La périodicité dans les enseignements scientifiques en France et au Vietnam : une ingénierie didactique d'introduction aux fonctions périodiques par la modélisation

Nga Nguyen Thi

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

UNIVERSITE DE PEDAGOGIE DE HO CHI MINH VILLE

THÈSE EN COTUTELLE

Pour obtenir les grades de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

DOCTEUR DU VIETNAM

Spécialité : **Ingénierie de la Cognition, de l'interaction, de l'Apprentissage et de la création**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Nga NGUYỄN THỊ

Thèse dirigée par **Muriel NEY** et
codirigée par **Alain BIREBENT et Tiến LÊ VĂN**

préparée au sein du **Laboratoire d'Informatique de Grenoble**
dans **l'École Doctorale Ingénierie pour la Santé, la Cognition et l'Environnement**

La périodicité dans les enseignements scientifiques en France et au Viêt Nam : une ingénierie didactique d'introduction aux fonctions périodiques par la modélisation

Thèse soutenue publiquement le **1er Septembre 2011**,
devant le jury composé de :

M. Alain BIREBENT
Professeur agrégé, Université Pierre Mendès-France, Co-diresteur de thèse
Mme Hoài Châu LÊ THỊ
Professeur associé, Université Culturelle, Artistique et Touristique de Sai Gon, Examinatrice
M. Tiến LÊ VĂN
Professeur associé, National Collège d'éducation de Ho Chi Minh Ville, Co-directeur de thèse
Mme Muriel NEY
Chargée de recherche, Laboratoire d'informatique de Grenoble, Directeur de thèse
M. Chí Thành NGUYỄN
Enseignant-Chercheur, Université de l'Education, Université Nationale du Viêt Nam à Ha Noi, Rapporteur
Mme Maggy SCHNEIDER-GILOT
Professeur des universités, Université de Liège, Rapporteur
M. Luc TROUCHE
Professeur des universités, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Président
Mme Annie BESSOT
Collaborateur bénévole, Université Joseph Fourier, Invitée

Abstract

Title: The periodicity in teaching science in France and Vietnam: a didactical engineering for an introduction to periodic functions by modeling

The focus of the study is mathematical modeling of periodic phenomena in secondary education, particularly that of temporal periodic phenomena.

The study starts from an observation by comparing the French and Vietnamese secondary education: either they avoid the teaching of mathematical modeling in designing the relationship of mathematics to other scientific disciplines as an applicable connection (Vietnam) or they advocate the consideration of mathematical modeling without empower mathematics teachers to teach it (France).

The periodicity is the central concept in the modeling process of cyclical and oscillatory phenomena. In the scientific genesis of this concept, the periodic functions especially trigonometric functions, was established gradually as models of variable quantities which return regularly and indefinitely in the same state over time.

From an epistemological investigation of the temporal periodic phenomena studied by physics, we identify two mathematical models, C (uniform circular movement) and O (harmonic oscillations) with their different registers, graphic and algebraic. Institutional analysis examines and compares the presence of these two models in secondary education of mathematics and physics in France and Vietnam. This analysis shows the weakness of the articulation between these two models and the absence of technique to make the transition from one model to another which is one of the stakes of modeling itself.

The experimental way consists of a questionnaire to Vietnamese pupils and a didactical engineering that organizes in a dynamic geometrical environment by articulating both models C and O, for the construction of periodic functions as models of phenomena of periodic co-variations.

Keywords: periodicity and periodic function, modeling, dynamic geometry

A la mémoire de mon père

REMERCIEMENTS

Voilà, mes 3 ans de thèse s'achèvent avec plein de souvenirs …

Mes remerciements les plus vifs s'adressent à mes directeurs de thèse sans lesquels ce travail n'aurait pas abouti. Je remercie tout particulièrement Alain Birebent pour son encadrement, ses multiples idées, la disponibilité qu'il a eue pour moi. Merci également à Muriel Ney, tant pour ses conseils et encouragements que pour les fructueuses discussions scientifiques que nous avons eues ensemble. Je remercie chaleureusement Lê Văn Tiến qui m'a apporté de précieux conseils pour les expérimentations au Việt Nam et qui m'a aidée à perfectionner les traductions en vietnamien.

J'ai bénéficié en France d'une direction scientifique collégiale à laquelle Claude Comiti et Annie Bessot ont participé activement. Je souhaite leur dire ma très grande reconnaissance pour leur enthousiasme et leur disponibilité durant les trois années de ma thèse, pour toutes leurs idées et leur aide à la rédaction du manuscrit en français.

J'exprime ma profonde gratitude à Lê Thị Hoài Châu, Nguyễn Chí Thành, Maggy Schneider-Gilot et Luc Trouche pour avoir accepté d'être membres de mon jury et notamment aux rapporteurs Maggy Schneider-Gilot et Nguyễn Chí Thành pour leurs commentaires constructifs sur le manuscrit.

Mon projet de thèse s'est inscrit dans la réalisation du projet MIRA « Modélisation mathématique de phénomènes variables dans l'enseignement à l'aide de la géométrie dynamique ». J'ai donc eu la chance et le plaisir de collaborer avec de nombreuses personnes engagées dans ce projet MIRA que je tiens à remercier ici : Sophie Soury-Lavergne – responsable française de ce projet franco-vietnamien, Colette Laborde, Bernard Genevès, Lê Thị Hoài Châu et Lê Thái Bảo Thiên Trung. Je remercie également la société CABRILOG qui m'a fourni le logiciel Cabri II Plus pour effectuer mes expérimentations en France et au Việt Nam.

Je souhaite ici remercier tous les membres des équipes DIAM et MeTAH du laboratoire LIG pour la chaleureuse ambiance de travail et pour l'aide que chacun a toujours été prêt à m'accorder. Je pense en particulier à Sophie, Colette, Jean-François, Zilora, Joris, Bernard, Hương, Celso, Claire, José-Louis, Henry, Jacky, Hamid, Marie-Caroline et Péricles.

J'ai reçu une aide précieuse de collègues physiciens en France – Claire Wajeman, Jean-Claude Guillaud et Daniel Lacroix. Merci aussi aux professeurs vietnamiens qui ont gentiment accepté de répondre à mes questions, parfois naives – Nguyen Tran Trac et Tran Van Hao.

Je remercie vivement les élèves français - Ana, Cicera, Marine, Margherita - et les élèves vietnamiens du lycée Trường Chinh de Ho Chi Minh ville pour avoir accepté de participer à l'expérimentation de l'ingénierie didactique. Je n'oublie pas pour autant les élèves des lycées Nguyễn Chí Thanh et Nguyễn Hữu Cầu de Ho Chi Minh ville qui ont répondu avec attention au questionnaire qui leur a été présenté.

J'adresse mes remerciements à mes collèges du département de mathématique et informatique de l'Université de Pédagogie de Ho Chi Minh ville. Merci à Hương, Trung, Dũng pour leurs soutiens dans l'organisation des expérimentations au Việt Nam.

Je garde un souvenir reconnaissant pour mes amies qui m'ont apporté de bons moments en France quand j'étais loin de ma famille. Je pense particulièrement à Ngọc, Hương, Phước, Báu, Serge, Bernadette, Emile, Thanh Hương, Raquel, la famille de monsieur Đức et de madame Sơn.

Je tiens à remercier l'Agence Universitaire de la Francophonie (AUF) par m'avoir fait bénéficier d'une bourse d'étude qui m'a aidée financièrement à réaliser cette thèse.

J'exprime ma plus profonde gratitude à ma mère, à mes beaux parents et à toute ma famille, pour m'avoir encouragée et soutenue moralement dans mon projet de thèse et durant les années passées à le réaliser. Sans leur aide, ce projet n'aurait pas pu aboutir. Je leur serai toujours redevable de tous les efforts qu'ils ont fournis à mon égard.

Enfin, un immense merci à mon mari, Duy Trọng, et à ma fille, Minh Ngọc, qui ont été soumis à rude épreuve pendant ces trois années et qui ont supporté avec patience ces longs moments d'absence.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Les mathématiques et les autres disciplines scientifiques, en particulier la physique, entretiennent des relations existentielles au sens où elles se nourrissent les unes des autres, comme le souligne le rapport de la commission Kahane (2000) :

> Le lien entre mathématiques et applications est fait d'allers et retours nombreux, les mathématiques se nourrissant des problèmes venant des autres sciences et leur fournissant en retour les cadres théoriques appropriés. Il y a des exemples de trajet dans les deux sens :
> + de nombreux domaines des mathématiques sont issus de la physique : les équations aux dérivées partielles, l'analyse de Fourier, les distributions, etc.
> + il y a aussi des exemples, moins nombreux, mais fondamentaux d'un point de vue épistémologique, de théories mathématiques « pures » qui se sont développées indépendamment des applications et qui ont eu de telles applications longtemps après. (Kahane (2000), p. 37)

Le rapport de la commission Kahane décrit le travail de modélisation en œuvre dans les relations entre mathématiques et autres disciplines : modéliser est une des principales modalités de l'interaction entre les mathématiques et les autres disciplines.

> Elles [les mathématiques] permettent d'abord de **formuler** les problèmes en termes mathématiques : il s'agit d'établir un modèle à partir d'hypothèses (par exemple de lois physiques clairement énoncées). Puis, une fois ce modèle adopté, il faut le **traiter**, au moyen d'outils mathématiques (suites, fonctions, équations différentielles, équations aux dérivées partielles, probabilités, statistiques, etc.). Ce travail permet de tirer des conséquences des modèles (qualitatives ou quantitatives) et de les confronter à la réalité (ce qui peut amener à les remettre en question).
> Ce que peuvent apporter les mathématiques dans ce travail de modélisation c'est notamment le fait de dégager, de données initiales diverses, abondantes et complexes provenant a priori de domaines différents, des raisonnements similaires menant au même modèle. (Ibid., p. 37)

Ce rapport recommande la mise en place dans l'enseignement de ce processus de modélisation et insiste pour que la modélisation fasse partie des préoccupations des enseignants de mathématiques.

> Nous souhaitons dire ici avec une certaine solennité que nous considérons que cette ouverture aux autres disciplines, notamment via la modélisation, fait partie de la mission du professeur de mathématiques. (Ibid., p. 38)

De fait, la modélisation prend une place de plus en plus importante dans les programmes de mathématiques dans de nombreux pays. La modélisation permet de montrer l'utilité des mathématiques, de développer chez les jeunes des capacités critiques par rapport à la résolution des situations de la vie réelle, de préparer les jeunes à diverses activités professionnelles et de relier les mathématiques à d'autres disciplines (Blum et Niss 1991, Kaiser 1991).

Un indice de cette prise en compte de la modélisation dans l'enseignement des mathématiques est le choix de l'étude internationale PISA, pour évaluer les élèves sur leurs connaissances mathématiques, de les confronter essentiellement à des problèmes dans lesquels les mathématiques sont outils de modélisation.

> […] l'enquête PISA soumet essentiellement aux élèves des problèmes qui s'inscrivent dans des situations s'inspirant du monde réel. Ces situations sont conçues pour que des aspects mathématiques soient véritablement utiles à la résolution des problèmes. L'objectif de l'enquête PISA est de déterminer dans quelle mesure les élèves sont capables d'exploiter leurs savoirs et savoir-faire mathématiques pour résoudre des problèmes qui leur sont soumis. (OCDE 2003, p. 40)

Cette étude met en évidence, ainsi que d'autres recherches, l'intérêt récurrent dans tous les systèmes éducatifs pour la modélisation mathématique.

Qu'en est-il dans deux systèmes éducatifs aux traditions profondément différentes, ceux du Viêt Nam et de la France ?

I. Des rapports différents à la modélisation

I.1. Au Viêt Nam

L'interdisciplinarité, associée au rôle d'outil des mathématiques, est mentionnée explicitement dans le programme de mathématiques au secondaire :

> Le programme est construit et développé selon les points de vue suivants :
> […]
> + choisir des connaissances mathématiques fondamentales, mises à jour, nécessaires, systématiques, selon les orientations réduites, convenables au niveau cognitif des élèves, exprimant l'interdisciplinarité, intégrant des contenus didactiques, exprimant le rôle d'outil de la mathématique.
> + intensifier la pratique et l'application, enseigner les mathématiques reliées à la réalité.
> […] (Extrait du programme du lycée, 2006)
>
> Le premier objectif du programme est l'obtention des significations et des applications des connaissances mathématiques dans la vie et dans les autres disciplines.
> (Extrait du programme de la classe 11, 2006)

L'un des effets de cette injonction a été par exemple, d'introduire dans le programme de la classe 11 les deux chapitres « Combinaison et probabilité » et « Dérivée » pour « fournir à temps des outils mathématiques nécessaires aux autres disciplines (biologie, physique,…) » (ces connaissances étaient placées en classe 12 dans les anciens programmes).

Cependant, dans les manuels et dans l'enseignement en classe, la cohérence entre les disciplines n'est pas toujours prise en compte. Pour l'attester, nous nous sommes entretenus avec M. Nguyen Tran Trac, un enseignant de physique, auteur des manuels de physique, sur l'utilisation de connaissances mathématiques dans la résolution des problèmes physiques. Voici un extrait de cet entretien :

> + pour les connaissances précédemment enseignées en mathématiques, l'enseignant de physique va les rappeler avant de les utiliser.
> + pour les connaissances qui ne sont pas encore enseignées en mathématiques, l'enseignant de physique les enseigne lui-même. Par exemple, avec les fonctions périodiques, quand il rencontre des équations périodiques, il va diriger la résolution des élèves. Quand on étudie le mouvement du pendule, les fonctions périodiques sont nécessaires. L'enseignant va donc enseigner d'abord les savoirs mathématiques nécessaires, et après les appliquer aux phénomènes physiques.
> (Extrait de l'entretien avec M. Nguyen Tran Trac)

Les termes de l'entretien montrent que les enseignements de la physique et des mathématiques au Viêt Nam peuvent s'envisager comme indépendants l'un de l'autre. L'enseignant de physique a même la responsabilité d'enseigner des connaissances mathématiques nécessaires aux problèmes physiques traités. Les connaissances mathématiques sont introduites en physique comme des outils tout faits pour résoudre des problèmes de physique.

De plus, selon l'auteur de manuels avec lequel nous nous sommes entretenus, l'utilisation des problèmes de physique pour introduire des connaissances mathématiques n'est jamais envisagée. L'enseignant de physique « doit présenter directement les connaissances mathématiques pour les appliquer à la physique. Par exemple, quand on étudie la composition de deux oscillations harmoniques, l'enseignant de physique la présente directement à l'élève (somme de deux fonctions périodiques par la méthode algébrique ou par la méthode de Fresnel) et ensuite l'élève l'applique pour résoudre des exercices ».

La relation entre les mathématiques et la physique est à sens unique, les mathématiques n'intervenant que comme savoirs à appliquer qu'il suffit de fournir dans des cas déterminés par les physiciens. De ce point de vue le décalage entre les programmes de mathématiques et de physique n'a pas de grandes conséquences. Or c'est ce décalage qui est souvent, pour les élèves, une cause d'incompréhension.

Le problème de l'enseignement de la modélisation n'est donc pas posé dans la construction des programmes et des manuels au Viêt Nam. On en trouve quelques traces de modélisation dans l'application des connaissances mathématiques à certains problèmes issus de la réalité. Dans les manuels mathématiques secondaires, les rares exercices de ce type se placent souvent dans la partie complémentaire ou au début de certains chapitres avec comme rôle principal d'amener à une nouvelle connaissance (voir l'entretien avec l'auteur des manuels mathématiques au lycée en annexe 1). D'après le rapport de la commission Kahane (2000), de tels exercices sont dommageables pour l'image des mathématiques et des autres disciplines :

> Ce type d'exercice n'est, en réalité, qu'un prétexte pour faire des mathématiques avec un habillage dont on ne se soucie pas de la pertinence. Nous considérons que de tels exercices sont catastrophiques pour l'image de notre discipline. En effet, ils la font apparaître comme un domaine où l'on a des données dont on ne maîtrise pas la provenance, où l'on fait des calculs sans comprendre ce qu'ils signifient et où l'on ne se préoccupe pas de savoir si les résultats ont un sens.
> (Kahane (2000), p. 38)

I.2. En France

A l'instar de nombreux autres pays, il y a une volonté institutionnelle d'introduire de la modélisation dans l'enseignement des mathématiques et des autres disciplines scientifiques. Par exemple, dans la loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'École (23 avril 2005), concernant le cadre de la culture scientifique et technologique, la pratique d'une « démarche scientifique » est exigible comme une capacité de l'élève. Cette démarche est décrite comme suit :

> - savoir observer, questionner, formuler une hypothèse et la valider, argumenter, modéliser de façon élémentaire ;
> - comprendre le lien entre les phénomènes de la nature et le langage mathématique qui s'y applique et aide à les décrire.

L’institution française d’enseignement secondaire préconise la mise en place d’un enseignement de la modélisation mathématique pour les raisons suivantes :

> Les mathématiques sont une discipline exigeante. […] Les élèves peuvent y pratiquer la démarche critique qui exige de chacun des arguments probants et ainsi apprécier les certitudes que ceux-ci fournissent. Ils peuvent encore expérimenter la capacité de *modélisation des mathématiques*, tout en comprenant que le modèle, le sondage, l’équation ne sont pas la réalité et doivent sans cesse y être confrontés.
> (Document d’accompagnement des programmes des classes Terminale S, ES, p. 5)

Toujours dans ce document d’accompagnement des programmes, on découvre une partie « Mathématique et modélisation ». On trouve là des indices concernant l’enseignement de la modélisation au lycée :

> Au niveau du lycée, on initiera les élèves à *la modélisation* grâce à l’étude de certaines situations réelles, qu’on simplifiera volontairement à l’extrême et pour lesquelles le modèle grossier ainsi établi devient éclairant ou permet une prévision : la difficulté est alors de garder sens et consistance au problème simplifié. (Ibid., p. 25)

Si en France, on parle bien d’enseignement de la modélisation dans les programmes du second degré et plus encore dans les plus récents, il semble ne pas être réellement mis en œuvre dans le système d’enseignement. Plusieurs raisons de cet état de fait peuvent être dégagées par le rapport de la commission Kahane (2000).

> 1) Les manuels n’ont pas encore pris la mesure de ces problèmes.
> Les exercices qu'on y trouve pèchent souvent de deux côtés :
> - On ne discute pas l'origine des formules fournies (c'est souvent le cas pour les exercices issus de l'économie).
> - Le modèle mène à une absurdité sans que le texte ne s'en inquiète. Ainsi, une population qui suit une loi exponentielle croissante sans qu’on discute ce qui se passe en temps grand.
> […]
> 2) La réalité est plus complexe qu’il n’y paraît.
> Le problème que rencontrent les enseignants, très souvent, c’est que les modèles abordables du point de vue mathématique, sont trop simples et qu’ils ne rendent pas compte de la réalité.
> […]
> 3) Les programmes sont mal adaptés.
> Un seul exemple : l'oscillateur harmonique, base de la physique de terminale, correspond aux équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants qui ne sont plus au programme de mathématiques de terminale.
> C’est ce genre de décalage, très fréquent, entre les programmes de mathématiques et de physique qui est souvent, pour les élèves, une cause d’incompréhension.
> […]
> 4) Les méthodes sont différentes.
> Les physiciens utilisent les mathématiques pour décrire les phénomènes : « les lois physiques s'expriment à l'aide de formules mathématiques ». Cependant, cette description peut nécessiter une adaptation et un effort pour être dite dans le langage des mathématiques d’une classe donnée. Selon les classes, l’époque, les programmes, cette tâche d’adaptation peut-être plus ou moins difficile. […]
> (Rapport de la commission Kahane (2000), p. 38-39)

Il y a bien là un problème d’enseignement : soit on évite l’enseignement de la modélisation en concevant le rapport des mathématiques aux autres disciplines scientifiques comme un rapport d’application (Viêt Nam) soit on préconise la prise en compte de la modélisation sans donner les moyens aux enseignants de l’enseigner (France).

Quels effets ont ces conditions et ces contraintes différentes sur la vie dans l'enseignement secondaire de savoirs mathématiques issus d'un processus de modélisation ?

Nous décidons de travailler cette question en choisissant la périodicité et les fonctions périodiques comme savoirs mathématiques issus d'un processus de modélisation.

II. Le choix de la périodicité et des fonctions périodiques

Le phénomène (système) étudié dans un processus de modélisation mathématique peut être intra ou extra-mathématique et le terme « modélisation mathématique » évoque le plus souvent ce que Chevallard (1989) qualifie d'emplois extra-mathématiques :

> […] des emplois **intra-mathématiques**, en ce sens qu'ils se rapportent à l'étude d'objets mathématiques […]. D'autres emplois concernent l'étude mathématique d'objets **extra-mathématiques** : systèmes physiques, biologiques, sociaux, etc. Et c'est d'ordinaire à l'étude mathématique de tels systèmes non mathématiques que l'on réserve le nom de **modélisation mathématique**. (Chevallard (1989), p. 53)

L'insistance des institutions d'enseignement secondaire des mathématiques à « comprendre le lien entre les phénomènes de la nature et le langage mathématique qui s'y applique et aide à les décrire » nous incite à faire l'étude de phénomènes non-mathématiques, les phénomènes périodiques étudiés par de nombreuses sciences.

La périodicité est un concept central dans le processus de modélisation des phénomènes cycliques et des phénomènes oscillatoires. Dans la genèse scientifique de ce concept, les fonctions périodiques, notamment les fonctions trigonométriques, se sont constituées progressivement comme modèles de grandeurs variables qui retournent régulièrement et indéfiniment au même état, en général en fonction du temps.

Les fonctions ont une place importante comme outils de modélisation car elles permettent de modéliser les phénomènes variables ou évolutifs qui sont à la fois très présents dans la réalité quotidienne et objets d'étude des disciplines scientifiques (finance, biologie, physique, économie, etc.). Nous parlerons de modélisation fonctionnelle.

Selon Krysinska et Schneider (2010), dans l'institution « cours de mathématiques », le processus de modélisation fonctionnelle consiste principalement « [à] construire et/ou [à] identifier un modèle fonctionnel par une formule paramétrée, à partir d'ostensifs associés tels que des tableaux numériques, graphiques cartésiens ou équations fonctionnelles et adapter ce modèle aux spécificités du phénomène étudié » (p. 33).

La réforme de 1902 a introduit la notion de fonction dans l'enseignement des mathématiques en France en arguant de sa nécessité pour l'enseignement de la physique et donc en se référant à des problèmes extra-mathématiques.

> D'un autre côté, le nouvel enseignement de la physique doit abandonner les méthodes descriptives et dogmatiques qui réduisaient l'expérimentation à la démonstration d'appareils. La physique expérimentale s'efforce de dégager des lois à partir des faits et ces lois doivent pouvoir s'exprimer sous forme mathématique. La représentation graphique fait apparaître, à partir des mesures expérimentales, des relations fonctionnelles entre variables et constantes physiques. Le professeur, précisent les instructions, « utilisera fréquemment les représentations graphiques, non seulement pour mieux montrer aux élèves l'allure des phénomènes, mais pour faire pénétrer dans leur esprit les idées si importantes de fonction et

> de continuité ». La notion de fonction s'introduit ainsi naturellement dans l'enseignement de la physique. Pour cette raison, la commission décide de l'introduire également dans l'enseignement des mathématiques. C'est l'innovation majeure des programmes du second cycle. L'étude des fonctions, en mathématiques, reste marquée par ses origines physiciennes. Elle est pratique, quasi-expérimentale : pas de définitions générales et abstraites, mais un crayon et du papier millimétré pour construire les graphes des quelques fonctions simples que le programme prévoit d'étudier. (Belhoste (1995), p. 58)

La raison d'être de la notion de fonction est ainsi identifiée comme réponse à un problème de modélisation des phénomènes issus de la physique. Cependant, la modélisation fonctionnelle pose aux élèves plusieurs difficultés d'ordre épistémologique et didactique repérées par Krysinska et Schneider (2010), difficultés à :

- percevoir la variation d'une grandeur dès que celle-ci est liée à une autre grandeur constante
- percevoir comme fonctions ou même grandeurs « variables » des grandeurs qui ne varient pas dans le temps
- identifier et choisir une variable indépendante et exprimer la grandeur à optimiser en fonction de cette variable et d'elle seule (dans le domaine des problèmes d'optimisation)
- comprendre la signification de la notion de variable

La fonction périodique présente, en tant que fonction et en tant qu'outil de modélisation, les caractéristiques générales des fonctions numériques et d'autres caractéristiques (période, phase, amplitude, etc.) qui lui sont propres et qui rendent son enseignement et son apprentissage plus complexes.

III. Questionnement initial et méthodologie de recherche

Nous plaçons donc notre étude dans le champ de la modélisation extra-mathématique par des fonctions périodiques. Voici des questions qui ont initié notre travail de recherche.

Comment les phénomènes périodiques sont-ils étudiés et modélisés par les sciences physiques et mathématiques ? Avec quels modèles mathématiques ?

Comment l'étude des phénomènes périodiques vit-elle dans l'enseignement secondaire de la physique et des mathématiques au Viêt Nam et en France ? Comment s'articulent les différentes significations données au concept de périodicité par les différentes disciplines ?

Est-il possible d'organiser un enseignement des fonctions périodiques par la modélisation qui tienne compte des conditions et des contraintes institutionnelles ?

III.1. Enquête épistémologique

Nous commençons notre étude par une enquête épistémologique afin d'examiner les phénomènes périodiques étudiés en sciences physiques et de déterminer les modèles mathématiques représentant ces phénomènes. Cette enquête nous permet de formuler des hypothèses sur le rôle et la portée de plusieurs formalisations mathématiques utilisées dans les modèles de phénomènes périodiques présents en physique.

Les résultats de cette enquête seront les éléments de référence pour notre analyse institutionnelle.

Dans cette enquête, une synthèse des processus de modélisation en physique (du point de vue épistémologique ou didactique) est aussi effectuée pour justifier notre choix du processus de modélisation retenu dans notre dispositif expérimental.

III.2. Etude institutionnelle

Pour trouver des éléments de réponse aux questions initiales, nous utilisons le cadre théorique de la Transposition Didactique (Chevallard, 1991) et de la Théorie Anthropologique du Didactique (Bosch et Chevallard, 1999).

La transposition didactique met en évidence le problème de la légitimation des objets de savoir enseignés et étudie l'écart existant entre un savoir enseigné et les références qui le légitiment, écart dû aux contraintes pesant sur le fonctionnement du système d'enseignement.

La Théorie Anthropologique du Didactique montre l'importance du rapport institutionnel à un objet de savoir et introduit la notion de praxéologie pour le caractériser :

> Ce qui fait défaut, c'est l'élaboration d'une méthode d'analyse des pratiques institutionnelles qui en permette la description et l'étude des conditions de réalisation. Les derniers développements de la théorisation viennent combler ce manque. La notion clé qui apparaît alors est celle d'*organisation praxéologique* ou *praxéologie*.
> (Bosch et Chevallard, 1999, p. 85)

Nous utilisons cette notion de praxéologie comme outil d'une analyse institutionnelle comparative entre les institutions d'enseignement des mathématiques et de la physique en France et au Viêt Nam.

En identifiant les différents types de tâches mettant en œuvre la périodicité dans l'enseignement des mathématiques ainsi que les praxéologies qui leur sont attachées, cette analyse nous permet de dégager les rapports institutionnels des deux pays concernant la périodicité, les fonctions périodiques et la modélisation mathématique des phénomènes périodiques. Elle nous permet aussi de comprendre les raisons des choix institutionnels, les contraintes qui pèsent sur ces choix et les possibilités de les modifier.

Cette analyse débouche sur des questions didactiques, relatives à la pratique de la démarche de modélisation chez l'élève, qui nous amènent à proposer un questionnaire aux élèves vietnamiens.

III.3. Questionnaire élèves

Le questionnaire est conçu autour de types de tâches emblématiques repérés dans l'analyse institutionnelle des enseignements des deux pays. Un jeu sur les valeurs de variables didactiques provoque ou non une rupture des contrats institutionnels à la modélisation de la périodicité propres à chacune des institutions.

Le questionnaire est expérimenté dans plusieurs classes de lycée au Viêt Nam. Les analyses des réponses des élèves nous permettent d'approfondir l'étude institutionnelle en précisant le rapport institutionnel en position d'élèves à la notion de périodicité et de fonction périodique et d'éclairer leurs difficultés à entrer dans un processus de modélisation.

Les résultats obtenus nous fournissent ainsi des éléments complémentaires pour la conception d'une ingénierie didactique.

III.4. Ingénierie didactique

Dans la suite de notre travail, nous cherchons à mettre en place des conditions, sous les contraintes institutionnelles, qui permettent aux élèves d'entrer dans un processus de modélisation de phénomènes périodiques.

Pour cela, nous élaborons une ingénierie didactique pour introduire les fonctions périodiques comme modèles de phénomènes de co-variations périodiques.

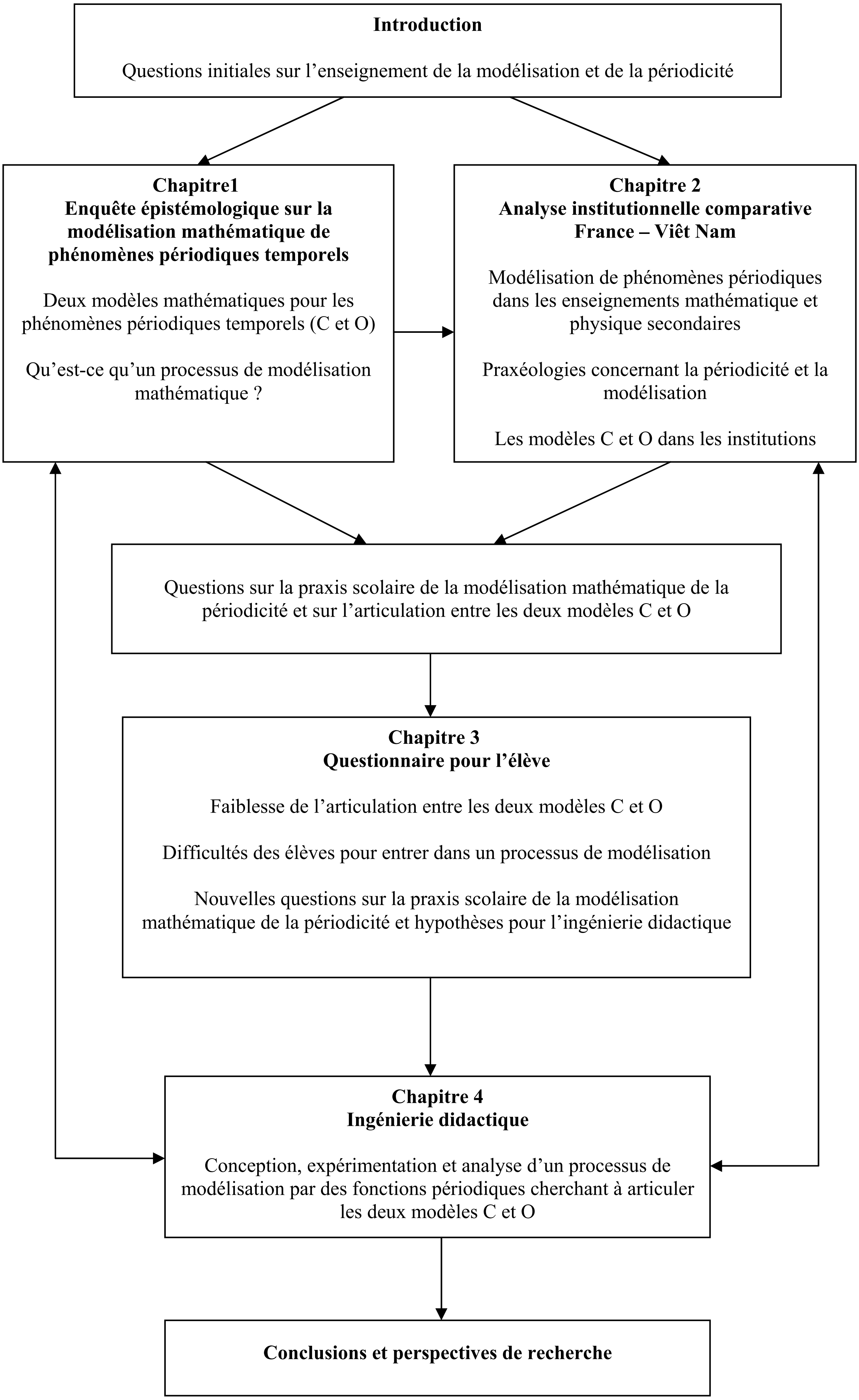
Pour ce faire, nous nous référons à la méthodologie d'ingénierie didactique ainsi décrite par Artigue (1989) :

> L'ingénierie didactique, vue comme méthodologie de recherche, se caractérise en premier lieu par un schéma expérimental basé sur des « réalisations didactiques » en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquence d'enseignement.
> […]
> La méthodologie d'ingénierie didactique se caractérise aussi, par rapport à d'autres types de recherche basés sur des expérimentations en classe, par le registre dans lequel elle se situe et les modes de validation qui lui sont associés. (Artigue (1989), p. 285-286)

La conception de cette ingénierie s'appuie sur les résultats de l'analyse épistémologique et de l'analyse institutionnelle comparative des systèmes d'enseignements :

> La réalisation d'une ingénierie didactique dans l'un des systèmes et son analyse permettent non seulement de poser des questions sur ce système mais aussi sur l'autre système, et favorisent ainsi l'émergence de questions génériques dont la pertinence est attestée dans l'autre système. De plus, cela pose le problème général de la reproductibilité de l'ingénierie non seulement dans l'institution où elle a été réalisée mais aussi dans l'autre.
> (Bessot et Comiti, p. 22)

IV. Organigramme de la thèse


Introduction
Questions initiales sur l'enseignement de la modélisation et de la périodicité
Chapitre1
Enquête épistémologique sur la modélisation mathématique de phénomènes périodiques temporels
Deux modèles mathématiques pour les phénomènes périodiques temporels (C et O)
Qu'est-ce qu'un processus de modélisation mathématique ?
Chapitre 2
Analyse institutionnelle comparative France – Viêt Nam
Modélisation de phénomènes périodiques dans les enseignements mathématique et physique secondaires
Praxéologies concernant la périodicité et la modélisation
Les modèles C et O dans les institutions
Questions sur la praxis scolaire de la modélisation mathématique de la périodicité et sur l'articulation entre les deux modèles C et O
Chapitre 3
Questionnaire pour l'élève
Faiblesse de l'articulation entre les deux modèles C et O
Difficultés des élèves pour entrer dans un processus de modélisation
Nouvelles questions sur la praxis scolaire de la modélisation mathématique de la périodicité et hypothèses pour l'ingénierie didactique
Chapitre 4
Ingénierie didactique
Conception, expérimentation et analyse d'un processus de modélisation par des fonctions périodiques cherchant à articuler les deux modèles C et O
Conclusions et perspectives de recherche

CHAPITRE 1

UNE ENQUETE EPISTEMOLOGIQUE SUR LA MODELISATION MATHEMATIQUE DE PHENOMENES PERIODIQUES TEMPORELS

I. Introduction

Sensevy & Mercier (1999) énoncent deux « raisons d'être » des mathématiques :

> - faire des mathématiques, c'est fabriquer des modèles qui permettront de maîtriser des phénomènes dans la réalité ;
> - faire des mathématiques, c'est utiliser des outils pour résoudre des problèmes et donc aussi, construire des outils permettant de résoudre des problèmes ou encore, étudier des outils et les problèmes qu'ils permettraient de résoudre.
> (Sensevy & Mercier (1999), p. 70)

Ces deux raisons d'être des mathématiques suffisent pour expliquer que les mathématiques interviennent dans toutes les sciences. Leur capacité à fabriquer des modèles pour les phénomènes que les différentes sciences repèrent et étudient crée des relations très fortes avec elles. C'est particulièrement vrai pour la physique, comme le déclare Klein (2000) :

> Les mathématiques offrent incontestablement à la physique une voie privilégiée vers l'unification. L'existence d'une relation très particulière entre la physique et les mathématiques est universellement reconnue. […] Comment concevoir la mécanique classique sans calcul différentiel et intégral, l'électromagnétisme sans équations aux dérivées partielles, la relativité générale sans calcul tensoriel, la physique quantique sans espaces de Hilbert ? (Klein (2000), p. 179)

Selon lui, il y a trois types d'efficacité des mathématiques en physique liés à la modélisation :

- les mathématiques peuvent anticiper les résultats d'expérimentation ou reproduire les données obtenues précédemment. Elles peuvent fournir des résultats numériques qui dans les limites d'une certaine borne d'erreur tolérée, reproduisent les données expérimentales ;
- elles mettent en évidence des structures « explicatives » ;
- elles permettent d'engendrer de nouvelles idées, de nouveaux concepts, des stratégies inédites ou des solutions originales à des problèmes anciens.

Exprimer et exploiter une propriété physique sous forme numérique exige non seulement qu'on se serve des mathématiques pour indiquer les relations entre les différentes grandeurs mesurées, mais aussi qu'on soit capable d'utiliser ces relations. Pour Gruber et Benoit (1998), les mathématiques sont, au-delà du langage de la physique, la manière de penser du physicien :

> - c'est le langage de la nature que l'homme doit assimiler ;
> - c'est le langage de l'homme pour traduire les faits de la nature
> C'est cette deuxième interprétation, reliée du reste à la description moderne, qu'adopte Heisenberg quand il affirme : « Les formules mathématiques ne représentent plus la Réalité, mais la connaissance que nous possédons ».
> Finalement, on remarquera que les mathématiques sont beaucoup plus qu'un langage : c'est la manière de penser du physicien. (Gruber et Benoit (1998), p. 8)

A son tour, la physique avec la résolution mathématique de ses problèmes conduit à développer des connaissances nouvelles et importantes en mathématiques.

> Par l'expérimentation ou l'analyse théorique, le physicien essaie d'établir des relations mathématiques, appelées lois, entre les grandeurs physiques. Les mathématiques forment le langage naturel de la physique parce qu'elles nous permettent d'énoncer ces relations de façon concise. Une fois établi, l'énoncé mathématique peut être manipulé selon les règles mathématiques. Si les équations initiales d'une analyse sont correctes, la logique mathématique peut alors déboucher sur de nouvelles idées et de nouvelles lois.
> (Benson (1991), p. 4)

Ces liens épistémologiquement très forts qu'entretiennent les sciences physiques et les sciences mathématiques nous incitent à restreindre à la physique notre enquête sur la modélisation des phénomènes périodiques même si d'autres sciences, telles les sciences de la vie ou celles de l'économie par exemple, étudient elles aussi des phénomènes qu'elles qualifient de périodiques. Quels sont les phénomènes que la physique étudie et qu'elle considère comme périodiques ? Ce sera notre première question.

Nous trouvons des phénomènes périodiques dans plusieurs branches de la physique : Mécanique, Electromagnétisme, Ondes, et Cristallographie, etc. Parmi ces phénomènes périodiques, trois d'entre eux prennent une grande place dans les traités de physique : le mouvement circulaire (tel le mouvement de la terre autour de son axe et autour du soleil), le mouvement oscillatoire (tel le mouvement d'un pendule simple) et le mouvement ondulatoire (tel le mouvement d'une corde vibrante).

Ces phénomènes se déroulent, pour la physique, dans un cadre appelé « espace-temps ». L'espace y est considéré, par les physiciens, comme un continu à trois dimensions (il faut trois nombres pour repérer la position d'un point) et le temps comme un continu linéaire, orienté par la « flèche du temps » qui distingue le futur du passé, la longueur et le temps étant des concepts premiers.

Nous verrons dans notre enquête sur ces mouvements que, à la différence du mouvement circulaire et du mouvement oscillatoire, les ondes progressives sont des phénomènes qui possèdent une double périodicité dans le temps et dans l'espace. En effet, à l'instant t donné [en un point fixe x de l'espace], les ondes sont oscillantes dans l'espace [dans le temps].

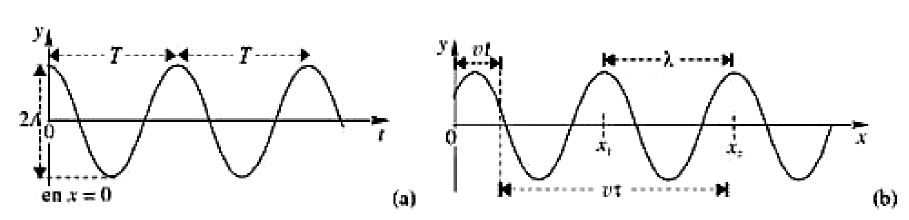


Fig. 1.11 Double périodicité : (a) périodicité temporelle, (b) périodicité spatiale.

(Balland (2007), p. 14)

Israel (1996) utilise le terme « mathématique du temps » pour parler de l'outil mathématique de modélisation de phénomènes temporels :

> Par l'expression de « mathématique dynamique » ou de « mathématique du temps », nous nous référons à une conception des mathématiques en tant qu'instrument dont le rôle principal est de décrire l'évolution des phénomènes au cours du temps, et donc les

> changements. D'un point de vue technique, cela signifie que toutes les variables en jeu dépendent d'un paramètre qui représente justement le temps. (Israel (1996), p. 222)

Avant d'examiner de plus près dans les traités de physique chacun des trois mouvements cités ci-dessus, nous voulons éclairer l'importance du temps en physique et son lien avec la notion de périodicité.

II. Le temps et la périodicité

II.1. Le temps en physique

Le temps apparaît dans beaucoup de phénomènes étudiés par la physique comme la cause du changement, de la variation des états. Situation paradoxale pour le physicien, comme le souligne Klein (2000) :

> Les scientifiques de toute discipline sont confrontés au temps. Il peut sembler curieux d'associer le temps et la physique. Celle-ci cherche en effet, sans se l'avouer toujours, à éliminer le temps. Le temps est associé au variable, à l'instable, à l'éphémère, tandis que la physique, elle, est à la recherche de rapports qui soient soustraits au changement. Lors même qu'elle s'applique à des processus qui ont une histoire ou une évolution, c'est pour y discerner soit des substances et des formes, soit des lois et des règles indépendantes du temps. Dans son désir d'accéder à un point de vue quasi divin sur la nature, la physique prétend à l'immuable et à l'invariant. Mais dans sa pratique, elle se heurte au temps.
> (Klein (2000), p. 242-243)

Mais qu'est-ce que le temps ? Quelles sont ses représentations ? Pourquoi la progression périodique des aiguilles d'une montre sur l'espace circulaire de son cadran, rend-elle possible une mesure du temps ? Quel lien existe-t-il entre le temps et les phénomènes périodiques temporels ?

D'après Feynman (1963), « un temps » est défini dans le dictionnaire Webster[1], comme « une période », et cette dernière comme « un temps », ce qui ne nous avance guère. Examinons sa conception du temps :

> Peut-être est-il aussi bien d'accepter le fait que « le temps est une des choses que nous ne pouvons probablement pas définir, (au sens du dictionnaire), et de dire simplement que c'est ce que nous savons déjà de lui : combien nous attendons ! (Feynman (1963), p. 55)

La même idée est présente chez Klein (Ibid.) :

> On peut tenter de définir le temps : dire qu'il est ce qui passe quand rien ne se passe ; qu'il est ce qui fait que tout se fait ou se défait ; qu'il est l'ordre des choses qui se succèdent ; qu'il est le devenir en train de devenir ; ou, plus plaisamment, qu'il est le moyen le plus commode qu'a trouvé la nature pour que tout ne se passe pas d'un seul coup. Mais toutes ces expressions présupposent ou contiennent déjà l'idée du temps. Elles n'en sont que des métaphores, impuissantes à rendre compte de sa véritable intégrité. (Klein (Ibid.), p. 237)

[1] Le *Dictionnaire Webster* est le nom donné à un type de dictionnaire de langue anglaise aux Etats-Unis et faisant autorité concernant l'anglais américain.

Ainsi quand on utilise une expression pour définir le temps, celle-ci présuppose ou contient déjà l'idée du temps ! Cependant les physiciens s'accordent tous sur la nécessité de mathématiser le temps :

> Le temps est un outil mathématique qui permet de mettre en équation l'observation de phénomènes physiques (observables) et d'en tirer ainsi un certain nombre d'informations. Cet outil existe car il existe des êtres pour observer (et mesurer) la nature et ses changements (principe socratique) et de la matière et du mouvement pour qu'il y ait des changements. (Isoz, 2011)

Donc le problème qui doit nous préoccuper ici n'est pas de trouver une définition du temps mais de savoir comment les physiciens le représentent et comment ils le mesurent.

II.2. La représentation du temps

> Le temps s'incarne en physique sous la forme d'un nombre réel, le paramètre τ. Il n'a donc qu'une dimension (un seul nombre suffit à déterminer une date) et on peut fixer sa direction d'écoulement (il est orientable). Une telle figuration du temps postule implicitement qu'il n'y a qu'un temps à la fois et que ce temps est continu.
> […]
> Contrairement à celle de l'espace, la topologie du temps est très pauvre. Elle n'offre que deux variantes, la ligne ou le cercle, c'est-à-dire le temps linéaire, qui va de l'avant, ou le temps cyclique, qui fait des boucles. Ce dernier favorisé par le caractère magique du cercle, a prévalu dans les mythes mais il est aujourd'hui délaissé par la physique parce qu'il ne respecte pas le principe de causalité. […]. (Klein (ibid.), p. 243-244)

Avec sa forme linéaire qui s'est imposée aux dépends de sa forme circulaire, le temps est classiquement représenté par une droite orientée composée d'une suite d'instants infinitésimaux que les mathématiciens appellent la droite réelle R. Le temps intervient donc dans les équations de la physique comme une variable réelle indépendante et graphiquement représentée par un axe, le plus souvent l'axe des abscisses.

Muni de sa représentation mathématique sous la forme d'une droite réelle, le temps possède une structure ordonnée : sur une droite, un point se situe nécessairement avant ou après un autre point.

> Le cours du temps est représenté par l'axe du temps sur lequel on place traditionnellement une petite flèche qui n'est précisément pas ce qu'on appelle d'ordinaire la « flèche du temps ». Elle est mise là pour signifier d'une part que le sens d'écoulement du temps, même s'il est arbitraire, peut être défini, et d'autre part que les voyages dans le temps sont impossibles : sur l'axe du temps, on ne peut pas revenir en arrière ni passer deux fois par un même instant.
> Cette représentation mathématique du cours du temps invite à définir le temps comme étant ce qui organise et ordonne la continuité des instants, et, ce faisant, ce qui produit de la durée, rien de plus (et donc pas nécessairement du changement). À défaut de produire de la nouveauté phénoménale, le temps produit des instants qui sont tous des instants radicalement « neufs », originaux, même s'ils sont ouverts à l'accueil de phénomènes répétitifs.
> (Klein (2006), p. 18)

Cette représentation mathématique du temps pose la question de la différenciation entre le passé et le futur. Le temps des Mathématiques se sépare-t-il, sur cette question, du temps de la Physique ? C'est ce que pense Israel (1996) :

> Le paramètre mathématique t permet de définir conventionnellement le « présent » comme l'instant t = 0, le « passé » comme l'ensemble des valeurs négatives t < 0, et le futur comme l'ensemble des valeurs positives t > 0. Cette définition est très éloignée de l'intuition commune du temps. Pour cette dernière, le passé et le futur présentent une évidence dissymétrie : une inversion du temps est inimaginable. […] Dans le temps mathématique, il est possible de remonter le temps, ce qui paraît impensable (même en principe) dans la réalité. (Israel (1996), p. 222-223)

Pourtant la lecture graphique habituelle sur un axe « horizontal » de gauche à droite ne privilégie-t-elle pas le passage du passé vers le futur tendant à transformer, dans le modèle mathématique, la droite du temps en une demi-droite ?

A cette première question sur la représentation mathématique du temps on peut en ajouter une seconde, soulevée en ces termes par Krysinska, Mercier & Schneider (2009) :

> Seules les grandeurs qui varient dans le temps semblent évoquer chez les élèves[2] une quelconque idée de variation. (Krysinska, Mercier & Schneider (2009), p. 253)

Schneider (1998) dit avoir observé chez les mêmes élèves, « la propension à associer variation et références au temps même là où la variable temps est absente : par exemple, les rares élèves qui parviennent à interpréter pourquoi dériver l'aire d'un disque par rapport à son rayon conduit à l'expression de son périmètre, parlent de cercles ajoutés successivement comme « accroissement instantané » du disque ».

Ainsi la variable « temps » outrepasserait sa fonction de représentation du temps pour prendre en charge l'appréhension de tout phénomène de variation. Schneider se refuse à ne voir dans ce phénomène qu'un obstacle didactique à l'apprentissage de la notion de variation. Selon elle, la notion de variable temporelle « grandeur que l'on perçoit intuitivement comme variable au cours d'un temps non numérisé » […] « renvoie à l'ambiguïté dont la notion de variable a fait l'objet dans l'histoire des mathématiques ». Cette notion a donc des ressorts épistémologiques et Schneider, à l'appui de cette thèse cite les travaux de Serfati (2005) qui voit dans la notion de variable introduite par Leibniz des « connotations cinématiques ».

II.3. La mesure du temps

Selon Feynman (1965), n'importe quel mouvement périodique peut servir à la mesure du temps :

> Une manière de mesurer le temps est d'utiliser quelque chose qui se passe et se répète d'une manière régulière – quelque chose qui est périodique. Par exemple, un jour.
> (Feynman (1965), p. 55)

Mais comment reconnaître un phénomène périodique ? Par exemple, y a-t-il quelque manière de vérifier si les jours ont la même longueur – soit d'un jour à l'autre, ou du moins en moyenne ?

Feynman (ibid.) indique une méthode, celle qui consiste à comparer ce phénomène à d'autres phénomènes périodiques. En effet, pour vérifier si les jours ont la même longueur, on peut faire une comparaison avec un sablier. Nous pouvons « créer » un événement périodique avec un sablier si nous avons quelqu'un qui se trouve à côté midi et midi (midi ici n'est pas défini comme douze heures d'horloge, mais cet instant où le soleil est à son point le plus élevé), pour le

[2] De l'enseignement mathématique secondaire

retourner chaque fois que le dernier grain de sable est tombé. Nous pourrions alors compter le nombre de fois que l'on tourne le sablier, de chaque midi suivant. Nous trouverions que le nombre « d'heures » (c'est-à-dire le nombre de rotation du sablier) est le même pour chaque « jour ».

> Nous avons maintenant une certaine confiance dans le fait que à la fois « l'heure » et le « jour » ont une périodicité régulière, c'est-à-dire découpent des intervalles de temps égaux successifs. […] Nous pouvons dire que nous trouvons qu'une régularité d'une certaine sorte s'adapte à une régularité d'une autre sorte. Nous pouvons simplement dire que nous fondons notre définition du temps sur la répétition d'un certain événement apparemment périodique. (Ibid., p. 56)

Donc cette appréhension du temps est fondée sur la répétition d'un certain événement apparemment périodique[3] et accepté comme une unité de mesure. Ceci montre l'imbrication des concepts de temps et de périodicité pour la mesure du temps.

> […] tant qu'un système observable produit un phénomène périodique stable et suffisamment petit pour que toute mesure physique puisse y être réduite, celui-ci peut-être utilisé comme étalon d'intervalle temporel. (Isoz, 2011)

Pour mesurer plus précisément des fractions d'un jour et des fractions d'une heure, on utilise un pendule donné qui oscille toujours dans des intervalles de temps égaux, aussi longtemps que l'amplitude de l'oscillation est maintenue petite. Si ce pendule oscille 3600 fois en une heure (et s'il y a 24 de ces heures dans un jour), chaque période du pendule sera appelée une « seconde ».

> Le temps se découpe dès lors en unités de plus en plus petites. En le « matérialisant » par la succession des engrenages de roues ou les oscillations de pendules, on le mathématise au moyen d'une suite numérique. Le temps acquiert ainsi le statut de grandeur mesurable. (Luminet (1995), p. 61)

En conclusion, les mesures de durées nécessitent de se référer à des phénomènes périodiques qui permettent de les ramener à un décompte de périodes. Nous voyons là une raison de nous concentrer sur les phénomènes périodiques temporels pour étudier la mathématisation des phénomènes périodiques.

III. Des phénomènes périodiques temporels

Choix des documents analysés

Pour repérer et examiner les phénomènes périodiques temporels étudiés en physique, nous choisissons en plus du cours de physique de Feynman deux autres ouvrages qui se présentent aussi comme des traités de physique générale pour une vision unifiée de la physique.

- « Le cours de physique » de Feynman (1963), Version française de G. Delacote, Intereditions, 1979. Ce cours connaît encore un succès de grande ampleur comme en témoigne l'article de wikipedia qui lui est consacré : http://fr.wikipedia.org/wiki/Cours_de_physique_de_Feynman

[3] Dans un article sur « la mesure du temps » publié dans La Valeur de la Science en 1905, cité par Barreau (1996), Henri Poincaré montrait que le postulat relatif à la mesure du temps, sur lequel repose toute la physique, ne se réduit pas à l'affirmation fondamentale selon laquelle « la durée de deux phénomènes identiques est le même ; ou si l'on préfère, que les mêmes causes mettent les mêmes temps à produire les mêmes effets ».

- « Physique[4] », Harris Benson, Adaptation de Marc Séguin, Benoît Villeneuve, Bernard Marcheterre, Richard Gagnon, De Boeck, 2009, que nous noterons dans la suite [P1] ;
- « Physique générale[5] », Marcelo Alonso, Edward J. Finn, Texte français de Michel Daune, Dunod, Paris, 2001, que nous noterons dans la suite [P2].

On trouve dans ces ouvrages les principes fondamentaux des phénomènes physiques, leurs conséquences et leurs limites, notamment les idées fondamentales constituant l'essentiel de la physique contemporaine. Ceci est nécessaire pour divers utilisateurs.

> Les futurs physiciens et les ingénieurs ne sont pas les seuls qui doivent avoir parfaitement compris ces idées fondamentales, mais tous ceux qui envisagent une carrière scientifique (y compris les étudiants qui se spécialisent en biologie, en chimie et en mathématiques), doivent avoir acquis la même compréhension. ([P2], page de préface).

[P1] est une traduction de l'édition révisée de University Physics, de Harris Benson, publiée et vendue à travers le monde avec l'autorisation de John Wiley & Sons, Inc, 1991. Ce manuel est un ouvrage d'introduction à la physique destiné aux étudiants de sciences de la nature. Selon l'auteur, son objectif est de donner une représentation claire et correcte des notions et des principes fondamentaux de la physique.

L'édition originale de [P2] a été publiée au Etats-Unis par Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Masse, sous le titre Fundamental university Physics, Second Edition, 1967 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Comme l'indique la préface des traducteurs, ce livre, consacré à la physique générale, est écrit à l'intention d'étudiants qui se destinent à des études scientifiques ou à une formation d'ingénieur. Dans ce livre, la physique est présentée « comme un tout, non comme un corps de doctrines ou un ensemble figé de règles, de principes et de lois, mais bien comme une attitude d'esprit et un mode de pensée face au monde qui nous entoure ».

Dans le déroulement de notre étude, nous utiliserons également d'autres manuels de l'enseignement supérieur, plus spécialisés ou d'ambition plus restreinte que les trois traités.

Dans les ouvrages [P1] et [P2], la définition d'un mouvement périodique s'appuie sur sa répétition régulière en fonction du temps :

> Un mouvement périodique est un mouvement qui se répète à intervalles réguliers.
> ([P1], p. 461)

Ou comme dans [P2], sa définition s'appuie sur une représentation graphique de fonction. Cependant, la répétition est toujours mise en avant (ici, la répétition d'un morceau du graphique).

> Un mouvement périodique quelconque de période P est décrit par x = f(t), où la fonction f(t) est périodique et possède la propriété que f(t) = f(t+kP), comme l'indique la Fig.12-35. La courbe de f(t) se répète donc identique à elle-même à intervalles égaux à P.

[4]Tome I : Mécanique, Tome II : Electricité et magnétisme, Tome III : Ondes, optique et physique moderne
[5]Tome I : Mécanique et thermodynamique, Tome II : Champs et ondes, Tome III : Physique quantique et physique statistique

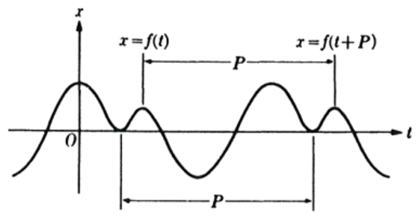


Fig. 12–35. Une fonction périodique du temps.

([P2], p. 362)

Ces définitions se trouvent dans [P1] et [P2] au début du chapitre sur le mouvement oscillatoire (ou oscillation). Ceci montre que le mouvement oscillatoire est un objet d'étude prioritaire pour introduire les mouvements périodiques.

III.1. Les mouvements oscillatoires et le modèle O

III.1.1. Les fonctions périodiques en mathématiques

D'une part certains manuels de l'enseignement supérieur sont consacrés à la présentation de méthodes mathématiques pour les sciences physiques. D'autre part dans beaucoup de manuels de physique, il y a des parties qui résument un outillage mathématique qu'ils jugent nécessaires à la résolution des problèmes physiques.

En nous appuyant sur tels ouvrages universitaires, nous cherchons à éclairer l'habitat et le rôle des fonctions périodiques en physique. Examinons la définition d'une fonction périodique caractérisée par l'égalité $f(x + T) = f(x)$ pour tout nombre réel x, donnée par Schwartz (1965) :

> On appelle période d'une fonction $f(x)$ tout nombre réel T tel que $f(x + T) = f(x)$. Le nombre 0 est toujours une période ; l'opposé d'une période de f, la somme de deux périodes de f, sont des périodes de f ; donc les périodes de f forment un sous-groupe du groupe additif R des nombre réels. Ce sous-groupe est appelé groupe des périodes de f.
> (Schwartz (1965), p. 161)

Schwartz (1965) démontre que les périodes d'une fonction constituent un sous-groupe de R. Si f est continue, son groupe des périodes est un sous-groupe fermé de R, car toute limite T d'une suite de période Tj de f est encore une période de f. Ensuite, la notion de période fondamentale est introduite.

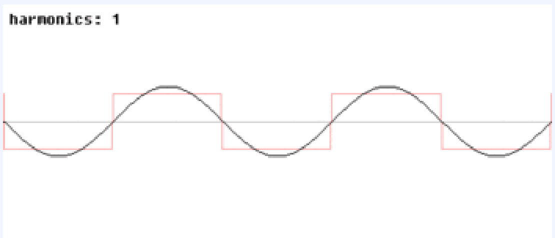
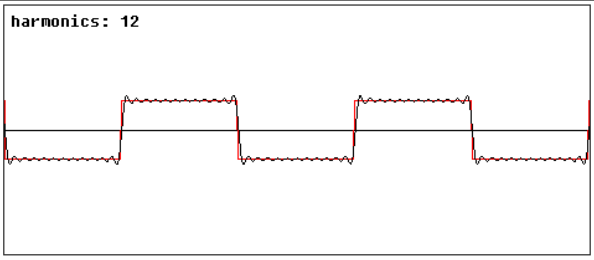
> Or il n'y a que trois catégories de sous-groupes fermés de R :
> - Le sous-groupe réduit à 0. Une fonction f n'ayant pas de période $T \neq 0$ est dite non-périodique
> - Le groupe R tout entier. Une fonction ayant tout nombre réel T comme période est constante.
> - L'ensemble des multiples ℓT_0 (ℓ entier > 0, < 0, ou = 0), d'un nombre $T_0 > 0$.
>
> Si le groupe des périodes de f est de l'une des deux dernières catégories, f est dite périodique ; dans le troisième cas, T_0 est appelée la période fondamentale de f.
> (Ibid., p. 162)

De plus, la notion de période peut être généralisée pour les fonctions sur R^n (fonction de n variables). C'est un vecteur $\vec{T}$ tel que $f(\vec{x}+\vec{T}) = f(\vec{x})$.

Les fonctions périodiques sont caractérisées par la répétition régulière des valeurs après des intervalles égaux à la période. Parmi elles, se trouvent les fonctions trigonométriques qui sont généralement les premières fonctions périodiques présentes dans l'enseignement mathématique secondaire. Plus précisément, les fonctions périodiques les plus étudiées sont les fonctions sinusoïdales.

III.1.2. Les fonctions sinusoïdales en mathématiques

Dans le document de l'encyclopédie scientifique en ligne[6], les rôles des fonctions sinusoïdales sont soulignés comme suit :

> Les fonctions sinus et cosinus apparaissent dans la description d'un mouvement harmonique simple, un concept important en physique. Dans ce contexte les fonctions sinus et cosinus sont utilisées pour décrire les projections sur un espace à une dimension d'un mouvement circulaire uniforme, le mouvement d'une masse au bout d'un ressort, ou une approximation des oscillations de faible écart angulaire d'un pendule.
>
> 
>
>
> Animation montrant la décomposition additive d'une onde carrée lorsque le nombre d'harmoniques s'accroît
>
> 
>
>
> Animation montrant la décomposition additive d'un signal carré lorsque le nombre d'harmoniques s'accroît
>
> Sont périodiques les fonctions trigonométriques dont les représentations graphiques correspondent aux modèles caractéristiques d'ondes, utilisés pour modéliser des phénomènes oscillatoires tels que le bruit ou les ondes de la lumière. Tout signal vérifiant certaines propriétés, peut être décrit par une somme (généralement infinie) de fonctions sinus et cosinus de différentes fréquences. C'est l'idée de base de l'analyse de Fourier, dans laquelle les séries trigonométriques sont utilisées pour résoudre de nombreux problèmes aux valeurs limites dans des équations aux dérivées partielles. Par exemple une onde carrée, peut être décrite par une série de Fourier :
>
> $$x_{\text{carré}}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2k-1)t\right)}{(2k-1)}.$$
>
> (L'encyclopédie scientifique en ligne)

Donc les fonctions sinusoïdales sont associées aux mouvements harmoniques simples, des mouvements importants en physique car ils participent, d'après l'auteur à la modélisation de phénomènes sonores et lumineux. Elles seraient les éléments de base qui permettent d'étudier

[6] Ce document est disponible sur le site: http://www.techno-science.net/?onglet=glossaire&definition=4938, consulté le 15 janvier 2011

tous les phénomènes oscillatoires. En effet, le texte précédent mentionne que tout signal vérifiant certaines propriétés, peut être décrit par une somme (généralement infinie) de fonctions sinus et cosinus de différentes fréquences. Dans l'exemple ci-dessus, l'onde carrée (une onde de la forme ) peut être écrite en somme des fonctions sinusoïdales, c'est-à-dire son graphique peut être interprété algébriquement par des séries de fonctions sinusoïdales.

Cette conclusion est à la base de l'analyse de Fourier qui est appliquée dans plusieurs domaines. L'analyse de Fourier ou analyse harmonique permet de décomposer une fonction périodique en une somme d'une infinité de fonctions sinusoïdales. Voici le théorème de Fourier présenté par Lecerf (1996) :

> Toute fonction périodique y(t), de période T, de fréquence N = 1/T bornée, est équivalente à une somme infinie de sinusoïdes de fréquences f = mN, m étant un entier appelé « harmonique ».
>
> $$y(t)=A_0+\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\cos(m2\pi Nt)+B_m\sin(m2\pi Nt)\right)$$. (Lecerf (1996), p. 25)

Par exemple, pour la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 < x < 5 \\ -3 & -5 < x < 0 \end{cases} \qquad \text{période } = 10$$

La série de Fourier correspondante est la suivante (Spiegel, 1974) :

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5})$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5} + \ldots \right)$$

On voit que la fonction initiale n'est pas une fonction trigonométrique. Cependant, le théorème de Fourier permet de l'écrire sous une somme infinie qui ne contient que des fonctions sinusoïdales et une constante.

Le développement en série de Fourier n'existe que pour des fonctions définies sur R tout entier et périodiques. De plus, ce développement est unique. A priori, une fonction complexe f définie sur un intervalle borné (a, b) n'en admet pas. Cependant, on peut prolonger f à R par périodicité avec une période b-a pour avoir des développements en série de Fourier. Regardons un exemple donné par Gasquet & Witomski (2000) :

> Par exemple, pour la fonction f définie sur l'intervalle (0, a), on peut avoir le développement de f en série de sinus ou de cosinus.
> Dans le premier cas, on prolonge f à (-a, a) par imparité. Ensuite, on prolonge f à R avec la période 2a. On obtient un développement en série ne comportant que des sinus.

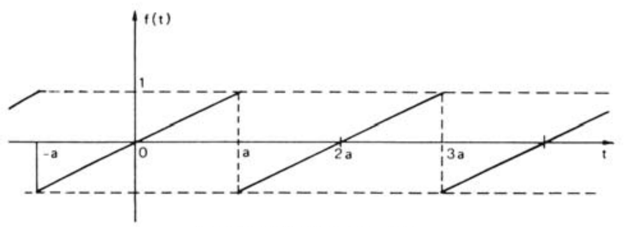


FIG. 6.2. – *Exemple pour* $f(t) = t/a$.

Par une façon analogue, on prolonge f à (-a, a) par parité et on obtient un développement en série ne comportant que des cosinus.

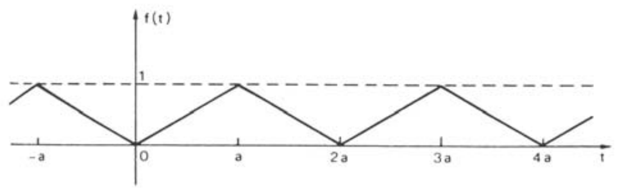


FIG. 6.3. – *Exemple pour* $f(t) = t/a$.

(Gasquet & Witomski (2000), p. 44-45)

On prolonge la fonction initiale par la parité et c'est le choix sur la parité qui permet de choisir entre les sinus ou les cosinus dans le développement en série de Fourier. Ensuite, la périodicité est utilisée pour prolonger la fonction sur R. C'est une méthode pour obtenir un développement en série de Fourier d'une fonction définie sur un intervalle borné. Ce développement n'est pas unique parce qu'il dépend essentiellement de la façon dont on effectue le prolongement périodique à toute la droite réelle.

Les séries de Fourier sont donc un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. Elles se rencontrent usuellement dans la décomposition de signaux périodiques, dans l'étude des courants électriques, des ondes cérébrales, dans la synthèse sonore, le traitement d'images, etc. On va voir l'importance des fonctions trigonométriques et des séries de Fourier dans l'étude des signaux périodiques dans la partie suivante.

III.1.3. Les fonctions sinusoïdales dans la théorie du signal

Qu'est-ce qu'un signal ?

> La notion de signal est très extensive. Il ressort de l'observation d'un phénomène certaines quantités qui dépendent du temps (de l'espace, d'une fréquence, ou d'autre chose !). Ces quantités, supposées mesurables, seront appelées des signaux. Elles correspondent, en mathématiques, à la notion de fonction (d'une ou plusieurs variables : temps, espace, etc.) qui constitue donc une modélisation. (Ibid., p. 6)

Ainsi le signal est une notion commune à plusieurs domaines qui correspond à la notion de fonction en mathématique. Pour le physicien, c'est une quantité physique mesurable qui évolue en fonction d'une ou plusieurs variables (l'espace, le temps, la fréquence,…). Pour le mathématicien, un signal est une fonction de plusieurs variables (de R^n) à valeurs multidimensionnelles (dans R^p). Ce qui signifie qu'un signal est un élément de $F_{(n,p)}$ (ensemble des fonctions de R^n dans R^p). L'idée de modélisation d'un phénomène temporel est ici centrale dans la présentation de l'objet signal. On trouve dans ce manuel quelques exemples concrets des signaux en physique.

Exemples de signaux :
- intensité d'un courant électrique ;
- différence de potentiel entre deux points d'un circuit ;
- position d'un mobile, repéré par sa position dans le temps, M = M(t), ou dans l'espace M = M(x, y, z) ;
- niveau de gris des points d'une image g(i, j) ;
- composantes d'un champ V(x, y, z) ;
- un son. (Ibid., p. 6)

Comment étudier un signal ? Quels sont les outils mathématiques pour le modéliser ? Différentes façons pour considérer un signal sont présentées par Gasquet & Witomski (Ibid.).

i) On peut le modéliser de façon déterministe ou aléatoire […]
ii) La variable peut être continue, on dit alors qu'on a un *signal analogique* x = x(t). Si elle est discrète, on a un *signal discret* x = $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Un signal discret sera le plus souvent le résultat de la discrétisation (appelée aussi *échantillonnage*) d'un signal analogique.
iii) Les valeurs x = x(t) du signal seront ici considérées comme des valeurs exactes, réelles ou complexes. Pour le traitement en ordinateur, il est, par contre, nécessaire de les stocker sous forme finie, par exemple de multiples d'une quantité élémentaire q. Cette approximation des valeurs exactes est appelée quantification […]. (Ibid., p. 6)

Le travail de modélisation s'amplifie et se complexifie. Mais l'étude d'un signal périodique est simplifié par la référence au signal sinusoïdal pur (ou monochromatique) qui est considéré comme signal élémentaire.

Signal sinusoïdal pur (monochromatique)

C'est un signal de la forme x(t) = α cos (ωt+φ).
$|\alpha| = \max|x(t)|$ est l'amplitude du signal
ω est la pulsation
$a = \dfrac{2\pi}{\omega}$ est la (plus petite) période
$\lambda = \dfrac{1}{a}$ est la fréquence
φ est la phase initiale. (Ibid., p. 9-10)

Le signal sinusoïdal pur correspond à la fonction sinusoïdale en mathématiques. Chaque élément dans la formule x(t) = α cos(ωt+φ) a une signification physique définie, par exemple α est l'amplitude et ω est la pulsation, etc. Ici la fonction cosinus est choisie pour représenter la classe des fonctions sinusoïdales.

Les signaux sinusoïdaux purs […] sont aussi les signaux périodiques les plus simples. Ceci explique leur importance. Nous allons voir dans les deux leçons suivantes qu'ils entrent dans la structure de tous les signaux périodiques. (Ibid., p. 24)

Ce paragraphe montre le rôle élémentaire et important des signaux sinusoïdaux parce que « ils entrent dans la structure de tous les signaux périodiques ». Ceci correspond au théorème de Fourier cité précédemment : toutes les fonctions périodiques peuvent être représentées par une somme qui ne contient que des fonctions sinus (ou cosinus).

III.1.4. Les fonctions sinusoïdales en Physique des phénomènes périodiques temporels

Les fonctions sinusoïdales sont donc les fonctions de base qui permettent d'étudier en physique tous les phénomènes périodiques temporels. Par l'application du théorème de Fourier, un mouvement périodique, quel qu'il soit, peut être considéré comme la superposition de mouvements sinusoïdaux. Quelles sont les caractéristiques physiques d'une fonction sinusoïdale du temps ? Quelles sont ses représentations en Physique ?

Renault (1994) nous présente l'intérêt en physique des fonctions sinusoïdales :

1.1 Origine physique

Les fonctions sinusoïdales du temps s'introduisent

– soit dans l'étude d'un oscillateur harmonique régi par l'équation différentielle :

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$$

dont la solution s'écrit, compte-tenu des conditions initiales

$$x = x_0 \cos\omega t + (v_0/\omega)\sin\omega t \, ;$$

– soit comme réponse d'un système linéaire soumis à une excitation sinusoïdale. La figure 1 en donne un exemple.

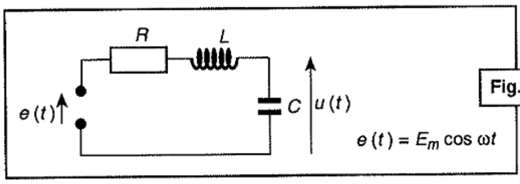


Fig. 1

Le circuit "RLC" est le système linéaire alimenté par la tension alternative $e(t)$; $e(t)$ est ici l'"excitation", $u(t)$ est la réponse.

En régime permanent (Cf. § 5), cette réponse sera de la forme

$$u(t) = v_m \cos(\omega t + \varphi)$$

(Renault (1994), p. 222-223)

Les fonctions sinusoïdales apparaissent ici comme des descriptions mathématiques pour des oscillateurs dits harmoniques ou pour les réponses de systèmes dits linéaires soumis à une excitation sinusoïdale. Ajoutons que si l'on connaît la « réponse » du système linéaire à une excitation sinusoïdale, on pourra alors former sa réponse à une excitation quelconque.

Selon Lecerf (1996), il y a trois « représentations symboliques » possibles des fonctions sinusoïdales en physique : représentation trigonométrique, représentation vectorielle et représentation par une image complexe.

+ Représentation trigonométrique :

1.2.1. Représentation trigonométrique

$$\boxed{y = a\cos(\omega t + \varphi)} \quad (1\text{-}11)$$

- ❑ a : **amplitude,** homogène à y, en principe scalaire positif. Dans certaines applications, cependant, l'amplitude pourra être algébrique ou vectorielle
- ❑ $(\omega t + \varphi)$: **phase,** homogène à un angle
- ❑ φ : **phase à l'origine** des temps
- ❑ ω : **pulsation** ($\omega = 2\pi f$)

Dérivation

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = -\,a\omega.\sin(\omega t + \varphi) = a\omega.\cos(\omega t + \varphi + \pi/2)} \quad (1\text{-}12)$$

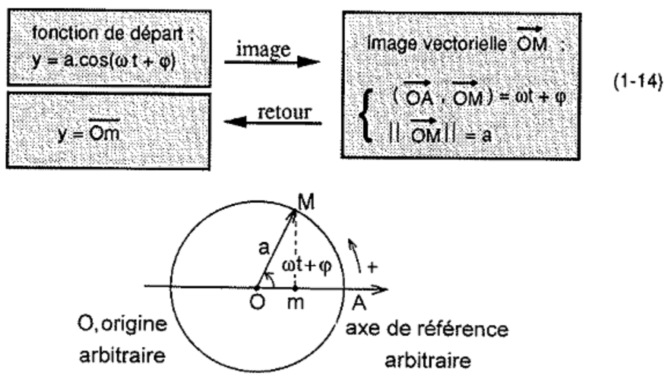
(Lecerf (1996), p. 4)

C'est une représentation algébrique de la fonction sinusoïdale y = a cos (ωt+φ). On la voit souvent dans la définition des oscillateurs harmoniques. Cette représentation donne aux différents éléments existant dans une fonction sinusoïdale des significations physiques associées aux phénomènes périodiques, comme l'amplitude, la phase et la pulsation mises en valeur comme des grandeurs physique avec leur unité. Grâce à ces significations physiques, cette représentation permet d'apporter des informations physiques sur le phénomène d'après son modèle mathématique.

+ Représentation vectorielle : vecteur de Fresnel

1.2.2. Représentation vectorielle : vecteur de FRESNEL

Définition



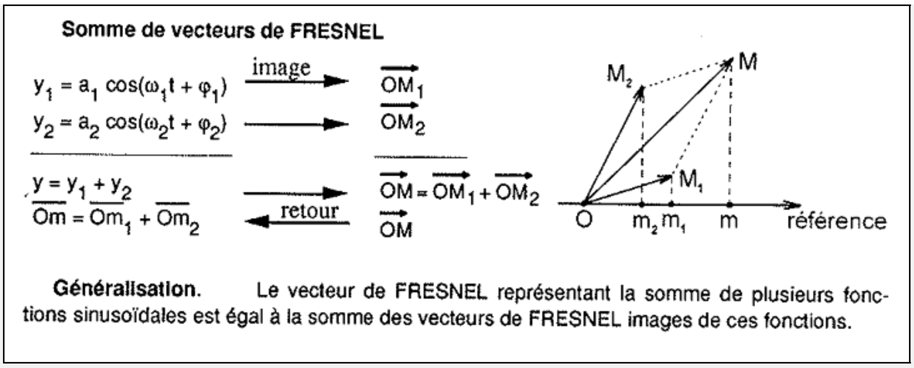
M décrit le cercle (O,a) avec la vitesse angulaire ω

(Ibid., p. 5)

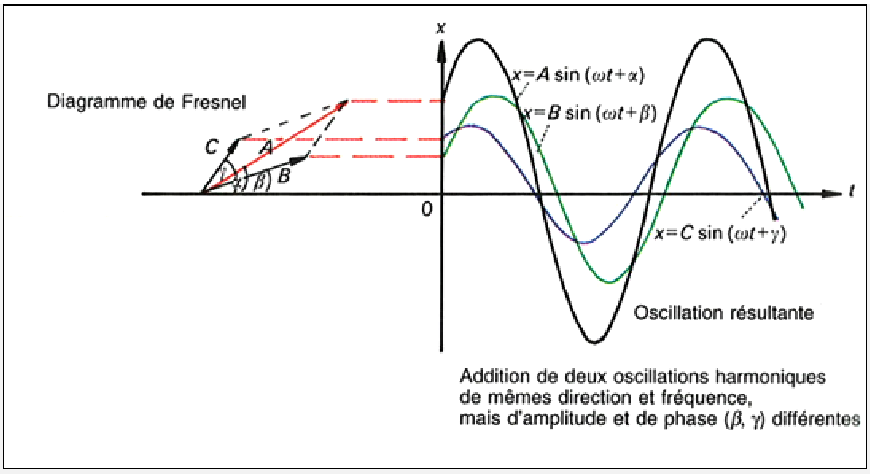
Une fonction sinusoïdale y = a cos (ωt+φ) peut être représentée par un vecteur $\overrightarrow{OM}$ (M décrit le cercle (O,a) avec la vitesse angulaire ω) avec des règles de correspondantes précises : ($\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}$) = ωt+φ et $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ = a. La valeur instantanée est égale à la projection de M sur un axe arbitraire passant par O.

Cette représentation vectorielle fait venir une vision circulaire du phénomène périodique bien différente de la vision oscillatoire que fournit la représentation trigonométrique. On peut même remarquer le changement de vocabulaire puisque ce qui est pulsation dans la première représentation devient la vitesse angulaire dans la deuxième.

L'intérêt de la représentation vectorielle est de transformer des calculs trigonométriques assez pénibles sur les grandeurs sinusoïdales en constructions géométriques simples sur les vecteurs de Fresnel. C'est particulièrement frappant pour trouver la somme de plusieurs fonctions sinusoïdales. En effet, la somme de fonctions sinusoïdales de même fréquence, très complexe sur le plan calcul algébrique, est alors remplacée par une addition de vecteurs beaucoup plus simple.



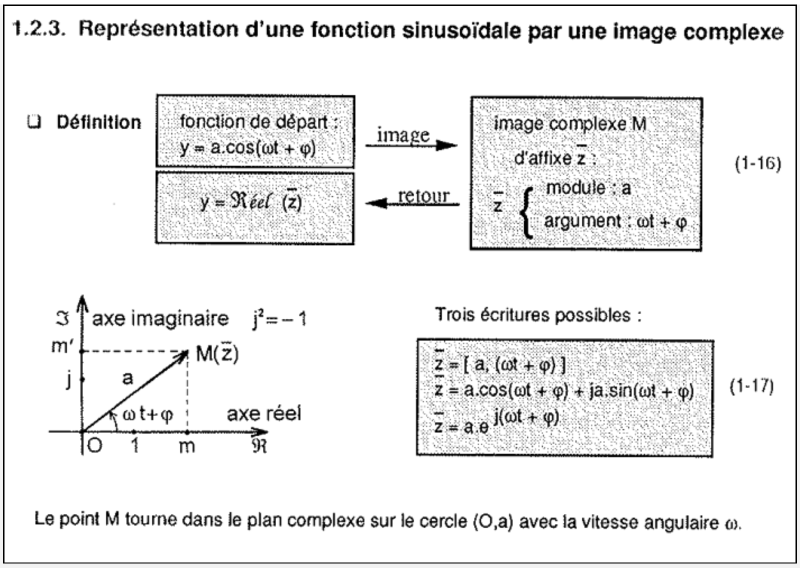
(Ibid., p. 5)



(Breuer (1987), p. 80)

+ Représentation par une image complexe :

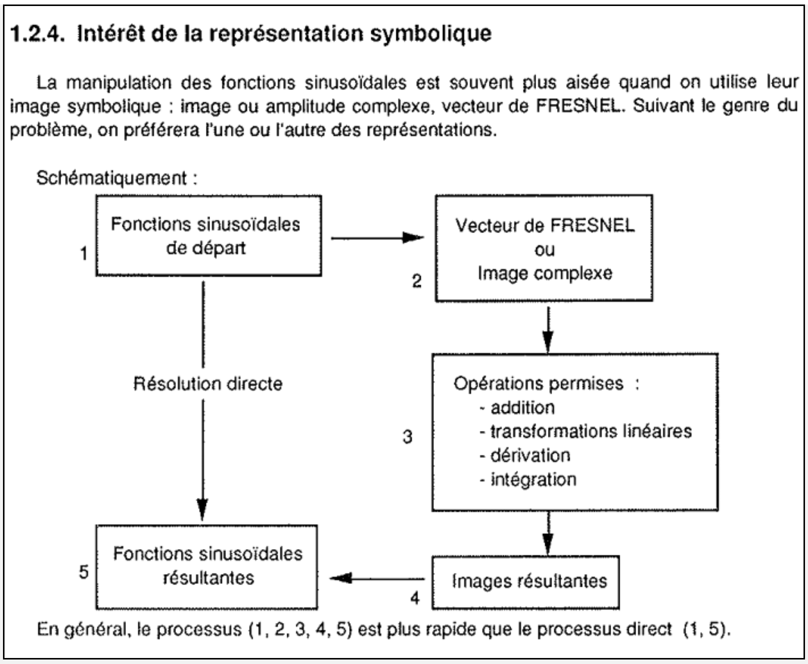
Cette représentation montre qu'une fonction sinusoïdale est considérée comme une image complexe du point M qui tourne dans le plan complexe sur le cercle (O,a) avec la vitesse angulaire ω.



(Lecerf (1996), p. 6)

L'intérêt de cette représentation vient essentiellement du fait que dans toute opération linéaire portant sur une (ou plusieurs) grandeur fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω donnée, il peut s'avérer plus économique de passer par l'écriture complexe même pour obtenir des résultats en nombre réel.

C'est ce que fait remarquer Lecerf (Ibid.) dans le schéma ci-dessous.



(Ibid., p. 8)

Dans ce schéma, Lecerf montre l'intérêt de la transformation d'une fonction sinusoïdale en un vecteur de Fresnel ou en un point du plan complexe pour des étapes intermédiaires. Notamment, suivant le genre du problème, on préférera l'une ou l'autre des représentations.

III.1.5. Le mouvement oscillatoire harmonique

Comme nous venons de le voir, les fonctions sinusoïdales apparaissent dans la présentation d'oscillateurs harmoniques. Comment ces oscillateurs harmoniques sont-ils introduits dans les traités de physique [P1] et [P2] ?

Une particule oscille quand elle se déplace périodiquement autour d'une position d'équilibre.

> En général, une oscillation est une fluctuation périodique de la valeur d'une grandeur physique au-dessus et au-dessous d'une certaine valeur d'équilibre, ou valeur centrale.
> ([P1], p. 461)

Voici quelques exemples des oscillations présentées dans [P1] :

> Certains mouvements périodiques sont des mouvements de va-et-vient entre deux positions extrêmes sur une trajectoire donnée. La vibration d'une corde de guitare ou d'un cône de haut-parleur, l'oscillation d'un pendule, le mouvement du piston d'un moteur et les vibrations des atomes dans un solide sont des exemples que l'on appelle oscillations.
> ([P1], p. 461)

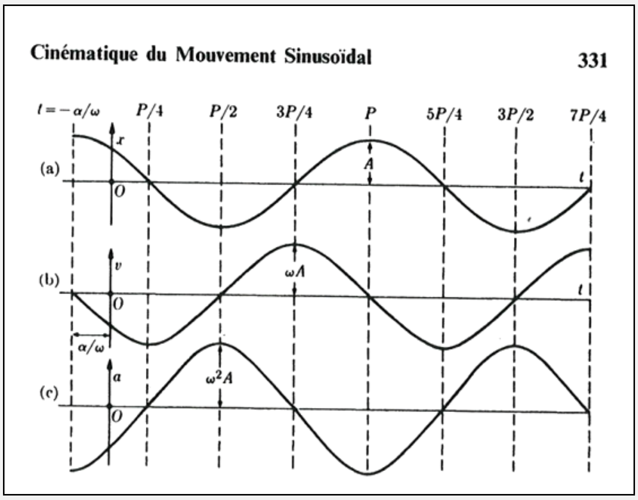
Dans [P1], une oscillation harmonique simple est définie comme oscillation qui a lieu sans perte d'énergie. Elle est représentée par la fonction $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$.

Cette oscillation est aussi appelée oscillation sinusoïdale comme dans [P2] :

> Par définition, nous disons qu'une particule se déplaçant le long de l'axe des x a un mouvement sinusoïdal lorsque son déplacement x, compté à partir de l'origine des coordonnées, est donné en fonction du temps par la relation : $x = A \cos(\omega t + \alpha)$.
> ([P2], p. 330)

Ici sa périodicité est expliquée grâce à la formule représentant le mouvement :

> La fonction cosinus se répète chaque fois que l'angle augmente de 2π. Donc le déplacement de la particule se répète après un intervalle de temps de $2\pi/\omega$. Par conséquence, le mouvement sinusoïdal est périodique et sa période est $P = 2\pi/\omega$.



> ([P2], p. 331)

Quelles sont les caractéristiques physiques d'une oscillation harmonique simple ? [P1] en présente 3 caractéristiques principales comme suit :

> 1. L'amplitude A est constante (l'oscillation est simple).
> 2. La fréquence et la période sont indépendantes de l'amplitude : pour un même système, les grandes oscillations ont la même période que les oscillations plus petites (propriété d'isochronisme).
> 3. La dépendance en fonction du temps de la grandeur qui fluctue peut s'exprimer par une fonction sinusoïdale de fréquence unique (oscillation en harmonique). ([P1], p. 464)

[P1] et [P2] proposent donc une première description mathématique d'une oscillation harmonique par une fonction sinusoïdale. Ils ajoutent une deuxième description mathématique, que nous avons déjà rencontrée dans Renault (1994), par une équation différentielle.

> Equation différentielle caractérisant les oscillations harmoniques simples :
> $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$
> Cette forme d'équation différentielle caractérise tous les types d'oscillations harmoniques simples, qu'elles soient mécaniques ou non. Les techniques utilisées pour résoudre cette équation sont valables pour tous les exemples d'oscillation harmonique simple.
> ([P1], p. 464)

> L'équation différentielle (12.12)[7] apparaît en de nombreuses occasions en physique. Chaque fois qu'on la rencontre, elle indique que le phénomène correspondant est vibratoire suivant la loi Acos ($\omega t+\alpha$), qu'elle décrive le déplacement linéaire ou angulaire d'une particule, un courant dans un circuit électrique ou la concentration dans un plasma, la température d'un corps, ou l'un de nombreux autres phénomènes physiques.
> ([P2], p. 335)

Dans son cours de physique, tome Mécanique 1, Feynman (1963) débute le chapitre consacré à l'oscillateur harmonique par un paragraphe intitulé « équations différentielles linéaires » dans lequel il explique longuement que les équations différentielles linéaires à coefficients constants modélisent de nombreux phénomènes qui ne relèvent pas tous de la mécanique :

> L'oscillateur harmonique que nous allons étudier possède des équivalents très proches dans beaucoup d'autres domaines ; bien que partant de l'exemple mécanique d'un poids au bout d'un ressort, ou de petites oscillations d'un pendule, ou encore d'autres appareils mécaniques, nous ne faisons en réalité qu'étudier une certaine *équation différentielle.* Cette équation apparaît très souvent en physique comme dans d'autres sciences, et de fait, elle est sous-jacente à tant de phénomènes que cela vaut bien la peine de l'étudier. Parmi ces phénomènes il y a les oscillations d'une masse accrochée à un ressort ; les oscillations des charges allant et venant dans un circuit électrique ; les vibrations d'un diapason créant des ondes sonores, les vibrations analogues des électrons dans un atome engendrant des ondes lumineuses ; les équations de fonctionnement d'un servo-mécanisme, comme un thermostat régulant la température ; des interactions compliquées au sein de réactions chimiques ; la croissance d'une population de bactéries en interaction avec l'apport de nourriture et les poisons produits par ces bactéries ; des renards mangeant des lapins mangeant de l'herbe, etc. (Feynman (ibid.), p. 278)

[7] $d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$

Rappelons que la solution générale d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients réels constants est une combinaison de fonctions exponentielles et trigonométriques. Feynman met ainsi en avant la capacité des fonctions trigonométriques à servir une modélisation de phénomènes physiques variés via une équation différentielle (ou une équation aux dérivées partielles).

Pour conclure, les oscillations harmoniques forment une classe importante des phénomènes périodiques dont elles constituent une première modélisation mathématique que nous appellerons dorénavant **modèle O** : les registres (au sens de Duval, 1993) de ce modèle sont soit algébriques soit graphiques.

- Deux registres algébriques :

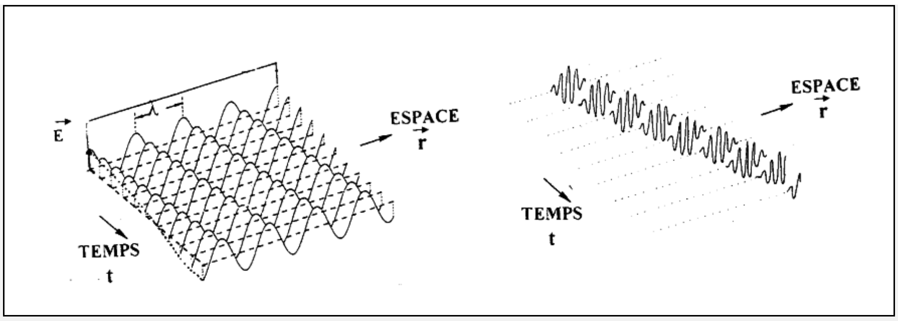
  + expression algébrique de la fonction sinusoïdale : $x = A\cos(\omega t+\varphi)$ où A est l'amplitude du mouvement, ω est la pulsation et φ est la phase initiale.

  + équation différentielle : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

- Registre graphique : courbe sinusoïdale

Le modèle O est un modèle *fonctionnel* au sens où l'objet mathématique central du modèle est une fonction.

Ce modèle O est complexifié pour mener l'étude du mouvement ondulatoire. On retrouve à cette occasion dans les traités physiques les deux registres algébriques ($f(x, t) = A \cos (kx - \omega t)$ et une équation aux dérivées partielles $\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{1}{v^2}\frac{d^2u}{dt^2} = 0$) et un registre graphique à deux ou trois dimensions.

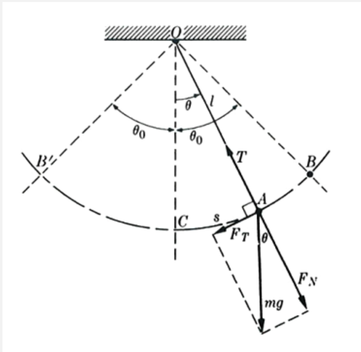


(Bonnet, 2006)

III.1.6. Le pendule – exemple du mouvement oscillatoire harmonique

Après l'étude générale sur le mouvement oscillatoire, les traités [P1] et [P2] donnent une place à l'étude des pendules, le pendule simple, le pendule composé et le pendule de torsion.

Le mouvement du pendule simple est un exemple de mouvement sinusoïdal. Un pendule simple est défini comme une particule de masse m suspendue à un point O par un fil de longueur l et de masse négligeable.



Mouvement oscillatoire d'un pendule

([P2], p. 337)

Si l'angle θ est petit, ce qui est vrai si l'amplitude de l'oscillation est petite, l'équation différentielle relative au mouvement du pendule est $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$.

C'est une équation différentielle identique à l'équation (12.12) où x est remplacé par θ, et ce qui se rapporte au mouvement angulaire et non plus au mouvement linéaire. Ainsi, nous pouvons conclure que, dans les limites de notre approximation, le mouvement angulaire du pendule est sinusoïdal avec $\omega^2 = g/l$. L'angle θ peut être écrit sous la forme $\theta = \theta_o \cos(\omega t + \varphi)$. ([P2], p. 337)

La période d'oscillation du pendule simple est P = $2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$. Elle est indépendante de la masse du pendule. Le modèle du pendule simple prédit donc la propriété d'isochronisme que Galilée avait estimée à propos des chandeliers de la cathédrale de Pise.

Pour allumer ces chandeliers, on devrait les tirer vers une galerie. Lorsqu'on les lâchait, ils oscillaient pendant un certain temps. Un jour, Galilée mesura la durée des oscillations en utilisant les battements de son pouls en guise de chronomètre et constata avec surprise que la durée des oscillations ne variait pas, même si leur amplitude diminuait. Cette propriété d'isochronisme (*iso* = identique, *chronos* = temps) fut à la base des premières horloges à pendule. ([P1], p. 462)

De manière similaire, pour le pendule composé et le pendule de torsion, en supposant que les oscillations sont de faible amplitude, les mouvements oscillatoires angulaires sont sinusoïdaux.

Si l'amplitude de l'oscillation d'un pendule est grande, les oscillations ne sont plus des oscillations sinusoïdales et la période augmente au fur et à mesure que l'amplitude θ_o.

Outre l'application du pendule simple pour la régulation des horloges, il est utilisé pour mesurer avec précision l'accélération de la pesanteur, g = $\frac{P^2}{4\pi^2}l$.

Depuis Huygens, la notion de pendule a joué un rôle important dans le développement de la mécanique, d'une part dans la définition des durées égales en chronométrie, d'autre part comme exemple d'application des principes de la dynamique. De plus, on a souvent tendance à dénommer pendule un ensemble de solides animés de mouvements vibratoires assez généraux. (Encyclopédie universalis en ligne)

Ainsi le pendule est une réalisation mécanique du modèle O qui est repris en Acoustique, en Optique et en Electricité.

III.2. Les mouvements circulaires et le modèle C

Intéressons-nous maintenant aux mouvements circulaires qui constituent d'autres formes de mouvements périodiques. Comment les mouvements circulaires sont-ils étudiés dans les traités de physique [P1] et [P2] ? Quels liens ces traités font-ils entre le mouvement circulaire et l'oscillation harmonique ?

Disons tout de suite que les ouvrages [P1] et [P2] ne placent pas le mouvement circulaire dans l'étude des mouvements périodiques. En fait, le mouvement périodique n'est abordé qu'à travers l'oscillation harmonique. Par contre, le mouvement circulaire est présenté avant la définition d'un mouvement périodique. Dans les mouvements circulaires, le mouvement circulaire uniforme est le plus étudié. [P1] le définit en s'appuyant sur la notion de vitesse (linéaire) tandis que [P2] le définit grâce à la vitesse angulaire. Notons qu'entre la vitesse linéaire v et la vitesse angulaire ω existe une relation simple : $v = R.\omega$ (R est le rayon du cercle).

● Le mouvement circulaire uniforme dans [P1]

C'est le mouvement d'une particule se déplaçant à une vitesse de module constante v sur un cercle de rayon R ([P1], p. 102). Regardons la figure suivante qui présente la direction et la module du vecteur de vitesse v.

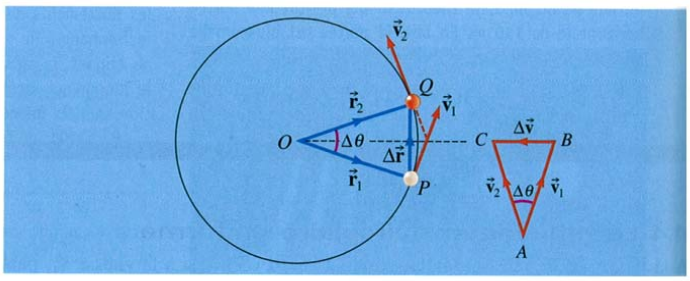


Figure 4.23 ▶ Une particule se déplace sur un cercle de rayon r avec une vitesse de module constant. Durant un intervalle de temps quelconque Δt, les orientations du vecteur position $\vec{r}$ et de la vitesse $\vec{v}$ varient selon le même angle $\Delta\theta$. Le déplacement $\Delta\vec{r}$ pendant Δt est perpendiculaire à la variation de vitesse $\Delta\vec{v}$. Les triangles OPQ et ABC sont deux triangles isocèles dont les angles sont identiques.

([P1], p.102)

L'accélération du mouvement est constante en module mais pas en direction :

$$\vec{a}_r = -\frac{v^2}{r}\vec{u}_r$$

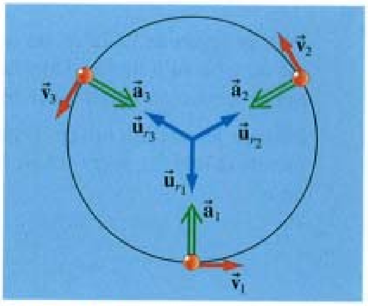


Figure 4.24 ▲
Lorsqu'une particule est animée d'un mouvement circulaire uniforme, son accélération centripète est constante en module mais pas en direction.

La période T est le temps nécessaire pour effectuer une révolution, c'est-à-dire pour parcourir une distance égale à 2πr, T = 2πr/v. ([P1], p. 103)

Donc, ici pour le mouvement circulaire uniforme, on n'étudie brièvement que la vitesse, l'accélération et la période. Bien que la définition du mouvement périodique ne soit pas encore introduite, on donne ici la définition de la période d'un mouvement circulaire uniforme. La notion de vitesse angulaire n'est pas abordée.

Ce mouvement se retrouve dans [P1] dans la partie d'étude de la rotation d'un corps rigide autour d'un axe fixe. En effet, lorsqu'un corps tourne autour d'un axe fixe en O, chaque particule décrit une trajectoire circulaire.

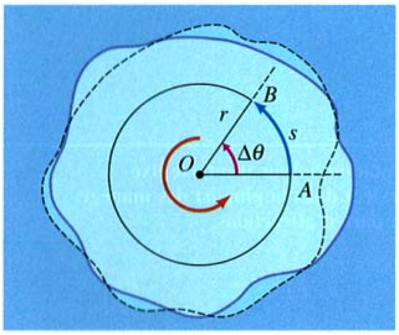


Figure 11.2 ▲
Lorsqu'un corps tourne autour d'un axe fixe en *O*, chaque particule décrit une trajectoire circulaire. En radians, $\Delta\theta = s/r$.

([P1], p. 322)

Juste à ce moment, on introduit la notion de vitesse angulaire :

La vitesse angulaire est le taux de variation de la position angulaire θ par rapport au temps.
[…]
On peut aussi définir la vitesse angulaire comme une grandeur vectorielle orientée le long de l'axe de rotation (Figure 11.3).

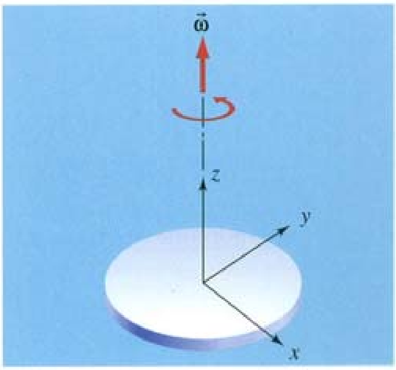


Figure 11.3 ▲
L'orientation du vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est donnée par la règle de la main droite.

([P1], p. 323)

Quand la vitesse angulaire est constante, les mouvements des particules sont circulaires uniformes. Cependant, [P1] n'aborde pas ce problème, seules les définitions de la période et de la fréquence sont présentées :

> On définit alors la période T comme la durée d'une révolution complète, mesurée en secondes, et la fréquence f comme le nombre de révolution, ou tours, par seconde (tr/s).
> $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ ([P1], p. 323)

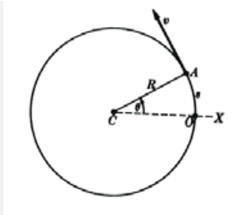
On trouve ici l'image de la grande roue présentée comme un exemple de la rotation autour d'un axe fixe.

La rotation autour d'un axe fixe intervient dans la plupart des manèges d'un parc d'attractions.

([P1], p. 101)

● Le mouvement circulaire uniforme dans [P2]

> Le mouvement circulaire est un mouvement où la trajectoire est un cercle.
> […]

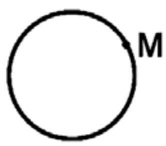


> Particulièrement intéressant est le cas du mouvement circulaire uniforme, c'est-à-dire le mouvement où ω = constante (ω = dθ/dt est la vitesse angulaire).
> Dans ce cas, le mouvement est périodique et la particule passe en un point quelconque du cercle à intervalles de temps réguliers. La période P est le temps pour faire un tour complet ou révolution, et la fréquence ν est le nombre de révolution par unité de temps. ([P2], p. 97)

Le mouvement circulaire uniforme est donc un mouvement périodique caractérisé par une trajectoire circulaire et une vitesse angulaire constante. Pour [P2], c'est un modèle de base car les notions de période et de fréquence s'appliquent d'après lui, à tous les phénomènes périodiques cycliques :

> Les notions de période et de fréquence s'appliquent à tous les phénomènes périodiques qui se présentent sous la forme cyclique, c'est-à-dire qui se répètent identique une fois chaque cycle terminé. Par exemple, le mouvement de la terre autour du soleil n'est ni circulaire ni uniforme, mais périodique. C'est un mouvement qui se répète à chaque fois que la terre achève une orbite. La période est le temps nécessaire pour achever un cycle, et la fréquence est le nombre de cycle par seconde. ([P2], p. 98)

Dorénavant, nous considérons le mouvement circulaire uniforme comme un modèle de phénomène périodique, **modèle C,** lequel est caractérisé par une trajectoire circulaire et une vitesse angulaire constante. Le registre graphique privilégié par ce modèle est le cercle.



Trajectoire circulaire et ω constant

Il existe aussi un registre algébrique pour ce modèle que Feynman (1963) présente ainsi :

> Nous savons également que la composante x, à un certain moment, vaut le produit du rayon par cos θ, et que y vaut celui du rayon par sin θ.
> $$x = R \cos \theta,\ y = R \sin \theta$$
> (Feynman (1963), p. 282)

Notons que θ = ωt avec ω est la vitesse angulaire du mouvement.

Ce registre algébrique sert à Feynman pour démontrer que :

> Le mouvement d'une masse attaché un ressort est en fait le même mouvement que celui de la composante x de la position d'un objet tournant sur un cercle à la vitesse angulaire ω.
> (Ibid., p. 283)

III.3. L'articulation entre les deux modèles C et O

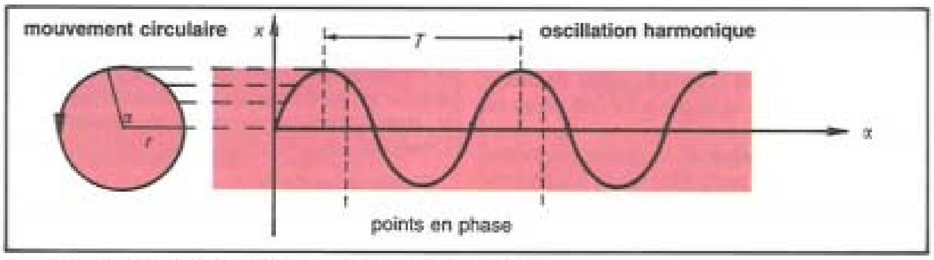
Dans les ouvrages [P1] et [P2], l'articulation entre les deux modèles C et O n'est pas présentée explicitement. Nous ne trouvons qu'une seule remarque dans [P2] qui fait un rappel du mouvement circulaire uniforme quand il aborde la notion de fréquence de l'oscillation sinusoïdale :

> La quantité ω, appelée pulsation (ou fréquence angulaire) de la particule oscillante, est liée à la fréquence par : $\omega = 2\pi/P = 2\pi\nu$, une relation semblable à l'équation (5.48)[8] pour le mouvement circulaire. ([P2], p. 330)

Cette remarque n'insiste que sur la ressemblance entre le mouvement circulaire uniforme et l'oscillation harmonique pour les relations mathématiques entre la fréquence, la période et la vitesse angulaire.

Dans « Atlas de la Physique », Breuer (1987) aborde cette articulation plus amplement :

> L'oscillation harmonique peut être représentée comme la projection sur un plan d'un mouvement circulaire uniforme.



Projection sur un plan d'un mouvement circulaire uniforme

> (Breuer (1987), p. 38-39)

Ce schéma nous montre que l'oscillation harmonique et le mouvement circulaire uniforme peuvent être tous deux décrits par une même fonction mathématique (fonction sinusoïdale).

Cependant, à l'analyse des manuels précédents nous découvrons que le mouvement circulaire uniforme n'est qu'une partie de la branche Mécanique peu développée par les manuels eux-mêmes. En effet, les manuels universitaires en viennent tout de suite à l'oscillation harmonique et sa représentation par des fonctions périodiques. Ils insistent particulièrement sur les oscillations harmoniques parce qu'elles leur permettent d'étudier tous les autres phénomènes périodiques. Dans cet esprit, le mouvement circulaire uniforme n'est abordé que comme un modèle intermédiaire pour l'étude de l'oscillation harmonique.

Par exemple, dans son cours, Feynman (1979) étudie d'abord l'oscillation harmonique qui est construite à partir de l'équation différentielle : $md^2x/dt^2 = -kx$. Ensuite, est établi le lien entre ce mouvement et le mouvement circulaire uniforme.

> Le fait d'utiliser des cosinus dans la solution de l'Eq.(21.2)[9] nous suggère qu'il pourrait bien y avoir une relation avec des cercles. C'est artificiel, bien sûr, car on ne peut dire qu'un cercle soit vraiment lié au mouvement linéaire – la masse ne fait que monter et descendre.
> […]
> On peut vérifier expérimentalement que le mouvement ascendant et descendant d'une masse liée à un ressort est le même que celui d'un point tournant sur un cercle. La Fig.(21-3) montre un arc lumineux projetant sur un écran l'ombre portée d'un ergot sur une roue et

[8] $\omega = 2\pi/P = 2\pi\nu$
[9] $md^2x/dt^2 = -kx$

d’une masse oscillant verticalement, mis l’un à côté de l’autre. Si nous laissons partir la masse au bon endroit et au bon moment, et si la vitesse de la roue est correctement ajustée à l’égalité des fréquences, les deux ombres doivent se suivre exactement.

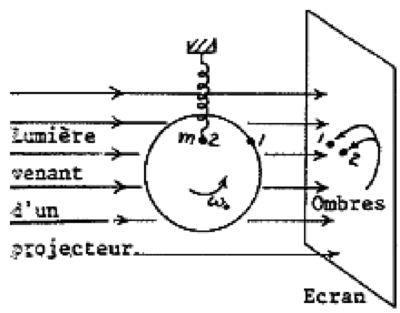


Fig. 21–3. Démonstration de l'équivalence entre le mouvement harmonique simple et le mouvement circulaire uniforme.

(Feynman (1979), p. 282)

Ici, Feynman rapproche les deux mouvements par les représentations mathématiques et aussi par l’expérimentation. Pour lui selon les problèmes posés il y a intérêt à passer d’un modèle à l’autre :

> Nous pouvons remarquer que le mouvement circulaire uniforme et le mouvement oscillatoire vertical sont très proches mathématiquement parlant, et que nous pouvons donc étudier le mouvement oscillatoire d’une manière plus simple en l’imaginant comme la projection de quelque chose qui se déplace sur un cercle.
> […]
> Ce faisant nous serons en mesure d’étudier notre oscillateur à une dimension par l’intermédiaire du mouvement circulaire, ce qui est bien plus facile que de résoudre une équation différentielle. (Ibid., p. 283)

Ainsi, Feynman propose la transformation de modèle O en modèle C pour étudier le modèle O d’une manière plus simple et plus facile. Nous avons vu déjà cette idée à l’œuvre chez Lecerf (1996) quand il aborde les diverses représentations d’une fonction sinusoïdale (cf. partie III.1.4). Le modèle C y est considéré comme un modèle intermédiaire pour étudier des modèles O, notamment dans la décomposition de plusieurs oscillations.

Nous retrouverons ce rôle d’intermédiaire du modèle C dans l’enseignement mathématique secondaire lors qu’il s’agira d’introduire les notions d’arcs et d’angles trigonométriques. La définition d’un arc ou d’un angle trigonométrique s’appuiera alors sur le mouvement d’un point M sur un cercle (implicitement à vitesse constante pour éliminer le temps). De plus, le travail sur les fonctions trigonométriques reviendra souvent à un travail sur le cercle appelé dans ce contexte cercle trigonométrique (cf. l’analyse institutionnelle du chapitre 2).

Nous venons d’enquêter sur les modèles mathématiques de phénomènes périodiques et de constater que les modèles C (les mouvements circulaires uniformes) et O (les oscillations harmoniques) sont pour les physiciens les modèles élémentaires pour étudier les phénomènes périodiques temporels. Ces modèles sont le résultat d’un processus de modélisation sur la genèse duquel nous allons nous interroger.

IV. Modélisation mathématique de phénomènes physiques

IV.1. Ce qu’en disent les physiciens

Différentes références sur lesquelles nous nous appuyons sont citées par Smyrnaiou (2003) :

> Une partie essentielle de l'activité scientifique consiste à utiliser des modèles, à les modifier, à les valider voire à en créer de nouveaux. C'est pourquoi de nombreux auteurs s'accordent à penser que la modélisation devrait être au centre de l'enseignement scientifique (Riley, 1990 ; Martinand, 1992, 1994 ; Lemeignan & Weil-Barais, 1993 ; Bliss, 1994; Kurtz dos Santos & Ogborn, 1994 ; Mellar et al., 1994 ; Teodoro, 1994 ; Tiberghien, 1994 ; Hestenes, 1996 ; Jackson, Stratford, Krajcik, et Soloway, 1996; Dimitracopoulou et al., 1999 ; Komis et al., 1998 ; Gobet, 2000).
> (Smyrnaiou (2003), p. 17-18)

Selon Von Neumann, cité par Smyrnaiou (Ibid.), la science ne doit pas essayer d'expliquer, ni même interpréter mais doit construire des modèles. Pour lui, le cœur d'un modèle est une construction mathématique :

> The sciences do not try to explain, they hardly even try to interpret; they merely make models. By a model is meant a mathematical construct which, with the addition of certain verbal interpretations, describes observed phenomena. The justification of such a mathematical construct is solely and precisely that it is expected to work.
> (John von Neumann, 1947, p. 180-196, cité par Smyrnaiou (2003), p. 17-18)

Allaire (2005) précise :

> La modélisation mathématique est l'art (ou la science, selon le point de vue) de représenter (ou de transformer) une réalité physique en des modèles abstraits accessibles à l'analyse et au calcul. (Allaire (2005), p. 1)

Henry (2001) évoque les registres de représentation pour caractériser les modèles mathématiques :

> Ce modèle peut être représenté dans différents systèmes de signes : images, schémas, langages ou symbolismes, s'inscrivant dans différents registres de représentations, plus ou moins isomorphes.
> […]
> Parmi les différents registres de représentations, le langage et le symbolisme mathématique permettent des descriptions puissantes sur lesquelles peuvent opérer des propriétés et des algorithmes généraux. Nous les appellerons **« modèles mathématiques ».**
> (Henry (2001), p. 152)

Le modèle mathématique exprime les propriétés et les relations physiques par des équations et des graphiques. Par exemple, le modèle quantitatif fonctionne sur des grandeurs mesurables et les relations régissant les grandeurs sont exprimées par des formules algébriques.

C'est ce que dit Israel (1996) en parlant du langage mathématique :

> Pour traduire en langage mathématique un phénomène, il faut déterminer une ou plusieurs variables décrivant l'état du phénomène à un instant donné (dans le cas évidemment où il s'agit d'un phénomène dynamique, c'est-à-dire d'un phénomène qui évolue dans le temps).
> (Israel (Ibid.), p. 24)

Les mathématiques permettent ainsi de formuler les lois fondamentales mais aussi de prédire de nouveaux phénomènes, d'en calculer l'évolution, etc. Au-delà d'une description, ils enrichissent notre connaissance de la réalité. Cohen-Tannoudji (2002) insiste sur l'exigence de maîtriser l'évolution temporelle d'un système physique :

> Dans l'infiniment complexe, la modélisation consiste à remplacer une réalité trop complexe pour que l'on puisse rendre compte de l'évolution de tous ses degrés de liberté, par un modèle (concret ou mathématique) ou une simulation informatique, dont l'évolution est prédictible ou calculable. L'anticipation, qui est au temps ce que l'extrapolation est à l'espace, est le mode de raisonnement qui s'appuie sur la modélisation.
> (Cohen-Tannoudji (2002), p. 30)

Ainsi même si tous les physiciens ne limitent pas la modélisation à ses formes mathématiques (l'exemple des modèles analogiques est souvent évoqué), tous reconnaissent que la modélisation nécessite un processus cognitif qui mette en relations deux « mondes » de connaissances, l'un relatif à la théorie (et ses modèles mathématiques si elle en a) et l'autre au monde réel.

IV.2. Le processus de modélisation de phénomènes physiques

Quel est le processus de modélisation en science physique ? Comment construit-on un modèle pour un phénomène physique ?

On sait que dans de nombreux de cas, le modèle n'est pas préétabli, ou bien qu'il faut sélectionner un modèle pertinent parmi plusieurs disponibles, ou encore qu'il faut simplifier des modèles connus mais trop complexes.

Cette idée est présente dans la définition suivante du modèle :

> Un modèle est une construction abstraite destinée à représenter de manière simplifiée et sélective certains spécifiques d'un objet technique ou d'un processus réel qui, du fait de sa très grande complexité, ne peut être appréhendé dans sa globalité.
> (Union des professeurs de sciences et techniques industrielles (1993), p. 10)

Dans le processus de modélisation, on cherche à construire une image simplifiée de la réalité qui en conserve certains aspects caractéristiques lesquels semblent être pertinents et en néglige d'autres en fonction de questions que l'on se pose sur la réalité. De plus, la validation d'un modèle, c'est-à-dire l'évaluation du degré d'approximation des résultats théoriques obtenus avec les valeurs expérimentales correspondantes pour choisir le modèle le plus adapté à la situation étudiée, est une étape délicate qui relève d'une connaissance spécialisée des phénomènes étudiés et des allers-retours expérimentaux :

> Lorsqu'on modélise, on retient seulement certains aspects du réel et on décide arbitrairement de négliger tous les autres. Les résultats que peut fournir l'exploitation d'un modèle dépendent évidemment de ce choix, et il est par conséquent indispensable d'en vérifier la validité expérimentalement, a posteriori. Il peut arriver qu'un modèle se révèle tout à fait impropre à l'usage que l'on espérait en faire : il faut le reconstruire en prenant d'autres hypothèses. (Ibid., p. 13)

Voici un exemple d'un modèle qui est valide pour certaines questions mais non valide pour d'autres :

> […] l'hypothèse du solide indéformable, utilisée couramment en mécanique, consiste à négliger la déformabilité des objets. Ce modèle est valable pour étudier le mouvement de pièces rigides sur lesquelles s'appliquent des efforts modérés, mais ne permettra jamais de prévoir des phénomènes vibratoires […]. (Ibid., p. 14)

S'appuyant sur les points de vue développés par des didacticiens de la physique à partir de 1994 (Tiberghien, 1994 ; Tiberghien & Magalakaki, 1995 ; Tiberghien, 1996 ; Tiberghien & de Vries, 1997, Lacroix, 1996 ; Collet, 1996 ; Pateyron, 1997 ; Bécu-Robinault, 1997 ; Quintana-Robles, 1997 ; Guillaud 1998), Buty (2000) décrit le processus de modélisation en physique par quatre ensembles de choix :

> - Il faut d'abord choisir la théorie applicable au champ des phénomènes étudiés. […]
> - Le phénomène qu'on traite est par essence complexe et multiforme ; sa modélisation oblige donc ensuite à désigner quels sont les éléments pertinents, quels sont au contraire ceux qu'il faut négliger. En ce sens, le physicien construit son champ expérimental.
> - Puis il faut associer aux éléments retenus les représentations externes les plus commodes dans le cadre du modèle. Ces deux opérations définissent la « sémantique » du modèle, ce qui donne sens à ses éléments.
> - Enfin il faut préciser les relations qu'entretiennent les éléments du modèle les uns avec les autres. Ces relations constituent la « syntaxe » du modèle. (Buty (2000), p. 14-15)

Buty (ibid.) présente aussi deux niveaux de modélisation qui sont associés aux deux grandes catégories : ce qui relève de la réalité expérimentale, le monde des objets et des événements ; et ce qui relève des outils qui permettent d'agir sur la réalité, le monde des théories et des modèles. Discutant sur les conditions d'un enseignement de la modélisation, il propose un niveau *intermédiaire* qui devra tenir un peu des deux niveaux : ce sera une représentation du modèle, mais elle aura un aspect matériel, réifié. Il avance l'idée de constituer un « modèle matérialisé » qui soit une représentation du modèle de la physique qu'on souhaite voir mis en œuvre par les élèves mais une représentation sensible et non conceptuelle, et même dans certains cas une représentation sur laquelle ils puissent agir. Les guillemets employés par l'auteur prouvent que le modèle matérialisé auquel il fait référence pourrait être un modèle mathématique (géométrique ou algébrique, par exemple) avec ses ostensifs manipulables comme des objets matériels. Le niveau intermédiaire mobiliserait alors un ou des modèles intermédiaires qui pourraient être des modèles mathématiques.

> Lorsque nous voulons prédire ou décrire un phénomène physique concret, nous pouvons généralement passer par un modèle analytique où les différentes grandeurs sont exprimées par des indéterminées (valeurs abstraites) et les lois de la physique par des fonctions, dans la mesure où elles sont connues (le cas échéant, nous pouvons faire une hypothèse et la tester). En mettant en équation un phénomène physique, nous traduisons la réalité en une expérience mathématique, virtuelle, selon certaines règles. Nous procédons à une simulation de la réalité portée sur des grandeurs exprimées. (Isoz, 2011)

Buty (ibid.), suite aux travaux de Tiberghien, aboutit au schéma suivant :

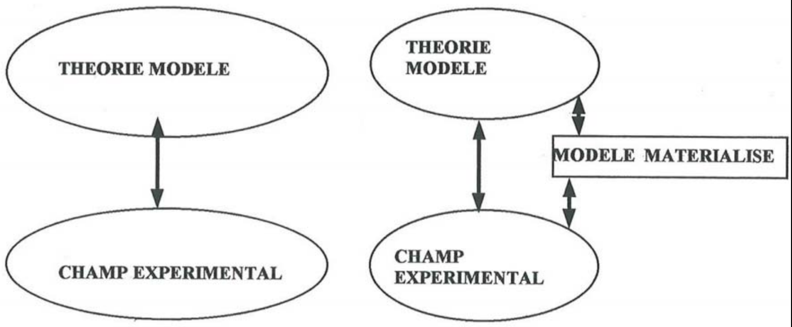


Figure 1-5 : l'aide apportée par le modèle matérialisé

Dans le schéma de droite, le modèle matérialisé est présenté comme un niveau à part ; cette présentation correspond bien à son statut d'intermédiaire entre le modèle théorique et le champ expérimental. Cependant, si on affine l'analyse, on peut le décomposer en deux éléments : l'un qui appartient au champ expérimental dans la mesure où des informations perceptives peuvent en être extraites par les élèves, et où ils peuvent éventuellement le manipuler ; l'autre qui est une représentation du modèle théorique et appartient donc pleinement au monde théorie/modèle.

(Buty (2000), p. 26)

Une autre approche sur le processus de modélisation est proposée par Martinand (1992). Nous reprenons les analyses de Smyrnaiou (2003) pour présenter cette approche du processus de modélisation du point de vue épistémologique présenté par Martinand :

Dans une approche épistémologique Martinand (1992) propose un schéma de la modélisation à deux niveaux (figure 4) distinguant le modèle et son référent. Il s'agit d'une représentation graphique et synthétique influencée par les réflexions de Vergnaud, Walliser et des linguistes. Le niveau phénoménologique concerne l'étude des objets, des phénomènes, des relations entre objets et phénomènes et les connaissances pratiques (niveau du « référent empirique »).

