Comme $\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})$ et $\mu(\{x \in X : |g(x)| > \lambda\})$ tendent vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$ alors le théorème de convergence dominée nous permet d'obtenir le résultat recherché.

Comme f appartient à $M^{1,p}$ alors f est 2λ-lipschitzienne sur E_λ. De plus, par le théorème d'extension de Mc Shane (pour plus de précisions, on peut se référer au livre de [**Hei**]), f se prolonge en une application f_λ qui est 2λ-lipschitzienne sur X tout entier. Considérons

$$u_\lambda = \mathrm{sg}(f_\lambda) \min(\lambda, |f_\lambda|)$$

où sg désigne le signe de l'application prise en argument. Alors, u_λ coincide avec f sur E_λ. De plus, u_λ est 2λ-lipschitzienne sur X tout entier.

Pour ce dernier point, distinguons trois cas :

Premier cas : Soient x et y appartenant à E_λ. Alors

$$|u_\lambda(x) - u_\lambda(y)| = |f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \leq 2\lambda d(x, y)$$

car f_λ est 2λ-lipschitzienne.

Deuxième cas : Soient x et y appartenant à E_λ^c. Alors si $f_\lambda(x)$ et $f_\lambda(y)$ sont de signes différents :

$$|u_\lambda(x) - u_\lambda(y)| = \lambda|\mathrm{sg}(f_\lambda(x)) - \mathrm{sg}(f_\lambda(y))| = 2\lambda \leq \big||f_\lambda(x)| - |f_\lambda(y)|\big| \leq |f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \leq 2\lambda d(x, y).$$

Dans les autres cas, l'expression $|u_\lambda(x) - u_\lambda(y)|$ vaut zéro.

Troisième cas : Soient x appartenant à E_λ et y appartenant à E_λ^c. Alors

$$|u_\lambda(x) - u_\lambda(y)| = |\lambda \mathrm{sg}(f_\lambda(y)) - f_\lambda(x)|.$$

Si $f_\lambda(x)$ et $f_\lambda(y)$ sont de même signe alors

$$|\lambda \mathrm{sg}(f_\lambda(y)) - f_\lambda(x)| \leq \lambda - |f_\lambda(x)| \leq |f_\lambda(y)| - |f_\lambda(x)| \leq |f_\lambda(y) - f_\lambda(x)| \leq 2\lambda d(x, y).$$

Si $f_\lambda(x)$ et $f_\lambda(y)$ sont de signes différents alors

$$|\lambda \mathrm{sg}(f_\lambda(y)) - f_\lambda(x)| \leq |f_\lambda(y) - f_\lambda(x)| \leq 2\lambda d(x, y).$$

De plus,

$$||u_\lambda - u||_p = \int_{E_\lambda^c} |\lambda \mathrm{sg}(u_\lambda) - u|^p \leq 2^p \left(\int_{E_\lambda^c} |u|^p + \lambda^p \mu(E_\lambda^c) \right).$$

Ainsi, lorsque λ tend vers $+\infty$ alors u_λ tend vers u dans L^p.

Finalement, considérons :

$$g_\lambda = g\chi_{E_\lambda} + 2\lambda\chi_{E_\lambda^c}.$$

Alors g_λ appartient à L^p et pour μ-pp x, y :

$$|u_\lambda(x) - u_\lambda(y)| \leq d(x, y)(g_\lambda(x) + g_\lambda(y)).$$

En effet, si x et y appartiennent à E_λ alors

$$|u_\lambda(x) - u_\lambda(y)| = |u(x) - u(y)| \leq d(x, y)(g(x) + g(y)) \leq d(x, y)(g_\lambda(x) + g_\lambda(y)).$$

Si x appartient à E_λ^c alors

$$|u_\lambda(x) - u_\lambda(y)| \leq 2\lambda d(x,y) \leq d(x,y)(g_\lambda(x) + g_\lambda(y)).$$

De plus,

$$||g_\lambda - g||_p = \int_{E_\lambda^c} |2\lambda - g|^p \leq 2^p \left(\int_{E_\lambda^c} |g|^p + (2\lambda)^p \mu(E_\lambda^c) \right).$$

Ainsi, lorsque λ tend vers $+\infty$ alors g_λ tend vers g dans L^p. Ainsi, en prenant pour λ assez grand, $\phi = u_\lambda$ et g_λ son p-gradient associé, on obtient la conclusion voulue.

Enfin, les application g_λ sont uniformément ponctuellement dominées. En effet, un examen de la preuve montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $g_\lambda \leq C(f+g)$ pour tout λ.

Soit f appartenant à $M^{1,p}(X, \mathbf{R}^n)$. En regardant les composantes de f et en fixant sur $\mathbf{R}^n$ une norme $||.||$ (par exemple, celle du sup des composantes), on obtient la forme suivante du lemme précédent.

Lemme 51. *Soit une fonction f de $M^{1,p}(X, \mathbf{R}^n)$ (avec $1 \leq p < +\infty$). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\Phi : X \longmapsto \mathbf{R}^n$ lipschitzienne telle que $\mu(\{f \neq \Phi\}) \leq \varepsilon$ et $||f - \Phi||_{1,p} \leq \varepsilon$.*

2.4.4. Théorème d'uniformisation dans les espaces métriques. Le théorème suivant qui s'appelle le théorème d'Egoroff montre qu'en mesure **finie** la convergence simple (ou la convergence pp) est équivalente à la convergence uniforme en restriction à des ensembles de mesure arbitrairement grand.

Théorème 52. *Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie i.e. $\mu(E) < +\infty$. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de E à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ (ou à valeurs banachiques) convergeant μ-pp vers une fonction f. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable $A \subset E$ tel que $\mu(A) < \varepsilon$ et tel que $(f_n)_{|A^c \cap E}$ converge uniformément vers f.*

Démonstration :

On considère pour $n, k \geq 1$ les ensembles

$$E_{k,n} = \bigcap_{i \geq n} \left\{ x \in E : |f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Pour tout $k \geq 1$, la suite $(E_{k,n})_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante pour l'inclusion donc

$$\mu(\bigcup_{n \geq 1} E_{k,n}) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_{k,n}).$$

De plus, comme la suite de fonctions (f_n) converge μ-pp vers f, on a que pour tout $k \geq 1$:

$$\mu(\bigcup_{n \geq 1} E_{k,n}) = \mu(E).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Grace à la condition $\mu(E) < +\infty$, on peut trouver pour chaque $k \geq 1$ un entier n_k tel que

$$\mu(E_{k,n_k}) \geq \mu(E) - 2^{-k}\varepsilon.$$

Ainsi, l'ensemble $A = \bigcup_{k\geq 1} E^c_{k,n_k}$ convient.

On peut grace à la régularité de la mesure μ déduire une version du théorème 52 valable dans le cadre σ-finie et choisir les ensembles où la convergence est uniforme comme étant des ensembles compacts.

Théorème 53. *Soit (X, d, μ) un espace métrique mesuré, séparable et localement compact tel que la mesure μ est σ-finie. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans un espace de Banach E convergeant μ-p.p. vers une fonction f. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout compact $K \subset X$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset K$ tel que $\mu(K \cap K^c_\varepsilon) \leq \varepsilon$ et tel que $(f_n)_{|K_\varepsilon}$ converge uniformément vers f.*

Nous allons montrons une conséquence du théorème 53 qui stipule qu'en mesure finie la mesurabilité est équivalente à la continuité en restriction à des ensembles de mesure arbitrairement grand. Il s'agit du théorème de Lusin.

Théorème 54. *Soit (X, d, μ) un espace métrique mesuré, séparable et localement compact tel que la mesure μ est σ-finie et de Radon. Soit E un espace de Banach. Soit $f : X \to E$ une application mesurable. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout compact $K \subset X$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset K$ tel que $\mu(K^c_\varepsilon \cap K) \leq \varepsilon$ et $f_{|K_\varepsilon}$ est continue.*

Démonstration :
Comme μ est une mesure de Radon, les fonctions continues de K dans E sont denses dans $L^1(K, E)$. Ainsi, il existe une suite de fonctions continues $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $g_n\chi_K$ converge vers $f\chi_K$ dans $L^1(X, E)$. Par la réciproque du théorème de convergence dominée, on peut extraire de la précédente suite une sous-suite $(g_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ telle que g_{n_k} converge μ-pp vers f. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 53, il existe un compact $K_\varepsilon \subset K$ tel que $\mu(K^c_\varepsilon \cap K) \leq \varepsilon$ et $(g_{n_k})_{|K_\varepsilon}$ converge uniformément vers f. Or, l'ensemble des fonctions continues est fermé pour la convergence uniforme. Ceci termine la preuve du théorème.

2.4.5. Lemmes d'uniformisation dans les espaces métriques doublants.

Le lemme suivant permet de montrer qu'un espace métrique doublant est localement Ahlfors régulier inférieurement.

Lemme 55. *Soit (X,d,μ) un espace métrique mesuré, de constante de doublement β. Soient x_0 un point de X et $r_0 > 0$. Alors pour tout x de $B_{r_0}(x_0)$ et pour tout $r < r_0$, on a :*

$$\frac{\mu\left(B_r(x)\right)}{\mu\left(B_{r_0}(x_0)\right)} \geq \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\log\beta}{\log 2}}.$$

Démonstration :
On a clairement que $B_{r_0}(x_0)$ est inclus dans $B_{2r_0}(x)$ lorsque x appratient à $B_{r_0}(x_0)$. De plus, il existe un entier naturel l tel que

$$2^{-(l+1)}r_0 \leq r < 2^{-l}r_0.$$

On a donc que

$$l = \left[\frac{\log(\frac{r_0}{r})}{\log 2}\right] \leq \frac{\log(\frac{r_0}{r})}{\log 2}.$$

On obtient donc comme la mesure μ est doublante les inégalités suivantes :

$$\frac{\mu\left(B_r(x)\right)}{\mu\left(B_{r_0}(x_0)\right)} \geq \frac{\mu\left(B_r(x)\right)}{\mu\left(B_{2r_0}(x)\right)} \geq \frac{\mu\left(B_r(x)\right)}{\mu\left(B_{2^{l+2}r}(x)\right)} \geq \beta^{-(l+2)} \geq \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\log\beta}{\log 2}}.$$

On appelle le plus petit des exposants intervenant dans la minoration du lemme 55 la dimension homogène de X. Un espace métrique doublant est donc un espace homogène par le lemme 55. De plus, cette minoration est essentiellement optimale en l'exposant $\frac{\log\beta}{\log 2}$. En effet, en prenant μ la mesure de Lebesgue portée par $X = \mathbf{R}^n$, on a que $\frac{\log\beta}{\log 2} = n$.

Définition 56. *La constante ponctuelle supérieure de Lipschitz d'une application $f : X \to E$ au point x est :*

$$Lip(f)(x) = \limsup_{y\to x} \frac{||f(x)-f(y)||}{d(x,y)} = \limsup_{r\to 0} \sup_{y\in B_r(x)} \frac{||f(x)-f(y)||}{r}.$$

De manière analogue, on a :

Définition 57. *La constante ponctuelle supérieure de Lipschitz d'une application $f : X \to E$ au point x en restriction à $A \subset X$ est :*

$$Lip_{|A}(f)(x) = \limsup_{y\to x,\ y\in A} \frac{||f(x)-f(y)||}{d(x,y)} = \limsup_{r\to 0} \sup_{y\in B_r(x)\cap A} \frac{||f(x)-f(y)||}{r}.$$

On rappelle ce qu'est un point de densité d'une partie mesurable.

Définition 58. *On appelle un point x_0 d'une partie A μ-mesurable un point de densité de A si :*

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu(B_r(x_0)\cap A)}{\mu(B_r(x_0)} = 1.$$

Lorsque l'espace X est muni d'une mesure doublante μ, on sait par le théorème de différentiation de Lebesgue que μ-presque tout point d'un ensemble A de μ-mesure strictement positive est point de densité de A.

Le lemme suivant figure dans [**BRZ**]. Il est d'importance capitale car il permet d'obtenir un contrôle de la constante de Lipschitz sur des sous-ensembles de X pour lesquels les inégalités de Poincaré ne sont plus satisfaites. Pour un espace PI, les inégalités de Poincaré sont vraies sur des boules mais pas sur n'importe quel ensemble μ-mesurable. Ici, X désigne un espace métrique μ-mesuré doublant de constante de doublement β.

Lemme 59. *Soit f une application lipschitzienne de constante de lipschitz L définie de X à valeurs dans E. Si x_0 est un point de densité de $A \subset X$ alors :*

$$Lip_{|A}(f)(x_0) = Lip(f)(x_0).$$

Démonstration :

Tout d'abord montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout x de $B_r(x_0)$, il existe y appartenant à A tel que $d(x,y) \leq \varepsilon d(x,x_0)$. Raisonnons par l'absurde en supposons qu'il existe une suite x_n qui tend vers x_0 et telle que $B_{\varepsilon d(x_n,x_0)}(x_n) \cap A$ soit vide pour tout n. Comme x_0 est un point de densité de A alors, on a :

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu(B_r(x_0)\cap A^c)}{\mu(B_r(x_0))} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mu(B_{(1+\varepsilon)d(x_n,x_0)}(x_n)\cap A^c)}{\mu(B_{(1+\varepsilon)d(x_n,x_0)}(x_n))} = 0.$$

On obtient alors la chaine d'inégalités suivantes :

$$\frac{\mu(B_{(1+\varepsilon)d(x_n,x_0)}(x_n)\cap A^c)}{\mu(B_{(1+\varepsilon)d(x_n,x_0)}(x_n))} \geq \frac{\mu(B_{\varepsilon d(x_n,x_0)}(x_n)\cap A^c)}{\mu(B_{(1+\varepsilon)d(x_n,x_0)}(x_n))} \geq \frac{\mu(B_{\varepsilon d(x_n,x_0)}(x_n))}{\mu(B_{(1+\varepsilon)d(x_n,x_0)}(x_n))}.$$

Comme X est doublant de constante de doublement β alors par le lemme 55, on obtient que :

$$\frac{\mu(B_{\varepsilon d(x_n,x_0)}(x_n))}{\mu(B_{(1+\varepsilon)d(x_n,x_0)}(x_n))} \geq \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{\log\beta}{\log 2}}.$$

On obtient une contradiction en faisant tendre n vers $+\infty$.

On a par définition :

$$\mathrm{Lip}_{|A}(f)(x_0) \leq \mathrm{Lip}(f)(x_0).$$

Pour l'inégalité inverse, fixons $\varepsilon > 0$. Par définition du sup, il existe x_r appartenant à $B_r(x_0)$ tel que :

$$||f(x_r) - f(x_0)|| \geq -\varepsilon r + \sup_{y\in B_r(x_0)} ||f(y) - f(x_0)||.$$

Par la remarque précédente, pour r suffisamment petit, il existe y_r appartenant à A tel que :

$$d(y_r, x_r) \leq \varepsilon d(x_r, x_0) \leq \varepsilon r.$$

Ainsi, on obtient :

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)r} \sup_{y\in B_{(1+\varepsilon)r}(x_0)\cap A} ||f(y)-f(x_0)|| \geq \frac{||f(y_r) - f(x_0)||}{(1+\varepsilon)r} \geq \frac{||f(x_r) - f(x_0)|| - ||f(y_r) - f(x_r)||}{(1+\varepsilon)r}.$$

Il vient alors par définition de x_r :

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)r} \sup_{y\in B_{(1+\varepsilon)r}(x_0)\cap A} ||f(y)-f(x_0)|| \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)r}\left(-\varepsilon r + \sup_{y\in B_r(x_0)} ||f(y) - f(x_0)|| - \varepsilon r L\right).$$

En prenant la limite sup quand r tend vers 0 de l'expression précédente puis en faisant tendre ε vers 0, on obtient l'inégalité inverse.

2.4.6. Le cas des fonctions à valeurs banachiques. Le lemme suivant nous permet de choisir un gradient supérieur spécifique pour la classe des applications lipschitziennes. Ce lemme figure dans [**Che**] et montre la grande généralité et fléxibilité du concept de gradient supérieur.

Lemme 60. *Soit f une application lipschitzienne de X à valeurs dans E un espace de Banach muni d'une norme $||.||$. Alors Lip(f) est un gradient supérieur pour f.*

Démonstration :

Soient x, y deux points de X. Soit γ une courbe de longueur finie reliant x à y. On peut alors paramétrer $\gamma : [0, L] \to X$ par sa longueur d'arc. Soit π un élément de E^*. Alors, l'application $\pi(f(\gamma)) : [0, L] \to \mathbf{R}$ est lipschitzienne et donc par le théorème de Rademacher, $(\pi(f(\gamma)))'(t)$ existe en Lebesgue-pp t de $[0, L]$. On a plus précisément que :

$$\pi(f(x)) - \pi(f(y)) = \pi(f(\gamma(0))) - \pi(f(\gamma(L))) = \int_0^L (\pi(f(\gamma)))'(t)dt.$$

De plus, en un point t où $\pi(f)(\gamma)$ est différentiable, on a que :

$$|(\pi(f(\gamma)))'(t)| \leq \mathrm{Lip}(\pi(f))(t) \leq |||\pi|||\mathrm{Lip}(f)(t).$$

Ainsi, on obtient que :

$$||\pi(f(x)) - \pi(f(y))|| \leq |||\pi||| \int_\gamma \mathrm{Lip}(f).$$

Une application du théorème de Hahn-Banach permet alors d'obtenir que

$$||f(x) - f(y)|| \leq \int_\gamma \mathrm{Lip}(f).$$

Remarque : Le résultat précédent est valable pour tout espace de Banach E sans aucune condition géométrique sur E. Ceci est rendu possible grace à l'utilisation du théorème de Hahn-Banach. Cette astuce a notamment été utilisée dans [**HKST**].

Dans le lemme suivant, on démontre des propriétés de régularité des applications appartenant à un espace de Hajlasz-Sobolev surcritique. Ces résultats sont contenus dans [**HK**]. Il s'agit d'une routine d'adapter les preuves de [**HK**] au formalisme de l'intégrale de Bochner. Nous les présentons ici par soucis de complétude.

Lemme 61. *Soient X un $(1, p)$-espace PI, muni d'une mesure μ doublante, de constante de doublement β et E un espace de Banach muni d'une norme $||.||$. Soient $f \in L^1_{loc.}(X, E)$ et g un gradient supérieur pour f tel que $g \in L^q(X, \overline{\mathbf{R}}^+)$ avec $q > p > \frac{\log \beta}{\log 2}$. Alors, on a :*

i) *f appartient à $M^{1,q}(X, E)$.*

De plus, on a :

ii) *$Lip(f)$ appartient à $L^q(X, \overline{\mathbf{R}}^+)$*

et enfin,

iii) *f peut-être prolongée en une application α-holderienne avec $\alpha = (1 - \dfrac{\log \beta}{q \log 2})$.*

Démonstration :

Pour le point **i**), comme X est un $(1, p)$-espace PI alors on a pour tout $r > 0$ et pour tout x de X :

$$\frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} ||f - \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f d\mu|| \leq Cr \left(\frac{1}{\mu(B_{\lambda r}(x))} \int_{B_{\lambda r}(x)} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Posons $B_0 = B_{2r}(x)$. Prenons ensuite y un point de $B_{\frac{r}{\lambda}}(x)$ et considérons la suite décroissante de boules pour $j \geq 1$, $B_j = B_{\frac{r}{\lambda 2^j}}(y)$. Ainsi, on obtient par une inégalité triangulaire et du fait que μ soit doublante :

$$||\frac{1}{\mu(B_j)} \int_{B_j} f d\mu - \frac{1}{\mu(B_{j+1})} \int_{B_{j+1}} f d\mu|| \leq C\frac{r}{2^j} \left(\frac{1}{\mu(\lambda B_j)} \int_{\lambda B_j} g^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq Cr\frac{\beta^{\frac{j}{p}}}{2^j} \left(\frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ainsi, on obtient :

$$||\frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j} f d\mu - \frac{1}{\mu(B_{j+1})}\int_{B_{j+1}} f d\mu|| \leq Cr\frac{\beta^{\frac{j}{p}}}{2^j}(M(g^p)(x))^{\frac{1}{p}}$$

où M désigne la fonction maximale centrée d'Hardy-Littlewood.

Si y est un point de Lebesgue de f alors, on obtient en sommant les relations précédentes sur j (la condition $p > \frac{\log\beta}{\log 2}$ permet de voir que la série de terme général $\frac{\beta^{\frac{j}{p}}}{2^j}$ est convergente) :

$$||f(y) - \frac{1}{\mu(B_0)}\int_{B_0} f d\mu|| \leq Cr(M(g^p)(x))^{\frac{1}{p}}.$$

En particulier, on obtient donc pour μ-pp y, y' de X :

$$||f(y) - \frac{1}{\mu(B_{d(y,y')}(y))}\int_{B_{d(y,y')}(y)} f d\mu|| \leq Cd(y,y')\,(M(g^p)(y))^{\frac{1}{p}}$$

ainsi que la relation

$$||f(y') - \frac{1}{\mu(B_{d(y,y')}(y'))}\int_{B_{d(y,y')}(y')} f d\mu|| \leq Cd(y,y')\,(M(g^p)(y'))^{\frac{1}{p}}\,.$$

Or la boule $B_{2d(y,y')}(y')$ contient la boule $B_{d(y,y')}(y)$, on a donc par l'inégalité triangulaire et comme μ est doublante que :

$$||\frac{1}{\mu(B_{d(y,y')}(y))}\int_{B_{d(y,y')}(y)} f d\mu - \frac{1}{\mu(B_{d(y,y')}(y'))}\int_{B_{d(y,y')}(y')} f d\mu||$$

$$\leq C\frac{1}{\mu(B_{2d(y,y')}(y'))}\int_{B_{2d(y,y')}(y')} ||f - \frac{1}{\mu(B_{d(y,y')}(y'))}\int_{B_{d(y,y')}(y')} f d\mu|| d\mu.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\frac{1}{\mu(B_{2d(y,y')}(y'))}\int_{B_{2d(y,y')}(y')} ||f - \frac{1}{\mu(B_{d(y,y')}(y'))}\int_{B_{d(y,y')}(y')} f d\mu|| d\mu$$

$$\leq \frac{1}{\mu(B_{2d(y,y')}(y'))}\int_{B_{2d(y,y')}(y'))} ||f - \frac{1}{\mu(B_{2d(y,y')}(y'))}\int_{B_{2d(y,y')}(y')} f d\mu|| d\mu$$

$$+||\frac{1}{\mu(B_{2d(y,y')}(y'))}\int_{B_{2d(y,y')}(y')} f d\mu - \frac{1}{\mu(B_{d(y,y')}(y'))}\int_{B_{d(y,y')}(y')} f d\mu||.$$

L'inégalité de Poincaré $(1,p)$ portée par X et l'inégalité triangulaire permettent de conclure que :

$$||f(y) - f(y')|| \leq Cd(y,y')\left((M(g^p)(y))^{\frac{1}{p}} + (M(g^p)(y'))^{\frac{1}{p}}\right).$$

Les constantes intervenant dans le calcul précédent sont absolues (elles ne dépendent que de la constante de doublement et des constantes intervenant dans l'inégalité de Poincaré).

De plus, l'inégalité maximale de Hardy-Littlewood permet de voir que $(M(g^p))^{\frac{1}{p}}$ est dans L^q car $\frac{q}{p} > 1$ et g est dans L^q. Ainsi, f appartient à $M^{1,q}$.

Pour le point **iii**), on sait maintenant qu'il existe h dans L^q telle que :

$$||f(x) - f(y)|| \leq d(x,y)(h(x) + h(y)).$$

En intégrant sur $B_r(x)$ l'expression précédente et en utilisant successivement l'inégalité triangulaire puis l'inégalité de Jensen, il vient :

$$\frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)} \Big|\Big|f - \frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)} f d\mu\Big|\Big| d\mu$$

$$\leq \left(\frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)} \frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)} d(u,v)^q (h(u)+h(v))^q d\mu(u) d\mu(v)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ainsi, on obtient :

$$\frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)} \Big|\Big|f - \frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)} f d\mu\Big|\Big| d\mu \leq Cr\left(\frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)} h^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Posons $B_0 = B_{2r}(x)$. Prenons ensuite y un point de $B_r(x)$ et considérons la suite décroissante de boules pour $j \geq 1$, $B_j = B_{\frac{r}{2^j}}(y)$. Comme μ est doublante, on a alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \Big|\Big|\frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j} f d\mu - \frac{1}{\mu(B_{j+1})}\int_{B_{j+1}} f d\mu\Big|\Big| &\leq \frac{1}{\mu(B_{j+1})}\int_{B_{j+1}} \Big|\Big|f - \frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j} f d\mu\Big|\Big| d\mu \\ &\leq C\frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j} \Big|\Big|f - \frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j} f d\mu\Big|\Big| d\mu. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\Big|\Big|\frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j} f d\mu - \frac{1}{\mu(B_{j+1})}\int_{B_{j+1}} f d\mu\Big|\Big| \leq C\frac{r}{2^j}\left(\frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j} h^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq Cr\frac{\beta^{\frac{j}{q}}}{2^j}\left(\frac{1}{\mu(B_0)}\int_{B_0} h^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ainsi, si y est un point de Lebesgue de f, on obtient en sommant les inégalités précédentes (la condition $q > \frac{\log \beta}{\log 2}$ permet de voir que la série de terme général $\frac{\beta^{\frac{j}{q}}}{2^j}$ est convergente) :

$$\Big|\Big|f(y) - \frac{1}{\mu(B_0)}\int_{B_0} f d\mu\Big|\Big| \leq Cr\left(\frac{1}{\mu(B_0)}\int_{B_0} h^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ainsi, pour μ-pp y, y' de $B_r(x)$, on obtient :

$$||f(y) - f(y')|| \leq Cr\left(\frac{1}{\mu(B_0)}\int_{B_0} h^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

En particulier, on a pour μ-pp y, y' de X :

$$\frac{||f(y)-f(y')||}{d(y,y')} \leq C\left(\frac{1}{\mu(B_{4d(y,y')}(y))}\int_{B_{4d(y,y')}(y)} h^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Prenons x fixé, $r_0>0$ fixé, y, y' deux éléments de $B_{r_0}(x)$ et $r=d(y,y')$. Alors comme $B_{d(y,y')}$ est incluse dans $B_{2r_0}(x)$, par le lemme 55, on a :

$$\frac{\mu(B_{d(y,y')})}{\mu(B_{2r_0})} \geq C\left(\frac{d(y,y')}{r_0}\right)^{\frac{\log\beta}{\log 2}}.$$

Ainsi, comme μ est doublante, on obtient pour μ-pp y, y' de $B_{r_0}(x)$:

$$||f(y)-f(y')|| \leq C(r_0)d(y,y')^{(1-\frac{\log\beta}{q\log 2})}\left(\frac{1}{\mu(B_{r_0})}\int_{B_{r_0}} h^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ainsi, f admet un prolongement localement α-holdérien car la relation précédente est vraie μ-pp. Finalement, pour le point **ii**), si y est un point de Lebesgue de h, on obtient que :

$$\limsup_{y'\to y}\frac{||f(y)-f(y')||}{d(y,y')} \leq Ch(y).$$

On obtient ainsi que $\mathrm{Lip}(f)$ existe μ-pp et appartient en fait à L^q.

Le lemme 61 reste encore valable si on suppose seulement une L^q-intégrabilité locale pour g. Sous cette condition, f appartient alors à $M^{1,q}_{loc.}$ et reste localement α-holderienne.

2.5. Construction de la différentielle faible

Cette partie est cruciale pour pouvoir étendre la définition de Cheeger-différentiabilité aux applications qui sont à valeurs dans les espaces de Banach de dimension infinie. La stratégie est simple, on veut pouvoir se ramener au cas de la dimension finie. C'est grâce à une condition géométrique sur l'espace de Banach (le fait de posséder la propriété de Radon-Nikodym) que l'on peut utiliser les résultats connus de la dimension finie.

On rappelle dans cette courte sous-partie une notion classique de théorie de la mesure : la continuité approximative. On appellera d'ailleurs indifféremment un point de continuité approximative un point de Lebesgue ou un point de densité.

2.5.1. Continuité approximative. Soient (X,d,μ) un espace métrique mesuré et (Y,d') un espace métrique.

Définition 62. *Une application $f: X\to Y$ est approximativement continue en x si pour tout $\varepsilon>0$, l'ensemble*

$$S_\varepsilon(x,r)=\{x'\in B_r(x)|d'(f(x),f(x'))\leq\varepsilon\}$$

vérifie

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mu(S_\varepsilon(x,r))}{\mu(B_r(x))}=1.$$

Remarque : Il est clair qu'une application continue est approximativement continue.

Lemme 63. *Soit (X, d, μ) un espace métrique muni d'une mesure μ doublante. Soit (Y, d') un espace métrique séparable et soit $u : X \to Y$ une application μ-mesurable. Alors μ-presque tout point de X est un point de continuité approximative pour u.*

Démonstration :

Soit $j \in \mathbf{Z}$. Considérons un recouvrement dénombrable $(U_i^j)_{i\in\mathbf{N}}$ de Y par des ouverts de diamètre plus petit que 2^j. Notons $\Omega_i^j = u^{-1}(U_i^j)$. Alors ces éléments réalisent un recouvrement de X par des ensembles mesurables. Or, par le théorème de différentiation de Lebesgue appliqué à la fonction indicatrice de Ω_i^j, on sait qu'il existe un ensemble $\boldsymbol{\Omega_i^j}$ de μ-mesure pleine dans Ω_i^j vérifiant pour tout $x \in \boldsymbol{\Omega_i^j}$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu(B_r(x) \cap \Omega_i^j)}{\mu(B_r(x))} = 1.$$

Posons $A = \cap_{j\in\mathbf{Z}} \cup_{i\in\mathbf{N}} \boldsymbol{\Omega_i^j}$. Cet ensemble est de μ-mesure totale (comme é une intersection dénombrable d'ensembles de mesure pleine) et est un ensemble de points de continuité approchée pour u. En effet, soient $\varepsilon > 0$ et $r > 0$. Considérons $x \in A$. Alors pour tout j, il existe un certain indice i_j pour lequel $x \in \boldsymbol{\Omega_{i_j}^j}$. Définissons l'ensemble $S_\varepsilon(x, r) = \{x' \in B_r(x) | d'(u(x), u(x')) < \varepsilon\}$. Les ensembles $S_\varepsilon(x, r)$ sont emboités. Ainsi, pour j dans $\mathbf{Z}$ tel que $2^j \le \varepsilon$ et par construction des différents recouvrements, on a :

$$\frac{\mu(S_\varepsilon(x, r) \cap B_r(x))}{\mu(B_r(x))} \ge \frac{\mu(S_{2^j}(x, r) \cap B_r(x))}{\mu(B_r(x))} \ge \frac{\mu(\Omega_{i_j}^j \cap B_r(x))}{\mu(B_r(x))}.$$

La dernière inégalité se justifie de la manière suivante. Par construction, on a que pour tout j, $u(x)$ appartient à $U_{i_j}^j$. Si x' appartient à $\Omega_{i_j}^j$ alors $u(x')$ appartient à $U_{i_j}^j$. Comme pour tout j, le diamètre de $U_{i_j}^j$ est plus petit que 2^j, on obtient que $d'(u(x), u(x')) \le 2^j$. Ainsi, en faisant tendre r vers 0, on obtient que x est un point de continuité approchée pour u.

2.5.2. Rappels sur les plans tangents généralisés. Considérons (X, d, μ) un espace métrique PI. Par une remarque présente dans l'article [**CK1**], on peut définir en μ-presque tout point de l'intersection de deux systèmes de coordonnées des fonctions de transition mesurables et bornées (en fait, des jacobiens mesurables et bornées) qui permettent de définir un fibré contangent T^*X. Il s'agit d'un fibré vectoriel mesurable et qui porte une norme naturelle. Cette norme est caractérisée par le fait que tout application lipschitzienne $f : X \to \mathbf{R}$ définit une section mesurable Df dont la norme en restriction à chaque fibre est donnée par la constante de Lipschitz ponctuelle supérieure de f. Le fibré tangent TX est défini comme le dual du fibré T^*X et est muni de la norme duale. De plus par une remarque présente dans l'article [**CK4**], il provient directement de la définition d'un atlas que si $\{U_\alpha, u_\alpha\}$ et $\{V_\beta, v_\beta\}$ sont deux systèmes de cartes de deux atlas différents, alors la matrice des dérivées partielles $(\dfrac{du_\alpha^i}{dv_\beta^j})_{i,j}$ est définie presque partout et est inversible sur l'intersection $U_\alpha \cap V_\beta$. Cette quantité est un invariant bi-Lipschitz du fibré tangent mesurable TX. On appelle plan tangent généralisé en x et on note T_xX l'une des fibres mesurablement définies en un point x de X de

TX préalablement défini. On note $|.|_x$ la norme en restriction au fibre T_xX provenant de la construction duale précédente. Elle provient en fait d'un produit scalaire mesurable défini sur le fibré tangent de X et est créee par la structure forte de différentiation portée par X (pour plus de détails, on peut consulter l'article [**Che**] ainsi que l'article [**K**]).

2.5.3. Exposé de la construction. On va introduire la notion de dérivée faible généralisée (on dira simplement dérivée faible) d'une application $f : X \to E$ pour laquelle $\mathrm{Lip}(f)(x)$ est finie en μ-pp x de X. On décide ici que X est un espace PI et que E est un espace de Banach GFDA.

Soit f une application pour laquelle $\mathrm{Lip}(f)(x)$ est finie en μ-pp x de X et $\{V_i, \pi_i\}$ une FDA de E. Comme $\mathrm{Lip}(f)(x)$ est finie en μ-pp x de X alors, par le théorème de différentiation de [**BRZ**], on sait que $f_i = \pi_i(f)$ est différentiable μ-pp (car $\mathrm{Lip}(\pi_i(f))(x) \leq \mathrm{Lip}(f)(x)$ en μ-pp x de X). On obtient donc une famille compatible mais pas nécéssairement bornée ponctuellement d'applications linéaires $D_xf_i : T_xE \to V_i$ définies pour μ-presque tout x et uniquement déterminées en dehors d'ensembles de μ-mesure nulle où T_xE désigne un plan tangent généralisé en x (notion développée dans la théorie de la différentiation de Cheeger dans l'article [**Che**]). De plus, les éléments de cette famille sont μ-mesurables.

Si $(D_xf_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ est une famille bornée ponctuellement en μ-pp x de X alors, on peut définir la dérivée faible de f en x relativement à la FDA $\{V_i, \pi_i\}$. Il s'agit de l'application linéaire induite par les applications linéaires précédentes et que l'on note $\{D_xf_i\} : T_xE \to \lim\limits_{\leftarrow} V_i$. La dérivée faible est définie pour μ- presque tout x et est μ-mesurable au sens où $x \longmapsto ||\{D_xf_i\}||$ est μ-mesurable.

Soit $\{A_\alpha, u_\alpha\}$ un atlas de X. Considérons F un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $f : X \to F$ une application Cheeger-différentiable en x relativement à l'atlas précédent (alors x appartient à A_α pour un certain α).

Définition 64. *On dit que x est un point de continuité approximative de D_xf si : x est un point de densité de A_α, si $D_xf_{|A_\alpha}$ est approximativement continue en x vis-à-vis de la trivialisation $TX_{|A_\alpha} \to A_\alpha \times \mathbf{R}^{n_\alpha}$ induite par u_α.*

Dans la définition qui suit, on se sert de la définition précédente mais avec $F = V_i$.

Définition 65. *Un point x est un point de continuité approximative faible si x est un point où la différentielle faible est définie et si pour tout i, x est un point de continuité approximative de D_xf_i.*

Il est important de remarquer que le fibré tangent TX est muni de la pseudo-distance $||.||_\infty = \lim_{i\to+\infty} ||.||_i$ avec $||.||_i = (Df_i)^*(||.||_{V_i})$ qui vérifie $||.||_i \leq C||.||_{TX}$ où C est une constante.

Pour les applications lipschitziennes $f : X \to E$, la différentielle faible est automatiquement (modulo le théorème de différentiation prouvée dans [**Che**]) bien définie en μ-pp point de X. On veut ici montrer que pour une fonction f appartenant à $M^{1,p}_{loc.}(X, E)$ (avec $p > \frac{\log\beta}{\log 2}$) sa différentielle faible existe en μ-pp point de X. Pour démontrer cela, il faut montrer que si $f : X \to F$ est une application lipschitzienne où F est un espace vectoriel normé de dimension finie alors en un point x où f est Cheeger-différentiable,

$\mathrm{Lip}(f)(x)$ est uniformément comparable à $||D_x f||$ (les constantes qui interviennent ne dépendant que de X mais pas de F). Dès que l'on aura obtenu cette dernière propriété, la différentielle faible sera μ-mesurable. En effet, par le théorème de différentiation de [**BRZ**], on a que pour tout i, l'ensemble des points de continuité approximative de $D_x f_i$ est de μ-mesure totale. Ainsi, l'ensemble des points x de continuité approximative faible de $\{D_x f_i\}$ sera de μ-mesure totale.

Ensuite, on étendra ce dernier résultat à une classe de Banach plus large, les espaces de Banach RNP. En effet, lorsque la différentielle faible d'une application est bien définie, il est montré dans [**CK3**] qu'elle vit en fait dans E et non dans $\underleftarrow{\lim} V_i$. Une propriété topologique des espaces de Banach RNP, mise en évidence dans [**CK4**], l'ANP (dont la définition figure dans le paragraphe définition 70) permet de se ramener au cas d'un espace de Banach GFDA. Il faut de plus supposer que la mesure μ portée par X est **complète** et que l'application $f : X \to E$ est continue (ou possède un représentant continue) ce qui est le cas si f appartient à $M^{1,p}(X, E)$ (pour p assez grand) pour pouvoir utiliser une notion de théorie descriptive des ensembles utilisée dans [**CK4**]. On peut se référer aux articles [**CK3**] et [**CK4**] pour plus de détails.

Lemme 66. *Soit $f : X \to F$ une application **lipschitzienne** où X est un espace PI et F un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors pour μ-pp x appartenant à X, on a :*

$$||D_x f|| \leq C Lip(f)(x)$$

où C est une constante positive ne dépendant que de X.

