



**HAL**  
open science

# Simplification de modèles éléments finis de structures à comportement dynamique de poutre.

Stéphane Corn

► **To cite this version:**

Stéphane Corn. Simplification de modèles éléments finis de structures à comportement dynamique de poutre.. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Franche-Comté, 1998. Français. NNT : . tel-00625123

**HAL Id: tel-00625123**

**<https://theses.hal.science/tel-00625123>**

Submitted on 20 Sep 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à

L'U.F.R. DES SCIENCES ET TECHNIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ  
DE FRANCHE-COMTÉ**  
Spécialité Sciences pour l'Ingénieur

**SIMPLIFICATION DE MODÈLES ÉLÉMENTS  
FINIS DE STRUCTURES À COMPORTEMENT  
DYNAMIQUE DE POUTRE**

par

**Stéphane CORN**

**Soutenue le 26 Novembre 1998 devant la Commission d'Examen :**

**Président-Rapporteur**

J.L. BATOZ            Professeur, Université de Technologie de Compiègne

**Rapporteur**

G. COFFIGNAL        Professeur, École Nationale Supérieure d'Arts et  
Métiers, Paris

**Examineurs**

G. LALLEMENT        Professeur, Université de Franche-Comté  
J. PIRANDA            Professeur, Université de Franche-Comté  
N. BOUHADDI         Maître de conférences, Université de Franche-Comté  
C. STAWICKI           Ingénieur de recherche, PSA Peugeot Citroën, Vélizy

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser mes très sincères remerciements à Messieurs les Professeurs J.L. BATOZ et G. COFFIGNAL qui ont accepté de s'intéresser à cette thèse et m'ont tous deux fait l'honneur d'en être les rapporteurs.

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire a été réalisé au Laboratoire de Mécanique Appliquée R. Chaléat sous la direction de Monsieur le Professeur J. PIRANDA. La confiance qu'il m'a accordée et la constante pertinence de ses conseils ont orienté cette étude et permis de la mener à bien. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Cette thèse a également été encadrée par Monsieur N. BOUHADDI. Je tiens à le remercier pour son aide efficace et amicale, ainsi que pour la rigueur scientifique qu'il a su communiquer à notre travail de recherche.

Je remercie cordialement Monsieur le Professeur G. LALLEMENT et Monsieur C. STAWICKI pour leur participation au jury de soutenance et leurs diverses contributions à cette étude.

Merci également à Monsieur le Professeur R. FILLOD pour m'avoir initié aux aspects expérimentaux des vibrations des structures mécaniques.

Enfin, j'adresse mes plus vifs remerciements à toutes les personnes que j'ai eu l'occasion de côtoyer au sein du LMARC et, en particulier, mes collègues docteurs et doctorants de l'équipe Dynamique des Structures. Ces quelques années passées à Besançon sont empreintes de leur sympathie.

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>1</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>Chapitre 1 Formulation continue de poutre</b>	<b>9</b>
1.1 Cinématique générale .....	9
1.1.1 Description géométrique et définitions.....	9
1.1.2 Description cinématique .....	14
1.1.3 Déformations et contraintes .....	18
1.1.4 Définition et propriétés des efforts .....	20
1.1.5 Relations efforts - déformations .....	21
1.2 Relations d'équilibre.....	25
1.2.1 Énergie de déformation .....	25
1.2.2 Énergie cinétique.....	27
1.2.3 Équations complètes du mouvement .....	28
1.3 Vibrations de flexion des poutres symétriques .....	32
1.3.1 Modèle de Euler-Bernoulli .....	33
1.3.2 Modèle de Timoshenko.....	35
<b>Chapitre 2 Élément fini général de poutre</b>	<b>45</b>
2.1 Élément fini de flexion plane .....	45
2.1.1 Élément à deux noeuds et deux ddl par noeud .....	45
2.1.2 Validation du modèle de Timoshenko .....	51
2.1.3 Nouvelles approches .....	54

2.2	Élément général de poutre tridimensionnelle .....	61
2.2.1	Matrice de raideur.....	61
2.2.2	Matrice de masse.....	63
<b>Chapitre 3</b>	<b>Identification des paramètres</b>	<b>67</b>
3.1	Méthode d'identification .....	67
3.1.1	Réduction numérique du modèle tridimensionnel.....	68
3.1.2	Identification de la poutre équivalente.....	71
3.2	Validation de la méthode .....	76
3.2.1	Cas où les centres C et G sont confondus.....	76
3.2.2	Cas où les centres C et G sont distincts .....	82
3.3	Qualification a priori des modes de poutre .....	90
3.4	Stabilité de l'identification .....	95
<b>Chapitre 4</b>	<b>Application à l'homogénéisation</b>	<b>99</b>
4.1	Poutre composite .....	99
4.1.1	Méthode classique d'homogénéisation.....	100
4.1.2	Méthode proposée .....	101
4.2	Simulations numériques .....	103
4.2.1	Structure à discontinuités uniformément réparties.....	103
4.2.2	Structure fortement discontinue .....	106
4.2.3	Structure treillis de poutres .....	110
<b>Chapitre 5</b>	<b>Applications industrielles</b>	<b>115</b>
5.1	Contexte de l'étude.....	115
5.2	Adaptation de la méthode .....	116
5.2.1	Structure « montant de pare-brise » .....	116
5.2.2	Structure « pied milieu » .....	134
5.2.3	Influence du découpage en zones.....	137
5.3	Mise en œuvre informatique.....	142
	<b>Conclusion générale</b>	<b>145</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>147</b>
	<b>Annexes</b>	<b>151</b>

# Notations

$A$	Aire de la section droite
$C$	Centre de torsion de la section droite
$E$	Module d'élasticité du matériau
$G$	Centre de gravité de la section droite
$G$	Module de cisaillement du matériau
$I_n$	Matrice identité d'ordre $n$
$I_y$	Moment quadratique d'inertie autour de l'axe $y_p$
$I_z$	Moment quadratique d'inertie autour de l'axe $z_p$
$I_C$	Moment polaire d'inertie
$J$	Constante de torsion
$K$	Matrice de raideur
$\tilde{K}$	Matrice de raideur (numérique)
$K^p$	Matrice de raideur de la poutre dans les axes principaux
$K_C$	Matrice de raideur de la poutre exprimée au point C
$K_1, K_2$	Matrices génératrices (dépendant des rigidités)
$L$	Longueur de l'élément fini de poutre
$M_y$	Moment fléchissant autour de l'axe $y_p$
$M_z$	Moment fléchissant autour de l'axe $z_p$
$M$	Matrice de masse
$\tilde{M}$	Matrice de masse (numérique)
$M^p$	Matrice de masse de la poutre dans les axes principaux
$M_C$	Matrice de masse de la poutre exprimée au point C
$N_j$	Noeud de jonction (sections terminales)
$N_v$	Fonction d'interpolation en déplacement
$N$	Effort longitudinal de traction
$O$	Origine du référentiel local

$Q_1, Q_2$	Matrices génératrices (dépendant des coordonnées de C et G)
$R$	Matrice de changement de base
$S$	Section droite courante
$T_y$	Effort tranchant suivant l'axe $y_p$
$T_z$	Effort tranchant suivant l'axe $z_p$
$T_g$	Transformation de Guyan
$T_S$	Transformation cinématique rigide
$T$	Énergie cinétique de la poutre
$U_P$	Vecteur de déplacement au point P
$W$	Énergie de déformation de la poutre
$e$ (%)	Erreur relative (en %)
$f$	Fréquence propre de la poutre (formulation continue)
$f$	Fréquence propre du modèle équivalent
$f_R$	Fréquence propre du modèle de référence
$k_y$	Coefficient de cisaillement suivant l'axe $y_p$
$k_z$	Coefficient de cisaillement suivant l'axe $z_p$
$l$	Longueur de la poutre
$m_T$	Masse totale de la poutre
$n$	Nombre d'éléments finis, Rang du mode propre
$q$	Vecteur des inconnues nodales
$r$	Rayon de giration de la section
$u_P v_P w_P$	Composantes du vecteur de déplacement au point P
$v$	Déplacement transverse suivant l'axe $y_p$
$x_p y_p z_p$	Directions du référentiel principal
$x_o y_o z_o$	Directions du référentiel global
$y_C z_C$	Coordonnées du point C dans le référentiel principal
$y_G z_G$	Coordonnées du point G dans le référentiel principal
$\Gamma$	Contour de la section droite
$\Pi$	Domaine de l'espace occupé par la poutre
$\Theta$	Vecteur de rotation instantanée
$\Omega$	Paramètre adimensionnel relatif à la fréquence propre
$\alpha$	Paramètre adimensionnel lié à l'élanement
$\beta$	Paramètre fréquentiel associé à la formulation de Bernoulli
$\chi$	Paramètre adimensionnel lié au gauchissement
$\delta$	Élanement de la poutre
$\phi_y$	Facteur lié au cisaillement suivant l'axe $y_p$
$\phi_z$	Facteur lié au cisaillement suivant l'axe $z_p$

$\eta$	Paramètre adimensionnel lié à l'élanement et au cisaillement
$\varphi$	Fonction de gauchissement
$\lambda$	Valeur propre
$\mu$	Critère de qualification des modes de type poutre
$\nu$	Coefficient de Poisson, Rang du mode propre
$\theta_x \theta_y \theta_z$	Composantes du vecteur de rotation instantanée
$\rho$	Masse volumique du matériau
$\tau$	Paramètre fréquentiel associé à la formulation de Timoshenko
$\omega$	Pulsation propre
$\xi$	Critère de déformabilité des sections
$\psi$	Rotation de la section autour de l'axe $z_p$
$(.)^T$	Transposé d'une matrice ou d'un vecteur
$(.)^{-1}$	Inverse d'une matrice
$(.)^+$	Pseudo-inverse de Moore-Penrose
$\  \cdot \ $	Norme euclidienne





# Introduction générale

L'amélioration de la qualité d'un produit et la réduction des coûts de fabrication sont des soucis permanents pour l'industrie, et ce, quel que soit le secteur d'activité considéré : automobile, aéronautique, spatial, énergétique, génie civil, ... Dans ce contexte, la prédiction du comportement d'une structure mécanique constitue une étape incontournable de sa conception, et elle nécessite une modélisation mathématique fiable.

Les structures que l'on étudie ne peuvent que rarement être représentées par un modèle analytique continu. On peut alors avoir recours à une discrétisation du solide élastique considéré, effectuée dans la plupart des cas par la méthode des éléments finis. Cette méthode, longtemps réservée à des spécialistes, a connu un essor considérable ces dernières décennies grâce aux progrès réalisés en informatique tant sur le plan matériel (puissance de calcul) que logiciel (confort d'utilisation, interactivité).

Aujourd'hui, les codes de calcul sont couplés avec les logiciels de conception (CAO). Il est ainsi possible de réaliser des maillages extrêmement proches de la géométrie réelle d'une structure, permettant d'aboutir à une représentation précise de son comportement. Cependant, cela conduit forcément à des modèles possédant un très grand nombre de degrés de liberté (ddl). À titre d'exemple, le modèle fin d'une caisse de véhicule automobile comporte couramment plusieurs centaines de milliers de ddl. En pratique, de tels modèles sont inexploitablement en raison des coûts de calcul (temps et place mémoire) qu'ils entraînent.

En fait, lors d'une étude de pré-dimensionnement ou d'optimisation paramétrique, un modèle simplifié de taille raisonnable est indispensable. Il

permet d'effectuer facilement des calculs répétitifs ainsi que des réanalyses rapides. Aussi, des stratégies visant à réduire la taille des modèles ont alors été mises au point. Citons par exemple les techniques de sous-structuration dynamique telles que les méthodes à interfaces bloquées ou libres, ou encore la condensation de Guyan. Ces stratégies sont généralement fiables pour décrire le comportement dynamique d'une structure mécanique dans un domaine fréquentiel donné, le modèle qui en résulte étant alors purement numérique.

Il est notoire que beaucoup de structures industrielles sont constituées d'un grand nombre de sous-structures qui présentent un comportement global de poutre dans le domaine fréquentiel d'utilisation. C'est en particulier le cas des véhicules automobiles, dont l'ossature comporte des composants tubulaires (tels que montants et raidisseurs) modélisés finement, le plus souvent par des éléments finis de type coque. Le principe de réduction de modèle proposé dans ce mémoire consiste à simplifier ces modèles par des *poutres équivalentes*. On montre qu'il est alors possible de réduire de manière drastique la taille du modèle éléments finis sans dégradation significative de la précision. De plus, ces éléments équivalents ont l'avantage, par rapport aux méthodes habituelles de condensation, de présenter un paramétrage physique explicite, directement adaptable dans une procédure d'optimisation de comportement. Les modèles simplifiés ainsi obtenus sont des super-éléments qui peuvent ensuite être assemblés avec les autres composants de la structure complète comme des éléments finis ordinaires.

Afin de mettre en œuvre l'élément fini de poutre équivalent, il est nécessaire de disposer d'une formulation continue de poutre la plus générale possible qui permet de prendre en compte les effets de cisaillement transverse ainsi que le couplage statique et dynamique entre les effets de traction-flexion et torsion-flexion. Dans cette formulation, qui fait l'objet du Chapitre 1, on s'intéresse au cas des poutres droites uniformes basées sur le modèle mécanique de Timoshenko. On met alors en évidence des phénomènes vibratoires propres aux poutres de faible élancement.

La formulation de l'élément fini correspondant, avec une cinématique classique à six ddl par noeud, est établie à partir de critères d'équivalence énergétique entre le modèle discret et le modèle continu. Ce travail est décrit de manière détaillée dans le Chapitre 2 de ce mémoire.

En pratique, les sous-structures qui présentent un comportement global de poutre (exemple : corps creux, profilés, ...) sont modélisées par des éléments finis tridimensionnels (type coque). La méthode de simplification proposée est explicitée dans le Chapitre 3. Elle consiste, dans un premier temps, à condenser le modèle initial, et ensuite, à identifier tous les paramètres constituant le modèle de poutre associé. Il est clairement établi que ces paramètres peuvent être identifiés essentiellement à partir d'une confrontation directe analytique-numérique des matrices de rigidité.

De nombreux tests numériques sont présentés. Ils mettent en évidence les performances de la stratégie élaborée. Son domaine d'application est large. Dans le Chapitre 4, on montre qu'il s'étend au problème de l'homogénéisation de modèles. En effet, certaines structures mécaniques peuvent présenter des discontinuités matérielles ou géométriques et avoir néanmoins un comportement global de poutre en basses fréquences. L'identification des paramètres du modèle « homogène » de poutre par la méthode proposée est possible et donne des résultats satisfaisants, alors que les méthodes classiques basées sur un calcul effectué à partir de la seule section droite s'avèrent inefficaces dans ce cas.

Cette étude a été initiée par une collaboration industrielle, dans le cadre d'un contrat de recherche. Le Chapitre 5 de ce mémoire est enfin consacré à l'adaptation et la validation de la stratégie proposée à des structures de géométrie complexe. Il met en évidence la capacité de la méthode à représenter des structures industrielles par des poutres équivalentes, ainsi que les performances du logiciel d'application qui a été développé à cet effet.



# Chapitre 1

## Formulation continue de poutre

Ce chapitre a pour but d'introduire les notions de base nécessaires à la compréhension de ce mémoire. On y présente une formulation continue de poutre suffisamment générale pour représenter le comportement statique et dynamique des poutres droites uniformes de section quelconque. Cette formulation est basée sur une cinématique de type Timoshenko prenant en compte les effets de cisaillement transverse pour la flexion, et sur un modèle avec gauchissement longitudinal pour la torsion. Les équations générales du mouvement sont établies, puis résolues dans le cas des poutres de section symétrique mettant ainsi en évidence certains phénomènes vibratoires associés aux poutres de faible élancement. Les résultats obtenus constituent un point de départ ainsi qu'une référence pour l'étude par éléments finis présentée par la suite.

### 1.1 Cinématique générale

#### 1.1.1 Description géométrique et définitions

Considérons une *poutre droite uniforme*. Cette dénomination désigne un solide cylindrique (ou prismatique) droit de longueur  $l$ , constitué d'un matériau homogène élastique et isotrope, occupant un domaine de l'espace noté  $\Pi$ .

Soit  $x_p$  un vecteur unitaire, parallèle aux génératrices de la poutre, définissant ainsi sa direction longitudinale. Soit  $x$  la coordonnée associée à cette direction. On appelle *section droite* tout plan matériel orthogonal à  $x_p$ . On note  $S$  la section droite d'abscisse  $x$ ,  $S_1$  et  $S_2$  les sections extrémités ( $x=0$  et  $x=l$ ) appelées « bases ». On suppose que les dimensions des bases sont relativement petites par rapport à la longueur de la poutre.

La surface latérale de la poutre est libre de toute action extérieure, et les forces volumiques sont supposées nulles. Les seules sollicitations mécaniques extérieures sont des charges surfaciques appliquées sur les bases  $S_1$  et  $S_2$ . Conformément au principe de Saint-Venant [21,38,39], on peut ignorer la distribution réelle de ces charges, et fixer notre attention sur leur torseur. C'est en ce sens que l'on parlera de poutre subissant un effort normal, un couple, etc... C'est une façon de s'exprimer qui n'indique pas forcément que l'on ait affaire à des charges concentrées.

Ainsi, on considère que les efforts appliqués sur les bases induisent dans la poutre un champ de contraintes dont l'action sur chaque section droite  $S$  peut être représentée par un torseur. Ses éléments de réduction sont une résultante notée  $R$  et un couple résultant noté  $C$ .

La résultante  $R$  des forces appliquées à  $S$  peut être décomposée en :

- une composante suivant  $x_p$ , notée  $N$ , appelée *effort normal*
- une composante  $T$  contenue dans le plan de  $S$ , appelée *effort tranchant*.

Le couple résultant  $C$  peut être décomposé en :

- un moment autour de  $x_p$ , noté  $M_x$ , appelé *moment de torsion*
- un moment  $M$  contenu dans le plan de  $S$ , appelé *moment fléchissant*.

Pour chaque section droite  $S$  de la poutre, on peut définir deux points remarquables : le centre de gravité  $G$  et le centre de torsion  $C$ .

### Centre de gravité - Axe neutre

Soit  $P$  un point courant de la section droite  $S$ . Soit  $\rho$  la masse volumique du matériau. Le *centre de gravité*  $G$ , appelé également *centre d'inertie* ou *centre de masse*, est défini classiquement par :

$$\iint_S \rho GP \, dS = 0 \quad (1.1)$$

Pour un matériau homogène, cela revient à écrire :

$$\iint_S GP \, dS = 0 \quad (1.2)$$

Dans ce cas, on montre qu'un effort normal appliqué en G ne produit que des déformations longitudinales constantes sur la section [3].

De plus, d'après le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti, un moment fléchissant seul ne produit pas de déformations longitudinales au point G [26].

Le lieu géométrique des centres de gravité G de toutes les sections droites est un axe, de vecteur directeur  $x_p$ , appelé *axe neutre*.

### Centre de torsion - Axe élastique

Par définition, le *centre de torsion* C d'une section droite S est le point qui reste fixe lorsque la section est seulement soumise à un moment de torsion. En d'autres termes, quand on applique un couple  $M_x$  à la poutre, chaque génératrice au sein de la poutre, initialement parallèle à l'axe  $x_p$ , devient une courbe hélicoïde, sauf une seule qui demeure rectiligne. La trace de cette droite dans le plan de la section définit le centre de torsion.

D'après le théorème de réciprocité, un effort tranchant appliqué au point C ne produit aucune rotation des sections droites autour de  $x_p$ . C'est pourquoi le point C est parfois appelé *centre de cisaillement*, ou même *centre de flexion*. Citons Mandel [34] : « pour que l'on ait flexion sans torsion, il faut et il suffit que la ligne d'action de la force passe par un point appelé centre de torsion de la section droite ».

Le lieu géométrique des centres de torsion C de toutes les sections droites est un axe, de vecteur directeur  $x_p$ , appelé *axe élastique*.

Pour une section homogène, la position du centre de torsion est une caractéristique géométrique de la section (contrairement aux sections composites, pour lesquelles la position de C dépend de la géométrie et des constantes matérielles de chaque couche).



Remarques :

- si la poutre est constituée par plusieurs parois minces dont l'intersection forme un seul axe, ce dernier coïncide quasiment avec l'axe élastique [3].
- si la section droite possède un axe de symétrie, le point C est situé sur cet axe. Il en est évidemment de même pour le point G. Par conséquent, si la section droite possède au moins deux axes de symétrie, les points C et G sont confondus et situés à l'intersection de ces axes.