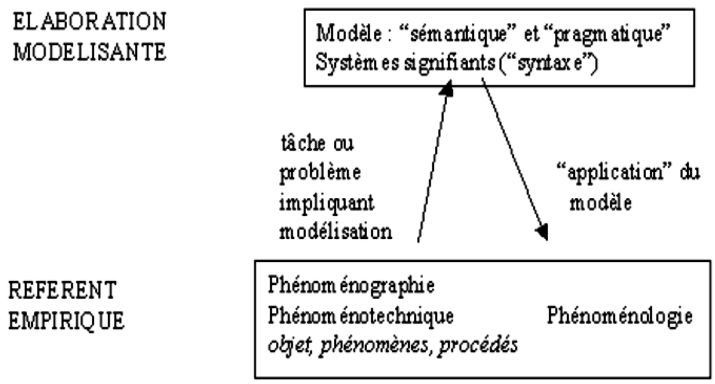


Figure 4: Le schéma de modélisation selon Martinand (1992)

La phénoménologie est la description de l'ensemble des situations expérimentales en termes d'objets, d'action et d'événements. En sciences physiques, selon Martinand la construction de la phénoménologie implique la mobilisation de concepts, de représentations symboliques, de procédures et de règles de manipulation. Lors de la construction d'un modèle, on peut identifier les règles entre le plan phénoménologique, le plan des opérations mentales et les représentations symboliques. On distingue deux types de règles : les règles de fonctionnement entre les différents systèmes de représentations symboliques (syntaxe du modèle) et les règles de correspondance entre le référent et les représentations symboliques (sémantique du modèle) (Chomat et al., 1991). La phénoménographie est la description empirique déjà conceptualisée (dessins, courbes, graphiques) et la phénoménotechnique

> correspond aux règles d'action et aux savoir-faire nécessaires pour utiliser le matériel expérimental. (Smyrnaiou (2003), p. 27-28)

On retrouve cette même approche chez Cohen-Tannoudji (2002) discutant la notion de modèle en physique théorique. Il distingue deux significations à donner au terme de modèle :

> Dans le développement de toute théorie physique, il semble bien que les modèles jouent des rôles qui sont distincts et qui dépendent de l'état d'avancement de la théorie. Dans la phase exploratoire, alors qu'il s'agit de défricher les informations observationnelles ou expérimentales, les modèles sont qualifiés de « phénoménologiques » ou « heuristiques ». Les modèles ressemblent à ce que les ingénieurs appellent un « modèle réduit » ou une « maquette ». Ils sont une maquette d'une théorie qui n'existe pas encore, qui est en cours d'élaboration. En ce sens, les modèles jouent un rôle transitoire : je les qualifie de *catalyseurs heuristiques*. Au fur et à mesure que se renforce la théorie en construction, les modèles sont perfectionnés, puis délaissés et remplacés par d'autres plus performants. Arrive un moment où la théorie semble bien établie et où elle recueille un consensus qui s'élargit. Mais, même arrivée à ce stade, la théorie doit être complétée par des données extérieures, par des « paramètres libres » ce qui signifie qu'elle comporte encore une part de modélisation. A ce stade, on parlera de *modèle standard* pour évoquer le cadre théorique de référence comportant le formalisme le plus général ainsi que les paramètres, fixés grâce à l'expérience, qui permettent la confrontation des prédictions théoriques aux données expérimentales. (Cohen-Tannoudji (2002), p. 31)

Les qualificatifs de transitoire ou d'heuristique viennent souligner qu'un processus de modélisation en vue de répondre à des questions sur une réalité comporte des modèles non aboutis mais qui font progresser la modélisation. Cette idée concorde avec celle de niveau intermédiaire de l'approche précédente.

Dans les deux approches, l'accent est mis sur le contexte expérimental dans lequel apparaissent les phénomènes étudiés que l'on cherche à modéliser et le recours à l'expérimental pour valider ou invalider le pas de modélisation. « Les différentes lois sont élaborées historiquement très souvent sur des faits d'abord empiriques et sont vérifiées expérimentalement par la suite » rappelle Isoz (2011).

Mais ce contexte expérimental n'est pas le plus souvent celui de la réalité elle-même, mais renvoie déjà à un certain niveau d'abstraction mathématique que nous appellerons *modèle intermédiaire*. C'est le cas par exemple des simulations, notamment des simulations informatiques.

Nous retenons finalement le qualificatif d'intermédiaire pour qualifier un modèle en développement ne présentant pas encore toutes les qualités d'un modèle mathématique capable de fournir les réponses aux questions que le modélisateur se pose sur la réalité qu'il étudie. Voici le schéma que nous adoptons pour résumer le processus de modélisation :

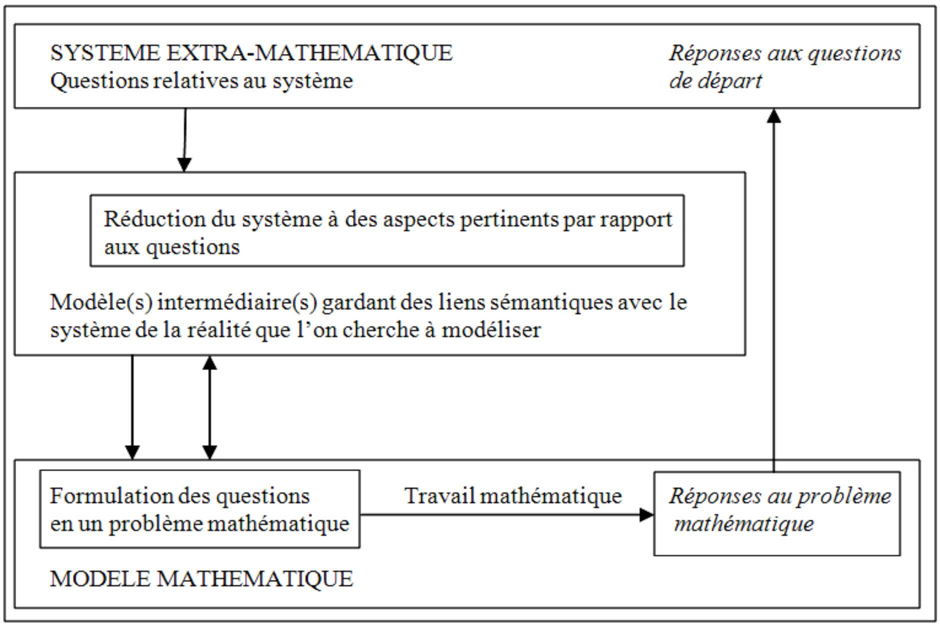


Figure 1. Schéma du processus de modélisation (Bessot (2010))

Ce schéma découpe le processus de modélisation en 4 phases :

Phase 1. Passage du système extra mathématique à un modèle intermédiaire

Le modèle intermédiaire entre la situation extra mathématique et le modèle mathématique à construire représente un premier niveau d'abstraction de la « réalité ». Ce modèle évolue au fur et à mesure du travail de modélisation : un modèle intermédiaire peut être plus ou moins proche sémantiquement de la situation réelle considérée ou du modèle mathématique à construire.

Phase 2. Passage du modèle intermédiaire au modèle mathématique

Phase 3. Phase de travail mathématique dans le modèle mathématique

Phase 4. Retour à la situation étudiée pour transformer les réponses au problème mathématique en des réponses aux questions initiales et les confronter à la réalité modélisée.

V. Conclusion

Nous avons montré l'importance du temps dans l'étude de la science physique et l'imbrication des concepts de temps et de périodicité à travers la mesure du temps. Les fonctions sinusoïdales prennent une place essentielle dans la modélisation des phénomènes périodiques temporels. Ces fonctions sinusoïdales sont d'après les physiciens les acteurs mathématiques principaux de la modélisation à travers des modèles C et O ainsi définis :

- Modèle O (oscillations harmoniques) avec deux registres (algébrique : $x = A \cos(\omega t+\varphi)$ ou $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$; graphique : courbe sinusoïdale).
- Modèle C (mouvements circulaires uniformes) caractérisé par une trajectoire circulaire et une vitesse constante avec deux registres (graphique : cercle ; algébrique : $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$, $\theta = \omega t$).

Nous allons maintenant enquêter sur les institutions d'enseignement des mathématiques et de la physique en France et au Viêt Nam avec les questions suivantes :

- Quels sont les habitats de la périodicité dans les programmes et les manuels scolaires en France et au Viêt Nam ?
- Comment la périodicité y est-elle présentée ? Avec quelles significations ?
- Comment la modélisation des phénomènes périodiques est-elle enseignée en mathématiques et en physique ?
- Quelles places les fonctions sinusoïdales occupent-elles dans l'étude de la périodicité et de phénomènes périodiques ?
- Les deux modèles C et O apparaissent-ils dans les manuels scolaires ? Et si oui, comment apparaissent-ils ? Quelle articulation existe-t-elle entre eux ? Dans quelles mesures ces modèles C et O participent-ils au processus de modélisation mathématique de phénomènes périodiques ? Font-ils partie des modèles intermédiaires que nous mettons en évidence dans notre schéma du processus de modélisation ?

Pour trouver des éléments de réponses à ces questions, l'analyse « institutionnelle » que nous mènerons sera comparative des deux institutions d'enseignement, française et vietnamienne. Cette analyse est présentée dans le prochain chapitre.

CHAPITRE 2

ANALYSE INSTITUTIONNELLE COMPARATIVE FRANCE - VIÊT NAM

Introduction

Notre objectif dans ce chapitre est de décrire, en les caractérisant, les rapports institutionnels aux notions de périodicité et de fonction périodique dans les enseignements secondaires français et vietnamien de mathématique et de physique. Cette analyse veut éclairer les conditions et les contraintes institutionnelles de la modélisation de phénomènes périodiques dans l'enseignement mathématique secondaire des deux pays.

Pour ce faire, nous allons :

- Repérer, dans les programmes et manuels de mathématiques des deux pays, les praxéologies mathématiques à enseigner, en leur donnant des significations épistémologiques et didactiques ;
- Repérer, dans les programmes et manuels de physique des deux pays, les phénomènes périodiques traités par les enseignements secondaires de la physique dans les deux pays ;
- Expliciter et expliquer les différences et les ressemblances entre les deux pays quant à la modélisation mathématique des phénomènes périodiques.

Pourquoi une analyse comparative ?

En prenant appui sur les différences et les ressemblances entre les deux institutions, la méthode comparative permet :

> - une dénaturalisation du regard sur le fonctionnement scolaire d'une institution didactique ;
> - la prise en compte de niveaux de détermination plus avancés que celui du domaine ;
> - la constitution d'un répertoire de praxéologies à enseigner et l'évaluation des praxéologies mathématiques et didactiques. (Bessot & Comiti (2008), p.191)

L'analyse est menée à partir de l'examen de divers documents dont principalement les programmes et des manuels d'avant 2008, date de la dernière réforme du collège en France (celle du socle commun de connaissances et de compétences), en privilégiant les années 2000 à 2008. Pour l'institution française les exemples cités ici sont extraits de quelques manuels que nous jugeons représentatifs de l'ensemble (très fourni) des manuels possibles. Pour l'institution vietnamienne, nous examinons les deux manuels actuels possibles (parcours élémentaire et parcours avancé) ainsi que les livres d'exercices associés et les livres de l'enseignant. Dans ces derniers, on trouve des notes sur le programme, des recommandations pédagogiques et des corrigés d'exercices du manuel. Pour compléter cette analyse, on trouvera en annexe 1 des comptes-rendus d'interviews, menées par nos soins en 2010, de noosphèriens vietnamiens qui ont participé à l'écriture des manuels de mathématiques et de physique. On trouvera également en annexe 2 des interviews des formateurs d'enseignants français réalisé par nous en 2008.

Partie A. INSTITUTIONS D’ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Rappelons les questions auxquelles cette analyse institutionnelle cherche à répondre :

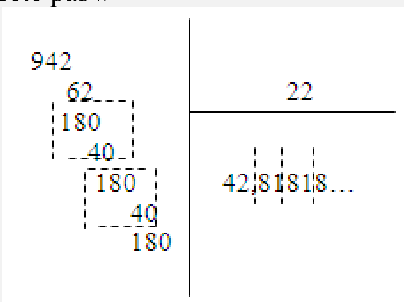
- Quels sont les habitats de la notion de périodicité dans les programmes et les manuels scolaires en France et au Viêt Nam ?
- Comment la périodicité y est-elle présentée ? Avec quelles significations ?
- Quelles places les fonctions sinusoïdales occupent-elles dans l’étude de la périodicité et de phénomènes périodiques ? Dans quelles praxéologies sont-elles engagées ?
- Les deux modèles C et O apparaissent-ils dans les institutions d’enseignement de mathématique ? Et, si oui, comment y apparaissent-ils ? Quelle articulation existe-t-il entre eux dans l’enseignement mathématique secondaire ?

I. Le collège

I.1. Institution française

Notons d’abord qu’en France, au collège, en mathématiques, la notion de périodicité n’apparaît que dans l’écriture du quotient de la division d’un entier par un autre.

Par exemple, dans le manuel Maths 6^{e} (Collection cinq sur cinq, 1994[10]), au chapitre 6 : « Diviser deux entiers », nous repérons la présence de la périodicité comme suit :

> […] On continue après la virgule au quotient :
> -1er cas : la division « s’arrête » […]
> -2nd cas : la division « ne s’arrête pas »
>
> 
>
>
> On ne peut donner que des valeurs approchées du quotient :
> 942 : 22 ≈ 42,8 (arrondi au dixième)
> 942 : 22 ≈ 42,82 (arrondi au centième). (Math 6^{e}, p. 66)

La division ne s’arrête pas : c’est un processus infini. Le lien entre la répétition du reste et du groupe de chiffres du quotient est montré de façon ostensive à travers l’usage des pointillés. On obtient le même chiffre au quotient quand on a le même reste. Par ailleurs, les pointillés « … » dans le quotient montrent que la répétition se poursuit et produit une infinité de chiffres au quotient.

Dans les manuels de mathématiques en France, c’est la première rencontre avec une opération arithmétique qui ne s’arrête pas et cette première rencontre engage implicitement la périodicité.

[10] La réforme de l’an 2000 pour les programmes de collège a renvoyé en classes de 4^{e} et 3^{e} la rencontre possible avec la division qui « ne s’arrête pas ».

On voit que la périodicité s'exprime ici dans une répétition infinie dont l'infinité est marquée par des points de suspension. C'est elle qui permet de montrer la possibilité d'arrêter la division et d'avoir les valeurs approchées du quotient à toute précision décimale choisie à l'avance. Il semble que l'objectif du manuel soit de ramener le rôle de la périodicité à son utilisation dans la production de valeurs approchées : selon la demande d'approximation décimale à 10^{-n} près du quotient, on peut arrêter la division à l'étape correspondante. Bien que n'ayant pas le statut d'objet d'étude, la périodicité est présente comme outil (Douady, 1986).

La notion de période n'est pas non plus explicitée. Les groupes identiques de chiffres qui se répètent dans le quotient de la division, séparés par des pointillés marquent un même état dans le processus de division. Le rôle de la périodicité dans l'arrêt de la division n'est pas travaillé.

Quand peut-on arrêter la division ? Au bout de combien de fois que les chiffres se répètent suffit-il d'arrêter la division pour avoir le quotient ? Le manuel n'aborde pas ces questions. Pourtant nous trouvons des exercices appartenant aux types de tâches T_{d1} : « Reconnaître une division qui ne s'arrête pas » et T_{d2} « Trouver le quotient d'une division d'un entier par un autre entier lorsque cette division ne s'arrête pas » où intervient la périodicité.

Regardons l'exercice suivant :

> Poser et effectuer les divisions suivantes :
> 118 : 66 ; 13 : 52 ; 376 : 5 ; 341 : 3 ; 45 : 8.
> Parmi celles-ci, lesquelles s'arrêtent ? Pourquoi est-on sûr que les autres ne s'arrêtent pas ?
> (Ibid., p. 72)

On voit qu'il y a des divisions demandées qui ne s'arrêtent pas comme 118 : 66 et 341 : 3. Le manuel demande de poser et d'effectuer la division, c'est-à-dire que l'utilisation de la calculatrice n'est pas permise. Qu'est-ce qui permet à l'élève d'arrêter la division et de donner le résultat ? Comment l'élève peut-il répondre à la dernière question qui demande d'expliquer pourquoi une division ne s'arrête pas ?

Selon l'exemple donné dans le cours, on peut voir que les techniques τ_{d1} et τ_{d2} pour accomplir les types de tâches T_{d1} et T_{d2} sont les suivantes :

τ_{d1} : Continuer la division après la virgule
+ Si on rencontre un reste nul, la division s'arrête
+ Si on trouve deux fois de suite les mêmes restes, la division ne s'arrête pas.

τ_{d2} : + Continuer la division après la virgule jusqu'à ce qu'on trouve deux fois de suite les mêmes restes
+ Prolonger les chiffres du quotient après la virgule par des pointillés.

En effet, la condition d'arrêt de cette division est l'apparition d'une (première) répétition d'un reste. On obtient le même chiffre au quotient quand on a le même reste. Ici, la périodicité est mobilisée dans l'accomplissement de ces types de tâches. Donc elle prend le rôle d'outil implicite mais n'est pas institutionnalisée. L'élément de technologie justifiant cette technique est le théorème de l'unicité du couple d'entiers ($q, r \geq 0$) dans la division euclidienne de a par b, $a = b.q + r$ ($r < b$). Cet élément technologique n'est pas présent dans le manuel.

L'absence des techniques s'appuyant explicitement sur la notion de périodicité et l'absence des éléments technologiques pour les types de tâches T_{d1} et T_{d2} dans le manuel s'ajoutent à la faible portée des techniques dans l'accomplissement de ces types de tâches. Par exemple, avec la division 36537 : 98 dans l'exercice suivant :

On divise 36537 par 98.
Donner un ordre de grandeur du quotient.
Vérifier à la calculatrice.
Reproduire et compléter le tableau suivant :

	troncature du quotient au….	arrondi du quotient au…
… dixième		
… centième		
… millième		
… cent millième		

(Ibid., p. 74)

Ici le manuel ne demande ni de poser ni d'effectuer la division parce qu'il n'est pas facile de connaître sa condition d'arrêt. Ne pouvant pas effectuer la division jusqu'à ce qu'on trouve deux fois de suite les mêmes restes, cet exercice installe un autre type de tâches « Donner la valeur approchée à 10^{-n} près d'un quotient rationnel non décimal de deux entiers ». L'accomplissement de ce type de tâches ne diffère du type de tâches précédent que par la condition d'arrêt de l'effectuation de la division. Ici la condition d'arrêt est le nombre de chiffres après la virgule obtenu au quotient, qui doit être le même que 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ou 0,00001 c'est-à-dire 1, 2, 3 ou 5. L'utilisation de la périodicité pour trouver la valeur approchée à 10^{-n} près (quand n grand) n'est pas proposée par les manuels. Donc la périodicité n'intervient pas dans ce type de tâches. Nous ne gardons pas ce type de tâches dans nos praxéologies liées à la périodicité.

Un autre exemple que nous présentons ici est tiré du manuel Maths 4^e (Collection Diabolo, 2003). Quand on parle de l'écriture fractionnaire au chapitre 2, le mot « infinité » est introduit.

Le quotient $\frac{4}{3}$ n'a pas de valeur décimale exacte. On peut seulement en donner une valeur approchée. À l'aide de la calculatrice, on trouve 1,333 333 3…
(Il y a une infinité de chiffres 3 après la virgule). (Maths 4^e, p. 32)

Nous constatons qu'ici la périodicité de l'écriture décimale du quotient n'est pas marquée. On met en exergue l'infinité du chiffre 3 dans le quotient qui exprime donc une périodicité sans que le mot « périodicité » n'apparaisse ni que soit mis en évidence une période.

L'utilisation de la calculatrice dans cet exemple (et même dans les exercices pour trouver une valeur approchée) ne met pas en valeur le rôle d'outil de la périodicité. Par exemple, voici un exercice représentatif du type de tâches « Donner la valeur approchée à 10^{-n} près d'un quotient rationnel non décimal de deux entiers » dans ce manuel avec la demande d'utiliser la calculatrice.

On considère les quotients suivants :
$\frac{13}{7};\frac{-6}{11};\frac{7}{16};\frac{22}{7};\frac{-8}{21}$.
A l'aide de la calculatrice :
Donner une valeur approchée au centième près par excès ;
Donner une valeur approchée au millième près par défaut. (Ibid., p. 37)

I.2. Institution vietnamienne

Dans cette partie, si nous rencontrons des types de tâches, techniques ou éléments technologiques déjà rencontrées lors de l'étude de l'institution française, nous utiliserons les mêmes notations ; de nouvelles notations seront introduites dans le cas contraire.

Lorsque, pour un même type de tâches, la technique privilégiée n'est pas la même au Viêt Nam qu'en France, nous le préciserons en ajoutant à la notation de la technique l'exposant v.

Au Viêt Nam, le terme « périodicité » apparaît pour la première fois dans le manuel scolaire de classe 7 (classe de 5^e^ du système français). Notons qu'avant son apparition, il n'y a aucun objet en mathématiques lié à la notion de périodicité.

Dans le chapitre 1 : « Nombres rationnels, nombres réels », le manuel introduit la notion « nombre décimal illimité périodique ».

> Exemple 2: Ecrire la fraction $\frac{5}{12}$ sous forme d'un nombre décimal
>
> On a :
>
> $$\begin{array}{l|l} 5{,}0 & 12 \\ \hline \;\;20 & \\ \;\;\;\;80 & 0{,}4166... \\ \;\;\;\;\;\;80 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;8 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;. & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;. & \end{array}$$
>
> Cette division n'est jamais finie. Si on continue à diviser, le chiffre 6 se répètera dans le quotient. On dit que, l'effectuation de la division 5 par 12 nous donne un nombre (0,4166…) appelé *nombre décimal illimité périodique*. Brièvement, on écrit 0,41(6). La notation (6) indique que le chiffre 6 est infiniment répété. Le nombre 6 s'appelle *période* du nombre décimal illimité périodique 0,41(6).
>
> De même, $\frac{1}{9}$ = 0,111… = 0,(1) ; 0,(1) est un nombre décimal illimité périodique de période 1.
>
> $-\frac{17}{11}$ = -1,5454... = -1,(54) ; -1,(54) est un nombre décimal illimité périodique de période 54.
>
> (Manuel de classe 7, p. 32)

Ici la périodicité a le sens de répétition infinie**.** Le manuel prend soin de définir ce qui l'appelle *période*. Il ne définit pas une période dans le cas général mais montre une période, sans justifier le caractère répétitif de la période choisie. Il décide d'une marque pour une période minimale sans expliquer le caractère minimal de la période choisie. On notera que ce qui est appelé période est *le motif qui se répète* dans l'écriture.

On voit bien que la périodicité n'est pas déduite de la propriété des restes d'une division, ni de l'observation de la répétition des restes, mais de l'observation du comportement du quotient décimal approché. La répétition du reste n'est pas soulignée. Elle n'est exprimée que via des pointillés « … ». Donc la condition d'arrêt de la division semble être la répétition du chiffre dans le quotient. Le manuel utilise la parenthèse comme un ostensif pour indiquer la période de la répétition infinie.

Le rôle de la périodicité qui permet d'arrêter la division n'est pas abordé explicitement. Pourquoi peut-on arrêter la division quand on voit que le chiffre 6 se répète deux fois dans le quotient ?

Dans ce manuel, la reconnaissance de la période d'un nombre décimal illimité périodique et l'utilisation des parenthèses pour l'indiquer sont proposées via le type de tâches T_{d3} « Donner la période du développement décimal d'un nombre rationnel non décimal ».

> Ecrire sous forme brève (mettre la période entre parenthèses) les nombres décimaux illimités périodiques : 0,333… ; -1,3212121… ; 2,513513513… ; 13,26535353…
> (Livre d'exercices de classe 7, p. 15)

Dans cet exercice, on encourage le remplacement des pointillés « … » par une parenthèse. La périodicité a le statut d'objet d'étude. Mais quelle est la période du nombre 0,333… ? Est-ce 3 ou 33 ou 333,… ? Est-elle donnée par le plus petit nombre de chiffres qui se répètent ?

Dans Le Thai Bao (2007), l'auteur a formulé la règle de contrat didactique suivante :

> Dans l'écriture décimale illimitée utilisant des pointillés « … », une succession de chiffres répétée 2, 3 ou 4 fois est la période. (Le Thai Bao (2007), p. 85)

La période est-elle unique ? Regardons l'exercice suivant :

> Les nombres suivants sont-ils égaux ? 0,(31) et 0,3(13). (Manuel de classe 7, p. 35)

Nous trouvons la résolution dans le livre « Les formes d'exercices et les méthodes de résolution » des mêmes auteurs que le manuel de classe 7 :

> En appliquant les deux règles d'écriture d'un nombre décimal illimité périodique sous forme d'une fraction, on a :
>
> $0,(31) = \frac{31}{99}$
>
> $0,3(13) = \frac{313-3}{990} = \frac{310}{990} = \frac{31}{99}$
>
> Donc, 0,(31) = 0,3(13).
> Pour écrire 0,(31) sous forme d'une fraction, on peut faire comme suit :
> Poser a = 0,(31) = 0,313131… Donc 100a = 31,313131…
> 100a – a = 31,313131… – 0,313131…
> 99a = 31
>
> $a = \frac{31}{99}$
>
> Pour écrire 0,3(13) sous forme d'une fraction, on peut faire comme suit :
> Poser b = 0,3(13) donc 1000b = 313,131313…, 10b = 3,131313…
> 990b = 310
>
> $b = \frac{310}{990} = \frac{31}{99}$.
>
> (Les formes d'exercices et les méthodes de résolution de mathématique 7, p. 64)

La technique utilisée ici consiste à écrire les nombres décimaux illimités périodiques sous forme de fractions pour les comparer. Cette résolution montre qu'avec une fraction, on peut avoir deux développements décimaux illimités périodiques avec deux périodes différentes. Cette technique est absente du manuel destiné aux élèves. De plus, l'élément de technologie (écritures fractionnaires des écritures décimales illimitées périodiques de « base » 0,(1), 0,(01),…) qui la justifie est complètement absent. Nous trouvons seulement la remarque suivante qui donne un exemple de transformation d'une écriture décimale illimitée périodique en fraction :

> On a démontré qu'un nombre décimal illimité périodique est un rationnel.
> Exemple : 0,(4) = 0,(1). 4 = $\frac{1}{9}$. 4 = $\frac{4}{9}$. (Manuel de classe 7, p. 33)

Dans ce manuel, le rôle d'outil de la périodicité est travaillé via le type de tâches T_{d2} : « Ecrire un quotient d'une division sous forme d'un nombre décimal illimité périodique ».

> Expliquer pourquoi ces fractions peuvent être écrites sous forme des nombres décimaux illimités périodiques et trouver cette forme.
> $\frac{1}{6}$; $\frac{-5}{11}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{-7}{18}$ (Ibid., p. 34)

Voici la technique $\tau_{d2}{}^{v}$ d'accomplissement de ce type de tâches présentée dans l'exemple 2 du manuel :

+ Continuer la division après la virgule jusqu'à ce qu'on trouve une succession de chiffres répétée 2, 3 ou 4 fois dans le quotient.
+ Noter la période entre parenthèses.

La notion de périodicité n'est pas présentée dans le manuel comme l'élément technologique qui justifie la technique. La technique s'appuie sur une répétition sans que soit vérifiée que la périodicité soit à l'origine de la répétition. Dans l'étude de Le Thai Bao (2007), l'auteur a pointé l'incomplétude de la praxéologie ponctuelle autour de ce type de tâches :

> Dans l'institution, l'absence de savoirs arithmétiques sur la division euclidienne (généralisée) ne permet pas de justifier la notion de période d'une écriture décimale illimitée périodique : cette absence de justification théorique marque, dans l'institution, l'incomplétude de la praxéologie ponctuelle autour du type de tâches de l'écriture d'une fraction donnée en écriture décimale illimitée périodique. (Le Thai Bao (2007), p. 81)

Dans l'exercice ci-dessus, on trouve aussi le type de tâches T_{d1} « Reconnaître si une fraction peut être écrite sous forme d'un nombre décimal illimité périodique ». C'est la décomposition du dénominateur en diviseurs premiers qui permet d'accomplir cette tâche. Cette technique est présentée dans la partie « cours » du manuel.

> Si le dénominateur positif d'une fraction irréductible n'a pas d'autres diviseurs premiers que 2 et 5, cette fraction peut être écrite sous forme d'un nombre décimal limité.
> Si le dénominateur positif d'une fraction irréductible a d'autres diviseurs premiers que 2 et 5, cette fraction peut être écrite sous forme d'un nombre décimal illimité périodique.
> (Manuel de classe 7, p. 33)

Avec l'étude des nombres décimaux illimités périodiques, dans ce manuel, la périodicité devient un outil pour explorer l'ensemble des réels R. En effet, lors du cours sur les rationnels le manuel donne la conclusion suivante :

> Chaque rationnel est représenté par un nombre décimal limité ou illimité périodique. Et réciproquement, un nombre décimal limité ou illimité périodique représente un rationnel. (Ibid., p. 34)

Un rationnel peut être écrit sous forme d'un nombre décimal limité ou illimité périodique. Un nombre décimal illimité non périodique est alors un développement décimal d'irrationnel.

> […] $x^2 = 2$,…On a démontré qu'il n'y a aucun rationnel dont le carré est égale à 2 et on a calculé que x = 1,4142135623730950488016887…
> Ce nombre est un nombre décimal dont la partie décimale n'a aucune période. C'est un nombre décimal illimité non périodique. (Ibid., p. 40)

Ainsi la caractéristique périodique ou non périodique de la partie décimale d'un nombre décimal illimité permet pour les manuels de séparer les rationnels des irrationnels. Le manuel va jusqu'à présenter l'ensemble des nombres réels comme la réunion des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

I.3. Comparaison France - Viêt Nam et conclusion pour le collège

Le tableau suivant résume une praxéologie locale[11] liée à la périodicité apparue au collège en France et au Viêt Nam.

Type de tâches	Technique	Technologie	Théorie
T_{d1} « Reconnaître une division qui ne s'arrête pas » (Reconnaître si une fraction peut être écrite sous forme d'un nombre décimal illimité périodique)	τ_{d1} : Continuer la division après la virgule : Si on rencontre un reste nul, la division s'arrête Si on trouve deux fois de suite les mêmes restes, la division ne s'arrête pas	θ_1 (absente) : la division euclidienne (Théorème de l'unicité du couple (q, r $\geq$ 0) dans la division euclidienne a = b.q + r (r < b))	Θ_1 : Arithmétique
	τ_{d1}^{v} : + Trouver les diviseurs premiers du dénominateur : Si le dénominateur a d'autres diviseurs premiers que 2 et 5, cette fraction peut être écrite sous forme d'un nombre décimal illimité périodique Si non, elle peut être écrite sous forme d'un nombre décimal limité.		
T_{d2} « Trouver le quotient d'une division d'un entier par un autre entier lorsque cette division ne s'arrête pas » (Ecrire un quotient d'une division sous forme d'un nombre décimal illimité périodique)	τ_{d2} : Continuer la division après la virgule jusqu'à ce qu'on trouve deux fois de suite les mêmes restes, puis prolonger les chiffres du quotient après la virgule par des pointillés		
	τ_{d2}^{v} : Continuer la division après la virgule jusqu'à ce qu'on trouve une succession de chiffres répétée 2, 3 ou 4 fois dans le quotient. Noter la période entre parenthèses		
T_{d3} « Donner la période du développement décimal d'un nombre rationnel non décimal » *(au Viêt Nam seulement)*	τ_{d3} : Effectuer la division jusqu'à ce qu'on trouve deux fois de suite les mêmes restes, la période se compose des chiffres qui « se répètent » dans l'écriture du quotient.		

Tableau 1. Les praxéologies ponctuelles au collège en France et au Viêt Nam

[11] On dit qu'une praxéologie est locale, (T_i, τ_i, θ, Θ), lorsque le même bloc de savoir (θ, Θ) permet de résoudre plusieurs types de tâches par des techniques différentes se justifiant toutes par le même élément technologique θ.

Les deux institutions mettent en place pratiquement la même praxéologie avec le même degré d'incomplétude.

En France, la périodicité introduite par cette praxéologie, quand elle est présente, n'est pas un objet d'enseignement. Son habitat est seulement la division entre nombres entiers et plus particulièrement l'écriture décimale du quotient d'une division d'un entier par un autre entier. Elle exprime via des pointillés « … » une répétition infinie d'un groupe de chiffres (le motif) sans que les termes « périodique » et « répétition » soient formulés. A ce niveau, la périodicité n'a que le statut d'outil. Elle permet de décider d'arrêter une division d'un entier par un autre entier pour obtenir un quotient approché. Si on trouve deux fois de suite les mêmes restes, la division ne s'arrête pas et on doit utiliser des pointillés « … » dans l'écriture du quotient.

Au Viêt Nam, la notion de périodicité est introduite explicitement dès la classe 7 et elle prend comme en France la signification d'une répétition infinie. La période est là aussi considérée comme un groupe de chiffres (le motif) qui se répète dans le quotient de la division. On utilise la parenthèse comme un moyen ostensif pour l'indiquer. Le rôle de la périodicité pour arrêter la division et pour exprimer l'infinité de l'écriture du quotient n'est pas justifié ni même explicité. Notons que la répétition des restes d'une division n'est pas soulignée comme dans le manuel français, la condition d'arrêt d'une division présente dans le manuel vietnamien semble être la répétition des chiffres dans le quotient. Dans l'institution vietnamienne, outre d'avoir le statut d'objet d'étude, la périodicité est un outil pour explorer l'ensemble des réels R. Chaque réel a une écriture décimale limitée ou illimitée soit périodique soit non périodique.

Dans les deux institutions, la périodicité rencontrée est une périodicité à caractère discret sous la forme d'un motif constitué d'un nombre fini d'éléments (des chiffres) et qui est « translaté » le long de l'écriture décimale.

Quel est l'avenir de cette signification de la périodicité ? Quel est l'avenir de l'écriture décimale illimitée périodique ? Réapparaît-elle au lycée ? Avec quel rôle ? Quels sont les habitats de la périodicité dans l'enseignement des mathématiques au lycée ? Comment l'institution française présente-t-elle l'ensemble des réels R[12] ?

[12] La définition des nombres réels n'est pas prévue par le programme de collège. On rencontre dans certains manuels la définition d'un nombre irrationnel comme nombre non rationnel. Ces manuels proposent alors de rares exercices (jugés très difficiles par ces manuels) sur la notion d'irrationalité (par exemple, l'irrationalité de racine de 2).

II. Le lycée

II.1. Institution française

II.1.1. Parties du programme pouvant impliquer la notion de périodicité

Nous les résumons dans le tableau ci-après.

Classe	Partie	Capacités attendues	Commentaires
2[de]	Calcul et fonction	Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées. Interpréter un résultat donné par une calculatrice.	On admettra que l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite.
		Connaître la représentation graphique de $x \mapsto \sin x$ et de $x \mapsto \cos x$	La définition de sin x et cos x pour un réel x quelconque se fera en « enroulant R » sur le cercle trigonométrique. On fera le lien avec les sinus et cosinus de 30°, 45° et 60°.
1[re] S	Généralités sur les fonctions		On définira la périodicité des fonctions sinus et cosinus. On étudiera sur un grapheur le passage de la représentation de sinus ou cosinus à celle d'une fonction qui s'en déduit simplement ; on étudiera quelques exemples très simples de fonctions pour lesquelles on peut, par lecture sur le cercle trigonométrique, conclure quant aux zéros ou au signe de la dérivée sur l'intervalle]-π, π] (comme la fonction cos 2x ou cos 2x – cos x).
	Suites		Etude de l'évolution de phénomènes discrets amenant à une relation de récurrence. Calcul des termes d'une suite sur calculatrice ou tableur ; observation des vitesses de croissance (resp. de décroissance) pour des suites arithmétiques et des suites géométriques.

Tableau 2. Les parties du programme du lycée en France pouvant impliquer la périodicité

Dans la partie dite « Calcul et fonction », on constate que l'ensemble des réels est considéré comme l'ensemble des abscisses des points d'une droite. Il n'est pas fait référence à l'écriture décimale périodique des nombres. L'écriture décimale des nombres est-elle étudiée dans le manuel ?

Dans la partie « Généralités sur les fonctions » figure le graphique des fonctions sinus et cosinus mais seulement de ces fonctions. Le programme ne mentionne pas leur périodicité. Cette mention est par contre très forte en classe de Première. Pourquoi la représentation graphique des fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ est-elle étudiée avant l'introduction de la définition de leur périodicité ? La périodicité des fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ est-elle abordée dans le manuel de Seconde ?

Plus largement, sur l'ensemble du lycée, la périodicité est-elle introduite seulement pour qualifier et étudier les fonctions sinus et cosinus ? Des fonctions périodiques autres que les fonctions trigonométriques sont-elles étudiées ?

A ce propos, le programme fait la remarque suivante :

> La périodicité des fonctions sinus et cosinus est définie en liaison avec l'étude des angles orientés. On envisagera celle des fonctions qui s'en déduisent par un changement de variable linéaire ou affine. L'extension de cette notion à d'autres fonctions n'est pas exigible. (Documents d'application des programmes du lycée, p. 11)

Autrement dit, le programme ne demande pas d'étendre la périodicité au-delà de la classe des fonctions de la forme sin (ax+b) et cos (ax+b).

II.1.2. Analyse de manuels (collection Déclic 2004 et 2005)

II.1.2.1. Mathématiques Seconde

En début de la classe Seconde, la périodicité dans le développement décimal périodique est présente dans le chapitre 1 : Calcul numérique et algébrique.

> L'ensemble des rationnels se note Q.
> Un nombre rationnel est le quotient d'un entier relatif par un entier naturel non nul. Un rationnel non décimal a une écriture décimale **périodique** infinie.
> $-\frac{437}{22}=-19,8\mathbf{636363}...$; **63** se répète. (C'est le manuel qui souligne).
> (Mathématique Seconde, p. 12)

C'est la première fois que l'on trouve le mot « périodique » dans un manuel de mathématiques du secondaire. La périodicité a le sens de répétition comme dans le manuel de classe 7 du Viêt Nam. Mais il n'y a pas de définition de la notion de période. On dit seulement que 63 se répète mais on n'aborde pas la période du nombre -19,8636363… Est-ce que 63 se répète donc 63 est la période ? Pourquoi ne serait-ce pas 6363 ou 36 ? Est-ce que la période est un nombre de longueur minimale ? Le manuel n'en dit rien.

On voit que la périodicité est utilisée ici pour fournir une caractéristique nécessaire (mais est-elle suffisante ?) des nombres rationnels non décimaux : « Un rationnel non décimal a une écriture décimale périodique infinie ». Mais à quoi cela sert-il ? La périodicité a-t-elle un rôle d'exploration de l'ensemble des réels R ?

Dans le manuel, l'ensemble des réels est présenté comme l'ensemble de tous les nombres connus en classe Seconde. D'après lui, ce sont tous les rationnels et tous les irrationnels, comme par exemple, dit-il, $\sqrt{2}$, - cos(23^0), π,… Pourtant l'écriture décimale illimitée non périodique des irrationnels n'est pas justifiée. Au contraire, le manuel n'insiste que sur la correspondance entre un réel et un point sur la droite graduée :

> Chaque nombre réel correspond à un unique point sur une droite graduée ; et, réciproquement, à chaque point d'une droite graduée correspond un unique réel, abscisse de ce point. (Ibid., p. 12)

Donc à la lecture de la partie cours du manuel, la périodicité ne semble pas être un objet d'enseignement. Le rôle d'outil pour explorer l'ensemble des réels R n'est pas exploité.

Pourtant dans la partie exercices de ce même manuel, nous trouvons quelques types de tâches où intervient la périodicité. Le type de tâches T_{d1} « Reconnaître si une fraction est un rationnel non décimal », apparu au collège, est retrouvé.

On considère le nombre $\frac{26}{7}$.

Justifier que $\frac{26}{7}$ est un rationnel non décimal.

Effectuer la division de $\frac{26}{7}$ jusqu'à sept chiffres après la virgule. Que constate-t-on ? Justifier.

Expliquer pourquoi le développement décimal de $\frac{26}{7}$ est qualifié de « périodique ». Donner la période. (Ibid., p. 24)

Nous avons dit que dans le cours, la période d'une écriture décimale illimitée périodique n'est pas définie. Le manuel insiste seulement sur la répétition du groupe de chiffres dans le quotient. Pourtant, dans l'exercice ci-dessus, nous trouvons le type de tâches lié à ce concept, T_{d3} « Donner la période du développement décimal d'un nombre rationnel non décimal ». Qu'est-ce que la période ? Les questions posées montrent que le manuel semble vouloir insister sur la répétition du groupe de chiffres dans le quotient. Donc la technique d'accomplissement de ce type de tâches est τ_{d3} celle du manuel de classe 7 du Viêt Nam.

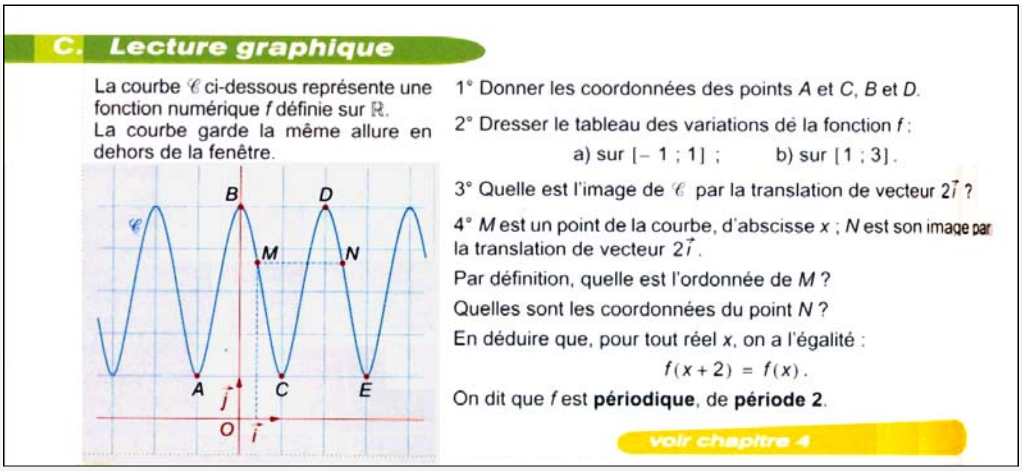
Par ailleurs, la période est indiquée par ostension dans l'exercice suivant :

On se propose de vérifier sur quelques exemples un théorème admis : « tout nombre admettant un développement décimal périodique est un rationnel ».
Soit le nombre x = $0,3737\overline{37}$ … dont la période 37 a deux chiffres.
Justifier que 100.x = 37 + x.
Résoudre cette équation et en déduire la valeur exacte de x en fraction. Quelle est alors la nature de x ?
En procédant de la même façon, démontrer que : 0,999999… = 1.
a) Déterminer l'écriture fractionnaire du nombre x = $0,123123\overline{123}$.
b) En remarquant que $12,0909\overline{09}$ … = 12 + $0,0909\overline{09}$ …, déterminer l'écriture fractionnaire de $12,0909\overline{09}$ … (Ibid., p. 24)

Cet exercice est centré sur la tâche « Déterminer l'écriture fractionnaire d'un nombre décimal illimité périodique » pour illustrer le théorème admis cité qui représente une condition suffisante qui manquait dans le cours. Son objectif semble être celui de compléter l'étude de l'ensemble des rationnels Q sans pour autant opposer explicitement nombre rationnel et irrationnel ni préciser la place des décimaux dans l'ensemble Q.

La périodicité ne prend réellement le statut d'objet d'étude que quand elle est attachée au concept de fonction numérique.

Dans le chapitre 11 : *Trigonométrie*, nous la trouvons dans la rubrique *Lecture graphique* reproduite ci-dessous.



C. Lecture graphique

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$.
La courbe garde la même allure en dehors de la fenêtre.

1° Donner les coordonnées des points A et C, B et D.

2° Dresser le tableau des variations de la fonction f :
a) sur $[-1 ; 1]$; b) sur $[1 ; 3]$.

3° Quelle est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $2\vec{i}$?

4° M est un point de la courbe, d'abscisse x ; N est son image par la translation de vecteur $2\vec{i}$.
Par définition, quelle est l'ordonnée de M ?
Quelles sont les coordonnées du point N ?
En déduire que, pour tout réel x, on a l'égalité :
$$f(x+2) = f(x).$$
On dit que f est **périodique**, de **période 2**.

voir chapitre 4

(Ibid., p. 276)

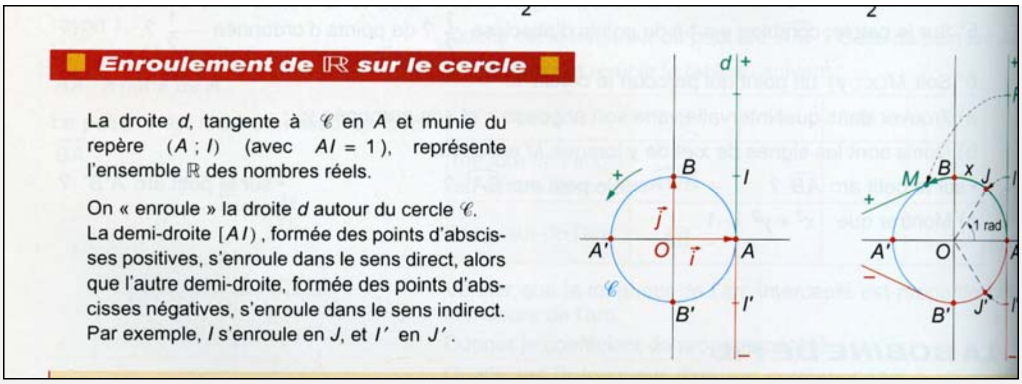
Au début de cette activité dite exploratoire, on demande de travailler sur le graphique d'une fonction f pour en déduire l'égalité f(x + 2) = f(x) pour tout x. A partir de là, on dit que l'on a une fonction périodique de période 2. C'est la première rencontre avec une fonction périodique. Notons que la fonction choisie est une fonction continue, donnée par un graphique, et que ce graphique ressemble à une sinusoïde.

Mais qu'est-ce qu'une courbe qui « garde la même allure » ? C'est une courbe obtenue par la répétition d'un même motif géométrique. La courbe est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$ avec T la période de la fonction. On remarquera tout de suite deux différences avec la périodicité d'un développement décimal :

- ce qui est appelé période n'est pas le motif graphique qui se répète mais la « longueur en abscisses » du motif.
- le motif est un ensemble continu de points (un morceau de ligne) au lieu d'un ensemble discret de chiffres.

Du côté algébrique, la période apparaît comme le nombre T tel que f(x + T) = f(x) pour tout réel x. Ainsi la périodicité se présente sous les deux aspects, graphique et algébrique, d'une fonction périodique.

Toujours dans le chapitre de trigonométrie, après la définition du cercle trigonométrique, la notion de périodicité va apparaître à partir de l'enroulement de R sur le cercle destiné à établir une correspondance entre un point sur le cercle et un nombre réel.



Enroulement de $\mathbb{R}$ sur le cercle

La droite d, tangente à $\mathscr{C}$ en A et munie du repère $(A ; I)$ (avec $AI = 1$), représente l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

On « enroule » la droite d autour du cercle $\mathscr{C}$.
La demi-droite $[AI)$, formée des points d'abscisses positives, s'enroule dans le sens direct, alors que l'autre demi-droite, formée des points d'abscisses négatives, s'enroule dans le sens indirect.
Par exemple, I s'enroule en J, et I' en J'.

(Ibid., p. 278)

Ce travail conduit à l'énoncé suivant :

> Propriété : à tout réel x, correspond un unique point P de la droite d, d'abscisse x.
> À tout point P correspond un unique point M sur le cercle trigonométrique.
> x est alors une mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AM}$.
> […]
> La droite d étant infinie, elle s'enroule en une infinité de tours autour du cercle, en repassant à chaque tour par le point M. Chaque tour ayant une longueur égale à 2π, on peut associer au point M une infinité de réels : x, x + 2π, x + 4π,…, x - 2π, x - 4π,…
> (Ibid., p. 278)

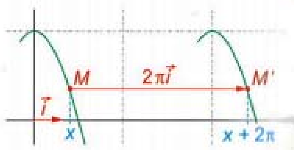
Ainsi, un point M sur le cercle correspond à une infinité de réels qui diffèrent de 2π près. On retrouve là une périodicité discrète exprimée de manière arithmétique même si la notion de modulo (congruence) n'est pas explicitée.

Outre le but de montrer une correspondance entre un nombre réel et un point sur le cercle, la remarque précédente conduit le manuel à exposer la périodicité des fonctions sinus et cosinus.

Périodicité

Soit x un réel. Alors x et $x+2\pi$ sont associés au même point M du cercle trigonométrique.
On a donc $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x$.

Interprétation graphique
Les points d'abscisses x et $x+2\pi$ ont la même ordonnée.
Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont donc invariantes par la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.
Il suffit de les construire sur un intervalle de longueur 2π, puis d'appliquer les translations pour les connaître entièrement.



Remarque : Pour tout réel x, on a $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.
- La fonction **cosinus** est dite **paire** : sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La fonction **sinus** est dite **impaire** : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

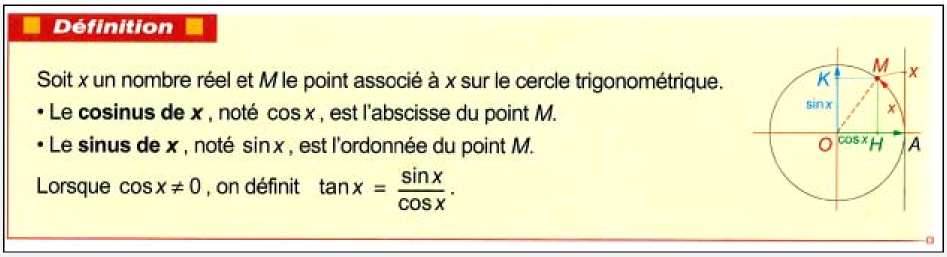
Les valeurs remarquables des sinus et cosinus sur $[0 ; \pi]$ permettent alors de tracer les courbes représentatives de ces deux fonctions, appelées **sinusoïdes.**

(Ibid., p. 282)

Si on note f la fonction qui, dans l'enroulement de la droite sur le cercle, associe un réel x au point M correspondant sur le cercle : x ↦ M(x), on a : f(x) = f(x+2π) = f(x+4π) =…. C'est une fonction périodique de période 2π. Ici la périodicité est liée, comme dans le manuel de collège, à une répétition infinie marquée par des points de suspension. La période prend d'abord la signification d'un « tour de cercle » mais cette signification est immédiatement abandonnée pour faire venir la signification de la période « nombre ». En effet, un tour complet correspond à 2π sur les fonctions sinus et cosinus.

On voit ici un passage du cadre géométrique au cadre analytique, respectivement un passage de la périodicité cyclique à la périodicité oscillatoire via une formulation arithmétique. C'est le cercle trigonométrique qui permet d'effectuer ce passage.

En effet, le cosinus de x et le sinus de x sont définis grâce au cercle trigonométrique comme suit :



Définition

Soit x un nombre réel et M le point associé à x sur le cercle trigonométrique.

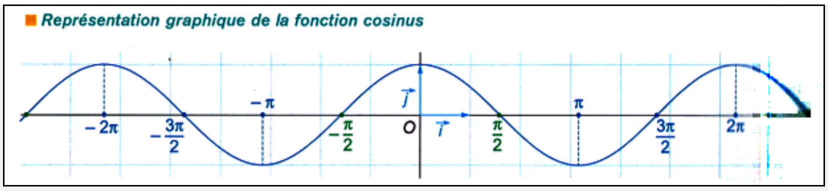
• Le **cosinus de x**, noté $\cos x$, est l'abscisse du point M.

• Le **sinus de x**, noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M.

Lorsque $\cos x \neq 0$, on définit $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

(Ibid., p. 280)

Ensuite, la fonction cosinus (respectivement fonction sinus) est définie comme une fonction qui associe à chaque nombre réel son cosinus (respectivement son sinus). Donc la période « tour de cercle » relative à une périodicité cyclique est transformée en la période 2π des fonctions cosinus et sinus relative à une périodicité oscillatoire.



(Ibid., p. 282)

Mais ici pour représenter les fonctions sinus et cosinus, le manuel utilise un repère autre que celui du cercle trigonométrique. Il y a, cachée dans ce changement de repère, la transformation d'une variable « circulaire » en une variable « linéaire », transformation pudiquement qualifiée d'enroulement de R. Quelles seront les conséquences sur l'apprentissage des fonctions trigonométriques de ce basculement de repérage ?

Au cours de ce travail d'exposition du cercle puis des fonctions trigonométriques, la périodicité des fonctions sinus et cosinus apparaît sous trois points de vue :

+ géométrique : les valeurs des fonction $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ ne changent pas quand on ajoute à x un multiple de la longueur du cercle trigonométrique (cercle orienté avec le rayon R = 1). Donc ces fonctions ont 2π, un tour de cercle, pour période.

Ce point de vue n'est pas travaillé dans le manuel. Est-ce l'indice d'une difficulté à articuler cyclicité et périodicité ?

On voit que le manuel préfère travailler les deux autres points de vue, algébrique et graphique.

+ algébrique : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

Ainsi, quand la variable est additionnée de 2π (la période) alors la valeur de la fonction revient à sa valeur initiale. C'est la caractéristique algébrique d'une fonction périodique. Elle est exprimée seulement implicitement via les égalités ci-dessus.

+ graphique : les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sont invariantes par la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$. En général, une fonction périodique est connue entièrement dès qu'on la connaît sur un intervalle ayant la longueur de la période. Donc nous trouvons un nouveau rôle de la périodicité qui permet de limiter l'intervalle d'étude d'une fonction.

Ce manuel l'aborde explicitement dans la partie « Méthode » où les étapes de construction du graphique d'une sinusoïde sont abordées.

Pour tracer une sinusoïde, il faut déterminer sa période, son maximum et son minimum. Tracer la courbe sur une période, puis compléter par translation.
La fonction sinus a une période de 2π et varie entre -1 et 1.
La fonction $x \mapsto A\sin x$ a la même période, mais varie entre –A et A.
La fonction $x \mapsto \sin(kx)$ a une période de $\dfrac{2\pi}{k}$. (Ibid., p. 283)

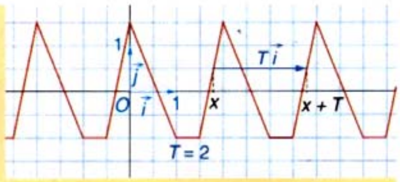
C'est ici que l'on donne la période de la fonction sinus, de la fonction $x \mapsto A\sin x$ et de la fonction $x \mapsto \sin(kx)$. Mais il n'y a pas de définition générale de la périodicité d'une fonction. Il semble que le manuel insiste seulement sur ces deux classes des fonctions. En effet, la plupart des fonctions abordées dans le manuel y appartient. La périodicité a deux statuts en même temps, le statut d'objet d'étude et le statut d'outil (tracé du graphique).

II.1.2.2. Mathématiques Première S

Dans ce manuel, la définition générale d'une fonction périodique est introduite dans la partie cours du chapitre 1 : Fonction numérique.

Fonction périodique

définition : Dire que la fonction u est périodique signifie que la courbe $\mathscr{C}_u$ est invariante par une translation de vecteur non nul colinéaire à $\vec{i}$, c'est-à-dire qu'il existe un réel non nul T tel que, pour tout x de $\mathscr{D}_u$, on ait :
$x + T \in \mathscr{D}_u$ et $f(x+T) = f(x)$.



Le réel T est une **période** de la fonction f.

Exemple : La fonction f, définie sur ℝ par $f(x) = \sin 3x$, est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$, car, pour tout réel x :

$$f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x+2\pi) = \sin(3x) = f(x)$$

(Mathématique Première S, p. 16)

Pour ce faire, la fonction choisie n'est pas une fonction trigonométrique. C'est une fonction définie par intervalles avec son registre graphique. Le lien avec les fonctions trigonométriques étudiées en classe Seconde $x \mapsto \sin(kx)$ est retrouvé dans l'exemple donné. La définition souligne d'abord la caractéristique d'invariance du graphique par translation. Ensuite, l'égalité algébrique f(x + T) = f(x) en est déduite. Notons qu'ici, le caractère minimal de la période n'est pas abordé. Pourtant, la période montrée pour le graphique dans la définition et pour l'exemple donné est la plus petite période. Qu'en est-il dans les praxéologies enseignées ?

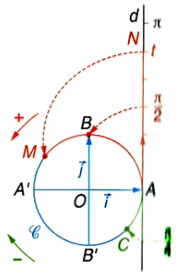
Dans ce manuel, la périodicité d'une fonction est regardée comme propriété d'une fonction au même titre que la parité et donne lieu à la restriction de l'intervalle d'étude de la fonction. Elle n'est plus attachée aux seules fonctions trigonométriques.

Nous retrouvons la périodicité liée au tour de cercle de 2π, comme dans le manuel de Seconde analysé précédemment, au chapitre 11 : *Angle et trigonométrie*, lors du cours sur la notion de mesure des angles orientés. L'enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique est rappelé pour définir le repérage d'un point sur le cercle comme suit :

Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique

définition : L'enroulement de la droite des réels sur le cercle $\mathscr{C}$ à partir de leur origine commune A, permet de repérer chaque point M du cercle $\mathscr{C}$ par un unique réel t de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.
Les réels repérant M sont ceux de la forme :

$t + k \times 2\pi$, avec k entier relatif.



Exemples :

$\frac{\pi}{2}$ repère le point B, ainsi que $-\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\pi$.

(Ibid., p. 276)

Ensuite, les mesures de la forme t + 2k.π d'un angle orienté sont aussi présentées.

> Soit t une mesure de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$. Alors les mesures, en radian, de cet angle orienté sont les réel de la forme t + 2k.π, avec k entier relatif, et il en existe une et une seule, appartenant à l'intervalle]- π ; π] ; on l'appelle la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$.
>
> On écrit $(\vec{u};\vec{v})$ = t + 2kπ, k ∈ Z ou aussi $(\vec{u};\vec{v})$ = t (2π) et on lira :
>
> L'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$ a pour mesure t « à un multiple de 2π près » ou « modulo 2π ».
> (Ibid., p. 276)

Donc un angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$ a une infinité de mesures de la forme t + k2π. Chaque mesure diffère d'un multiple de 2π près, un tour de cercle. Le manuel utilise explicitement le terme « modulo 2π » et introduit la notation. Le lien entre la notion de « modulo 2π » et la division euclidienne présentée au collège qu'on peut voir à travers l'usage du mot multiple est-il travaillé ?

On voit que si 0 ≤ t < 2π, $(\vec{u};\vec{v})$ = t + 2kπ est une écriture de la division euclidienne. Cependant, dans la définition précédente, t est une mesure quelconque de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$. Donc l'écriture de modulo $(\vec{u};\vec{v})$ = t (2π) peut ne pas coïncider avec l'écriture de la division euclidienne. Le modulo 2π est associé au cercle trigonométrique comme un tour de cercle.

Le cercle trigonométrique est alors de nouveau utilisé pour définir les sinus et cosinus des angles orientés qui seront exploités par les notions de produit scalaire et de produit vectoriel de deux vecteurs ainsi que par la notion de coordonnées polaires.

Les équations trigonométriques sont abordées dans le même chapitre 11 par les deux types, sin(kx) = a et cos(kx) = a.

Voici la méthode proposée pour résoudre l'équation cos t = a avec a réel donné :

> + On trace la droite D d'équation x = a dans (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$)
>
> + Les solutions sont les réels associés aux points communs à D et au cercle trigonométrique C (attention à l'intervalle dans lequel on cherche les solutions). (Ibid., p. 286)

On voit que la résolution nécessite la construction du repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) et du cercle trigonométrique. Les solutions des équations sont demandées dans un intervalle déterminé comme]- π ; π],]0 ; 2π],… dont la longueur est égale à la période. Ainsi la périodicité ne semble pas intervenir dans la résolution de ces équations. En effet, c'est la périodicité qui permet de trouver toutes les solutions d'une équation trigonométrique quand cette équation a une solution. Pourtant, la limite des intervalles comprenant des solutions obscurcit la signification et le rôle de la périodicité puisque un (ou au plus deux tours) de cercle suffisent.

La résolution d'une équation par le graphique d'une fonction n'est pas présentée ici. Donc les fonctions périodiques ne servent pas à l'étude des équations. Quels buts le manuel fixe-t-il à l'étude des fonctions périodiques, notamment des fonctions trigonométriques ? Ont-elles un statut d'outil ou ne sont-elles que des objets d'enseignement ?

Par ailleurs, et bien ailleurs, nous retrouvons la présence de périodicité discrète dans le chapitre 6 intitulé « Suites numériques ». La voici dans l'exercice suivant.

> Soit u une suite vérifiant la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$.
> Calculer les cinq premiers termes de la suite en prenant $u_0 = 0$, puis en prenant $u_0 = 10$.
> Quelle semble être la particularité de cette suite ?
> Démontrer la conjecture précédente.
> Peut-on choisir u_0 de sorte que la suite u soit stationnaire ?
> ***Remarque :*** la suite (u_n) est périodique de période 2 ; plus généralement, si p est un entier naturel, on dit que la suite u est périodique de période p, pour tout entier naturel n, $u_{n+p} = u_n$.
> (Ibid., p. 164)

Dans la première question, la succession des termes produit la répétition du motif 0, -1 ce qui nous fait dire qu'il s'agit d'une périodicité discrète. Mais dans la remarque, la définition qui est donnée de la période est calquée sur celle d'une fonction périodique : f(n+2) = f(n), pour tout n.

Notons que la périodicité d'une suite n'est pas une propriété étudiée dans le cours. Cette propriété a-t-elle un avenir dans la suite du curriculum ?

II.1.2.3. Mathématiques Terminale S

Dans le manuel, les fonctions trigonométriques, notamment les fonctions sinus et cosinus, réapparaissent avec l'étude de la continuité et de la dérivation des fonctions numériques sans que la propriété de périodicité serve dans cette étude. Elles réapparaissent aussi avec l'étude des nombres complexes pour exposer la forme trigonométrique du nombre complexe. Voici, en effet, la définition de la forme trigonométrique d'un nombre complexe :

> Soit z un nombre complexe non nul, r un réel strictement positif et θ un réel.
> z a pour module r et argument θ si, et seulement si, $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$.
> Cette nouvelle écriture est appelée forme trigonométrique de z.
> (Mathématique Terminale S, p. 288)

Mais la périodicité n'est qu'à peine évoquée. Le nombre complexe z ne sera pas considéré comme une fonction de la variable θ. Dans les cours, nous trouvons seulement une remarque dans laquelle la périodicité du cercle trigonométrique intervient implicitement. La période 2π comme un tour complet du cercle trigonométrique que l'élève a connue en classes 2^{de} et 1^{re} est présente implicitement bien que le cercle ne soit pas là.

> Deux nombres complexes non nuls sont égaux si, et seulement si, ils ont même module et des arguments égaux à un multiple de 2π près. (Ibid., p. 288)

Nous retrouvons ici la notion de modulo abordée en classe 1re lors du cours sur les angles orientés. Par exemple :

> Pour tout nombre complexe $z \neq 0$:
> $\arg \bar{z} = \arg z\ (2\pi)$
> et $\arg(-z) = \pi + \arg z\ (2\pi)$. (Ibid., p. 288)

Donc en classe Terminale, la périodicité n'est plus un objet d'enseignement. Elle y est un outil en engageant surtout le cercle trigonométrique et quasiment pas les fonctions périodiques.

II.1.3. Praxéologies ponctuelles liées à la périodicité

	Type de tâches	**Niveau**	**Note**
T_{d1}	Reconnaître si une fraction est un rationnel non décimal	2^{de}	P. 24
T_{d3}	Donner la période du développement décimal d'un nombre rationnel non décimal	2^{de}	P. 24
T_{p1}	Placer un point associé au réel $\frac{n\pi}{r}$ sur le cercle trigonométrique	2^{de} 1^{re}	P. 286, 287 P. 287
T_{p2}	Vérifier si les réels x et y repèrent le même point du cercle trigonométrique (Déterminer la mesure principale d'un arc orienté $\frac{n\pi}{r}$)	2^{de} 1^{re}	P. 286, 287 P. 288
T_{p3}	Résoudre une équation trigonométrique (du type sin t = a, cos t = a) dans un intervalle donnée I égal à une période	2^{de} 1^{re}	P. 289 P. 294, 298
T_{fn1}	Associer à chaque courbe une fonction trigonométrique	2^{de}	P. 290
T_{fn2}	f étant une fonction trigonométrique, calculer f(a)	2^{de}	P. 290
T_{fp1}	Examiner si un nombre T est la période d'une fonction f	2^{de} 1^{re}	P. 289 P. 30
T_{fp2}	Montrer qu'une fonction f est périodique de période T	2^{de} 1^{re}	P. 290 P. 32
T_{fp3}	Déterminer la période d'une fonction périodique	2^{de} 1^{re}	P. 290,292 P. 32, 36
T_{fp4}	f étant une fonction périodique de période T, calculer f(a) connaissant f(b).	2^{de}	P. 288, 289, 290
T_{fp5}	Dessiner la courbe représentative d'une fonction périodique donnée	2^{de} , 1^{re}	P. 290 P. 32

Tableau 3. Les types de tâches au lycée en France

Type de tâches	**Technique**	**Elément technologique**	**Théories minimales**
T_{d1}	τ_{d1} : Continuer la division après la virgule : Si on rencontre un reste nul, le rationnel est décimal Si on trouve deux fois de suite les mêmes restes, le rationnel n'est pas décimal	θ_1 : La division euclidienne	Θ_1 : Arithmétique
T_{d3}	τ_{d3} : effectuer la division jusqu'à ce qu'on trouve deux fois de suite les mêmes restes, la période se compose des chiffres qui « se répètent » dans l'écriture du quotient.		

T_{p1}	τ_{p1} : diviser le demi-cercle en r parties égales. Compter n fois l'arc obtenu	θ_1 : La division euclidienne θ_2 : Le cercle trigonométrique	Θ_1 : Arithmétique Θ_2 Géométrie euclidienne orientée
T_{p2}	τ_{p2} : calculer x – y Si $x - y = k2\pi$ (k est un nombre entier), x et y repèrent le même point du cercle trigonométrique		
T_{p3}	τ_{p3} : Pour l'équation cos t = a : Tracer la droite D d'équation x = a dans $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ puis trouver les réels associés aux points communs à D et au cercle trigonométrique C sur I Pour l'équation sin t = a on remplace la droite x = a par la droite y = a.	θ_2 : Le cercle trigonométrique	Θ_2 : Géométrie euclidienne orientée
T_{fn1}	τ_{fn1} : + calculer f(0) + tableau de variation	θ_3 : Les propriétés des fonctions sinus et cosinus	Θ_3 : Fonctions numériques
T_{fn2}	τ_{fn2} : utiliser le cercle trigonométrique ou les tables de valeurs remarquables		
T_{fp1}	τ_{fp1} : + Calculer f(x + T) + Si f(x + T) = f(x) pour tout x alors T est une période + Ou on prend une valeur spéciale de x et démontre que l'égalité f(x+T) = f(x) ne se réalise pas dans ce cas spécial donc on peut conclure que T n'est pas une période de la fonction.	θ_4 : Définition d'une fonction périodique et de la période d'une fonction	Θ_4 : Fonctions périodiques (théorie incluse dans l'Analyse harmonique)
T_{fp2}	τ_{fp2} : + Calculer f(x + T) + Démontrer que f(x + T) = f(x) pour tout x + Conclure que la fonction est périodique de période T		
T_{fp3}	τ_{fp3} : + Trouver le nombre $T \neq 0$ tel que f(x+T) = f(x) pour tout réel x + Conclure que T est la période de f.		
	τ'_{fp3} : Si le graphique de la fonction est donnée : + Trouver le nombre $T \neq 0$ tel que le graphique de la fonction soit invariant par une translation de vecteur $T\vec{i}$ + Conclure que T est la période de la fonction.		
T_{fp4}	τ_{fp4} : exprimer a en fonction de b et de période T Si a = b + kT on a f(a) = f(b).		
T_{fp5}	τ_{fp5} : + Déterminer la période, le maximum et le minimum de la fonction + Tracer la courbe sur une période, puis compléter par translation	θ_4 : La définition d'une fonction périodique et de la période d'une fonction	Θ_4 : Fonctions périodiques
	τ'_{fp5} : Utiliser des transformations géométriques sur le graphique d'une fonction connue pour trouver le graphique de la fonction.	θ_3 : Les propriétés des fonctions sinus et cosinus + Le théorème sur le lien du graphique entre des fonctions associées	Θ_3 : Fonctions numériques
	τ''_{fp5} : Utiliser la calculatrice		

Tableau 4. Les praxéologies ponctuelles au lycée en France

Nous listons ici les classes des fonctions périodiques étudiées dans les manuels français :

- Pour le type de tâches T_{fp3} « Déterminer la période d'une fonction donnée » :
  + Les fonctions données par les formules algébriques : A sin (kπx), cos kx, sin x + cos x, sin x.cos x
  + Les fonctions données par le graphique : fonction non trigonométrique
  + Les fonctions données par les formules algébriques et leurs graphiques sont demandés de construire par la calculatrice : A sin x – cos kx
- Pour le type de tâches T_{fp5} « Dessiner la courbe représentative d'une fonction périodique donnée » :
  + en utilisant la calculatrice ou la transformation graphique : A sin x – cos kx
  + en utilisant la périodicité : A sin x, sin kx + B, cos kx + B, A sin x cos x

Dans les manuels français, les exercices appartenant aux types de tâches sur la lecture graphique (trouver la période) et sur l'étude d'une fonction (déterminer la périodicité, trouver la période, construire le graphique, etc.) sont très nombreux.

On peut distinguer quatre éléments technologiques intervenant dans l'accomplissement des types de tâches liés à la périodicité au lycée:

+ θ_1 : division euclidienne
+ θ_2 : Le cercle trigonométrique
+ θ_3 : Les propriétés des fonctions sinus et cosinus
+ θ_4 : La définition d'une fonction périodique et de la période d'une fonction

Notons que θ_4 est plus générale et contient θ_3. De plus, θ_4 et θ_3 peuvent être justifiées par la même théorie, la théorie des fonctions périodiques au sein de l'analyse harmonique.

En particulier θ_3 et θ_4 interviennent dans plusieurs types de tâches dans les manuels français. L'élément technologique θ_3 associe aux fonctions trigonométriques fondamentales notamment les fonctions sinus et cosinus. Comme nous l'avons indiqué dans l'enquête épistémologique du chapitre 1, c'est une classe de fonctions importante qui sert à étudier toutes les fonctions périodiques via les séries de Fourier.

L'élément technologique θ_4 justifie les techniques d'accomplissement de plusieurs types de tâches T_{fp1}, T_{fp2}, T_{fp3}, T_{fp4} et T_{fp5}. Donc la périodicité est un objet d'enseignement en France au lycée. Le rôle de la périodicité qui permet de limiter l'intervalle d'étude d'une fonction périodique est travaillé pour trouver des valeurs de la fonction et pour la construction de son graphique, etc.

II.1.4. Conclusion sur l'institution française

Bien que la périodicité soit présente au début de la classe Seconde dans l'étude des ensembles des nombres, elle n'est pas un objet d'enseignement pour ce thème. Notre analyse montre qu'au lycée, la périodicité n'est en réalité attachée qu'à l'étude des fonctions et que son introduction se fait dans le cadre de la Géométrie euclidienne orientée grâce au cercle trigonométrique. Le concept de périodicité prend donc à ce niveau deux significations successives : la cyclicité (celle du cercle trigonométrique) et l'oscillation (celle de la sinusoïde) que l'institution a ainsi articulées entre elles.

Par contre l'articulation de la périodicité d'une fonction et celle d'une écriture décimale des nombres n'est pas établie clairement bien qu'on utilise le même mot « périodique ». Cette articulation serait-elle possible dans l'institution ? Comment ?

Soulignons de nouveau qu'au lycée français, la périodicité est étudiée comme une propriété d'une fonction, au même titre que la parité qui permet de limiter l'intervalle d'étude d'une fonction. Redisons aussi que la périodicité ne se limite pas aux seules fonctions trigonométriques. L'étude des fonctions périodiques se fait dans les deux registres, algébrique et graphique, et l'invariant graphique par la translation est particulièrement mis en avant.

Le concept de périodicité est fortement illustré par les fonctions trigonométriques. C'est, d'ailleurs, le rôle principal, voire unique, des fonctions trigonométriques d'être de bonnes représentantes de l'ensemble des fonctions périodiques (elles sont continues, dérivables, elles forment une classe « simple » de fonctions). Par contre, les propriétés des fonctions trigonométriques ne sont investies dans aucun problème intra ou extra mathématique. En particulier, le retrait du programme des équations différentielles linéaires du second ordre a fait disparaître une niche pour les fonctions trigonométriques. Cette niche existe-t-elle dans l'enseignement de la physique ?

Cette question mérite d'autant plus d'être examinée que la présence des fonctions dans l'enseignement secondaire mathématique est née de préoccupations liées à l'enseignement de la physique (cf. Introduction). Ce que l'analyse institutionnelle met en lumière, c'est que la fonction en devenant un objet d'enseignement mathématique central, presque emblématique, pour l'enseignement secondaire, s'est dans le même temps éloignée de ces origines physiciennes. Nous en aurons confirmation avec l'analyse de l'enseignement de la modélisation dans la partie C de ce chapitre.

II.2. Institution vietnamienne

II.2.1. Parties du programme pouvant impliquer la notion de périodicité

Dans les programmes des classes 10 et 11, nous notons ci-dessous les sujets et les compétences attendues relatives à la trigonométrie, seule partie du programme dans laquelle la notion de périodicité est introduite. Il n'y a aucune différence entre le programme élémentaire et le programme avancé dans ces parties de programmes.

	Sujets	Compétences attendues
Classe 10	**Angle et arc trigonométrique** Degré et radian Angle et arc trigonométrique Mesure d'un angle ou d'un arc trigonométrique Cercle trigonométrique **Valeurs trigonométrique d'un angle (arc)** Valeur sin, cos, tan, cot et signification géométrique Tableau des valeurs trigonométriques remarquables Relations entre les valeurs trigonométriques **Formules trigonométriques**	+ *Connaissance :* Connaître les deux unités de l'angle et l'arc, degré et radian ; Comprendre la notion de cercle trigonométrique ; angle et cercle trigonométrique et leur mesure. + *Savoir-faire :* Déterminer l'extrémité d'un arc et le rayon extrême d'un angle ou un ensemble des angles sur le cercle trigonométrique. + *Connaissance :* Comprendre la notion de valeur trigonométrique d'un angle, le tableau trigonométrique remarquable ; Connaître les relations entre les valeurs trigonométriques des angles associés ; La signification géométrique de tangente et cotangente. + *Savoir-faire :* Déterminer la valeur trigonométrique d'un angle donné ; Appliquer les identités trigonométriques fondamentales à calculer, à démontrer des formules simples ; Appliquer les formules trigonométriques à calculer les valeurs trigonométriques d'un angle quelconque et à démontrer des égalités.
Classe 11	**Fonctions trigonométriques** Définition Périodicité Variation Graphique **Equations trigonométriques** Equations trigonométriques fondamentales Formules trigonométriques Exprimer les solutions sur le cercle trigonométrique	+ *Connaissance :* Comprendre la notion de fonction trigonométrique + *Savoir-faire :* Déterminer l'ensemble de définition ; l'ensemble de valeurs ; la parité ; la périodicité ; la période ; l'intervalle de croissance, de décroissance des fonctions comme y = sin x, y = cos x, y = tan x, y = cot x. + *Connaissance :* Connaître les équations trigonométriques fondamentales et les formules de solutions + *Savoir-faire :* Résoudre les équations trigonométriques fondamentales

Tableau 5. Les parties du programme du lycée au Viêt Nam pouvant impliquer la périodicité

On voit que le programme ne place pas la notion de périodicité dans les compétences attendues. On demande seulement aux élèves de reconnaître la périodicité et de déterminer la période des fonctions trigonométriques fondamentales. Donc la périodicité semble être introduite pour servir l'étude de ces fonctions et n'est pas un objet d'enseignement pour ce thème. Les formules trigonométriques et les équations trigonométriques ont une place très importante. En effet, les demandes du programme insistent sur l'utilisation des formules trigonométriques et sur la résolution des équations trigonométriques.

La notion de fonction périodique avec ses caractéristiques est-elle abordée dans les manuels ? Quels rôles joue-t-elle ? Existe-t-il une articulation de la périodicité des fonctions avec celle des écritures décimales illimitées périodiques étudiées au collège ?

II.2.2. Analyse de manuels

II.2.2.1. Manuels de classe 10

Il n'y a pas de différences notables entre le manuel élémentaire et le manuel avancé dans la partie Trigonométrie. Au début dans l'étude des angles orientés, la période a une signification implicite comme un « tour de cercle » correspondant à 2π ou 360^o. Le cercle trigonométrique est bien utilisé pour définir les valeurs trigonométriques et établir les relations entre des valeurs trigonométriques des angles associés.

Pourtant, une remarque intéressante est que dans le manuel élémentaire, la notion d'arc trigonométrique est présente en faisant référence au mouvement d'un point sur un cercle.

> Chaque fois que le point M mobile sur le cercle orienté selon une direction déterminée du point A au point B, on a un arc trigonométrique avec le point initial A et le point extrême B.
> (Manuel élémentaire de classe 10, p. 134)

Un modèle physique du mouvement rotatif d'un point sur le cercle est donc engagé ici. La répétition du mouvement de ce point permet d'introduire la mesure des arcs orientés $\overset{\frown}{AM}$ de la forme $\overset{\frown}{AM} = \alpha + k2\pi$, $k \in Z$.

Au contraire, le manuel avancé utilise la rotation d'un rayon pour introduire la notion d'angle trigonométrique. Le mouvement d'un point sur le cercle n'est donc pas présent explicitement.

Donc en classe 10, la périodicité n'est étudiée que dans le cadre de la Géométrie euclidienne orientée dont l'élément technologique principal est le cercle trigonométrique et elle ne prend que la signification d'une cyclicité (tour de cercle de 2π).

II.2.2.2. Manuels de classe 11

Nous séparons dans notre analyse les deux manuels car ils présentent dans cette classe des différences notables.

- **Manuel élémentaire**

Dans ce manuel, la périodicité des fonctions trigonométriques est introduite à partir d'une activité algébrique. C'est chercher les nombres T tels que $f(x + T) = f(x)$ pour tout x appartenant à l'ensemble de définition des fonctions $y = \sin x$ et $y = \tan x$. Ensuite, la conclusion sur la période des quatre fonctions trigonométriques fondamentales est aussi abordée complètement du côté algébrique.

> On peut démontrer que $T = 2\pi$ est le nombre positif minimal vérifiant l'égalité : $\sin(x + T) = \sin x$, $\forall x \in R$ (1). La fonction $y = \sin x$ vérifiant (1) est appelée **fonction périodique** et 2π est appelé **période** de la fonction. De la même manière la fonction $y = \cos x$ est une fonction périodique de période 2π. Les fonctions $y = \tan x$ et $y = \cot x$ sont des fonctions périodiques de période π. (C'est le manuel qui souligne).
> (Manuel élémentaire de classe 11, p. 7)

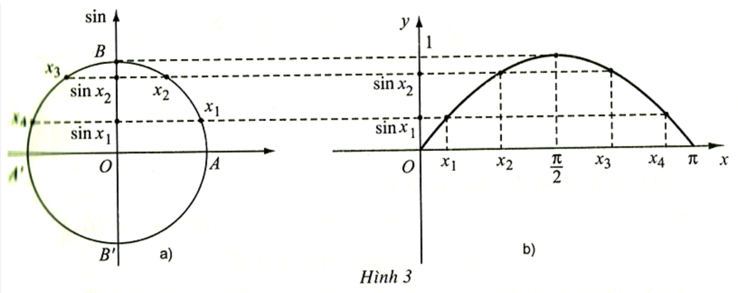
Ici, la caractéristique minimale de la période est soulignée bien qu'on ne donne pas une démonstration de ce caractère. Toutes les propriétés périodiques et la période des fonctions trigonométriques sont des propriétés admises. La périodicité ne s'approche que du point de vue algébrique. L'invariant du graphique par des translations n'est pas présent dans la citation précédente.

Cette caractéristique graphique sera mise en évidence pour construire le graphique de la fonction y = sin x. D'abord, son graphique est construit sur l'intervalle [-π ; π] grâce à l'imparité. Ensuite, celui sur R est déduit à partir de la périodicité.

> La fonction y = sin x est une fonction périodique de période 2π, donc pour tout réel x, on a : sin (x + k2π) = sin x, k ∈ Z.
> Donc pour avoir le graphique de cette fonction sur R, on utilise les translations successives du graphique sur l'intervalle [-π ; π] selon les vecteurs $\vec{v}$ = (2π ; 0) et - $\vec{v}$ = (-2π ; 0).
> (Ibid., p. 8)

C'est la périodicité de la fonction sinus qui permet de construire son graphique entier à partir de celui sur une période par les translations. Le manuel utilise ce résultat comme une conséquence de l'égalité algébrique : sin (x + k2π) = sin x pour tout x.

Le graphique de cette fonction sur une demi-période [0 ; π] est construit comme suit :



(Ibid., p. 7)

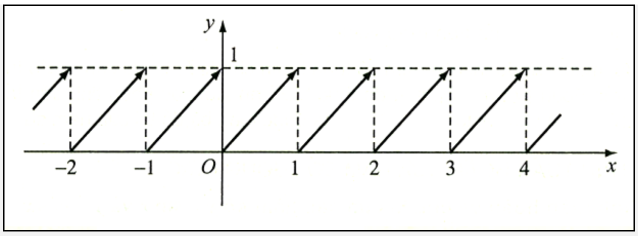
On trouve ici une articulation entre un cercle (modèle C) et une sinusoïde (modèle O) présentée dans l'enquête épistémologique du chapitre 1 et que nous n'avons pas repérée dans l'enseignement mathématique français.

Pour la fonction y = cos x, son graphique est construit par la translation du graphique de la fonction y = sin x selon le vecteur $\vec{u} = (-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0)$. Cela montre que la périodicité et la période ne sont pas des objets d'étude dans ce cas.

La définition générale d'une fonction périodique et ses caractéristiques, algébrique et graphique, ne sont pas introduites dans la partie « cours ». Cette absence est expliquée dans le livre des enseignants comme suit :

> Auparavant, les manuels introduisaient d'une manière assez complète la périodicité des fonctions trigonométriques et puis donnaient des exercices sur la détermination de la période de différentes fonctions trigonométriques. Cette manière est très lourde, d'autant plus que ce degré de détail n'est pas nécessaire pour les élèves. Ce manuel introduit cette notion d'une manière intuitive.
> (Livre des enseignants de classe 11, ensemble élémentaire, p. 22)

Toutes les notions générales sur la périodicité sont introduites dans la partie « Lecture supplémentaire[13] ». La définition d'une fonction périodique aborde la seule caractéristique algébrique de la périodicité. Ensuite, la justification de la répétition du graphique sur les intervalles ayant la même longueur que la période est aussi présentée. On mentionne aussi des exemples des fonctions périodiques qui ne sont pas des fonctions trigonométriques comme la fonction constante et la fonction y = x - [x] ([x] est la partie entière de x). Pour cette dernière, son graphique est introduit pour l'illustration mais la caractéristique graphique n'est pas soulignée.



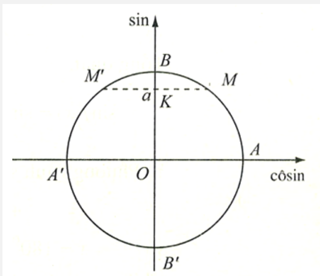
(Manuel élémentaire de classe 11, p. 15)

De plus, la périodicité et la période des fonctions y = sin x, y = tan x sont introduites dans les théorèmes accompagnés de démonstrations dans cette partie.

Le manuel consacre la plus grosse partie du chapitre à la leçon suivante - équations trigonométriques (13 séances sur 18 du chapitre). De plus, les contenus principaux de deux séances de révision sont aussi liés à l'équation trigonométrique. Cela montre que l'équation trigonométrique est **le sujet important** dans ce chapitre. Les fonctions trigonométriques semblent être introduites pour venir étudier des équations trigonométriques.

Les solutions des équations sin x = a et cos x = a sont établies grâce au cercle trigonométrique. Par exemple, pour l'équation sin x = a, la résolution est présentée comme suit :

L'équation sin x = a (1) définit pour tout réel x.



a) Si $|a| > 1$ l'équation (1) n'a pas de solution

b) Si $|a| \leq 1$ on trouve un point I sur l'axe sin pour que $\overline{OI} = a$. On trace une droite perpendiculaire à l'axe sin à partir de I qui coupe le cercle trigonométrique à M et M'.

On trouve que la valeur sinus des arcs trigonométriques $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{AM'}$ est égale à a. Donc leurs mesures sont des solutions de l'équation (1).

Appelons α la mesure en radian d'un arc trigonométrique $\overset{\frown}{AM}$ on a :

$\overset{\frown}{AM} = \alpha + k2\pi$ et $\overset{\frown}{AM'} = \pi - \alpha + k2\pi,\ k \in Z$

Donc l'équation sin x = a a pour des solutions $x = \alpha + k2\pi$ et $x = \pi - \alpha + k2\pi$.

(Ibid., p. 19)

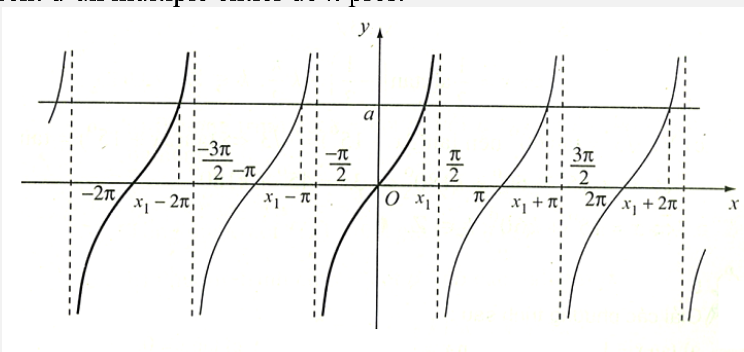
[13] Les connaissances qui ont été retirés du programme et qui ne sont donc plus introduites dans les cours sont laissées dans la partie: « Lecture supplémentaire » à l'adresse à de bons élèves. (Livre des enseignants, p. 10).

Nous trouvons que dans les étapes de résolution de l'équation sin x = a ci-dessus, c'est la périodicité de la période tour de cercle qui est utilisée. C'est celle qui permet d'écrire k2π dans les solutions (modulo 2π).

Par contre, la résolution des équations tan x = a et cot x = a s'appuie sur les graphiques des fonctions[14]. Regardons l'équation tan x = a.

La condition de l'équation est que x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

En s'appuyant sur le graphique de la fonction y = tan x, nous trouvons que pour chaque nombre a, le graphique de la fonction y = tan x coupe la droite y = a aux points dont les abscisses diffèrent d'un multiple entier de π près.



L'abscisse de chaque point d'intersection est la solution de l'équation tan x = a. Appelons x_1 l'abscisse d'intersection satisfaisant $-\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2}$.

Notons x_1 = arctan a. Les solutions de l'équation tan x = a est que x = arctan a + kπ $(k \in \mathbb{Z})$.
(Ibid., p. 23-24)

La propriété de périodicité et la période π de la fonction y = tan x sont utilisées grâce à l'ostensif graphique.

Pour les autres équations trigonométriques, on fait appel à des techniques algébriques pour les transformer et en déduire les solutions à partir des équations trigonométriques fondamentales. Le graphique n'est alors pas utilisé. Les inéquations trigonométriques sont introduites seulement dans la partie « Lecture complémentaire » où le cercle trigonométrique est réutilisé pour trouver leurs solutions.

Dans les chapitres suivants, les fonctions trigonométriques réapparaissent dans l'étude de la limite, la continuité et la dérivée, etc. Cependant, leur périodicité n'est pas un objet d'étude.

- **Manuel avancé de classe 11**

A la différence du manuel élémentaire de classe 11, ce manuel va définir la propriété de périodicité pour une fonction en dehors de l'ensemble des fonctions trigonométriques. De plus, il prend soin de mettre en valeur cette propriété dans la résolution d'une équation. Enfin, ce manuel présente un exemple de suite périodique.

---

[14] Signalons que dans les classes vietnamiennes, il n'y a pas de calculatrice graphique. La raison de ce choix est peut-être dans l'incitation formulée dans le programme à présenter des connaissances de manière concrète. « Les solutions des équations sin x = a et cos x = a ne sont pas présentée par ce choix parce qu'il est difficile à formuler leurs solutions ». (Livre des enseignants de classe 11, ensemble élémentaire, p. 29).

Ce manuel commence par la périodicité de la fonction sinus comme dans le manuel élémentaire. La période T de cette fonction est soulignée comme le nombre positif minimal vérifiant sin (x + T) = sin x. La périodicité est approchée du seul point de vue algébrique comme le confirme la remarque suivante :

> A partir de la périodicité de période 2π, on trouve que la valeur des fonctions y = sin x et y = cos x est totalement définie quand on connaît leurs valeurs sur un intervalle de 2π. Autrement dit, quand on connaît les valeurs des fonctions y = sin x et y = cos x sur un intervalle de 2π, alors on peut calculer leurs valeurs pour tout x. Quand la variable x est augmentée 2π, la valeur de la fonction revient à sa valeur initiale (cela explique le mot « périodique »). (Manuel avancé de classe 11, p. 5)

Ainsi donc, le manuel souligne une signification du mot « périodicité », un phénomène qui revient à un même état après des intervalles égaux. Cette remarque montre aussi l'avantage de l'étude de la périodicité d'une fonction trigonométrique, c'est la restriction de l'intervalle d'étude de la fonction.

Comme pour le manuel élémentaire, la caractéristique graphique n'est pas abordée explicitement. Par rapport à la fonction y = sin x, après avoir indiqué que sa période est 2π, le graphique sur l'intervalle [-π;π] et celui sur R sont donnés sans aucune explication.

Pourtant, le manuel présente l'utilisation de la périodicité pour trouver la variation de la fonction sinus.

> La fonction y = sin x est croissante sur l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Comme la période est de 2π, la fonction y = sin x est donc croissante sur chaque intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right), k \in Z$. (Ibid., p. 7)

Cette volonté de démontrer dans le cadre analytique n'est présente ni dans le manuel français ni dans le manuel élémentaire vietnamien. La propriété sur laquelle s'appuie la démonstration peut être énoncée ainsi :

> Etant donné une fonction f périodique de période T.
> Si f est croissante sur l'intervalle (a ; b) donc f est croissante sur l'intervalle (a + T ; b + T).
> Si f est décroissante sur l'intervalle (a ; b) donc f est décroissante sur l'intervalle (a + T ; b + T). (Encyclopédie en ligne)

Cette propriété montre bien le rôle de restriction de l'intervalle d'étude d'une fonction de la périodicité.

Dans ce manuel, la définition générale d'une fonction périodique est présentée pour conclure et synthétiser la notion de périodicité des fonctions trigonométriques fondamentales étudiées.

> Une fonction y = f(x) définie sur l'ensemble D est appelée périodique s'il existe un nombre non nul T tel que pour tout x appartenant à D, on a :
>
> x +T ∈ D, x -T ∈ D et f(x + T) = f(x).
>
> S'il existe un nombre positif minimal satisfaisant ces conditions, cette fonction est appelée fonction périodique de période T. (Ibid., p. 13)

La présence de cette définition dans ce manuel est expliquée par le livre des enseignants comme suit :

> Ici, c'est la première fois où les élèves se familiarisent avec une fonction périodique. La périodicité est une propriété marquante des fonctions trigonométriques, donc bien que le programme ne demande pas d'exposer généralement la fonction périodique, les auteurs présentent cette définition (fin de leçon 1) pour rappeler aux élèves de prêter attention à la propriété de périodicité des fonctions trigonométriques.
> (Livre des enseignants de classe 11, ensemble avancé, p. 16)

Donc la périodicité est installée comme propriété des fonctions trigonométriques et ne vit qu'avec ces fonctions. L'enseignement d'une définition générale n'est pas institutionnellement attendu.

On voit aussi l'absence de référence au graphique dans la définition proposée par ce manuel. Nous le trouvons seulement dans les exemples concrets après la définition. Deux parmi trois fonctions illustrées sont les fonctions y = 2 sin 2x et y = sin $\frac{x}{2}$ accompagnées de leurs graphiques. Une autre fonction est représentée par un graphique « par morceaux ». Cependant, ces graphiques ne sont là que pour illustrer la définition d'une fonction périodique. Ils ne sont pas un objet d'étude. Dans la suite, le registre graphique est totalement absent.

Ensuite la présentation de contenus concernant les équations trigonométriques est identique à celle du manuel élémentaire. On utilise toujours le cercle trigonométrique pour calculer l'une des solutions avant d'en déduire l'ensemble des solutions. Cela montre que seule est visée la périodicité des fonctions trigonométriques, ou plutôt la périodicité comme un tour de cercle dans le cercle trigonométrique. Pourtant dans le livre des enseignants, on souligne le rôle de la périodicité des fonctions dans l'étude des équations :

> Une caractéristique de l'équation trigonométrique est qu'il a une infinité de solutions (en raison de sa périodicité). Nous le trouvons plus clairement dans une remarque suivante :
> Si y = f(x) est une fonction périodique de période T et $x = x_0$ est une solution de l'équation f(x) = 0 les nombres $x = x_0 + kT$ ($k \in Z$) sont aussi des solutions.
> A partir de cette remarque, pour résoudre l'équation f(x) = 0 où f(x) est une fonction périodique de période T, nous pouvons trouver ses solutions sur un intervalle ayant la longueur de T puis en déduire toutes ses solutions.
> (Ibid., p. 31)

Donc la périodicité de la fonction f(x) est considérée comme un outil permettant de prouver que, **si l'équation a une solution**, alors elle en a une infinité.

Comme pour le manuel élémentaire, ce manuel présente des inéquations trigonométriques dans la partie « Lecture complémentaire ». De plus, on donne une méthode pour résoudre une inéquation trigonométrique fondamentale $f(x) < m$, $f(x) \geq m$, $f(x) > m$, $f(x) \leq m$ (3) où m est un nombre connu, f(x) est sin x, cos x, tan x ou cot x comme suit :

> En s'appuyant sur la périodicité des fonctions trigonométriques, nous pouvons résoudre une inéquation fondamentale (3) selon deux étapes suivantes :
> + Etape 1. Trouver des solutions de l'inéquation sur un intervalle ayant la longueur de même que celle de la période de la fonction y = f(x). Cette étape peut s'effectuer en utilisant le graphique ou le cercle trigonométrique.
> + Etape 2. Etendre le résultat sur tout l'axe numérique en utilisant la translation du domaine de solutions trouvé dans l'étape 1 à droite, à gauche des intervalles ayant la longueur de

même que celle de la période. Cette étape peut être accomplir grâce à une remarque suivante :
Soit $y = f(x)$ une fonction périodique de période T. Si l'inéquation $f(x) < m$ (respectivement $f(x) \geq m$, $f(x) > m$, $f(x) \leq m$) satisfait pour tout x appartenant à l'intervalle (a ; b) elle va satisfaire pour tout x appartenant à l'intervalle (a + kT ; b + kT), $k \in Z$.
(Manuel avancé de classe 11, p. 43)

Ici la périodicité des fonctions est abordée comme un outil pour résoudre une inéquation. Pourtant, la présence de cette méthode dans la partie « Lecture complémentaire » montre qu'elle n'est pas considérée comme obligatoire pour les élèves. Comme pour l'équation trigonométrique, le cercle trigonométrique et le graphique sont utilisés pour trouver des solutions d'une inéquation sur un intervalle. La périodicité est alors un élément technologique dans la détermination de l'infinité des solutions à partir d'une ou deux solutions de base trouvées grâce au cercle trigonométrique. Ce rôle est attesté par des expressions comme « en raison de la périodicité » et « en s'appuyant sur la périodicité », etc.

Dans la partie Suite numérique, voici l'exemple d'une suite périodique proposée par le manuel :

Soit une suite numérique (s_n) avec $s_n = \sin(4n-1)\frac{\pi}{6}$.
Démontrer que $s_n = s_{n+3}$, $\forall n \geq 1$.
Calculer la somme des quinze premiers termes de la suite donnée.
(Ibid., p. 109)

Le terme « périodique » n'est pas utilisé. Il s'agit d'une suite donnée par une fonction trigonométrique. Sa périodicité est mise en valeur dans l'égalité $s_n = s_{n+3}$, $\forall n \geq 1$ sans que soit définie la propriété de périodicité pour une suite. La question b) est là pour permettre une exploitation de la propriété de périodicité.

II.2.2.3. Manuels de classe 12

Dans le manuel de classe 12, le terme « périodicité » est utilisé uniquement quand on aborde les étapes de l'étude et de la construction graphique d'une fonction. A côté de l'étude de la monotonie et l'établissement d'un tableau de variations (une étape indispensable dans la procédure d'étude d'une fonction), on introduit aussi l'étape de l'étude de la périodicité de la fonction.

Malgré cela, il semble que cette étape n'est introduite que « formellement » et pour rappel. En effet, dans les deux manuels, élémentaire et avancé, il n'y a aucun exercice où l'on demande d'étudier une fonction périodique et de construire son graphique.

Par ailleurs, dans la partie « Nombres complexes » du manuel avancé, les fonctions sinus et cosinus sont réutilisées pour introduire la forme trigonométrique d'un nombre complexe. Pourtant, le terme et la notation « modulo » ne sont pas présents. Notons que le manuel élémentaire introduit aussi la notion de nombre complexe mais ne présente pas sa forme trigonométrique.

II.2.3. Praxéologies liées à la périodicité

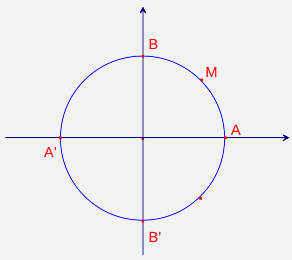
Rappelons ici les conventions de notation que nous avons adoptées pour les éléments des praxéologies rencontrées dans les manuels vietnamiens :

- Si nous rencontrons des types de tâches, techniques ou éléments technologiques déjà désignés lors de l'étude des praxéologies en France, nous utiliserons bien entendu les mêmes notations ; de nouvelles notations seront introduites dans le cas contraire.

- Lorsque, pour un même type de tâches, la technique privilégiée n'est pas la même au Viêt Nam qu'en France, nous le préciserons en ajoutant à la notation de la technique un exposant v.

- **Manuel élémentaire**

On rencontre les types de tâches T_{p1}, T_{p2} et T_{fn2} en classe 10. La technique pour l'accomplissement du type de tâches T_{p1} : Placer un point associé au réel $\frac{n\pi}{r}$ sur le cercle trigonométrique se trouve via un exemple suivant :

> Exemple. Représenter sur le cercle trigonométrique l'arc $\frac{25\pi}{4}$.
>
> Résolution.
>
> $\frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 3.2\pi$. Donc le point extrême de l'arc $\frac{25\pi}{4}$ est le milieu M du petit arc $\overset{\frown}{AB}$.
>
> 
>
>
> (Manuel élémentaire de classe 10, p. 139)

Ici la répétition de la position des points correspondant aux arcs trigonométriques différents de 2π près est utilisée. En effet, la technique utilisée est d'écrire $\frac{n\pi}{r}$ selon 2π (si possible) pour réduire le réel qui doit être placé sur le cercle trigonométrique. Nous noterons cette technique τ_{p1}^{v} pour la différentier de τ_{p1}. Regardons la remarque suivante dans le livre des enseignants liée au type de tâches T_{p1} :

> L'élève doit déterminer justement l'extrémité M d'un arc $\overset{\frown}{AM}$ correspondant via la présentation de α en une somme d'un multiple de 2π et un nombre appartenant à intervalle ($-\pi$; π]. (Livre des enseignants de classe 10, ensemble élémentaire, p. 139)

Cette technique montre une forte efficacité quand n est beaucoup plus grand que k. De plus elle peut être appliquée quand on doit trouver un point associé à un angle calculé en degré.

Prenons un exemple avec a = -765^{o}.

> $-765^{o} = -45^{o} + (-2).360^{o}$. Donc le point extrême de l'arc -765^{o} est le milieu N du petit arc $\overset{\frown}{AB'}$. (Manuel élémentaire de classe 10, p. 139)

Le type de tâches T_{p2} apparaît seulement une fois sous la forme d'une question sur la coïncidence des points extrêmes des différents arcs sur le cercle.

Quand on présente les arcs ayant des mesures différentes sur un cercle trigonométrique, peut-il avoir lieu le cas où leurs points extrêmes se coïncident ? Quand se passe-t-il ?
(Ibid., p. 140)

La réponse dans le livre des enseignants montre aussi que les points extrêmes coïncident quand les mesures des arcs diffèrent d'un multiple de 2π près. Donc ce type de tâches insiste aussi sur la répétition de la position des points sur le cercle trigonométrique. Nous retrouvons le sens « tour de cercle » de la périodicité comme dans le type de tâches T_{p1}.

Le type de tâches T_{fn2} : *f étant une fonction trigonométrique, calculer f(a)* apparaît implicitement sous la forme du calcul de sin a, cos b,… avant d'aborder même explicitement la périodicité des fonctions. Les fonctions associées à T_{fn2} sont seulement des fonctions trigonométriques fondamentales.

Prenons l'exemple 1 à la page 150 suivant.

Calculer $\tan\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.
Résolution.
On a $\tan\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right) = \tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$.
(Ibid., p. 150)

Le but de cet exercice n'est pas d'utiliser la périodicité et la période de la fonction. On introduit ce type de tâches pour insister sur les relations de valeurs trigonométriques entre des angles particuliers et les formules trigonométriques. La périodicité des fonctions n'intervient pas ici.

Ensuite dans le manuel de classe 11, bien que l'utilisation de la périodicité pour construire le graphique d'une fonction périodique générale ne soit pas explicitement abordée dans le cours, on trouve dans le même texte d'exercice deux types de tâches à exécuter l'une après l'autre.

Démontrer que $\sin 2(x + k\pi) = \sin 2x$ pour tout nombre entier k. En déduire le graphique de la fonction $y = \sin 2x$. (Manuel élémentaire de classe 11, p. 17)

Cet exercice ne parle pas de la périodicité pour la fonction donnée. Pourtant, quand on a l'égalité $f(x + kP) = f(x)$ pour tout nombre entier k, on peut conclure que cette fonction est périodique. La contrainte implicite dans les tels exercices est que P est la période de la fonction. On voit que la première question peut être résolue par l'utilisation du cercle trigonométrique ou des propriétés des fonctions trigonométriques. Nous noterons le type de tâches correspondant T_{fn3}. La deuxième question appartient au type de tâches T_{fp5} : *Dessiner la courbe représentative d'une fonction périodique*. Il est introduit après que le type de tâches T_{fn3} est accompli.

Comment les élèves peuvent déduire le graphique de la fonction après avoir démontré l'égalité $\sin 2(x + k\pi) = \sin 2x$?

Considérons la résolution suivante dans le livre des enseignants :

On a $\sin 2(x + k\pi) = \sin (2x + k2\pi) = \sin 2x$, $k \in Z$.
Donc la fonction $y = \sin 2x$ est périodique de période π.

De plus, la fonction y = sin 2x est impaire. On trace alors le graphique de la fonction sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ puis on prend le symétrique central par rapport à O pour avoir le graphique sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Enfin, on fait la translation parallèle à Ox de longueur π, on obtient le graphique de la fonction y = sin 2x sur R.
(Livre des enseignants de classe 11, ensemble élémentaire, p. 25)

Comment peut-on conclure que π est la période de la fonction ? Est-ce qu'il suffit de prendre k = 1 pour avoir T suivant la contrainte institutionnelle ? Est-ce qu'on s'intéresse au caractère minimal de la période ?

La résolution ci-dessus nous permet d'expliciter les techniques pour accomplir ces types de tâches. La technique τ_{fn3} correspond au type de tâches T_{fn3} :

+ Calculer f(x + kP)
+ Montrer que f(x + kP) = f(x) en utilisant la propriété périodique de période 2π de la fonction y = sin x ou y = cos x

La technique liée au type de tâches T_{fp5} est τ_{fp5} :

+Tracer la courbe sur un intervalle ayant de même longueur que celle de la période (P)
+Compléter par translation

Selon la résolution ci-dessus, l'accomplissement du type de tâches T_{fn3} permet de résoudre le type de tâches T_{fp5} avec la technique τ_{fp5}. Donc on peut dire que T_{fn3} est un type de tâches intermédiaire pour accomplir T_{fp5}. Bien que la périodicité et la période de la fonction donnée ne soient pas abordées dans la consigne, elles interviennent et sont mobilisées explicitement dans la technique d'accomplissement du T_{fp5}. L'absence de la définition d'une fonction périodique et de la période d'une fonction ne permet pas de justifier cette technique. Donc cela constitue une incomplétude de la praxéologie ponctuelle autour du type de tâches T_{fp5}. De plus, le manuel vietnamien insiste seulement sur les fonctions trigonométriques, notamment les fonctions sinus et cosinus et n'introduit pas de divers types de fonctions périodiques.

Pour construire le graphique de la fonction $y = |\sin x|$, ce manuel exige explicitement l'utilisation de la transformation graphique.

A partir du graphique de la fonction y = sin x, construire le graphique de la fonction y = $|\sin x|$. (Manuel élémentaire de classe 11, p. 17)

Donc il faut utiliser la technique τ'_{fp5} pour accomplir cet exercice. L'élément de technologie qui justifie cette technique est θ_3 : *Les propriétés des fonctions sinus et cosinus* et *Le théorème*[15] *sur le lien entre les graphiques des fonctions associées*. Ce théorème est présent en classe 10 lors du

[15] Soit p, q deux réels positifs et le graphique (G) d'une fonction y = f(x).
La translation de (G) vers le haut de q unités donne le graphique de la fonction y = f(x) + q
La translation de (G) vers le bas de q unités donne le graphique de la fonction y = f(x) – q
La translation de (G) à gauche de p unités donne le graphique de la fonction y = f(x + p)
La translation de (G) à droite de p unités donne le graphique de la fonction y = f(x – p)

cours sur la notion de fonction. La définition générale d'une fonction périodique n'intervient pas du tout.

Une remarque générale est que dans tous les exercices, le manuel évite d'aborder explicitement la périodicité et la période des fonctions. Pourquoi ?

Une partie de la réponse se trouve dans le livre des enseignants :

> La démonstration rigoureuse qu'un nombre T > 0 est la période de la fonction y = f(x) est un travail difficile. Le programme n'exige pas une présentation théorique et générale sur les fonctions périodiques. Cependant, l'enseignant peut aider l'élève à trouver la méthode pour déterminer la période d'une fonction à partir des fonctions usuelles.
> Par exemple : la fonction y = sin (3x - $\frac{\pi}{4}$) admet pour période le nombre $\frac{2\pi}{3}$ car:
> $\sin\left[3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ [….].
> (Livre des enseignants de classe 11, ensemble élémentaire, p. 10)

Quelle est cette méthode ? Comment trouver le nombre $\frac{2\pi}{3}$? Pourquoi n'est-il pas nécessaire de démontrer que $\frac{2\pi}{3}$ est le plus petit nombre satisfaisant l'égalité ci-dessus ? Le livre des enseignants ne le dit pas. Mais cette remarque nous montre que le manuel ne demande pas la démonstration du caractère positif minimal de la période parce que c'est un travail qu'il juge difficile.

Pour les équations trigonométriques ce manuel présente les méthodes de résolution de certains types d'équations usuels. Il existe 3 types de tâches suivants concernant les équations trigonométriques.

+ Résoudre une équation trigonométrique fondamentale (sin x = a, cos x = a, tan x = a, cot x = a)
+ Résoudre une équation concernant une fonction trigonométrique du premier ordre ou du second ordre (a sin x + b = 0, a $\sin^2$x + b sin x + c = 0,…)
+ Résoudre une équation de la forme a sin x + b cos x = c

Bien que le graphique des fonctions soit utilisé pour établir les formules de solution des équations tan x = a et cot x = a dans le cours, nous ne trouvons qu'un seul exercice qui demande de résoudre une équation en utilisant le graphique (cas de la fonction sinus). Par ailleurs, tous les types de tâches sont accomplis par les techniques algébriques.

Dans le livre d'exercice, les types de tâches T_{fn3} et T_{fp5} apparaissent successivement dans un seul exercice. Au contraire, le type de tâches T_{fp5} est présent indépendamment de T_{fn3} pour 10 fonctions. La technique attendue est seulement τ'_{fp5} - utilisation de la transformation graphique. La périodicité n'est pas mobilisée ici. Pour ce but, l'activité sur le graphique est plus soulignée dans le type de tâches T_{fp5}. Pourtant, avec le type de tâches « Résoudre une équation », le graphique n'est jamais utilisé dans ce livre.

- **Manuel avancé**

Dans ce manuel nous ne trouvons pas le type de tâches T_{p1} : Placer un point associé au réel $\frac{n\pi}{r}$ sur le cercle trigonométrique. Pourtant T_{p2}, T_{fn2} apparaissent plus fréquemment que dans le manuel élémentaire. Les techniques utilisées ne changent pas. Mais pour T_{fn2} les angles donnés sont choisis pour qu'on applique les propriétés sin (x + k2π) = sin x, cos (x + k2π) = cos x, tan x(x + kπ) = tan x et cot (x + kπ) = cot x. Donc le rôle de réduire la mesure d'un angle est souligné. Notons que le manuel élémentaire insiste sur les relations des angles associés et des formules trigonométriques quand on aborde ce type de tâches. Ici la période est liée au tour de cercle.

En ce qui concerne le type de tâches : Montrer qu'une fonction f est périodique de période T, comme pour le manuel élémentaire, ne pouvant pas demander de démontrer le caractère minimal de la période, au lieu de demander de démontrer la périodicité des fonctions, on donne des exercices comme suit : « f étant une fonction trigonométrique, démontrer que pour chaque nombre entier k, f(x + kP) = f(x) pour tout x ». Il s'agit donc du type de tâches T_{fn3}. La technique correspondante est τ_{fn3} comme celle du manuel élémentaire.

Prenons l'exercice suivant :

> Soit la fonction y = A sin (ωx+α) (A, ω, α constants ; A, ω non nuls). Démontrer que pour chaque nombre entier k, on a $f(x + k.\frac{2\pi}{\omega}) = f(x)$ pour tout x.
> (Manuel avancé de classe 11, p. 17)

Cet exercice aborde une classe des fonctions importante y = A sin (ωx+α) en physique où la période $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ est très souvent utilisée. Mais ici il semble que l'objectif de cet exercice est d'appliquer la périodicité et la période de la fonction y = sin x. La période de la fonction donnée n'est pas démontrée explicitement.

Dans le manuel, les exercices relevant de ce type de tâches sont nombreux. Les fonctions abordées sont les fonctions trigonométriques et on utilise la périodicité de période 2π des fonctions sinus et cosinus. Cela montre que l'institution souhaite que les élèves comprennent la périodicité et la période dans le cas de ces deux fonctions sans pour autant introduire la définition générale de la fonction périodique et de la période.

Comme dans le manuel élémentaire, il existe des exercices proposant successivement les deux types de tâches T_{fn3} et T_{fp5} où la périodicité n'est pas abordée explicitement. Par ailleurs, le type de tâches T_{fp5} qui exige d'utiliser la transformation géométrique sur le graphique est aussi présent. Nous ne les rappellerons pas ici.

En outre, dans ce manuel, nous trouvons la présence d'un nouveau type de tâches T_{fp6} : Etudier la variation d'une fonction périodique sur l'intervalle (a ; b) donné. Ce type de tâches est introduit seulement avec des fonctions trigonométriques fondamentales. Si l'intervalle (a ; b) est donné sous forme (m+kT ; n+kT) dans laquelle T est la période et m, n sont inférieurs à T, la technique τ_{fp6} correspondante est la suivante :

+ Déterminer sur le graphique la propriété de croissance (respectivement de décroissante) de la fonction sur l'intervalle (m ; n)

+ Grâce à la périodicité de la fonction, conclure sur la propriété de croissante (respectivement de décroissante) de la fonction sur l'intervalle (a ; b)

Il s'agit de l'activité 4 suivant dans la partie cours :

> L'affirmation ci-dessous est-elle correcte ? Pourquoi ?
> La fonction y = cos x est décroissante sur l'intervalle (0 ; π) et est décroissante sur chaque intervalle (k2π ; π + k2π), k est un nombre entier.
> (Ibid., p. 9)

Voici la réponse trouvée dans le livre des enseignants :

> En observant le graphique, on trouve que la fonction y = cos x est décroissante sur l'intervalle (0 ; π), grâce à la périodicité de période 2π de cette fonction, elle est donc décroissante sur toutes les intervalles (k2π; π+ k2π), k est un nombre entier.
> (Livre des enseignants de classe 11, ensemble avancé, p. 21)

Si l'intervalle (a ; b) est abordé généralement, il faut récrire cet intervalle sous la forme (m+kT ; n+kT) et utiliser la technique précédente.

L'élément technologique justifiant cette technique est θ_3 *: Les propriétés des fonctions trigonométriques fondamentales* et θ_4 *: La définition d'une fonction périodique et de la période d'une fonction*. Ici, la périodicité a un rôle d'outil pour accomplir T_{fp6}. C'est-à-dire on a utilisé le rôle de restriction de l'intervalle d'étude d'une fonction de la périodicité. Pourtant l'explication est limitée aux cas des fonctions trigonométriques fondamentales. La période a la signification d'un invariant sur un intervalle fini.

A propos de l'équation trigonométrique bien qu'on utilise le cercle trigonométrique pour établir les formules de solution de toutes les équations trigonométriques fondamentales, nous trouvons des exercices s'appuyant sur le graphique. Par exemple, regardons l'exercice suivant :

> Dessiner le graphique de la fonction y = sin x et indiquer sur ce graphique des points dont l'abscisse appartient à l'intervalle (-π ; 4π) qui est une solution de chaque équation suivante :
> sin x = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; sin x = 1. (Manuel avancé de classe 11, p. 28)

La caractéristique des exercices appartenant à ce type de tâches est qu'on donne toujours un intervalle sur lequel il faut trouver des solutions. Les fonctions concernées sont les fonctions trigonométriques fondamentales. Donc ce type de tâches se centre sur la lecture du graphique. La périodicité n'intervient pas dans la recherche des solutions. Mais les graphiques des fonctions trigonométriques sont repris et utilisés.

Dans le livre d'exercices, le type de tâches T_{fp2} : *Montrer qu'une fonction f est périodique de période T* apparaît explicitement. On demande de démontrer la périodicité et la période des fonctions y = sin x et y = tan x qui ne sont pas démontrées dans le cours puis d'en déduire la périodicité et la période d'autres fonctions comme y = A sin (ωx+α) + B, y = A tan ωx + B,… La technique suivante, que nous notons $\tau_{fp2}{}^{v}$ est utilisée.

+ Montrer que tous les nombre P tels que f(x + P) = f(x) pour tout x sont égaux à kT

+ En déduire T est le nombre positif minimal tel que f(x + T) = f(x) pour tout x.

Le type de tâches T_{fp3} : *Déterminer la période d'une fonction périodique* est aussi présente dans ce livre. Selon les caractéristiques des exercices appartiennent à ce type de tâches, on a deux techniques pour accomplir T_{fp3}.

Si les fonctions données peuvent être écrites sous forme y = A sin (ωx+α) + B ou y = A cos (ωx+α) + B, la technique utilisée est $\tau_{fp3}{}^{v}$:

+ écrire la fonction sous forme y = A sin (ωx+α) + B ou y = A cos (ωx+α) + B

+ période T $= \dfrac{2\pi}{|\omega|}$

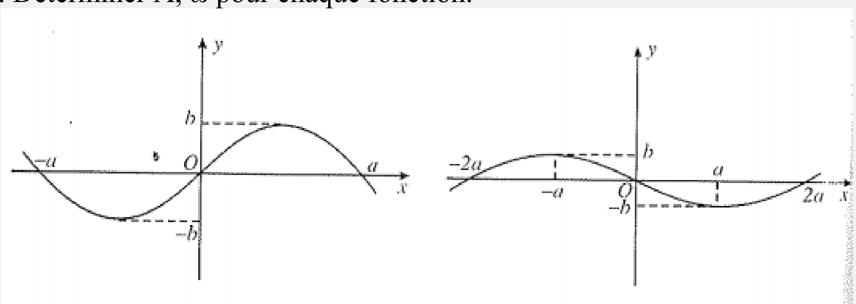
L'élément technologique est que les fonctions y = A sin (ωx+α) + B et y = A cos (ωx+α) + B sont des fonctions périodiques de période $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ (exercice 1.6). Et la périodicité de ces fonctions est déduite à partir de laquelle de la fonction y = sin x.

Pour une fonction générale qu'on ne peut pas écrire sous forme y = A sin (ωx+α) + B ou y = A cos (ωx+α) + B, on va utiliser la technique $\tau_{fp2}{}^{v}$, technique d'accomplissement du type de tâches T_{fp2}.

En particulier, le livre d'exercice introduit la fonction y = $\sin^2 x + \cos^2 x$. C'est une fonction constante périodique mais sans avoir période.

Dans aucun des manuels précédemment examinés nous ne trouvons la présence du type de tâches T_{fn1} : *Associer à chaque courbe une fonction trigonométrique*. Mais dans ce livre d'exercice, il existe un type de tâches proche de T_{fn1} qui donne des fonctions par ses graphiques pour trouver les formules correspondantes. Par exemple :

Chaque graphique ci-après est le graphique d'une fonction y = A sin ωx (A, ω sont constants). Déterminer A, ω pour chaque fonction.



Hình 1.1 Hình 1.2

(Livre d'exercices de classe 11, ensemble avancé, p. 8)

Remarquons que le graphique est donné seulement sur un intervalle ayant de même longueur que celle de la période. Voici la résolution trouvée dans ce livre :

La fonction y = $b\sin\dfrac{\pi}{a}x$ donc A = b, $\omega = \dfrac{\pi}{a}$.

La fonction y = $-b\sin\dfrac{\pi}{2a}x$ donc A = - b, $\omega = \dfrac{\pi}{2a}$. (Ibid., p. 24)

Comment peut-on trouver les expressions des fonctions liées à ces graphiques ? Il n'y a aucune explication. Nous ne conserverons pas dans notre analyse ce type de tâches, absent de tous les manuels, dans les praxéologies relevées au Viêt Nam.

Le type de tâches T_{fp5} : *Dessiner la courbe représentative d'une fonction* est accompli par les deux techniques τ_{fp5} et τ'_{fp5}. Nous trouvons que la première technique est plus fréquemment utilisée. C'est l'introduction de la définition de la fonction périodique dans ce manuel qui fait compléter la praxéologie ponctuelle autour du type de tâches T_{fp5}. Notons que nous avons indiqué l'incomplétude de cette praxéologie dans le manuel élémentaire en l'absence de la définition d'une fonction périodique.