Démonstration :

Soit π un élément de F^*. Alors, $\pi(f) : X \to \mathbf{R}$ est lipschitzienne. D'après le théorème de différentiation de [**Che**] et d'après la comparaison de la norme de la Cheeger-différentielle et de la constante de Lipschitz ponctuelle supérieure d'une application lipschitzienne établie dans [**K**], on a pour μ-pp x de X et pour tout ξ de $T_x X$:

$$||D_x(\pi(f))(\xi)|| \leq C\mathrm{Lip}(\pi(f))(x) \leq C|||\pi|||\mathrm{Lip}(f)(x)$$

avec une constante $C > 0$ ne dépendant que de X. Or, on a la relation de commutation suivante :

$$||D_x(\pi(f)(\xi)|| = ||\pi(D_x f(\xi))||.$$

Et, par le théorème de Hahn-Banach, on a :

$$|||D_x f||| = \sup_{|\xi|_x \leq 1, |||\pi||| \leq 1} ||\pi(D_x f(\xi))||$$

où $|.|_x$ désigne la norme provenant d'un produit scalaire mesurable sur le fibré tangent de X. On peut alors choisir une famille dénombrable de formes linéaires de norme plus petite que 1 et dense dans la boule unité de F^* pour éviter des problèmes de mesurabilité. Le théorème de Hahn-Banach reste encore valable pour cette nouvelle famille et on obtient le résultat voulu.

Avant de démontrer le lemme qui suit, nous avons besoin de donner une définition concernant un autre type d'espace de Sobolev fondé sur les espaces métriques (qui s'avère coincider avec un espace de Haljasz dans le cas où X est un $(1, p)$-PI espace avec $p > 1$ par la caractérisation des espaces de Sobolev donnée dans [**Sh**]).

Définition 67. *L'espace $N^{1,p}(X,E)$ est l'ensemble des applications f appartenant à $L^p(X,E)$ pour lesquelles il existe une application ρ qui est un p-gradient faible supérieur pour f. Un p-gradient faible supérieur ρ pour f est une application μ-mesurable positive et p-intégrable, définie pour un ensemble de courbes localement rectifiable $\gamma : [0,T] \longmapsto X$ de p-module négligeable et satisfait :*

$$|f(\gamma(T)) - f(\gamma(0))| \leq \int_\gamma \rho dH^1$$

où H^1 désigne la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle déterminée par la métrique d. On rappelle que le p-module d'une famille Γ de courbes localement rectifiables, noté $mod_p(\Gamma)$, est :

$$mod_p(\Gamma) = \inf\{\int \rho^p d\mu \mid \forall\gamma \in \Gamma : \int_\gamma \rho dH^1 \geq 1\}.$$

L'espace $N^{1,p}$ muni de la norme :

$$||f||_{N^{1,p}} = ||f||_p + \inf\{||\rho||_p \mid \rho \text{ est un } p \text{ gradient faible supérieur pour } f\}$$

est un espace de Banach. Il existe aussi une version locale : $N^{1,p}_{loc.}$ où on impose seulement sur f et ρ une p-intégrabilité locale.

Lemme 68. *Soit f une application de $M^{1,p}(X,E)$ avec $p > \frac{\log\beta}{\log 2}$ où X est un $(1,p)$-PI-espace et E est un espace de Banach GFDA alors la différentielle faible de f existe μ-pp et $x \longmapsto ||\{D_x f_i\}||$ est μ-mesurable.*

Démonstration :

Notons $f_i = \pi_i(f)$. Alors f_i est une application de $M^{1,p}(X,V_i)$. Par le lemme 51, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\Phi_\varepsilon : X \longmapsto V_i$ lipschitzienne telle que $\mu(\{f_i \neq \Phi_\varepsilon\}) \leq \varepsilon$ et $||f_i - \Phi_\varepsilon||_{1,p} \leq \varepsilon$. Or, par le théorème de différentiation de [**BRZ**], $D_x f_i$ existe en μ-pp x. Ainsi, d'après le lemme 66, on a : $|||D_x\Phi_\varepsilon||| \leq C\text{Lip}(\Phi_\varepsilon)(x)$ (avec C une constante indépendante de i) pour μ-pp x de X. En notant $A_\varepsilon = \{x \in X | f_i(x) = \phi(x)\}$ (on peut imposer que les ensembles A_ε soient croissants en ε tendant vers 0), on a - en utilisant le lemme 59- pour μ-pp x de A_ε :

$$|||D_x\Phi_\varepsilon||| \leq C\text{Lip}(\Phi_\varepsilon)(x) = C\text{Lip}(\Phi_\varepsilon)_{|A_\varepsilon}(x) = C\text{Lip}(f_i)_{|A_\varepsilon}(x) \leq C\text{Lip}(f_i)(x) \leq C\text{Lip}(f)(x)$$

(pour la dernière inégalité, on a utilisé que la norme d'opérateur de π_i est uniformément bornée en i). De plus, en utilisant le théorème de [**KZ**], c'est-à-dire que l'exposant admissible dans les inégalités de Poincaré est ouvert dans $[1,+\infty[$ puis la caractérisation des différents espaces de Sobolev donnée dans [**Sh**], on obtient que pour $p > 1$ (ce qui est le cas ici car X étant connexe sa dimension homogène est plus grande que 1) : $N^{1,p}(X,V_i) = M^{1,p}(X,V_i)$. De plus, par un résultat de convergence dans les espaces de Sobolev établi dans [**BRZ**], on a que si u_j converge vers u dans $N^{1,p}$ alors u_j tend vers u dans L^p et $|||D_x u_j|||$ tend vers $|||D_x u|||$ dans L^p. Ainsi, on peut extraire une sous-suite de la suite $|||D_x\Phi_\varepsilon|||$ convergeant en μ-pp x vers $|||D_x f_i|||$ (car la suite (Φ_ε) est convergente dans L^p). De plus, la croissance des ensembles A_ε, nous permet de conclure que pour μ-pp x de X :

$$|||D_x f_i||| \leq C\text{Lip}(f)(x).$$

Comme $\text{Lip}(f)$ est dans L^p, le théorème de Lusin appliqué à $\text{Lip}(f)$ permet alors de conclure.

Lemme 69. *Soit f une application de $M^{1,p}(X,E)$ avec $p > \frac{\log \beta}{\log 2}$ où X est un PI-espace et E un espace de Banach GFDA. Alors l'application $x \longmapsto \{D_x f_i\}$ est μ-mesurable.*

Démonstration :

Par le théorème de différentiation de [**BRZ**], on a que les applications $x \longmapsto D_x f_i$ sont μ-mesurables pour tout i. Ainsi, par le théorème de Lusin, ces applications sont, en dehors d'un même ensemble de mesure arbitrairement petite, uniformément continues et par le lemme 68, bornées ponctuellement par une meme constante. Comme $\lim_{i\to+\infty} ||\pi_j(D_x f_i)|| = ||\pi_j(\{D_x f_i\})||$, on a par le théorème d'Egorov, une convergence uniforme en dehors d'un ensemble de mesure arbitrairement petite. Comme les π_j sont une GFDA, on en déduit que l'application $x \longmapsto \{D_x f_i\}$ est continue en restriction à un ensemble de mesure arbitrairement grand. Ainsi, l'application $x \longmapsto \{D_x f_i\}$ est μ-mesurable.

Pour généraliser le lemme précédent aux espaces de Banach RNP. Nous devons introduire la définition suivante.

Définition 70. *Le couple (Y^*, V) a la propriété asymptotique de renormement (ANP en abrégé) si une suite $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de V converge fortement étant donné qu'elle est faible* convergente et que la suite des normes converge vers la norme de la limite faible*.*

Définition 71. *Un espace de Banach U possède la propriété asymptotique de renormement s'il existe un couple (Y^*, V) possédant l'ANP avec U isomorphe à V.*

Dans l'article [**CK3**], il est montré qu'un espace de Banach qui est le dual d'un Banach séparable est isomorphe à un Banach GFDA si et seulement si il possède la propriété de Radon-Nikodym. De plus, il est rappelé qu'un Banach séparable RNP possède l'ANP. De plus, une suite v_k bornée converge faible* vers v_∞ si pour tout j : $\pi_j(v_k)$ converge vers $\pi_j(v_\infty)$. Cette condition est automatiquement satisfaite si $v_k = D_x(f_k)$ dès que l'on sait que les différentielles faibles sont bornées ponctuellement μ-pp x de X. La grosse difficulté pour appliquer l'ANP de E est alors de montrer que la différentielle faible est à valeurs dans E. La géométrie de X lorsque X est un PI-espace permet de montrer cette dernière propriété, il s'agit là du travail de [**CK4**].

En fait, si E est un Banach GFDA, on a, par [**CK3**], que E s'identifie par le biais de π au dual d'un espace de Banach séparable. Par [**CK3**], E posséde donc l'ANP et par la définition 70, on en déduit que l'application $x \longmapsto \{D_x f_i\}$ est continue en restriction à un ensemble de mesure arbitrairement grand. Ainsi, l'application $x \longmapsto \{D_x f_i\}$ est μ-mesurable. On peut alors remarquer que le lemme 69 reste encore valable si E est un Banach ANP (et donc reste valable si E est un Banach RNP).

Nous pouvons donc terminer cette section avec une définition essentielle au bon déroulement de la preuve des deux théorèmes principaux. En fait, nous allons montrer que lorsque f a une régularité Sobolev surcritique (c'est-à-dire que l'exposant d'intégrabilité est strictement supérieur à la dimension homogène de l'espace métrique ambient) alors f est finie-dimensionnelle μ presque partout au premier ordre vis-à-vis de l'image sa différentielle faible.

Définition 72. *On dit qu'une application $f : X \to E$ est finie-dimensionnelle au premier ordre en $x \in X$ s'il existe un sous-espace de dimension finie V de E pour* *lequel :*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\sup_{x'\in B_r(x)} d(f(x')-f(x),V)=0$$

où $d(.,V)$ désigne la distance au sous-espace V d'un vecteur de E.

On a le résultat suivant :

Proposition 73. *Soit $\{V_i,\pi_i\}$ une approximation de dimension finie de E. Si $f : X \to E$ est finie-dimensionnelle au premier ordre en un point $x \in E$ et que x est un point où f est faiblement différentiable relativement au système $\{V_i,\pi_i\}$ alors f est différentiable en x.*

Démonstration :
Soit V un sous-espace de E pour lequel :

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\sup_{x'\in B_r(x)} d(f(x')-f(x),V)=0.$$

Comme V est de dimension finie, il existe une projection $\Psi : E \to V$ continue (de norme plus petite que la dimension de V). Posons $\mathbf{f}(.) = f(x) + \Psi(f(.) - f(x))$. Comme Ψ est continue et que f est finie-dimensionnelle au premier ordre en x alors f et $\mathbf{f}$ sont dépendantes au premier ordre en x. Comme f est faiblement différentiable relativement au système $\{V_i,\pi_i\}$ au point x alors il en est de même pour $\mathbf{f}$. Comme $\mathbf{f}$ est à valeurs dans un espace de dimension finie alors $\mathbf{f}$ est différentiable en x car $\mathbf{f}$ est faiblement différentiable. De plus, comme f et $\mathbf{f}$ sont dépendantes au premier ordre en x alors f est Cheeger-différentiable.

2.6. Preuve du théorème principal

Soit $\{A_\alpha, u_\alpha\}$ un atlas de X. On peut supposer que la différentielle des u_α (qui existe μ-presque partout par le théorème de Cheeger [**Che**]) est inversible sur son image. En effet, les composantes de u_α sont indépendantes au premier ordre en μ-presque tout point x de A_α et comme T_xE est de dimension finie (par le théorème de Cheeger [**Che**]) alors cela implique l'injectivité la différentielle de u_α en x. Quitte à corestreindre l'application u_α, on peut supposer que D_xu_α réalise un isomorphisme de T_xE vers $\mathbf{R}^{n_\alpha}$ (avec éventuellement un autre n_α) de norme plus petite que la constante de lipschitz de u_α : L_α.
On peut alors définir :

$$\nu(x,i)=\sup_{\{\xi\in T_xE : ||\xi||\le 1\}}(||\xi||_\infty - ||\xi||_i).$$

On peut remarquer que $\nu(.,i)$ est uniformément bornée, mesurable et converge μ-pp vers 0.

Théorème 74. *Soient X un $(1,p)$-espace PI, muni d'une mesure μ doublante, de constante de doublement β et E un espace de Banach GFDA séparable. Soient $f \in L^1_{loc.}(X,E)$ et g un gradient supérieur pour f tel que $g \in L^q(X,\mathbf{R}^+)$ avec $q > p > \frac{\log\beta}{\log 2}$. Alors f est Cheeger-différentiable μ-pp (ou est différentiable vis-à-vis d'une structure forte de différentiabilité issue de X, notion développée dans* [**K**]*).*

Démonstration :

Le lemme 61 permet de montrer que f est localement holdérienne (en particulier f est continue). Ainsi, f appartient à $M^{1,q}_{loc.}$. De plus, $\mathrm{Lip}f(x) < +\infty$ μ-pp x et même $\mathrm{Lip}f$ appartient à L^q.

De plus, comme pour tout $x \in E$: $||\pi_i(x)|| \leq C||x||$ (on peut choisir $C = 1$, par construction des projections).

On a la relation :

$$\mathrm{Lip}(f_i)(x) \leq C\mathrm{Lip}(f)(x) \ \mu - \text{pp x}.$$

Ainsi, par [**BRZ**], $\pi_i(f) = f_i$ est Cheeger-différentiable μ-pp. Ainsi, f est faiblement différentiable μ-pp.

Soit $A \subset X$ tel que $0 < \mu(A) < +\infty$. Comme $x \to ||\{D_x f_i\}||$ est mesurable par le lemme 68, le théorème de Lusin nous permet de dire qu'il existe $K_\varepsilon \subset A$ et $L_\varepsilon > 0$ (on peut supposer que L_ε tend vers $+\infty$ lorsque ε tend vers 0) tel que :

$$\mu(A \cap K_\varepsilon^c) \text{ et } ||\{D_x f_i\}||_{|K_\varepsilon} \leq L_\varepsilon.$$

Soit x un point de K_ε où la différentielle faible de f existe. Par le théorème de Cheeger [**Che**], on sait que $\mathbf{Im}(\{D_x f_i\})$ est de dimension finie. On voudrait montrer que f est finie-dimensionnelle au premier ordre en x vis-à-vis de $\mathbf{Im}(\{D_x f_i\})$.

Rappelons que comme $\{V_i, \pi_i\}$ est une bonne approximation de dimension finie de E alors π est un isométrie surjective de E vers $\lim\limits_{\leftarrow} V_i$. On peut donc identifier la limite inverse $\lim\limits_{\leftarrow} V_i$ à E.

Notons $\mathbf{D}(Du_\alpha)$ l'ensemble des points de A_α où u_α est différentiable. De même, notons $\mathbf{D}(\{Df_i\})$ l'ensemble des points de X où f est faiblement différentiable. On sait que ces deux ensembles sont de mesure pleine (pour le deuxième point, cela provient du lemme 69).

Quitte à faire des changements d'échelle (on le fait par commodité juste pour simplifier les constantes qui interviennent le long du calcul), on peut supposer que pour tout α, pour tout $x \in \mathbf{D}(Du_\alpha)$ et pour tout $\xi \in \mathbf{R}^{n_\alpha}$ avec $||\xi|| \leq 1$, on a :

$$||(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)|| \leq \min(1, \frac{1}{L_\varepsilon}).$$

Sous ces conditions, pour tout $x \in \mathbf{D}(\{Df_i\}) \cap \mathbf{D}(Du_\alpha) \cap K_\varepsilon$, on a :

$$||(\{D_x f_i\})(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)|| \leq 1.$$

Notons $X_1 = \mathbf{D}(\{Df_i\}) \cap \mathbf{D}(Du_\alpha)$.

Soit $\varepsilon_1 > 0$. Par le théorème d'Egorov, il existe un ensemble Z_{ε_1} inclus dans K_ε tel que $\nu(., i)$ converge uniformément sur Z_{ε_1} avec $\mu(K_\varepsilon \cap Z_{\varepsilon_1}^c) \leq \varepsilon_1$. Autrement dit, il existe une suite ρ_i décroissante et tendant vers 0 telle que $\nu(x, i) \leq \rho_i$.

Notons X_2 inclus dans $\mathbf{D}(\{Df_i\})$ l'ensemble des points de continuité approchée de $\{Df_i\}$. Cet ensemble est de μ-mesure pleine. Considérons alors $X_3 = X_1 \cap X_2$.

Soient $\varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$. Soit $x \in X_3$.

Comme x est un point de continuité approchée de $D_x f_j$ pour tout j alors pour un certain α, on a x appartient à A_α. Sous ces conditions, il existe un certain réel r_0 et un sous-ensemble θ_r de $B_{2r}(x) \cap A_\alpha$ tels que pour tout $r \leq r_0$:

$$\frac{\mu(\theta_r)}{\mu(B_r(x))} \geq 1 - \varepsilon_2.$$

De plus, pour tout $x' \in \theta_r$, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^{n_\alpha}$ avec $||\xi|| \leq 1$ et pour tout N, on a :

$$||(D_{x'}f_j)(D_{x'}u_\alpha)^{-1}(\xi) - (D_x f_j)(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)|| \leq \frac{1}{N}.$$

En utilisant le fait que E possède la propriété de bonne approximation finie-dimensionnelle vis-à-vis du système $\{V_i, \pi_i\}$, il existe un rang N tel que la suite ρ_i soit ε_3-déterminée. On obtient alors pour tout $x' \in \theta_r \cap Z_{\varepsilon_1}$, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^{n_\alpha}$ avec $||\xi|| \leq 1$ et pour tout i :

$$||(D_{x'}f_i)(D_{x'}u_\alpha)^{-1}(\xi) - (D_x f_i)(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)|| \leq \varepsilon_3.$$

On obtient donc pour tout $x' \in \theta_r \cap Z_{\varepsilon_1}$, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^{n_\alpha}$ avec $||\xi|| \leq 1$:

$$||\{D_{x'}f_i\}(D_{x'}u_\alpha)^{-1}(\xi) - \{D_x f_i\}(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)|| \leq \varepsilon_3.$$

On a, en particulier, que

$$d\big(\{D_{x'}f_i\}(D_{x'}u_\alpha)^{-1}(\xi), \mathbf{Im}(\{D_x f_i\})\big) \leq \varepsilon_3.$$

Soit k un entier et considérons une forme linéaire $l \in V_k^*$ de norme plus petite que 1 s'annulant sur $\mathbf{Im}(D_x f_k)$ inclus dans V_k. Pour tout $x' \in \theta_r \cap Z_{\varepsilon_1}$ et pour tout $\xi \in \mathbf{R}^{n_\alpha}$ avec $||\xi|| \leq 1$, il vient par la relation précédente composée par l :

$$\begin{aligned}\big|l\left((D_{x'}f_k)(D_{x'}u_\alpha)^{-1}(\xi)\right) - l\left((D_x f_i)(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)\right)\big| &= \big|l\left((D_{x'}f_i)(D_{x'}u_\alpha)^{-1}(\xi)\right)\big| \\ &= \big|(D_{x'}(l(f_k)))(D_{x'}u_\alpha)^{-1}(\xi)\big| \\ &\leq \varepsilon_3.\end{aligned}$$

Notons $M_r(l(f_k)) = \sup\limits_{z \in B_r(x)} l(f_k)(z)$ et $m_r(l(f_k)) = \inf_{z \in B_r(x)} l(f_k)(z)$.

On a à k fixé que f_k appartient à $M^{1,q}_{loc.}$. Ainsi, en appliquant le lemme 50, pour tout $\varepsilon_4 > 0$ (qui dépend de k), il existe $\phi_{k,j}$ lipschitzienne telle que :

$$\mu\left(\phi_{k,j} \neq f_k\right) \leq \frac{\varepsilon_4}{2^{j+1}} \text{ et } ||\phi_{k,j} - f_k||_{M^{1,q}} \leq \frac{\varepsilon_4}{2^{j+1}}.$$

Soit y un point de $B_{\frac{r}{\lambda}}(x)$. Considérons une suite de boules B_j incluses dans $B_{2r}(x)$ qui se contracte en y avec $B_0 = B_{2r}(x)$ et $B_j = B_{\frac{r}{2^j\lambda}}(y)$ pour $j \geq 1$. Alors comme $l(f_k)$ est continue (car l et f le sont), il vient :

$$\big|l(f_k)(y) - \frac{1}{\mu(B_0)}\int_{B_0} l(f_k)d\mu\big| \leq \sum_{j=0}^{+\infty}\big|\frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j} l(f_k)d\mu - \frac{1}{\mu(B_{j+1})}\int_{B_{j+1}} l(f_k)d\mu\big|.$$

Ensuite, on a pour tout j :

$$\begin{aligned}\big|\frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j} l(f_k)d\mu - \frac{1}{\mu(B_{j+1})}\int_{B_{j+1}} l(f_k)d\mu\big| &\leq \frac{2}{\mu(B_{j+1})}\int_{B_j}\big|l(f_k) - \phi_{k,j}\big|d\mu \\ &\quad + \big|\frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j}\phi_{k,j}d\mu - \frac{1}{\mu(B_{j+1})}\int_{B_{j+1}}\phi_{k,j}d\mu\big|.\end{aligned}$$

Par l'inégalité d'Holder, on a :

$$\frac{1}{\mu(B_{j+1})}\int_{B_j}\big|l(f_k) - \phi_{k,j}\big|d\mu \leq \frac{\varepsilon_4}{2^j}\frac{\mu(B_j)^{1-\frac{1}{q}}}{\mu(B_{j+1})} \leq C\frac{\beta^{\frac{j}{q}}}{2^j}\frac{\varepsilon_4}{\mu(B_0)}.$$

Du fait que X soit un $(1,p)$-PI espace, on obtient :

$$\left|\frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j}\phi_{k,j}d\mu-\frac{1}{\mu(B_{j+1})}\int_{B_{j+1}}\phi_{k,j}d\mu\right|\leq C\frac{r}{2^j}\left(\frac{1}{\mu(\lambda B_j)}\int_{\lambda B_j}g^p_{k,j}d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

où $g_{k,j}$ désigne un gradient supérieur pour $\phi_{k,j}$.

Comme $l(\phi_{k,j})$ est lipschitzienne, par le lemme 60, on choisit $g_{k,j}=\mathrm{Lip}(l(\phi_{k,j}))\leq \mathrm{Lip}(\phi_{k,j})$. Du fait que $f\in M^{1,q}_{loc.}$ alors on peut même choisir une fontion $h_k\in L^q_{loc.}$ qui domine $\mathrm{Lip}(\phi_{k,j})$ μ-pp. En effet, en appelant $h_{k,j}$ la fonction associé de $\phi_{k,j}$ dans $M^{1,q}_{loc.}$, on obtient par le lemme 61 :

$$\mathrm{Lip}(\phi_{k,j})(x)\leq h_{k,j}(x)\ \mu\text{-pp}x.$$

De plus, les preuves des lemmes 50 et 51 nous permettent de voir que l'on a en fait

$$h_{k,j}(x)\leq C_k(||f(x)||+g(x))\ \mu\text{-pp}x.$$

Ensuite, en notant

$$A_{k,j}=\{x\in X:\phi_{k,j}(x)=l(f_k)(x)\},$$

on procède au découpage intégral suivant :

$$\int_{\lambda B_j}g^p_{k,j}d\mu=\int_{\lambda B_j\cap Z_{\varepsilon_1}\cap\theta_r\cap A_{k,j}}g^p_{k,j}d\mu+\int_{\lambda B_j\cap Z_{\varepsilon_1}\cap\theta_r^c\cap A_{k,j}}g^p_{k,j}d\mu+\int_{\lambda B_j\cap Z_{\varepsilon_1}\cap A^c_{k,j}}g^p_{k,j}d\mu+\int_{\lambda B_j\cap Z^c_{\varepsilon_1}}g^p_{k,j}d\mu.$$

En appliquant le lemme 59 à une partie du type $A_{k,j}\cap B$ où B désigne un ensemble μ-mesurable, on obtient la relation fondamentale suivante :

$$\int_{A_{k,j}\cap B}\mathrm{Lip}(l(\phi_{k,j}))d\mu\leq\int_{A_{k,j}\cap B}\mathrm{Lip}(l(f_k))d\mu.$$

De plus, par définition de la différentiabilité en x, on a :

$$l(f_k)(x)-l(f_k)(x')=(D_x(l(f_k))(u_\alpha(x)-u_\alpha(x'))+o(d(x,y)).$$

Ainsi, pour tout k, on obtient la relation suivante :

$$\mathrm{Lip}(l(f_k))(x)\leq L_\varepsilon||D_x(l(f_k))||$$

(après changement d'échelle sur les u_α, la constante majorant la norme de la différentielle des u_α est en fait L_ε).

Par les remarques précédentes et la définition de $Z_{\varepsilon_1}\cap\theta_r$, on obtient :

$$\int_{\lambda B_j\cap Z_{\varepsilon_1}\cap\theta_r\cap A_{k,j}}g^p_{k,j}d\mu\leq L^p_\varepsilon\varepsilon_3^p\mu(\lambda B_j).$$

Ensuite, par définition de Z_{ε_1}, on obtient :

$$\int_{\lambda B_j\cap Z_{\varepsilon_1}\cap\theta_r^c\cap A_{k,j}}g^p_{k,j}d\mu\leq L^{2p}_\varepsilon\mu(\theta_r^c\cap B_0).$$

Et par définition de $\theta_r^c\cap Z_{\varepsilon_1}$, on obtient :

$$\frac{1}{\mu(\lambda B_j)}\int_{\lambda B_j\cap Z_{\varepsilon_1}\cap\theta_r^c\cap A_{k,j}}g^p_{k,j}d\mu\leq CL^{2p}_\varepsilon\beta^j\varepsilon_2.$$

Ensuite, par l'inégalité d'Holder, on a :

$$\int_{\lambda B_j \cap Z_{\varepsilon_1} \cap A_{k,j}^c} g_{k,j}^p d\mu \leq C\mu(B_j)^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_{A_{j,k}^c} h_{k,j}^q d\mu \right)^{\frac{p}{q}}.$$

De plus, par le théorème de convergence dominée, à k fixé, on a :

$$\int_{A_{j,k}^c} h_{k,j}^q d\mu \leq \alpha(\varepsilon_4)$$

avec $\alpha(\varepsilon_4)$ qui tend vers 0 lorsque ε_4 tend vers 0.

Ainsi, en utilisant le fait que μ est doublante de constante de doublement β, on obtient :

$$\frac{1}{\mu(\lambda B_j)} \int_{\lambda B_j \cap Z_{\varepsilon_1} \cap A_{k,j}^c} g_{k,j}^p d\mu \leq C \frac{\beta^{\frac{jp}{q}}}{\mu(B_0)} \alpha(\varepsilon_4)^{\frac{p}{q}}.$$

Ensuite, on affine le découpage de $\int_{\lambda B_j \cap Z_{\varepsilon_1}} g_{k,j}^p d\mu$. En fait, on a :

$$\int_{\lambda B_j \cap Z_{\varepsilon_1}^c} g_{k,j}^p d\mu = \int_{\lambda B_j \cap Z_{\varepsilon_1}^c \cap A_{k,j}} g_{k,j}^p d\mu + \int_{\lambda B_j \cap Z_{\varepsilon_1}^c \cap A_{k,j}^c} g_{k,j}^p d\mu.$$

La dernière intégrale se majore de manière analogue à l'intégrale sur $A_{k,j}^c \cap B$ que l'on a traitée précedemment. On obtient ainsi,

$$\frac{1}{\mu(B_j)} \int_{\lambda B_j \cap Z_{\varepsilon_1}^c \cap A_{k,j}^c} g_{k,j}^p d\mu \leq C \frac{\beta^{\frac{jp}{q}}}{\mu(B_0)} \alpha(\varepsilon_4)^{\frac{p}{q}}.$$

L'ensemble des points de densité de Z_{ε_1} que l'on note X_4 est un ensemble de mesure pleine dans Z_{ε_1}.

Ensuite, on utilise que l'application $x \to \mathrm{Lip}(f)(x)$ est mesurable et donc que les points de continuité approximative de f sont de mesure pleine dans X. Notons alors X_5 l'ensemble des points de continuité approchée de $\mathrm{Lip}(f)$.

De plus, on considère X_6 l'ensemble des points de Lebesgue de $\mathrm{Lip}(f)$. Comme $\mathrm{Lip}(f)$ est une application de $\mathrm{L}^q(X, \mathbf{R})$ et que X est doublant alors X_6 est de mesure pleine dans X.

Notons $X_7 = X_3 \cap X_4 \cap X_5 \cap X_6$. Alors on prend un x dans X_7 (X_7 est un ensemble de mesure pleine dans Z_{ε_1}) et on montre que pour un tel x, f est finie-dimensionnelle au premier ordre vis-à-vis de l'image de sa différentielle faible en x.

Soit x un point de densité de Z_{ε_1} alors pour tout $\varepsilon_5 > 0$, il existe r_{ε_5} tel que pour tout $r \leq r_{\varepsilon_5}$:

$$\frac{\mu\left(Z_{\varepsilon_1} \cap B_{2r}(x)\right)}{\mu(B_{2r}(x))} \geq 1 - \varepsilon_5.$$

Soit x un point de continuité approximative pour $\mathrm{Lip}(f)$. Alors pour tout $N > 0$, il existe un réel $\varepsilon_{6,N} > 0$ tel que pour tout $\varepsilon_6 \leq \varepsilon_{6,N}$, il exite un réel $r_{\varepsilon_6} > 0$ tel que pour $0 < r \leq r_{\varepsilon_6}$, il existe un ensemble μ-mesurable γ_r tel que :

$$\gamma_r \subset B_{2r}(x) \text{ avec } \frac{\mu(\gamma_r)}{\mu(B_{2r}(x))} \geq 1 - \varepsilon_6 \text{ et } \forall y \in \gamma_r : |\mathrm{Lip}(f)(x) - \mathrm{Lip}(f)(y)| \leq \frac{1}{N}.$$

Ainsi, pour tout y de γ_r, on a (en notant $\mathrm{Lip}(f)(x) = C_x$) :

$$\mathrm{Lip}(f)(y) \leq C_x + \frac{1}{N}.$$

En prenant r suffisamment petit, les calculs précédents restent valables.

On affine à nouveau le découpage de $\int_{\lambda B_j \cap Z_{\varepsilon_1}^c \cap A_{k,j}} g_{k,j}^p d\mu$ pour avoir :

$$\int_{\lambda B_j \cap Z_{\varepsilon_1}^c \cap A_{k,j}} g_{k,j}^p d\mu = \int_{\lambda B_j \cap Z_{\varepsilon_1}^c \cap A_{k,j} \cap \gamma_r} g_{k,j}^p d\mu + \int_{\lambda B_j \cap Z_{\varepsilon_1}^c \cap A_{k,j} \cap \gamma_r^c} g_{k,j}^p d\mu.$$

Comme x est un point de densité de Z_{ε_1}, on a :

$$\int_{\lambda B_j \cap Z_{\varepsilon_1}^c \cap A_{k,j} \cap \gamma_r} g_{k,j}^p d\mu \leq C(C_x + \frac{1}{N})^p \mu\left(\lambda B_j \cap Z_{\varepsilon_1}^c\right) \leq C\mu\left(B_0 \cap Z_{\varepsilon_1}^c\right) \leq C\varepsilon_5 \mu(B_0).$$

Ainsi, comme μ est doublante de constante de doublement β, on obtient :

$$\frac{1}{\mu(\lambda B_j)} \int_{\lambda B_j \cap Z_{\varepsilon_1}^c \cap A_{k,j} \cap \gamma_r} g_{k,j}^p d\mu \leq C\beta^j \varepsilon_5.$$

Ensuite, par l'inégalité de Holder, on a :

$$\int_{\lambda B_j \cap Z_{\varepsilon_1}^c \cap A_{k,j} \cap \gamma_r^c} g_{k,j}^p d\mu \leq C\mu(\lambda B_j \cap \gamma_r^c)^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_{\lambda B_j} \mathrm{Lip}(f)^q d\mu\right)^{\frac{p}{q}} \leq C\mu(B_0 \cap \gamma_r^c)^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_{B_0} \mathrm{Lip}(f)^q d\mu\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Comme x est un point de continuité approximative de $\mathrm{Lip}(f)$, on obtient donc que :

$$\frac{1}{\mu(\lambda B_j)} \int_{\lambda B_j \cap Z_{\varepsilon_1}^c \cap A_{k,j} \cap \gamma_r^c} g_{k,j}^p d\mu \leq C\beta^j \varepsilon_6^{1-\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} \mathrm{Lip}(f)^q d\mu\right)^{\frac{p}{q}}.$$

En sommant sur j toutes ces inégalités à k fixé (les séries de terme général $\frac{1}{2^j}$, $\frac{\beta^{\frac{j}{p}}}{2^j}$, $\frac{\beta^{\frac{j}{q}}}{2^j}$ sont convergentes car $q > p > \frac{\log \beta}{\log 2}$), puis en faisant tendre ε_4 vers 0, on obtient l'inégalité suivante :

$$\left|l(f_k)(y) - \frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} l(f_k) d\mu\right| \leq C(x, \varepsilon, \varepsilon_1) r \left(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 \left(\frac{1}{\mu(B_0)} \int_{(B_0)} \mathrm{Lip}(f)^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

valable pour tout k, pour tout l de V_k^* s'annulant sur $\mathbf{Im}(D_x f_k)$, pour tout r suffisamment petit (r dépend de x) et pour tout y de $B_r(x)$. De plus, les exposants appliqués aux ε_i sont devenus 1 quitte à renommer les ε_i.

Ainsi, comme X est propre et f continue (ou en procédant à l'approximation de $M_r(l(f_k))$ et $m_r(l(f_k))$), on obtient que :

$$\left|M_r(l(f_k)) - m_r(l(f_k))\right| \leq Cr \left(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 \left(\frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} \mathrm{Lip}(f)^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Ainsi, en utilisant le théorème de Hahn-Banach et la définition de limite inverse, il vient pour tout $x' \in B_r(x)$:

$$\begin{aligned} d\left(f(x)-f(x'),\mathbf{Im}(\{D_xf_i\})\right) &= \sup_{k,l_{|\mathbf{Im}(D_xf_k)}=0} \left(l(f_k(x))-l(f_k(x'))\right) \\ &\leq Cr\left(\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_5+\varepsilon_6\left(\frac{1}{\mu(B_0)}\int_{B_0}\mathrm{Lip}(f)^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, comme x est un point de Lebesgue de $\mathrm{Lip}(f)$, on obtient :

$$\limsup_{r\to 0}\frac{1}{r}\sup_{x'\in B_r(x)} d\left(f(x')-f(x),\mathbf{Im}(\{D_xf_i\})\right)\leq C\left(\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_5+\varepsilon_6\right).$$

En faisant tendre ε_i pour $i = 2,3,5,6$ vers 0, on a donc prouvé que f est finie-dimensionnelle au premier ordre en μ-pp x de Z_{ε_1}. Comme ε_1 est arbitraire, alors f est finie-dimensionnelle au premier ordre en μ-pp x de K_ε. Comme ε est arbitraire alors f est finie-dimensionnelle au premier ordre en μ-pp x de A. Comme A est une partie arbitraire de μ-mesure finie de X et que μ est de Radon, alors f est finie-dimensionnelle au premier ordre en μ-pp x de X. Comme f est faiblement différentiable en μ-pp x de X. Alors, f est Cheeger-différentiable μ-pp.

Il ne reste plus qu'à vérifier que la différentielle de f est mesurable et unique.

Soit $x\in A_\alpha$ pour lequel f est différentiable en x. Pour $x'\in A_\alpha$, on a en composant par π_i dans la définition de la différentiabilité en x :

$$f_i(x')=f_i(x)+\pi_i(\Phi_\alpha)(u_\alpha(x')-u_\alpha(x)).$$

Or, par le théorème de [**BRZ**], on sait que pour tout i : $\pi_i(\Phi_\alpha)$ est déterminée de manière unique modulo des ensembles de μ-mesure nulle. Ainsi, pour tout α, Φ_α est déterminée de manière unique modulo des ensembles de μ-mesure nulle. Donc la différentielle de f est déterminée de manière unique modulo des ensembles de μ-mesure nulle.

Par unicité, on a montré que D_xf et $\pi^{-1}(\{D_xf_i\}) : T_xX\to E$ coincide μ-presque partout. Or, en remarquant que D_xf_i est μ-mesurable pour tout i (cela provient du théorème de [**BRZ**]) et en utilisant la propriété GFDA de E, on obtient que la différentielle de f est μ-mesurable.

Corollaire 75. *Soient X un $(1,q)$-PI espace de constante de doublement β avec $q>\frac{\log\beta}{\log 2}$ et E un espace de Banach possédant la propriété GFDA. Si f appartient à $M^{1,q}_{loc.}(X,E)$ alors f est Cheeger-différentiable μ-pp.*

Démonstration :

En effet, par le théorème principal de [**KZ**], X supporte alors des inégalités de Poincaré faible de type $(1,p)$ pour les applications lipschitziennes (en fait, ce n'est pas une application directe du théorème de [**KZ**] mais en utilisant le théorème de Hahn-Banach et un chainage de boules, on peut étendre le théorème de [**KZ**] dans le cadre des espaces de Banach) où on peut choisir p tel que $\frac{\log\beta}{\log 2}<p<q$. Par le lemme 61, on a que $\mathrm{Lip}(f)$ est dans $L^q(X,\mathbf{R}^+)$. Ainsi, le couple $(f,\mathrm{Lip}(f))$ satisfait une inégalité de Poincaré faible de type $(1,p)$. L'analyse menée lors du la preuve du théorème 74 permet de conclure que f est Cheeger-différentiable μ-pp.

Corollaire 76. *Soient X un $(1,q)$-PI espace muni d'une mesure μ de constante de doublement β avec $q > \frac{\log\beta}{\log 2}$ et E un espace de Banach GFDA. Si f appartient à $N^{1,q}(X,E)$ alors f est Cheeger-différentiable μ-pp.*

Démonstration :

Par le théorème principal de [**KZ**], X est un $(1,q)$-PI espace où l'on peut choisir $q > p > \frac{\log\beta}{\log 2}$. Ensuite, par la caractérisation des espaces de Sobolev généralisés sur les espaces métriques PI de [**Sh**], on sait qu'il existe une application $\rho \in L^q$ telle que le couple $(\pi_k(f),\rho)$ satisfasse une inégalité de Poincaré de type $(1,p)$ (avec des constantes qui ne dépendent que de la constante de doublement de X et des constantes intervenant dans les inégalités de Poincaré faible de type $(1,p)$ pour les applications lipschitziennes). Ainsi, comme π_k est une approximation de dimension finie de E, on a par le lemme de Fatou que le couple (f,ρ) satisfait une inégalité de Poincaré faible de type $(1,p)$. Le lemme 61 permet de conclure que f appartient à $M^{1,q}(X,E)$. Le corollaire 75 permet de conclure.