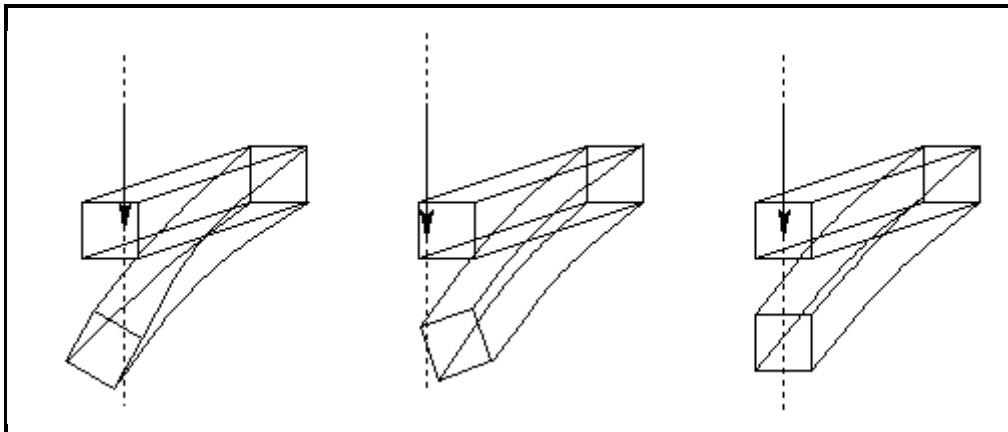


Figure 1.1 : Détermination expérimentale du centre de torsion

De manière pratique, on peut procéder à une détermination empirique de la position du centre de torsion à partir de sollicitations terminales transverses successives, comme cela est illustré schématiquement Figure 1.1 pour une poutre console de section rectangulaire pleine.

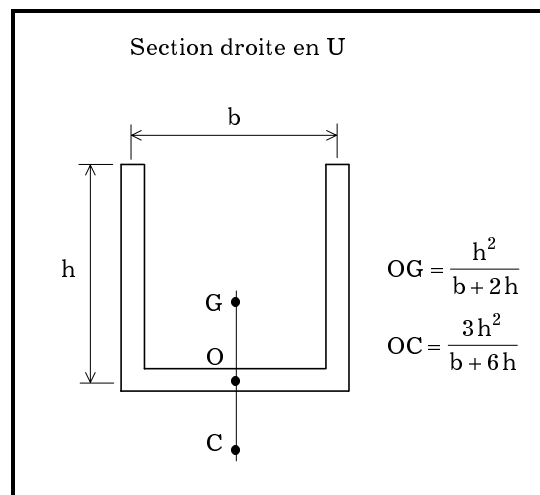


Figure 1.2 : Positions de G et C pour une section en U

Dans le cas de sections droites de forme relativement simple, il existe des formules qui donnent la position de  $G$ , et surtout celle de  $C$  [3,37]. Un exemple est donné Figure 1.2 pour le cas d'une section en U de faible épaisseur. Toutefois, le calcul analytique des coordonnées de  $C$  pour des formes moins académiques de la section droite est en général un problème difficile, dont l'étude a donné lieu à de nombreuses publications [36,46]. On peut alors avoir recours à des méthodes numériques basées sur la discrétisation de la section droite, ou bien sur la technique des équations intégrales de frontière [12,15].

### Axes principaux d'inertie

Notons  $C_1$  le centre de torsion de  $S_1$  et  $C_2$  le centre de torsion de  $S_2$ , dont les positions sont supposées connues. Considérons un référentiel orthonormé direct  $(C_1, x_p, y_p, z_p)$  d'origine  $C_1$ , tel que :  $x_p$  oriente l'axe élastique,  $y_p$  et  $z_p$  sont les *directions principales d'inertie* définies comme suit.

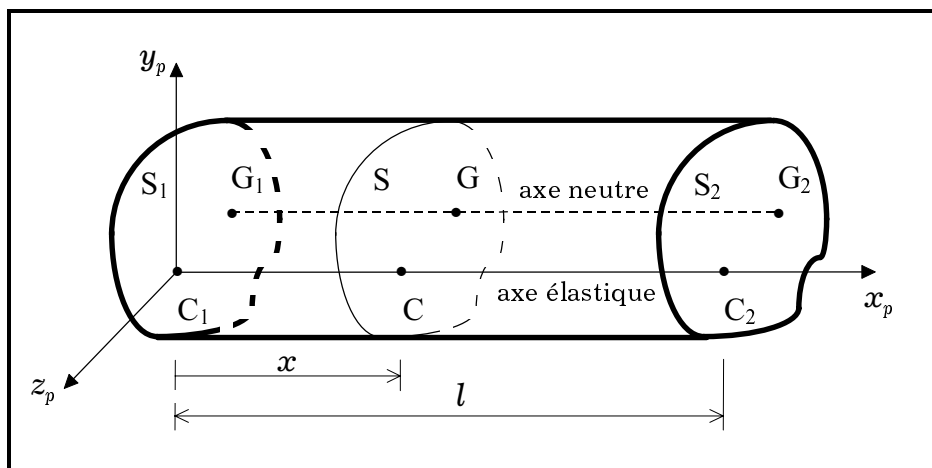


Figure 1.3 : Description géométrique de la poutre

Désignons par  $P$  un point courant dont les coordonnées sont  $(x, y, z)$  dans le référentiel ainsi défini, et par  $(\bar{y}_G, \bar{z}_G)$  les coordonnées transverses de  $G$  par rapport à  $C$  sur chaque section droite.

L'équation (1.2) peut alors s'écrire :

$$\iint_S (y - \bar{y}_G) dS = 0 \quad (1.3)$$

$$\iint_S (z - \bar{z}_G) dS = 0 \quad (1.4)$$

De plus, les directions  $y_p$  et  $z_p$  étant principales d'inertie, on a par définition :

$$\iint_S (y - \bar{y}_G)(z - \bar{z}_G) dS = 0 \quad (1.5)$$

On définit également  $I_z$  et  $I_y$ , *moments quadratiques d'inertie* de S respectivement autour de  $(G, z_p)$  et  $(G, y_p)$  :

$$I_z = \iint_S (y - \bar{y}_G)^2 dS \quad (1.6)$$

$$I_y = \iint_S (z - \bar{z}_G)^2 dS \quad (1.7)$$

Notons  $A$  l'aire (constante) de chaque section droite S. Les expressions (1.6) et (1.7) permettent d'écrire les formules de transport (dites formules de Steiner) des moments et produits d'inertie :

$$\iint_S y^2 dS = I_z + \bar{y}_G^2 A \quad (1.8)$$

$$\iint_S z^2 dS = I_y + \bar{z}_G^2 A \quad (1.9)$$

$$\iint_S yz dS = \bar{y}_G \bar{z}_G A \quad (1.10)$$

La configuration géométrique et l'orientation de la poutre ainsi définies sont représentées Figure 1.3. Afin d'étudier son comportement mécanique, il est maintenant nécessaire d'introduire des hypothèses cinématiques et de définir un paramétrage adapté.

### 1.1.2 Description cinématique

On se propose d'étudier le comportement d'une poutre dans le cas de sollicitations combinées. C'est à dire que l'on suppose que chaque section droite est soumise à un effort normal  $N$ , un effort tranchant  $T$ , un moment fléchissant  $M$ , et un moment de torsion  $M_x$ .

L'hypothèse cinématique principale prise en compte dans cette étude, connue sous le nom de « modèle de Timoshenko » [44,21], consiste à supposer que **chaque section droite reste plane au cours de la déformation** (Figure 1.4). Cette hypothèse justifie ainsi la démarche permettant de passer de l'étude d'un milieu tridimensionnel à celle d'un milieu curviligne unidimensionnel assimilable à une ligne moyenne, et dont la section droite

courante est considérée comme indéformable. En d'autres termes, on peut dire que le champ de déplacement à l'intérieur de la poutre présente un mouvement « rigidifiant par section ».

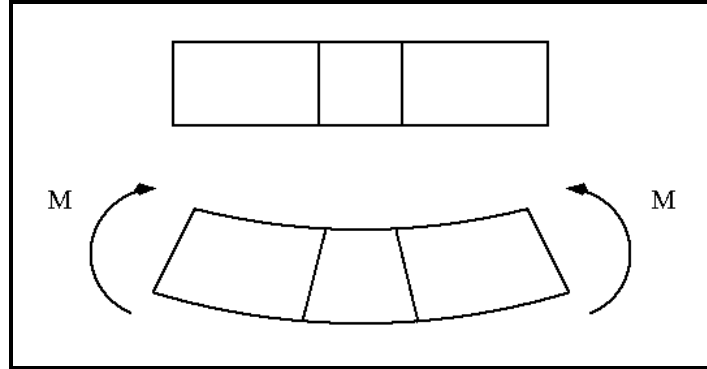


Figure 1.4 : Indéformabilité des sections droites

Soit  $\Theta(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$  le vecteur de rotation instantanée de la section droite courante  $S$ , et  $U_C(u_C, v_C, w_C)$  le vecteur de déplacement au centre de torsion  $C$  de cette section. Ainsi, sous l'hypothèse des petits déplacements, on peut donc déterminer le vecteur de déplacement  $U_P(u, v, w)$  en tout point  $P$  de  $S$  par :

$$U_P = U_C + \Theta \wedge CP \quad (1.11)$$

Cependant, en ce qui concerne la torsion, l'emploi de cette approximation peut être sujet à caution. En effet, quand la poutre n'est pas strictement un solide de révolution, apparaissent sous l'action du moment de torsion des déformations longitudinales hors du plan initial de chaque section droite. Ce phénomène, appelé *gauchissement longitudinal*, a été étudié par de nombreux auteurs [30,34]. Ainsi, afin de prendre en compte cet effet, on est tenu d'enrichir la cinématique par un déplacement additionnel suivant  $x_p$ .

Selon le modèle de torsion de Vlassov [46], la correction longitudinale  $u_\varphi$  ajoutée au déplacement donné par (1.11) est définie par :

$$u_\varphi(x, y, z, t) = \varphi(y, z) \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial x}(x, t) \quad (1.12)$$

où  $\varphi$  est une fonction scalaire appelée *fonction de gauchissement*, caractéristique de la section droite, et  $\frac{\partial \theta_x}{\partial x}$  est le taux de torsion.

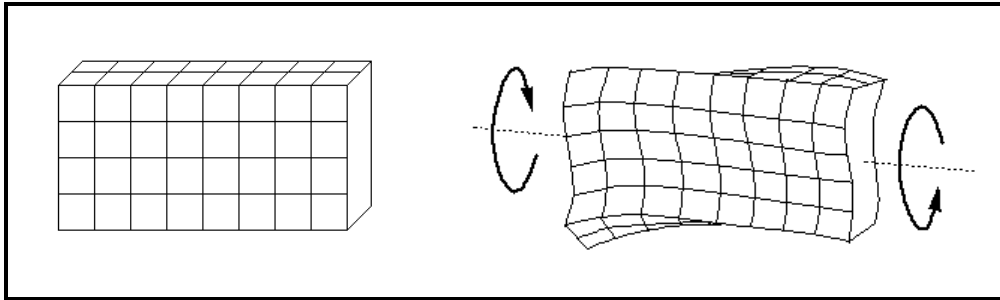


Figure 1.5 : Gauchissement d'une poutre de section rectangulaire

Le vecteur de déplacement total au point P peut donc finalement s'écrire :

$$U_P = U_C + \Theta \wedge CP + u_\varphi x_p \quad (1.13)$$

En projetant cette expression sur les axes, on obtient la forme corrigée du champ de déplacement  $U$  en un point P de S :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_C + z\theta_y - y\theta_z + \varphi \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ v = v_C - z\theta_x \\ w = w_C + y\theta_x \end{array} \right. \quad (1.14)$$

De plus, on souhaite établir une formulation continue de poutre dans laquelle les effets sont découplés en statique. Cela signifie que l'on doit définir les efforts et déplacements de telle manière que, selon la définition donnée par Laroze [28], chaque sollicitation ne travaille que dans les déplacements qu'elle produit. Autrement dit, chaque type d'effort ne doit produire de déplacement que dans sa direction. Or, comme les points C et G sont a priori distincts, il y a un couplage entre les effets de traction, flexion, et torsion si les variables cinématiques de translation (ici  $u_C, v_C, w_C$ ) sont définies toutes au même point.

Toutefois, on a vu précédemment que, par définition du centre de gravité et du centre de torsion, les effets de traction et flexion (due à  $M$ ) sont découplés au point G, et ceux de flexion (due à  $T$ ) et torsion sont découplés au point C. Ainsi, les effets peuvent être simultanément découplés en statique si on prend le soin de décrire les déplacements associés à la traction au point G et les autres déplacements au point C.

En particulier, la relation (1.14) peut être écrite pour le point G de la section courante, et on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_G = u_C + \bar{z}_G \theta_y - \bar{y}_G \theta_z + \varphi \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ v_G = v_C - \bar{z}_G \theta_x \\ w_G = w_C + \bar{y}_G \theta_x \end{array} \right\} \quad (1.15)$$

En combinant (1.14) et (1.15), on peut finalement écrire la forme définitive du champ de déplacement sur la section droite :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_G + (z - \bar{z}_G) \theta_y - (y - \bar{y}_G) \theta_z + \varphi \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ v = v_C - z \theta_x \\ w = w_C + y \theta_x \end{array} \right\} \quad (1.16)$$

Le vecteur de déplacement peut ainsi être considéré comme la superposition d'effets faisant intervenir les variables cinématiques suivantes :

- traction-compression suivant  $x_p$  (variable :  $u_G$ )
- flexion autour de  $z_p$  (variables :  $v_C$  et  $\theta_z$ )
- flexion autour de  $y_p$  (variables :  $w_C$  et  $\theta_y$ )
- torsion autour de  $x_p$  (variable :  $\theta_x$ )
- gauchissement suivant  $x_p$  dû à la torsion (variable :  $\frac{\partial \theta_x}{\partial x}$ ).

### Propriétés du gauchissement

L'étude mathématique du très classique problème de la torsion des poutres droites uniformes avec prise en compte du gauchissement longitudinal par une fonction  $\varphi(y,z)$  a été proposée par Saint-Venant dans le cas de la torsion uniforme ( $\frac{\partial \theta_x}{\partial x}$  constant le long de la poutre), puis reprise et complétée par de nombreux auteurs [31,21,38]. Tous s'accordent à dire que, pour que le champ de cisaillement induit par la torsion vérifie les conditions d'équilibre local, la

fonction  $\varphi$  doit être harmonique en tout point du domaine  $\Pi$  (et donc de  $S$ ), c'est à dire, à laplacien (noté  $\Delta\varphi$ ) nul :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{dans } S \quad (1.17)$$

Notons  $\Gamma$  le contour de la section droite, et  $n$  la normale extérieure (dont les cosinus directeurs sont notés  $n_y$  et  $n_z$ ). On montre [31] que l'hypothèse de non chargement de la surface latérale de la poutre (et donc de  $\Gamma$ ) est satisfaite par  $\varphi$  à condition que l'on ait pour tout point de  $\Gamma$  :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} n_z = z n_y - y n_z \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.18)$$

Les conditions (1.17) et (1.18) forment pour  $\varphi(y,z)$  un problème de Neumann, permettant théoriquement de déterminer  $\varphi$  à une constante additive près.

La fonction de gauchissement est complètement déterminée si on pose les relations supplémentaires suivantes :

$$\iint_S \varphi \, dS = 0 \quad (1.19)$$

$$\iint_S y \varphi \, dS = 0 \quad (1.20)$$

$$\iint_S z \varphi \, dS = 0 \quad (1.21)$$

où (1.19) est la condition d'unicité de  $\varphi$ , (1.20) et (1.21) étant des propriétés dues à la définition du centre de torsion [34].

### 1.1.3 Déformations et contraintes

Conformément à l'hypothèse des petites déformations, le tenseur des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  s'exprime de façon linéaire en fonction du gradient (noté  $\nabla$ ) du champ de déplacement  $U$  par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla U + \nabla^T U) \quad (1.22)$$

Les composantes non nulles du tenseur des déformations, calculées à partir de l'expression (1.16), sont alors :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_G}{\partial x} + (z - \bar{z}_G) \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - (y - \bar{y}_G) \frac{\partial \theta_z}{\partial x} + \varphi(y, z) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \quad (1.23)$$

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v_C}{\partial x} - \theta_z + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (1.24)$$

$$2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w_C}{\partial x} + \theta_y + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (1.25)$$

Le matériau constitutif de la poutre étant supposé homogène, isotrope, et élastique linéaire, on peut écrire la loi de Hooke entre le tenseur  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  des déformations et le tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$  des contraintes de Cauchy :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \quad (1.26)$$

où  $E$  est le module d'élasticité (ou module de Young),  $\nu$  le coefficient de Poisson, et  $\underline{\underline{I}}$  la matrice identité ( $\underline{\underline{I}} \in \mathbb{R}^{3,3}$ ).

On peut donc écrire les composantes de  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  en fonction de celles de  $\underline{\underline{\sigma}}$ , et en particulier :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (1.27)$$

Or, le fait que la surface latérale de la poutre soit libre s'écrit sur le contour  $\Gamma$  :

$$\sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z = 0 \quad (1.28)$$

Donc, pour des directions de la normale colinéaires à  $y_p$  ou  $z_p$ , on a évidemment sur  $\Gamma$  :

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad (1.29)$$

Puisque les dimensions de la section sont a priori faibles devant la longueur, on ne peut s'attendre à l'apparition de valeurs importantes de ces composantes à l'intérieur de la poutre [39]. On peut donc en tout état de cause négliger ces composantes de  $\underline{\underline{\sigma}}$  par rapport aux autres, ceci conduisant à un problème dit « anti-plan », et écrire :

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (1.30)$$



D'autre part, en ce qui concerne les contraintes de cisaillement, on a :

$$\sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} \quad (1.31)$$

$$\sigma_{xz} = 2G\varepsilon_{xz} \quad (1.32)$$

où  $G$  est le module de cisaillement (ou module de Coulomb), lié aux autres coefficients par la relation classique :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.33)$$

### 1.1.4 Définition et propriétés des efforts

On suppose dorénavant que la poutre est sollicitée sur ses bases par des couples (moments de torsion et moments fléchissants) et des efforts tels que l'effort normal est appliqué en  $G_1$  et  $G_2$  et l'effort tranchant en  $C_1$  et  $C_2$ .

En injectant les expressions (1.24) et (1.25) dans les relations d'élasticité (1.31) et (1.32), on vérifie que le champ des contraintes de cisaillement, noté  $\tau$ , résulte de la superposition de contraintes dues à la flexion et à la torsion, et peut de ce fait être décomposé de la manière suivante :

$$\tau = \tau^F + \tau^T \quad (1.34)$$

les exposants  $F$  et  $T$  faisant respectivement référence à la flexion et à la torsion.

On a effectivement :

$$\tau^F = \begin{cases} \sigma_{xy}^F = G\gamma_{xy} \\ \sigma_{xz}^F = G\gamma_{xz} \end{cases} \quad (1.35)$$

$$\tau^T = \begin{cases} \sigma_{xy}^T = G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - z\right)\frac{\partial\theta_x}{\partial x} \\ \sigma_{xz}^T = G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + y\right)\frac{\partial\theta_x}{\partial x} \end{cases} \quad (1.36)$$

où  $\gamma_{xy}$  et  $\gamma_{xz}$  sont les déformations à l'effort tranchant, définies par :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial v_C}{\partial x} - \theta_z \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w_C}{\partial x} + \theta_y \end{aligned} \quad (1.37)$$

Les relations liant le champ de contraintes induit dans la poutre et les efforts appliqués à la section droite  $S$  sont les suivantes :

- effort normal :

$$N = \iint_S \sigma_{xx} dS \quad (1.38)$$

- effort tranchant :

$$T = \iint_S \tau dS \quad (1.39)$$

Soit, en notant  $T_y$  et  $T_z$  les projections respectives de  $T$  sur  $y_p$  et  $z_p$  :

$$T_y = \iint_S \sigma_{xy} dS \quad (1.40)$$

$$T_z = \iint_S \sigma_{xz} dS \quad (1.41)$$

- moments fléchissants au point  $G$ , respectivement autour de  $y_p$  et  $z_p$  :

$$M_y = \iint_S (z - \bar{z}_G) \sigma_{xx} dS \quad (1.42)$$

$$M_z = - \iint_S (y - \bar{y}_G) \sigma_{xx} dS \quad (1.43)$$

- moment de torsion au point  $C$  :

$$M_x = \iint_S \mathbf{CP} \wedge \boldsymbol{\tau} dS \quad (1.44)$$

ou encore :

$$M_x = \iint_S (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) dS \quad (1.45)$$

### 1.1.5 Relations efforts - déformations

#### Effort normal

La définition (1.38) de  $N$  et l'expression de la contrainte normale (1.30) combinée avec celle de la déformation associée (1.23) permettent d'écrire :

$$N = \iint_S E \left( \frac{\partial u_G}{\partial x} + (z - \bar{z}_G) \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - (y - \bar{y}_G) \frac{\partial \theta_z}{\partial x} + \varphi(y, z) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right) dS \quad (1.46)$$

Toutefois, en introduisant les relations barycentriques (1.3) et (1.4) ainsi que la propriété d'unicité de  $\varphi$  (1.19), cette expression se simplifie en :

$$N = EA \frac{\partial u_G}{\partial x} \quad (1.47)$$

### Moments fléchissants

De façon analogue au calcul de l'effort normal, on exprime les moments fléchissants à l'aide des définitions (1.42) et (1.43) d'une part, et des propriétés (1.3) à (1.7) du référentiel principal d'inertie. Les propriétés (1.19) à (1.21) de la fonction de gauchissement permettent d'éliminer les termes de torsion. Tous calculs faits, on obtient :

$$M_y = EI_y \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad (1.48)$$

$$M_z = EI_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \quad (1.49)$$

### Moment de torsion

On suppose que les efforts tranchants extérieurs sont appliqués sur la poutre au niveau de  $C_1$  et  $C_2$ . La définition du centre de torsion permet alors de conclure que le champ de contraintes résultant de ces efforts ne produit aucun couple en C sur la section droite courante (on peut en trouver une démonstration dans [28]). En d'autres termes, on peut écrire :

$$\iint_S CP \wedge \tau^F dS = 0 \quad (1.50)$$

En combinant cette propriété avec la définition (1.44), le moment de torsion s'exprime donc par :

$$M_x = \iint_S CP \wedge \tau^T dS \quad (1.51)$$

ou encore :

$$M_x = \iint_S (y \sigma_{xz}^T - z \sigma_{xy}^T) dS \quad (1.52)$$

Insistons sur le fait que cette expression n'est vraie qu'à la condition que les efforts tranchant extérieurs soient appliqués en C.