En résumé, le tableau ci-après présente les types de tâches rencontrés dans l'institution vietnamienne :

	Type de tâches	Note
T_{p1}	Placer un point associé au réel $\frac{n\pi}{r}$ sur le cercle trigonométrique	manuel élémentaire
T_{p2}	Vérifier si les réels x et y repèrent le même point du cercle trigonométrique	manuel élémentaire et avancé
T_{p3}	Résoudre une équation trigonométrique (du type sin x = a, cos x = a)	manuel élémentaire et avancé
T_{fn2}	f étant une fonction trigonométrique, calculer f(a)	manuel élémentaire et avancé
T_{fn3}	f étant une fonction trigonométrique, démontrer que pour chaque nombre entier k, f(x + kP) = f(x) pour tout x	manuel élémentaire et avancé
T_{fp2}	Montrer qu'une fonction f est périodique de période T	**livre d'exercice du manuel avancé**
T_{fp3}	Déterminer la période d'une fonction périodique	**livre d'exercices du manuel avancé**
T_{fp5}	Dessiner la courbe représentative d'une fonction périodique	manuel élémentaire et avancé
T_{fp6}	Etudier la variation d'une fonction trigonométrique sur un intervalle (a ; b) donné	manuel avancé

Tableau 6. Repérage des types de tâches au lycée au Viêt Nam

<table>
<tr><th>Type de tâches</th><th>Technique</th><th>Eléments technologique</th><th>Théorie</th></tr>
<tr><td>T_{p1}</td><td>τ_{p1}^{v} : + écrire $\frac{n\pi}{r} = \beta + k2\pi$ où k est un nombre entier, $-\pi < \beta < \pi$
+ représenter β sur le cercle trigonométrique</td><td rowspan="2">θ_1 : La division euclidienne
θ_2 : Le cercle trigonométrique</td><td rowspan="2">Θ_1 : Arithmétique
Θ_2 : Géométrie euclidienne orientée</td></tr>
<tr><td>T_{p2}</td><td>τ_{p2} : calculer x – y
Si $x - y = k2\pi$ (k est un nombre entier), x et y repèrent le même point du le cercle trigonométrique</td></tr>
<tr><td>T_{p3}</td><td>τ_{p3}^{v} : Pour l'équation sin x = a
- Trouver un angle α tel que sin α = a
- Les solutions sont : $x = \alpha + k2\pi$ et $x = \pi - \alpha + k2\pi$</td><td>θ_2 : Le cercle trigonométrique</td><td>Θ_2 : Géométrie euclidienne orientée</td></tr>
</table>

$\mathbf{T_{fn2}}$	τ_{fn2} : exprimer a en fonction d'une valeur remarquable b dont f(b) est connu	θ_3 : Les propriétés des fonctions sinus et cosinus (dont les valeurs remarquables)	Θ_3 : Fonctions numériques
$\mathbf{T_{fn3}}$	τ_{fn3} : + Calculer f(x + kP) + Montrer que f(x + kP) = f(x) en utilisant les propriétés des fonctions y = sin x et y = cos x		
$\mathbf{T_{fp2}}$	τ_{fp2}^{v} : + Montrer que tous les nombres P tels que f(x + P) = f(x) pour tout x sont égaux à kT + En déduire que T est le nombre positif minimal tel que f(x + T) = f(x).	θ_4 : Définition d'une fonction périodique et de la période d'une fonction	Θ_4 : Fonctions périodiques (incluse dans l'Analyse harmonique)
$\mathbf{T_{fp3}}$	τ_{fp3}^{v} : + écrire la fonction sous la forme y = A sin (ωx+α) + B ou y = A cos (ωx+α) + B La période est alors : $T = \dfrac{2\pi}{\lvert\omega\rvert}$	θ_3 : Les propriétés des fonctions sinus et cosinus	Θ_3 : Fonctions numériques
	τ_{fp2}^{v} : + Montrer que tous les nombres P tels que f(x + P) = f(x) pour tout x sont égaux à kT + En déduire que T est le nombre positif minimal tel que f(x + T) = f(x).	θ_4 : Définition d'une fonction périodique et de la période d'une fonction	Θ_4 : Fonctions périodiques
$\mathbf{T_{fp5}}$	τ_{fp5} : + Tracer la courbe sur un intervalle de même longueur que P + Compléter par translation	θ_4 : Définition d'une fonction périodique et de la période d'une fonction	Θ_4 : Fonctions périodiques
	τ'_{fp5} : Utiliser des transformations géométriques sur le graphique d'une fonction connue pour trouver le graphique de la fonction.	θ_3 : Les propriétés des fonctions sinus et cosinus + Le théorème sur le lien du graphique entre des fonctions associées	Θ_3 : Fonctions numériques
$\mathbf{T_{fp6}}$	τ_{fp6} : + Récrire a, b selon la période T de la fonction sous forme (m + kT, n + kT) + Déterminer sur le graphique la propriété de croissance (respectivement de décroissante) de la fonction sur l'intervalle (m ; n) + Grâce à la périodicité de la fonction, conclure sur la propriété de croissance (respectivement de décroissance) de la fonction sur l'intervalle (a ; b)	θ_3 : Les propriétés des fonctions sinus et cosinus θ_4 : Définition d'une fonction périodique et de la période d'une fonction	Θ_3 : Fonctions numériques Θ_4 : Fonctions périodiques

Tableau 7. Les praxéologies ponctuelles au lycée au Viêt Nam

Nous notons ici les classes des fonctions périodiques étudiées dans les manuels vietnamiens concernant les types de tâches repérés :

- Pour le type de tâches T_{fp6} : « Etudier la variation d'une fonction trigonométrique sur l'intervalle (a ; b) donné » : sin x, cos x, tan x.
- Pour le type de tâches T_{fn3} : « f étant une fonction trigonométrique, démontrer que pour chaque nombre entier k, f(x + kP) = f(x) pour tout x » : A sin (kx+m), $-\sin^2 x$, sinxcosx, $A\tan^2 x+B$, $\sin x \cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$.
- Pour le type de tâches T_{fp5} « Dessiner la courbe représentative d'une fonction périodique de période P donnée »

+ en utilisant la transformation graphique : -sin x, $|\sin x|$, $\sin|x|$, cos x + 2, cos (x+m)

+ en utilisant la périodicité implicitement : A sin kx, cos $\frac{x}{2}$, sin πx, tan πx

- Pour le type de tâches T_{fp2} « Montrer une fonction périodique de période T » : A sin (ωx+α) + B, A cos (ωx+α) + B, A tan ωx + B (livre d'exercice du manuel avancé).
- Pour le type de tâches T_{fp3} « Trouver la période d'une fonction périodique » : $\sin^2 2x + 1$, $\cos^2 x - \sin^2 x$, $\tan^2 x$, $\frac{1}{\sin x}$, $\frac{1}{\cos x}$ (livre d'exercice du manuel avancé).

Conclusion sur les praxéologies au Viêt Nam

On note l'incomplétude de la praxéologie ponctuelle autour du type de tâches T_{fp5} dans le manuel élémentaire en l'absence de la définition d'une fonction périodique. Le manuel avancé en introduisant cette définition semble avoir pour objectif de compléter cette praxéologie et de présenter une praxéologie ponctuelle autour du type de tâches T_{fp6}.

Dans les manuels vietnamiens, le type de tâches T_{fp5} : « Dessiner la courbe représentative d'une fonction périodique » est souvent introduit successivement au type de tâches T_{fn3}. Ce dernier est considéré comme un type de tâches intermédiaire qui sert à accomplir T_{fp5}. Donc la périodicité et la période ne sont pas abordées dans les énoncés. Elles sont mobilisées seulement implicitement. De plus, on utilise souvent la technique τ'_{fp5} quand T_{fp5} apparaît indépendamment de T_{fn3}. Cette technique est notamment utilisée dans le manuel élémentaire.

Notons que dans les manuels des périodes précédentes, le type de tâches T_{fp5} était toujours accompli par la technique τ_{fp5} (utilisation de la périodicité pour effectuer la translation) bien que la technique τ'_{fp5} (transformation graphique) soit plus efficace. Là, le rôle de la périodicité qui permet de limiter l'intervalle d'étude d'une fonction est prépondérant. Avec les changements intervenus dans les manuels, ce rôle est actuellement affaibli.

Les analyses ci-dessus nous montrent que dans le livre d'exercice du manuel avancé, la périodicité est plus étudiée. Elle est mobilisée explicitement pour accomplir plusieurs types de tâches (T_{fp2}, T_{fp3}, T_{fp5}).

Dans les manuels, les exercices appartenant aux types de tâches ayant l'élément technologique θ_3 sont nombreux. Au contraire, la définition d'une fonction périodique (l'élément technologique θ_4) intervient seulement implicitement et dans peu d'exercices. Le rôle de la périodicité est restreint à la limitation de l'intervalle d'étude de la fonction étudiée en vue de tracer son graphique. Cela convient à l'objectif affiché par le programme dans lequel la périodicité n'est pas un objet d'enseignement.

II.2.4. Conclusion sur l'institution vietnamienne

Au lycée, la périodicité n'apparaît que dans le cadre des fonctions numériques (sans les suites numériques) et prend deux significations successives, la cyclicité et l'oscillation. L'articulation entre ces deux significations est établie grâce au cercle trigonométrique.

Les contenus concernant l'ensemble des fonctions périodiques sont introduits d'une manière très succincte. Notamment, on se limite à l'étude des fonctions trigonométriques sans susciter de lien avec la périodicité d'une écriture décimale illimitée périodique au collège. La périodicité est considérée comme une propriété caractéristique de ces fonctions qui ne sert qu'à construire leur graphique ou à justifier l'infinité des solutions d'une équation. L'invariant du graphique par la translation n'est pas mis en lumière. Le registre algébrique est le registre dominant dans l'étude des fonctions trigonométriques.

III. Comparaison France – Viêt Nam et conclusion pour l'enseignement des mathématiques

Le tableau suivant présente le curriculum d'objets mathématiques attachés au concept de périodicité dans l'enseignement secondaire des mathématiques :

	En France	**Au Viêt Nam**
Collège	développement décimal périodique	développement décimal périodique
Lycée (classe 10)	- fonctions trigonométriques - fonctions périodiques (par graphique) - période, fréquence	
Lycée (classe 11)	fonctions périodiques	fonctions trigonométriques

Tableau 8. Les objets de la périodicité en mathématiques

Tant au Viêt Nam qu'en France, dans l'enseignement secondaire mathématique, on relève deux habitats distincts pour la périodicité : celui des nombres réels et celui des fonctions numériques.

Dans les deux institutions, le premier habitat donne l'occasion de présenter une périodicité discrète avec des objets de l'Arithmétique tandis que le second habitat sert à faire valoir les fonctions trigonométriques.

Dans aucune des deux institutions, les propriétés attachées à la périodicité ne sont développées au-delà des exemples choisis pour les présenter : pas de notion de congruence[16] qui ferait suite à la périodicité présentée avec la division euclidienne, pas d'équations différentielles linéaires de second ordre dont la résolution exploiterait les propriétés des fonctions trigonométriques. On peut remarquer notamment l'absence d'une praxéologie bâtie autour du type de tâches « résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients réels constants »[17]. Quelle sera la conséquence d'une telle absence dans l'enseignement de la physique puisque nous avons mis en évidence le rôle des équations différentielles dans la modélisation de phénomènes périodiques ?

Si nous revenons aux organisations mathématiques rencontrées dans les manuels français et /ou vietnamiens, nous pouvons les regrouper dans les quatre praxéologies locales suivantes (voir en annexe 3 une carte praxéologique des praxis liés à la périodicité dans les deux institutions) :

***Dans Θ_1 :* Arithmétique**

θ_1 : La division euclidienne
engendre :
(T_{d1}, τ_{d1}), (T_{d1}, τ_{d1}^{V}), (T_{d2}, τ_{d2}), (T_{d2}, τ_{d2}^{V}), (T_{d4}, τ_{d4})

***Dans Θ_2 :* Géométrie euclidienne orientée**

[16] Sauf en spécialité « mathématique » de Terminale S en France
[17] L'étude d'une telle équation différentielle a été retirée du programme français de mathématiques secondaire il y a plus de dix ans.

θ_2 : Le cercle trigonométrique
engendre :
(T_{p1}, τ_{p1}), (T_{p1}, τ_{p1}^{v}), (T_{p2}, τ_{p2}), (T_{p3}, τ_{p3}), (T_{p3}, τ_{p3}^{v})

***Dans Θ_3* : Fonctions numériques**
θ_3 : Les définitions et propriétés des fonctions sinus et cosinus
engendrent :
(T_{p3}, τ_{p3}^{v}), (T_{fn1}, τ_{fn1}), (T_{fn2}, τ_{fn2}), (T_{fn3}, τ_{fn3}), $(T_{fp3}, \tau_{fp3}^{v})$, (T_{fp4}, τ_{fp4}), (T_{fp5}, τ'_{fp5})

***Dans Θ_4 :* Analyse harmonique (ou plus modestement : les fonctions périodiques)**
θ_4 : La définition d'une fonction périodique et de la période d'une fonction
engendre :
(T_{fp1}, τ_{fp1}), (T_{fp2}, τ_{fp2}), $(T_{fp2}, \tau_{fp2}^{v})$, (T_{fp3}, τ_{fp3}), $(T_{fp3}, \tau_{fp2}^{v})$, (T_{fp4}, τ_{fp4}), (T_{fp5}, τ_{fp5}), (T_{fp6}, τ_{fp6})

Nous listons ci-après les différences essentielles entre les deux institutions, française et vietnamienne :

- En France, la périodicité d'une fonction, présente dans l'enseignement dès la classe Seconde, est regardée comme propriété d'une fonction au même titre que la parité sur la base d'une définition générale et donne lieu à la restriction de l'intervalle d'étude de la fonction dans les types de tâches « étudier une fonction numérique ». Au Viêt Nam, par contre la définition d'une fonction périodique n'est introduite que dans le manuel avancé comme une synthèse des caractéristiques des fonctions trigonométriques. Elle est donc installée comme propriété des fonctions trigonométriques et ne vit qu'avec ces fonctions. Outre l'absence de référence au graphique quand on parle de la périodicité des fonctions dans l'institution vietnamienne, le caractère minimal de la période est mis en avant alors qu'il est laissé dans l'ombre de la définition du manuel français.
- En France, les deux registres, algébrique et graphique, de la fonction périodique – comme de toute autre fonction, sont associés : le registre graphique via la courbe représentative dans un repère cartésien et le registre algébrique via la formule explicitant la relation entre la variable dépendante et la variable indépendante. Au Viêt Nam, par contre, le registre algébrique domine en laissant un rôle de supplétif au registre graphique. De manière similaire, la seule caractéristique de la fonction périodique abordée dans l'institution vietnamienne est algébrique. La caractéristique graphique est utilisée implicitement dans la construction du graphique des fonctions trigonométriques.
- Nous trouvons une apparition clairsemée des praxis associées au bloc technologico-théorique (θ_4, Θ_4) dans les manuels vietnamiens (θ_4 : Définition d'une fonction périodique et de la période d'une fonction et Θ_4 : Fonctions périodiques). Les types de tâches T_{fp2} (Montrer qu'une fonction est périodique de période T) et T_{fp3} (Déterminer la période d'une fonction périodique) présents dans le manuel français n'existent pas dans les manuels actuels sauf dans le livre d'exercice du manuel avancé. Cela montre que leur résolution n'est pas exigible pour les élèves. Notons qu'ils étaient présents explicitement dans les manuels qui ont précédé le manuel actuel. Dans les manuels actuels, ils sont remplacés par le type de tâches T_{fn3} (f étant une fonction trigonométrique, démontrer que pour chaque nombre entier k, f(x+kP) = f(x) pour tout x) qui n'aborde pas explicitement la périodicité et la période de la fonction. Ce changement permet d'éviter de démontrer le caractère minimal de la période qui est considéré comme une démonstration difficile. Cela est confirmé par l'absence du type de tâches T_{fp1} (Examiner si un nombre T est la période d'une fonction f) dans les manuels vietnamiens. Nous avons vu que le manuel français l'évite aussi et ne définit pas la période comme le nombre positif minimal vérifiant f(x+T) = f(x) contrairement au manuel vietnamien.

- Le type de tâches T_{fp4} : « f étant une fonction périodique de période T, calculer f(a) connaissant f(b) » n'est pas présent dans les manuels vietnamiens. On trouve seulement T_{fn2} (f étant une fonction trigonométrique, calculer f(a)) avant que la notion de périodicité soit présentée. Ce type de tâches insiste sur les calculs des valeurs des fonctions trigonométriques fondamentales grâce au cercle trigonométrique et aux relations entre des angles associés.

Au-delà de ces différences, à certain égards relativement minimes, on remarquera que les deux institutions travaillent peu le passage délicat du cercle trigonométrique au graphique de la sinusoïde, c'est-à-dire l'articulation entre le modèle C et le modèle O dont l'analyse épistémologique a mis en lumière l'intérêt pour la modélisation des phénomènes périodiques.

Nous allons justement nous interroger à présent sur l'enseignement de la périodicité dans les disciplines scientifiques qui ont besoin de ce concept. Comme nous l'avons déjà expliqué, nous nous limiterons à celui de la physique.

Q1 : Comment la périodicité apparaît-elle dans l'enseignement secondaire de la physique ? Quels sont les problèmes enseignés qui mobilisent la périodicité ? Quels liens cet enseignement fera-t-il avec le concept de périodicité enseigné en mathématiques ? (partie B)

Q2 : Comment l'enseignement secondaire engage-t-il le concept de périodicité dans la modélisation mathématique d'un phénomène physique ? (partie C)

Partie B. INSTITUTIONS D'ENSEIGNEMENT DE LA PHYSIQUE

Pour trouver des éléments de réponse à la question Q1, nous allons repérer dans les programmes et les manuels de physique des deux institutions, française et vietnamienne, l'apparition et l'utilisation de la périodicité.

I. Institutions françaises

I.1. Le collège

I.1.1. Les programmes

Nous relevons dans le tableau suivant les objets liés à la notion de périodicité dans le programme de physique au collège.

Classe	Partie	Connaissance	Capacités
5^e	L'eau dans notre environnement	Cycle de l'eau	
3^e	Tension continue et tension alternative périodique	-Tension alternative périodique -Période, fréquence -Relation entre la période et la fréquence	-Construire une représentation graphique de l'évolution d'une tension alternative périodique ; en décrire l'évolution. -Reconnaître une tension alternative périodique -Déterminer graphiquement sa valeur maximale et sa période -Mesurer sur un oscilloscope la valeur maximale et la période

Tableau 9. Les objets liés à la périodicité en physique au collège en France

Le terme « périodique » apparaît explicitement dans le programme de physique au collège tandis qu'en mathématiques il n'existe pas à ce niveau. De plus, on voit que plusieurs problèmes relatifs à la fonction périodique sont étudiés. Les notions de période et de fréquence sont définies ; de plus, le programme demande, dans les capacités attendues, la construction d'un graphique périodique (graphique de l'évolution d'une tension alternatif périodique) et la lecture du graphique (détermination de la période et de la valeur maximale). La reconnaissance d'une fonction périodique avec le registre graphique est aussi posée à l'élève à travers la demande de reconnaître une tension alternative périodique. Comment les phénomènes périodiques sont-ils définis ? Les fonctions périodiques sont-elles abordées explicitement au collège ? Les relations entre les phénomènes et leurs modèles mathématiques sont-elles établies ?

I.1.2. Les manuels

I.1.2.1. Physique-Chimie 5^e (Nouveau programme 2006, Bréal)

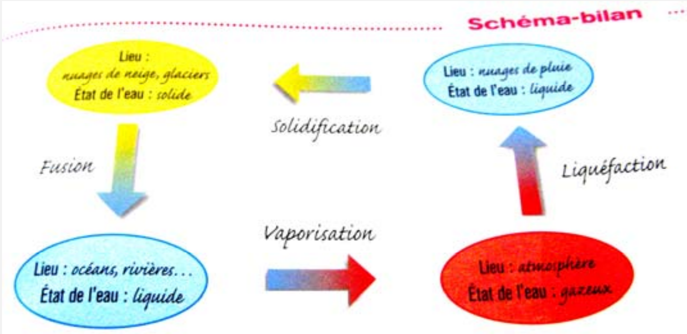
Voici la notion de cycle de l'eau décrite dans le chapitre 6 : *L'eau dans la nature*.

> Sur la Terre, une partie de l'eau liquide se transforme en vapeur d'eau sous l'action du Soleil. Dans l'atmosphère, ce gaz refroidit et se liquéfie en gouttelettes liquides, qui peuvent dans certaines conditions devenir solides (neige ou grêle). L'eau des nuages retombe sur Terre sous forme de précipitations. La neige ou la glace se transforme sous l'action de la

chaleur en liquide qui va grossir les cours d'eau. Le cycle peut recommencer. (Physique-Chimie 5^{e}, p.66)

Ce cycle est représenté par le schéma-bilan suivant dans la partie Essentiel.

Le cycle de l'eau sur la Terre est la circulation de l'eau entre les différents réservoirs naturels.



(Ibid., p. 69)

Ainsi, le cycle de l'eau est une suite de transformations qui ramènent l'eau à l'état initial. C'est le premier phénomène cyclique qui apparaît dans les manuels scolaires. Pourtant, le lien avec la périodicité n'est pas établi. Le mot « périodique » n'est pas cité et le manuel aborde la répétition de ce phénomène par le terme « recommencer ».

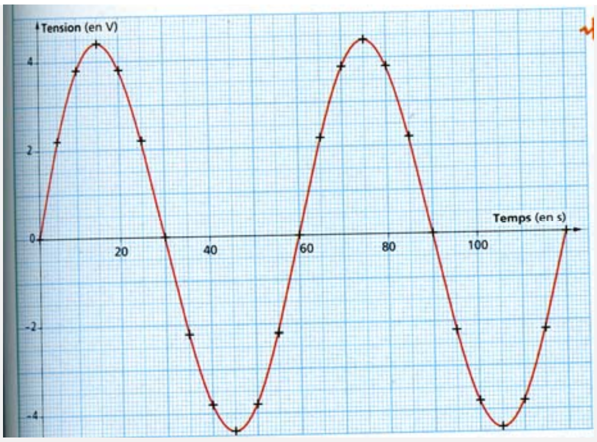
I.1.2.2. Physique-Chimie 3^{e} (Collection Parisi, 2008)

Le mot « périodique » apparaît la première fois dans le chapitre 8 : « Les tensions alternatives » de ce livre. Dans l'activité 1, le vocabulaire expliquant la périodicité est introduit.

Tension variable : tension dont la valeur change au cours du temps.
Tension périodique : tension variable dont la valeur se répète régulièrement au cours du temps.
Tension alternative périodique : tension variable, périodique et qui prend une valeur alternativement positive et négative. (Physique-Chimie 3^{e}, p. 120)

Ici, la périodicité est caractérisée par une répétition régulière au cours du temps. On remarquera que le terme de fonction n'est pas cité bien que la grandeur « tension » puisse être considérée comme une fonction du temps.

Ensuite, dans l'activité 2 on donne un tableau des valeurs de tensions mesurées aux bornes du générateur alternatif. La tension est relevée toutes les 5 secondes et les valeurs se répètent régulièrement après chaque 60 secondes. Le texte est accompagné d'un dessin qui est appelé représentation graphique de la tension en fonction du temps :

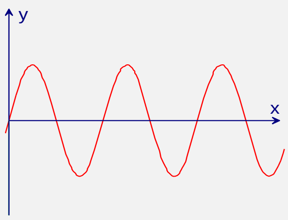


Représentation graphique de la tension délivrée par le générateur alternatif en fonction du temps

(Ibid., p. 121)

On voit que c'est une courbe sur deux « périodes ». Le graphique sur l'intervalle [60 ; 120] est la répétition de celui-ci sur l'intervalle [0 ; 60].

A partir de là, les notions de période et de tension sinusoïdale sont introduites.

> Motif élémentaire de la représentation graphique : la plus petite partie du graphique qui se répète identique à elle-même.
> Tension sinusoïdale : tension alternative périodique dont la représentation graphique est une sinusoïde.
>
> 
>
>
> Période : durée du motif élémentaire. On note T. (Ibid., p. 121)

Ainsi la période de la tension périodique est la durée du motif élémentaire - la plus petite partie du graphique qui se répète identique à elle-même. Donc comme pour les manuels mathématiques vietnamiens la période est la valeur la plus petite. Après chaque période le graphique se répète régulièrement. La période prend la même signification que celle dans l'étude des fonctions dans le manuel de mathématique au lycée.

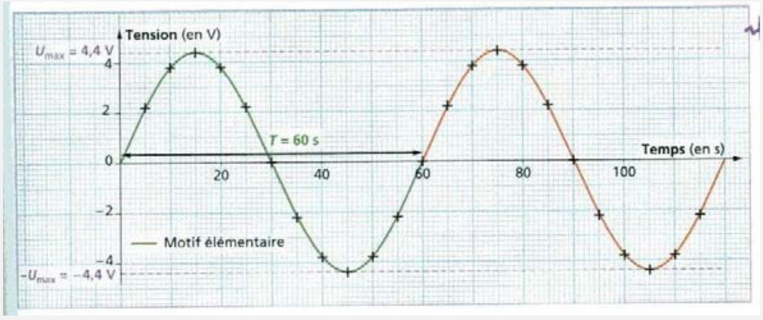
La notion de fréquence, notion importante en physique, est aussi introduite comme suit :

> La fréquence, notée f, d'une tension périodique est le nombre de motifs élémentaires par seconde. Son unité est le hertz de symbole Hz.
> La fréquence est l'inverse de la période exprimée en seconde : $f = 1/T$. (Ibid., p. 136)

On voit que la tension sinusoïdale est définie comme une tension alternative périodique dont la représentation graphique est une sinusoïde. Mais qu'est-ce qu'une sinusoïde ? Notons que les fonctions trigonométriques et leurs graphiques sont étudiés seulement en classe de Seconde. Ici, le manuel ne l'explique pas mais un graphique sinusoïdal est présenté comme un ostensif. Donc la reconnaissance d'une tension sinusoïdale s'appuie sur son graphique. Le registre algébrique de cette fonction n'est pas proposé.

Cela se confirme dans l'extrait suivant de la partie « Cours » :

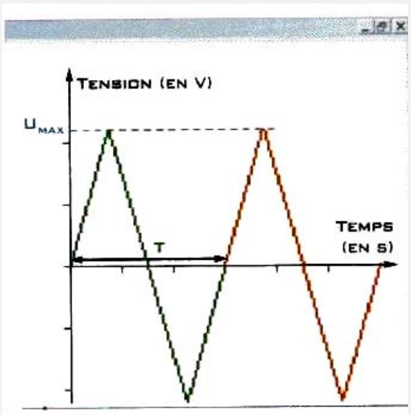
On mesure la tension aux bornes d'un générateur alternatif toutes les 5 secondes et on construit sa représentation graphique (doc 3).



On observe la répétition d'un motif élémentaire, donc la tension est périodique. Sa période est égale à 60 s : T = 60 s. Les valeurs extrêmes de la tension sont sa valeur maximale U_{max} = 4,4 V et sa valeur minimale – U_{max} = -4,4 V. En raison de la forme particulière de la courbe, cette tension alternative est appelée une tension sinusoïdale.
(Ibid., p. 123)

Pour renforcer la conception des élèves sur la tension sinusoïdale, voici un contre-exemple, une tension alternative périodique non sinusoïdale, donné par le manuel :

Exemple. Détermination de la période et de la valeur maximale d'une tension alternative périodique non sinusoïdale.



La différence entre ce graphique et le graphique sinusoïdal précédent est qu'il n'a pas de tangence aux points extrêmes. (Ibid., p. 123)

L'explication du terme « sinusoïdale » est trouvée dans la partie « Documents » du chapitre 9, « Visualisation et mesure des tensions alternatives ». Il est fait référence cette fois-ci à l'objet mathématique « fonction ».

Pourquoi une tension « sinusoïdale » ?
L'allure d'une tension sinusoïdale n'est pas quelconque : elle correspond à la représentation graphique de la fonction mathématique « sinus » (tu connais déjà le sinus d'un angle). Pour tracer une représentation graphique, on peut utiliser une calculatrice graphique ou un ordinateur. Il suffit de saisir l'équation que l'on veut tracer. Celle de la tension sinusoïdale s'écrit y = a sin (bx), avec x qui représente le temps t et y la tension U. (Ibid., p. 138)

On trouve ici une articulation possible entre la physique et les mathématiques. Pourtant, au collège, la fonction sinus n'est pas enseignée. Est-ce la raison pour laquelle le manuel de physique propose d'utiliser la calculatrice graphique ou un ordinateur pour en tracer le graphique ?

L’expression mathématique d’une tension sinusoïdale aurait pour forme l’équation $y = a \sin(bx)$. Pourtant, elle n’est pas un objet d’enseignement ici. On insiste seulement sur sa représentation graphique.

Le manuel introduit aussi des caractères physiques de la tension alternative :

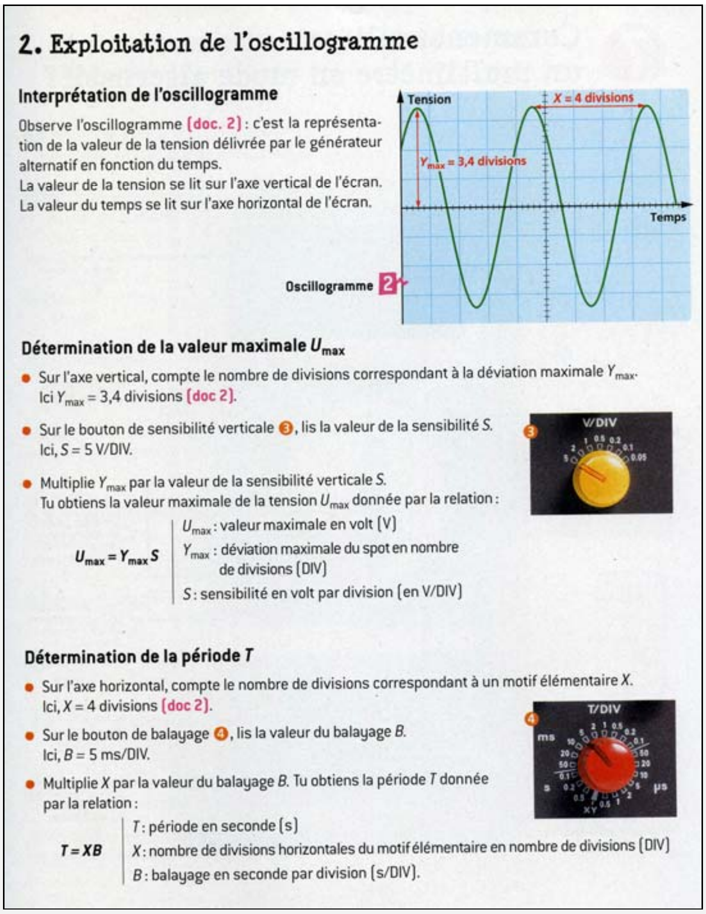
> Une tension alternative est caractérisée par :
> - sa valeur maximale U_{max}, exprimée en volt ;
> - sa période T, exprimée en seconde. (Ibid., p. 123)

Ces caractères font partie des connaissances et les savoir-faire exigibles pour les élèves tels que les résume le manuel dans la partie « Je révise ». En ce qui concerne le savoir-faire, on précise que les élèves doivent être capables de :

> - identifier une tension continue et une tension alternative périodique
> - construire une représentation graphique d’une tension alternative périodique et décrire son évolution
> - déterminer graphiquement la valeur maximale U_{max} (en volt), la valeur minimale $-U_{max}$ (en volt) et la période T (en seconde). (Ibid., p. 125)

Donc la reconnaissance d’une fonction périodique donnée par le registre graphique est demandée. Le manuel insiste sur la recherche dans le graphique d’informations concernant le phénomène. Ainsi le graphique est non seulement un moyen illustratif mais aussi un objet de travail. Outre la demande de construction d’un graphique, il y a plusieurs activités sur le graphique comme la lecture de la période, de la fréquence, etc.

Notamment, la technique d’exploiter un oscillogramme (technique de la lecture graphique) est donnée explicitement dans la partie « Des outils pour vous aider » à la fin du manuel.



2. Exploitation de l'oscillogramme

Interprétation de l'oscillogramme

Observe l'oscillogramme (doc. 2) : c'est la représentation de la valeur de la tension délivrée par le générateur alternatif en fonction du temps.
La valeur de la tension se lit sur l'axe vertical de l'écran.
La valeur du temps se lit sur l'axe horizontal de l'écran.

Détermination de la valeur maximale U_{max}

- Sur l'axe vertical, compte le nombre de divisions correspondant à la déviation maximale Y_{max}. Ici Y_{max} = 3,4 divisions (doc 2).
- Sur le bouton de sensibilité verticale 3, lis la valeur de la sensibilité S. Ici, S = 5 V/DIV.
- Multiplie Y_{max} par la valeur de la sensibilité verticale S. Tu obtiens la valeur maximale de la tension U_{max} donnée par la relation :

$U_{max} = Y_{max} S$ | U_{max} : valeur maximale en volt (V)
Y_{max} : déviation maximale du spot en nombre de divisions (DIV)
S : sensibilité en volt par division (en V/DIV)

Détermination de la période T

- Sur l'axe horizontal, compte le nombre de divisions correspondant à un motif élémentaire X. Ici, X = 4 divisions (doc 2).
- Sur le bouton de balayage 4, lis la valeur du balayage B. Ici, B = 5 ms/DIV.
- Multiplie X par la valeur du balayage B. Tu obtiens la période T donnée par la relation :

$T = XB$ | T : période en seconde (s)
X : nombre de divisions horizontales du motif élémentaire en nombre de divisions (DIV)
B : balayage en seconde par division (s/DIV).

(Ibid., p. 229)

On voit que le manuel cherche à éclairer le lien entre le phénomène (la variation temporelle de la tension) et son modèle mathématique (le graphique) en travaillant une « traduction » des données du graphique en caractères du phénomène.

Nous retrouvons dans ce manuel les types de tâches proches de T_{fp3} et T_{fp5} que les élèves rencontreront plus tard en mathématiques, en Seconde et en Première S :

T_{fp3} *: Déterminer la période d'une fonction périodique*

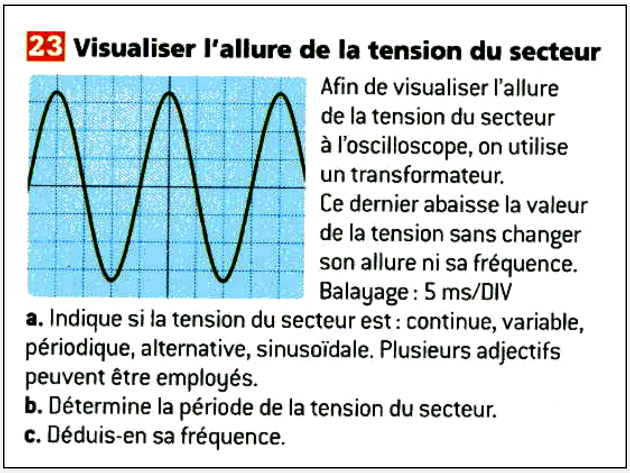
T_{fp5} *: Dessiner les courbes représentatives des fonctions périodiques*

Nous noterons donc les types de tâches correspondants de la même façon, mais avec l'indice P.

+ T_{fp3}^{P} : Déterminer la période d'un phénomène périodique. (Exercice 11/p. 126, 7/p. 140, 16/p. 141, 20/p. 141, 23/p. 142).

Avec ce type de tâches, le manuel donne toujours la représentation graphique de la tension. C'est-à-dire les fonctions représentant les phénomènes sont toujours données dans le registre graphique.

Par exemple, voici l'exercice 23 à la page 142.



23 Visualiser l'allure de la tension du secteur

Afin de visualiser l'allure de la tension du secteur à l'oscilloscope, on utilise un transformateur. Ce dernier abaisse la valeur de la tension sans changer son allure ni sa fréquence.
Balayage : 5 ms/DIV

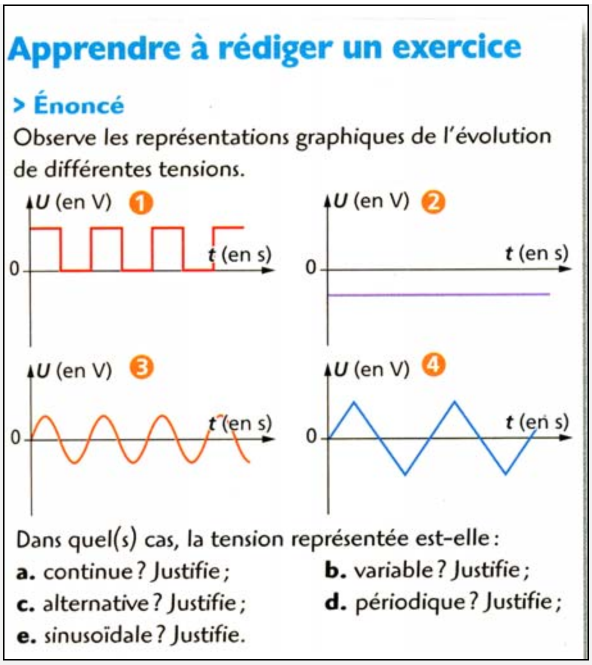
a. Indique si la tension du secteur est : continue, variable, périodique, alternative, sinusoïdale. Plusieurs adjectifs peuvent être employés.
b. Détermine la période de la tension du secteur.
c. Déduis-en sa fréquence.

(Ibid., p. 142)

+ T_{fp5}^{P} : Construire la représentation graphique d'une oscillation harmonique. (Exercice 8/p. 126, 21/p. 128).

En ce qui concerne ce type de tâches, notons que le manuel donne toujours le tableau des valeurs de la tension. Donc le graphique est construit par la représentation des points donnés dans un repère orthogonal à relier par une sinusoïde.

Par ailleurs, la reconnaissance d'une fonction périodique qui n'est pas abordée en mathématiques est étudiée en physique sous la forme de la reconnaissance d'un phénomène périodique. Par exemple, regardons l'exercice 14 à la page 127 suivant :



Apprendre à rédiger un exercice

> Énoncé

Observe les représentations graphiques de l'évolution de différentes tensions.

Dans quel(s) cas, la tension représentée est-elle :
a. continue ? Justifie ; **b.** variable ? Justifie ;
c. alternative ? Justifie ; **d.** périodique ? Justifie ;
e. sinusoïdale ? Justifie.

(Ibid., p. 127)

Nous le noterons le type de tâches T^{P} : « Reconnaître si un phénomène est périodique » (Exercice 9/p. 126, 15/p. 127, 22, 23, 25/p. 128, 6/p. 140, 23/142).

Comme pour le type de tâches T_{fp3}^{P} les tensions sont toujours données par leur représentation graphique. Donc ce type de tâches souligne la reconnaissance de la répétition des motifs élémentaires du graphique.

On voit que les élèves ont à réaliser des travaux sur les fonctions périodiques mais seulement à partir du graphique et de la table numérique. Le registre algébrique n'est pas encore abordé.

Notamment, à la fin du chapitre 9 : Visualisation et mesure des tensions alternatives, dans la partie « La physique au quotidien », le manuel présente l'électrocardioscope qui enregistre la tension électrique de l'activité cardiaque selon le temps. Cette tension va être retrouvée en mathématiques en classe Seconde.

> L'activité électrique cardiaque d'un individu peut être traduite par une tension variable observable sur l'écran d'un oscilloscope particulier : électrocardioscope.
> (Ibid., p. 144)

Ici, on donne une figure de l'écran d'un électrocardioscope qui affiche la tension cardiaque selon le temps.

(Ibid., p. 144)

Les questions posées aux élèves sont les suivantes :

> - la tension affichée sur l'électrocardioscope est-elle continue ou variable ?
> - l'activité cardiaque est-elle un phénomène périodique ?
> - calcule la période T, en seconde, puis la fréquence f en hertz de l'activité du cœur.
> - calcule le nombre de battements de cœur par minute. (Ibid., p. 144)

Cet exercice exploite aussi la reconnaissance d'une tension et la lecture du graphique comme les types de tâches T_{fp3}^{P} et T^{P} abordés précédemment.

En résumé, le premier phénomène périodique étudié en physique au collège en France est une oscillation périodique. Auparavant, un phénomène cyclique a bien été étudié (le cycle de l'eau) mais il n'a pas été désigné comme un phénomène périodique.

Bien qu'au collège, les fonctions périodiques et même les fonctions trigonométriques ne soient pas enseignées, l'oscillation périodique (tension périodique), notamment l'oscillation harmonique (tension sinusoïdale) est présente avec sa représentation graphique.

I.2. Le lycée

I.2.1. Les programmes

Classe	Exemples d'activité	Contenus	Connaissances et savoir-faire exigibles
2^{de}	Sur quel principe repose la construction d'un calendrier ?	-Utilisation d'un phénomène périodique. -Phénomènes astronomiques : l'alternance des jours et des nuits, des phases de la Lune, des saisons permettent de régler le rythme de la vie (jour, heure, mois, année).	Connaître les définitions de la période et de la fréquence d'un phénomène périodique. Savoir calculer la fréquence d'un phénomène à partir de sa période et réciproquement.
T^e S Enseignement obligatoire	Exemple dans la vie courante d'ondes progressives mécaniques périodiques	Ondes progressives mécaniques périodiques -Notion d'ondes progressives périodiques -Périodicité temporelle, périodicité spatiale, période -Ondes progressives sinusoïdale, période, fréquence, longueur d'onde	Reconnaître une onde progressive mécanique périodique et sa période. Définir pour une onde progressive sinusoïdale, la période, la fréquence, la longueur d'onde. Déterminer la période, la fréquence, la longueur d'onde
		La lumière, modèle ondulatoire Propagation de la lumière dans le vide	Savoir que, étant diffractée, la lumière peut être décrite comme une onde. Exploiter une figure de diffraction dans le cas des ondes lumineuses.
	Illustration expérimentale de l'entretien des oscillations (réalisation d'un oscillateur sinusoïdal).	Oscillations libres dans un circuit RLC série Décharge oscillante d'un condensateur dans une bobine. Période propre et pseudo-période. Expression de la période propre $T_0 = 2\,\pi\sqrt{LC}$. Entretien des oscillations Etude d'un mouvement circulaire uniforme ; vitesse, vecteur accélération ; accélération élémentaire.	Définir et reconnaître les régimes périodique, pseudo-périodique et apériodique. Savoir tracer l'allure de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps. Dans le cas d'un amortissement négligeable, effectuer la résolution analytique pour la tension aux bornes du condensateur. En déduire l'expression de l'intensité dans le circuit. Définir un mouvement circulaire uniforme et donner les caractéristiques de son vecteur accélération. Connaître les conditions nécessaires pour observer un mouvement circulaire uniforme : vitesse initiale non nulle et force radiale.

Te S Enseignement obligatoire		Application de la deuxième loi de Newton au centre d'inertie d'un satellite ou d'une planète : force centripète, accélération radiale, modélisation du mouvement des centres d'inertie des satellites et des planètes par un mouvement circulaire et uniforme, applications (période de révolution, vitesse, altitude, satellite géostationnaire).	Démontrer que le mouvement circulaire et uniforme est une solution des équations obtenues en appliquant la deuxième loi de Newton aux satellites ou aux planètes. Définir la période de révolution et la distinguer de la période de rotation propre. Exploiter les relations liant la vitesse, la période de révolution et le rayon de la trajectoire.
	Exemples de systèmes oscillants dans la vie courante : suspension de voiture, oscillation des immeubles de grande hauteur sous l'action du vent, vibration du sol au passage d'un TGV.	Systèmes oscillants Présentation de divers systèmes oscillants mécaniques. Pendule pesant, pendule simple et système solide-ressort en oscillation libre. Expression de la période propre d'un pendule simple.	Définir un pendule simple. Définir l'écart à l'équilibre, l'abscisse angulaire, l'amplitude, la pseudo-période, la période propre et les mesurer sur un enregistrement.
Te S Enseignement de spécialité	Étude de la vibration d'une corde par stroboscopie et du son qu'elle émet à l'aide d'un microphone.	Vibration d'une corde tendue entre deux points fixes Mise en évidence des modes propres de vibration par excitation sinusoïdale : mode fondamental, harmoniques ; quantification de leurs fréquences. Oscillations libres d'une corde pincée ou frappée.	Savoir qu'il y a quantification des fréquences des modes de vibration : rapport entre les fréquences des harmoniques et celles du fondamental.
		Modulation d'une tension sinusoïdale Expression mathématique d'une tension sinusoïdale : $u(t) = U_{max}\cos(2\pi ft + \varphi_o)$ Paramètres pouvant être modulés : amplitude, fréquence et/ou phase	Reconnaître les différents paramètres de l'expression d'une tension sinusoïdale : amplitude, fréquence et/ou phase

Tableau 10. Les parties du programme de physique pouvant impliquer la périodicité du lycée en France

Le programme est accompagné de commentaires :

La présentation de divers systèmes oscillants est uniquement descriptive. Dans cette partie aucune équation n'est écrite et l'expression littérale de la période propre n'est pas donnée.
L'équation différentielle ne sera établie que dans le cas d'un ressort à réponse linéaire et horizontal.
Dans le bilan des forces et dans l'écriture de l'équation différentielle, on tiendra compte d'une force de frottement f dont on ne précisera pas l'expression.
La solution de l'équation différentielle sera donnée sous la forme $x = x_m\cos(2\pi t/T_0 + \varphi_0)$; φ_0 est la phase à l'origine des dates. La pulsation propre ne sera pas introduite.
[…]
Toute expression mathématique de l'onde progressive sinusoïdale est hors programme. […]
Sur une corde fixée à ses deux extrémités distantes de L, une onde qui se propage se retrouve après un aller-retour, identique à elle-même ; elle est donc périodique, de période $T = 2L/\upsilon$. Si l'onde est sinusoïdale, cela impose que 2L soit un multiple entier de la longueur d'onde :

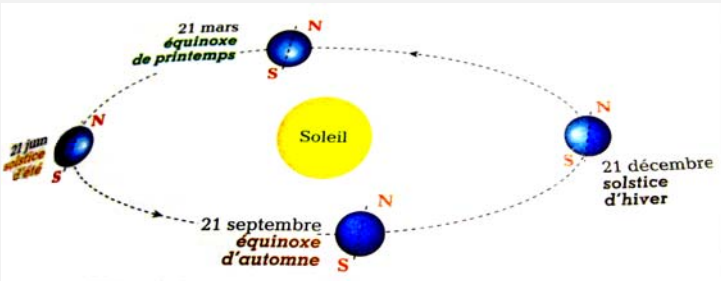
2L = nλ, ce qui correspond aux fréquences propres d'expression nυ/2L. On retrouve ainsi les modes propres de vibration de la corde. L'expression donnant la célérité en fonction de la tension et de la masse linéique de la corde sera donnée chaque fois qu'il sera nécessaire. (Programme de Terminale S, p. 35-41)

On voit que plusieurs phénomènes périodiques, notamment des phénomènes d'oscillation sont abordés dans le programme de physique au lycée. Les notions de période et de fréquence sont visées dans tous les cas. Pourtant, les expressions mathématiques (fonctions périodiques) représentant les phénomènes ne sont pas demandées et même on souligne qu'elles sont hors programme avec le cas de l'onde progressive sinusoïdale. Alors comment les phénomènes périodiques sont-ils étudiés dans les manuels ? Sont-ils modélisés par des modèles mathématiques ?

I.2.2. Les manuels

I.2.2.1. Physique-Chimie Seconde (Collection Hélios, 2000)

Nous trouvons certains phénomènes périodiques dans le chapitre 7 : *Les astres rythment le temps.* Notons que tous ont la caractéristique de répétition comme pour le manuel Physique-Chimie 3e. En effet, le mot « répétition » est toujours utilisé dans la description des phénomènes.

> La répétition des passages du soleil dans le plan méridien d'un lieu est un phénomène périodique. La durée séparant deux passages consécutifs constitue la période. Cette période est le jour solaire. Sa valeur vaut environ 24 heures.
> […]
> La répétition des lunaisons est un phénomène périodique dont la période est voisine du mois.
> La répétition des saisons est un phénomène périodique de période égal à une année.
> Les trois phénomènes (rotation propre de la Terre, révolution de la Lune autour de la Terre, révolution de la Terre autour du Soleil) se répètent à intervalles de temps réguliers : ils sont périodiques.
>
> 
>
>
> Succession des saisons
> (Physique-Chimie Seconde, p. 87)

Alors que la figure donne à voir un phénomène cyclique. Le manuel choisit le qualificatif de périodique sans mentionner la cyclicité rencontrée au collège et y a aussi la caractéristique de répétition. L'explication générale d'un phénomène périodique qui se trouve dans le chapitre 8 : *Les horloges fabriquées par l'Homme* souligne aussi cette même caractéristique.

> Une montre, une horloge permettent de mesurer des durées mais aussi de se repérer dans le temps.
> Le fonctionnement d'une horloge utilise un phénomène périodique, c'est-à-dire un phénomène qui se répète de manière identique, à intervalles de temps égaux.
> La durée d'un intervalle de temps est la période T du phénomène. (Ibid., p. 98)

Quelles différences y a-t-il entre ces phénomènes cycliques et le cycle de l'eau ? Pourquoi ici, utilise-t-on le terme « périodique » ?

Comme nous l'avons montré précédemment, dans le cycle de l'eau, la durée du cycle n'est pas mentionnée. On s'intéresse seulement à la succession des états du phénomène. Mais pour les phénomènes astronomiques abordés ici, la répétition à intervalles de temps réguliers est mise en évidence. C'est un caractère jugé indispensable à la périodicité du phénomène auquel on peut ainsi donner une période. Ceci laisse penser que l'institution distingue cyclicité et périodicité sur la base du facteur temps.

La modélisation mathématique des phénomènes astronomiques présentés est ignorée. Le but de ce chapitre est d'étudier la mesure du temps par le fonctionnement des horloges.

Types de tâches

Nous trouvons ici un seul type de tâches concernant la périodicité. C'est le type de tâches T_{fp3}^{P} : *Déterminer la période d'un phénomène périodique*. Ces phénomènes cycliques ne sont pas modélisés par des modèles mathématiques. Ils sont présentés par un langage naturel.

> Déterminer la période et la fréquence des phénomènes suivants :
> - rotation de la trotteuse d'une montre ;
> - rotation de l'aiguille des minutes d'une montre ;
> - parution d'un journal quotidien ;
> - révolution de la Terre autour du Soleil. (Ibid., p. 102)

I.2.2.2. Physique-Chimie Première S (Collection Hélios, 2001)

Dans le chapitre 2 : *Mouvement d'un solide*, le manuel introduit le mouvement de rotation autour d'un axe fixe dans lequel la trajectoire circulaire et la vitesse angulaire sont abordées. Pourtant, le mouvement circulaire uniforme (ayant la propriété périodique) n'apparaît pas. Donc la périodicité n'est pas un objet d'enseignement en Physique en classe Première.

En effet, dans la partie « Un pas vers le Bac[18] », on introduit la photographie et la figure géométrique d'une grande roue où la notion de vitesse est étudiée. On demande de travailler la fréquence et la vitesse (vitesse angulaire et vitesse d'un point) mais la période n'est pas mise en évidence.

Dans les parties suivantes intitulées « Apprendre à résoudre » et « Exercices », le mouvement d'une balançoire et celui d'une roue de bicyclette sont abordés. Mais l'objectif est aussi de mettre en place la notion de vitesse. On ne s'intéresse ni à la périodicité ni même à la répétition du mouvement.

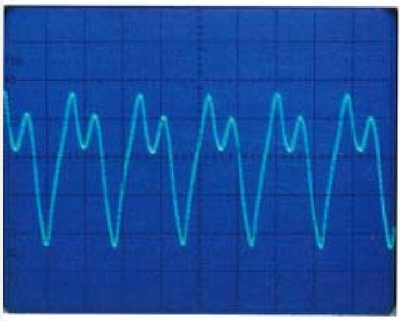
I.2.2.3. Physique Terminale S (Collection Durandeau, 2002)

Dans ce manuel, plusieurs phénomènes périodiques comme le son, la tension et le pendule, etc. sont étudiés. Par exemple, le manuel présente les ondes mécaniques et le son dans le cours du chapitre 3 : *Ondes mécaniques progressives périodiques*, comme suit :

---

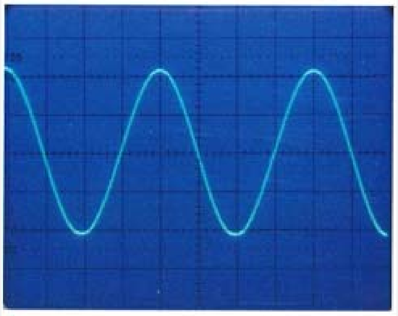
[18] C'est un exercice, dans l'esprit de ceux qui sont proposés au Bac, qui s'appuie sur un document.

L’onde mécanique circulaire créée par une pointe vibrante qui se propage à la surface de l’eau est périodique.
La période temporelle T de l’onde est la durée au bout de laquelle un point du milieu de propagation se retrouve dans le même état.
Dans le cas de l’instrument de musique, quelle que soit la position du microphone, on observe sur l’écran de l’oscilloscope une courbe périodique (doc 4) de période T.



Doc. 4 L’onde émise par l’instrument de musique est périodique.

Dans le cas du diapason, la courbe observée est une sinusoïde (doc 5). L’onde sonore émise par le diapason est dite **sinusoïdale**.



Doc. 5 L’onde émise par le diapason est sinusoïdale.

(Physique Terminale S, p. 47)

Comme pour la tension étudiée en classe 3^{e}, les ondes périodiques, notamment les ondes sinusoïdales qui ont des oscillations harmoniques sont étudiées. La reconnaissance d’une onde sinusoïdale s’appuie aussi sur le graphique – une sinusoïde. Les expressions mathématiques représentant des ondes ne sont pas présentées conformément au programme. C’est pourquoi la période est définie comme la durée au bout de laquelle un point du milieu de propagation se retrouve dans le même état. Donc, la détermination de la période n’est travaillée que sur le graphique.

Par ailleurs, pour l’onde sonore progressive sinusoïdale, il y a encore une périodicité spatiale. C’est un nouveau phénomène où on a une double périodicité.

L’onde sonore progressive sinusoïdale présente une double périodicité :
- une périodicité temporelle de période T ;
- une périodicité spatiale de période λ. (Ibid., p. 48)

Ici la période spatiale est la plus petite distance séparant deux positions pour lesquelles les signaux sonores sont en phase. Elle prend la même signification de la période temporelle. Après chaque période, le phénomène se répète régulièrement.

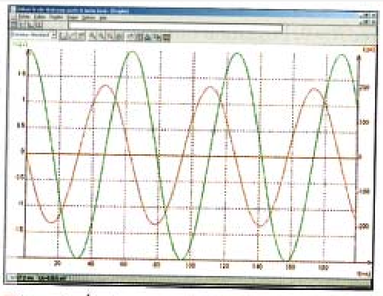
On ne trouve d’expression mathématique décrivant l’ondulation que dans l’étude d’un oscillateur harmonique. C’est le cas du circuit (R, L, C).

Pour l'étude analytique d'un tel circuit oscillant, le manuel établit à partir des lois de la physique d'abord l'équation différentielle d'un circuit (L, C) : $\ddot{q} + \frac{q}{L.C} = 0$. La fonction cosinus est donnée comme une solution de cette équation différentielle.

> On démontre, en mathématiques, que ce type d'équation différentielle admet pour solution générale une fonction de la forme :
> $q(t) = q_m.\cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi_0)$, q_m, ϕ_0 et T_0 étant des constantes. (Ibid., p. 180)

La référence aux mathématiques évite toute démonstration de la validité de l'énoncé dont il n'est retenu que la forme de la solution générale. Il est vrai, comme nous l'avons vu précédemment que ce type d'équations différentielles ne fait plus partie des programmes de mathématiques.

Ensuite, le manuel explique les éléments présents dans cette formule comme les notions relatives au phénomène, c'est-à-dire qu'on donne la signification physique de chaque facteur dans le modèle mathématique. Cela permet d'articuler le phénomène et son modèle mathématique.

> La fonction cosinus étant périodique de période 2π.
> $q(t) = q_m.\cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi_0)$ a pour période T_0
> T_0 est appelé période propre des oscillations
> Q_m est l'amplitude
> ϕ_0 est la phase à l'origine des dates.
>
> 
>
> ■ Doc. 8 Évolution, au cours du temps, de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité du courant d'un circuit (*L*, *C*).
>
> (Ibid., p. 181)

Par ailleurs, dans ce manuel, d'autres oscillations harmoniques sont étudiées comme le mouvement d'un pendule simple et le mouvement d'un ressort. Dans tous les cas, la formule pour calculer la période est toujours donnée. L'expression mathématique (fonction sinusoïdale) est introduite seulement avec le mouvement du ressort comme une solution de l'équation différentielle.

Le mouvement circulaire uniforme est présent aussi lors du cours sur l'étude du mouvement des satellites et des planètes avec les deux lois de Kepler.

> On peut admettre que les planètes sont animées d'un mouvement circulaire uniforme.
> (Ibid., p. 245)

Mais quelles sont les caractéristiques de ce mouvement ?

Avec un modèle géométrique (un cercle), le manuel étudie le vecteur vitesse et le vecteur accélération. De plus, des formules pour calculer ces grandeurs et la période sont introduites. Pourtant, le lien avec l'oscillation harmonique n'est pas établi.

Le type de tâches T_{fp3}^{P} : *Déterminer la période d'un phénomène périodique* apparaît dans ce manuel avec les deux techniques suivantes :

+ en s'appuyant sur la lecture du graphique (Exercice 10/p.188, 10/p.273, 7/p.274, 10/p.295). Ici, les phénomènes sont toujours donnés par leurs représentations graphiques.

+ en utilisant la formule de la période (par exemple $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$, $T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$) (Exercice 9/p.188, 8/p.274).

Donc bien qu'il y ait des formules pour calculer, la lecture de la période sur le graphique est encore demandée comme pour le manuel de classe 3^e^. Cela montre que les manuels de physique en France gardent une place importance pour l'étude du graphique.

Par ailleurs, ce manuel installe d'autres types de tâches :

- Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution d'une grandeur physique au cours du temps ;
- Montrer qu'une fonction donnée est solution de l'équation différentielle ;
- Donner l'expression générale des solutions de l'équation différentielle ;
- Déterminer la solution de l'équation différentielle en tenant compte des conditions initiales.

Nous trouvons ces types de tâches notamment dans trois exercices (Exercice 11, 12, 13/p.188). L'équation différentielle y est du second ordre à coefficients constants. Ainsi la praxéologie « résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre » dont nous avons repéré l'absence dans l'enseignement mathématique est en partie présente dans l'enseignement de la physique.

I.3. Conclusion

Dans l'enseignement de la physique en France, la périodicité est toujours liée à la répétition des phénomènes. La notion de périodicité y est essentiellement traitée avec des phénomènes qui varient en fonction du temps alors qu'en mathématiques, la variable temps n'intervient pas explicitement lors de l'étude des fonctions périodiques. Une cyclicité est considérée comme un phénomène périodique quand elle se répète de manière identique, à intervalles de temps égaux qui déterminent la période.

Les phénomènes d'oscillation harmonique (modèle O) caractérisés par un graphique sinusoïdal sont très présents tant au collège qu'au lycée. Par exemple, en électricité, l'oscilloscope fournit les courbes représentatives des fonctions du type $x \mapsto a \sin(\omega x)$ où a et ω sont des nombres réels positifs fixes. On travaille surtout sur le graphique périodique qui devient l'ostensif principal pour la physique d'un phénomène périodique, avec la visualisation de la répétition d'un même morceau de graphique. Il faut remarquer de plus que la plupart des graphiques obtenus par des instruments physiques diffèrent du graphique en mathématiques, notamment par l'absence de légende sur les axes et donc d'unité.

Au contraire, le mouvement circulaire uniforme (modèle C) n'est pas très présent. De plus, les deux modèles C et O apparaissent indépendamment dans les manuels. Le lien entre eux n'est pas établi.

Nous rejoignons le constat fait par Rodriguez (2007) à propos des exercices proposés par l'enseignement de la physique en France :

> La plupart des exercices propose aux élèves de travailler sur les étapes entre le modèle Physique vers l'étape de modèle mathématique (MM) ou d'étude Mathématique (EM). On ne trouve pas d'exercices qui proposent de passer d'un domaine réel (ou pseudo-concret) vers la physique. (Rodriguez (2007), p. 227)

Notons pour finir que la notion de périodicité semble importante pour la physique puisque les manuels de troisième, seconde et terminale accordent une grande place à l'étude de divers phénomènes périodiques. On peut se demander si les raisons de cette importance de la périodicité dans les phénomènes étudiés en physique ne sont pas essentiellement liées à l'importance du temps dans les phénomènes physiques.

II. Institutions vietnamiennes

II.1. Le collège

Le cycle périodique de l'eau, étudié en France au collège en classe 5^{e}, est étudié au Viêt Nam dès la classe 4 de l'école primaire (équivalent du CM1 en France). Contrairement au manuel de collège français, le terme « périodique » est utilisé explicitement. Dans l'unité 22: *Comment le nuage est-il formé? D'où vient la pluie?,* le cycle périodique de l'eau dans la nature est présenté comme suit :

> Le phénomène répétitif de la transformation de l'eau en vapeur, puis de la vapeur condensée à l'eau forme un cycle périodique de l'eau dans la nature.
> (Manuel de classe 4, p.47)

Plus concrètement, le terme cycle périodique est décrit comme un processus qui revient à l'état initial.

> L'eau de la rivière vaporise à une certaine hauteur, rencontre la froideur puis se transforme en des gouttes d'eau. En haut, plusieurs gouttes d'eau se réunissent et forment un nuage. Le nuage s'envole à un autre niveau, plusieurs gouttes d'eau se réunissent en de plus grandes gouttes d'eau qui retombent dans la rivière d'où ils sont partis. (Ibid., p. 47)

Donc dans ce manuel la périodicité est considérée comme un système fermé et répétitif. Notons qu'en classe 3 (équivalent du CE2 en France), dans la discipline intitulée *Nature et Social*, le cycle du sang a été présenté. Là, le terme « périodique » est déjà présent explicitement.

> Dans le corps, le sang circule sans arrêt. L'organisation qui permet le transport du sang dans le corps est appelée organisation périodique. (Manuel de classe 3, p. 14)

Pourquoi périodique ? Quelle est ici la signification de la périodicité ?

Le manuel ne donne aucune explication, mais ensuite on introduit la définition et le schéma du grand cycle périodique et du petit cycle périodique dans lesquels il y a des flèches qui désignent la circulation du sang du ventricule droit à l'artère de poumon, …, à la veine cave puis retourne au ventricule droit.

> Le grand cycle périodique : le sang y circule avec beaucoup d'oxygène et de matières nutritionnelles du cœur pour nourrir les organes du corps ; le sang reçoit en même temps le CO_2 et les déchets des organes puis retourne au cœur.
> Le petit cycle périodique : le sang y circule du cœur au poumon pour prendre de l'oxygène et libérer le CO_2 puis retourne au cœur. (Ibid., p. 17)

Le dessin et la description des deux cycles périodiques du manuel nous montrent que le cycle périodique du sang est un système fermé de la circulation du sang qui commence au cœur et retourne au cœur. Donc les manuels du Viêt Nam identifient une cyclicité à une périodicité qui souligne la succession infinie et répétitive des états dans un parcours fermé mais sans prise en compte du temps de ce parcours.

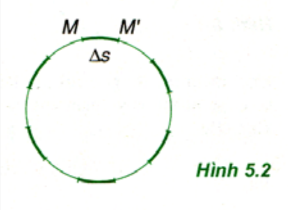
II.2. Le lycée

En classe 11, donc entre les classes 10 et 12, l'enseignement des mathématiques introduit la notion de fonction trigonométrique. Notre étude sépare donc l'avant et l'après introduction des fonctions trigonométriques.

II.2.1. Le mouvement circulaire uniforme en classe 10

Le premier phénomène périodique étudié en physique au Viêt Nam est un phénomène cyclique – un mouvement circulaire uniforme.

Dans le manuel élémentaire de clase 10, le mouvement circulaire uniforme est décrit comme suit :

> Le mouvement circulaire uniforme est un mouvement ayant une orbite circulaire qui est tel que sa vitesse moyenne soit la même sur tous les arcs.
>
> 
>
>
> (Manuel élémentaire de classe 10, p. 29)

Donc ce mouvement a deux caractéristiques :

- La trajectoire est un cercle
- La vitesse moyenne est constante

On voit ici que le terme « mouvement périodique » n'est pas utilisé. Le manuel étudie la vitesse angulaire ($\omega = \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta t}$), la période T = $\dfrac{2\pi}{\omega}$ et la fréquence f = $\dfrac{1}{T}$ grâce au vecteur de vitesse. Voici la définition de la période :

> La période du mouvement circulaire uniforme est le temps pour que l'objet fasse un tour complet. (Ibid., p. 31)

Le passage de ce mouvement à un phénomène périodique avec répétition n'est abordé explicitement que dans le manuel avancé.

> La période est une caractéristique du mouvement circulaire uniforme. Après chaque période, l'objet retourne à la position initiale et répète son mouvement. Ce mouvement est appelé périodique de période T. (Manuel avancé de classe 10, p. 38)

Donc dans l'institution vietnamienne, le modèle C (mouvement circulaire uniforme) apparaît comme un objet d'étude de la partie cinématique avec des caractéristiques liées à la trajectoire et à la vitesse. La périodicité du phénomène est représentée via la notion de période, temps pour que l'objet fasse un tour complet.

II.2.2. Notion de périodicité dans le manuel Physique de classe 12

II.2.2.1. L'oscillation périodique

- **Manuel élémentaire**

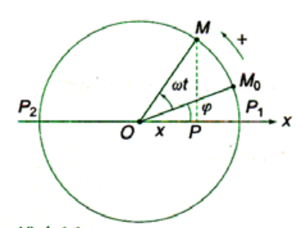
Voici la notion d'oscillation périodique et d'oscillation harmonique présentée dans ce manuel :

> Une oscillation mécanique d'un objet peut être périodique ou non-périodique. Si après des intervalles égaux, appelés période, l'objet revient à la position ancienne selon le sens ancien cet oscillation est périodique.
> L'oscillation périodique la plus simple est une oscillation harmonique.
> (Manuel élémentaire de classe 12, p. 4)

Donc la périodicité est ici liée à la répétition. Mais le manuel insiste sur le retour de l'objet à la position ancienne après des intervalles de temps égaux. L'oscillation harmonique est considérée comme un cas particulier de l'oscillation périodique.

Quelles sont les caractéristiques d'une oscillation harmonique, selon ce manuel ?

Pour les présenter, le manuel considère le mouvement d'un point M sur un cercle pour en déduire l'équation x = A cos (ωt+φ) exprimant l'abscisse x du point P – projection du point M sur un axe Ox qui coïncide avec le diamètre du cercle et dont l'origine coïncide avec le centre O du cercle.



Hinh 1.1

(Ibid., p. 4)

A partir de l'équation x = A cos (ωt+φ) du point P, le manuel précise la notion d'oscillation harmonique associée à ce point :

> Comme la fonction sinus ou cosinus est harmonique alors l'oscillation du point P est appelée oscillation harmonique. (Ibid., p. 5)

Dans l'enseignement mathématique vietnamien, la notion de fonction harmonique n'existe pas. La référence à la propriété d'harmonie de la fonction évite au manuel de mettre en évidence les propriétés mathématiques et physiques sur laquelle s'appuie la modélisation. L'explication du concept de fonction harmonique semble être laissée à l'enseignant de physique.

La caractéristique de l'oscillation harmonique est présentée à travers la définition (toute mathématique) suivante :

> L'oscillation harmonique est une oscillation pour laquelle l'élongation de l'objet est une fonction cosinus (ou sinus) du temps. (Ibid., p. 5)

Ainsi il y a équivalence entre fonction harmonique, fonction sinus et cosinus du temps, et oscillation harmonique sans que les lois de la physique soit intervenues dans la modélisation.

Donc l'oscillation harmonique au Viêt Nam est présentée à partir du point de vue algébrique. Sa reconnaissance s'appuie sur l'expression mathématique représentant l'élongation de l'objet. Cela est renforcé à la page 30 du livre des enseignants comme suit :

> Une grandeur X est harmonique soit si elle est une solution de l'équation différentielle $X'' + \omega^2 X = 0$ (où ω^2 constant positif) soit si elle satisfait cette équation : $X = A \cos(\omega t + \varphi)$ ou $X = A \sin(\omega t + \varphi)$ (où A, ω constant positifs et φ constant).
> (Livre des enseignants de classe 12, ensemble élémentaire, p. 30)

Pourquoi le manuel vietnamien utilise-t-il la fonction cosinus (ou sinus) pour définir l'oscillation harmonique ?

Nous trouvons les explications suivantes dans le livre des enseignants.

> 1) Sur la définition de la notion d'oscillation harmonique
> Conception 1 : Quelques auteurs utilisent la fonction harmonique comme $x = A \sin(\omega t+\varphi)$ ou $x = A \cos(\omega t+\varphi)$ pour la définir.
> L'oscillation harmonique est une oscillation pour laquelle l'élongation de l'objet est une fonction cosinus (ou sinus) du temps $x = A \sin(\omega t+\varphi)$ où A, ω, φ sont des nombres constants.
> Conception 2 : Quelques auteurs utilisent l'expression de la force de rappel $F = -kx$ pour la définir.
> Le mouvement harmonique simple est un mouvement effectué par un solide de masse m par une force qui est proportionnel avec l'élongation mais avec le signe inverse.
> Conception 3 : Quelques auteurs utilisent l'équation différentielle $a = -\omega^2 x \ ou \ x'' + \omega^2 x = 0$ pour la définir […]
> Les auteurs du manuel Physique 12 utilisent la conception 1 parce qu'elle convient à la plupart des élèves et à leur approche. (Ibid., p. 24)

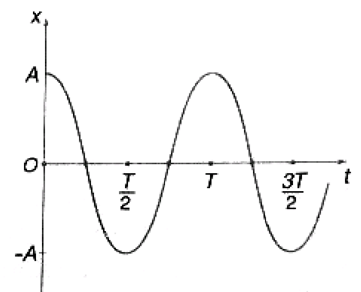
Ainsi les auteurs du manuel élémentaire renoncent à modéliser le phénomène physique périodique via l'équation différentielle. On peut certes s'interroger sur la vie possible de la troisième « conception ». Rappelons en effet que le programme de mathématiques ne traite pas la notion d'équation différentielle. Cette situation est la même en France mais nous avons vu que le choix des noosphèriens français de la physique est différent.

Ensuit, la notion de période est définie comme pour le manuel de classe 10 :

La période (noté T) d'une oscillation harmonique est la durée du temps pendant laquelle l'objet effectue une oscillation complète.
L'unité de la période est donnée en seconde. (Manuel élémentaire de classe 12, p. 6)

Cette définition se réfère au mouvement circulaire uniforme où la période est le temps pour que l'objet fasse un tour complet. Mais qu'est-ce qu'une oscillation complète ?

L'égalité $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ est introduite comme un résultat connu dans le mouvement circulaire uniforme (en classe 10). Donc la période de l'oscillation du point P est égale à celle du mouvement du point M. Le manuel n'utilise pas ici la propriété périodique de période 2π de la fonction sinus (ou cosinus). Le graphique sinusoïdal n'est utilisé que pour introduire la notion d'oscillation sinusoïdale, un autre nom de l'oscillation harmonique.



Hinh 1.6

La figure 1.6 est le graphique exprimant la dépendance de l'élongation selon le temps. C'est une sinusoïde, donc on appelle l'oscillation harmonique une oscillation sinusoïdale.
(Ibid., p. 7)

Dans ce manuel, on passe du mouvement circulaire uniforme à l'oscillation harmonique pour introduire l'oscillation harmonique. L'approche d'une oscillation harmonique est effectuée en projetant un point ayant le mouvement circulaire uniforme sur une droite. C'est un modèle mathématique qui est expliqué explicitement dans le livre des enseignants à la page 26 comme suit :

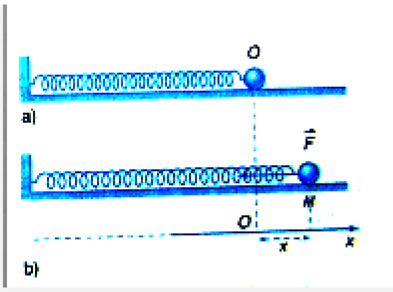
La partie II (Oscillation harmonique) est le point capital de la session. Le manuel a utilisé un modèle mathématique, c'est la projection d'un point M qui a un mouvement circulaire uniforme sur un diamètre, c'est-à-dire le point P. L'utilisation de ce modèle facilite l'établissement de l'équation du mouvement du point P et l'introduction d'une nouvelle notion, l'oscillation harmonique. (Livre des enseignants de classe 12, ensemble élémentaire, p. 26)

Ensuite, le lien entre le mouvement circulaire uniforme et l'oscillation harmonique est abordé explicitement dans la remarque suivante :

Un point P oscillant harmonique sur une droite peut être toujours considéré comme la projection d'un point M ayant le mouvement circulaire uniforme sur un diamètre qui est cette droite. (Manuel élémentaire de classe 12, p. 6)

- **Manuel avancé**

A la différence du manuel élémentaire, après avoir défini l'oscillation périodique et la période oscillatoire, le manuel avancé étudie le cas particulier de l'oscillation d'un pendule élastique.



(Manuel avancé de classe 11, p. 29)

Contrairement au manuel élémentaire, le manuel avancé commence par établir à partir des lois de la physique l'équation différentielle $x''+\omega^2 x=0$ représentant l'oscillation dans laquelle x est l'élongation et $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ (k est le facteur élastique et m est la masse de la bille). Il annonce et vérifie ensuite que x = A cos (ωt+φ) où A, ω, φ sont des nombres constants, est une solution de cette équation. Cette vérification est en tout point semblable au seul exercice présent dans le manuel avancé de **mathématiques** qui évoque ce type d'équation différentielle (sans conduire la résolution générale de l'équation proposée) :

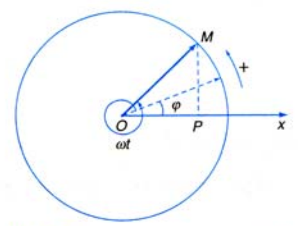
Démontrer que si y = A sin (ωt+φ) + B cos (ωt+φ) où A, B, ω et φ constants donc $y''+\omega^2 y = 0$. (Manuel Mathématique de classe 11, ensemble avancé, p. 219)

Ainsi selon le manuel, x = A cos (ωt+φ) est l'équation exprimant l'élongation de la bille depuis son état d'équilibre. A partir de là, la définition de l'oscillation harmonique s'appuie sur sa représentation algébrique comme pour le manuel élémentaire.

L'oscillation dont l'équation a pour la forme x = A cos (ωt+φ), c'est-à-dire telle que la partie droite est une fonction cosinus ou sinus du temps multipliée par un constant est appelée oscillation harmonique. (Manuel avancé de classe 11, p. 31)

Donc, ici l'oscillation harmonique est définie indépendamment du mouvement circulaire uniforme. L'articulation entre eux n'est présentée qu'à travers l'introduction du vecteur rotatif.

Pour représenter une oscillation harmonique, on utilise un vecteur $\overrightarrow{OM}$ ayant la longueur A (amplitude), qui tourne régulièrement autour d'un point O dans le plan contenant Ox avec une vitesse angulaire ω. Au temps t = 0, l'angle entre l'axe Ox et $\overrightarrow{OM}$ est φ (phase initiale).



Hình 6.7 Vectơ quay vào một thời điểm t bất kì.

Au temps t quelconque, la longueur algébrique de la projection du vecteur rotatif $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe x est : $ch_x \overrightarrow{OM} = \overline{OP}$ = A cos (ωt+φ) (6.11)

L'égalité (6.11) montre le lien entre le mouvement circulaire uniforme et l'oscillation harmonique : un point P, oscillant harmonique sur l'axe Ox avec l'amplitude A et la fréquence angulaire ω, peut être considéré comme la projection sur l'axe Ox d'un point M ayant un mouvement circulaire uniforme avec la vitesse angulaire ω sur une orbite circulaire du centre O et du rayon A. (Ibid., p. 33)

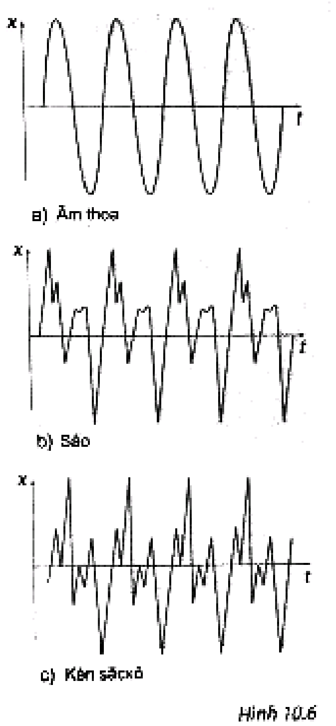
II.2.2.2. Les ondes mécaniques et les ondes sonores

Les manuels vietnamiens introduisent la notion d'onde sinusoïdale (onde ayant la forme sinusoïdale) qui est caractérisée par les quantités suivantes :

+ L'amplitude de l'onde
+ Période (ou fréquence) de l'onde : La période T de l'onde est la période oscillatoire d'une particule de l'environnement où l'onde se propage.
+ La vitesse de propagation

L'équation d'une onde sinusoïdale qui se propage selon l'axe x est introduite : $u_M = A\cos\omega(t-\frac{x}{v}) = A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$. Ensuite, les périodicités temporelle et spatiale sont déduites à partir de l'étude de cette équation. Donc, ce phénomène est approché et étudié complètement du point de vue algébrique.

Pour les sons, quelques graphiques périodiques qui ne sont pas sinusoïdaux sont introduits. Pourtant, c'est une simple illustration. Il n'y a pas de travail sur le graphique. Par exemple, regardons les graphiques ci-dessous.



Hình 10.6

Đồ thị dao động của ba âm thanh cùng tần số và biên độ, do ba dụng cụ khác nhau phát ra.

(Manuel élémentaire de classe 12, p. 53)

Ce sont les graphiques oscillatoires d'un son provenant de trois instruments différents. Tous présentent un ostensif de la répétition de morceaux identiques. Pourtant, leur périodicité n'est pas abordée explicitement. Ces graphiques ne sont là qu'à titre illustratif.

II.2.2.3. Le courant alternatif

Le courant alternatif est présent aussi avec son expression mathématique.

> Courant alternatif sinusoïdal (en abréviation « courant alternatif ») est un courant ayant l'intensité qui varie de manière périodique en fonction du temps par une loi de la forme sinus (ou cosinus) :
> $i = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$
> $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ est la période
> $\alpha = \omega t + \varphi$ est la phase de i et φ est la phase initiale.
> (Ibid., p. 62)

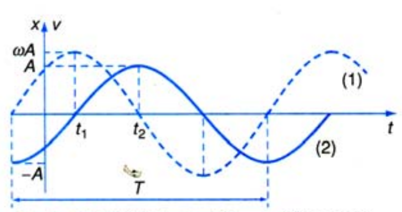
Nous constatons que les termes « périodique » et « période » sont réutilisés. On donne la formule pour calculer la période de l'intensité à partir de la fonction qui la représente $i = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$. C'est juste la période de cette fonction comme en mathématiques.

Type de tâches

Nous retrouvons dans les manuels vietnamiens le type de tâches T_{fp3}^{P} : *Déterminer la période d'un phénomène*, trouvé dans les manuels de physique en France. Mais ici, on donne toujours la formule des fonctions décrivant le phénomène. Donc la technique de résolution de ce type de tâches n'est que l'application de la formule de la période.

> Déterminer la période, la fréquence des courants alternatifs ayant les intensités suivantes :
> a) $i = 5\cos(100\pi t + \dfrac{\pi}{4})$
> b) $i = 2\sqrt{2}\cos(100\pi t - \dfrac{\pi}{3})$
> c) $i = -5\sqrt{2}\cos 100\pi t$. (Ibid., p. 62)

Le type de tâches T_{fp5}^{P} : *Construire la représentation graphique d'un phénomène périodique* se trouve seulement dans un exercice du manuel avancé de classe 12.

> Construire le graphique de l'élongation de l'oscillation harmonique ci-dessous (même forme que la courbe (2) en figure 6.5.
>
> 
>
> **Hình 6.5** *Đồ thị vận tốc và đồ thị li độ (pha ban đầu $\varphi \neq 0$).*
>
> x = 2 cos (πt - $\dfrac{\pi}{4}$) (cm)
> Ecrire les coordonnées des points d'intersection de la courbe et l'abscisse (x) et l'ordonnée (t). (Manuel avancé de classe 12, p. 34)

II.3. Conclusion

Au Viêt Nam, avant l'introduction de la fonction périodique en mathématiques en classe 11, seuls des phénomènes cycliques sont étudiés en physique. Une cyclicité est toujours considérée comme une périodicité avec le sens d'un système fermé répétitif (comme cycle de l'eau, cycle du sang). Pourtant, la période de temps n'est pas mentionnée. C'est seulement en classe 10, avec le mouvement circulaire uniforme en cinématique, que la notion de période est introduite comme la période de temps pour que l'objet revienne à sa position initiale.

Les oscillations harmoniques sont toujours définies grâce à leur expression mathématique, une fonction sinusoïdale. C'est pourquoi elles ne sont introduites qu'après l'enseignement mathématique des fonctions trigonométriques. L'étude des phénomènes à partir de leur représentation graphique n'est pas posée à l'élève. Le graphique ne prend qu'un rôle illustratif. La classe des fonctions A cos $(\omega t+\varphi)$ occupe une place très importante dans les manuels de physique.

En mathématiques, nous avons vu que le seul but de l'introduction de la notion de périodicité semble être d'étudier les fonctions trigonométriques, notamment les fonctions sinus et cosinus. On peut se demander ici si le fait d'insister en mathématiques seulement sur ces fonctions n'est pas essentiellement lié aux besoins de l'enseignement de la physique.

III. Comparaison France – Viêt Nam et conclusion pour la physique

Le tableau ci-après présente le curriculum d'étude des phénomènes périodiques dans l'enseignement secondaire de la physique :

Classe	Au Viêt Nam	En France
9 (3^{e})	cycle périodique de l'eau, cycle périodique du sang	tension périodique, tension sinusoïdale : période, fréquence
10 (2de)	rotation des planètes dans le système solaire, mouvement circulaire uniforme : vitesse angulaire, accélération, période, fréquence	alternance des jours et des nuits, des phases de la Lune, mouvement de rotation, vitesse angulaire
12 (T^{e})	- oscillation harmonique (pendule (fil, ressort), pendule simple, pendule physique) : période, fréquence, amplitude, fréquence angulaire. - son, onde sinusoïdale - courant alternatif	- ondes progressives périodiques, onde sinusoïdale, son - circuit électrique oscillant - pendule simple - ressort

Tableau 11. Les phénomènes périodiques étudiés en physique

Il s'agit pour les deux institutions d'étudier des grandeurs variables avec le temps : des tensions électriques, des distances, des angles, etc. En arrière-plan, même non nommée ou non formalisée, se trouve toujours une fonction périodique dont la variable indépendante est le temps.

La mathématisation des concepts est certes plus prégnante au Viêt Nam qu'en France mais dans les deux institutions elle va s'enrichir au cours du curriculum en s'appuyant sur deux modèles : celui du mouvement circulaire uniforme (C) et celui de l'oscillation harmonique (O).

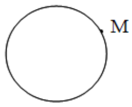
Modèle C	Modèle O
 Trajectoire circulaire et ω constant	 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$

Tableau 12. Deux modèles mathématiques de la périodicité

L'introduction de l'oscillation harmonique en France se fait dès le collège et ce, uniquement par des graphiques présentés comme résultant de prises de mesure (par exemple un oscillogramme). Le rôle du registre graphique est nettement en retrait au Viêt Nam où c'est le registre algébrique qui domine. Or le registre algébrique ne trouve toute sa place qu'après l'étude des fonctions trigonométriques en classe 11 de mathématiques. C'est pourquoi l'oscillation harmonique n'est présentée au Viêt Nam qu'en fin du lycée.

Au Viêt Nam, le registre graphique est là pour illustrer le phénomène dont le registre algébrique a été donné et exploré. Au contraire, en France, outre d'avoir un rôle illustratif, le graphique est aussi un objet de travail. L'étude d'un phénomène périodique à partir de son graphique est quasi systématique avant et même après l'introduction des fonctions périodiques en mathématiques. Ce choix didactique sur le rôle du graphique dans l'étude des phénomènes en physique et en sciences expérimentales générales est justifié par Godement (2001) :

> Pour les scientifiques expérimentaux et les ingénieurs, une fonction est tout aussi souvent donnée par son graphe, lieu géométrique des point (x, y) du plan tels que y = f(x) avec une fonction f que, bien souvent, on ne connaît pas vraiment.
> (Godement (2001), p. 20-21)

La place donnée à l'équation différentielle est une autre grande différence entre les enseignements de physique vietnamien et français. La noosphère vietnamienne écarte du topos des élèves la modélisation du phénomène périodique par une équation différentielle « parce que cela convient à la plupart des élèves et à leur approche », dit le livre des enseignants du manuel élémentaire (cf. page 121). Nous avons présenté la justification de ce choix faite par le manuel élémentaire. Le manuel avancé quant à lui, même si l'équation différentielle apparaît dans le cours, n'apporte pas d'explication à l'absence de cette équation du topos de l'élève.

Quant à l'articulation entre les deux modèles C et O, elle est faible au Viêt Nam, car réduite au topos de l'enseignant, tandis qu'en France, elle est quasiment inexistante. Dans les deux pays, on privilégie l'étude de l'oscillation harmonique par le modèle O. Les questions que nous nous posons maintenant concernent justement la modélisation pratiquée dans l'enseignement des mathématiques (cf. question Q2 : Comment l'enseignement secondaire engage-t-il le concept de périodicité dans la modélisation mathématique d'un phénomène physique ?).

Partie C. MODELISATION DES PHENOMENES PERIODIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE

Pour compléter la réponse à la question Q2, nous allons chercher ici comment apparaissent et interviennent dans les manuels mathématiques secondaires les deux modèles C et O. Plus précisément, le rôle d'outil des fonctions périodiques permettant de résoudre des problèmes concrets est-il présent?

I. Manuels français

Il existe des situations de modélisation où les fonctions associées sont données par les registres graphique ou algébrique. La lecture graphique est soulignée via la demande de la période, de la fréquence, etc., des phénomènes comme le son et l'électrocardiogramme. Le temps intervient dans toutes les situations et il est l'unité de la période. Seul le modèle O est étudié tandis que le modèle C n'intervient pas.

Regardons l'exercice page 292 du manuel de classe Seconde.

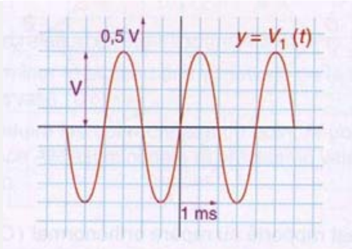
> Le courant utilisé dans les appareils électriques domestiques est alternatif, c'est-à-dire qu'il circule alternativement dans les deux sens à l'intérieur des fils électriques.
> L'intensité I du courant circulant dans un appareil donné est donnée par la formule :
> $I(t) = 2 \sin(100\pi t)$, où l'intensité I est exprimée en Ampère (A) et t, le temps, en secondes.
> Quelle est la période T de la fonction : $t \mapsto I(t)$?
> Quelle est sa fréquence ? (On appelle fréquence l'inverse de la période : $F = \dfrac{1}{T}$; elle est exprimée en Hertz : Hz)
> Quelle est la valeur maximale de I ? sa valeur minimale ?
> A l'instant t = 0,1025 s, quelle est l'intensité du courant ?
> Représenter la fonction I dans un repère orthogonal, où l'on prendra pour unités : 1 cm pour 0, 01 seconde en abscisses ; 1 cm pour 1 ampère en ordonnée.
> (Mathématique Seconde, p. 292)

Le modèle O (oscillation harmonique) est donné tout fait dans le registre algébrique. De plus, il n'y a pas de justification du modèle utilisé à partir d'une étude du phénomène. Donc la démarche de modélisation n'est pas l'enjeu de l'exercice.

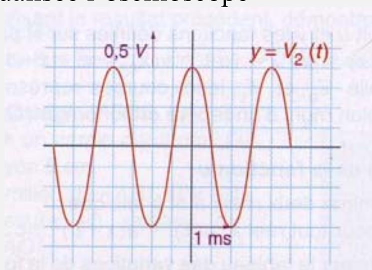
La notion de fréquence est présente. L'institution française demande d'exploiter des informations du phénomène à partir de son modèle mathématique (formule algébrique). La dernière question ne sert pas l'étude du phénomène périodique mais est un observable du contrat didactique en œuvre dans cet exercice : celui de l'étude d'une fonction. Il montre aussi que la conversion entre les deux registres algébrique et graphique d'une fonction est attendue institutionnellement.

On retrouve cette conversion entre registres dans l'exercice 97 du manuel de Première S :

> On observe à l'oscilloscope la tension délivrée par un générateur de tension alternative. L'axe des abcisses est gradué en millisecondes et l'axe des ordonnées en 0,5 volts.



Quelle est la période T en seconde ?
Quelle est la tension maximale V ?
Sachant que la tension (en volts) est donnée en fonction du temps par $v_1(t) = V \sin(\frac{2\pi}{T}t)$ (t en secondes). Déterminer $v_1(t)$.
Une seconde tension v_2 est visualisée l'oscilloscope



Mêmes questions que pour la première tension v_1. (Mathématique Première S, p. 36)

On voit que le modèle est donné tout fait et n'est pas plus questionné que dans le manuel de Seconde. L'exploitation du registre graphique porte en fait sur la conversion entre les deux registres. En effet, pour répondre à la question liée à la tension v_2, il faut trouver la forme de la formule représentant le graphique donné. C'est une fonction cosinus qui est attendue.

II. Manuels vietnamiens

II.1. Manuel élémentaire

Dans le manuel de classe 10 et même le chapitre 1 : *Fonctions trigonométriques et équations trigonométriques* du manuel de classe 11, nous ne trouvons pas de situations de modélisation liés à la périodicité. Seuls sont proposés des problèmes internes aux mathématiques.

Le lien entre les mathématiques et la physique lié à la périodicité n'apparaît qu'une fois dans le cours sur la dérivée du second degré du manuel de classe 11. Au début de ce chapitre, on présente quelques problèmes qui emmènent la notion de dérivée. Ce sont des problèmes en physique relatifs à la vitesse instantanée et à l'intensité instantanée. Cela montre l'utilité de la mathématique dans l'étude des phénomènes réels, notamment des phénomènes physiques.

La dérivée du second degré f''(t) est l'accélération instantanée du mouvement s = f(t) à l'instant t. (Manuel élémentaire de classe 11, p. 173)

Cette remarque est appliquée avec l'exemple suivant relatif à l'oscillation harmonique.

Considérer un mouvement ayant l'équation $s(t) = A \sin(\omega t+\varphi)$ (A, ω, φ constants)
Trouver l'accélération instantanée à l'instant t du mouvement. (Ibid., p. 173)

Donc le modèle est donné et pas expliqué. Le seul but semble la détermination de la dérivée du second degré d'une fonction trigonométrique et l'application de la remarque précédente. On ne s'intéresse pas à la périodicité.

II.2. Manuel avancé

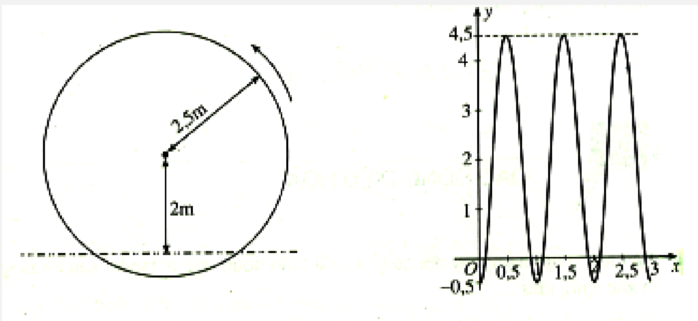
C'est seulement dans la partie « Lecture complémentaire » intitulée *Oscillation harmonique* après la leçon sur les fonctions trigonométriques, que le manuel s'intéresse aux phénomènes périodiques étudiés par la physique (comme le mouvement de la planète et la variation de l'intensité du courant alternatif) et montre une articulation possible entre les deux modèles C et O.

L'oscillation harmonique y est présentée comme suit :

> Le phénomène périodique le plus simple est une oscillation harmonique décrite par la fonction y = A sin (ωx+α) + B avec A, B, ω, α constantes, A, ω non nuls. C'est une fonction périodique de période $\frac{2\pi}{|\omega|}$; $|A|$ est appelé amplitude.
>
> (Manuel avancé de classe 11, p. 15)

On fait le lien entre la physique et les mathématiques en introduisant la classe des fonctions y = A sin (ωx+α) + B et sa période T = $\frac{2\pi}{|\omega|}$. Cela n'est pas présent dans le cours comme une connaissance exigible.

Avec l'exemple de la noria est présenté un mouvement circulaire uniforme :

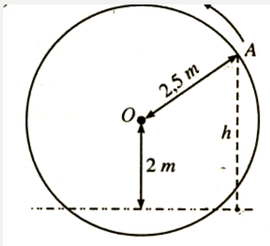
> Une noria ayant pour le rayon de 2,5 m, ayant l'axe de rotation qui est distant à la surface de l'eau de 2 m, tourne régulièrement une minute par tour (figure 1.16). Appelons y (mètres) la « distance » de la surface de l'eau à un seau d'une noria à l'instant x (minutes) (y > 0 quand la noria est au dessus de la surface de l'eau et y < 0 quand elle est au dessous). Après $\frac{1}{2}$ minutes de son départ, le seau est à la position la plus haute. On en déduit que
>
> y = 2 + 2, 5 sin $\left[2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]$
>
> Le graphique de cette fonction a la forme suivante :
>
> 
>
>
> Hình 1.16 Hình 1.17
>
> (Ibid., p. 15-16)

Les deux modèles C et O sont présents sur la même figure, ce qui autorise un passage de la cyclicité à la périodicité oscillatoire.

Ce passage est ignoré dans un exercice du même manuel qui reprend les mêmes données :

Une noria a un rayon de 2,5 m et son axe de rotation est distant de la surface de l'eau de 2 m (figure 1.24). Quand elle tourne régulièrement, la distance h (mètre) à la surface de l'eau d'un seau associé à un point A de la noria est calculée par la formule : h = $|y|$ où y = 2 + 2, 5 sin $\left[2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]$

x est le temps en minute de rotation de la noria (x ≥ 0) ; y > 0 quand la noria est au dessus de la surface de l'eau et y < 0 quand elle est au dessous.



Hình 1.24

a) Quand le seau est-il à la position la plus basse ?
b) Quand est-il à la position la plus haute ?
c) Quand est-il distant de la surface de l'eau de 2 m pour la première fois ? (Ibid., p. 32)

Les modèles C (figure 1.24) et O (y = 2 + 2, 5 sin $\left[2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]$) sont donnés tout faits, ils ne sont pas construits. Pourtant, le recours au modèle C n'est pas attendu institutionnellement pour répondre aux questions : c'est une simple illustration. Cet exercice fait rentrer l'élève dans le contrat didactique de la résolution d'équations trigonométriques.

Par ailleurs, dans la partie « Que sais-tu ? » le manuel présente le son qui a une oscillation périodique selon le temps. C'est ici qu'on introduit la notion de fréquence de l'oscillation très importante en physique mais qui n'apparaît pas en mathématiques. En particulier, cette remarque nous montre aussi l'importance de la classe des fonctions sinusoïdales.

Le mathématicien français Fourier a démontré qu'une fonction périodique de période T peut être écrite sous une « somme » d'une constante et de fonctions sinusoïdales de période $\frac{T}{n}$ (n est un nombre entier positif). (Ibid., p. 18)

Les thèmes traités dans les parties « Lecture complémentaire » et « Que sais-tu ? » contribuent à rapprocher la mathématique des autres domaines dans la vie quotidienne et permettent aux élèves de mieux comprendre le sens de la notion de périodicité. Ils répondent à une insistance du programme actuel. En effet, dans ce programme on peut lire :

Assurer l'interdisciplinarité des matières, éviter la coïncidence et la contradiction entre elles. Lier le contenu du manuel avec la vie pratique mais ne pas rendre l'apprentissage plus lourd. (Livre des enseignants de classe 11, ensemble avancé, p. 10)

Dans ce manuel, après la leçon sur les fonctions trigonométriques, il n'y a pas de situation de modélisation. Nous en trouvons seulement dans les leçons relatives aux équations trigonométriques. C'est une différence notable avec le manuel élémentaire. En effet, on utilise des situations de la physique, de l'astronomie, etc. pour introduire de nouvelles notions ou des problèmes. Considérons la situation suivante qui est présentée avant l'introduction des équations trigonométriques :

Un satellite artificiel s'envole autour de la Terre selon une orbite elliptique. Sa hauteur h (calculée en kilomètres) par rapport à la surface de la terre est déterminée par la formule suivante :

h = 550 + 450 cos $\frac{\pi}{50}$ t où t est le temps (calculé en minutes) à partir que le satellite s'envole dans l'orbite. On devrait effectuer une expérimentation scientifique quand le satellite est distant de la surface de la terre de 250 km. Trouve des instants où on peut le faire. (Manuel avancé de classe 11, p. 19)

C'est un problème issu du contexte de l'astronomie. Le travail mathématique (établir une équation trigonométrique et la résoudre) a pour but de répondre à une question relative au contexte (instants où on peut faire une expérimentation scientifique). En fait, le contexte sert de prétexte à un travail mathématique dans le modèle O sans démarche de modélisation.

En effet, le modèle O est là encore donné tout fait si bien que l'élève n'a qu'à remplacer h par 250 dans l'équation et à résoudre celle-ci. C'est pourquoi cet exercice ne constitue pas une entrée dans une démarche de modélisation du phénomène lui-même.

III. Conclusion

Que ce soit en France ou au Viêt Nam, les manuels proposent peu de problèmes issus de contextes extra-mathématiques pour étudier des phénomènes périodiques et quand ils le font, c'est en imposant immédiatement le modèle mathématique à suivre. Le travail demandé à l'élève se situe alors dans ce modèle mathématique. On attend aussi de lui, qu'après ce travail, il reformule les résultats mathématiques dans le contexte pour apporter les réponses aux questions posées sur la réalité extra-mathématique. L'analyse des manuels nous conduit à penser que l'élève ne passe pas par les étapes intermédiaires qui constituent le cœur et le moteur du processus de modélisation. Cette conclusion rejoint les constats issus d'autres études relatives à la modélisation dans l'enseignement des mathématiques en France :

Cela nous permet de vérifier que les étapes Modèle Mathématique et Etude Mathématique sont celles que l'élève devra réaliser, ces deux étapes correspondant au domaine purement mathématique. L'élève devra seulement revenir au domaine pseudo-concret pour reformuler les résultats mathématiques trouvés, en termes pseudo-concret. (Rodriguez (2007), p. 83)

Cette remarque est à rapprocher des déclarations officielles :

L'exercice de modélisation du réel est sans doute la démarche la plus importante et aussi la plus difficile dans la démarche scientifique. Passer du concret à l'abstrait, de l'observation à sa traduction formalisée demande que l'on soit capable d'extraire du monde réel une représentation simplifiée…
(L'enseignement des sciences au lycée, BOEN Hors série, n^{o}6, août 1999, p. 5)

En fait les situations proposées ne permettent généralement pas d'éclairer les liens entre les phénomènes et leurs modèles mathématiques. Ceci montre que l'attente institutionnelle, telle que nous pouvons l'imaginer à partir des textes des manuels et des programmes, n'est pas le processus de modélisation complet comme le remarque Rodriguez (2007) :

Il est important de souligner que conduire un processus de modélisation n'est pas une compétence requise en mathématiques [en France]. De plus, le terme utilisé est « traduction » qui est très réducteur car il implique qu'il n'y a pas de choix possible. (Rodriguez (2007), p. 68)

CHAPITRE 3

QUESTIONNAIRE POUR L'ELEVE

I. Objectif de l'expérimentation

Comme l'analyse institutionnelle l'a montré, les situations de modélisation de phénomènes périodiques présentes dans les EMS français et vietnamien engagent en arrière-plan une fonction dont la variable indépendante est le temps. Plus précisément, les phénomènes périodiques étudiés renvoient le plus souvent aux modèles C (mouvement circulaire uniforme) et O (oscillation harmonique) utilisés dans l'enseignement de la physique.

L'institution française fait appel aux deux registres, graphique et algébrique, de la fonction qui intervient dans la modélisation des phénomènes. On demande à l'élève de rechercher des informations sur le phénomène à partir d'un graphique ou de l'étude d'une fonction donnée par sa formule algébrique.

L'institution vietnamienne n'insiste au contraire que sur le travail algébrique. On attend que l'élève établisse des équations trigonométriques et les résolve mais l'étude et la construction des fonctions ne sont pas demandées. Le registre géométrique est quelquefois présent dans l'énoncé sous forme d'une figure, d'un dessin ou d'une photographique mais ne joue qu'un rôle illustratif. De plus, le recours au registre graphique de la fonction pour résoudre le problème n'est pas attendu institutionnellement.

Par ailleurs, dans les deux institutions, face à une situation concrète, on impose à l'élève une modélisation mathématique déjà faite. Le travail demandé à l'élève se situe alors dans ce modèle mathématique. On attend aussi de lui, qu'après ce travail, il reformule les résultats mathématiques dans le contexte pour apporter les réponses aux questions posées sur la réalité extra-mathématique. L'analyse des manuels nous conduit à penser que l'élève ne passe pas par les étapes intermédiaires qui constituent le cœur et le moteur du processus de modélisation (cf. chapitre 1).

En fait les situations proposées ne permettent généralement pas d'éclairer les liens entre les phénomènes et leurs modèles mathématiques. C'est le cas pour les situations mettant en jeu la notion de périodicité.

Q'1 : Comment, dans les conditions institutionnelles, l'élève utilise-t-il des savoirs non-mathématiques pour travailler à l'intérieur de celui des modèles mathématiques C ou O qui lui est imposé ?

Q'2 : Comment, dans les conditions institutionnelles, l'élève se réfère-t-il à l'un des modèles mathématiques C et O, dans le cas où l'un de ces modèles ne lui est pas imposé, pour résoudre le problème extra-mathématique ?

Q'3 : Dans quelles conditions l'élève peut-il entrer dans un processus de modélisation d'un problème extra-mathématique relatif à un phénomène périodique ?

Ces trois questions sont à l'origine de la décision de monter un dispositif expérimental comportant un questionnaire aux élèves vietnamiens de classe 12 et une ingénierie didactique.

Outre l'ambition d'apporter des premiers éléments de réponse à ces trois questions, le questionnaire permettra de mieux décrire le rapport institutionnel en position d'élève à la notion de fonction périodique et de préparer la construction de situations de modélisation la faisant intervenir (que nous proposerons dans notre ingénierie).

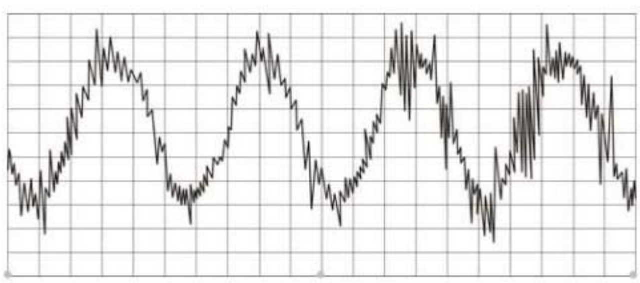
II. Forme de l'expérimentation

L'expérimentation est réalisée auprès d'élèves de début de classe 12 auxquels ont été enseignés la notion de fonction périodique en mathématiques (en classe 11) et quelques phénomènes périodiques en physique (le mouvement circulaire uniforme, l'oscillation harmonique, etc.). Le questionnaire est composé de 4 exercices. Les élèves répondent individuellement.

III. Présentation des exercices composant le questionnaire

Exercice 1

Ci-après un encéphalogramme montre l'activité du cerveau humain pendant le sommeil profond selon le temps en secondes. Cette activité est la même durant tout le sommeil profond dont la durée moyenne est de 20 minutes.



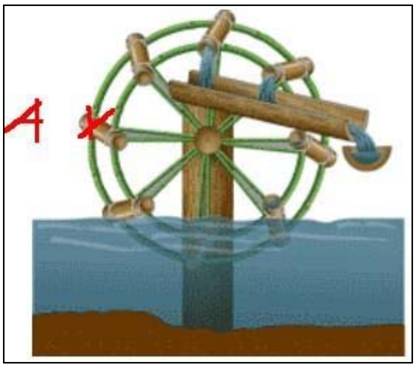
a) Qu'est-ce que tu peux dire sur ce phénomène ?
b) Durant la première seconde, dans quels intervalles l'activité du cerveau augmente-t-elle ? Dans quels intervalles diminue-t-elle ?
c) Durant la première seconde, à quel instant l'activité du cerveau est-elle la plus forte ? A quel instant est-elle la plus faible ?
d) Que remarques-tu de l'activité du cerveau durant l'intervalle de temps de 3,5 s à 4 s ? Justifie ta réponse.
e) Evalue l'activité du cerveau au temps t = 2,5 s.
f) Construis une figure permettant d'apprécier l'activité du cerveau sur les 10 premières secondes du sommeil profond.

Exercice 2

Les peuples montagnards du Nord utilisent souvent la noria pour apporter de l'eau aux champs élevés. C'est une grande roue, comme la roue d'une bicyclette, avec des seaux attachés par des goupilles. Les seaux sont successivement immergés, remplis et vidés dans une gouttière.

Supposons qu'une noria ait 8 seaux attachés comme ci-dessous. Un mathématicien étudie la « hauteur » du seau, noté A dans la figure, par rapport à la surface de l'eau. Cette hauteur est positive quand le seau est au dessus de l'eau, négative quand il est au dessous. A chaque instant t (calculé en minutes), le mathématicien a trouvé que cette hauteur (calculée en mètres) suit la loi suivante :

$$h = 2 + 2{,}5\, sin \left[2\pi \left(t - \frac{1}{4} \right) \right]$$



(Source : http://www.machinerylubrication.com/Read/1294/noria-history)

a) Qu'est-ce que tu peux dire sur le mouvement de la noria ?
b) Trouve le rayon de la roue et la distance du centre de la roue à la surface de l'eau.
c) On veut déverser dans le champ une quantité d'eau égale au déversement de 1000 seaux dans la gouttière. Pendant combien de temps la noria doit-elle tourner?

Exercice 3

On a relevé la hauteur d'eau au port de Saint-Malo en France les 9 et 10 mai 2009 dans les deux tableaux ci-dessous :

9 mai 2009			
Matin		Après-midi	
0H00	5,02m	12H00	5,60m
1H00	3,38m	13H00	3,87m
2H00	2,30m	14H00	2,62m
3H00	2,12m	15H00	2,10m
4H00	3,28m	16H00	2,84m
5H00	5,62m	17H00	4,91m
6H00	8,40m	18H00	7,71m
7H00	10,64m	19H00	10,27m
8H00	11,54m	20H00	11,64m
9H00	11,05m	21H00	11,51m
10H00	9,62m	22H00	10,27m
11H00	7,66m	23H00	8,36m

10 mai 2009			
Matin		Après-midi	
0H00	6,22m	12H00	6,78m
1H00	4,28m	13H00	4,82m
2H00	2,83m	14H00	3,30m
3H00	2,05m	15H00	2,33m
4H00	2,39m	16H00	2,34m
5H00	4,10m	17H00	3,71m
6H00	6,73m	18H00	6,19m
7H00	9,40m	19H00	8,96m
8H00	11,15m	20H00	11,04m
9H00	11,45m	21H00	11,72m
10H00	10,51m	22H00	11,03m
11H00	8,83m	23H00	9,46m

(Source : http://maree.frbateaux.net)

a) Que peux-tu dire sur ce phénomène ?

b) Combien y a-t-il de marées hautes durant ces deux jours ? Combien y a-t-il de marées basses ?

(La marée haute est le niveau le plus élevé de chaque marée montante. Par opposition, la marée basse est le niveau le plus bas de chaque marée descendante.)

c) Quelle est l'amplitude moyenne des marées à Saint-Malo sur les deux jours ?

(L'amplitude des marées dans un jour est la différence de hauteur entre le niveau de la marée haute et celui de la marée basse suivante).

d) Le capitaine d'un bateau veut prendre la mer à Saint-Malo le 11 mai. Le tirant d'eau de son bateau est de 7 mètres. A quelles heures peut-il partir le 11 mai?

(Le tirant d'eau est la hauteur de la partie immergée du bateau qui varie en fonction de la charge transportée. Il correspond à la distance verticale entre la ligne de flottaison d'un bateau et le bas de la quille. Un bateau dont le tirant d'eau est de d mètres peut naviguer en toute sécurité quand la hauteur d'eau est supérieure à d mètres).

e) Construis une figure permettant d'apprécier les hauteurs d'eau dans ce port durant la totalité des trois jours 9, 10 et 11 mai 2009.

Exercice 4

Un parc d'attraction de Ho Chi Minh ville possède une grande roue de 40 m de diamètre dont le centre est situé à 22 m du sol.

La roue tourne toujours dans le même sens de manière uniforme. Au début du voyage, la cabine P se trouve au plus bas et Minh s'y assoit. Il fait un voyage de 3 tours qui dure 30 minutes.

a) A quel instant Minh est-il à la position la plus haute ?
b) Calcule la hauteur de la cabine de Minh au sol après 2,5 minutes du voyage, après 7 minutes, après 12 minutes et après 22 minutes.
c) Construis une figure permettant d'apprécier les hauteurs de la cabine P durant les trois tours du voyage.
d) A partir de 35 m de hauteur on voit la rivière Saigon. Combien de temps Minh peut-il la voir pendant tout un voyage ?

IV. Analyse a priori du questionnaire

IV.1. Construction du questionnaire

Dans le questionnaire, tous les exercices sont choisis à partir des différences institutionnelles mises précédemment en évidence entre les institutions française et vietnamienne. En particulier, ils sont bâtis sur des ruptures de contrat didactique. Par exemple, aucun énoncé ne comporte les mots « périodicité » ou « périodique ».

L'énoncé de ces exercices renvoie, de manière plus ou moins explicite, à une fonction numérique dont la variable indépendante est le temps, fonction que l'élève devra reconnaître et utiliser pour répondre aux questions posées.

La structure des trois exercices 1, 2 et 3 est la suivante :

- la première question est ouverte[19] : « qu'est-ce que tu peux dire sur ce phénomène ? »
- les questions suivantes suggèrent l'exploitation d'un registre de la fonction participant à la modélisation : graphique, algébrique ou numérique ;
- la dernière question favorise le recours à la périodicité via l'un des deux modèles C ou O.

Bien que l'exercice 1 soit issu d'un exercice trouvé dans un manuel français relatif à l'électrocardiogramme (cf. page 110 de l'analyse institutionnelle), nous en avons modifié les questions. Ici, nous ne demandons pas de trouver la période comme dans le manuel français. Mais il faut utiliser la périodicité comme un outil pour résoudre le problème. Ces types de questions sont très peu présents dans les manuels vietnamiens.

---

[19] C'est un type de questions très peu présent dans les exercices des manuels vietnamiens.

Dans l'exercice 2, bien que la fonction soit donnée dans le registre algébrique, comme dans les deux institutions vietnamienne et française (cf. pages 129, 133 de l'analyse institutionnelle), les questions d'étude fonctionnelle et d'exploitation de la formule présentes dans l'institution française sont en rupture avec le contrat didactique de l'institution vietnamienne. De plus, les questions qui demandent d'articuler les deux modèles C et O (question b) et qui abordent le lien entre la notion de période en mathématique et en physique (question c) sont absentes des deux institutions.

Quant à l'exercice 3 qui présente un phénomène presque périodique donné par une table numérique et l'exercice 4 dans lequel il y a absence des registres graphique, algébrique ou numérique de la fonction permettant la modélisation, on ne les rencontre dans aucune des deux institutions.

Comme nous l'avons souligné ci-dessus, la périodicité ne figure pas explicitement dans ces exercices. Nous voulons savoir quels mots l'élève va utiliser pour parler de ces phénomènes. La périodicité ou la quasi périodicité sont-elles pointées ? Le terme « périodicité » apparaît-il ? Dans notre mémoire de Master 2 (Nguyen Thi 2007), nous avons montré que la notion de périodicité existe chez les élèves avec le sens de répétition. On peut donc penser que la présence de la répétition dans les situations données va favoriser l'apparition explicite du mot « périodicité » ou « périodique » dans les réponses des élèves.

Les questions 1b), 1c) (respectivement 2b) ou 3b), 3c)) demandent d'exploiter des informations sur les phénomènes à partir de leurs modèles mathématiques.

Les questions 1d), 1e), 1f) (respectivement 2c) ou 3d), 3e)) constituent un contexte pour appliquer la périodicité (ou la quasi périodicité) du phénomène. Quel modèle l'élève va-t-il utiliser pour répondre à ces questions ? Va-t-il expliquer ses réponses grâce au phénomène ou au modèle mathématique ?

En particulier, les questions 1f) et 3e) demandent de construire une figure qui permette d'apprécier le phénomène en fonction du temps. Il faut utiliser la périodicité (ou la quasi périodicité) pour prolonger le graphique par translation.

L'exercice 4, quant à lui, ne privilégie aucun des deux modèles C et O. Il a pour objectif de motiver la modélisation d'un phénomène. L'élève doit participer au processus de modélisation pour construire le modèle mathématique correspondant, puis l'étudier et répondre aux questions sur le phénomène.

IV.2. Les variables et le choix de leurs valeurs

Dans cette expérimentation, il s'agit de la modélisation mathématique de phénomènes appartenant à différents domaines. Nous nous intéressons essentiellement au rapport à l'objet « fonction périodique ». En arrière plan, il y a toujours une « fonction périodique », et plus précisément une « fonction sinusoïdale ». Nous voulons savoir si ce type de modélisation est disponible chez les élèves et exploitable par eux pour relier les phénomènes et les modèles mathématiques.

Rappelons que pour l'institution vietnamienne, un phénomène périodique est un phénomène qui se répète de manière identique, à intervalles de temps égaux. Plus précisément, dans les manuels scolaires, la périodicité est toujours liée aux phénomènes qui reviennent régulièrement et indéfiniment au même état. Notamment, dans l'enseignement de la physique, on aborde deux classes de phénomènes périodiques, le mouvement circulaire uniforme et l'oscillation harmonique, que l'on étudie à l'aide des deux modèles mathématiques C et O. Dans les quatre exercices du questionnaire, ces deux classes apparaissent comme dans le tableau ci-dessous :

Exercice	V1 : Classe du phénomène périodique
Exercice 1	oscillation harmonique
Exercice 2	mouvement circulaire uniforme
Exercice 3	oscillation harmonique
Exercice 4	mouvement circulaire uniforme

Tableau 13. Valeurs de la variable V1

Concrètement, dans l'exercice 1, la périodicité est représentée via l'expression « la même » dans l'énoncé[20]. De plus, elle apparaît dans la figure donnée qui ressemble à une sinusoïde (ce qui renvoie au modèle O).

Dans l'exercice 2, la périodicité est présente d'une part dans la formule algébrique (le modèle O) représentant la hauteur du seau A à la surface de l'eau, $h = 2 + 2{,}5 \sin \left[2\pi(t - \frac{1}{4}) \right]$. D'autre part, le dessin de la noria montre un cercle qui donne une image de ce qui se répète régulièrement. Il renvoie au modèle C.

Au contraire, dans l'exercice 3, il n'y a pas d'indication explicite de la périodicité. Les données des deux tableaux ne sont pas répétées complètement. Mais elles montrent aussi « une alternance » du niveau d'eau (il monte et descend, monte et descend,…).

Dans l'exercice 4, l'uniformité et l'expression « le même » sont présentes dans l'énoncé[21]. De plus, comme dans l'exercice 2, la photographie de la grande roue montre aussi un cercle représentant un phénomène qui revient à son état initial de manière infinie (ce qui renvoie au modèle C).

En particulier, puisque une oscillation harmonique peut être considérée comme la projection d'un mouvement circulaire uniforme sur une droite appartenant au plan d'orbite, dans les exercices 2 et 4, il y a concurrence entre les deux modèles C et O. Cela devrait favoriser la reconnaissance et l'exploitation de chaque modèle. De plus, une articulation entre les deux modèles peut être établie.

On voit que tous les exercices du questionnaire sont posés dans le domaine pseudo-concret[22] car, sans le dire, plusieurs facteurs aléatoires comme le bruit (dans l'exercice 1), la force du vent (dans l'exercice 2), etc. sont ignorés. Parce que la périodicité apparaît dans plusieurs domaines, la construction des exercices a été basée sur le choix des valeurs de la variable *V2 : Discipline du contexte du problème.*

[20] Cette activité est **la même** durant tout le sommeil profond.
[21] La roue tourne toujours dans **le même** sens de manière **uniforme**.
[22] Coulange (1997)

Dans les 4 exercices du questionnaire, nous avons choisi les valeurs de V2 comme suit :

Exercice	V2 : discipline du contexte du problème
Exercice 1	biologie
Exercice 2	physique
Exercice 3	géographie
Exercice 4	physique

Tableau 14. Valeurs de la variable V2

De plus, dans le but de faire exploiter différents registres des fonctions numériques pour faire le lien entre les phénomènes et les modèles mathématiques qui permettent de les étudier, nous nous avons pris en compte la variable *V3 : registre de la fonction.* Le choix des valeurs de cette variable influence évidemment les stratégies (graphique, algébrique, numérique, etc.) de l'élève. Voici les valeurs de V3 dans les exercices du questionnaire :

Exercice	V3 : registre de la fonction
Exercice 1	graphique
Exercice 2	algébrique
Exercice 3	numérique
Exercice 4	langue naturelle

Tableau 15. Valeurs de la variable V3

En résumé, le tableau suivant présente les valeurs des variables de situation et des variables didactiques du questionnaire :

Numéro exercice	Discipline du contexte	Classe du phénomène périodique	Registre de la fonction
Exercice 1	biologie	oscillation harmonique	graphique
Exercice 2	physique	mouvement circulaire uniforme	algébrique
Exercice 3	géographie	oscillation harmonique	numérique
Exercice 4	physique	mouvement circulaire uniforme	langue naturelle

Tableau 16. Synthèse des valeurs des variables de situation et des variables didactiques

IV.3. Analyse détaillée du questionnaire

- **Exercice 1**

Le phénomène concerné est l'activité du cerveau pendant le sommeil profond. C'est une image numérique qui, pour le profane, passe pour une imitation fidèle du réel, comme l'explique Gandolfo (2009) :

> C'est le cas, grâce au fantastique progrès technologique qu'a représenté l'imagerie biomédicale, de toutes ces images du cerveau qui fleurissent un peu de partout dans les manuels ou les revues de vulgarisation, au point que le lecteur profane serait presque tenté d'y voir de simples photographies instantanées d'un cerveau en activité, alors que le

clinicien et le chercheur savent pertinemment qu'elles sont des images numériques visualisant des différences de débit local de vascularisation ou d'oxygénation par un code de couleurs. (Gandolfo (2009), p. 5)

Ici, la figure donnée peut être approchée par une sinusoïde, courbe connue en classe 11, de période T = 0,5. Les élèves peuvent-ils modéliser mathématiquement un tel phénomène biologique ? Vont-ils répondre aux questions grâce à la figure donnée ou au modèle mathématique O ? Y a-t-il une intervention implicite de la sinusoïde dans leurs réponses ?

- Pour la question a), nous prévoyons les réponses possibles suivantes :

+ $1a_r$: Cette activité se répète régulièrement (monte et descend régulièrement)
+ $1a_p$: Cette activité est périodique
+ $1a_O$: C'est une sinusoïde (oscillation harmonique)
+ $1a_d$: Nous rassemblons ici toutes les autres réponses, par exemple les réponses sur le principe d'activité du cerveau, sur le changement de l'activité du cerveau quand on est éveillé et quand on est dans le sommeil, sur le changement irrégulier, etc.

Les réponses $1a_r$, $1a_p$, $1a_O$ abordent la périodicité du phénomène implicitement ou explicitement. Elles sont liées au regard global qui apporte une régularité du phénomène. Au contraire, avec le regard local, les irrégularités vont prendre le dessus. C'est l'origine de la réponse $1a_d$.

La réponse souhaitée est que l'élève donne les caractéristiques périodiques du phénomène qu'il peut modéliser par une oscillation. Ici, le graphique apporte un regard concret sur la répétition. Donc, il favorise la modélisation mathématique par une sinusoïde. Les réponses $1a_r$, $1a_p$ et $1a_O$ ont donc des chances d'apparaître.