Corollaire 77. *Soient X un $(1,q)$-PI espace muni d'une mesure μ **complète**, de constante de doublement β avec $q > \frac{\log\beta}{\log 2}$ et E un espace de Banach RNP. Si f appartient à $M^{1,q}_{loc.}(X,E)$ alors f est Cheeger-différentiable μ-pp.*

Démonstration :

Par le lemme 68, la différentielle faible de f est bien définie. De plus, en appliquant l'ANP du couple $(\lim\limits_{\leftarrow} V_i, E)$, on en déduit une conclusion analogue au lemme 69. De plus, par [**CK4**], la différentielle faible est à valeurs dans E (la règle de chaine est valable car f est faiblement différentiable en μ-pp x de X). Ainsi, en utilisant l'ANP du couple $(\lim\limits_{\leftarrow} V_i, E)$ (au lieu de la propriété GFDA), un raisonnement analogue à celui effectué pour démontrer le théorème 74 permet de conclure.

CHAPITRE 3

How to recognize constant functions on metric measure spaces

3.1. Introduction

We are interested in how to recognize constant functions. Consider (X, d, μ) a complete, doubling metric measure space satisfying $(1, p)$-Poincare inequality ($(1, p)$-PI space in short) with homogeneous dimension N and $(E, ||.||)$ a Banach space. We take $f : X \to E$ a μ-measurable function and we are able to show that if the quantity

$$\int_X \int_X \frac{||f(x) - f(y)||^p}{d(x, y)^{N+p+\varepsilon}} d\mu(x) d\mu(y)$$

is finite then f is constant μ-a.e. This shows that Hajlasz spaces of higher order based on such metric spaces are trivial. For the limiting case (e.g. when $\varepsilon = 0$), we must proceed in a different way to show that when

$$\int_X \int_X \frac{||f(x) - f(y)||^p}{d(x, y)^{N+p}} d\mu(x) d\mu(y)$$

is finite then f is constant. This leads to a characterization of the Hajlasz spaces when we suppose moreover that the measure μ carried by X is N-Ahlfors regular and this property of μ is a key ingredient of the proof (mainly to show the boundedness of a Riesz potential). First of all, we raise an open question of the article [**Br2**]. It allows us to give an integral characterization of $M^{1,p}(X, E)$ when X is an Ahlfors regular space which supports Poincaré inequalities. All these results are based on approximation by lipschitz maps of functions which belong to $M^{1,p}(X, E)$. We also used standard technics of harmonic analysis such as chaining balls and maximal inequality. The interest of this proof is that it is purely metric in the sense that in $\mathbf{R}^n$ -for example- other technics such as convolution or differentiation are used. The other interest of this result is that it is very general and is also available for metric spaces. Indeed, by using the Kuratowski embedding Theorem, we can replace E by any separable or not metric spaces (in this case, we take E to be l^∞ or L^∞).

In this introductory part, we recall some important works in $\mathbf{R}^n$. In the article [**Br2**], these integral quantities are considered in order to give a global characterization of the space $W^{1,p}$. These integral quantities give birth to some criteria to detect if a measurable function is contant or not. Later, several integral characterization of the space $W^{1,p}$ (viewed as a limit of fractionnal Sobolev spaces) were given in [**BoBrMi**]. The main interest of these results was to extend the index theory (or cohomological theory) for the Sobolev functions. In the article [**Ig**], several other sharp conditions are considered in order to detect if a mesurable function is constant or not. We give a general setting in which results of the article are extended in some way. The first section is devoted to definitions and technical lemmas. We present what is a PI-space and we show how the Poincaré inequality can be used in such spaces for lipschitz functions. Many of the classical metric measure spaces such as $\mathbf{R}^n$ or compact riemaniann manifolds with Ricci curvature bounded from below are PI-spaces. And to a certain extent, PI-spaces are not too exotic. A natural generalization of the Sobolev spaces are the Hajlasz spaces $M^{1,p}(X,E)$ where X is a metric measure space and E a Banach space (a definition will be given later). In this part, we also give an approximation lemma of function of $M^{1,p}(X,E)$ by lipschitz functions when E is a finite dimensionnal vector space quoted from [**Hei**] and which is the analogous of the following density result : C^∞ compact supported functions are dense in $W^{1,p}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$. In the second section, we show that Hajlasz spaces of "higher order" (in a sense that we will precise later) based on PI-spaces are trivial e.g. they are reduced to constants functions. This fact even if it is simple was unknown and it is based on how lipschitz functions approximate very well functions of Hajlasz spaces. This analysis allows us to derive a criterium to detect if a measurable function is constant even if this last criterium was already proved in a different manner and in less general way in [**BP2**]. This kind of analysis appears naturally on l^p cohomological theory. In fact, it leads to precise estimate of the conformal dimension of the boundary of some hyperbolic groups under the condition that they support Poincaré inequalities. More precisely, we get the following Theorem.

Theorem 78. *Fix $\alpha > 0$. If (X,d,μ) is a $(1,p)$-PI space and if E is a Banach space then for all $q \geq p$ the spaces $M^{1+\alpha,q}_{loc.}(X,E)$ consists on the set of continuous constant functions.*

In the last section, when X is a PI-space, a kind of calculus of first order is allowed for lipschitz functions. We use this strong result to deduce how at small scale lipschitz functions are well approximated by their upper lipschitz constant. We do this to get some uniform control at small scale and to avoid some problems of measurability that arise naturally. Next, we suppose that X is Ahlfors-regular to give some integral characterizations of constant functions that are Banach-valued. In fact, to give such criteria, no geometric conditions are needed on the Banach space. We can only make analysis on finite dimensionnal vector spaces and this is a key point to extend these criteria to any metric spaces via the Kuratowski embedding. More precisely, we get the following Theorem.

Theorem 79. *Take (X,d,μ) a $(1,p)$ PI-space equipped with a N-Ahlfors regular measure μ and (Y,l) a metric space. If $f : X \to Y$ is a measurable function that satisfies*

$$\int_X \int_X \frac{l(f(x),f(y))^p}{d(x,y)^{N+p}} d\mu(x) d\mu(y) < +\infty$$

then f is constant μ-a.e.

The main difficult part is to get an integral characterization of the Hajlasz spaces when functions are RNP Banach-valued. Indeed, this geometric condition on the Banach space allows us to differentiate -to a certain extent- lipschitz functions. This is a strong result of [**CK1**] and we make great use of this result to achieve our goal. To clarify the situation, we can make a parallel between the proof of such results on $\mathbf{R}^n$ and on PI-spaces. More precisely, the Lebesgue measure is replaced by an Ahlfors-regular measure. The translation invariant measure is replaced by a measure which enjoys a kind of homogeneity and uniformity at small scale. And, the convolution and the weak derivative on $\mathbf{R}^n$ are replaced by the existence of a calculus of first order on PI-spaces. We finally get the following characterization of the Hajlasz spaces.

Theorem 80. *Take X to be a $(1,p)$ PI-space for some $p>1$ equipped with a N-Ahlfors regular and* ***complete*** *measure μ and E a RNP Banach space endowed with the norm $||.||$. Then, there are two absolute constants A_1 and A_2 (depending only of the geometry of X) such that for every f belonging to $M^{1,p}(X,E)$:*

$$J_p^-(f) := \liminf_{s\to 1}(1-s)\int_X\int_X \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}}d\mu(x)d\mu(y) \geq A_1\int_X g^p(x)d\mu(x)$$

and

$$J_p^+(f) := \limsup_{s\to 1}(1-s)\int_X\int_X \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}}d\mu(x)d\mu(y) \leq A_2\int_X g^p(x)d\mu(x)$$

where g is the minimal function in $L^p(X,\mathbf{R}^+)$ associated to f in $M^{1,p}(X,E)$.

Even if our integral characterization is not as sharp as the characterization obtained in $\mathbf{R}^n$ (in the sense that the sequence of integrals is not convergent), the lack of sharpness is compensated by the great generality of the result. Indeed, the previous Theorem partially covers the results obtained in [**Br2**]. To conclude, we show how to generalize theses Theorems in the setting of doubling spaces only. This comes only from a slight modification of the Riesz potential that appears in the previous integrals.

3.2. Definition and preparatory lemmas

3.2.1. ***PI* spaces.** Let (X,d,μ) a metric measure space. We write $B_r(x)=B(x,r)$ for the ball centered in x of radius r.

Definition 81. *A measure μ is doubling if there is $\beta>0$ such that for all $r>0$ and for all x in X :*

$$\mu(B_{2r}(x)) \leq \beta\mu(B_r(x)).$$

β is called the doubling constant of μ.

Definition 82. *A function $g : X \to \overline{\mathbf{R}}^+$ is called an upper gradient for $f : X \to E$ (with E a Banach space) if for every rectifiable curve $c : [0,L] \to X$ parametrized by its arc-length, we have :*

$$||f(c(L)) - f(c(0))|| \leq \int_0^L g(c(s))ds.$$

We write $f_{x,r}$ for :

$$f_{x,r} = \frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)} f d\mu.$$

Definition 83. *We say that X supports weak $(1,p)$-Poincaré inequality if for all x in X, for all $r>0$ and for all g in $L^p_{loc.}(X,\mathbf{R}^+)$ an upper gradient of f in $L^1_{loc.}(X,E)$, we have :*

$$\frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)} ||f-f_{x,r}||d\mu \leq Cr\left(\frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_{\lambda r}(x)} g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

with $C>0$ and $\lambda>0$ two absolute constants (independant of f).

If μ is doubling then weak $(1,p)$-Poincaré inequality becomes :

$$\frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)}||f-f_{x,r}||d\mu \leq C(\beta)r\left(\frac{1}{\mu(B_{\lambda r}(x))}\int_{B_{\lambda r}(x)} g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

where we can choose for instance $C(\beta)=C\beta^l$ if $\lambda \leq 2^l$.

Definition 84. *A PI-space (X,d,μ) is a complete metric measure space with a doubling Radon measure and supports weak $(1,p)$-Poincaré inequality for some $p \geq 1$. We say in short that (X,d,μ) is a $(1,p)$ PI-space if it supports weak $(1,p)$-Poincaré inequality.*

If μ is non degenerated (i.e. the μ-measure of each ball is positive) then a PI-space is proper and quasi-convex. Since a PI-space is doubling, such space enjoys the property of the Vitali covering. That is to say : from a covering of a measurable set A by a family of **closed** balls $(B_i)_{i\in I}$ which contains arbitrary small ball (we say that such a family is a Vitali class), we can extract a countable quasi-covering of disjoint balls. That is to say : we get a countable family $J \subset I$ such that $\mu\big(\cup_{i\in I} B_i \cap (\cup_{j\in J}B_j)^c\big)=0$ and we have for all $j,j' \in J$ with $j \neq j'$: $B_j \cap B_{j'} = \emptyset$.

3.2.2. Some properties of Banach spaces. Let $(E,||.||)$ be a Banach space. The integral considered on Banach spaces is the Bochner integral and we say that a Banach valued function is integrable if it is Bochner integrable.

Definition 85. *We called an inverse system of Banach spaces a family $\{V_i,\theta_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ where V_i are subspace of E of finite dimension and where the bonding maps $\theta_i : V_i \to Vi-1$ are 1- lipschitz. Moreover, we called a sequence $(v_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ compatible if for all $i \geq 1$: $v_i \in V_i$ and $\theta_i(v_i)=v_{i-1}$.*

We write $\lim\limits_{\leftarrow} V_i$ for the inverse limit of these Banach spaces. It consists on the set of all sequences (v_i) which are compatible and which satisfy $\sup\limits_i ||v_i||$ is finite. So, $\lim\limits_{\leftarrow} V_i$ inherites of a structure of normed vector space endowed with $||\{v_i\}||=\lim\limits_{i\to+\infty}||v_i||$ where $\{v_i\}$ are the elements of $\lim\limits_{\leftarrow} V_i$.

Definition 86. *A finite dimensionnal approximation (FDA is short) for E is a sequence of triplets $\{(V_i,\theta_i,\pi_i)\}$ such that $\{V_i,\theta_i\}_{i\in\mathbf{N}^*}$ is an inverse system of Banach spaces where the bonding maps θ_i induce projection map $\pi_i : \lim\limits_{\leftarrow} V_i \to V_i$ with $\pi_i(\{v_i\})=v_i$.*

By this definition, we have that for all x in X : $\lim_{i\to+\infty}||\pi_i(x)||=||x||$. We also have that $|||\pi_i|||=1$. And we recall that a separable Banach space has always a FDA that we write for the sake of simplicity $\{\pi_i,V_i\}$.

Definition 87. *A Banach space E has the Radon Nykodim property if all lipschitz function $f : \mathbf{R} \to E$ are Lebesgue differentiable almost everywhere (a.e. in short). Moreover, we have for all x and x' in $\mathbf{R}$ that :*

$$f(x)-f(x')=\int_{x'}^{x} f'(t)dt.$$

We call in short this last property RNP. This definition is given because in the limiting case, we used a corollary of the article [**Che**] extended in the setting of RNP Banach spaces in the article [**CK1**]. This corollary allows us to get some uniformity at small scale on the upper lipschitz constant of a lipschitz function. We can notice that the class of RNP Banach spaces is very large and for instance, reflexive Banach spaces or separable dual Banach spaces are RNP Banach spaces (it is just an extension of the so-called Rademacher Theorem).

3.2.3. Technical lemmas. We repeat some of the lemmas of the second chapter. Hopefully, we give some precisions on some of them. We denote by (X, d, μ) a complete metric measure space which supports a Radon measure μ. Let $(E, ||.||)$ be a Banach space endowed with the norm $||.||$.

Definition 88. *We define the space $M^{1,q}(X, E)$ as the set of all functions $f : X \to E$ which belong to $L^q(X, E)$ such that there is a function $g : X \to \mathbf{R}^+$ which belongs to $L^q(X, \mathbf{R}^+)$ and satisfies for μ-a.e. x and y in X :*

$$||f(x) - f(y)|| \leq d(x, y)(g(x) + g(y)) \ (*).$$

For any function f in $M^{1,q}(X, E)$, we define

$$||f||_{1,q} = ||f||_q + \inf ||g||_q$$

where the infimum is taken over all the functions g in $L^q(X, \mathbf{R}^+)$ which satisfy the inequality $(*)$. Thus, the space $M^{1,q}(X, E)$ becomes a Banach space endowed with this norm.

We can also define a local version of $M^{1,q}(X, E)$ that we called $M^{1,q}_{loc.}(X, E)$ and where we require only a local q-integrablity on functions f and g which appeared in the last definition.

Let f be a measurable function defined on X whose target is E.

Definition 89. *We define the pointwise upper-lipschitz constant of f at x as :*

$$Lip(f)(x) = \limsup_{y \to x} \frac{||f(x) - f(y)||}{d(x, y)} = \limsup_{r \to 0} \sup_{y \in B_r(x)} \frac{||f(x) - f(y)||}{r}.$$

We define the pointwise upper-lipschitz constant restricted to A (a subset of X) of f at x as :

$$Lip_{|A}(f)(x) = \limsup_{y \to x,\ y \in A} \frac{||f(x) - f(y)||}{d(x, y)} = \limsup_{r \to 0} \sup_{y \in B_r(x) \cap A} \frac{||f(x) - f(y)||}{r}.$$

We denote by (X, d, μ) a complete metric measure space which carry a Radon measure μ. Let $(E, ||.||)$ be a Banach space endowed with the norm $||.||$. We define the space $M^{1,q}(X, E)$ as the set of all functions $f : X \to E$ which belong to $L^q(X, E)$ such that there is a function $g : X \to \mathbf{R}^+$ which satisfies for μ-a.e. x and y in X :

$$||f(x) - f(y)|| \leq d(x, y)(g(x) + g(y)).$$

Let f be in $M^{1,q}(X, E)$. We define $||f||_{1,q} = ||f||_q + \inf ||g||_q$ where the infimum is taken on all the functions g in $L^q(X, \mathbf{R}^+)$ which satisfy the previous inequality. Thus, the space $M^{1,q}(X, E)$ becomes a Banach space endowed with the previous norm. We can also define a local version of $M^{1,q}(X, E)$ that we called $M^{1,q}_{loc.}(X, E)$ and where we require only a local q-integrablity on functions f and g which appeared in the last definition.

This approximation lemma is quoted from [**Hei**].

Lemma 90. *Let f be in $M^{1,p}(X,\mathbf{R})$ (with $1 \le p < \infty$) then for all $\varepsilon > 0$, there is a lipschitz function $\Phi : X \to R$ such that $\mu(\{f \neq \Phi\}) \le \varepsilon$ and $||f - \Phi||_{1,p} \le \varepsilon$.*

Proof : Let $\lambda > 0$. Consider the set

$$E_\lambda = \{x \in X : |f(x)| \le \lambda, |g(x)| \le \lambda\}.$$

First of all, we have that $\lambda^p \mu(E_\lambda^c)$ tends to 0 when λ goes to $+\infty$.
Indeed, we have :

$$\mu(E_\lambda^c) \le \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) + \mu(\{x \in X : |g(x)| > \lambda\}).$$

Moreover, we have by the Tchebytchev inequality :

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) \le \frac{1}{\lambda^p} \int_{\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}} |f(x)|^p d\mu(x)$$

$$\text{and } \mu(\{x \in X : |g(x)| > \lambda\}) \le \frac{1}{\lambda^p} \int_{\{x \in X : |g(x)| > \lambda\}} |g(x)|^p d\mu(x).$$

since $\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})$ and $\mu(\{x \in X : |g(x)| > \lambda\})$ tend to 0 when λ goes to $+\infty$ then by the dominated convergence we get the desired result.

since f belongs to $M^{1,p}$ then f is 2λ-lipschit on the set E_λ. Moreover, by Mc Shane extension Theorem, f can be extended on X in a lipschitz function -say f_λ- which is also 2λ-lipschitz. Consider

$$u_\lambda = \mathrm{sg}(f_\lambda) \min(\lambda, |f_\lambda|).$$

Then, u_λ coincide with f on E_λ. Moreover, u_λ is 2λ-lipschitz on X.

For the last point, we distinguish three cases.

First case : Either x and y are in E_λ. Then,

$$|u_\lambda(x) - u_\lambda(y)| = |f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \le 2\lambda d(x, y)$$

because f_λ is 2λ-lipschitz.

Second case : Or, x and y belong to E_λ^c. Either, $f_\lambda(x)$ and $f_\lambda(y)$ are of opposite sign and then :

$$|u_\lambda(x)-u_\lambda(y)| = \lambda|\mathrm{sg}(f_\lambda(x))-\mathrm{sg}(f_\lambda(y))| = 2\lambda \le \big||f_\lambda(x)|-|f_\lambda(y)|\big| \le |f_\lambda(x)-f_\lambda(y)| \le 2\lambda d(x, y).$$

In the other case, $|u_\lambda(x) - u_\lambda(y)|$ is equal to zero.

Third case : By symetry, we can always assume that x belongs to E_λ and y belongs to E_λ^c. Then,

$$|u_\lambda(x) - u_\lambda(y)| = |\lambda \mathrm{sg}(f_\lambda(y)) - f_\lambda(x)|.$$

If $f_\lambda(x)$ and $f_\lambda(y)$ are of the same sign then

$$|\lambda \mathrm{sg}(f_\lambda(y)) - f_\lambda(x)| \le \lambda - |f_\lambda(x)| \le |f_\lambda(y)| - |f_\lambda(x)| \le |f_\lambda(y) - f_\lambda(x)| \le 2\lambda d(x, y).$$

If $f_\lambda(x)$ and $f_\lambda(y)$ are of opposite sign then

$$|\lambda \mathrm{sg}(f_\lambda(y)) - f_\lambda(x)| \le |f_\lambda(y) - f_\lambda(x)| \le 2\lambda d(x, y).$$

Moreover,

$$||u_\lambda - u||_p = \int_{E_\lambda^c} |\lambda \mathrm{sg}(u_\lambda) - u|^p \leq 2^p \left(\int_{E_\lambda^c} |u|^p + \lambda^p \mu(E_\lambda^c) \right).$$

So, when λ goes to $+\infty$ then u_λ tends to u in L^p norm.

Finally, consider :

$$g_\lambda = g\chi_{E_\lambda} + 2\lambda\chi_{E_\lambda^c}.$$

Then, g_λ is in L^p and for μ-a.e. x, y :

$$|u_\lambda(x) - u_\lambda(y)| \leq d(x,y)(g_\lambda(x) + g_\lambda(y)).$$

Indeed, if x and y belong to E_λ then

$$|u_\lambda(x) - u_\lambda(y)| = |u(x) - u(y)| \leq d(x,y)(g(x) + g(y)) \leq d(x,y)(g_\lambda(x) + g_\lambda(y)).$$

If x is in E_λ^c then

$$|u_\lambda(x) - u_\lambda(y)| \leq 2\lambda d(x,y) \leq d(x,y)(g_\lambda(x) + g_\lambda(y)).$$

Moreover,

$$||g_\lambda - g||_p = \int_{E_\lambda^c} |2\lambda - g|^p \leq 2^p \left(\int_{E_\lambda^c} |g|^p + (2\lambda)^p \mu(E_\lambda^c) \right).$$

So, when λ goes to $+\infty$ then g_λ tends to g in L^p norm.

Finally, we can notice that g_λ is in L^∞ and for μ-a.e x in X, we have : $g_\lambda(x) \leq C(|f(x)| + g(x))$.

Thus, we can get for μ-a.e x in X that :

$$\mathrm{Lip}(u_\lambda)(x) \leq g_\lambda \leq C(|f(x)| + g(x)).)$$

Remark : When X is a doubling space, we can show that the upper-lischitz constant of u_λ is well controlled. Fix now a ball $B \subset X$. By applying the Lusin Theorem to g_λ, we get for every $\varepsilon > 0$ a measurable set $A_\varepsilon \subset B$ such that $\mu(B \cap A_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$ and such that the restriction of g_λ to A_ε is continuous. Hence, we get for every x in A_ε that

$$\mathrm{Lip}_{|A_\varepsilon}(u_\lambda)(x) \leq g_\lambda(x).$$

Then, we get by using the lemma 92 that :

$$\int_B \mathrm{Lip}(u_\lambda) \leq 2\lambda\varepsilon + \int_B g_\lambda.$$

By taking the limit when ε goes to 0, we get that :

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B \mathrm{Lip}(u_\lambda) \leq \frac{1}{\mu(B)} \int_B g_\lambda.$$

Since the set of Lebesgue points of $\mathrm{Lip}(u_\lambda)$ and g is a set of full measure in X, we get for μ-a.e x in X that :

$$\mathrm{Lip}(u_\lambda)(x) \leq g_\lambda(x) \leq C(|f(x)| + g(x)).$$

This lemma is quoted from [**BRZ**]. It shows that doubling space are homogeneous space of dimension less or equal than $\frac{\log \beta}{\log 2}$ where β is the doubling constant of the measure μ.

Lemma 91. *Let (X,d,μ) be a metric measure space with doubling constant β. Let x_0 be a point of X and $r_0 > 0$. Then for all x in $B_{r_0}(x_0)$ and for all $r < r_0$:*

$$\frac{\mu\left(B_r(x)\right)}{\mu\left(B_{r_0}(x_0)\right)} \geq \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\log \beta}{\log 2}}.$$

Proof : Clearly, $B_{r_0}(x_0)$ is a subset of $B_{2r_0}(x)$. Moreover, there is a natural integer l such that

$$2^{-(l+1)}r_0 \leq r \leq 2^{-l}r_0.$$

In fact,

$$l = \left[\frac{\log(\frac{r_0}{r})}{\log 2}\right] \leq \frac{\log(\frac{r_0}{r})}{\log 2}.$$

since μ is a doubling measure, we get now :

$$\frac{\mu\left(B_r(x)\right)}{\mu\left(B_{r_0}(x_0)\right)} \geq \frac{\mu\left(B_r(x)\right)}{\mu\left(B_{2r_0}(x)\right)} \geq \frac{\mu\left(B_r(x)\right)}{\mu\left(B_{2^{l+2}r}(x)\right)} \geq \beta^{-(l+2)} \geq \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\log \beta}{\log 2}}.$$

Let f be a function defined on X whose target is E. We define the pointwise upper-lipschitz constant of f at x as :

$$\mathrm{Lip}(f)(x) = \limsup_{y \to x} \frac{||f(x) - f(y)||}{d(x,y)} = \limsup_{r \to 0} \sup_{y \in B_r(x)} \frac{||f(x) - f(y)||}{r}.$$

We define the pointwise upper-lipschitz constant restricted to A (a subset of X) of f at x as :

$$\mathrm{Lip}_{|A}(f)(x) = \limsup_{y \to x,\ y \in A} \frac{||f(x) - f(y)||}{d(x,y)} = \limsup_{r \to 0} \sup_{y \in B_r(x) \cap A} \frac{||f(x) - f(y)||}{r}.$$

This lemma is quoted in [**BRZ**]. It is very useful because it allows us to get some control on the lipschitz constant of f on subsets of X where Poincare inequalities are no longer true.

Lemma 92. *Let X be a metric measure space with doubling constant β. Let E be a Banach space. Let $f : X \to E$ be a L-lipschitz function . If x_0 is a density point of $A \subset X$ then :*

$$Lip_{|A}(f)(x_0) = Lip(f)(x_0).$$

Proof : First of all, we have to show that for all $\varepsilon > 0$, there is $r > 0$ such that for all x in $B_r(x_0)$, there is y in A such that $d(x,y) \leq \varepsilon d(x,x_0)$. We argue by contradiction and we suppose that we have a sequence x_n which tends to x_0 and such that $B_{\varepsilon d(x_n,x_0)}(x_n) \cap A$ is empty for every n. since x_0 is a density point of A then, we have :

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu(B_r(x_0) \cap A^c)}{\mu(B_r(x_0))} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\mu(B_{(1+\varepsilon)d(x_n,x_0)}(x_n) \cap A^c)}{\mu(B_{(1+\varepsilon)d(x_n,x_0)}(x_n))} = 0.$$

We get now the following inequalites :

$$\frac{\mu(B_{(1+\varepsilon)d(x_n,x_0)}(x_n)\cap A^c)}{\mu(B_{(1+\varepsilon)d(x_n,x_0)}(x_n))} \geq \frac{\mu(B_{\varepsilon d(x_n,x_0)}(x_n)\cap A^c)}{\mu(B_{(1+\varepsilon)d(x_n,x_0)}(x_n))} \geq \frac{\mu(B_{\varepsilon d(x_n,x_0)}(x_n))}{\mu(B_{(1+\varepsilon)d(x_n,x_0)}(x_n))}.$$

since X is doubling with doubling constant β then by lemma 91, we get :

$$\frac{\mu(B_{\varepsilon d(x_n,x_0)}(x_n))}{\mu(B_{(1+\varepsilon)d(x_n,x_0)}(x_n))} \geq \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{\log\beta}{\log 2}}.$$

We get a contradiction by letting n goes to $+\infty$.

By definition, we get :

$$\mathrm{Lip}_{|A}(f)(x_0) \leq \mathrm{Lip}(f)(x_0).$$

For the reversed inequality, fix $\varepsilon > 0$. By the definition of the supremum, there is x_r in $B_r(x_0)$ such that :

$$||f(x_r) - f(x_0)|| \geq -\varepsilon r + \sup_{y\in B_r(x_0)} ||f(y) - f(x_0)||.$$

By the previous remark, for all r sufficiently small, there is y_r in A such that :

$$d(y_r, x_r) \leq \varepsilon d(x_r, x_0) \leq \varepsilon r.$$

Then, we get :

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)r}\sup_{y\in B_{(1+\varepsilon)r}(x_0)\cap A} ||f(y) - f(x_0)|| \geq \frac{||f(y_r) - f(x_0)||}{(1+\varepsilon)r} \geq \frac{||f(x_r) - f(x_0)|| - ||f(y_r) - f(x_r)||}{(1+\varepsilon)r}.$$

From now on and by the definition of x_r, we get :

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)r}\sup_{y\in B_{(1+\varepsilon)r}(x_0)\cap A} ||f(y) - f(x_0)|| \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)r}\left(-\varepsilon r + \sup_{y\in B_r(x_0)} ||f(y) - f(x_0)|| - \varepsilon rL\right).$$

By taking the lim sup when r goes to 0 and then by letting ε goes to 0, we get the reversed inequality.

We can remark that the previous lemma is also true on the setting of homogeneous space. Indeed, the lemma 91 is always satisfied for such spaces.

The next lemma allows us to choose an upper gradient of simple use and of big interest for lipschitz functions.

Lemma 93. *Let X be a metric measure space. Let E be a Banach space. Let $f : X \to E$ be a lipschitz function. Then $Lip(f)$ is an upper gradient for f.*

Proof : Take $\pi : E \to \mathbf{R}$ a linear form of E^* such that $|||\pi||| \leq 1$. Let x and y be in X. Let γ be a rectifiable curve connecting x from y. We parametrize $\gamma : [0, L] \to X$ by its arc-length parametrization. Then the function $\pi(f(\gamma)) : [0, L] \to \mathbf{R}$ is lipschitz and by the Rademacher Theorem, we have that $(\pi((f(\gamma)))'(t)$ exists for Lebesgue-a.e. t in $[0, L]$. Moreover, for Lebesgue-a.e. t in $[0, L]$, we have : $||(\pi(f(\gamma))'(t)|| \leq \mathrm{Lip}(f)(\gamma(t))$. We have by using again the Rademacher Theorem :

$$\pi(f)(x) - \pi(f)(y) = \pi(f(\gamma(0))) - \pi(f(\gamma(L))) = \int_0^L (\pi(f(\gamma)))'(t)dt.$$

By the triangular inequality and by using the Hahn-Banach Theorem, we get the result.

The next lemma is an application of a well-known method in harmonic analysis called chaining balls. We use Lebesgue differentiation Theorem in order to prove some results on functions which have an upper gradient of high regularity. This lemma is quoted from [**HK**].

Lemma 94. *Let X be a $(1,p)$-PI space. Let E be a Banach space. Let f be in $L^1_{loc.}(X,E)$ and g be in $L^q(X,\overline{\mathbf{R}}^+)$ be an upper gradient for f with $q>p$. Then, f belongs to $M^{1,q}(X,E)$. More precisely, for all balls $B\subset X$ and for μ-a.e. x and y in B, we have the following inequality :*

$$||f(x)-f(y)|| \leq Cd(x,y)\big((M(g^p\chi_{\gamma B})(x))^{\frac{1}{p}}+(M(g^p\chi_{\gamma B})(y))^{\frac{1}{p}}\big)$$

where C and γ are positive constants which depend only of X and M denotes the maximal centered function of Hardy-Littlewood.

Proof : Since X supports $(1,p)$-Poincare inequality then for all $r>0$ and for all x in X :

$$\frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)}||f-\frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)}f|| \leq Cr\left(\frac{1}{\mu(B_{\lambda r}(x))}\int_{B_{\lambda r}(x)}g^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Choose x and y two points of X. Define the family of balls $(B_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ by if $j\leq 0$ then $B_j=B_{\frac{d(x,y)}{\lambda 2^{-j}}}(x)$ and if $j\geq 1$ then $B_j=B_{\frac{d(x,y)}{\lambda 2^{j}}}(y)$. All these balls are contained in $B_{2d(x,y)}(x)$. More precisely, we can remark that the balls $(B_j)_{j\leq 1}$ are contained in $B_{2d(x,y)}(x)$ and the balls $(B_j)_{j\geq 1}$ are contained in $B_{d(x,y)}(y)$. We get by the triangular inequality and the previous remark for $j\geq 1$:

$$||\frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j}fd\mu-\frac{1}{\mu(B_{j+1})}\int_{B_{j+1}}fd\mu|| \leq Cd(x,y)\frac{1}{2^j}(M(g^p)(y))^{\frac{1}{p}}.$$

By the same argument, we get for $j\leq 0$:

$$||\frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j}fd\mu-\frac{1}{\mu(B_{j-1})}\int_{B_{j-1}}fd\mu|| \leq Cd(x,y)\frac{1}{2^{-j}}(M(g^p)(x))^{\frac{1}{p}}.$$

If x and y are Lebesgue points of f then we get by summing on j the previous inequalities :

$$||f(x)-f(y)|| \leq Cd(x,y)\big((M(g^p)(x))^{\frac{1}{p}}+(M(g^p)(y))^{\frac{1}{p}}\big)$$

with C an absolute which only depends on the doubling constant of X. Hence, by the maximal inequality of Hardy-Littlewood, we get that $(M(g^p))^{\frac{1}{p}}$ belongs to L^q (because $\frac{q}{p}>1$ and g belongs to L^q). So, f belongs to $M^{1,q}$. Fix now a ball $A_0=B_{r_0}(x_0)$. We can remark that if x and y are in A_0 then all the balls λB_j previously constructed are contained in γA_0 with γ depending only on λ (in fact, we can choose $\gamma=5\lambda$).

We can further generalize this lemma. Before this, we have to define the notion of an upper gradient on average.

Definition 95. *Let (X, d, μ) be a β-doubling metric space. Let $(E, ||.||)$ be a Banach space. We say that g in $L^p_{loc.}(X, \overline{\mathbf{R}^+})$ in an upper gradient on average for $f : X \to E$ a $L^1_{loc.}$ function if for all B of X, we have the following inequality :*

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B ||f - \frac{1}{\mu(B)} \int_B f|| \leq Cr \left(\frac{1}{\mu(\lambda B)} \int_{\lambda B} g^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

with C and λ two positive constants independant of the choice of B and with r the radius of the ball B.

Lemma 96. *Let (X, d, μ) be a $(1, p)$-PI space. Let $E, ||.||$ be a Banach space. Let g be in L^q (with $q > p$) an upper gradient on average for f in $L^1_{loc.}$. Then, we have for all balls $B \subset X$ and for μ-a.e. x and y in B :*

$$||f(x) - f(y)|| \leq Cd(x, y)\big((M(g^p \chi_{\gamma B})(x))^{\frac{1}{p}} + (M(g^p \chi_{\gamma B})(y))^{\frac{1}{p}}\big)$$

where C and γ are positive constants which depend only of X and M denotes the maximal centered function of Hardy-Littlewood.

Proof : The proof of the lemma 96 is the same as the lemma 94.

3.3. Hajlasz spaces when X supports Poincaré inequalities

Proposition 97. *Let (X, d, μ) be a separable metric measure space and let $(E, ||.||)$ be a Banach space. If f belongs to $M^{1,p}_{loc.}(X, E)$ then there is a function $\mathbf{f} : X \to E$ such that $\mathbf{f} = f$ μ a.e. and $\overline{\mathbf{f}(X)}$ is contained in a separable subspace of E.*

Proof : Take g a function associated to f in $M^{1,p}_{loc.}$. We can suppose that g is defined everywhere on X (for instance, by extending g by zero on the null-set on which it is not defined). Define $A_n = \{x \in X \text{ such that } g(x) \leq n\}$. Let $\mathbf{A_n}$ be the subset of full measure of A_n where $f_{|\mathbf{A_n}}$ is $2n$-lipschitz. Hence, $f_{|\mathbf{A_n}}$ can be extended in $f_n : A_n \to E$ a $2n$-lipschitz function too. So, we further modify f in $\mathbf{f}$. We define $\mathbf{f}$ by if x is in A_n then $\mathbf{f}(x) = f_n(x)$. This function is well defined because $A_n \subset A_{n+1}$ and $\displaystyle\bigcup_{n \in N^*} A_n = X$. Moreover, by construction, we have that $\mathbf{f} = f$ μ a.e. and so $\mathbf{f}$ is in $M^{1,p}_{loc.}$. We claim that $\overline{\mathbf{f}(X)} \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \overline{f_n(A_n)}$ and we notice that the last set is separable as a countable union of separable sets. Indeed, fix $\varepsilon > 0$ and take $y \in \overline{\mathbf{f}(X)}$. There is a x in X such that $||y - \mathbf{f}(x)|| \leq \varepsilon$. Since $\displaystyle\bigcup_{n \in N^*} A_n = X$, we have that x is in A_n for some n in $\mathbf{N}^*$. So by the construction of $\mathbf{f}$, we have $||y - f_n(x)|| \leq \varepsilon$. The claim is now proved.

Consider X a PI space (X is separable because X is proper) and E a Banach space. If we take f in $M^{1,p}(X, E)$ then we can always suppose by lemma 97 that $f(X)$ is separable (we already know that f is essentially separable by the construction of the Bochner integral). Thus, we can suppose that E is separable and we take $\{\pi_i, V_i\}$ a FDA for E. This remark is just purely technical in order to avoid other assumption on E such as E^* is separable for instance.