En injectant les relations (1.36) dans (1.52), puis en développant l'expression obtenue, on montre que le moment de torsion  $M_x$  est proportionnel au taux de rotation :

$$M_x = GJ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (1.53)$$

où  $J$  est la *constante de torsion de Saint-Venant*, dont l'expression est :

$$J = \iint_S (y^2 + z^2 + y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial y}) dS \quad (1.54)$$

De plus, on montre (voir Annexe A) que la constante  $J$  peut également s'écrire :

$$J = I_C - \iint_S (\nabla \varphi)^2 dS \quad (1.55)$$

où  $I_C$  est le moment polaire en C, lié aux moments quadratiques d'inertie  $I_y$  et  $I_z$  et à l'aire  $A$  de la section droite par :

$$I_C = I_y + I_z + (\bar{y}_G^2 + \bar{z}_G^2) A \quad (1.56)$$

Le dernier terme de (1.55) étant manifestement de signe positif, on peut conclure que, *quelle que soit la forme de la section droite*,  $J$  est toujours inférieur à  $I_C$ .

### Efforts tranchants

On sait que la distribution de contraintes due à un couple de torsion est telle que sa résultante sur la section est nulle. Par conséquent, on peut énoncer :

$$\iint_S \tau^T dS = 0 \quad (1.57)$$

Ceci peut être vérifié à partir de la définition (1.36) des contraintes de cisaillement issues de la torsion, et des propriétés de la fonction de gauchissement comme l'a montré Love [30].

Ainsi, on peut écrire :

$$T = \iint_S \tau^F dS \quad (1.58)$$

et plus particulièrement, en projetant sur  $y_p$  :

$$T_y = \iint_S \sigma_{xy}^F dS \quad (1.59)$$

Or, la définition (1.35) de la contrainte de cisaillement  $\sigma_{xy}^F$  à partir de la déformation à l'effort tranchant  $\gamma_{xy}(x)$  laisse penser que celle-ci serait constante sur toute une section droite. Ce ne peut être le cas, car cela contredirait l'hypothèse de non chargement de la surface latérale de la poutre. Afin de tenir compte de la répartition réelle non constante de  $\sigma_{xy}^F$ , on introduit un facteur de correction  $k_y$ , communément appelé *coefficient de cisaillement*, tel que :

$$T_y = k_y \iint_S G \gamma_{xy} dS \quad (1.60)$$

Il existe plusieurs façons d'obtenir le coefficient de cisaillement  $k_y$ . Timoshenko [43,] a présenté, dans le cas d'une poutre de section rectangulaire, un calcul basé sur l'hypothèse d'une répartition parabolique de la contrainte de cisaillement transverse  $\sigma_{xy}^F$ . Quant à Reissner, il a déduit la valeur de  $k_y$  en écrivant l'équivalence entre l'énergie de déformation du modèle curviligne et celle due à la distribution exacte de  $\sigma_{xy}^F$ . Dans le cas d'une section rectangulaire, cela conduit à la fameuse valeur  $k_y = \frac{5}{6}$  [29]. La méthode ultérieurement mise en oeuvre par Cowper [11] consiste à calculer  $k_y$  à partir du problème d'élasticité tridimensionnelle de la poutre console. Elle s'avère être plus précise car elle prend simultanément en compte l'expression analytique exacte de  $\sigma_{xy}^F$  et celle de  $\sigma_{xz}^F$ . Dans d'autres travaux, certains auteurs [25,40] font intervenir la variation du coefficient  $k_y$  en fonction des fréquences propres de la poutre.

Toutefois, si l'on veut garder des résultats relativement simples quels que soient la forme de la section droite et le type de conditions aux limites, la définition de  $k_y$  (faisant intervenir le coefficient de Poisson  $\nu$ ) obtenue par Cowper reste la plus satisfaisante. Elle servira de référence pour la suite de ce mémoire et sera même conservée en dynamique, ce qui constitue une approximation dont la validité a été étudiée en détail par Gay [18].

Les valeurs du coefficient de cisaillement pour des formes classiques de la section droite sont données en Annexe B. Citons par exemple :

- $k_y = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$  pour une section rectangulaire pleine (remarquons que si on pose  $\nu = 0$ , cette formule conduit alors à la valeur proposée par Reissner)
- $k_y = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu}$  pour une section circulaire pleine.

Finalement, la relation (1.60) liant l'effort tranchant à la déformation correspondante prend la forme :

$$T_y = k_y G A \gamma_{xy} \quad (1.61)$$

et, de manière analogue, on a pour l'autre direction transverse :

$$T_z = k_z G A \gamma_{xz} \quad (1.62)$$

En résumé, les relations de rigidité (1.47), (1.48), (1.49), (1.53), (1.61) et (1.62) montrent clairement que, avec les définitions proposées, chaque type d'effort produit un déplacement uniquement dans sa propre direction.

Le modèle cinématique de la poutre étant maintenant clairement défini, on se propose d'étudier son comportement statique et dynamique.

## 1.2 Relations d'équilibre

### 1.2.1 Énergie de déformation

Notons  $W^*$  le travail virtuel des efforts internes dans un champ de déplacement virtuel dont les variables cinématiques  $\{u_G^*, v_C^*, w_C^*, \theta_x^*, \theta_y^*, \theta_z^*\}$  sont définies de manière analogue à celles du champ réel. Par définition, on a :

$$W^* = \iiint_{\Pi} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^* \, d\Pi \quad (1.63)$$

ce qui équivaut dans le cas présent à :

$$W^* = \int_0^l \iint_S (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}^* + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy}^* + 2\sigma_{xz} \varepsilon_{xz}^*) \, dS \, dx \quad (1.64)$$

En remplaçant dans cette expression les déformations virtuelles par leurs valeurs déduites des déformations réelles données par (1.23) à (1.25), et en séparant variables de flexion et de torsion, on obtient :

$$\begin{aligned}
 W^* = \int_0^l \iint_S & \left( \sigma_{xx} \frac{\partial u_G^*}{\partial x} + (z - \bar{z}_G) \sigma_{xx} \frac{\partial \theta_y^*}{\partial x} - (y - \bar{y}_G) \sigma_{xx} \frac{\partial \theta_z^*}{\partial x} \right. \\
 & + \sigma_{xy} \gamma_{xy}^* + \sigma_{xz} \gamma_{xz}^* + (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} \\
 & \left. + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \sigma_{xz} \right) \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} + \varphi(y, z) \sigma_{xx} \frac{\partial^2 \theta_x^*}{\partial x^2} \right) dS dx
 \end{aligned} \tag{1.65}$$

Cette écriture met en évidence dans la plupart des termes la présence des efforts définis précédemment. Toutefois, attachons nous plus particulièrement à expliciter les deux derniers termes. Tout d'abord, il est clair que l'on a :

$$\iint_S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \sigma_{xz} \right) dS = - \int_{\Gamma} \varphi \tau \cdot n d\Gamma + \iint_S \varphi \left( \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dS \tag{1.66}$$

où le terme intégré sur  $\Gamma$  est nul car la surface latérale est libre. A partir des propriétés de la fonction de gauchissement et des contraintes de cisaillement, on montre que le terme de (1.66) intégré sur  $S$  est également nul. Donc :

$$\iint_S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \sigma_{xz} \right) dS = 0 \tag{1.67}$$

La présence du dernier terme dans (1.65) est dû à la prise en compte du gauchissement par le modèle proposé. Il permet de faire apparaître un nouvel effort s'exerçant sur la section droite, appelé *bimoment* et noté  $M_\varphi$ , dont la définition est :

$$M_\varphi = \iint_S \varphi(y, z) \sigma_{xx} dS \tag{1.68}$$

Les relations (1.19) à (1.21) combinées à (1.23) et (1.30) permettent de lier le bimoment avec la variable de torsion, et conduisent à :

$$M_\varphi = E I_\varphi \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \tag{1.69}$$

où la constante  $I_\varphi$ , appelée *moment sectoriel* (homogène à  $L^6$ ), est définie par :

$$I_\varphi = \iint_S \varphi^2 dS \tag{1.70}$$

Ces précisions et définitions permettent finalement d'écrire la forme définitive du travail virtuel des efforts internes :

$$W^* = \int_0^l \left( N \frac{\partial u_G^*}{\partial x} + T_y \gamma_{xy}^* + T_z \gamma_{xz}^* + M_y \frac{\partial \theta_y^*}{\partial x} + M_z \frac{\partial \theta_z^*}{\partial x} + M_x \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} + M_\varphi \frac{\partial^2 \theta_x^*}{\partial x^2} \right) dx \quad (1.71)$$

avec :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^* &= \frac{\partial v_C^*}{\partial x} - \theta_z^* \\ \gamma_{xz}^* &= \frac{\partial w_C^*}{\partial x} + \theta_y^* \end{aligned} \quad (1.72)$$

L'expression (1.71) et les relations (1.47), (1.48), (1.49), (1.53), (1.61), (1.62), (1.69) liant les efforts aux déformations permettent d'établir que l'énergie de déformation (notée  $W$ ) est une forme quadratique des variables cinématiques dont l'expression est :

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2} \int_0^l \left( EA \left( \frac{\partial u_G}{\partial x} \right)^2 + k_y GA \left( \frac{\partial v_C}{\partial x} - \theta_z \right)^2 + k_z GA \left( \frac{\partial w_C}{\partial x} + \theta_y \right)^2 \right. \\ \left. + EI_y \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + EI_z \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 + GJ \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + EI_\varphi \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx \end{aligned} \quad (1.73)$$

Cette écriture met clairement en évidence l'absence de couplage statique entre les différents types de déformations.

## 1.2.2 Énergie cinétique

L'énergie cinétique de la poutre dans son mouvement est définie à partir du champ de déplacement  $U(x,y,z,t)$  par :

$$T = \frac{1}{2} \iiint_{\Pi} \rho \dot{U}^2 d\Pi \quad (1.74)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du matériau et  $\dot{U}$  la vitesse de déformation.

Dans le cas présent, on peut séparer l'intégration sur la section puis sur la longueur, et écrire :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \iint_S \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dS dx \quad (1.75)$$



En utilisant la définition (1.16) du champ de déplacement, les relations (1.3) à (1.7), et les propriétés de la fonction de gauchissement, on obtient :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho (A \dot{u}_G^2 + A \dot{v}_C^2 + A \dot{w}_C^2 + I_y \dot{\theta}_y^2 + I_z \dot{\theta}_z^2 + I_C \dot{\theta}_x^2 + 2A(\bar{y}_G \dot{w}_C \dot{\theta}_x - \bar{z}_G \dot{v}_C \dot{\theta}_x) + I_\varphi \left(\frac{\partial \dot{\theta}_x}{\partial x}\right)^2) dx \quad (1.76)$$

Les termes croisés «  $\dot{v}_C \dot{\theta}_x$  » et «  $\dot{w}_C \dot{\theta}_x$  » qui interviennent dans l'énergie cinétique montrent clairement que, contrairement au problème statique pour lequel les effets sont découplés, il existe cependant un **couplage dynamique** entre la flexion et la torsion [3,4,14]. Ce couplage est simplement dû au fait que l'axe élastique et l'axe neutre ne sont pas confondus car la section est a priori de forme quelconque ( $\bar{y}_G \neq 0$  et  $\bar{z}_G \neq 0$ ). Notons d'autre part que l'on retrouve dans l'énergie cinétique un terme issu du gauchissement.

Le calcul de l'énergie cinétique fait intervenir des calculs analogues à celui du travail virtuel  $T^*$  des forces d'inertie. On a, par définition :

$$T^* = - \iiint_{\Pi} \rho \ddot{U} \cdot U^* d\Pi \quad (1.77)$$

On obtient, tous calculs faits :

$$T^* = - \int_0^l \rho (A \ddot{u}_G u_G^* + A \ddot{v}_C v_C^* + A \ddot{w}_C w_C^* + I_y \ddot{\theta}_y \theta_y^* + I_z \ddot{\theta}_z \theta_z^* + I_C \ddot{\theta}_x \theta_x^* + A \bar{y}_G (\ddot{w}_C \theta_x^* + \ddot{\theta}_x w_C^*) - A \bar{z}_G (\ddot{v}_C \theta_x^* + \ddot{\theta}_x v_C^*) + I_\varphi \frac{\partial \ddot{\theta}_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x}) dx \quad (1.78)$$

### 1.2.3 Équations complètes du mouvement

Les équations du mouvement libre de la poutre peuvent être établies à l'aide du principe des travaux virtuels [26] :

$$W^* - T^* = 0 \quad (1.79)$$

cette égalité devant être vérifiée pour tout champ virtuel cinématiquement admissible (i.e. nul aux endroits où les déplacements réels sont imposés).

Afin de séparer les paramètres cinématiques virtuels dans l'expression (1.71) du travail virtuel des efforts internes, on procède à une intégration par parties (par rapport à la variable  $x$ ) qui permet d'aboutir à :

$$\begin{aligned}
 W^* = - \int_0^l \left( \frac{\partial N}{\partial x} u_G^* + \frac{\partial T_y}{\partial x} v_C^* + \frac{\partial T_z}{\partial x} w_C^* + \left( \frac{\partial M_y}{\partial x} - T_z \right) \theta_y^* + \left( \frac{\partial M_z}{\partial x} + T_y \right) \theta_z^* \right. \\
 \left. + \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial x^2} \right) \theta_x^* \right) dx \quad (1.80)
 \end{aligned}$$

$$+ [ N u_G^* + T_y v_C^* + T_z w_C^* + M_y \theta_y^* + M_z \theta_z^* + (M_x - \frac{\partial M_\varphi}{\partial x}) \theta_x^* + M_\varphi \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} ]_0^l$$

où l'expression entre crochets représente les termes intégrés, permettant d'exprimer les relations entre les valeurs aux limites des efforts internes et celles des efforts extérieurs appliqués à la poutre. Notons

$\tilde{F} = \{ N, T_y, T_z, M_y, M_z, (M_x - \frac{\partial M_\varphi}{\partial x}), M_\varphi \}$  l'ensemble des efforts généralisés

appliqués à la section droite,  $\tilde{F}_1$  les efforts extérieurs appliqués sur  $S_1$ , et  $\tilde{F}_2$  sur  $S_2$ . Ainsi, on doit avoir les conditions aux limites suivantes :

$$\tilde{F}_{(x=0)} = -\tilde{F}_1 \quad \text{et} \quad \tilde{F}_{(x=l)} = \tilde{F}_2 \quad (1.81)$$

En procédant également à une intégration par parties sur l'expression (1.78), on obtient pour le travail virtuel des forces d'inerties :

$$\begin{aligned}
 T^* = - \int_0^l \rho \left( A \ddot{u}_G u_G^* + A (\ddot{v}_C - \bar{z}_G \ddot{\theta}_x) v_C^* + A (\ddot{w}_C + \bar{y}_G \ddot{\theta}_x) w_C^* + I_y \ddot{\theta}_y \theta_y^* \right. \\
 \left. + I_z \ddot{\theta}_z \theta_z^* + (A \bar{y}_G \ddot{w}_C - A \bar{z}_G \ddot{v}_C + I_C \ddot{\theta}_x - I_\varphi \frac{\partial^2 \ddot{\theta}_x}{\partial x^2}) \theta_x^* \right) dx \quad (1.82)
 \end{aligned}$$

Par application du principe des travaux virtuels (1.79), les relations (1.80) et (1.82) conduisent à la formulation des six équations d'équilibre local :

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho A \ddot{u}_G \quad (1.83)$$

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} = \rho A (\ddot{v}_C - \bar{z}_G \ddot{\theta}_x) \quad (1.84)$$

$$\frac{\partial T_z}{\partial x} = \rho A (\ddot{w}_C + \bar{y}_G \ddot{\theta}_x) \quad (1.85)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} - T_z = \rho I_y \ddot{\theta}_y \quad (1.86)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial x} + T_y = \rho I_z \ddot{\theta}_z \quad (1.87)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial x^2} = \rho(I_C \ddot{\theta}_x - I_\varphi \frac{\partial^2 \ddot{\theta}_x}{\partial x^2}) + \rho A(\bar{y}_G \ddot{w}_C - \bar{z}_G \ddot{v}_C) \quad (1.88)$$

Les relations entre efforts et déplacements établies précédemment permettent alors d'écrire les équations complètes du mouvement libre d'une poutre uniforme de section quelconque :

$$EA \frac{\partial^2 u_G}{\partial x^2} = \rho A \ddot{u}_G \quad (1.89)$$

$$k_y GA \left( \frac{\partial^2 v_C}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right) = \rho A (\ddot{v}_C - \bar{z}_G \ddot{\theta}_x) \quad (1.90)$$

$$k_z GA \left( \frac{\partial^2 w_C}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) = \rho A (\ddot{w}_C + \bar{y}_G \ddot{\theta}_x) \quad (1.91)$$

$$EI_y \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} - k_z GA \left( \frac{\partial w_C}{\partial x} + \theta_y \right) = \rho I_y \ddot{\theta}_y \quad (1.92)$$

$$EI_z \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial x^2} + k_y GA \left( \frac{\partial v_C}{\partial x} - \theta_z \right) = \rho I_z \ddot{\theta}_z \quad (1.93)$$

$$GJ \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} - EI_\varphi \frac{\partial^4 \theta_x}{\partial x^4} = \rho(I_C \ddot{\theta}_x - I_\varphi \frac{\partial^2 \ddot{\theta}_x}{\partial x^2}) + \rho A(\bar{y}_G \ddot{w}_C - \bar{z}_G \ddot{v}_C) \quad (1.94)$$

Ces équations du mouvement peuvent être considérées comme une généralisation des équations de Vlassov [27] au cas des poutres avec déformation à l'effort tranchant, ce qui va permettre comme on le verra plus loin de décrire avec précision le mouvement des poutres de faible élancement.

### Discussion sur le cas statique

Les équations du mouvement ainsi définies permettent aisément de donner quelques résultats utiles quant à l'étude du cas statique. Par exemple, l'équation (1.89) montre que le déplacement longitudinal  $u_G(x)$  est évidemment une fonction linéaire (et l'effort normal est donc constant).

La relation (1.84) met en évidence un effort tranchant constant dans la poutre, et donc avec (1.87) un moment fléchissant qui varie linéairement. En combinant (1.90) et (1.93), on voit ainsi que le déplacement transverse  $v_C(x)$ ,

appelé également *déformée de l'axe élastique*, est un polynôme du troisième degré en  $x$ . Il en va évidemment de même pour  $w_C(x)$ .