- Dans les questions b) et c), on demande aux élèves d'exploiter des informations du phénomène données par le graphique. Le placement de la figure sur le papier quadrillé permet de le faire efficacement. L'élève modélise-t-il le phénomène immédiatement par une oscillation harmonique ? Reste-t-il dans une approche locale ou globale ?

Pour la question b), voici les réponses possibles correspondant à ces deux regards :

+ $1b_{gl}$: Regard global : nous appelons les réponses liées au regard global celles qui sont données grâce à la sinusoïde (modèle mathématique O). Par exemple, l'activité augmente à partir de 0,1 s à 0,3 s et de 0,6 s à 0,8 s. Elle diminue de 0 s à 0,1 s, de 0,3 s à 0,6 s et de 0,8 s à 1 s.

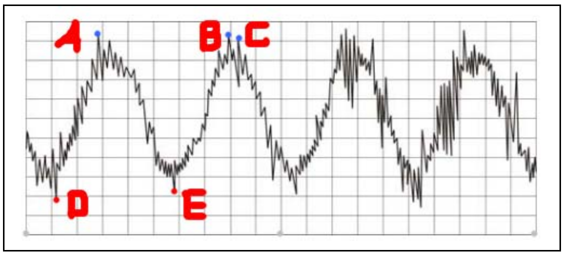
+ $1b_{lc}$: Regard local : il empêche une modélisation mathématique. Les réponses s'appuyant à ce regard prennent en compte des pics de la figure donnée.

De manière similaire, pour la question c), il y a deux réponses possibles suivantes :

+ $1c_{gl}$: Regard global : cette activité est la plus forte aux temps correspondant aux valeurs maximales de la sinusoïde (par exemple, t = 0,3 s et t = 0,8 s). Elle est la plus faible au temps correspondant aux valeurs minimales de la sinusoïde (t = 0,1 s et t = 0,6 s).

+ $1c_{lc}$: Regard local : cette activité est la plus forte aux temps correspondant au pic le plus haut (par exemple la valeur de t est 0,3 s à peu près). Elle est la plus faible au temps correspondant au pic le plus bas (t égale à 0,1 s à peu près).

Dans cette approche, la réponse peut être donnée sur la figure comme suit :



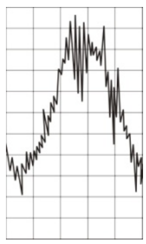
L'activité est la plus forte aux points A (ou B ou C). L'activité est la plus faible aux points D (ou E).

- Dans la question d), nous voulons savoir quel modèle l'élève va utiliser. Le choix de l'intervalle (3,5 ; 4) qui n'est pas consécutif à l'intervalle (0 ; 2) a pour but de faire faire une translation de l'image numérique ou de la sinusoïde, sur les intervalles.

Nous prévoyons deux stratégies possibles pour cette question :

+ $1d_{gl}$: Stratégie liée au regard global. Il peut y avoir deux réponses pour cette stratégie. La justification de ces réponses se base sur la répétition régulière ou la périodicité du phénomène.

- L'élève peut donner une figure comme celle sur l'intervalle (1,5 ; 2) ou sur l'intervalle (0 ; 0,5),… C'est la translation de l'activité du cerveau sur l'intervalle (1,5 ; 2), (0 ; 0,5),…. Cette réponse est issue du point de vue graphique de la périodicité. Le graphique d'une fonction périodique de période T reste totalement invariant par la translation selon le vecteur T$\vec{i}$. Il y a deux possibilités pour cette figure selon l'utilisation du modèle numérique donné ou du modèle mathématique : une figure comme celle donnée dans l'énoncé ou un graphique sinusoïdal.




3,5 4 s 3,5 4s

- Sur l'intervalle (3,5 ; 4), l'activité du cerveau est ressemblante à celle sur l'intervalle (1,5 ; 2) ou sur l'intervalle (0 ; 0,5),... Elle diminue, puis elle augmente et continue à diminuer (diminue de 3,5 s à 3,6 s et de 3,8 s à 4 s, augmente de 3,6 s à 3,8 s). C'est la réponse liée implicitement au point de vue numérique. Une fonction périodique prend les mêmes valeurs aux intervalles réguliers.

+$1d_{lc}$: Stratégie liée au regard local

Avec le regard local, l'activité du cerveau peut être considérée comme une variation continue qu'on ne peut pas connaître, sauf sur l'intervalle (0 ; 2). De plus, il peut conduire aussi aux réponses s'appuyant sur le nombre de lignes en zigzag de l'image numérique donnée. C'est-à-dire, l'activité du cerveau augmente (ou diminue) de plus en plus parce que dans la figure, le nombre de lignes en zigzag est de plus en plus grand.

- La question e) demande d'évaluer l'activité du cerveau à un instant qui n'apparaît pas dans la figure. Il est nécessaire d'utiliser la périodicité du phénomène, plus concrètement la caractéristique numérique (ou graphique) de la fonction périodique. L'activité au temps t = 2,5 s prend la même valeur de l'activité au temps t = 0,5 s (ou 1 s, etc.). Elle a des caractéristiques suivantes :

+ elle n'est pas la plus haute,
+ elle est proche de la valeur la plus basse,
+ à cet instant, l'activité du cerveau est en train de diminuer.

Nous notons $1e_{gl}$ toutes les réponses qui donnent une de ces caractéristiques correctes.

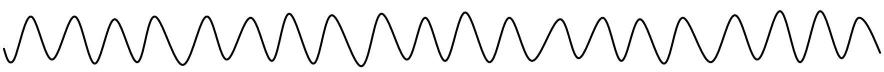
-En ce qui concerne la question f), quelles significations de la périodicité vont être modélisées ? Quelle figure va être produite ? Une figure comme celle donnée dans l'énoncé ou une sinusoïde ?

Dans cette question, indépendamment de l'exploitation du modèle O (utiliser la périodicité) comme les questions d) et e), il faut réduire l'échelle de l'axe des abscisses pour construire la figure sur un grand intervalle. Comme pour la question d), il y a deux stratégies possibles.

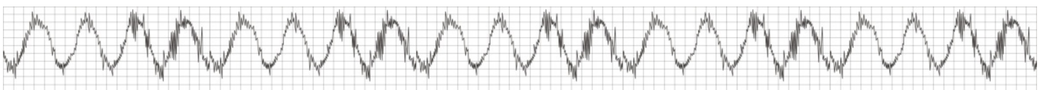
+ $1f_{gl}$: Stratégie liée au regard global

Il existe deux réponses possibles dans cette stratégie.

- Sinusoïde conforme au modèle mathématique :



- Sinusoïde du même type que le graphique donné dans l'énoncé :



+ $1f_{lc}$: Stratégie liée au regard local

On ne connaît pas l'activité du cerveau sur l'intervalle (2 ; 10) parce qu'elle varie continuement et irrégulièrement.

- **Exercice 2**

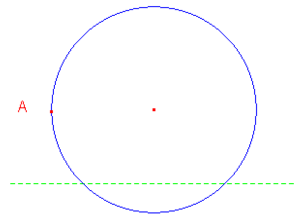
Dans cet exercice, il s'agit du mouvement circulaire uniforme de la noria (modèle C) que l'élève a étudié en classe 10. Le phénomène est décrit par une photographie et un dessin. De plus, la relation entre les variables est donnée par une formule algébrique. Notons que la noria avec la formule h = $2 + 2,5 \sin\left[2\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right]$, son modèle géométrique et son graphique ont été présentés en classe 11 dans la partie complémentaire après la leçon sur la fonction périodique dans le manuel mathématique avancé. Nous les retrouvons, sauf le graphique, dans un exercice de ce manuel (cf. l'analyse du manuel vietnamien page 132).

Cependant, comme nous l'avons montré dans la partie d'analyse institutionnelle, cet exercice du manuel fait entrer l'élève dans le contrat didactique de la résolution d'équations trigonométriques. L'objectif de cet exercice du questionnaire est d'une part d'exploiter l'articulation entre le phénomène et la formule associée et d'autre part d'étudier une fonction périodique. Quelles informations l'élève peut-il lire sur la formule algébrique donnée ?

De plus, dans cet exercice, il faut articuler les deux modèles C et O et utiliser aussi le lien entre la notion de période en physique et en mathématique.

Concrètement, c'est la formule algébrique $h = 2 + 2{,}5 \sin\left[2\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right]$ qui renvoie au modèle O.

A partir de l'image donnée de la noria, on peut aussi penser au modèle C suivant :



Donc par le modèle C, on peut représenter la noria et aussi la trajectoire d'un seau A, tandis que par le modèle O, on représente la hauteur du seau A à la surface de l'eau.

-A propos de la question a), nous voulons savoir si l'élève parle du mouvement de la noria grâce à la formule de la fonction associée ? S'intéresse-t-il à la présence de cette formule et comprend-il le choix de ce modèle? Voici les réponses possibles.

$+2a_C$: Le mouvement de la noria est circulaire uniforme (modèle C)
$+2a_p$: Le mouvement de la noria est périodique
$+2a_O$: C'est une oscillation harmonique ou une sinusoïde (modèle O)
$+2a_d$: Autres réponses (la noria se met en mouvement rotatif autour d'un axe,….)

Parmi les réponses ci-dessus, la présence de la formule de la fonction exprimant la hauteur dans l'énoncé permet de donner les réponses $2a_C$, $2a_p$ et $2a_O$. Dans la réponse $2a_d$, la formule n'a pas été prise en compte. L'articulation entre le phénomène et les modèles mathématiques n'est pas établie.

-La question b) demande d'exploiter des informations sur le phénomène à partir de la formule algébrique. Dans cette formule, la constante 2 correspond à la distance d du centre de la noria à la surface de l'eau. Le facteur 2,5 est le rayon de la noria. Et la période T prend la valeur de 1 ($T = \frac{2\pi}{\omega}$) donc la noria fait un tour dans une minute. L'élève peut-il exploiter ces informations dans la formule donnée ? Peut-il comprendre l'articulation entre la formule et le phénomène associé ?

Voici les deux stratégies possibles pour cette question.

$+2b_O$: Stratégie liée au modèle O

A partir de la formule donnée, le rayon est R = 2,5 m. La distance est d = 2 m. Cette stratégie est issue des études des oscillations harmoniques dans les manuels de physique. On peut savoir la signification des constantes dans la formule qui représente une oscillation harmonique. En effet, on a : h – 2 = *2,5 sin* $\left[2\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right]$. Donc, 2,5 est l'amplitude de l'oscillation ou le rayon du cercle.

+2b$_{CO}$: Stratégie liée aux deux modèles C et O

2b$_{CO1}$: modèle O → modèle C

A partir de la formule algébrique (modèle O) h = *2 + 2,5 sin* $\left[2\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right]$, on a :

$$-1 \leq \sin\left[2\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right] \leq 1, \text{ donc } \sin\left[2\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right] = -1,\ h_{min} = -0{,}5$$

$$\sin\left[2\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right] = 1,\ h_{max} = 4{,}5$$

Selon l'image donnée (modèle C), le diamètre de la roue est : d = h_{max} + h_{min} = 0,5 + 4,5 = 5 m

Le rayon est donc R = 2,5 m. La distance du centre de la noria à la surface de l'eau est : 2,5 – 0,5 = 2 m

Cette stratégie s'appuie sur les connaissances des propriétés de la fonction sinus et sur les caractéristiques du mouvement circulaire uniforme.

2b$_{CO2}$: modèle C → modèle O → modèle C

Cette stratégie assimile la position initiale (correspondant au temps t = 0 selon le vocabulaire de la physique) à une certaine position du seau A, soit la position donnée par la figure, soit une autre position, comme la position la plus basse ou la position la plus haute. Cette stratégie est favorisée ou défavorisée par le choix de la lettre A sur la figure donnée.

- La position initiale (correspondant au temps t = 0) est la position donnée par la figure. La période T = $\frac{2\pi}{\omega}$ = 1, donc pour t = $\frac{3}{4}$ (modulo 1), le seau A est alors à la position la plus haute et donc h_{max} = 2 m et pour t = $\frac{1}{4}$, le seau A est à la position la plus basse, donc h_{min} = 2 m. Ainsi le rayon vaut 0.

- La position initiale est la position la plus basse. Pour t = 0, le seau A est à la position la plus basse et donc h_{min} = -0,5 m. La période T = 1, donc pour t = $\frac{1}{2}$ (modulo 1), le seau A est à la position la plus haute et donc h_{max} = 4,5 m. Donc le diamètre de la roue est 0,5 + 4,5 = 5 m. Le rayon est R = 2,5 m. La distance du centre de la noria à la surface de l'eau est 2,5 – 0,5 = 2 m.

Ici, nous voyons l'intervention de la variable didactique V3 : *forme de la formule algébrique représentant la hauteur.*

En effet, si la fonction représentant la hauteur peut être écrite sous la forme h = A sin (ωt+φ) (ou h = A cos (ωt+φ)), la stratégie $2b_O$ a la chance d'apparaître plus souvent parce que l'élève vient d'apprendre les oscillations harmoniques en physique qui sont caractérisées par cette formule dans laquelle A est l'amplitude. Avec la forme h = d + A sin (ωt+φ) choisie dans l'énoncé du problème, cette stratégie est plus difficile. Tout cela favorise la stratégie $2b_{CO}$ qui demande d'utiliser conjointement le modèle algébrique et le modèle géométrique, c'est-à-dire qu'il faut exploiter les deux modèles C et O et les articuler.

- La question c) permet de comprendre l'existence de la périodicité dans les connaissances des élèves. De plus, elle fait le lien entre la notion de période en physique (le temps pour que l'objet fasse un tour complet) et en mathématiques (le nombre $\frac{2\pi}{\omega}$ dans la formule y = A sin (ωx+φ) + B).

Nous prévoyons une stratégie $2c_{CO}$ possible suivante :

A partir de la formule, on a la période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1$ (modèle O). Donc, la noria fait un tour dans une minute. De plus, 1 tour correspond à 8 seaux, donc 1000 seaux correspondent à 125 tours ou à 125 minutes (modèle C).

C'est la stratégie optimale qui fait intervenir la pulsation ω dans la formule de la fonction représentant la hauteur. Par ailleurs, ω est aussi la vitesse angulaire constante du mouvement circulaire. Donc cette stratégie demande aussi d'exploiter les deux modèles C et O et les articuler.

- **Exercice 3**

Dans cet exercice, le phénomène étudié est la marée qui est presque périodique. Les hauteurs d'eau sont présentées dans les tables de données. La table ne donne pas autant d'informations que le graphique ou la formule algébrique. Dans ce contexte, quel modèle l'élève va-t-il utiliser ? Quels choix l'élève va-t-il faire pour intégrer la quasi périodicité ?

- Pour la question a), nous avons les réponses possibles suivantes comme pour la question 1a). Les trois premières réponses liées au regard global et la dernière liée au regard local.

$+3a_r$: Monte et descend régulièrement (répétition régulière)
$+3a_p$: C'est périodique
$+3a_O$: C'est une sinusoïde (oscillation harmonique)
$+3a_d$: Nous rassemblons ici toutes les autres réponses comme le changement du niveau d'eau selon le temps, le changement irrégulier, etc.

- La question b) est relative à la lecture de la table de données. Dans ce cas, la table donne exactement les informations demandées à condition de comprendre ce que signifie « marée haute » et « marée basse ». Il y a 4 marées hautes et 4 marées basses dans les deux jours du tableau.

- La question c) aborde aussi la lecture de la table. Par ailleurs, il s'agit de calculer et d'analyser des variations. Voici les stratégies possibles.

$+3c_{tb}$: Stratégie « table de données »

La réponse s'appuie sur les tables de données.

L'amplitude de la marée le 9 mai : 11,54 - 2,10 = 9,44
L'amplitude de la marée le 10 mai : 11,45 - 2,30 = 9,15
L'amplitude moyenne : [(11,54 - 2,10) + (11,45 - 2,30)]/ 2 = 9,295

On va voir que cette stratégie est optimale par rapport aux autres stratégies dans cette question par son coût réduit.

+3c_{gr} : Stratégie « graphique »

Quand on représente les données des deux tables dans un repère orthogonal, on a des points comme dans la figure ci-après.

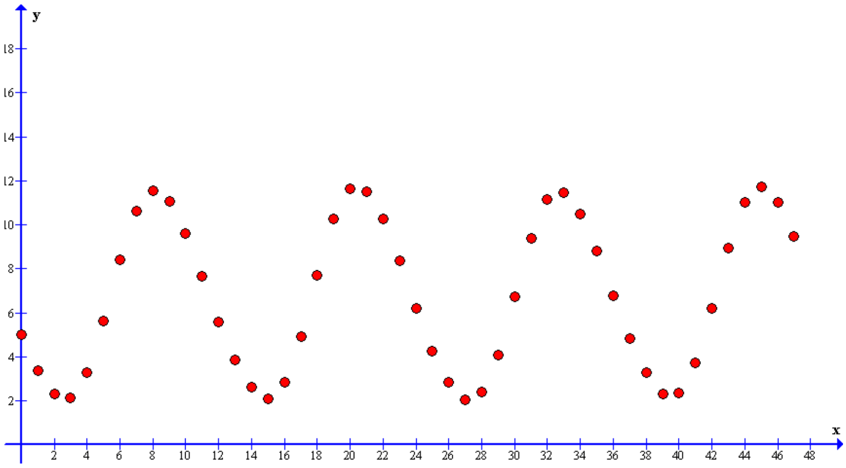


Figure 2. Représentation des points dans un repère orthogonal

Les élèves peuvent relier ces points pour obtenir le graphique représentant les hauteurs d'eau dans les deux jours 9 et 10 mai. En effet, dans son mémoire de Master 2 « Notion de continuité – Une étude épistémologique et didactique », Tran Anh Dung (2005) a montré, en ce qui concerne la construction des fonctions au niveau de classe 11 (Première en France), l'existence de la règle de contrat suivante :

> Afin de construire le graphique d'une fonction, l'élève n'a qu'à relier les points discrets appartenant à une fonction afin d'obtenir une ligne continue sans tenir en compte du caractère connexe de l'ensemble de définition. (Tran Anh Dung, 2005)

Ici, nous prévoyons que cette règle de contrat existe chez les élèves en expérimentation. Donc, on peut obtenir les graphiques suivants :

+ Relier tous les points

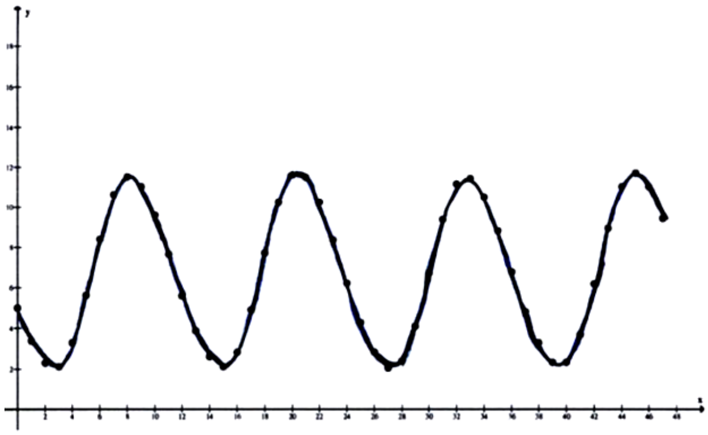


Figure 3. Graphique représentant la hauteur d'eau en fonction du temps (première forme)

+Relier les points d'extremum

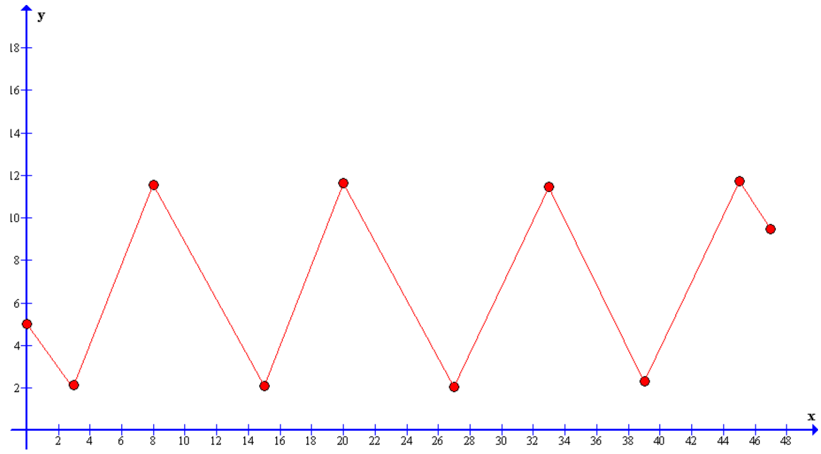


Figure 4. Graphique représentant la hauteur d'eau en fonction du temps (deuxième forme)

Grâce au graphique, on trouve que les valeurs des amplitudes de la marée des jours de 9 et du 10 mai sont les mêmes. Donc, l'amplitude moyenne est celle d'un jour (par exemple le jour 9 mai, A = 11,54 - 2,10 = 9,44 m)

- La question d) demande d'utiliser la quasi périodicité du phénomène pour trouver les hauteurs d'eau du jour 11 mai. Si l'on s'appuie sur la table de données du jour 9 mai ou 10 mai, on peut obtenir les trois réponses $3d_{tb1}$, $3d_{tb2}$ et $3d_{tb3}$ suivantes.

+$3d_{tb1}$: utiliser le jour 9 mai

Le capitaine peut partir de 6h à 11h et de 18h à 23h (heures du 9 mai où la hauteur d'eau est plus de 7 m)

+$3d_{tb2}$: utiliser le jour 10 mai

Le capitaine peut partir de 7h à 11h et de 19h à 23h (heures du 10 mai où la hauteur d'eau est plus de 7 m).

Nous prévoyons que la réponse $3d_{tb2}$ va apparaître plus souvent parce que la comparaison sur les deux tables montre que la réponse $3d_{tb2}$ donne le résultat le plus « assuré ». Elle est la partie commune des deux jours où la hauteur d'eau est de plus de 7 m.

+3d_{tb3} : établir la table de données du 11 mai

L'idée que les deux tables de données suivent « une même loi » pousse à trouver cette loi pour établir la table du jour suivant. Par exemple, à 0h00 le 9 mai, la hauteur d'eau est 5,02 m tandis que le 10 mai, la hauteur d'eau est 6,22 m. Donc, la différence est 1,20 m. Ainsi la hauteur d'eau à 0h00 le 11 mai est 6,22 + 1,20 = 7,42 m. De manière similaire, on peut établir la table de données du 11 mai comme suit :

Matin		Après-midi	
0h00	7.44 m	12h00	7.96 m
1h00	5.18 m	13h00	5.36 m
2h00	3.36 m	14h00	3.98 m
3h00	1.98 m	15h00	2.56 m
4h00	1.50 m	16h00	1.84 m
5h00	2.58 m	17h00	2.51 m
6h00	5.06 m	18h00	4.67 m
7h00	8.16 m	19h00	7.65 m
8h00	10.76 m	20h00	10.44 m
9h00	11.85 m	21h00	11.93 m
10h00	11.40 m	22h00	11.79 m
11h00	10.00 m	23h00	10.56 m

Tableau 17. Table de données du 11 mai

Donc le capitaine peut partir à 0h, de 7h à 12h et de 19h à 23h.

Par ailleurs, la table de données du 11 mai peut être établie par la moyenne arithmétique des données des deux jours du 9 et du 10 mai.

+3d_{gr} : utiliser le graphique

La construction du graphique représentant les hauteurs d'eau durant les trois jours peut donner des images des intervalles de temps satisfaisant la demande de l'exercice. Ce sont les intervalles où le graphique est au dessus de la droite y = 7. Le capitaine peut donc partir durant les temps marqués (sur l'axe Ox) dans la figure ci-après.

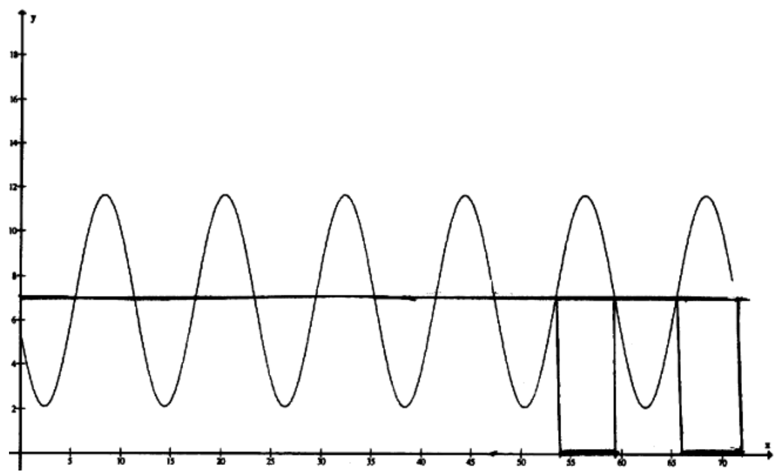


Figure 5. Réponse sur le graphique

En ce qui concerne la question 3e), on peut utiliser la propriété de périodicité du phénomène pour construire une figure pour les trois jours, une sinusoïde. Nous prévoyons des stratégies possibles suivantes :

+3e_{tb} : Stratégie « table de données »

Comme pour la réponse 3d_{tb3} en question d), après avoir établi la table de données du 11 mai, le graphique est construit par la liaison des points obtenus à partir des tables de données.

+3e_{gr}: Stratégie « graphique »

Grâce à la quasi périodicité du phénomène, on peut construire le graphique des 10 et 11 mai comme celui du 9 mai. Il suffit de faire la translation du graphique de ce jour pour avoir une sinusoïde.

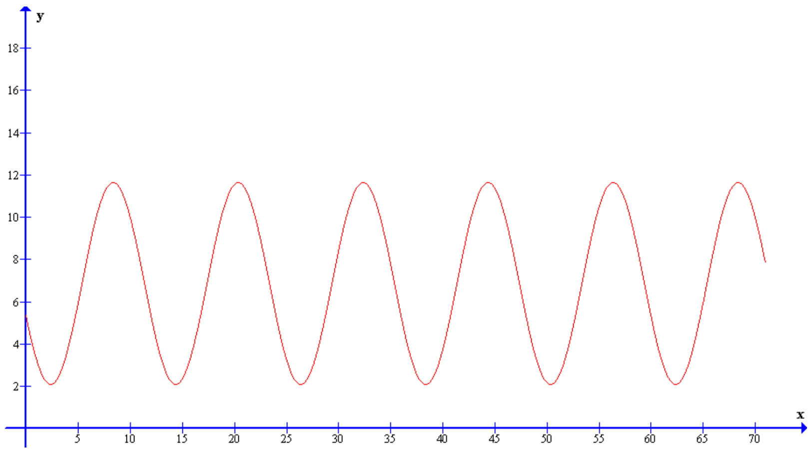


Figure 6. Graphique représentant la hauteur d'eau durant trois jours

Grâce à la propriété de périodicité de la marée, on peut utiliser la figure du 9 mai (ou une figure générale d'un jour quelconque) pour apprécier les hauteurs d'eau durant la totalité des trois jours. Par exemple, voici le graphique de la hauteur d'eau du 9 mai.

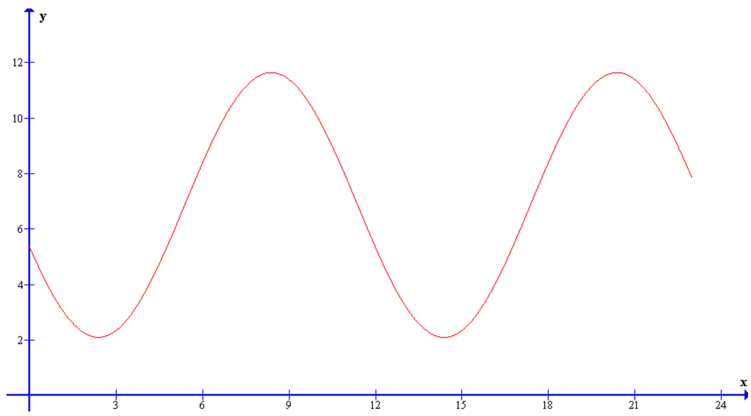


Figure 7. Graphique représentant la hauteur d'eau du 9 mai

+3e_{al} : Stratégie « formule algébrique »

A partir des tables de données, notons que la hauteur d'eau est un phénomène assimilable sur chaque tranche d'environ 12 heures, à une loi périodique sinusoïdale, c'est-à-dire régie par une fonction de la forme : $h = a \sin(\omega t + \varphi) + b$.

En supposant l'unicité de la solution, voici une suite de calcul qui aboutit à la formule.

Le minimum est –a + b = 2,10 (sin (ωt+φ) = -1). Le maximum est a + b = 11,64 (sin (ωt+φ) = 1). A partir de là, on obtient que a = 4,77 ; b = 6,87.

Les hauteurs d'eau coïncident au plus bas (environs 2,10m) à 3h et 15h, donc la période T ≈ 15 – 3 = 12. On a $\frac{2\pi}{\omega} \approx 12$. Donc $\omega \approx \frac{\pi}{6}$.

Remarquons que l'on passe de la courbe (C) : t ↦ a sin ωt + b à la courbe (C') : t ↦ a sin (ωt+φ) + b par la translation de vecteur v($-\frac{\varphi}{\omega}$, 0).

Avec t = 1 et φ = 0, a sin ωt + b vaut 9,255. Par interpolation linéaire (proportionnalité), on calcule l'instant t où l'on retrouve cette même valeur expérimentalement : c'est entre 6h et 7h. Ce qui nous fournit t : t ≈ 6,38. On a donc : $-\frac{\varphi}{\omega} \approx 6,38 - 1$. Ainsi, φ ≈ -2,82. La hauteur d'eau est donc mesurée par h ≈ 4,77 sin ($\frac{\pi t}{6}$ - 2,82) + 6,87

Le graphique de cette fonction est le suivant :

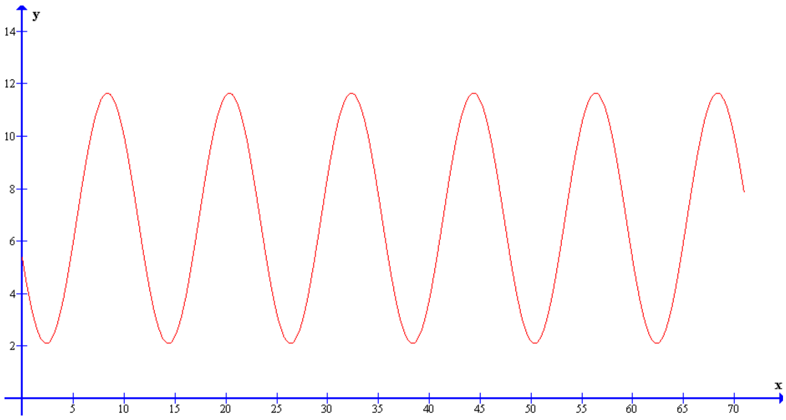


Figure 8. Graphique construit à partir de la formule algébrique

Nous prévoyons que cette stratégie n'apparaîtra pas chez l'élève car le calcul algébrique est lourd et qu'une telle démarche n'existe dans institution que pour les fonctions polynomiales du premier et du second degré. En fait, il n'y pas de solution unique car il s'agit de la recherche d'une fonction d'une certaine classe approchant au mieux un ensemble de points. Une méthode pourrait être c'est celle de l'ajustement par les moindres carrés.

- **Exercice 4**

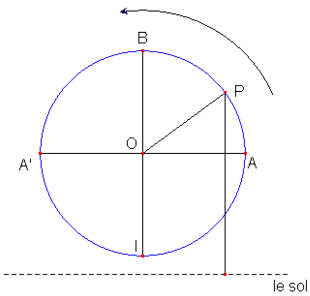
Il s'agit du mouvement de la grande roue qui est circulaire uniforme (modèle C) comme le mouvement de la noria dans l'exercice 2. Les deux raisons pour ce choix sont les suivantes.

- C'est un mouvement simple qui peut modéliser les grandeurs variables par une fonction sinusoïdale. Cette classe de fonction est la plus utilisée en physique au lycée au Viêt Nam ;
- Quelles influences l'exercice 2, où l'articulation entre les deux modèle C et O est nécessaire, a-t-il sur la modélisation de phénomène dans cet exercice ? Quel modèle l'élève va-t-il utiliser ? Est-il capable de construire et d'articuler ces deux modèles ?

Par ailleurs, ici le phénomène est présenté en langue naturelle. Aucun registre de la fonction n'est donné. Pourtant, la photo de la grande roue est associée à la présence du modèle C. La période (T = 10 minutes) est donnée avec son sens en physique : c'est le temps pour que l'objet fasse un tour complet. La grande roue fait 3 tours dans 30 minutes donc chaque tour dure 10 minutes. Comme nous l'avons abordé dans le choix du questionnaire, cet exercice ne privilégie aucun des deux modèles C et O.

Les deux modèles mathématiques (modèle C et modèle O) du phénomène peuvent être utilisés pour résoudre ce problème.

Modèle C :



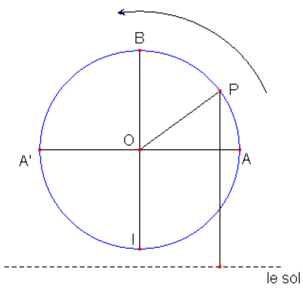
Modèle O : $h = A \cos(\omega t+\varphi) + B$ où h est la hauteur d'une cabine au sol, A le rayon de la grande roue, B la distance du centre de la grande roue au sol, ω la vitesse angulaire et φ la phase initiale.

- La question a) demande d'utiliser la notion de période du phénomène - le temps pour le mouvement d'un tour de la grande roue. A partir de l'énoncé, on a :

30 minutes $\longrightarrow$ 3 tours
10 minutes $\longrightarrow$ 1 tour = 2π
1 minute $\longrightarrow$ 1/ 10 tour = $\pi / 5$

Voici les stratégies possibles pour la question a).

+4a$_C$: stratégie liée au modèle C



Quand t = 0, la cabine P est à la position la plus basse I. Minh est donc à la position la plus haute quand $P \equiv B$. C'est-à-dire il faut faire un demi tour, donc t = 5 minutes.
Si la répétition, ou plus concrètement la périodicité est prise en compte, on a trois instants qui diffèrent de 10 minutes où la cabine P est à la position la plus haute, t = 5 minutes, t = 15 minutes et t = 25 minutes.

+4a$_O$: stratégie liée au modèle O

La hauteur h de la cabine P en fonction du temps t satisfait la formule suivante.

$$h - 22 = A \cos(\omega t+\varphi)$$

$$A = \frac{40}{2} = 20$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$$

$$h = 22 + 20 \cos\left(\frac{\pi t}{5} + \varphi\right)$$

Au temps t = 0, on a h = 2 m donc cos φ = -1. Ainsi φ = π.

On a donc h = $22 + 20 \cos\left(\frac{\pi t}{5} + \pi\right) = 22 - 20 \cos \frac{\pi t}{5}$

Minh est à la position la plus haute quand h prend la valeur maximale, donc cos $\frac{\pi t}{5}$ = -1

$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{5} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow t = 5 + 10k, k \in Z$

Minh fait trois tours donc t = 5 minutes (k = 0), t = 15 minutes (k = 1) et t = 25 minutes (k = 2).
Pour répondre à la question a), on voit que la stratégie liée au modèle C est plus efficace. La stratégie liée au modèle O est très coûteuse avec la construction de la formule représentant la hauteur de la cabine. La concurrence entre deux modèles est très claire et le choix est laissé à l'élève.

- La question b) demande d'établir une table de valeurs. Les nombres t ont été choisis dans le but suivant :
Les instants t = 2,5 minutes, t = 5 minutes et t = 7 minutes appartiennent au premier tour du voyage. Cela permet à l'élève de construire la forme du graphique représentant la hauteur de la cabine P sur les 10 premières minutes (un tour complet) en reliant les points trouvés selon la règle de contrat didactique abordée précédemment.

Nous avons choisi 4 points pour que l'élève puisse construire le graphique sous les formes ci-dessous.

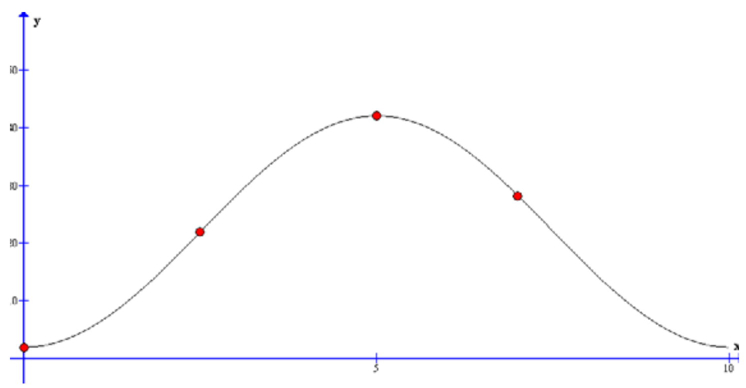


Figure 9. Graphique représentant la hauteur de la cabine P en fonction du temps (première forme)

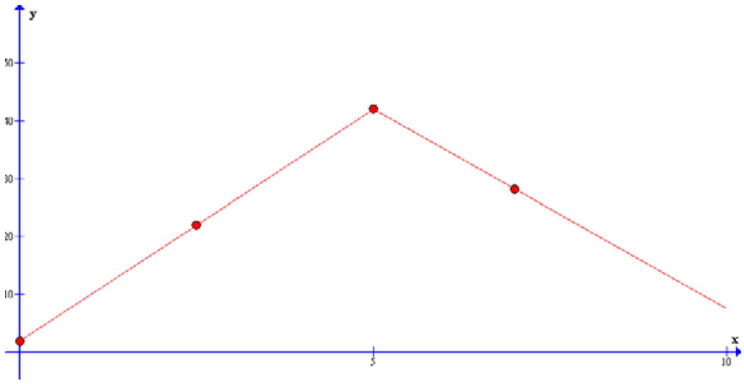


Figure 10. Graphique représentant la hauteur de la cabine P en fonction du temps (deuxième forme)

La première forme est la plus proche de la forme exacte du graphique représentant la hauteur de la cabine P. A partir de ces formes, l'élève peut construire le graphique sur les trois périodes en utilisant la propriété périodique du phénomène.

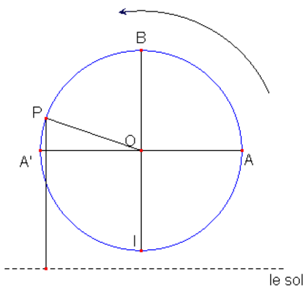
D'autre part, les deux instants t = 12 minutes et t = 22 minutes appartiennent successivement au deuxième et au troisième tour. Les hauteurs de la cabine P à ces instants sont égales. Si l'élève s'intéresse à la période, il ne calcule que la hauteur à un instant. De plus, l'égalité de la hauteur à ces deux instants montre aussi la répétition du phénomène. Ceci favorise l'utilisation de la périodicité dans les questions suivantes.

Voici les stratégies possibles pour la question b).

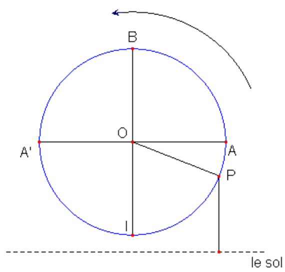
$+4b_C$: Stratégie liée au modèle C

Après 2,5 minutes du voyage, il fait un quart de tour, P $\equiv$ A, donc h = 22 m

Après 7 minutes, IOP = $7\pi / 5$ donc A'OP = $3\pi / 2 - 7\pi / 5 = \pi /10$, donc h = $22 + 20 \sin \pi / 10 \approx$ 28,18 m



Après 12 minutes, IOP = $2\pi /5$, donc POA = $\pi / 2 - 2\pi/5 = \pi /10$, donc h = $22 - 20 \sin \pi / 10 \approx$ 15,82 m



Après 22 minutes, h $\approx$ 15,82 m

$+4b_O$: Stratégie liée au modèle O

Comme le travail en question a), on a donc h = $22 + 20\cos(\frac{\pi t}{5} + \pi) = 22 - 20\cos\frac{\pi t}{5}$

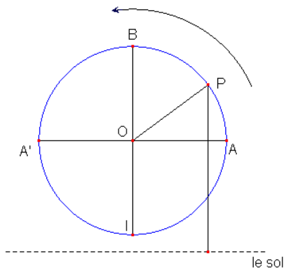
A partir de là, on peut calculer la hauteur de la cabine P aux temps demandés en remplaçant les valeurs de t dans la formule trouvée :

t = 2,5 minutes, h = 22 – 20 cos π /2 = 22 m
t = 7 minutes, h ≈ 28,18 m
t = 12 minutes, h ≈ 15, 82 m
t = 22 minutes, h ≈ 15, 82 m

+4b$_{CO}$: Stratégie liée aux deux modèles C et O

4b$_{COal}$: modèle C → modèle O (formule algébrique)

1 minute ⟶ 1 / 10 tour = π / 5
t minutes ⟶ πt / 5



h = 22 + 20 sin (π / 2 + πt / 5) = 22 – 20 cos πt / 5

Donc à partir de la formule représentant la hauteur h en fonction de t : h = 22 – 20 cos πt / 5, on peut calculer la hauteur de la cabine P aux temps demandés comme la stratégie précédente.

4b$_{COgr}$: modèle C → modèle O (graphique sinusoïdal)

En s'appuyant sur le modèle C, calculer les hauteurs de la cabine aux instants particuliers (position A, A', B, B'). Ensuite, le graphique représentant la hauteur peut être construit en reliant les points trouvés. Grâce à la périodicité, on a le graphique sur trois périodes. A partir de là, on trouve les hauteurs correspondant aux temps demandés.

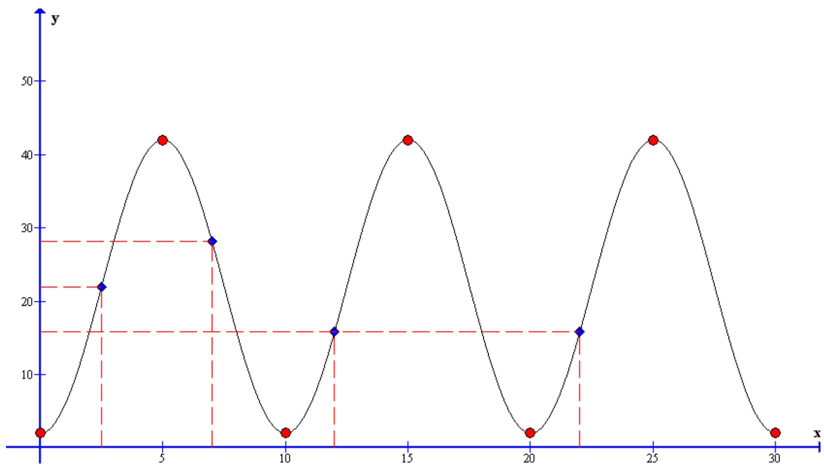


Figure 11. Graphique sur trois périodes

Cette stratégie permet d'articuler les deux modèles C et O. Plus concrètement, c'est la transformation du modèle C en modèle O (fonction sinusoïdale, graphique sinusoïdal).

+4b$_d$: Autres stratégies (qui n'utilise ni le modèle C ni le modèle O)

Dans cette stratégie, la relation entre les grandeurs variables du phénomène est représentée par des fonctions linéaires (explicitement ou implicitement). Plus concrètement, la hauteur h est une fonction linéaire du temps t (h = k.t), c'est-à-dire le mouvement de la cabine est considéré comme rectiligne uniforme, par exemple dans la réponse suivante :

5 minutes $\longrightarrow$ 40 m
1 minute $\longrightarrow$ 8 m
Après 2,5 minutes, h = 2,5.8 + 2 = 22 m
Après 7 minutes, h = 40 – 2.8 + 2 = 26 m
Après 12 minutes, h = 2.8 + 2 = 18 m
Après 22 minutes, h = 18 m.

Ou ceci est une autre réponse.
2,5 minutes $\longrightarrow$ 22 m
7 minutes $\longrightarrow$ a

$$a = \frac{22.7}{2,5} = 61,6 \text{ m}$$

2,5 minutes $\longrightarrow$ 22 m
12 minutes $\longrightarrow$ b

$$b = \frac{22.12}{2,5} = 105,6 \text{ m}$$

2,5 minutes $\longrightarrow$ 22 m
22 minutes $\longrightarrow$ c

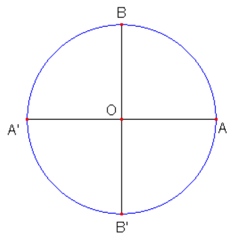
$$c = \frac{22.22}{2,5} = 193,6 \text{ m}$$

Ce dernier ne prend pas en compte la réalité (les données dans l'énoncé comme le rayon de la grande roue, la distance de la position la plus basse au sol et la période du mouvement). Donc, la hauteur h trouvée est supérieure à 42 m (la hauteur maximale des cabines) et les hauteurs au temps t = 12 minutes et t = 22 minutes ne sont pas égales.

Outre les buts précisés ci-dessus relatifs au choix des nombres t, la position de la cabine P sur le cercle correspondant à l'instant t demandé est aussi une variable didactique avec les valeurs possibles suivantes :

+ à l'instant t demandé, la cabine P est à la position particulier sur le cercle
+ à l'instant t demandé, la cabine P n'est pas à la position particulière sur le cercle

Les positions particulières sur le cercle sont celles qui correspondent aux points A, A', B et B' du cercle trigonométrique.



En effet, si à l'instant t choisi, la cabine P est en position A, A', B, B' dans la figure ci-dessus, sa hauteur est facile à calculer. Donc, la stratégie liée au modèle C va être optimale. Par contre, avec la position de la cabine P non-particulière sur le cercle, les autres stratégies peuvent avoir plus de chance d'apparaître. Notamment, cela favorise la stratégie $4b_O$ liée au modèle O pour les raisons suivantes :

+ Dans l'institution d'enseignement vietnamienne, c'est le registre algébrique de la fonction qui est le plus souvent présent. On calcule souvent la valeur de la fonction f au point x en remplaçant x dans la formule algébrique représentant cette fonction.

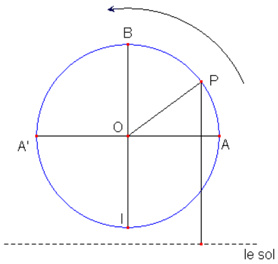
+ Au début de la classe 12, les élèves ont vu qu'une oscillation harmonique est représentée par une fonction de la forme $x = A \cos (\omega t+\varphi)$.

+ De plus, dans l'exercice 2 précédent, il y a à la fois le modèle C et la formule de la forme $h = A \sin (\omega t+\varphi) + B$ qui représente la relation entre les grandeurs variables du phénomène.

- La question c) a le même but que les questions 1f) et 3e) des exercices précédents. Cependant, outre une sinusoïde (modèle O), un cercle (modèle C) est aussi une réponse attendue dans cette question.

+ $4c_C$: Stratégie liée au modèle C

Pour apprécier les hauteurs de la cabine, on peut utiliser le modèle C. C'est-à-dire on peut construire un cercle représentant la grande roue et une droite représentant le sol.



Avec chaque position du point P (la cabine de Minh), on peut trouver la hauteur h correspondante (la distance du point P à la droite représentant le sol) en projetant le point P sur cette droite.

+ $4c_O$: Stratégie liée au modèle O

$4c_{Otb}$: Stratégie « table de données»

L'élève trouve quelques points sur chaque période et les relie pour avoir une courbe. Les points peuvent être trouvés par les stratégies abordées en question b). En particulier, il peut calculer seulement les valeurs maximales et minimales de la hauteur et les relier par les segments ou les courbes.

$4c_{Ogr}$: Stratégie « graphique »

En reliant les points trouvés en question b), on a un graphique sur une période (0 ; 10). Si l'élève s'intéresse à la périodicité de la hauteur, il peut construire tout le graphique sur l'intervalle (10 ; 30) par la translation du graphique trouvé selon les vecteurs $10\vec{i}$ et $20\vec{i}$.

$4c_{Oal}$: Stratégie « algébrique »

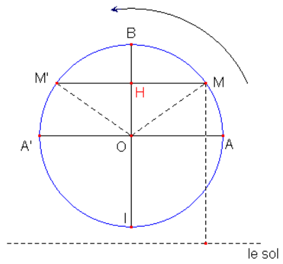
Avec la formule algébrique représentant la hauteur h en fonction du temps t : $h = 22 - 20 \cos \pi t / 5$, le graphique est construit sur une période et complété par la translation.

Selon cette stratégie, il faut étudier une fonction trigonométrique. Ceci n'est pas très abordé dans les manuels vietnamiens. Donc, nous prévoyons que cette stratégie a moins de chance d'apparaître. Les stratégies $4c_C$, $4c_{Otb}$, $4c_{Ogr}$ vont donc être les stratégies les plus fréquentes.

- La demande en question 4d) est l'inverse de celle en question 4b). Ici l'intervalle de la hauteur est donné pour trouver les temps correspondants. Cette question empêche la stratégie liée au modèle O et favorise celle liée au modèle C, comme nous allons le montrer ci-après.

+ $4d_C$: Stratégie liée au modèle C

Utiliser le cercle pour trouver les angles et les temps correspondants.



OH = 13 m, donc cos $\widehat{MOH}$ = 13 / 20 = 0,65

$\widehat{MOH} \approx 49{,}46^o$

$\widehat{MOI} \approx 180^o - 49{,}46^o \approx 130{,}54^o \approx 0{,}73\pi$

1 minute $\longrightarrow$ 1 / 10 tour = π / 5

? $\longrightarrow$ 0,73π

t_M = 3,65 minutes

$\widehat{M'OI} \approx 180^o + 49{,}46^o \approx 229{,}46^o \approx 1{,}27\pi$

1 minute $\longrightarrow$ 1 / 10 tour = π / 5

? $\longrightarrow$ 1,27π

$t_{M'}$ = 6,35 minutes

Donc dans le premier tour, Minh peut voir la rivière pendant 6,35 - 3,65 ≈ 2,7 minutes.

Il fait 3 tours donc il peut voir la rivière pendant 2,7 x 3 ≈ 8,1 minutes.

Avec des connaissances dans le domaine de la physique, on peut avoir la réponse la plus simple. En effet, en classe 10, dans le cours sur le mouvement circulaire uniforme, la notion de pulsation a été définie :

> Le quotient de l'angle Δφ et le temps Δt est appelé pulsation.
> ω = Δφ / Δt (Manuel Physique de classe 10, ensemble élémentaire, p. 39)

Ici, OH = 13 m, donc cos $\widehat{MOH}$ = 13/ 20 = 0,65.

$\widehat{MOH} \approx 0{,}86$ (rad)

$\widehat{MOM'}$ = 1,72 (rad)

$\Delta t = \Delta\varphi / \omega = 1{,}72.\dfrac{5}{\pi} = 2{,}7$ (minutes)

ΔT = 2,7 x 3 = 8,1 minutes.

+ $4d_O$: Stratégie liée au modèle O

$4d_{Oal}$: Stratégie « algébrique »

Résoudre l'inéquation 22 – 20 cos πt / 5 ≥ 35

$\Leftrightarrow \cos \pi t / 5 \leq -0{,}65$
$\Leftrightarrow 0{,}73\pi + k2\pi \leq \pi t / 5 \leq 1{,}27\pi + k2\pi$
$\Leftrightarrow 0{,}73 + k \leq t / 5 \leq 1{,}27 + k$
$\Leftrightarrow 3{,}65 \leq t \leq 6{,}35 \ (k = 0)$

Donc dans le premier tour, Minh peut voir la rivière pendant 6,35 - 3,65 $\approx$ 2,7 minutes.
Il fait 3 tours donc il peut voir la rivière pendant 2,7 x 3 $\approx$ 8,1 minutes.

Cependant, l'inéquation trigonométrique n'est pas un objet d'enseignement dans le programme actuel. Elle est présentée seulement dans la partie complémentaire des manuels. Donc, la stratégie algébrique liée au modèle O qui conduit à résoudre une inéquation va poser des difficultés aux élèves et avoir moins de chance d'apparaître.

$4d_{Ogr}$: Stratégie « graphique »

Cette stratégie se base sur le graphique construit en question c). En construisant la droite y = 35, les temps demandés correspondent aux valeurs sur l'axe des abscisses pour que le graphique représentant la hauteur de la cabine P soit plus haut que cette droite.

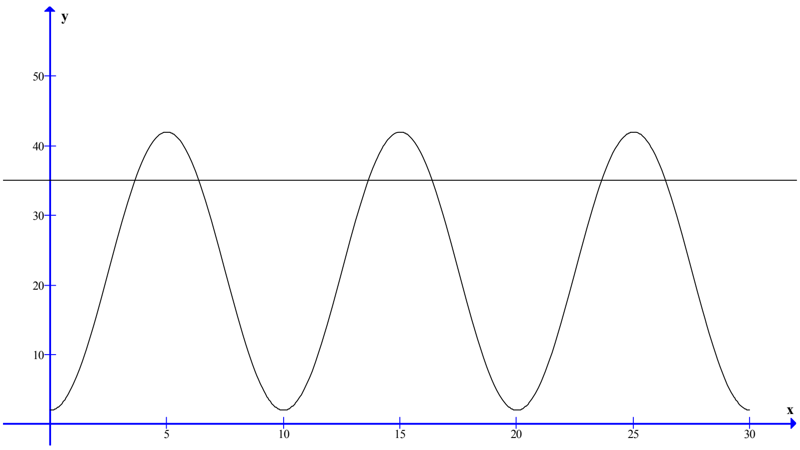


Figure 12. Stratégie graphique

Cependant, la résolution d'une équation ou d'une inéquation en s'appuyant sur le graphique est très peu abordée au Viêt Nam. Donc nous prévoyons que cette stratégie sera absente ou apparaîtra très peu chez les élèves.

+ $4d_d$: Autres stratégies

Comme dans la question 4b), si le mouvement de la grande roue est considéré comme rectiligne uniforme, la hauteur d'une cabine est une fonction linéaire en fonction du temps. Par exemple, ceci conduit aux réponses suivantes :

5 minutes $\longrightarrow$ 40 m
1 minute $\longrightarrow$ 8 m
x $\longrightarrow$ 7 m

$x = \frac{7}{8} = 0{,}875$ (minutes)

Dans un tour, Minh peut voir la rivière pendant 2 x 0,875 = 1,75 minutes
Donc, dans 3 tours, Minh peut voir la rivière pendant 3 x 1,75 = 5,25 minutes

Voici une autre réponse :

5 minutes $\longrightarrow$ 42 m

x $\longrightarrow$ 35 m

$x = \dfrac{35.5}{42} = 4{,}2$ (minutes)

Donc, dans 3 tours, Minh peut voir la rivière pendant 3 x 4,2 = 12,6 minutes

En résumé, en question 4d), il y a aussi une concurrence entre les deux modèles C et O. Le choix d'un modèle est laissé à l'élève. Pourtant l'utilisation du modèle O va rencontrer des difficultés relatives à la résolution d'une inéquation. Dans ce cas, l'utilisation du modèle C est une stratégie optimale.

V. Analyse a posteriori des résultats obtenus

V.1. Conditions de l'expérimentation

Ce questionnaire a été proposé à 200 élèves en classe 12 de deux lycées à Ho Chi Minh ville (2 classes du lycée Nguyen Chi Thanh et 3 du lycée Trung Hoc Thuc Hanh). Les élèves utilisent les manuels avancés en mathématiques et en physique. L'expérimentation a été effectuée dès que les élèves ont eu terminé le *chapitre 2 : Oscillations mécaniques* en physique où les oscillations harmoniques sont étudiées.

Les élèves travaillent individuellement sur les feuilles distribuées. Pour diminuer trop de convergence des efforts sur quelques questions, nous avons divisé les quatre exercices en deux fiches et limité le temps pour chaque fiche.

Fiche 1, comprenant les exercices 1 et 2, durée limitée à 35 minutes.

Fiche 2, comprenant les exercices 3 et 4, durée limitée à 55 minutes.

V.2. Analyse des résultats obtenus

V.2.1. Présentation synthétique des résultats

Question	Stratégie / Réponse	Nombres d’élèves	Question	Stratégie / Réponse	Nombres d’élèves
1a	O	94 (47%)	1d	gl	98 (49%)
	p	37 (18,5%)		lc	36 (18%)
	r	7 (3,5%)		Autres réponses	46 (23%)
	d	51 (25,5%)		Pas de réponse	20 (10%)
	Pas de réponse	11 (5,5%)	1e	gl	59 (29,2%)
1b	gl	111 (55,5%)		Autres réponses	110 (55%)
	lc	83 (41,5%)		Pas de réponse	31 (15,5%)
	Pas de réponse	6 (3%)	1f	gl	91 (45%)
1c	gl	115 (57,5%)		lc	17 (9%)
	lc	77 (38,5%)		Pas de réponse	92 (46%)
	Pas de réponse	8 (4%)			

Tableau 18. Les réponses à l’exercice 1

Question	Stratégie / Réponse	Nombres d’élèves
2a	C	85 (42,5%)
	O	48 (24%)
	d	32 (16%)
	p	16 (8%)
	Pas de réponse	9 (4,5%)
2b	CO	71 (35,5%)
	O	57 (28,5%)
	Pas de réponse	72 (36%)
2c	CO	72 (36%)
	Autre réponses	8 (4%)
	Pas de réponse	120 (60%)

Tableau 19. Les réponses à l’exercice 2

<table>
<tr><th>Question</th><th>Stratégie / Réponse</th><th>Nombres d’élèves</th><th>Question</th><th>Stratégie / Réponse</th><th>Nombres d’élèves</th></tr>
<tr><td rowspan="6">3a</td><td>d</td><td>92 (46%)</td><td rowspan="6">3d</td><td>tb2</td><td>86 (43%)</td></tr>
<tr><td>p</td><td>39 (19,5%)</td><td>tb3</td><td>20 (10%)</td></tr>
<tr><td>r</td><td>20 (10%)</td><td>tb1</td><td>18 (9%)</td></tr>
<tr><td>O</td><td>18 (9%)</td><td>gr</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Pas de réponse</td><td rowspan="2">31 (15,5%)</td><td>Autres réponses</td><td>11 (5,5%)</td></tr>
<tr><td>Pas de réponse</td><td>64 (32%)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3b</td><td>tb</td><td>106 (53%)</td><td rowspan="7">3e</td><td>tb</td><td>49 (24,5%)</td></tr>
<tr><td>Autres réponses</td><td>67 (33,5%)</td><td>gr</td><td>1 (0,5%)</td></tr>
<tr><td>Pas de réponse</td><td>27 (13,5%)</td><td>al</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3c</td><td>tb</td><td>17 (8,5%)</td><td rowspan="2">Autres réponses</td><td rowspan="2">6 (3%)</td></tr>
<tr><td>gr</td><td>0 (0%)</td></tr>
<tr><td>Autre réponses</td><td>134 (67%)</td><td rowspan="2">Pas de réponse</td><td rowspan="2">144 (72%)</td></tr>
<tr><td>Pas de réponse</td><td>49 (24,5%)</td></tr>
</table>

Tableau 20. Les réponses à l’exercice 3

<table>
<tr><th>Question</th><th>Stratégie / Réponse</th><th>Nombres d’élèves</th><th>Question</th><th>Stratégie / Réponse</th><th>Nombres d’élèves</th></tr>
<tr><td rowspan="4">4a</td><td>C</td><td>159 (79,9%)</td><td rowspan="4">4c</td><td>O</td><td>4 (2%)</td></tr>
<tr><td>O</td><td>12 (6%)</td><td>C</td><td>46 (21,5%)</td></tr>
<tr><td>Autres réponses</td><td>9 (4,5%)</td><td rowspan="2">Pas de réponse</td><td rowspan="2">150 (75%)</td></tr>
<tr><td>Pas de réponse</td><td>20 (10%)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">4b</td><td>C</td><td>45 (22,5%)</td><td rowspan="5">4d</td><td>C</td><td>23 (11,5%)</td></tr>
<tr><td>O</td><td>42 (21%)</td><td>O</td><td>9 (4,5%)</td></tr>
<tr><td>CO</td><td>0</td><td>d</td><td>30 (15%)</td></tr>
<tr><td>d</td><td>72 (34,5%)</td><td rowspan="2">Pas de réponse</td><td rowspan="2">138 (65,5%)</td></tr>
<tr><td>Pas de réponse</td><td>41 (18,5%)</td></tr>
</table>

Tableau 21. Les réponses à l’exercice 4

V.2.2. Analyse détaillée des productions des élèves

V.2.2.1. Les différents sens de la périodicité

La première question de chacun des trois premiers exercices (que nous qualifions de question ouverte) fournissait l'occasion aux élèves d'exprimer la signification qu'ils donnent à la périodicité, au cas où ils reconnaîtraient la présence d'un phénomène périodique. Voici un tableau qui synthétise les différentes réponses :

<table>
<tr><th>Reconnaissances de la périodicité</th><th>Caractérisation de la périodicité</th><th colspan="2">Exercice 1</th><th colspan="2">Exercice 2</th><th colspan="2">Exercice 3</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Oui</td><td>Répétition régulière</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">20</td></tr>
<tr><td>C'est périodique</td><td colspan="2">37</td><td colspan="2">16</td><td colspan="2">39</td></tr>
<tr><td>Oscillation harmonique (O)</td><td>94</td><td rowspan="2">94</td><td>48</td><td rowspan="2">133</td><td>18</td><td rowspan="2">18</td></tr>
<tr><td>Mouvement circulaire uniforme (C)</td><td>0</td><td>85</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Total</td><td colspan="2">138</td><td colspan="2">149</td><td colspan="2">77</td></tr>
<tr><td>Non</td><td></td><td colspan="2">51</td><td colspan="2">42</td><td colspan="2">92</td></tr>
<tr><td>Pas de réponse</td><td></td><td colspan="2">11</td><td colspan="2">9</td><td colspan="2">31</td></tr>
<tr><td>Total</td><td></td><td colspan="2">200</td><td colspan="2">200</td><td colspan="2">200</td></tr>
</table>

Tableau 22. Les réponses à la question ouverte

On voit que la périodicité est caractérisée de quatre façons différentes : la répétition régulière, le terme « périodique », l'oscillation harmonique ou le mouvement circulaire uniforme. Alors que le modèle O est le seul à apparaître dans les réponses aux questions 1a et 3a, les deux modèles C et O sont présents dans les réponses à 2a. Ceci semble montrer que les élèves sont capables d'associer les modèles C et O, et même de passer d'un modèle à l'autre.

Dès lors que le phénomène n'est pas qualifié de périodique dans l'énoncé, beaucoup d'élèves rechignent à « voir » de la périodicité, se cantonnant à une vision locale du phénomène où les irrégularités prennent le dessus sur la régularité qu'apporterait une vision globale. En particulier, 6 élèves en question 1a et 27 en 3a parlent de l'irrégularité du phénomène comme par exemple :

> H42 (en 1a) : Dans les 2 secondes de sommeil profond, l'activité du cerveau est irrégulière, concrètement elle augmente et diminue de façon erratique.
>
> H120 (en 3a) : Le niveau d'eau monte et descend irrégulièrement.

Le regard local existe dans les réponses aux trois questions ouvertes, notamment pour 3a. Outre les 31 élèves qui ne donnent pas de réponses, 92 ne reconnaissent pas la périodicité. Ils décrivent simplement un phénomène qui change selon le temps. De plus, nous trouvons une forte différence entre les nombres d'élèves qui reconnaissent la périodicité en Q1a (138 élèves), Q2a (149) et en Q3a (77).

De la même façon, la référence aux modèles C et O est très forte dans les exercices 1 et 2 mais très minoritaire dans l'exercice 3. Ceci peut s'expliquer par l'absence simultanée de graphique et de formule pour la fonction sous-jacente (choix de la valeur de la variable V3 : *registre* *numérique de la fonction*) et par le fait que ce registre est peu usité dans l'institution vietnamienne.

V.2.2.1. Quelle articulation entre les phénomènes et les modèles mathématiques ?

Dans les exercices 1 et 2, un modèle mathématique est implicitement suggéré par l'énoncé, ce qui n'est pas le cas de l'exercice 3. Les résultats d'expérimentation montrent que l'exploitation des informations sur le phénomène réel à partir du modèle mathématique associé pose problème à de nombreux élèves.

En effet, 56 élèves (soit 28%) en 1a, 51 (soit 25,5%) en 2a et 95 (soit 42,5%) en 3a ne donnent pas de réponse ou décrivent simplement le phénomène.

Regardons les réponses suivantes :

> H59 (en Q1a) : Ce phénomène montre l'activité du cerveau selon le temps en secondes. A partir de celui-ci, nous savons comment le cerveau fonctionne dans le sommeil profond et si cette personne a un bon sommeil. De plus, les docteurs peuvent diagnostiquer quelques maladies sur le sommeil.
>
> H191 (en Q3a) : La marée monte et descend aux différents instants.

Ces réponses montrent que ces élèves ont constaté la variation du phénomène selon le temps. Concrètement, à partir des informations données (dans le registre graphique, algébrique ou numérique), ils peuvent indiquer les variables et la dépendance entre elles. La première variable, le temps, est toujours soulignée. La deuxième n'est pas indiquée concrètement mais est abordée comme le phénomène lui-même (comme l'activité du cerveau, la marée, etc.).

Cependant, ces élèves ne considèrent pas le phénomène globalement : les propriétés caractéristiques des phénomènes comme la répétition régulière, l'uniformité et l'alternance n'apparaissent pas dans leurs réponses. Le lien entre les phénomènes et les modèles n'est pas fait. Dans les parties suivantes, nous proposons des analyses détaillées sur la lecture des informations du phénomène à partir de chaque modèle mathématique.

Etudions plus précisément comment les élèves exploitent les différents registres (graphique, algébrique et numérique) qui interviennent dans les trois exercices.

- L'exploitation du registre graphique

Le graphique est une façon concrète de représenter une fonction. Au Viêt Nam, dans le programme d'avant, une fonction a été toujours représentée par une formule algébrique et l'élève a résolu des problèmes relatifs à la fonction en utilisant cette formule (Nguyen Thi 2003). Cependant, dans le programme actuel, les manuels scolaires mettent en relief l'utilisation du côté concret du graphique. Comme nous l'avons montré dans la partie d'analyse institutionnelle, des activités sur le graphique comme la détermination de la variation, de la parité, etc. d'une fonction et la transformation du graphique sont recommandées. Malgré cela, les résultats des questions 1b et 1c montrent encore des difficultés des élèves dans la lecture du graphique.

En effet, en 1b, bien que la plupart des élèves (97%) puissent déterminer que le problème se ramène à la lecture du graphique, parmi ces derniers 41,5% donnent un résultat différent de la réponse attendue. Les erreurs sont commises dans la lecture des extremums, dans la détermination des intervalles de variation, etc.

Considérons la réponse suivante :

> H19 : L'activité du cerveau augmente sur l'intervalle (0,1 ; 0,5) et diminue sur l'intervalle (0,5 ; 1).

Cette réponse montre des difficultés de lecture de l'axe horizontal et par la même de lecture du graphique. Une fonction est croissante (respectivement décroissante) sur l'intervalle I sur lequel son graphique monte (respectivement descend) de gauche à droite.

D'autre part, les lignes en zigzag dans la figure donnée causent des résultats différents dans la lecture des extremums des intervalles de variation.

> H28 : L'activité du cerveau augmente sur les intervalles (0,1 ; 0,3) et (0,6 ; 0,8). Elle diminue sur les intervalles (0 ; 0,09) et (0,4 ; 0,58).

> H37 : L'activité du cerveau augmente sur les intervalles (0,11 ; 0,29) et (0,59 ; 0,8). Elle diminue sur les intervalles (0 ; 0,11) et (0,29 ; 0,59) et (0,8 ; 1).

Ces réponses montrent aussi l'existence d'un regard local. Les intervalles sont lus avec les points extremums locaux. Ce sont les pics du graphique. Ce regard entrave la représentation du phénomène par une sinusoïde. Ceci est présenté clairement dans la réponse de H60 :

> H60 (en Q1a) : À partir de l'encéphalogramme, on trouve que le cerveau fonctionne dans le sommeil mais cette activité n'est pas régulière. Elle fonctionne lentement aux intervalles des lignes où les zigzags sont rares. Elle fonctionne rapidement et fortement aux intervalles où les zigzags sont nombreux. Donc dans le sommeil, l'activité du cerveau change irrégulièrement aux intervalles « petits » mais quand on considère les intervalles « grands », en général, l'activité du cerveau est régulière selon un circuit déterminé.

Le regard local lié au phénomène est tout particulièrement mis en relief en question 1c qui demande de trouver des moments où l'activité du cerveau est la plus forte ou la plus faible. 38,5% des élèves considèrent que les pics les plus hauts correspondent à l'activité la plus forte, de même pour les pics les plus bas.

> H31 : L'activité du cerveau est la plus forte à l'instant 0,3 s près et la plus faible à l'instant 0,12 s.

> H97 : L'activité du cerveau est la plus forte aux instants 0,28 s et 0,8 s. Elle est la plus faible aux instants 0,12 s et 0,58 s.

Pour ces élèves, le modèle mathématique O n'est pas mis en œuvre bien que le schéma numérique donné soit très proche d'une sinusoïde. Donc le modèle O n'est pas reconnu et suffisamment exploité. On peut se demander si le processus de modélisation mathématique du phénomène étudié n'est pas gêné par la force du regard local.

- L'exploitation du registre algébrique

Comme nous l'avons analysé dans la partie précédente, dans les réponses à la question 2a, il semble que la présence de la formule de la fonction représentant la hauteur dans l'énoncé n'ait pas été prise en compte par les élèves. En effet, la formule donnée h = $2 + 2{,}5 \sin \left[2\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right]$ montre implicitement que le mouvement de la noria est considéré comme uniforme. Cependant, on ne peut pas conclure que les élèves qui parlent de mouvement circulaire uniforme ou d'oscillation harmonique du phénomène dans leurs réponses ont utilisé ce modèle mathématique. En effet, les explications de plusieurs élèves montrent que la formule donnée n'est pas prise en compte.

Par exemple, voici la réponse de H28 :

> H28 : Le mouvement de la noria est circulaire. Il est uniforme ou non ça dépend de la vitesse du courant d'eau à chaque instant.

Donc cette réponse ne s'appuie que sur la déduction réelle de l'élève. L'image de la noria montre quelque chose de tournant qui correspond au mouvement circulaire en physique. La formule h = $2 + 2{,}5 \sin\left[2\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right]$ n'intervient pas du tout ici.

En question 2b, 72 élèves (soit 36%) ne peuvent pas répondre et 29 (soit 14,5%) ne réussissent pas. Leurs explications montrent qu'ils ne savent pas comment utiliser des données de l'énoncé pour répondre aux questions 2b et 2c.

Avec la fonction donnée h = $2 + 2{,}5 \sin\left[2\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right]$, 57 élèves (soit 28,5%) utilisent le modèle O. Parmi eux, 47 donnent des réponses et 10 ne réussissent pas. A partir de la formule, l'amplitude A = 2,5 m est plus facile à trouver parce qu'elle est apparue comme un facteur dans la formule représentant une oscillation harmonique en physique. Par contre, la présence de la distance du centre de la noria à la surface de l'eau n'est pas habituelle. Dans toutes les formules algébriques abordées dans l'étude des oscillations harmonique en physique, la distance d n'apparaît pas. C'est pourquoi, parmi 47 élèves ci-dessus, 19 trouvent une distance erronée : d = 2,5 – 2 = 0,5 m. C'est le résultat de l'effectuation d'une opération à partir des nombres donnés dans l'énoncé. La signification des données dans la formule n'est pas exploitée.

La stratégie $2b_{CO}$ liée aux deux modèles C et O est utilisée par 71 élèves (soit 35,5%). Tous donnent la réponse $2b_{CO1}$ tandis que la réponse $2b_{CO2}$ n'apparaît pas. 32 élèves ne terminent pas de calcul ou commettent des erreurs de calcul. Donc l'exploitation des deux modèles et l'articulation entre eux ne sont pas faites. Regardons la réponse suivante de H73 :

> H73 : h_{max} quand $\sin\left[2\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right] = 1$
>
> Donc le rayon de la grande roue = $\dfrac{h_{max}+A}{2} = \dfrac{2+2{,}5}{2} + A = 2{,}25 + A$
>
> La distance du centre de la grande roue à la surface de l'eau = 2,25.

De manière similaire, en question 2c, 120 élèves ne répondent pas, bien que plusieurs aient trouvé que la noria doit tourner de 125 tours. A partir de la formule donnée, ils ne peuvent pas trouver le temps pour que la noria tourne un tour. Il semble que l'articulation entre la notion de période en physique et en mathématiques ne soit pas établie.

En effet, en mathématiques, toutes les fonctions de la forme y = A sin (ωx + φ) + B ont pour la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Cette formule est abordée comme une relation entre la pulsation et la période dans le cours sur l'oscillation harmonique en physique. Là, la période est le temps pour que l'objet fasse un tour complet. Ne comprenant pas bien le lien entre les deux notions de période en mathématique et en physique, beaucoup d'élèves ne peuvent pas terminer leur réponse.

Notons que parmi 72 élèves qui peuvent répondre à cette question, 27 prennent une seconde comme unité de temps (T = 1 seconde et la noria doit tourner pendant 125 secondes) bien que l'unité minute soit donnée dans l'énoncé. C'est aussi une conséquence des connaissances que l'élève vient d'apprendre en physique. En effet, quand on parle de l'oscillation harmonique et les formules relatives, le temps est toujours pris avec la seconde pour unité.

En résumé, comme nous l'avons abordé dans la partie d'analyse institutionnelle, dans les manuels mathématiques, le modèle mathématique, notamment sous sa forme algébrique, est toujours donné tout fait et les élèves ne travaillent que dans le domaine mathématique. La construction du modèle et l'exploitation des informations sur le phénomène à partir de ce modèle ne sont pas questionnées. Donc la signification des données dans ce modèle n'est pas éclairée. Cette conséquence est présente dans les réponses à l'exercice 2. Le registre algébrique de la fonction et la signification des données dans ce registre ne sont pas exploités par de nombreux élèves.

- L'exploitation du registre numérique

Rappelons que seulement 18 élèves ont renvoyé au modèle O dans la question 3a (cf. le tableau 20). En ce qui concerne la question 3b, 106 élèves (soit 53%) donnent la réponse correcte (4 fois). Le reste fournit des résultats erronés (comme 2 fois, 6 fois, 8 fois,…) ou ne peut pas répondre. La lecture des informations sur le phénomène à partir de la table de données est d'autant moins facile pour les élèves qu'ils semblent rencontrer des difficultés dans la compréhension de l'énoncé et notamment celle des concepts de « marée haute » et « marée basse ».

Ceci est renforcé par les résultats de la question 3c. Les résultats des calculs sont très variés parce que les élèves utilisent plusieurs formules différentes pour calculer l'amplitude moyenne. Il n'y a que 17 élèves (soit 8,5 %) qui la calculent selon la définition donnée dans l'énoncé comme H90 :

H90 : L'amplitude moyenne $\overline{A} = \dfrac{(11{,}54-2{,}1)+(11{,}45-2{,}33)}{2} = 9{,}28.$

Le symbole $\overline{A}$ utilisé ici est la conséquence de la notion d'amplitude, notée A, en physique.

Bien que dans l'énoncé, l'amplitude journalière des marées soit définie comme la différence de hauteur entre le niveau de la marée haute et celui de la marée basse suivante, certains élèves utilisent le niveau d'eau le plus haut et le plus bas dans chaque table pour la calculer comme suit :

H180 : L'amplitude du 9 mai = 11,64 – 2,1 = 9,54
L'amplitude du 10 mai = 11,72 – 2,33 = 9,39
L'amplitude moyenne = $\dfrac{9{,}54+9{,}39}{2} = 9{,}465$

De plus, voici les formules les plus utilisées :

1) L'amplitude moyenne = $\dfrac{\sum h_{\max} - \sum h_{\min}}{n}$, n = 2, 3, 4,… Comme on le voit sur les réponses des élèves suivants :

> H94 : $h_{1\max} = 11{,}54$, $h_{1\min} = 2{,}12$
> $h_{2\max} = 11{,}45$, $h_{2\min} = 2{,}03$
> L'amplitude moyenne $h_{tb} = \dfrac{(h_{1\max} + h_{2\max}) - (h_{1\min} + h_{2\min})}{2} = 9{,}41$
> H103 : $A = \dfrac{(11{,}54 - 2{,}1) + (11{,}64 - 2{,}05) + (11{,}45 - 2{,}33)}{3} = 9{,}38$
> H108 : $\overline{A} = \dfrac{(11{,}54 - 2{,}12) + (11{,}64 - 2{,}10) + (11{,}45 - 2{,}05) + (11{,}72 - 2{,}33)}{4} = 9{,}4375$

2) L'amplitude moyenne = $\dfrac{\sum h}{n}$, où n = 24. Comme par exemple la réponse de H63 :

> H163: L'amplitude moyenne du 9 mai = $\dfrac{\sum h}{n} = 7{,}03$
> L'amplitude moyenne du 10 mai = $\dfrac{\sum h}{n} = 6{,}73$

Par ailleurs, d'autres élèves utilisent d'autres formules qui donnent autant de résultats différents.

Outre la non-compréhension par certains élèves des concepts de marée (haute et basse), un grand nombre d'élèves ne reconnaît pas dans la table de données le modèle mathématique sous-jacent O. Ils ne peuvent donc pas l'utiliser pour répondre aux questions sur le phénomène.

V.2.2.2. La périodicité est-elle utilisée comme un outil ?

Comme nous l'avons montré dans la partie « Analyse a priori », la résolution des questions 1d, 1e, 1f, 3d et 3e demandent d'utiliser la périodicité des phénomènes abordés.

Dans l'exercice 1, le graphique représentant l'activité du cerveau illustre concrètement la périodicité du phénomène. C'est pourquoi plusieurs élèves peuvent reconnaître que 0,5 (ou 1) est sa période. En question 1d, 49% des élèves concluent que l'activité du cerveau à l'intervalle (3,5 ; 4) est semblable à celle sur l'intervalle (0 ; 0,5) ou sur (1 ; 1,5),…ou plus généralement sur l'intervalle (0 ; 2). Donc ces élèves ont reconnu la périodicité dans graphique représentant l'activité du cerveau. Cependant, nous constatons que la caractéristique minimale de la période n'est pas prise en compte dans les réponses de nombreux élèves.

18% des élèves donnent une réponse qui s'appuie sur le regard local : ils considèrent que l'activité du cerveau augmente ou diminue selon les lignes en zigzag sur la figure donnée. Regardons la réponse de H5 :

> H5 : Sur l'intervalle (3,5 ; 4), l'activité du cerveau de plus en plus diminue parce qu'à partir de la deuxième seconde, le cerveau de plus en plus diminue l'activité (les lignes sur l'encéphalogramme de plus en plus sont serrées et épaisses).

La plupart des élèves dans le groupe « autres réponses » du tableau 18 concluent que sur l'intervalle (3,5 ; 4), l'activité du cerveau augmente et diminue après. Nous pensons que ces élèves utilisent peut-être aussi la périodicité du phénomène mais commettent des erreurs dans la lecture du graphique. En effet, plusieurs élèves donnent le graphique en 1f qui commence à partir de la valeur la plus petite à l'instant t = 0 comme la figure suivante de H82.

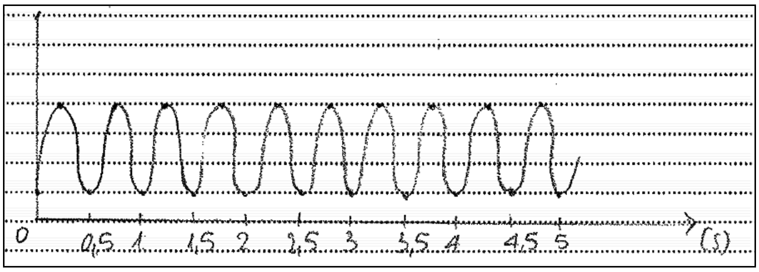


Figure 13. Figure de H82

En question 1e, 59 élèves (soit 28,5%) donnent la réponse attendue. C'est-à-dire qu'ils ont décrit les propriétés exactes de l'activité du cerveau à l'instant t = 2,5 s comme nous l'avons prévu dans la partie d'analyse a priori. Parmi ces élèves, 20 suivent le point de vue algébrique (f(x+T) = f(x)) qui considère que l'activité du cerveau à l'instant t = 2,5 s est la même que celle à l'instant t = 0,5 s ou t = 1,5 s,…Les autres concluent qu'elle est en train de diminuer ou qu'elle est près de la valeur la plus petite. Donc la périodicité du phénomène est bien utilisée par ces élèves pour passer de l'étude des valeurs inconnues à l'étude des valeurs données dans la figure ou pour prolonger le graphique.

Comme pour la question 1d, parmi 110 élèves qui sont regroupés aux autres réponses (cf. tableau 18), la périodicité semble être utilisée dans la réponse de 73 élèves qui concluent que l'activité du cerveau à l'instant t = 2,5 s est la plus faible. C'est la conséquence de l'utilisation d'un graphique ayant la valeur la plus petite à l'instant t = 0 comme celui que nous avons cité précédemment.

Mais 22 élèves se trompent en disant qu'à l'instant t = 2,5 s, l'activité du cerveau est la plus forte. De plus, 9 élèves concluent qu'elle est en train d'augmenter. Ces réponses sont engendrées par un regard local qui considère l'activité du cerveau de plus en plus forte (ou de plus en plus faible) à cause de l'augmentation du nombre de lignes en zigzag. Ce point de vue est représenté nettement dans les figures suivantes en réponse à la question 1f :

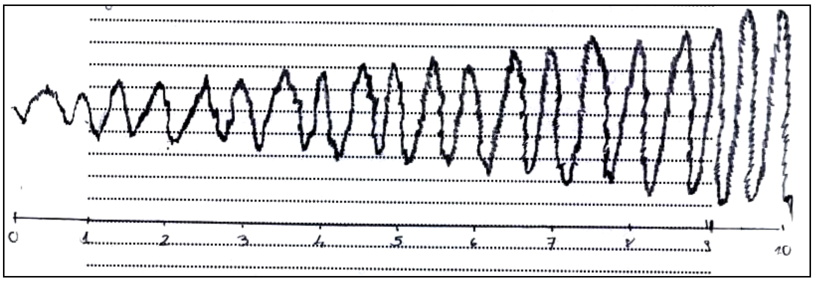


Figure 14. Figure de H194

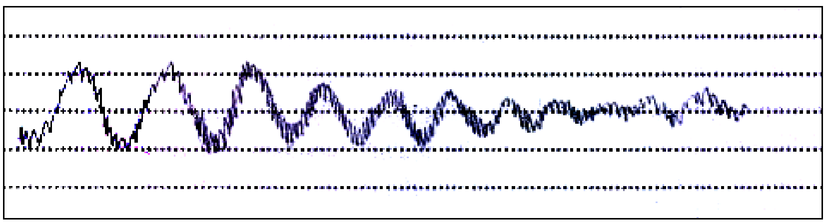


Figure 15. Figure de H67

De plus, 92 élèves (soit 46%) ne donnent pas de réponse dans cette question. Ceci montre qu'il n'est pas évident pour les élèves d'utiliser la périodicité pour prolonger le graphique d'une fonction. En effet, dans l'enseignement secondaire cette activité n'est abordée implicitement que dans l'étude des fonctions trigonométriques.

Parmi 91 élèves qui fournissent un graphique périodique, 46 construisent une sinusoïde conforme au modèle mathématique O et 45 construisent une sinusoïde du même type que le graphique donné. Ces élèves reconnaissent donc bien la répétition du graphique sinusoïdal. Cependant, 21 d'entre eux ont changé la période comme le montre la figure de H3 :

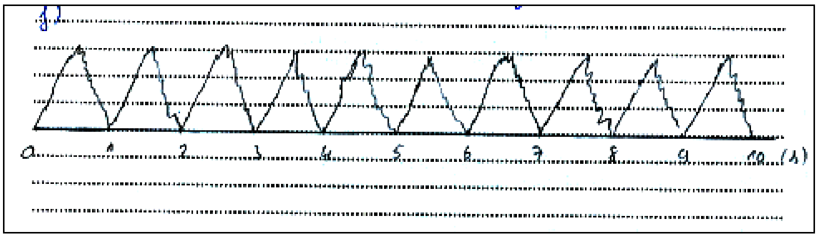


Figure 16. Figure de H3

En ce qui concerne la question 3d, 86 élèves donnent la réponse $3d_{tb2}$ (le bateau peut partir de 7h à 11h et de 19h à 23h). Ce résultat est déduit à partir du niveau d'eau du 10 mai ou des deux jours 9 et 10 mai. La réponse $3d_{tb1}$ (de 6h à 11h et de 18h à 23h) qui s'appuie sur le 9 mai est donnée par 18 élèves. Donc, bien que ce phénomène ne soit que presque périodique, ces élèves ont su utiliser cette propriété comme périodique pour prolonger la table de données. 64 élèves n'ont pas de réponses à cette question.

En question 3e, malgré la présence de la table de données, registre utile pour construire le graphique d'une fonction, dans l'énoncé, il n'y a que 56 élèves (soit 28 %) qui peuvent donner une réponse. Parmi eux, 6 élèves construisent un graphique non-périodique.

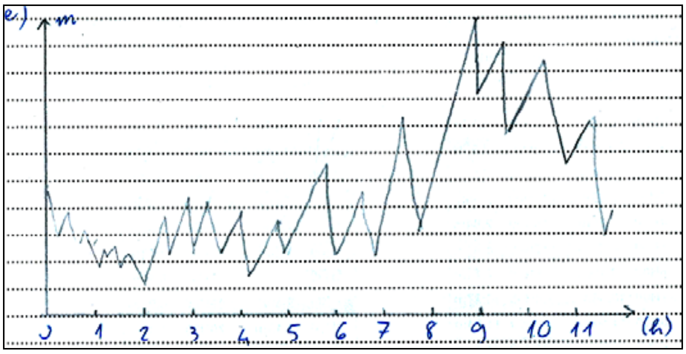


Figure 17. Figure de H71

Notons que cet élève a répondu en question 3a que la marée augmente et diminue selon un graphique parabolique. Il y a donc une contradiction entre ses réponses. La réponse en 3a est près du regard global (la marée augmente et diminue) tandis que celle en 3e est liée au regard local.

Un seul élève (H32) a établi la table de données du 11 mai. Mais après il ne construit pas le graphique. Le trop grand nombre de valeurs dans ces tables peut être à l'origine des difficultés des élèves. De plus, la demande de construire le graphique pour les trois jours (utiliser la périodicité) est cause d'échec pour beaucoup d'élèves.

Parmi 49 élèves qui construisent un graphique périodique, 23 le donnent seulement sur une période (ou sur une demi-période) de 24 heures (ou de 12 heures). De plus, 4 élèves construisent trois graphiques correspondant aux trois jours et 2 élèves utilisent les lignes brisés comme la figure de H7 :

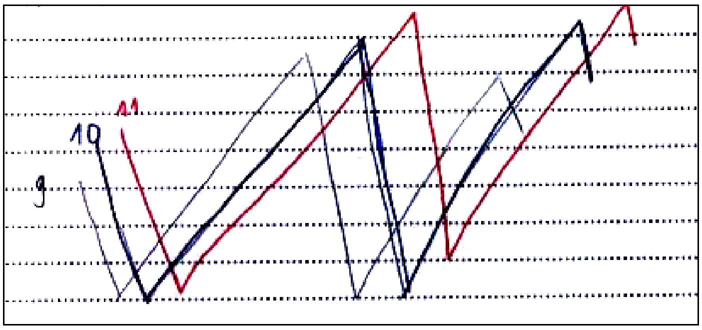


Figure 18. Figure de H7

Comme nous l'avons indiqué dans la partie précédente, nombreux sont les élèves qui ne répondent pas aux questions liées à la construction du graphique (1f, 3e, 4c). On peut penser que ceci est en partie dû à l'absence des formules algébriques des fonctions associées.

Mais une deuxième cause de ces non-réponses se trouve peut-être dans le fait qu'il ne suffit pas de reconnaître la périodicité d'un phénomène pour savoir utiliser cette périodicité. En effet, cette conclusion est renforcée par la grande différence entre le nombre d'élèves parlant de la périodicité en question 1a et 3a mais ne pouvant répondre aux questions 1f et 3e.

En question 1f, une autre difficulté est présente dans l'exploitation du modèle O : la réduction de l'échelle de l'axe des abscisses pour construire le graphique sur un grand intervalle. Beaucoup d'élèves ont vu la répétition du graphique mais ne peuvent pas le construire sur l'intervalle demandé (0 ; 10). Par exemple, H39 a donné la réponse suivante :

> H39 : La figure d'apprécier l'activité du cerveau sur les 10 secondes est similaire à celle sur les 2 premières secondes.

Mais il ne donne pas la figure correspondante. Il explique que la figure est très large et qu'il ne peut pas la construire sur le papier.

V.2.2.3. La construction des modèles C et O – l'entrée dans le processus de modélisation

Dans les exercices 1, 2 et 3, les modèles mathématiques C et O sont suggérés implicitement par la donnée d'une représentation graphique, d'une formule algébrique, d'une table numérique ou d'une figure géométrique. Le travail de l'élève est de les reconnaître et les exploiter pour répondre aux questions sur les phénomènes étudiés.

Dans l'exercice 4, il est nécessaire de construire l'un des deux modèles et de l'utiliser. Les productions des élèves montrent que les deux modèles C et O sont construits.

En effet, en ce qui concerne la question 4a, 121 élèves (soit 60,5%) donnent la réponse attendue (5 minutes, 15 minutes et 25 minutes). La plupart des réponses est engendrée par le raisonnement sur la période explicitement ou implicitement (le temps pour que la cabine fasse un tour). Le lien entre les deux variables, période et position, a été établi, c'est-à-dire la réponse s'appuie sur le modèle C. Par exemple, voici la réponse de H34 :

> H34 : Un tour prend 10 minutes
> Un demi-tour prend 5 minutes

En conséquence, la cabine de Minh est à la position la plus haute après 5 minutes, 15 minutes et 25 minutes du voyage.

Notamment, les connaissances de physique sont appliquées dans la réponse de H72 dès la réponse à la question 4a.

H72 : 3 tours = 6π dans 30 minutes = 30.60 = 1800 secondes

$$\Rightarrow \omega = \frac{6\pi}{1800} = \frac{\pi}{3} \text{ (rad / s)}$$

Minh est à la position la plus haute ⇔ l'angle tourné α satisfait :

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \pi \Rightarrow t = \dfrac{\alpha}{\omega} = 300\ (s) \\ \alpha = 3\pi \Rightarrow t = \dfrac{\alpha}{\omega} = 900\ (s) \\ \alpha = 5\pi \Rightarrow t = \dfrac{\alpha}{\omega} = 1500\ (s) \end{array}\right.$$

Nous retrouvons ici aussi la force des formules algébriques dans l'étude des fonctions. En effet, 12 élèves s'efforcent de trouver la formule représentant la hauteur selon le temps et de résoudre des équations pour trouver les temps correspondant à la hauteur maximale h_{max}. Cette formule est réutilisée en question 4b dans un processus « inverse » pour trouver les hauteurs correspondant aux instants donnés.

H8 : d = 40 m, donc R = 20 m

Trois tours prennent 30 minutes, donc T = 30 / 3 = 10 minutes = 600 secondes.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{300} \text{ (rad / s)}$$

Choisissons la direction positive qui oriente au dessus.

A l'instant t = 0, P est à la position correspondant à -20 m, donc x = A cos φ = -A $\Rightarrow \cos\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \pi$

L'équation du mouvement de P : h = 20 $\cos\left(\dfrac{\pi}{300}t + \pi\right)$

A la position la plus haute : $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{300}t + \pi\right) = 1 \\ t \leq 1800 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{300}t + \pi = k2\pi \\ t \leq 1800 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 300s = 5\min \\ t = 900s = 15\min \\ t = 1500s = 25\min \end{cases}$$

Donc les connaissances en physique et en mathématiques sont bien utilisées par cet élève. Cependant, au lieu d'utiliser la figure et la notion de période en physique (le temps pour que l'objet fasse un tour complet) pour déduire les résultats (la stratégie optimale), il effectue beaucoup de calculs pour trouver la formule de la fonction et il doit ensuite résoudre une équation trigonométrique. Bien que cette formule puisse être réutilisée en question 4b, elle est très coûteuse dans cette question. Donc parmi 12 élèves qui utilisent cette stratégie, 7 commettent des erreurs et trouvent une formule erronée, comme par exemple H187.

H187 : Le mouvement de la grande roue est circulaire uniforme.

T = 10 minutes, donc $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{5}$ (rad / minute)

A = $\frac{40}{2}$ = 20 (m)

A l'instant t = 0, x = 0 et v_{max} = -A ω sin (ωt + φ)

$\Rightarrow$ A ω = -A ω sin φ

$\Rightarrow$ sin φ = -1

$\Rightarrow$ φ = $-\frac{\pi}{2}$ +k2π

L'équation du mouvement de la grande roue : x = 20 cos$\left(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{2}\right)$

Quand la cabine de Minh est à la position la plus haute, la hauteur de Minh au sol est 42 m.

On a : cos $\left(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{2}\right)$ = 2,1

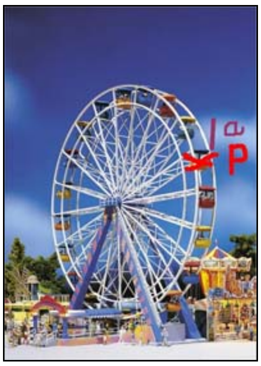
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{2} = \arccos 2{,}1 + k2\pi \\ \frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{2} = -\arccos 2{,}1 + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{5}{2}\arccos 2{,}1 + k2\pi \\ t = -\frac{5}{2}\arccos 2{,}1 + k2\pi \end{array}\right.$$

On voit que, comme H8, cet élève s'efforce de trouver la formule algébrique. Cependant, il commet des erreurs dans l'utilisation des conditions initiales et des conditions de la position la plus haute de la cabine dans le processus de construction des équations pour trouver φ et t. De plus, l'équation trigonométrique cos $\left(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{2}\right)$ = 2,1 trouvée ne lui pose pas problème.

Les réponses de certains élèves montrent clairement le regard local dans la considération du problème. Regardons la réponse de H45 :

H45 : Trois tours prennent 30 minutes, donc un tour prend 10 minutes.



On a 20 cabines, donc il faut mettre $\frac{10}{20}$ = 0,5 minutes pour tourner a.

Minh est à la position la plus haute quand il est à la position « pic » de la grande roue.

C'est à l'instant 10 – 5.0,5 = 7,5 minutes.

Cet élève a compté le nombre de cabines sur la figure et il a considéré le mouvement circulaire comme un mouvement rectiligne. Il ne s'intéresse pas à la donnée dans l'énoncé qu'au début du voyage, la cabine P est à la position la plus basse. Donc la position de la cabine P dans la figure est considérée comme la position initiale.

Dans cette question, la répétition du phénomène n'est pas prise en compte chez 50 élèves avec la réponse d'un seul instant t = 5 minutes. Notamment, 29 élèves (soit 13,5 %) ne répondent pas à cette question (20 élèves laissent leurs papiers blancs et 9 ne réussirent pas). Pour ces derniers, regardons les réponses suivantes :

> H138 : Aux instants 2,5 minutes, 12,5 minutes et 22,5 minutes, Minh est à la position la plus haute.
>
> H53 : L'amplitude d = 2A, donc A = 20 m
>
> $T = \frac{30.60}{3} = 600$ (s)
>
> $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{300}$ (rad/s)
>
> Donc, aux instants $x = A\cos\left(\frac{\pi}{300}t - \pi\right)$, Minh est à la position la plus haute.

En ce qui concerne la question 4b, le modèle C n'est pas très utilisé. En effet, nous ne trouvons l'apparition de ce modèle que dans les papiers de réponse ou dans les brouillons des 82 élèves. Cette figure apparaît dès la réponse à la question 4a ou dans les réponses aux questions 4b, 4d. La grande roue est représentée par un cercle et dans la plupart des figures, le sol apparaît sous la forme d'une droite. La cabine de Minh est un point sur ce cercle.

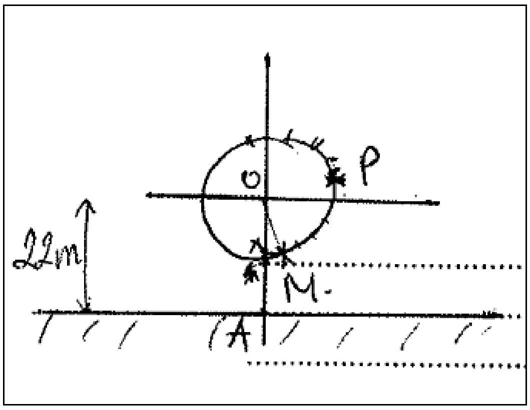


Figure 19. Figure de H45

Ceci montre que ces élèves peuvent construire la représentation géométrique du problème de la réalité abordé. Cependant, il n'y a que 45 élèves qui calculent les hauteurs grâce à cette figure (stratégie liée au modèle C). Parmi eux, 33 trouvent un résultat erroné ou ne terminent pas.
Par exemple, la résolution de H28 est la suivante :

> H28 : Après 2,5 minutes, la cabine tourne $\frac{1}{4}$ tour $\Rightarrow$ hauteur de la cabine au sol est égale à celle du centre de la grande roue $\Rightarrow$ h = 22 m
>
> 7 minutes = 2 + 5 minutes $\Rightarrow$ la cabine passe le point le plus haut et tourne $\frac{1}{5}$ tour plus

$\Rightarrow$ hauteur de la cabine : 22 + sin $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right)$ = 22 + sin $\frac{\pi}{10}$

t = 12 minutes, la cabine passe le point le plus bas et tourne $\sin 18^0 = \sin \frac{\pi}{10}$ $\Rightarrow$ hauteur de la cabine : (22 – 20) + sin $\frac{\pi}{10}$ = 2 + sin $\frac{\pi}{10}$

t = 22 minutes, position de la cabine est la même que celle à l'instant 12 minutes $\Rightarrow$ hauteur de la cabine = 2 + sin $\frac{\pi}{10}$.

Quelques élèves construisent un seul segment ou une demi-droite avec un cercle qui représente la projection du mouvement de la cabine sur une droite, comme par exemple :

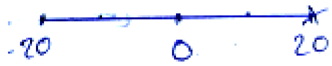


Figure 20. Figure de H10 et H17

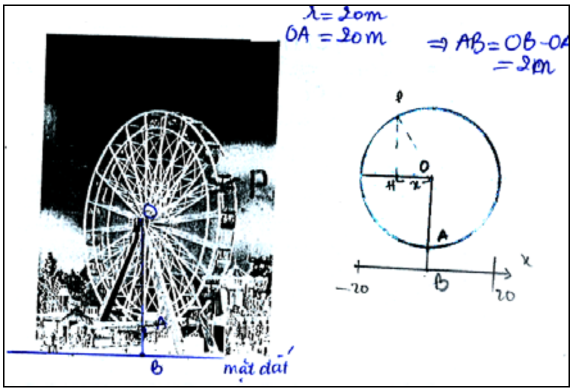


Figure 21. Fiche-élève de H73

Le modèle O (dans la stratégie $4b_O$) est le plus utilisé par 42 élèves. Ils s'efforcent de trouver la formule de la fonction représentant la hauteur de la cabine de Minh (stratégie $4b_d$). Cependant, il n'y a que 19 élèves qui établissent exactement la formule. Le reste commet des erreurs dans le choix de la forme de la formule ou dans le processus de calcul. Donc bien que les élèves viennent d'étudier les oscillations harmoniques en physique, la construction de l'équation n'est pas un travail facile pour eux. Ils font des erreurs dans les calculs comme c'est le cas de H187 dont nous avons étudié la réponse précédemment.

Considérons la production de H104. Après avoir construit la formule : $h = 20 \cos\left(\frac{\pi}{300}t + \pi\right)$ pour trouver les instants auxquels la cabine se trouve au plus haute, H104 l'utilise pour répondre à la question 4b :

H104 : t = 2,5 minutes = 150 secondes $\Rightarrow$ A = 20 cos $\left(\frac{\pi}{300}.150 + \pi\right)$ = 0

t = 7 minutes = 420 secondes $\Rightarrow$ A = 20 cos $\left(\frac{\pi}{300}.420 + \pi\right)$ = 6,18 m

t = 12 minutes = 720 secondes $\Rightarrow$ A = 20 cos $\left(\frac{\pi}{300}.720 + \pi\right)$ = -6,18 m

$t = 22$ minutes = 1320 secondes $\Rightarrow A = 20\cos\left(\frac{\pi}{300}.1320+\pi\right)$ = -6,18 m

Cette réponse confirme la pertinence de notre analyse a priori sur l'influence du choix des valeurs de la variable *« Forme de la formule de la fonction représentant la hauteur »*. En effet, dans le manuel de physique, quand on étudie des oscillations harmoniques, les fonctions ont toujours pour forme $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ (ou $x = A\sin(\omega t + \varphi)$). C'est pourquoi beaucoup d'élèves utilisent cette forme et oublient la position du centre de la grande roue au sol.

De plus, à partir de cette réponse, nous constatons que H104 ne retourne pas à la réalité pour vérifier sa réponse. Bien qu'il puisse répondre à la question 4a (aux instants t = 5 minutes, t = 15 minutes et t = 25 minutes, la hauteur de la cabine est la plus haute h = 42 m), il ne reconnaît pas qu'à l'instant t = 2,5 minutes, la hauteur h ne peut pas être nulle, c'est-à-dire il ne revient pas au modèle C. L'articulation entre le modèle O et le modèle C n'est pas établie.

Notamment, même les cas t = 12 minutes et t = 22 minutes, les hauteurs trouvées sont négatives. Ce qui est contradictoire avec la réalité. Ici, la réalité est un environnement qui permet d'accepter ou refuser la réponse. Cependant, cette référence semble ne pas être prise en compte par cet élève.

Il est intéressant de constater que plus d'un tiers des élèves (72 sur 200) utilisent les fonctions linéaires pour calculer les hauteurs (autres stratégies qui n'utilisent ni le modèle C ni le modèle O). Ce sont des fonctions représentant le rapport linéaire entre le temps et le diamètre du cercle ou le temps et la hauteur de la cabine. Par exemple, regardons les réponses suivantes :

H17 : A l'instant t = 5 minutes, la hauteur de la cabine de Minh au sol est 42 m
2,5 minutes : h = = 22 m
7 minutes : $h = 42 - (\frac{7.42}{5} - 42) = 25{,}2$ m
12 minutes : $h = \frac{2.42}{5} = 16{,}8$ m
22 minutes : $h = \frac{2.42}{5} = 16{,}8$ m

H183 : Après 2,5 minutes, $h = \frac{40}{2} + 2 = 22$ m
Après 7 minutes, $h = \frac{40.3}{5} + 2 = 26$ m
Après 12 minutes = après 2 minutes, $h = \frac{40.2}{5} + 2 = 18$ m
Après 22 minutes = après 12 minutes = après 2 minutes, h = 18 m

Dans ces réponses, la formule algébrique représentant la hauteur de la cabine en fonction du temps est établie et utilisée implicitement (via la règle de trois). De plus, les fonctions linéaires utilisées montrent que les élèves ont considéré le mouvement de la cabine comme rectiligne uniforme.

En question 4c, on demande la construction d'une figure représentant la hauteur sans donner ni formule, ni table de données et ni une partie du graphique, 150 élèves ne donnent pas de réponse. Parmi 50 élèves donnent la figure pour répondre à cette question, 46 construisent une sinusoïde et 4 construisent un cercle.

Comme nous l'avons cité ci-dessus, le modèle C avec un cercle représentant la grande roue et une droite représentant le sol est donné par 82 élèves. Ce modèle est pour ces élèves une illustration de l'énoncé ou un outil pour trouver des réponses aux questions 4a et 4b. Mais il n'est pas utilisé pour apprécier la hauteur de la cabine en fonction du temps comme la demande dans l'énoncé. C'est pourquoi ils construisent une sinusoïde ou laissent leur papier blanc en question 4c. Il n'y a que 4 élèves qui construisent un cercle dans cette question. Donc pour les élèves, le terme « figure » de l'énoncé coïncide avec le graphique de la fonction représentant la hauteur. Ceci est aussi présent dans la question « Construire une figure… » des exercices 1 et 3.

Ce résultat montre aussi que l'articulation entre les deux modèles C et O n'est pas établie. En effet, à partir du modèle C, on peut passer au modèle O comme le montre la figure de H18 :

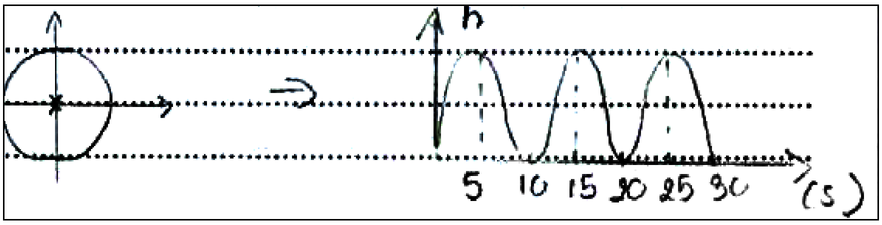


Figure 22. Figure de H18

Cependant il n'y a que 46 élèves qui peuvent construire une sinusoïde. Parmi eux, 15 commettent des erreurs sur la période ou sur les valeurs de la fonction. Par exemple, voici la figure de H30 :

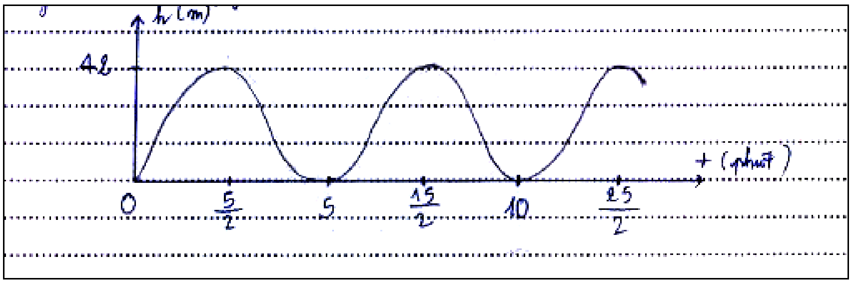


Figure 23. Figure de H30

Notons que cet élève a bien utilisé la stratégie liée au modèle C en question 4b. De plus, il reconnaît le mouvement périodique de la cabine qui est présenté dans les introductions suivantes.

> H30 : Le mouvement de la grande roue est une oscillation harmonique, donc le mouvement de la cabine est périodique et est une sinusoïde.

Donc cet élève a bien articulé les deux modèles C et O. Cependant, le retour à la réalité pour vérifier sa réponse n'est pas fait. De manière similaire, l'élève H2 a utilisé la stratégie liée au modèle O pour répondre à la question 4b mais il donne la figure suivante pour la question 4c :

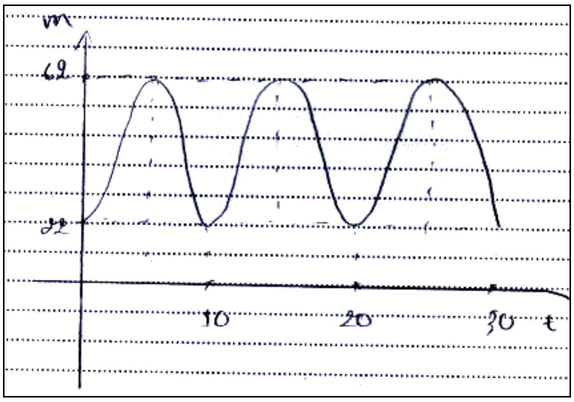


Figure 24. Figure de H2

Par ailleurs, 13 élèves ne donnent que la forme du graphique sans valeurs de la fonction, même s'ils ont trouvé quelques valeurs en question 4b. Ces figures semblent être engendrées par l'oscillation harmonique de la hauteur de la cabine. Elles ne répondent pas à la question d'apprécier la hauteur pendant trois tours du voyage. Ceci est souligné dans la réponse de H107 :

> Puisque après 10 minutes, P retourne à la position ancienne, donc P fait une oscillation harmonique selon l'équation x = A cos (ωt+φ). Donc le graphique a pour la forme suivante :

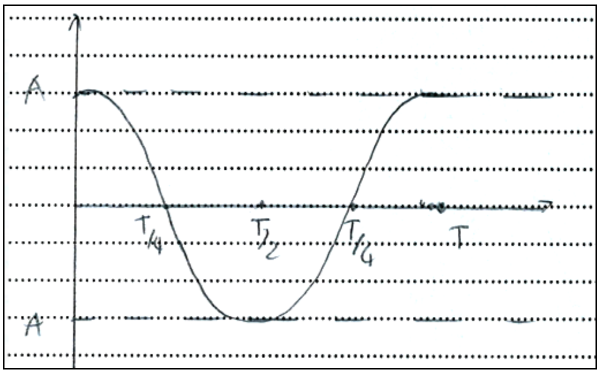


Figure 25. Réponse de H107

Notons une remarque intéressante : l'élève H69 a utilisé une autre stratégie pour répondre à la question 4b, mais quand il rencontre la question de construire le graphique, il change de stratégie. Il s'efforce de trouver la formule de la fonction relative h = 2 + 20 cos (0,2πt) et ne réussit pas à construire la figure. Ceci confirme encore une fois la force de la formule algébrique dans l'étude des fonctions au Viêt Nam.

De même que pour la question 4b, en question 4d, il n'y a que 19 élèves qui utilisent la stratégie liée au modèle C. Parmi eux, 10 donnent un résultat erroné.

On voit notamment une forte diminution du nombre d'élèves qui suivent la stratégie liée au modèle O (trouver la formule algébrique représentant la hauteur) pour résoudre la question 4d. Il n'y a que 9 élèves contre 42 en question 4b. Le problème est la résolution d'une inéquation pour trouver les temps correspondant aux hauteurs données. En conséquence, 69% des élèves ne donnent pas de réponse en question 4d.

V.2.2.4. Difficultés scientifiques de l'activité de modélisation

Dans le tableau suivant, nous résumons les questions auxquelles nombreux élèves ne répondent pas et nous interprétons les absences de réponses.

La question	Numéro exercice	Réponse attendue	Nombre de non-réponses	Interprétation principale : difficulté à
Construire une figure permettant… »	1	Sinusoïde	92/200	exploiter le modèle O notamment en réduisant l'échelle de l'axe des abscisses
	3	Sinusoïde	144/200	reconnaître et exploiter le modèle O en l'absence de formule et de graphique
	4	Cercle ou sinusoïde	150/200	articuler les deux modèles C et O
« Combien de temps… »	2	125 minutes	120/200	articuler les deux modèles C et O
	4	8 minutes	138/200	conclure une stratégie algébrique en résolvant une inéquation trigonométrique

Tableau 23. Les non réponses

La confrontation des deux modèles s'érige en obstacle à la mobilisation des outils mathématiques que constituent les modèles. En effet, en plus des difficultés comme prendre des informations de la réalité (ou du pseudo-concret) pour les placer dans le modèle mathématique (spécifier le modèle) ou comme replacer dans la réalité les résultats du travail mathématique obtenus du modèle ou les rejeter, nous faisons l'hypothèse que la concurrence des deux modèles oblige à des conversions entre registres et au réemploi dans l'un des modèles d'objets mathématiques qui, institutionnellement, n'y sont pas présents.

En particulier, dans les exercices 2 et 4, nous constatons des difficultés à entrer dans le processus de modélisation :

- par le choix, selon la question, de l'un des deux modèles C et O
- par la spécification du modèle choisi
- par l'articulation avec l'autre modèle

V.2.3. Conclusion

- La périodicité est comprise par les élèves comme une répétition, une régularité dans un mouvement circulaire ou dans une oscillation. Cependant, les propriétés périodiques des phénomènes ne sont pas pour les élèves des outils pour résoudre les problèmes qui leur sont proposés. Tout se passe comme si les élèves ne parvenaient pas à relier les phénomènes périodiques aux modèles mathématiques, comme C et O, qui permettent de les étudier.

- Les deux modèles C et O sont perçus mais la prédominance du regard local sur la co-variation empêche leur articulation et leur exploitation comme on peut le voir dans l'exercice 4 du questionnaire de l'enquête.

- Comme on pouvait le prévoir, l'entrée dans un processus de modélisation est difficile pour la plupart des élèves. Bien que les élèves puissent en général déterminer un ensemble de variables dépendantes, ils rencontrent des difficultés pour la construction d'un modèle mathématique (phases 1 et 2 dans le schéma du processus de modélisation dans le chapitre 1). Notamment, l'étape de validation semble être absente dans les réponses de la plupart des élèves : une fois le travail effectué au sein du modèle mathématique (phase 3 dans le schéma du processus de modélisation), ils sont incapables d'évaluer si les résultats obtenus sont adaptés ou non à la réalité extra mathématique étudiée (phase 4 dans le schéma du processus de modélisation).

CHAPITRE 4

INGENIERIE DIDACTIQUE

Introduction

Cette expérimentation a été conçue en liaison avec le développement du projet MIRA intitulé « Modélisation mathématique de phénomènes variables dans l'enseignement à l'aide de la géométrie dynamique » projet de recherche commun à deux équipes de recherche : l'équipe DIAM du Laboratoire d'Informatique de Grenoble de l'Université Joseph Fourier et l'équipe DDM de l'Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville au Viêt Nam. Ce projet a débuté en décembre 2009 avec le soutien financier de la région Rhône Alpes.

Une partie de ce qui suit reprend donc certaines analyses faites précédemment en équipe et publiées dans Soury Lavergne (2010), Bessot (2010) et Birebent & Nguyen Thi (2010).

Partie A. PRESENTATION DE L'INGENIERIE DIDACTIQUE

I. Les principaux choix de l'ingénierie didactique

I.1. Favoriser une modélisation intermédiaire géométrique

Le premier choix pour l'ingénierie est de mettre en place des conditions favorisant une modélisation géométrique de la situation réelle proposée et ce, avec dévolution du choix des variables de ce modèle. Le choix d'un modèle de nature géométrique est un choix clef pour l'apprentissage. En effet, le domaine géométrique facilite l'entrée dans le travail de modélisation car il permet d'établir un fort lien sémantique avec la situation réelle choisie, la géométrie étant un outil habituellement utilisé pour modéliser l'espace qui nous environne. De plus, la modélisation par la géométrie d'un réel spatial est une activité pratiquée par les élèves depuis l'école primaire (une fenêtre ou une table représentée par un rectangle par exemple), même si cela reste le plus souvent implicite.

Dans notre ingénierie, nous construisons des situations didactiques qui permettent au modèle C de jouer le rôle de modèle intermédiaire géométrique vers le modèle fonctionnel O. En conséquence, le phénomène réel choisi est un mouvement circulaire uniforme. Comme nous l'avons montré dans l'enquête épistémologique du chapitre 1, le mouvement circulaire uniforme appelle un modèle géométrique tandis que l'oscillation harmonique, dont l'objet mathématique central est une fonction, est attachée aux registres algébrique et graphique.

I.2. Travailler dans un environnement de géométrie dynamique

Les professeurs se trouvent démunis pour fabriquer des situations de modélisation absentes des manuels et pour gérer de telles situations en classe. De plus, l'entrée dans le processus de modélisation est reconnue comme difficile pour les élèves de l'enseignement secondaire.

L'enseignant se trouve donc face à une situation paradoxale : ou bien il n'aide pas les élèves, qui se trouvent alors en situation d'échec ou il leur donne la solution toute faite, et les élèves n'ont rien appris. En fait, la solution adoptée par l'enseignement est de proposer aux élèves les modèles tous faits que sont les modèles C et O, le modèle O étant imposé sans modélisation intermédiaire avec le modèle C (cf. l'analyse institutionnelle du chapitre 2).

Nous faisons l'hypothèse (H_0) que l'établissement du modèle mathématique O peut s'appuyer sur une modélisation géométrique intermédiaire attachée au modèle C dans un environnement de géométrie dynamique.

En effet, un environnement de géométrie dynamique[23] a l'avantage de donner les moyens aux élèves d'explorer le modèle en le manipulant, le modifiant et en ayant accès aux effets de ces modifications.

Dans un environnement de géométrie dynamique, la modélisation de grandeurs variables se fait par la création de points qui se déplacent. Un point mobile peut modéliser différentes variables possibles (distances, aires, temps). Ainsi, l'établissement de ce modèle intermédiaire grâce à la

[23] L'environnement choisi est celui du logiciel Cabri II Plus.

géométrie dynamique permet de matérialiser les variables tout en laissant aux élèves la responsabilité du choix des variables pertinentes dans la situation étudiée. La notion de point pilotant un autre point, prémisse aux notions de variables indépendante et dépendante, peut alors être introduite. La manipulation du modèle dynamique objective le fait que certains objets, essentiellement des points, sont libres dans leur déplacement alors que d'autres sont contraints et ne se déplacent que par l'intermédiaire des premiers, de façon analogue aux variables indépendantes et variables dépendantes des relations fonctionnelles. Enfin, une modélisation géométrique intermédiaire conserve perceptivement la trace matérielle du phénomène de variation qui, en revanche, disparaît dans le symbolisme algébrique, ultime étape du processus de modélisation.

I.3. Passer d'une conception dynamique des fonctions à une conception statique

Les recherches passées distinguent deux aspects fondamentaux de la notion de fonction que l'on peut repérer comme se succédant dans l'histoire :

- la co-variation de deux grandeurs qui nécessite une modélisation en termes de variables dépendantes et/ou indépendantes. Euler écrit en 1755 :

> Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonction de ces dernières.

Nous parlerons de conception dynamique de la notion de fonction.

- la correspondance : une fonction associe un nombre unique à un nombre donné. Hankel (1870) définit ainsi une fonction :

> On dit que y est fonction de x si à chaque valeur de x d'un certain intervalle correspond une valeur bien définie de y sans que cela exige pour autant que y soit défini pour tout l'intervalle par la même loi en fonction de x, ni même que y soit défini par une expression mathématique explicite de x. J'appellerai cette définition du nom de Dirichlet parce que cette définition, qui a détrôné toutes les conceptions plus anciennes est fondamentale dans ses travaux sur les séries de Fourier. (Hankel (1870), p. 49)

Nous parlerons de conception statique de la notion de fonction.

La conception statique basée sur la correspondance s'est imposée dans l'enseignement actuel, obscurcissant les significations de variable et de fonction. Or, les notions de variable et de dépendance (variable indépendante et variable dépendante) posent difficulté aux élèves de l'enseignement secondaire.

> Les notions de variable et de dépendance ne prennent sens que dans des situations de variation. Le seul moyen de s'apercevoir qu'une chose dépend d'une autre est de les faire varier chacune à leur tour afin de constater quel effet a la variation mais tant et aussi longtemps qu'il n'y aura pas de variation, il sera presque impossible de savoir s'il y a dépendance. (René de Cotret, 1988)

Notre ingénierie consistera à introduire d'abord une conception dynamique des fonctions qui passe par l'asymétrie des variables opérable dans l'environnement de géométrie dynamique : une variable indépendante et une variable dépendante. Elle aboutira ensuite à la mobilisation d'une conception statique de la notion de fonction, conception conforme aux attentes de l'institution scolaire.

I.4. Se centrer sur la modélisation de phénomènes périodiques

Dans notre travail de thèse, nous nous intéressons essentiellement à la modélisation de phénomènes périodiques (cf. l'enquête épistémologique dans le chapitre 1).

Ce choix a pour conséquence d'introduire dans la situation la question de la modélisation du temps. C'est un des enjeux de l'ingénierie : amener les élèves à construire le temps dans le modèle. L'environnement de géométrie dynamique va donner lieu à différentes modélisations du temps, le temps discret et le temps continu.

I.5. Un problème de la périodicité : celui de la coïncidence de deux phénomènes périodiques

Considérons le problème qui consiste à déterminer la période inconnue d'un phénomène périodique par comparaison avec celle d'un autre phénomène de période connue. Ce problème est soulevé par les géophysiciens qui cherchent à déterminer la période d'un pendule avec précision pour mesurer la valeur absolue de l'accélération de la pesanteur.