Theorem 98. *Fix $\alpha > 0$. If (X, d, μ) is a $(1, p)$-PI space and if E is a Banach space then for all $q \geq p$ the spaces $M^{1+\alpha,q}_{loc.}(X, E)$ consists on the set of continuous constant functions.*

Proof : Fix a ball $B_0 \subset X$. First of all, for every $\varepsilon > 0$, we have by the Lusin Theorem that $\mathrm{Lip}_{|B_\varepsilon}(f) = 0$ with $\mu(B_\varepsilon^c \cap 5\lambda B_0) \leq \varepsilon$. Take $\{\pi_i, V_i\}$ a FDA for E. Consider $f_i = \pi_i(f) : X \to V_i$. Since f is in $M^{1,p}_{loc.}(X, E)$ then f_i is in $M^{1,p}_{loc.}(X, V_i)$. So, by a straightforward adaptation of lemma 90, for all $\varepsilon > 0$ and for each i, we have a family of lipschitz functions $g_{\varepsilon,i} : X \to V_i$ such that $||\chi_{(5\lambda B_0)}(f_i - g_{\varepsilon,i})||_{1,p} \leq C_i\varepsilon$ and $\mu(A^c_{\varepsilon,i} \cap 5\lambda B_0) \leq C_i\varepsilon$ with $A_{\varepsilon,i} = \{x \in 5\lambda B_0$ such that $f_i = g_{\varepsilon,i}\}$. Consider now a ball $B \subset B_0$ of radius r. We have :

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B ||\pi_i(f) - \frac{1}{\mu(B)}\int_B \pi_i(f)|| \leq \frac{2}{\mu(B)}\int_B ||\pi_i(f) - g_{\varepsilon,i}|| + \frac{1}{\mu(B)}\int_B ||g_{\varepsilon,i} - \frac{1}{\mu(B)}\int_B g_{\varepsilon,i}||.$$

By Jensen inequality, we have :

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B ||\pi_i(f) - g_{\varepsilon,i}|| \leq \frac{C_i\varepsilon}{\mu(B)^{\frac{1}{p}}}.$$

Then, since X supports $(1,p)$- inequality and by lemma 93, we have :

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B ||g_{\varepsilon,i} - \frac{1}{\mu(B)}\int_B g_{\varepsilon,i}|| \leq Cr\Big(\frac{1}{\mu(\lambda B)}\int_{\lambda B} \mathrm{Lip}(g_{\varepsilon,i})^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

We have the decomposition :

$$\int_{\lambda B} \mathrm{Lip}(g_{\varepsilon,i})^p = \int_{\lambda B\cap B_\varepsilon \cap A_{\varepsilon,i}} \mathrm{Lip}(g_{\varepsilon,i})^p + \int_{\lambda B\cap B_\varepsilon^c \cap A_{\varepsilon,i}} \mathrm{Lip}(g_{\varepsilon,i})^p + \int_{\lambda B\cap A^c_{\varepsilon,i}} \mathrm{Lip}(g_{\varepsilon,i})^p.$$

By lemma 92, we have :

$$\int_{\lambda B\cap B_\varepsilon \cap A_{\varepsilon,i}} \mathrm{Lip}(g_{\varepsilon,i})^p = 0.$$

For μ a.e x in X, we have the bound :

$$\mathrm{Lip}(g_{\varepsilon,i})(x) \leq C_i(||f(x)|| + g(x))$$

with g a function associated to f in $M^{1,p}_{loc.}$. So, by the Lebesgue dominated convergence, we have :

$$\int_{\lambda B\cap B_\varepsilon^c \cap A_{\varepsilon,i}} \mathrm{Lip}(g_{\varepsilon,i})^p + \int_{\lambda B\cap A^c_{\varepsilon,i}} \mathrm{Lip}(g_{\varepsilon,i})^p \leq \alpha_i(\varepsilon)$$

with for fixed i, $\alpha_i(\varepsilon)$ tends to 0 as ε goes to 0. Hence, by taking the limit when ε goes to 0, we get that for μ a.e x in B : $f_i(x)$ is constant. We can rephrase it by saying that we have for μ a.e. x and y in B : $\pi_i(f(x) - f(y)) = 0$. Since $\{\pi_i, V_i\}$ is a FDA for E, we have by taking the limit when i goes to $+\infty$ that $f(x)$ is constant for μ a.e. x in B. Since X supports Poincaré inequalities then X is connected (even arc-wise connected) so by connectedness, f is constant μ-a.e. and the Theorem is proved.

Corollary 99. *Let (X, d, μ) be a $(1,p)$-PI space and let $(E, ||.||)$ be a Banach space. Fix $\varepsilon > 0$. Let $N = \frac{\log\beta}{\log 2}$. Let $f : X \to E$ be a measurable function such that the quantity*

$$\int_X\int_X \frac{||f(x) - f(y)||^p}{d(x,y)^{N+p+\varepsilon}} d\mu(x)d\mu(y)$$

is finite then f can be extended in a continuous constant function.

Proof : Choose a ball $B_0 = B(x_0, r)$. Define

$$A = \{x \in X \text{ such that } \int_X \frac{||f(x) - f(z)||^p}{d(x,z)^{N+p+\varepsilon}} d\mu(z) < +\infty\}.$$

By hypothesis, the set A is of full measure in X. Let us define $g_r : X \to \mathbf{R}^+$ by

$$g_r(x) = \Big(\int_{B_r(x)} \frac{||f(x) - f(z)||^p}{d(x,z)^{N+p+\varepsilon}} d\mu(z) \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

By hypothesis, for fixed r, g_r is in $L^p(X, \mathbf{R}^+)$. Take x and y in $B_0 \cap A$ then we have :

$$g_{2r}(x)^p + g_{2r}(y)^p = \int_{B_{2r}(x)} \frac{||f(x) - f(z)||^p}{d(x,z)^{N+p+\varepsilon}} d\mu(z) + \int_{B_{2r}(y)} \frac{||f(y) - f(z)||^p}{d(x,z)^{N+p+\varepsilon}} d\mu(z).$$

Because, B_0 in contained in $B_{2r}(x)$ and $B_{2r}(y)$, we have :

$$\int_{B_{2r}(x)} \frac{||f(x) - f(z)||^p}{d(x,z)^{N+p+\varepsilon}} d\mu(z) + \int_{B_{2r}(y)} \frac{||f(y) - f(z)||^p}{d(x,z)^{N+p+\varepsilon}} d\mu(z)$$

$$\geq \frac{C}{r^{(N+p+\varepsilon)}} \int_{B_0} ||f(x) - f(z)||^p + ||f(y) - f(z)||^p d\mu(z).$$

By lemma 91 and by a triangular inequality, we get :

$$g_{2r}(x)^p + g_{2r}(y)^p \geq C r^{-(p+\varepsilon)} ||f(x) - f(y)||^p.$$

Since $g_{2r}(x)^p + g_{2r}(y)^p \leq 2(g_{2r}(x) + g_{2r}(y))^p$, we get :

$$||f(x) - f(y)|| \leq C r^{(1+\frac{\varepsilon}{p})} (g_{2r}(x) + g_{2r}(y))).$$

By taking $r = d(x,y)$, we have that f is in $M^{1+\frac{\varepsilon}{p},p}_{loc.}(X,E)$ so f is constant μ a.e. by the Theorem 98.

3.4. Limiting case

3.4.1. Regularity lemmas in the doubling case. First of all, we prove a refinement on how a lipschitz function is well approximated at small scale by its upper lipschitz constant.

Lemma 100. *Take (X, d, μ) a $(1,p)$-PI space with doubling constant β and E a Banach space. Take now $f : X \to E$ a L-lipschitz function. Then, for μ-a.e $y \in X$ (the set of full measure only depends of the choice of the function f) and for every $\varepsilon > 0$, there is $r_{y,\varepsilon} > 0$ such that for every $q > \max\{\frac{\log \beta}{\log 2}, p\}$, there is a constant $C_q > 0$ such that for all x, x' in $B_{r_{y,\varepsilon}}(y)$:*

$$||f(x) - f(x')|| \leq C_q d(x,x') (Lip(f)(y) + \varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{q}} L).$$

Proof :

Since the function $y \to \mathrm{Lip} f(y)$ is measurable then μ-a.e y in X is a point of approximate continuity of $\mathrm{Lip}(f)$. Call now A the set (of full measure in X) of points of approximate continuity of $\mathrm{Lip}(f)$. Take now x in A. Fix now $\varepsilon > 0$ and define

$A_\varepsilon(y) = \{x \in X \mid |\mathrm{Lip}(f)(x) - \mathrm{Lip}(f)(y)| \leq \varepsilon\}$. Since y belongs to A, we have that for every $r \leq r_{\varepsilon,y}$:

$$\frac{\mu(A_\varepsilon(y) \cap B_r(y))}{\mu(B_r(y))} \geq 1 - \varepsilon.$$

If we take $\mathbf{r} := \frac{r_{\varepsilon,y}}{1+4\lambda}$ then we have for all x, x' in $B := B_{\mathbf{r}}(y)$ that :

$$B_{2\lambda d(x,x')}(x) \subset B_{r_{\varepsilon,y}}(y) \text{ and } B_{2\lambda d(x,x')}(x') \subset B_{r_{\varepsilon,y}}(y)$$

where λ is the constant involved in the dilation of the balls in the Poincaré inequality. Choose now x, x' in B and define a family of balls B_k by

$$\text{if } k \geq 0 \text{ then } B_k = B_{\frac{2d(x,x')}{2^k}}(x) \text{ and if } k < 0 \text{ then } B_k = B_{\frac{d(x,x')}{2^{-(k+1)}}}(x').$$

Since X is $(1,p)$-PI space then, we have by applying the lemma 93 :

$$\Big|\Big|\frac{1}{\mu(B_k)}\int_{B_k} f - \frac{1}{\mu(B_{k+1})}\int_{B_{k+1}} f\Big|\Big| \leq C\frac{r}{2^k}\Big(\frac{1}{\mu(\lambda B_k)}\int_{\lambda B_k}(\mathrm{Lip}(f))^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

with $C > 0$ a constant independant of k. First, by Jensen inequality, we have for $q > \max\{\frac{\log\beta}{\log 2}, p\}$ that :

$$\Big(\frac{1}{\mu(\lambda B_k)}\int_{\lambda B_k}(\mathrm{Lip}(f))^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\frac{1}{\mu(\lambda B_k)}\int_{\lambda B_k}(\mathrm{Lip}(f))^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Next, we have the following decomposition :

$$\int_{\lambda B_k}(\mathrm{Lip}(f))^q = \int_{\lambda B_k \cap A_\varepsilon(y)}(\mathrm{Lip}(f))^q + \int_{\lambda B_k \cap A_\varepsilon(y)^c}(\mathrm{Lip}(f))^q.$$

We have that :

$$\int_{\lambda B_k \cap A_\varepsilon(y)}(\mathrm{Lip}(f))^q \leq (\mathrm{Lip}(f)(y) + \varepsilon)^q \mu(\lambda B_k \cap A_\varepsilon(y)) \leq (\mathrm{Lip}(f)(y) + \varepsilon)^q \mu(\lambda B_k).$$

We get because μ is β-doubling and f is L-lipschitz :

$$\frac{1}{\mu(\lambda B_k)}\int_{\lambda B_k \cap A_\varepsilon(y)^c}(\mathrm{Lip}(f))^q \leq \beta^{|k|}L^q\frac{\mu(\lambda B_k \cap A_\varepsilon(y)^c)}{\mu(B)}.$$

By using the fact that y is a point of approximate continuity of $\mathrm{Lip}(f)$, we have the following bound :

$$\frac{\mu(\lambda B_k \cap A_\varepsilon(y)^c)}{\mu(B)} \leq \frac{\mu(B \cap A_\varepsilon(y)^c)}{\mu(B)} \leq \varepsilon.$$

Since the infinite series $\beta^{\frac{|k|}{q}}$ is summable in k, we finally get that :

$$||f(x) - f(x')|| \leq C_q d(x,x')(\mathrm{Lip}(f)(y) + \varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{q}}L).$$

This is what we wanted to prove.

We consider now a lipschitz function $f : X \to E$ with X a PI-space equipped with a β-doubling measure μ and E a Banach space. First, we give some effective results on regularity of measurable function.

Fix now $\varepsilon > 0$. Take now a ball $B \subset X$. Since $y \to \mathrm{Lip}(f)(y)$ is measurable then by Lusin Theorem, there is a compact set $K_\varepsilon \subset B$ such that :

$$\mu(B \cap K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon \text{ and } \mathrm{Lip}_{|K_\varepsilon} \text{ is continuous.}$$

Then, by Heine Theorem, there is η_ε such that for all x, y in K_ε with $d(x,y) \leq \eta_\varepsilon$, we have :

$$|\mathrm{Lip}(f)(x) - \mathrm{Lip}(f)(y)| \leq \varepsilon.$$

We keep the notation of the lemma 100. Since μ-a.e. y in K_ε is a point of density of K_ε, we have for every $r \leq \eta_\varepsilon$:

$$\frac{\mu(A_\varepsilon(y) \cap B_r(y) \cap K_\varepsilon)}{\mu(B_r(y))} = \frac{\mu(B_r(y) \cap K_\varepsilon)}{\mu(B_r(y))} \to_{r \to 0} 1.$$

Then, by using Egorov Theorem, we get a measurable set $\mathbf{K}_\varepsilon \subset K_\varepsilon$ with $\mu(K_\varepsilon \cap \mathbf{K}_\varepsilon{}^c) \leq \varepsilon$ and such that for all y in $\mathbf{K}_\varepsilon$:

$$\frac{\mu(B_{2^{-k}}(y) \cap K_\varepsilon)}{\mu(B_{2^{-k}}(y))} \to_{k \to +\infty} 1.$$

Fix now y in $\mathbf{K}_\varepsilon$. If we take $r << 1$ then there is an index k_0 such that $2^{-(k_0+1)} \leq r \leq 2^{-k_0}$ and we have :

$$\frac{\mu(B_r(y) \cap K_\varepsilon^c)}{\mu(B_r(y))} \leq \frac{\mu(B_{2^{-k_0}}(y) \cap K_\varepsilon^c)}{\mu(B_{2^{-(k_0+1)}}(y))} \leq \beta \frac{\mu(B_{2^{-k_0}}(y) \cap K_\varepsilon^c)}{\mu(B_{2^{-k_0}}(y))} \leq \beta\varepsilon.$$

With this remark, we can make a straightforward adaptation of the lemma 100.

Lemma 101. *Take (X, d, μ) a $(1,p)$-PI space with doubling constant β and E a Banach space. Take now $f : X \to E$ a L-lipschitz function. Choose now a ball $B \subset X$. Then, for every $\varepsilon > 0$, there are a measurable set $K_\varepsilon \subset B$ with $\mu(B \cap K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$ and a real number $r_\varepsilon > 0$ such that for every $q > \max\{\frac{\log \beta}{\log 2}, p\}$, there is a constant $C_q > 0$ such that for all x, x' in $B_{r_\varepsilon}(y)$ with $y \in K_\varepsilon$:*

$$||f(x) - f(x')|| \leq C_q d(x,x')(Lip(f)(y) + \varepsilon + (\beta\varepsilon)^{\frac{1}{q}} L).$$

For the sake of completeness, we recall the definition of the pointwise lower lipschitz constant.

Definition 102. *Let $f : X \to E$ be a measurable function. The measurable quantity :*

$$lip(f)(x) = \liminf_{r \to 0} \sup_{y \in B_r(x)} \frac{||f(x) - f(y)||}{r}$$

is called the pointwise lower lipschitz constant.

Consider now a lipschitz function $f : X \to E$ with X a PI-space equipped with a **complete** and β-doubling measure μ and E a RNP Banach space. To prove the next lemma, we have to use a corollary of the article [**CK4**] which asserts that for μ-a.e x in X : $\mathrm{Lip}f(x) = \mathrm{lip}f(x)$. Call now the set A (of full measure in X) where the previous relation is available. Fix $\varepsilon > 0$ and choose $0 < \alpha < 1$ close to 1. Set the quantity $L_r(f)(x) = \frac{1}{r}\sup_{y \in B_r(x)} ||f(x) - f(y)||$. Fix a ball $B \subset X$. Then, by using the Egorov Theorem, we get a measurable set $A_\varepsilon \subset A \cap B$ with $\mu(A \cap B \cap A_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$ such that :

$$L_{\alpha^k}(f)_{|A_\varepsilon} \to Lip(f)$$

uniformly in k. In fact, the set A_ε depends on the choice of α. We have not precise this dependance in order to have simpler notation. Take now $r << 1$ then there is an index k_0 such that $\alpha^{(k_0+1)} \leq r \leq \alpha^{k_0}$. Hence, we get that :

$$L_r(f)(x) \geq \alpha L_{\alpha^{(k_0+1)}}(f)(x).$$

So, there is a real number $r_\varepsilon > 0$ such that for every $r \leq r_\varepsilon$ and for every $x \in A_\varepsilon$, we have (remember us that α is close to 1) :

$$L_r(f)(x) \geq \frac{2}{3}\mathrm{Lip}(f)(x).$$

Hence, we get by the definition of the supremum that for every x in A_ε and for every $r \leq r_\varepsilon$, there is $y_{r,x,\varepsilon} \in B_r(x)$ fulfilling :

$$||f(x) - f(y_{r,x,\varepsilon})|| \geq \frac{r}{2}\mathrm{Lip}(f)(x).$$

We can notice that the previous lower bound gives us a non trivial information only if $\mathrm{Lip}(f)(x)$ is positive and that the choice of $y_{r,x,\varepsilon}$ is not necessarily measurable in r and x. By combining the previous inequality and the lemma 101, we can always suppose (by renaming the two radii given above by r_ε and the two measurable sets with big measure in B by A_ε) that there are a measurable set A_ε and a real number $r_\varepsilon > 0$ such that for all $x \in A_\varepsilon$ and for all $r \leq r_\varepsilon$, we have $y_{r,x,\varepsilon} \in B_r(x)$ fulfilling :

$$d(x, y_{r,x,\varepsilon}) \geq Cr\frac{\mathrm{Lip}(f)(x)}{\mathrm{Lip}(f)(x) + \varepsilon + (\beta\varepsilon)^{\frac{1}{q}}L}$$

with a constant C.

We have a little loss in the following inequality but for what we want to do, it is irrelevant. What is worth mentionning, it is that our method does not give the best constant (we mean that the lim inf is not a true limit) in the following inequality even if we optimize in all the parameters. Our method is too general to detect such sharp estimates.

Lemma 103. *Take (X, d, μ) a PI space equipped with a **complete** and β-doubling measure μ and E a RNP Banach space endowed with the norm $||.||$. Take $f : X \to E$ a L-lipschitz function. Then for every ball $B = B_{r_0}(x_0)$ and for all $p \geq 1$, there is a constant $C > 0$ (depending on β and p) such that for every $0 < \lambda < 1$:*

$$\liminf_{s\to 1, 0<s<1}(1-s)\int_B\int_B \frac{||f(x) - f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}}d\mu(x)d\mu(y) \geq C\int_{\lambda B}(Lip(f)(z))^p d\mu(z)$$

where $N = \frac{\log\beta}{\log 2}$ and C is a positive constant depending of B (and of course depending of the doubling constant β and the constants involved in the Poincaré inequalities supported by X).

Proof :

Fix $\varepsilon > 0$. Say that X supports weak Poincaré inequalities of type $(1, l)$ for some $l \geq 1$. We keep the notation adopted in the paragraph above the lemma 103. First, we choose $r_\varepsilon \leq \varepsilon$. We take λ_ε going to 0 when ε goes to 0 to determine later and a parameter $\alpha > 1$ which will be constrained to be very large. We have now the following chain of inequalities :

$$\int_B\int_B \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}}d\mu(x)d\mu(y)$$

$$\geq \int_{\{\mathrm{Lip}(f)\geq\lambda_\varepsilon\}\cap(1-2\varepsilon)B\cap A_\varepsilon}\int_{B_{r_\varepsilon(y)}}\frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}}d\mu(x)d\mu(y)$$

$$\geq \int_{\{\mathrm{Lip}(f)\geq\lambda_\varepsilon\}\cap(1-2\varepsilon)B\cap A_\varepsilon}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{B_{\frac{r_\varepsilon}{\alpha^k}}(y)\cap B_{\frac{r_\varepsilon}{\alpha^{k+1}}}(y)^c}\frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}}d\mu(x)d\mu(y).$$

Take now $y\in\{\mathrm{Lip}(f)\geq\lambda_\varepsilon\}\cap(1-2\varepsilon)B\cap A_\varepsilon$ fixed. We write for simplicity $B_k:=B_{\frac{r_\varepsilon}{\alpha^k}}(y)$ and $y_r=y_{r,y,\varepsilon}$. We want to find two sequences $(\mathbf{y_k})$ and r_k such that $B_{r_k}(\mathbf{y_k})\subset B_k\cap B_{k+1}^c$. We take

$$\mathbf{y_k}=y_{\frac{r_\varepsilon}{2\alpha^k}(1+\frac{1}{\alpha})}$$

and

$$r_k=A\frac{r_\varepsilon}{\alpha^k}(1+\frac{1}{\alpha})\frac{\mathrm{Lip}(f)(y)}{\mathrm{Lip}(f)(y)+\varepsilon+(\beta\varepsilon)^{\frac{1}{q}}L}$$

with an absolute constant A (independant of ε and k) that will be chosen very small. We argue by contradiction by supposing that $B_{r_k}(\mathbf{y_k})\cap B_{k+1}\neq\emptyset$. Then, there is $z\in X$ such that $d(y,z)\leq\frac{r_\varepsilon}{\alpha^k}$ and $d(\mathbf{y_k},z)\leq r_k$. Although, by the remark that lying above the lemma 103, we know that there is a constant C such that :

$$d(y,\mathbf{y_k})\geq C\frac{r_\varepsilon}{\alpha^k}(1+\frac{1}{\alpha})\frac{\mathrm{Lip}(f)(y)}{\mathrm{Lip}(f)(y)+\varepsilon+(\beta\varepsilon)^{\frac{1}{q}}L}.$$

Hence, by the triangular inequality and after some simplifications, we get :

$$\big((C-A)(1+\frac{1}{\alpha})-\frac{1}{\alpha}\big)\mathrm{Lip}(f)(y)\leq\frac{\varepsilon+(\varepsilon\beta)^{\frac{1}{q}}L}{\alpha}.$$

Hence, if we choose $A:=A_0\ll 1$ and $\alpha:=\alpha_0\gg 1$ such that (for instance)

$$(C-A_0)(1+\frac{1}{\alpha_0})-\frac{1}{\alpha_0}\geq\frac{C}{2}$$

then a possible choice for λ_ε (to get a contradiction) is

$$\lambda_\varepsilon:=3\frac{\varepsilon+(\varepsilon\beta)^{\frac{1}{q}}L}{C\alpha_0}.$$

Thus, we get that $B_{r_k}(\mathbf{y_k})\subset B_{k+1}^c$.

We argue again by contradiction by supposing that $B_{r_k}(\mathbf{y_k})\cap B_k^c\neq\emptyset$. Then, we have $z\in X$ such that $d(\mathbf{y_k},z)\leq r_k\leq A\frac{r_\varepsilon}{\alpha^k}(1+\frac{1}{\alpha})$ and $d(y,z)\geq\frac{r_\varepsilon}{\alpha^k}$. We recall that $d(y,\mathbf{y_k})\leq\frac{r_\varepsilon}{2\alpha^k}(1+\frac{1}{\alpha})$. So, by a triangular inequality and after some simplifications, we get :

$$1<(\frac{1}{2}+A)(1+\frac{1}{\alpha}).$$

By choosing $A:=A_1\ll 1$ and $\alpha:=\alpha_1\gg 1$, we derive a contradiction. Thus, we have that $B_{r_k}(\mathbf{y_k})\subset B_k$.

Moreover, we have by a triangular inequality that :

$$||f(x)-f(y)||\geq||f(y)-f(\mathbf{y_k})||-||f(x)-f(\mathbf{y_k})||.$$

By the definition of $\mathbf{y_k}$, by choosing $A := A_2$ small enough and by using the lemma 101, we have that for every $x \in B_{r_k}(\mathbf{y_k})$:

$$||f(x) - f(y)|| \geq C_\alpha \frac{r_\varepsilon}{\alpha^k} \mathrm{Lip}(f)(y)$$

with a constant $C_\alpha > 0$ depending only on α. Choose now $\alpha := \min\{\alpha_0, \alpha_1\}$ and $A := \min\{A_0, A_1, A_2\}$ (these two numbers are independant of ε). Thus, we have for every k :

$$\int_{B_{\frac{r_\varepsilon}{\alpha^k}}(y) \cap B_{\frac{r_\varepsilon}{\alpha^{k+1}}}(y)^c} \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x) \geq C \frac{r_\varepsilon^{p(1-s)}}{\alpha^{kp(1-s)}} (\mathrm{Lip}(f)(y))^p \frac{\alpha^{kN}}{r_\varepsilon^N} \mu(B_{r_k}(\mathbf{y_k})).$$

By using the lemma 91, we have that :

$$\mu(B_{r_k}(\mathbf{y_k})) \geq C\mu(B)(\frac{r_k}{r_0})^N.$$

So, we get for every k :

$$\int_{B_{\frac{r_\varepsilon}{\alpha^k}}(y) \cap B_{\frac{r_\varepsilon}{\alpha^{k+1}}}(y)^c} \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x) \geq C \frac{r_\varepsilon^{p(1-s)}}{\alpha^{kp(1-s)}} (\mathrm{Lip}(f)(y))^p \Big(\frac{\mathrm{Lip} f(y)}{\mathrm{Lip}(f)(y) + \varepsilon + (\beta\varepsilon)^{\frac{1}{q}} L}\Big)^N.$$

By summing on k and then by integrating on $\{\mathrm{Lip}(f) \geq \lambda_\varepsilon\} \cap (1-2\varepsilon)B \cap A_\varepsilon$, we get that :

$$\begin{aligned}
&\int_B \int_B \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x) d\mu(y) \\
\geq\ & C \frac{r_\varepsilon^{p(1-s)}}{1-s} \int_{\{\mathrm{Lip}(f) \geq \lambda_\varepsilon\} \cap (1-2\varepsilon)B \cap A_\varepsilon} (\mathrm{Lip}(f)(y))^p \Big(\frac{\mathrm{Lip} f(y)}{\mathrm{Lip}(f)(y) + \varepsilon + (\beta\varepsilon)^{\frac{1}{q}} L}\Big)^N
\end{aligned}$$

with a constant C independant of ε. Hence, we get that :

$$\begin{aligned}
&\liminf_{s \to 1, 0<s<1} (1-s) \int_B \int_B \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x) d\mu(y) \\
\geq\ & C \int_{\{\mathrm{Lip}(f) \geq \lambda_\varepsilon\} \cap (1-2\varepsilon)B \cap A_\varepsilon} (\mathrm{Lip}(f)(y))^p \Big(\frac{\mathrm{Lip} f(y)}{\mathrm{Lip}(f)(y) + \varepsilon + (\beta\varepsilon)^{\frac{1}{q}} L}\Big)^N.
\end{aligned}$$

By using the dominated convergence when ε goes to 0, we get the desired result.

Remark : We can notice that the assumption of completeness on the measure μ can be dropped when the normed vector space E is of finite dimension.

3.4.2. Ahlfors-regular case.

Definition 104. *We say that a measure μ supported by X is N Ahlfors-regular if there are two constants $C_1 > 0$ and $C_2 > 0$ such that for all $r \leq r_0$ and for all $x \in X$:*

$$C_1 r^N \leq \mu(B_r(x)) \leq C_2 r^N.$$

We will say that X is a N Ahlfors-regular space if it supports a N Ahlfors-regular measure μ. We can also notice that if μ is β-doubling and if μ has a polynomial growth with exponent $N = \frac{\log\beta}{\log 2}$ then μ is N-Ahlfors regular.

Remark : If μ is N Ahlfors-regular then, the constant C in the lemma 103 can be chosen independently of B. In this setting, the constant C only depends of C_1,C_2,p and of the constants involved in the Poincaré inequalities supported by X.

This simple lemma shows that on Ahlfors-regular metric spaces for instance, it makes sense to be interested in the limiting case of the Theorem 98.

Lemma 105. *Take (X, d, μ) a metric measure space with a Radon measure μ which satisfies that there is a constant $A > 0$ such that for all $r > 0$ and for all $x \in X$: $\mu(B_r(x)) \leq Ar^N$ (the measure μ grows polynomially). Take $f \in M^{1,p}(X, E)$ (with $p \geq 1$) and g a funtion in $L^p(X, \mathbf{R}^+)$ associated to f. Then, there is a constant $C > 0$ (depending on A and p) such that for every ball $B = B_{r_0}(x_0)$:*

$$\limsup_{s\to 1, 0<s<1} (1-s)\int_B\int_B \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x)d\mu(y) \leq C\int_B g^p(z)d\mu(z).$$

Proof :

By assumption, we have for μ-a.e x and y of X that :

$$||f(x)-f(y)|| \leq d(x,y)(g(x)+g(y)).$$

Thus, we get :

$$\int_B\int_B \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x)d\mu(y) \leq \int_B\int_B \frac{(g(x)+g(y))^p}{d(x,y)^{N-p(1-s)}} d\mu(x)d\mu(y).$$

By using the Fubini-Tonelli Theorem, we have that :

$$\int_B\int_B \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x)d\mu(y) \leq C_p\int_B g^p(y)\int_B \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{d(x,y)^{N-p(1-s)}}.$$

We can notice that for all $y \in B$, we have that $B \subset B_{2r_0}(y)$. Thus, we get for μ-a.e $y \in X$:

$$\int_B \frac{d\mu(x)}{d(x,y)^{N-p(1-s)}} \leq \int_{B_{2r_0}(y)} \frac{d\mu(x)}{d(x,y)^{N-p(1-s)}}.$$

Take now the sequence of balls $(B_k)_{k\in\mathbf{N}}$ defined by $B_k = B_{\frac{2r_0}{2^k}}(y)$. We have :

$$\int_B \frac{d\mu(x)}{d(x,y)^{N-p(1-s)}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{B_k\cap B_{k+1}^c} \frac{1}{d(x,y)^{N-p(1-s)}} d\mu(x) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{(k+1)(N-p(1-s))}}{(2r_0)^{(N-p(1-s))}}\mu(B_k).$$

By the hypothesis made on μ, we have on a neighbourhood of $s = 1$ that :

$$\int_B \frac{1}{d(x,y)^{N-p(1-s)}} d\mu(x) \leq Cr_0^{p(1-s)}\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-kp(1-s)} \leq C\frac{r_0^{p(1-s)}}{1-s}.$$

Thus, we get :

$$(1-s)\int_B\int_B \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x)d\mu(y) \leq Cr_0^{p(1-s)}\int_B g^p(z)d\mu(z).$$

Thus, we get the desired result when s goes to 1.

Remark : In fact, to get the lemma 105, we just really need that for every $0 < s < 1$ and for every $0 < r < 1$, we have for μ-a.e y :

$$\int_{B_r(y)} \frac{1}{d(x,y)^{N-p(1-s)}} d\mu(x) \leq \frac{C}{1-s}.$$

Indeed, the previous inequality implies that μ grows polynomially with all exponent less or equal than N. More precisely, we get for every $\varepsilon > 0$ and for every $0 < r < 1$ that for μ-a.e y in X :

$$\mu(B_r(y)) \leq \frac{C}{\varepsilon} r^{N-\varepsilon}.$$

So, in order to have more convenient assumptions, we decide to take the measure μ to be Ahlfors-regular. We can now give a criterium to detect if a measurable function on a PI-space is constant.

Theorem 106. *Let X be a $(1,p)$ PI-space equipped with a N Ahlfors-regular measure μ and E a Banach space. If $f : X \to E$ is a measurable function such that the quantity*

$$\int_X \int_X \frac{||f(x) - f(y)||^p}{d(x,y)^{N+p}} d\mu(x) d\mu(y)$$

is finite then f can be extended in a continuous constant function.

Proof : With the same argument used on corollary 99, we can conclude that f is in $M^{1,p}_{loc.}(X,E)$. So by the proposition 97, we can suppose that E is a separable Banach space and we take $\{\pi_i, V_i\}$ a FDA for E. Define $f_i = \pi_i(f) : X \to V_i$ and since f is in $M^{1,p}_{loc.}(X,E)$ then f_i is in $M^{1,p}_{loc.}(X,V_i)$. More precisely, if g in $L^p_{loc.}(X,\mathbf{R}^+)$ is associated to f in $M^{1,p}_{loc.}(X,E)$ then g is also associated to f_i in $M^{1,p}_{loc.}(X,V_i)$. For the remaining of the proof, we take g in $L^p_{loc.}(X,\mathbf{R}^+)$ associated to f in $M^{1,p}_{loc.}(X,E)$. Fix now a ball $B_0 := B_{r_0}(x_0) \subset X$ then we have two constants C and λ associated to $5B_0$ by the Poincaré inequality. So, by a straightforward adaptation of lemma 90, for all $\varepsilon > 0$ and for each i, we have a family of lipschitz functions $g_{\varepsilon,i} : X \to V_i$ such that $||\chi_{(5\lambda B_0)}(f_i - g_{\varepsilon,i})||_{1,p} \leq C_i\varepsilon$ and $\mu(A^c_{\varepsilon,i} \cap 5\lambda B_0) \leq C_i\varepsilon$ with $A_{\varepsilon,i} = \{x \in 5\lambda B_0 \text{ such that } f_i = g_{\varepsilon,i}\}$.

For a measurable function h, define now the quantity :

$$I_s(h) = (1-s) \int_{2\lambda B_0} \int_{2\lambda B_0} \frac{||h(x) - h(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x) d\mu(y).$$

We have by a triangular inequality that :

$$I_s(g_{\varepsilon,i}) \leq C I_s(g_{\varepsilon,i} - f_i) + C I(s)(f_i).$$

By applying the lemma 105, we get that

$$\limsup_{s \to 1} I_s(g_{\varepsilon,i} - f) \leq C_i \varepsilon.$$

By hypothesis, we get that :

$$I_s(f_i) \leq C r_0^{p(1-s)} (1-s) \int_X \int_X \frac{||f(x) - f(y)||^p}{d(x,y)^{N+p}} d\mu(x) d\mu(y) = 0(1-s)$$

with a constant C only depending of i and λ. Moreover, by applying the lemma 103, we have that :

$$\liminf_{s\to 1} I_s(h_\varepsilon) \geq C \int_{\lambda B_0} \mathrm{Lip}(g_\varepsilon)^p.$$

Finally, we get that :

$$\int_{\lambda B_0} \mathrm{Lip}(g_\varepsilon)^p \leq C\varepsilon^p.$$

Then, we repeat the same argument used in the Theorem 98. We have :

$$\frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} ||f_i - \frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} f_i|| \leq \frac{2}{\mu(B_0)} \int_{B_0} ||f_i - g_{\varepsilon,i}|| + \frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} ||g_{\varepsilon,i} - \frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} g_{\varepsilon,i}||.$$

By Jensen inequality, we have :

$$\frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} ||f_i - g_{\varepsilon,i}|| \leq \frac{C_i \varepsilon}{\mu(B_0)^{\frac{1}{p}}}.$$

Since X supports $(1,p)$-Poincaré inequality and by lemma 93, we have :

$$\frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} ||g_{\varepsilon,i} - \frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} g_{\varepsilon,i}|| \leq C r_0 \Big(\frac{1}{\mu(\lambda B_0)} \int_{\lambda B_0} \mathrm{Lip}(g_{\varepsilon,i})^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C_i r_0 \varepsilon}{\mu(\lambda B_0)^{\frac{1}{p}}}$$

by the previous analysis. Hence, by taking the limit when ε goes to 0, we get that for μ-a.e x in B : $f_i(x)$ is constant. We can rephrase it by saying that we have for μ-a.e. x and y in B : $\pi_i(f(x) - f(y)) = 0$. Since $\{\pi_i, V_i\}$ is a FDA for E, we have by taking the limit when i goes to $+\infty$ that $f(x)$ is constant for μ-a.e. x in B. Since X supports Poincaré inequalities then X is connected (even arc-wise connected) so by connectedness, f is constant μ-a.e. and the Theorem is proved.

By using the Kurastowski embedding Theorem (that we will prove in a while), we can deduce the following.

Theorem 107. *Take (X, d, μ) a $(1, p)$ PI-space equipped with a N-Ahlfors regular measure μ and (Y, l) a metric space. If $f : X \to Y$ is a measurable function that satisfies*

$$\int_X \int_X \frac{l(f(x), f(y))^p}{d(x,y)^{N+p}} d\mu(x) d\mu(y) < +\infty$$

then f is constant μ-a.e.

Proof : If Y is separable, take $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ to be a countable dense -for the metric l- family of Y. Hence, we get that : Y embeds isometrically into $l^\infty(\mathbf{N})$ by the mean of the following application. Consider $\Phi : Y \to l^\infty(\mathbf{N})$ defined by $\Phi(y) := (l(y, y_n) - l(x_0, y_n))_{n\in\mathbf{N}}$ where x_0 is a basepoint of Y. The application Φ is well defined. Indeed, by the triangular inequality, we get that :

$$||\Phi(y)||_\infty \leq d(y, x_0).$$

Moreover, for every y, y' in Y, we have by the triangular inequality that :

$$||\Phi(y) - \Phi(y')||_\infty \leq l(y, y').$$

Since $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ is a dense -for the metric l- family in Y, we get by taking a subsequence of this family which converges to y (for instance) that

$$||\Phi(y) - \Phi(y')||_\infty = l(y, y').$$

If Y is not separable, we get that Y embeds isometrically into $L^{\infty}(Y,\mathbf{R})$ by the mean of

$$\Phi(y)(z) = l(y,z) - l(x_0,z)$$

where y,z are points of Y and x_0 is a basepoint of Y. So, we get again that Φ is well defined and satisfies for every y,y' in Y :

$$||\Phi(y) - \Phi(y)||_{\infty} = l(y,y').$$

Hence, if f satisfies the condition of the Theorem 107 then we have in either case that $\Phi(f)$ satisfies the condition of the Theorem 106 (Φ is an isometry). So, $\Phi(f)$ is constant μ-a.e and we get the desired result.

3.5. A characterization of $M^{1,p}$ for $p > 1$ on Ahlfors-regular spaces

3.5.1. Lemmas of uniformization. We can now give a kind of integral characterization -in the framework of the article [**Br2**]- of the space $M^{1,p}(X,E)$ when X is a PI-space that suppots an Ahlfors-regular measure and E is a RNP Banach space. But for such a characterization of the Hajlasz spaces based on Ahlfors-regular metric spaces X, we can no longer use some elementary tools and especially when the functions which belong to the former space take values in a Banach space of infinite dimension. We have to use a difficult Theorem of extension of lipschitz function due to Lee and Naor (Th. 1.6 of the article [**LN**]) in order to prove that lipschitz functions are dense for the norm $||.||_{1,p}$ in the space $M^{1,p}_{loc.}(X,E)$ when X is a doubling measure space (this condition is crucial to use the Theorem of the article [**LN**]) and when E is an arbitrary Banach space. But for the sake of simplicity, we only want to use some basic facts and this is why we defer this last characterization until the end. We begin with a lemma which has the flavour of the lemma 90 with the exception that instead of using the Mc-Shane extension Theorem, we use the Theorem 1.6 of [**LN**].