La dernière équation (1.94) concerne la torsion et le gauchissement. Elle s'écrit en statique :

$$\frac{d^4 \theta_x}{dx^4} - \left(\frac{\chi}{l}\right)^2 \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} = 0 \quad (1.95)$$

avec  $\chi = \sqrt{\frac{GJl^2}{EI_\phi}}$ , paramètre adimensionnel dépendant essentiellement de la forme de la section droite. Son intégration montre que  $\theta_x(x)$  est la somme de fonctions linéaires et hyperboliques. Toutefois, on peut avoir recours à certaines simplifications suivant les valeurs de  $\chi$ . En effet, on considère deux cas limites :

- $\chi$  est petit : on remarque alors que  $\theta_x(x)$  est une fonction polynomiale du troisième degré et le bimoment est linéaire. C'est le cas des poutres à parois minces dont la section est ouverte. Le gauchissement y est alors prépondérant devant la torsion simple [1,3]. Si la poutre est encastree, le bimoment appliqué par cet encastrement crée des contraintes axiales non négligeables. Cette configuration, étudiée en détail par Vlassov [46], est généralement connue sous le nom de « torsion gênée ».
- $\chi$  est grand : c'est le cas de la torsion uniforme où  $\theta_x(x)$  est donc linéaire et le bimoment est nul. Cette approximation appelée « torsion libre de Saint-Venant » est exacte pour les poutres de révolution, et valable pour les poutres pleines ou à section fermée. Le gauchissement est alors uniforme et ses effets sont peu importants. Rappelons que, même sous cette hypothèse, on ne peut néanmoins pas confondre la constante de torsion  $J$  avec le moment polaire  $I_C$ .

### 1.3 Vibrations de flexion des poutres symétriques

Considérons une poutre uniforme symétrique par rapport à un plan parallèle à son axe. L'intersection de ce plan avec toute section droite forme un axe de symétrie pour celle-ci. On a vu précédemment que le centre de gravité et le centre de torsion sont alors situés sur cet axe. Ainsi, le plan de symétrie contient l'axe neutre et l'axe élastique et, de plus, l'axe de symétrie constitue évidemment un axe principal d'inertie pour la section droite.

Supposons par exemple que la poutre soit symétrique par rapport au plan principal  $(C_1, x_p, y_p)$ . Le centre de gravité  $G$  de chaque section droite est alors situé sur  $(C, y_p)$  et on a :

$$\bar{z}_G = 0 \quad (1.96)$$

Le mouvement de flexion dans le plan de symétrie se trouve alors découplé de la torsion, et la relation (1.15) permet d'écrire dans ce cas :

$$v_G = v_C \quad (1.97)$$

Afin d'alléger la présentation de cette étude, posons momentanément les simplifications d'écriture suivantes :

$$v = v_C ; \psi = \theta_z ; T = T_y ; M = M_z ; I = I_z ; k = k_y \quad (1.98)$$

D'autre part, on définit la masse linéique  $m$  de la poutre ainsi que le rayon de giration  $r$  de la section droite respectivement par :

$$m = \rho A \quad (1.99)$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (1.100)$$

Les équations (1.84) et (1.87) régissant le mouvement de flexion dans le plan  $(C_1, x_p, y_p)$  s'écrivent alors :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.101)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} + T = m r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.102)$$

$$M = E I \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.103)$$

La formulation de Euler-Bernoulli est la théorie la plus couramment utilisée pour modéliser le comportement dynamique des poutres en flexion. Par la suite, celle-ci a été complétée par Timoshenko pour prendre en compte certains phénomènes, tels que l'inertie rotatoire et le cisaillement transverse, souvent considérés comme secondaires. Cette prise en compte se traduit par de petites corrections sur les résultats de Bernoulli dans le cas d'une poutre élancée. Elle peut toutefois avoir une influence notable dans le cas des poutres de faible élancement, pour lesquelles on peut observer des comportements vibratoires radicalement différents de ceux prévus par la théorie simplifiée de Euler-Bernoulli.

### 1.3.1 Modèle de Euler-Bernoulli

Rappelons brièvement quelques résultats classiques concernant le modèle de flexion de Euler-Bernoulli. Pour les poutres élancées ( $l/r$  grand) la déformation du matériau due au cisaillement est généralement négligeable devant celle due à la flexion pure [33]. On peut alors considérer que la rotation des sections droites est telle que celles-ci restent orthogonales à la fibre neutre. Cinématiquement, cette hypothèse se traduit par :

$$\psi = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.104)$$

En combinant les équations précédentes, on aboutit à l'équation du mouvement sous la forme suivante (initialement proposée par Lord Rayleigh) :

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - m r^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1.105)$$

Si de plus on néglige l'inertie rotatoire des sections droites (ce qui est cohérent puisque  $l/r$  grand), l'équation du mouvement libre prend la forme proposée par Euler et Bernoulli :

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1.106)$$

En effectuant la séparation des variables d'espace et de temps dans l'équation précédente, on montre que la déformée dynamique peut s'écrire :

$$v(x,t) = v(x) \cos \omega t \quad (1.107)$$

$v(x)$  étant la *déformée modale* de la poutre et  $\omega$  la pulsation du mouvement.

L'équation des vibrations (1.106) devient ainsi :

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - \omega^2 m v = 0 \quad (1.108)$$

On peut alors introduire le paramètre fréquentiel adimensionnel  $\beta$  défini par :

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 m l^4}{EI} \quad (1.109)$$

La solution générale de (1.108) est alors une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques et hyperboliques de la forme :

$$v(x) = a \cos\left(\beta \frac{x}{l}\right) + b \sin\left(\beta \frac{x}{l}\right) + c \operatorname{ch}\left(\beta \frac{x}{l}\right) + d \operatorname{sh}\left(\beta \frac{x}{l}\right) \quad (1.110)$$

Les constantes d'intégration  $(a,b,c,d)$  sont déterminées par les conditions aux limites aux deux extrémités de la poutre. Le système linéaire homogène formé en écrivant ces conditions aux limites permet également d'obtenir l'équation aux pulsations propres  $\omega$ .

Par exemple, pour une poutre encastree en  $x=0$  et libre en  $x=l$ , les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} v(0) = 0 & T(l) = 0 \\ \psi(0) = 0 & M(l) = 0 \end{cases} \quad (1.111)$$

Cela conduit à l'équation transcendante :

$$1 + \cos \beta \operatorname{ch} \beta = 0 \quad (1.112)$$

Notons  $\beta_n$  la  $n^{\text{ième}}$  solution de cette équation. Les fréquences propres de la poutre s'écrivent alors :

$$f_n = \frac{\beta_n^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (1.113)$$

On peut calculer ainsi les solutions correspondant à tous les types de conditions aux limites [5]. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Conditions aux Limites	Équation transcendante	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	... $\beta_n$
Guidée-Appuyée	$\cos\beta=0$	1.5708	4.7124	7.8540	$(2n-1)\pi/2$
Encastrée-Libre	$1+\cos\beta\text{ch}\beta=0$	1.8751	4.6941	7.8547	$(2n-1)\pi/2$
Libre-Guidée	$\tan\beta+\text{th}\beta=0$	2.3650	5.4978	8.6394	$(4n-1)\pi/4$
Encastrée-Guidée	$\tan\beta+\text{th}\beta=0$	2.3650	5.4978	8.6394	$(4n-1)\pi/4$
Appuyée-Appuyée	$\sin\beta=0$	3.1416	6.2832	9.4248	$n\pi$
Guidée-Guidée	$\sin\beta=0$	3.1416	6.2832	9.4248	$n\pi$
Libre-Appuyée	$\tan\beta-\text{th}\beta=0$	3.9266	7.0686	10.210	$(4n+1)\pi/4$
Encastrée-Appuyée	$\tan\beta-\text{th}\beta=0$	3.9266	7.0686	10.210	$(4n+1)\pi/4$
Libre-Libre	$1-\cos\beta\text{ch}\beta=0$	4.7300	7.8532	10.996	$(2n+1)\pi/2$
Encastrée-Encastrée	$1-\cos\beta\text{ch}\beta=0$	4.7300	7.8532	10.996	$(2n+1)\pi/2$

Tableau 1.1 : Valeurs non nulles de  $\beta$  pour différentes C.L.

### 1.3.2 Modèle de Timoshenko

Nous nous proposons d'étudier maintenant les vibrations de flexion de la poutre à partir du modèle de Timoshenko tel qu'il a été défini précédemment. A l'inverse de la formulation de Bernoulli, nous ne faisons plus ici l'hypothèse de conservation de l'orthogonalité des sections droites à la fibre neutre. La pente de la déformée est a priori différente de la rotation des sections droites, celles-ci pouvant « glisser » les unes par rapport aux autres [44]. Il s'agit d'un modèle avec prise en compte de la déformation due aux cisaillements et de l'inertie rotatoire des sections droites, ce qui permet ainsi de traiter le cas des poutres de faible élancement.

L'effort tranchant s'exprime en fonction de l'angle de cisaillement par :

$$T = kAG\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \psi\right) \quad (1.114)$$



Les équations du mouvement en fonction des variables de déplacement et de rotation sont, en utilisant les simplifications d'écriture précédentes :

$$kAG \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.115)$$

$$EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + kAG \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) = m r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.116)$$

Ces équations sont couplées en  $v$  et  $\psi$ . En les combinant, on peut toutefois éliminer  $\psi$  et aboutir à une équation différentielle du quatrième ordre en  $v$  :

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - m r^2 \left( 1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + m r^2 \frac{m}{kAG} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = 0 \quad (1.117)$$

Pour un mouvement harmonique de pulsation  $\omega$ , la déformée dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} v(x,t) &= v(x) \cos \omega t \\ \psi(x,t) &= \psi(x) \cos \omega t \end{aligned} \quad (1.118)$$

L'équation (1.117) se transforme alors en :

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + m r^2 \omega^2 \left( 1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{d^2 v}{dx^2} + m \omega^2 \left( \frac{m r^2 \omega^2}{kAG} - 1 \right) v = 0 \quad (1.119)$$

De façon analogue au paramètre fréquentiel  $\beta$  associé au modèle de Bernoulli, définissons le paramètre  $\tau$  associé au modèle de Timoshenko :

$$\tau^4 = \frac{\omega^2 m l^4}{EI} \quad (1.120)$$

Les fréquences propres de la poutre s'écrivent alors :

$$f_n = \frac{\tau_n^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (1.121)$$

Définissons le paramètre adimensionnel suivant :

$$\Omega = \tau^4 = \frac{\omega^2 m l^4}{EI} \quad (1.122)$$

ainsi qu'un paramètre lié à l'inertie rotatoire et un autre au cisaillement :

$$\alpha = \frac{r^2}{l^2} \quad (1.123)$$

$$\eta = \frac{E}{kG} \frac{r^2}{l^2} \quad (1.124)$$

L'utilisation de ce paramétrage, proposé par Gérardin [20], permet d'obtenir l'expression suivante de l'équation du mouvement :

$$l^4 \frac{d^4 v}{dx^4} + l^2 \Omega (\alpha + \eta) \frac{d^2 v}{dx^2} + \Omega (\alpha \eta \Omega - 1) v = 0 \quad (1.125)$$

En outre, cela permet d'écrire d'une part la relation entre la rotation  $\psi$  et le déplacement transverse  $v$  :

$$\psi = \frac{1}{1 - \alpha \eta \Omega} \left( l^2 \eta \frac{d^3 v}{dx^3} + (1 + \eta^2 \Omega) \frac{dv}{dx} \right) \quad (1.126)$$

et d'autre part, l'expression du moment fléchissant et de l'effort tranchant :

$$M l^2 = EI \left( l^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + \eta \Omega v \right) \quad (1.127)$$

$$T l^2 = - \frac{EI}{1 - \alpha \eta \Omega} \left( l^2 \frac{d^3 v}{dx^3} + (\alpha + \eta) \Omega \frac{dv}{dx} \right) \quad (1.128)$$

La solution générale de l'équation différentielle (1.125) est de la forme :

$$v(x) = a \exp\left(\frac{\lambda x}{l}\right) \quad (1.129)$$

et son équation caractéristique en  $\lambda$  est :

$$\lambda^4 + \Omega (\alpha + \eta) \lambda^2 + \Omega (\alpha \eta \Omega - 1) = 0 \quad (1.130)$$

Le discriminant de cette équation (polynomiale en  $\lambda^2$ ) étant toujours positif, ses racines  $\lambda_1^2$  et  $\lambda_2^2$  sont réelles et ont pour expression :

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \frac{-(\alpha + \eta) \Omega - \sqrt{(\alpha - \eta)^2 \Omega^2 + 4 \Omega}}{2} \\ \lambda_2^2 &= \frac{-(\alpha + \eta) \Omega + \sqrt{(\alpha - \eta)^2 \Omega^2 + 4 \Omega}}{2} \end{aligned} \quad (1.131)$$

La solution  $\lambda_1^2$  est toujours négative, mais  $\lambda_2^2$  change de signe lorsque les paramètres satisfont la condition :

$$\alpha \eta \Omega = 1 \quad (1.132)$$

Cette condition entraîne l'existence de **deux domaines fréquentiels de solutions** [18,8] suivant la position de  $\omega$  par rapport à la valeur critique  $\omega_c$  définie par :

$$\omega_c = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{kG}{\rho}} \quad (1.133)$$

qui conduit à une valeur critique  $\tau_c$  du paramètre fréquentiel  $\tau$  :

$$\tau_c = \frac{l}{r} \sqrt[4]{\frac{k}{2(1+\nu)}} \quad (1.134)$$

On montre ainsi que la frontière entre les deux domaines de solutions modales ne dépend que de l'élanement  $\frac{l}{r}$  de la poutre et d'un coefficient relatif au cisaillement transverse. Il est important de noter que la valeur  $\tau = \tau_c$  peut apparaître dans le domaine fréquentiel d'analyse lorsque l'élanement diminue (poutres courtes) ou lorsque  $k$  décroît et donc l'influence du cisaillement augmente (profilés, tubes, caissons).

Pour les modes du premier domaine ( $\tau < \tau_c$ ),  $\lambda_1^2$  est négatif et  $\lambda_2^2$  positif. La déformée modale prend donc la forme suivante :

$$v(x) = a \cos(\lambda_1 \frac{x}{l}) + b \sin(\lambda_1 \frac{x}{l}) + c \operatorname{ch}(\lambda_2 \frac{x}{l}) + d \operatorname{sh}(\lambda_2 \frac{x}{l}) \quad (1.135)$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont des constantes d'intégration déduites des conditions aux limites aux extrémités de la poutre.

Pour le second domaine ( $\tau > \tau_c$ ),  $\lambda_1^2$  et  $\lambda_2^2$  sont tous deux négatifs. On a donc :

$$v(x) = a \cos(\lambda_1 \frac{x}{l}) + b \sin(\lambda_1 \frac{x}{l}) + c \cos(\lambda_2 \frac{x}{l}) + d \sin(\lambda_2 \frac{x}{l}) \quad (1.136)$$

A la frontière ( $\tau = \tau_c$ ),  $\lambda = 0$  étant une racine de multiplicité 2, la solution est :

$$v(x) = a \cos(\lambda_c \frac{x}{l}) + b \sin(\lambda_c \frac{x}{l}) + c x + d \quad (1.137)$$

avec  $\lambda_c$  défini par :

$$\lambda_c = \frac{l}{r} \sqrt{1 + \frac{kG}{E}} \quad (1.138)$$

L'obtention de l'équation aux pulsations à partir des conditions aux limites ainsi que sa résolution analytique conduisent généralement à des calculs fastidieux [18,24]. Toutefois, ceux-ci sont relativement simples pour certaines conditions aux limites. C'est par exemple le cas pour la poutre bi-appuyée ou bi-guidée. Néanmoins, le lecteur pourra trouver en Annexe C des tables complètes donnant les valeurs numériques du paramètre fréquentiel en fonction de l'élanement, et ce pour plusieurs formes de section droite et pour tous les types de conditions aux limites.

### Application au cas bi-appuyé

Pour une poutre bi-appuyée (appelée également bi-articulée), les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} v(0) = 0 & v(l) = 0 \\ M(0) = 0 & M(l) = 0 \end{cases} \quad (1.139)$$

La résolution du système linéaire formé à partir de ces relations appliquées aux expressions de la déformée définies précédemment par (1.135) et (1.136) conduit, **pour les deux domaines fréquents**, au résultat suivant (défini à une constante multiplicative près) :

$$v(x) = v_0 \sin(n\pi \frac{x}{l}) \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.140)$$

En injectant la solution obtenue ( $\lambda = i n \pi$ ) dans l'équation caractéristique (1.130), on aboutit à une équation en  $\Omega$  (toujours avec  $\Omega = \tau^4$ ) :

$$\alpha \eta \Omega^2 - ((\alpha + \eta) n^2 \pi^2 + 1) \Omega + n^4 \pi^4 = 0 \quad (1.141)$$

Notons que pour les poutres élancées, les paramètres  $\alpha$  et  $\eta$  tendent tous deux vers zéro et on obtient alors directement :

$$\tau_n = n \pi = \beta_n \quad (1.142)$$

où  $\beta_n$  est la solution du modèle de Bernoulli (voir Tableau 1.1).

De plus, lorsque  $\alpha = 0$  et  $\eta \neq 0$ , l'équation (1.141) admet pour solution :

$$\tau_n = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \eta n^2 \pi^2}} \beta_n \quad (1.143)$$

et lorsque  $\alpha \neq 0$  et  $\eta = 0$ , la solution est :

$$\tau_n = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \alpha n^2 \pi^2}} \beta_n \quad (1.144)$$

La prise en compte du cisaillement ( $\eta$ ) et de l'inertie rotatoire ( $\alpha$ ) a donc pour effet de diminuer les fréquences propres d'autant plus que l'élancement est faible et que l'ordre du mode est grand. Les fréquences propres données par le modèle de Timoshenko sont donc toujours inférieures à celles du modèle de Bernoulli ( $\tau_n \leq \beta_n$ ). L'erreur commise en utilisant ces dernières reste relativement faible pour les premiers modes mais devient rapidement très importante pour les modes de rang élevé, et ce, quel que soit l'élancement.

Soient  $\Omega_{n1}$  et  $\Omega_{n2}$  les racines (positives) de l'équation (1.141) ( $\Omega_{n1} \leq \Omega_{n2}$ ) :

$$\begin{aligned} \Omega_{n1} &= \frac{(\alpha + \eta) n^2 \pi^2 + 1 - \sqrt{((\alpha + \eta) n^2 \pi^2 + 1)^2 - 4\alpha \eta n^4 \pi^4}}{2\alpha \eta} \\ \Omega_{n2} &= \frac{(\alpha + \eta) n^2 \pi^2 + 1 + \sqrt{((\alpha + \eta) n^2 \pi^2 + 1)^2 - 4\alpha \eta n^4 \pi^4}}{2\alpha \eta} \end{aligned} \quad (1.145)$$

Ces deux expressions conduisent donc à considérer **deux familles de solutions propres** issues respectivement de  $\Omega_{n1}$  et  $\Omega_{n2}$ . Examinons plus en détail la façon dont elles interviennent dans le calcul des fréquences propres.