En théorie, pour mesurer la période, la méthode la plus naturelle consisterait à mesurer directement la durée t d'un nombre n d'oscillations aussi grande que possible. La période est calculée par $T = t/n$. Mais certaines études critiques montrent que la précision obtenues pour T est très insuffisante.

Voici une méthode bien supérieure pour déterminer la période. Elle consiste à faire osciller le pendule dans un plan vertical voisin du plan vertical d'oscillation du balancier d'une horloge astronomique, qui, véritable étalon de temps, bat exactement la seconde (période exacte $T_H = 2$ secondes).

On constate que le pendule et le balancier témoin passent, ensemble et dans le même sens, devant un repère, à une certaine date ; ils sont alors en coïncidence. Puis T_P étant, par exemple, un peu inférieure à T_H, le pendule prend de l'avance et ne se retrouve en coïncidence que lorsqu'il a effectué une oscillation de plus que le balancier. Les coïncidences successives sont séparées par une durée θ telle que :

$$\theta = n\,T_H = (n + 1)\,T_P, \text{ (n est le nombre d'oscillations de l'horloge)}$$

A partir de la deuxième égalité, on a $n = T_P / (T_H - T_P)$.

Donc $\theta = T_P.T_H / (T_H - T_P)$.

Donc $1/\theta = 1/T_P - 1/T_H$.

La durée θ, qui peut être de quelques dizaines de minutes, est susceptible d'une mesure très précise, car elle est donnée directement par l'horloge astronomique. De plus, parce que T_H est égal à 2 secondes, on peut déduire T_P.

La mesure précise de la période permet de calculer la valeur de l'accélération de la pesanteur g. En effet, pour un pendule simple, la formule donnant la période est la suivante :

$$T_P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Ceci conduit à $g = 4\,\pi^2 \dfrac{l}{T_P^2}$.

Selon Pouillet (1836), cette méthode atteint une extrême précision.

La mesure absolue de l'accélération de la pesanteur doit être d'une très grande précision, car les résultats permettent de poursuivre les recherches sur la Physique du Globe et servent de références pour les mesures relatives ou les déterminations de petites variations de g, précieuses notamment dans la prospection du sous-sol.

Cette méthode est appelée méthode des coïncidences. Selon François (1910), la méthode des coïncidences a été inventée par Mayran et ce dernier l'employa sous une forme peu précise par les observations des concours quand les pendules étaient à l'extrémité de leur course. Borda et Cassini, dans leurs observations faites à Paris en 1792 donnèrent selon lui à la méthode sa forme moderne.

Dans cette méthode, la manipulation de la périodicité est centrale. Il est nécessaire d'opérer sur les périodes et de formaliser la périodicité numériquement, graphiquement ou algébriquement.

L'application de la méthode des coïncidences permet de comparer deux phénomènes périodiques avec précision, par exemple, les marches de deux horloges astronomiques. De plus, elle réalise une sorte de vernier du temps comme l'écrit Turpain (1913) :

> La méthode des coïncidences, qui permet de déduire la détermination de l'audition simultanée des tops radiotélégraphique et des battements du chronomètre à comparer, réalise, à vrai dire, une sorte de vernier du temps, vernier pour les secondes.

Enfin, cette méthode donne aussi des intérêts dans l'étude de la physique nucléaire (cf. la thèse de Diallot, 1993).

Outre la méthode des coïncidences, en physique, il existe aussi une autre méthode permettant de déterminer la fréquence, donc la période d'un phénomène. Elle permet aussi de comparer entre elles les durées de vibration de deux diapasons ou de deux pendules. C'est la méthode de stroboscopie.

Un stroboscope est une source de lumière intermittente. Par un dispositif mécanique ou électronique, on produit une alternance de phases lumineuses (flashs) et de phases obscures. Ses degrés de liberté (ou paramètres) sont l'intensité de chaque flash, la durée du flash et la période entre deux flashs.

Un stroboscope permet d'observer des phénomènes périodiques dont la fréquence est trop élevée pour l'œil qui ne perçoit pas la discontinuité : 1/1 seconde, saccades ; 1/24, film continu.

Notamment, un stroboscope étalonné permet de mesurer la fréquence du phénomène périodique examiné. En effet, si on éclaire à la fréquence N' un phénomène de fréquence inconnue N, on obtient, pour le ralenti direct la fréquence $n_\alpha = N - N'$. Si n_α est faible, elle peut être mesurée directement avec une bonne précision. N' étant connu, on en déduit N. On peut d'ailleurs, habituellement, ajuster ensuite N' pour réaliser l'apparence d'immobilité ; dans ce cas, on a exactement N = N' ou N = p. N' (p entier).

Dans notre ingénierie, nous n'avons pas choisi de poser aux élèves le problème de coïncidence qui donne lieu à la méthode des coïncidences ou à la méthode des stroboscopies. Notre choix a été de prendre deux phénomènes qui sont déjà reconnus comme périodiques et pour lesquels on cherche des coïncidences. Pour cela, il est nécessaire de formaliser et d'utiliser la périodicité. Avec ce choix, nous rencontrons les deux questions suivantes comme les pose Bichat (1874) quand il discute sur la méthode des coïncidences :

> - Si on admet qu'il y ait une première coïncidence, il y en a une infinité d'autres ?
> - A quelles conditions cette première coïncidence peut s'effectuer ?
> (Bichat (1874), p. 369)

I.6. Prendre en compte les contraintes des institutions d'enseignement, françaises et vietnamiennes

Nous avons tenu à prendre en compte les contraintes mises en évidence par l'analyse institutionnelle (cf. chapitre 2) pour rendre possible une utilisation ultérieure dans l'enseignement des situations de l'ingénierie produite. Par ailleurs, la confrontation des fonctionnements de deux institutions est un outil méthodologique qui agit comme révélateur des implicites de chacune des institutions. Ainsi, la conception d'une ingénierie compatible pour la France et le Viêt Nam nous permet de mieux comprendre les contraintes de fonctionnement de chaque institution scolaire et également d'envisager d'autres choix possibles.

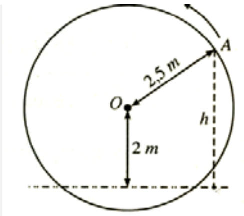
Compte tenu des curricula de physique et de mathématique au Viêt Nam, nous avons décidé de concevoir et d'expérimenter l'ingénierie didactique en début de classe 12 (classe terminale en France). En effet, nous voulons que les modèles C et O puissent être mobilisés par les élèves avec leurs différents registres.

I.7. Une situation de départ issue de problèmes habituels

Nous avons repris une idée de Burgermeister (2009), celle de modifier des énoncés de problèmes scolaires, représentatifs d'un certain rapport institutionnel à la modélisation, pour construire des situations permettant de transférer aux élèves une part de responsabilité dans le processus de modélisation. C'est par ailleurs une pratique répandue chez les enseignants de partir d'un énoncé issu d'un manuel ou d'une base d'exercices pour l'adapter à leur classe et au contexte d'enseignement. Nous avons repris cette idée et choisi l'énoncé de la noria qui est l'un des exercices proposés dans le questionnaire, ce qui nous permettra de nous référer aux réponses des élèves à ce questionnaire.

Voici de nouveau l'énoncé initial dans le manuel vietnamien :

> Une noria a un rayon de 2,5m et son axe de rotation est distant de la surface de l'eau de 2m (figure 1.24). Quand elle tourne régulièrement, la distance h (mètre) à la surface de l'eau d'un seau associé à un point A de la noria est calculée par la formule : h = $|y|$ où y = 2 + 2, 5 sin $\left[2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]$
> x est le temps en minute de rotation de la noria ($x \geq 0$) ; $y > 0$ quand la noria est au dessus de la surface de l'eau et $y < 0$ quand elle est au dessous.

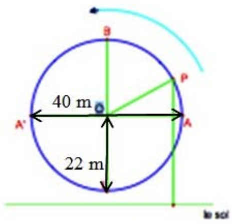


Hình 1.24

a) Quand le seau est-il à la position la plus basse ?
b) Quand est-il à la position la plus haute ?
c) Quand est-il distant de la surface de l'eau de 2 m pour la première fois ?
(Manuel mathématique de classe 11, ensemble avancé, p. 32)

Les modèles géométrique (figure 1.24) et algébrique (y = 2 + 2, 5 sin$\left[2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]$) ne sont pas construits mais sont donnés tout faits, de plus le recours au modèle géométrique n'est pas attendu institutionnellement pour répondre aux questions : c'est une simple illustration. Cet exercice fait rentrer l'élève dans le contrat didactique de la résolution d'équations trigonométriques (cf. l'analyse institutionnelle du chapitre 2).

Voici maintenant l'énoncé de la grande roue (ou du manège) obtenu par transformation de l'énoncé de la noria pour l'adapter aux contrats institutionnels des deux pays :

Dans l'institution vietnamienne	**Dans l'institution française**
Un parc d'attraction de Ho Chi Minh ville possède une grande roue de 40 m de diamètre dont l'axe de rotation est situé à 22 m du sol (figure 1). Au début du voyage, Minh s'assoit dans une cabine.  Quand la roue tourne régulièrement dans le même sens, la distance y (mètre) au sol de la cabine de Minh, associé au point P, est calculé par la formule : y = 22 – 20 cos πx/5 où x est le temps en minute de rotation du manège. a) A quel instant Minh est-il à la position la plus basse ? b) A quel instant est-il à la position la plus haute ? c) Quand est-il distant du sol de 23 m pour la première fois ?	Un parc d'attraction de Ho Chi Minh ville possède une grande roue de 40 m de diamètre dont l'axe de rotation est situé à 22 m du sol. Au début du voyage, Minh s'assoit dans une cabine. Quand la roue tourne régulièrement dans le même sens, la distance h (mètre) au sol de la cabine de Minh, est calculée par la formule : h(t) = 22 – 20 cos πt/5 où t est le temps en minute de rotation du manège. 1) Quelle est la période T de la fonction : t $\mapsto$ h(t) ? 2) Quelle est la valeur maximale de h ? sa valeur minimale ? 3) À l'instant t = 3 min, quelle est la distance au sol de la cabine de Minh ? 4) Représenter la fonction h dans un repère orthogonal, où l'on prendra pour unités : 1 cm pour 1 min en abscisses ; 1 cm pour 5 m en ordonnée.

A partir de cet énoncé, sous sa double forme, nous avons conçu pour l'ingénierie didactique une situation initiale qui évoque un réel à modéliser pour résoudre un problème de la périodicité, celui de la coïncidence de deux phénomènes périodiques.

Le problème choisi permet de générer, par des choix de variables, des connaissances liées à la périodicité comme nous le montrerons dans l'analyse de la séance 2.

II. Contraintes et ressources instrumentales de la géométrie dynamique

Le choix de concevoir notre ingénierie didactique dans un environnement de géométrie dynamique nous a conduits à faire des choix de variables pour les tâches instrumentées et à prendre en compte les contraintes du logiciel utilisé. Nous nous basons sur l'approche instrumentale pour analyser les situations de notre ingénierie où le logiciel Cabri II Plus est considéré comme un artefact.

II.1. Eléments d'analyse instrumentale

L'approche instrumentale est l'un des cadres théoriques développé par plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques (Rabardel, 1995, Guin & Trouche 2002, Trouche, 2007), notamment dans l'étude des problèmes d'intégration des TICE. Cette approche issue des travaux de Vygotsky (1934) situe tout processus d'apprentissage dans un monde de culture où les instruments jouent un rôle essentiel.

Selon Rabardel (1995) et Trouche (2007), le point de départ essentiel de cette approche est la distinction entre artefact et instrument. Le mot artefact d'après eux a le sens d'objet crée par l'homme pour assister sa propre activité : un marteau, un compas ou une calculatrice sont des artefacts. Un instrument n'existe pas en soi : un artefact devient un instrument quand un sujet a pu se l'approprier pour lui-même et l'a intégré dans sa propre activité. Comme l'écrit Trouche (Ibid.) :

> Un instrument est ainsi une entité mixte, constituée de l'artefact (ou d'une partie de l'artefact mobilisée par l'individu) et d'une composante psychologique, les schèmes. Le processus de construction de cet instrument, appelé genèse instrumentale, est complexe, il nécessite du temps et dépend des caractéristiques de l'outil (ses potentialités et ses contraintes) et de l'activité du sujet, de ses connaissances et de ses modes de travail.
> (Trouche (Ibid.), p. 23-24)

Notons qu'un schème ici est considéré comme « une organisation invariante de l'activité pour une classe de situations donnée » (Vergnaud, 1990). Un schème a trois fonctions :

- Une fonction pragmatique : il permet au sujet de réaliser une tâche
- Une fonction heuristique : il permet au sujet d'anticiper et de planifier son activité
- Une fonction épistémique : il permet au sujet de comprendre ce qu'il fait.

Selon Trouche (Ibid.) et d'après Rabardel (Ibid.), les genèses instrumentales sont constituées à la fois du processus d'instrumentalisation et d'instrumentation. Le processus d'instrumentation est tourné vers le sujet, alors que le processus d'instrumentalisation est orienté vers la composante artefactuelle de l'instrument.

- L'instrumentation :

C'est le processus par lequel l'artefact conditionne l'action de l'usager.

Pour analyser ces processus, il est nécessaire d'étudier les contraintes et les potentialités d'un artefact, relativement à un certain type de tâches. Il y a plusieurs types de contraintes (Guin & Trouche, 2002) :

+ Des contraintes internes liées à la nature des matériels (processeur, pixel de l'écran, etc.) ;
+ Des contraintes de commande liées à la disponibilité et à la syntaxe des commandes ;

+ Des contraintes d'organisation, liées à la disposition du clavier, de l'écran et à l'ergonomie générale de l'artefact.

Comment initier les élèves le plus rapidement possible au logiciel de manière qu'ils puissent le maîtriser suffisamment et pour qu'il devienne économique dans le travail de l'élève ?

Une situation d'initiation permet de développer le processus d'instrumentation. Selon Assude & Grugeon (2003), plusieurs choix doivent être faits dans les séances d'initiation à un logiciel de géométrie dynamique :

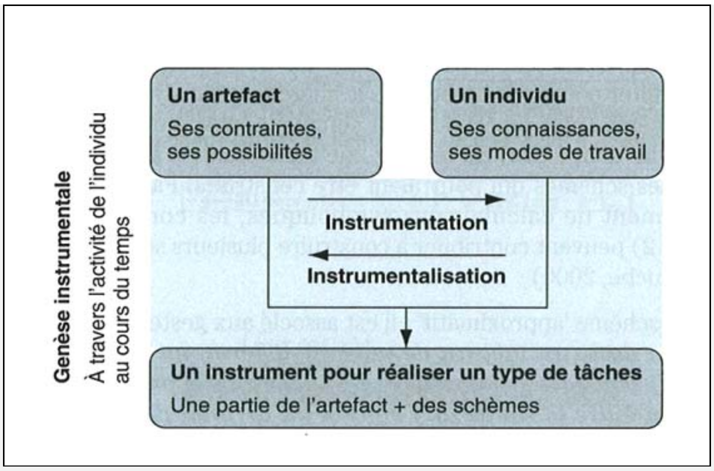
> – mise en contact des élèves avec le maximum de fonctionnalités (pas de mesure) mais d'une façon organisée
> – pas d'objets mathématiques nouveaux
> – les élèves (en individuel ou en binôme) doivent expérimenter, observer et analyser les rétroactions logicielles, confronter leurs points de vue et écrire des remarques pendant le travail sur logiciel
> – institutionnalisation de connaissances instrumentales liées aux logiciels :
> - nécessité d'expliciter et de sélectionner les arguments nécessaires à la construction des objets géométriques,
> - nécessité d'indiquer le statut des points (point libre, point sur objet, point « fixe »), la permanence des propriétés par déformation pour valider une construction.
> (Assude & Grugeon, 2003)

- L'instrumentalisation :

C'est le processus par lequel l'usager met l'artefact « à sa main » avec ses connaissances et ses modes de travail.

Ainsi les processus d'instrumentalisation sont des processus de différentiation des artefacts eux-mêmes, qui peuvent passer par différents stades : un stade de découverte et de sélection des fonctionnalités jugées pertinentes, un stade de personnalisation (l'usager met l'artefact à sa main), un stade de transformation de l'outil, parfois dans des directions non prévues par le concepteur.

Ces deux processus sont combinés par la genèse instrumentale comme le montre le schéma proposé par Trouche (2007) :



La genèse instrumentale, comme combinaison de deux processus (Trouche (Ibid.), p. 25)

L'intérêt des artefacts informatiques est souligné par Trouche (Ibid.) comme suit :

> Plus de registres disponibles et plus de résultats obtenus plus rapidement, la coordination et le contrôle, par leurs utilisateurs, des artefacts informatiques du travail mathématique apparaissent ainsi plus nécessaires que pour les artefacts « traditionnels ». (Ibid., p. 21)

Dans notre travail de thèse, le logiciel de géométrie dynamique est Cabri II plus. Il est utilisé pour favoriser la modélisation de phénomènes périodiques chez les élèves. Dans le cadre de l'approche instrumentale, nous nous intéressons aux genèses instrumentales de certains outils de l'environnement de géométrie dynamique Cabri et à la manière dont ces genèses articulent l'appropriation de l'artefact et la construction de connaissances mathématiques.

Le logiciel Cabri est présent dans plusieurs travaux pour construire des séquences d'enseignement des notions relatives à la fonction (Falcade, 2007 ; Khalloufi Mouha, 2009 ; Restrepo, 2008). Dans ces travaux, les auteurs ont étudié le fonctionnement en tant qu'instruments de Médiation Sémiotique[24] de certains outils de Cabri comme « Déplacement », « Macro », « Report de mesure » et « Trace ».

Dans notre travail de thèse, nous nous intéressons essentiellement aux deux outils « Déplacement » et « Report de mesure ». En nous appuyant sur les travaux de thèse cités ci-dessus, nous pouvons caractériser certains schèmes d'utilisation susceptibles d'être construits par les élèves lors de la genèse instrumentale, ainsi que les contraintes de l'utilisation de ces artefacts. Cela nous permettra d'anticiper les stratégies et les comportements des élèves lors de la résolution des problèmes proposées.

II.2. Le déplacement

> Le déplacement constitue un élément essentiel de la géométrie dynamique, nous permettant de passer d'une géométrie statique dans laquelle les objets sur lesquels on travaille sont des dessins dans des configurations particulières, à une géométrie dynamique dans laquelle les constructions conservent les propriétés géométriques au cours du mouvement.
> (Restrepo (2008), p. 12)

Dans Cabri, le déplacement des objets de base (points, droites, cercles, etc.) peut être effectué par l'artefact « Pointer ». Selon trois types de points dans Cabri : le point libre qui peut se déplacer partout ; le point sur objet, qui ne se déplace que sur l'objet (segment, droite, cercle) ; le point non attrapable, qui ne peut pas être attrapé et déplacé directement mais qui dépend d'un autre point (point d'intersection, milieu), Khalloufi Mouha (2009) a repéré les trois schèmes d'utilisation du déplacement suivants :

> - Déplacement 1 : le geste associé à ce schème consiste à déplacer un point libre ayant deux degrés de liberté. Cela exige de l'élève l'identification du point qu'il faut déplacer et le déplacement qui peut avoir lieu en une petite zone de l'écran ou sur tout l'écran.

[24] « En se fondant principalement sur les travaux en psychologie cognitive développés par Vygotsky, la Théorie de la médiation sémiotique se présente comme un paradigme à spécifique vocation didactique, visant à une implémentation, dans l'enseignement - apprentissage des mathématiques, des concepts principaux élaborés par le psychologue russe, notamment celui de la médiation sémiotique. Ce cadre théorique a été développée à partir des années quatre-vingt en particulier par Maria Grazia Bartolini Bussi et Maria Alessandra Mariotti. » (Falcade, 2006).

> - Déplacement 2 : le geste associé à ce schème est l'action qui consiste à déplacer un point sur un objet c'est-à-dire un point ayant un seul degré de liberté, comme par exemple déplacer un point M sur le cercle trigonométrique. L'invariant opératoire correspondant à ce schème consiste à l'identification du point à déplacer, dans l'objectif de repérer des invariants.
> - Déplacement 3 : déplacer un point construit n'ayant aucun degré de liberté. Ces points sont des points qu'on ne déplace qu'au moyen du déplacement d'un autre point qui en dépend. L'utilisation de ce schème nécessite de l'élève l'identification du point à déplacer, du point libre dont il dépend et de la relation de dépendance entre les deux points.
> (Khalloufi Mouha (2009), p. 81-82)

Dans notre ingénierie, nous nous intéressons au « Déplacement 3 », celui du point non attrapable.

Les potentialités sémiotiques[25] de cet outil sont aussi présentées par ce même auteur comme suit :

> - L'utilisation de l'outil « déplacement » permet de mettre en évidence la relation entre deux mouvements : le mouvement de l'élément de base et le mouvement de l'élément construit, ce qui permet d'introduire l'idée de relation de dépendance fonctionnelle.
> - L'utilisation de l'outil « déplacement » permet également d'évoquer de façon implicite la variation dans le temps. Cela permet alors de définir une relation de dépendance entre l'espace et le temps en extériorisant la variation de la position en fonction du temps.
> - L'utilisation du « Déplacement 1 » peut favoriser la construction chez les élèves, du signifié de la variable indépendante représentée par le point libre.
> - L'utilisation du schème « Déplacement 2 » peut favoriser la construction du signifié relatif à la notion de domaine puisque ce schème consiste à déplacer un point sur un objet.
> - La perception des contraintes à proposer dans la situation, à travers les degrés de liberté des points manipulés, peut favoriser chez les élèves la construction de signifiés relatifs à la notion de relation de dépendance fonctionnelle ainsi que la distinction entre la variable indépendante et la variable dépendante (le rôle asymétrique entre la variable indépendante et la variable dépendante). (Ibid., p. 83)

Reprenons la deuxième potentialité relative à la variation dans le temps. On peut s'interroger sur cette filiation directe entre la mobilité du point déplacé et le temps pour le déplacer. On se rappelle l'analyse développée par Krysinska, Mercier & Schneider (2009) que la variable « temps » outrepasserait sa fonction de représentation du temps pour prendre en charge l'appréhension de tout phénomène de variation.

Le temps considéré dans la citation n'est pas le temps de la physique mais le temps de l'observation – action. Ce qui laisse ouvert le problème de créer une variable représentant le temps de la physique.

Dan le travail de Restrepo (2008), l'auteur a considéré le déplacement comme rétroaction du milieu du point de vue de la Théorie de Situations Didactiques. Dans Cabri, le déplacement permet au sujet d'obtenir des rétroactions au cours de son activité. Lors d'une tâche de construction, le déplacement peut apporter, entre autres, des rétroactions pour invalider les constructions erronées :

> L'évolution des procédures des élèves est due, comme prévue, en grande partie au déplacement.
> On a pu distinguer deux fonctions du déplacement dans cette évolution :

[25]C'est « le rôle potentiel de médiation sémiotique que cet instrument peut exercer relativement au contenu mathématique visé ». (Khalloufi Mouha, 2009).

- il disqualifie les procédures au jugé (regroupant ce qu'on appelle les usages au jugé et ceux mettant en jeu ou combinés avec des primitives géométriques), ce qui entraine les élèves à analyser le dysfonctionnement du Cabri-dessin et à le modifier en conséquence ;
- il met visuellement en évidence des invariants géométriques et suscite ainsi la rectification de procédures erronées.
(Laborde et Capponi 1994, p. 194, cité par Restrepo (2008), p. 15)

Concrètement, le déplacement permet de valider ou invalider une construction ou une conjecture / propriété comme le montre Restrepo (Ibid.) :

- Déplacement pour valider une construction (dragging test) : déplacer tous les points déplaçables d'une construction pour voir si celle-ci conserve les propriétés apparentes à l'état initial. Si c'est le cas, alors la construction est validée ; dans le cas contraire, elle est invalidée, la construction n'avait pas été construite selon les propriétés géométriques demandées […].
- Déplacement pour invalider une construction : déplacer les points de base d'une construction pour trouver une position permettant de l'invalider […].
- Déplacement pour valider une conjecture/propriété : déplacer les points de base d'une construction pour tester la validité d'une conjecture ou d'une propriété, faite par l'élève à partir de l'observation des invariants de la figure, ou bien qui a été donnée à l'élève. La conjecture/propriété est invalidée si l'on trouve une position dans laquelle elle n'est plus réalisée, cependant si l'on ne trouve pas de contre-exemple, elle doit être démontrée. (Restrepo (Ibid.), p. 44)

Les rétroactions obtenues grâce au déplacement permettent non seulement d'invalider les stratégies erronées des élèves mais aussi de les faire évoluer.

Nous reprenons à notre compte une hypothèse de travail formulée par Restrepo (ibid.) :

Hypothèse de travail : La géométrie dynamique offre un milieu potentiellement riche en rétroactions qui peut permettre à l'élève d'invalider les stratégies erronées et d'être soutenu dans la recherche d'une stratégie gagnante. (Ibid., p. 16)

II.3. Le report de mesure

La commande « Report de mesure » dans Cabri permet de reporter une mesure sur un objet géométrique.

- Report de mesure sur un vecteur
- Report de mesure sur une demi-droite
- Report de mesure sur un polygone
- Report de mesure sur un cercle

Dans notre ingénierie, le report de mesure sur une demi-droite et sur un cercle est nécessaire. Les deux schèmes correspondants identifiés par Khalloufi Mouha (2009) sont les suivants :

- Report 2 : il consiste à reporter un nombre sur une demi-droite. Cela nécessite de la part de l'élève l'identification de la demi-droite et de reconnaître que le report se fait à partir de l'origine.
- Report 4 : il consiste à reporter un nombre sur un cercle. L'utilisation de ce schème nécessite l'identification de l'origine ainsi que l'identification d'un sens de l'orientation. Cette idée de l'orientation est évidente dans le schème Report 2, puisque le sens est déterminé par la demi-droite alors que dans le cas du cercle, deux orientations sont possibles. (Khalloufi Mouha (2009), p. 87)

Il y a une rupture entre la mesure linéaire sur une droite et la mesure « arc » sur un cercle dans le passage du schème Report 2 au schème Report 4. Nous analyserons des contraintes de la commande « report de mesure » liées à la disponibilité et à la syntaxe de cette commande dans la partie suivante pour éclairer cette rupture.

La commande « report de mesure » permet de construire un point à une distance spécifiée. Pour mettre le point sur un objet linéaire orienté (un vecteur, une demi-droite) ou sur un polygone, on sélectionne un nombre puis ces objets. Le report de mesure se fait à partir de l'origine de cet objet qui est évidemment déterminée. La mesure reportée est la mesure du segment construit par le point obtenu et l'origine de la demi-droite. On parle du report de mesure « linéaire ».

Pour des objets linéaires non orientés comme pour un segment ou une droite, son origine n'est pas déterminée. On ne peut pas utiliser la commande « report de mesure » pour reporter directement une mesure sur une droite à partir d'un point O choisi parce que sur cette droite deux directions sont possibles. Donc pour reporter une mesure sur une droite, soit il faut construire une demi-droite intermédiaire, c'est-à-dire construire une demi-droite d'origine O sur la droite et reporter la mesure sur cette demi-droite, soit il faut utiliser la commande « Compas » en sélectionnant ce nombre et un point d'origine. Le segment construit par le point d'origine et le point d'intersection du cercle et de l'objet linéaire a une longueur égale à la mesure reportée.

Il y a donc concurrence dans le cas du report de mesure « linéaire » entre l'utilisation de la commande « Compas » et de la commande « Report de mesure ».

Pour reporter une mesure sur un cercle, il faut d'abord construire un point d'origine sur le cercle. Donc à la différence du cas de la demi-droite, pour placer un point sur un cercle, on doit sélectionner un nombre, le cercle et un point sur le cercle. Le choix de ce point d'origine est obligatoire dans le report de mesure sur un cercle. Le report de mesure se fait à partir de l'origine et dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. La longueur de l'arc construit par le point d'origine et le point obtenu est la mesure reportée. Nous parlerons du report de mesure « arc ».

Le report de mesure « arc » par la commande « Compas » n'est pas possible puisque cette commande reporte toujours la corde qui sous-tend l'arc.

Voici les potentialités sémiotiques de l'outil « report de mesure », présentées par Khalloufi Mouha (2009) :

> - L'utilisation de l'outil « report de mesure » par l'enseignant pourrait amener les élèves à faire le lien entre les cadres numérique et géométrique puisque cet outil permet de construire un objet géométrique à partir d'un nombre […].
> - L'outil report de mesure permet aux élèves, s'il est associé au déplacement, de se rendre compte de la relation de dépendance. En effet, le déplacement permet la variation de la mesure et par la suite la variation du point reporté sur l'objet géométrique […].
> - L'outil « report de mesure » peut être utilisé également pour amener les élèves à faire le lien entre le cadre de la géométrie analytique et le cadre fonctionnel et cela à travers l'utilisation de la représentation graphique des fonctions trigonométriques. En effet, c'est grâce à l'outil « report de mesure » qu'il est possible de reporter la variable indépendante sur l'axe des abscisses ainsi que la variable dépendante sur l'axe des ordonnées.
> (Ibid., p. 88)

Dans notre travail, nous nous intéressons particulièrement à la deuxième et la troisième potentialité du report de mesure dans la construction du modèle intermédiaire M et dans le passage de ce modèle au modèle fonctionnel O. Cet outil est utilisé pour représenter la variable indépendante qui est le temps sur l'axe des abscisses.

III. Processus de conception de l'ingénierie didactique

Dans cette partie, nous présentons brièvement les aspects les plus notables du processus de conception de l'ingénierie pour le projet MIRA et pour notre travail de thèse.

Nous avons mis en place un processus de conception itératif. Nous entendons par là que nous avons procédé à des expérimentations d'états successifs de l'ingénierie afin de pouvoir améliorer et compléter la succession des situations qui la constituent. Au cours de l'année 2009 à 2010, nous avons ainsi pu réaliser trois expérimentations, deux au Viêt Nam et une en France. Les analyses effectuées à l'issue de chaque expérimentation nous ont conduits à améliorer les situations testées. Nous détaillons ci-dessous les principales évolutions des différentes phases de l'ingénierie.

III.1. Expérimentation 1 au Viêt Nam (décembre 2009)

Test des situations 1 et 2 en classe 10.
Voici la version de l'ingénierie utilisée dans cette expérimentation.

Situation 1

Un parc d'attractions de Ho Chi Minh ville possède une grande roue. Au début du voyage, Minh s'assoit dans une cabine. Ci-après la photo d'une grande roue.

Photo d'une grande roue

Consigne :
Construire dans Cabri une figure géométrique représentant le manège et la cabine de Minh de façon à ce que le déplacement du point P « Pilote » permette le mouvement de la cabine du manège.

A l'ouverture de Cabri, il y a à l'écran un point P placé sur une demi-droite

Situation 2

Minh fait un voyage de 3 tours qui dure 15 minutes : pouvez-vous faire en sorte que le mouvement de la cabine fasse 3 tours en 15 min en jouant sur les éléments de votre figure ?

Figure 26. Les situations dans l'expérimentation 1

Cette première expérimentation a eu lieu au lycée Truong Chinh à Ho Chi Minh ville. Elle a duré 2 heures et a été réalisée auprès de 14 élèves de la classe 10A1. Cette classe est constituée d'une sélection de « bons élèves ».

L'enseignante était Nguyen Thi Nga et deux observateurs étaient présents, Le Thai Bao Thien Trung et Trinh Duy Trong.

Les élèves ne connaissant pas Cabri, l'enseignant a dû présenter brièvement le fonctionnement du logiciel Cabri avant de commencer la situation 1. Les élèves avaient des difficultés pour comprendre les consignes des deux situations. L'enseignant a dû expliquer plus précisément : ce que signifie « le déplacement du point P « pilote » permet le mouvement de la cabine du manège ? », comment montrer que je peux résoudre la situation 2 ?

Les principales modifications de l'ingénierie et questions après la première expérimentation

- Une séance d'initiation

La nécessité d'une séance d'initiation à Cabri est apparue clairement, la situation 1 ne pouvant pas jouer simultanément le rôle de séance d'initiation et de première situation de l'ingénierie (construction du modèle intermédiaire). L'objectif de la séance d'initiation est d'initier une genèse instrumentale minimale des outils Cabri nécessaires aux situations de l'ingénierie. Ce sont les suivants : point, droite, segment, demi-droite, droite perpendiculaire, droite parallèle, cercle, compas, calculatrice, distance ou longueur, report de mesure.

L'enjeu principal de l'initiation est de rendre disponible l'outil report de mesure mais sans insister spécialement dessus pour éviter un effet de contrat didactique.

Durant cette séance d'initiation, l'institutionnalisation doit porter sur le déplacement des points dans Cabri et en particulier montrer, sur un exemple, que des points « pilotent » le déplacement d'autres points. Le mot point « pilote » désignera alors un point libre qui entraîne le déplacement d'un autre point : « Le point M pilote le déplacement du point M' ».

Ainsi, nous faisons hypothèse que la consigne de la situation 1 (Construire à l'écran une figure géométrique représentant le manège et la cabine de M de façon à ce que le déplacement du point P pilote le mouvement de la cabine de M) sera plus facilement comprise.

- Dans la situation 2, seconde version, à l'ouverture de la fenêtre Cabri, tous les élèves ont la même figure institutionnalisée dans la situation 1.

\+ Modification de formulations de la situation 2

Des formulations doivent être modifiées. Par exemple une question formulée en « Pouvez-vous... » n'est pas bien comprise car la demande « pouvez-vous » donne lieu à de multiples interprétations. Comment les élèves sont-ils censés y répondre ? En mobilisant quels moyens ? Qu'est-ce qui montre que « je peux » ?

\+ Validation et invalidation des stratégies et modèles obtenus grâce à la confrontation à la réalité

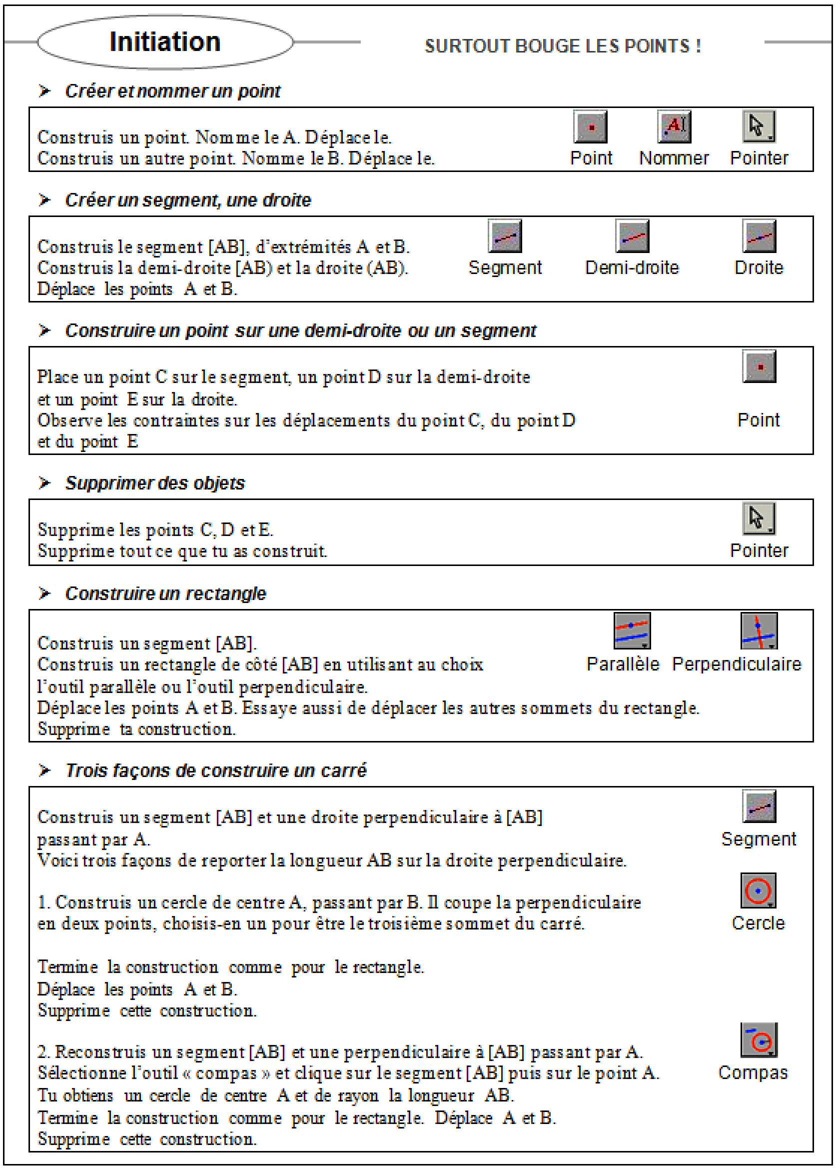
Les validations et invalidations proviennent d'une confrontation à la réalité désignée à l'étude.

De plus, à l'issue de la situation 2, la question de ce qui a été travaillé et appris lors de cette situation est posée :

- Institutionnalisation ? Quels savoirs institutionnaliser ?

III.2. Expérimentation 2 en France (juillet 2010)

La version de l'ingénierie dans cette expérimentation articule une situation d'initiation à Cabri, une situation préalable et trois situations 1, 2 et 3. Nous présentons ci-après les fiches utilisées dans cette expérimentation.



Initiation — SURTOUT BOUGE LES POINTS !

➤ *Créer et nommer un point*

Construis un point. Nomme le A. Déplace le.
Construis un autre point. Nomme le B. Déplace le.

Point | Nommer | Pointer

➤ *Créer un segment, une droite*

Construis le segment [AB], d'extrémités A et B.
Construis la demi-droite [AB) et la droite (AB).
Déplace les points A et B.

Segment | Demi-droite | Droite

➤ *Construire un point sur une demi-droite ou un segment*

Place un point C sur le segment, un point D sur la demi-droite et un point E sur la droite.
Observe les contraintes sur les déplacements du point C, du point D et du point E

Point

➤ *Supprimer des objets*

Supprime les points C, D et E.
Supprime tout ce que tu as construit.

Pointer

➤ *Construire un rectangle*

Construis un segment [AB].
Construis un rectangle de côté [AB] en utilisant au choix l'outil parallèle ou l'outil perpendiculaire.
Déplace les points A et B. Essaye aussi de déplacer les autres sommets du rectangle.
Supprime ta construction.

Parallèle | Perpendiculaire

➤ *Trois façons de construire un carré*

Construis un segment [AB] et une droite perpendiculaire à [AB] passant par A.
Voici trois façons de reporter la longueur AB sur la droite perpendiculaire.

Segment

1. Construis un cercle de centre A, passant par B. Il coupe la perpendiculaire en deux points, choisis-en un pour être le troisième sommet du carré.

Cercle

Termine la construction comme pour le rectangle.
Déplace les points A et B.
Supprime cette construction.

2. Reconstruis un segment [AB] et une perpendiculaire à [AB] passant par A.
Sélectionne l'outil « compas » et clique sur le segment [AB] puis sur le point A.
Tu obtiens un cercle de centre A et de rayon la longueur AB.
Termine la construction comme pour le rectangle. Déplace A et B.
Supprime cette construction.

Compas

3. Reconstruis un segment [AB] et une perpendiculaire à [AB] passant par A.

Distance

Sélectionne l'outil « distance ou longueur » et clique sur [AB].
Déplace A et B et constate que la mesure de AB s'actualise au fur et à mesure du déplacement.
Construis une demi droite d'origine A et perpendiculaire à [AB]. Tu peux le faire en sélectionnant « demi-droite » puis A puis en cliquant sur la perpendiculaire à [AB].

Report de mesure

Sélectionne l'outil « report de mesure ».
Clique sur la mesure de AB puis sur la demi-droite.
Tu obtiens un point qui est sur la droite perpendiculaire, exactement à la distance AB de A.
Supprime cette construction.

➤ ***Mesures de longueurs et d'aires***

Distance

Repars de la construction du carré avec un cercle.
Mesure le côté [AB] du carré avec l'outil distance.
Sélectionne l'outil « calculatrice » pour calculer l'aire du carré (côté x côté)

Calculatrice

Pour cela, tu cliques sur :
- la mesure AB, elle s'affiche sous la forme d'une variable « a » dans la calculette,
- puis sur l'opération x
- puis à nouveau sur la mesure AB
- puis sur le signe =.

Le résultat apparaît dans la fenêtre de la calculatrice.
Attrape le résultat avec la souris et place-le dans la fenêtre de construction.
Déplace les points A et B et constate que la mesure de l'aire du carré s'actualise quand le carré varie.

Aire

Construis le carré avec l'outil « polygone »
Avec l'outil « aire » affiche l'aire du carré.
Constate qu'elle est toujours égale à celle que tu as calculée précédemment.

Avec l'outil « aire », affiche l'aire du cercle de centre A et passant par B.
Avec l'outil « calculatrice », calcule le rapport entre l'aire du cercle et celle du carré.
Déplace ton résultat dans la fenêtre de construction.
Déplace les points A et B.
Que constates-tu sur le rapport entre l'aire du cercle et celle du carré ?
Supprime cette construction.

➤ ***Une jolie trace***

Construis un segment [AB].
Construis un cercle de centre A, passant par B.

Trace

Construis un point M sur le cercle, puis le triangle ABM.
Construis deux hauteurs du triangle ABM et leur point d'intersection H.
Sélectionne l'outil « trace » et clique sur H.
Déplace le point M. Tu obtiens une courbe rouge qui est la trace du point H.

Tu ne peux pas attraper directement le point H, mais tu peux le faire bouger en déplaçant le point M. On dira que le point M « **pilote** » le point H.

Situation 0

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S0-binome.fig »

Consigne 2 : commencer l'enregistrement : Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.

Consigne 3 : enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer.

Sur l'écran, vous pouvez voir deux demi-droites horizontales d'origine respective O et O' et parallèles. Sur la demi-droite Ox est placé un point P mobile.

Travail à faire : construire sur la demi-droite O'x' un point P', **piloté par le point P**, tel que O'P' = 1,72 x OP.

Attention ! Avant de fermer le fichier, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Situation 1

Binôme n° …

Un parc d'attractions possède une grande roue. Au début du voyage, M s'assoit dans une cabine.

Photo d'une grande roue

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S1-binome.fig »

Consigne 2 : commencer l'enregistrement : Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.

Consigne 3 : enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer.

A l'écran vous pouvez voir un point P placé sur une demi-droite d'origine A.

Travail à faire : construire à l'écran une figure géométrique représentant le manège et la cabine de M de façon à ce que le déplacement du point P pilote le mouvement de la cabine de M.

Attention ! Avant de fermer le fichier, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Situation 2 – Fiche 1

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « SituationS2-P1-binome.fig »

Consigne 2 : commencer l'enregistrement : Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.

Consigne 3 : enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer.

A l'écran, vous pouvez voir un point P sur la demi-droite d'origine O, un point I fixe sur le cercle et un point M qui se déplace sur le cercle, piloté par le point P.

Travail à faire : placer sur la demi-droite OP le point P1 correspondant à 1 tour de la cabine M, le point P2 correspondant à 2 tours de la cabine M, le point P3 correspondant à 3 tours de la cabine M.

Attention ! Avant de fermer le fichier, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Situation 2 – Fiche 2

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « SituationS2-P2-Binome.fig »

Consigne 2 : commencer l'enregistrement : Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.

Consigne 3 : enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer.

A l'écran, vous pouvez voir un point P sur la demi-droite d'origine A, un point I fixe sur le cercle et un point M qui se déplace sur le cercle, piloté par le point P.
Vous pouvez voir *aussi* les points P1, P2 et P3 sur la demi-droite d'origine A tels que nous venons de les construire.

On sait de plus qu'un tour complet de la grande roue dure 5 minutes.

Travail à faire : Placer le point U pour que le point P se déplace de A à U pendant la première minute du voyage de M.

Attention ! Avant de fermer le fichier, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Situation 3- Fiche 1

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S3-P1-binome.fig

Consigne 2 : commencer l'enregistrement : Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.

Consigne 3 : enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer.

M entre dans sa cabine lorsqu'elle passe au plus près du sol, au point I. La grande roue du manège a un diamètre de 40 m et son centre est situé à 22 m du sol.

A l'écran,vous pouvez voir le cercle représentant le manège, le point I, un segment représentant le sol, et l'axe du temps construit précédemment.

Travail à faire : trouver à quelle hauteur du sol se trouve la cabine M au bout de 2,5 minutes ? Au bout de 7 minutes ?

Utiliser le tableau ci-dessous pour répondre

	Hauteur	**Comment avez-vous fait ?**
Pour t = 2,5 minutes		
Pour t = 7 minutes		

Attention ! Avant de fermer le fichier, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Situation 3 – Fiche 2

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S3-P1-binome.fig

Consigne 2 : commencer l'enregistrement : Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.

Consigne 3 : enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer.

Une lampe rouge éclaire par intermittence un endroit fixe (noté L) du manège où passent les cabines. Cet endroit est à 35 mètres du sol. La lampe s'allume pendant 1 minutes toutes les 3 minutes.
Si une cabine est éclairée par la lampe rouge lors de son passage en L, son occupant gagne un voyage gratuit.

On se demande si M va gagner un voyage gratuit sachant que la lampe s'allume au moment où il monte dans sa cabine.

A l'écran,vous pouvez voir le cercle représentant le manège, le point I, un segment représentant le sol, et l'axe du temps construit précédemment.

Travail à faire :
Placer le point fixe L sur le cercle.

Question :
M va –t-il gagner un voyage gratuit ? Peut-il en gagner d'autres ?

Attention ! Avant de fermer le fichier, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Situation 3 - Fiche 3

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S3-P3-binome.fig »

Consigne 2 : commencer l'enregistrement : Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.

Consigne 3 : enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer.

Travail à faire :
Tracer la droite qui passe par le point M et qui est perpendiculaire au sol.
Appeler H le point d'intersection avec le sol.
Mesurer la longueur MH.
Tracer une demi-droite d'origine P et perpendiculaire à l'axe du temps.
Reporter la mesure MH sur la nouvelle demi-droite .
On obtient le point M'.

Question :
Si on déplace P que se passe –t-il pour M' ?

Attention ! Avant de fermer le fichier, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Figure 27. Les situations dans l'expérimentation 2

Par rapport à l'expérimentation 1, l'expérimentation 2 apporte les éléments et les modifications suivants :

- une séance d'initiation à Cabri articulée à l'ingénierie a été ajoutée ; son objectif est de provoquer, chez les élèves, une genèse instrumentale minimale des outils nécessaires à l'ingénierie. Si les élèves connaissent déjà Cabri, la séance d'initiation n'est pas nécessaire, on commence directement par la situation 0 ;

- la situation 0 a été extraite de la situation 1 ; en effet, il est apparu que la notion de pilotage d'un point par un autre, instrument de modélisation de la co-variation, n'est pas traitable directement par les élèves au cours de la résolution de la situation 1 ;

- la situation 2 a été modifiée relativement à l'introduction de l'axe du temps ;

- la situation 3 a été ajoutée ; la conception de cette situation, qui finalise l'ingénierie, a été délicate en raison des difficultés que nous avons rencontrées pour identifier les conditions rendant incontournables le recours au caractère périodique des fonctions.

Cette expérimentation a été réalisée avec 2 binômes d'élèves de fin de Seconde, à Grenoble, dans les locaux du laboratoire LIG en juillet 2010. Elle a duré 4 heures, l'enseignant était Alain Birebent et trois observateurs étaient présents, Annie Bessot, Nguyen Thi Nga et Le Thai Bao Thien Trung.

Propositions d'évolution de l'ingénierie après la deuxième expérimentation

L'initiation a bien fonctionné. Cependant, l'outil « trace » a eu un tel impact sur les élèves, que dans la suite du travail, cet outil a fait l'objet de multiples tentatives d'utilisation inappropriées. Cela souligne le fait connu que chaque situation peut orienter fortement le travail ultérieur des élèves et donc, la prise en charge de l'initiation par l'enseignant doit être faite en connaissance de la suite du travail.

Pour la situation 1, le cercle est immédiatement proposé pour modéliser la roue, mais le modèle construit spontanément n'est pas le modèle géométrique intermédiaire attendu. Le centre choisi pour le cercle est O (origine de la demi-droite donnée) et le rayon est OP : le cercle varie en fonction de P. Il semble que la notation O de l'origine de la demi-droite favorise cette construction puisque dans les habitudes scolaires, O désigne le plus souvent le centre d'un cercle.

La situation 3 doit être modifiée pour que l'utilisation de la sinusoïde soit pertinente (moins coûteuse que les autres stratégies). La concurrence entre les deux modèles (modèle C : le cercle dans Cabri et modèle O : la sinusoïde) doit être organisée par la situation. Cette deuxième version de l'ingénierie laisse ouverte la question des savoirs à institutionnaliser en fin de situation 3 et donc à la fin de l'ingénierie.

III.3. Expérimentation 3 au Viêt Nam (Septembre 2010)

Par rapport à l'expérimentation 2, l'expérimentation finale réalisée au Viêt Nam apporte les modifications suivantes :

- la séance d'initiation a été raccourcie car elle s'est révélée trop longue au cours de l'expérimentation 2 et l'initiation à l'outil « trace » a été retirée pour tenir compte de l'impact négatif apparu dans l'expérimentation. Cet outil va être introduit mais plus tard dans la fiche 3 de la situation 3.

- la situation 1 comporte deux phases avec les mêmes consignes mais pas les mêmes fenêtres Cabri (cf. fiches 1 et 2). L'origine de la demi-droite donnée est notée A pour éviter toute confusion avec la désignation du centre d'un cercle. Dans la phase 2, à l'ouverture de la fenêtre Cabri apparaît un cercle représentant le manège institutionnalisé par l'enseignant à la fin de la phase 1.

- la situation 2 a été conservée sans modification

- la situation 3 a été profondément modifiée :

+ Les questions sur la hauteur de la cabine au bout de 2,5 min et 7 min ont été supprimées, car pour les élèves vietnamiens, cela risquait de provoquer un passage massif au cadre algébrique comme l'attestent les réponses aux items de notre questionnaire (cf. chapitre 3).

+ A côté du modèle intermédiaire du cercle construit dans Cabri (modèle C), le modèle O (dans le registre graphique : une sinusoïde) est donné pour mettre en concurrence ces deux modèles dans la résolution du problème proposé. L'institutionnalisation vise l'articulation entre les deux modèles, souvent absente comme le montre l'analyse institutionnelle et les résultats des élèves au questionnaire (cf. chapitres 2 et 3).

+ La périodicité doit être formalisée dans la résolution d'un problème de la coïncidence de deux phénomènes périodiques. Le passage à un modèle algébrique est demandé comme ultime étape du processus de modélisation d'un phénomène périodique.

La partie la plus importante de notre étude porte sur l'expérimentation finale, notamment sur la situation 3 relative à la périodicité. Les analyses a priori et a posteriori de l'ingénierie utilisée dans cette expérimentation seront présentées dans les parties qui suivent.

Nous schématisons la succession des quatre situations de notre ingénierie autour du problème du manège dans la figure 28. La numérotation commençant par zéro est un effet du processus de conception de l'ingénierie qui a débuté par la situation 1 et qui s'est enrichi d'une situation préalable que nous avons numérotée 0. Nous ne présentons dans ce schéma que ce qui a trait au processus de modélisation et aux conceptions de la notion de fonction et de variable.

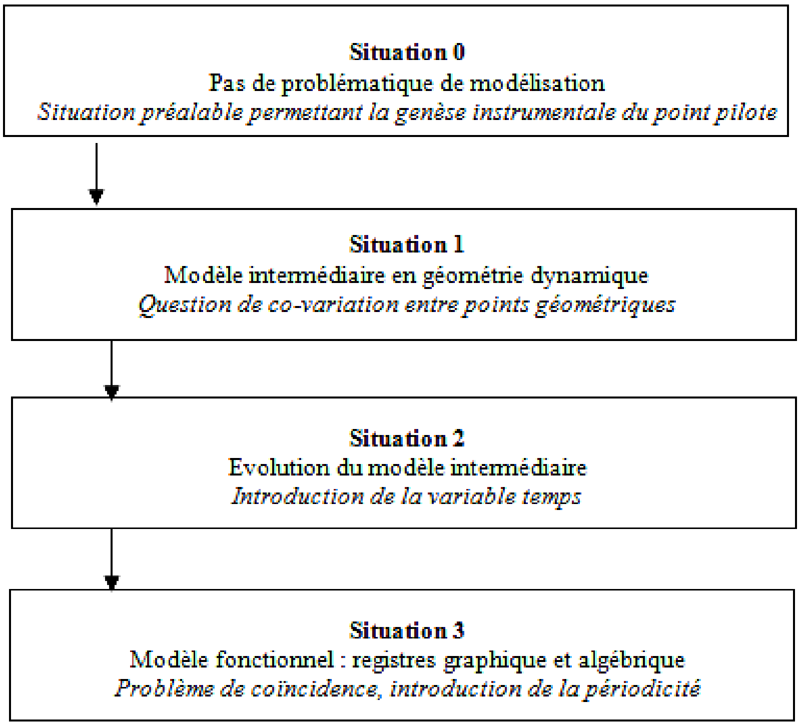


Figure 28. Succession des 4 situations constituant l'ingénierie

IV. Conditions de l'expérimentation finale et du recueil des données

L'expérimentation finale a été réalisée au début de l'année scolaire 2010-2011 avec 12 élèves (répartis en 6 binômes) de classe 12 (équivalent de la terminale en France) du lycée Truong Chinh de Hô Chi Minh ville, Viêt Nam.

Rappelons l'organisation curriculaire des savoirs liés à la périodicité en physique et en mathématiques pour un lycée vietnamien :

Connaissances	Niveaux d'enseignement
Mouvement circulaire uniforme	Classe 10
Fonctions trigonométriques	Classe 11
Oscillations harmoniques	Début de classe 12

Tableau 24. Connaissances disponibles liées à la périodicité avant de l'expérimentation

Comme les classes choisies pour l'expérimentation sont des classes 12 après enseignement de l'oscillation harmonique, on peut faire l'hypothèse que la périodicité des fonctions trigonométriques et les deux modèles C et O sont disponibles.

L'expérimentation s'est déroulée sur deux séances de 2,5 heures, avec l'enseignant Le Thai Bao Thien Trung et trois observateurs, Nguyen Thi Nga, Tang Minh Dung et Vu Nhu Thu Huong.

+ La première séance (2,5 heures) comprend la situation d'initiation à Cabri, situation préalable, situation 1 et situation 2.

+ La deuxième séance (2,5 heures) concerne la seule situation 3.

Chaque binôme travaille sur un ordinateur sur lequel a été installé le logiciel Cabri II Plus. La langue du logiciel utilisée dans la séquence expérimentale est le vietnamien.

Les données recueillies dans la séquence expérimentale sont les suivantes :

- Les rapports des observateurs ;
- Les fiches de réponses des élèves et leurs brouillons ;
- Les fichiers Cabri enregistrés par les élèves après leur travail ;
- Les enregistrements vidéos des manipulations de l'environnement Cabri par les élèves, à l'aide de l'outil « enregistrement de session » dans Cabri ;
- Les enregistrements audios des binômes ;
- L'enregistrement vidéo de l'enseignant.

Partie B. ETUDE DE LA SEANCE 1

La séance 1 a pour but de permettre à partir d'une initiation au logiciel Cabri II Plus d'entrer dans un processus de modélisation d'un phénomène de co-variation périodique issu de la réalité : le mouvement du manège. Il s'agit de construire un modèle intermédiaire géométrique de ce phénomène et de mettre en place la variable indépendante temps.

I. Analyse a priori et prévision du déroulement

I.1. Présentation et analyse de la situation d'initiation à Cabri

Puisque le logiciel Cabri n'est pas enseigné à l'école au Viêt Nam, cette situation d'initiation à Cabri est indispensable. Comme nous l'avons montré précédemment, l'objectif de cette situation est d'initier une genèse instrumentale des outils nécessaires pour la séquence expérimentale. Dans cette situation, les commandes suivantes sont introduites :

+ point, segment, droite, demi-droite
+ droite perpendiculaire, droite parallèle
+ cercle, compas
+ calculatrice
+ distance ou longueur
+ report de mesure

Il s'agit ici, à partir des consignes données, d'amener l'élève à mettre en œuvre lui-même et à exploiter des outils de Cabri, l'enseignant n'intervenant que lorsqu'il y a des questions de la part de l'élève. Nous présentons cette situation par la figure ci-après.

Initiation

SURTOUT BOUGE LES POINTS !

- ***Créer et nommer un point***

Construis un point. Nomme le A. Déplace le.
Construis un autre point. Nomme le B. Déplace le.

Point Nommer Pointer

- ***Créer un segment, une droite***

Construis le segment [AB], d'extrémités A et B.
Construis la demi-droite [AB) et la droite (AB).
Déplace les points A et B.

Segment Demi-droite Droite

- ***Construire un point sur une demi-droite ou un segment***

Place un point C sur le segment, un point D sur la demi-droite et un point E sur la droite.
Observe les contraintes sur les déplacements du point C, du point D et du point E

Point

- ***Supprimer des objets***

Supprime les points C, D et E.
Supprime tout ce que tu as construit.

Pointer

- ***Construire un rectangle***

Construis un segment [AB].
Construis un rectangle de côté [AB] en utilisant au choix l'outil parallèle ou l'outil perpendiculaire.
Déplace les points A et B. Essaye aussi de déplacer les autres sommets du rectangle.
Supprime ta construction.

Parallèle Perpendiculaire

- ***Trois façons de construire un carré***

Construis un segment [AB] et une droite perpendiculaire à [AB] passant par A.
Voici trois façons de reporter la longueur AB sur la droite perpendiculaire.

Segment

1. Construis un cercle de centre A, passant par B. Il coupe la perpendiculaire en deux points, choisis-en un pour être le troisième sommet du carré.

Cercle

Termine la construction comme pour le rectangle.
Déplace les points A et B.
Supprime cette construction.

2. Reconstruis un segment [AB] et une droite perpendiculaire à [AB] passant par A.
Sélectionne l'outil « distance ou longueur » et clique sur [AB].
Déplace A et B et constate que la mesure de AB s'actualise au fur et à mesure du déplacement.
Construis une demi droite d'origine A et perpendiculaire à [AB]. Tu peux le faire en sélectionnant « demi-droite » puis A puis en cliquant sur la perpendiculaire à [AB].

Distance ou longueur

Sélectionne l'outil « report de mesure ».
Clique sur la mesure de AB puis sur la demi-droite.
Tu obtiens un point qui est sur la droite perpendiculaire, exactement à la distance AB de A.
Supprime cette construction.

Report de mesure

3. Reconstruis un segment [AB] et une droite perpendiculaire à [AB] passant par A.

Sélectionne l'outil « compas » et clique sur le segment [AB] puis sur le point A.
Tu obtiens un cercle de centre A et de rayon la longueur AB.
Termine la construction comme pour le rectangle. Déplace A et B.
Conserve cette construction.

Compas

➢ ***Mesures de longueurs***

Mesure le côté [AB] du carré avec l'outil « distance ou longueur ».
Sélectionne l'outil « calculatrice » pour calculer le périmètre du carré (4 x côté)

Distance ou longueur

Pour cela, tu cliques sur :
- la mesure AB, elle s'affiche sous la forme d'une variable « a » dans la calculette,
- puis sur l'opération x
- puis le nombre 4
- puis sur le signe =

Calculatrice

Le résultat apparaît dans la fenêtre de la calculatrice.
Attrape le résultat avec la souris et place-le dans la fenêtre de construction.
Déplace les points A et B et constate que la mesure du périmètre du carré s'actualise quand le carré varie.

Avec l'outil « distance ou longueur », affiche le périmètre du cercle de centre A et passant par B.
Avec l'outil « calculatrice », calcule le rapport entre le périmètre du cercle et celui du carré.
Déplace ton résultat dans la fenêtre de construction. Déplace les points A et B.
Que constates-tu sur le rapport entre le périmètre du cercle et celui du carré ?
Supprime cette construction.

Distance ou longueur

Figure 29. Situation d'initiation à Cabri

Lors de cette phase d'initiation, le déplacement des points dans Cabri est un élément central pour mettre en évidence certaines propriétés géométriques comme par exemple l'invariance du rapport entre le périmètre du cercle et celui du carré quand on déplace les points A et B. De plus, le déplacement des points éclaire la contrainte suivante du logiciel sur les points : il y a des points libres et des points dont le déplacement dépend des autres.

Dans la construction d'un carré, trois stratégies de report d'une mesure AB sur une droite perpendiculaire à un côté [AB] sont introduites associées aux trois commandes : Cercle, Compas ou Report de mesure. L'enjeu de l'initiation est de rendre disponible le report de mesure en concurrence avec les deux autres stratégies.

I.2. Situations 0 et 1 : analyse a priori et prévision du rôle de l'enseignant

I.2.1. Situation 0 : notion « point pilote un autre point »

L'enjeu de cette situation est de mettre en place la notion « un point pilote un autre point », connaissance liée au déplacement des points dans Cabri. Un point pilote a au moins 2 caractéristiques :

+ on peut l'« attraper »
+ il fait se déplacer un autre point.

Soulignons que deux connaissances spécifiques à la notion de fonction, celles de variable indépendante et de variable dépendante, sont sous-jacentes à la connaissance « point pilote d'un autre ».

I.2.1.1. Analyse a priori

Voici les consignes données.

Situation 0

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S0-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes **: Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

Sur l'écran, vous pouvez voir deux demi-droites horizontales d'origine respective A et A' et parallèles. Sur la demi-droite Ax est placé un point P mobile.

Travail à faire : construire sur la demi-droite A'x' un point P' tel que A'P' = 1,72 x AP.

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Figure 30. Situation 0

Suite à l'exécution de la consigne 1, la fenêtre suivante apparaît.

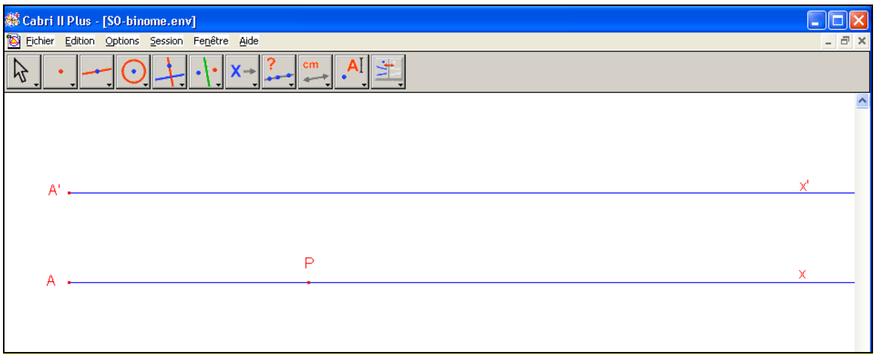


Figure 31. Ecran Cabri à l'ouverture du fichier « S0-binome.env »

Ci-après les stratégies possibles pour placer le point P'.

- Stratégie perceptive :

Décrivons d'abord cette stratégie en détaillant la suite des manipulations des commandes Cabri pour chaque action principale :

+ Mesurer AP : pointer dans le menu Cabri « Distance ou longueur », pointer A et pointer P

+ Calculer 1,72xAP : pointer dans le menu « Calculatrice », pointer le nombre indiquant la mesure AP, cliquer sur le signe « x », puis sur le nombre 1, puis sur le signe « , », puis sur les nombres 7 et 2 et enfin sur le signe « = » dans la calculatrice

+ Attraper le résultat et le placer sur l'écran Cabri

+ Construire le point P' sur A'x' : pointer dans le menu « Point », pointer sur la demi-droite A'x', taper P'

+ Mesurer A'P' : pointer dans le menu Cabri « Distance ou longueur », pointer A' et pointer P'

+ Déplacer P' pour que la mesure de A'P' soit égale à la mesure 1,72xAP calculée précédente : pointer P' et voir le changement de la mesure de A'P'.

Pour simplifier la présentation des stratégies, nous ne présenterons désormais que les actions principales de ces stratégies. Par exemple, la stratégie perceptive précédente est décrite en style concis comme suit :

Mesurer AP / calculatrice : (mesure de AP) x 1,72 soit ℓ / Point P' sur la demi-droite A'x' / Mesurer A'P' / Déplacer P' pour que la mesure de A'P' soit égale à ℓ.

- Stratégie « report de mesure » :

Mesurer AP / calculatrice : (mesure de AP) x 1,72 / report de mesure sur A'x' pour avoir P'.

- Stratégie « compas » :

Mesurer AP / calculatrice : (mesure de AP) x 1,72 / Compas : résultat calcul précédent et point A' / Point P' intersection de la demi droite A'x' avec le cercle.

Dans cette situation, le déplacement du point P organise un milieu pour la validation. En effet, pour la stratégie perceptive, quand on déplace le point P, le point P' ne se déplace pas : la mesure de A'P' ne s'actualise pas. Donc l'égalité A'P' = 1,72xAP n'est plus vraie. Par contre, dans les stratégies « report de mesure » et « compas », le déplacement du point P entraîne le déplacement du point P' car la mesure A'P' s'actualise. Ceci permet de valider les deux dernières stratégies.

De plus, ces deux stratégies sont concurrentes, même si la stratégie « report de mesure » est un peu moins coûteuse en termes de nombre de manipulations dans Cabri. Cependant, la stratégie « compas » ne permet pas le report de mesure sur un cercle.

I.2.1.2. Déroulement prévu et rôle de l'enseignant

Laisser les élèves travailler pendant 15 minutes. Durant cette phase, l'enseignant observe les élèves pour repérer ce qu'ils font, ce qui nécessite qu'il ait une bonne connaissance des stratégies possibles dans Cabri et des observables de ces stratégies.

Lors d'une synthèse collective, l'enseignant revient sur les stratégies observées et les rejoue au vidéoprojecteur : si les deux stratégies « report de mesure » et « compas » apparaissent, il n'en privilégie aucune. Si la stratégie « report de mesure » n'apparaît pas, l'enseignant l'introduit.

Puis l'enseignant institutionnalise la notion « point pilote d'un autre ». Ici, le point P se déplace sur la demi-droite Ax et entraîne le déplacement du point P' sur la demi-droite A'x' tels que A'P' = 1,72xAP. On dit que le point P pilote le point P'.

I.2.2. Situation 1 : construction d'un modèle intermédiaire

Cette situation a pour enjeu de faire apparaître un modèle intermédiaire géométrique de la co-variation du déplacement d'un point sur une demi-droite et du déplacement de la cabine sur le manège.

I.2.2.1. Analyse a priori de la situation 1

Voici les consignes données.

SITUATION 1
Fiche 1

Binôme n° …

Un parc d'attractions possède une grande roue. Au début du voyage, M s'assoit dans une cabine.

Photo d'une grande roue

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S1-P1-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

A l'écran vous pouvez voir un point P placé sur une demi-droite d'origine A.

Travail à faire : construire à l'écran une figure géométrique représentant le manège et la cabine de M de façon à ce que le déplacement du point P pilote le mouvement de la cabine de M.

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Figure 32. Situation 1 – Fiche 1

Suite à l'exécution de la consigne 1, voici ce que l'on voit à l'écran de Cabri : un point P placé sur une demi-droite d'origine A.

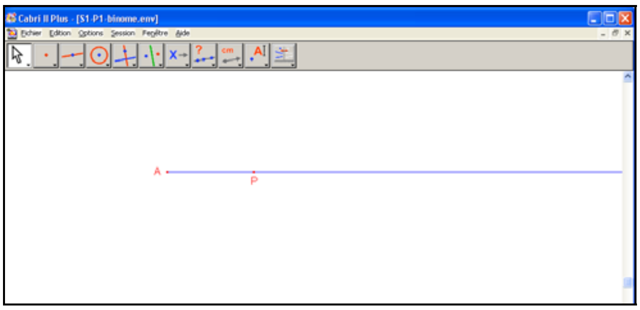


Figure 33. Ecran Cabri à l'ouverture du fichier « S1-P1-binome.env »

Quels éléments de la pseudo – réalité choisir de représenter ou de ne pas représenter ? Nous faisons l'hypothèse H1 suivante :

(H1) : La grande roue du manège sera représentée par un cercle et la cabine par un point du cercle, ce cercle changeant implicitement de statut quand il s'agira de représenter le déplacement de la cabine : le cercle représentera alors la trajectoire de la cabine.

Les questions auxquelles répondre pour modéliser géométriquement la situation réelle invoquée sont :
+ Où représenter le centre du cercle : sur la droite donnée ou non ?
+ Quelle dimension pour le rayon ?
+ Faut-il représenter le sol (présent sur la photo) ? Si oui, est-ce à l'aide d'une droite supplémentaire ou avec la demi-droite donnée ?
+ Quelle position choisir pour le cercle construit par rapport à la demi-droite donnée : extérieure, tangente, sécante, etc. ?

Nous présentons ci-après les stratégies possibles de modélisation dans Cabri pour la construction d'un modèle représentant le manège et la relation du déplacement de P sur la demi-droite avec le mouvement d'un point - cabine M sur le « cercle - manège ».

- Stratégies numériques « report de mesure »

+ Stratégie « report de mesure directe »

Construire un cercle image de la grande roue / Mesurer AP, P distinct de A / Choisir un point I « origine » sur le cercle / Reporter la mesure de la distance AP sur le cercle à partir de I.

Cette stratégie consiste à transférer les points d'une demi-droite en points d'un cercle à la façon de l'enroulement d'une demi-droite sur un cercle.

+ Stratégie « report de mesure principale » (en référence avec la notion de mesure principale d'un angle : mesure comprise entre 0 et 2π).

Construire un cercle image de la grande roue / Mesurer le périmètre, soit ℓ / Mesurer AP sur la demi-droite, noté AP / Diviser ce nombre AP par ℓ avec la calculatrice / Prendre avec la calculatrice la valeur entière [commande « floor »], soit n [Attention si $AP < \ell$, $n = 0$] / Avec la calculatrice, calculer $AP - n \times \ell$ [on obtient la mesure principale IM] / Choisir sur le cercle une origine I / Reporter sur le cercle la mesure principale IM à partir de I.

Pour ces deux stratégies de report, il est nécessaire de choisir et de marquer un point « origine » sur le cercle. Le choix qui sera vraisemblablement fait par les élèves est celui d'un point le plus bas possible par rapport au sol supposé horizontal (qu'il soit présent ou non dans la modélisation) qui correspondrait dans la réalité à la position de départ de la cabine de M. Mais il y a une incertitude sur le choix des positions relatives des 2 origines, celle du cercle et celle de la demi-droite, il peut s'agir du même point ou pas. Ces stratégies peuvent donc produire différents modèles de co-déplacement.

- Stratégie numérico-géométrique : stratégie « compas »

Construire un cercle image de la grande roue / Construire un autre cercle (avec la commande « compas ») centré en un point quelconque du cercle et de rayon AP / Le point M est une des deux intersections de ce cercle et du cercle image de la grande roue.

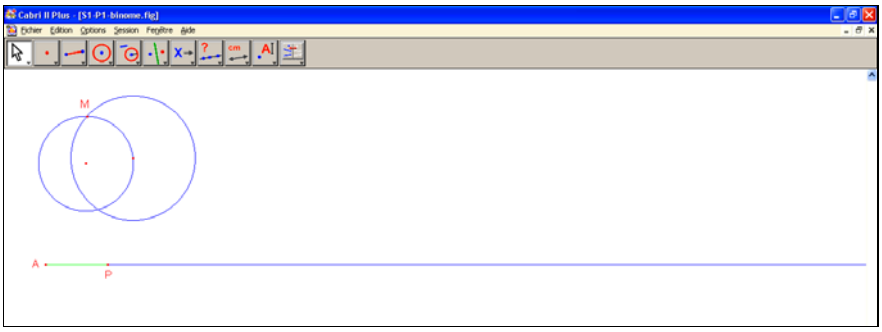


Figure 34. Stratégie « compas »

On voit que le point M est bien piloté par P mais il disparaît quand le cercle a un rayon AP plus grand que le diamètre du cercle image de la grande roue. Donc le modèle est incompatible avec la réalité.

- Stratégies géométriques :

+ Stratégie « piston » : transmission d'un mouvement alternatif (translation de longueur t) du point P en un mouvement circulaire d'un point M. Ceci est impossible à réaliser dans Cabri.

+ Stratégie « intersection » : Construire un cercle image de la grande roue et une droite passant par P qui coupe perceptivement le cercle. Le point M est à l'intersection de cette droite mobile liée à P et du cercle. Voici un exemple avec une droite mobile perpendiculaire à la demi-droite donnée.

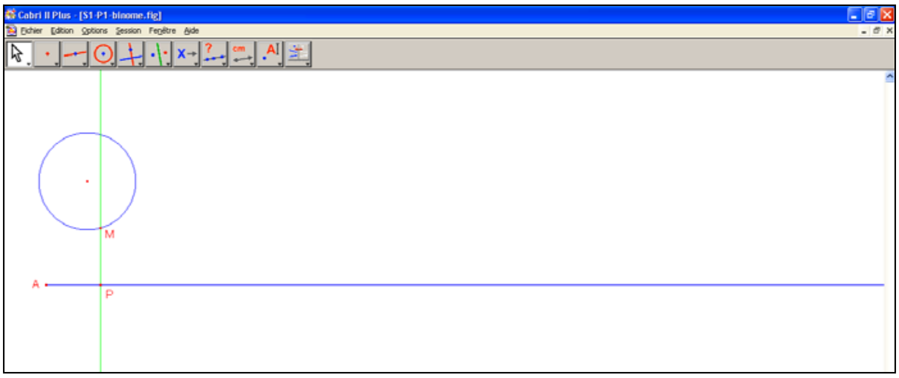


Figure 35. Stratégie « intersection »

+ Stratégie « stéréographique » (projection) : Construire un cercle image de la grande roue / Choisir un point I sur le cercle / Le point M est l'intersection de PI (P mobile sur la demi-droite donnée) avec le cercle.

Figure 36. Stratégie stéréographique

Le point M ne fait qu'un tour incomplet sur le cercle quand P se déplace sur la demi-droite : quand P s'éloigne de plus en plus à droite sur la demi-droite, PI tend vers la tangente au cercle en I.

On voit que les stratégies numérico-géométriques ou géométriques sont soit trop coûteuses, soit impossibles à mener soit productives de modèles non compatibles avec la réalité. Donc la stratégie « report de mesure directe » est une stratégie « optimale », les arguments étant son coût réduit et les limites des stratégies non numériques. Mais la commande « report de mesure » présente dans le menu Cabri est-elle pour les élèves une connaissance instrumentale permettant d'outiller la stratégie « report de mesure directe » ?

Les modèles géométrico – mécaniques produits doivent être « cohérents » avec certaines caractéristiques de la réalité : certains éléments du milieu permettent de rejeter ou d'accepter collectivement les modèles intermédiaires produits, comme par exemple :

+ la cabine ne sort pas du manège
+ la cabine peut faire plusieurs tours
+ la cabine tourne toujours dans le même sens
+ la cabine tourne à vitesse constante, cela correspond à une hypothèse simplificatrice de modélisation.

C'est donc la référence à la réalité qui permet de valider ou non les constructions produites. Par exemple, la deuxième caractéristique de la réalité permet de rejeter la stratégie stéréographique. Par contre, la stratégie « report de mesure » respecte chacune des quatre contraintes citées.

I.2.2.2. Déroulement prévu et rôle de l'enseignant

Suite aux pré-expérimentations au Viêt Nam et en France, le déroulement prévu a été découpé en deux phases.

a. Phase 1 : le cercle comme modèle du manège

Ne laisser les élèves travailler que pendant 10 minutes pour que le cercle émerge comme modèle du manège. L'enseignant observe et repère les stratégies des élèves.

Après l'apparition du cercle, l'enseignant l'institutionnalise comme modèle du manège. Il souligne que son centre peut être n'importe où, sauf en P et que ce cercle ne peut pas passer par P. Ceci est justifié par confrontation avec la réalité : le centre du manège est fixe et le rayon ne peut pas être modifié en même temps que le point P car, lorsque les cabines tournent, le manège réel ne se déforme pas.

b. Phase 2 : le cercle comme trajectoire de la cabine M

Après l'institutionnalisation de l'enseignant, une fiche 2 identique à la fiche 1 est distribuée aux élèves. Pour que tous les binômes aient le même modèle du manège, à l'écran de Cabri apparaissent cette fois le cercle représentant le manège et la demi-droite AP. Notons que le cercle et la demi-droite sont placés pour que la stratégie stéréographique soit possible.

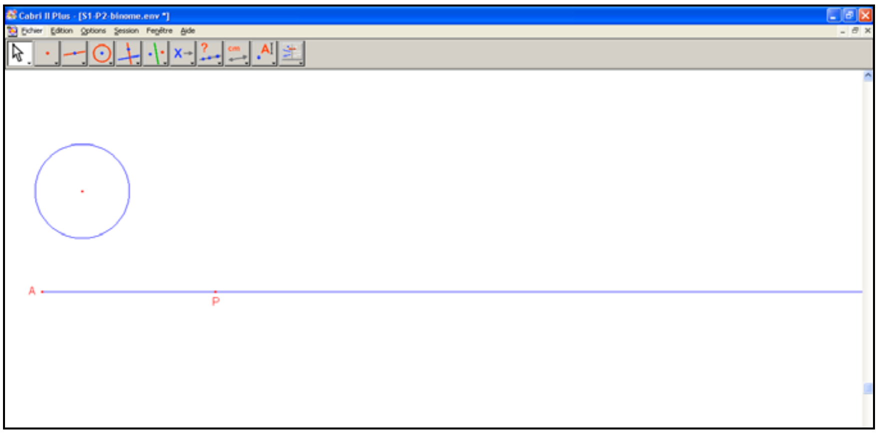


Figure 37. Ecran Cabri à l'ouverture du fichier « S1-P2-binome.env »

Dans cette phase, les élèves travaillent individuellement pendant 15 minutes.

Après l'observation du travail des élèves, si la stratégie « report de mesure » n'apparaît pas, l'enseignant l'introduit et l'institutionnalise en rejetant les autres modèles (stéréographique, compas) par confrontation à la réalité.

L'enseignant institutionnalise aussi *le processus de modélisation* qui consiste à chercher à construire une image de la réalité qui en conserve certains aspects et en néglige d'autres en fonction de questions que l'on se pose : ici le co-déplacement du point P et de la cabine.

I.3. Situation 2 : analyse a priori et prévision du rôle de l'enseignant

L'objectif de cette situation est de faire évoluer le modèle intermédiaire, déjà construit dans la situation 1. L'évolution du modèle doit déboucher sur une représentation explicite et linéaire du temps alors que cette variable existe implicitement dans la « mobilité » circulaire de la cabine.

I.3.1. Analyse a priori de la situation 2

Voici les consignes données.

SITUATION 2
Fiche 1

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S2-P1-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

A l'écran, vous pouvez voir un point P sur la demi-droite d'origine A, un point I fixe sur le cercle et un point M qui se déplace sur le cercle, piloté par le point P.

Travail à faire : placer sur la demi-droite AP le point P1 correspondant à 1 tour de la cabine M, le point P2 correspondant à 2 tours de la cabine M, le point P3 correspondant à 3 tours de la cabine M.

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Figure 38. Situation 2 – Fiche 1

Suite à l'exécution de la consigne 1, dans la fenêtre Cabri, apparaît le modèle géométrique de co-variation institutionnalisé à la fin de la situation 1.

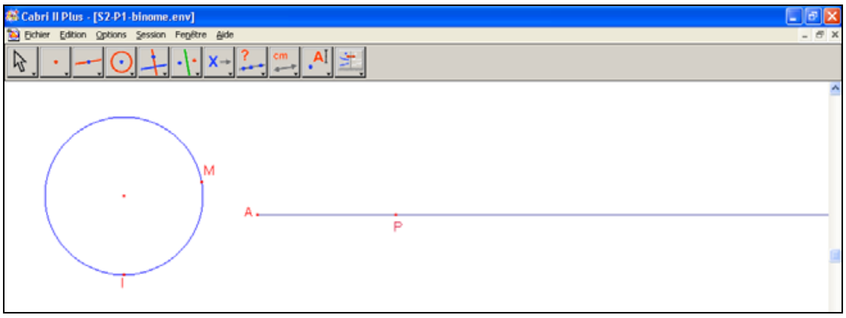


Figure 39. Ecran Cabri à l'ouverture du fichier « S2-P1-binome.env »

Quand le point P se déplace sur la demi-droite, le point M se déplace aussi sur un cercle. Le point M ne peut être déplacé que par l'intermédiaire du déplacement de P et il peut faire plusieurs tours. Un point I « origine » a été punaisé sur le cercle : il s'agit d'un point fixe. Le sol n'est pas représenté et la demi-droite est placée à droite du cercle pour qu'il ne puisse pas y avoir confusion.

Nous présentons d'abord les stratégies possibles, puis nous analyserons en termes de variables didactiques les principaux choix effectués et leur incidence sur les stratégies.

a. Stratégies possibles pour obtenir une graduation P1, P2, P3 de la droite du temps

Stratégies possibles pour marquer P1 sur la demi-droite [AP) :

- Stratégie « ajustement perceptif » : Déplacer P à partir de A sur la demi-droite [AP) pour que le point M se déplace sur le cercle une seule fois de I à I : « position P » / Construire un point P1 sur [AP) et le placer sur P en « position P » / Séparer P de la « position P » et donc de P1.

- Stratégie « report de mesure » : Mesurer le périmètre du cercle, soit ℓ / Report de mesure ℓ sur [AP) pour avoir P1.

- Stratégie « compas » : Mesurer le périmètre du cercle, soit ℓ / Compas : ℓ et point A / P1 : intersection de la demi-droite [AP) et le cercle.

Ces trois stratégies sont concurrentes et distinctes du point de vue de la problématique indépendance / dépendance, le temps devant se construire comme une variable indépendante. L'indépendance du temps émergera de la confrontation des deux types de stratégies : stratégie perceptive / stratégie report de mesure et stratégie compas. En effet, les différences entre les deux modèles construits par ces deux types de stratégies sont les suivantes :

- le premier modèle, obtenu par la stratégie « ajustement perceptif », est spécifique au cercle proposé à l'ouverture de la fenêtre Cabri ;

- le second modèle, obtenu par la stratégie « report de mesure » ou la stratégie « compas », n'est pas attaché au cercle particulier proposé à l'ouverture de la fenêtre Cabri : en ce sens ces stratégies fournissent un modèle plus général lié à l'indépendance du temps, comme nous allons le montrer plus loin. La stratégie « report de mesure » est plus économique du point de vue du nombre de commandes Cabri que la stratégie « compas ». C'est donc la stratégie optimale pour marquer le premier point P1.

Stratégies possibles pour marquer les points P2 et P3 sur la demi-droite [AP) :

- Stratégie « ajustement perceptif » : Déplacer P à partir de A sur la demi-droite [AP) pour que le point M se déplace sur le cercle de I à I, 2 fois (P2), puis 3 fois (P3). La graduation P1, P2 et P3 « ne résiste pas » à la modification de la taille du cercle.

- Stratégie géométrique : Utiliser la symétrie centrale ou la commande « Cercle » de Cabri.

- Stratégie « report de mesure » : Report de mesure 2ℓ sur [AP) pour avoir P2, report de mesure 3ℓ sur [AP) pour avoir P3.

La graduation dans ces deux derniers cas « résiste » à la modification de la taille du cercle.

b. Variables didactiques prises en comptes dans cette situation

V1 : Taille du cercle à l'écran Cabri

Le cercle et le segment représentant la demi-droite [AP) placés sur l'écran de Cabri sont tels que la longueur du segment est inférieure à deux fois le périmètre du cercle.

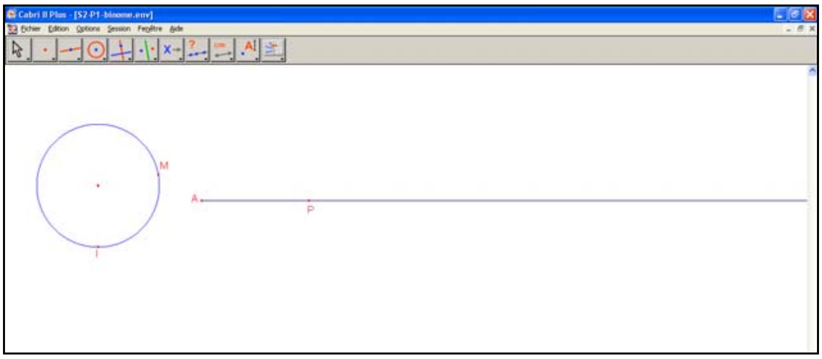


Figure 40. Ecran Cabri à l'ouverture du fichier « S2-P1-binôme.env »

Avec ce choix, la stratégie « ajustement perceptif » permet de placer le point P1 mais ne permet pas de construire les points P2 et P3 sans diminuer la taille du cercle.

V2 : taille du cercle modifiable ou non

Dans cette situation, la taille du cercle peut être modifiée en attrapant son image sur l'écran, son centre restant fixe. Ceci permet d'introduire la notion de changement d'échelle de la représentation du manège, notion importante dans le processus de modélisation. En rapport avec la réalité, si on change la taille du cercle représentant le manège, cela revient à regarder le manège de plus loin ou de plus près.

Par ailleurs, la réduction de la taille du cercle, permet de construire les points P2 et P3 par la stratégie « ajustement perceptif ». Cependant, quand on change la taille du cercle, les positions des points P1, P2 et P3 sur la demi-droite ne changent pas. Donc, ces points ne correspondent plus à 1 tour, 2 tours et 3 tours du nouveau cercle. La stratégie « ajustement perceptif » est donc spécifique au cercle proposé à l'ouverture de la fenêtre Cabri.

La graduation P1, P2 et P3 « ne résiste pas » à la modification de la taille du cercle dans le cas de la stratégie « ajustement perceptif » alors qu'elle résiste pour les autres stratégies. La combinaison des choix pour V1 et V2 organise donc un milieu qui permet de rejeter la stratégie « ajustement perceptif ».

V3 : durée d'un tour donnée ou non

Cette situation pose le problème de la représentation du temps, via *la durée d'un voyage*. La non donnée de la durée d'un tour initie une première graduation de l'axe AP correspondant au temps discret « nombre de tours ». L'unité de temps dans ce modèle est celui d'un tour complet du point M sur le cercle, c'est-à-dire un tour de la cabine sur la grande roue. Cette première graduation permet de problématiser la représentation du temps par une longueur (indépendante de la taille du manège) alors que, dans l'enseignement secondaire que ce soit en mathématiques ou en physique, la représentation linéaire du temps est un donné préconstruit.

L'introduction du numérique par la donnée de la durée (T) d'un voyage en minutes (c'est-à-dire une vitesse angulaire et une référence au temps universel : le « temps-minute »), introduit une autre unité de temps dans le modèle et conduit à la construction d'une seconde graduation de l'axe AP correspondant au temps continu mesuré en minutes. Une minute correspond donc à 1/T tour du voyage. On passe alors du temps discret « nombre de tours » au temps continu « minute ». Dans ce cas, la stratégie « ajustement perceptive » est plus coûteuse parce qu'il faut diviser géométriquement le cercle en T parties. Ceci favorise la stratégie report de mesure ou la stratégie compas.

I.3.2. Déroulement prévu et rôle de l'enseignant

On joue sur les deux valeurs de la variable V3 pour organiser en deux phases la situation 2.

a. Phase 1 : le temps discret « nombre de tour »

Dans cette phase, les élèves travaillent pendant 15 minutes sur la fiche 1 présentée précédemment. Si la stratégie « report de mesure » n'apparaît pas, au moment du débat, l'enseignant introduit cette stratégie comme production d'élèves d'une autre classe.

Il organise un débat collectif sur l'indépendance de la représentation du temps « nombre de tour » de la taille du cercle-manège qui se nourrit de la confrontation des deux types de stratégies (stratégie perceptive / stratégie report de mesure et stratégie compas).

La stratégie « report de mesure » et la notion de changement d'échelle sont institutionnalisées.

b. Phase 2 : le temps continu « minute »

Dans cette phase, une deuxième fiche est distribuée qui donne la durée d'un tour en minutes : un tour complet de la grande roue dure 5 minutes.

SITUATION 2
Fiche 2

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S2-P2-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

A l'écran, vous pouvez voir un point P sur la demi-droite d'origine A, un point I fixe sur le cercle et un point M qui se déplace sur le cercle, piloté par le point P.
Vous pouvez voir *aussi* les points P1, P2 et P3 sur la demi-droite d'origine A tels que nous venons de les construire.

On sait de plus qu'un tour complet de la grande roue dure 5 minutes.

Travail à faire :
Placer le point U pour que quand P se déplace de A à U, M se déplace dans la première minute du voyage.

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Figure 41. Situation 2 – Fiche 2

Le travail à faire ici est de placer le point U sur (AP] correspondant à la première minute du voyage de la cabine M, c'est-à-dire à 1/5 tour de la cabine M. Laisser les élèves travailler pendant 10 minutes. L'enseignant observe et repère les stratégies des élèves.

Après l'observation du travail des élèves, l'enseignant organise un débat sur les stratégies repérées et institutionnalise la stratégie « report de mesure ». La demi-droite [AP) avec le temps « nombre de tour » et le temps « minute » est institutionnalisée comme *axe du temps*.

II. Déroulement effectif et analyse a posteriori de la séance 1

Au début de cette séance, l'enseignant organise le groupe de 12 élèves en 6 binômes, chaque binôme disposant d'un ordinateur sur lequel ont été installés des fichiers Cabri-élève.

Rappelons que cette séance a duré 2,5 heures et qu'elle comporte la situation d'initiation à Cabri ainsi que les situations 0, 1 et 2.

Photo 1. Organisation de la séquence expérimentale

Nous allons analyser les données recueillies dans cette expérimentation pour identifier des genèses instrumentales dans l'utilisation de Cabri et les stratégies mises en œuvre dans le processus de modélisation des élèves.

II.1. Quelques constats sur la situation d'initiation à Cabri

Dans cette situation, les élèves exécutent les consignes données à l'aide des commandes de Cabri. Au début, la plupart des actions des élèves sont guidées par la perception : par exemple, ils construisent une droite perpendiculaire à une autre « à vue d'œil ». Le déplacement des points dans Cabri organise bien un milieu pour la validation qui leur permet de modifier leurs actions. En effet, si une figure est construite par « à vue d'œil », quand on déplace l'un des ses objets, elle n'est plus correcte.

A partir de la construction d'un carré, les élèves utilisent les commandes des actions élémentaires pour les coordonner : la genèse instrumentale de ces commandes est alors amorcée. Notamment, la commande « Pointer » de déplacement des points, devient un outil pour reconnaître des contraintes de leur déplacement.

Dans cette initiation, l'outil « Report de mesure » n'est pas particulièrement mis en avant par l'enseignant. Nous pouvons considérer qu'il est disponible mais pas forcément mobilisable par les élèves.

II.2. Situation 0

Nous présentons dans le tableau 25 les stratégies apparues dans les productions des binômes. La stratégie perceptive est d'abord mise en œuvre par tous les binômes mais suite aux rétroactions du milieu, quatre binômes envisagent de changer de stratégies.

	Stratégie / Réponse	**Binômes**
Situation 0	Stratégie perceptive initiale	1, 2, 3, 4, 5, 6
	Stratégie report de mesure (échec)	4, 5

Tableau 25. Les stratégies apparues dans la situation 0

Pour commencer, les six binômes utilisent la stratégie perceptive. Rappelons qu'avec cette stratégie, après avoir calculé 1,72xAP, les élèves prennent un point P' sur la demi-droite A'x' et le déplacent pour que la distance A'P' soit égale à cette mesure.

Cependant, après quelques minutes, tous les binômes reconnaissent l'invalidité de cette stratégie : le point P' ne se déplace pas (la distance A'P' ne s'actualise pas) quand le point P se déplace.

Voici la discussion des deux élèves du binôme 6 :

> E1 construit le segment AP et mesure sa longueur : 6,68 cm. Elle utilise la commande « calculatrice » pour calculer : AP x 1,72 = 11,5.
> E2 : **Construire un point P' et le déplacer pour avoir une longueur de 11,5**
> E1 : Construire P' sur la demi-droite ?
> E2 : Oui, mesurer la longueur A'P' par « longueur ou distance » et déplacer P' pour avoir une longueur de 11,5
> E1 construit le segment A'P', mesure sa longueur et déplace P'.
> (…)
> E2 : Déplacer P
> E1 : Le résultat varie.
> E1 : Ouais, parce que le résultat est 1,72 x AP, donc si AP est plus longue, ce nombre est plus grand.
> **Quand on déplace P, la longueur AP varie, donc le résultat varie mais P' ne se déplace pas. Donc on a une erreur.**
> E1 efface le point P'.
> E2 : Il faut reconstruire le point P'. (Protocole du binôme 6)

Cette discussion montre que les élèves ont saisi implicitement la notion de « point pilote d'un autre point » et analysé l'échec de leur stratégie : *« Quand on déplace P, la longueur AP varie, donc le résultat varie mais P' ne se déplace pas. Donc on a une erreur »*.

Le déplacement des points dans Cabri joue donc bien le rôle de milieu pour la validation. Il permet de refuser la stratégie perceptive.

La stratégie « compas » n'apparaît pas du tout tandis que le report de mesure est utilisé par deux binômes (4 et 5). Cependant, le point P' construit n'est pas exact parce qu'ils reportent la mesure AP. Concrètement, le binôme 4 reporte la mesure AP sur Ax, donc le point obtenu est à la position de P. Le binôme 5 reporte la mesure AP sur A'x'.

A l'aide des enregistrements audios, nous trouvons que le report de mesure est aussi discuté par les deux binômes 3 et 6. Cependant, ces deux binômes ne l'essaient pas encore avec Cabri.

En résumé, aucun binôme ne réussit à construire le point P' par le report de mesure bien qu'il a été disponible dans la situation d'initiation à Cabri. Ceci montre des difficultés des élèves dans la mise en œuvre de cette commande.

Lors de la synthèse collective des stratégies, l'enseignant et les élèves se mettent d'accord sur l'invalidité de la stratégie perceptive. Ensuite, les deux stratégies possibles pour cette situation, stratégie « report de mesure » et stratégie « compas », sont présentées sans en privilégier une.

> P : Tous les binômes ont mesuré la distance AP. Pour calculer 1,72 x AP, qu'est-ce que vous avez fait ?
> Es : Utilisation de la calculatrice
> P : Oui, on utilise la commande « Calculatrice » et attraper le résultat sur l'écran. Quand P se déplace, qu'est-ce qui varie ?
> Es : Le résultat varie

P : Comment construire le point P' ? Quelques binômes construisent un point P' sur la demi-droite et le déplacent pour que la distance A'P' soit égale au résultat obtenu précédent. Mais quand P se déplace, est-ce que P' se déplace ?
Es : Non
P : Donc cette méthode n'est pas valide. **Pour construire P', on a les deux méthodes suivantes.**
Méthode 1 : utiliser la commande « report de mesure ». On reporte cette mesure sur A'x'. Le point obtenu est P'.
Quand P se déplace, est-ce que le point P' se déplace et la mesure A'P' varie ?
Es : Oui
P : P' se déplace et A'P' varie, mais on a toujours A'P' = 1,72 x AP.
Méthode 2 : utiliser la commande « compas », choisir le résultat comme le rayon et le point A comme le centre. P' est à l'intersection de la demi-droite et le cercle. Quand P se déplace, P' se déplace et A'P' = 1,72 x AP.
On dit que P pilote P'. (Script de la séance 1)

Les questions sur le déplacement du point P de l'enseignant permet de jeter la stratégie perceptive et valider les deux autres stratégies : « *Mais quand P se déplace, est-ce que P' se déplace ?* ». La notion de « point pilote d'un autre » est aussi institutionnalisée.

II.3. Situation 1

a. Phase 1 : 15 minutes

Après que l'enseignant a présenté le problème général et distribué la fiche élève, tous les binômes construisent comme prévu par l'hypothèse (H1), un cercle pour représenter la grande roue et un point sur le cercle pour représenter la cabine de M.

Par exemple :

E2 : Il faut construire **un cercle**
E1 : Où est la cabine ?
E2 : Il faut construire **un point sur le cercle**. (Protocole du binôme 3)

Mais comment construire un point M sur le cercle piloté par P ?

Au début, la plupart des élèves place la cabine à la position de P : un cercle du centre A passant par P est construit par 5 binômes sur 6. Ce modèle n'est pas le modèle géométrique intermédiaire attendu.

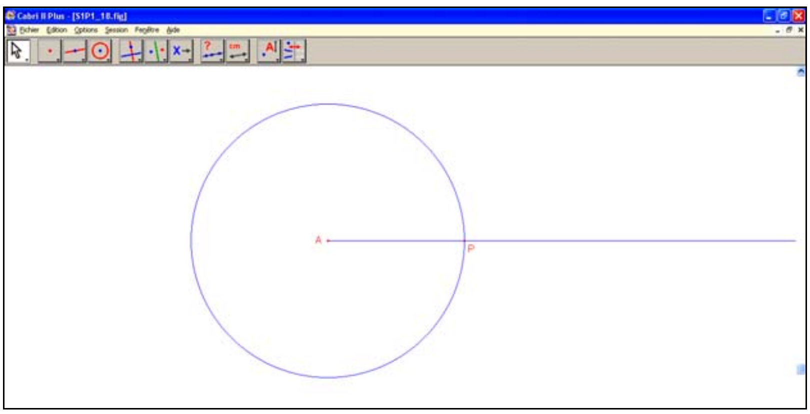


Figure 42. Ecran Cabri du binôme 1

Voici les résultats obtenus dans cette phase.

	Réponses	Binômes
Fiche 1	Cercle (A, AP)	1, 3, 4, 5, 6
	Cercle (P, PA)	5
	Cercle quelconque	2

Tableau 26. Les réponses apparues dans la phase 1 - Situation 1

Continuons avec le binôme 3 :

> E1 : La cabine est donc à la position de P, n'est-ce pas ?
> E2 construit le cercle de centre A et de rayon AP. Ensuite, il déplace le point P.
> E1 : **Ce n'est pas vrai parce que le rayon du cercle change**. (Protocole du binôme 3)

Le cercle de centre A et de rayon AP est invalidé par référence à la réalité modélisée qui agit comme milieu pour la validation : *« Ce n'est pas vrai parce que le rayon du cercle change »*. Les binômes cherchent à modifier la position du cercle représentant la grande roue. Concrètement, les binômes 4 et 5 effacent le cercle (A, AP). Le binôme 5 construit le cercle (P, PA). Le binôme 4 quant à lui calcule AP et cherche à utiliser la commande « compas », c'est-à-dire à reporter une mesure linéaire (celle de la corde) sur le cercle.

Seul le binôme 2 construit un cercle quelconque qui ne coupe pas la demi-droite donnée. Voici la production de ce binôme à l'écran de Cabri à la fin du travail de la phase 1 :

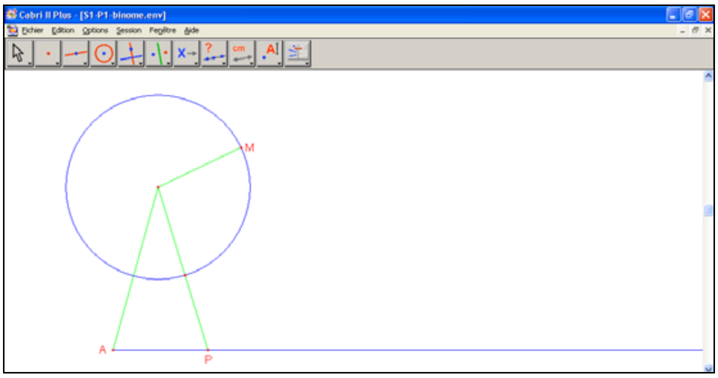


Figure 43. Ecran Cabri du binôme 2

La demi-droite AP est considérée implicitement comme représentant le sol. Cependant, le point M est un point libre sur le cercle. Son mouvement n'est pas piloté par le point P.

A la fin du travail des élèves dans cette phase, l'enseignant fait une synthèse des figures Cabri produites par les binômes. C'est le retour à la réalité qui permet de refuser les modèles invalides, le cercle (A, AP) et le cercle (P, PA) : les élèves sont d'accord sur le fait que le manège réel ne se déforme pas lorsque les cabines tournent et que le centre du manège est fixe.

L'enseignant institutionnalise une figure analogue au modèle produit par le binôme 2 : le centre du cercle peut être n'importe où, sauf en P.

> P : **Qu'est-ce que vous utilisez pour représenter le manège** ?
> Es : **Un cercle**

P : Oui. Je vois qu'un binôme a construit un cercle de centre P. Quand P se déplace, le manège se déplace. C'est bizarre (rire).
Deux binômes ont construit le cercle de centre A et de rayon AP. Quand P se déplace, qu'est-ce qui se déplace ?
Es : Le rayon, le diamètre
P : Le diamètre du manège peut-il changer ?
Es : Non
P : **P se déplace, le diamètre varie. Donc ce cercle n'est pas satisfaisant**. Je vois qu'un binôme a construit un cercle en dessus de la demi-droite.
L'enseignant construit le cercle comme celui du binôme 2.
P : Quand P se déplace, le diamètre ne varie pas.
Donc **on peut utiliser un cercle pour représenter le manège mais ce cercle n'a pas le centre P et ne passe pas par P.**
On se met d'accord qu'un tel cercle peut représenter le manège. (Script de la séance 1)

b. Phase 2 : 20 minutes

Dans cette phase, on constate que tous les binômes essaient de construire un point M sur le cercle piloté par P pour représenter la cabine M. Voici les résultats obtenus.

- 2 binômes (4 et 5) utilisent la stratégie stéréographique : le point M est l'intersection du cercle donné et de la droite passant par P et le centre du cercle. Voici la production du binôme 4 :

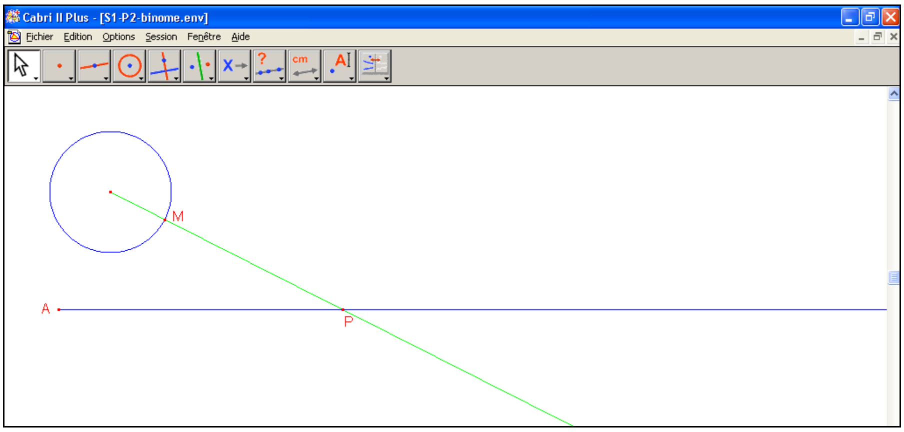


Figure 44. Ecran Cabri du binôme 4

- 3 binômes (2, 3 et 6) prennent un point M quelconque sur le cercle qui ne satisfait pas parce qu'il n'est pas piloté par P. Ensuite, ils évoluent vers la stratégie stéréographique. Regardons le fichier du binôme 2 :

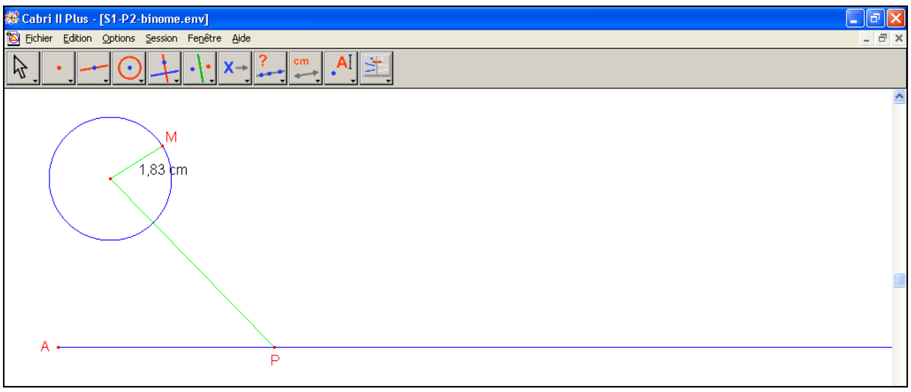


Figure 45. Ecran Cabri du binôme 2

- 1 binôme (1) utilise la stratégie suivante : construire un cercle de centre P et de rayon quelconque qui coupe le cercle donné. M est l'une des deux intersections de ces deux cercles.

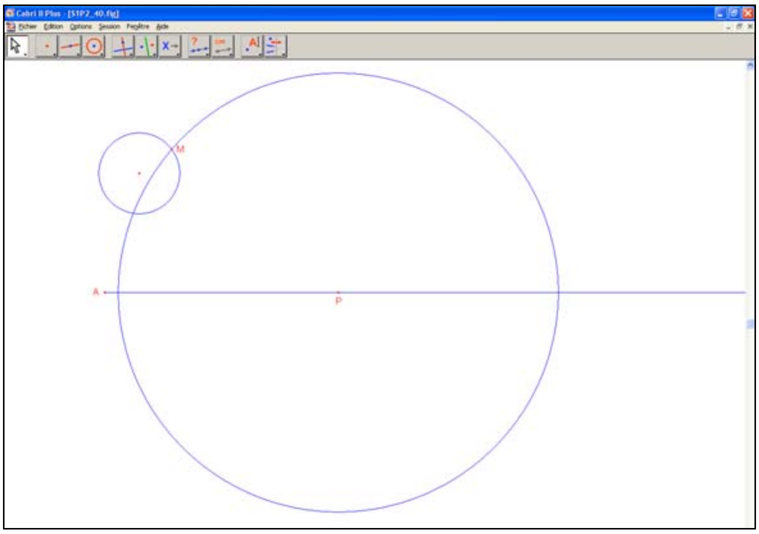


Figure 46. Ecran Cabri du binôme 1

Dans cette phase, le cercle représentant la roue dans un premier temps est considéré comme la trajectoire de la cabine de M. Les modèles construits par les stratégies ci-dessus sont invalidés par déplacement de P : le point M ne fait pas un tour complet sur le cercle, et même de temps en temps, disparaît. C'est pourquoi les binômes ne sont pas satisfaits de leurs stratégies. A l'aide des sessions d'enregistrement dans Cabri et des enregistrements audios, on voit que tous les binômes cherchent à changer de stratégies.

Par exemple, le binôme 1 déplace le point P et il remarque que le point M n'existe plus quand P s'éloigne sur la demi-droite. Il efface donc le cercle du centre P. De la même manière, le binôme 5 efface sa production résultant de la stratégie stéréographique.

Les deux binômes 3 et 6 cherchent à utiliser la commande « report de mesure » mais échouent à construire un point M piloté par P. Concrètement, le binôme 6 calcule AP et parle du report de mesure en se référant à la situation 0, sans le réaliser.

E2 : Dans la situation 0, quand P se déplace, P' se déplace aussi. Peut-on le faire de manière similaire ?
E1 : Non, M doit tourner sur le cercle.
Quand P se déplace, ce point M est toujours à cette position.
(…)
E1 : P se déplace, M se déplace pour que AM = AP
E2 : Mais comme ça, M n'est pas sur le cercle
E2 : **Report de mesure.** D'abord, il faut utiliser « longueur ou distance » pour calculer AP
E2 calcule la distance AP
(….)
E1 construit un segment passant par P et le centre du cercle.
E1 : P se déplace, ce segment change aussi. (Protocole du binôme 6)

Le binôme 3 reporte la mesure AP sur le cercle à partir d'un point qu'il nomme malencontreusement M et obtient un autre point qu'il ne nomme pas, sans doute parce qu'il ne reconnaît pas ce point comme le représentant de la cabine : le déplacement du point P n'est pas utilisé pour valider sa production (correcte).

Pour ces deux binômes, la difficulté par rapport à la situation 0 est l'absence d'origine à partir de laquelle reporter la longueur AP sur le cercle.

Nous résumons dans le tableau 27 les éléments de stratégies apparus dans la phase 2.

	Stratégies	**Binômes**
Fiche 2	Stratégie stéréographique	2, *3*, 4, 5, *6*
	Stratégie autre	1
	Stratégie report de mesure (Echec)	3, 6

Tableau 27. Les stratégies apparues dans la phase 2 – Situation 1

Dans la phase d'institutionnalisation, l'enseignant fait une synthèse des productions des binômes et discute avec les élèves pour éclairer l'invalidité de la stratégie stéréographique et de celle du binôme 1.

> P : Je vois que quelques binômes font comme suit : construire une droite passant par P et le centre du cercle, M est à l'intersection de cette droite avec le cercle. Quand P se déplace, on voit que le point M se déplace. Mais, est-ce que le point M fait un tour complet sur le cercle ?
> Es : **Non, M ne fait pas un tour complet.**
> P : Donc cette méthode ne satisfait pas.
> Par ailleurs, un autre binôme construit un cercle de centre P. Ce cercle coupe le cercle donné en deux points. Prendre un point d'intersection comme M. Quand P se déplace, M se déplace aussi. **Mais le point M ne fait pas un tour complet et de temps en temps il disparaît.** (Script de la séance 1)

Donc les deux caractéristiques de la réalité (la cabine ne sort pas du manège et la cabine peut faire plusieurs tours) sont utilisées pour refuser des modèles donnés par la stratégie stéréographique et la stratégie du binôme 1. Cependant l'enseignant ne fait pas expliciter les raisons de l'échec de ces stratégies, par exemple celles de la disparition de M quand P s'éloigne dans le cas de la stratégie du binôme 1.

Ensuite, le modèle « report de mesure » est institutionnalisé et validé par la référence à la réalité sans non plus que soient explicitées les raisons de sa réussite.

> P : On peut construire le point M comme suit : **choisir un point I sur le cercle et utiliser la commande « report de mesure »**. Pour cela, qu'est-ce qu'il faut avoir ?
> Es : Il faut avoir la mesure.
> L'enseignant calcule la distance AP et reporte la mesure sur le cercle à partir de I pour avoir le point M.
> P : Vous pouvez observer que **quand P se déplace, P pilote le mouvement de M**. De plus, **le point M représentant la cabine de M peut faire plusieurs tours sur le cercle**. (Script de la séance 1)

On remarque que l'enseignant introduit, comme si cela allait de soi, la construction d'un point I sur le cercle comme origine du report de mesure, alors que cette construction a été la principale difficulté de la genèse instrumentale du report de mesure.

De plus l'enseignant ne parle pas du sens (le sens trigonométrique) de report de mesure imposé par le logiciel.

En conclusion, la commande « report de mesure » présente dans le menu Cabri n'est pas pour les élèves une connaissance instrumentale suffisante pour outiller la stratégie report de mesure qui ne peut fonctionner en l'absence d'un point fixe d'origine du report.

II.4. Situation 2

a. Phase 1 : 20 minutes

Le tableau 28 présente les stratégies utilisées par les binômes dans cette phase :

	Stratégies		**Binômes**
Fiche 1	**Stratégie (initiale) ajustement perceptif**		*2, 6*
	Stratégie report de mesure	Réussite	1, 5
		Réussite P1	3
		Echec	2, *4*, 6

Tableau 28. Les stratégies apparues dans la phase 1 - Situation 2

- Les deux binômes 1 et 5 reportent la mesure du périmètre du cercle sur la demi-droite donnée pour avoir le point P1. La multiplication du périmètre par 2 et 3 permet de construire les points P2 et P3. Ils réduisent la taille du cercle pour rendre visible à l'écran Cabri les points P1, P2 et P3 : le changement d'échelle est effectué implicitement. La graduation P1, P2 et P3 « résiste » à la modification de la taille du cercle, donc le temps est construit comme une variable indépendante. C'est une évolution marquante du processus de modélisation pour ces binômes.

Les connaissances instrumentales relatives au report de mesure sont opératoires chez ces binômes. Voici, par exemple, la production du binôme 1 :

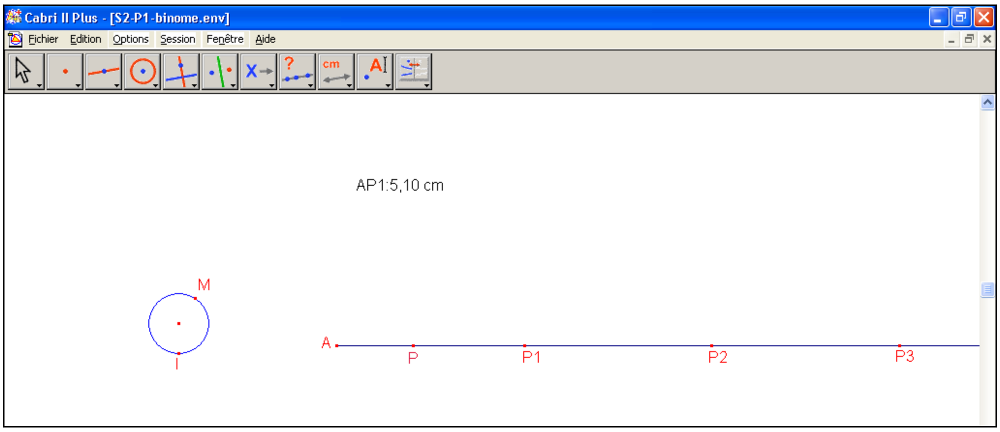


Figure 47. Ecran Cabri du binôme 1

- Dans le binôme 3, l'un des deux élèves (E1) utilise la stratégie « report de mesure » pour placer un point (non nommé) sans l'accord de l'autre élève (E2).

E1 : **Mesurer le périmètre du cercle et reporter cette mesure sur la demi-droite AP**
E2 : Non, ce n'est pas vrai.
E1 : Je vais essayer….
E1 calcule le périmètre du cercle et reporte cette mesure sur la demi-droite AP pour avoir un point mais sans le nommer. (Protocole du binôme 3)

La résistance de E2 ne permet pas à E1 d'achever la graduation bien que le premier point construit soit exact.

- Le binôme 4 reporte la mesure du rayon du cercle sur la demi-droite donnée. Ensuite, il calcule le périmètre du cercle en multipliant le rayon par 2π comme dans la situation 0. Cependant, il ne termine pas c'est-à-dire il ne reporte pas le périmètre du cercle sur la demi-droite pour obtenir le point P1. Leur stratégie est une variante de la stratégie optimale.

Examinons maintenant les deux binômes (6 et 2) qui ont commencé par la stratégie ajustement perceptif : « déplacer P pour que le point M se déplace sur le cercle d'un tour de I à I pour trouver la position P1 sur la demi-droite donnée ».

Ces binômes essaient de marquer P2 et P3 de la même façon, mais quand ils déplacent P, le cercle disparaît de l'écran (variable V1) : *« Avec 2 tours, le point P est très loin. On n'a pas assez de place. »* (Protocole du binôme 6). Ceci les conduit à changer de stratégie.

- Le binôme 6 anticipe le placement de P2 et de P3 par l'utilisation de la commande report de mesure et de la calculatrice. Leur graduation (si réussite) ne va pas résister au changement de la taille du cercle puisque la mesure reportée n'est pas le périmètre du cercle mais la mesure AP1 obtenue par ajustement perceptif. Faute de temps il ne reporte que la mesure « perceptive » AP1 à partir de A bien qu'il ait la tentative de multiplier AP1 par 2 pour construire P2.

> E1 : La distance de A à P1 correspond à un tour. **On la mesure et la multiplie par 2 pour avoir la distance de A à P2.**
> E2 mesure la distance AP1
> E2 : **Report de mesure** !
> E1 reporte la mesure AP1 sur [AP). (Protocole du binôme 6)

- Le binôme 2 utilise l'outil « report de mesure » mais il reporte la mesure AP sur le cercle à partir de M : il semble n'avoir compris ni la construction du point M, ni la nécessité d'une origine fixe pour la mesure.

En résumé, l'usage de la commande « report de mesure » est donc présent dans les tentatives de six binômes, mais seuls 3 binômes sur 6 reportent la mesure du périmètre du cercle sur la demi-droite, un binôme (binôme 4) le reportant de manière indirecte.

A la fin de cette phase, la graduation P1, P2, P3 et le changement d'échelle ne sont faits que par les deux binômes 1 et 5.

Dans la phase d'institutionnalisation, l'enseignant différencie les modèles produits par les stratégies « report de mesure » (binômes 1, 5) et « ajustement perceptif » (binômes 2, 6) par le changement de la taille du cercle.

> P : Je vois qu'un binôme déplace le point P pour que M se déplace d'un tour sur le cercle. Le point qui est à cette position est appelé P1. Comment construire le point P2 ? Si on continue à déplacer P1, on ne voit plus le cercle.
> Une méthode que quelques binômes ont utilisée est de **réduire le cercle**. En réalité, que signifie la réduction du cercle ?
> (…)
> On ne change pas le diamètre du manège parce qu'il ne peut pas changer. Mais c'est-à-dire **on voit le manège de plus loin ou plus près.**
> Maintenant, est-ce que P1 correspond à un tour de M ?
> L'enseignant déplace le point M pour que les élèves le voient.

Es : Non.
P : **Cette stratégie n'est donc valide que pour le cercle initial. Quand on change l'échelle, elle est invalide.**
P : Quelques binômes calculent le périmètre du cercle et reportent cette mesure sur la demi-droite AP pour avoir P1. Quand P se déplace de A à P1, M se déplace un tour sur le cercle. Quand on change le rayon du cercle, le point P1 est encore correct. Comment construire le point P2 ?
Es : On multiplie la mesure AP1 par 2 et reporte cette nouvelle mesure sur la demi-droite.
P : Oui, on peut la multiplier par 2 ou utiliser la commande « symétrie centrale ».
Es : La symétrie de A par rapport à P1 est P2. (Script de la séance 1)

Le terme « changement d'échelle » est introduit par l'enseignant. L'invalidité du modèle produit par la stratégie ajustement perceptif est alors expliquée par le changement d'échelle. La graduation de l'axe du temps en nombre de tours est effectuée et ceci conduit à une première modélisation discrète du temps.

Remarquons qu'à aucun moment la nécessité d'une origine fixe pour le report de mesure n'est mentionnée par l'enseignant.

b. Phase 2 : 15 minutes

Pour cette phase, la stratégie optimale (report de mesure) est prédominante : tous les binômes sauf 1 la mettent en œuvre. On peut analyser cette prédominance comme un effet de contrat à son institutionnalisation répétée par l'enseignant dans toutes les phases de cette séance. Ces binômes utilisent la calculatrice pour diviser le périmètre (ou la mesure AP1) par 5 et ensuite reportent cette mesure (3,08) sur la demi-droite donnée. Ceci montre aussi une avancée marquante de la genèse instrumentale de la commande « report de mesure » chez les élèves.

Par exemple, voici la figure reçue sur l'écran de Cabri du binôme 5 :

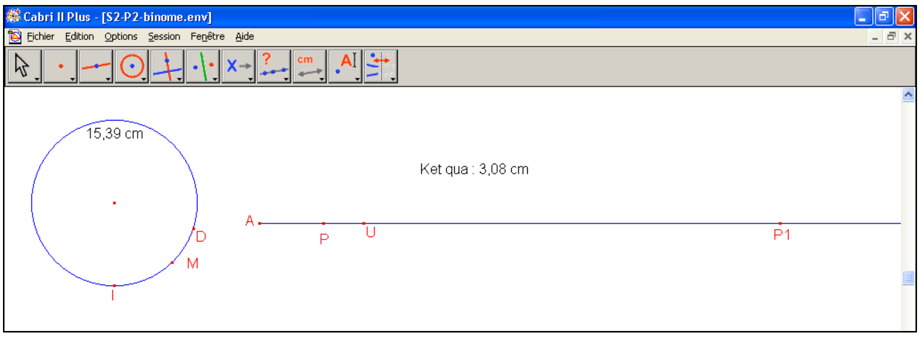


Figure 48. Ecran Cabri du binôme 5

Dans le binôme 3, les élèves sont toujours en désaccord : E1 propose le report de mesure sur la demi-droite AP mais E2 s'y oppose. Cette fois-ci, c'est l'élève E2 qui prend les commandes : il reporte bien la mesure du périmètre divisé par 5 mais en prenant pour origine de la mesure le point mobile P ! Quand P se déplace, U se déplace aussi. L'erreur de E2 est révélatrice d'une difficulté persistante dans la genèse instrumentale de la commande « report de mesure », difficulté concernant la nécessité d'une origine fixe pour la mesure, que ce soit dans Cabri ou ailleurs.