Lemma 108. *Take (X,d,μ) to be a metric measure space equipped with a doubling measure μ and E a Banach space endowed with the norm $||.||$. Then, if f is in $M^{1,p}_{loc.}(X,E)$ with $p \geq 1$ then for every $\varepsilon > 0$ and for every ball $B_{\lambda}(x_0) = B \subset X$ there is a lipschitz function g such that $\mu\{x \in B \mid f(x) \neq g(x)\} \leq \varepsilon$ and $||(f-g)\chi_B||_{1,p} \leq \varepsilon$.*

Proof :

First of all, there is h in $L^{p}_{loc.}(X,\mathbf{R}^{+})$ such that for μ-a.e x,y in X, we have :

$$||f(x) - f(y)|| \leq d(x,y)(h(x) + h(y)).$$

Set A to be the set of full measure in X such that the last inequality is true. For $t > 0$, define the set A_t to be :

$$A_t = \{x \in A \cap B \mid h(x) \leq t\}.$$

So, we have that $f_{|A_t}$ is $2t$-lipschitz. Hence, by using the Theorem 1.6 of [**LN**], there is a lipschitz function f_t which is Ct-lipschitz (with C a constant depending only of the doubling constant of μ) and such that $(f_t)_{|A_t} = f$. Now, we have 3 cases.

First case : x,$y \in A_t$. We have that :

$$||f_t(x) - f_t(y)|| = ||f(x) - f(y)|| \leq d(x,y)(h(x) + h(y)).$$

Second case : x,$y \in B \cap A_t^c$. We have that :

$$||f_t(x) - f_t(y)|| \leq Ctd(x,y) \leq 2Ctd(x,y).$$

Third case : We can always suppose by symmetry that $x \in A_t$ and $y \in A_t^c$. We have that :

$$||f_t(x) - f_t(y)|| \leq Ctd(x,y).$$

Hence, we have a function h_t associated to f_t which is

$$h_t = \chi_{A_t} h + \chi_{A_t^c} Ct.$$

We have by Tchebytchev inequality that :

$$\mu(x \in B \mid f_t(x) \neq f(x)\} \leq \mu(B \cap A_t^c) \leq \frac{1}{t^p} \int_B h^p.$$

Since h is in $L^p_{loc.}$, we get that $\mu(x \in B \mid f_t(x) \neq f(x)\}$ tends to 0 when t goes to $+\infty$. Hence, by choosing t_0 big enough, we can get y_0 in A_{t_0} such that $||f(x)|| \leq L$ for some finite constant L. So, for every $t \geq t_0$ and because the sets A_t are increasing, we have for every $y \in B \cap A_t$ that :

$$||f_t(y) - f_t(y_0)|| \leq Ctd(y, y_0).$$

By a triangular inequality, we get for every $y \in B \cap A_t$ that :

$$||f_t(y)|| \leq 2C\lambda t + L.$$

So, we get the following bound :

$$||(f_t - f)\chi_B||_p \leq 2C\lambda t \mu(B \cap A_t^c)^{\frac{1}{p}} + L\mu(B \cap A_t^c)^{\frac{1}{p}} + (\int_{B \cap A_t^c} ||f||^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Moreover, we have :

$$||(h_t - h)\chi_B||_p \leq Ct\mu(B \cap A_t^c)^{\frac{1}{p}} + (\int_{B \cap A_t^c} h^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Look more carefully that we have :

$$t^p \mu(B \cap A_t^c) \leq \int_{B \cap A_t} ||f||^p.$$

Remember that we have $\lim_{t \to +\infty} \mu(B \cap A_t^c) = 0$. Thanks to the dominated convergence, we get that

$$\lim_{t \to +\infty} ||(f_t - f)\chi_B||_p = 0 \text{ and } \lim_{t \to +\infty} ||(h_t - h)\chi_B||_p = 0.$$

So, we have proved the lemma.

Proposition 109. *Take $p \geq 1$ and $f : X \to E$ a L^p function where X is a N Ahlfors-regular space and E is a Banach space. If f satisfies the following condition*

$$\limsup_{s \to 1} (1-s) \int_X \int_X \frac{||f(x) - f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x) d\mu(y) < +\infty$$

then for every $0 < s < 1$ (or for every s close to 1), there is g_s in $L^p(X, \mathbf{R}^+)$ such that $||g_s||_p \leq C$ that satisfies and μ-a.e x, y in X :

$$||f(x) - f(y)|| \leq \frac{C}{(1-s)^{\frac{1}{p}}} d(x,y)^s (g_s(x) + g_s(y))$$

with an absolute constant C.

Proof : The proof comes only from a straightforward adaptation of the proof of the corollary 99. We just take g_s to be

$$g_s(y) = \big((1-s)\int_X \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x)\big)^{\frac{1}{p}}.$$

We recall a lemma of renormalization called the Mazur's lemma that we apply for $L^p(\mu)$ spaces for $p>1$ and μ a Radon measure. Since $L^p(\mu)$ is a reflexive space when μ is Radon then every bounded sequence in $L^p(\mu)$ have a weak convergent subsequence. Moreover, by using the Hahn-Banach Theorem, we can show that bounded and weakly closed convex sets coincide with bounded and closed convex sets in $L^p(\mu)$. A standard limiting argument -more precisely the Banach-Saks Theorem- then leads to the following.

Lemma 110. *Take (X,d,μ) a metric measure space equipped with a Radon measure μ and E a Banach space. If $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}$ is a sequence of $L^p(X,E)$ with $p>1$ such that for every k : $||g_k|| \leq C$ for some constant $C>0$. Then, there is a convex combination of g_k that converges to some function g in $L^p(X,E)$. More precisely, we have for every n in $\mathbf{N}$ that there are a finite subset I_n of $\mathbf{N}$ and a sequence $(\lambda_{l,n})_{l\in\mathbf{N}}$ that satisfies :*

$$0 \leq \lambda_{l,n} \leq 1,\ \lambda_{l,n}=0 \text{ if } l \text{ is not in } I_n \text{ and } \sum_{l\in I_n}\lambda_{l,n}=1.$$

Moreover, we can choose

$$l_n := \min_{\lambda_{l,n}\neq 0}\{l\in I_n\}$$

in such a way that it goes to $+\infty$ when n goes $+\infty$ and we have :

$$||\sum_{l\in I_n}\lambda_{l,n}g_l - g||_p \leq \frac{1}{n+1}.$$

We apply the lemma 110 in order to prove that when $p>1$, the infimum in the definition of $M^{1,p}(Y,E)$ where Y a measurable subset of X a metric measure space is in fact a minimum.

Lemma 111. *Take (X,d,μ) a metric measure space and E is a Banach space. If f is in $M^{1,p}(X,E)$ with $p>1$ then, for every measurable $Y\subset X$, there is a function g_Y which satisfies $(*)$ in the definition 88 for μ-a.e x,y in Y and which is of minimal norm in $L^p(Y,\mathbf{R}^+)$. More precisely, we have that for every g which satisfies $(*)$ in the definition 88 for μ-a.e x,y in Y :*

$$\int_Y g_Y^p \leq \int_Y g^p.$$

Proof : Take a measurable set $Y\subset X$. Call now

$$m_Y := \inf_{g \text{ satisfies } (*) \text{ for } \mu\text{-a.e } x,y \text{ in } Y} ||g\chi_Y||_p.$$

Consider now a sequence (g_n) in $L^p(Y,\mathbf{R}^+)$ such that $||g_n\chi_Y|| \leq m_Y + \frac{1}{n+1}$ and such that for every n, g_n satisfies $(*)$ for μ-a.e x,y in Y. Then, by applying the lemma 110, we get a finite convex combination of the functions g_n :

$$h_n := \sum_{l\in I_n} \lambda_{l,n} g_l$$

and a function g in $L^p(Y, \mathbf{R}^+)$ such that :

$$||(h_n - g)\chi_Y||_p \leq \frac{1}{n+1}$$

with $l_n := \min_{\lambda_{l,n}\neq 0}\{l \in I_n\}$ goes to $+\infty$ when n goes $+\infty$. Hence, we can take a subsequence that we will rename (h_n) of the sequence $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ that converges ponctually on a subset of full measure in Y to g. We have for μ-a.e x, y in Y the following chain of inequalities :

$$\begin{aligned} ||f(x) - f(y)|| &\leq \sum_{l\in I_n} \lambda_{l,n} ||f(x) - f(y)|| \\ &\leq d(x, y)(\sum_{l\in I_n} \lambda_{l,n} g_l(x) + \sum_{l\in I_n} \lambda_{l,n} g_l(y)) \end{aligned}$$

By taking the limit when n goes to $+\infty$, we get that g satisfies $(*)$ for μ-a.e. x, y in Y. Moreover, we have that :

$$||g\chi_Y||_p \leq ||(g - h_n)\chi_Y||_p + ||h_n\chi_Y||_p \leq \frac{1}{n+1} + m_Y(1 + \frac{1}{1+l_n}).$$

Hence, by taking the limit when n goes to $+\infty$, we get that g is minimal in $L^p(Y, \mathbf{R}^+)$.

3.5.2. The main characterization. Next, we show that $M^{1,p}(X, E)$ is a closed -for the norm $||.||_{1,p}$- linear subspace of

$$\{f \in L^p(X, E) \mid J_p^+(f) := \limsup_{s\to 1}(1 - s)\int_X\int_X \frac{||f(x) - f(y)||^p}{d(x, y)^{N+ps}} d\mu(x)d\mu(y) < +\infty\}.$$

Moreover, the norm $||f||_{1,p}$ is equivalent to the following one : $||f||_p + J_p^+(f)^{\frac{1}{p}}$ in restriction to $M^{1,p}(X, E)$.

Since X is a PI-space then X is proper and σ-compact. So, we can choose a family of open balls B_n such that

$$Z := \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} B_n$$

where $B_n \subset B_{n+1}$ and $\mu(X \cap Z^c) = 0$.

Theorem 112. *Take X to be a $(1, p)$ PI-space for some $p > 1$ equipped with a N-Ahlfors regular and **complete** measure μ and E a RNP Banach space endowed with the norm $||.||$. Then, there are two absolute constants A_1 and A_2 (depending only of the geometry of X) such that for every f belonging to $M^{1,p}(X, E)$:*

$$J_p^-(f) := \liminf_{s\to 1}(1 - s)\int_X\int_X \frac{||f(x) - f(y)||^p}{d(x, y)^{N+ps}} d\mu(x)d\mu(y) \geq A_1 \int_X g^p(x)d\mu(x)$$

and

$$J_p^+(f) := \limsup_{s\to 1}(1 - s)\int_X\int_X \frac{||f(x) - f(y)||^p}{d(x, y)^{N+ps}} d\mu(x)d\mu(y) \leq A_2 \int_X g^p(x)d\mu(x)$$

where g is the minimal function in $L^p(X,\mathbf{R}^+)$ associated to f in $M^{1,p}(X,E)$.

Proof : Since f is in $M^{1,p}(X,E)$ with $p>1$ then by the lemma 111, we can associate to f a minimal (in norm) function g in $L^p(X,\mathbf{R}^+)$ that satisfies $(*)$ on a set of full measure in X. Hence, we get for any fixed $r>0$ that :

$$\begin{aligned}\int_X\int_X \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}}d\mu(x)d\mu(y) &\leq \int_X\int_{B_r(y)} \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}}d\mu(x)d\mu(y)\\ &\quad+\int_X\int_{B_r(y)^c} \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}}d\mu(x)d\mu(y)\\ &\leq C\int_X\int_{B_r(y)} \frac{g(x)^p+g(y)^p}{d(x,y)^{N-p(1-s)}}d\mu(x)d\mu(y) \text{ by definition of } g\\ &\quad+C\int_X ||f(y)||^p\int_{B_r(y)^c}\frac{d\mu(x)}{d(x,y)^{N+ps}}d\mu(y) \text{ by Fubini}\\ &\leq C\int_X g(y)^p\int_{B_r(y)}\frac{d\mu(x)}{d(x,y)^{N-p(1-s)}}d\mu(y) \text{ by Fubini}\\ &\quad+\frac{C}{r^{ps}}||f||_p \text{ by estimating the inner integral on coronas.}\end{aligned}$$

Moreover, we have by estimating the inner integral on coronas that :

$$\int_{B_r(y)}\frac{d\mu(x)}{d(x,y)^{N-p(1-s)}}\leq C\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mu(B_{2^{-k}r}(y))}{2^{-k(N-p(1-s))}r^{N-p(1-s)}}.$$

Thanks to the upper bound on the measure μ, we get for s close to 1 that :

$$\int_{B_r(y)}\frac{d\mu(x)}{d(x,y)^{N-p(1-s)}}\leq C\frac{r^{p(1-s)}}{1-s}.$$

Hence, we get for s close to 1 that :

$$(1-s)\int_X\int_X\frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}}d\mu(x)d\mu(y)\leq Cr^{p(1-s)}||g||_p+\frac{(1-s)C}{r^{ps}}||f||_p.$$

Finally, we get that :

$$J_p^+(f):=\limsup_{s\to 1}(1-s)\int_X\int_X\frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}}d\mu(x)d\mu(y)\leq A_2||g||_p.$$

Since X is a $(1,p)$ PI-space then by using the Theorem of [**KZ**], we get that X is a $(1,q)$ PI-space for some $1<q<p$. For every n in $\mathbf{N}$ and for any measurable function $h:X\to E$, consider now the following quantity :

$$I_s(h)=(1-s)\int_{10\lambda B_n}\int_{10\lambda B_n}\frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}}d\mu(x)d\mu(y)$$

where λ is the constant involved in the dilatation of the balls in the weak $(1,q)$-Poincaré inequalities supported by X and where we omit the dependance in n for the sake of clarity. Then, by the lemma 108, there are a family $(f_l)_{l\in\mathbf{N}}$ of lipschitz functions and a family $(g_l)_{l\in\mathbf{N}}$ of functions in $L^p(10\lambda B_n, \mathbf{R}^+)$ such that for every l : g_l is associated in $M^{1,p}(10\lambda B_n, E)$ to f_l. Moreover, we have that :

$$||(f_l - f)\chi_{(10\lambda B_n)}||_p \leq \frac{1}{l+1} \text{ and } ||(g_l - g)\chi_{(10\lambda B_n)}||_p \leq \frac{1}{l+1}.$$

By the triangular inequality, we get that :

$$I_s(f_l) \leq C I_s(f_l - f) + C I_s(f).$$

We clearly have that :

$$\liminf_{s\to 1} I_s(f) \leq J_p^-(f) := \liminf_{s\to 1}(1-s)\int_X\int_X \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x)d\mu(y).$$

By applying the lemma 105, we have that :

$$\limsup_{s\to 1} I_s(f_l - f) \leq \frac{C}{l+1}.$$

By applying the lemma 103, we get that :

$$\liminf_{s\to 1} I_s(f_l) \geq C\int_{5\lambda B_n} (\mathrm{Lip}(f_l))^p.$$

Then , we have that :

$$\int_{5\lambda B_n} (\mathrm{Lip}(f))^p \leq \frac{C}{l+1} + C J_p^-(f).$$

Since $p > 1$ and $\mathrm{Lip}(f_l)$ is bounded in $L^p(5\lambda B_n, \mathbf{R}^+)$ we get by applying the lemma 110 a finite convex combination of the functions $\mathrm{Lip}(f_l)$:

$$h_k := \sum_{l\in I_k} \lambda_{l,k}\mathrm{Lip}(f_l)$$

and a function h in $L^p(5\lambda B_n, \mathbf{R}^+)$ such that :

$$||(h_k - h)\chi_{(5\lambda B_n)}||_p \leq \frac{1}{k+1}$$

with $l_k := \min_{\lambda_{l,k}\neq 0}\{l \in I_k\}$ goes to $+\infty$ when k goes $+\infty$. For every ball $B \subset 5B_n$ of radius r, we have the following chain of inequalities :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(B)}\int_B ||f-\frac{1}{\mu(B)}\int_B f|| &\leq \frac{1}{\mu(B)}\int_B ||\sum_{l\in I_k}\lambda_{l,k}f-\frac{1}{\mu(B)}\int_B\sum_{l\in I_k}\lambda_{l,k}f|| \\
&\leq \frac{2}{\mu(B)}\int_B ||\sum_{l\in I_k}\lambda_{l,k}f-\sum_{l\in I_k}\lambda_{l,k}f_l|| \text{ since } \sum_{l\in I_k}\lambda_{l,k}=1 \\
&\quad + \frac{1}{\mu(B)}\int_B ||\sum_{l\in I_k}\lambda_{l,k}f_l-\frac{1}{\mu(B)}\int_B\sum_{l\in I_k}\lambda_{l,k}f_l|| \\
&\leq \frac{C}{\mu(B)}\sum_{l\in I_k}\lambda_{l,k}\int_B ||f-f_l|| \text{ by a triangular inequality} \\
&\quad + Cr\Big(\frac{1}{\mu(\lambda B)}\int_{\lambda B}(\mathrm{Lip}(\sum_{l\in I_k}\lambda_{l,k}f_l))^q\Big)^{\frac{1}{q}} (\text{X is a } (1,q) \;\; PI\text{-space}) \\
&\leq \frac{C}{l_{k+1}\mu(B)^{\frac{1}{p}}} \text{ by Jensen inequality} \\
&\quad + Cr\Big(\frac{1}{\mu(\lambda B)}\int_{\lambda B} h_k^q\Big)^{\frac{1}{q}} \text{ since } \mathrm{Lip}(a+b)\leq \mathrm{Lip}(a)+\mathrm{Lip}(b).
\end{aligned}$$

By taking the limit when k goes $+\infty$, we get for every $B\subset 5B_n$ of radius r that :

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B ||f-\frac{1}{\mu(B)}\int_B f|| \leq Cr\Big(\frac{1}{\mu(\lambda B)}\int_{\lambda B} h^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Since h is in $L^p(5\lambda B_n,\mathbf{R}^+)$ and $\frac{p}{q}>1$, by applying the lemma 96, we get that $M(h^q\chi_{(5\lambda B_n)})^{\frac{1}{q}}$ is in $L^p(B_n,\mathbf{R}^+)$ and satisfies $(*)$ for μ-a.e. x,y in B_n. By convexity of $x\to x^p$, we have that :

$$\int_{5\lambda B_n} h_k^p \leq \sum_{l\in I_k}\lambda_{l,k}\int_{5\lambda B_n}(\mathrm{Lip}(f_l))^p \leq \frac{C}{l_k+1}+CJ_p^-(f).$$

So, we get by taking the limit when k goes to $+\infty$ that :

$$\int_{5\lambda B_n} h^p \leq CJ_p^-(f).$$

By applying the maximal inequality of Hardy-Littlewood (we recall that X is doubling), we have the following chain of inequalities :

$$\int_{B_n} M(h^q\chi_{(5\lambda B_n)})^{\frac{p}{q}} \leq \int_X M(h^q\chi_{(5\lambda B_n)})^{\frac{p}{q}} \leq C_p\int_{5\lambda B_n} h^p \leq CJ_p^-(f).$$

Moreover, for every n in $\mathbf{N}$, by applying again the lemma 111, we can associate to f in $M^{1,p}(B_n,E)$ a minimal function w_n in $L^p(B_n,\mathbf{R}^+)$ that satisfies $(*)$ on a set of full measure in B_n. By minimality of w_n, we have that :

$$\int_{B_n} w_n^p \leq \int_{B_n} M(h^q\chi_{(5\lambda B_n)})^{\frac{p}{q}} \leq CJ_p^-(f).$$

Define now a $L^p(X,\mathbf{R}^+)$ function $\mathbf{w_n}: X\to E$ by $\mathbf{w_n}(x):=\chi_{(B_n)}(x)w_n(x)$ which is bounded by $CJ_p^-(f)$ in $||.||_p^p$ norm by the previous inequality. By applying the lemma 110, we get a sequence of finite convex combination of $\mathbf{w_n}$ which converges to $\mathbf{w}$ for the

$||.||_p$ norm. Thus, there is a subsequence of the previous sequence that converges μ-a.e. to $\mathbf{w}$. Since the minimal index of the non zero coefficient of the convex combination tends to $+\infty$ and since $B_n \subset B_{n+1}$, we get that $\mathbf{w}$ satisfies $(*)$ on a set of full measure in X. Moreover, by the convexity of $x \to x^p$, we also get that $\mathbf{w}$ is bounded by $CJ_p^-(f)$ in $||.||_p^p$ norm. We finally have by minimality of g that :

$$\int_X g^p \leq \int_X \mathbf{w}^p \leq CJ_p^-(f).$$

Hence, there is an absolute constant A_1 such that :

$$J_p^-(f) := \liminf_{s\to 1}(1-s)\int_X\int_X \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}}d\mu(x)d\mu(y) \geq A_1\int_X g^p(x)d\mu(x).$$

Remark 1 : We restrict ourself to only take real valued functions (we mean that we take E to be $\mathbf{R}$). We take $X=G$ to be a (locally compact) topological group equipped with a doubling measure μ which is left translation invariant (typically the left invariant Haar measure supported on G). We suppose that G is metrizable (we take d the distance associated) and we suppose moreover that G supports $(1,p)$ weak Poincaré inequalities for some $p>1$ (this former assumption implies that G is locally compact). We take $f: G \to \mathbf{R}$ a $L^p(G,\mathbf{R})$ function such that $J_p^+(f)$ is finite. Since G is a $(1,p)$ PI-space then by using the Theorem of [**KZ**], we get that G is a $(1,q)$ PI-space for some $1<q<p$. Then for every n in $\mathbf{N}$ and for any measurable function $h: G\to\mathbf{R}$, consider now the following quantity :

$$I_s(h) = (1-s)\int_{10\lambda B_n}\int_{10\lambda B_n}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{d(x,y)^{N+ps}}d\mu(x)d\mu(y)$$

where λ is the constant involved in the dilatation of the balls in the weak $(1,q)$-Poincaré inequalities supported by X. Since the quantities $I_s(f)$ are inchanged when the integrand is translated to the left by some element $h\in G$ and since a convex combination of such integrated translated integrand stay bounded by $CJ_p^+(f)$ with a constant C depending on f, we get by using Fatou's lemma that $I_s(\rho_\varepsilon * f)$ is bounded by $CJ_p^+(f)$ where ρ_ε is a positive approximation of unity supported on $20\lambda B_n$ for instance. Since ρ_ε is lipschitz then we get that $\rho_\varepsilon * f$ is lipschitz too. Since $\rho_\varepsilon * f$ tends to f in $L^p(10\lambda B_n,\mathbf{R})$, we get by repeating the proof of the Theorem 112 that f is in $M^{1,p}(B_n,\mathbf{R})$ for every n. Call now the minimal function g_n associated to f in $L^p(B_n,\mathbf{R}^+)$. Then, we have that g_n satisfies $(*)$ in a set of full measure in B_n and we have that $||g_n\chi_{(B_n)}||_p$ is bounded by CJ_s^+ with C a constant depending only of f. Hence, an application of the lemma 110 then shows that f is in $M^{1,p}(G,\mathbf{R})$. Thus, we get immediately that, if we choose G to be $\mathbf{R}^n$, the characterization of the Sobolev spaces $W^{1,p}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$ (for $p>1$) obtained in [**Br2**] and, if we choose G to be $\mathbf{H}^1$ (the first Heisenberg group), the characterization of the Sobolev spaces $W^{1,p}(\mathbf{H}^1,\mathbf{R})$ (for $p>1$) obtained in [**Mo**]. We cannot establish with this method a characterization of the Sobolev space $W^{1,1}(G,\mathbf{R})$ which may be replaced in fact by BV (the space of functions of bounded variation).

Remark 2 : Take now $X=G$ to be a (locally compact) topological group equipped with a doubling measure μ which is left translation invariant (typically the left invariant Haar measure supported on G). We suppose that G is metrizable (we take d the distance associated) and we suppose moreover that G supports $(1,p)$ weak Poincaré inequalities for some $p \geq 1$ (this former assumption implies that G is locally compact). Consider now E a Banach space endowed with the norm $||.||$. We consider a measurable function $f : G \to E$ such that $J_p^+(f) = J_p^-(f) = 0$. The proposition 109 shows that f is $L^p_{loc.}(G,E)$. Moreover, if we compose f by π an element of E^*, we have by the construction of the Bochner integral that the set of Lebesgue points of $\pi(f)$ contains the set of Lebesgue points of f. More precisely, we have for all ball $B \subset G$:

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B |\pi(f) - \frac{1}{\mu(B)}\int_B \pi(f)| \leq |||\pi|||\frac{1}{\mu(B)}\int_B ||f - \frac{1}{\mu(B)}\int_B f||.$$

Hence, if we prove that for every $\pi \in E^*$, $\pi(f)$ is constant μ-a.e then f will be constant μ-a.e. Fix now a ball $B \subset G$. Then an argument of convolution as above and the use of the $(1,p)$ Poincaré inequality allows us to conclude that $\pi(f)$ is constant in a set of full measure in B. By connectedness, we get that $\pi(f)$ is constant μ-a.e. We can also notice that we also get an integral characterization of constant functions if we restrict the integration on any open connected set $\Omega \subset G$ and not on the whole group. By taking $G = \mathbf{R}^n$, we recover the integral condition obtained in [**Br2**].

3.6. An optimal inequality

We finish this section with a proposition of its own interest that shows that the lower bound obtained in the lemma 103 is essentially optimal up to a multiplicative constant.

The main difficulty of the following proposition is to cover the case $p = 1$. In fact, the proof of the following proposition for $p > 1$ comes only from by applying the lemma 94 to the upper gradient $g = \mathrm{Lip}(f)$. But, we have to use a strong result quoted from [**KZ**] that the Poincaré inequalities are open in $[1,+\infty[$ (we can notice that the result of [**KZ**] can be extended for the Banach-valued functions by using the Hahn-Banach Theorem) and to use the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal function on $L^p(\mu)$ (with $p > 1$ and μ doubling). We give some basic ideas before proving the technical proposition lying below. Roughly speaking, the doubling condition on the measure allows us to use the Vitali covering Theorem and to get some uniformity. The upper bound allows us to show the boundedness of a Riesz potential-like. Finally, the Poincaré inequalities allows us to have a kind of Taylor expansion at order 1 for lipschitz function. This is contained in the lemma 105. We can notice that if the measure μ satisfies $\mu(B_r(x)) \leq Cr^N$ then, we get $\mu(\overline{B_r(x)}) \leq Cr^N$. Indeed, we have for every $\varepsilon > 0$ that $\mu(\overline{B_r(x)}) \leq \mu(B_{(1+\varepsilon)r}(x)) \leq C(1+\varepsilon)^N r^N$. By letting ε goes to 0, the previous remark is now proved.

Proposition 113. *Take (X,d,μ) a PI-space equipped with a measure μ which grows $N-$polynomially (there is a constant $A > 0$ such that for every $0 < r \leq \mathbf{r}$ and for every x in X : $\mu(B_r(x)) \leq Ar^N$) and E a Banach space endowed with the norm $||.||$. Take $f : X \to E$ a L-lipschitz function. Then, for all $p \geq 1$, there is a constant $C > 0$ (depending on A and p) such that for every ball $B = B_{r_0}(x_0)$ and for every $\lambda > 1$:*

$$\limsup_{s\to 1, 0<s<1} (1-s)\int_B\int_B \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x)d\mu(y) \leq C\int_{\lambda B} (Lip(f)(z))^p d\mu(z).$$

Proof :

First, we say that X supports weak Poincaré inequalities of type $(1,l)$ for some $l \geq 1$. We keep the same notation adopted in the lemma 100. Fix now $\varepsilon > 0$. We can suppose that the radius $r_{\varepsilon,y}$ associated to μ-a.e y in X satisfies $r_{\varepsilon,y} \leq \min(\varepsilon r_0, \mathbf{r})$ and the ball $B_{r_{\varepsilon,y}}(y)$ considered before are now closed (we still keep the previous inequality available at small scale). We have the following inclusions :

$$A \subset \bigcup_{y \in A \cap B} B_{r_{\varepsilon,y}}(y) \subset (1+\varepsilon)B.$$

We have now two cases.

First case : either there is $\alpha(\varepsilon) > 0$ such that for every $y \in A \cap B : r_{\varepsilon,y} \geq \alpha(\varepsilon)$. Thus, we get :

$$\begin{aligned}
\int_B \int_B \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x) d\mu(y) &= \int_A \int_B \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x) d\mu(y) \\
&\leq \int_A \int_{B_{\alpha(\varepsilon)}(y)} \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x) d\mu(y) \ \mathbf{i)} \\
&\quad + \int_A \int_{2B \cap B^c_{\alpha(\varepsilon)}(y)} \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x) d\mu(y) \ \mathbf{ii)}.
\end{aligned}$$

To deal with the summand **i**), we apply the lemma 100. Call now for simplicity

$$B_k(y) := B_{\frac{\alpha(\varepsilon)}{2^k}}(y).$$

We have for every y in $A \cap B$ and by doing the same analysis as in the lemma 105 that :

$$\begin{aligned}
\int_{B_{\alpha(\varepsilon)}(y)} \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x) &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{B_k(y) \cap B^c_{k+1}(y)} \frac{d\mu(x)}{d(x,y)^{N-p(1-s)}} \\
&\leq C \frac{\alpha(\varepsilon)^{p(1-s)}}{1-s} \big(\mathrm{Lip}(f)(y) + \varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{q}} L\big)^p.
\end{aligned}$$

Thus, we get :

$$\mathbf{i)} \leq C \frac{\alpha(\varepsilon)^{p(1-s)}}{1-s} \int_B (\mathrm{Lip}(f)(y) + \varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{q}} L)^p.$$

To deal with **ii**), we choose $a > 1$ and define a family of balls $B_k(y) := B_{a^k \alpha(\varepsilon)}(y)$ for $k = 0, \ldots, k_0 := [\frac{\log(\frac{2r_0}{\alpha(\varepsilon)})}{\log(a)}]$ (we can suppose that $\alpha(\varepsilon) \ll 2r_0$ and choose a close to 1). Then, we have for every y in $A \cap B$ and by definition of k_0 that :

$$\begin{aligned}
\int_{2B\cap B^c_{\alpha(\varepsilon)}(y)} \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x) &\leq L^p \sum_{k=0}^{k_0} \int_{B_{k+1}(y)\cap B^c_k(y)} \frac{d\mu(x)}{d(x,y)^{N-p(1-s)}} \\
&\leq CL^p \alpha(\varepsilon)^{p(1-s)} \sum_{k=0}^{k_0} a^{kp(1-s)} \\
&\leq C\frac{L^p}{1-s}\big(a^{p(1-s)}(2r_0)^{p(1-s)} - \alpha(\varepsilon)^{p(1-s)}\big)
\end{aligned}$$

Thus, we get :

$$\textbf{ii}) \leq C\mu(B)\frac{L^p}{1-s}\big(a^{p(1-s)}(2r_0)^{p(1-s)} - \alpha(\varepsilon)^{p(1-s)}\big).$$

Second case : or the family of balls considered is a Vitali class. Thus, we can apply the Vitali covering Theorem to get a countable family $J(\varepsilon)$ such that :

$$\mu\left(\bigcup_{y\in A} B_{r_{\varepsilon,y}}(y) \cap \left(\bigcup_{j\in J(\varepsilon)} B_{r_j}(y_j)\right)^c\right) = 0 \text{ with } y_j \in A \text{ and } r_j = r_{\varepsilon,y_j}$$

and

$$\forall j, j' \in J(\varepsilon) \text{ such that } j \neq j' : B_{r_j}(y_j) \cap B_{r_{j'}}(y_{j'}) = \emptyset.$$

We write for simplicity $B_j := B_{r_j}(y_j)$. Hence, we have :

$$\begin{aligned}
\int_B\int_B \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x)d\mu(y) &= \int_A\int_B \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x)d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j\in J(\varepsilon)} \int_{B_j}\int_B \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x)d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j\in J(\varepsilon)} \int_{B_j}\int_{B_j} \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x)d\mu(y)\ \textbf{i}) \\
&\quad + \sum_{j\in J(\varepsilon)} \int_{B_j}\int_{2B\cap B_j^c} \frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}} d\mu(x)d\mu(y)\ \textbf{ii}).
\end{aligned}$$

To majorize **i**), we use the lemma 100 and do the same thing as in the first case. So, we get :

$$\textbf{i}) \leq C \sum_{j\in J(\varepsilon)} \frac{r_j^{p(1-s)}}{1-s} \int_{B_j} (\mathrm{Lip}(f)(y_j) + \varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{q}} L)^p.$$

So by letting s goes to 1, we get by using the monotonic convergence that :

$$\limsup_{s\to 1, 0<s<1} (1-s)\textbf{i}) \leq C \sum_{j\in J(\varepsilon)} \int_{B_j} (\mathrm{Lip}(f)(y_j) + \varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{q}} L)^p.$$

We have the following decomposition :

$$\begin{aligned}\int_{B_j}(\mathrm{Lip}(f)(y_j))^p &= \int_{B_j\cap A_\varepsilon(y_j)}(\mathrm{Lip}(f)(y_j))^p+\int_{B_j\cap A_\varepsilon(y_j)^c}(\mathrm{Lip}(f)(y_j))^p\\ &\le \int_{B_j}(\mathrm{Lip}(f)(y)+\varepsilon)^p d\mu(y)+L^p\mu(B_j\cap A_\varepsilon(y_j)^c)\\ &\le C_p\int_{B_j}(\mathrm{Lip}(f)(y))^p d\mu(y)+C_p(\varepsilon^p+L^p\varepsilon)\mu(B_j)\ \text{(by the property of } A_\varepsilon(y_j))\end{aligned}$$

Since the balls B_j are pairwise disjoint, we get by summing on j that :

$$\limsup_{s\to 1, 0<s<1}(1-s)\mathbf{i)}\le C\int_{(1+\varepsilon)B}(\mathrm{Lip}(f)(y))^p d\mu(y)+O(\varepsilon^{\frac{p}{q}}).$$

Finally, by using the calculation made in the first case, we get :

$$\mathbf{ii)}\le C\sum_{j\in J(\varepsilon)}\mu(B_j)\frac{L^p}{1-s}\big(a^{p(1-s)}(2r_0)^{p(1-s)}-r_j^{p(1-s)}\big).$$

So, by using the monotonic convergence, we have that :

$$\limsup_{s\to 1, 0<s<1}(1-s)\mathbf{ii)}=0.$$

So, we have in all the cases the following bound :

$$\limsup_{s\to 1, 0<s<1}(1-s)\int_B\int_B\frac{||f(x)-f(y)||^p}{d(x,y)^{N+ps}}d\mu(x)d\mu(y)\le C\int_{(1+\varepsilon)B}(\mathrm{Lip}(f)(z))^p d\mu(z)+O(\varepsilon^{\frac{p}{q}}).$$

Thus, by applying the dominated convergence when ε goes to 0, we get the desired result.

3.7. Concluding remarks

The first interest of the previous Theorems was to cover partially the results obtained in [**Br2**] in a different way. This is why we were interested at first on Ahlfors regular metric spaces. But, if we consider Riesz potentials adapted to doubling spaces, no more difficulties arise. In fact, the most impotant lemma which is the lemma 103 remains true in the setting of doubling spaces with a suitable modification of the Riesz potential that we will present in a while. Moreover, we get a lower bound with a constant independant of the choice of the ball $B\subset X$. With this remark, it appears more logical to deal with the doubling case at first and then to deduce some corollaries in the Ahlfors-regular setting. But, due to the original motivation, we only present now a list of results transposed in the setting of doubling spaces.

Consider now (X,d,μ) a metric measure space and E a Banach space endowed with the norm $||.||$. We define for a measurable function $f:X\to E$, for any measurable subset $Z\subset X$ and for any $p\ge 1$ the following quantity

$$J_p(f)_Z(s):=(1-s)\int_Z\int_Z\big(\frac{||f(x)-f(y)||}{d(x,y)}\big)^p\frac{d(x,y)^{p(1-s)}}{\mu(B_{d(x,y)}(x))+\mu(B_{d(x,y)}(y))}d\mu(x)d\mu(y).$$

We can derive now two quantities $J_p(f)^+_Z$ and $J_p(h)^-_Z$ defined by

$$J_p(f)^+_Z := \limsup_{s\to 1} J_p(f)_Z(s) \text{ and } J_p(f)^-_Z := \liminf_{s\to 1} J_p(f)_Z(s).$$

Thus, by a straightforward adaption of the lemma 103 and the proposition 113, we get the following list of propositions.

Proposition 114. *Let (X, d, μ) a PI-space equipped with a **complete** measure μ and E a RNP Banach space endowed with the norm $||.||$. Take $f : X \to E$ a lipschitz function. Then, for any ball $B \subset X$, we have for every lambda $0 < \lambda < 1$ that :*

$$J_p(f)^-_B \geq C \int_{\lambda B} (Lip(f))^p$$

where C depends only on the geometry of X. Moreover, the assumption of completeness on the measure μ can be dropped if E is of finite dimension.

Proposition 115. *Let (X, d, μ) a PI-space and E a Banach space endowed with the norm $||.||$. Take $f : X \to E$ a lipschitz function. Then, for any ball $B \subset X$, we have for every lambda $\lambda > 1$ that :*

$$J_p(f)^+_B \leq C \int_{\lambda B} (Lip(f))^p$$

where C only depends on the geometry of X.

Proposition 116. *Let (X, d, μ) a metric doubling space and E a Banach space endowed with the norm $||.||$. Take $f : X \to E$ a function which belongs to $M^{1,p}(X, E)$ then for any ball $B \subset X$, we have that :*

$$J_p(f)^+_B \leq C \int_B g^p$$

where $g : X \to \mathbf{R}^+$ is any function associated to f in $M^{1,p}(X, E)$ and C depends only of the geometry of X.

We can deduce from the propositions 114 and 116 and by adapting the proof of the Theorem 106 in this new setting the following Theorem. We just need -in order to prove the following Theorem- uniform Poincaré inequalities for small balls. We want X to be a local PI-space.

Theorem 117. *Let (X, d, μ) a $(1, p)$ PI-space and (Y, l) a metric space. Take a measurable function $f : X \to Y$ such that the quantity*

$$\int_X \int_X \left(\frac{l(f(x), f(y))}{d(x,y)}\right)^p \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{\mu(B_{d(x,y)}(x)) + \mu(B_{d(x,y)}(y))}$$

is finite then f is constant μ-a.e.

Remark : It is clear that we can replace the symetric kernel $\dfrac{1}{\mu(B_{d(x,y)}(x)) + \mu(B_{d(x,y)}(y))}$ by a non symetric one $\dfrac{1}{\mu(B_{d(x,y)}(x))}$ for instance. Indeed, by using the lemma 91, these two kernels are comparable up to multiplicative constants which only depend on the doubling constant of X.