Notons  $\Omega_c$  la valeur frontière de  $\Omega$ , définie par :

$$\Omega_c = \frac{1}{\alpha \eta} \quad (1.146)$$

On montre aisément que, quelle que soit la valeur de  $n$ , on a :

$$\Omega_{n2} \geq \Omega_c \quad (1.147)$$

ce qui peut également s'écrire :

$$\tau_{n2} \geq \tau_c \quad (1.148)$$

Remarquons d'autre part que l'on peut déduire de (1.141) :

$$\Omega_{n1} \Omega_{n2} = n^4 \pi^4 \Omega_c \quad (1.149)$$

Les relations (1.142), (1.148) et (1.149) permettent enfin d'aboutir à :

$$\tau_{n1} \leq \beta_n \quad (1.150)$$

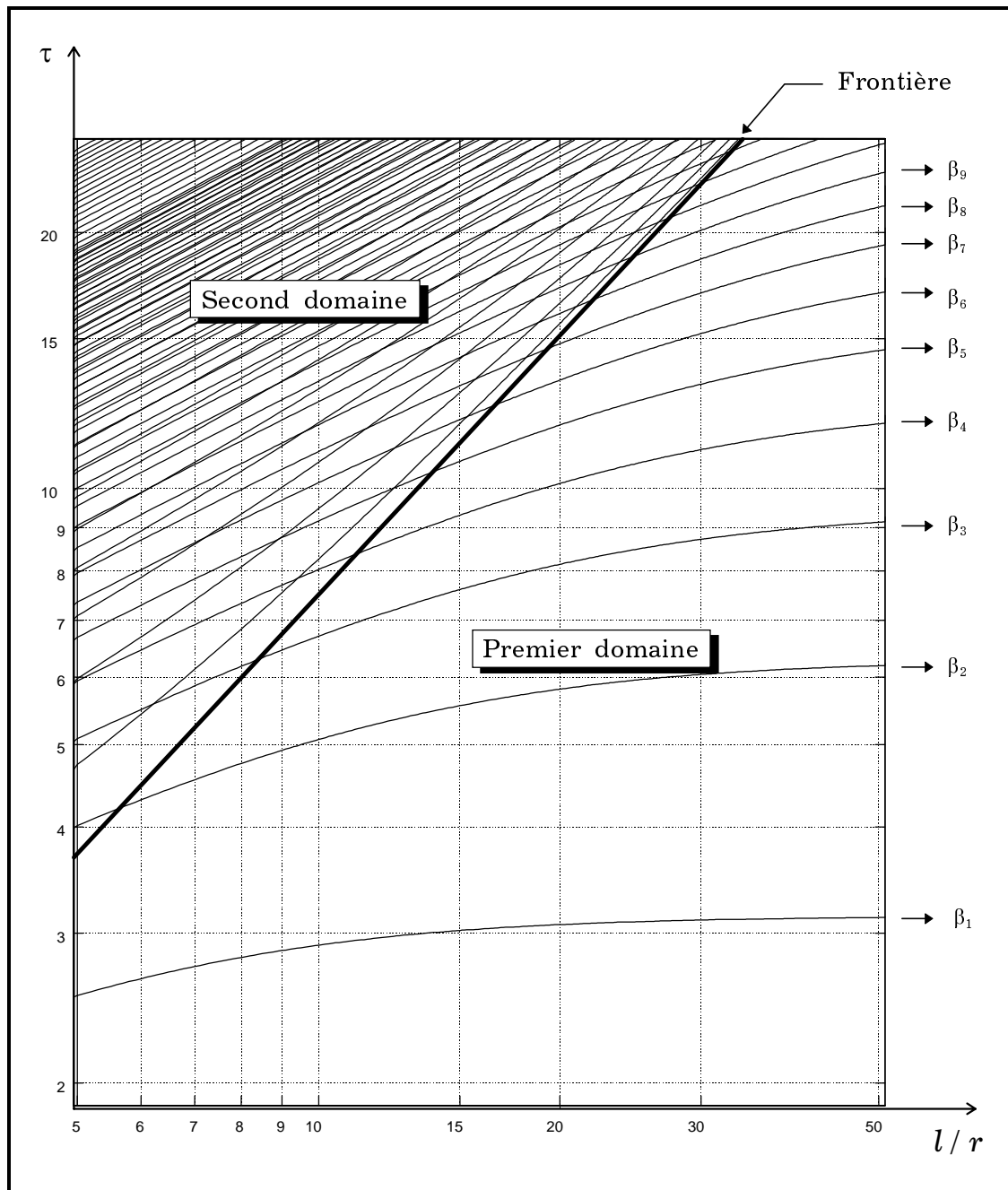


Figure 1.6 : Paramètre fréquentiel en fonction de l'élançement

Ainsi, les relations précédentes permettent de conclure que :

- Les paramètres fréquentiels  $\tau_n$  correspondant aux modes propres du premier domaine ( $\tau_n < \tau_c$ ) sont uniquement issus de la première famille de solutions (correspondant à  $\Omega_{n1}$ ).
- Dans le second domaine fréquentiel ( $\tau_n > \tau_c$ ), les modes propres peuvent être issus de l'une ou de l'autre des deux familles de solutions. Notons que à

une valeur donnée de  $n$  correspondent une seule déformée modale mais deux valeurs distinctes  $\Omega_{n1}$  et  $\Omega_{n2}$ . Par conséquent, il existe des modes propres qui, avec des fréquences différentes, présentent un même nombre de noeuds de vibration. Contrairement à ce qui est classiquement le cas dans le premier domaine, il n'y a plus dans le second domaine une correspondance directe entre le nombre de noeuds ( $n+1$ ) et le rang du mode propre. En d'autres termes, il apparaît dans ce domaine un nouveau spectre de fréquences propres qui se superpose au spectre classique issu de  $\Omega_{n1}$ . Ce type de modes n'apparaissant que lorsque le cisaillement intervient, on les qualifera de « modes de cisaillement ». En fait, on montre que ce sont généralement des modes pour lesquels le mouvement interne de rotation des sections droites est prépondérant vis-à-vis du déplacement transverse.

Ces résultats sont illustrés sur la Figure 1.6, montrant l'évolution du paramètre fréquentiel en fonction de l'élancement pour les premiers modes propres d'une poutre bi-appuyée (notons la convergence de  $\tau_{n1}$  vers  $\beta_n$ ).

A la frontière entre les deux domaines, on a  $\omega = \omega_c$ . L'intégration des équations conduit à la solution suivante :

$$v(x,t) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x,t) = \psi_0 \cos \omega_c t \quad (1.151)$$

Ce mouvement de flexion très particulier où, paradoxalement, il n'y a pas de déplacement transverse, est appelé « mode de cisaillement pur ». Il consiste uniquement en une oscillation alternée des sections droites autour de  $(C, z_p)$ .

Tous ces phénomènes liés à l'existence de familles modales sont illustrés sur la Figure 1.7. On y présente les dix premiers modes propres d'une poutre de section rectangulaire bi-appuyée modélisée par des éléments volumiques type brique à 8 noeuds à 3 ddl par noeud (pas de ddl de rotation). Cette discrétisation, dépourvue de toute hypothèse cinématique particulière, confirme l'authenticité des résultats énoncés précédemment. La poutre en question ayant un élancement  $l/r \approx 10.4$ , la succession des modes propres peut être déterminée à partir de la Figure 1.6. Ainsi, on observe dans l'ordre croissant des fréquences : 3 modes « classiques », le mode de cisaillement pur, 1 mode classique, 1 mode de cisaillement, 1 mode classique, 1 mode de cisaillement, 1 mode classique, 1 mode de cisaillement... Cette alternance entre modes de première et deuxième famille correspond effectivement à celle obtenue par le maillage en éléments volumiques (Figure 1.7).

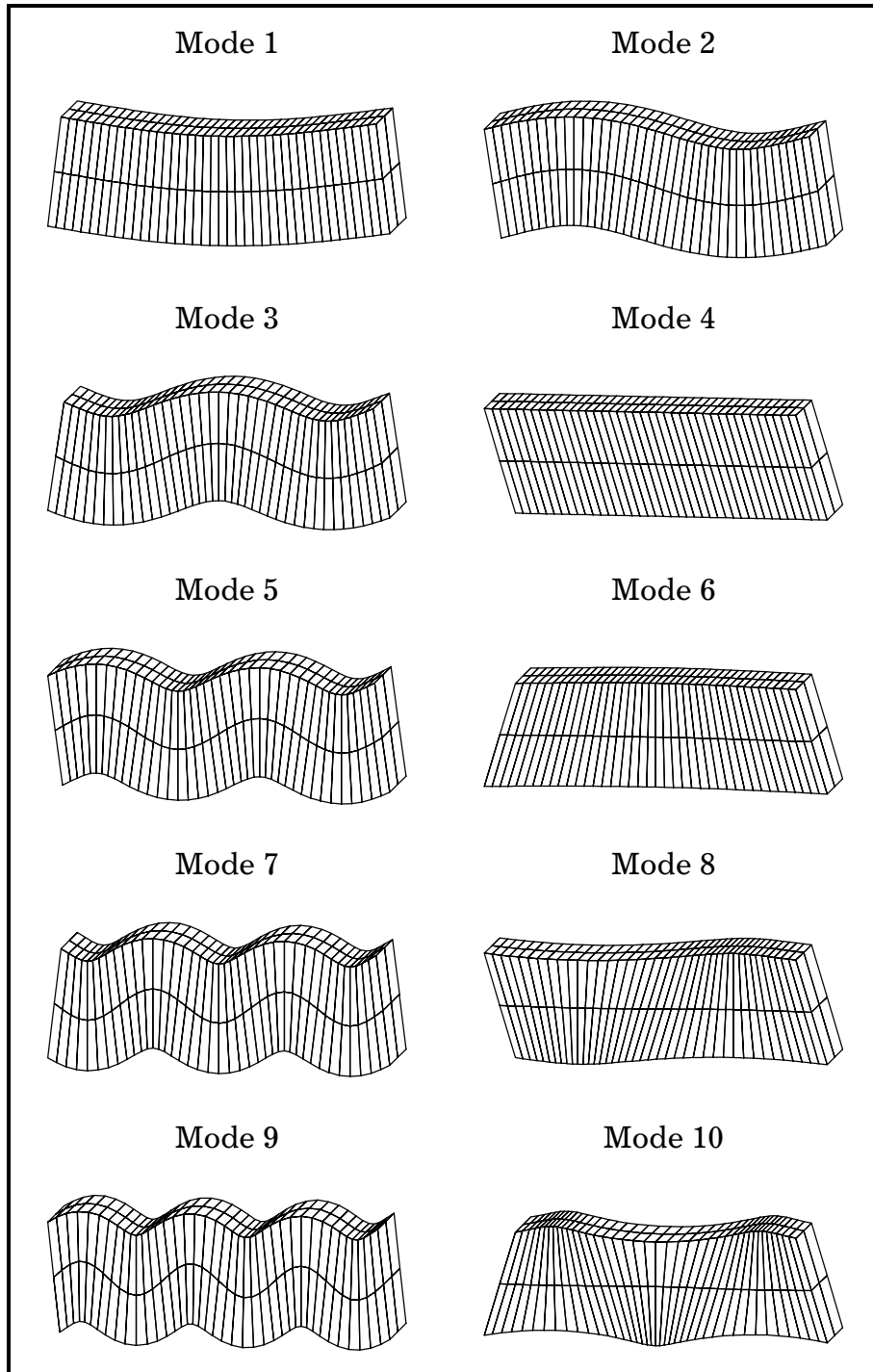


Figure 1.7 : Dix premiers modes propres d'une poutre bi-appuyée

Ces modes de cisaillement n'apparaissant que pour des plages fréquentielles relativement élevées, on pourrait être tenté d'accorder peu d'attention au phénomène. Il est toutefois important de souligner qu'il peuvent être d'un grand intérêt pour des domaines d'études où l'on doit par exemple tenir compte des harmoniques de rang élevé (acoustique, hautes fréquences ...)





# Chapitre 2

## Élément fini général de poutre

Dans ce chapitre, on présente différents modèles de flexion de poutre droite avec cisaillement. Une nouvelle méthode permettant de construire des éléments finis cohérents de poutre de degré supérieur est proposée. Enfin, les matrices de raideur et de masse d'un élément fini de poutre prenant en compte le couplage flexion-torsion sont formulées de manière explicite.

### 2.1 Élément fini de flexion plane

#### 2.1.1 Élément à deux noeuds et deux ddl par noeud

Considérons une poutre droite uniforme d'axe  $x_p$  fléchissant dans le plan principal d'inertie  $(x_p, y_p)$ . Cette poutre est discrétisée en  $n$  éléments finis identiques de longueur  $L = l/n$  à deux noeuds et deux degrés de liberté par noeud : un déplacement transversal  $v$  suivant  $y_p$  et une rotation  $\psi$  suivant  $z_p$ . Conformément à ce qui a été précédemment établi dans le Chapitre 1, chaque section droite de la poutre est soumise à un effort tranchant noté  $T$  et un moment fléchissant noté  $M$ .

Afin d'établir l'expression des matrices élémentaires, plaçons nous dans le cas d'un élément fini et notons  $q = [v_1 \ \psi_1 \ v_2 \ \psi_2]^T$  le vecteur des

déplacements nodaux généralisés de cet élément. Soit  $F = [T_1 \quad M_1 \quad T_2 \quad M_2]^T$  le vecteur des forces généralisées correspondant.

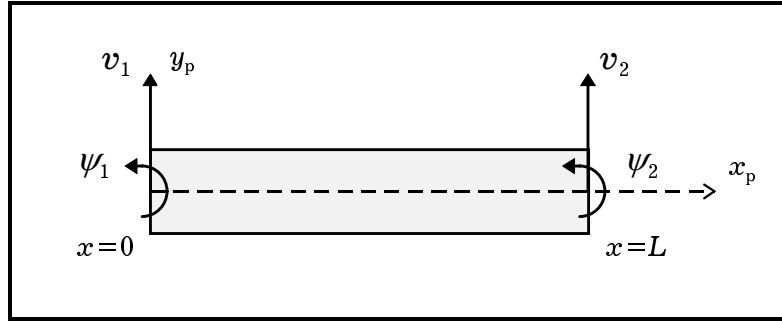


Figure 2.1 : Élément à deux noeuds et deux ddl par noeud

L'approximation nodale sur l'élément fini considéré s'écrit :

$$\begin{bmatrix} v(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_v(x) \\ N_\psi(x) \end{bmatrix} q \quad (2.1)$$

où  $N_v(x)$  et  $N_\psi(x)$  sont, dans  $\mathbb{R}^{1,4}$ , les fonctions d'interpolation de type polynomial.

D'après le Chapitre 1, l'énergie de déformation de flexion de l'élément prenant en compte la déformation due au cisaillement s'exprime par :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L (EI \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + kAG \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \psi\right)^2) dx \quad (2.2)$$

La matrice élémentaire de raideur associée à cette formulation, notée  $K_T$ , est définie par :

$$W = \frac{1}{2} q^T K_T q \quad (2.3)$$

Par conséquent, cette matrice de  $\mathbb{R}^{4,4}$  peut être décomposée de la façon suivante :

$$K_T = \int_0^L EI \left(\frac{dN_\psi}{dx}\right)^T \frac{dN_\psi}{dx} dx + \int_0^L kAG \left(\frac{dN_v}{dx} - N_\psi\right)^T \left(\frac{dN_v}{dx} - N_\psi\right) dx \quad (2.4)$$

À partir de ces définitions, il est possible d'obtenir différentes expressions de la matrice de raideur selon le choix des fonctions d'interpolation  $N_v(x)$  et  $N_\psi(x)$ .

## Élément isoparamétrique

Les variables de déplacement et de rotation sont indépendantes dans la formulation de Timoshenko ( $\psi \neq \frac{\partial v}{\partial x}$ ), et chacune d'elles ne dépend que de deux variables nodales. On peut donc être tenté de choisir une interpolation linéaire pour ces variables, aboutissant ainsi à un élément isoparamétrique. On a alors :

$$N_v(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & 0 & \frac{x}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$N_\psi(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \frac{x}{L} & 0 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Notons  $\tilde{K}_T$  la matrice de raideur élémentaire issue de cette interpolation. Son expression est :

$$\tilde{K}_T = \frac{EI}{L^3 \phi} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & L^2(4 + \phi) & -6L & L^2(2 - \phi) \\ & & 12 & -6L \\ \text{sym} & & & L^2(4 + \phi) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

où  $\phi$  est un facteur lié au coefficient de cisaillement  $k$  ainsi qu'à l'élanement de l'élément fini, défini par :

$$\phi = \frac{12EI}{kAGL^2} \quad (2.8)$$

pouvant également s'écrire :

$$\phi = 24 \frac{(1 + \nu)}{k} \left( \frac{r}{L} \right)^2 \quad (2.9)$$

Il convient maintenant de vérifier le comportement de cet élément lorsque le cisaillement est négligeable (i.e. l'élanement augmente). Pour cela, examinons le cas d'une poutre console sous chargement concentré  $T_2$  en  $x=L$ , modélisée par un seul élément fini du type (2.7). La flèche  $v_2$  de cette poutre s'écrit alors :

$$v_2 = \frac{T_2 L^3}{3EI} \frac{\phi}{1 + \phi} \left( 1 + \frac{\phi}{4} \right) \quad (2.10)$$

On peut alors remarquer que lorsque l'élanement de l'élément augmente ( $\phi$  tend vers zéro) la flèche devient nulle, ce qui est absurde [45]. On dit qu'il y a verrouillage par le cisaillement (ou *shear locking* en anglais). L'utilisation de cet élément fini est déconseillée car elle conduit à de mauvais résultats dans le cas des poutres minces. Dans la littérature, on trouve néanmoins des techniques numériques qui permettent d'améliorer son comportement.

### Élément exact en statique

Afin de s'affranchir du problème de verrouillage, construisons un élément de poutre à deux noeuds à partir d'une interpolation polynomiale de degré plus élevé. Il peut alors être intéressant d'établir la formulation d'un élément qui ait la propriété d'être exact en statique (par rapport à la solution du modèle continu de Timoshenko). Rappelons que dans ce cas, les relations d'équilibre sont :

$$\frac{\partial M}{\partial x} + T = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

$$M = EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.13)$$

$$T = kAG \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right) \quad (2.14)$$

La déformée statique  $v(x)$  sur l'élément est donc un polynôme de degré 3 et la rotation  $\psi(x)$  est de degré 2, ceci conduisant certains auteurs [3] à le dénommer « élément PMQ » (poutre mixte quadratique).

D'autre part, la combinaison des équations d'équilibre précédentes permet d'obtenir une relation supplémentaire entre les déplacements de translation et de rotation :

$$\psi(x) = \frac{\partial v}{\partial x} + \phi \frac{L^2}{12} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad (2.15)$$

Notons que cette expression confirme le fait que pour les poutres élancées ( $\phi$  tend vers zéro) on peut confondre la rotation des sections droites avec la pente de la déformée, et adopter alors la formulation de Euler-Bernoulli.

Considérons une interpolation polynomiale cubique pour  $v(x)$ . On peut alors écrire  $N_v(x)$  comme le produit matriciel d'une base polynomiale et d'une matrice de coefficients généralisés constants de  $\mathbb{R}^{4,4}$  notée H :

$$N_v(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} H \quad (2.16)$$

La relation (2.15) permet d'écrire la fonction d'interpolation pour les rotations à partir de la même matrice de coefficients :

$$N_\psi(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 + \frac{1}{2}\phi L^2 \end{bmatrix} H \quad (2.17)$$

Cette matrice H est entièrement déterminée en écrivant les valeurs des fonctions d'interpolation aux deux noeuds de l'élément fini. En effet, on a :

$$\begin{bmatrix} N_v(0) \\ N_\psi(0) \\ N_v(L) \\ N_\psi(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}\phi L^2 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & (\frac{1}{2}\phi + 3)L^2 \end{bmatrix} H \quad (2.18)$$

Les expressions des fonctions  $N_v(x)$  et  $N_\psi(x)$  obtenues sont les suivantes :

$$N_v^T = \frac{1}{(1+\phi)} \begin{bmatrix} \left\{ 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \phi\left(\frac{x}{L}\right) + 1 + \phi \right\} \\ L \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(2 + \frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(1 + \frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{x}{L}\right) \right\} \\ \left\{ -2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \phi\left(\frac{x}{L}\right) \right\} \\ L \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(1 - \frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{\phi}{2}\left(\frac{x}{L}\right) \right\} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$N_\psi^T = \frac{1}{(1+\phi)} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \left\{ 6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{L}\right) \right\} \\ \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - (4+\phi)\left(\frac{x}{L}\right) + 1 + \phi \right\} \\ -\frac{1}{L} \left\{ 6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{L}\right) \right\} \\ \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - (2-\phi)\left(\frac{x}{L}\right) \right\} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

L'écriture (2.4) permet alors d'évaluer la matrice de raideur  $K_T$  de l'élément ainsi défini. On obtient tous calculs faits :

$$K_T = \frac{EI}{L^3(1+\phi)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & L^2(4+\phi) & -6L & L^2(2-\phi) \\ & & 12 & -6L \\ \text{sym} & & & L^2(4+\phi) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

L'énergie cinétique de flexion de l'élément prenant en compte la déformation due au cisaillement a été établie au Chapitre 1 et s'exprime par :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho A \dot{v}^2 + \rho I \dot{\psi}^2) dx \quad (2.22)$$

La matrice élémentaire de masse, notée  $M_T$ , est définie par :

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M_T \dot{q} \quad (2.23)$$

Par conséquent, cette matrice de  $\mathbb{R}^{4,4}$  peut être exprimée comme suit :

$$M_T = \int_0^L \rho A N_v^T N_v dx + \int_0^L \rho I N_\psi^T N_\psi dx \quad (2.24)$$

L'approximation mise en oeuvre dans le domaine dynamique consiste à utiliser pour les variables  $v$  et  $\psi$  les mêmes fonctions d'interpolation qu'en statique [17]. Cela conduit à la **matrice de masse cohérente** suivante :

$$M_T = \frac{\rho A L}{(1+\phi)^2} \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & -m_4 \\ & m_5 & m_4 & -m_6 \\ & & m_1 & -m_2 \\ \text{sym} & & & m_5 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} m_1 = \frac{13}{35} + \frac{7\phi}{10} + \frac{\phi^2}{3} + \frac{6}{5} \frac{r^2}{L^2} \\ m_2 = \left( \frac{11}{210} + \frac{11\phi}{120} + \frac{\phi^2}{24} + \left( \frac{1}{10} - \frac{\phi}{2} \right) \frac{r^2}{L^2} \right) L \\ m_3 = \frac{9}{70} + \frac{3\phi}{10} + \frac{\phi^2}{6} - \frac{6}{5} \frac{r^2}{L^2} \\ m_4 = \left( \frac{13}{420} + \frac{3\phi}{40} + \frac{\phi^2}{24} - \left( \frac{1}{10} - \frac{\phi}{2} \right) \frac{r^2}{L^2} \right) L \\ m_5 = \left( \frac{1}{105} + \frac{\phi}{60} + \frac{\phi^2}{120} + \left( \frac{2}{15} + \frac{\phi}{6} + \frac{\phi^2}{3} \right) \frac{r^2}{L^2} \right) L^2 \\ m_6 = \left( \frac{1}{140} + \frac{\phi}{60} + \frac{\phi^2}{120} + \left( \frac{1}{30} + \frac{\phi}{6} - \frac{\phi^2}{6} \right) \frac{r^2}{L^2} \right) L^2 \end{array} \right.$$

Cette formulation de l'élément fini de poutre à deux noeuds avec prise en compte du cisaillement à été initialement proposée par Przemieniecki [35], puis développée par plusieurs auteurs dont Davis [13] et Thomas [41,42].