Ainsi sauf pour le binôme 3, la graduation de l'axe du temps en minute (durée continue) a été effectuée comme prévue. On peut conclure que l'environnement de géométrie dynamique Cabri permet aux élèves de transformer le temps tour en temps minute et ainsi d'accéder à la variable indépendante « temps ».

A la fin de cette séance, l'enseignant présente la stratégie optimale (stratégie report de mesure). Il introduit aussi la notion d'« axe du temps ».

> P : La plupart des binômes ont réussi à construire le point U. Je vois dans le fichier d'un seul binôme le point U mobile. Ce n'est pas valide.
> Certains binômes mesurent le périmètre du cercle et divisent ce périmètre par 5. Ensuite, ils reportent cette mesure sur [AP) pour avoir le point U.
> Quand P se déplace de A à U, M se déplace dans la première minute du voyage.
> P : **On dit qu'on a construit un axe du temps en minutes**. Le point P pilote le mouvement du point M et le point P1 correspond à un tour de M. (Scripte de la séance 1)

Encore une fois, l'enseignant ne profite pas de l'erreur du binôme 3 pour analyser l'origine de leur erreur : « Je vois dans le fichier d'un seul binôme le point U mobile. Ce n'est pas valide. »

En résumé, via la situation 2, le modèle intermédiaire a évolué vers un modèle « temporel » par une modélisation de l'écoulement linéaire du temps. L'axe du temps est construit avec une unité en minute. L'apparition de la variable « temps » permet de poser et résoudre plusieurs problèmes de la réalité que nous allons aborder dans la séance 2 suivante.

III. Conclusion de l'étude de la séance 1

En s'appuyant sur l'hypothèse (H1), cette séance expérimentale vise la dévolution aux élèves de choix significatifs quant au processus de modélisation. L'expérimentation a montré que pour autant cette prise en charge n'est pas totale. En effet, l'enseignant a dû intervenir dans toutes les phases de la séance 1 en particulier pour la mise en place du modèle attendu.

La genèse instrumentale de la commande report de mesure a contribué aux difficultés d'entrée dans le processus de modélisation et a révélé un rapport incomplet au mesurage. La nécessité d'une origine fixe et d'une orientation du cercle pourrait être problématisée dans une reprise de la conception même de l'ingénierie. D'autre part, le déplacement propre à Cabri a permis tout au long du processus de modélisation d'enrichir un milieu pour la validation dans le rapport du modèle à la réalité.

A la fin de cette séance, les élèves disposent d'un premier modèle fonctionnel, de nature géométrique, où le déplacement du point M représentant une cabine du manège se fait sur un cercle en fonction du temps, variable indépendante dont les valeurs sont accessibles sur un axe distinct de la trajectoire du mobile. Ce modèle est l'aboutissement d'une succession de modèles intermédiaires :

+ un premier modèle « mécanique » : un point sur une demi-droite pilote le déplacement d'un point sur le cercle.
+ deux modèles « temporels » successifs : le point sur la demi-droite représente graphiquement une variable indépendante, d'abord discrète puis continue, formalisant ainsi un axe du temps gradué en minutes.

Soulignons que le processus de construction de ces modèles temporels fait participer constamment le cercle à la représentation linéaire du temps. On peut faire **l'hypothèse (H2) que le cercle sera aussi porteur d'un temps (temps circulaire) induit par le co-déplacement des points M et P.**

Dans ce processus de modélisation, l'introduction d'informations numériques a été différée, défavorisant les stratégies de calcul au profit de modèles mécaniques issus de stratégies géométriques. L'introduction de données numériques a bien provoqué le passage d'un modèle temporel discret et circulaire au modèle temporel continu et linéaire.

Le modèle construit dans cette séance est attaché au modèle C. Il constitue le point de départ de la situation 3 organisée autour du problème de coïncidence de deux phénomènes périodiques avec l'objectif de faire émerger le modèle O dans son articulation avec le modèle C.

Partie C. ETUDE DE LA SEANCE 2

La séance 1 a mis en scène des conditions qui favorisent une formalisation graphique (sur une demi-droite) du temps comme variable indépendante. Cet axe du temps permet-il d'accéder à des représentations bidimensionnelles de grandeurs variables avec le temps propres au modèle O ?

Les grandeurs variables en relation avec la réalité à modéliser pourraient être la hauteur de la cabine au sol, sa distance à un point fixe, sa vitesse, etc. Notre choix se porte sur la hauteur de la cabine au sol qui dans le modèle géométrique C est la longueur d'un segment vertical, perpendiculaire au sol et à l'axe du temps. Nous faisons **l'hypothèse (H3) que ce choix favorise l'émergence du deuxième axe de la représentation bidimensionnelle.**

Cependant, comme dit précédemment, le processus de construction des modèles temporels lors de la séance 1 s'est appuyé constamment sur le cercle pour aboutir à l'axe du temps. Ainsi, l**e cercle sera aussi porteur d'un temps (temps circulaire) induit par le co-déplacement des points M et P (H2).** Ceci peut rendre difficile l'émergence du deuxième axe de la représentation bidimensionnelle.

La séance 2 est organisée autour du problème de la coïncidence des deux phénomènes périodiques que nous avons présentés précédemment :

+ phénomène 1 : la cabine M est en position L (période T minutes)

+ phénomène 2 : la lampe est allumée (n minutes toutes les m minutes)

Dans ce problème, les deux phénomènes sont définis comme périodiques. La séance 2, nommée « situation 3 » pour les élèves, organise le passage du modèle C au modèle O avec comme enjeu les opérations sur les périodes pour trouver les moments de coïncidences. La séance 2 favorise la formalisation de la périodicité et laisse ouvert le travail mathématique dans les deux cadres, géométrique et analytique, et dans les deux registres, graphique et algébrique.

I. Analyse a priori du problème mathématique central de la séance

I.1. Présentation du problème mathématique

Voici les consignes données.

SITUATION 3

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S3-P1-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

M entre dans sa cabine lorsqu'elle passe au plus près du sol, au point I. La grande roue du manège a un rayon de 20 m et son centre est situé à 22 m du sol. Un tour dure T minutes.

Une lampe rouge éclaire par intermittence un endroit fixe (noté L) du manège où passent les cabines. Si une cabine est éclairée par la lampe rouge lors de son passage en L, son occupant gagne un voyage gratuit. On se demande si M va gagner un voyage gratuit sachant que la lampe s'allume au moment où il monte dans sa cabine.

A l'écran, vous pouvez voir le cercle représentant le manège, le point I, un segment représentant le sol, et l'axe du temps construit précédemment.

Question :
M va-t-il gagner un voyage gratuit ?
Si oui, au bout de combien de tours ? Peut-il en gagner d'autres ?

Réponse et explications :

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Figure 49. Situation 3

Les questions ouvertes par cette situation concernent les moments de coïncidences de deux phénomènes périodiques. Elles reprennent les deux questions formulées par Bichat (1874) que nous avons exposées lors de la présentation de la méthode des coïncidences (partie A de ce chapitre) :

- A quelles conditions la première coïncidence peut-elle s'effectuer ?
- S'il existe une coïncidence de ces deux phénomènes, y en a-t-il une infinité d'autres ?

A l'origine de la conception de cette situation, se trouvent deux hypothèses de recherche, H4 et H5.

Pour résoudre un problème de coïncidences de deux phénomènes périodiques :

(H4) : il est nécessaire de formaliser la périodicité de chacun des phénomènes.
(H5) : les fonctions périodiques et leur registre graphique sont optimales.

I.2. Analyse a priori du problème

Nous organisons les cas possibles des coïncidences selon le schéma suivant :

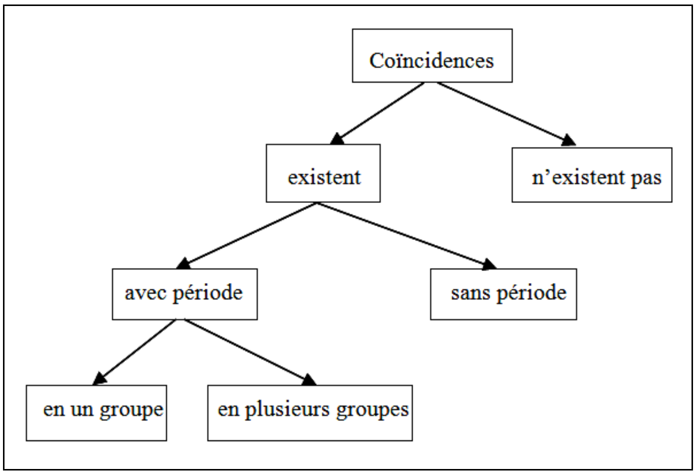


Figure 50. Les solutions possibles pour notre problème de coïncidence

Nous dirons que les coïncidences sont périodiques en un seul groupe dans le cas où elles constituent dans le temps une suite de moments, qui est une suite arithmétique dont la raison sera appelée la période des coïncidences. Les coïncidences sont périodiques en plusieurs groupes si elles constituent plusieurs suites arithmétiques qui ne peuvent pas former une seule suite arithmétique.

Par exemple, avec la suite 1, 3, 5, 7, 9,…, on a une périodicité en un seul groupe de période 2. Par contre, la suite 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14,… n'est pas une suite périodique. Cependant, on a une périodicité en deux groupes : groupe 1, 5, 9, 13,… et groupe 2, 6, 10, 14, … avec la même période 4.

Selon le schéma ci-dessus, il y a 4 cas de solutions possibles pour le problème proposé :

+ Cas 1 : les coïncidences n'existent pas
+ Cas 2 : les coïncidences existent sans période
+ Cas 3 : les coïncidences sont périodiques en un seul groupe
+ Cas 4 : les coïncidences sont périodiques en plusieurs groupes

Dans le cas où les coïncidences de ces deux phénomènes existent (avec période ou sans période), nous considérons que la première coïncidence est proche de l'origine du temps si elle appartient aux 3 premiers tours de la cabine M. Dans le cas contraire, elle est considérée lointaine de l'origine du temps.

Nous résumons ci-après des données fixées pour la situation proposée :

+ Le départ de la cabine M se fait à la position la plus proche du sol, c'est-à-dire à 2 mètres du sol
+ Le premier allumage de L a lieu au moment du démarrage de la cabine de M.

Notons les conditions initiales suivantes : $m > n > 0$ et $2 \leq h \leq 42$ où h est la hauteur de la cabine M par rapport au sol.

- **Les variables de situation et variables didactiques**

- **Variable de situation V1 : Le couple (T ; m)**

Selon le choix des valeurs de deux paramètres, T et m, les coïncidences existeront ou pas et si elles existent, elles seront périodiques ou non.

+ Le cas T/m non rationnel est écarté car T et m sont des mesures du temps en physique donc décimales et que les mesures sur Cabri sont des nombre décimaux. De plus, ce cas peut entrainer l'apériodicité des solutions (le cas 2 du schéma de la figure 50) et empêcher la formalisation de la périodicité. Donc notre premier choix pour le couple (T ; m) est *T/m rationnel*, (c'est-à-dire il existe p et q entiers tels que T/m = p/q irréductible (ou encore T.q = m.p)).

Nous allons montrer que dans ce cas, pour toutes les valeurs de n, s'il y a une coïncidence des deux phénomènes, il en existe une infinité d'autres et les coïncidences sont périodiques (en un seul ou plusieurs groupes) de période p.m minutes.

Notons t_1 le premier instant où la cabine M est à la position L (hauteur h). Un tour durant T minutes, tous les temps où la cabine M est à la position L constituent l'ensemble des nombres $\{t_k / t_k = t_1 + Tk, k\in N\}$.

Le point L est éclairé pendant des intervalles de temps qui durent n minutes toutes les m minutes. Ainsi, la première fois où la position L est éclairée, c'est pendant l'intervalle de temps [0 ; n] puis l'éclairement aura lieu pendant tous les intervalles [k'm ; k'm+n] avec k' entier naturel.

L'ensemble des coïncidences, c'est à dire l'ensemble des solutions est :

$S = \{t_k / t_k = t_1 + Tk, k\in N\} \cap \{Int_{k'} / Int_{k'} = [k'm ; k'm+n] / k' \in N\}$

$S = \{s_i / s_i = t_1 + Tk \text{ et } s_i \in [k'm ; k'm+n] \text{ avec } k, k' \in N\}$

Ou encore :

$S = \{s_i / s_i = t_1 + Tk \text{ et } k'm \leq s_i \leq k'm+n, k, k' \in N\}$

Supposons qu'il existe une solution dans S, notons-là s_1, on a : $k'm \leq s_1 \leq k'm+n$ (1).

On va démontrer qu'il y a à nouveau une coïncidence en $s_2 = s_1 + q.T$.

En effet, $s_2 = t_1 + Tk + q.T = t_1 + T(k+q)$

A partir de (1), on a : $k'm + q.T \leq s_1 + q.T \leq k'm+n + q.T$

$\Leftrightarrow k'm + m.p \leq s_1 + q.T \leq k'm+n + m.p$

$\Leftrightarrow (k'+p).m \leq s_1 + q.T \leq (k'+p).m+n$

$\Leftrightarrow (k'+p).m \leq s_2 \leq (k'+p).m+n$

Continuons cette méthode par récurrence, on peut démontrer qu'il y a une infinité de coïncidences de période m.p minutes. On peut conclure que dans le cas où T/m est rationnel, s'il existe une coïncidence entre les deux phénomènes, il y a une suite arithmétique de coïncidences de période m.p minutes.

Selon le nombre de coïncidences des deux phénomènes dans m.p minutes, les coïncidences sont périodiques en un seul groupe ou en plusieurs groupes.

En particulier, dans le cas où T et m sont entiers, T/m non entier et irréductible, selon le résultat montré précédemment, s'il y a de coïncidence des deux phénomènes, les coïncidences sont périodiques en un seul ou plusieurs groupes de période égale à m tours.

On peut résumer les cas de solutions possibles selon les différents choix du couple (T ; m) dans le tableau ci-après.

<table>
<tr><th colspan="3">Choix de (T, m)</th><th>Solutions possibles</th></tr>
<tr><td rowspan="3">T/m rationnel</td><td colspan="2">T/m entier</td><td>Cas 1, 3
Cas 3 : il existe une coïncidence tous les tours</td></tr>
<tr><td rowspan="2">T/m non entier</td><td>T et m non entiers tous les deux ou T/m non irréductible</td><td>Cas 1, 3, 4
Cas 3, 4 : Les coïncidences sont périodiques de période m.p minutes (périodiques en un seul ou plusieurs groupes) avec T/m = p/q irréductible.</td></tr>
<tr><td>T et m entiers et T/m irréductible</td><td>Cas 1, 3, 4
Cas 3, 4 : Les coïncidences sont périodiques de période m tours (périodiques en un seul ou plusieurs groupes)</td></tr>
</table>

Tableau 29. Les solutions possibles selon les choix du couple (T ; m)

Choix pour notre ingénierie

+ Le cas T/m entier n'est pas favorable à la formalisation de la périodicité pour résoudre le problème posé car s'il y a coïncidence, elle a lieu tous les tours. Notre choix pour (T ; m) est *T/m non entier*.

+ D'autre part, pour favoriser les graduations arithmétiques sur la droite du temps, *T et m sont choisis tous les deux entiers*. Et nous choisissons *T/m irréductible* pour que les coïncidences soient périodiques (en un seul groupe ou plusieurs groupes) de période égale à m tours (avec m entier).

+ Pour rendre coûteuse la graduation sur le cercle et donc favoriser l'usage de la droite du temps, la valeur choisie pour T est 5.

+ Finalement *T = 5 et m est un entier non multiple de 5*

- **Variable de situation V2 : n**

Avec le couple (T ; m) choisi où T/m irréductible non entier et m entier, on va démontrer que si n est entier, il existe toujours au moins une coïncidence des deux phénomènes.

En effet, pendant les m.T minutes (m tours), il y a T intervalles de temps d'éclairement de la lampe. Ce sont les suivants :

[0 ; n], [m ; m+n], …., [(T -1)m ; (T -1)m + n]

A eux tous, ils couvrent une longueur de temps égal à n.T ce qui va provoquer n coïncidences à n tours différents.

En résumé, on a le résultat suivant :

Quand T/m irréductible, non entier, m et n entiers, il y a n coïncidences des deux phénomènes. Ces coïncidences sont périodiques en n groupes de période m tours.

Valeurs de n		Solutions possibles
entier	n = 1	Une coïncidence tous les m tours
	$n \geq 2$	n coïncidences tous les m tours

Tableau 30. Les solutions possibles selon les choix de n

Voici des exemples avec T = 5, n = 1 et n = 2.

+ Si n = 1, voici les durées d'éclairement de la lampe dans m tours.

[0 ; 1], [m ; m+1] ; [2m ; 2m+1], [3m ; 3m+1], [4m ; 4m+1]

Placer ces 5 intervalles de longueur 1 sur 5 minutes, on a toujours une seule coïncidence tous les m tours à cause de l'irréductibilité de T/m. A partir de la figure ci-dessous effectuée avec m = 6, on peut imaginer toutes les autres valeurs possibles de m.

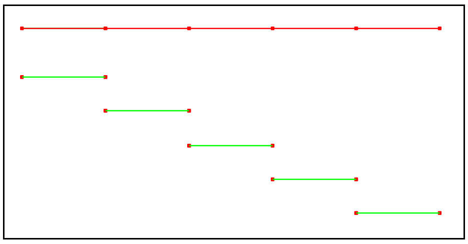


Figure 51. Le cas T = 5, n = 1 et m = 6

+ Si n = 2, voici les durées d'éclairement de la lampe dans m tours.

[0 ; 2], [m ; m+2] ; [2m ; 2m+2], [3m ; 3m+2], [4m ; 4m+2]

Placer ces 5 intervalles de longueur 2 sur 5 minutes, on a toujours deux coïncidences tous les m tours (même raisonnement ci-dessus).

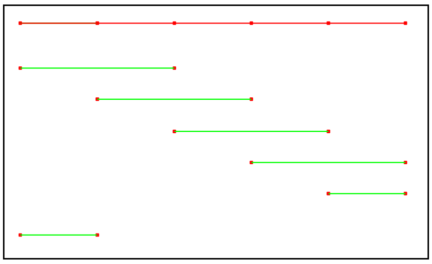


Figure 52. Le cas T = 5, n = 2 et m = 6

Choix pour notre ingénierie

+ Pour favoriser la graduation arithmétique sur la droite du temps et pour assurer qu'il existe toujours des coïncidences aux deux phénomènes étudiés, nous avons choisi *n entier*. De plus, notre choix est *n = 1* pour rester dans le cas d'1 coïncidence tous les m tours. Le cas $n \geq 2$ est écarté parce que la périodicité en plusieurs groupes est hors du contrat institutionnel. En effet, comme nous l'avons montré dans le chapitre 2, dans l'enseignement secondaire, il n'existe que des périodicités en un seul groupe.

+ Finalement *T = 5, m est un entier non multiple de 5, n = 1.*

- **Variable didactique V3 : Le couple (m ; h)**

Les choix de n = 1, T = 5, m entier et T/m irréductible non entier étant fixés, le choix du couple (m ; h) va décider si la première coïncidence sera proche ou lointaine de l'origine du temps. Précisons que l'endroit L du manège sera donné en position montante de la cabine M.

+ Avec $2 \leq h \leq 15{,}82$, la première coïncidence est toujours au 1er tour pour tout m entier.

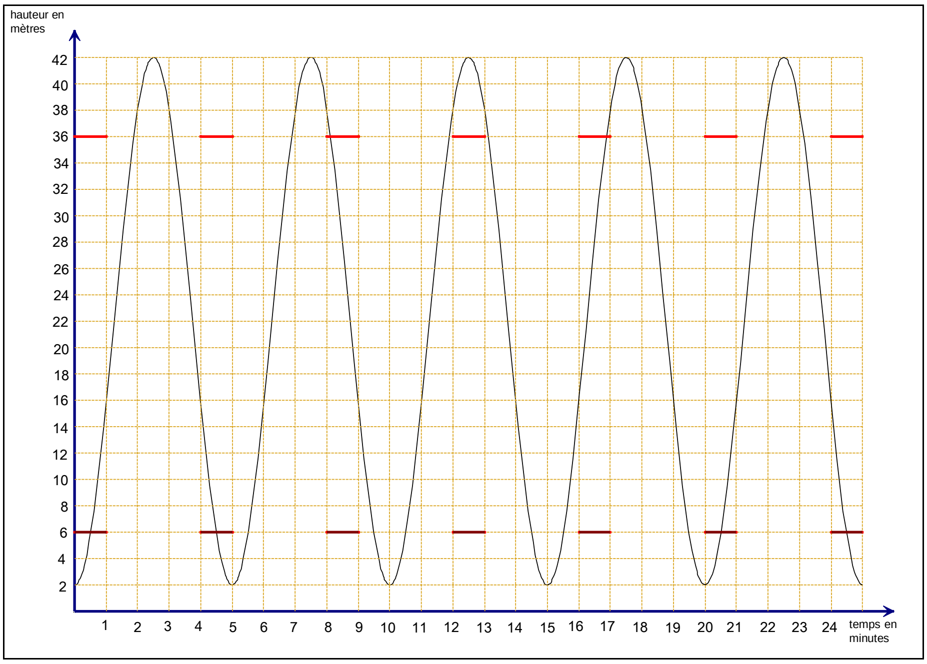


Figure 53. Le cas m = 4 et h = 6 ou 36

+ Avec $15{,}82 \leq h \leq 38{,}18$ (donc $1 \leq t_1 \leq 2$), la première coïncidence n'est pas au 1er tour.

Pour qu'elle soit au (1+t)^{e} tour ($t \geq 1$, $t \in N$), elle devra appartenir à l'intervalle [1+5t ; 2+5t].

Par ailleurs, les drées d'éclairement de la lampe sont tous les intervalles [k'm ; k'm+1] avec k' naturel.

Donc la première coïncidence de deux phénomènes est au (1+t)^{e} si m est un diviseur de 1+5t sans être un diviseur de (1+5t) – 5r avec $0 < r < t$.

+ Avec $38{,}18 \leq h \leq 42$ (donc $2 \leq t_1 \leq 3$), la première coïncidence n'est pas au 1er tour.

Comme pour le cas précédent, pour que la coïncidence soit au (1+t)^{e} tour ($t \geq 1$, $t \in N$), elle devra appartenir à l'intervalle [2+5t ; 3+5t].

Donc la première coïncidence de deux phénomènes est au (1+t)^{e} si m est un diviseur de 2+5t sans être un diviseur de (2+5t) – 5r avec ($0 < r < t$).

Voici les cas possibles de la première coïncidence jusqu'à 8^{e} tour pour T = 5 et n = 1 avec les différents choix des valeurs de m et h.

h / **1^{ere} coïncidence**		$2 \leq h \leq 15{,}82$	$15{,}82 \leq h \leq 38{,}18$	$38{,}18 \leq h \leq 42$
proche (3 premiers tours)	1er tour	pour tout m entier	-	-
	2^{e} ou 3^{e} tour	-	pour m = 2, **3**, 6, 11	pour m = 2, 3, 4, 6, 7, 12
lointaine (au-delà de 3 tours)		-	pour m = **4**, 7, 8, 9, 13, 16, 21, 26, 31, 36	pour m = 8, 11, 16, 17, 22, 32, 37

Tableau 31. Les cas possibles de la première coïncidence jusqu'au 8^{e} tour

Choix pour notre ingénierie

Nous écartons le cas $2 \leq h \leq 15{,}82$ parce que la première coïncidence serait toujours au 1er tour. Dans cette séance, nous avons choisi *deux valeurs (3 ; 35) et (4 ; 20) pour le couple (m ; h)* dans deux phases différentes (phases 1 et 4) avec des mises en scène du problème différentes.

Pour le couple (3 ; 35), la première coïncidence est proche (2^{e} tour). Ce choix favorise l'usage de la périodicité sans disqualifier le recours au cercle pour lire le temps en tours (temps discret).

Pour le couple (4 ; 20), la première coïncidence est lointaine (4^{e} tour). Ce choix rend coûteux le recours au cercle pour lire le temps et favorise en conséquence le déploiement du cercle sur l'axe du temps pour utiliser un temps linéaire en minutes (temps continu).

- **Variable de situation V4 : taille du cercle à l'écran modifiable ou non[26]**

Suite à l'exécution de la consigne 1 (figure 49), la fenêtre Cabri affiche un modèle géométrique de co-variation analogue à celui de la situation 2. Cependant, nous avons fait le choix de ne pas autoriser le changement d'échelle si bien que la taille du cercle à l'écran est fixe.

Justifions notre choix : les points P1, P2 et P3 sont construits, mais n'apparaissent pas dans le même écran que le cercle. Il faut utiliser les ascenseurs horizontaux de la fenêtre pour les découvrir mais dans ce cas le cercle du manège disparaît de l'écran. Grâce à cela, on peut accéder à la première coïncidence si elle a lieu au 1er tour voire au 2^{e} tour. Nous avons créé une contrainte pour faire émerger la périodicité du mouvement de la cabine comme outil dans la recherche de la coïncidence ou des coïncidences.

[26] C'est la même variable que dans la situation 2.

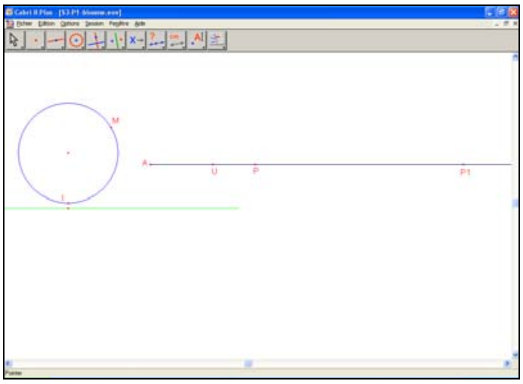


Figure 54. Ecran Cabri à l'ouverture du fichier « S3-P1-binome.env »

A l'écran, un segment représentant le sol est aussi présent. La distance du centre du cercle à ce segment est $d = r + \frac{1}{10}r$ (r rayon du cercle), proportion identique à celle de la réalité invoquée : $22 = 20 + \frac{1}{10}x20$. Nous avons fait le choix de ne pas transférer aux élèves la responsabilité de représenter le sol pour une simple question d'économie du temps de l'ingénierie.

II. Analyse de la phase 1 (entrée dans le jeu)

II.1. Les choix des valeurs des variables dans cette phase

Cette phase a pour but de faire entrer dans le problème central. Une question sur les informations nécessaires pour savoir si M va gagner un voyage gratuit est posée (cf. la fiche 1 – Situation 3 en annexe 5). Cette question fait l'objet d'un débat public qui a pour but d'introduire les données précises de la situation étudiée, c'est-à-dire les choix des valeurs des variables didactiques V1, V2 et V3.

Rappelons qu'avec le choix des valeurs T = 5 minutes, n = 1 minute, m = 3 minutes et h = 35 mètres dans cette phase, les coïncidences sont périodiques en un seul groupe. La première coïncidence est proche sans être durant le 1er tour de la cabine. Ici, M va gagner au 2e tour et il va en gagner d'autres tous les 3 tours de voyage.

Le cercle représentant le manège sur l'écran Cabri est choisi pour que l'on puisse, par déplacement de P, repérer un point T1 à la hauteur h = 35 m, mais ensuite le déplacement de P vers la droite fait sortir le cercle de l'écran Cabri. Comme nous l'avons dit précédemment, ce choix a pour but de favoriser un usage de la périodicité des phénomènes.

II.2. Les stratégies possibles

a) Graphique unidimensionnel :

- Demi-droite → cercle : repliement du temps sur l'espace fini du cercle

Dans cette stratégie, le temps linéaire sur la demi-droite est transformé en temps circulaire sur le cercle.

+ marquer sur le cercle un point L à l'endroit éclairé par la lampe

+ repérer sur le cercle les arcs représentant les temps d'éclairement du point L

+ relever la première coïncidence : point L appartenant à l'un des arcs représentant les temps d'éclairement du point L.

Dans l'environnement Cabri, en utilisant la commande « calculatrice » (pour le changement d'échelle entre la réalité et l'écran) et la commande « report de mesure », on peut construire avec précision le point L à la hauteur h sur le cercle. Par contre, après avoir construit les arcs sur le cercle, il faut les distinguer selon qu'ils sont éclairés ou pas et selon les tours. Si le nombre de tours augmente, cette stratégie devient coûteuse car elle doit coordonner le double comptage du nombre de tours et des arcs éclairés sur le cercle. Dans cet environnement, il est aussi possible de procéder perceptivement ce qui diminue le coût de la stratégie mais génère des incertitudes sur les positions des points.

Dans l'environnement papier, soit le point L est marqué sur le cercle avec précision ce qui est très coûteux en calcul et tracés, soit le point L est placé perceptivement sur le cercle ce qui provoque une incertitude sur sa position exacte.

- Cercle → demi-droite : déploiement linéaire du temps

Dans cette stratégie, le temps circulaire est transformé en temps linéaire sur la demi-droite.

+ trouver les durées d'éclairement de la lampe : [k'm ; k'm+n] (k' naturel)

+ repérer sur l'axe du temps les segments représentant les temps d'éclairement du point L en les distinguant de ceux où le point L n'est pas éclairé.

Puis, en environnement papier :

+ trouver les moments où la cabine M est à la hauteur h : $t_1 + 5k$ (k naturel), où t_1 est le moment du premier passage en L (voir annexe 6)

+ trouver les coïncidences entre l'ensemble de nombres $\{t_k \ / \ t_k = t_1 + 5k, k \in N\}$ et l'ensemble d'intervalles $\{Int_{k'} \ / \ Int_{k'} = [k'm \ ; k'm+n] \ / \ k' \in N\}$, grâce, implicitement ou explicitement, à leur représentation sur la droite réelle tracés sur le papier ou simplement alignés.

Ou bien, en environnement Cabri : placer le point L sur le cercle puis en déplaçant le point P sur l'axe du temps, relever les coïncidences : point M sur point L et point P appartenant à l'un de segments d'éclairement du point L.

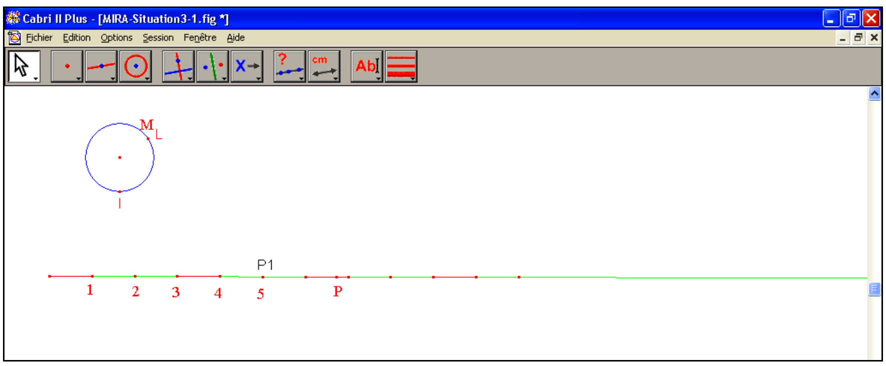


Figure 55. Le marquage des temps d'éclairement sur l'axe du temps

Dans l'environnement Cabri, cette stratégie est coûteuse parce qu'il est nécessaire de repérer sur l'axe du temps les segments représentant les temps d'éclairement du point L en les distinguant de ceux où le point L n'est pas éclairé (par différentes couleurs par exemple).

De plus, si la première coïncidence n'appartient pas au premier tour du voyage, les limites de l'écran Cabri que nous avons imposées ne permettent pas de visualiser simultanément le cercle et l'axe du temps au delà de 6 – 7 minutes. Cela peut soit bloquer cette stratégie soit faire émerger la nécessité de recourir à la périodicité pour trouver la première coïncidence ou les autres coïncidences si la première a déjà été trouvée. Pour cela, tirer le point P depuis A, repérer entre A et P1 le point T1 où M arrive au point L. Puis, lorsque le point P arrive à P1, le ramener au point A en considérant qu'on est au 2^{e} tour et donc qu'il s'est déjà écoulé 5 minutes. Ceci revient à replier la demi-droite du temps sur le segment [AP1] en notant le numéro du tour. On peut prévoir les mêmes difficultés que dans la première stratégie puisqu'il s'agit de coordonner le comptage des tours et les moments d'éclairement de la lampe.

Cette stratégie est délicate à conduire dans l'environnement Cabri. Par contre, elle peut s'exprimer dans un environnement papier sous la forme du graphique bidimensionnel ci-dessous :

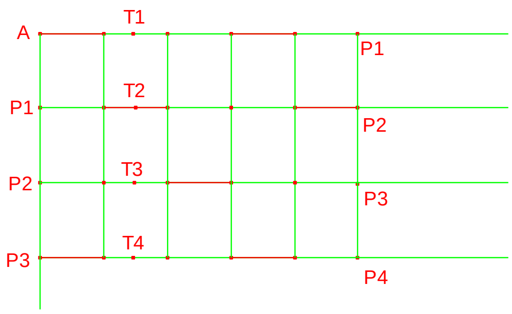
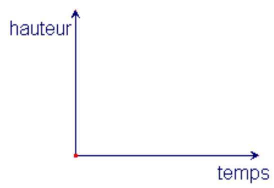


Figure 56. Le cas T = 5, m = 3 et n = 1

Du fait qu'il est bidimensionnel, ce graphique a l'avantage de délivrer l'opérateur de la coordination sur le même espace physique (un cercle ou un segment) que nous avons décrite dans les deux stratégies. Cependant, pour trouver la première coïncidence, il a fallu calculer t_1 et placer les points T1, T2, etc. sur le graphique.

b) Graphique bidimensionnel : temps linéaire et hauteur



+ repérer sur l'axe du temps les segments horizontaux représentant les temps d'éclairement du point L et construire leurs images à la hauteur h.

+ construire verticalement par rapport à l'axe du temps les segments dont l'une des extrémités est le point pilote P, l'autre est le point M' et telle que PM' a même mesure que HM (H : projection de M sur le segment représentant le sol), c'est-à-dire la hauteur de la cabine. La trace (obtenue par commande Cabri) de l'extrémité M' du segment est alors une sinusoïde.

+ les abscisses des intersections des segments avec la sinusoïde sont les moments de coïncidences.

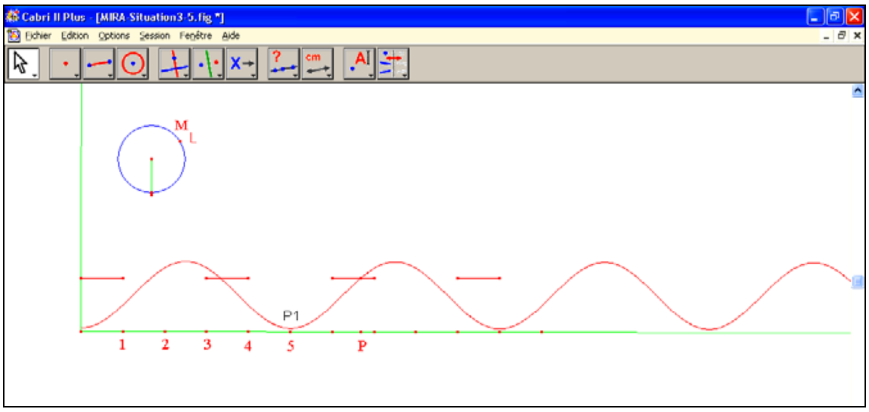


Figure 57. Stratégie graphique bidimensionnel sur l'écran Cabri

Le choix que nous avons fait sur la variable V4 réduit fortement le nombre d'arches[27] de la sinusoïde visibles à l'écran ce qui ne sera pas le cas dans un environnement papier.

En effet, dans un tel environnement, la construction de la sinusoïde fait appel à la formule donnant la hauteur h en fonction du temps t (fort coût en calculs) ou, à une succession de segments reliant les minimums et les maximums de la hauteur (réduction du coût).

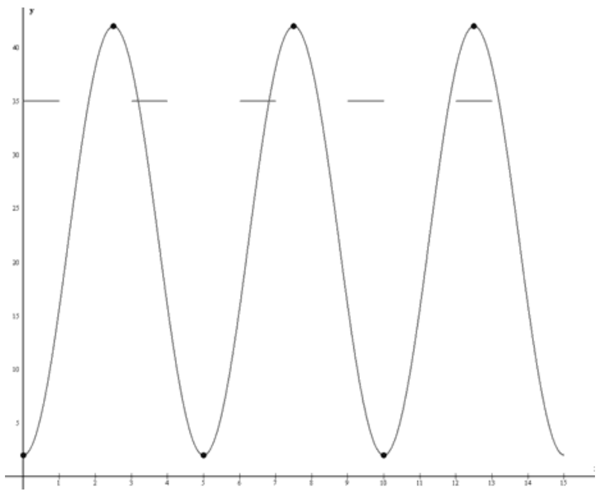


Figure 58. Stratégie graphique bidimensionnel sur papier (première forme)

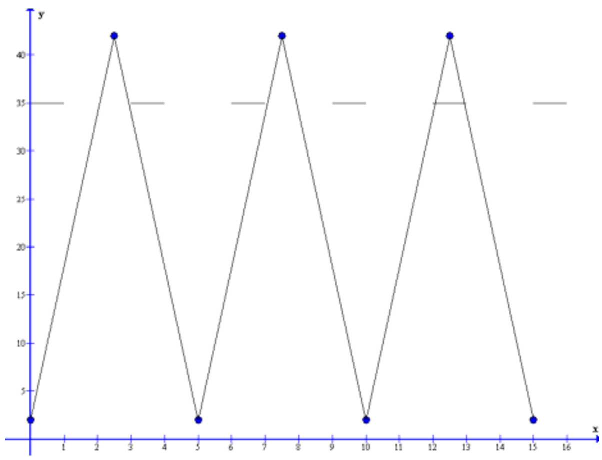


Figure 59. Stratégie graphique bidimensionnel sur papier (deuxième forme)

[27] Arche = morceau graphique sur un intervalle ayant la longueur de la période.

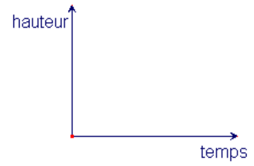
Nous résumons les stratégies possibles dans le tableau suivant :

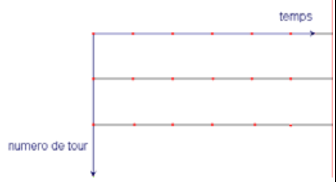
<table>
<tr><th colspan="2">Graphique unidimensionnel</th><th colspan="2">Graphique bidimensionnel</th></tr>
<tr>
<td>Demi-droite → cercle

Repliement du temps en un temps circulaire

Périodicité en nombre de tours – temps discret</td>
<td>Cercle → demi-droite

Déploiement du temps en un temps linéaire

Périodicité en intervalles - temps continu</td>
<td>Temps linéaire et hauteur

Déploiement du temps en un temps linéaire

Périodicité en nombre d'arches de sinusoïde</td>
<td>Temps et nombre de tours

Repliement du temps en un temps « segmenté »

Périodicité en nombre de segments – temps discret</td>
</tr>
</table>

Tableau 32. Les stratégies possibles et les savoirs impliqués

II.3. Les stratégies attendues

Les stratégies « graphique bidimensionnel » ne sont pas attendues car elles font référence au modèle O alors que le processus de modélisation initié dans la séance 1 a mis en avant le modèle C. Certes, l'axe du temps est potentiellement porteur d'un passage vers le modèle O mais l'analyse institutionnelle a montré l'absence de technique institutionnalisée pour effectuer ce passage même en classe 12 où est enseignée l'oscillation harmonique. Falcade (2006) a expérimenté sur Cabri des situations visant à mettre en place le deuxième axe d'un graphe à la façon d'Euler. Elle explique ci-dessous les difficultés rencontrées par les élèves dans la conceptualisation d'un tel graphe :

> Du point de vue des difficultés des élèves relativement à la notion de graphe, nous avons déjà observé que, l'interprétation dynamique du graphe d'une fonction est une expérience mentale assez complexe. Il faut d'abord conceptualiser le graphe comme issue de la variation d'un point P qui représente la variable dépendante, et qui bouge en fonction d'un autre point M variable, représentant la variable indépendante. Sous-jacente à ces deux variations corrélées, il y a la perception d'une deuxième relation de dépendance fonctionnelle, invisible dans le graphe, celle que chaque point bouge dans le temps. Une telle interprétation exige donc la réintroduction du temps et la prise en compte de la relation de co-variation de M(t) et de P(M(t)). (Falcade (2006), p. 91)

Quant aux stratégies « graphique unidimensionnel », deux sont coûteuses en reports de mesure (cercle → demi-droite avec Cabri ou demi-droite → cercle avec Cabri). La stratégie cercle → demi-droite sur papier, nécessite le calcul de t_1, mais ce calcul est présent institutionnellement dans l'enseignement mathématique ou dans l'enseignement physique sous deux formes différentes (voir annexe 6). Reste la stratégie demi-droite → cercle sur papier : elle est peu coûteuse en calculs et même peut ne comporter aucun calcul si elle utilise la perception. Dans ce dernier cas, se pose le problème de l'incertitude de la position de L sur le cercle qui ne peut être invalidée que par confrontation avec la réponse calculée. Cette stratégie papier comme la précédente s'appuie en partie sur le modèle C installé à l'écran Cabri.

On peut donc conclure que les stratégies « graphique unidimensionnel » seront majoritaires et parmi elles, la stratégie demi-droite → cercle sur papier devrait être dominante.

II.4. Déroulement prévu et rôle de l'enseignant

Au début de cette phase, l'enseignant coopère avec les élèves dans la recherche des informations nécessaires pour résoudre le problème posé. Les informations importantes sont que la lampe s'allume pendant 1 minute toutes les 3 minutes à la hauteur h = 35 mètres. De plus, l'enseignant et les élèves se mettent d'accord pour choisir l'endroit L du manège en position montante de la cabine M.

Les élèves travaillent pendant 25 minutes et écrivent leurs réponses sur leur fiche.

Après le travail des élèves, l'enseignant doit récupérer les fiches-élèves et donner la réponse exacte sans argumenter pour ne privilégier aucune des stratégies.

Voici les réponses que l'enseignant va donner aux élèves :

+ Oui, M peut gagner un voyage gratuit, au bout de 2 tours.
+ M peut en gagner d'autres.

II.5. Déroulement effectif et analyse a posteriori

Voici le script du travail de coopération entre l'enseignant et les binômes pour déterminer les informations nécessaires à la résolution du problème.

> P : De quelles informations avez-vous besoin pour savoir si M va gagner un voyage gratuit ?
> Binôme 5 : **L'intervalle de temps**.
> Binôme 1 : **Le temps d'allumage et la position de L**.
> P : Oui, il faut donc savoir combien de temps la lampe s'allume.
> Je vous donne l'information : la lampe s'allume une minute toutes les trois minutes.
> P : De quelles informations avez-vous besoin en plus ?
> Binôme 1 : **La vitesse de la grande roue**.
> P : La grande roue fait un tour en 5 minutes. On considère que c'est un mouvement uniforme. Au bout d'une minute, le manège a tourné 1/5 de tour. [comme dans la situation 2 de la séance 1].
> P : De quelles informations avez-vous besoin en plus ?
> (…..)
> Binôme 4 : **Où s'allume la lampe ? Où est L ?**
> P : Oui, la lampe éclaire un endroit fixe (noté L) du manège, où est L ?
> Je vous donne l'information : la lampe éclaire la position du manège à la hauteur de 35 mètres du sol.
> Selon vous, il y a combien de points sur le cercle qui sont à la hauteur de 35 mètres du sol ?
> Es : 2 points.
> P : Le gérant ne peut pas éclairer 2 points parce qu'il y aura plusieurs personnes qui gagnent.
> Nous somme d'accord que le point L est à droite du manège quand la cabine M monte.
> En résumé, le point L est à une hauteur de 35 mètres par rapport au sol et à droite du manège.
> P : De quelles informations avez-vous besoin en plus ?
> (….)
> P : On continue à travailler pour répondre aux questions de la fiche 1. Si vous avez besoin de plus d'informations, vous pouvez me les demander.
> (Script de la séance 2)

On voit que les informations relatives aux valeurs des quatre paramètres m, n, T et h sont bien repérées par certains binômes comme nécessaires à la résolution du problème.

a. Placer le point L sur le cercle

Les sessions d'enregistrement dans Cabri et les notes des observateurs attestent que tous les binômes cherchent d'abord à construire dans Cabri le point L sur le cercle. Pourtant, le changement d'échelle pour passer des données numériques de la réalité à celles du modèle Cabri pose problème à la plupart des binômes[28]. Quatre binômes (n° 2, 3, 4 et 5) sur les 6 binômes placent finalement un point L perceptivement sur le cercle Cabri après leurs échecs dans le changement d'échelle. Tous ces binômes recopient ensuite leur cercle sur papier.

On voit clairement les idées de changement d'échelle dans le brouillon du binôme 3 :

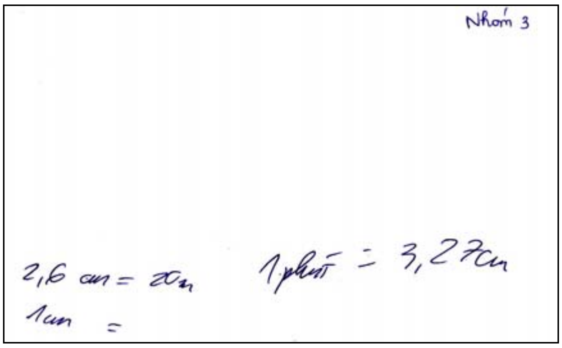


Figure 60. Brouillon papier du binôme 3

L'écriture « 1cm = » montre que ce binôme essaie de changer l'échelle en opérant sur l'unité. Cependant, il échoue. Enfin, il place perceptivement le point L sur le cercle. De manière similaire, le binôme 4 construit un segment de longueur 1 cm comme unité de calcul. Mais ensuite, il reporte cette mesure sur le cercle à partir d'un point quelconque et déplace le point obtenu pour avoir une position approximative du point L. Ce binôme confond mesure sur le cercle et mesure sur une droite.

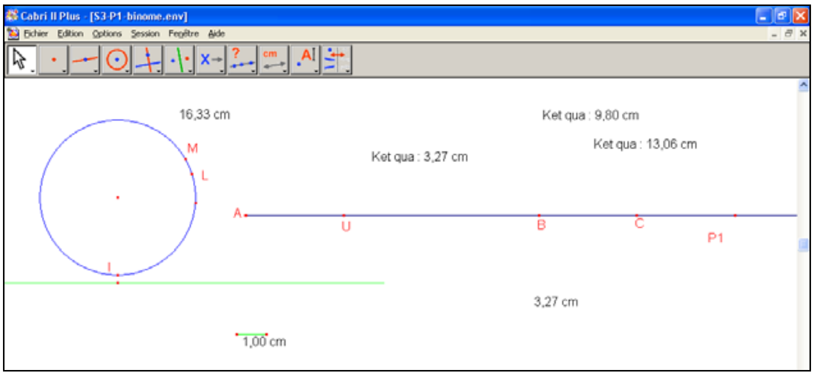


Figure 61. Ecran Cabri du binôme 4

Seuls les binômes 1 et 6 réussissent à placer le point fixe L sur le cercle dans Cabri par un changement d'échelle. Nous présentons ci-après des calculs et la production sur l'écran de Cabri du binôme 1. Voici d'abord les traces écrites du changement d'échelle dans son brouillon :

[28] Cela nous interroge sur l'enseignement de la proportionnalité dans l'institution vietnamienne.

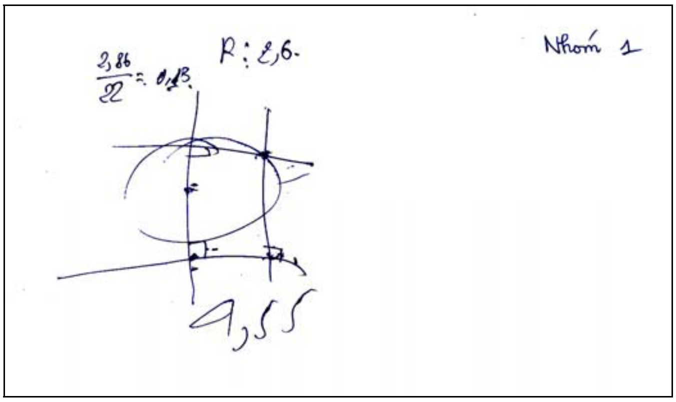


Figure 62. Brouillon papier du binôme 1

Et voici l'écran Cabri obtenu à la fin du travail dans la phase 1 :

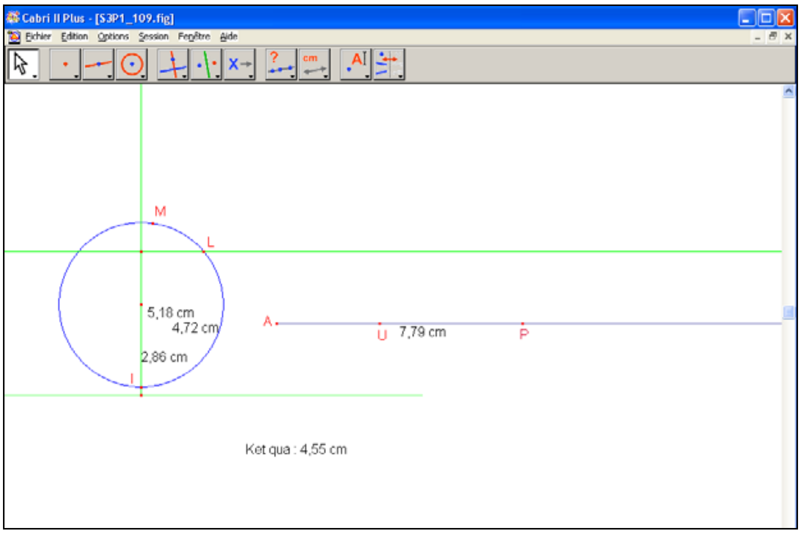


Figure 63. Ecran Cabri du binôme 1

b. Trouver des coïncidences

Le point L étant placé sur le cercle, le travail pour trouver les coïncidences des deux phénomènes, la cabine à la position L et l'éclairage de la lampe, est posé. Comme prévu, le choix des valeurs entières de T, m et n favorise la graduation du temps. En effet, tous les binômes graduent le temps sur le cercle ou/et sur l'axe du temps : ils divisent le cercle ou/et le segment AP1 en 5 parties.

Graduation du temps		**Binômes**
Avec calculs et reports de mesures	sur le cercle dans Cabri	1
	sur la demi-droite dans Cabri	4, 5
Perceptivement	sur le cercle sur papier	2, 3, 4, 5, 6
	sur la demi-droite sur papier	-

Tableau 33. Les procédures empruntées pour graduer le temps

Voici la figure construite sur papier par le binôme 6 où le cercle est divisé perceptivement en 5 parties et où le crayon a effectué plusieurs tours (preuve de l'utilisation de la périodicité) :

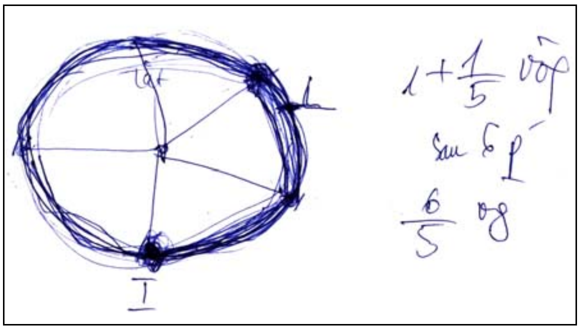


Figure 64. Brouillon papier du binôme 6

Et dans la figure ci-après, on voit la graduation de l'axe du temps dans Cabri par le binôme 5 :

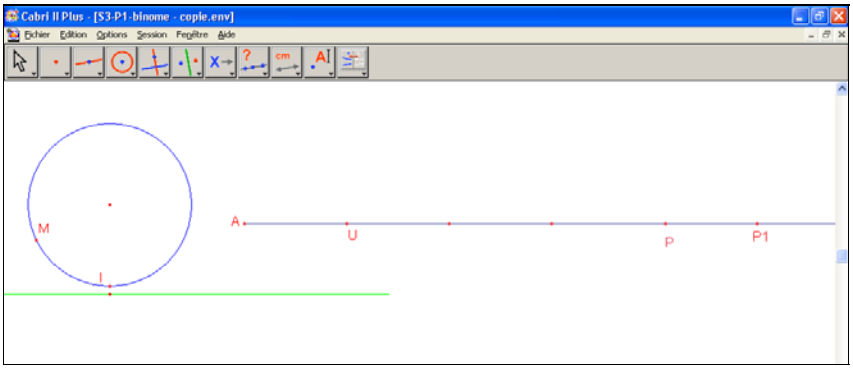


Figure 65. Ecran Cabri du binôme 5

La graduation du temps a donc été effectuée soit sur le cercle soit sur l'axe du temps. Cependant, comme nous l'avons précisé, la taille du cercle sur l'écran de Cabri bloque la stratégie cercle → demi-droite avec Cabri sauf à utiliser la périodicité. C'est-à-dire par déplacement de P, on peut repérer un point T1 à la hauteur h = 35 m d'abscisse t_1 sur l'axe du temps mais on ne peut pas marquer les autres points T2, T3, etc. correspondant à cette hauteur. Ceci oblige à utiliser la périodicité pour rechercher les coïncidences. Cependant, nous avons mis en évidence précédemment les difficultés à opérer la périodicité dans Cabri.

Ceci peut expliquer que le binôme 5 abandonne sa graduation sur la demi-droite pour résoudre le problème et recourt au cercle et à la graduation sur ce cercle réalisée sur papier puisque dans cet environnement, il lui est possible de continuer (par la pensée et par des gestes) le mouvement de la cabine M, selon le modèle C de la périodicité.

Nous présentons dans le tableau suivant les stratégies effectives (pour trouver les coïncidences) par rapport à celles prévues :

	Stratégies	**Binômes**
Graphique unidimensionnel	Demi-droite → cercle avec Cabri	1
	Demi-droite → cercle sur papier	2, 3, 5, 6
	Cercle → demi-droite avec Cabri	4
Graphique bidimensionnel		-

Tableau 34. Les stratégies apparues dans la phase 1 - Situation 3

Les binômes 1, 2, 3 et 6 utilisent le cercle comme trajectoire de la cabine M pour compter le trajet parcouru en fonction du temps et à partir de là, en déduisent le nombre de tours pour que M gagne la première fois. Par exemple, voici la réponse du binôme 1 :

Trả lời và giải thích câu trả lời của em :

Cứ 1 phút = $\frac{1}{5}$ quãng đường => đi qua 3 phút + 1 phút tia sáng chiếu sáng sẽ là $\frac{4}{5}$ quãng đường. ~~Như vậy~~ Mà theo tính toán đề bài, L nằm ở $\frac{2}{5}$ quãng đường. Vậy vòng 1 sẽ không được. Đến vòng 2 vì còn thiếu $\frac{1}{5}$ quãng đường ở vòng 1 nên cabin của M chỉ đi 2 phút ~~sẽ chiếu sáng~~ sẽ chiếu sáng mà L nằm cách điểm I là $\frac{2}{5}$ quãng đường cũng bằng 2 phút. Vậy M có thể thắng 1 vòng

Traduction en français :

1 minute = 1/5 trajet ⟶ après 3 minutes + 1 minute où la lampe s'allume, c'est 4/5 trajet. Selon des calculs, L est à 2/5 trajet. Donc après un tour, M ne gagne pas. Dans la deuxième tour, il manque 1/5 trajet du 1[er] tour donc la cabine de M ne passe que 2 minutes et elle est allumée. On sait que L et I distants de 2/5 trajet qui est égale à 2 minutes. Donc M peut gagner un voyage gratuit au bout de 2 tours. De manière similaire, M peut en gagner d'autres.

Figure 66. La réponse du binôme 1 sur la fiche 1

Par contre, le binôme 4 donne des raisonnements sur le trajet de la cabine M le long de la demi-droite graduée dans Cabri :

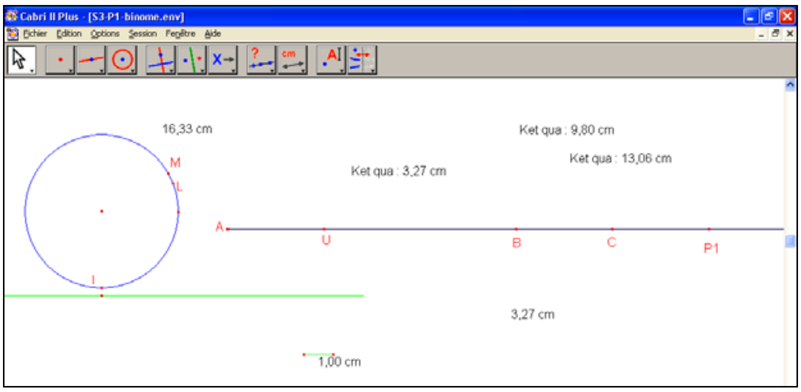


Figure 67. Ecran Cabri du binôme 4

Voici sa réponse :

Trả lời và giải thích câu trả lời của em :

M có thể thắng một vòng miễn phí. Sau ~~1~~ 1,2 vòng chơi. Có thể thêm những lần sau.

Gọi B là điểm mà M đi ~~từ~~ được 3 phút. C là điểm M đi được 4 phút. Khi P đi từ A → U thì điểm L tắt (tia sáng), đi tiếp đến B thì điểm L sáng và khi đi đến C thì L tắt. Vậy sau khi đi được 6 phút thì M sẽ gặp tia sáng.

Traduction en français :

M peut gagner un voyage gratuit après 1,2 tours. Il peut en gagner d'autres.
Appelons B le point correspondant à la position de M après 3 minutes. C est le point correspondant à la position de M après 4 minutes. Quand P se déplace de A à U, L s'éteint. Quand P se déplace de U à B, L s'allume et de B à C, L s'éteint. Donc après 6 minutes, M va gagner un voyage gratuit.

Figure 68. La réponse du binôme 4 sur la fiche 1

En bref, 5 binômes (n° 1, 2, 4, 5 et 6) donnent la bonne réponse « 2 tours » mais ensuite deux de ces binômes (n° 2 et 5) l'annulent ; à cause d'une confusion dans le comptage des moments d'allumage, ils changent de réponses (binôme 2 : 4 tours et binôme 5 : M ne gagne pas). Le binôme 3 place perceptivement le point L dans Cabri puis passe en environnement papier (comme les binômes 2, 5 et 6). Enfin, il conclue que M ne gagne pas.

Le tableau des stratégies montre que seule la stratégie « graphique unidimensionnel » est utilisée par les élèves dans cette phase. La stratégie « graphique bidimensionnel » n'apparaît pas du tout. Bien que les élèves viennent d'apprendre en physique à la fois des oscillations harmoniques et le lien avec le mouvement circulaire uniforme, aucun d'entre eux ne cherche à établir la formule représentant la hauteur de la cabine en fonction du temps et à construire son graphique (une sinusoïde) alors que l'axe du temps est déjà là.

Aucun binôme n'emprunte la stratégie qui calcule le temps t_1 et l'utilise sur l'axe linéaire du temps (en environnement papier ou Cabri). Le contexte géométrique dans lequel travaillent les élèves depuis la séance 1 peut expliquer cette absence.

Sans surprise, le modèle C (modèle déjà construit dans Cabri) est privilégié. Cependant, la genèse instrumentale minimale construite dans la séance 1 s'avère insuffisante pour exploiter les fonctionnalités du logiciel et 4 binômes sur 6 abandonnent l'environnement Cabri et transfèrent sur papier la figure réalisée sur Cabri. De plus que ce soit sur papier ou sur Cabri, les procédures perceptives pour placer le point L et découper le temps, moins coûteuses, ne sont pas invalidées ni par rétroaction du milieu ni par intervention de l'enseignant.

Les procédures des élèves montrent que le temps est considéré comme une variable indépendante lié au cercle ou à la demi-droite (hypothèse H2) et que la périodicité du mouvement de la cabine M est utilisée pour trouver la première coïncidence (hypothèse H3). Par contre, la périodicité est exploitée en réduisant le temps à un espace fini et non pas en déployant complètement le temps sur la demi-droite (à l'exception du binôme 4).

A la fin du travail dans cette phase, l'enseignant demande les réponses des binômes et donne la bonne réponse sans la justifier (argument d'autorité).

P : Quelques élèves pensent qu'il faut calculer pour qu'on gagne tout de suite quand on commence le voyage suivant, (rire..).
P : M va-t-il gagner un voyage gratuit ?
Oui : 4 binômes, non : 2 binômes
P : Moi, je réponds oui.
P : Il gagne au bout de combien de tours ?
2 tours : 3 binômes, 4 tours : 1 binôme
P : Moi, je réponds 2 tours
P : M peut-il en gagner d'autres ?
Tous les binômes : oui
P : Oui, M peut en gagner d'autres. (Script de la séance 2)

On voit que tous les binômes répondent que M peut gagner d'autres voyages bien que deux d'entre eux (binômes 3 et 5) n'aient pas trouvé le moment où M gagne la première fois. L'explication n'est pas demandée mais on peut penser que c'est la périodicité du mouvement de la cabine qui permet aux élèves de répondre à cette question. Cette idée se trouve dans la réponse du binôme 1 citée précédemment : « … *M peut gagner un voyage gratuit au bout de 2 tours. De manière similaire, M peut en gagner d'autres* ».

Finalement, à ce moment de la séance 2, nous constatons l'utilisation conjointe de l'axe du temps et du modèle C, mais seulement pour les deux binômes (n^0 1 et 4). Nous constatons aussi qu'aucun des binômes n'a de stratégie bidimensionnelle. Pourtant, l'articulation du modèle C avec le modèle O ne peut éviter le recours à un graphique bidimensionnel. C'est pourquoi nous décidons dans les phases 2 et 3 de la même séance d'introduire un tel graphique avant de mettre en concurrence les modèles C et O, dans la phase 4.

III. Analyse de la phase 2 (anticipation du chemin de M')

III.1. Présentation de la phase 2

Dans cette phase, un algorithme de construction d'un point M' est proposé. L'objectif de cette phase est d'obtenir le plus rapidement possible une construction correcte avant de mettre en question la courbe qui est l'objet visé.

Voici les consignes données.

SITUATION 3
Fiche 2

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S3-P2-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

Travail à faire :
Tracer la droite qui passe par le point M et qui est perpendiculaire au sol.
Appeler H le point d'intersection avec le sol.
Mesurer la longueur MH.
Tracer une droite passant par P et perpendiculaire à l'axe du temps.
Tracer une demi-droite d'origine P et perpendiculaire à l'axe du temps.
Reporter la mesure MH sur la nouvelle demi-droite.
On obtient le point M'.

Question :
Si on déplace P que se passe-t-il pour M' ? Quel est le chemin de M' ?

Réponse et explications :

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Figure 69. Situation 3 – Fiche 2

Suite à l'exécution de la consigne 1, la fenêtre Cabri affiche de nouveau le modèle géométrique de co-variation travaillé dans la séance 1 et déjà présent dans la phase 1 de cette séance.

En suivant cet algorithme, le point M' est construit. Le point P pilote le point M' et on a toujours MH = PM' comme le montre la figure ci-après :

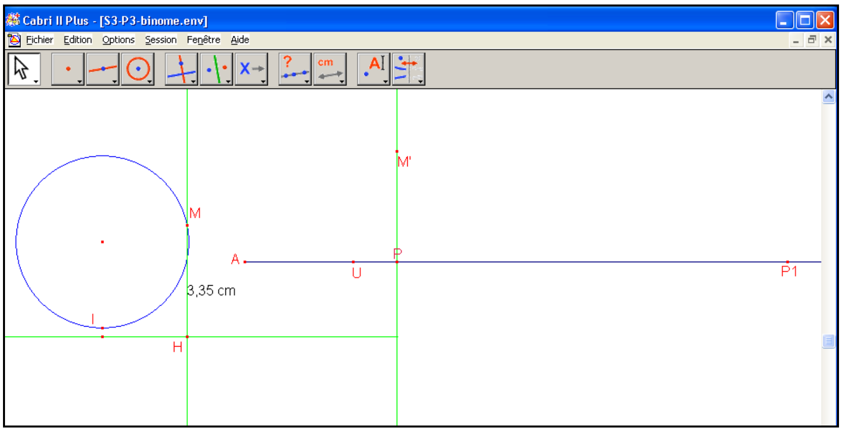


Figure 70. Ecran Cabri obtenu en suivant l'algorithme proposé

Le chemin de M' est aussi le graphique représentant la hauteur de la cabine M en fonction du temps. Nous voulons savoir si les élèves reconnaissent les caractéristiques de la courbe construite par les points M'. Pensent-ils à une sinusoïde ? L'articulation entre les deux modèles C et O existe-t-elle chez les élèves ?

La réponse attendue dans cette phase est donc que si l'on déplace P, le point M' se déplace et MH = PM' (première question), que le chemin de M' monte et descend alternativement, c'est une sinusoïde (seconde question).

III.2. Analyse des résultats

Suivant correctement l'algorithme proposé, les élèves font apparaître rapidement le point M' et déplacent le point P pour voir le déplacement du point M' sur l'écran de Cabri. Certains accompagnent du doigt ce déplacement mais aucun des binômes ne produit de figure sur la fiche. Le tableau 35 donne des caractéristiques du chemin du point M' énoncées par écrit par les élèves :

	Caractéristiques du chemin de M'	**Binômes**
Fiche 2	Monte et descend	1, 4, 6
	Autres (arc de cercle, parabole,..)	2, 3, 5

Tableau 35. Les réponses apparues dans la phase 2 – Situation 3

Ce tableau montre que 3 binômes reconnaissent la caractéristique « alternative » de la courbe représentant les points M'. C'est une courbe qui monte et descend ; le terme « courbe ondulée » est même utilisé par les binômes 4 et 6, comme le révèle la discussion des deux élèves du binôme 6 :

E2 : Quel est le chemin du point M' ?
E1 : Ouais, je le connais. C'est une **courbe ondulée** comme ça (Elle utilise son doigt pour « tracer » une courbe qui monte et descend alternativement).

M’ constitue des courbes ondulées en dessus de l’axe du temps.
E2 : Elle s’appelle la courbe ondulée ?
E1 : Oui, courbe ondulée. (Protocole du binôme 6)

Les trois autres binômes (n^0 2, 3 et 5) ne reconnaissent pas la périodicité de la courbe. Ils se cantonnent à une vision locale de la courbe pour conclure que c’est un arc du cercle ou une parabole.

Cette phase de l’ingénierie prévoyait que l’observation du mouvement du point M’ dans Cabri permettrait aux élèves de se remémorer le modèle O et son lien avec le modèle C. Cependant, certains élèves ne vont pas jusque là bien que l’enseignant ait parlé du mouvement uniforme auparavant. Ceci confirme l’absence d’articulation entre les deux modèles C et O chez les élèves, absence que nous avons mise en évidence avec le questionnaire dans le chapitre 3.

IV. Analyse de la phase 3 (validation de l’anticipation et construction du chemin de M’)

IV.1. Présentation de la phase 3

Cette phase demande d’utiliser la commande « Trace » puis de tracer la courbe obtenue sur un papier quadrillé. Nous poursuivons deux objectifs :

+ valider ou invalider l’anticipation du chemin du point M’ dans la phase 2 précédente
+ mobiliser les connaissances des élèves sur le modèle O en construction dans son articulation avec le modèle C déjà en place.

Les consignes données sont présentées ci-dessous :

SITUATION 3
Fiche 3

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S3-P3-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

Travail fait :
Tracer la droite qui passe par le point M et qui est perpendiculaire au sol.
Appeler H le point d'intersection avec le sol.
Mesurer la longueur MH.
Tracer une droite passant par P et perpendiculaire à l'axe du temps.
Tracer une demi-droite d'origine P et perpendiculaire à l'axe du temps.
Reporter la mesure MH sur la nouvelle demi-droite.
On obtient le point M'.

Question de la fiche 2 :
Si on déplace P que se passe-t-il pour M' ? Quel est le chemin de M' ?

Nous allons voir si tu as raison.
Sélectionne l'outil « trace » et clique sur M'.
Déplace le point P. Tu obtiens une courbe rouge qui est le chemin du point M'.

Trace

Question : que peux-tu dire de cette courbe ?

Réponse :

Travail à faire : le gérant du manège n'a pas d'ordinateur. Recopie sur la feuille ci-jointe le chemin de M' pour que le gérant puisse contrôler le jeu.

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Figure 71. Situation 3 – Fiche 3

Suite à l'exécution de la consigne 1, sur l'écran de Cabri apparaît la figure géométrique construite à la fin de la phase 2.

En demandant d'utiliser la commande « Trace », nous entendons faire produire par les élèves le graphique sinusoïdal suivant :

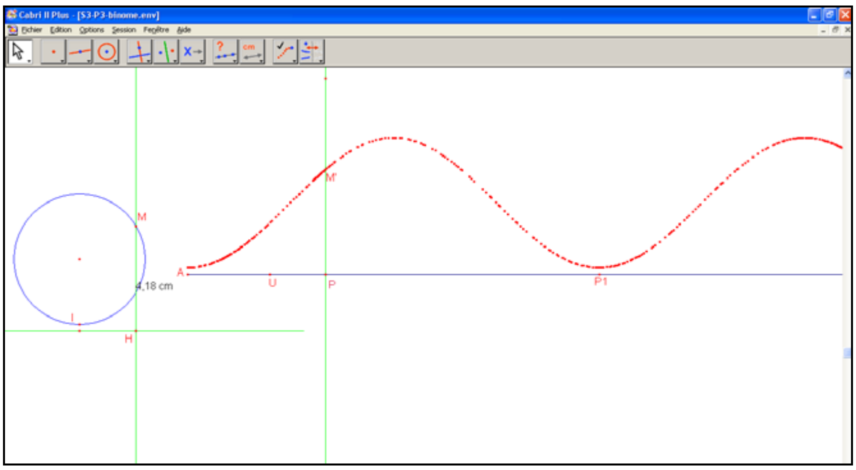


Figure 72. Ecran Cabri avec l'utilisation de la commande « Trace »

L'outil « Trace » affiche la trajectoire suivie par le point M' lors de son déplacement piloté par le point P. La représentation graphique est interprétable d'une part comme la trajectoire du point mobile M' et d'autre part comme le graphe de la fonction qui traduit la co-variation de la hauteur de la cabine mesurée par PM' et du temps mesuré par AP.

Nous avons préféré l'outil « Trace » à l'outil « Lieu » pour que la construction du chemin de M' soit réalisée à l'écran progressivement par le déplacement du point P. Ce choix a d'autres conséquences :

+ la courbe disparaît dès que l'on recourt à l'un des ascenseurs, c'est une contrainte pour cette phase de la situation 3 ;

+ la courbe n'est pas disponible pour une lecture des coordonnées des points de la courbe, c'est une contrainte qui jouera dans la phase suivante (phase 4).

Notons que la courbe est ainsi tracée sans que soit présent le deuxième axe de ce qui pourrait être un repère cartésien dont l'axe des abscisses serait l'axe du temps.

Comme pour la phase 2 précédente, la question « Que peux-tu dire de cette courbe ? » a pour but de savoir si les élèves identifient une sinusoïde ou non. Nous nous demandons si la périodicité sera formulée par les élèves et de quelle manière. Nous nous demandons aussi quelles caractéristiques mathématiques de la courbe seront reconnues et soulignées.

Pour engager le travail demandé qui consiste à « recopier » sur papier le chemin du point M', la feuille donnée aux élèves est une feuille quadrillée de format A4 paysage qui facilite le choix des unités et le report des mesures :

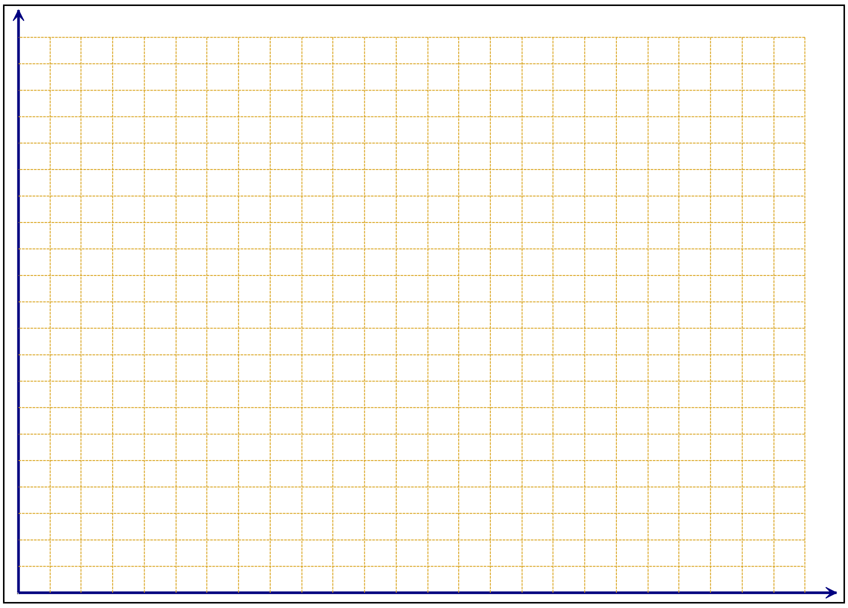


Figure 73. Feuille quadrillée donnée aux élèves

Avec la consigne « pour que le gérant puisse utiliser le graphique construit pour contrôler le jeu » nous encourageons les élèves à prendre des informations dans l'énoncé (référence à la réalité étudiée) et dans le modèle C déjà présent à l'écran Cabri, à les traduire en propriétés mathématiques de la courbe obtenue à l'écran pour construire un graphique qui ne soit pas seulement un « recopiage » perceptif sur papier de l'écran Cabri.

Nous pourrons apprécier le degré de mathématisation du « recopiage » à partir des informations suivantes :

- Les grandeurs sont-elles légendées sur les deux axes qui ne le sont pas ?
- Quelles sont les unités utilisées ? Celle de l'axe des ordonnées se réfère-t-elle à la réalité (la hauteur mesurée en mètres) ou au modèle Cabri (la hauteur mesurée en centimètres) ?
- La périodicité est-elle utilisée pour construire le graphique ?

IV.2. Analyse des résultats

a. Caractéristiques de la courbe

Le tableau 36 présente les réponses des élèves quant aux caractéristiques de la courbe réalisée par la commande « Trace ».

	Caractéristiques de la courbe	**Binômes**
Fiche 3	Courbe périodique	4, 5, 6
	Courbe ondulée	1, 2, 6
	Sinusoïde	4
	Parabole	3

Tableau 36. Les réponses apparues dans la phase 3 – Situation 3

En comparaison avec la phase précédente, les formulations des élèves se font plus précises et plus exactes. En effet, parmi les trois binômes qui n'avaient pas reconnu la périodicité du chemin du point M' dans la phase 2, deux binômes ont donné à la courbe un caractère périodique. Concrètement, nous présentons ci-après les réponses des binômes 5 et 2 :

> Cette courbe **se répète** et dépend du déplacement du point M. Quand P se déplace de A à P1, M se déplace 1 tour ; M' et M commence et termine ensemble. M' constitue une courbe. Quand M se déplace de plus en plus, M' constitue **plusieurs courbes ressemblantes**. (Fiche 3 du binôme 5)
>
> Cette courbe ne touche pas l'axe du temps. Elle est **une onde régulière alternative**. (Fiche 3 du binôme 2)

La réponse du binôme 5 aborde aussi l'articulation entre le cercle et la courbe, bien que ceci ne soit pas très clair. La périodicité est repérée de plusieurs façons (répétition, onde régulière, sinusoïde) par 5 binômes sur 6. Ceci montre l'effet de la commande « Trace » dans Cabri qui donne une image concrète du chemin du point M'.

Cependant, la qualification du chemin du point M' en sinusoïde ne se trouve que dans la réponse du binôme 4 :

> Cette courbe est pareille au **graphique de la fonction sinus** et elle peut être construite par une **fonction sinus** : y = sin x. Elle a **une période**. (Fiche 3 du binôme 4)

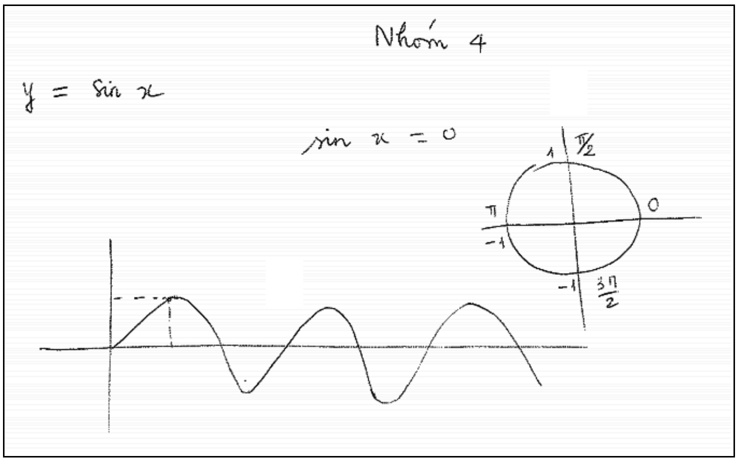


Figure 74. Brouillon papier du binôme 4

Dans cette réponse, la périodicité de la courbe est affirmée par le mot « période ». On trouve aussi une telle formulation dans la réponse du binôme 6 qui quantifie la période elle-même :

> Cette courbe a **la période de 5 minutes**. Elle a **des ondulations**. Le point le plus bas est près de P1, ensuite il monte et le point le plus bas suivant est près de P2,… et alors **la période se répète**. Cela va aider le gérant à contrôler le jeu facilement. (Fiche 3 du binôme 6)

A la fin de cette première partie de la phase 3, les deux modèles C et O sont présents à l'écran Cabri. L'articulation entre eux existe explicitement chez certains binômes. La deuxième partie de la phase 3 va révéler que cette articulation reste très qualitative et ne permet pas le transfert mathématique des paramètres du modèle C sur les paramètres du modèle O.

b. Construction de la courbe sur la feuille quadrillée

Dans cette partie, les élèves travaillent individuellement. Les produits recueillis montrent que la plupart des élèves construisent le graphique en respectant l'allure de la courbe et réalisent au moins deux arches (sauf un élève du binôme 2 qui ne produit qu'une arche) alors que la trace sur Cabri ne comporte qu'une arche et demi. Ceci prouve qu'ils prennent en compte la périodicité de la courbe pour tracer sur papier au-delà de ce qu'ils voient à l'écran.

Nous en trouvons la confirmation dans la discussion entre les deux élèves du binôme 6 :

> E1 : Elle a **une période**, donc elle **se répète** toujours.
> On peut continuer à construire la courbe parce que l'axe du temps peut être prolongé perpétuellement. Mais le papier s'épuise, on la construit comme ça. (Protocole du binôme 6)

Par contre, leurs productions montrent de nombreuses incohérences avec les données du modèle C. Voici par exemple les productions d'élèves des binômes 4 et 5 :

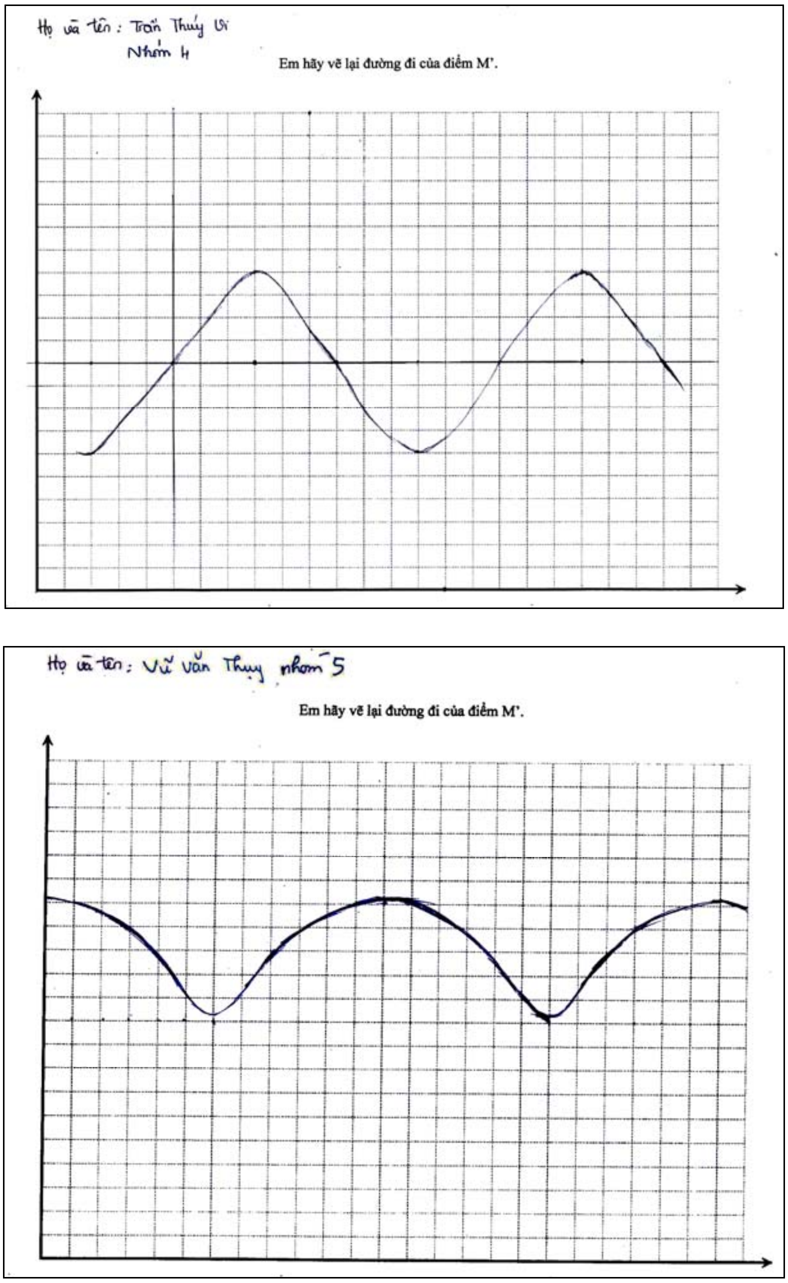


Figure 75. Graphiques construits par l'E1 du binôme 4 et l'E2 du binôme 5

L'allure « sinusoïdale » est certes respectée mais la sinusoïde est placée sur la feuille quadrillée sans l'installer dans le repère dont les axes sont fournis par la feuille. Les axes ne sont pas légendés.

Seuls les élèves du binôme 6 font exception bien qu'ils ne respectent pas les phases de convexité et de concavité :

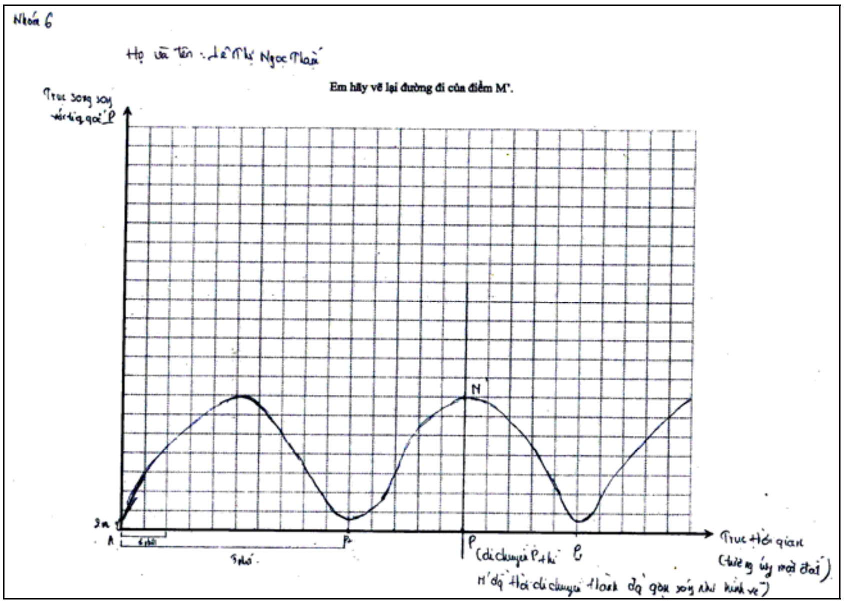


Figure 76. Graphique construit par l'E1 du binôme 6

Dans cette figure, les deux axes sont légendés : l'axe des abscisses est légendé « axe du temps » et l'axe des ordonnées est légendé « axe parallèle à la demi-droite d'origine P ». Les unités et les données de la réalité sont aussi marquées sur les deux axes : 1 minute sur l'axe des abscisses et 2 m sur l'axe des ordonnées. Bien que la valeur maximale de la hauteur de la cabine M (42 m) ne soit pas explicitée, il semble que ce binôme ait pris en compte la cohérence de cette valeur avec la valeur minimale. La durée d'un tour du voyage (5 minutes) est rendu visible sur l'axe des abscisses par un segment joignant deux minimas successifs.

A la fin de la phase 3, bien que l'articulation entre les deux modèles C et O soit introduite par l'énoncé, sa mobilisation effective par les élèves ne s'appuie pas sur les cohérences mathématiques qui permettent de passer effectivement de l'un des modèles à l'autre dans la résolution du problème. La séance se poursuit avec la phase 4 qui, en mettant concurrence ces deux modèles, a pour ambition de renforcer les liaisons mathématiques entre eux deux.

V. Analyse de la phase 4 (mise en concurrence des deux modèles C et O)

V.1. Les choix des valeurs des variables dans cette phase

Cette phase a pour objectif de renforcer le rôle de la périodicité dans la résolution du problème initial (M va-t-il gagner un voyage gratuit ?). Pour cela, après deux questions qui mobilisent la périodicité, la phase revient au problème en offrant deux environnements : Cabri et papier.

Voici les consignes données :

SITUATION 3
Fiche 4

Binôme n° ...

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S3-P4-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

Vous avez reçu en plus une feuille avec le chemin de M'.

Répondre aux questions suivantes dans le tableau ci-dessous.

Questions	Réponses	Comment avez-vous fait ?
A quelle hauteur est la cabine au bout de 22 minutes ?		
A quels moments la cabine est-elle à une hauteur de 30 mètres ?		

Le gérant décide de changer la hauteur de la lampe : il la met à 20 mètres à droite de la grande roue.
La lampe s'allume désormais 1 minute toutes les 4 minutes.

Questions	Réponses	Comment avez-vous fait ?
M va-t-il gagner un voyage gratuit ?		
Si oui, au bout de combien de tours ?		
Peut-il gagner d'autres voyages ?		

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Figure 77. Situation 3 – Fiche 4

A l'ouverture du fichier Cabri, l'écran affiche la même figure que dans la phase 3 : la trace du point M' apparaît directement quand le point P est déplacé.

En plus de l'écran Cabri les élèves disposent d'une feuille quadrillée présentant, dans un repère cartésien, le chemin de M' avec 3 arches dessinées et de la place pour deux autres arches ; les axes, du temps et de la hauteur de la cabine au sol, y sont légendés.

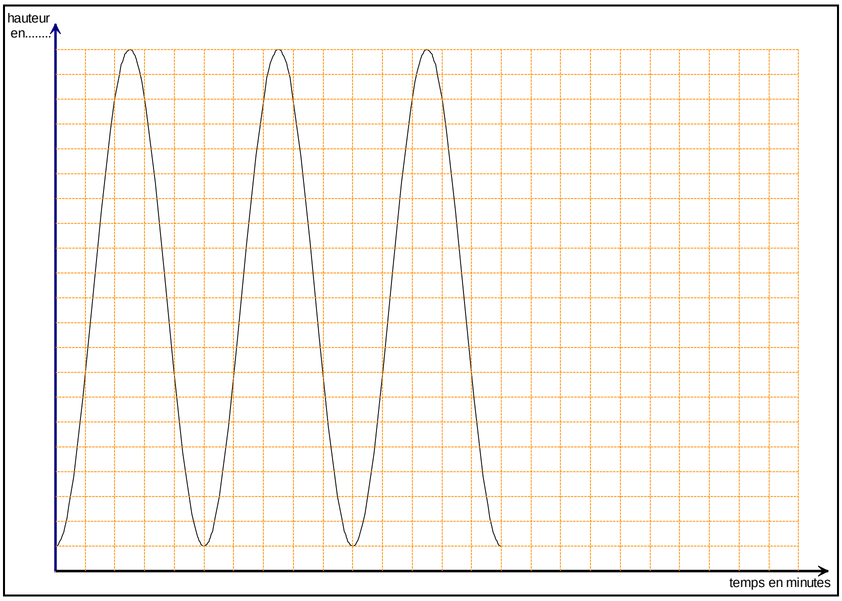


Figure 78. Graphique représentant le chemin du point M'

Sur ce graphique, la variable temps est repérée en minutes tandis que pour la variable hauteur, la légende « hauteur en … » laisse ouvert le choix de l'unité et de la référence à la réalité ou au modèle Cabri.

Faisant suite à la phase 3, la distribution du graphique sinusoïdal dans cette phase peut favoriser les stratégies attachées au modèle O plutôt qu'au modèle C. Ce faisant, elle constitue une rupture d'avec les phases précédentes qui avaient installé le modèle C. C'est ce que nous appelons la mise en concurrence des deux modèles.

Cette concurrence devrait pouvoir jouer dès les premières questions, bien qu'elles fassent référence au mouvement circulaire de la cabine, avant même la reprise du problème des coïncidences. Dans le problème lui-même, les valeurs pour T et n sont inchangées par rapport à la phase 1 (T = 5 et n = 1). On a par contre changé la valeur du couple (m ; h) en (4 ; 20). Avec ce choix, les coïncidences sont périodiques en un seul groupe de période 4 tours. La première coïncidence est lointaine par rapport à l'origine du temps (au 4^{e} tour). En utilisant dans Cabri le déplacement du point P et la lecture sur le cercle ou bien la commande « Trace », on ne peut pas voir la première coïncidence (même avec l'ascenseur horizontal) et le recours à la périodicité est ainsi rendu nécessaire. De manière similaire, avec le graphique donné sur papier, il faut utiliser la périodicité par exemple en prolongeant la sinusoïde d'au moins une arche.

V.2. Les stratégies possibles

a. Première partie : calculs de la hauteur et du temps

La hauteur de la cabine au bout de 22 minutes est égale à celle au bout de 2 minutes. Pour la trouver, voici les stratégies possibles :

- Stratégie « graphique unidimensionnel » dans Cabri : demi-droite → cercle

+ Trouver le point représentant 2 minutes sur l'axe du temps
+ Déplacer le point P jusqu'à ce point
+ Mesurer la hauteur de M au sol dans Cabri
+ Changer l'échelle pour avoir la mesure de la hauteur de la cabine M dans la réalité

- Stratégie « graphique bidimensionnel » sur papier[29] :

+ Trouver le point représentant 2 minutes sur l'axe du temps
+ Tracer une droite perpendiculaire à l'axe du temps passant par ce point
+ Trouver l'intersection de cette droite avec la courbe.
+ Tracer une droite passant par ce point parallèle à l'axe du temps
+ Lire la valeur de la hauteur sur l'axe représentant la hauteur de la cabine

Dans l'environnement papier, il faut commencer par choisir les unités sur les deux axes du graphique ce qui incite à revenir aux données du problème. La durée d'un tour de la grande roue (5 minutes) permet de marquer l'unité sur l'axe du temps (1 minute par carré). Par ailleurs, les consignes « M entre dans sa cabine lorsqu'elle passe au plus près du sol, le rayon de la grande roue est 20 m et son centre est situé à 22 m du sol » permettent de déterminer la hauteur la plus basse de la cabine (2 m). Donc l'unité sur l'axe des hauteurs est 2 m par carré.

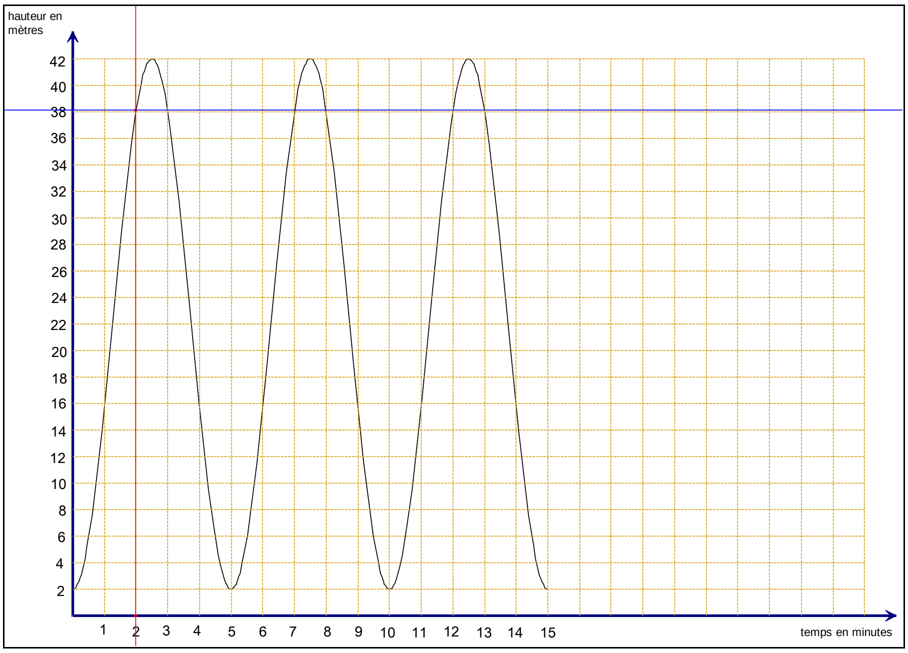


Figure 79. Stratégie graphique bidimensionnel

Notons que l'on peut marquer sur l'axe des ordonnées les hauteurs mesurées en centimètres en se référence aux données Cabri. Dans ce dernier cas, après la lecture des valeurs sur le graphique, il faut, comme dans la stratégie « graphique unidimensionnel », changer d'échelle pour passer aux mesures dans la réalité.

Dans cette première partie, la stratégie « graphique bidimensionnel » sur papier (qui relève du modèle O) est optimale dans le sens où elle réduit le coût de la répétition des procédures si les valeurs numériques fournies par les questions sont modifiées (prise en charge à moindre coût de la généralisation à l'instar des stratégies algébriques mais sans avoir à établir de formule).

- Stratégie algébrico-numérique

[29] On se rappelle qu'il n'est pas possible d'isoler un point de la courbe obtenue par la commande « Trace » en conservant la courbe.

Elle consiste à construire une formule reliant les deux variables numériques h et t et à utiliser les données numériques de la réalité pour calculer h.

Cette formule peut être : $h(t) = 22 - 20 \cos (\frac{2\pi t}{5})$

$t = 2$ minutes donc $h = 22 - 20 \cos \frac{4\pi}{5} \approx 38{,}18$ m

Elle peut être aussi le « produit en croix », fausse mais moins coûteuse en calculs : $h(t) = 42t/2{,}5 = 16{,}8t$.

2,5 minutes $\longrightarrow$ 42 m
2 minutes $\longrightarrow$ a m
$a = \frac{2.42}{2{,}5} = 33{,}6$ m

Dans cette seconde formule, la hauteur de la cabine est considérée comme proportionnelle au temps et le mouvement de la cabine comme rectiligne uniforme.

Pour la seconde question (trouver les moments de hauteur 30 m pour la cabine M), toutes les stratégies, qu'elles soient graphiques uni et bidimensionnel ou algébriques, sont possibles en inversant les passages. Par exemple, pour la stratégie « graphique unidimensionnel », le passage a lieu du cercle vers la demi-droite comme suit :

+ Placer le point K sur le cercle représentant la hauteur 30 m du sol
+ Déplacer le point P sur l'axe du temps pour que M vienne à la position K, noter T la position de P
+ Trouver le temps correspondant au point T.

b. Deuxième partie : Problème de coïncidences

Les stratégies possibles pour cette partie sont les mêmes que celles que nous avons décrites pour la phase 1 mais la concurrence organisée entre les deux environnements devrait autoriser l'apparition des procédures attachées à la stratégie « graphique bidimensionnel ».

Rappelons que le choix de la valeur (4 ; 20) pour le couple (m ; h) en rendant la première coïncidence plus lointaine de l'origine du temps (au 4e tour), favorise alors l'utilisation de la périodicité mais la rend délicate à exploiter dans l'environnement Cabri. En effet, avec le nombre de tours qui a augmenté (4 tours), les stratégies « graphique unidimensionnel » sont plus coûteuse que dans la phase 1 (2 tours) à cause de la coordination du double comptage du nombre de tours et des arcs éclairés sur le cercle ou sur le segment AP1 dans Cabri.

Dans l'environnement papier il faut soit se replacer sur la première arche après trois tours (15 minutes) soit prolonger le graphique avec au moins une arche comme dans la figure ci-dessous :

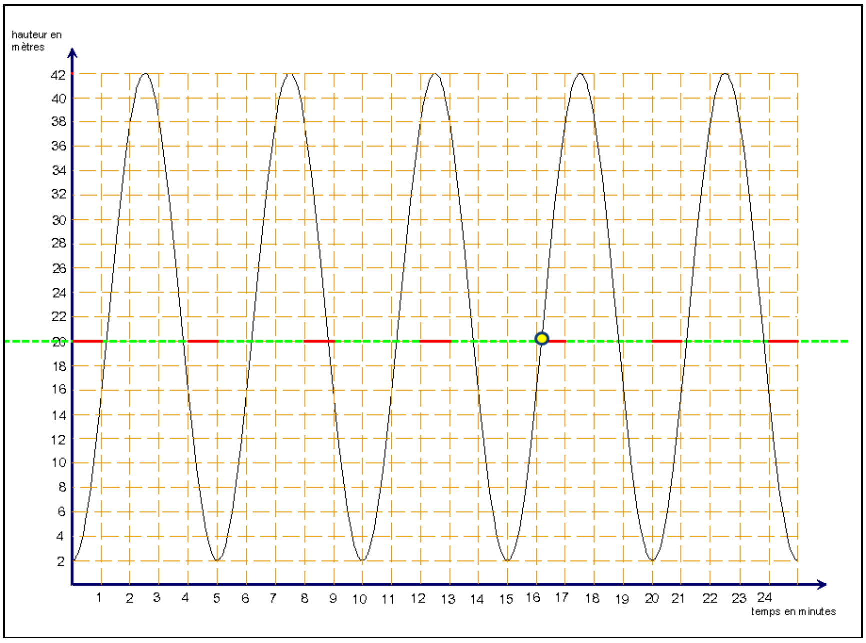


Figure 80. Stratégie graphique bidimensionnel dans la phase 4 – situation 3

De la même manière que dans la première partie de cette phase, cette stratégie est optimale car elle prend en charge la généralisation du problème sans répétition de toutes les procédures.

V.3. Les stratégies attendues

Dans la première partie, nous nous attendons à l'utilisation prioritaire de Cabri ou de la feuille quadrillée car l'écran et la feuille sont mentionnés dans l'énoncé. On peut prévoir aussi l'apparition d'une stratégie algébrique mais plutôt de la stratégie « produit en croix » parce qu'elle est très peu coûteuse.

Cependant, pour la question sur le temps correspondant à la hauteur 30 m, l'utilisation de la stratégie « graphique unidimensionnel » dans Cabri est plus coûteuse car elle oblige à deux changements d'échelle dont nous avons vu la difficulté pour les élèves vietnamiens.

Dans la deuxième partie, nous nous demandons si les élèves vont reprendre leurs procédures de la phase 1, en particulier celles qui étaient attachées à la stratégie « graphique unidimensionnel » sur papier (cercle tracé à main levée et positionnement perceptif d'un point sur le cercle).

V.4. Déroulement prévu et rôle de l'enseignant

Les élèves travaillent pendant 30 minutes. A la fin du travail des élèves, l'enseignant récupère les fiche-élèves et donne les réponses exactes en présentant la stratégie « graphique bidimensionnel » sur papier. Le graphique est prolongé par la périodicité jusqu'à 5 arches. Voici les résultats que doit présenter l'enseignant :

+ Au bout de 22 minutes, la hauteur de la cabine au sol h ≈ 38,2 m
+ La cabine est à la hauteur h = 30 m au bout de (1,6 + 5k) minutes et (3,4 + 5k') minutes où k, k' naturels.
+ M peut gagner un voyage gratuit au bout de 4 tours. Il peut en gagner d'autres tous les 4 tours.

Ensuite, l'enseignant récapitule les relations établies dans la séquence entre les deux modèles C et O. L'axe du temps est placé sur la même ligne que le segment représentant le sol et le deuxième axe est tracé perpendiculairement au premier à l'origine du temps, comme le montre la figure ci-après.

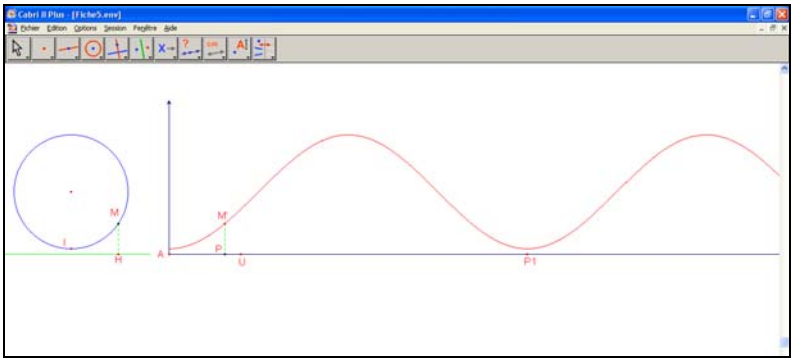


Figure 81. Articulation entre les deux modèles C et O

Voici les relations à institutionnaliser :
• 1 minute = mesure de l'arc sur le cercle parcouru en 1 minute (vitesse constante donc 1/5 de tours = 1 minute)
• à M sur le cercle correspond le point M' sur le graphique
• La hauteur de M au sol est égale à l'ordonnée de M'
• La variation de la hauteur h de M au sol en fonction du temps est exactement la variation de l'ordonnée de M' en fonction de son abscisse t. On note : $t \mapsto h = f(t)$.

L'institutionnalisation insiste sur la co-variation des grandeurs puis des variables numériques mais la périodicité de cette co-variation n'est pas mentionnée. L'introduction d'ostensifs propres au registre algébrique des fonctions ($t \mapsto h = f(t)$) vise le passage à ce registre avec l'écriture d'une formule algébrique de la hauteur de la cabine en fonction du temps.

Enfin, pour renforcer la notion de changement d'échelle, l'enseignant pose publiquement la question suivante : « si on fait varier le diamètre du cercle Cabri (le diamètre de la roue étant toujours de 40 mètres), que se passe-t-il pour la sinusoïde ? ».

La réponse attendue est que la courbe sinusoïdale se dilate ou se rétracte sans que la période ne change. En effet, le changement d'échelle (changement d'unités) laisse invariant la réalité modélisée. L'importance du changement d'échelle dans le processus de modélisation est ainsi travaillée.

V.5. Déroulement effectif et analyse a posteriori

a. Première partie : calculs de la hauteur et du temps

Les stratégies utilisées par les élèves dans cette partie sont présentées dans le tableau 37 suivant :

Stratégies		**Binômes**
graphique unidimensionnel	avec Cabri	1, 3, 4, *5*
	perceptivement	2
graphique bidimensionnel fourni sur papier		5
Algébrique (produit en croix)		6

Tableau 37. Les stratégies apparues dans la première partie de la phase 4 – Situation 3

Le tableau 37 montre que le graphique donné sur feuille quadrillée n'est utilisé que par un seul binôme (le binôme 5) après abandon de la stratégie graphique unidimensionnel tentée dans l'environnement Cabri. Le fait qu'un seul binôme utilisé la sinusoïde donnée peut être analysé comme une conséquence de la faiblesse du rapport institutionnel au graphique d'une fonction au Viêt Nam.

Examinons le graphique du binôme 5 : l'axe des ordonnées est gradué en mètres (il est écrit 1 carré = 2 m sur son graphique) mais l'axe du temps n'est pas gradué. Cependant, la graduation du temps est faite perceptivement sur la première arche du graphique qui est divisée en 5 parties de longueurs jugées égales pour marquer le temps correspondant : 1 minute, 2 minutes, 3 minutes, etc. Il y a donc transfert sur la sinusoïde d'une propriété du mouvement circulaire uniforme : à temps égal, distance parcourue égale. La sinusoïde serait-elle lue comme la trajectoire du point mobile M' mu sur cette trajectoire d'un mouvement curviligne uniforme ?

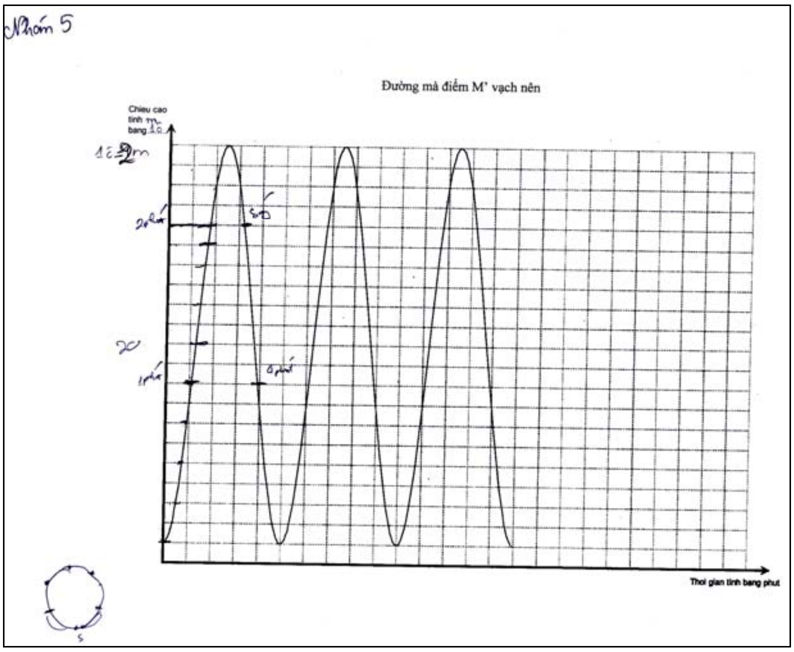
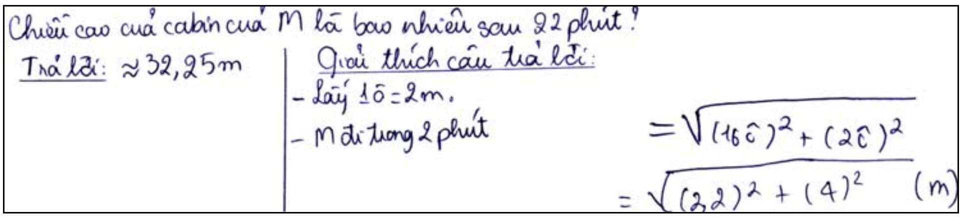


Figure 82. Les marques du graphique du binôme 5

Notons que la graduation du temps est aussi effectuée sur un cercle tracé à main levée sur la même feuille, phénomène témoignant ainsi d'une recherche d'articulation entre les modèles C et O et que nous avons rencontrée lors de la phase 1.

La hauteur de la cabine M au bout de 22 minutes est calculée comme suit :



Traduction en français :

La hauteur de la cabine M au bout de 22 minutes ?	
Réponse : ≈ 32,25 m	Explications : 1 carré = 2 m. M tourne dans 2 minutes $=\sqrt{(16\text{ carres})^2+(2\text{ carres})^2}$ $=\sqrt{(32)^2+(4)^2}$ (m)

Tableau 38. La réponse du binôme 5

Donc la hauteur est calculée en appliquant le théorème de Pythagore pour un triangle rectangle de petits côtés de 16 carrés et 2 carrés comptés sur la feuille quadrillée et dont l'hypoténuse est le morceau de la courbe. La hauteur de la cabine au temps t est donc ici conçue comme la longueur du « morceau graphique » correspondant. Cela confirme l'existence d'erreurs dans l'identification des grandeurs variables dans le passage du modèle O au modèle C. D'ailleurs ce binôme, avant de se rabattre sur le modèle O, avait tenté de travailler dans Cabri avec le modèle C et l'axe du temps pour répondre à cette question comme le prouve la partie effacée de sa fiche :

Câu hỏi	Trả lời	Giải thích câu trả lời của em
Chiều cao của cabin của M là bao nhiêu sau 22 phút ?	~~4,94 cm~~	~~Ta lấy 2 lần khoảng cách từ A → U, sau đó chuyển số đo đó lên đường tròn tính từ I. Cuối cùng, đo khoảng cách từ I đến điểm vừa tìm được~~

Traduction en français :

Questions	Réponses	Comment avez-vous fait ?
A quelle hauteur est la cabine au bout de 22 minutes ?	4,94 cm	On prend 2 fois la distance de A à U. Reporte cette mesure sur le cercle à partir de I. Enfin, calcule la distance de I au point obtenu.

Tableau 39. La réponse du binôme 5, partie effacée

Dans cette tentative, le binôme a gradué l'axe du temps pour trouver le point correspondant à 2 minutes (AU x 2). Ensuite, il a utilisé le report de mesure pour trouver la position de la cabine M sur le cercle correspondant à ce temps. Cependant, la hauteur de la cabine n'est pas la distance de cette position au sol. Elle est calculée comme la distance de I (la position la plus basse) à cette position. Donc ce binôme a confondu la hauteur de la cabine M avec la distance rectiligne de la cabine à la position de départ I. C'est la même confusion qui a produit le calcul de l'hypoténuse du triangle rectangle sur la feuille quadrillée par identification de la distance IM dans le modèle C à la longueur du morceau de la sinusoïde dans le modèle O (comme si la trajectoire circulaire de M se déployait en la sinusoïde).

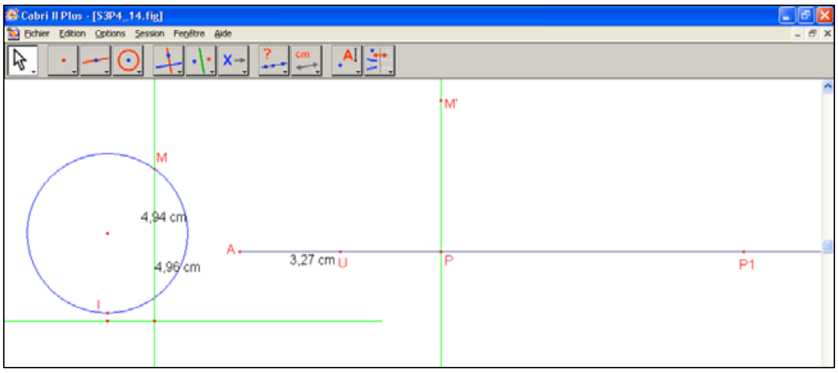
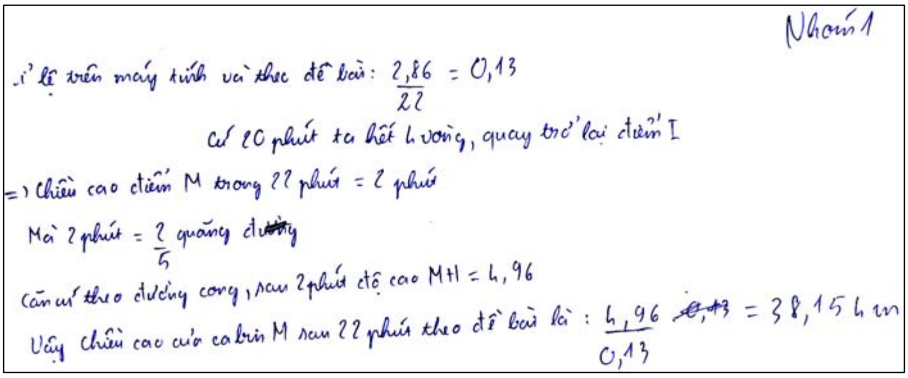


Figure 83. Ecran Cabri du binôme 5

Le résultat écrit (4,94 cm) est fourni par le modèle Cabri. Le binôme écrit-il ce résultat sans procéder au changement d'échelle « modèle vers réalité » ? Ou bien décide-t-il à ce moment-là de changer de stratégie car il ne réussit pas à changer d'échelle ? En effet, la difficulté à changer d'échelle a été rencontrée par plusieurs binômes à partir de la phase 1.

Le binôme 1 fait partie des quatre binômes qui ont emprunté la stratégie « graphique unidimensionnel » sur Cabri mais il est le seul des quatre à avoir fourni des réponses exactes. Il en décrit oralement ses procédures puis écrit les réponses sur sa fiche :

> E1 du binôme 1 : Déplacer P sur l'axe du temps au point « 2 minutes » pour trouver la position de M sur le cercle et mesurer la distance MH.
> (Protocole du binôme 1)


Nhóm 1

Tỉ lệ trên máy tính và theo đề bài: $\frac{2,86}{22} = 0,13$

Cứ 20 phút ta hết 1 vòng, quay trở lại điểm I

=> Chiều cao điểm M trong 22 phút = 2 phút

Mà 2 phút = $\frac{2}{5}$ quãng đường

Căn cứ theo đường cong, sau 2 phút độ cao MH = 4,96

Vậy chiều cao của cabin M sau 22 phút theo đề bài là: $\frac{4,96}{0,13}$ ~~0,13~~ = 38,154 m

Traduction en français :

L'échelle entre l'ordinateur et la consigne est 2,86/22 = 0,13. Hauteur du point M au bout de 22 minutes = au bout de 2 minutes. Selon la courbe, au bout de 2 minutes, la hauteur MH = 4,96. Donc au bout de 22 minutes, la hauteur de la cabine M selon la consigne est 4,96/0,13 = 38,15m.

Figure 84. Brouillon papier du binôme 1

Le changement d'échelle est correct puisque 2,86 est la longueur donnée en centimètres par Cabri du centre du cercle au sol. Ceci lui permet de poursuivre la stratégie « graphique unidimensionnel » dans Cabri[30].

[30] Ce binôme avait déjà utilisé le changement d'échelle dans la phase 1.

Revenons au changement d'échelle dans le processus de modélisation dont il est la dernière étape (la phase 4 dans le schéma du processus de modélisation) pour transformer les réponses au problème mathématique en des réponses aux questions initiales. Les binômes 3, 4 et 5 procèdent au changement d'échelle mais se trompent dans la réalisation mathématique de ce changement.

Le binôme 4, par exemple, ne donne pas la réponse dans sa fiche mais dans son brouillon on voit qu'il essaie d'effectuer le changement d'échelle.

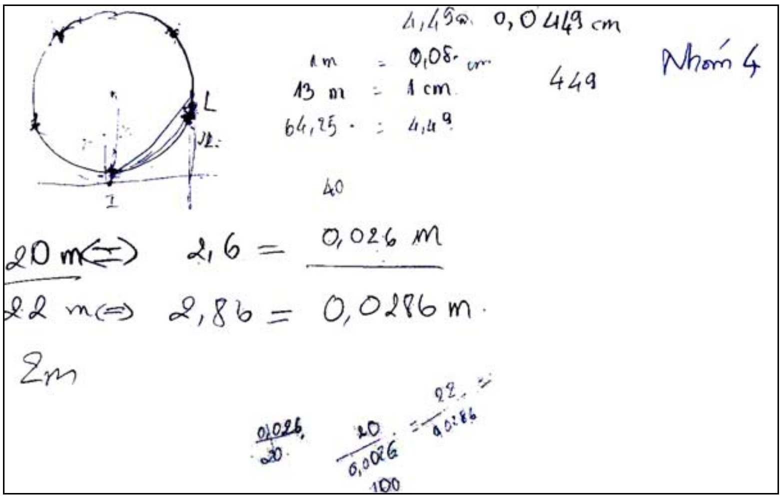
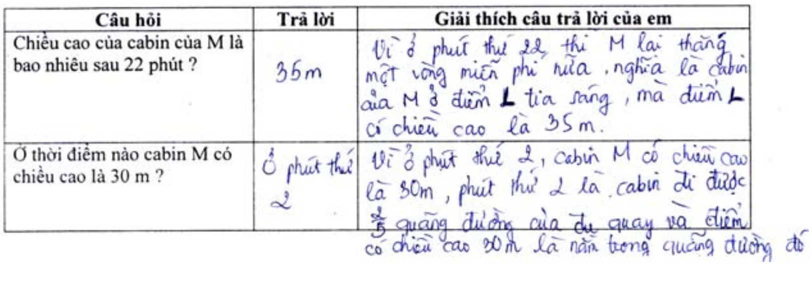


Figure 85. Brouillon papier du binôme 4

Contrairement au binôme 1, le binôme 4 ne maîtrise pas les changements d'unités qu'il décide d'effectuer et il ne maîtrise non plus l'utilisation du rapport des longueurs (22/0,0286) qui exprime le changement d'échelle (combien de mètres dans la réalité pour 1 mètre dans Cabri ?).

Le binôme 2, quant à lui, abandonne l'environnement Cabri et délaisse la sinusoïde pour donner, en s'appuyant sur un cercle tracé à main levée, des réponses approximatives et incohérentes entre elles :



Câu hỏi	Trả lời	Giải thích câu trả lời của em
Chiều cao của cabin của M là bao nhiêu sau 22 phút ?	35m	Vì ở phút thứ 22 thì M lại thắng một vòng miễn phí nữa, nghĩa là cabin của M ở điểm L tia sáng, mà điểm L có chiều cao là 35 m.
Ở thời điểm nào cabin M có chiều cao là 30 m ?	Ở phút thứ 2	Vì ở phút thứ 2, cabin M có chiều cao là 30m, phút thứ 2 là cabin đi được 2/5 quãng đường của đu quay và điểm có chiều cao 30m là nằm trong quãng đường đó

Traduction en français :

Questions	Réponses	Comment avez-vous fait ?
A quelle hauteur est la cabine au bout de 22 minutes ?	35 m	Car à la 22e minute, M gagne un voyage gratuit, c'est-à-dire la cabine M est à la position L à la hauteur 35 m.
A quels moments la cabine est-elle à une hauteur de 30 mètres ?	2e minute	Car à la 2e minute, la cabine M est à la hauteur 30 m, c'est-à-dire la cabine tourne 2/5 trajet et le point ayant la hauteur 30 m appartenant à ce trajet.

Figure 86. La réponse du binôme 2

Enfin, un binôme (binôme 6) utilise la stratégie algébrique « produit en croix » comme le prouvent les explications et calculs présentés sur sa fiche.

Câu hỏi	Trả lời	Giải thích câu trả lời của em
Chiều cao của cabin của M là bao nhiêu sau 22 phút ?	33,6m	Sau 20p đi được 4 vòng M trở về điểm I. Như vậy 2 phút ~~sau đi được~~ chiều cao của M là: 2,5 phút : 42m 2 phút : ?m => 33,6m
Ở thời điểm nào cabin M có chiều cao là 30 m ?	1 phút 47 giây	2p : 33,6m ?p : 30m => 1 phút 47 giây

Traduction en français :

Questions	Réponses	Comment avez-vous fait ?
A quelle hauteur est la cabine au bout de 22 minutes ?	33,6 m	Après 20 minutes, M se déplace 4 tours et retourne à I. Donc à l'instant 2 minutes, la hauteur de la cabine est : 2,5 minutes : 42 m 2 minutes : ? m → 33,6 m
A quels moments la cabine est-elle à une hauteur de 30 mètres ?	1 minute et 47 secondes	2 minutes : 33,6 m ? minutes : 30 m → 1 minute et 47 secondes.