Finally, we can give a equivalent definition of the norm $||.||_{1,p}$ for $p > 1$.

Theorem 118. *Let (X, d, μ) a $(1, p)$ PI-space for some $p > 1$ and E a RNP Banach space endowed with the norm $||.||$. Then, there are two absolute constants A_1 and A_2 (depending only of the geometry of X) such that for every f belonging to $M^{1,p}(X, E)$:*

$$J_p(f)_X^- \geq A_1 \int_X g^p(x) d\mu(x) \text{ and } J_p(f)_X^+ \leq A_2 \int_X g^p(x) d\mu(x)$$

where g is the minimal function in $L^p(X, \mathbf{R}^+)$ associated to f in $M^{1,p}(X, E)$.

CHAPITRE 4

WPI spaces

4.1. Introduction

We are mainly interested in weaker properties than the one to be a PI-space. We are only interested in a kind of local Poincaré inequalities. We want to discuss the dependance on the radius or the center of the ball of the constants involved in the Poincaré inequalities. It makes sense to consider such a type of analysis. We can take, for instance, the case of some Riemaniann manifolds where the curvature explodes at some point. Our goal is to give some new integral characterization of measurable constant functions on metric measure spaces. On one hand, we gain something by considering only very weak Poincaré inequalities. But, on the other hand, we have to make a lot of topological hypothesis on the metric measure space to conclude.

4.2. Some definitions

We are mainly interested in the paths lying on metric spaces. More precisely, we are interested in paths that satisfy the two following properties. We want that **i**) the paths considered must connect two points of a fixed ball with a length comparable to the distance between them and that **ii**) these paths must lie in some compact set that contained the previous ball. Roughly speaking, if we have these two conditions and a good family of paths then we can, in the classical case, establish Poincaré inequality for this ball. We try to generalize this idea in the setting of metric doubling measure space and give a definition of being, to a certain extent, a local upper gradient.

Take now (X, d, μ) a metric measure space equipped with a doubling and Radon measure μ. We also consider E to be a Banach space endowed with the norm $||.||$. The integral considered is the Bochner integral for the function which are E-valued.

Definition 119. *We called $\Gamma(B, C, \lambda)$ the set of all rectifiable curves $\{\gamma\}$ which satisfy $\gamma : [0, 1] \to X$ is parametrized by its arc-length, the endpoints of γ satisfy $\gamma(0) = x$ and $\gamma(1) = y$ with x and y in B and γ enjoys the properties that $L(\gamma) \leq Cd(x, y)$ and $\gamma([0, 1]) \subset \lambda B$ where $B \subset X$ is a ball.*

We can notice for all ball $B \subset X$ that

$$\text{if } C \leq C' \text{ or } \lambda \leq \lambda' \text{ then we have } \Gamma(B, C, \lambda) \subset \Gamma(B, C', \lambda').$$

Definition 120. *Take a B a ball of X. A function $g : X \to \overline{\mathbf{R}}^+$ belongs to the class $Upp^*(f, B, C, \lambda)$ (and is called a weakened upper gradient for $f : X \to E$ with E a Banach space) if for every curve γ in $\Gamma(B, C, \lambda)$, we have :*

$$||f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))|| \leq \int_0^1 g(\gamma(s))ds.$$

We can notice that if $C \leq C'$ or $\lambda \leq \lambda'$ and if g belongs to $Upp^*(f, B, C', \lambda')$ then g belongs to $Upp^*(f, B, C, \lambda)$. Moreover, for two balls B and B' such that $B \subset B'$, if g belongs $Upp^*(f, B', C, \lambda)$ then we have that g belongs to $Upp^*(f, B, C, \lambda)$. With these remarks, we get that an upper gradient for f is a weakened upper gradient for f.

Set for any $L^1_{loc.}(X, E)$ function f the following quantity :

$$f_{x,r} := \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f d\mu.$$

Definition 121. *We say that X supports weakened $(1,p)$-Poincare inequality if for every ball $B_0 \subset X$ there are $C > 0$ and $\lambda > 0$ such that for all g belonging to $Upp^*(f, B_0, C, \lambda) \cap L^p_{loc.}(X, \mathbf{R}^+)$ with f in $L^1_{loc.}(X, E)$, we have for every ball $B = B_r(x)$ such that $B \subset B_0$:*

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B ||f - f_{x,r}|| d\mu \leq \alpha r \left(\frac{1}{\mu(\tau B)} \int_{\tau B} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

with $\alpha > 0$ and $\tau \geq 1$ depending only on the constants C and λ (i.e. depending on the geometry of X and independant of f).

We say that X is a WPI-space if (X, d, μ) is a complete metric and doubling measure space and if it supports weakened $(1,p)$-Poincare inequality for some $p \geq 1$. We say in short that X is a $(1,p)$ WPI-space. We have that WPI-spaces are local PI-spaces. Since PI-space or local PI-space are quasi-convex, we can conclude that X is also quasi-convex and so is connected (even arc-wise connected). Since X is doubling, if X is a $(1,p)$ WPI-space then we can get in the definition 121 a kind of uniformity. More precisely, we get that : for every ball $B_0 \subset X$ there are $C > 0$ and $\lambda > 0$ such that for all g belonging to $Upp^*(f, B_0, C, \lambda) \cap L^p_{loc.}(X, \mathbf{R}^+)$ with f in $L^1_{loc.}(X, E)$, we have for every balls $B = B_r(x)$ such that $B \subset B_0$:

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B ||f - f_{x,r}|| d\mu \leq C \left(\frac{1}{\mu(\lambda B)} \int_{\lambda B} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

with constants C and λ depending on the geometry of X and independant of f.

4.3. Some new properties

4.3.1. Some properties of doubling spaces. We continue with a regularity property of doubling metric space. This simple remark shows that one cannot construct a doubling measure on a Banach space of infinite dimension.

Proposition 122. *If (X, d, μ) is a complete metric measured space that supports a doubling and non degenerated measure μ then X is proper (the closed balls of X are compact).*

Proof :

Choose $B_{r_0}(x_0) = B_0$ with $r_0 > 0$ and x_0 a point in X. Since X is complete, it is sufficient to prove that $\overline{B_0}$ is precompact. Fix now $\varepsilon > 0$. Then , we have :

$$\overline{B_0} \subset \bigcup_{x \in B_0} B_\varepsilon(x).$$

By the 5-covering lemma of Vitali, there is a countable family I such that :

i) $\forall i, i' \in I : x_i, x_{i'} \in B_0$ et $B_\varepsilon(x_i) \cap B_\varepsilon(x_{i'}) = \emptyset$

ii) $\overline{B_0} \subset \bigcup_{x \in B_0} B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{i \in I} B_{5\varepsilon}(x_i)$

Then, we have the following chain of inequalities :

$$\begin{aligned}
\mu(\overline{B_0}) &\leq \sum_{i \in I} \mu(B_{5\varepsilon}(x_i)) \text{ by the point } ii) \\
&\leq C \sum_{i \in I} \mu(B_\varepsilon(x_i)) \text{ since } \mu \text{ is doubling} \\
&\leq C\mu(B_{r_0+\varepsilon}(x_0)) < +\infty \text{ by the point } i)
\end{aligned}$$

We argue by contradiction by supposing that I is infinite. Then, the previous computation shows that there is a sequence $(i_n)_{n \in \mathbf{N}}$ such that

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(B_\varepsilon(x_{i_n})) = 0.$$

Since μ is doubling, there is a positive constant C (which depends only of ε) such that :

$$\mu(B_\varepsilon(x_{i_n})) \geq C_\varepsilon \mu(B_0).$$

The non degeneracy of μ gives us that $\mu(B_0) > 0$. By letting n tends to $+\infty$, we get a contradiction. Hence, I is finite and then X is proper.

Next, we show when N is the homogeneous dimension of a metric measure space X and when y is a point of density of $A \subset X$ then $x \to d(x,y)^{-N}$ is never integrable on $A \cap B_r(y)$. This shows that we were interested in the limiting case of integrability for some Riesz potentials on metric spaces. More precisely, we have the following.

Proposition 123. *Let (X, d, μ) be a doubling metric measure space which supports a β-doubling and non degenerated measure μ. Define $N = \frac{\log \beta}{\log 2}$. Assume that X is connected. Consider a set A that satisfies the property that there is a constant $C > 0$ such that for all $r \leq r_0$: $\mu(A \cap B_r(y)) \geq C\mu(B_r(y))$ for some constant r_0 and for some y a point in X. Then, for all $r > 0$:*

$$\int_{A \cap B_r(y)} \frac{d\mu(x)}{d(x,y)^N} = +\infty.$$

Proof : We can always assume that $r \leq r_0$ because we have for all $r \geq r_0$:

$$\int_{A \cap B_r(y)} \frac{d\mu(x)}{d(x,y)^N} \geq \int_{A \cap B_{r_0}(y)} \frac{d\mu(x)}{d(x,y)^N}.$$

Take now $0 < r \leq r_0$ and define for all k in $\mathbf{N}$ a sequence of radii $r_k = 2^{-k}r$. Then, we have :

$$\int_{A \cap B_r(y)} \frac{d\mu(x)}{d(x,y)^N} \geq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{kN} \mu\big(A \cap B_{r_k}(y) \cap B_{r_{k+1}}(y)^c\big).$$

Choose $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ and consider the corona

$$C_k = \{x \text{ such that } (1-\alpha)\frac{3}{2}r_{k+1} \leq d(x,y) \leq (1+\alpha)\frac{3}{2}r_{k+1}\}.$$

Since X is connected then C_k is non empty. Consider a point x_k in C_k. We have :

$$B_{\frac{\alpha}{2}r_{k+1}}(x_k) \subset (B_{r_k}(y) \cap B_{r_{k+1}}(y)^c).$$

Indeed, if z is in $B_{\frac{\alpha}{2}r_{k+1}}(x_k)$ then

$$d(z,y) \leq d(z,x_k) + d(x_k,y) \leq \frac{\alpha}{2}r_{k+1} + (1+\alpha)\frac{3}{2}r_{k+1} = (\frac{3}{2} + 2\alpha)r_{k+1} < 2r_{k+1} = r_k.$$

We also have that

$$d(z,y) \geq d(x_k,y) - d(z,x_k) \geq (1-\alpha)\frac{3}{2}r_{k+1} - \frac{\alpha}{2}r_{k+1} = (\frac{3}{2} - 2\alpha)r_{k+1} > r_{k+1}.$$

We can notice that

$$B_{r_{k+1}}(y) \subset B_{\frac{\alpha}{2}\lambda r_{k+1}}(x_k)$$

with $\lambda = \frac{5}{\alpha} + 3$. Indeed, we have for z in $B_{r_{k+1}}(y)$:

$$d(z,x_k) \leq d(z,y) + d(y,x_k) \leq r_{k+1} + (1+\alpha)\frac{3}{2}r_{k+1} = \frac{5+3\alpha}{2}r_{k+1} = (\frac{5}{\alpha} + 3)\frac{\alpha}{2}r_{k+1}.$$

Since A is a set of big density in $B_r(y)$ and thanks to the fact that μ is doubling, we have for every $r \leq r_0$:

$$\begin{aligned}
\mu(A \cap B_{2r}(y)) &\leq \mu(B_{2r}(y)) \\
&\leq \beta\mu(B_r(y)) \\
&\leq \beta\big(\mu(A \cap B_r(y)) + \mu(A^c \cap B_r(y))\big) \\
&\leq \beta\big(\mu(A \cap B_r(y)) + \frac{\mu(A^c \cap B_r(y))}{\mu(B_r(y))}\frac{\mu(B_r(y))}{\mu(A \cap B_r(y))}\mu(A \cap B_r(y))\big) \\
&\leq \beta(1 + \frac{1}{C})\mu(A \cap B_r(y)).
\end{aligned}$$

By applying the previous remark and thanks to the fact that μ is β-doubling, we get :

$$\begin{aligned}
\mu\big(A \cap B_{r_k}(y) \cap B_{r_{k+1}}(y)^c\big) &\geq \mu(B_{\frac{\alpha}{2}r_{k+1}}(x_k) \cap A) \\
&\geq \beta^{-(\frac{\log\lambda}{\log 2}+1)}\mu(B_{\lambda\frac{\alpha}{2}r_{k+1}}(x_k) \cap A) \\
&\geq C\mu(B_{r_{k+1}}(y) \cap A) \\
&\geq C\beta^{-(k+2)}\mu(B_r(y) \cap A) \\
&\geq C2^{-kN}\mu(B_r(y)).
\end{aligned}$$

Since $\mu(B_r(y)) > 0$ for all $r > 0$ then we get the desired conclusion.

4.3.2. A new kind of Poincaré Inequalities. We want to discuss the dependance in the center and the radius of the ball of the constants involved in the Poincaré inequalities. We give now a list of properties. They have to be understood as a definition for new kind of Poincaré inequalities. More precisely, in the **property** 1, we allow a kind of uniformity on the choice of the center of the balls in the Poincaré inequalities at small scale. In the **property** 2, we simply allow an uniformity at small scale but this time the center of the ball is fixed. In the **property 3**, we consider one of the worst possible case because the uniformity at small scale is not supposed. In fact, we will only work with the **property** 1 and the **property** 2. Moreover, it is clear that the **property** 3 is the weakest of all properties considered. We can notice that this last property is not very handable because when r goes to 0, the set of all weakened upper gradient degenerates in the set of all measurable functions. This is why there is a kind of uniformity at small scale for the **property** 1 and the **property** 2.

Property 1 **:** For every x in X, there are $\varepsilon_x > 0$, $C_x > 0$ and $\lambda_x > 0$ such that for all

$$g \in Upp^*(f, B_{\varepsilon_x}(x), C_x, \lambda_x) \cap L^p_{loc.}(X, \mathbf{R}^+)$$

with f in $L^1_{loc.}(X, E)$, we have for every ball $B = B_r(y)$ satisfying $B \subset B_{\varepsilon_x}(x)$:

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B ||f - f_{y,r}|| d\mu \leq C_x r \left(\frac{1}{\mu(\lambda_x B)} \int_{\lambda_x B} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Otherwise, for every $r > \varepsilon_x$, there are $C_{x,r} > 0$ and $\lambda_{x,r} > 0$ such that for all

$$g \in Upp^*(f, B_r(x), C_{x,r}, \lambda_{x,r}) \cap L^p_{loc.}(X, \mathbf{R}^+)$$

with f in $L^1_{loc.}(X, E)$, we have :

$$\frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} ||f - f_{x,r}|| d\mu \leq C_{x,r} r \left(\frac{1}{\mu(B_{\lambda_{x,r} r}(x))} \int_{B_{\lambda_{x,r} r}(x)} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Property 2 **:** For every x in X, there are $\varepsilon_x > 0$, $C_x > 0$ and $\lambda_x > 0$ such that for all

$$g \in Upp^*(f, B_{\varepsilon_x}(x), C_x, \lambda_x) \cap L^p_{loc.}(X, \mathbf{R}^+)$$

with f in $L^1_{loc.}(X, E)$, we have for every $r \leq \varepsilon_x$:

$$\frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} ||f - f_{x,r}|| d\mu \leq C_x r \left(\frac{1}{\mu(B_{\lambda_x r}(x))} \int_{B_{\lambda_x r}(x)} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Otherwise, for every $r > \varepsilon_x$, there are $C_{x,r} > 0$ and $\lambda_{x,r} > 0$ such that for all

$$g \in Upp^*(f, B_r(x), C_{x,r}, \lambda_{x,r}) \cap L^p_{loc.}(X, \mathbf{R}^+)$$

with f in $L^1_{loc.}(X, E)$, we have :

$$\frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} ||f - f_{x,r}|| d\mu \leq C_{x,r} r \left(\frac{1}{\mu(B_{\lambda_{x,r} r}(x))} \int_{B_{\lambda_{x,r} r}(x)} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Property 3 **:** For every x in X, for every $r > 0$, there are $C_{x,r} > 0$ and $\lambda_{x,r} > 0$ such that for all

$$g \in Upp^*(f, B_r(x), C_{x,r}, \lambda_{x,r}) \cap L^p_{loc.}(X, \mathbf{R}^+)$$

with f in $L^1_{loc.}(X, E)$, we have :

$$\frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} ||f - f_{x,r}|| d\mu \leq C_{x,r} r \left(\frac{1}{\mu(B_{\lambda_{x,r} r}(x))} \int_{B_{\lambda_{x,r} r}(x)} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

4.3.3. Topological consequences. Thanks to the fact that μ is doubling, we can notice that if X satisfies the **property** 1 or the **property** 2 then we have for every x_0 in X and $r_0 > 0$ that there are $C_0 > 0$ and $\lambda_0 > 0$ such that for all $Upp^*(f, B_{r_0}(x_0), C_0, \lambda_0) \cap L^p_{loc.}(X, \mathbf{R}^+)$ with f in $L^1_{loc.}(X, E)$ and for every $r \leq r_0$:

$$\frac{1}{\mu(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} ||f - f_{x,r}|| d\mu \leq C_0 r \left(\frac{1}{\mu(B_{\lambda_0 r}(x_0))} \int_{B_{\lambda_0 r}(x_0)} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

At first sight, the **property** 1 seems weaker than to be a WPI-space. In fact, if X satisfies the **property** 1, we have that X is a kind of WPI-space except that the local Poincaré inequalities are only available for a smallest class of weakened upper gradient. More precisely, we have the following.

Proposition 124. *Take (X, d, μ) a complete β-doubling metric measure space. If X satisfies the **property** 1 then we have for every ball $B_0 = B_{r_0}(x_0)$ that there are $C > 0$ and $\lambda > 0$ such that for every g in $Upp^*(f, 2B_0, C, \lambda) \cap L^p_{loc.}(X, \mathbf{R}^+)$ with f in $L^1_{loc.}(X, E)$ and for every ball $B = B_r(x) \subset B_0$:*

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B ||f - f_{x,r}|| d\mu \leq C r \left(\frac{1}{\mu(\lambda B)} \int_{\lambda B} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proof : Since X is proper by the proposition 122 then $\overline{B_0}$ is compact. We can suppose without any restriction that for all $x : \varepsilon_x \leq r_0$. Since we have

$$\overline{B_0} \subset \bigcup_{x \in \overline{B_0}} B_{\frac{\varepsilon_x}{2}}(x)$$

then we get a finite family -say I- such that

$$\overline{B_0} \subset \bigcup_{i \in I} B_{\frac{\varepsilon_{x_i}}{2}}(x_i).$$

Define

$$\varepsilon = \min_{i \in I} \frac{\varepsilon_{x_i}}{2}.$$

Fix now f in $L^1_{loc.}(X, E)$ and take a ball $B = B_r(x) \subset B_0$. We have two cases now.

Case 1 : For $\varepsilon \leq r \leq r_0$, we have thanks to the fact that μ is doubling that :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(B)}\int_B ||f-\frac{1}{\mu(B)}\int_B f|| &\leq \frac{2}{\mu(B)}\int_B ||f-\frac{1}{\mu(2B_0)}\int_{2B_0} f|| \\
&\leq \frac{2\beta^{(\frac{\log(\frac{3r_0}{\varepsilon})}{\log 2}+1)}}{\mu(2B_0)}\int_{2B_0} ||f-\frac{1}{\mu(2B_0)}\int_{2B_0} f|| \\
&\leq 2C\beta^{(\frac{\log(\frac{3r_0}{\varepsilon})}{\log 2}+1)} r_0\left(\frac{1}{\mu(2\lambda B_0)}\int_{2\lambda B_0} g^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{2Cr_0}{\varepsilon}\beta^{(\frac{\log(\frac{3r_0}{\varepsilon})}{\log 2}+1)} r\left(\frac{1}{\mu(2\lambda B)}\int_{\frac{6\lambda r_0}{\varepsilon}B} g^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{2Cr_0}{\varepsilon}\beta^{(1+\frac{1}{p})(\frac{\log(\frac{3r_0}{\varepsilon})}{\log 2}+1)} r\left(\frac{1}{\mu(\frac{6\lambda r_0}{\varepsilon}B)}\int_{\frac{6\lambda r_0}{\varepsilon}B} g^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

for every g which belongs to $Upp^*(f,2B_0,C,\lambda)$ for some constants $C>0$ and $\lambda>0$.

Case 2 : Either $r\leq\varepsilon$. Since x is in $\overline{B_0}$, there is an index i such that $d(x,x_i)\leq\frac{\varepsilon_{x_i}}{2}$. Moreover, we have for $r\leq\varepsilon$: $B_r(x)\subset B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$. So we get

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B ||f-f_{y,r}||d\mu\leq C_i r\left(\frac{1}{\mu(\lambda_i B)}\int_{\lambda_i B} g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

for every g which belongs to $Upp^*(f,B_{\varepsilon_{x_i}}(x),C_i,\lambda_i)\cap L^p_{loc.}(X,\mathbf{R}^+)$. By using again the fact that μ is doubling and because for all i : $B_{\varepsilon_{x_i}}(x)\subset 2B_0$, we get the desired conclusion.

We have if X is a complete metric doubling measure space and if X satisfies the property 1 that X is a local PI-space. Since PI-spaces or local PI-spaces are quasi-convex, we get that X is connected (even arc-wise connected).

Next, we have to deal with the **property** 2.

Proposition 125. *Take (X,d,μ) a complete metric β-doubling measure space. If X satisifies **property** 2 ofr some $p\geq 1$ and if $\mu(\partial B)=0$ for all ball $B\subset X$ then for every ball $B_0=B_{r_0}(x_0)\subset X$ there are a ball $B\subset B_0$ and two constants $C>0$ and $\lambda>0$ such that for every g which belongs to $Upp^*(f,2B_0,C,\lambda)\cap L^p_{loc.}(X,\mathbf{R}^+)$ with f in $L^1_{loc.}(X,E)$, we have for every balls $B'=B_r(y)$ with y in B and $r\leq\frac{r_0}{2}$:*

$$\frac{1}{\mu(B')}\int_{B'} ||f-f_{y,r}||d\mu\leq Cr\left(\frac{1}{\mu(\lambda B')}\int_{\lambda B'} g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proof : We suppose that μ is a non degenerated Radon measure. Since X is complete and doubling then X is proper (and hence separable) by the proposition 122. Take a ball $B_0=B=B_{r_0}(x_0)$ then $\overline{B_0}$ is compact. Take f in $L^1_{loc.}(X,E)$. For m and n in $\mathbf{N}^*$, let us define :

$$A_{m,n} = \{x \in \overline{B_0} \text{ such that } \forall r \leq \frac{r_0}{2} \text{ and } \forall g \in L^p_{loc.}(X, \mathbf{R}^+) \cap Upp^*(f, 2B_0, m, n), \text{ we have :}$$
$$\frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} ||f - f_{x,r}|| d\mu \leq mr \left(\frac{1}{\mu(B_{nr}(x))} \int_{B_{nr}(x)} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \}.$$

We recall that we have $Upp^*(f, 2B_0, m, n) \subset Upp^*(f, B, m, n)$ when $B \subset 2B_0$. Hence, we get since X satisfies the property 2 and thanks to the fact that μ is doubling that :

$$\bigcup_{m>0, n>0} A_{m,n} = \overline{B_0}.$$

Moreover, since $\mu(\partial B) = 0$ for all ball B, we have by using the dominated convergence, the Fatou lemma, and the non degeneracy of μ that $A_{m,n}$ is closed in $\overline{B_0}$ for every m and n. So, by the Baire Theorem, there are two indexes m_0 and n_0 such that A_{m_0,n_0} is of non empty interior. Then, there is a ball B contained in A_{m_0,n_0} and satisfying the conclusion since μ is doubling.

Remark 1 : By a repeated use of the Baire Theorem, we can construct a countable dense set $\{x_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ of $\overline{B_0}$ with the property that there is a constant $\delta_i > 0$ such that for all x in $B_{\delta_i}(x_i) \cap \overline{B_0}$, we have :

$$\frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} ||f - f_{x,r}|| d\mu \leq m_i r \left(\frac{1}{\mu(B_{n_i r}(x))} \int_{B_{n_i r}(x_0)} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

for all $r \leq \frac{r_0}{2}$ and for all g in $Upp^*(f, B_{2r_0}(x_0), m_i, n_i)$ and for some positive constants m_i and n_i.

Remark 2 : The hypothesis that μ does not charge the boundary of a ball is necessary for instance on PI-space such that $\mathbf{R}^n$. Indeed, it is proved in [**GKS**] that a doubling measure on $\mathbf{R}^n$ can charge a rectifiable curve.

We can derive an integral criterium to detect whether a measurable function is constant on WPI-spaces of some special type. More precisely, we have the following.

Theorem 126. *Take (X, d, μ) a complete metric β-doubling measure space and E a Banach space. We suppose that X satisfies **property** 2 for some $p \geq 1$. We suppose that $\mu(\partial B) = 0$ for all ball $B \subset X$. Moreover, we suppose that each ball of X is a connected set. If $f : X \to E$ is a **continuous** function such that the quantity*

$$\int_X \int_X \left(\frac{||f(x) - f(y)||}{d(x,y)}\right)^p \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{\mu(B_{d(x,y)}(x)) + \mu(B_{d(x,y)}(y))}$$

is finite then f is a constant function.

Proof : Fix a ball $B_0 \subset X$. By using the proposition 125, we have a countable dense set $\{x_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ of $\overline{B_0}$ with the property that there is a constant $\delta_i > 0$ such that for all x in $B_{\delta_i}(x_i) \cap \overline{B_0}$, we have :

$$\frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} ||f - f_{x,r}|| d\mu \leq m_i r \left(\frac{1}{\mu(B_{n_i r}(x))} \int_{B_{n_i r}(x_0)} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

for all $r \leq \frac{r_0}{2}$ and for all g in $Upp^*(f, B_{2r_0}(x_0), m_i, n_i)$ and for some positive constants m_i and n_i. By using the Theorem 117 to the new metric space $X_i = B_{\delta_i}(x_i) \cap \overline{B_0}$, we can conclude that $f = c_i$ on X_i for some constant vector c_i in E. By continuity of f, we have that $f = c_i$ on $\overline{X_i}$. We can notice now that :

$$\overline{B_0} = \overline{\bigcup_{i \in \mathbf{N}} \{x_i\}} \subset \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \overline{X_i} \subset \overline{\overline{B_0}} = \overline{B_0}.$$

Hence, we have that :

$$\overline{B_0} = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} f^{-1}(\{c_i\}).$$

Since f is continuous and $\overline{B_0}$ is a connected set, we get that f is constant on $\overline{B_0}$. In particular, f is constant on B_0. Since X is connected, we get that f is constant.

CHAPITRE 5

A note on Cheeger's differentiability

5.1. Introduction

Take X a $(1,p)$-PI space (which supports a measure μ) with $p \geq 1$ and E a Banach space enjoying the Radon-Nikodym property. Consider now a function $f : X \to E$ such that $f \in L^p(X,E)$ and $\mathrm{Lip}(f) \in L^p(X,\mathbf{R}^+)$. We extend the result of the article [**CK4**] and we show that if f satisfies the previous hypothesis then f is Cheeger-differentiable μ-a.e. This result is based on a extension of the Theorem of [**KZ**] in the setting of Banach spaces. In order to adopt the strategy of the article [**CK1**], we must prove at first that the weak differential is well-defined μ-a.e. when the pointwise upper-lipschitz constant is in L^p for some $p \geq 1$. Althought, the case $p = 1$ requires a more careful analysis and we cannot give a unified approach. This result is the first step to a Rademacher-Stepanov Theorem in the setting of metric measure spaces for Banach-valued functions. We prove mainly the following.

Theorem 127. *Let (X,d,μ) a $(1,p)$ PI-space for $p \geq 1$ and E a GFDA Banach space endowed with the norm $||.||$. Then, if $f : X \to E$ is measurable function such that Lip(f) belongs to $L^p(X,\mathbf{R}^+)$ then f is Cheeger-differentiable μ-almost everywhere.*

Since it is given in the part written in french, we suppose the definition of the Cheeger-differentiability known. We also suppose known the notion of FDA. We do not recall the geometric properties of Banach spaces such as RNP or GFDA. Moreover, a slight modification of the lemmas in the section -written in french- **construction de la différentielle faible** allows us to define again -in this new setting- the weak differential.

5.2. Extension of Keith-Zhong Theorem

5.2.1. Chaining balls. The next lemma is an application of a well-known method in harmonic analysis called chaining balls. We use Lebesgue differentiation Theorem in order to prove some results on functions which have an upper gradient of high regularity. This lemma is in [**HK**].

Lemma 128. *Let X be a $(1,p)$-PI space. Let E be a Banach space. Let f be in $L^1_{loc.}(X,E)$ and g be in $L^q(X,\overline{\mathbf{R}}^+)$ be an upper gradient for f with $q > p$. Then, f belongs to $M^{1,q}(X,E)$. More precisely, for all balls $B \subset X$ and for μ-a.e. x and y in B, we have the following inequality :*

$$||f(x) - f(y)|| \leq Cd(x,y)\big((M(g^p\chi_{\gamma B})(x))^{\frac{1}{p}} + (M(g^p\chi_{\gamma B})(y))^{\frac{1}{p}}\big)$$

where C and γ are positive constants which depend only of X and M denotes the maximal centered function of Hardy-Littlewood.

Proof : since X supports $(1,p)$-Poincare inequality then for all $r>0$ and for all x in X :

$$\frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)}||f-\frac{1}{\mu(B_r(x))}\int_{B_r(x)}fd\mu||\leq Cr\left(\frac{1}{\mu(B_{\lambda r}(x))}\int_{B_{\lambda r}(x)}g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Choose x and y two points of X. Define the family of balls $(B_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ by if $j\leq 0$ then $B_j=B_{\frac{d(x,y)}{\lambda 2^{-j}}}(x)$ and if $j\geq 1$ then $B_j=B_{\frac{d(x,y)}{\lambda 2^{j}}}(y)$. All these balls are contained in $B_{2d(x,y)}(x)$. More precisely, we can remark that the balls $(B_j)_{j\leq 1}$ are contained in $B_{2d(x,y)}(x)$ and the balls $(B_j)_{j\geq 1}$ are contained in $B_{d(x,y)}(y)$. We get by the triangular inequality and the previous remark for $j\geq 1$:

$$||\frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j}fd\mu-\frac{1}{\mu(B_{j+1})}\int_{B_{j+1}}fd\mu||\leq Cd(x,y)\frac{1}{2^j}(M(g^p)(y))^{\frac{1}{p}}.$$

By the same argument, we get for $j\leq 0$:

$$||\frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j}fd\mu-\frac{1}{\mu(B_{j-1})}\int_{B_{j-1}}fd\mu||\leq Cd(x,y)\frac{1}{2^{-j}}(M(g^p)(x))^{\frac{1}{p}}.$$

If x and y are Lebesgue points of f then we get by summing on j the previous inequalities :

$$||f(x)-f(y)||\leq Cd(x,y)\big((M(g^p)(x))^{\frac{1}{p}}+(M(g^p)(y))^{\frac{1}{p}}\big)$$

with C an absolute which only depends on the doubling constant of X. Hence, by the maximal inequality of Hardy-Littlewood, we get that $(M(g^p))^{\frac{1}{p}}$ belongs to L^q (because $\frac{q}{p}>1$ and g belongs to L^q). So, f belongs to $M^{1,q}$. Fix now a ball $A_0=B_{r_0}(x_0)$. We can remark that if x and y are in A_0 then all the balls λB_j previously constructed are contained in γA_0 with γ depending only on λ (in fact, we can choose $\gamma=5\lambda$).

We can further generalize this lemma. Before this, we have to define the notion of being an upper gradient on average.

Definition 129. *Let (X,d,μ) be a β-doubling metric space. Let $(E,||.||)$ be a Banach space. We say that g in $L^p_{loc.}(X,\overline{\mathbf{R}^+})$ in an p-upper gradient on average for $f:X\to E$ a $L^1_{loc.}$ function if for all B of X, we have the following inequality :*

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B||f-\frac{1}{\mu(B)}\int_B f||\leq Cr\left(\frac{1}{\mu(\lambda B)}\int_{\lambda B}g^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

with C and λ two positive constants independant of the choice of B and with r the radius of the ball B.

Lemma 130. *Let (X,d,μ) be a $(1,p)$-PI space. Let $E,||.||$ be a Banach space. Let g be in L^q (with $q>p$) an upper gradient on average for f in $L^1_{loc.}$. Then, we have for all balls $B\subset X$ and for μ-a.e. x and y in B :*

$$||f(x)-f(y)||\leq Cd(x,y)\big((M(g^p\chi_{\gamma B})(x))^{\frac{1}{p}}+(M(g^p\chi_{\gamma B})(y))^{\frac{1}{p}}\big)$$

where C and γ are positive constants which depend only of X and M denotes the maximal centered function of Hardy-Littlewood.

Proof : The proof of the lemma 130 is the same as the lemma 128.

5.2.2. Proof of the generalization. We extend the result proved by [**KZ**] that Poincaré inequality is an open property. Our result is pretty easy (assuming we have the result of [**KZ**] of course) and consists only on a simple use of the Hahn-banach Theorem. But this simple remark have many interesting corollaries.

Proposition 131. *Let (X, d, μ) be a $(1, p)$-PI space with $p > 1$. Let $(E, ||.||)$ be a Banach space. Then, X supports $(1, q)$-Poincare inequalities for lipschitz functions $f : X \to E$ for some $1 \leq q < p$ and with constants which only depend on X.*

Proof : Consider $f : X \to E$ a lipschitz function. Let π an element of E^* with $|||\pi||| \leq 1$. Hence, $\pi(f) : X \to \mathbf{R}$ is a lipschitz function and by the result of [**KZ**], we have that $\{\pi(f), g\}$ satifies a $(1, q)$-Poincare inequality with constants which only depend on X for some $q < p$ and for all upper gradient g of f in L^q. Consider now g an upper gradient of f in $L^{q'}$ with $q < q'$. We can notice that g is also an upper gradient for $\pi(f)$. Hence, by the lemma 128, we have that $\pi(f)$ is in $M^{1,q'}(X, E)$. More precisely, we have for all x and y in B (a fixed ball of our choice of radius r) that :

$$|\pi(f(x)) - \pi(f(y))| \leq Cd(x, y)\big((M(g^p\chi_{\gamma B})(x))^{\frac{1}{q}} + (M(g^q\chi_{\gamma B})(y))^{\frac{1}{q}}\big)$$

with C and γ that only depend on X. This inequality is available for all x and y in B because all these points are Lebesgue points of $\pi(f)$ ($\pi(f)$ is continuous). By the Hahn-banach Theorem, we get for all x and y in B :

$$||f(x) - f(y)|| \leq Cd(x, y)\big((M(g^p\chi_{\gamma B})(x))^{\frac{1}{q}} + (M(g^q\chi_{\gamma B})(y))^{\frac{1}{q}}\big)$$

So, by using successively Jensen inequality, triangular inequality and Hardy-Littlewood maximal inequality, we get because μ is doubling that :

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B ||f - \frac{1}{\mu(B)}\int_B f|| \leq Cr\big(\frac{1}{\mu(\gamma B)}\int_{\mu(\gamma B)} g^{q'}\big)^{\frac{1}{q'}}$$

which is the desired inequality.

5.2.3. Some applications. The following corollary mainly shows that if we suppose true the Theorem 127 then we recover the generalization of the Calderón Theorem of the second chapter.

Corollary 132. *Let (X, d, μ) be a $(1, p)$-PI space with $p > 1$. Let $(E, ||.||)$ be a Banach space. If f belongs to $M^{1,p}(X, E)$ with $p > \max\{\frac{\log \beta}{\log 2}, 1\}$ (β is the doubling constant of μ) then $Lip(f)$ in an p-upper gradient on average for f. More precisely, we have the following inequality :*

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B ||f - \frac{1}{\mu(B)}\int_B f|| \leq Cr\big(\frac{1}{\mu(\lambda B)}\int_{\mu(\lambda B)} Lip(f)^p\big)^{\frac{1}{p}}$$

for all balls B of radius r, centered on a point x in X and with constants C and λ which depend only on X.

Proof : Take π an element of E^* with norm $|||\pi||| \leq 1$. Then, $\pi(f) : X \to R$ is in $M^{1,p}(X, R)$. Indeed, if g is a function in L^p, linked to f by the inequality that defines $M^{1,p}(X, E)$ then g is also linked to $\pi(f)$. Take g to be such a function. Then by the lemma 90, for all $\varepsilon > 0$, there is a lipschitz function $g_\varepsilon : X \to \mathbf{R}$ such that $\mu(A^c_\varepsilon) \leq \varepsilon$

where $A_\varepsilon = \{x \in X$ such that $g_\varepsilon(x) = \pi(f)(x)\}$ and $||g_\varepsilon - \pi(f)||_{1,p} \leq \varepsilon$. Fix now a ball B of radius r. Thus, we have :

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B |\pi(f) - \frac{1}{\mu(B)}\int_B \pi(f)| \leq \frac{2}{\mu(B)}\int_B |\pi(f) - g_\varepsilon| + \frac{1}{\mu(B)}\int_B |g_\varepsilon - \frac{1}{\mu(B)}\int_B g_\varepsilon|.$$

We have by Jensen inequality that :

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B |\pi(f) - g_\varepsilon| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(B)^{\frac{1}{p}}}.$$

We have because X carries $(1,p)$-Poincare inequalities and by the lemma 93 that :

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B |g_\varepsilon - \frac{1}{\mu(B)}\int_B g_\varepsilon| \leq Cr\big(\frac{1}{\mu(\lambda B)}\int_{\lambda B} \mathrm{Lip}(g_\varepsilon)^p\big)^{\frac{1}{p}}.$$

We have the following decomposition :

$$\int_{\lambda B} \mathrm{Lip}(g_\varepsilon)^p = \int_{\lambda B \cap A_\varepsilon} \mathrm{Lip}(g_\varepsilon)^p + \int_{\lambda B \cap A_\varepsilon^c} \mathrm{Lip}(g_\varepsilon)^p.$$

Fix $\varepsilon_1 > 0$. By the construction of g_ε and by using Lusin Theorem, we have that for μ-a.e. $x \in 2\lambda B$:

$$\mathrm{Lip}_{|K_{\varepsilon_1}}(g_\varepsilon)(x) \leq 2(|\pi(f(x))| + g(x)) \leq 2(||f(x)|| + g(x))$$

with $\mu(K_{\varepsilon_1}^c \cap 2\lambda B) \leq \varepsilon_1$. Hence, by applying the lemma 92 and by the construction of the functions g_ε (we recall that the two functions g_ε and $\pi(f)$ coincide on A_ε), we have :

$$\int_{\lambda B \cap A_\varepsilon} \mathrm{Lip}(g_\varepsilon)^p = \int_{\lambda B \cap A_\varepsilon} \mathrm{Lip}_{|A_\varepsilon}(g_\varepsilon)^p \leq \int_{\lambda B \cap A_\varepsilon} \mathrm{Lip}(\pi(f))^p \leq \int_{\lambda B} \mathrm{Lip}(f)^p.$$

We also have :

$$\int_{\lambda B \cap A_\varepsilon^c} \mathrm{Lip}(g_\varepsilon)^p = \int_{\lambda B \cap A_\varepsilon^c \cap K_{\varepsilon_1}} \mathrm{Lip}(g_\varepsilon)^p + \int_{\lambda B \cap A_\varepsilon^c \cap K_{\varepsilon_1}^c} \mathrm{Lip}(g_\varepsilon)^p.$$

By applying again the lemma 92, we have :

$$\int_{\lambda B \cap A_\varepsilon^c \cap K_{\varepsilon_1}} \mathrm{Lip}_{|K_{\varepsilon_1}}(g_\varepsilon)^p \leq C\int_{A_\varepsilon^c} (||f|| + g)^p \leq \alpha(\varepsilon)$$

with $\alpha(\varepsilon)$ tends to 0 when ε goes to 0 thanks to the dominated convergence. since g_ε is lipschitz, we can suppose that $\mathrm{Lip}(g_\varepsilon)$ is bounded by M_ε a finite constant. So, we get :

$$\int_{\lambda B \cap A_\varepsilon^c \cap K_{\varepsilon_1}^c} \mathrm{Lip}(g_\varepsilon)^p \leq \varepsilon_1 M_\varepsilon^p.$$

By taking the limit when ε_1 goes to 0 and then by taking the limit when ε goes to 0, we get :

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B |\pi(f) - \frac{1}{\mu(B)}\int_B \pi(f)| \leq Cr\big(\frac{1}{\mu(\lambda B)}\int_{\mu(\lambda B)} \mathrm{Lip}(f)^p\big)^{\frac{1}{p}}.$$

To conclude, we can use the following lemma.