On vérifie aisément que cet élément fini est exempt de verrouillage. En outre, notons que lorsque l'élanement de l'élément devient grand ( $r/L \rightarrow 0$  et par conséquent  $\phi \rightarrow 0$ ),  $K_T$  et  $M_T$  tendent respectivement vers les matrices  $K_B$  et  $M_B$  de l'élément fini de poutre à deux noeuds issu de la formulation d'Euler-Bernoulli dont l'expression classique est :

$$K_B = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{sym} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$M_B = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11}{210}L & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420}L \\ & \frac{1}{105}L^2 & \frac{13}{420}L & -\frac{1}{140}L^2 \\ & & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210}L \\ \text{sym} & & & \frac{1}{105}L^2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

### 2.1.2 Validation du modèle de Timoshenko

L'expression de la matrice de masse  $M_T$  de l'élément fini à deux noeuds de type Timoshenko proposée en (2.25) est rarement présentée dans la littérature. De nombreux auteurs la remplacent par la matrice  $M_B$  de type Bernoulli, obtenant ainsi un élément fini qui peut être qualifié de « mixte », pour lequel le terme  $\phi$  de correction au cisaillement intervient uniquement dans la raideur  $K_T$ . Un tel élément fini est encore communément utilisé dans plusieurs codes de calcul de structures.

Afin de comparer le comportement de ces différents éléments finis, considérons le cas d'une poutre bi-guidée, de section circulaire pleine et d'élanement  $l/r = 12$ . Elle est modélisée séparément par les trois types d'élément poutre : Timoshenko, Bernoulli, et Mixte. Pour un nombre fixé d'éléments ( $n = 100$ ), l'erreur entre les fréquences propres obtenues par ces



modèles et celles données par la formulation continue de Timoshenko est représentée sur la Figure 2.2. La modélisation en éléments de type Bernoulli a tendance à fortement surestimer les fréquences propres, et ce d'autant plus que le rang du mode est grand. Le modèle mixte, quant à lui, a tendance à les sous-estimer. Il conduit ainsi à une erreur relative de l'ordre de 30 % dès le quatrième mode, alors qu'elle est quasi nulle pour l'élément de type Timoshenko (de l'ordre de 0.04 %) ce qui confirme la précision de ce dernier. De plus il est important de noter que, d'un point de vue qualitatif, l'élément cohérent de Timoshenko est le seul à mettre en évidence les modes de cisaillement présentés dans le chapitre précédent.

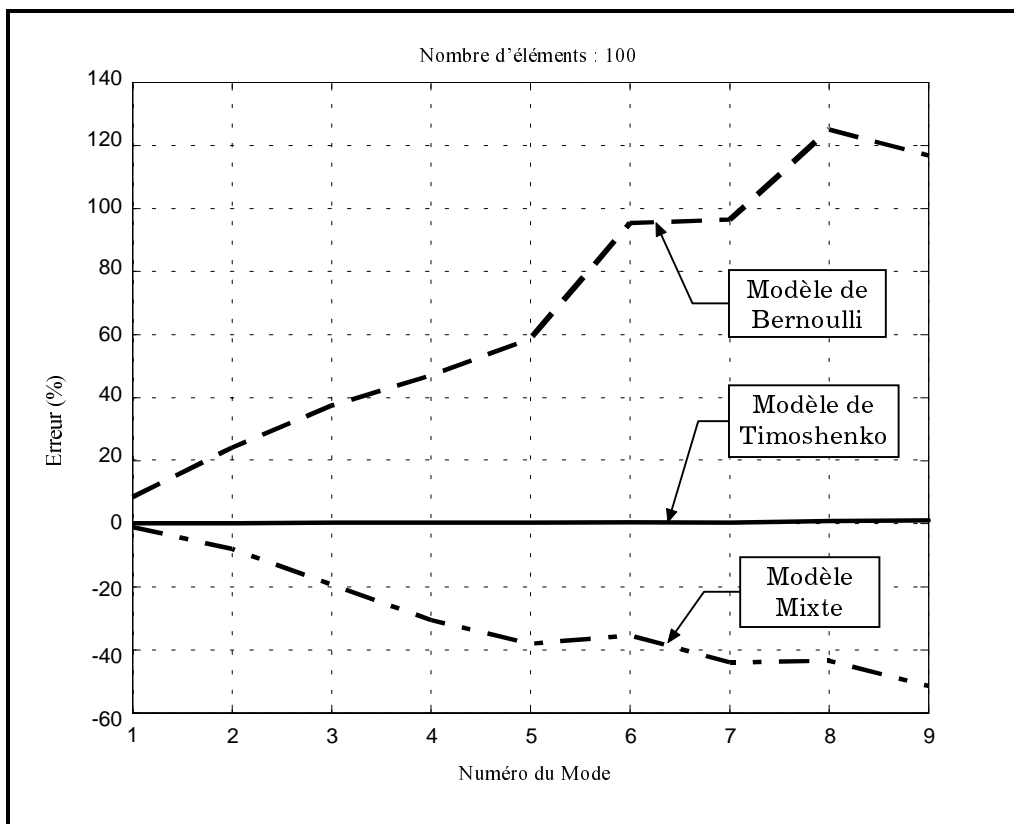


Figure 2.2 : Erreur en fréquence entre modèles discret et continu

### Cas test expérimental

Dans le but de valider l'élément fini poutre à deux noeuds de type Timoshenko, considérons le cas pratique suivant. Il s'agit d'une poutre uniforme droite homogène de section circulaire pleine, de longueur  $l=257.8$  mm et de diamètre  $D=89.9$  mm (donc d'élancement  $l/r \approx 11.47$ ). Le

matériau est du Dural (AU4G) de masse volumique  $\rho=2700\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , de module d'élasticité  $E=7.2 \cdot 10^{10}\text{ Pa}$ , et de coefficient de Poisson  $\nu=0.3$ . Les conditions aux limites sont libre-libre. Afin de mesurer ses modes propres, cette poutre de faible élancement a été instrumentée de la façon suivante : quatre pastilles piézo-électriques (pouvant servir indifféremment de capteur ou d'excitateur) ont été placées sur une génératrice, et deux accéléromètres piézo-électriques sur les sections terminales (Figure 2.3).

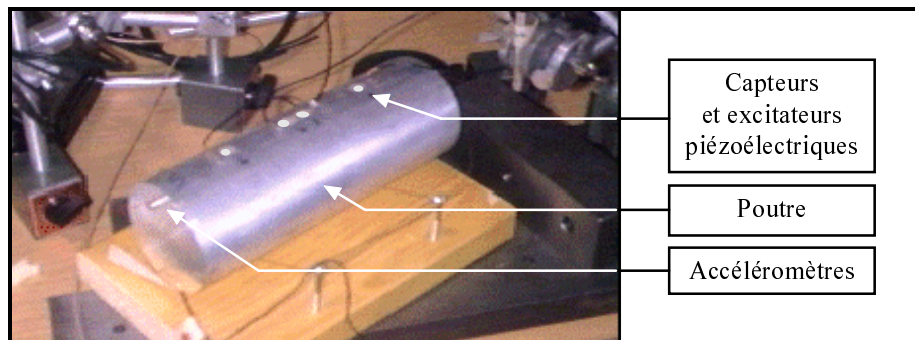


Figure 2.3 : Cas test expérimental

Quatre discrétisations ont été successivement mises en œuvre :

- modèle poutre de type Timoshenko :  $n = 100$  (202 ddl)
- modèle poutre de type Bernoulli :  $n = 100$  (202 ddl)
- modèle poutre de type Mixte :  $n = 100$  (202 ddl)
- modèle Hexaédrique à 8 noeuds et 3 ddl par noeud :  $n = 600$  (2520 ddl)

Les fréquences propres calculées pour les six premiers modes de flexion ainsi que l'erreur relative par rapport à la mesure effectuée sont présentées dans le Tableau 2.1 :

Mode n°	Mesure f (Hz)	Hexaèdre		Timoshenko		Bernoulli		Mixte	
		f (Hz)	e (%)	f (Hz)	e (%)	f (Hz)	e (%)	f (Hz)	e (%)
1	4957	4867	-1.81	4935	-0.44	5296	6.83	4728	-4.61
2	10542	10543	0.01	10468	-0.70	12657	20.0	9020	-14.4
3	16476	16722	1.49	16382	-0.57	21657	31.4	12251	-25.6
4	20514	21315	3.90	20690	0.85	31494	53.5	14323	-30.1
5	24439	25350	3.72	25019	2.37	41782	70.9	15694	-35.8
6	24679	25723	4.23	25186	2.05	52270	111.8	16600	-32.7

Tableau 2.1 : Comparaison entre différentes modélisations ( $e=(f_{\text{cal}}-f_{\text{mes}})/f_{\text{mes}}$ )

Les résultats obtenus montrent que le modèle de type Timoshenko présente un excellent comportement en accord avec l'expérience. De plus, il est aussi performant que le modèle en éléments volumiques, et ce pour un nombre bien moindre de ddl (environ douze fois moins dans ce cas). Par contre, l'emploi d'éléments de type Bernoulli ou de type Mixte conduit à des erreurs inacceptables dès les premiers modes, et ce malgré une discrétisation relativement fine. Ceci confirme le fait que, pour l'étude des poutres de faible élancement, leur utilisation est à proscrire.

### 2.1.3 Nouvelles approches

La méthode proposée ici est basée sur la condensation statique de Guyan [22]. Elle permet de construire des éléments finis poutre de Timoshenko à deux ddl par noeud de manière simple et systématique [8].

#### Élément à deux noeuds

Considérons un élément de poutre de Timoshenko à quatre noeuds équidistants, basé sur une interpolation isoparamétrique.

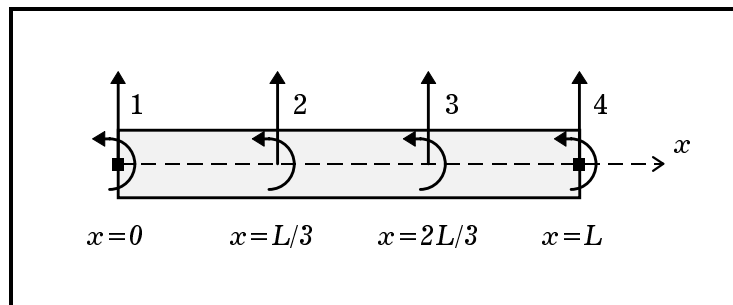


Figure 2.4 : Élément isoparamétrique de poutre à 4 noeuds

Le champ d'interpolation est cubique pour les variables indépendantes  $v$  et  $\psi$ , et le vecteur des déplacements généralisés sur l'élément s'écrit :

$$\mathbf{q} = [v_1 \quad \psi_1 \quad v_2 \quad \psi_2 \quad v_3 \quad \psi_3 \quad v_4 \quad \psi_4]^T \quad (2.28)$$

Soient  $K$  et  $M$  les matrices élémentaires de raideur et de masse de  $\mathbb{R}^{8,8}$  de cet élément. Le calcul des fonctions d'interpolation  $N_v$  et  $N_\psi$  est immédiat, et aboutit à :

$$N_v^T = \frac{1}{2L^3} \begin{bmatrix} 2L^3 - 11L^2x + 18Lx^2 - 9x^3 \\ 0 \\ 18L^2x - 45Lx^2 + 27x^3 \\ 0 \\ -9L^2x + 36Lx^2 - 27x^3 \\ 0 \\ 2L^2x - 9Lx^2 + 9x^3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$N_\psi^T = \frac{1}{2L^3} \begin{bmatrix} 0 \\ 2L^3 - 11L^2x + 18Lx^2 - 9x^3 \\ 0 \\ 18L^2x - 45Lx^2 + 27x^3 \\ 0 \\ -9L^2x + 36Lx^2 - 27x^3 \\ 0 \\ 2L^2x - 9Lx^2 + 9x^3 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Les matrices de raideur et de masse  $K$  et  $M$  sont calculées à partir des relations (2.4) et (2.24), et ont pour expression :

$$K = \frac{EI}{L^3 \phi} \begin{bmatrix} \frac{222}{5} & 6L & \frac{-567}{10} & \frac{171}{20}L & \frac{81}{5} & \frac{-18}{5}L & \frac{-39}{10} & \frac{21}{20}L \\ (64+259\phi)L^2 & \frac{-171}{20}L & \frac{9(22-147\phi)}{280}L^2 & \frac{18}{5}L & \frac{-9(4-21\phi)}{243}L^2 & \frac{-21}{20}L & \frac{(38-91\phi)}{280}L^2 \\ \frac{20}{648} & 0 & \frac{-891}{20}L & \frac{-243}{280}L & \frac{-27(6+77\phi)}{280}L^2 & \frac{18}{5}L & \frac{-9(4-21\phi)}{140}L^2 \\ \frac{54(3+7\phi)}{35}L^2 & \frac{-243}{648} & \frac{20}{5} & 0 & \frac{54(3+7\phi)}{35}L^2 & \frac{-171}{20}L & \frac{9(22-147\phi)}{280}L^2 \\ \text{sym} & & & & & & \\ & & & & & & \frac{222}{5} \\ & & & & & & -6L \\ & & & & & & \frac{(64+259\phi)}{70}L^2 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$M = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{8}{105} & 0 & \frac{33}{560} & 0 & \frac{-3}{140} & 0 & \frac{19}{1680} & 0 \\ \frac{8}{105}r^2 & 0 & \frac{33}{560}r^2 & 0 & \frac{-3}{140}r^2 & 0 & \frac{19}{1680}r^2 & 0 \\ \frac{27}{70} & 0 & \frac{-27}{560} & 0 & \frac{-3}{140} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{27}{70}r^2 & 0 & \frac{-27}{560}r^2 & 0 & \frac{-3}{140}r^2 & 0 & \frac{-3}{140}r^2 & 0 \\ \frac{27}{70} & 0 & \frac{33}{560} & 0 & \frac{27}{70}r^2 & 0 & \frac{33}{560}r^2 & 0 \\ \text{sym} & & & & & & & \\ & & & & & & \frac{8}{105} & 0 \\ & & & & & & \frac{8}{105}r^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Afin de construire l'élément fini de poutre à deux noeuds, effectuons une partition des ddl en deux sous-ensembles : les ddl maîtres associés aux noeuds de jonction de l'élément (noeuds 1 et 4) et les ddl esclaves correspondant aux deux noeuds internes (noeuds 2 et 3).

Ainsi, on décompose le vecteur des inconnues nodales de la façon suivante :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \mathbf{q}_m = [v_1 & \psi_1 & v_4 & \psi_4]^T \\ \mathbf{q}_s = [v_2 & \psi_2 & v_3 & \psi_3]^T \end{cases} \quad (2.33)$$

La même partition est appliquée aux matrices de raideur et de masse :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{ms}^T & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{ms}^T & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{8,8} \quad (2.34)$$

L'équilibre dynamique de l'élément s'écrit :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (2.35)$$

où  $\mathbf{F}^T = [\mathbf{F}_m^T \quad \mathbf{0}]$  est le vecteur des forces de jonction entre éléments.

Les équations d'équilibre peuvent alors s'exprimer par :

$$(\mathbf{K}_{mm} - \omega^2 \mathbf{M}_{mm}) \mathbf{q}_m + (\mathbf{K}_{ms} - \omega^2 \mathbf{M}_{ms}) \mathbf{q}_s = \mathbf{F}_m \quad (2.36)$$

$$(\mathbf{K}_{ms}^T - \omega^2 \mathbf{M}_{ms}^T) \mathbf{q}_m + (\mathbf{K}_{ss} - \omega^2 \mathbf{M}_{ss}) \mathbf{q}_s = \mathbf{0} \quad (2.37)$$

L'hypothèse de Guyan [22] consiste à négliger les forces d'inertie sur les ddl esclaves dans l'équation (2.37), ce qui permet d'exprimer l'ensemble des ddl en fonction des seuls ddl maîtres. On définit alors au niveau de l'élément la transformation de Guyan  $\mathbf{T}_G$  indépendante de la fréquence :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{ms}^T \end{bmatrix} \mathbf{q}_m \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{T}_G \mathbf{q}_m \quad (2.38)$$

où  $\mathbf{I}_m$  est la matrice identité d'ordre  $m$ .

Le problème (2.35) se ramène alors à la forme condensée sur les jonctions :

$$(\mathbf{K}_c - \omega^2 \mathbf{M}_c) \mathbf{q}_m = \mathbf{F}_m \quad (2.39)$$

où  $\mathbf{K}_c$  et  $\mathbf{M}_c$  sont les matrices élémentaires condensées définies par :

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{T}_G^T \mathbf{K} \mathbf{T}_G \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_c = \mathbf{T}_G^T \mathbf{M} \mathbf{T}_G \quad (2.40)$$

Le calcul formel appliqué aux matrices de l'élément à quatre noeuds définies en (2.31) et (2.32) permet finalement d'évaluer les matrices  $K_c$  et  $M_c$  condensées sur les deux noeuds de jonction. On obtient tous calculs faits le résultat caractéristique suivant :

$$K_c = K_T \quad \text{et} \quad M_c = M_T \quad (2.41)$$

En d'autres termes, les matrices calculées par condensation de Guyan s'avèrent être rigoureusement identiques à celles obtenues précédemment dans le cas de l'élément fini de Timoshenko cohérent, expressions (2.21) et (2.25). Ce résultat ne doit pas surprendre ; il est évident en ce qui concerne la matrice de raideur car la condensation de Guyan est exacte en statique. En ce qui concerne la matrice de masse, l'hypothèse qui consiste à utiliser en dynamique une interpolation établie en statique revient effectivement à négliger les forces d'inertie internes dans la procédure de condensation.

### Éléments de degré supérieur

Afin d'enrichir le modèle de poutre avec prise en compte du cisaillement, il peut être intéressant de généraliser la méthode de condensation précédente pour construire des éléments finis de poutre à partir d'interpolations de degré supérieur.

Considérons par exemple un élément de poutre isoparamétrique à cinq noeuds équidistants (Figure 2.5). Les fonctions d'interpolation sont alors des polynômes de degré 4. De manière analogue à ce qui a été réalisé précédemment, les matrices de raideur et de masse ont été condensées sur les deux noeuds extrêmes, conduisant ainsi à l'expression de matrices élémentaires à quatre ddl. Il est alors essentiel de signaler que ces matrices **ne peuvent être différentes** de  $K_T$  et  $M_T$  obtenues auparavant à partir de l'élément de poutre à quatre noeuds. En effet, appliquer la condensation de Guyan revient à effectuer une interpolation exacte en statique. Puisque la déformée statique exacte de la poutre est un polynôme de degré 3, toute interpolation polynomiale de degré supérieur ou égal à 3 conduit alors fatalement aux mêmes matrices condensées exprimées par  $K_T$  et  $M_T$ . Ce résultat a d'ailleurs été confirmé pour les degrés d'interpolation 3, 4, 5, et 6 à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Afin d'obtenir effectivement un modèle de poutre de degré supérieur, il est possible de construire un élément fini condensé de poutre à **trois noeuds** défini par deux noeuds de jonction et un noeud interne.

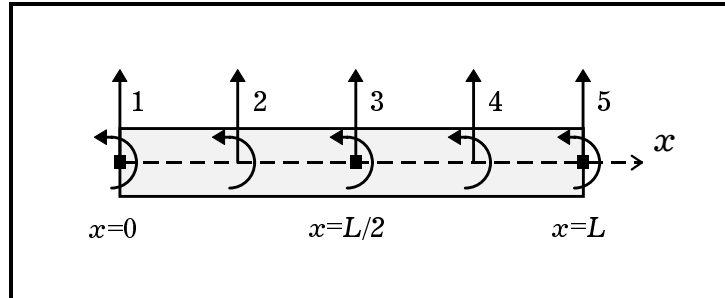


Figure 2.5 : Élément isoparamétrique de poutre à 5 noeuds

Considérons l'élément isoparamétrique à cinq noeuds (Figure 2.5) dont les noeuds maîtres sont les noeuds 1, 3 et 5. Le calcul formel a permis d'obtenir les matrices de raideur et de masse condensées à six ddl correspondantes. Les performances dynamiques de l'élément ainsi obtenu sont illustrées par le cas test numérique suivant :

La structure est une poutre rectiligne encastree-encastree et appuyée au milieu. Elle est modélisée en éléments de poutre de Timoshenko respectivement à deux noeuds et à trois noeuds (notés 2N et 3N) et les calculs des modes propres ont été effectués à taille égale entre le modèle 2N et le modèle 3N (8 éléments 3N, 16 éléments 2N). Les résultats obtenus sont reportés dans le Tableau 2.2.