Tableau 40. La réponse du binôme 6

Ceci peut signifier que ce binôme confond les mouvements circulaire et rectiligne uniforme. Ainsi ce binôme ne cherche pas à travailler dans le modèle O bien qu'il ait conclu dans les phases 2 et 3 que le chemin du point M' était une onde régulière et répétée, en précisant même la période de 5 minutes. Son choix d'une stratégie algébrique confirme le peu d'attrait chez les élèves du modèle O et de son registre graphique.

b. Deuxième partie : Problème de coïncidences

Le tableau 41 présente les stratégies utilisées par les élèves :

<table>
<tr><th colspan="2">Stratégies</th><th>Binômes</th></tr>
<tr><td rowspan="2">graphique unidimensionnel</td><td>Demi-droite → cercle avec Cabri</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Demi-droite → cercle sur papier</td><td>2, 3, 4, 5, 6</td></tr>
<tr><td colspan="2">graphique bidimensionnel (temps segmenté et tour)</td><td>1</td></tr>
</table>

Tableau 41. Les stratégies apparues dans la phase 4 – deuxième partie

Seul le binôme 1 utilise la stratégie « graphique bidimensionnel » pour résoudre le problème de coïncidence. Les autres binômes (2, 3, 4, 5 et 6) reprennent les procédures suivies lors de la phase 1, en empruntant les stratégies « graphique unidimensionnel », que ce soit dans Cabri ou sur papier, malgré leur coût prohibitif comparé à celui d'une stratégie « graphique bidimensionnel ». Notons que le binôme 5 a marqué 20 m sur la sinusoïde mais sans aller plus loin dans une stratégie graphique bidimensionnel.

Comme dans la phase 1, le choix de la stratégie se retrouve dans le choix de la graduation du temps :

Graduation du temps		Binômes
Avec calculs et reports de mesures	sur le cercle dans Cabri	-
	sur la demi-droite dans Cabri	1
Avec calculs sans report de mesures	sur la sinusoïde	1, 5
Perceptivement	sur la demi-droite sur papier	1
	sur le cercle sur papier	2, 3, 4, 5, 6

Tableau 42. Les procédures empruntées pour la graduation du temps

Examinons les procédures du binôme 1.

Ce binôme a gradué le temps dans Cabri sur le segment AP1 et ceci lui a servi à répondre aux questions de la première partie. Dans la deuxième partie, il rencontre la nécessité de recourir à la périodicité. Ce binôme décide d'abandonner Cabri pour réaliser une graduation sur la sinusoïde en la prolongeant d'une arche.

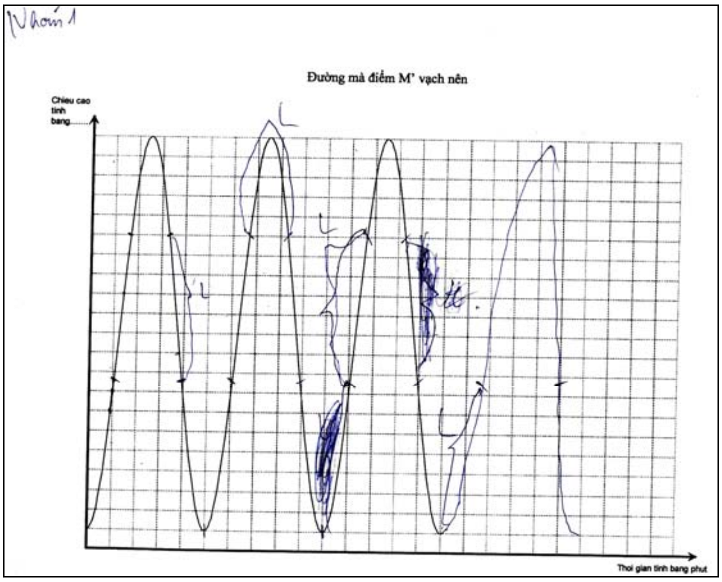


Figure 87. Les marques du graphique du binôme 1

Même si les marques sont fabriquées de la même manière que celles du binôme 5 dans la première partie (figure 82), leur utilisation a changé puisqu'ils indiquent des durées d'éclairement de la lampe. Là encore il y a erreur sur les grandeurs variables mises en relation par le graphique et erreur sur la manière de lire les valeurs des grandeurs sur le graphique, et ces erreurs témoignent d'une articulation mathématiquement inadéquate entre les deux modèles C et O.

Cependant, ensuite, ce binôme abandonne la sinusoïde pour réaliser un repliement du temps en segments parallèles. Voici la figure qu'il réalise :

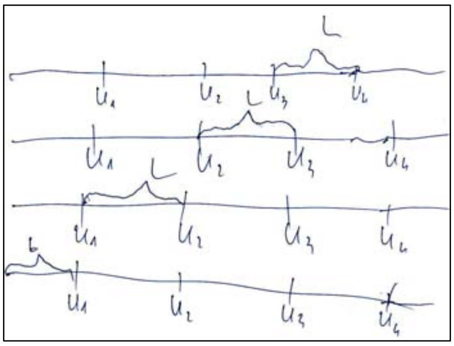


Figure 88. Brouillon papier du binôme 1

Ainsi, les procédures utilisées par ce binôme relèvent d'une stratégie « graphique bidimensionnel » (temps segmenté et tour) que nous avons présentée dans l'analyse a priori de la phase 1 (figure 56). Les erreurs sur la position de L et sur les moments d'éclairement de L se compensent et la stratégie employée lui permet alors de trouver les bonnes réponses. Voici comment il les formule :

Câu hỏi	Trả lời	Giải thích câu trả lời của em
M có thắng một vòng miễn phí không ?	Có thể thắng	Bởi vì vị trí của M thay đổi cứ sau 4 phút (1 vòng = 5 phút) cho nên điểm M có thể trùng với thời gian chiếu sáng
Nếu có, M thắng sau bao nhiêu vòng chơi ?	4 vòng	Chiều cao của tia sáng là 20 m tương ứng với vị trí 1/5 số vòng của vòng tròn nên theo hình vẽ và tính toán ta có thể tính được số vòng M thắng trò chơi
M có thể thắng thêm những lần khác không ?	Có	Có bởi sau 5 vòng thì trò chơi và thời gian chiếu của tia sáng quay trở lại từ đầu, M có thể chơi thêm 4 vòng nữa để được thắng

Traduction en français :

Questions	Réponses	Comment avez-vous fait ?
M va-t-il gagner un voyage gratuit ?	oui	Car la position de M varie chaque 4 minutes (1 tour = 5 minutes), donc le point M peut coïncider avec des temps éclairés.
Si oui, au bout de combien de tours ?	4 tours	La hauteur de la lampe est 20 m qui correspond à la position 1/5 tour de cercle. Donc selon la figure et le calcul on peut calculer le nombre de tours pour que M gagne.
Peut-il gagner d'autres voyages ?	oui	Après 5 tours, le jeu et les temps éclairés de la lampe se répètent. Donc M peut jouer 4 tours plus et gagner.

Figure 89. La réponse du binôme 1

Examinons la production du binôme 2 qui est l'un des 4 binômes à réaliser sur papier brouillon un cercle à main levée pour emprunter la stratégie « graphique unidimensionnel ».

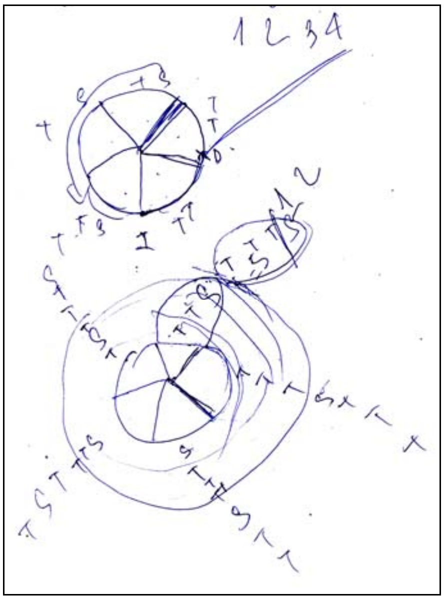


Figure 90. Brouillon papier du binôme 2

Le premier cercle est interprétable comme trajectoire de la cabine M avec la marque perceptive du point D (L) à la hauteur 20 m. Les autres cercles sont utilisés pour repérer et compter les intervalles d'éclairement de la lampe (T : éteint, S : allumé). La stratégie leur conduit à la bonne réponse (M va gagner au bout de 4 tours). Le binôme 3 procède de manière similaire et trouve lui aussi la bonne réponse. Les trois autres binômes (4, 5 et 6) suivent aussi ces procédures mais sur un seul cercle et ils se trompent dans le résultat sûrement à cause de la difficulté du double comptage sur un même cercle tracé sur papier.

Le tableau 43 résume les réponses des binômes dans cette partie.

Première question	Oui		
Deuxième question	4 tours (réponse correcte)	3 tours	2 tours
Troisième question	Oui	Oui	Oui
Binômes	1, 2, 3	4, 5	6

Tableau 43. Les réponses sur la phase 4 – deuxième partie

Tous les binômes annoncent que M gagnera plusieurs voyages. Certains justifient leurs réponses par la répétition.

> Après **la répétition** jusqu'au 7^e tour, la cabine de M est éclairée, donc M gagne un voyage en plus. (Réponse du binôme 2)
>
> Après 5 tours, le jeu et les temps éclairés de la lampe **se répètent**. Donc M peut jouer 4 tours de plus et gagner. (Réponse du binôme 4)

Bien que l'on trouve ici une justification par la périodicité, la période n'est pas déterminée exactement. En effet, le binôme 2 a présenté les durées d'éclairement sur son brouillon (figure 90) dans 7 tours et il se trompe dans la réponse (7^e tour).

En conclusion, dans cette phase, malgré la disponibilité du graphique représentant la hauteur de la cabine M en fonction du temps, on voit la domination des stratégies « graphique unidimensionnel ». Il n'y a aucune marque sur les graphiques des binômes 2, 3, 4, et 6. Pour eux, le graphique donné est une simple illustration non exploitable dans la résolution du problème.

c. Institutionnalisation

L'objectif de la phase d'institutionnalisation est de montrer « par ostension » la pertinence et « l'optimalité » de la stratégie « graphique bidimensionnel » sur papier en utilisant la périodicité de la hauteur de la cabine. De plus, cette phase prépare la mise en place (phases 5 et 6) de la formalisation algébrique de la co-variation périodique de la hauteur et du temps, complétant ainsi l'articulation entre les deux modèles C et O. Elle s'appuie sur les savoirs déjà enseignés relatifs à la lecture d'un graphique de fonction et à la formalisation des solutions d'une équation trigonométrique (cf. paragraphe IV de la partie A).

Voici quelques extraits du protocole de cette phase d'institutionnalisation :

> P : Regardons les réponses des binômes pour examiner lesquelles sont exactes.
> Pour la première question, comment avez-vous fait, le binôme 1 ?
> E1 du binôme 1 : Après 22 minutes, c'est 4 tours et 2 minutes. Et 2 minutes correspondent à 2/5 tour.
> P : C'est-à-dire vous vous appuyez sur le cercle dans Cabri. 22 minutes correspondent à 2 minutes, c'est 2/5 tour. Et ensuite qu'est-ce que vous faites ?
> E1 : Déplacer P sur l'axe du temps au point « 2 minutes » pour trouver la position de M sur le cercle et mesurer la distance MH.
> P : Oui, cette méthode est un peu longue. Parce qu'on voit la hauteur MH est 4,96 cm. Est-elle la hauteur réelle ?
> Es : Non, il faut changer d'échelle.
> P : Oui, dans la réalité, la hauteur est mesurée en mètres. Ceci n'est qu'une représentation de la réalité. On ne peut pas construire un manège ayant le rayon de 20 m dans Cabri donc il faut changer d'échelle pour avoir la hauteur réelle.

Le binôme 1 expose la stratégie « graphique unidimensionnel ». Il formule correctement le changement d'échelle entre Cabri et la réalité pour trouver la hauteur réelle. Tout en validant la stratégie empruntée par le binôme 1, l'enseignant décide de présenter la stratégie s'appuyant sur la sinusoïde donnée, ce qu'il justifie par la « longueur » de la première.

L'enseignant dispose de la sinusoïde sur un écran public :

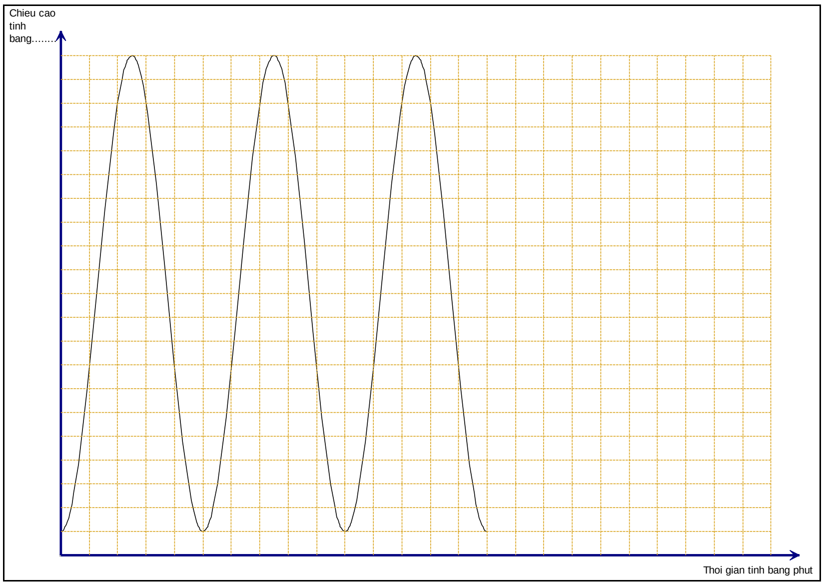


Figure 91. Ecran public de l'ordinateur de l'enseignant

Voici quelques extraits du protocole de cette phase d'institutionnalisation :

P : On sait que le gérant n'a pas d'ordinateur. Peut-il utiliser le graphique pour résoudre le problème ? Je ne vois qu'un seul binôme qui a utilisé le graphique.
Si cet axe est l'axe du temps calculé en minutes, un carré correspond à combien de minutes ?
Es : **1 minute**
P : Oui, on a 1, 2, 3 minutes, etc.
Cet axe (il montre l'axe des ordonnées) représente la hauteur donc il est calculé en…
Es : **En mètres**
P : Oui, en réalité, la hauteur est calculée en mètres, un carré est égal à 2 m.
Quelle hauteur correspond à 2 minutes ?
(…)
Es : **Plus de 38 m**

Pour obtenir l'unanimité sur la réponse attendue, l'enseignant complète le graphique en légendant les deux axes et en traçant les deux droites parallèles aux axes comme ci-dessous.

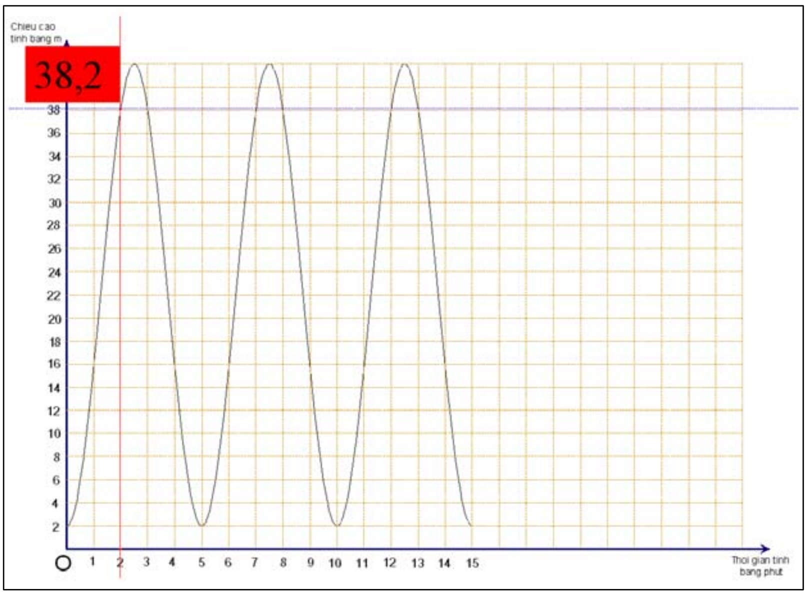


Figure 92. Ecran public de l'ordinateur de l'enseignant

Cette unanimité est obtenue par les gestes et les tracés de l'enseignant relevant des ostensifs institutionnels de lecture du graphique.

P : Oui c'est 38,2 m à peu près.
P : Est-ce que vous pouvez continuer la même méthode pour la deuxième question ?
Es : Oui
P : A la hauteur 30 m, construire une droite parallèle à l'axe du temps. On a combien de points d'intersection entre cette droite et le graphique.
Es : Beaucoup
P : C'est-à-dire… combien ?
Es : **Infini**

Implicitement cette résolution graphique est celle d'une équation trigonométrique selon une technique enseignée aux élèves de classe 11 sans que l'enseignant fasse référence à une telle équation. Il ne prononce d'ailleurs pas le mot « sinusoïde ».

P : Il y a une infinité des points d'intersection. Le premier instant c'est 1,6 minutes. Le deuxième c'est combien ?
Es : 3,4 minutes
P : Et l'instant suivant ?
Es : 6,6
P : Après 5 minutes, il va se répéter. Donc on a 1,6 + 5 ; 1,6+ 10 ; … En général, c'est **des instants 1,6 + 5k et 3,4 + 5k' (k, k' naturels)**.

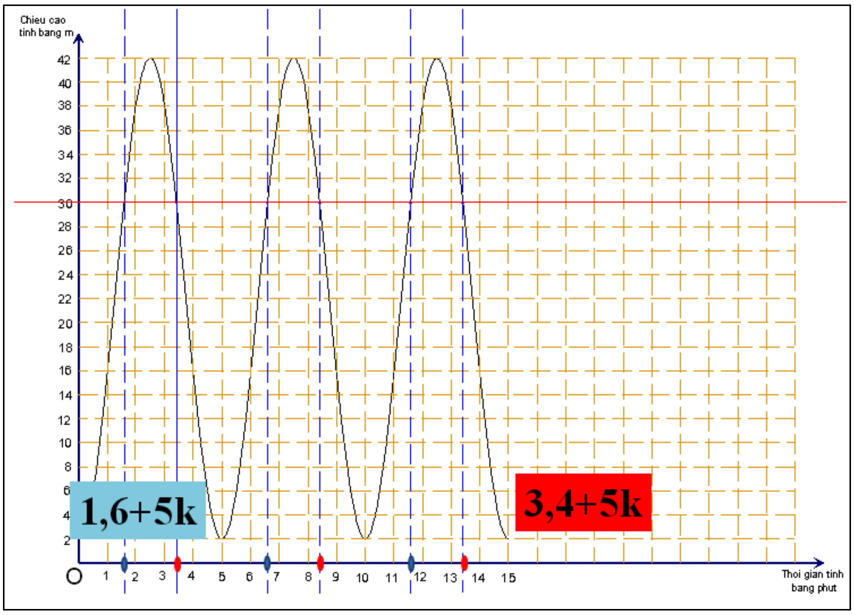


Figure 93. Ecran public de l'ordinateur de l'enseignant

Alors que les ostensifs arithmétiques de la périodicité et de la période, 1,6 + 5k et 3,4 + 5k' (k, k' naturels) sont écrits, l'enseignant, intentionnellement, (cf. phase 5) ne prononce toujours pas les termes « périodicité » et « période ».

On a vu que **le gérant peut utiliser le graphique pour résoudre le problème**.
P : M peut-il gagner un voyage gratuit ?
Es : Oui, **au bout de 3 tours**
Es : **Au bout de 4 tours**

Les élèves annoncent leurs solutions au problème de coïncidences. Ces résultats sont contradictoires. Pour lever le doute, l'enseignant décide de formaliser graphiquement la deuxième périodicité (l'éclairement) en dessinant des segments sur la droite « hauteur = 20 m ».

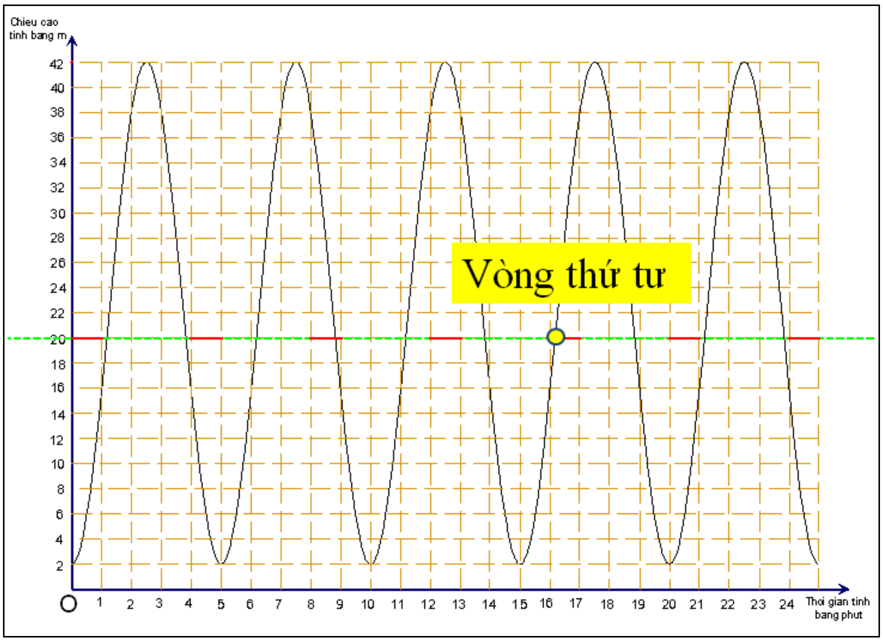


Figure 94. Ecran public de l'ordinateur de l'enseignant

P : Les segments rouges représentent les durées d'éclairement de la lampe.
On voit sur le graphique que M va gagner au bout de 4 tours. Peut-il en gagner d'autres ?
Es : **Oui**
P : Au bout de combien de tours ?
Es : **9 tours, 14 tours**
Es : **8 tours**

Tous les élèves répondent oui à la première question de l'enseignant (Peut-il en gagner d'autres ?) ce qui confirme que l'existence d'une coïncidence implique pour eux, à cause de la répétition, l'existence d'autres coïncidences. Par contre, certains élèves répondent avec une période de 5 tours : « 9 tours, 14 tours ».

P : M gagne au 4^{e} tour, le 5^{e} non, le 6^{e} non, le 7^{e} non et le 8^{e} oui. **M va gagner tous les 4 tours.**

L'enseignant présente ensuite les relations entre le mouvement du point M sur le cercle et le déplacement du point P sur l'axe du temps. La fonction représentant la hauteur de la cabine M en fonction du temps est introduite.

P : Maintenant, je fais une synthèse de ce qu'on a travaillé.
Le déplacement de P entraine le déplacement du point M. **Quand P se déplace de A à U, M se déplace dans la première minute du voyage**.
(…)
Si l'on considère que ceci est l'axe des abscisses et cela est l'axe des ordonnées, **la hauteur M'P est l'ordonnée du point M' qui varie en fonction du temps**. Appelons h la hauteur de la cabine en fonction du temps, on peut noter $h = f(t)$ ou $t \mapsto h = f(t)$.

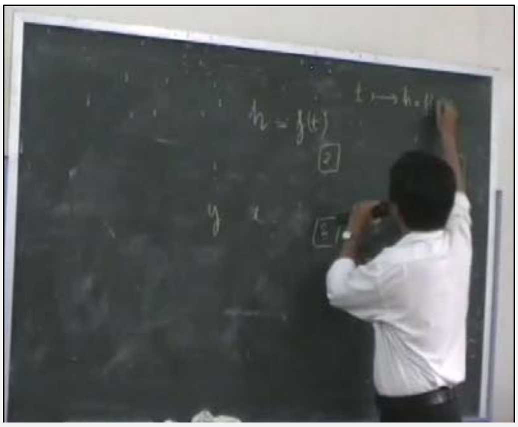


Photo 2. L'enseignant écrit la fonction sur le tableau

P : Si on fait varier le diamètre du cercle (le diamètre de la roue étant toujours de 40 mètres), que se passe-t-il pour cette courbe ?
Es : La hauteur varie
P : Qu'est-ce qui ne change pas ?
Es : L'axe du temps
P : De plus, **l'allure de la courbe et la période ne changent pas**. (Script de la séance 2)

Les élèves ne répondent pas ce qu'attend l'enseignant. L'enseignant accompagne sa réponse en montrant publiquement sur l'écran les effets du changement d'échelle.

Cette phase d'institutionnalisation a les caractéristiques d'une maïeutique où l'enseignant obtient les réponses attendues à partir d'un questionnement dans lequel l'élève ne prend aucune responsabilité.

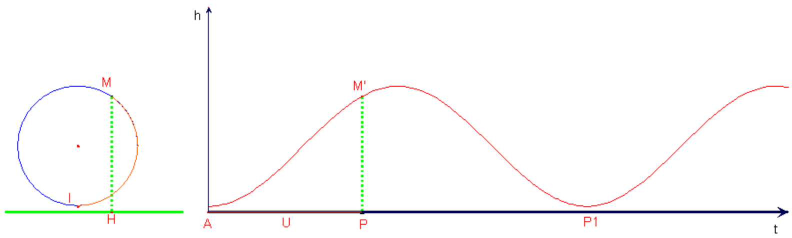
VI. Analyse de la phase 5 (conception de la fonction $t \mapsto h = f(t)$)

VI.1. Présentation de la phase 5

Après cette phase d'institutionnalisation, nous voulons savoir ce que peut dire l'élève sur la fonction présentée graphiquement, modèles C et O, et par l'ostensif $t \mapsto h = f(t)$.

SITUATION 3
Fiche 5
(Travail individuel)

Nom prénom : ……………………………………….
Binôme n° : ……………………………………….



$t \mapsto h = f(t)$

Consigne : Écrivez *individuellement* tout ce que vous pouvez dire sur la fonction : $t \mapsto h = f(t)$.

Réponse :

Figure 95. Situation 3 – Fiche 5

Les informations qui nous intéressent sont les suivantes :

Les termes « sinusoïdal », « trigonométrique », « mouvement circulaire uniforme » et « oscillation harmonique » apparaissent-ils dans les réponses des élèves ? Quelles sont les caractéristiques de la fonction qui sont retenues ? La périodicité est-elle mentionnée alors qu'elle a été formalisée sans être définie ? Une formule algébrique de la fonction est-elle écrite ?

VI.2. Analyse des résultats

Les caractéristiques de la fonction $t \mapsto h = f(t)$ retenues et décrites par les élèves sont présentées dans le tableau 44 suivant :

	Caractéristiques de la fonction	Nombres d'élèves
Fiche 5	Dépendance	6
	Variation	6
	Périodicité	3
	Correspondance	2

Tableau 44. Les réponses apparues dans la phase 5 – Situation 3

Parmi elles, la variation et la dépendance entre h et t sont les plus mentionnées. La périodicité n'apparaît que dans les réponses des deux élèves du binôme 6 et d'un élève du binôme 5.

> Pour la fonction h = f(t), h dépend de t. La fonction varie quand t varie. Elle a **une période constante**. (Fiche 5 d'un élève du binôme 5)
>
> Quand on déplace P, les points M', M et H se déplacent mais les distances MH et PM' sont toujours égales. La variation du rayon du cercle entraine le déplacement de M' mais **sa période ne change pas**. (Fiche 5 de l'E1 du binôme 6)

La hauteur h dépend du déplacement de P sur l'axe du temps. Et elle a **une période**. (Fiche 5 de l'E2 du binôme 6)

Notons que le binôme 4 parlait dans la phase 3 de la sinusoïde et de la périodicité du chemin du point M' mais ici dans la question relative à la fonction, il ne cite plus ces caractéristiques. Aucun binôme n'écrit le mot « sinusoïde ». Aucun binôme ne fait référence à une fonction trigonométrique. Aucun binôme n'écrit la formule algébrique.

Par ailleurs, comme nous l'avons analysé auparavant, la périodicité a été utilisée par tous les binômes dans les phases 1, 3 et 4 de cette situation. Dans cette nouvelle phase, cette mention n'apparaît plus que minoritairement. Ce constat est à mettre en regard du rapport institutionnel vietnamien à la notion de fonction où la périodicité n'est pas un objet d'étude. En effet, dans les manuels scolaires, la variation d'une fonction est très importante dans le processus d'étude d'une fonction mais la périodicité d'une fonction n'est pas exploitée.

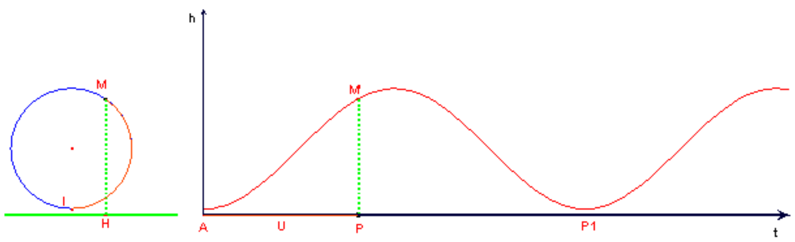
VII. Analyse de la phase 6 (construction de la formule algébrique de la fonction $t \mapsto h = f(t)$)

VII.1. Présentation de la phase 6

Cette phase a pour objectif de passer dans un registre algébrique de la fonction représentant la hauteur de la cabine en fonction du temps en faisant travailler sa formule algébrique. Cette phase est prévue sous la forme d'un devoir à la maison rendu par les élèves une semaine plus tard.

SITUATION 3
Fiche 6
(Devoir à la maison)

Nom prénom: ....
Binôme n° : ....



$t \mapsto h = f(t)$

Rappel
M entre dans sa cabine lorsqu'elle passe au plus près du sol, au point I. La grande roue du manège a un rayon de 20 m et son centre est situé à 22 m du sol.

Etablir que $f(t) = 22\text{-}20 \cos(2\pi t/5)$

Figure 96. Situation 3 – Fiche 6

Pour établir la formule de la fonction demandée, il est possible de travailler dans le modèle O ou dans le modèle C, tous les deux présents sur la fiche, en intégrant dans ces modèles des données de la réalité modélisée.

- Dans le modèle O :

La courbe donnée est une sinusoïde de la forme h = A cos (ωt+φ) + B.

A = r = 20 (r rayon du manège)
B = 22 (la distance du centre du manège par rapport au sol)
ω = 2π/T = 2π / 5

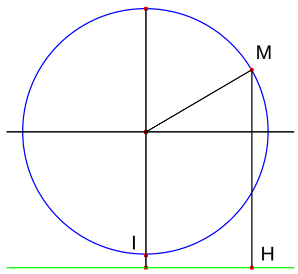
Donc $h = 22 + 20\cos\left(\frac{2\pi}{5}t + \varphi\right)$.

Avec t = 0 et h = 2, on a : 2 = 22 + 20 cos φ. Donc φ = -π.

Donc $h = 22 - 20\cos\frac{2\pi}{5}t$.

+ Dans le modèle C :

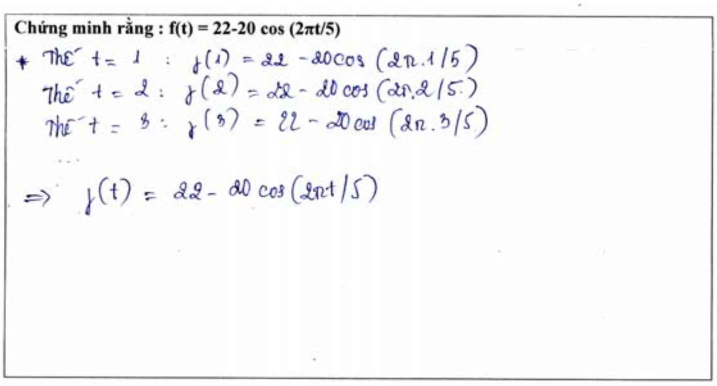
$$\text{5 minutes} \longrightarrow 2\pi$$
$$\text{t minutes} \longrightarrow \frac{2\pi}{5}t$$



Donc, au moment t minutes comme pour la figure ci-dessus, la hauteur de la cabine M au sol est $h = 22 + 20\sin\left(\frac{2\pi}{5}t - \frac{\pi}{2}\right) = 22 - 20\cos\frac{2\pi}{5}t$.

VII.2. Analyse des résultats

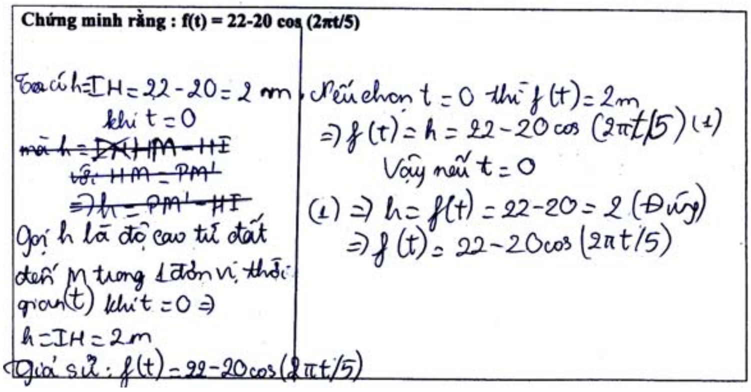
Tous les élèves, sauf les deux élèves du binôme 5, calculent 22-20 cos (2πt/5) dans le cas où t = 1, t = 2 et t = 3 comme le fait par le binôme 2 :


Chứng minh rằng : f(t) = 22-20 cos (2πt/5)

+ Thế t = 1 : f(1) = 22 - 20cos (2π.1/5)
Thế t = 2 : f(2) = 22 - 20 cos (2π.2/5)
Thế t = 3 : f(3) = 22 - 20 cos (2π.3/5)
...
⇒ f(t) = 22 - 20 cos (2πt/5)

Figure 97. La réponse de l'E1 du binôme 2

Les deux élèves du binôme 5 vérifient la formule proposée pour t = 0 en s'appuyant sur les données de la réalité.


Chứng minh rằng : f(t) = 22-20 cos (2πt/5)

Ta có h=IH = 22-20 = 2 m khi t = 0 Gọi h là độ cao từ đất đến M trong 1 đơn vị thời gian(t) khi t = 0 ⇒ h = IH = 2m Giả sử : f(t) = 22-20cos(2πt/5)	Nếu chọn t = 0 thì f(t) = 2m ⇒ f(t) = h = 22-20cos (2πt/5) (1) Vậy nếu t = 0 (1) ⇒ h = f(t) = 22-20 = 2 (Đúng) ⇒ f(t) = 22-20cos (2πt/5)

Figure 98. La réponse de l'E2 du binôme 5

Ainsi la construction dans l'un ou l'autre des deux modèles d'une formule algébrique de la fonction à partir des données n'a pas été possible. Dans l'analyse institutionnelle, nous avons montré que la formule algébrique d'une telle fonction est systématiquement fournie dans l'énoncé des exercices. De plus, la construction d'une formule de fonction périodique n'est pas travaillée, même dans les exercices de modélisation en mathématiques et en physique. Les élèves rencontrent une formule algébrique donnée pour résoudre un problème sans recours à une représentation graphique de la fonction. Il n'existe pas de tâche du type « établir la formule » d'une fonction modélisant la co-variation périodique de deux grandeurs, ni même de tâche du type « établir que la formule est… » qui s'inscrirait dans le travail sur la famille donnée des fonctions trigonométriques.

Cette dernière phase de la séance montre ainsi que le passage à un registre algébrique, ultime étape du processus de modélisation, est inaccessible dans les conditions institutionnelles actuelles du lycée vietnamien.

VIII. Conclusion de la séance 2

La formalisation de la périodicité est un premier enjeu de l'ingénierie. L'expérimentation de l'ingénierie révèle que la périodicité est reconnue et utilisée par les élèves qui la formalisent de quatre manières différentes attachées à des ostensifs différents et à des représentations différentes du temps :

- La périodicité en tours de cercle ; temps circulaire discret ; modèle C
- La périodicité en segments de demi-droite graduée ; temps linéaire continu
- La périodicité en arches de sinusoïde ; temps linéaire continu ; modèle O
- La périodicité en segments parallèles ; temps linéaire discret.

L'enseignant dans l'institutionnalisation qui termine la phase 4 ajoute une formalisation : la périodicité en suite arithmétique (temps discret).

L'expérimentation valide ainsi l'hypothèse (H4) qui faisait du problème de coïncidence de deux phénomènes périodiques un lieu possible de formalisation de la périodicité.

La richesse et la diversité des formalisations de la périodicité est à mettre à l'acquis d'une conception de la séance 2 de l'ingénierie didactique qui vise une rencontre avec les fonctions périodiques au-delà de leurs seules représentantes institutionnelles que sont les fonctions trigonométriques. En cela, avec cette séance, l'ingénierie peut être qualifiée de nouvelle rencontre avec les fonctions trigonométriques, provoquée par un processus de modélisation en rupture avec les pratiques institutionnelles. En effet, la construction des connaissances sur la périodicité est le produit d'un processus de mathématisation d'un phénomène du monde réel.

Le passage du modèle C au modèle O est un autre enjeu de la séance 2. Le choix du modèle dans la résolution du problème (phases 1 et 4) s'exprime d'abord dans le choix de la représentation du temps, soit circulaire soit linéaire, soit par repliement soit par déploiement.

Relativement au choix de la représentation du temps, l'expérimentation montre que le modèle C, installé comme modèle intermédiaire vers le modèle O, favorise fortement le cercle contre la demi-droite en transformant le déplacement linéaire du point P en temps circulaire grâce au co-déplacement du point M (cf. hypothèse H2). Le choix du temps circulaire rend peu probable l'émergence du deuxième axe de la représentation bidimensionnelle car il conduit à emprunter une stratégie « graphique unidimensionnel » sur le cercle. La valeur T = 5 de la variable V1 ne permet pas une déstabilisation suffisamment forte de la stratégie « graphique unidimensionnel » où le temps est replié sur le cercle qui est lui-même la trajectoire de M. D'autres valeurs de T (par exemple, T = 11) pourraient être plus déstabilisatrices et conduire à l'abandon de la stratégie « graphique unidimensionnel ». L'effet déstabilisateur de T = 11 pourrait être accentué par une valeur de h qui placerait L proche d'une des extrémités des arcs de cercles représentant sur le cercle les durées d'éclairement de la lampe.

Le passage du modèle C au modèle O nécessite de détacher la grandeur choisie de sa représentation dans le modèle C pour la placer sur le deuxième axe d'un repère cartésien dont le premier axe est le temps. L'hypothèse (H3) avance l'idée que le choix de la hauteur de la cabine est favorable à l'émergence du deuxième axe. L'expérimentation montre que cette condition est insuffisante tant que la stratégie « graphique unidimensionnel » n'est pas bloquée (phases 1 et 4). C'est d'autant plus vrai au Viêt Nam où le contrat institutionnel à la fonction ne met pas le graphique en position de représentation attendue pour une fonction, lui préférant la représentation algébrique (phases 4, 5 et 6).

L'hypothèse (H5) selon laquelle les fonctions périodiques et leur registre graphique sont optimales dans la résolution du problème n'est pas mise à l'épreuve par l'ingénierie. En effet l'optimalité ne pourrait être validée que si le problème des coïncidences avait été dévolu dans toute sa généralité, en transformant les données numériques fournies en paramètres des modèles C et O.

Lié à l'articulation des modèles C et O, un autre enjeu de l'ingénierie est le travail sur l'objet fonction pour passer d'une représentation dynamique à une représentation statique. Du point P pilotant le point M dans l'environnement de géométrie dynamique, l'ingénierie aboutit à la formalisation algébrique d'une fonction h = f(t). L'ingénierie didactique a mis en évidence la triple rupture avec le contrat institutionnel sur les fonctions que nécessite ce travail sur la fonction :

- Première rupture : la représentation dynamique d'une fonction dans un environnement informatique (séance 1)
- Deuxième rupture : la fonction comme aboutissement du processus de modélisation (phase 4 de la séance 2)
- Troisième rupture : le passage de l'ostensif graphique à l'ostensif algébrique (phases 5 et 6 de la séance 2)

L'expérimentation montre la force des contraintes institutionnelles qui s'opposent au fonctionnement de chacune de ces ruptures. C'est particulièrement vrai pour la troisième rupture puisque aucun des binômes n'a réalisé la tâche demandée.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE

L'objet central de notre étude est la modélisation mathématique de phénomènes périodiques dans l'enseignement secondaire. Le choix de nous restreindre aux phénomènes périodiques temporels nous a conduits à nous intéresser particulièrement à la modélisation par une fonction périodique dont la variable indépendante est le temps. Rappelons le questionnement initial que notre étude a problématisé au cours du développement de deux analyses, épistémologique et institutionnelle, et d'un dispositif expérimental composé d'un questionnaire et d'une ingénierie didactique :

Comment les phénomènes périodiques sont-ils étudiés et modélisés par les sciences physiques et mathématiques ? Avec quels modèles mathématiques ?

Comment l'étude des phénomènes périodiques vit-elle dans l'enseignement secondaire de la physique et des mathématiques au Viêt Nam et en France ? Comment s'articulent les différentes significations données au concept de périodicité par les différentes disciplines ?

Est-il possible d'organiser un enseignement des fonctions périodiques par la modélisation qui tienne compte des conditions et des contraintes institutionnelles ?

Nous rassemblons ci-après les principaux résultats des différentes analyses en les replaçant dans le cadre de l'étude et en les articulant entre eux.

I. Apports de l'étude

I.1. L'importance des modèles C et O dans la modélisation mathématique des phénomènes périodiques

Les modèles C (les mouvements circulaires uniformes) et O (les oscillations harmoniques) sont, pour les physiciens, les modèles élémentaires pour étudier les phénomènes périodiques temporels.

- Le modèle C (mouvement circulaire uniforme) présenté dans deux registres : algébrique ($x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$, $\theta = \omega t$) et graphique (cercle)
- Le modèle O (mouvement oscillatoire harmonique) présenté dans deux registres : algébrique ($x = A \cos (\omega t + \varphi)$ ou $x'' + \omega^2 x = 0$) et graphique (sinusoïde)

Le modèle C est cantonné à la Mécanique comme modèle de base pour l'étude des phénomènes cycliques réductibles aux mouvements d'un mobile sur une trajectoire. Il permet de travailler en particulier les concepts de vitesse et d'accélération.

La trajectoire du mobile est au cœur de ce modèle. A chaque point de cette trajectoire on peut associer le ou les moments du passage du mobile à ce point. En déplaçant le point mobile sur la trajectoire, on peut donc « visualiser » la co-variation avec le temps de toute grandeur associée au mouvement (donc co-variable avec le temps), par exemple la distance du point mobile à un autre point, à une droite ou à un plan. La trajectoire peut servir alors de graphique unidimensionnel comme le révèlent les observations des phases 1 et 4 de la séance 2.

Le modèle O est dominant en Physique des vibrations, des oscillations et des ondes. Ce modèle est à l'origine de nombreux et importants développements mathématiques, dont l'Analyse de Fourier, qui donnent une place centrale aux fonctions trigonométriques.

Un graphique bidimensionnel est au cœur de ce modèle O. Le temps et les grandeurs co-variables avec le temps y sont séparés sur deux axes différents. Le passage du modèle C au modèle O consiste alors à faire apparaître le deuxième axe porteur des variations de la grandeur modélisée.

I.2. La faiblesse de l'articulation entre les modèles C et O dans l'enseignement des phénomènes périodiques

Par une analyse institutionnelle, nous avons montré l'existence et l'articulation des deux modèles C et O dans les enseignements de mathématique et de physique secondaires en France et au Viêt Nam.

Dans l'enseignement secondaire français, le modèle O est introduit avant le modèle C. En effet le modèle O apparaît dès la classe de 3^{e} dans l'enseignement de la physique avec le seul registre graphique. Il se retrouve en classe Terminale pour l'étude de plusieurs phénomènes oscillatoires. Le modèle C ne prend qu'une place mineure en classe de 2de et 1re.

En revanche, dans l'enseignement secondaire vietnamien, le modèle C est introduit avant le modèle O (implicitement en Primaire et explicitement en classe 10). Le modèle O ne trouve sa place qu'en classe 12 après que les fonctions trigonométriques sont enseignées en mathématiques. Contrairement à l'institution française, le modèle O est systématiquement présent dans son registre algébrique, le graphique étant limité à un rôle d'illustration.

Dans aucune des institutions d'enseignement secondaire, française et vietnamienne, il n'existe de praxéologie dédiée au passage de l'un des modèles à l'autre, ni dans l'enseignement des mathématiques ni dans celui de la physique. Dans l'institution vietnamienne, bien qu'il existe des exercices conjoints aux deux modèles C et O, les questions portent sur le modèle O et son registre algébrique. Le recours au modèle C dans ces exercices n'est ni travaillé ni attendu.

Les réponses au questionnaire attestent des conséquences de cet état institutionnel : elles révèlent les difficultés que rencontre l'élève vietnamien dans la modélisation de phénomènes périodiques. Principalement, ce sont des difficultés à :

- choisir, selon le problème à résoudre, l'un des deux modèles C ou O
- spécifier le modèle choisi (les données et les paramètres)
- passer de l'un des modèles à l'autre

I.3. L'imbrication des concepts de temps et de périodicité dans la modélisation des phénomènes périodiques temporels

Mise en évidence dans l'enquête épistémologique, cette imbrication des concepts de temps et de périodicité est apparue avec force dans l'ingénierie didactique.

Les mesures de durées nécessitent de se référer à des phénomènes périodiques qui permettent de les ramener à un décompte de périodes. L'enquête épistémologique montre que la topologie du temps offre deux variantes, le cercle portant le temps circulaire qui fait des boucles ou la ligne portant le temps linéaire qui va de l'avant.

Le temps linéaire est classiquement représenté par une droite orientée composée d'une suite d'instants infinitésimaux que les mathématiciens appellent la droite réelle R. Le temps intervient alors dans les équations de la physique comme une variable réelle indépendante et graphiquement représentée par un axe, le plus souvent l'axe des abscisses.

Le passage de l'un des modèles C et O à l'autre se traduit, pour la variable temps, en un déploiement ou un repliement. Or si le déploiement est institutionnalisé avec la droite du temps, le repliement, quant à lui, n'existe qu'implicitement à travers l'enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique. L'ingénierie didactique rend visible le repliement du temps sur le cercle car, dans l'environnement Cabri de géométrie dynamique, le pilotage du point M (le mobile) par le point P (le temps) induit la possibilité de lire le temps sur le cercle. Ce repliement du temps sur le cercle réalisé en décompte du nombre de tours, produit une discrétisation du temps avec une formalisation sémantiquement attachée à l'Arithmétique modulaire.

L'ingénierie didactique met en évidence un autre repliement du temps, celui en segments de droite parallèles que nous avons qualifié de bidimensionnel discret[31]. Ainsi la typologie du temps n'est-elle pas aussi pauvre que ne le déclare Klein quand il dit : « Elle n'offre que deux variantes, la ligne et le cercle » (cf. citation à la page 26). Ce qui nous apparaît fortement c'est l'absence, dans l'institution d'enseignement secondaire, de construction des différentes représentations du temps opérationnelles dans les différents problèmes où la variable temps intervient.

La séance 1 de l'ingénierie permet aux élèves de construire le temps linéaire et ainsi d'accéder à la variable indépendante « temps » sur un axe différent de la trajectoire du mobile. Le temps linéaire sur un tel axe est potentiellement porteur d'un passage vers le modèle O mais l'ingénierie didactique dans la séance 2 a montré la difficulté de l'émergence du deuxième axe de la représentation bidimensionnelle, déjà pointée dans la thèse de Falcade (2006).

I.4. Une situation didactique dont l'enjeu mathématique est la périodicité

Pour introduire les fonctions périodiques par la modélisation, nous avons choisi un problème extra-mathématique concernant les coïncidences des deux phénomènes (la cabine de M est en position L et la lampe est allumée), reconnus comme périodiques. La formalisation et l'utilisation de la périodicité sont nécessaires pour résoudre ce problème et possibles dans des formes institutionnelles. L'ingénierie organise en plusieurs phases de la séance 2, dont deux sont dédiées à la résolution du problème, le passage et l'articulation entre les deux modèles C et O.

L'expérimentation de l'ingénierie montre que le problème de coïncidence des deux phénomènes périodiques choisi est pertinent pour concevoir la périodicité de chacun des phénomènes étudiés et opérer avec elles et que les situations didactiques des phases 1 et 4 de la séance 2 permettent aux élèves de formaliser de plusieurs manières différentes la périodicité.

I.5. La polymorphie de la formalisation de la périodicité

La périodicité vit dans l'enseignement secondaire des mathématiques essentiellement dans deux domaines : celui des nombres réels et celui des fonctions numériques.

Dans le domaine des nombres réels, la période est considérée comme un motif (un groupe fini des chiffres) qui se répète. Par contre, dans le domaine des fonctions numériques, ce qui est

---

[31] Remarquons que ce type de repliement est présent sur les montres à affichage numérique.

appelé période est la « longueur » d'un motif[32]. La distinction et l'articulation des significations de la notion de période dans ces deux domaines ne sont pas travaillées dans l'enseignement mathématique secondaire.

Dans l'enseignement de la physique, la périodicité est toujours liée à la répétition des phénomènes qui varient en fonction du temps (ou du temps et de l'espace pour les ondes). Pour les phénomènes temporels, la période est la durée du motif élémentaire (mouvements oscillatoires, modèle O) ou le temps pour que l'objet fasse un tour complet (mouvements cycliques, modèle C).

Nous avons montré, à travers l'analyse institutionnelle et l'analyse de l'ingénierie didactique, l'existence de plusieurs formalisations de la périodicité dans l'enseignement.

Habitat	**Formalisations de la périodicité**
Arithmétique	Pointillés, groupe de chiffres en parenthèses ou surlignés
Fonctions trigonométriques (modèle O)	Arches de sinusoïde, segments de même longueur sur une droite graduée
Cercle trigonométrique (modèle C)	Tours, suites arithmétiques

Tableau 45. Les formalisations institutionnelles de la périodicité

La périodicité est formulée aussi dans le langage naturel avec les termes « répétition » ou « se répéter », etc.

Cet ensemble de formalisations portées par des ostensifs divers montre la richesse des significations apportées par l'institution aux concepts de périodicité et de période. Toutes ces formalisations visent à embrasser l'infini de l'expression « ça ne s'arrête pas », lors de la reconnaissance de la périodicité, dans un opérateur fini adapté au problème où la périodicité est rencontrée.

I.6. La double nature didactique du modèle intermédiaire géométrique dans le processus de modélisation

L'enquête épistémologique révèle la complexité et la richesse de tout processus de modélisation. Pour notre ingénierie, nous avons retenu l'idée d'un modèle intermédiaire géométrique pour initier et dynamiser le processus de modélisation.

L'établissement d'un modèle intermédiaire géométrique est aidé par l'environnement de géométrie dynamique qui permet, en matérialisant les variables, d'explorer le modèle (ici le modèle C comme intermédiaire vers le modèle O) et de le faire évoluer au fur et à mesure qu'avance le travail de modélisation. Le choix de la géométrie dynamique étant arrêté (avec le logiciel Cabri II Plus), nous avons recherché des conditions qui favorisent une modélisation géométrique d'une situation réelle et qui laissent aux élèves la responsabilité du choix des variables pertinentes dans l'avancée de la modélisation. Les différents choix macro et méso didactiques de l'ingénierie exploitent les potentialités de Cabri II Plus dans l'exploration et la formulation de phénomènes de co-variation pour entrer et avancer dans la modélisation, initiant ainsi à une représentation dynamique d'une fonction.

[32] Conception iconique de la répétition qu'on peut retrouver en géométrie (les pavages ou les cristaux)

Malgré les difficultés instrumentales prévisibles puisque l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique n'est pas officialisé au Viêt Nam, l'expérimentation de la séance 1 de l'ingénierie montre que les élèves peuvent prendre en charge une part de la démarche de modélisation de phénomènes périodiques dans un environnement de géométrie dynamique.

Cependant l'expérimentation montre aussi que le modèle C construit dans la séance 1 se constitue en obstacle au passage vers le modèle O visé par la séance 2. Cet obstacle didactique est renforcé par les choix des valeurs pour les variables didactiques V1 et V3 qui ne déstabilisent pas suffisamment les stratégies attachées au modèle C.

I.7. Les difficultés à initier une genèse instrumentale

Pour notre ingénierie, nous construisons une situation d'initiation à Cabri afin d'amorcer une genèse instrumentale minimale des outils Cabri nécessaires à la construction du modèle géométrique. Plusieurs commandes sont transformées en outils (point, droite, segment, demi-droite, droite perpendiculaire, droite parallèle, cercle, compas, calculatrice, distance ou longueur, report de mesure) dans des exercices pour déclencher le processus de genèse instrumentale. Afin de dévoluer une part du processus de modélisation aux élèves, cette situation d'initiation à Cabri mise sur la concurrence des outils « compas » et « report de mesure ».

L'expérimentation de l'ingénierie (situation 1) a montré que la commande « report de mesure » présente dans le menu Cabri n'est pas pour les élèves une connaissance instrumentale suffisante pour outiller la stratégie report de mesure sur la droite et encore moins sur le cercle qui ne peut fonctionner en l'absence d'un point fixe d'origine du report et d'un sens de report.

I.8. Les contraintes institutionnelles qui pèsent sur l'enseignement de la modélisation fonctionnelle

Au Viêt Nam, les enseignements de la physique et des mathématiques vivent sans nouer de liens rigoureux. Les mathématiques n'interviennent que comme savoirs à appliquer que l'enseignement de la physique introduit lui-même selon besoin. Il le fait certes pour résoudre des problèmes de physique mais comme des outils préfabriqués et donc élaborés en dehors des problèmes.

Le problème de l'enseignement de la modélisation n'est pas posé dans la construction des programmes et des manuels au Viêt Nam. Les manuels ne font mention que d'exercices d'application des connaissances mathématiques à certains problèmes pseudo-concrets. Dans ces exercices, les modèles mathématiques (comme C ou/et O) sont fournis avec l'énoncé et la réalité déjà modélisée sert de prétexte à un travail mathématique dans le modèle désigné. Vu la faiblesse du graphique dans l'enseignement des mathématiques et de la physique au Viêt Nam, le travail mathématique se situe toujours dans le registre algébrique et le passage d'un graphique à une formule algébrique est complètement absent. Qui plus est, d'après le livre des enseignants, la résolution de ces problèmes n'est pas exigible de tous les élèves.

En France, l'enseignement de la modélisation fait partie des objectifs principaux cités dans les textes officiels comme les programmes de mathématiques et leurs documents d'accompagnement. Cependant, pour les phénomènes périodiques, il n'y a pas de véritables activités de modélisation. Dans les exercices, les modèles sont imposés et les questions ne portent que sur la mathématique du modèle, en attribuant une place importante au graphique.

Ainsi, dans les deux institutions, l'enseignement de la modélisation mathématique en particulier de la modélisation de phénomènes périodiques se réduit à l'enseignement de l'utilisation de modèles. En particulier la fonction, si elle fait partie du modèle, est formulée par l'énoncé dès la présentation de la réalité à modéliser. Une telle fonction n'est jamais l'aboutissement du processus de modélisation, sauf, de façon marginale, dans l'enseignement français de la physique en classe terminale (circuits RLC et équation différentielle linéaire du second ordre).

Comme nous l'avons montré dans la conclusion de la séance 2, l'ingénierie didactique met en lumière la force des différentes contraintes institutionnelles qui s'opposent au fonctionnement de chacune des ruptures choisies dans la conception de la situation 3.

Une autre contrainte institutionnelle, peut-être propre à l'institution vietnamienne est apparue très fortement dans la séance 2 de l'ingénierie. Il s'agit d'un rapport à la proportionnalité inadéquat pour réussir les changements d'échelle de Cabri à la réalité, et réciproquement de la réalité à Cabri.

II. Perspectives de recherche

II.1. Des retours sur l'ingénierie didactique pour une reprise de cette ingénierie

• La genèse instrumentale de la commande report de mesure a contribué aux difficultés d'entrée dans le processus de modélisation et a révélé un rapport institutionnel incomplet au mesurage. La nécessité d'une origine fixe et d'une orientation du cercle pourrait être problématisée dans une reprise de la conception même de l'ingénierie.

En effet, lors de l'expérimentation, le report de mesure sur un cercle a dû être introduit par l'enseignant. La question de construction d'une situation, qui amène le report de mesure sur un cercle de façon nécessaire, reste ouverte. Comment construire une situation où les élèves prennent en charge le report de mesure sur un cercle dans le processus de modélisation ? Comment mettre en place la genèse instrumentale de la commande « report de mesure » relativement à la nécessité d'une origine fixe ?

• Les valeurs choisies pour les variables V1 et V3 dans le problème de coïncidence n'ont pas provoqué une déstabilisation suffisante de la stratégie « graphique unidimensionnel » qui puisse favoriser la stratégie graphique bidimensionnel visée. La question d'améliorer la situation permettant l'invalidation de la perception et de favoriser la stratégie « graphique bidimensionnel » est posée. Quelles conditions sont nécessaires pour faire émerger le deuxième axe de la représentation bidimensionnelle ?

• Dans le passage du modèle C au modèle O, notre choix a été d'articuler ces deux modèles par le registre graphique et ensuite de construire le passage de ce registre graphique au registre algébrique. Une autre direction de recherche possible pour l'ingénierie pourrait être de passer du modèle C au modèle O grâce au registre algébrique avant de construire le passage au registre graphique.

• L'ingénierie est conçue pour des élèves ayant reçu un enseignement des fonctions trigonométriques qui a mis à leur disposition les registres graphique et algébrique de ces fonctions. Cette ingénierie vise en fait à organiser une nouvelle rencontre avec ces fonctions par la modélisation. Est-il possible de concevoir une première rencontre avec les fonctions trigonométriques dans un processus de modélisation de phénomènes de co-variations périodiques ?

- L'ingénierie met en lumière l'importance du changement d'échelle dans le processus de modélisation mathématique et, comme nous l'avons déjà dit, elle montre les difficultés rencontrées par les élèves vietnamiens dans l'usage de la proportionnalité pour réaliser les changements d'échelles qu'ils entreprenaient. Ces difficultés n'ont pas été rencontrées par les élèves français lors de l'expérimentation 2 (juillet 2010) en France. Quels sont les rapports institutionnels vietnamiens à l'objet proportionnalité dans son lien avec la modélisation mathématique ? Cette question pourrait faire l'objet d'une nouvelle étude institutionnelle comparative France-Viêt Nam et déboucher sur une autre question : comment travailler les situations didactiques de l'ingénierie pour prendre en compte ces rapports institutionnels à la proportionnalité ?

II.2. La construction d'une co-disciplinarité mathématique-physique dans l'institution

La modélisation est une des principales modalités de l'interaction entre les mathématiques et les autres disciplines scientifiques dont la physique. L'enseignement de la modélisation peut-il vivre dans les conditions institutionnelles actuelles qui isolent l'un de l'autre chacun des enseignements scientifiques ou appelle-t-il la définition, dans l'institution secondaire, d'une co-disciplinarité capable de désigner les problèmes et de créer les situations susceptibles de porter un processus de modélisation mathématique ?

> Un tel enseignement [enseignement co-disciplinaire] vise à favoriser les complémentarités de chaque discipline en portant des regards croisés sur les objets étudiés et les méthodologies mises en œuvre sans chercher à gommer leurs spécificités. Il nécessite un travail collaboratif des enseignants pour organiser le travail des élèves tant sur un plan pédagogique que scientifique. (Prieur et Aldon, 2010)

D'un certain point de vue, notre étude a essayé de répondre à ces questions mais en ne visant que les phénomènes périodiques présents dans l'enseignement secondaire de la physique. D'autres phénomènes, étudiés par la physique ou d'autres sciences, pourraient se prêter à une étude du même type. Plus généralement, quels sont les savoirs mathématiques et quels sont les savoirs de la physique (ou d'autres sciences) qui pourraient être créés à partir d'un processus de modélisation extra-mathématique dans les conditions institutionnelles actuelles ?

II.3. La formation des enseignants de mathématiques à l'enseignement de la modélisation

Les activités d'apprentissage co-disciplinaires sont des occasions privilégiées de développer la coopération scientifique et didactique entre les enseignants. Comment introduire le thème des liens entre les mathématiques et les autres sciences dans la formation des enseignants ? En effet, enrichir la culture mathématique et plus généralement la culture scientifique des enseignants de mathématique est l'une des ambitions pour la formation des enseignants. Voici comment cette ambition est formulée par Kahane (2000) :

> […] la culture scientifique nécessaire au travail en commun avec des enseignants d'autres disciplines, comme celui nécessité par les TPE ou les itinéraires de découverte. S'il n'est pas question de demander aux enseignants de mathématiques d'être omniscients, il faut qu'ils puissent dialoguer et travailler avec des enseignants d'autres disciplines, et voir en particulier, dans ce travail en commun, comment les mathématiques peuvent aider à formuler des questions de manière à les rendre accessibles à un travail scientifique puis contribuer à

leur résolution. Tout ceci non plus ne va pas de soi car ce qui est en jeu, au-delà de l'Ecole, c'est le rapport social aux mathématiques. (Kahane (2000), p. 71-72)

L'enseignement de co-disciplinarité au secondaire implique non seulement des interactions entre des savoirs disciplinaires différents et entre ces savoirs et la vie réelle, mais aussi entre des enseignants de ces disciplines de l'institution. Comment faire comprendre aux enseignants de mathématique la différence entre application mathématique et modélisation mathématique ? Comment organiser une formation où la question de la modélisation fasse partie de la préoccupation des enseignants dans leur enseignement ? Quelles praxéologies (mixtes mathématiques-physique) l'institution secondaire doit-elle construire pour enseigner la modélisation mathématique ?

II.4. L'utilisation de la géométrie dynamique dans l'enseignement mathématique secondaire

Comme nous l'avons écrit précédemment, l'environnement de géométrie dynamique donne les moyens aux élèves d'explorer des modèles géométriques et de faire évoluer ces modèles au fur et à mesure du travail de modélisation. Avec les situations de notre ingénierie, la géométrie dynamique permet de travailler à une représentation dynamique d'une fonction, alors qu'une telle représentation est absente de l'institution mathématique secondaire vietnamienne. La géométrie dynamique est par contre de plus en plus utilisée en France pour enseigner non seulement en géométrie mais aussi en Analyse.

Cependant, l'enseignement dans un tel environnement informatique pose de nombreuses questions à l'institution :

- Quelles situations didactiques, pour quels savoirs ? Quelles ressources d'enseignement ? Quelles genèses instrumentales pour quels outils ?

- Quelle formation des enseignants ? Quels équipements informatiques à l'école ?

BIBLIOGRAPHIE

I. Didactique des mathématiques - réflexions sur l'enseignement des mathématiques

ARTIGUE M. (1989), Ingénierie didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 9/3, p. 281-308, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

ASSUDE T (2007), Modes et degré d'intégration de Cabri dans des classes du primaire, in R. Floris et F. Conne (eds) *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques*, De Boeck éditeurs, p. 119-134.

ASSUDE T., GRUGEON B. (2003), Enjeux et développements d'ingénieries de formation des enseignants pour l'intégration des TICE, *Conférence au congrès ITEM*, Reims 20, 21, 22 juin 2003.

BESSOT A. & COMITI C. (2008), Apport des études comparatives aux recherches en didactique des mathématiques : le cas Viêt-Nam / France, in L. Coulange & C. Hache (édits) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, Année 2008*, p.171-194 Editions ARDM et IREM de Paris 7.

BESSOT A. & NGUYEN C.T. (2005), L'ingénierie didactique, l'exemple d'une recherche coopérative franco-vietnamienne », *Actes du premier séminaire franco – vietnamien en Didactique des Mathématiques*, Juin 2005, Université de Pédagogie de Ho Chi Minh Ville.

BESSOT A. (2010), Modélisation mathématique de phénomènes variables dans l'enseignement à l'aide de la géométrie dynamique, *Deuxième séminaire franco-vietnamien de didactique des mathématiques Didactique, Méthodologie, et Enseignement/ Apprentissage des Mathématiques,* Viêt Nam, Ho Chi Minh Ville, 26 et 27 avril 2010.

BESSOT A., COMITI C., LE THI H. C., LE VAN T. (2009), Eléments fondamentaux de didactique des mathématiques, Ouvrage bilingue, édition de l'Université nationale de Ho Chi Minh ville.

BIREBENT A. (2007), Le calcul numérique dans l'enseignement mathématique secondaire : reprise des travaux de notre thèse, in G. Gueudet et Y. Matheron (eds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, *Année 2007,* p. 308-324, Editions ARDM et IREM de Paris 7.

BIREBENT A., NGUYEN THI N. (2010), Une étude didactique de la modélisation des phénomènes périodiques, *Deuxième séminaire franco-vietnamien de didactique des mathématiques Didactique, Méthodologie, et Enseignement/ Apprentissage des Mathématiques,* Viêt Nam, Ho Chi Minh Ville, 26 et 27 avril 2010.

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol.19, n°1, p. 77–124, Editions la Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 7/2, p. 33–116, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1990), Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 9/3, p. 309–336, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1998), Théorie des situations didactiques, Pensée Sauvage, Grenoble.

BURGERMEISTER P.F. (2007), La didactique de la modélisation mathématique dans l'enseignement secondaire d'hier et d'aujourd'hui, *Communication au 2e congrès TAD, Uzès 2007*.

CHEVALLARD Y. (1985), La transposition didactique – du savoir savant au savoir enseigné, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1989), Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique,* LSD-IMAG Grenoble, p. 211–235.

CHEVALLARD Y. (1989b), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, 2ème partie, perspective curriculaires : la notion de modélisation, *Petit x*, no19, p. 43-72.

CHEVALLARD Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 12/1, p. 73–111, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1994), Les processus de transposition didactique et leur théorisation, in Arsac et al. (eds.), *La transposition didactique à l'épreuve*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

COHEN-TANNOUDJI G. (2002), La notion de modèle en physique théorique, in P. Nouvel (eds) *Enquête sur le concept de modèle*, Presses universitaires de France, p. 29-42.

COULANGE L. (1998), Les problèmes concrets à mettre en équation dans l'enseignement, *Petit x*, no17, p. 33-58.

COMMISSION DE REFLEXION SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES (2000), *La formation des maîtres en mathématiques*, Rapport d'étape.

DOUADY R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol 7/2, p. 5-31, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

DUVAL R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, n°5, p. 37-65, IREM de Strasbourg.

FALCADE R. (2006), Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier et Università degli studi di Torino.

GANDOLFO G. (2009), Modèle et réalité : une perspective épistémologique, *Séminaire d'Epistémologie de la Biologie et Biologie Théorique*.

HENRY M. (2001), Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement, dans la publication Inter-IREM *"Autour de la modélisation en probabilité"*, Presses universitaires Franc-Comtoises, p. 149-159.

KHALLOUFI MOUHA F. (2009), *Étude du processus de construction du signifié de fonction trigonométrique chez des élèves de 2ème année section scientifique,* Thèse de doctorat, Université Tunis.

KRYSINSKA M., MERCIER A., SCHNEIDER M. (2009), Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels, *Recherches en didactique des mathématiques,* no87, p. 247–304, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

KRYSINSKA M., SCHNEIDER M. (2010), Emergence de modèles fonctionnels, Editions de l'Université de Liège.

LAGRANGE J.B. (2007), Pratiques instrumentées et démarche expérimentale dans l'apprentissage de la notion de fonction, in R. Floris et F. Conne (eds) *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques*, De Boeck éditeurs, p. 161-184.

LE THAI BAO T.T. (2007), *Étude didactique des relations entre enseignement de la notion de limite au lycée et décimalisation des nombres réels dans un environnement « calculatrice ».* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

LEGRAND M. (2003), Différents types de modélisation dans l'enseignement, in Dossier 2004 diffusé dans les Irem, *Séance du Comité Scientifique des Irem « La modélisation » du 26 novembre 2003*.

MARIA RESTREPO A. (2008), *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

NGUYEN B.K. & VU D.T. (1992), Phương pháp dạy học môn Toán (Méthodologie de l'enseignement des mathématiques), Maison d'édition Education et Formation.

RENE DE COTRET S. (1998), Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante, *Petit x*, n°17, p. 5-27.

RODRIGUEZ GALLEGOS R. (2007), *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

SANCHEZ E. (2008), Modélisation et simulation dans l'enseignement des sciences de la vie et de la Terre, *Dossiers de l'Ingénierie Educative CNDP* (63-64), p. 84-87.

SENSEVY G., MERCIER A. (1999), Pourquoi faire encore des mathématiques à l'école ? *Le Télémaque,* n°15, p. 69-78, Université de Caen.

SOURY-LAVERGNE S. (2010), Rapport du projet MIRA 2010, diffusé le 17 décembre 2010.

TROUCHE L. (2007), Environnements informatisés d'apprentissage : quelle assistance didactique pour la construction des instruments mathématiques ?, in R. Floris et F. Conne (eds) *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques*, De Boeck éditeurs, p. 19-38.

Des activités mathématiques-physique en classe de seconde des lycées d'enseignement général et technologique, l'IREM de Besançon, 2002.

II. Traités et manuels universitaires en mathématiques et en physique

ALLAIRE G. (2005), Analyse numérique et optimisation, édition de l'école polytechnique.

ALONSO M. & J. FINN E. (1967), Physique générale, Texte français de M. Daune, Dunod, Paris, 2001.

BALLAND B. (2007), Optique géométrique : Imagerie et instruments, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.

BENSON H. (1991), Physique, Adaptation de M. Séguin, B. Villeneuve, B. Marcheterre, R. Gagnon, De Boeck, 2009.

BERKELEY (2002), Mécanique, Cous de physique, Dunod, Paris.

BICHAT M. (1874), Discussion de la méthode des coïncidences, *Journal de physique : Théorie et appliquée,* Vol. 3, Number 1, p. 369-374.

CLERC C. (2003), Physique, Mécanique, MPSI, Bréal édition.

DIALLO O. (1993), La méthode de coïncidence et addition. Application à la recherche des états excites de ^{214} Po formes par désintégration β^- de ^{214} Bi, Thèse de doctorat, Université Cheikh Anta Diop de Dakar.

FRANÇOIS C. (1910), Sur la méthode des coïncidences dans les observations pendulaires, *Journal Ciel et Terre,* Vol. 31, p. 236-245.

GASQUET C., WITOMSKI P. (2000), Analyse de Fourier et applications filtrage, calcul numérique et ondelettes, cours 2es cycles/ Master, Dunod, Paris.

GODEMENT M. (2001), Analyse mathématique I, Convergence, fonction élémentaires, 2ème édition corrigée, Springer.

ISRAEL G. (1996), La mathématisation du réel, Editions du Seuil, Paris.

KLEIN E. (2000), L'unité de la physique, Presses universitaires de France.

KLEIN E. (2006), Faut-il distinguer cours du temps et flèche du temps *? Texte de la conférence présentée au colloque des Journées Nationales de l'UdPPC à Besançon le 27 octobre 2006.*

LECERF A. (1996), Physique des ondes et des vibrations, 2^{e} édition, Tec & Doc – Lavoisier.

LUMINET J.P. (1995), Matière, espace, temps, in E. Klein et M. Spiro (eds), *Le temps et sa flèche*, Editions Frontières, p. 59-80.

P. FEYNMAN R. (1963), The Feyman lectures on Physics, Version française de G. Delacote et M. Bloch, InterEditions, Paris, 1979.

PATY M. (1995), Sur l'histoire du problème du temps, in E. Klein et M. Spiro (eds), *Le temps et sa flèche*, Editions Frontières, p. 21-58.

R. SPIEGEL M. (1974), Analyse de Fourier, *Traduit par R. Jacoud*, McGraw – Hill International, 1980.

R. SPIEGEL M. (1994), Théorie et application de la mécanique générale, McGraw-Hill.

RENAULT J. (1994), Techniques mathématiques de la physique, Dunod, Paris.

ROSSETTO B. (1997), Analyse harmonique, Ellipses.

SCHWARTZ L. (1965), Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Hermann.

Modélisation et schématisation cinématiques des mécaniques, classes préparatoires aux grandes écoles premier cycle universitaire, Union des professeurs de sciences et techniques industrielles, Bréal édition 1993.

http://www.sciences.ch/htmlfr/mecanique/mecanprincipes01.php, consulté le 25 février 2011.

III. Programmes et manuels scolaires

III.1. Programmes et manuels scolaires français

En mathématiques

Ministère de l'Éducation nationale (2002). Programme des mathématiques des classes de Seconde série générale et technologique, CNDP Paris.

http://www2.cndp.fr/produits/detailsimp.asp?Ref=755C0643

Ministère de l'Éducation nationale (2000). Document d'accompagnement de programme - Mathématiques - classe de Seconde série générale et technologique, CNDP Paris.

http://www2.cndp.fr/produits/detailsimp.asp?Ref=755A0040

Ministère de l'Éducation nationale (2005). Programme des mathématiques des classes de Première des séries générales, CNDP Paris.

http://www2.cndp.fr/produits/detailsimp.asp?ID=73135

Ministère de l'Éducation nationale (2006). Document d'accompagnement de programme - Mathématiques - classe de Première des séries générales, CNDP Paris.

http://www2.cndp.fr/produits/detailsimp.asp?ID=84491

Ministère de l'Éducation nationale (2005). Programme des mathématiques des classes de Terminale des séries scientifiques et économiques et sociales, CNDP Paris.

http://www2.cndp.fr/produits/detailsimp.asp?id=74237

Ministère de l'Éducation nationale (2002). Document d'accompagnement de programme - Mathématiques - classe de Terminale des séries scientifiques et économiques et sociales, CNDP Paris.

http://www2.cndp.fr/produits/detailsimp.asp?Ref=755A0286

L'enseignement des sciences au lycée, BOEN Hors série, n°6, août 1999

Maths 6e, Collection Cinq sur cinq, Editions Hachette, 1994

Maths 5e, Collection Cinq sur cinq, Editions Hachette, 1995

Maths 4e, Collection Diabolo, Editions Hachette, 2003

Maths 3e, Collection Diabolo, Editions Hachette, 2008

Mathématique 2de, Collection Déclic, Editions Hachette, 2004

Mathématique 1re S, Collection Déclic, Editions Hachette, 2005

Mathématique Terminale S, Collection Déclic, Editions Hachette, 2005

L'enseignement des sciences au lycée, BOEN Hors série, n°6, août 1999, p. 5

En Physique - Chimie

Ministère de l'Éducation nationale (2007). Programme de l'enseignement de la Physique-Chimie en classe 5e et 4e, CNDP Paris.

http://www2.cndp.fr/produits/detailsimp.asp?ref=755A2831

Ministère de l'Éducation nationale (2007). Programme de l'enseignement de la Physique-Chimie en classe 3e, CNDP Paris.

http://www2.cndp.fr/produits/detailsimp.asp?ref=755A2832

Ministère de l'Éducation nationale (2002). Programme de Physique-Chimie des classes de Seconde série générale et technologique, CNDP Paris.

http://www2.cndp.fr/produits/detailsimp.asp?Ref=755C0640

Ministère de l'Éducation nationale (2000). Document d'accompagnement de programme - Physique - classe de Seconde série générale et technologique, CNDP Paris.

http://www2.cndp.fr/produits/detailsimp.asp?ref=755A0036

Ministère de l'Éducation nationale (2003). Programme de Physique-Chimie des classes de Terminale des séries scientifiques, CNDP Paris.

http://www2.cndp.fr/produits/detailsimp.asp?Ref=755C1024

Ministère de l'Éducation nationale (2002). Document d'accompagnement de programme - Physique - classe de Terminale des séries scientifiques, CNDP Paris.

http://www2.cndp.fr/produits/detailsimp.asp?Ref=755A0199

Physique – Chimie 5e, Nouveau programme, Editions Bréal, 2006

Physique-Chimie 3e, Collection Parisi, Editions Belin, 2008

Physique-Chimie 2de, Collection Hélios, Editions Bordas, 2000

Physique-Chimie 1re S, Collection Hélios, Editions Bordas, 2001

Physique Terminale S, Collection Durandeau, Editions Hachette, 2002

III.2. Programmes et manuels scolaires vietnamiens

En mathématiques

Nouveau programme du Collège (à partir de 2002)

L'ensemble de manuel de classe 7, (manuel, livre d'exercices corrigés, livre des enseignants), 2003, Maison d'édition Education et Formation.

Ton T., Vu Huu B., Nguyen Vu T., Bui Van T. (2005) – Các dạng toán và phương pháp giải bài tập Toán 7 (Les formes d'exercices et les méthodes de résolution des mathématiques de classe 7), Maison d'édition Education et Formation.

Nouveau programme du Lycée (à partir de 2006).

L'ensemble élémentaire de classe 10, (manuel, livre d'exercices corrigés, livre des enseignants), 2006, Maison d'édition Education et Formation.

L'ensemble avancé de classe 10 (manuel, livre d'exercices corrigés, livre des enseignants), 2006, Maison d'édition Education et Formation

L'ensemble élémentaire de classe 11 (manuel, livre d'exercices corrigés, livre des enseignants), 2007, Maison d'édition Education et Formation.

L'ensemble avancé de classe 11 (manuel, livre d'exercices corrigés, livre des enseignants), 2007, Maison d'édition Education et Formation.

L'ensemble élémentaire de classe 12 (manuel, livre d'exercices corrigés, livre des enseignants), 2007, Maison d'édition Education et Formation.

L'ensemble avancé de classe 12 (manuel, livre d'exercices corrigés, livre des enseignants), 2007, Maison d'édition Education et Formation.

En physique

L'ensemble élémentaire de classe 10, (manuel, livre d'exercices corrigés, livre des enseignants), 2006, Maison d'édition Education et Formation.

L'ensemble avancé de classe 10 (manuel, livre d'exercices corrigés, livre des enseignants), 2006, Maison d'édition Education et Formation

L'ensemble élémentaire de classe 12 (manuel, livre d'exercices corrigés, livre des enseignants), 2007, Maison d'édition Education et Formation.

L'ensemble avancé de classe 12 (manuel, livre d'exercices corrigés, livre des enseignants), 2007, Maison d'édition Education et Formation.

IV. Autres ouvrages

BARREAU H. (1996), Le temps, Collection *Que sais-je ?*, Presses universitaires de France.

BELHOSTE B. (1995), Les sciences dans l'enseignement secondaire français, Textes officiels, Tomme 1 : 1789 – 1914, Edition Economica, Paris.

BREUER H. (1987), Dtv-Atlas zur Physik, Version française de M. Meslé-Gribenski, P. Morin, M. Sénéchal-Couvercelle, Edition de Librairie Générale Française.

PRIEUR M., ALDON G. (2010), Un enseignement scientifique co-disciplinaire pour traiter la question de la modélisation du cycle du carbone au lycée, *MathémaTICE*, n^{o} 18, sur http://revue.sesamath.net.

GRANIER J. (1968), La mesure du temps, Collection *Que sais-je ?*, Presses universitaires de France.

Nature et Social de classe 3, 2007, Maison d'édition Education et Formation.

Sciences de classe 4, 2007, Maison d'édition Education et Formation.

Dictionnaire des Mathématiques : algèbre, analyse, géométrie, Encyclopedia universalis et Albin Michel, Paris, 1997.

http://www.machinerylubrication.com/Read/1294/noria-history, consulté le 17 avril 2009

http://maree.frbateaux.net, consulté le 7 mai 2010.

http://fr.wikipedia.org/wiki/Cours_de_physique_de_Feynman, consulté le 28 avril 2011.

Résumé de la thèse en vietnamien

Tóm tắt luận án bằng tiếng Việt

Giữa toán học và các môn khoa học khác, đặc biệt là vật lý tồn tại mối quan hệ hiện sinh theo nghĩa là môn học này được nuôi dưỡng bởi môn học khác. Điều này được báo cáo của ủy ban Kahane[33] (2000) nhấn mạnh như sau :

> Mối liên hệ giữa toán học và ứng dụng thể hiện qua lại nhiều lần. Toán học được hình thành từ các vấn đề đến từ các môn khoa học khác và mang lại cho chúng những phạm vi lý thuyết thích đáng. Có nhiều ví dụ về mối quan hệ hai chiều này :
> + nhiều lĩnh vực của toán học nảy sinh từ vật lý : các phương trình đạo hàm riêng, biến đổi Fourier, hàm suy rộng,…
> + cũng có (tuy ít hơn nhưng cơ bản từ quan điểm khoa học luận) các ví dụ mà toán học thuần túy được phát triển một cách độc lập với các ứng dụng và nó chỉ có các ứng dụng này một thời gian dài sau đó. (Kahane (2000), trang 37)

Báo cáo của ủy ban Kahane mô tả công việc mô hình hóa hiện diện trong mối quan hệ giữa toán học và các môn học khác : mô hình hóa là một trong những dạng thức chính yếu của sự tương tác giữa môn toán và các môn học khác.

> Trước hết, toán học cho phép trình bày các vấn đề bằng thuật ngữ toán : thiết lập một mô hình từ các giả thuyết (chẳng hạn các định luật vật lý đã được phát biểu một cách rõ ràng). Sau đó, mỗi khi mô hình này được chấp nhận, cần phải giải quyết nó bằng các công cụ toán học (chuỗi, hàm số, phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng, xác suất, thống kê,…). Công việc này cho phép rút ra các hệ quả (định tính và định lượng) về mô hình và đối chiếu chúng với thực tế […].
> Trong công việc mô hình hóa, toán học có thể hỗ trợ để rút ra các lập luận tương tự từ các dữ kiện phong phú và phức tạp ban đầu sinh ra từ những lĩnh vực khác nhau mà dẫn đến cùng mô hình đó. (Tài liệu đã dẫn, trang 37)

Báo cáo này khuyến khích việc áp dụng quá trình mô hình hóa trong dạy học và nhấn mạnh rằng trong đào tạo giáo viên, cần làm sao cho vấn đề mô hình hóa thuộc vào những mối quan tâm của họ.

> Chúng tôi muốn nói với một mức độ trang trọng nào đó rằng sự mở rộng vào các môn học khác, đặc biệt thông qua mô hình hóa, thuộc vào sứ mệnh của giáo viên toán. (Tài liệu đã dẫn, trang 38)

Thật vậy, mô hình hóa giữ vị trí ngày càng quan trọng trong chương trình môn toán của nhiều nước. Mô hình hóa cho phép chỉ ra lợi ích của toán học, phát triển ở học sinh khả năng phê phán đối với việc giải quyết các vấn đề trong cuộc sống thực tiễn, chuẩn bị cho họ về những hoạt động nghề nghiệp đa dạng và cuối cùng là nối liền toán học với các môn học khác (Blum et Niss 1991, Kaiser 1991).

Một minh chứng cho việc quan tâm đến mô hình hóa là sự lựa chọn của nghiên cứu quốc tế PISA nhằm đánh giá học sinh về kiến thức toán học của họ, về việc đối chiếu chúng với các vấn đề trong đó toán học là công cụ để mô hình hóa.

> […] Nghiên cứu PISA đưa ra cho học sinh những vấn đề được đặt trong các tình huống lấy từ thế giới thực tế. Những tình huống này được xây dựng sao cho phương diện toán học thực sự hữu ích để giải quyết các vấn đề. Mục tiêu của điều tra PISA là xác định trong chừng mực nào học sinh có khả năng khai thác các tri thức và kĩ năng toán học của họ để giải quyết các vấn đề được đặt ra. (OCDE 2003, trang 40)

---

[33] Những đề nghị của ủy ban Kahane về việc đào tạo giáo viên ở Pháp, được phổ biến năm 2000.

Nghiên cứu này cũng như nhiều nghiên cứu khác đã làm nổi bật lợi ích to lớn của mô hình hóa toán học trong tất cả các hệ thống giáo dục.

Mô hình hóa toán học được đề cập như thế nào trong hai hệ thống dạy học có truyền thống rất khác nhau, Việt Nam và Pháp ?

I. Những mối quan hệ khác nhau đối với mô hình hóa

I.1. Ở Việt Nam

Sự liên môn, gắn liền với vai trò công cụ của toán học được đề cập tường minh trong chương trình môn toán ở trung học phổ thông (THPT) :

> Chương trình được xây dựng và phát triển theo các quan điểm sau :
> […]
> + Lựa chọn các kiến thức toán học cơ bản, cập nhật, thiết thực, có hệ thống, theo hướng tinh giản, phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh, thể hiện tính liên môn và tích hợp các nội dung giáo dục, thể hiện vai trò công cụ của môn toán.
> + Tăng cường thực hành và vận dụng, thực hiện dạy học toán gắn liền với thực tiễn.
> […] (Trích chương trình THPT môn Toán, 2006)
>
> Mục tiêu đầu tiên của chương trình cần đạt được là ý nghĩa, ứng dụng của các kiến thức toán học vào đời sống, vào việc phục vụ các môn học khác.
> (Trích chương trình Đại số và Giải tích 11, 2006)

Chẳng hạn, một trong những kết quả của chỉ đạo này là đưa vào chương trình lớp 11 hai chương « Tổ hợp và xác suất » và « Đạo hàm » nhằm « kịp thời cung cấp công cụ toán học cần thiết cho các môn học khác (Sinh học, Vật lý,…) » (các kiến thức này chỉ được đề cập ở lớp 12 trong các chương trình trước đây).

Tuy nhiên, trong sách giáo khoa và trong thực tế dạy học trên lớp, mối liên hệ giữa các môn học không phải bao giờ cũng được tính đến. Để minh chứng điều này, chúng tôi đã phỏng vấn một giảng viên vật lý - một trong các tác giả của sách giáo khoa Vật lý lớp 11, về việc sử dụng các kiến thức toán học trong giải quyết các vấn đề của vật lý. Sau đây là một đoạn trích của buổi phỏng vấn :

> + đối với các kiến thức đã được dạy trước trong môn toán, giáo viên vật lý sẽ nhắc lại và tóm tắt để học sinh sử dụng.
> + đối với các kiến thức chưa được dạy trước trong môn toán, có nhiều vấn đề giáo viên vật lý tự dạy. Ví dụ về hàm số tuần hoàn, đến bài tập vật lí nào có phương trình tuần hoàn thì giáo viên sẽ hướng dẫn học sinh giải. Khi nghiên cứu chuyển động của con lắc cần đến hàm số tuần hoàn thì giáo viên sẽ giảng về toán học trước, sau đó áp dụng vào hiện tượng vật lý.
> (Trích phỏng vấn TS. Nguyễn Trần Trác)

Đoạn trích trên cho thấy việc giảng dạy vật lý và toán ở Việt Nam dường như độc lập với nhau. Giáo viên vật lý có cả trách nhiệm giảng dạy các kiến thức toán cần thiết cho việc giải quyết các vấn đề vật lý. Các kiến thức toán được đưa vào vật lý như những công cụ có sẵn để giải quyết các vấn đề vật lý.

Hơn nữa, cũng theo tác giả trên, việc sử dụng các vấn đề vật lý để đưa vào các kiến thức toán không bao giờ được dự kiến tới. Giáo viên vật lý « sẽ trình bày trực tiếp các kiến thức toán để áp dụng vào vật lý. Ví dụ khi học về tổng hợp của hai dao động điều hòa thì giáo viên vật lý giảng trực tiếp cho học sinh (cộng hai hàm số tuần hoàn bằng phương pháp đại số hoặc phương pháp Fresnel) để họ áp dụng vào bài vật lý chứ không nhất thiết chờ toán ».

Mối liên hệ giữa toán và vật lý chỉ theo một chiều duy nhất : toán học chỉ tác động như những tri thức cần áp dụng và chỉ cần đưa vào trong những trường hợp được xác định bởi các nhà vật lý. Từ quan điểm này, sự chênh lệch giữa chương trình toán và vật lý không gây ra những hậu quả lớn. Tuy vậy, chính sự chênh lệch này thường là nguyên nhân gây ra sự không thông hiểu đối với học sinh.

Vấn đề dạy học mô hình hóa vì vậy không hề được đặt ra trong khi soạn thảo chương trình và sách giáo khoa ở Việt Nam. Chúng tôi chỉ tìm thấy dấu vết của sự mô hình hóa trong việc ứng dụng các kiến thức toán học vào một số vấn đề nảy sinh từ thực tế. Trong sách giáo khoa toán THPT, các bài tập loại này rất hiếm và thường được đặt trong phần bài đọc thêm hoặc ở phần đầu một số chương với vai trò dẫn dắt đến kiến thức mới (xem phần trao đổi với tác giả sách giáo khoa Toán trong phụ lục 1). Theo quan điểm của Ủy ban Kahane, những bài tập như vậy gây thiệt hại cho hình ảnh của môn toán và các môn học khác :

> Trong thực tế, kiểu bài tập này chỉ là một cái cớ để làm việc toán học trong một lĩnh vực mà người ta không lo ngại gì về tính hợp thức của nó. Chúng tôi cho rằng những bài tập như vậy là thảm họa cho hình ảnh môn học của chúng ta. Thật vậy, nó làm xuất hiện môn học như một lĩnh vực mà người ta có các dữ kiện nhưng không kiểm soát được nguồn gốc của nó, người ta thực hiện các tính toán mà không hiểu chúng có ý nghĩa gì và người ta không lưu tâm để biết các kết quả đó có nghĩa nào đó hay không. (Kahane (2000), trang 38)

I.2. Ở Pháp

Tương tự như nhiều nước khác, thể chế Pháp mong muốn đưa mô hình hóa vào dạy học toán và các môn học khác. Chẳng hạn, trong luật về định hướng và chương trình cho tương lai của trường học (23/05/2005), liên quan đến phạm vi văn hóa khoa học và công nghệ, việc thực hành một « phương pháp tiếp cận khoa học » được yêu cầu như một năng lực của học sinh. Phương pháp đó được mô tả như sau :

> - biết quan sát, đặt câu hỏi, trình bày một giả thuyết và hợp thức hóa nó, tranh luận, mô hình hóa theo cách cơ bản ;
> - hiểu sự liên hệ giữa các hiện tượng tự nhiên và ngôn ngữ toán học được áp dụng ở đó và hỗ trợ mô tả các hiện tượng này.

Thể chế dạy học trung học ở Pháp chỉ đạo việc áp dụng dạy học mô hình hóa toán học với các lý do sau :

> Toán học là một môn học có yêu cầu cao. […] Học sinh có thể thực hành ở đó phương pháp phê phán đòi hỏi mỗi lập luận phải có sức thuyết phục và vì vậy có thể đánh giá sự xác thực mà các lập luận ấy mang lại. Họ cũng có thể thực nghiệm khả năng *mô hình hóa toán học* bằng cách hiểu rằng mô hình, sự thăm dò, phương trình không phải là thực tế và phải không ngừng được đối chiếu với thực tế.
> (Tài liệu kèm theo chương trình lớp Terminale[34] S, ES, trang 5)

Cũng trong tài liệu kèm theo chương trình này, một mục « Toán học và mô hình hóa » được đưa vào. Chúng tôi tìm thấy ở đây những chỉ dẫn về việc giảng dạy mô hình hóa ở THPT :

[34] Tương đương lớp 12 của Việt Nam

> Ở cấp độ THPT, chúng ta hướng dẫn bước đầu cho học sinh việc *mô hình hóa* nhờ vào một số tình huống thực tế mà chúng ta cố ý làm đơn giản hóa đến mức tối đa và vì vậy đối với chúng, mô hình thô đã được thiết lập trở nên sáng sủa hoặc cho phép đưa ra một dự đoán : khó khăn lúc đó là việc giữ lại nghĩa và sự nhất quán cho vấn đề được đơn giản hóa.
> (Tài liệu đã dẫn, trang 25)

Nếu ở Pháp người ta đề cập nhiều đến việc giảng dạy mô hình hóa trong chương trình trung học và đặc biệt trong các chương trình gần đây thì dường như vấn đề này không được áp dụng thực sự trong hệ thống dạy học. Nhiều lý do của thực trạng này có thể được rút ra từ báo cáo của ủy ban Kahane (2000).

> 1) Các sách giáo khoa không tính đến những vấn đề này.
> Các bài tập trong sách giáo khoa thường phạm lỗi từ hai mặt sau :
> - Người ta không tranh luận về nguồn gốc của các biểu thức được cho (thường là trường hợp các bài toán sinh ra từ lĩnh vực kinh tế).
> - Mô hình dẫn đến một sự phi lý mà đề bài không bận tâm đến nó. Vì vậy, một dân số tuân theo một luật tăng theo số mũ mà người ta không tranh luận điều gì sẽ xảy ra trong thời gian lớn.
> […]
> 2) Thực tế phức tạp hơn điều mà chúng ta nhìn thấy.
> Vấn đề mà các giáo viên gặp phải thường là những mô hình gần với quan điểm toán học, hết sức đơn giản và chúng không tính đến thực tế.
> […]
> 3) Các chương trình kém thích hợp với nhau
> Một ví dụ duy nhất : máy dao động điều hòa là nền tảng của vật lý lớp Terminale, tương ứng với phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 có hệ số hằng số nhưng lớp các phương trình đó không được đề cập nữa trong chương trình toán của lớp này.
> Chính loại chênh lệch rất thường xuyên này giữa chương trình toán và vật lý thường là nguyên nhân gây sự không thấu hiểu đối với học sinh.
> […]
> 4) Các phương pháp rất khác nhau.
> Các nhà vật lý sử dụng toán học để mô tả các hiện tượng : « các định luật vật lý được diễn tả nhờ vào các biểu thức toán học ». Tuy nhiên, sự mô tả này có thể đòi hỏi sự thích ứng và sự cố gắng để được trình bày bằng ngôn ngữ toán học của một lớp học cho trước. Tùy theo lớp học, thời kỳ, chương trình, nhiệm vụ thích ứng này có thể khó khăn hơn hay ít khó khăn hơn.
> […] (Báo cáo của ủy ban Kahane (2000), trang 38-39)

Như vậy, thực sự tồn tại một vấn đề dạy học : hoặc người ta tránh dạy học mô hình hóa bằng cách xây dựng mối quan hệ giữa toán học và các môn khoa học khác như mối quan hệ ứng dụng (Việt Nam), hoặc người ta khuyến khích sự quan tâm đến mô hình hóa nhưng không cung cấp cho giáo viên những phương tiện để dạy học nó (Pháp).

Những điều kiện và ràng buộc khác nhau này trên cuộc sống của các tri thức toán sinh ra từ một quá trình mô hình hóa trong dạy học ở trung học có những hệ quả gì ?

Chúng tôi sẽ nghiên cứu câu hỏi này bằng cách chọn sự tuần hoàn và hàm số tuần hoàn như tri thức toán học sinh ra từ một quá trình mô hình hóa.

II. Lựa chọn sự tuần hoàn và hàm số tuần hoàn

Tuần hoàn là khái niệm trung tâm trong quá trình mô hình hóa các hiện tượng có tính chu trình và các hiện tượng dao động. Trong sự hình thành khoa học của khái niệm này, các hàm số tuần hoàn đặc biệt là các hàm số lượng giác được tạo thành trong vật lý như những công cụ mô hình hóa các đại lượng biến thiên trở lại cùng một trạng thái một cách đều đặn và vô hạn, nhìn chung theo thời gian.

Hàm số có vị trí quan trọng như công cụ để mô hình hóa vì nó cho phép mô hình hóa các hiện tượng biến thiên vừa hiện diện trong cuộc sống hàng ngày vừa là đối tượng nghiên cứu của nhiều môn khoa học (kinh tế, tài chính, sinh học, vật lý,…). Ở đây, chúng ta đang nói về mô hình hóa hàm số.

Theo Krysinska et Schneider (2010), trong thể chế « giáo trình toán », quá trình mô hình hóa hàm số chủ yếu bao gồm « xây dựng và xác định một mô hình hàm bằng một biểu thức được tham số hóa, từ những cái phô bày gắn liền với nó như bảng số, đồ thị trong hệ tọa độ Đề các hay phương trình hàm và thích ứng các mô hình này với đặc thù của hiện tượng được nghiên cứu » (trang 33).

Hiện tượng (hệ thống) được nghiên cứu trong quá trình mô hình hóa toán học có thể nằm trong lĩnh vực toán học hoặc ngoài toán học. Thuật ngữ « mô hình hóa toán học » thường gợi ra cái mà Chevallard (1989) gọi là công việc ngoài toán học.

> […] các công việc **toán học**, theo nghĩa chúng có mối liên hệ với sự nghiên cứu các đối tượng toán học […]. Các công việc khác liên quan đến sự nghiên cứu toán học các đối tượng **ngoài toán học** : hệ thống vật lý, sinh học, xã hội,… Và thường thường người ta dành cái tên **mô hình hóa toán học** cho những nghiên cứu toán học của những hệ thống ngoài toán học như vậy. (Chevallard (1989), trang 53)

Cuộc cải cách năm 1902 ở Pháp đưa khái niệm hàm số vào giảng dạy toán với lý do là sự cần thiết của khái niệm này trong dạy học vật lý và do đó nó được đưa vào bằng việc tham chiếu vào các vấn đề ngoài toán học.

> Từ một mặt khác, dạy học vật lý mới phải loại bỏ các phương pháp mô tả và giáo điều giới hạn các thực nghiệm ở việc chứng minh bằng máy móc. Vật lý thực nghiệm tìm cách rút ra những định luật từ các sự kiện và các định luật này phải diễn tả được dưới dạng toán học. Từ các số đo thực nghiệm, biểu diễn đồ thị làm xuất hiện mối quan hệ hàm giữa các biến và hằng số vật lý. Chỉ thị của chương trình nói rõ rằng giáo viên « sẽ sử dụng thường xuyên các biểu diễn đồ thị, không chỉ để chỉ ra cho học sinh rõ hơn hình dáng của hiện tượng mà còn để làm cho họ hiểu thấu ý tưởng rất quan trọng về hàm số và sự liên tục ». Do đó, khái niệm hàm số được đưa vào trong dạy học vật lý một cách tự nhiên. Cũng bởi lý do đó, ủy ban chương trình quyết định đưa nó đồng thời vào trong dạy học toán. Đây chính là sự đổi mới chính yếu của chương trình trung học. Nghiên cứu hàm số trong toán học hiện diện rõ nét nguồn gốc vật lý của nó. Nó được thực hành, gần như là thực nghiệm : không có định nghĩa tổng quát và trừu tượng, nhưng chỉ với một cây bút chì và giấy kẻ milimét để vẽ đồ thị của một số hàm số đơn giản mà chương trình dự kiến nghiên cứu. (Belhoste (1995), trang 58)

Như vậy, lý do tồn tại của khái niệm hàm số được xác định là để đáp ứng vấn đề mô hình hóa các hiện tượng sinh ra từ vật lý. Tuy nhiên, mô hình hóa hàm số đặt ra cho học sinh nhiều khó khăn khoa học luận và sư phạm như Krysinska et Schneider (2010) đã phân tích. Đó là những khó khăn để :

- nhận thức sự biến thiên của một đại lượng ngay khi nó được gắn với một đại lượng hằng số khác
- nhận thức các đại lượng không biến thiên theo thời gian như một hàm số hay cả đến như những đại lượng « biến thiên »
- xác định và chọn lựa một biến độc lập và diễn tả đại lượng cần tối ưu hóa theo biến này và chỉ duy nhất nó (trong lĩnh vực bài toán tối ưu hóa)

- hiểu nghĩa của khái niệm biến

Hàm số tuần hoàn với tư cách hàm số và công cụ mô hình hóa hiện diện các đặc trưng tổng quát của hàm số số học và các đặc trưng khác (chu kì, pha, biên độ,…). Điều này làm cho các hàm số tuần hoàn trở nên đặc thù nên việc dạy và học nó phức tạp hơn.

III. Câu hỏi ban đầu và phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi đặt nghiên cứu của mình trong lĩnh vực mô hình hóa ngoài toán học bằng các hàm số tuần hoàn. Sau đây là những câu hỏi định hướng bước đầu việc nghiên cứu của chúng tôi.

Các hiện tượng tuần hoàn được nghiên cứu và mô hình hóa bởi khoa học vật lý và toán học như thế nào ? Với những mô hình toán học nào ?

Việc nghiên cứu các hiện tượng tuần hoàn thể hiện như thế nào trong dạy học vật lý và toán ở trường phổ thông trung học Pháp và Việt Nam ? Làm thế nào để nối khớp những nghĩa khác nhau mà các môn học khác nhau mang lại cho khái niệm tuần hoàn ?

Liệu có thể tổ chức dạy học các hàm số tuần hoàn bằng mô hình hóa trong đó tính đến các điều kiện và ràng buộc thể chế ?

III.1. Điều tra khoa học luận

Nghiên cứu của chúng tôi bắt đầu bằng một điều tra khoa học luận để xem xét các hiện tượng tuần hoàn được nghiên cứu trong khoa học vật lý và để xác định các mô hình toán học biểu diễn các hiện tượng này. Điều tra này cho phép chúng tôi trình bày các giả thuyết về vai trò và tầm quan trọng của nhiều hình thức hóa toán học được sử dụng trong những mô hình của các hiện tượng tuần hoàn hiện diện trong vật lý.

Kết quả của điều tra khoa học luận sẽ là những yếu tố tham chiếu cho nghiên cứu thể chế tiếp theo.

Trong điều tra này, chúng tôi cũng thực hiện một sự tổng hợp các quá trình mô hình hóa trong vật lý (từ quan điểm khoa học luận và sư phạm) để giải thích lựa chọn của chúng tôi về quá trình mô hình hóa được giữ lại.

III.2. Nghiên cứu thể chế

Để tìm yếu tố trả lời cho các câu hỏi ban đầu, chúng tôi sử dụng Lý thuyết Chuyển hóa sư phạm (Chevallard, 1991) và Lý thuyết Nhân học của didactic (Bosch & Chevallard, 1999).

Sự chuyển hóa sư phạm làm rõ vấn đề hợp pháp của các đối tượng tri thức được dạy và nghiên cứu sự chênh lệch giữa một tri thức được dạy với các tri thức tham chiếu hợp pháp hóa nó (sự chênh lệch sinh ra do những ràng buộc trên hoạt động của hệ thống dạy học).

Lý thuyết Nhân học chỉ ra tầm quan trọng của mối quan hệ thể chế với đối tượng tri thức và đưa vào khái niệm tổ chức praxéologie để làm rõ đặc trưng của mối quan hệ thể chế này :

> Điều còn thiếu là thiết lập một phương pháp phân tích thực tế thể chế cho phép mô tả và nghiên cứu các điều kiện để thực thi. Những phát triển mới đây theo hướng lý thuyết hóa cho

> phép giải quyết khiếm khuyết này. Khái niệm chìa khóa là khái niệm *tổ chức praxéologie* hay ngắn gọn là *praxéologie*. (Bosch & Chevallard, 1999, trang 85)

Chúng tôi sử dụng phạm vi lý thuyết này để thực hiện một phân tích so sánh thể chế dạy học toán và vật lý giữa Pháp và Việt Nam.

Bằng cách xác định các kiểu nhiệm vụ liên quan đến sự tuần hoàn và các tổ chức praxéologie gắn liền với chúng trong dạy học toán, phân tích này cho phép chúng tôi làm rõ mối quan hệ thể chế của hai nước với sự tuần hoàn, hàm số tuần hoàn và sự mô hình hóa toán học các hiện tượng tuần hoàn. Đồng thời, nó cũng cho phép chúng tôi hiểu hơn về lý do của các lựa chọn thể chế, các ràng buộc trên những lựa chọn này và khả năng điều chỉnh chúng.

Các phân tích này mở ra những câu hỏi sư phạm liên quan đến việc thực hành phương pháp mô hình hóa ở học sinh và điều này dẫn chúng tôi đến việc đề nghị cho học sinh Việt Nam một bộ câu hỏi.

III.3. Bộ câu hỏi cho học sinh

Bộ câu hỏi được xây dựng xung quanh các kiểu nhiệm vụ tượng trưng được rút ra từ phân tích thể chế dạy học của hai nước. Việc thao tác trên giá trị của các biến didactic gây ra hay không sự phá vỡ các hợp đồng dạy học đặc thù ở mỗi thể chế đối với việc mô hình hóa sự tuần hoàn.

Bộ câu hỏi được thực nghiệm với nhiều lớp THPT ở Việt Nam. Phân tích câu trả lời của học sinh cho phép chúng tôi đào sâu nghiên cứu thể chế bằng cách xác định mối quan hệ thể chế với khái niệm tuần hoàn và hàm số tuần hoàn ở vị trí học sinh. Đồng thời, nó cũng cho phép làm rõ những khó khăn của học sinh khi tham gia vào quá trình mô hình hóa.

Vì vậy, kết quả nhận được cung cấp cho chúng tôi những yếu tố bổ sung để xây dựng một đồ án sư phạm.

III.4. Đồ án sư phạm

Trong phần tiếp theo của luận án, chúng tôi soạn thảo một đồ án sư phạm để đưa vào các hàm số tuần hoàn như mô hình của các hiện tượng đồng biến thiên tuần hoàn.

Chúng tôi tìm cách đưa vào các điều kiện cho phép học sinh tham gia vào quá trình mô hình hóa các hiện tượng tuần hoàn.

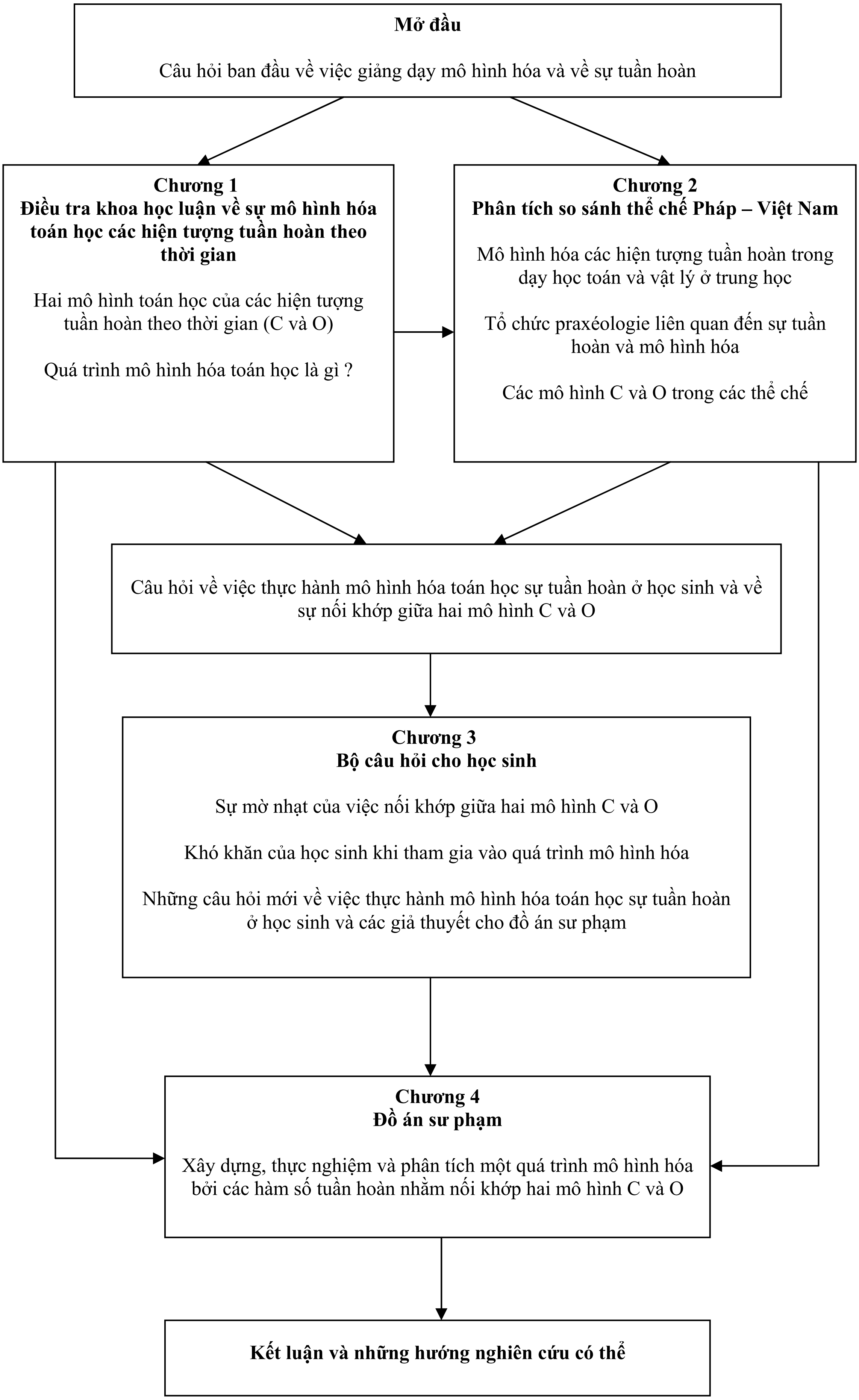
Để thực hiện điều đó, chúng tôi tham chiếu vào phương pháp đồ án sư phạm được mô tả bởi Artigue (1989) :

> Đồ án sư phạm là phương pháp nghiên cứu được đặc trưng bởi một sơ đồ thực nghiệm « thực hiện dạy học » trong lớp. Nói cách khác, sơ đồ này bao gồm việc xây dựng, thực hiện, quan sát và phân tích các công đoạn dạy học.
> […]
> So với những loại nghiên cứu khác cũng dựa trên thực nghiệm trong lớp, phương pháp đồ án sư phạm còn được đặc trưng bởi hệ thống biểu đạt mà nó được đặt trong đó và phương thức hợp thức hóa gắn liền với nó. (Artigue (1989), trang 285-286)

Việc xây dựng đồ án này dựa trên những kết quả của phân tích khoa học luận và phân tích thể chế so sánh giữa các hệ thống dạy học :

> Việc thực hiện một đồ án sư phạm trong một hệ thống và phân tích nó không chỉ cho phép đặt ra các câu hỏi trên hệ thống đó mà còn trên hệ thống khác và vì vậy thúc đẩy sự nảy sinh các câu hỏi chủng loại mà tính hợp thức của chúng được chứng nhận trong hệ thống khác. Hơn nữa, điều này đặt ra vấn đề tổng quát về việc tạo ra đồ án không chỉ trong thể chế mà nó được thực hiện mà còn trong thể chế khác. (Bessot & Comiti, trang 22)

IV. Sơ đồ tổ chức luận án


Mở đầu
Câu hỏi ban đầu về việc giảng dạy mô hình hóa và về sự tuần hoàn
Chương 1
Điều tra khoa học luận về sự mô hình hóa toán học các hiện tượng tuần hoàn theo thời gian
Hai mô hình toán học của các hiện tượng tuần hoàn theo thời gian (C và O)
Quá trình mô hình hóa toán học là gì ?
Chương 2
Phân tích so sánh thể chế Pháp – Việt Nam
Mô hình hóa các hiện tượng tuần hoàn trong dạy học toán và vật lý ở trung học
Tổ chức praxéologie liên quan đến sự tuần hoàn và mô hình hóa
Các mô hình C và O trong các thể chế
Câu hỏi về việc thực hành mô hình hóa toán học sự tuần hoàn ở học sinh và về sự nối khớp giữa hai mô hình C và O
Chương 3
Bộ câu hỏi cho học sinh
Sự mờ nhạt của việc nối khớp giữa hai mô hình C và O
Khó khăn của học sinh khi tham gia vào quá trình mô hình hóa
Những câu hỏi mới về việc thực hành mô hình hóa toán học sự tuần hoàn ở học sinh và các giả thuyết cho đồ án sư phạm
Chương 4
Đồ án sư phạm
Xây dựng, thực nghiệm và phân tích một quá trình mô hình hóa bởi các hàm số tuần hoàn nhằm nối khớp hai mô hình C và O
Kết luận và những hướng nghiên cứu có thể

V. Những kết quả chính của luận án

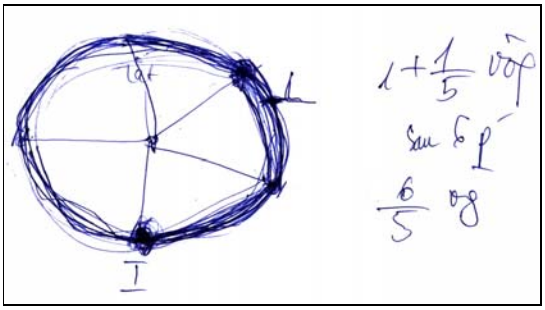
V.1. Tầm quan trọng của các mô hình C và O trong việc mô hình hóa toán học các hiện tượng tuần hoàn

Đối với các nhà vật lý, mô hình C (chuyển động tròn đều) và O (dao động điều hòa) là các mô hình cơ bản để nghiên cứu các hiện tượng tuần hoàn theo thời gian.

- Mô hình C (chuyển động tròn đều) được biểu diễn bởi hai hệ thống biểu đạt : hệ thống biểu đạt đại số ($x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$, $\theta = \omega t$) và hệ thống biểu đạt đồ thị (đường tròn)
- Mô hình O (dao động điều hòa) cũng được biểu diễn bởi hai hệ thống biểu đạt : hệ thống biểu đạt đại số ($x = A \cos (\omega t + \varphi)$ hoặc $x'' + \omega^2 x = 0$) và hệ thống biểu đạt đồ thị (đường hình sin)

Mô hình O chỉ giới hạn trong Cơ học như mô hình cơ bản để nghiên cứu các hiện tượng có tính chu trình có thể quy về chuyển động của một điểm trên một quỹ đạo nào đó. Đặc biệt, nó cho phép làm việc với các khái niệm vận tốc và gia tốc.

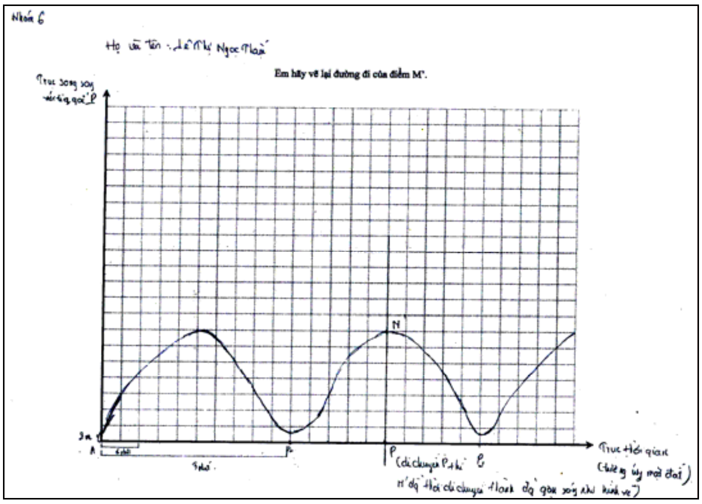
Quỹ đạo của vật chuyển động là trung tâm của mô hình này. Chúng ta có thể gắn mỗi điểm trên quỹ đạo này với một hoặc nhiều thời điểm mà vật chuyển động đi qua điểm đó. Vì vậy, bằng cách di chuyển điểm chuyển động trên quỹ đạo, chúng ta có thể « thấy rõ » sự đồng biến thiên với thời gian của tất cả các đại lượng gắn liền với chuyển động, chẳng hạn khoảng cách từ điểm chuyển động đến một điểm khác, một đường thẳng hoặc một mặt phẳng. Quỹ đạo do đó có thể đóng vai trò đồ thị một chiều như những quan sát trong pha 1 và 4 của buổi thứ 2 đã minh chứng (xem chi tiết ở chương 4 của luận án). Chúng tôi minh họa ở đây đồ thị một chiều (đường tròn) được sử dụng bởi nhóm 6 trong pha 1 của buổi thứ 2 :



Hình 1. Giấy nháp của nhóm 6

Mô hình O thống trị trong Vật lý về các dao động và sóng. Nó là nguồn gốc của rất nhiều phát triển toán học quan trọng (trong đó có Biến đổi Fourier) mà ở đó các hàm số lượng giác giữ vị trí trung tâm.

Một đồ thị hai chiều là trung tâm của mô hình O này. Thời gian và các đại lượng đồng biến thiên với thời gian được tách riêng trên hai trục khác nhau của đồ thị. Bước chuyển từ mô hình C sang mô hình O do đó bao gồm việc làm xuất hiện trục thứ hai mang sự biến thiên của các đại lượng được mô hình hóa. Sau đây là ví dụ về đồ thị hai chiều (thời gian và chiều cao của cabin M) được xây dựng trong buổi thứ 2 của đồ án :



Hình 2. Đồ thị được vẽ bởi nhóm 6

V.2. Sự mờ nhạt của việc nối khớp giữa hai mô hình C và O trong dạy học các hiện tượng tuần hoàn

Nghiên cứu thể chế đã làm rõ sự tồn tại và sự nối khớp giữa hai mô hình C và O trong dạy học toán và vật lý ở trung học Pháp và Việt Nam.

Trong dạy học ở trung học Pháp, mô hình O được đưa vào trước mô hình C. Thật vậy, mô hình O xuất hiện trong dạy học vật lý ngay từ lớp 3^{e} (tương đương lớp 9 ở Việt Nam) với chỉ duy nhất hệ thống biểu đạt đồ thị. Nó xuất hiện lại ở lớp Terminale (tương đương lớp 12) với việc nghiên cứu nhiều hiện tượng dao động như sóng, con lắc, dòng điện xoay chiều,... Mô hình C chỉ được dành cho vị trí rất khiêm tốn ở lớp 2^{de} và 1^{re} (tương đương lớp 10 và lớp 11).

Ngược lại, trong dạy học ở trung học Việt Nam, mô hình C được đưa vào trước mô hình O (ngầm ẩn ở tiểu học (vòng tuần hoàn máu, vòng tuần hoàn nước) và tường minh ở lớp 10 (chuyển động tròn đều)). Mô hình O chỉ được đề cập ở lớp 12 sau khi các hàm số lượng giác được giảng dạy trong môn toán. Ngược lại với thể chế Pháp, trong thể chế Việt Nam, mô hình O hiện diện một cách triệt để trong hệ thống biểu đạt đại số. Đồ thị chỉ giới hạn ở vai trò minh họa cho các biểu thức đại số đã được cho sẵn.

Các tổ chức toán học dành cho bước chuyển từ mô hình này sang mô hình khác không tồn tại trong bất kì thể chế dạy học toán và vật lý nào ở trung học Việt Nam và Pháp. Trong thể chế Việt Nam, mặc dù có các bài tập kết hợp hai mô hình C và O nhưng các câu hỏi chỉ đặt ra trên mô hình O và hệ thống biểu đạt đại số của nó. Việc trở lại mô hình C trong các bài tập này không cần thiết và cũng không phải là mong đợi của thể chế.

Những câu trả lời của học sinh cho bộ câu hỏi (xem chương 3) xác nhận những hệ quả của tình trạng thể chế này, làm rõ các khó khăn mà học sinh Việt Nam gặp phải trong quá trình mô hình hóa các hiện tượng tuần hoàn. Về cơ bản, đó là những khó khăn để :

- chọn lựa một trong hai mô hình C hoặc O tùy theo vấn đề cần giải quyết
- xác định mô hình đã chọn (các dữ kiện và các tham số)
- chuyển từ mô hình này sang mô hình khác.

V.3. Sự chồng chéo giữa khái niệm thời gian và tuần hoàn trong việc mô hình hóa các hiện tượng tuần hoàn theo thời gian

Sự chồng chéo giữa các khái niệm thời gian và tuần hoàn đã được làm rõ trong phần điều tra khoa học luận. Điều này cũng xuất hiện rất mạnh mẽ trong đồ án sư phạm của chúng tôi.

Việc đo thời gian đòi hỏi tham chiếu vào các hiện tượng tuần hoàn cho phép quy chúng về sự phân tích thành các chu kì. Điều tra khoa học luận chỉ ra rằng topo thời gian cung cấp hai biến thể, đường tròn mang thời gian vòng quanh thực hiện các đường vòng hay đường thẳng mang thời gian tuyến tính thẳng tiến.

Thời gian tuyến tính được biểu diễn một cách truyền thống bằng một đường thẳng định hướng bao gồm một dãy các điểm cực nhỏ mà toán học gọi là đường thẳng thực R. Thời gian tác động trong các phương trình vật lý như một biến thực độc lập và về mặt đồ thị được biểu diễn bằng một trục, thường là trục các hoành độ.