Lemma 133. *Let (X, d, μ) be $(1, p)$-PI space with doubling constant β. Let $(E, ||.||)$ be a Banach space. If $p > \max\{\frac{\log \beta}{\log 2}, 1\}$ and if f is in $M^{1,p}(X, E)$ then Lip(f) belongs to L^p and f admits a continuous extension (in fact, f is at least α-holderian with exponent $\alpha = (1 - \frac{\log \beta}{p \log 2})$).*

Proof : Take $B_0 = B_{2r}(x_0)$ a ball of X. Choose for $j \geq 1$ a decreasing family of balls $B_j = B_{\frac{r}{2^j}}(x)$ with x in $B_r(x_0)$. Take g a positive L^p function. We have for all $j \geq 1$ that :

$$(\frac{1}{\mu(B_j)} \int_{B_j} g^p)^{\frac{1}{p}} \leq C\beta^{\frac{j}{p}} (\frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} g^p).$$

Take g a positive L^p function associated to f in $M^{1,p}$. Because the series $\frac{\beta^{\frac{j}{p}}}{2^j}$ is convergent, we get if x and y are two Lebesgue points of f in B_0 that :

$$||f(x) - f(y)|| \leq Cr\big(\frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} g^p\big)^{\frac{1}{p}}.$$

Take now r to be comparable to $d(x, y)$. By using the lemma 91, we get that f admits a continuous extension. More precisely, f can be extended in a α-holderian function with $\alpha = (1 - \frac{\log \beta}{p \log 2})$. Choose now x_0 to be equal to x. By the Lebesgue differentiation Theorem, we get that Lip(f) belongs to L^p.

As a direct consequence of the lemma 133, we have the following.

Corollary 134. *: If (X, d, μ) is a $(1, p)$ PIspace for any $1 \leq p < +\infty$ then the two spaces $M^{1,\infty}(X, E)$ and $Lip_\infty(X, E)$ (the space of bounded lipschitz functions on X which are E-valued) are equal and their natural norm are equivalent.*

So we go back to the initial proof. By the proposition 131, we know that X supports in fact $(1, q)$-Poincare inequalities for some $q < p$. Hence, we get :

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |\pi(f) - \frac{1}{\mu(B)} \int_B \pi(f)| \leq Cr\big(\frac{1}{\mu(\lambda B)} \int_{\mu(\lambda B)} \mathrm{Lip}(f)^q\big)^{\frac{1}{q}}.$$

By applying the lemma 128 and by using the Hahn-Banach Theorem (recall that f is continuous by the lemma 133), we get :

$$||f(x) - f(y)|| \leq Cd(x, y)\big((M(\mathrm{Lip}(f))^q \chi_{\gamma B})(x))^{\frac{1}{q}} + (M(\mathrm{Lip}(f))^q \chi_{\gamma B})(y))^{\frac{1}{q}}\big).$$

Then by integrating this last inequality and by the Hardy-Littlewood maximal inequality (recall that by the lemma 133, Lip(f)) is in L^p), we get the desired result.

In fact, the proof of the corollary 132 allows us deduce the more general following proposition.

Proposition 135. *Let (X, d, μ) be a $(1, p)$-PI space with $p \geq 1$. Let $(E, ||.||)$ be a Banach space. If $f : X \to E$ is a measurable function such that Lip(f) belongs to $L^p(X, \mathbf{R}^+)$ then Lip(f) is p-upper gradient on average for f.*

Proof : Instead of using the fact that f is continuous as above, we use instead the Lebesgue points of f. Take now π an element of E^*. Then, by the construction of the Bochner integral, we have that the set of Lebesgue points of $\pi(f)$ is contained in the set of Lebesgue points of f. With this remark, we can apply the Hahn-Banach

Theorem to conclude (we avoid the problem of measurability that may occur if E^* is not separable).

5.3. Proof of the main Theorem

In this section, we prove the following.

Theorem 136. *Let (X, d, μ) a $(1, p)$ PI-space where $p \geq 1$ and E a GFDA Banach space endowed with the norm $||.||$. Then, if $f : X \to E$ is measurable function such that Lip(f) belongs to $L^p(X, \mathbf{R}^+)$ then f is Cheeger-differentiable μ-almost everywhere.*

First of all, we give a refinement on the set of admissible upper gradient on average for the functions we consider in the Theorem 127.

Lemma 137. *Let (X, d, μ) be a metric measure space and E a Banach space endowed with the norm $||.||$. If $f : X \to E$ is a measurable function such that Lip(f) is in $L^p(X, \mathbf{R}^+)$ then f is in $N^{1,p}(X, E)$. Moreover, if (X, d, μ) is a $(1, p)$ PI-space then Lip(f) is a p-upper gradient on average for f.*

Proof : By the Fuglede's lemma ([**Fu**] [Theorem 2]), there is a set A of curves of zero p-modulus such that for every rectifiable curve $\gamma \notin A$ parametrized by its arc-length

$$\int_\gamma (\mathrm{Lip}(f))^p < +\infty.$$

Take x and y two points of X. Choose a rectifiable curve $\gamma \notin A$ parametrized by its arc-length and connecting x to y. Take now $\pi \in E^*$. Define now the following map

$$\Phi_\gamma(s) = \pi(f(\gamma(s))) : [0, 1] \to \mathbf{R}.$$

We can notice that for every rectifiable curve $\gamma \notin A$, $t \to \mathrm{Lip}(f(\gamma(t))$ is in $L^p([0, 1], \mathbf{R}^+)$ and so is finite for a.e. $t \in [0, 1]$. Since for a.e. $t \in [0, 1]$, we have that $\mathrm{Lip}(\Phi_\gamma)(t) \leq |||\pi|||\mathrm{Lip}(f(\gamma(t)) < +\infty$ then by applying the Stepanov Theorem, we get that $(\Phi_\gamma)'(t)$ exists for a.e. $t \in [0, 1]$ and we get that $|(\Phi_\gamma)'(t)| \leq |||\pi|||\mathrm{Lip}(f(\gamma))(t)$. By absolute continuity of Φ_γ, we get

$$|\pi(f(x)) - \pi(f(y))| = |\int_{[0,1]} (\Phi_\gamma)'(t)| \leq |||\pi||| \int_\gamma \mathrm{Lip}(f).$$

By using the Hahn-Banach Theorem, we get that Lip(f) is a weak p-upper gradient for f. We get by using the characterization of the Sobolev spaces on metric measure space established in [**Sh**] that f is in $N^{1,p}(X, E)$.

For the second point of the lemma 137, we have to recall some important facts.

Take now (X, d, μ) a metric measure space supporting a doubling measure μ. Consider E a Banach space endowed with the norm $||.||$. Take any $p \geq 1$. By using the Theorem 1.6 in [**LN**], we have that lipschitz maps from X to E are dense in $N^{1,p}(X, E)$ in the following sense. If f belongs to $N^{1,p}(X, E)$ then for every $\varepsilon > 0$, there is a lipschitz function $f_\varepsilon : X \to E$ such that

$$\mu(f \neq f_\varepsilon) \leq \varepsilon \text{ and } ||f - f_\varepsilon||_{1,p} \leq \varepsilon.$$

We suppose moreover that (X, d, μ) is a $(1, p)$ PI-space for some $p \geq 1$. Hence, if $f : X \to E$ is a measurable function such that Lip(f) is in $L^p(X, \mathbf{R}^+)$ by using the lemma 137, we have that f is in $N^{1,p}(X,E)$. Since X supports $(1,p)$ weak Poincaré inequalities, we have by using the remark lying above and by adapting the proof of the corollary 132 that $\mathrm{Lip}(f)$ is a p-upper gradient on average for f (we just recall that by using the Theorem 1.6 in[**LN**], we get that lipschitz functions from X to E are dense in $N^{1,p}(X,E)$. A proof of this density result is given in [**HKST**]).

We recall some notions which are essential to deal with the Theorem 127.

We suppose now that E is a GFDA Banach space. Take now a GFDA for E that we call $\{V_i, \pi_i\}$. Take $f : X \to E$ such that $\mathrm{Lip}(f)$ is in $L^p(X, \mathbf{R}^+)$. Then, the weak-Cheeger differential of f is well-defined μ-almost everywhere. Indeed, by using the main Theorem of the article [**BRZ**], we have that $f_i = \pi_i(f) : X \to V_i$ is Cheeger-differentiable μ-almost everywhere. Moreover, by adapting the proof of the lemma 66 and then by using the GFDA property of E, we get that the weak-Cheeger differential is well-defined μ-almost everywhere. We can notice that the same conclusion holds when E is only supposed to be a RNP Banach space. Indeed, we just have to show that the weak differential lives in fact in E and not in $\underset{\leftarrow}{\lim} V_i$. For this last point, we just have to apply a Theorem of descriptive sets theory of [**CK4**]. Althought, in this case, we have to suppose that μ is **complete**.

We recall a definition which is central in our proof.

Definition 138. *We say that a map $f : X \to E$ is finite dimensionnal at first order in $x \in X$ if there is a subspace of finite dimension V of E such that :*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \sup_{x' \in B_r(x)} d(f(x') - f(x), V) = 0$$

where $d(., V)$ denotes the distance from a vector of E to the subspace V.

Take a map $f : X \to E$ such that $\mathrm{Lip}(f)$ is in $L^p(X, \mathbf{R}^+)$. If we show that f is finite dimensionnal at first order μ-almost everywhere then by applying the proposition 73, we will prove that f is Cheeger-differentiable μ-almost everywere. We only consider the case of a Banach space E enjoying the GFDA property. Indeed, the ANP property of E allows us to reduce to the case of a Banach space enjoying the GFDA property but we have to suppose in this case that the meausre μ supported by X is **complete**.

Proof of the main Theorem :

The proof is divided into three steps. We deal with the case $p > 1$ at first even if the case $p = 1$ is very similar.

The part in common : Let $\{A_\alpha, u_\alpha\}$ be an atlas of X. We can suppose that the map u_α (which exists μ-a.e. by the Cheeger Theorem [**Che**]) is invertible on its image. Since the components of u_α are independant at first order for μ-a.e x in A_α and since T_xE is of finite dimension (by using again the Cheeger Theorem [**Che**]), we have that the Cheeger-differential of u_α is injective at some point x. By restricting the target of the map u_α, we can suppose that D_xu_α is an isomorphism from T_xE into $\mathbf{R}^{n_\alpha}$ (for some n_α). Moreover, the norm of the linear operator D_xu_α is smaller than the Lipschitz constant of u_α say L_α.

We can define now :

$$\nu(x,i) = \sup_{\{\xi \in T_x E : ||\xi|| \leq 1\}} (||\xi||_\infty - ||\xi||_i).$$

We can notice too that the map $\nu(.,i)$ is uniformly bounded, measurable and converge μ-a.e. to 0.

Moreover, by the construction of the GFDA $\{V_i, \pi_i\}$, we have for $x \in E$ that : $||\pi_i(x)|| \leq ||x||$. Hence, we have for μ-a.e. x that :

$$\mathrm{Lip}(f_i)(x) \leq \mathrm{Lip}(f)(x).$$

Hence, by [**BRZ**], the map $\pi_i(f) = f_i$ is Cheeger-differentiable μ-a.e.. By the previous remarks and by the hypothesis made on f, we get that f is weakly differentiable μ-a.e..

Take now a μ-measurable subset $A \subset X$ such that $0 < \mu(A) < +\infty$. By using an adaptation the lemma 68, we get that $x \to ||\{D_x f_i\}||$ is measurable. Hence, by using Lusin Theorem, we get a compact set $K_\varepsilon \subset A$ and a constant $L_\varepsilon > 0$ (we can suppose that L_ε goes to $+\infty$ when ε goes to 0) such that :

$$\mu(A \cap K_\varepsilon^c) \text{ and } ||\{D_x f_i\}||_{|K_\varepsilon} \leq L_\varepsilon.$$

Take a point x of K_ε where the weak differential of f exists. By applying the Cheeger Theorem [**Che**], we get that $\mathbf{Im}(\{D_x f_i\})$ is a subspace of E of finite dimension. We want to show that f is finite dimensionnal at first order in x where the subspace of finite dimension V is here $\mathbf{Im}(\{D_x f_i\})$.

Since $\{V_i, \pi_i\}$ is a GFDA of E then by using the lemma 45, π is a surjective isometry from E into $\varprojlim V_i$. We can now identify the inverse limit $\varprojlim V_i$ to E.

We call $\mathbf{D}(Du_\alpha)$ the set of points of A_α where u_α is Cheeger-différentiable. We call $\mathbf{D}(\{Df_i\})$ the set of points of X where f is weakly differentiable at x. We already know that these two sets are of full measure in X (for the second set, it comes from an adaptation of the lemma 69).

By rescalling, for every α, for all $x \in \mathbf{D}(Du_\alpha)$ and for all $\xi \in \mathbf{R}^{n_\alpha}$ such that $||\xi|| \leq 1$, we can suppose that :

$$||(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)|| \leq \min(1, \frac{1}{L_\varepsilon}).$$

Under these assumptions, we have for every $x \in \mathbf{D}(\{Df_i\}) \cap \mathbf{D}(Du_\alpha) \cap K_\varepsilon$ that :

$$||(\{D_x f_i\})(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)|| \leq 1.$$

Set $X_1 = \mathbf{D}(\{Df_i\}) \cap \mathbf{D}(Du_\alpha)$.

Fix $\varepsilon_1 > 0$. By Egorov Theorem, there is a compact set $Z_{\varepsilon_1} \subset K_\varepsilon$ satisfying $\mu(K_\varepsilon \cap Z_{\varepsilon_1}^c) \leq \varepsilon_1$ and such that $\nu(.,i)_{|Z_{\varepsilon_1}}$ uniformly converges to 0. In other words, there is a non increasing sequence ρ_i which tends to 0 and such that for every $x \in Z_{\varepsilon_1}$: $\nu(x,i) \leq \rho_i$.

Call now $X_2 \subset \mathbf{D}(\{Df_i\})$ the set of points of approximate continuity of $\{Df_i\}$. We know that X_2 is a set of full μ-measure. Consider now the set $X_3 = X_1 \cap X_2$.

Take $\varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$. Let x to be in X_3.

Since for every j, x is a point of approximate continuity of $D_x f_j$ then there is any α such that $x \in A_\alpha$. Under these conditions, for every N, there are $r_0 > 0$ and a

μ-measurable set $\theta_r \subset B_{2r}(x) \cap A_\alpha$ such that for every $r \leq r_0$:

$$\frac{\mu(\theta_r)}{\mu(B_r(x))} \geq 1 - \varepsilon_2.$$

Moreover, for every $x' \in \theta_r$ and for every $\xi \in \mathbf{R}^{n_\alpha}$ such that $||\xi|| \leq 1$, we have that :

$$||(D_{x'}f_j)(D_{x'}u_\alpha)^{-1}(\xi) - (D_x f_j)(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)|| \leq \frac{1}{N}.$$

Since $\{V_i, \pi_i\}$ is a GFDA, there is a rank N such that the sequence (ρ_i) is ε_3-determined. So, for $x' \in \theta_r \cap Z_{\varepsilon_1}$ and for every $\xi \in \mathbf{R}^{n_\alpha}$ such that $||\xi|| \leq 1$, we get for every i :

$$||(D_{x'}f_i)(D_{x'}u_\alpha)^{-1}(\xi) - (D_x f_i)(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)|| \leq \varepsilon_3.$$

So, for every $x' \in \theta_r \cap Z_{\varepsilon_1}$ and for every $\xi \in \mathbf{R}^{n_\alpha}$ such that $||\xi|| \leq 1$, we get :

$$||\{D_{x'}f_i\}(D_{x'}u_\alpha)^{-1}(\xi) - \{D_x f_i\}(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)|| \leq \varepsilon_3.$$

Hence, we get in particular that :

$$d\big(\{D_{x'}f_i\}(D_{x'}u_\alpha)^{-1}(\xi), \mathbf{Im}(\{D_x f_i\})\big) \leq \varepsilon_3.$$

Take an integer k and choose a linear form $l \in V_k^*$ of operator norm smaller than 1 and vanishing on $\mathbf{Im}(D_x f_k) \subset V_k$. For every $x' \in \theta_r \cap Z_{\varepsilon_1}$ and for every $\xi \in \mathbf{R}^{n_\alpha}$ such that $||\xi|| \leq 1$, we get by the previous relation composed by l that :

$$\begin{aligned} \left|l\big((D_{x'}f_k)(D_{x'}u_\alpha)^{-1}(\xi)\big) - l\big((D_x f_i)(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)\big)\right| &= \left|l\big((D_{x'}f_i)(D_{x'}u_\alpha)^{-1}(\xi)\big)\right| \\ &= \left|(D_{x'}(l(f_k)))(D_{x'}u_\alpha)^{-1}(\xi)\right| \\ &\leq \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Define now two sets

$$J_1 = \{y \in X_3 | \mathrm{Lip}(f)(y) < +\infty\} \text{ and}$$

$$J_2 = \{y \in X_3 | y \text{ is a point of approximate continuity of } \mathrm{Lip}(f)\}.$$

Call now $X_4 = X_3 \cap J_1 \cap J_2$. By hypotesis, we have that $J_1 \cap J_2$ is a set of full μ-measure in X_3. Fix now $\gamma > 0$. Since the map $\mathrm{Lip}(f) : Z_{\varepsilon_1} \to \mathbf{R}^+$ is μ-measurable then by using the Lusin Theorem, we get a compact set $K_\gamma \subset Z_{\varepsilon_1}$ such that $\mu(Z_{\varepsilon_1} \cap K_\gamma^c) \leq \gamma$ and $\mathrm{Lip}_{|K_\gamma}$ is continuous on K_γ. Fix now $\varepsilon_4 > 0$. Hence, by Heine Theorem, there is $\eta_\gamma > 0$ such that if $x, y \in K_\gamma$ and $d(x,y) \leq \eta_\gamma$ then $|\mathrm{Lip}(f)(x) - \mathrm{Lip}(f)(y)| \leq \varepsilon_4$. Fix now $\varepsilon_5 > 0$. Set for any $y \in K_\gamma$:

$$r_y = \sup_{0<r<\eta_\gamma} \{r | \forall z \in B_r(y) : ||f(y) - f(z)|| \leq d(y,z)(\mathrm{Lip}(f)(y) + \varepsilon_5)\}.$$

Since y is in particular in J_1 then r_y is well defined. Set for any $k \geq 0$:

$$A_k = \{y \in K_\gamma | r_y \geq 2^{-k}\eta_\gamma\}.$$

We show now that A_k is a closed set. Indeed, take a sequence (y_n) of points of A_k such that for some $y \in X$, $\lim_{n\to+\infty} d(y_n, y) = 0$. We have to show that y belongs to A_k. First of all, since K_γ is compact, we have that $y \in K_\gamma$. Moreover, by the definition of K_γ, we have that :

$$\mathrm{Lip}(f)(y_n) \to_{n\to+\infty} \mathrm{Lip}(f)(y).$$

Let $\delta > 0$. By a triangular inequality, we have for all $z \in B_{(2^{-k}\eta_\gamma - \delta)}(y)$ that :

$$||f(y) - f(z)|| \leq ||f(y) - f(y_n)|| + ||f(y_n) - f(z)||.$$

For $n \gg 1$, we have that $d(y, y_n) < 2^{-k}\eta_\gamma$ and since $y_n \in A_k$, we get :

$$\begin{aligned} ||f(y) - f(y_n)|| &\leq d(y, y_n)(\mathrm{Lip}(f)(y_n) + \varepsilon_5) \\ &\leq d(y, y_n)(\mathrm{Lip}(f)(y) + 2\varepsilon_5) \text{ since } d(y, y_n) \leq \eta_\gamma. \end{aligned}$$

Moreover, we have that :

$$\begin{aligned} d(y_n, z) &\leq d(y_n, y) + d(y, z) \\ &\leq d(y_n, y) + 2^{-k}\eta(\gamma) - \delta \\ &< 2^{-k}\eta_\gamma \text{ if } n \gg 1. \end{aligned}$$

Since $y_n \in A_k$, we get :

$$||f(y_n) - f(z)|| \leq d(y_n, z)(\mathrm{Lip}(f)(y_n) + \varepsilon_5).$$

By taking the limit when n goes to $+\infty$, we get for all $z \in B_{(2^{-k}\eta_\gamma - \delta)}(y)$ that :

$$||f(y) - f(z)|| \leq d(y, z)(\mathrm{Lip}(f)(y) + \varepsilon_5).$$

So, we have that $r_y \geq (2^{-k}\eta_\gamma - \delta)$. So, by taking the limit when δ goes to 0, we get $r_y \geq 2^{-k}\eta_\gamma$. Hence, y belongs to A_k and A_k is closed (hence, A_k is μ-measurable).

Moreover, we have that $A_k \subset A_{k+1}$ and by definition of J_1, we have $\bigcup_{k \geq 0} A_k = K_\gamma$. By the σ-additivity of the measure μ, we get :

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(A_k) = \mu(K_\gamma).$$

The case $p > 1$:

Since X supports $(1, p)$ Poincaré inequalities, we know by the extension of the Theorem of [**KZ**] that X is in fact a $(1, q)$-PI space for some $1 < q < p$. Choose now t such that $q < t < p$. Set now

$$M_\zeta = \{y \in X_4 | \big(M(\mathrm{Lip}(f)^t)(y))\big)^{\frac{1}{t}} > \zeta\}.$$

We have by the lemma 15 (we recall that μ is doubling and $\frac{p}{t} > 1$) and by Tchebychev inequality, we get :

$$\mu(M_\zeta^c \cap K_\gamma) \geq \mu(K_\gamma) - C\frac{||\mathrm{Lip}(f)||_p^p}{\zeta^p}.$$

For $\zeta \gg 1$, $\varepsilon \ll 1$, $\varepsilon_1 \ll 1$ and $\gamma \ll 1$, we have that $X_5 = M_\zeta^c \cap K_\gamma$ is of positive μ-measure. For $k \gg 1$, we also have that $X_6 = M_\zeta^c \cap A_k$ is of positive μ-measure. Take now x a point of density of X_6. We want to show that is f is Cheeger-differentiable at x. By definition of a point of density, for every $\varepsilon_6 > 0$, there is $r_1 > 0$ such that for every $r \leq r_1$:

$$\mu(X_6 \cap B_r(x)) \geq (1 - \varepsilon_6)\mu(B_r(x)).$$

Set $\nu = \min(r_0, r_1, \eta_\gamma)$. By a triangular inequality, there are two constants $0 < \kappa \leq \nu$ and $0 < L \leq 1$ such that for every $r \leq L\kappa$, for every $y \in B_{L\kappa}(x)$, we have

$$B_{\lambda r}(y) \subset B_\kappa(x) := B$$

where $\lambda \geq 1$ is the constant involved in the dilatation of the balls for the new Poincaré inequalities supported by X. Fix now $r \leq L\kappa$. Take now $y \in X_6 \cap B_{L\kappa}$. We write for simplicity $B_j := B_{\frac{r}{2^j}}(y)$. By a straightforward adaptation of the lemma 132, we have :

$$||\frac{1}{\mu(B_j)} \int_{B_j} l(f_i) - \frac{1}{\mu(B_{j+1})} \int_{B_{j+1}} l(f_i)|| \;\leq\; C\frac{r}{2^j}\Big(\frac{1}{\mu(\lambda B_j)} \int_{\lambda B_j} (\mathrm{Lip}(l(f_i)))^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

We have the following decomposition :

$$\int_{\lambda B_j} (\mathrm{Lip}(l(f_i)))^q = \int_{\lambda B_j \cap \theta_r \cap X_6} (\mathrm{Lip}(l(f_i)))^q + \int_{\lambda B_j \cap \theta_r \cap X_6^c} (\mathrm{Lip}(l(f_i)))^q + \int_{\lambda B_j \cap \theta_r^c} (\mathrm{Lip}(l(f_i)))^q.$$

We have to give a bound for each summand of the previous equality. By the definition of the Cheeger-differentiablity in x, we get that :

$$l(f_i)(x) - l(f_i)(x') = (D_x(l(f_i))(u_\alpha(x) - u_\alpha(x')) + o(d(x,y)).$$

Since after the rescalling, the lipschitz constant of u_α is smaller than L_ε, we get for every i that :

$$\mathrm{Lip}(l(f_i))(x) \leq L_\varepsilon ||D_x(l(f_i))||.$$

Hence, by the definition of $\theta_r \cap Z_{\varepsilon_1}$, we have :

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} = \int_{\lambda B_j \cap \theta_r \cap X_6} (\mathrm{Lip}(l(f_i)))^q \;&\leq\; \int_{\lambda B_j \cap \theta_r \cap Z_{\varepsilon_1}} (\mathrm{Lip}(l(f_i)))^q \\
&\leq\; L_\varepsilon^q \varepsilon_2^q \mu(\lambda B_j)
\end{aligned}$$

By the definition of θ_r and the choice of K_ε, for every $\xi \in \mathbf{R}^{n_\alpha}$ such that $||x_i|| \leq 1$ and for every $x' \in \theta_r$, we have :

$$\begin{aligned}
||D_{x'} f_i(\xi)|| \;&\leq\; ||(D_{x'} f_i)(D_{x'} u_\alpha)^{-1}(\xi) - (D_x f_i)(D_x u_\alpha)^{-1}(\xi)|| + ||D_x f_i(\xi)|| \\
&\leq\; L_\varepsilon ||\xi|| + \frac{1}{N}
\end{aligned}$$

So, we get for every $x' \in \theta_r$ that :

$$|||D_{x'} f_i||| \leq C_\varepsilon.$$

Hence, we have for every $x' \in \theta_r$ that :

$$\mathrm{Lip}(f_i)(x') \leq C_\varepsilon < +\infty.$$

Take $0 < \delta < 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{ii} = \int_{\lambda B_j \cap \theta_r \cap X_6^c} (\mathrm{Lip}(l(f_i)))^q \;&\leq\; C_\varepsilon \mu(\lambda B_j \cap X_6^c) \\
&\leq\; C_\varepsilon \mu(B \cap X_6^c)^\delta \mu(\lambda B_j)^{1-\delta} \\
&\leq\; C_\varepsilon \varepsilon_6^\delta \mu(B)^\delta \mu(\lambda B_j)^{1-\delta}.
\end{aligned}$$

Since μ is doubling, we get that

$$\frac{\mathbf{ii}}{\mu(\lambda B_j)} \leq C_\varepsilon \varepsilon_6^\delta \beta^{j\delta}.$$

Since $\beta = 2^N$, if we choose $\delta < \frac{1}{N}$, the series $\dfrac{1}{2^j}\dfrac{\mathbf{ii}}{\mu(\lambda B_j)}$ is summable in j.

By Holder inequality, we get for the real t chosen above such that $q < t < p$:

$$\mathbf{iii} = \int_{\lambda B_j \cap \theta_r^c} (\mathrm{Lip}(l(f_i)))^q \;\; \leq \; \mu(\lambda B_j \cap \theta_r^c)^{1-\frac{q}{t}} \Big(\int_{\lambda B_j \cap \theta_r^c} (\mathrm{Lip}(f))^t \Big)^{\frac{q}{t}}$$

Take $0 < \delta < 1$. We have that :

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{\mathbf{iii}}{\mu(\lambda B_j)}\Big)^{\frac{1}{q}} \;&\leq\; \mu(\lambda B_j \cap \theta_r^c)^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{t})\delta} \frac{\mu(\lambda B_j)^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{t})(1-\delta)}}{\mu(\lambda B_j)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{t}}} (M(\mathrm{Lip}(f))^t)(y))^{\frac{1}{t}} \\
&\leq\; \varepsilon_2^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{t})\delta} \Big(\frac{\mu(B)}{\mu(\lambda B_j)}\Big)^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{t})\delta} (M(\mathrm{Lip}(f)^t)(y))^{\frac{1}{t}}
\end{aligned}$$

Since μ is doubling and $y \in M_\zeta^c$, we get that :

$$\Big(\frac{\mathbf{iii}}{\mu(\lambda B_j)}\Big)^{\frac{1}{q}} \leq C \varepsilon_2^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{t})\delta} \beta^{j\delta(\frac{1}{q}-\frac{1}{t})} \zeta.$$

By choosing $\delta \ll 1$, the series $\dfrac{1}{2^j}\Big(\dfrac{\mathbf{iii}}{\mu(\lambda B_j)}\Big)^{\frac{1}{q}}$ is summable in j (we recall that $\beta = 2^N$).

If y is a point of X such that $\mathrm{Lip}(f)(y)$ is finite then f is continuous at y (just use the definition of the upper lipschitz constant). Thanks to this remark, a chaining ball argument gives the following relation for every $r \leq L\kappa$ and for every $y, y' \in B_r(x) \cap X_6$:

$$||l(f_i)(y) - l(f_i)(y')|| \leq C_{\varepsilon,\zeta} r (\varepsilon_2^\delta + \varepsilon_6^\delta + \varepsilon_3)$$

for some $0 < \delta \ll 1$. By using the Hahn-Banach Theorem and by using the definition of inverse limit, we get for every $r \leq L\kappa$ and for every $y \in B_r(x) \cap X_6$:

$$\begin{aligned}
d\big(f(x) - f(y), \mathbf{Im}(\{D_x f_i\})\big) \;&=\; \sup_{i, l_{|\mathbf{Im}(D_x f_i)} = 0} \big(l(f_i(x)) - l(f_i(y))\big) \\
&\leq\; C_{\varepsilon,\zeta} r \big(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_6\big) \text{ by renaming } \varepsilon_2 \text{ and } \varepsilon_6.
\end{aligned}$$

So, we get for every $r \leq L\kappa$ that :

$$\sup_{y \in B_r(x) \cap X_6} d\left(f(x) - f(y), \mathbf{Im}(\{D_x f_i\})\right) \leq C_{\varepsilon,\gamma} r \big(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_6\big).$$

Under these conditions, we can show now -in a quantitative way- that all the points lying on the ball $B_r(x)$ (for small r) are very close from elements of $X_6 \cap B_r(x)$.

Lemma 139. *There is a constant $C > 0$ (depending only of the doubling constant of μ) such that for every $2r \leq L\kappa$ and for all $y \in B_r(x)$, there is $z \in B_r(x) \cap X_6$ such that*

$$d(y, z) \leq C \varepsilon_6^{\frac{1}{N}} r.$$

Proof :

We argue by contradiction by supposing that there are a point y of $B_r(x)$ and a real number $\eta > H\varepsilon_6^{\frac{1}{N}} r$ (with $H \gg 1$) such that for every $z \in X_6 : d(y,z) > \eta$. In fact, we have that $B_\eta(y) \subset B_{2r}(x) \cap X_6^c$. So, we have the following bound :

$$\mu(B_\eta(y)) \leq \mu(B_{2r}(x) \cap X_6^c) \leq \varepsilon_6 \mu(B_{2r}(x)).$$

By using the lemma 91, there is a constant $C > 0$ such that

$$\frac{\mu(B_\eta(y))}{\mu(B_{2r}(x))} \geq C(\frac{\eta}{r})^{\frac{1}{N}}.$$

So, we get that $\eta \leq C\varepsilon_6^{\frac{1}{N}} r$. This is a contradiction and the lemma is proved.

Take $y \in B_r(x)$ with $r \ll 1$. Then, by using the lemma 139, there is $z(y) \in B_r(x) \cap X_6$ such that

$$d(y, z(y)) \leq C\varepsilon_6^{\frac{1}{N}} r < 2^{-k}\eta_\gamma \text{ if } r \ll 1.$$

So, by the analysis made above, we have that

$$||f(y) - f(z(y))|| \leq d(y, z(y))(\mathrm{Lip}(f)(z(y)) + \varepsilon_5) \leq C_x \varepsilon_6^{\frac{1}{N}} r.$$

For every $z \in B_r(x) \cap X_6$, there is a sequence $(l_n(z))_{n\in\mathbf{N}}$ of elements of $\mathbf{Im}(\{D_x f_i\})$ such that

$$||f(x) - f(z) - l_n(z)|| \to_{n\to+\infty} d\big(f(x) - f(z), \mathbf{Im}(\{D_x f_i\})\big).$$

We have the following chain of inequalities :

$$\begin{aligned} d\big(f(x) - f(y), \mathbf{Im}(\{D_x f_i\})\big) &\leq ||f(x) - f(y) - l_n(z(y))|| \\ &\leq ||f(x) - f(z(y)) - l_n(z(y))|| + ||f(z(y)) - f(y)||. \end{aligned}$$

By passing to the limit when n goes to $+\infty$ and by renaming again ε_6, we get :

$$d\big(f(x) - f(y), \mathbf{Im}(\{D_x f_i\})\big) \leq \sup_{z\in B_r(x)\cap X_6} d\big(f(x) - f(z), \mathbf{Im}(\{D_x f_i\})\big) + C_x \varepsilon_6 r.$$

By taking the sup on $B_r(x)$, by dividing each member of the inequality by r and by taking the lim sup in the inequality then we get by letting $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ and ε_6 go to 0 :

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \sup_{y\in B_r(x)} d\big(f(x) - f(y), \mathbf{Im}(\{D_x f_i\})\big) = 0.$$

So, μ-a.e $x \in X_6$ is a point of Cheeger-differentiability for f. Since the set $\bigcup_{\zeta>0} M_\zeta^c$ is a set of full measure in X, we get by letting k goes to $+\infty$ that μ-a.e. $x \in K_\gamma$ is a point of Cheeger-differentiability for f. By letting γ goes to 0, we get that f is Cheeger-differentiable μ-a.e. in Z_{ε_1}. By letting ε_1 goes to 0, we get that f is Cheeger-differentiable μ-a.e. in K_ε. By letting ε goes to 0, we get that f is Cheeger-differentiable μ-a.e. in A. Finally, since μ is a Radon measure, we get that f is Cheeger-differentiable μ-almost eveywhere.