Mode n°	Exact f (Hz)	Éléments 2N (29 ddl)		Éléments 3N (29 ddl)	
		f (Hz)	e (%)	f (Hz)	e (%)
1	3096.25	3097.22	0.03	3096.7	0.015
2	4408.22	4410.94	0.06	4409.47	0.03
3	9598.68	9626.23	0.3	9612.11	0.14
4	11501	11548.4	0.4	11524.6	0.2
5	18901.8	19107.2	1.1	19015.1	0.6
6	21147.6	21435.7	1.4	21327.4	0.85
7	30269.9	31091.5	2.7	30528.2	0.85
8	32610.6	33638	3.2	32914.5	0.93

Tableau 2.2 : Comparaison entre les modèles 2N et 3N ( $e=(f_{ef}-f_{ex})/f_{ex}$ )

On peut ainsi remarquer que les performances du modèle 3N sont satisfaisantes. En effet, il améliore sensiblement les résultats donnés par le modèle 2N. L'erreur en fréquence entre le modèle discret et le modèle continu est inférieure à 1 % pour les huit premiers modes avec l'élément 3N, alors qu'elle est supérieure à 3 % pour le huitième mode avec l'élément 2N. Le modèle 3N ainsi obtenu s'avère être relativement plus précis que le modèle 2N plus classique.

Au vu de ces résultats, une question se pose : peut-on augmenter indéfiniment le degré d'interpolation, rendant de ce fait envisageable la construction d'éléments de poutre encore plus performants ?

En fait, la déformée statique exacte d'un élément à trois noeuds est un polynôme de degré 3 par morceaux (deux morceaux, en l'occurrence). Contrairement à l'élément à deux noeuds, cette déformée ne peut donc pas être interpolée de manière exacte par un seul polynôme, quel que soit le degré de celui-ci. Par conséquent, la méthode d'enrichissement de modèle proposée peut être **a priori** généralisée à des degrés d'interpolation supérieurs.

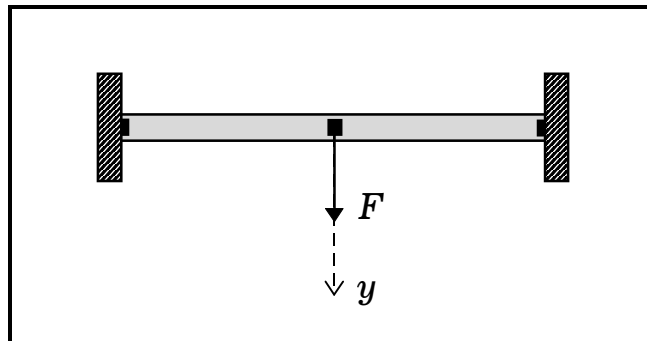


Figure 2.6 : Élément 3N bi-encasté et chargé sur le noeud central

Afin d'illustrer cette propriété, considérons le problème statique d'une poutre de longueur  $l$ , modélisée par un seul élément fini à trois noeuds issu d'une interpolation successivement enrichie, et soumise à une force  $F$  transversale située à mi-longueur sur le noeud interne (Figure 2.6). La flèche exacte  $v(l/2)$  calculée par le modèle continu de Timoshenko s'exprime par :

$$v(l/2) = \left( \frac{1}{192} + \frac{\phi}{48} \right) \frac{Fl^3}{EI} \quad (2.42)$$



La flèche obtenue à partir des différents degrés d'interpolations est donnée dans le Tableau 2.3 :

d° de l'interpolation	Flèche $v(l/2)$	Flèche pour $\phi = 0$
4	$\frac{5}{3072}(3+11\phi)\frac{Fl^3}{EI}$	$\frac{1}{204.8}\frac{Fl^3}{EI}$
6	$\frac{7}{4096}(3+11\phi)\frac{Fl^3}{EI}$	$\frac{1}{195.04}\frac{Fl^3}{EI}$
8	$\frac{1}{262144}(1357+5053\phi)\frac{Fl^3}{EI}$	$\frac{1}{193.18}\frac{Fl^3}{EI}$
10	$\frac{1}{3145728}(1485+5597\phi)\frac{Fl^3}{EI}$	$\frac{1}{192.57}\frac{Fl^3}{EI}$

Tableau 2.3 : Résultats issus d'interpolations de degrés différents

Comme prévu, les résultats obtenus en statique montrent que la précision du modèle augmente avec le degré de l'interpolation (le premier terme converge vers la solution exacte :  $1/192$ ). Par contre, cette propriété n'est plus forcément valable en dynamique, où les performances de la condensation statique ont tendance à diminuer. En effet, le domaine de validité de la condensation de Guyan est toujours défini par la fréquence de coupure  $f_c$ , celle-ci étant la plus petite fréquence propre du problème à ddl maîtres bloqués [6]. Généralement, la méthode de Guyan donne des résultats acceptables dans la bande utile  $[0 ; f_c/3]$ . Ainsi, lorsque le nombre de ddl esclaves augmente (avec le degré d'interpolation choisi) la fréquence  $f_c$  diminue, ce qui entraîne une dégradation globale des résultats. Les nombreux cas tests numériques réalisés montrent que l'élément à trois noeuds issu d'une interpolation polynomiale de degré 4 est en général celui qui présente les meilleures performances dynamiques.

## 2.2 Élément général de poutre tridimensionnelle

### 2.2.1 Matrice de raideur

D'après le Chapitre 1, l'énergie de déformation  $W$  d'un élément de poutre de longueur  $L$  s'exprime dans le référentiel principal d'inertie  $(x_p, y_p, z_p)$  par :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left( EA \left( \frac{\partial u_G}{\partial x} \right)^2 + k_y GA \left( \frac{\partial v_C}{\partial x} - \theta_z \right)^2 + k_z GA \left( \frac{\partial w_C}{\partial x} + \theta_y \right)^2 + EI_y \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + EI_z \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 + GJ \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + EI_\varphi \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx \quad (2.43)$$

Rappelons que dans cette expression,  $u_G$  est le déplacement longitudinal (suivant  $x_p$ ) du centre de gravité G de la section droite courante ;  $v_C$  et  $w_C$  sont les déplacements transverses du centre de torsion C ;  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  sont les rotations de la section droite. Le choix de ces variables cinématiques a été amplement justifié lors de l'étude du modèle continu. Il est avant tout motivé par le fait qu'il permet de découpler les différents types de déformation (traction, flexions, torsion) comme le montre clairement l'expression (2.43).

Considérons l'élément fini de poutre à deux noeuds (numérotés 1 et 2) et à six ddl par noeud représentant la cinématique définie précédemment. Les variables nodales sont dans un premier temps définies par :

$$q_p = \left[ u_G^1 \quad u_G^2 \quad v_C^1 \quad \theta_z^1 \quad v_C^2 \quad \theta_z^2 \quad w_C^1 \quad \theta_y^1 \quad w_C^2 \quad \theta_y^2 \quad \theta_x^1 \quad \theta_x^2 \right]^T \quad (2.44)$$

On peut alors décomposer la matrice de raideur  $K^p$  de l'élément fini en plusieurs sous-matrices de la manière suivante :

$$K^p = \begin{bmatrix} K^{u_G} & 0 & 0 & 0 \\ & K^{v_C} & 0 & 0 \\ & & K^{w_C} & 0 \\ & \text{sym} & & K^{\theta_x} \end{bmatrix} ; \quad K^p \in \mathbb{R}^{12,12} \quad (2.45)$$

Afin de construire un **élément fini exact en statique**, on associe à chaque type de déformation une fonction d'interpolation polynomiale de degré égal à la déformée statique correspondante.

Ainsi, le déplacement longitudinal  $u_G(x)$  étant une fonction linéaire, le calcul des fonctions d'interpolations puis de la matrice de raideur associée  $K^{u_G}$  est immédiat. On aboutit à la très classique expression :

$$K^{u_G} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Pour des raisons pratiques d'intégration de l'élément fini dans des codes de calcul existants, on supposera que la torsion est régie par le modèle de torsion libre de Saint-Venant. Nous verrons ultérieurement que cette hypothèse n'est malheureusement pas toujours vérifiée. Néanmoins, considérons ainsi une déformée statique linéaire pour  $\theta_x(x)$ . Le terme contenant le moment sectoriel s'annule, et on a :

$$K^{\theta_x} = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

En ce qui concerne la flexion, on a vu dans la première partie de ce chapitre que l'utilisation d'une interpolation polynomiale de degré trois conduit pour un des deux plans principaux à l'expression suivante de la matrice de raideur :

$$K^{v_c} = \frac{EI_z}{(1 + \phi_y)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ (4 + \phi_y)L^2 & -6L & (2 - \phi_y)L^2 & \\ & 12 & -6L & \\ \text{sym} & & & (4 + \phi_y)L^2 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

avec :

$$\phi_y = \frac{12EI_z}{k_y AGL^2} \quad (2.49)$$

Dans l'autre plan principal, un calcul analogue permet d'aboutir à :

$$K^{w_c} = \frac{EI_y}{(1 + \phi_z)L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ (4 + \phi_z)L^2 & 6L & (2 - \phi_z)L^2 & \\ & 12 & 6L & \\ \text{sym} & & & (4 + \phi_z)L^2 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

et :

$$\phi_z = \frac{12EI_y}{k_z AGL^2} \quad (2.51)$$

### 2.2.2 Matrice de masse

L'énergie cinétique  $T$  de l'élément fini, dans laquelle on néglige le terme de gauchissement, s'exprime par :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho (A \dot{u}_G^2 + A \dot{v}_C^2 + A \dot{w}_C^2 + I_y \dot{\theta}_y^2 + I_z \dot{\theta}_z^2 + I_C \dot{\theta}_x^2 + 2A(\bar{y}_G \dot{w}_C \dot{\theta}_x - \bar{z}_G \dot{v}_C \dot{\theta}_x)) dx \quad (2.52)$$

Afin de construire une matrice de masse cohérente avec la matrice de raideur, on utilise les mêmes fonctions d'interpolation exactes en statique. Ainsi, en respectant la définition et le rangement des variables nodales proposés en (2.44), on peut définir sur la matrice de masse  $M^p$  le même découpage que celui appliqué précédemment à la matrice de raideur (2.45), à savoir :

$$M^p = \begin{bmatrix} M^{u_G} & 0 & 0 & 0 \\ & M^{v_C} & 0 & M^{v_C \theta_x} \\ & & M^{w_C} & M^{w_C \theta_x} \\ & \text{sym} & & M^{\theta_x} \end{bmatrix} ; \quad M^p \in \mathbb{R}^{12,12} \quad (2.53)$$

Cette écriture permet d'ores et déjà de mettre en évidence le couplage dynamique entre les effets de flexion et de torsion.

Les expressions des différentes sous-matrices constituant  $M^p$  sont les suivantes :

Traction :

$$M^{u_G} = \frac{\rho A L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Torsion simple :

$$M^{\theta_x} = \frac{\rho I_C L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

avec :  $I_C = I_y + I_z + (\bar{y}_G^2 + \bar{z}_G^2) A$

Flexion :

$$M^{v_c} = \rho A L \begin{bmatrix} m_1(\phi_y, r_z) & m_2(\phi_y, r_z) & m_3(\phi_y, r_z) & -m_4(\phi_y, r_z) \\ & m_5(\phi_y, r_z) & m_4(\phi_y, r_z) & -m_6(\phi_y, r_z) \\ & & m_1(\phi_y, r_z) & -m_2(\phi_y, r_z) \\ & \text{sym} & & m_5(\phi_y, r_z) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$\text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} m_1(\phi, r) = \frac{1}{(1+\phi)^2} \left( \frac{13}{35} + \frac{7\phi}{10} + \frac{\phi^2}{3} + \frac{6}{5} \frac{r^2}{L^2} \right) \\ m_2(\phi, r) = \frac{1}{(1+\phi)^2} \left( \frac{11}{210} + \frac{11\phi}{120} + \frac{\phi^2}{24} + \left( \frac{1}{10} - \frac{\phi}{2} \right) \frac{r^2}{L^2} L \right) \\ m_3(\phi, r) = \frac{1}{(1+\phi)^2} \left( \frac{9}{70} + \frac{3\phi}{10} + \frac{\phi^2}{6} - \frac{6}{5} \frac{r^2}{L^2} \right) \\ m_4(\phi, r) = \frac{1}{(1+\phi)^2} \left( \frac{13}{420} + \frac{3\phi}{40} + \frac{\phi^2}{24} - \left( \frac{1}{10} - \frac{\phi}{2} \right) \frac{r^2}{L^2} L \right) \\ m_5(\phi, r) = \frac{1}{(1+\phi)^2} \left( \frac{1}{105} + \frac{\phi}{60} + \frac{\phi^2}{120} + \left( \frac{2}{15} + \frac{\phi}{6} + \frac{\phi^2}{3} \right) \frac{r^2}{L^2} L^2 \right) \\ m_6(\phi, r) = \frac{1}{(1+\phi)^2} \left( \frac{1}{140} + \frac{\phi}{60} + \frac{\phi^2}{120} + \left( \frac{1}{30} + \frac{\phi}{6} - \frac{\phi^2}{6} \right) \frac{r^2}{L^2} L^2 \right) \end{array} \right.$$

$$M^{w_c} = \rho A L \begin{bmatrix} m_1(\phi_z, r_y) & -m_2(\phi_z, r_y) & m_3(\phi_z, r_y) & m_4(\phi_z, r_y) \\ & m_5(\phi_z, r_y) & -m_4(\phi_z, r_y) & -m_6(\phi_z, r_y) \\ & & m_1(\phi_z, r_y) & m_2(\phi_z, r_y) \\ & \text{sym} & & m_5(\phi_z, r_y) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Couplage Flexion-Torsion :

$$M^{v_c \theta_x} = \bar{z}_G \frac{\rho A L}{(1+\phi_y)} \begin{bmatrix} -\left( \frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi_y \right) & -\left( \frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi_y \right) \\ -\left( \frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi_y \right) & -\left( \frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi_y \right) \\ -\left( \frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi_y \right) & -\left( \frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi_y \right) \\ \left( \frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi_y \right) & \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi_y \right) \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$M^{w_c \theta_x} = \bar{y}_G \frac{\rho A L}{(1+\phi_z)} \begin{bmatrix} \left( \frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi_z \right) & \left( \frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi_z \right) \\ -\left( \frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi_z \right) & -\left( \frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi_z \right) \\ \left( \frac{3}{20} + \frac{1}{6} \phi_z \right) & \left( \frac{7}{20} + \frac{1}{3} \phi_z \right) \\ \left( \frac{1}{30} + \frac{1}{24} \phi_z \right) & \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{24} \phi_z \right) \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

La formulation ainsi obtenue corrobore les résultats établis par Hallauer [23] pour la flexion-torsion sans cisaillement. Des modèles similaires ont été proposés par plusieurs auteurs dont Dubigeon [14] et Potiron [34] dans le cas d'un élément fini prenant en compte le gauchissement dû à la torsion, avec une cinématique de poutre à sept ddl par noeud.

Afin d'obtenir la formulation définitive de l'élément fini de poutre, il reste à exprimer les matrices élémentaires sur les inconnues nodales  $q_C$  correspondant en totalité aux déplacements des centres de torsion et rangées dans l'ordre naturel suivant :

$$q_C = \left[ u_C^1 \quad v_C^1 \quad w_C^1 \quad \theta_x^1 \quad \theta_y^1 \quad \theta_z^1 \quad u_C^2 \quad v_C^2 \quad w_C^2 \quad \theta_x^2 \quad \theta_y^2 \quad \theta_z^2 \right]^T \quad (2.60)$$

La transformation des variables au point C est basée sur l'hypothèse de non déformabilité des sections droites. En effet, cela permet de lier les déplacements longitudinaux exprimés en G aux déplacements en C, par la relation suivante :

$$u_G = u_C + \bar{z}_G \theta_y - \bar{y}_G \theta_z \quad (2.61)$$

La matrice de transformation géométrique qui en résulte, notée  $T_p$ , est ainsi définie par :

$$q_p = \begin{bmatrix} u_G^1 \\ u_G^2 \\ v_C^1 \\ \theta_z^1 \\ v_C^2 \\ \theta_z^2 \\ w_C^1 \\ \theta_y^1 \\ w_C^2 \\ \theta_y^2 \\ \theta_x^1 \\ \theta_x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{z}_G & -\bar{y}_G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{z}_G & -\bar{y}_G \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C^1 \\ v_C^1 \\ w_C^1 \\ \theta_x^1 \\ \theta_y^1 \\ \theta_z^1 \\ u_C^2 \\ v_C^2 \\ w_C^2 \\ \theta_x^2 \\ \theta_y^2 \\ \theta_z^2 \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} T_p q_C \quad (2.62)$$

En appliquant cette transformation aux matrices  $K^p$  et  $M^p$  définies par les équations (2.45) et (2.53), on obtient finalement les matrices élémentaires  $K_C^p$  et  $M_C^p$  de l'élément fini de poutre droite, exprimées aux centres de torsion C et dans les directions principales :

$$K_C^p = T_p^T K^p T_p \quad ; \quad M_C^p = T_p^T M^p T_p \quad (2.63)$$

L'élément ainsi défini peut être qualifié de « général » car il tient compte à la fois de l'effet de cisaillement transverse et du couplage dynamique structural flexion-torsion résultant de l'excentration entre le centre de torsion et le centre de masse. Son utilisation est donc adaptée à une grande variété de formes de poutre.

# Chapitre 3

## Identification des paramètres

### 3.1 Méthode d'identification

Considérons une poutre droite uniforme de longueur  $l$  préalablement maillée en éléments finis tridimensionnels. Ces éléments peuvent être, par exemple, de type coque dans le cas d'une poutre tubulaire, ou solide dans le cas d'une poutre de section pleine. La problématique est la suivante : quelles valeurs doit ont affecter aux paramètres du modèle de poutre (défini au Chapitre 2) afin que celui-ci représente, quand cela est possible, le comportement statique et dynamique du modèle tridimensionnel initial ? Le cas échéant, la poutre ainsi obtenue sera qualifiée de « poutre équivalente ».

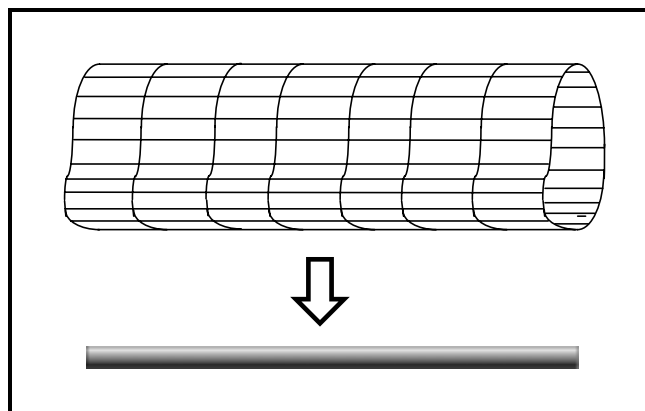


Figure 3.1 : Vue schématique de la méthode



### 3.1.1 Réduction numérique du modèle tridimensionnel

Soient  $\tilde{K}$  et  $\tilde{M}$  les matrices numériques de raideur et de masse assemblées du modèle tridimensionnel. Ces matrices vont subir plusieurs transformations afin d'aboutir à un modèle numérique de taille très réduite.

#### Condensation de Guyan

Tout d'abord, la condensation de Guyan [22] est appliquée au modèle (Figure 3.2). Pour cela, les ddl sont partitionnés en deux sous-ensembles : les ddl maîtres (à conserver) correspondant aux noeuds de jonction (indice  $j$ ) situés sur les deux sections terminales, et les ddl esclaves (à éliminer) correspondant aux noeuds internes (indice  $i$ ). En pratique, on a :  $j \ll i$ .