Bước chuyển từ một trong hai mô hình C và O sang mô hình còn lại được diễn tả đối với biến thời gian bằng một sự dàn ra hay gập lại. Nếu sự dàn ra được thể chế hóa với đường thẳng thời gian thì sự gập lại chỉ tồn tại ngầm ẩn qua việc quấn đường thẳng thực quanh đường tròn lượng giác. Đồ án sư phạm làm thấy được sự gập lại thời gian trên đường tròn bởi vì trong môi trường hình học động Cabri, sự điều khiển điểm M (di chuyển) bởi điểm P (thời gian) tạo ra khả năng đọc thời gian trên đường tròn. Việc gập lại thời gian trên đường tròn này được thực hiện bằng sự phân tích thành số vòng. Điều này gây ra sự rời rạc của thời gian mà sự hình thức hóa gắn liền với mođun số học về mặt ngữ nghĩa.

Buổi thứ 1 của đồ án cho phép học sinh xây dựng thời gian tuyến tính và do đó đạt tới biến độc lập « thời gian » trên một trục khác với quỹ đạo chuyển động. Thời gian tuyến tính trên một trục như vậy mang lại tiềm năng cho bước chuyển sang mô hình O nhưng đồ án sư phạm trong tình huống 2 đã chỉ ra những khó khăn của việc xuất hiện trục thứ hai trong biểu diễn hai chiều. Điều này đã được nghiên cứu trong luận án của Falcade (2006).

V.4. Tình huống sư phạm mà cái được thua toán học là sự tuần hoàn

Để đưa vào các hàm số tuần hoàn bằng mô hình hóa, chúng tôi đã chọn lựa một vấn đề ngoài toán học liên quan đến sự trùng khớp của hai hiện tượng được thừa nhận là tuần hoàn (cabin của M ở vị trí L và đèn được chiếu sáng). Sự hình thức hóa và sử dụng tính tuần hoàn là có thể trong hình thái thể chế và chúng cần thiết để giải quyết vấn đề này. Thông qua nhiều pha của buổi thứ 2, trong đó hai pha dành cho việc giải quyết vấn đề, đồ án tổ chức bước chuyển và sự nối khớp giữa hai mô hình C và O.

Việc thực nghiệm đồ án đã chỉ ra rằng vấn đề sự trùng khớp giữa hai hiện tượng tuần hoàn được chọn là hợp thức để xem xét tính tuần hoàn của mỗi hiện tượng được nghiên cứu và thao tác với chúng. Hơn nữa, thực nghiệm này cũng cho thấy rằng các tình huống sư phạm ở các pha 1 và 4 của buổi thứ 2 cho phép học sinh hình thức hóa sự tuần hoàn bằng nhiều cách khác nhau.

V.5. Hiện tượng đa hình của việc hình thức hóa sự tuần hoàn

Sự tuần hoàn tồn tại trong dạy học toán ở trung học chủ yếu trong hai lĩnh vực : lĩnh vực các số thực và lĩnh vực các hàm số số học.

Trong lĩnh vực các số thực, chu kỳ được xem xét như một mẫu hình (nhóm các số) lặp lại. Ngược lại, trong lĩnh vực các hàm số số học, cái được gọi là chu kỳ là « độ dài » của một mẫu hình[35]. Sự phân biệt và nối khớp các nghĩa khác nhau của khái niệm chu kỳ trong hai lĩnh vực này không được quan tâm trong dạy học toán ở trung học.

Trong dạy học vật lý, tuần hoàn luôn gắn liền với sự lặp lại của các hiện tượng biến thiên theo thời gian (hoặc theo thời gian và không gian đối với khái niệm sóng). Đối với các hiện tượng tuần hoàn theo thời gian, chu kỳ là khoảng thời gian của một mẫu hình cơ bản (các dao động, mô hình O) hoặc thời gian để vật đi hết một vòng (các chuyển động có tính chu trình, mô hình C).

Qua phân tích thể chế và phân tích đồ án sư phạm, chúng tôi đã chỉ ra sự tồn tại của nhiều hình thức hóa sự tuần hoàn trong dạy học.

Lĩnh vực	**Hình thức hóa sự tuần hoàn**
Số học	Nét chấm chấm, nhóm các số đặt trong dấu ngoặc hoặc đặt dưới dấu gạch ngang
Hàm số lượng giác (mô hình O)	Các cung của đồ thị hình sin, các đoạn thẳng cùng độ dài trên một đường thẳng được chia độ
Đường tròn lượng giác (mô hình C)	Các vòng, các dãy số

Bảng 46. Các hình thức hóa sự tuần hoàn

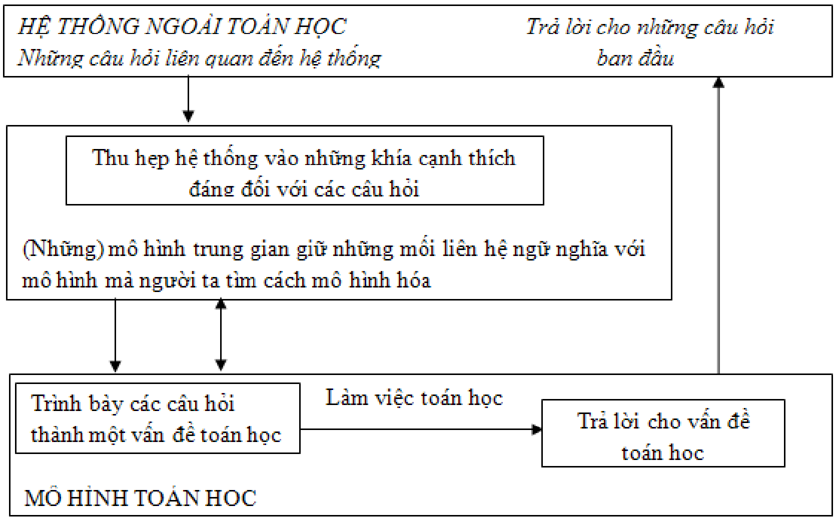
Sự tuần hoàn cũng được trình bày bởi ngôn ngữ tự nhiên với các thuật ngữ « lặp lại » hay « lặp đi lặp lại »,…

Toàn bộ các hình thức hóa này dựa trên những cái phô bày đa dạng chỉ ra sự phong phú các nghĩa mà thể chế mang lại cho khái niệm tuần hoàn và chu kỳ. Tất cả các hình thức hóa này nhắm đến việc bao quát sự vô hạn của cụm từ « không ngừng » khi nhận biết sự tuần hoàn, trong một toán tử hữu hạn thích ứng với vấn đề có sự tuần hoàn trong đó.

V.6. Bản chất sư phạm kép của mô hình hình học trung gian trong quá trình mô hình hóa

Điều tra khoa học luận chỉ rõ tính phức tạp và phong phú của cả quá trình mô hình hóa. Đối với đồ án sư phạm, chúng tôi đã giữ lại ý tưởng mô hình hình học trung gian để dẫn dắt và kích hoạt quá trình mô hình hóa. Sau đây là sơ đồ mô tả quá trình mô hình hóa :

[35] Thiết kế mang tính biểu tượng của sự lặp lại mà ta có thể gặp lại trong hình học (các lát cắt và các tinh thể)



Hình 3. Sơ đồ quá trình mô hình hóa (Annie 2010)

Sơ đồ này chia quá trình mô hình hóa thành 4 pha:

- Pha 1. Chuyển từ hệ thống ngoài toán học thành một mô hình trung gian

Mô hình trung gian giữa tình huống ngoài toán học và mô hình toán học cần xây dựng biểu thị một cấp độ trừu tượng hóa đầu tiên của "thực tiễn". Mô hình này tiến triển từ từ qua việc mô hình hóa : một mô hình trung gian có thể gần về ngữ nghĩa ít hoặc nhiều hơn với tình huống thực tế được xem xét hoặc với mô hình toán học cần xây dựng.

- Pha 2. Chuyển từ mô hình trung gian thành mô hình toán học
- Pha 3. Hoạt động toán học trong mô hình toán học
- Pha 4. Trở lại tình huống được nghiên cứu để chuyển câu trả lời của vấn đề toán học thành câu trả lời của những câu hỏi ban đầu và đối chiếu chúng với thực tiễn được mô hình hóa.

Việc thiết lập một mô hình hình học trung gian được hỗ trợ bởi môi trường hình học động cho phép khai thác mô hình bằng việc cụ thể hóa các biến (ở đây mô hình C được khai thác như mô hình trung gian hướng tới mô hình O) và cho phép làm tiến triển mô hình từ từ theo công việc mô hình hóa. Sự lựa chọn hình học động được ấn định với phần mềm Cabri II Plus. Chúng tôi nghiên cứu các điều kiện khuyến khích sự mô hình hóa hình học một tình huống thực tế và để lại cho học sinh trách nhiệm chọn lựa các biến hợp thức trong sự tiến triển của việc mô hình hóa. Những lựa chọn sư phạm khác nhau về cấu trúc và giá trị các biến didactic trong các tình huống của đồ án khai thác tiềm năng của Cabri trong việc khám phá và trình bày các hiện tượng đồng biến thiên để tham gia và làm tiến triển sự mô hình hóa, do đó dẫn dắt vào một biểu diễn động của hàm số.

Mặc dù có những khó khăn có thể dự kiến về mặt công cụ vì việc dùng các phần mềm hình học động không được chính thức hóa ở Việt Nam, thực nghiệm của đồ án sư phạm ở buổi thứ 1 chỉ ra rằng học sinh có thể nhận lấy một phần trách nhiệm trong phương pháp tiến hành mô hình hóa các hiện tượng tuần hoàn trong một môi trường hình học động.

Tuy vậy, thực nghiệm cũng chỉ ra rằng mô hình C được xây dựng trong buổi thứ 1 tạo thành chướng ngại cho bước chuyển vào mô hình O nhắm đến trong buổi thứ 2. Chướng ngại sư phạm này được củng cố bởi sự lựa chọn giá trị của các biến didactic V1 và V3 vì không đủ loại bỏ các chiến lược gắn liền với mô hình C.

V.7. Khó khăn để dẫn dắt vào sự hình thành công cụ ban đầu

Với đồ án sư phạm, chúng tôi xây dựng một tình huống dẫn dắt vào Cabri để khởi đầu sự hình thành công cụ tối thiểu của một số công cụ trong Cabri cần thiết cho việc xây dựng mô hình hình học. Nhiều công cụ (điểm, đường thẳng, đoạn thẳng, tia, đường thẳng vuông góc, đường thẳng song song, đường tròn, compa, máy tính, khoảng cách hoặc độ dài, chuyển số đo) được đề cập đến. Để chuyển giao cho học sinh một phần quá trình mô hình hóa, tình huống dẫn dắt vào Cabri để mở sự cạnh tranh giữa các công cụ « compa » và « chuyển số đo ».

Thực nghiệm đồ án (buổi thứ 1) đã chỉ ra rằng công cụ « chuyển số đo » hiện diện trong Cabri không phải là một kiến thức công cụ đầy đủ đối với học sinh để trang bị chiến lược chuyển số đo trên đường thẳng và hơn nữa là trên đường tròn. Sự chuyển số đo trên đường tròn không thể hoạt động nếu thiếu vắng một điểm cố định làm gốc và một hướng để chuyển số đo.

V.8. Những ràng buộc thể chế trên việc dạy học mô hình hóa hàm số

Vấn đề dạy học mô hình hóa không hề được đề cập trong chương trình và sách giáo khoa ở Việt Nam. Sách giáo khoa chỉ đưa vào các bài tập áp dụng kiến thức toán để giải quyết một số vấn đề thực tế. Trong các bài tập, những mô hình toán học (như C và/hoặc O) được cung cấp trong đề bài và thực tế đã được mô hình hóa chỉ là cái cớ để làm việc toán học trong mô hình đã được xác định rõ. Đồ thị có vị trí mờ nhạt trong dạy học vật lý và toán học ở Việt Nam. Công việc toán học luôn được đặt trong hệ thống biểu đạt đại số và bước chuyển từ đồ thị sang biểu thức đại số hoàn toàn vắng mặt. Hơn nữa, theo hướng dẫn trong sách giáo viên, việc giải các bài tập này không yêu cầu với tất cả học sinh.

Ở Pháp, việc dạy học mô hình hóa thuộc vào các mục tiêu chính được dẫn ra trong các tài liệu chính thức như chương trình và tài liệu kèm theo nó. Tuy nhiên, với các hiện tượng tuần hoàn, không có hoạt động mô hình hóa thực sự. Trong các bài tập, các mô hình được áp đặt và chỉ có các câu hỏi về mặt toán học của mô hình. Thể chế Pháp gán cho đồ thị một vị trí quan trọng.

Trong cả hai thể chế, việc dạy học mô hình hóa, đặc biệt là mô hình hóa các hiện tượng tuần hoàn thu hẹp thành dạy học sử dụng các mô hình. Đặc biệt, nếu hàm số thuộc vào mô hình thì nó sẽ được trình bày trong đề bài ngay khi giới thiệu thực tế cần mô hình hóa. Một hàm số như vậy không bao giờ là kết quả của quá trình mô hình hóa trừ trường hợp dạy học vật lý ở lớp Terminale Pháp (dòng điện RLC và phương trình vi phân tuyến tính cấp 2).

Đồ án đã tạo ra ba sự phá vỡ hợp đồng thể chế trên các hàm số, đó là :

- Biểu diễn động của hàm số trong một môi trường tin học (buổi thứ 1)
- Hàm số là kết quả của quá trình mô hình hóa (pha 4 của buổi thứ 2)
- Bước chuyển từ đồ thị sang biểu thức đại số (pha 5 và 6 của buổi 2)

Thực nghiệm đồ án chứng tỏ hiệu lực của các ràng buộc thể chế trên hoạt động của mỗi sự phá vỡ này.

Một ràng buộc thể chế khác, có thể là đặc thù ở thể chế Việt Nam, xuất hiện rất rõ trong buổi thứ 2 của đồ án. Đó là mối quan hệ với sự tỷ lệ không thích đáng để thành công trong việc đổi tỷ lệ từ Cabri sang giá trị thực tế và ngược lại.

VI. Một số hướng nghiên cứu có thể

VI.1. Xem xét lại đồ án sư phạm và tiếp tục phát triển

• Sự hình thành công cụ ban đầu của công cụ chuyển số đo góp phần vào các khó khăn khi tham gia vào quá trình mô hình hóa và tỏ rõ mối quan hệ thể chế không đầy đủ đối với việc đo. Sự cần thiết một điểm gốc cố định và một hướng của đường tròn có thể được đặt vấn đề trong khi xây dựng lại đồ án.

Thật vậy, trong thực nghiệm, việc chuyển số đo trên đường tròn phải được giáo viên đưa vào. Câu hỏi về việc xây dựng một tình huống dẫn đến sự cần thiết chuyển số đo trên đường tròn vẫn còn để mở. Làm thế nào để xây dựng một tình huống mà học sinh nhận lấy trách nhiệm chuyển số đo trên đường tròn trong quá trình mô hình hóa ? Làm thế nào để đưa vào sự hình thành công cụ ban đầu của công cụ « chuyển số đo » liên quan đến sự cần thiết của một điểm gốc cố định ?

• Các giá trị lựa chọn cho các biến V1 và V3 trong bài toán về sự trùng khớp không gợi ra đủ sự bất ổn của chiến lược đồ thị một chiều để tạo điều kiện cho chiến lược hai chiều nhắm đến. Chúng tôi đặt ra câu hỏi về việc cải thiện tình huống cho phép loại bỏ sự tri giác và tạo điều kiện cho chiến lược đồ thị hai chiều. Đâu là những điều kiện cần thiết để làm xuất hiện trục thứ hai của biểu diễn hai chiều ?

• Trong bước chuyển từ mô hình C sang mô hình O, chúng tôi lựa chọn nối khớp hai mô hình này bằng hệ thống biểu đạt đồ thị và sau đó là xây dựng bước chuyển từ hệ thống biểu đạt đồ thị sang hệ thống biểu đạt đại số. Một hướng nghiên cứu khác có thể cho đồ án là chuyển từ mô hình C sang mô hình O nhờ vào hệ thống biểu đạt đại số trước khi xây dựng bước chuyển vào hệ thống biểu đạt đồ thị.

• Đồ án được xây dựng cho học sinh đã học các hàm số lượng giác với những hệ thống biểu đạt đại số và đồ thị của chúng. Do đó, đồ án nhắm đến việc tổ chức một sự gặp gỡ mới với các hàm số này bằng mô hình hóa. Liệu có thể xây dựng sự gặp gỡ lần đầu tiên với các hàm số lượng giác trong một quá trình mô hình hóa các hiện tượng đồng biến thiên tuần hoàn ?

• Đồ án làm sáng tỏ tầm quan trọng của việc đổi tỷ lệ trong quá trình mô hình hóa toán học và như chúng tôi đã nói, nó cũng chỉ ra những khó khăn mà học sinh Việt Nam gặp phải trong việc dùng tỷ lệ để thực hiện đổi tỷ lệ mà họ mong muốn. Khó khăn này không gặp phải bởi các học sinh Pháp trong thực nghiệm 2 được tổ chức ở Pháp (tháng 7 năm 2010). Đâu là mối quan hệ thể chế Việt Nam với đối tượng tỷ lệ trong mối liên hệ với sự mô hình hóa toán học ? Câu hỏi này có thể là đối tượng của một phân tích so sánh mới về thể chế Pháp - Việt Nam và mở ra một câu hỏi khác : làm thế nào để làm hoạt động các tình huống sư phạm của đồ án trong đó có tính đến những mối quan hệ này với sự tỷ lệ ?

VI.2. Xây dựng sự liên môn giữa toán và vật lý trong thể chế

Mô hình hóa là một trong những dạng thức chính yếu của sự tương tác giữa toán và các môn khoa học khác trong đó có vật lý. Dạy học mô hình hóa có thể tồn tại hay không trong những điều kiện thể chế hiện tại ở đó việc dạy học mỗi môn khoa học thì tách rời với nhau ? Việc dạy học mô hình hóa trong thể chế trung học có đòi hỏi hay không việc định nghĩa sự liên môn có khả năng chỉ rõ vấn đề và tạo ra các tình huống có thể chuyển đến một quá trình mô hình hóa toán học ?

> Một sự dạy học như vậy [dạy học liên môn] nhắm đến tạo điều kiện bổ sung cho mỗi môn học bằng việc mang đến những cái nhìn chéo về các đối tượng được nghiên cứu và các phương pháp được áp dụng mà không tìm cách xóa đi đặc thù của chúng. Để tổ chức công việc cho học sinh trên phương diện sư phạm cũng như trên phương diện khoa học, việc hợp tác giữa các giáo viên là cần thiết. (Prieur et Aldon, 2010)

Từ một quan điểm nào đó, nghiên cứu của chúng tôi đã cố gắng trả lời cho các câu hỏi trên nhưng chỉ nhắm đến các hiện tượng tuần hoàn hiện diện trong dạy học vật lý ở trung học. Những hiện tượng khác, được nghiên cứu bởi vật lý hoặc các môn khoa học khác, có thể làm tiền đề cho một nghiên cứu cùng loại. Tổng quát hơn, những tri thức toán học và vật lý (hoặc các khoa học khác) nào có thể được tạo nên từ một quá trình mô hình hóa ngoài toán học trong các điều kiện thể chế hiện tại ?

VI.3. Đào tạo giáo viên toán dạy học mô hình hóa

Các hoạt động học tập liên môn là cơ hội được ưu tiên để phát triển sự hợp tác khoa học và sư phạm giữa các giáo viên. Làm thế nào để đưa vào chủ đề liên hệ giữa toán học và các khoa học trong đào tạo giáo viên ? Thật vậy, làm phong phú văn hóa toán học hay tổng quát hơn văn hóa khoa học của giáo viên là một trong những tham vọng của việc đào tạo giáo viên. Tham vọng này được trình bày bởi Kahane (2000) như sau :

> […] văn hóa khoa học cần thiết cho công việc chung với giáo viên các môn học khác, chẳng hạn sự cần thiết bởi các TPE[36] (công việc cá nhân có hướng dẫn) hay hành trình khám phá. Đó không phải là vấn đề yêu cầu giáo viên toán thông suốt mọi việc, họ cần phải có khả năng trao đổi và làm việc với giáo viên các môn học khác. Thậm chí đặc biệt trong công việc chung, toán học có thể hỗ trợ trình bày các câu hỏi theo cách dễ hiểu với công việc khoa học như thế nào, sau đó đóng góp vào việc giải quyết chúng. Tất cả những điều này không phải là tất nhiên như thế vì cái nhắm đến vượt ra ngoài trường học là mối quan hệ xã hội với môn toán. (Kahane (2000), trang 71-72)

Việc dạy học liên môn ở trung học không chỉ bao hàm sự tương tác giữa các tri thức của các môn học khác nhau và giữa các tri thức này với đời sống thực tế mà còn giữa các giáo viên các môn học này trong thể chế. Làm thế nào làm cho giáo viên toán hiểu sự khác nhau giữa áp dụng toán học và mô hình hóa toán học ? Làm thế nào tổ chức việc đào tạo trong đó câu hỏi mô hình hóa thuộc vào mối bận tâm của giáo viên trong việc giảng dạy của họ ? Những tổ chức praxéologie (hỗn hợp toán-vật lý) nào mà thể chế ở trung học cần xây dựng để dạy học mô hình hóa toán học ?

VI.4. Sử dụng hình học động trong dạy học toán ở trung học

Nghiên cứu của chúng tôi cho thấy khả năng áp dụng công nghệ thông tin vào dạy học toán, đặc biệt là tiềm năng của các phần mềm hình học động (cụ thể là Cabri) trong việc dạy và học mô hình hóa các hiện tượng biến thiên. Ở đây, công nghệ thông tin không chỉ là công cụ giảng dạy của giáo viên mà chính học sinh dùng công nghệ thông tin để tiếp cận tri thức.

Như chúng tôi đã trình bày ở trên, môi trường hình học động cung cấp cho học sinh những phương tiện để khai thác các mô hình hình học và làm tiến triển các mô hình này từ từ theo việc mô hình hóa. Sự thao tác với hình học động sẽ cho phép học sinh hợp thức hóa hay không những

[36] Travaux personnels encadrés

sản phẩm được tạo ra bởi họ. Sự phản hồi của môi trường không chỉ cho phép loại bỏ các chiến lược không phù hợp mà còn làm tiến triển nó.

Đặc biệt, với các tình huống của đồ án, hình học động cho phép đạt tới một biểu diễn động của hàm số - vắng mặt trong thể chế dạy học toán ở Việt Nam. Ngược lại, hình học động ngày càng được sử dụng nhiều ở Pháp để dạy học không chỉ Hình học mà còn để dạy học Giải tích.

Tuy nhiên, dạy học trong môi trường tin học như vậy đặt ra cho thể chế nhiều câu hỏi như sau :

- Các tình huống didactic nào, cho những tri thức nào ? Phương tiện dạy học nào ? Sự hình thành công cụ ban đầu nào cho những công cụ nào ?

- Việc đào tạo giáo viên như thế nào ? Những trang thiết bị tin học nào ở trường học ?

ANNEXES

Annexe 1 : Traduction en français des entretiens avec des noosphériens vietnamiens

Annexe 2 : Comptes-rendus d'entretiens, en France, avec des formateurs d'enseignants de physique

Annexe 3 : Carte praxéologique des praxis liés à la périodicité dans les deux institutions française et vietnamienne

Annexe 4 : Questionnaire

Annexe 5 : Fiches de l'ingénierie didactique

Annexe 6 : Stratégies possibles dans la situation 3 de l'ingénierie didactique

Annexe 1

Traduction en français des entretiens avec des noosphériens vietnamiens

I.1. M. Tran Van Hao : auteur de manuels mathématiques

Légende : Q_{ij} : question posée par nous même ; R : réponse de M. Tran Van Hao

1) Points de vue sur l'enseignement des problèmes réels

Q_1 : Quels sont les principaux points différents entre le programme actuel et le programme précédent ?

R : A propos du programme, il n'y a pas de grandes différences en ce qui concerne les objets étudiés. Mais le programme réduit la place des problèmes, notamment il ne se centre pas sur les problèmes complexes, non plus que sur les savoir-faire de résolution de problèmes mathématiques. Il met l'accent sur les notions et les différents types de problèmes. Il garde du temps pour l'application et l'étude de contextes réels.

Exemple : auparavant, dans l'enseignement des équations trigonométriques, beaucoup de types d'équation étaient introduits. Maintenant, ils sont réduits et simplifiés. On n'insiste pas sur les savoir-faire de résolution des problèmes.

Q_{11} : A la page 11 du livre des enseignants, on écrit : « Le premier objectif du programme est l'obtention des significations et des applications des connaissances mathématiques dans la vie et dans les autres disciplines ». Selon vous, cela est-il un objectif important ?

R : En réalité, ceci n'est pas beaucoup effectué par manque de temps. Bien que le programme ait été simplifié, trois séances chaque semaine, c'est très peu. Il n'y a pas beaucoup de temps pour les applications. Elles sont placées dans les parties complémentaires mais personne ne les regarde.

Q_{12} : L'observation du manuel actuel montre qu'il y a plus de parties complémentaires et de problèmes réels par rapport aux manuels précédents. Est-ce que ceci a pour but de servir l'objectif abordé ci-dessus ?

R : Oui. Mais en réalité cet objectif n'est pas encore atteint parce que les sujets d'examen ne contiennent pas ce type de problèmes. De plus, le temps étant limité, la plupart des enseignants les abandonnent. L'objectif de l'étude est le succès aux examens, ce n'est pas l'apprentissage de connaissances !

Q_2 : Dans le manuel de classe 9, au début du chapitre sur le système d'équation du premier degré à deux variables, le manuel présente un problème réel « il y a 36 animaux : des chiens et des poulets. Le nombre total de pieds est égal à 100. Combien y a-t-il de chiens et de poulets? ». Selon vous, quels sont les objectifs de ce problème ?

R : L'objectif principal est l'introduction de problèmes issus de la vie. Ce n'est pas l'introduction d'une application. Au lycée, ceci serait trop simple. Donc on trouve très peu de telles introductions.

Q_{21} : Dans la partie « Equations trigonométriques », le manuel avancé de classe 11 introduit quelques problèmes réels comme la noria, le nombre d'heures de lumière dans un jour,… Selon vous, quels sont les objectifs de ces problèmes ?

R : Ils n'ont pour objectif que l'introduction d'applications. Ce sont des problèmes simples, pas difficiles. Le programme élémentaire ne laisse pas le temps de les étudier.

Q_{22} : Je vois que le manuel semble ne pas encourager les enseignants à faire étudier ces problèmes puisque le livre du professeur souligne que c'est à l'enseignant de décider s'il libèrera ou non du temps pour les résoudre. Sont-ils introduits comme une « formalité » ?

R : Ils sont presque introduits pour rire, comme une formalité. L'enseignant ne les aborde pas et le livre du professeur ne demande pas de les résoudre, donc l'objectif n'est pas atteint.

Les sujets des examens des pays étrangers contiennent beaucoup de problèmes réels et insistent sur la construction des équations, il ne s'agit pas de résolution d'équations difficiles. Si nos sujets d'examens changent, l'enseignant se mettra à enseigner la résolution de problèmes réels.

Q_3 : Selon vous, comment développer chez les élèves la capacité d'utiliser des connaissances mathématiques dans la résolution de problèmes réels ?

R : Selon moi, au secondaire, fournir des connaissances et des méthodes de penser est fondamental.

A propos des connaissances, il faut présenter où surgissent les connaissances, quelles sont leur applications et pas seulement donner des définitions.

La méthode de pensée n'est pas seulement la méthode de résolution mathématique mais aussi comment appliquer, à quels types de problèmes a-t-on affaire et comment connecter avec la réalité.

Le programme actuel est fixé avec des normes de connaissance claires. Les auteurs des manuels doivent les appliquer.

Q_{31} : Comment est présenté dans les manuels secondaires le développement de la capacité à utiliser des connaissances mathématiques dans la résolution des problèmes réels chez les élèves ? Sur quels contenus sont-ils centrés ?

R : Les manuels actuels ne le font qu'un peu parce qu'il n'y a pas assez de temps. On ne le trouve que dans les parties complémentaires.

Q_4 : Dans le programme actuel, où est présent le lien entre les mathématiques et les autres disciplines ?

R : Il est présent dans la partie d'introduction. Par exemple, pour les fonctions trigonométriques, on parle de l'oscillation harmonique qui présente le lien entre la physique et la trigonométrie. Il faut avoir plutôt une partie d'applications qui présente des applications en physique, en chimie... mais il n'y a pas assez de temps. L'introduction d'applications enrichit les contenus d'enseignement, donc les sujets des examens peuvent contiennent des applications.

2) Enseignement de la modélisation

Q_5 : En mathématique et en plusieurs disciplines, on rencontre souvent le processus suivant pour résoudre un problème réel :

Problème réel → construire un modèle mathématique → résoudre le problème mathématique → répondre aux questions du problème réel.

En didactique des mathématiques, c'est ce que l'on appelle : le processus de modélisation mathématique.

Lors de l'élaboration du programme et des manuels mathématiques, est-ce que les auteurs abordent la modélisation selon la signification précédente ? Si oui, où et comment apparaît-elle? Quel est leur rôle ? Est-il important ou non ?

R : En général, on ne l'aborde pas par manque de temps. Il n'y a pas beaucoup de problèmes relatifs à la réalité, il n'existe que des problèmes mathématiques purs. Donc le rôle de la modélisation est très faible.

Si l'objectif de traiter des applications devient important, alors on insistera sur les problèmes réels. Ici, les normes de connaissances ne les mentionnent jamais, il n'y a que des connaissances mathématiques donc les auteurs ne peuvent pas les aborder beaucoup. Si non, on va être en dehors du programme.

Q_{51} : A propos de la modélisation, au Viet Nam, on voit souvent le processus suivant :

Enseigner des connaissances mathématiques → appliquer ces connaissances pour résoudre des problèmes réels, c'est-à-dire les appliquer pour construire un modèle de la réalité.

Dans quelques pays, le processus suivant apparaît très souvent :

Problème réel → construire un modèle mathématique → la réponse au problème réel → savoirs à enseigner → appliquer ces connaissances pour résoudre d'autres problèmes réels. Les savoirs à enseigner sont introduits via le processus de résolution des problèmes réels.

Selon vous, les manuels mathématiques vietnamiens insistent sur quels processus ?

R : Dans les deux processus, le problème réel a un but d'introduction. Il faut enseigner aux élèves les méthodes de construction d'un modèle mathématique. Au Viêt Nam, les contenus liés à la modélisation sont très faibles parce qu'ils prennent beaucoup de temps. L'objectif principal est l'introduction et on enseigne tout de suite la notion mais l'introduction est très rapide.

Du point de vue de la pensée, le deuxième processus est bon mais il faut avoir du temps.

Q_{52} : Selon vous, le point crucial de l'enseignement de la modélisation au secondaire est la construction d'un modèle mathématique ou l'utilisation d'un modèle mathématique tout fait ?

R : Ça dépend de notre demande. Si on demande des pensées synthétiques, la construction d'un modèle mathématique est importante. Si on demande des pensées de résolution mathématique, elle n'est pas importante.

Pour l'objectif de renforcer des pensées synthétiques, il faut consacrer du temps. Selon moi, ceci est plus important que la résolution mathématique élémentaire. On ne devrait pas se centrer sur les problèmes difficiles. On devrait introduire des problèmes réels dans les sujets des examens.

3) Modélisation mathématique des phénomènes périodiques

Q_6 : Selon vous, quels sont les objectifs de l'enseignement des fonctions périodiques au secondaire ?

R : Les fonctions périodiques servent à fournir les formules de solutions des équations trigonométriques : c'est un ensemble infini (contient kπ, kπ/2,..) grâce à la périodicité.

Pourtant, selon les auteurs, la notion de périodicité est plus large. Elle apparaît beaucoup dans la réalité, pas seulement en trigonométrie. Donc, dans les parties complémentaires, nous présentons quelques fonctions périodiques non trigonométriques. Ceci a pour but de montrer que les fonctions périodiques ne se limitent pas seulement aux fonctions trigonométriques. On les trouve dans plusieurs phénomènes réels.

Q_{61} : La périodicité apparaît beaucoup en physique, en biologie,… Est-ce que l'enseignement des fonctions périodiques a pour but de servir à l'enseignement de contenus relatifs à d'autres domaines ?

R : Il ne sert qu'à l'enseignement des oscillations harmoniques. En réalité, les phénomènes en physique et en biologie ne sont pas périodiques de manière mathématique. Donc, si on veut les présenter, il faut introduire la périodicité ayant une variation,… La périodicité réelle n'existe que dans les oscillations harmoniques.

Q_{62} : Est-ce que le manuel de la classe 11 encourage les élèves à travailler avec la période et la construction de graphiques périodiques pour les préparer à étudier des oscillations harmoniques en classe 12 ?

R : Les élèves de classe 11 ne se centrent que sur la résolution des équations trigonométriques. La période n'est pas introduite dans les normes de connaissance du programme parce que c'est une notion difficile (La tâche « Trouver la période » demande de démontrer le caractère minimal, ce qui est très difficile).

Q_{63} : Pourquoi le manuel choisit la définition d'une période comme la plus petite ?

R : Le manuel définit comme ça parce que les mathématiques demandent des définitions exactes. Si on veut en parler, il faut déterminer une seule notion de période, celle qui est la plus petite. Au Viêt Nam, toutes les définitions doivent être cohérentes.

Q_{64} : En mathématique, on ne demande pas que les élèves sachent trouver la période mais je vois qu'en physique en classe 12, le problème de trouver la période d'une oscillation ou de construire un graphique est présent. Les élèves ne vont-t-ils pas rencontrer de difficultés ?

R : L'enseignant doit le faire pour les élèves. Il doit introduire des formules et les élèves devront les appliquer.

Q_{65} : Est-ce que l'apparition des fonctions périodiques au secondaire a un but relatif à l'enseignement de la modélisation ?

R : Très peu. La trigonométrie est divisée en deux parties, en classe 10 et 11, ce qui la réduit beaucoup. Donc, les relations réelles et la modélisation sont très peu présentes. On en trouve un peu dans les parties complémentaires.

Avec ce contenu, on peut explorer très bien la réalité parce qu'il existe de nombreux phénomènes périodiques dans la réalité. Pourtant, on ne peut pas le faire à cause du manque de temps. Peut-être on va utiliser les séances non officielles où les élèves travaillent en groupe. Si on veut présenter des bons problèmes réels relatifs à la périodicité, il faut avoir beaucoup de temps parce que c'est une notion difficile.

Q_{66} : Au secondaire, est-ce que la fonction périodique est utilisée comme un outil pour résoudre des problèmes réels ? Si oui, lesquels ?

R : En réalité, elle n'est pas beaucoup utilisée. Elle apparaît seulement en physique en classe 12.

Q_7 : Selon vous, pourquoi au secondaire la notion de périodicité n'est liée qu'à des fonctions trigonométriques ?

R : Le manuel ne présente que la propriété périodique des fonctions trigonométriques. La définition d'une fonction périodique est hors programme. Quelques fonctions périodiques non trigonométriques ne sont introduites que dans les parties complémentaires.

Q_8 : Est-ce que la périodicité est considérée comme propriété d'une fonction comme la parité qui permet de réduire l'intervalle d'étude d'une fonction ?

R : Non. La périodicité n'est considérée que comme une caractéristique des fonctions trigonométriques. On la présente quand on étudie les fonctions trigonométriques tandis que la parité est introduite au début avec des fonctions générales. Si on voulait la prendre en compte comme une propriété, il faudrait présenter la définition d'une fonction périodique et ensuite étudier des fonctions trigonométriques comme fonctions périodiques.

Dans le programme et le sujet des examens, on ne demande jamais de construire le graphique d'une fonction trigonométrique ou périodique, donc l'enseignant abandonne ces questions. La construction du graphique n'a pour but que de prendre les solutions des équations fondamentales. On ne demande pas de construire le graphique d'une fonction trigonométrique. En réalité, c'est un problème difficile parce que la fonction trigonométrique est une fonction transcendante.

Q_9 : Pourquoi le manuel insiste-t-il sur les fonctions sinus et cosinus ? Sont-elles introduites pour étudier des phénomènes périodiques ou d'autres problèmes ? Quel est le rôle de la classe des fonctions $y = A \cos (\omega x+\varphi)$?

R : Sinus et cosinus sont les plus utilisées, comme le graphique sinusoïdal, onde sinusoïdale,….

Tangente et cotangente ont moins d'applications. De plus, elles ne sont pas continues donc du point de vue de la pensée, elles sont plus difficiles. Le manuel les présente schématiquement. Les principales applications en physique utilisent le sinus et le cosinus.

Les fonctions sinus et cosinus sont considérées comme les mêmes. Parce qu'on ne se centre pas sur les applications, on n'insiste pas sur la fonction cosinus. Si on donne de l'importance aux applications, il faut regarder quelle fonction est la plus importante et la plus utilisée pour la souligner.

Q_{11} : Pourquoi auparavant la trigonométrie et la fonction périodique avaient une place importante en mathématique au secondaire alors que maintenant elles sont réduites de beaucoup ?

R : Auparavant, un livre entier de classe 10 était consacré à présenter la trigonométrie (il y avait 3 livres : Géométrie, Algèbre et Trigonométrie). Maintenant, la trigonométrie n'est pas considérée comme ayant le même rôle que l'Algèbre, l'Analyse et la Géométrie. Son rôle est d'introduire un autre type de fonction, une autre équation, c'est pourquoi elle est considérée comme une partie de l'Algèbre. Auparavant, on pouvait présenter plusieurs types de problèmes. Maintenant, le temps d'enseignement est moindre, donc on doit réduire les contenus d'enseignement.

I.2. M. Nguyen Tran Trac : auteur de manuels de physique

Légende : Q_{ij} : question posée par nous même ; R : réponse de M. Nguyen Tran Trac

1) Le point de vue interdisciplinaire dans l'enseignement de la physique

Q_1 : L'enseignement de la physique au secondaire est-il relié à d'autres disciplines ? Si oui, lesquelles ? Comment est présent dans les manuels actuels le point de vue interdisciplinaire dans l'enseignement de la physique ?

R : Bien sûr à l'étape de l'élaboration du programme on aborde le point de vue interdisciplinaire mais en réalité, les différentes disciplines ne sont pas rigoureusement et logiquement associées au Viêt Nam.

Par exemple : Dans la physique du mouvement, quand on étudie les notions de vitesse et d'accélération, il faut s'appuyer sur les calculs de dérivée mais ils ne sont pas encore enseignés en mathématique. C'est pourquoi ces notions ne sont pas présentées de manière rigoureuse et logique. On les explique approximativement pour que les élèves puissent les comprendre (par exemple, introduction de la vitesse moyenne). Les élèves ne savent pas ce qu'est la valeur instantanée.

Auparavant (avant 1975), les disciplines (mathématiques et physique) étaient associées très rigoureusement.

Q_{11} : En physique, quels contenus demandent d'utiliser des connaissances mathématiques ? De quelles connaissances s'agit-il ?

R : La notion la plus importante est la dérivée. Dans les exercices, de temps en temps on utilise la notion d'intégrale mais dans les parties cours elle n'est pas aussi nécessaire que la notion de dérivée.

Q_2 : A propos des problèmes de physique qui demandent d'utiliser des connaissances mathématiques, comment se passe cette utilisation ?

- pour les connaissances précédemment enseignées en mathématiques ?

R : L'enseignant va les rappeler avant de les utiliser.

- pour les connaissances qui ne sont pas encore enseignées en mathématiques ?

R : Il y a plusieurs connaissances que l'enseignant de physique doit enseigner lui-même. Par exemple, avec les fonctions périodiques, quand il rencontre des équations périodiques, il va diriger la résolution des élèves. Quand on étudie le mouvement du pendule, les fonctions périodiques sont nécessaires. L'enseignant va donc enseigner d'abord les savoirs mathématiques nécessaires, et après les appliquer aux phénomènes physiques. En classe 12, on rencontre beaucoup de fonctions périodiques.

Q_3 : L'utilisation des problèmes de physique pour introduire des connaissances mathématiques est-elle abordée ? Si oui, comment est-ce présenté ?

R : Non, on va présenter directement des connaissances mathématiques pour appliquer à la physique. Par exemple, quand on étudie la composition de deux oscillations harmoniques, l'enseignant de physique la présente directement à l'élève (somme de deux fonctions périodiques par la méthode algébrique ou par la méthode de Fresnel) et après l'élève l'applique pour résoudre des exercices.

2) Enseignement de la modélisation

Q_4 : Le livre du professeur du manuel de la classe 12 à la page 6 présente l'objectif suivant du programme: « faire obtenir les élèves des méthodes générales de cognition scientifique et des méthodes spécifiques de la physique, notamment la méthode expérimentale et la méthode des modèles ». Qu'est-ce que la méthode des modèles ? Est-elle soulignée dans les manuels de physique au secondaire ?

R : En réalité, les manuels ne soulignent aucune de ces deux méthodes. Il n'y a pas assez de moyens, donc la méthode des modèles est très peu utilisée.

Par exemple, quand on étudie la production d'électricité dans une usine électrique, l'enseignant présente la théorie et l'explique par des figures, rarement par un modèle. L'enseignant peut trouver sur Internet comment présenter le fonctionnement des usines électriques mais c'est l'effort de quelques personnes. La méthode expérimentale est très peu abordée en réalité.

Q_5 : En physique et en plusieurs disciplines, on voit souvent le processus suivant pour résoudre un problème réel :

Problème réel → construire un modèle mathématique → résoudre le problème mathématique → répondre des questions du problème réel.

En didactique des mathématiques, c'est ce qu'on appelle : processus de modélisation mathématique.

Quand on élabore le programme et les manuels de physique, est-ce que les auteurs abordent la modélisation mathématique des phénomènes physiques ? Si oui, où et comment apparaît-elle ? Quels est son rôle ? Est-il important ou non ?

R : Non, elle n'est jamais abordée dans le processus d'élaboration du programme et des manuels physiques. Son rôle n'est pas mentionné.

Q_6 : Dans la partie « Suggestions des méthodes et des organisations des activités d'enseignement » de la session « Oscillation harmonique » du livre des enseignants correspondant au manuel de la classe 12, page 26 il est écrit : « La partie II (Oscillation harmonique) est le point capital de la session. Le manuel a utilisé un modèle mathématique, c'est la projection d'un point M qui a un mouvement circulaire uniforme sur un diamètre, c'est-à-dire le point P. L'utilisation de ce modèle rend facile à établir l'équation du mouvement du point P et à introduire une nouvelle notion, oscillation harmonique ».

Donc le terme « modèle mathématique » est utilisé explicitement dans le livre des enseignants. Une telle utilisation des modèles mathématiques est-elle présente dans les manuels ? Dans quels contenus ? Avec quel rôle ?

R : Quand on étudie l'oscillation harmonique, la physique introduit la fonction $x = A \cos(\omega t+\varphi)$, c'est-à-dire si un objet se met en mouvement avec la coordonnée x qui dépend du temps selon cette équation, il a une oscillation harmonique. Du point de vue des mathématiques, qu'est-ce que c'est une oscillation harmonique, qu'est-ce que c'est son modèle ?

Son modèle est la projection d'un mouvement circulaire uniforme sur un diamètre. Ceci est totalement mathématique, pas physique mais cela conduit à l'équation $x = A \cos(\omega t+\varphi)$. Si le mouvement circulaire avec une vitesse angulaire ω sur une orbite circulaire de rayon A est projeté sur un diamètre, le mouvement de la projection est une oscillation harmonique. C'est un modèle mathématique de l'oscillation harmonique pour la physique. Lors de son enseignement, l'enseignant va expliquer que c'est le lien entre une oscillation harmonique et un mouvement circulaire uniforme.

Donc le modèle mathématique est un modèle qui permet de savoir ce qu'est une oscillation harmonique. C'est la projection d'un mouvement circulaire uniforme sur un diamètre. L'utilisation des mathématiques pour présenter un problème de physique constitue un modèle mathématique. Par exemple, cette sinusoïde est un simple modèle mathématique de l'oscillation harmonique. $x = A \cos(\omega t+\varphi)$ n'est pas un modèle, c'est seulement une équation de l'oscillation de la physique. Pourquoi ce graphique est-il un modèle mathématique ? Parce que quand on le regarde, on peut comprendre l'équation physique, c'est-à-dire c'est la représentation mathématique d'un phénomène physique.

Q_7 : Les modèles mathématiques sont-ils abordés dans les exercices ? Le graphique est-il présent ?

R : Il y a très peu d'exercices qui sont liés à un modèle mathématique. Dans les examens, il est sûr que cela n'existe pas. Aujourd'hui, les tests objectifs concernent essentiellement des calculs pour trouver des résultats.

3) Modélisation mathématique des phénomènes périodiques

Q_8 : Selon vous, qu'est-ce que c'est un phénomène périodique ?

R : Le mouvement périodique est un mouvement qui se répète dans des temps déterminés.

Il faut expliquer à l'élève comment la répétition est et qu'est-ce qui se répète. C'est la répétition de la vitesse, de la position et de la direction du mouvement.

Q_{81} : Quelles sont les différences entre les phénomènes cycliques et les phénomènes périodiques en physique ? Au secondaire ?

R : Les phénomènes périodiques en biologie n'insistent que sur les cercles, à partir d'un point de départ on retourne à la position initiale.

En physique, la demande est plus rigoureuse avec la répétition de plusieurs grandeurs comme la vitesse, l'accélération, la position,… ou l'instant et l'intensité en électricité.

Q_9 : Quelles sont les classes de phénomènes périodiques étudiées en physique ? Quelles sont leurs caractéristiques ?

R : Parmi les oscillations périodiques, on étudie l'oscillation harmonique et l'oscillation non harmonique.

+ l'oscillation harmonique : le pendule, un objet attaché à un ressort, un courant électrique sinusoïdal, les phénomènes optiques comme les ondes, les interférents et les diffractions.

+ l'oscillation non harmonique : le battement (la composition de deux ou plusieurs oscillations harmoniques de différentes périodes). Dans le programme, on l'aborde schématiquement et elle n'est pas soulignée.

Le mouvement circulaire uniforme est un phénomène périodique mais non harmonique.

Q_{10} : Le manuel élémentaire utilise le mouvement circulaire uniforme pour décrire et définir l'oscillation harmonique. Les notions de période et de fréquence sont introduites en s'appuyant sur ces notions dans le mouvement circulaire uniforme. Au contraire, le manuel avancé définit l'oscillation harmonique directement (en construisant son équation à partir des lois de physique) et ensuite on aborde son lien avec le mouvement circulaire uniforme. Selon vous, quels sont les intérêts et les défauts de ces deux approches ?

R : Ce sont des phénomènes physiques qui sont des oscillations harmoniques du point de vue mathématique. Leur présentation dépend du point de vue des auteurs. Selon moi, le manuel élémentaire accorde trop d'importance aux mathématiques tandis que notre but est la physique.

Selon moi, voici une autre présentation plus intéressante. Au début, on présente la physique et ensuit on introduit le modèle mathématique : observer l'oscillation d'un pendule de l'horloge pour trouver la répétition autour de la position d'équilibre et définir l'oscillation harmonique. Ensuite, présenter l'équation d'oscillation et le modèle mathématique. Du point de vue de la méthodologie d'enseignement, c'est le mieux.

Q_{11} : Quels sont les indices pour savoir si une grandeur est une variable harmonique ?

R : L'oscillation harmonique est une fonction de la forme sinus (ou cosinus). Par exemple, une lumière monochromatique présente une oscillation harmonique. Une lumière non monochromatique est une synthèse de plusieurs oscillations harmoniques.

Q_{12} : Le manuel de la classe 12 présente l'équation ondulatoire à la page 39. « L'équation ondulatoire est une fonction périodique temporelle et spatiale ». Quels sont les objectifs de cette présentation ? Est-elle importante ?

R : L'équation ondulatoire est très importante dans l'optique. Les élèves doivent saisir l'équation et comprendre la périodicité temporelle et spatiale. La composition de deux ondes est relative à l'interférence.

Q_{13} : Quels sont les outils mathématiques pour étudier les phénomènes périodiques ?

- Quel est le rôle de la formule et du graphique ? (Le graphique sinusoïdal semble n'apparaître que dans le cours comme une illustration de la formule donnée). Existe-t-il des exercices relatifs au graphique ?

R : L'outil nécessaire est la dérivée et le savoir-faire d'additionner des oscillations (la méthode algébrique ou la méthode de Fresnel).

Les exercices s'appuient principalement sur des calculs, le graphique est rarement abordé. Il n'est que le modèle mathématique. Une méthode qui utilise le graphique et une autre qui utilise l'équation, ce sont les deux méthodes de présenter un problème.

Q_{131} : L'enseignement des fonctions périodiques en mathématique est-il nécessaire ?

R : Non, l'enseignant de physique peut les enseigner dans les cours de physique. Les connaissances mathématiques devront être enseignées d'abord, ce qui permettra à l'enseignement de la physique de s'appuyer sur elles.

Q_{14} : En mathématiques, on ne s'intéresse ni à la recherche de la période ni à la construction de graphique périodique. En physique, est-ce que le problème de trouver la période et de construire le graphique d'une oscillation périodique est posé à l'élève ? Quels sont alors des difficultés ?

R : En physique, on demande que l'élève puisse trouver la période et la longueur d'onde, en utilisant les formules par exemple, nous trouvons souvent des questions comme « Après combien de période,… ». Quand on étudie l'interférence en optique, pour trouver la position des phases semblables, il faut déterminer la longueur d'onde λ.

Annexe 2

Comptes-rendus d'entretiens, en France, avec des formateurs d'enseignants de physique

Grille de questionnement

1. Pour vous, physicien, c'est quoi, la périodicité ?
2. Pouvez-vous donner des exemples de phénomènes périodiques, en précisant, à chaque fois comment intervient la périodicité ?
3. Dans l'enseignement secondaire, on étudie, dès la classe de 3^{e} un phénomène périodique : le courant alternatif, alors que la notion de périodicité n'est pas introduite avant la classe de Seconde en mathématiques.
   + Pourquoi ? Comment ?
   + Quel est le lien pour vous entre la périodicité en physique et la périodicité en mathématiques ?
4. En Seconde et en Terminale, on étudie de nombreux phénomènes périodiques. Cela signifie-t-il que la périodicité a une grande importance en physique ?
5. Sur le plan épistémologique,
   + quelle est la place de la périodicité dans les sciences physiques ?
   + quels sont les champs de signification de cette périodicité ?
   + quels modèles les physiciens utilisent-ils de la périodicité ?

I.1. M. Jean-Claude Guillaud

- Est-ce qu'il y a eu une volonté de faire travailler les élèves en science physique sur la périodicité ? Sur les phénomènes périodiques ?

Il ne s'agit pas de hasard. Le phénomène périodique a une place en physique et est nécessaire. On le voit paraître en classe de 3^{e} par exemple avec la tension alternative.

- Peut-on parler de périodicité à propos des cycles ? Exemple du cycle de l'eau (5^{e} en physique et 6^{e} en SVT). Est-ce que la période a un intérêt dans ce cas ?

Il y a deux manières de définir la périodicité :

(1) on obtient des mesures de tension avec un générateur de très basses fréquences (1/100e hertz) ce qui permet de voir la construction de la courbe, point par point, on voit une sinusoïde apparaître sur le graphique (construit par l'élève) : périodique = « reproduction du motif ou signal »

(2) Plus tard, quand on connaît la définition mathématique : périodique = « période dans une fonction sinusoïde : sin ωt » avec $\omega = 2\pi/T$

En chimie :

Dans le tableau de classification périodique : les éléments sont classés par masse atomique croissante (nombre de protons dans le noyau = nombre d'électrons) : on revient à la ligne pour retrouver verticalement (dans une même colonne) des propriétés chimiques identiques.

Explication : les propriétés chimiques sont déterminées par les électrons de la couche périphérique. En colonne, on trouve des éléments ayant le même nombre d'électrons sur la couche périphérique. Elle est saturée à 8 électrons donc on a 8 colonnes. Ce raisonnement ne fonctionne que pour les 18 premiers éléments : 2 éléments isolés + 8 + 8.

Autres manifestations périodiques en chimie :

Certaines réactions chimiques sont périodiques : « horloge chimique »

En physique :

En 3^e : Electricité, fonctions sinusoïdales

Difficile pour les élèves car la tension n'a pas beaucoup de sens pour eux (donc encore moins sa variation avec le temps). La tension est introduite en 4ème sans définition (juste comme résultat d'une mesure) puis la notion de tension alternative apparaît en 3^e. La notion de périodicité n'est pas centrale : le but est d'aborder la sécurité à la maison ou en société (c'est la raison pour laquelle on introduit la tension alternative) et non d'introduire la périodicité.

En 2^{de} : Le pendule

On étudie ce phénomène non pas pour introduire la fonction sinusoïdale mais pour faire une horloge et un travail sur la mesure du temps.

En Terminale : le thème général est « les phénomènes qui dépendent du temps ». Ce n'est pas pour étudier les systèmes périodiques.

On étudie les périodicités spatiales et temporelles dans les ondes, la décroissance radioactive.

En conclusion :

La place de la périodicité est anecdotique en 3^e et devient importante seulement en Terminale.

Autres exemple que la sinusoïde : Signaux électriques carrés ou triangulaires.

Premières notions sur la propagation des signaux (ondes mécaniques) au niveau universitaire.

I.2. M. Daniel Lacroix

En primaire et maternelle, on introduit la notion de cycle (travail sur le temps dès la maternelle) :

- Pour étudier un phénomène temporel, tel un cycle, on a besoin de trois notions reliées =

  (1) événement (exemple : début, milieu, fin)

  (2) ordre / chronologie (ordre dans les événements),

  (3) structure temporelle (par exemple, structure linéaire).

Par exemple, pour un objet qui descend une pente ou une roue avec un point de couleur, les « événements » sont les différentes positions (de l'objet ou du point).

Difficulté des élèves = identifier et dissocier des événements et les ordonner, percevoir le local et pas seulement le global.

Quelques solutions = chaque événement est représenté par une image, faire le parallèle entre les structures spatiales et les structures temporelles (la structure chronologique et la structure en bandes)

Un cycle : les élèves disent « ça se répète »

En biologie : les cycles de la vie

Dans le cas de la roue, le point termine son cycle avant de commencer le second.

En biologie, les cycles souvent se chevauchent.

Les deux notions, cycle en physique et cycle en biologie, ne sont donc pas tout à fait identiques.

En physique, on connaît plusieurs cycles périodiques dont on peut définir la période. Par exemple, le travail sur le temps en CE1/CE2 ou l'astronomie (cycle de la lune, alternance jour/nuit).

- Quels sont les problèmes qui mobilisent la notion de périodicité ?:

Voir les travaux historiques sur la mesure du temps (sablier, clepsydre) et sur les structures temporelles.

Le problème = comment arriver à reproduire des périodes identiques. Le problème d'assurer une périodicité a été important surtout dans le contexte de la mesure du temps.

Exemple : la construction des Horloges ou la détermination des longitudes pour la navigation (éviter les récifs).

Voir Harrison http://fr.wikipedia.org/wiki/John_Harrison_(horloger) qui est le premier à avoir construit une horloge marine.

Le problème = construire une horloge qui soit capable de ne pas dévier de sa période pendant un grand laps de temps.

Aujourd'hui, ces problèmes se retrouvent pour les satellites : pour se repérer avec un GPS, on doit utiliser un satellite en orbite. (La périodicité de cette orbite ne peut pas être définie avec la mécanique classique... Les orbites sont elliptiques...)

Quand on demande aux étudiants qui préparent le CAPES de définir ce que sont les phénomènes périodiques : ils s'embrouillent. Ils ont vu ces phénomènes très tôt mais ils ont peu d'outils pour en parler. Certains confondent fonction sinusoïdale et fonction périodique d'autres confondent courant alternatif et courant sinusoïdal ou courant variable.

Suggestion :

On pourrait construire des questions pièges sur cette notion et montrer qu'il n'y a pas beaucoup de différences entre élèves de collège/lycée et étudiants de l'IUFM.

- Présence de cette notion dans les anciens programmes :

Décomposer un phénomène périodique en série de Fourier permet de se ramener à des sinusoïdes. C'était proposé, à une époque, au lycée (section Sciences de l'Ingénieur ?), grâce à un logiciel (par exemple pour reconstituer une fonction triangle à partir de sinusoïdes).

Etude des phénomènes vibratoires, au niveau du lycée.

Circuit oscillant sans résistance étudié en Terminale comme un phénomène périodique.

Pendule pesant.

- Importance de cette notion en physique :

- Phénomènes où il faut entretenir une vibration (ou oscillation), exemple = une montre.
- Phénomènes transitoires : on s'intéresse à la réponse du système à une perturbation, à la période de transition entre deux états d'équilibre.
- Mesure du temps.

Le problème du temps est surtout abordé en maternelle/primaire puis en Terminale.

Annexe 3

Carte praxéologique des praxis liés à la périodicité dans les deux institutions française et vietnamienne

(θ_1, Θ_1)	(θ_2, Θ_2)	(θ_3, Θ_3)	(θ_4, Θ_4)
(T_{d1}, τ_{d1}) $F_{coll,\ 2}^{de}$ (T_{d1}, τ_{d1}^{V}) V_{coll}	(T_{p1}, τ_{p1}) $F_2^{de}{}_{,1}^{re}$ (T_{p1}, τ_{p1}^{V}) $V_{10\ \text{élémentaire}}$	(T_{fn1}, τ_{fn1}) F_2^{de}	(T_{fp1}, τ_{fp1}) $F_2^{de}{}_{,1}^{re}$
(T_{d2}, τ_{d2}) F_{coll} (T_{d2}, τ_{d2}^{V}) V_{coll}	(T_{p2}, τ_{p2}) F_2^{de}, V_{10}	(T_{fn2}, τ_{fn2}) F_2^{de}, V_{10}	Calculer f(a) (T_{fp4}, τ_{fp4}) F_2^{de}
(T_{d3}, τ_{d3}) V_{coll}, F_2^{de}	(T_{p3}, τ_{p3}) $F_2^{de}{}_{,1}^{re}$ (T_{p3}, τ_{p3}^{V}) V_{11}	(T_{fn3}, τ_{fn3}) V_{11}	(T_{fp2}, τ_{fp2}) $F_2^{de}{}_{,1}^{re}$ $(T_{fp2}, \tau_{fp2}^{V})$ $V_{\text{livre d'exercice ensemble avancé}}$
		$(T_{fp3}, \tau_{fp3}^{V})$ $V_{\text{livre d'exercice ensemble avancé}}$	(T_{fp3}, τ_{fp3}), (T_{fp3}, τ'_{fp3}) $F_2^{de}{}_{,1}^{re}$ $(T_{fp3}, \tau_{fp2}^{V})$ $V_{\text{livre d'exercice ensemble avancé}}$
		(T_{fp5}, τ'_{fp5}) F_2^{de}, V_{11}	(T_{fp5}, τ_{fp5}) $F_2^{de}{}_{,1}^{re}{}_{,T}^{erm}$, V_{11}
			(T_{fp6}, τ_{fp6}) $V_{11\ \text{avancé}}$

Nous citons dans la carte des habitats des praxis, en jaune pour l'institution française et en vert l'institution vietnamienne. Les trois praxis entourés en rouge n'apparaissent que dans le livre d'exercice du programme avancé du Viêt Nam.

Annexe 4
Questionnaire

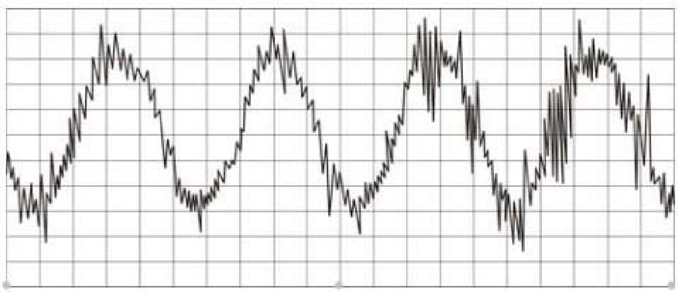
Fiche 1

Nom et Prénom : …………………….
Classe :………………………………..
Ecole :…………………………………

Résoudre les problèmes suivants
Durée : 35 minutes

Exercice 1

Ci-après un encéphalogramme montre l'activité du cerveau humain pendant le sommeil profond selon le temps en secondes. Cette activité est la même durant tout le sommeil profond dont la durée moyenne est de 20 minutes.



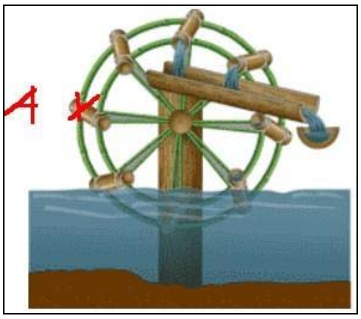
g) Qu'est-ce que tu peux dire sur ce phénomène ?
h) Durant la première seconde, dans quels intervalles l'activité du cerveau augmente-t-elle ? Dans quels intervalles diminue-t-elle ?
i) Durant la première seconde, à quel instant l'activité du cerveau est-elle la plus forte ? A quel instant est-elle la plus faible ?
j) Que remarques-tu de l'activité du cerveau durant l'intervalle de temps de 3,5s à 4s ? Justifie ta réponse.
k) Evalue l'activité du cerveau au temps t = 2,5s.
l) Construis une figure permettant d'apprécier l'activité du cerveau sur les 10 premières secondes du sommeil profond.

Exercice 2

Les peuples montagnards du Nord utilisent souvent la noria pour apporter de l'eau aux champs élevés. C'est une grande roue, comme la roue d'une bicyclette, avec des seaux attachés par des goupilles. Les seaux sont successivement immergés, remplis et vidés dans une gouttière.

Supposons qu'une noria ait 8 seaux attachés comme ci-dessous. Un mathématicien étudie la « hauteur » du seau, noté A dans la figure, par rapport à la surface de l'eau. Cette hauteur est positive quand le seau est au dessus de l'eau, négative quand il est au dessous. A chaque instant t (calculé en minutes), le mathématicien a trouvé que cette hauteur (calculée en mètres) suit la loi suivante :

$$h = 2 + 2{,}5 \sin\left[2\pi\left(t - \frac{1}{4}\right)\right]$$



(Source : http://www.machinerylubrication.com/Read/1294/noria-history)

d) Qu'est-ce que tu peux dire sur le mouvement de la noria ?
e) Trouve le rayon de la roue et la distance du centre de la roue à la surface de l'eau.
f) On veut déverser dans le champ une quantité d'eau égale au déversement de 1000 seaux dans la gouttière. Pendant combien de temps la noria doit-elle tourner?

Fiche 2

Nom et Prénom : …………………
Classe :……………………………
Ecole :……………………………..

Résoudre les problèmes suivants
Durée : 55 minutes

Exercice 3

On a relevé la hauteur d'eau au port de Saint-Malo en France les 9 et 10 mai 2009 dans les deux tableaux ci-dessous :

9 mai 2009

Matin		Après-midi	
0H00	5,02m	12H00	5,60m
1H00	3,38m	13H00	3,87m
2H00	2,30m	14H00	2,62m
3H00	2,12m	15H00	2,10m
4H00	3,28m	16H00	2,84m
5H00	5,62m	17H00	4,91m
6H00	8,40m	18H00	7,71m
7H00	10,64m	19H00	10,27m
8H00	11,54m	20H00	11,64m
9H00	11,05m	21H00	11,51m
10H00	9,62m	22H00	10,27m
11H00	7,66m	23H00	8,36m

10 mai 2009

Matin		Après-midi	
0H00	6,22m	12H00	6,78m
1H00	4,28m	13H00	4,82m
2H00	2,83m	14H00	3,30m
3H00	2,05m	15H00	2,33m
4H00	2,39m	16H00	2,34m
5H00	4,10m	17H00	3,71m
6H00	6,73m	18H00	6,19m
7H00	9,40m	19H00	8,96m
8H00	11,15m	20H00	11,04m
9H00	11,45m	21H00	11,72m
10H00	10,51m	22H00	11,03m
11H00	8,83m	23H00	9,46m

(Source : http://maree.frbateaux.net)

f) Que peux-tu dire sur ce phénomène ?

g) Combien y a-t-il de marées hautes durant ces deux jours ? Combien y a-t-il de marées basses ?

(La marée haute est le niveau le plus élevé de chaque marée montante. Par opposition, la marée basse est le niveau le plus bas de chaque marée descendante.)

h) Quelle est l'amplitude moyenne des marées à Saint-Malo sur les deux jours ?

(L'amplitude des marées dans un jour est la différence de hauteur entre le niveau de la marée haute et celui de la marée basse suivante).

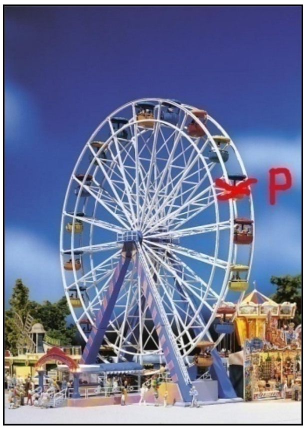
i) Le capitaine d'un bateau veut prendre la mer à Saint-Malo le 11 mai. Le tirant d'eau de son bateau est de 7 mètres. A quelles heures peut-il partir le 11 mai?

(Le tirant d'eau est la hauteur de la partie immergée du bateau qui varie en fonction de la charge transportée. Il correspond à la distance verticale entre la ligne de flottaison d'un bateau et le bas de la quille. Un bateau dont le tirant d'eau est de d mètres peut naviguer en toute sécurité quand la hauteur d'eau est supérieure à d mètres).

j) Construis une figure permettant d’apprécier les hauteurs d’eau dans ce port durant la totalité des trois jours 9, 10 et 11 mai 2009.

Exercice 4

Un parc d’attraction de Ho Chi Minh ville possède une grande roue de 40m de diamètre dont le centre est situé à 22m du sol.



La roue tourne toujours dans le même sens de manière uniforme. Au début du voyage, la cabine P se trouve au plus bas et Minh s’y assoit. Il fait un voyage de 3 tours qui dure 30 minutes.

e) A quel instant Minh est-il à la position la plus haute ?
f) Calcule la hauteur de la cabine de Minh au sol après 2,5 minutes du voyage, après 7 minutes, après 12 minutes et après 22 minutes.
g) Construis une figure permettant d’apprécier les hauteurs de la cabine P durant les trois tours du voyage.
h) A partir de 35m de hauteur on voit la rivière Saigon. Combien de temps Minh peut-il la voir pendant tout un voyage ?

Annexe 5

Fiches de l'ingénierie didactique

Initiation — **I. Surtout bouge les points !**

VII. Créer et nommer un point

Construis un point. Nomme le A. Déplace le.
Construis un autre point. Nomme le B. Déplace le.

Pointer Point Nommer

VIII. Créer un segment, une droite

Construis le segment [AB], d'extrémités A et B.
Construis la demi-droite [AB) et la droite (AB).
Déplace les points A et B.

Segment Demi-droite Droite

IX. Construire un point sur une demi-droite ou un segment

Place un point C sur le segment, un point D sur la demi-droite
et un point E sur la droite.
Observe les contraintes sur les déplacements du point C, du point D
et du point E.

Point

X. Supprimer des objets

Supprime les points C, D et E.
Supprime tout ce que tu as construit.

Pointer

XI. Construire un rectangle

Construis un segment [AB].
Construis un rectangle de côté [AB] en utilisant au choix
l'outil parallèle ou l'outil perpendiculaire.
Déplace les points A et B. Essaye aussi de déplacer les autres sommets du rectangle.
Supprime ta construction.

Parallèle Perpendiculaire

XII. Trois façons de construire un carré

Construis un segment [AB] et une droite perpendiculaire à [AB]
passant par A.
Voici trois façons de reporter la longueur AB sur la droite perpendiculaire.

1. Construis un cercle de centre A, passant par B. Il coupe la perpendiculaire
en deux points, choisis-en un pour être le troisième sommet du carré.
Termine la construction comme pour le rectangle.
Déplace les points A et B.
Supprime cette construction.

Segment

Cercle

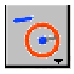
2. Reconstruis un segment [AB] et une droite perpendiculaire à [AB] passant par A.

Distance ou longueur

Sélectionne l'outil « distance ou longueur » et clique sur [AB].
Déplace A et B et constate que la mesure de AB s'actualise au fur et à mesure du déplacement.
Construis une demi droite d'origine A et perpendiculaire à [AB]. Tu peux le faire en sélectionnant « demi-droite » puis A puis en cliquant sur la perpendiculaire à [AB].

Report de mesure

Sélectionne l'outil « report de mesure ».
Clique sur la mesure de AB puis sur la demi-droite.
Tu obtiens un point qui est sur la droite perpendiculaire, exactement à la distance AB de A.
Supprime cette construction.



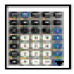
Compas

3. Reconstruis un segment [AB] et une droite perpendiculaire à [AB] passant par A.
Sélectionne l'outil « compas » et clique sur le segment [AB] puis sur le point A.
Tu obtiens un cercle de centre A et de rayon la longueur AB.
Termine la construction comme pour le rectangle. Déplace A et B.
Conserve cette construction.

XIII. Mesures de longueurs

Distance ou longueur

Mesure le côté [AB] du carré avec l'outil « distance ou longueur ».
Sélectionne l'outil « calculatrice » pour calculer le périmètre du carré (4 x côté)



Calculatrice

Pour cela, tu cliques sur :
- la mesure AB, elle s'affiche sous la forme d'une variable « a » dans la calculette,
- puis sur l'opération x
- puis sur le nombre 4
- puis sur le signe =

Le résultat apparaît dans la fenêtre de la calculatrice.
Attrape le résultat avec la souris et place-le dans la fenêtre de construction.
Déplace les points A et B et constate que la mesure du périmètre du carré s'actualise quand le carré varie.

Distance ou longueur

Avec l'outil « distance ou longueur », affiche le périmètre du cercle de centre A et passant par B.
Avec l'outil « calculatrice », calcule le rapport entre le périmètre du cercle et celui du carré.
Déplace ton résultat dans la fenêtre de construction. Déplace les points A et B.
Que constates-tu sur le rapport entre le périmètre du cercle et celui du carré ?
Supprime cette construction.

SITUATION 0

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S0-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes **: Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

Sur l'écran, vous pouvez voir deux demi-droites horizontales d'origine respective A et A' et parallèles. Sur la demi-droite Ax est placé un point P mobile.

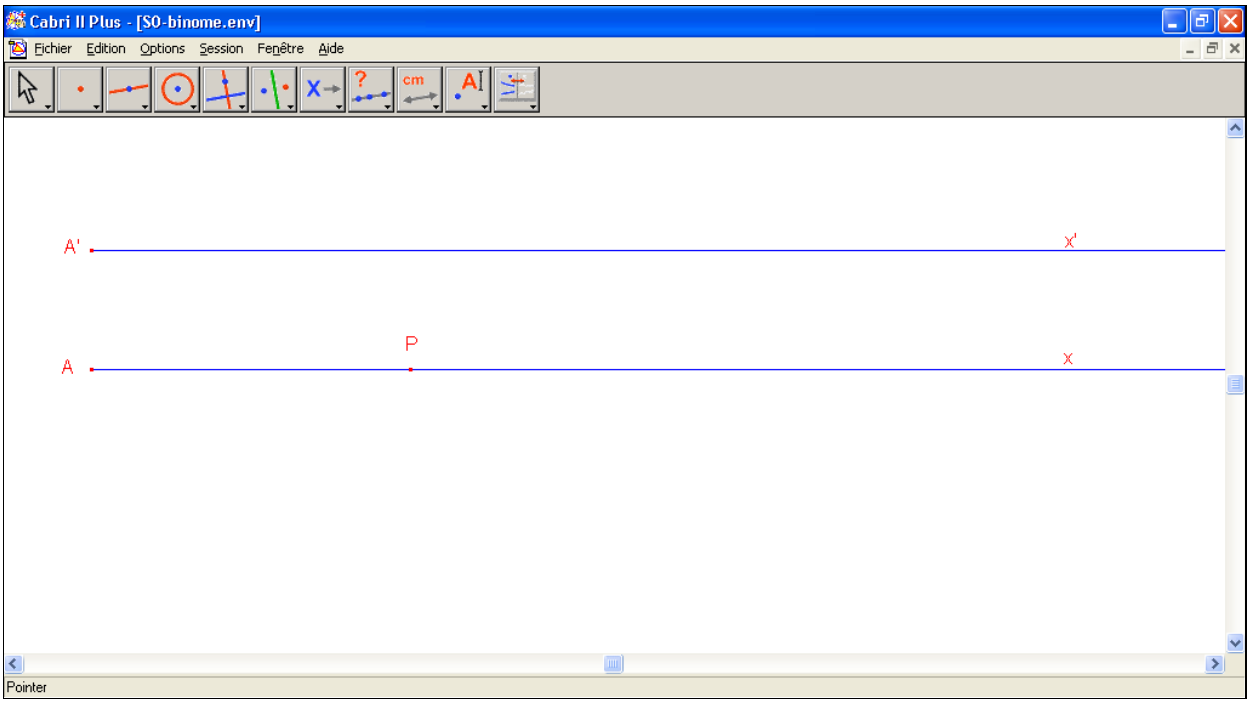
Travail à faire : construire sur la demi-droite A'x' un point P' tel que A'P' = 1,72 x AP.

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Ecran Cabri à l'ouverture du fichier « S0-binome.env »



SITUATION 1
Fiche 1

Binôme n° …

Un parc d'attractions possède une grande roue. Au début du voyage, M s'assoit dans une cabine.

Photo d'une grande roue

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S1-P1-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

A l'écran vous pouvez voir un point P placé sur une demi-droite d'origine A.

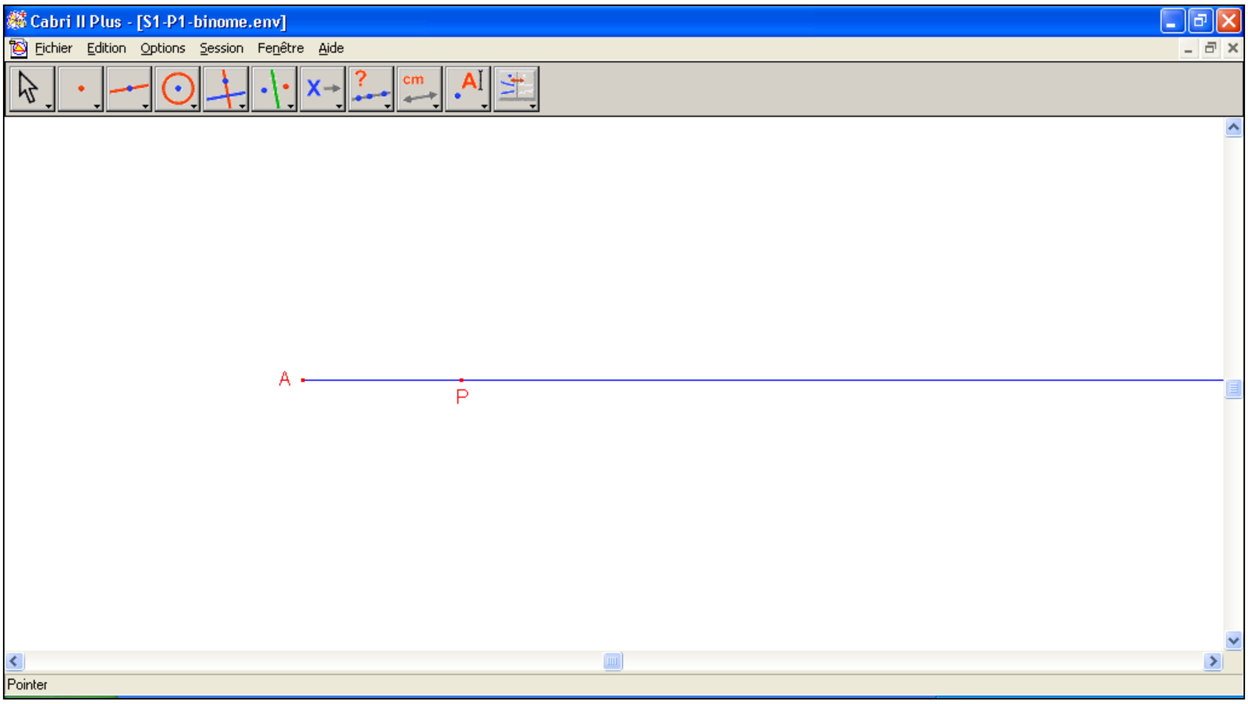
Travail à faire : construire à l'écran une figure géométrique représentant le manège et la cabine de M de façon à ce que le déplacement du point P pilote le mouvement de la cabine de M.

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Ecran Cabri à l'ouverture du fichier « S1-P1-binome.env »



SITUATION 1
Fiche 2

Binôme n° …

Un parc d'attractions possède une grande roue. Au début du voyage, M s'assoit dans une cabine.

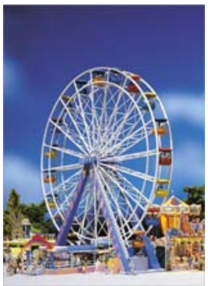


Photo d'une grande roue

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S1-P2-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes **: Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

Travail à faire : construire à l'écran une figure géométrique représentant le manège et la cabine de M de façon à ce que le déplacement du point P pilote le mouvement de la cabine de M.

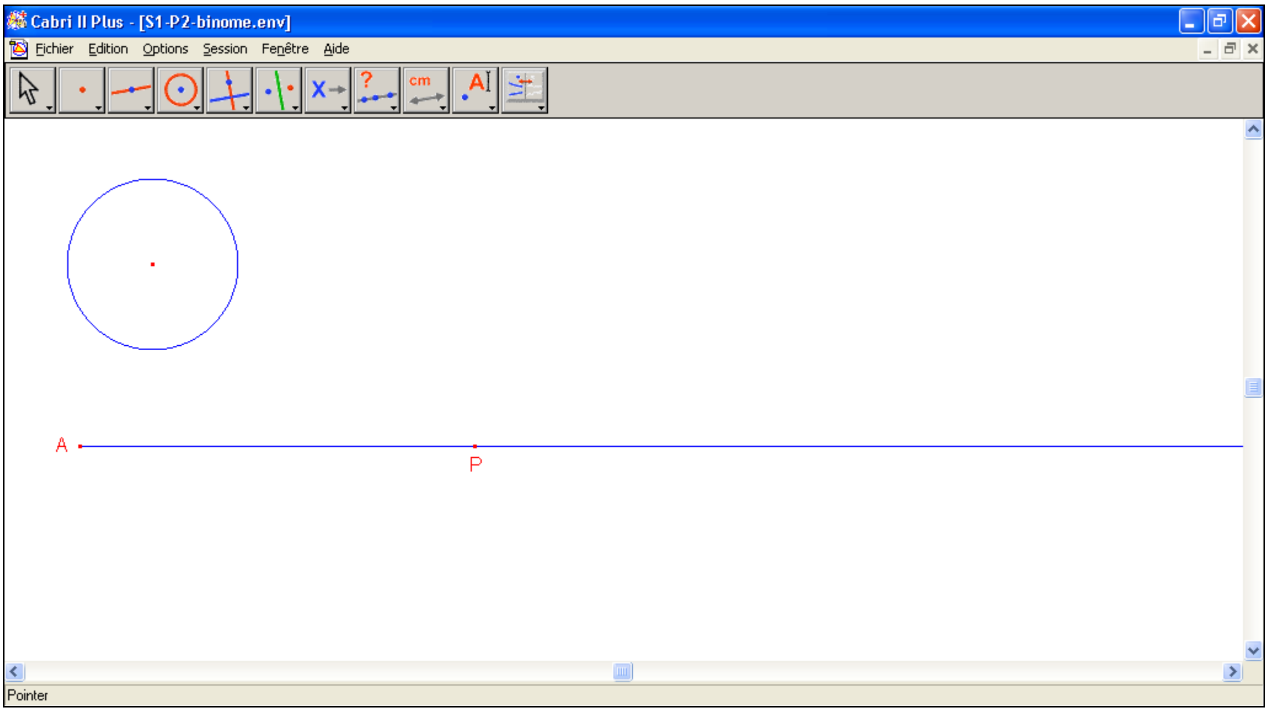
A l'écran vous pouvez voir un point P placé sur une demi-droite d'origine A et un cercle.

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Ecran Cabri à l'ouverture du fichier « S1-P2-binome.env »



SITUATION 2
Fiche 1

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S2-P1-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

A l'écran, vous pouvez voir un point P sur la demi-droite d'origine A, un point I fixe sur le cercle et un point M qui se déplace sur le cercle, piloté par le point P.

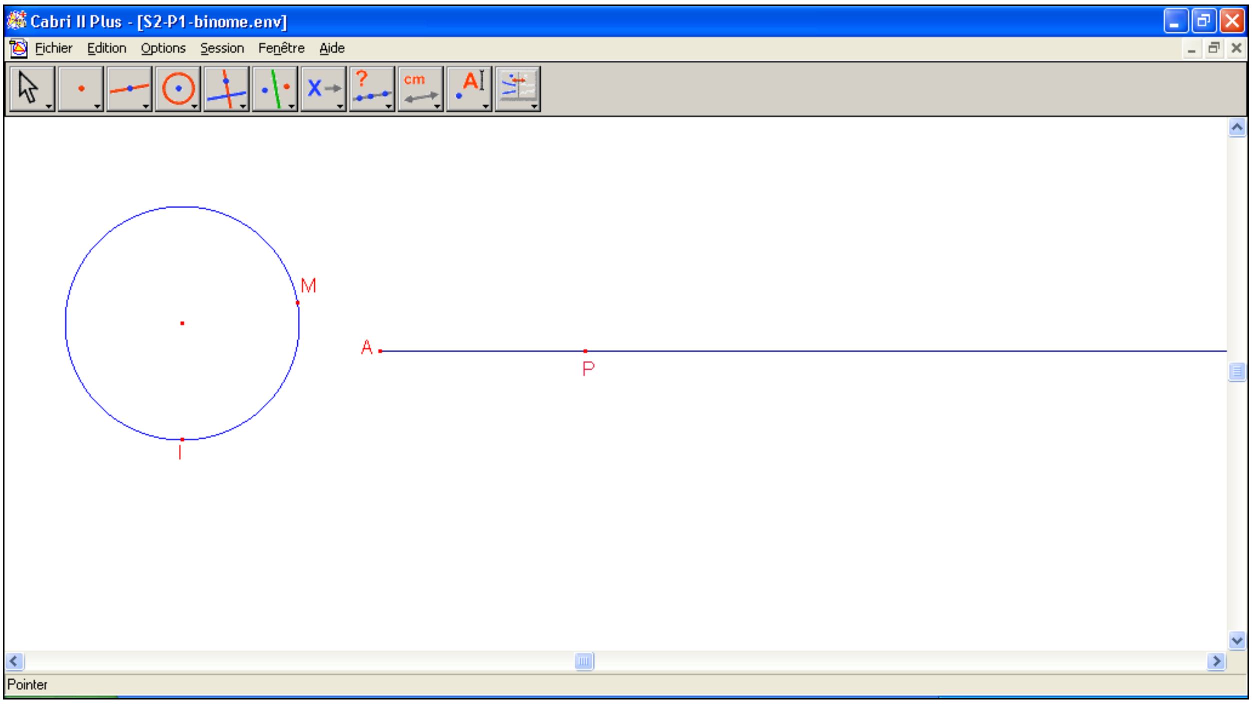
Travail à faire : placer sur la demi-droite AP le point P1 correspondant à 1 tour de la cabine M, le point P2 correspondant à 2 tours de la cabine M, le point P3 correspondant à 3 tours de la cabine M.

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Ecran Cabri à l'ouverture du fichier « S2-P1-binome.env »



SITUATION 2
Fiche 2

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S2-P2-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

A l'écran, vous pouvez voir un point P sur la demi-droite d'origine A, un point I fixe sur le cercle et un point M qui se déplace sur le cercle, piloté par le point P.
Vous pouvez voir aussi les points P1, P2 et P3 sur la demi-droite d'origine A tels que nous venons de les construire.
On sait de plus qu'un tour complet de la grande roue dure 5 minutes.

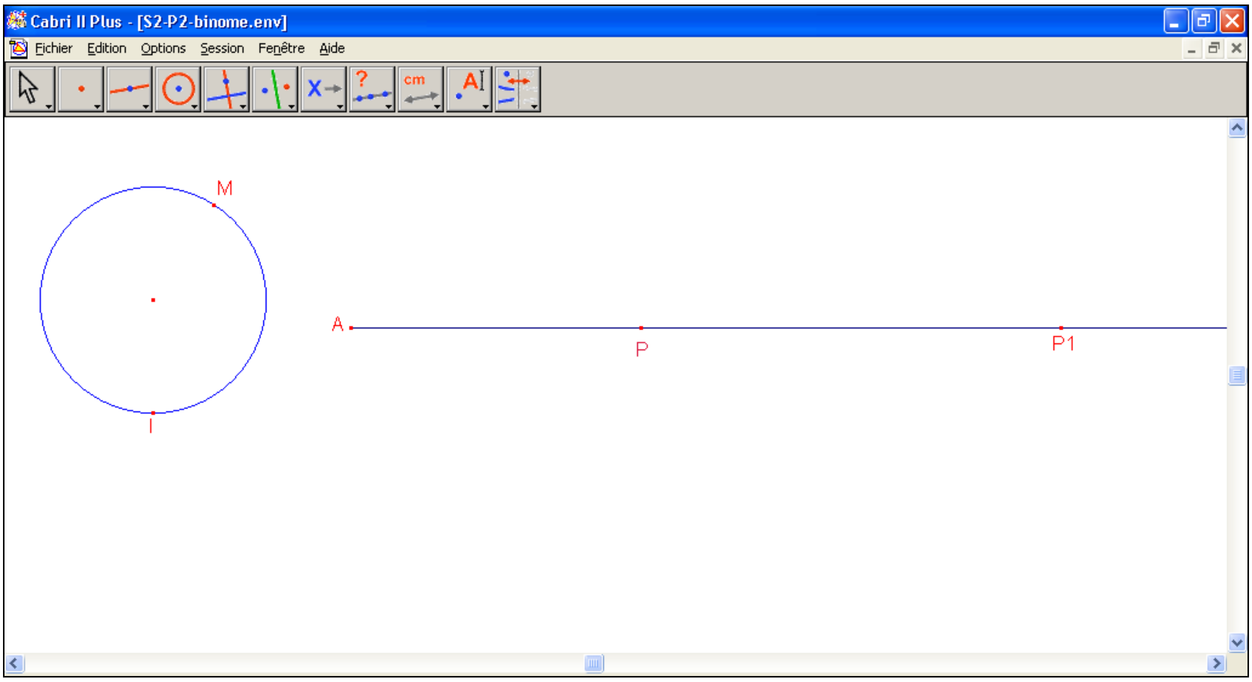
Travail à faire :
Placer le point U pour que quand P se déplace de A à U, M se déplace dans la première minute du voyage.

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Ecran Cabri à l'ouverture du fichier « S2-P2-binome.env »



SITUATION 3
Fiche 1

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S3-P1-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

M entre dans sa cabine lorsqu'elle passe au plus près du sol, au point I. La grande roue du manège a un rayon de 20 m et son centre est situé à 22 m du sol.

Une lampe rouge éclaire par intermittence un endroit fixe (noté L) du manège où passent les cabines. Si une cabine est éclairée par la lampe rouge lors de son passage en L, son occupant gagne un voyage gratuit.
On se demande si M va gagner un voyage gratuit sachant que la lampe s'allume au moment où il monte dans sa cabine.

A l'écran, vous pouvez voir le cercle représentant le manège, le point I, un segment représentant le sol, et l'axe du temps construit précédemment.

De quelles informations avez-vous besoin pour savoir si M va gagner un voyage gratuit ?

Informations complémentaires :……………………………………………………………......
……………………………………………………………………………………………..
…………………………………………………………………………………….....

Question :
M va-t-il gagner un voyage gratuit ?
Si oui, au bout de combien de tours ? Peut-il en gagner d'autres ?

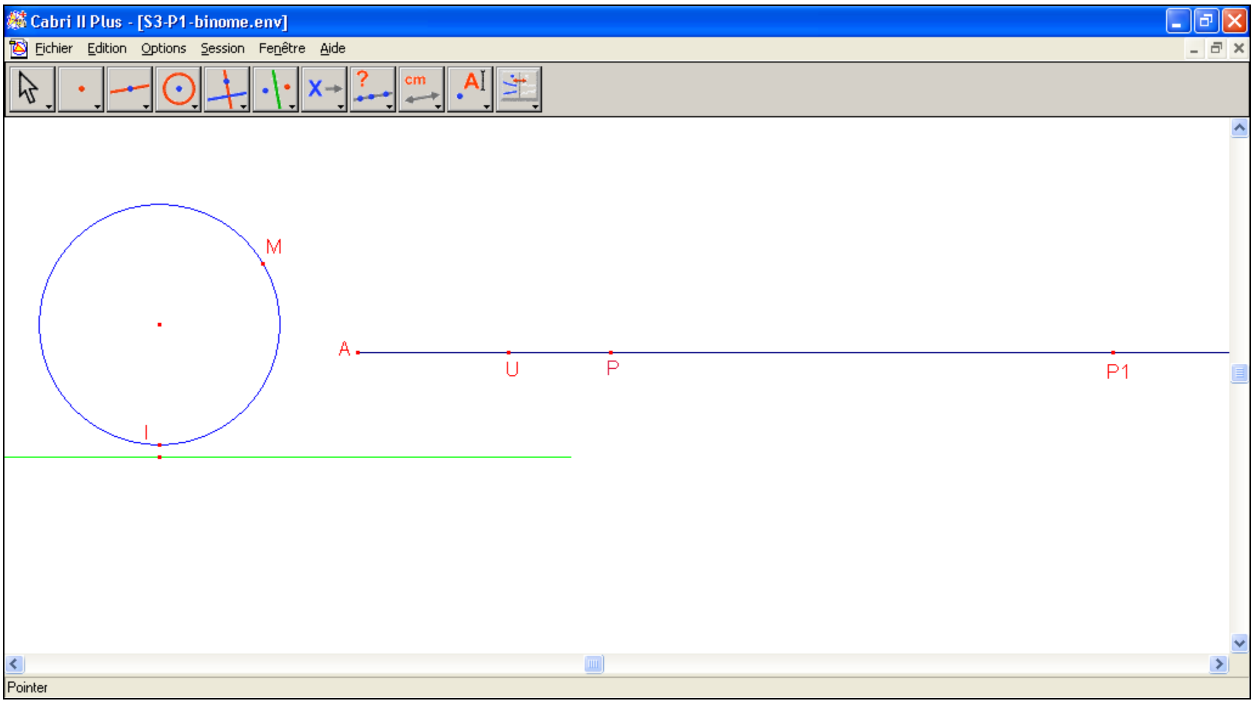
Réponse et explications :

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Ecran Cabri à l'ouverture du fichier « S3-P1-binome.env »



SITUATION 3
Fiche 2

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S3-P2-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

Travail à faire :
Tracer la droite qui passe par le point M et qui est perpendiculaire au sol.
Appeler H le point d'intersection avec le sol.
Mesurer la longueur MH.
Tracer une droite passant par P et perpendiculaire à l'axe du temps.
Tracer une demi-droite d'origine P et perpendiculaire à l'axe du temps.
Reporter la mesure MH sur la nouvelle demi-droite.
On obtient le point M'.

Question :
Si on déplace P que se passe-t-il pour M' ? Quel est le chemin de M' ?

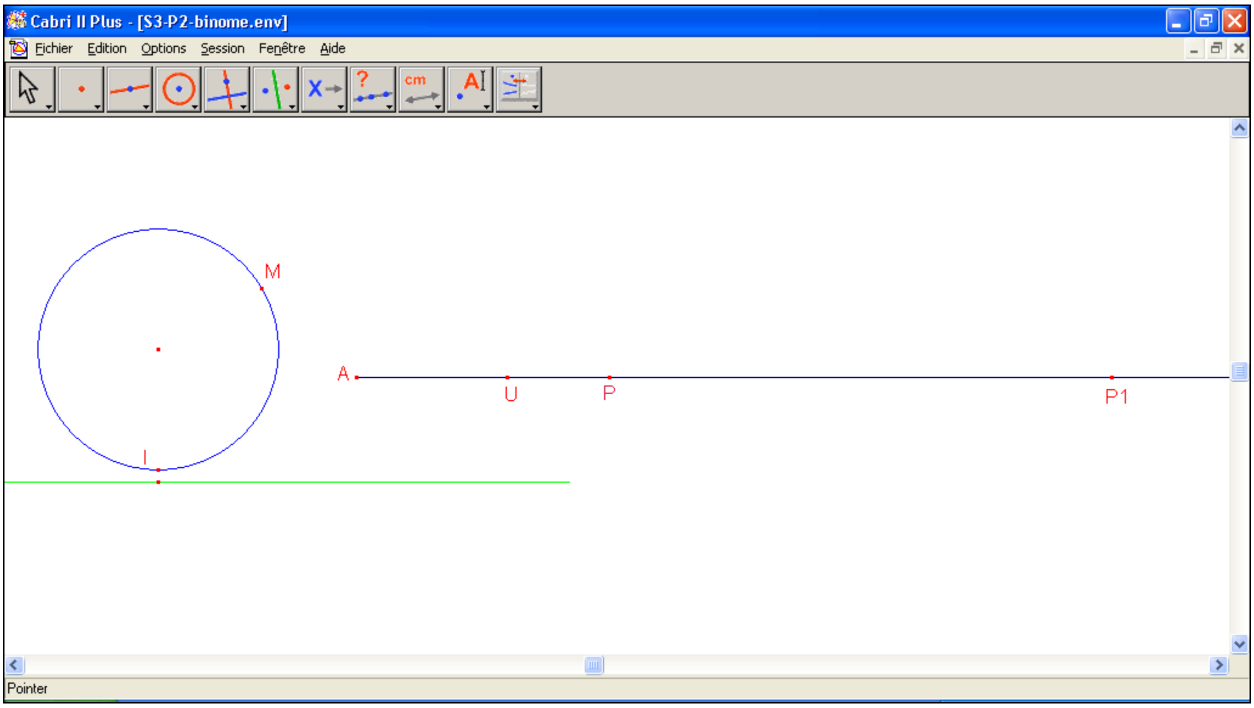
Réponse et explications :

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Ecran Cabri à l'ouverture du fichier « S3-P2-binome.env »



SITUATION 3
Fiche 3

Binôme n° …

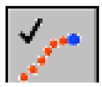
Consigne 1 : ouvrir le fichier « S3-P3-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

Travail fait :
Tracer la droite qui passe par le point M et qui est perpendiculaire au sol.
Appeler H le point d'intersection avec le sol.
Mesurer la longueur MH.
Tracer une droite passant par P et perpendiculaire à l'axe du temps.
Tracer une demi-droite d'origine P et perpendiculaire à l'axe du temps.
Reporter la mesure MH sur la nouvelle demi-droite.
On obtient le point M'.

Question de la fiche 2 :
Si on déplace P que se passe-t-il pour M' ? Quel est le chemin de M' ?

Nous allons voir si tu as raison.
Sélectionne l'outil « trace » et clique sur M'.
Déplace le point P. Tu obtiens une courbe rouge qui est le chemin du point M'.



Trace

Question : que peux-tu dire de cette courbe ?

Réponse :

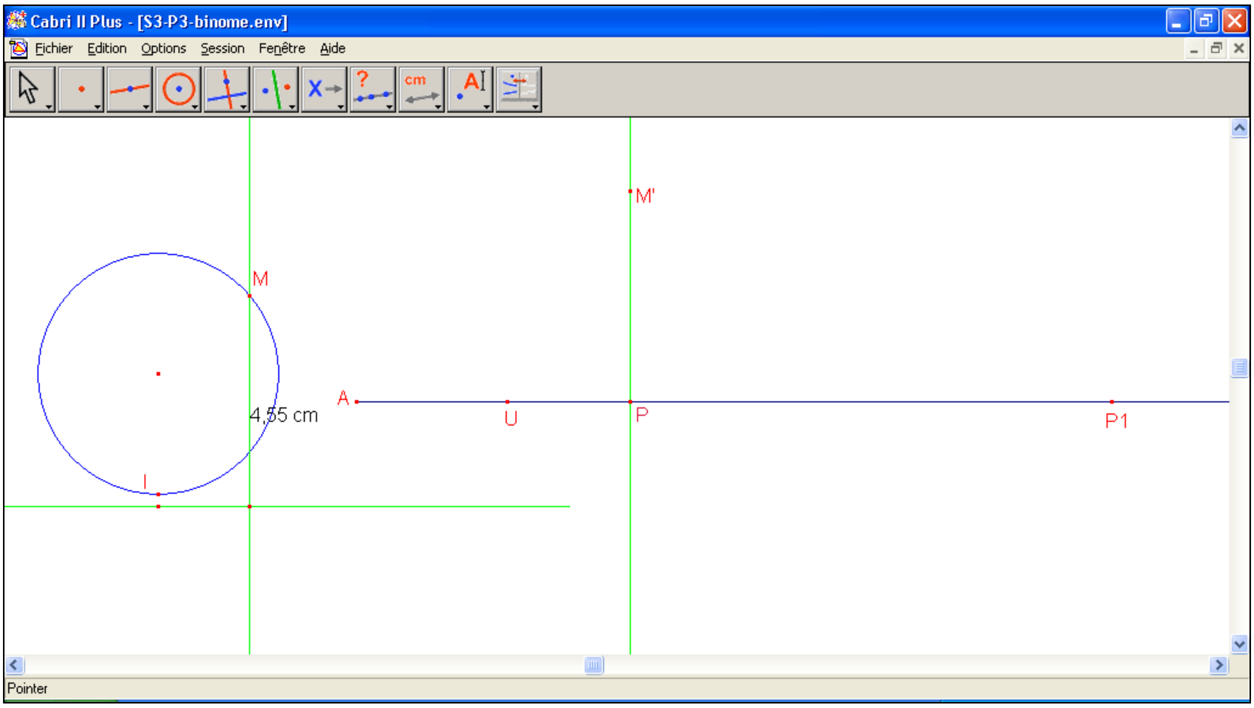
Travail à faire : le gérant du manège n'a pas d'ordinateur. Recopie sur la feuille ci-jointe le chemin de M' pour que le gérant puisse contrôler le jeu.

Attention !

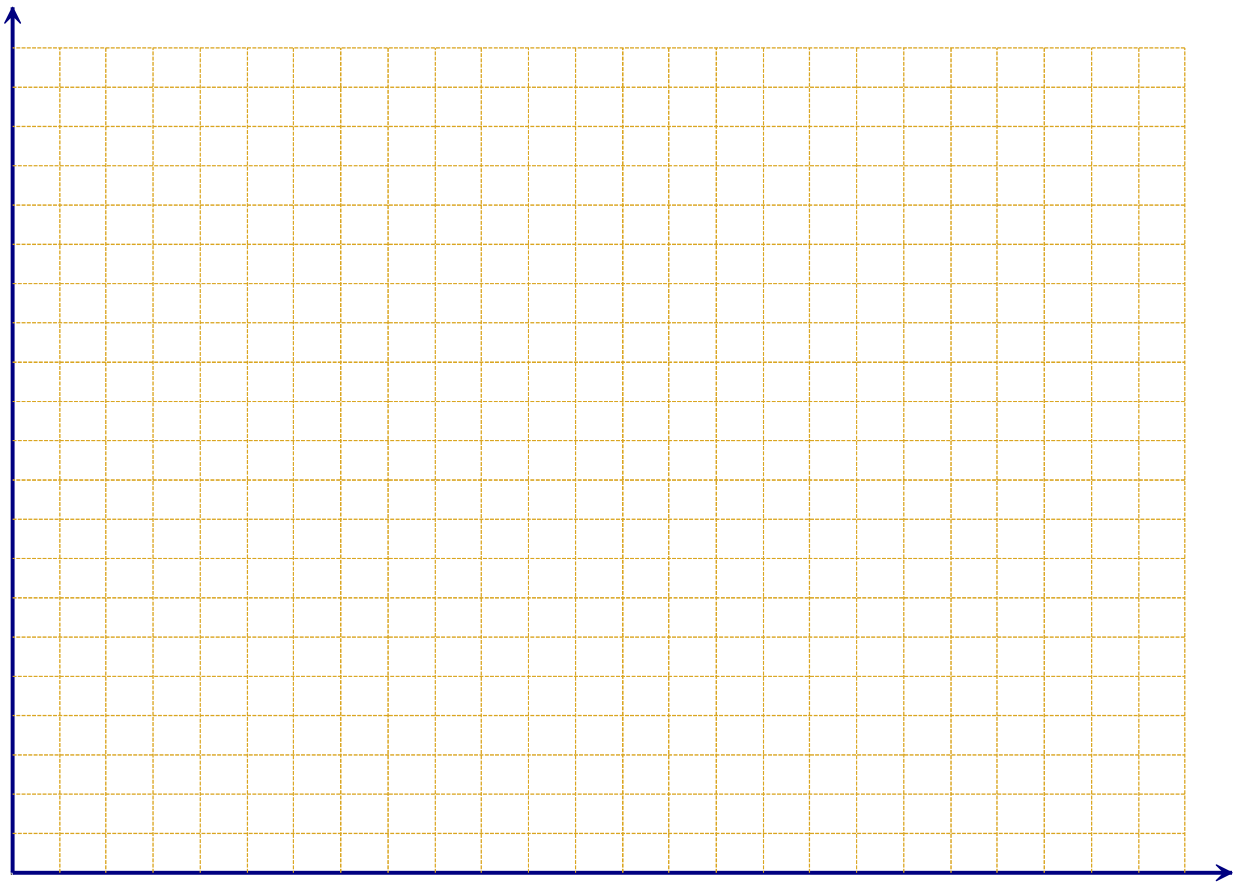
1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Ecran Cabri à l'ouverture du fichier « S3-P3-binome.env »



Feuille quadrillée pour recopier le chemin du point M'



SITUATION 3
Fiche 4

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S3-P4-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

Vous avez reçu en plus une feuille avec le chemin de M'.

Répondre aux questions suivantes dans le tableau ci-dessous.

Questions	Réponses	Comment avez-vous fait ?
A quelle hauteur est la cabine au bout de 22 minutes ?		
A quels moments la cabine est-elle à une hauteur de 30 mètres ?		

Le gérant décide de changer la hauteur de la lampe : il la met à 20 mètres à droite de la grande roue.
La lampe s'allume désormais 1 minute toutes les 4 minutes.

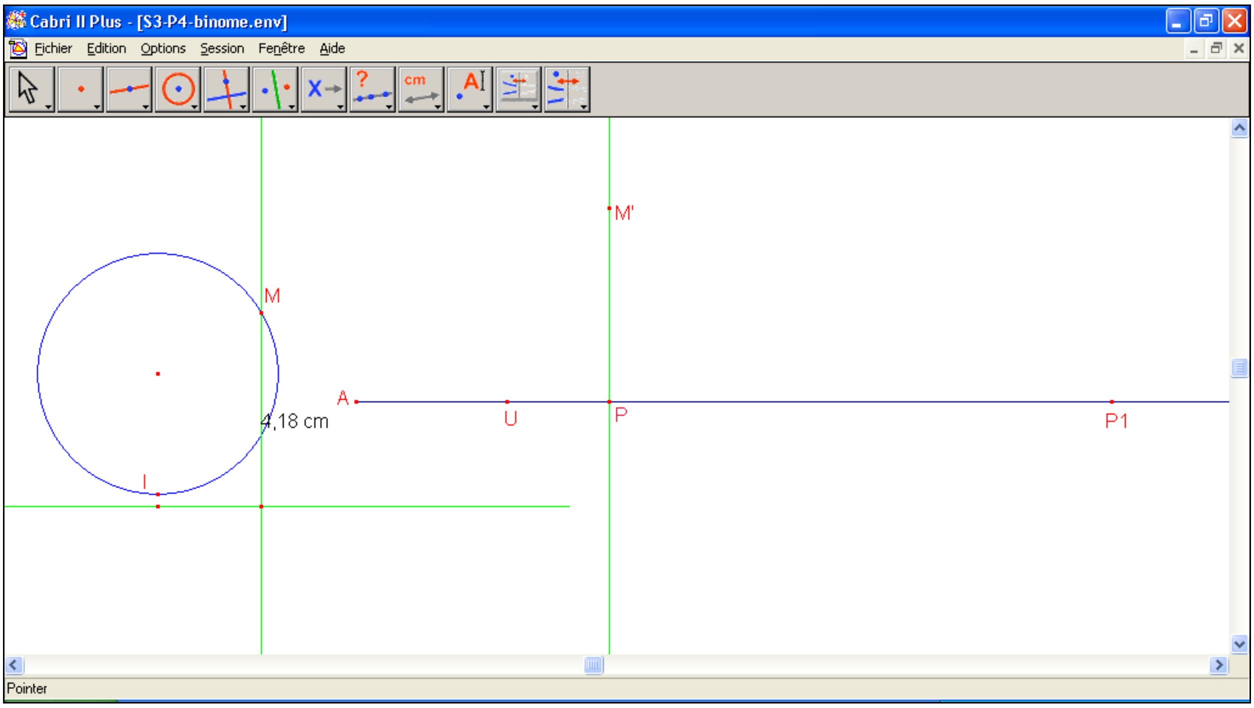
Questions	Réponses	Comment avez-vous fait ?
M va-t-il gagner un voyage gratuit ?		
Si oui, au bout de combien de tours ?		
Peut-il gagner d'autres voyages ?		

Attention !

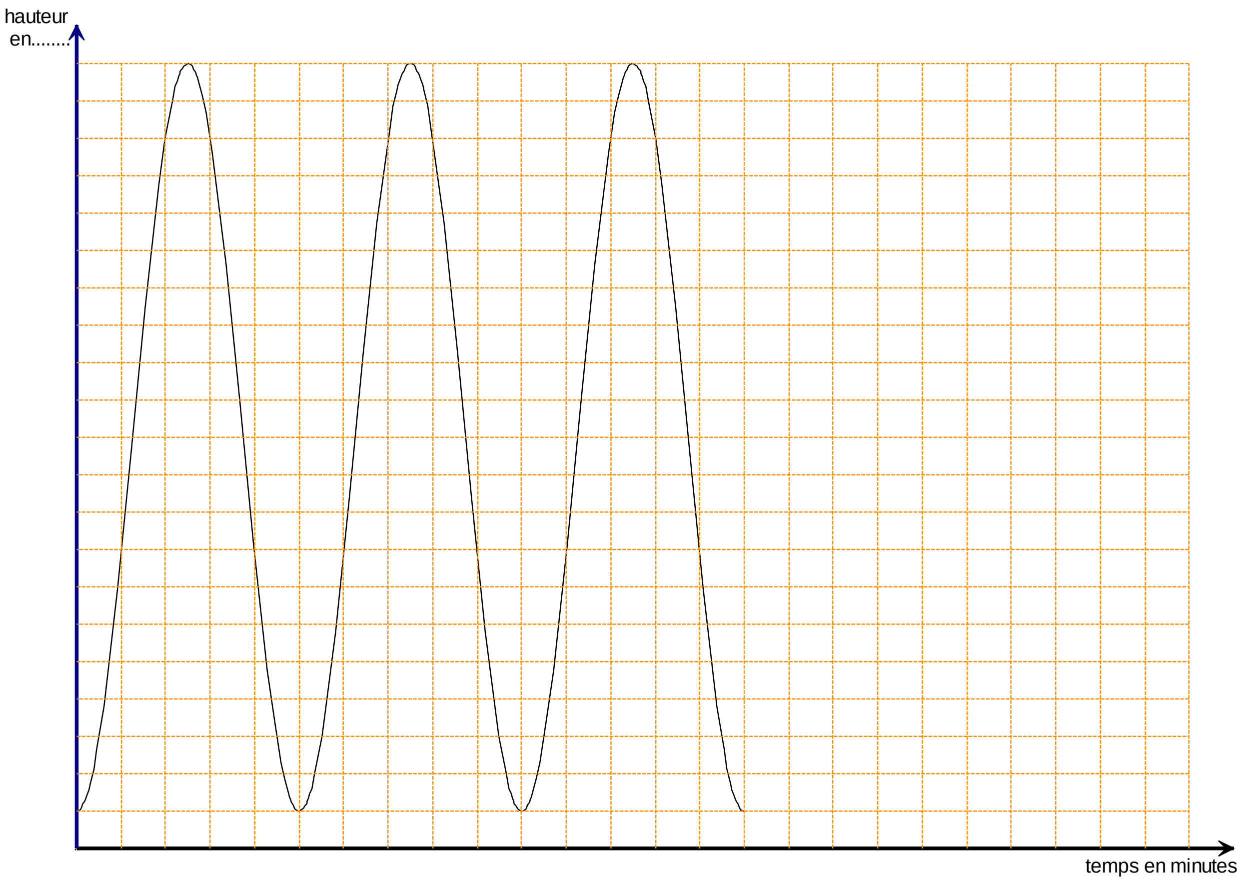
1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Ecran Cabri à l'ouverture du fichier « S3-P4-binome.env »

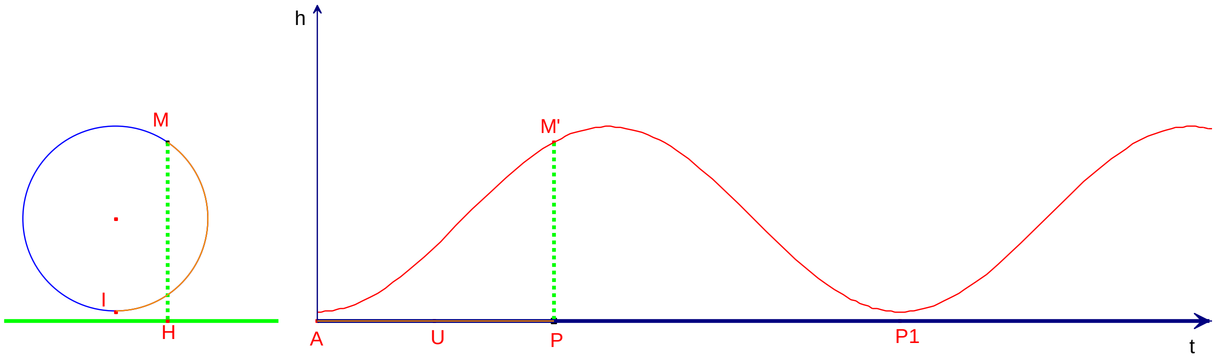


Le chemin du point M’



SITUATION 3
Fiche 5
(Travail individuel)

Nom prénom : ……………………………………..
Binôme n° : ………………………………………..



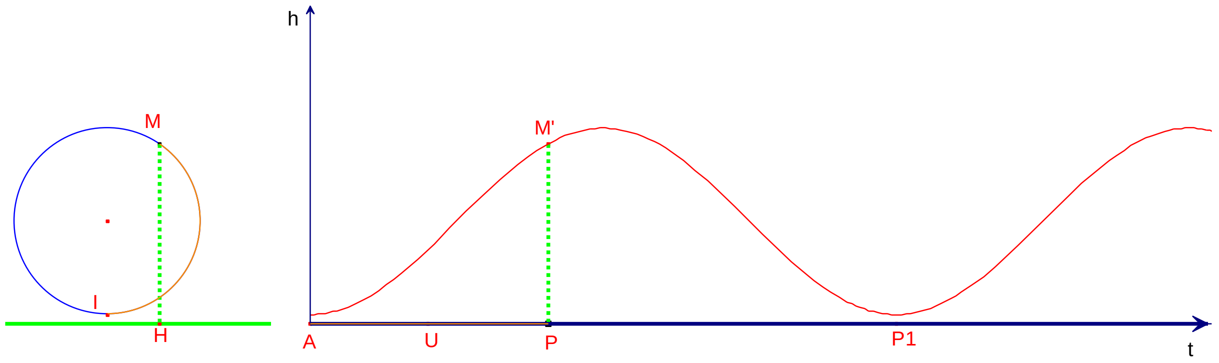
$t \mapsto h = f(t)$

Écrivez *individuellement* tout ce que vous pouvez dire sur la fonction : $t \mapsto h = f(t)$.

Réponse :

SITUATION 3
Fiche 6
(Devoir à la maison)

Nom prénom: ……………………………………
Binôme n° : ………………………………………



$t \mapsto h = f(t)$

Rappel

M entre dans sa cabine lorsqu'elle passe au plus près du sol, au point I. La grande roue du manège a un rayon de 20 m et son centre est situé à 22 m du sol.

Etablir que f(t) = 22-20 cos (2πt/5)

Annexe 6

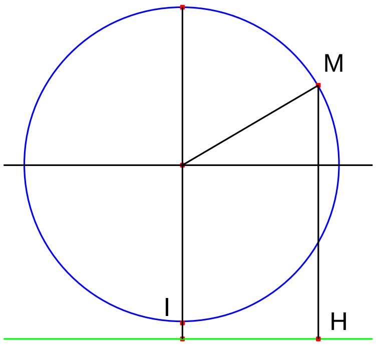
Stratégies possibles dans la situation 3 de l'ingénierie didactique

I. Stratégies possibles pour trouver la formule algébrique représentant la hauteur de la cabine M en fonction du temps

- Stratégie liée au modèle C :

$$5 \text{ minutes} \longrightarrow 2\pi$$

$$t \text{ minutes} \longrightarrow \frac{2\pi}{5}t$$



Donc, au moment t minutes comme pour la figure ci-dessus, la hauteur de la cabine M au sol est $h = 22 + 20 \sin\left(\frac{2\pi}{5}t - \frac{\pi}{2}\right) = 22 - 20 \cos\frac{2\pi}{5}t$.

- Stratégie liée au modèle O

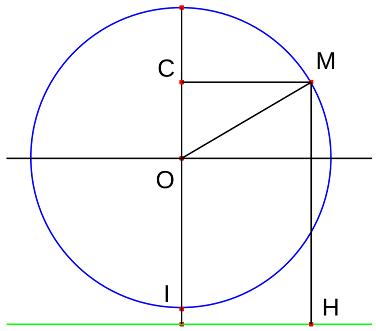
La formule représentant la hauteur de la cabine M en fonction du temps a pour la forme : $h = A \cos(\omega t+\varphi) + B$.

$A = r = 20$ (r rayon du manège)
$B = 22$ (la distance du centre du manège par rapport au sol)
$\omega = 2\pi/T = 2\pi / 5$
Donc $h = 22 + 20 \cos\left(\frac{2\pi}{5}t + \varphi\right)$.
Avec $t = 0$ et $h = 2$, on a : $2 = 22 + 20 \cos \varphi$. Donc $\varphi = -\pi$.

La formule algébrique représentant la hauteur de la cabine M en fonction du temps est : $h = 22 - 20 \cos \frac{2\pi}{5}t$.

II. Stratégies possibles pour trouver le moment t_1 où la cabine M est à la hauteur h = 35 m dans phase 1

- Stratégie liée au modèle C :



Avec h = 35 m, on a OC = 13 m. Donc cos $\widehat{MOC}$ = 13/20 = 0,65

$\widehat{MOC} \approx 0{,}86$ (rad)

$\Delta t = \Delta\, \varphi / \omega \approx 0{,}86.\dfrac{5}{2\pi} \approx 0{,}68$ minutes

$t_1 \approx 2{,}5 - 0{,}68 \approx 1{,}82$ minutes

- Stratégie liée au modèle O :

Avec h = 35 m, on a : $22 - 20 \cos(2\pi t_1/5) = 35$

$\Leftrightarrow \cos(2\pi t_1/5) = -0{,}65$

$\Leftrightarrow 2\pi t_1/5 \approx 0{,}73\pi$

$\Leftrightarrow 2t_1/5 \approx 0{,}73$

$\Leftrightarrow 2t_1 \approx 3{,}65$

$\Leftrightarrow t_1 \approx 1{,}83$ minutes

Tóm tắt

Tựa đề luận án: Khái niệm tuần hoàn trong dạy học khoa học ở Pháp và Việt Nam : đồ án sư phạm đưa vào các hàm số tuần hoàn bằng mô hình hóa

Đối tượng trung tâm của nghiên cứu là sự mô hình hóa toán học các hiện tượng tuần hoàn trong dạy học ở trung học, đặc biệt là mô hình hóa toán học các hiện tượng tuần hoàn theo thời gian.

Nghiên cứu khởi đầu từ một ghi nhận do sự so sánh việc dạy học giữa Pháp và Việt Nam: hoặc người ta tránh dạy học mô hình hóa bằng cách xây dựng mối quan hệ giữa toán học và các môn khoa học khác như một mối quan hệ ứng dụng (Việt Nam), hoặc người ta khuyến khích sự quan tâm đến mô hình hóa nhưng không cung cấp cho giáo viên những phương tiện để dạy học nó (Pháp).

Tuần hoàn là khái niệm trung tâm trong quá trình mô hình hóa các hiện tượng có tính chu trình và các hiện tượng dao động. Trong sự hình thành khoa học của khái niệm này, các hàm số tuần hoàn, đặc biệt là các hàm số lượng giác được hình thành như những công cụ mô hình hóa các đại lượng biến thiên trở lại cùng một trạng thái một cách đều đặn và vô hạn theo thời gian.

Từ một điều tra khoa học luận về các các hiện tượng tuần hoàn theo thời gian được nghiên cứu bởi Vật lý, chúng tôi xác định hai mô hình toán học C (các chuyển động tròn đều) và O (các dao động điều hòa) với những hệ thống biểu đạt đồ thị và đại số khác nhau. Việc phân tích thể chế cho phép xem xét, so sánh sự hiện diện của hai mô hình trên trong dạy học toán, vật lý ở trung học Pháp và Việt Nam. Kết quả phân tích thể chế chỉ rõ sự mờ nhạt của việc nối khớp hai mô hình đó trong dạy học. Nó cũng cho thấy sự thiếu vắng các kĩ thuật để thực hiện bước chuyển từ mô hình này sang mô hình khác trong khi đây là một trong những cái được thua của chính việc mô hình hóa.

Phần thực nghiệm bao gồm một bộ câu hỏi cho học sinh Việt Nam và một đồ án sư phạm. Đồ án này tổ chức việc xây dựng (trong một môi trường hình học động) các hàm số tuần hoàn như mô hình của các hiện tượng đồng biến thiên tuần hoàn nhờ sự nối khớp giữa hai mô hình C và O.

Từ khóa: tuần hoàn và hàm số tuần hoàn, mô hình hóa, hình học động.

Résumé

L'objet central de l'étude est la modélisation mathématique de phénomènes périodiques dans l'enseignement secondaire, plus particulièrement celle des phénomènes périodiques temporels.

L'étude part d'un constat établi en comparant les enseignements secondaires français et vietnamien : soit on évite l'enseignement de la modélisation mathématique en concevant le rapport des mathématiques aux autres disciplines scientifiques comme un rapport d'application (Viêt Nam), soit on préconise la prise en compte de la modélisation mathématique sans donner les moyens aux enseignants de mathématiques de l'enseigner (France).

La périodicité est le concept central dans le processus de modélisation des phénomènes cycliques et des phénomènes oscillatoires. Dans la genèse scientifique de ce concept, les fonctions périodiques, notamment les fonctions trigonométriques, se sont constituées progressivement comme modèles de grandeurs variables en général en fonction du temps, qui retournent régulièrement et indéfiniment au même état.

A partir d'une enquête épistémologique sur les phénomènes périodiques temporels étudiés par la Physique, nous repérons deux modèles mathématiques, C (mouvements circulaires uniformes) et O (oscillations harmoniques) avec leurs différents registres, graphique et algébrique. Une analyse institutionnelle examine et compare la présence de ces deux modèles dans les enseignements secondaires de mathématiques et de physique, en France et au Viêt Nam. Cette analyse met en évidence la faiblesse de l'articulation entre ces deux modèles et l'absence de technique pour effectuer le passage de l'un des modèles à l'autre, alors qu'il s'agit d'un des enjeux de la modélisation elle-même.

Le dispositif expérimental se compose d'un questionnaire aux élèves vietnamiens et d'une ingénierie didactique qui organise, dans un environnement de géométrie dynamique et en articulant les deux modèles C et O, la construction de fonctions périodiques comme modèles de phénomènes de co-variations périodiques.

Mots clés : périodicité et fonction périodique, modélisation, géométrie dynamique