The case $p = 1$:

Since the proof is very similar to the previous one, we only stress the arguments which change from one proof to another. Set now

$$M_\zeta = \{y \in X_4 | M(\mathrm{Lip})(f)(y) > \zeta\}.$$

By using the maximal inequality of Hardy-Littlewood (which is the lemma 11), we get that $\mu(M_\zeta^c \cap K_\gamma) > 0$ when $\gamma \ll 1$ and $\zeta \gg 1$. So, for $k \gg 1$, we have that $X_6 := M_\zeta^c \cap A_k$ is of positive μ-measure. Moreover, by using the Lebesgue differentiation Theorem (we recall that μ is doubling), we have for μ-a.e. $y \in X_6$ that :

$$\frac{1}{\mu(B_r(y))} \int_{B_r(y)\cap X_6^c} \mathrm{Lip}(f)(x) d\mu(x) \rightarrow_{r\rightarrow 0} 0.$$

So, by using Egorov Theorem, we get for every $\varepsilon_7 > 0$ a compact set $K_{\varepsilon_7} \subset X_6$ such that $\mu(K_{\varepsilon_7}^c \cap X_6) \leq \varepsilon_7$. Morover, since μ is doubling, for every $\varepsilon_8 > 0$, there is $r_8 > 0$ such that for every $y \in K_{\varepsilon_7}$ and for every $r \leq r_8$:

$$\frac{1}{\mu(B_r(y))} \int_{B_r(y)\cap X_6^c} \mathrm{Lip}(f)(x) d\mu(x) \leq \varepsilon_8.$$

Call now $X_7 := K_{\varepsilon_7}$ which is of positive μ-measure for $\varepsilon_7 \ll 1$. Take now x a point of density of X_7. So, for every $\varepsilon_9 > 0$, there is a real number $r_9 > 0$ such that for every $r \leq r_9$:

$$\mu(B_r(x) \cap X_7^c) \leq \varepsilon_9 \mu(B_r(x)).$$

Take now $r > 0$ sufficiently small. Take $y \in B_{\kappa r}(x) \cap X_7$ for some $\kappa \ll 1$. Call now for simplicity $B_j := B_{\frac{r}{2^j}}(y) \subset B_{2r}(x)$. Moreover, we impose for every $j \geq 0$ that $\lambda B_j \subset B_{2r}(x)$. Since X is a $(1,1)$ PI-space, by using an adaptation of the lemma 132, we get that $\mathrm{Lip}(l(f_i))$ is 1-upper gradient on average for $l(f_i)$. So, if we give a small bound on

$$\frac{1}{\mu(\lambda B_j)} \int_{\lambda B_j} \mathrm{Lip}(l(f_i))$$

then a chaining ball argument will lead to the Cheeger differentiability of f at the point x. More precisely, we have the following decomposition :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(\lambda B_j)} \int_{\lambda B_j} \mathrm{Lip}(l(f_i)) &= \frac{1}{\mu(\lambda B_j)} \int_{\lambda B_j \cap X_6^c} \mathrm{Lip}(l(f_i)) := \mathbf{i} \\
&+ \frac{1}{\mu(\lambda B_j)} \int_{\lambda B_j \cap X_6 \cap \theta_r} \mathrm{Lip}(l(f_i)) := \mathbf{ii} \\
&+ \frac{1}{\mu(\lambda B_j)} \int_{\lambda B_j \cap X_6 \cap \theta_r^c} \mathrm{Lip}(l(f_i)) := \mathbf{iii}.
\end{aligned}$$

By the uniformization procedure we have made above, we get

$$\mathbf{i} \leq \frac{1}{\mu(\lambda B_j)} \int_{\lambda B_j \cap X_6^c} \mathrm{Lip}(f) \leq \varepsilon_8.$$

Since $X_6 \cap \theta_r \subset Z_{\varepsilon_1} \cap \theta_r$, we get

$$\mathbf{ii} \leq L_\varepsilon \varepsilon_3.$$

By using the Lebesgue differentiation Theorem, we get for μ-a.e $y \in M_\zeta^c$ that

$$\mathrm{Lip}(f) \leq \zeta.$$

Since x is also a point of density of θ_r, by mimicking the estimate in the part above, we get for some $\delta \ll 1$:

$$\mathbf{iii} \leq \frac{1}{\mu(\lambda B_j)} \int_{\lambda B_j \cap X_6^c \cap \theta_r^c} \mathrm{Lip}(f) \leq C\zeta\varepsilon_2^\delta \beta^{j\delta}.$$

Finally, by using the Hahn-Banach Theorem and the definition of an inverse limit, we get for any $r \ll 1$ and by renaming ε_2 :

$$\sup_{y \in B_r(x) \cap X_7} d\big(f(x) - f(y), \mathbf{Im}(\{D_x f_i\})\big) \leq C_{x,\zeta,\varepsilon} r(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_8).$$

Since x is a point of density of X_7 then by using a straightforward adaptation of the lemma 139 (we recall that $X_7 \subset K_\gamma$), we get for $r \ll 1$ and by renaming ε_9 the following estimate :

$$\sup_{y \in B_r(x)} d\big(f(x) - f(y), \mathbf{Im}(\{D_x f_i\})\big) \leq C_{x,\zeta,\varepsilon} r(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_8 + \varepsilon_9).$$

By letting r goes to 0, we get that f is Cheeger-differentiable at the point x. So, f is Cheeger-differentiable μ-almost everywhere.

Remark : In fact, the Theorem 127 is purely local. Indeed, we can replace the previous hypotesis by a new one. We can suppose that -in fact- $\mathrm{Lip}(f) \in L^p_{loc.}(X, \mathbf{R}^+)$.

Corollary 140. *Let (X, d, μ) a $(1, p)$ PI-space with $p \geq 1$ and E a RNP Banach space endowed with the norm $||.||$. We suppose moreover that μ is a* ***complete****. If $f : X \to E$ is a measurable function such that $Lip(f)$ belongs to $L^p(X, \mathbf{R}^+)$ then f is Cheeger-differentiable μ-almost everywhere.*

Proof : Since, by using the Theorem of descriptive sets theory in [**CK4**], the weak differential of f lives in fact in E, we can adapt the proof of the Theorem 127. Indeed, instead of using the fact that E is a GFDA Banach space, we use the ANP of the RNP Banach space. With this remark, the proof is the same.

CHAPITRE 6

A counterexample on Δ summability

6.1. Introduction

Take a sequence $\{a_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ of complex numbers. We consider a family of non constant analytic functions $\{f_j\}_{j\in J}$ indexed by some subset J of $\mathbf{N}^*$. We suppose that each of these functions satisfy a difference equation. Moreover, we impose that all theses function vanish on 0 and that there is for every $j \in J$ an index $k_j \in \mathbf{N}$ such that $f^{(k_j)}(0) \neq 0$. We suppose that

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_j(a_k z) = 0$$

for every $j \in J$ and for every z in a neighbourhood of the origin. We show under the following summability condition

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k - a_{k+1}| < +\infty$$

on the sequence $\{a_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ that

$$\sum_{l=0}^{+\infty} a_l^{k_j} = 0$$

for every $j \in J$. We also show that the summability condition on the sequence $\{a_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ is sharp. We exhibit a counterexample when the sequence does not satisfy this summability condition.

In fact, the previous problem is related to the following functionnal equation. Take $f \in L^1(\mathbf{T}, \mathbf{C})$. Define by reccurence on $k \geq 1$ the following function $f^{\star 1} = f$ and $f^{\star k+1} = f^{\star k} \star f$. Call now for $k \in \mathbf{Z}$, $c_k(f)$ the k-th Fourier coefficients of f. Can we conclude that $f = 0$ a.e. under the assumption that for every $l \geq 1$:

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{|k|\leq N} (c_k(f))^l = 0.$$

This simple question is still open and we recall what is known. Indeed, consider $f \in L^{1+\varepsilon}(\mathbf{T}, \mathbf{R})$ for some $\varepsilon > 0$ such that for all $l \gg 1$:

$$f^{\star l}(0) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (c_k(f))^l = 0.$$

The previous equality is well defined since by Young's inequality and by regularity of the Lebesgue measure on $\mathbf{T}$, we get for l big enough that $f^{\star l} \in C^0(\mathbf{T}, \mathbf{R})$. Then by applying Parseval Theorem, we get that for $l \gg 1$:

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k(f)|^{2l} < +\infty.$$

So, we are led to consider the following well-known fact.

Theorem 141. *: Take an absolutely convergent sequence of complex numbers $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ such that*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^j = 0$$

for every $j \in \mathbf{N}^*$. Then, we have $a_k = 0$ for every k.

We want to prove the following generalization of the Theorem 141.

Theorem 142. *Consider $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ a sequence of complex numbers satisfying*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^l = 0$$

for every $l \in \mathbf{N}^*$ and satisfying the summability condition

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k - a_{k+1}| < +\infty$$

then $a_k = 0$ for every k.

Our Theorem is more general and implies the conclusion of the Theorem 141 because the summability condition imposed on $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ is much weaker. We prove an other generalization of the Theorem 142 by considering some kind of difference equations.

Proposition 143. *Consider a family of non constant analytic functions $\{f_j\}_{j\in J}$ indexed by some subset J of $\mathbf{N}^*$ and such that :*

i) for every $j \in J$: there is $k_j \in \mathbf{N}^*$ such that $f_j^{(k_j)}(0) \neq 0$ and $f_j(0) = 0$

ii) for every $j \in J$: $f_j(x-y) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_{k,j} f_1(x)^{\alpha_{k,1,j}} f_1(y)^{\beta_{k,1,j}} \dots f_j(x)^{\alpha_{k,j,j}} f_j(y)^{\beta_{k,j,j}}$

with $A_{k,j} \in \mathbf{C}$ and $\alpha_{k,i,j}, \beta_{k,i,j}$ are elements of $\mathbf{N}$ and $\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{j} |A_{k,j}|(\alpha_{k,i,j} + \beta_{k,i,j}) < +\infty$.

Take a sequence $\{a_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ of complex numbers satisfying

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k - a_{k+1}| < +\infty$$

and

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_j(a_k z) = 0$$

for every $j \in J$ and for every z in a neighbourhood of the origin (which may depend on j). Then, we have

$$\sum_{l=0}^{+\infty} a_l^{k_j} = 0$$

for every j.

We get by combining the proposition 143 and the Theorem 142 the following consequence.

Corollary 144. *Take a family $(f_j)_{j\in J}$ of non constant analytic functions and a sequence $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ satisfying the hypothesis of the proposition 143. Define $B_j = \{k \in \mathbf{N}^* \mid f_j^{(k)}(0) \neq 0\}$. We suppose that $\bigcup_{j\in J} B_j = \mathbf{N}^*$. Then, we have $a_k = 0$ for every k.*

In fact, the Theorem 142 is contained in the corollary 144. Indeed, we take $f_j(z) = z^j$ for j in $\mathbf{N}^*$. It is clear that $f_j(x-y)$ is polynomialy dependant in $f_1(x), f_1(y), \dots, f_j(x), f_j(y)$. The inequalities $f_j^{(j)}(0) \neq 0$ show that $\bigcup_{j\in J} B_j = \mathbf{N}^*$. Under the summability condition $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k - a_{k+1}| < +\infty$, we have $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^j = 0$ for every $j \in \mathbf{N}^*$. We get now that $a_k = 0$ for every k which is exactely the statement of the Theorem 142.

Moreover, the statement of the corollary 144 goes beyond the scope of polynomial functions. Indeed, take $f_1(z) = f_3(z) = \sin(z)$ and $f_2(z) = 1 - \cos(z)$. By trigonometric formulas, we have that

$$f_3(x-y) = f_1(x)(1 - f_2(y)) - f_1(y)(1 - f_2(x))$$

and

$$(1 - f_2(x-y)) = f_1(x)f_1(y) + (1 - f_2(x))(1 - f_2(y)).$$

The inequalities $f_1^{(2j+1)}(0) \neq 0$ and $f_2^{(2j)}(0) \neq 0$ show that hypothesis of the corollary 144 are fulfilled under the summablity condition on the sequence $(a_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ we have previously considered.

In the first part, we will prove several lemmas to deal with the corollary 144. The proof of the corollary 144 relies on the use of simple measure theoric tools such as the Egorov Theorem (stating that almost everywhere pointwise convergence on a finite Lebesgue measure set A is equivalent to uniform convergence in restriction on arbitrary big subset of A) and on convolution argument. We also use simple analytic tools such as Abel summation. We have mainly weakened the summability condition on the sequence $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$. In the second part, we exhibit a counterexample when this condition is not fulfilled. We finally show thanks to the remark made on Fourier series in the introduction that the sequence (a_k) cannot be the Fourier coefficients of any function belonging to $L^{1+\varepsilon}(\mathbf{T}, \mathbf{C})$ for some $\varepsilon > 0$.

6.2. Lemmas

Take a Lebesgue measurable set $A \subset \mathbf{C}$. We denote by $L^2(A)$ its (two dimensional) Lebesgue measure. We recall that if f and g are $L^1_{loc.}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ then the convolution of f and g : $f \star g$ is defined almost everywhere (say a.e. in short) by $f \star g(x) = \int_{\mathbf{C}} f(y)g(x-y)dL^2(y)$ where dL^2 is the Lebesgue measure on $\mathbf{C}$.

Lemma 145. *: If $A \subset \mathbf{C}$ is a Lebesgue measurable set such that $|A| > 0$ then $A - A$ contains a neighbourhood of 0.*

Proof : By the regularity of the Lebesgue measure, there is a compact set $K \subset A$ such that $L^2(K) > 0$. Define now $f = \chi_K \star \chi_{-K}$. By standard approximation result, f is continuous and by definition of the convolution, $f(0) = \int_{\mathbf{C}} \chi_K^2 = L^2(K) > 0$. Thus, by continuity of f, $K - K$ contains a neighbourhood of 0 and so $A - A$.

Lemma 146. *Consider a family of non constant analytic functions $\{f_j\}_{j\in J}$ indexed by some subset J of $\mathbf{N}^*$ and such that :*

i) for every $j \in J$: there is $k_j \in \mathbf{N}^*$ such that $f_j^{(k_j)}(0) \neq 0$ and $f_j(0) = 0$

ii) for every $j \in J$: $f_j(x-y) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_{k,j} f_1(x)^{\alpha_{k,1,j}} f_1(y)^{\beta_{k,1,j}} \dots f_j(x)^{\alpha_{k,j,j}} f_j(y)^{\beta_{k,j,j}}$

with $A_{k,j} \in \mathbf{C}$ and $\alpha_{k,i,j}, \beta_{k,i,j}$ are elements of $\mathbf{N}$ and $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{j} |A_{k,j}|(\alpha_{k,i,j} + \beta_{k,i,j}) < +\infty$.

Take a sequence $\{a_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ of complex numbers satisfying

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k - a_{k+1}| < +\infty$$

and

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_j(a_k z) = 0$$

for every $j \in J$ and for every z in a neighbourhood of the origin (which may depend on j). Then, we have

$$\sum_{l=0}^{+\infty} a_l^{k_j} = 0$$

for every j.

Proof : Take j fixed. Then, we can always suppose that for every k, there is an index i_k such that $\alpha_{k,i_k,j}$ or $\beta_{k,i_k,j}$ are greater or equal than 1. Indeed, because of the condition $f_i(0) = 0$ satisfied when $i \leq j$, we have that

$$\sum_{k \ | \ \forall i \leq j \ : \ \alpha_{i,k} = \beta_{i,k} = 0} A_{k,j} = 0.$$

By assumption, there exists a neighbourhood A_i of 0 such that $\sum_{k=0}^{+\infty} f_i(a_k z) = 0$ for every z in A_i. We can always suppose that A_i contains a common disc $D_j = D(0, r_j)$ for every $i \leq j$. By reducing again the radius of D_j and by renaming this new disc D_j, we can also suppose that $|f_i(z)| \leq 1$ and $|f_i'(z)| \leq 1$ (because of the condition $f_i(0) = 0$) for every $i \leq j$. By reducing again the radius of D_j and by renaming again this new disc D_j, we can also suppose that $a_k z$ belongs to D_j for every z in D_j and for every k. Indeed, the sequence a_k is bounded. More precisely, the sequence a_k tends to 0 when k goes to $+\infty$. Indeed, we have $|a_{N+k} - a_N| \leq \sum_{l \geq N}^{+\infty} |a_l - a_{l+1}|$. So a_k converges to $l \in \mathbf{C}$. Suppose that $l \neq 0$ then, by continuity of f_1 for instance, we have for every z in a neighbourhood of 0 that $f_1(lz) = 0$. By the zeros principle, we get that $f_1 = 0$. This is a contradiction and $l = 0$. Define now for $z \in D_j$ the function $g_{N,i}(z) := \sum_{k=0}^{N} f_i(a_k z)$. By assumption, we have $\lim_{N\to+\infty} g_{N,i}(z) = 0$ for every $i \leq j$ and for every $z \in D_j$. Thus, by applying the Egorov Theorem, we get a set $K_i \subset D_j$ for every $i \leq j$ such that $|\bigcap_{i\leq j} K_i| > 0$ and $g_{N,i}$ uniformly converges in restriction to K_i to 0. Let us define $\mathbf{K_j} := \bigcap_{i\leq j} K_i$. Then, by applying the lemma 145, we get that $\mathbf{K_j} - \mathbf{K_j}$ contains a neighbourhood of 0 and contains a small disc $D = D(0, 2r)$. We can suppose moreover that $D \subset D_j$. It remains to show that $g_{N,j}$ uniformly converges in every compact of D to 0. Fix now $\varepsilon > 0$. Take x and y in $\mathbf{K_j}$ and take two integers N, N' with $N' > N$ such that

$$B_{j,N} = \sup_{i\leq j} \sup_{z\in\mathbf{K_j}} |g_{N,i}(z)| \leq \varepsilon.$$

Just notice that if N is large enough, we also have that $B_{j,N'} \leq \varepsilon$ (by definition of $\mathbf{K_j}$). By assumption, we have

$$\begin{aligned} g_{N',j}(x-y) - g_{N,j}(x-y) &= \sum_{k=N+1}^{N'} f_j(a_k(x-y)) \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} A_{l,j} \sum_{k=N+1}^{N'} f_1(a_k x)^{\alpha_{l,1,j}} f_1(a_k y)^{\beta_{l,1,j}} \dots f_j(a_k x)^{\alpha_{l,j,j}} f_j(a_k y)^{\beta_{l,j,j}}. \end{aligned}$$

Take now l fixed and define

$$S^l_{N,N',j}(x,y) = \sum_{k=N+1}^{N'} f_1(a_k x)^{\alpha_{l,1,j}} f_1(a_k y)^{\beta_{l,1,j}} \dots f_j(a_k x)^{\alpha_{l,j,j}} f_j(a_k y)^{\beta_{l,j,j}}.$$

We have two possibilities. First case, only one exponent $\alpha_{l,i,j}$ or $\beta_{l,i,j}$ is equal to 1, the other are equal to 0. Thus by the definition of $B_{j,N}$, we have that

$$|S^l_{N,N',j}(x,y)| \leq 2\varepsilon.$$

For the second case, there is an exponent $\alpha_{l,i,j}$ or $\beta_{l,i,j}$ greater or equal to 2. By renaming the exponent, we can say that $\alpha_{l,1,j} \geq 2$. Next, we proceed to an Abel summation. Thus, we have

$$\begin{aligned} S^l_{N,N',j}(x,y) = \;& -g_{N,i}(x) f_1(a_{N+1}x)^{\alpha_{l,1,j}-1} \dots f_j(a_{N+1}y)^{\beta_{l,j,j}} \\ &+ \sum_{k=N+1}^{N'-1} g_{k,i}(x)(f_1(a_k x)^{\alpha_{l,1,j}-1} \dots f_j(a_k y)^{\beta_{l,j,j}} - f_1(a_{k+1}x)^{\alpha_{l,1,j}-1} \dots f_j(a_{k+1}y)^{\beta_{l,j,j}}) \\ &+ g_{N',i}(x) f_1(a_{N'}x)^{\alpha_{l,1,j}-1} \dots f_j(a_{N'}y)^{\beta_{l,j,j}}. \end{aligned}$$

By using the mean value Theorem and thanks to the fact that x and y belong -in particular- to D_j, we have the following

$$|f_1(a_k x)^{\alpha_{l,1,j}-1} \dots f_j(a_k y)^{\beta_{l,j,j}} - f_1(a_{k+1}x)^{\alpha_{l,1,j}-1} \dots f_j(a_{k+1}y)^{\beta_{l,j,j}}| \leq |a_k - a_{k+1}| \sum_{i=1}^{j} (\alpha_{l,i,j} + \beta_{l,i,j}).$$

Thus, we have the bound

$$|S^l_{N,N',j}(x,y)| \leq (2 + \sum_{k=N+1}^{N'-1} |a_k - a_{k+1}| \sum_{i=1}^{j} (\alpha_{l,i,j} + \beta_{l,i,j}))\varepsilon.$$

So, because $\sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{j} |A_{l,j}|(\alpha_{l,i,j} + \beta_{l,i,j}) < +\infty$ and $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k - a_{k+1}| < +\infty$, we have for all x,y in $\mathbf{K_j}$ that

$$|g_{N',j}(x-y) - g_{N,j}(x-y)| \leq C\varepsilon$$

with C a fixed constant. Thus, $g_{N,j}$ uniformly converges in every compact of D to 0 (recall that $D \subset D_j$). Consider now the following integral

$$I_{N,j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_{N,j}(re^{i\theta}) \exp(-ik_j\theta) d\theta.$$

By dominated convergence, we have that $\lim_{N\to+\infty} I_{N,j} = 0$. Moreover, by expanding f_j in Taylor series at the point 0 and by inverting the order of summation (the inversion is legal because f_j is analytic), we get that

$$I_{N,j} = r^{k_j} \frac{f_j^{(k_j)}(0)}{j!} \sum_{l=0}^{N} a_l^{k_j}.$$

Recall that $f_j^{(k_j)}(0) \neq 0$. So, by letting N goes to $+\infty$, we get the desired conclusion.

6.3. Proof of the main Theorem

We want to get an analogous of the Theorem 141 on a weaker condition on the sequence $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$. More precisely, we have the following.

Theorem 147. *Consider $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ a sequence of complex such that $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^l = 0$ for every $l \in \mathbf{N}^*$. We impose the summability condition*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k - a_{k+1}| < +\infty$$

. Then $a_k = 0$ for every k.

Proof : We argue by contradiction and we suppose that there is an index k_0 such that $a_{k_0} \neq 0$. Up to rescaling the sequence (a_k) by $\sup_{k\in\mathbf{N}} |a_k|$, we can suppose that $|a_k| \leq 1$ for every k. Define

$$S_{l,N} = \sup_{n\geq N} |\sum_{k=n}^{+\infty} a_k^l|.$$

By an Abel summation, we have that

$$|\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k^{l+1}| \leq S_{l,N}(|a_N| + \sum_{k=N+1}^{+\infty} |a_k - a_{k+1}|).$$

Since a_k tends to 0 and $|a_k - a_{k+1}|$ is summable, there is a rank N_0 such that

$$|\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k^{l+1}| \leq \frac{1}{2} S_{l,N}$$

for every $N \geq N_0$. So, we have in particular that

$$S_{l+1,N_0} \leq \frac{1}{2} S_{l,N_0}.$$

By a straightforward recurrence, we get

$$S_{l,N_0} \leq C(\frac{1}{2})^l$$

with C a fixed constant. Consider now the set $A = \{k \leq N_0 \mid |a_k| = 1\}$. We can notice that A is non empty and there exists θ in $\mathbf{R}$ such that $a_{k_j} = \exp(i\theta)$ for every j in $1, \ldots, m$ with k_j in A (we can also notice that $m \geq 1$). Take a polynomial P with complex coefficients such that $P(a_{k_j}) = 1$ if j is in $1, \ldots, m$ and $P(a_k) = 0$ if k is in $[|0, N_0|] \cap \{k_1, \ldots, k_m\}^c$. By assumption, we have that for every $l \in \mathbf{N}^*$

$$|\sum_{k=0}^{N_0} a_k^l P(a_k)| = |\sum_{k=N_0+1}^{+\infty} a_k^{l+1} P(a_k)| \leq C(\frac{1}{2})^l$$

with C a constant depending only on the coefficients of P. Moreover, we have :

$$|\sum_{k=0}^{N_0} a_k^l P(a_k)| = m.$$

So, by letting l goes to $+\infty$, we derive a contradiction.

A more careful examination of the proof shows that we just really need that $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^l = 0$ for all $l \geq l_0 \geq 1$. Of course, we must keep the summability condition satisfied by the sequence (a_k).

We can now prove the result announced in the abstract.

Corollary 148. *Take a family $(f_j)_{j\in J}$ of analytic functions and a sequence $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ satisfying the hypothesis of the lemma 146. Define $B_j = \{k \in \mathbf{N}^* \mid f_j^{(k)}(0) \neq 0\}$. We suppose that $\bigcup_{j\in J} B_j = \mathbf{N}^*$. Then, we have that $a_k = 0$ for every k.*

Proof : By applying the lemma 146 and since $\bigcup_{j\in J} B_j = \mathbf{N}^*$, we get that $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^l = 0$ for every l in $\mathbf{N}^*$. By applying the Theorem 147, we recover the desired conclusion.

There is an another interesting corollary of the Theorem 147.

Corollary 149. *Take a countable family of analytic function $(f_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ such that*

i) $\overline{Span(f_i)_{i\in\mathbf{N}^*}} = H(\mathbf{C})$

(the equality has to be taken in the sense of the uniform convergence on every compact set)

and ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k f_i(a_k) = 0 \ \forall i \in \mathbf{N}^*$

with a sequence of complex numbers $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ such that **a**) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k - a_{k+1}| < +\infty$

and **b**) *there is $M > 0$* $\displaystyle|\sum_{k=0}^{N} a_k| \leq M$ *for every N.*

Then, we have that $a_k = 0$ for all k.

We can make two remarks.

The first one deals with the point **b**) which seems at first glance a bit artificial. But, in order to apply the Theorem 147, it is necessary to show that $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^l$ is well defined for all $l \geq 2$. The condition **b**) and the summmability condition satisfied by the sequence (a_k) ensure the previous property by a simple Abel summation.

The second remark is about the following fact. If we have a family of analytic functions $(f_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ satisfying $f_i(0) = 0$ for all i and such that $\overline{\mathrm{Span}(f_i)_{i\in\mathbf{N}^*}}$ is dense -for the topology of the uniform convergence on every compact set- in the set of analytic functions that vanish on 0 then the family $\phi_i : z \to \frac{f_i(z)}{z}$ of analytic function is such that $\overline{\mathrm{Span}(\phi_i)_{i\in\mathbf{N}^*}} = H(\mathbf{C})$. Indeed, take $l \in \mathbf{N}^*$ and $r > 0$ fixed. By assumption, for every $\varepsilon > 0$, there is a finite set I_ε and coefficients λ_i such that

$$\sup_{z\in D(0,r)} |\sum_{i\in I_\varepsilon} \lambda_i f_i(z) - z^{l+1}| \leq \varepsilon.$$

Thanks to the maximum principle, we have that

$$\sup_{z\in D(0,r)} |\sum_{i\in I_\varepsilon} \lambda_i f_i(z) - z^{l+1}| = r \sup_{z\in D(0,r)} |\sum_{i\in I_\varepsilon} \lambda_i \phi_i(z) - z^{l}|.$$

By applying the Stone-Weierstrass Theorem, the remark is now proved.

Proof :

First of all, by the condition ii), (a_k) tends to 0 when k goes to $+\infty$. Indeed, by the summability condition satified by the sequence (a_k), we have that (a_k) is a Cauchy sequence and converges to $l \in \mathbf{C}$. By the condition ii), we have that $l f_i(l) = 0$ for all $i \in \mathbf{N}^*$. We argue by contradiction by supposing that $l \neq 0$. Hence, we get $f_i(l) = 0$ for every i. Thus, by the condition i), we have -for instance- that $|l - \sum_{i\in I_\varepsilon} \lambda_i f_i(l)| \leq \varepsilon$. Thus, $|l| \leq \varepsilon$ for every ε. This is a contradiction. Since (a_k) is bounded, we can suppose (just for simplicity) that for all $k : |a_k| \leq 1$. Moreover, by the condition **b**), we have supposed that there is $M > 0$ such that

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} a_k$$

is bounded by M for every N. Take now $\varepsilon > 0$ and $l \geq 1$. By the condition i), we get a finite linear combination of f_i such that

$$\sup_{z\in D(0,2)} |\sum_{i\in I_\varepsilon} \lambda_i f_i(z) - z^{l}| \leq \varepsilon.$$

By the first remark we have made and by the condition ii), we define a new finite quantity S_ε by

$$S_\varepsilon = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i\in I_\varepsilon} a_k f_i(a_k) - a_k^{l+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\sum_{i\in I_\varepsilon} f_i(a_k) - a_k^{l}).$$

In one hand, thanks to the condition ii), we have that $|S_\varepsilon| = |\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^{l+1}|$. By using the Cauchy formula, we get that

$$\sup_{z\in D(0,1)} |\sum_{i\in I_\varepsilon} \lambda_i f_i'(z) - l z^{l-1}| \leq C\varepsilon.$$

On the other hand, by an Abel summation and by using the mean value Theorem, we get that

$$|S_\varepsilon| \leq CM\varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k - a_{k+1}|.$$

By letting ε goes to 0, we get that $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^l = 0$ for all $l \geq 2$. Thus, by applying the Theorem 147, we recover that $a_k = 0$ for all k.

Remark : Consider two sequences a_k and b_k of complex numbers such that $a_k \neq 0$ and $b_k \neq 0$ for all k. Moreover, we suppose that $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k - a_{k+1}| < +\infty$ and $\sum_{k=0}^{+\infty} |b_k - b_{k+1}| < +\infty$. If

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^l = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k^l$$

for every l in $\mathbf{N}^*$ then, by a straightforward adaptation of the previous argument, we have that the sequence a_k is a permutation of the sequence b_k.

6.4. Contruction of a counterexample

This section is devoted to the construction of a sequence (a_k) (built recursively) which satisfies $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^l = 0$ for every $l \geq 2$ and which is not the null sequence. We can notice that if we want a sequence (b_k) such that $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k^l = 0$ for every $l \geq 1$, we can take b_k to be $b_k = a_k^2$. The only relevant fact is to get a relation of the type $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k^l = 0$ for every l belonging to a neighbourhood of the infinity. To build such a sequence, we consider roots of unity that are highly repeated and modify their moduli by multiplying them by a sequence which must tend to 0. More precisely, for every $k \geq 1$, we consider

$$a_{n+\sum_{l=0}^{k-1} L_l} = c_k \exp(i\frac{2\pi n}{k})$$

for $n = 0 \ldots L_k$ where c_k is a suitable positive sequence which tends to 0 and the multiplicities L_k are multiple of k have to be chosen later by recurrence (the choice of $c_1 > 0$ and $L_1 > 0$ are free). Suppose at first that $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^l$ is well defined for every l in $\mathbf{N}^*$. If we want that $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^l = 0$ for every $l \geq 2$ then, it gives us the following conditions

$$\sum_{k|l} c_k^l k L_k = 0$$

for every $l \geq 2$. Take now (c_l) satisfying the following relation

$$c_l^l = -\frac{1}{lL_l} \sum_{k|l, k\neq l} c_k^l k L_k.$$

We can construct by recurrence the multiplicity L_k and the sequence $(c_k)_{k\in\mathbf{N}}$. Moreover, we can show a posteriori that the quantities $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^l$ are well defined and are equal- in fact- to 0. Indeed, when the multiplicities and the first terms of the sequence are chosen, the previous relation gives us by choosing L_l very large that the sequence c_l tends quite enough faster to 0. This last condition ensures that $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^l$ is well defined for every $l \geq 2$. Moreover, it is clear that $a_k \neq 0$ for every k (because we have chosen the first terms of the sequence to be different from 0). Hence, the construction of our counterexample is now established.

Remark : With a further more involved analysis, we can show that the sequence (a_k) satisifies a good estimate in the following sense. There exist two constants C and A such that

$$|\sum_{k=0}^{N} a_k^n| \leq CA^n$$

for every N and n. This last estimate allows us to show that for every analytic functions f which vanishes at the point 0 that

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f(a_k) = 0.$$

6.5. Further generalization

We can notice that if the neighbourhood of 0 where the series are simply convergent is uniform in j then we may allow a more general relation between $f_j(x-y)$ and all the functions $f_i(x)$ and $f_i(y)$. For example, the function $f_j(x-y)$ may be a infinite sum of finite product of the functions $f_i(x)$ and $f_i(y)$ (we are allowed in this setting to consider all the index i, we do not restrict ourselves to take only index i such that $i \leq j$).

If we denote by Δ the difference operator which acts naturally on the vector space of all the sequences $a = (a_k)$ by $(\Delta(a))_k = a_{k+1} - a_k$. It is natural to wonder if the conclusion of the Theorem 147 is still true if we suppose that we have a sequence $a = (a_k)$ such that $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^l = 0$ for every l in $\mathbf{N}^*$ and which enjoy the property that there is an exponent n_0 such that $\sum_{k=0}^{+\infty} |(\Delta^{n_0}(a))_k| < +\infty$. The case $n_0 = 0$ and $n_0 = 1$ is already solved but the other cases seem to be much harder to prove. Indeed, our method does not work anymore in this setting because we must have a control on the remainder of the series $\sum_{k=N}^{+\infty} a_k^l$ for every l. This question is of great interest because if it is true, it allows us to give -by our previous counterexample- a sequence $a = (a_k)$ which is not the null sequence but that satisfies $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^l = 0$ for every l in $\mathbf{N}^*$ and that does not satisfy $\sum_{k=0}^{+\infty} |(\Delta^l(a))_k| < +\infty$ for any l.

Bibliographie

[AC] A. Alberico, A. Cianchi *Differentiability properties of Orlicz-Sobolev function*, *Ark. Mat.*, 43 (2005), 1-28.

[AK] L. Ambrosio, B. Kirchheim *Rectifiable sets in metric and Banach spaces*, *Mathematische Annalen*, Volume 318, Number 3, 527-555.

[As] P. Assouad *Plongement lipschitziens dans $\mathbf{R}^n$*, *Bulletin de la S.M.F*, tome 111 (1983), 429-448.

[BP1] M. Bourdon, H. Pajot *Poincaré inequalities and quasiconformal structure on the boundary of some hyperbolic buildings*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(8) :2315-2324, 1999.

[BP2] M. Bourdon, H. Pajot *Cohomologie lp et espaces de Besov*, *J. Reine Angew. Math.*, 558 (2003), 85-108.

[BoBrMi] J. Bourgain, H. Brezis, P. Mironescu *Limiting embeddings theorems for $W^{s,p}$ when $s \uparrow 1$ and applications*, *J. Anal Math.*, 87 (2002), 77-101.

[Br1] H. Brézis *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*, *Mathématiques appliquées pour le Master.*

[Br2] H. Brezis *How to recognize constant functions ? Connections with Sobolev spaces*, *UMN*, 57 :4(346) (2002), 59-74.

[BRZ] Z. Balogh, K. Rogovin, T. Zurcher *The Stepanov differentiability theorem in metric measure spaces*, *The Journal of Geom. Anal.*, Volume 14, Number 3, 2004.

[Che] J. Cheeger *Differentiablity of Lipschitz functions on metric measure spaces*, *Geom. Func. Anal.*, 9(3) :428-517, 1999.

[CK1] J. Cheeger, B. Kleiner *Differentiablity of Lipschitz functions from metric measure spaces to Banach spaces*, *Nankai Tracts Math.*, 11 (2006), 129-152.

[CK2] J. Cheeger, B. Kleiner *Generalized differentiation and bi-lipschitz nonembedding in L^1*, *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343 (2006), No. 5, 297-301.

[CK3] J. Cheeger, B. Kleiner *Characterizations of the Radon-Nykodim property in terms of inverse limits*, *Astérisque*, No. 321 (2008), 129-138.

[CK4] J. Cheeger, B. Kleiner *Differentiability of lipschitz maps from metric measure spaces to Banach spaces with the Radon-Nikodym property*, *Geom. Funct. Anal.*, 19 (2009), No. 4, 1017-1028.

[CQ] D. Choimet, H. Queffélec *Analyse mathématique : grands théorèmes du vingtième siècle*, *Tableau Noir-Calvage et Mounet.*

[EvGa] L.C. Evans, R. F. Gariepy *Measure theory and fine properties of functions*, *Studies in Advanced Mathematics*, CRC Press (1992).

[Fu] B. Fuglede *Extremal length and functional completion*, *Acta Math*, 98 , 171-218 (1957).

[Fre] G. Freud *Uber trigonometrische Approximation und Fouriersche Reihen*, *Math. Z.*, 78 (1962), 252-262.

[GKS] J. Garnett, R. Kilipp, R. Schuul *A doubling measure on $\mathbf{R}^n$ can charge a rectifiable curve*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, No5 (2010), 1673-1679.

[HK] P. Hajlasz, P. Koskela *Sobolev met Poincaré*, Memoirs AMS 145 – 2000-No.688 – 101.

[Hei] J. Heïnonen *Lectures on analysis on metric spaces*, *Universitext*, Springer-Verlag.

[HeiK] J. Heïnonen, P. Koskela *Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry*, *Acta Math.*, 181 (1998), 1-61.

[HKST] J. Heïnonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam, J. Tyson *Sobolev classes of Banach space-valued functions*, *J. Anal. Math.*, 85 (2001), 87-139.

[Ig] R. Ignat *On an open problem about how to recognize constant*, *Houston Journal of Mathematics.*

[K] S. Keith *A differential structure for metric measure spaces*, *Adv. Math.*, 183 (2004), 271-315.

[KZ] S. Keith, X. Zhong *The Poincaré's inequality is an open ended condition*, *Ann. of Math.*, (2) 167 (2008), 575-599.

[Kl] B. Kleiner *A new proof of Gromov's theorem on groups of polynomial growth*, *J. Amer. Math. Soc.*, 23 (2010), 815-829.

[La] T. J. Laakso *Ahlfors Q-regular spaces with arbitrary $Q > 1$ admitting weak Poincaré inequality*, *Geom. Funct. Anal.*, 10(1) :111-123, 2000.

[LT] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri *Classical Banach spaces I*, Springer-Verlag, 1977.

[LN] Lee J.R., Naor A. *Extending lipschitz functions via random metic partition* , *Inventiones Math.*, 160. 59-95 (2005).

[Ma] J. Maly *A Simple Proof of the Stepanov Theorem of Differentiability Almost Everywhere*, *Expo. Math.*, 17 (1999), 059-062.

[Mo] R. Monti *Rearrangements in metric spaces and in the Heisenberg group* (2010).

[Pa1] P. Pansu *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un*, *Annals of Mathematics*, 129 (1986), 1-60.

[Pa2] P. Pansu *Plongements quasiisométriques du groupe de Heisenberg dans Lp, d'après Cheeger, Kleiner, Lee, Naor*, *Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble)*, 25 (2006-2007), 159-176.

[Sh] N. Shanmugalingam *Newtonian spaces : an extension of Sobolev spaces to metric spaces*, *Rev. Mat. Iberoamericana*, 16(2), 234-279 (2000).

[St] E. M. Stein *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, 1970.

[Zi] W. P. Ziemer *Weakly differentiable functions*, Volume 120 of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag.

Résumé

Nous prouvons essentiellement, à partir du formalisme adopté dans [**Che**] et [**CK1**], un théorème de différentiation de type Calderón pour les applications des espaces de Hajlasz fondés sur des espaces métriques PI et à valeurs dans des espaces de Banach RNP. Grâce à toutes les techniques developpées pour le théorème précédent, nous pouvons -par la suite- affaiblir la condition d'appartenance à un espace de Hajlasz surcritique (par rapport à la dimension homogène de l'espace métrique ambiant) en une condition d'intégrabilité sur la constante de Lipschitz ponctuelle supérieure. Nous montrons que ces théorèmes de différentiation entrent en jeu naturellement pour caractériser les espaces de Hajlasz fondés sur des espaces métriques PI. Ceci débouche sur des critères intégraux, dans la veine de [**Br2**], pour reconnaitre si des applications mesurables sont constantes ou non dans les espaces métriques PI. Enfin, nous discutons certains types d'inégalités de Poincaré locales et dépendant du centre et du rayon des boules. Dans ce cadre affaibli, l'analyse menée précedemment est tout à fait possible mais sous des conditions topologiques et géométriques supplémentaires sur l'espace métrique ambiant.

Keywords :

Doubling measure, Ahlfors-regular measure, Sobolev spaces, Hajlasz spaces, Shanmugalingam spaces, Poincaré inequalities, Cheeger-differentiability, RNP Banach spaces, Norming sequences, ANP, Lipschitz functions

Classification mathématique :

26E20, **28A80**, **30L99**