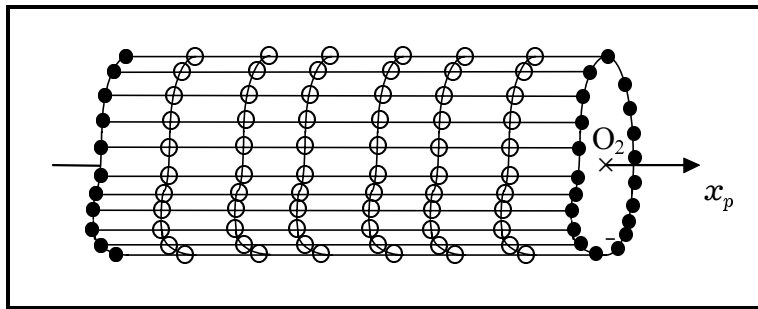


Figure 3.2 : Condensation de Guyan  
 ● noeuds maîtres, ○ noeuds esclaves

Le vecteur des déplacements nodaux  $y$  et les matrices  $\tilde{K}$  et  $\tilde{M}$  sont alors décomposés de la manière suivante :

$$y = \begin{bmatrix} y_j \\ y_i \end{bmatrix} ; \quad \tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{jj} & \tilde{K}_{ji} \\ \tilde{K}_{ji}^T & \tilde{K}_{ii} \end{bmatrix} ; \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{jj} & \tilde{M}_{ji} \\ \tilde{M}_{ji}^T & \tilde{M}_{ii} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

L'équilibre dynamique de la poutre en tant que sous-structure soumise aux seuls efforts de jonctions s'écrit :

$$(\tilde{K} - \omega^2 \tilde{M})y = F \quad (3.2)$$

avec :  $F = \begin{bmatrix} F_j \\ 0 \end{bmatrix}$  vecteur des forces de jonction.

La condensation de Guyan est définie par la transformation  $T_g$  **exacte en statique** permettant d'exprimer l'ensemble des ddl en fonction des ddl de jonction par :

$$y = \begin{bmatrix} I_j \\ -K_{ii}^{-1} K_{ji}^T \end{bmatrix} y_j \stackrel{\Delta}{=} T_g y_j \quad (3.3)$$

L'équation d'équilibre (3.2) peut alors être exprimée sous la forme condensée :

$$(\tilde{K}_j - \omega^2 \tilde{M}_j) y_j = F_j \quad (3.4)$$

où  $\tilde{K}_j$  et  $\tilde{M}_j$  sont les matrices de raideur et de masse du modèle condensé sur les ddl de jonctions, définies par :

$$\tilde{K}_j = T_g^T \tilde{K} T_g \quad ; \quad \tilde{M}_j = T_g^T \tilde{M} T_g \quad (3.5)$$

### Réduction cinématique de corps solide

Considérons deux points  $O_1$  et  $O_2$  tels que  $O_1$  (resp.  $O_2$ ) soit localisé dans le plan de la section terminale  $S_1$  (resp.  $S_2$ ) et que  $O_1O_2$  soit parallèle à l'axe  $x_p$  de la poutre. Dorénavant,  $O_1$  est pris comme origine du référentiel de calcul.

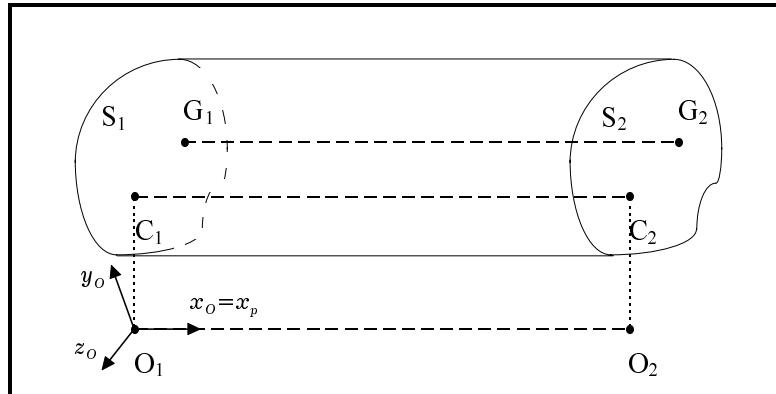


Figure 3.3 : Localisation des points de réduction

D'après les hypothèses cinématiques de poutre, toute section droite présente un comportement de corps rigide. C'est en particulier le cas pour les sections  $S_1$  et  $S_2$ . On peut donc établir pour chaque noeud  $N_1^j$  de  $S_1$  (resp.  $N_2^j$  de  $S_2$ ) une relation cinématique rigide avec les six déplacements (translations et rotations)  $q_{O_1}$  de  $O_1$  (resp.  $q_{O_2}$  de  $O_2$ ) :

$$\mathbf{y}_{N_1^j} = \mathbf{T}_{N_1^j} \mathbf{q}_{O_1} \quad ; \quad \mathbf{y}_{N_2^j} = \mathbf{T}_{N_2^j} \mathbf{q}_{O_2} \quad (3.6)$$

(6,1) (6,6) (6,1)

La matrice de transformation rigide  $\mathbf{T}_{N^j}$  associée à chaque noeud de jonction  $N_1^j$  a pour expression :

$$\mathbf{T}_{N^j} = \left[ \begin{array}{c|ccc} & 0 & z_{N^j} & -y_{N^j} \\ & -z_{N^j} & 0 & 0 \\ & y_{N^j} & 0 & 0 \\ \hline 0 & & I_3 & \end{array} \right] \quad (3.7)$$

où  $(y_{N^j}, z_{N^j})$  sont les coordonnées du noeud  $N^j$ .

Ainsi, pour l'ensemble des noeuds des deux sections, on obtient séparément les deux transformations :

$$\mathbf{T}_{S_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{N_1^1} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{N_1^j} \\ \mathbf{T}_{N_1^{j+1}} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{N_1^{n_1}} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{T}_{S_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{N_2^1} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{N_2^j} \\ \mathbf{T}_{N_2^{j+1}} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{N_2^{n_2}} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

La matrice de condensation cinématique complète  $\mathbf{T}_S$  de la totalité des ddl de jonction  $\mathbf{y}_j$  sur  $\mathbf{q}_O$  (12 ddl) est alors définie par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{S_1} & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{S_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{O_1} \\ \mathbf{q}_{O_2} \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{T}_S \mathbf{q}_O \quad (3.9)$$

Il est important de noter que, d'un point de vue numérique, on réduit de manière significative les coûts de calcul en effectuant simultanément la double transformation  $\mathbf{T}_g \mathbf{T}_S$  :

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}_g \mathbf{T}_S \mathbf{q}_O \quad (3.10)$$

On peut finalement exprimer les matrices numériques  $\tilde{\mathbf{K}}_O$  et  $\tilde{\mathbf{M}}_O$  du modèle réduit à **12 ddl** en  $(O_1, O_2)$  :

$$\tilde{\mathbf{K}}_O = \mathbf{T}_S^T \mathbf{T}_g^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{T}_g \mathbf{T}_S \quad ; \quad \tilde{\mathbf{M}}_O = \mathbf{T}_S^T \mathbf{T}_g^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{T}_g \mathbf{T}_S \quad (3.11)$$

### 3.1.2 Identification de la poutre équivalente

On a vu au Chapitre précédent que l'élément fini de Timoshenko proposé est exact en statique. Par conséquent, si la structure étudiée se comporte comme une poutre, **il suffit d'un seul élément fini** sur la longueur pour représenter de façon exacte son comportement statique (alors qu'une discrétisation plus fine s'impose en dynamique). On propose ici une technique d'identification paramétrique basée sur ce résultat.

Supposons que la structure soit discrétisée par un seul élément fini de poutre situé entre les noeuds  $C_1$  et  $C_2$ . En pratique, les poutres tridimensionnelles étudiées possèdent une section droite de forme quelconque. Les directions principales de flexion  $(y_p, z_p)$  définissant l'orientation du référentiel local et les coordonnées de  $C$   $(y_C, z_C)$  et de  $G$   $(y_G, z_G)$  dans celui-ci sont a priori inconnues. Il est alors possible d'exprimer l'élément fini en deux points arbitraires et selon une orientation quelconque (correspondant à celle du référentiel global de calcul). Nous choisissons pour cela les points  $O_1$  et  $O_2$  précédemment utilisés lors de la condensation numérique (Figure 3.3). La seule caractéristique géométrique de poutre connue a priori est sa direction longitudinale car elle est donnée par celle du modèle initial. Rappelons que  $O_1$  est choisi comme origine du référentiel de calcul, et que la longueur de l'élément fini est égale à celle de la structure réelle.

De façon analogue à la transformation cinématique de corps solide définie pour les noeuds de jonction des sections  $S_1$  et  $S_2$  (3.9), on définit la transformation  $T_{C_i} (i=1,2)$  permettant d'exprimer les déplacements du point  $C_i$  de coordonnées  $(y_C, z_C)$  en fonction des déplacements  $q_{O_i}$  du point  $O_i$  de la manière suivante :

$$T_{C_1} = T_{C_2} = \left[ \begin{array}{c|ccc} & 0 & z_C & -y_C \\ & -z_C & 0 & 0 \\ & y_C & 0 & 0 \\ \hline 0 & & I_3 & \end{array} \right] \quad (3.12)$$

Il en résulte la transformation complète des déplacements des noeuds  $(C_1, C_2)$  aux noeuds  $(O_1, O_2)$  définie par :

$$\begin{bmatrix} q_{C_1} \\ q_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{C_1} & 0 \\ 0 & T_{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{O_1} \\ q_{O_2} \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} T_C q_O \quad (3.13)$$

Les matrices élémentaires de raideur et de masse  $K_O^p$  et  $M_O^p$  de l'élément exprimées en  $(O_1, O_2)$  et dans les directions principales d'inertie sont obtenues formellement à partir des matrices élémentaires exprimées en  $(C_1, C_2)$  présentées dans le Chapitre 2. On a :

$$K_O^p = T_C^T K_C^p T_C \quad ; \quad M_O^p = T_C^T M_C^p T_C \quad (3.14)$$

D'autre part, nous avons établi après plusieurs opérations sur la matrice de raideur élémentaire  $K_O^p$  que celle-ci peut être décomposée en sous-matrices, elles mêmes générées par quatre matrices de base  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $Q_1$  et  $Q_2$  à 3 ddl chacune. On exprime alors  $K_O^p$  sous la forme suivante :

$$K_O^p = \begin{bmatrix} K_1 & K_1 Q_1 & -K_1 & -K_1 Q_2 \\ & Q_1^T K_1 Q_1 + K_2 & -Q_1^T K_1 & -Q_1^T K_1 Q_2 - K_2 \\ & & K_1 & K_1 Q_2 \\ & \text{sym} & & Q_2^T K_1 Q_2 + K_2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Les matrices génératrices  $K_1$  et  $K_2$  mettent en évidence, en les dissociant, tous les paramètres constitutifs du modèle de poutre. Leurs expressions sont :

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{(1+\phi_z)L^3} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Les matrices  $Q_1$  et  $Q_2$  quant à elles s'expriment simplement à partir des coordonnées de C et de G dans le repère principal centré en O (Figure 3.4) :

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & z_G & -y_G \\ -z_C & 0 & \frac{1}{2}L \\ y_C & -\frac{1}{2}L & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & z_G & -y_G \\ -z_C & 0 & -\frac{1}{2}L \\ y_C & \frac{1}{2}L & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

avec :

$$y_G = y_C + \bar{y}_G \quad ; \quad z_G = z_C + \bar{z}_G \quad (3.20)$$

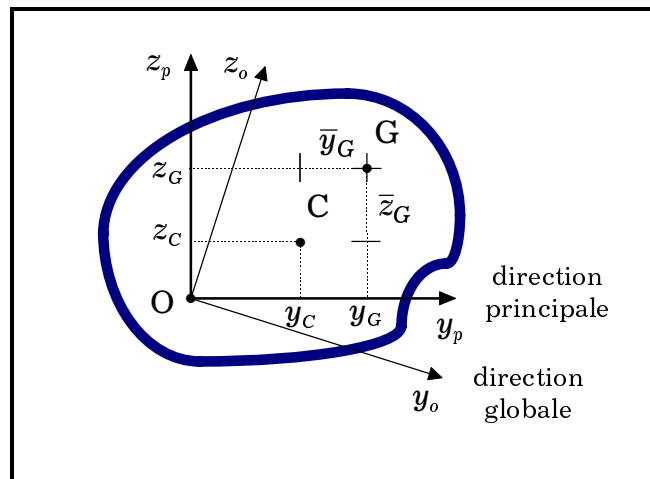


Figure 3.4 : Paramètres d'excentration dans une section droite

Afin d'obtenir la configuration la plus générale de l'élément fini de poutre, il reste à exprimer les matrices élémentaires précédentes dans les directions a priori quelconques  $(x_o, y_o, z_o)$  du référentiel de calcul. Soit  $\Theta$  la matrice des cosinus directeurs des directions principales  $(x_p, y_p, z_p)$  dans le référentiel de calcul. La matrice orthogonale  $R$  de changement de base est définie de façon classique par :

$$R = \begin{bmatrix} \Theta & & & \\ & \Theta & & \\ & & \Theta & \\ & & & \Theta \end{bmatrix} \quad ; \quad \Theta^T \Theta = I_3 \quad (3.21)$$

On peut alors écrire les matrices de raideur  $K_O$  et de masse  $M_O$  de l'élément équivalent exprimé en  $(O_1, O_2)$  de la manière suivante :

$$K_O = R^T K_O^p R \quad ; \quad M_O = R^T M_O^p R \quad (3.22)$$

En appliquant à la matrice  $K_O$  un découpage compatible avec l'équation (3.15), le bloc supérieur gauche s'écrit alors sous la forme:  $\Theta^T K_1 \Theta$ . Puisque  $K_1$  définie par (3.16) est une matrice diagonale, on peut ainsi en déduire que les directions principales  $(x_p, y_p, z_p)$  sont les vecteurs propres de ce bloc.

Finalement, le modèle équivalent de poutre est donc totalement déterminé à partir des paramètres suivants :

- $\Theta$  : Orientation des directions principales  $(x_p, y_p, z_p)$
- $y_C, z_C$  : Position de l'axe élastique (dans les directions principales)
- $y_G, z_G$  : Position de l'axe neutre (dans les directions principales)
- $L$  : Longueur de la poutre (supposée connue)
- $A$  : Aire de la section droite
- $J$  : Constante de torsion
- $I_y$  : Moment quadratique d'inertie autour de  $y_p$
- $I_z$  : Moment quadratique d'inertie autour de  $z_p$
- $k_y$  : Coefficient de cisaillement suivant  $y_p$
- $k_z$  : Coefficient de cisaillement suivant  $z_p$
- $E$  : Module d'élasticité du matériau (supposé connu)
- $G$  : Module de cisaillement du matériau (supposé connu)
- $\rho$  : Masse volumique du matériau

Le principe d'identification proposé consiste à confronter la matrice de raideur **numérique**  $\tilde{K}_O$  à la matrice **analytique**  $K_O$  correspondante définie précédemment (3.22). On peut ainsi écrire l'égalité entre les expressions des termes de  $K_O$  et leur valeur numérique correspondante dans  $\tilde{K}_O$ . La démarche est explicitée ci-après.

Ainsi, les directions principales de la poutre  $(y_p, z_p)$  sont identifiées à partir de la matrice de raideur numérique  $\tilde{K}_O$ , conformément au sous-bloc analytique  $\Theta^T K_1 \Theta$  défini précédemment, par un simple calcul de vecteurs propres. On peut ensuite évaluer la matrice  $R$  définie par la relation (3.21). On obtient la matrice numérique  $\tilde{K}_O^p$  par la relation inverse :

$$\tilde{K}_O^p = R \tilde{K}_O R^T \quad (3.23)$$

On détermine ensuite les valeurs numériques associées aux sous-blocs «  $K_1$  », «  $K_1 Q_1$  » et «  $Q_1^T K_1 Q_1 + K_2$  » de la matrice  $\tilde{K}_O^p$  selon le découpage défini par (3.15). Le calcul numérique des matrices de base  $K_1$ ,  $Q_1$  puis  $K_2$  définies par (3.16), (3.17), et (3.18) est alors immédiat.

L'évaluation de  $Q_1$  donne les positions respectives du centre de torsion  $C$   $(y_C, z_C)$  et du centre de masse  $G$   $(y_G, z_G)$ , tandis que  $K_1$  et  $K_2$  permettent d'identifier les six paramètres constitutifs  $A, J, I_y, I_z, k_y, k_z$ .

Le modèle équivalent étant identifié exclusivement à partir de la raideur, la masse volumique  $\rho$  est un paramètre qui doit être identifié séparément afin de conserver la masse totale  $m_T = \rho AL$  du modèle. On montre que la condensation statique de la matrice de masse  $M_O^p$  de l'élément de poutre sur un seul noeud (par exemple  $O_1$ ) permet d'aboutir à la matrice d'inertie de solide  $M_{O_1}^p$  habituelle :

$$M_{O_1}^p = \rho AL \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_G & -y_G \\ & 1 & 0 & -z_G & 0 & \frac{1}{2}L \\ & & 1 & y_G & -\frac{1}{2}L & 0 \\ & & & r_y^2 + r_z^2 + y_G^2 + z_G^2 & -\frac{1}{2}y_G L & -\frac{1}{2}z_G L \\ & & & & r_y^2 + z_G^2 + \frac{1}{3}L^2 & -y_G z_G \\ & & & \text{sym} & & r_z^2 + y_G^2 + \frac{1}{3}L^2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

En appliquant la même transformation à la matrice  $\tilde{M}_O^p$ , on peut alors en déduire la valeur numérique de la masse du modèle condensé sur  $O_1 O_2$  (à partir du premier terme diagonal, par exemple). Celle-ci est égale à la masse  $\tilde{m}_T$  du modèle initial puisque la double transformation  $T_g T_S$  conserve la masse totale. D'où finalement la valeur de la masse volumique équivalente  $\rho$ .



## 3.2 Validation de la méthode

La méthode d'identification des paramètres présentée a été testée sur de nombreuses structures rectilignes à comportement de poutre. Celles-ci se différencient essentiellement par la forme de leur section droite. On présente dans la suite les résultats numériques obtenus pour quelques unes de ces structures. Le matériau utilisé pour chacun des exemples présentés est homogène isotrope et élastique. Le maillage initial est dans tous les cas constitué d'éléments finis quadrangulaires de coque à 6 ddl par noeud. Le maillage en poutre comprend a priori un nombre suffisant d'éléments finis pour calculer convenablement les premiers modes propres de la structure étudiée.

### 3.2.1 Cas où les centres C et G sont confondus

#### Tube à section rectangulaire

Il s'agit d'un tube rectiligne homogène en acier ( $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$ ,  $G = 8.077 \times 10^{10} \text{ N.m}^{-2}$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$ ) de longueur  $L = 1\text{m}$  et de section rectangulaire dont les dimensions sont précisées sur la Figure 3.5. De par la symétrie de la section, les directions principales de flexion ( $y_p, z_p$ ) sont connues et les points caractéristiques C et G sont confondus avec le centre de symétrie O. Le maillage du modèle initial en éléments coques comporte 4 divisions pour chaque coté de la section et 20 divisions sur la longueur. Il en résulte un modèle éléments finis à 2016 ddl.

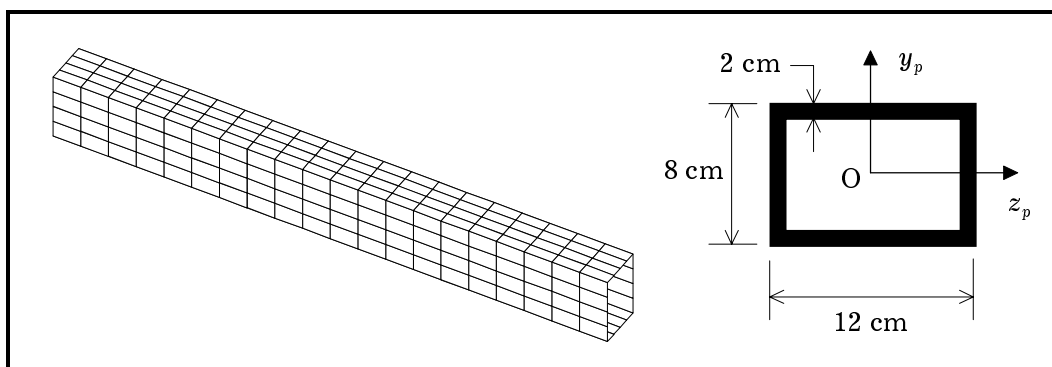


Figure 3.5 : Géométrie du tube à section rectangulaire

Le Tableau 3.1 présente les valeurs des paramètres caractéristiques de la poutre équivalente identifiées par la méthode proposée. Pour une section d'une telle simplicité géométrique, des valeurs « théoriques » peuvent être aisément trouvées dans la littérature [3,5,37]. On peut ainsi observer la bonne concordance des résultats obtenus. L'écart plus important observé sur la valeur de  $J$  peut s'expliquer par l'origine théorique du calcul analytique.

Paramètre	Valeur théorique	Valeur identifiée	
$A$ (m <sup>2</sup> )	$8.000 \times 10^{-3}$	$8.036 \times 10^{-3}$	
$J$ (m <sup>4</sup> )	$1.843 \times 10^{-5}$	$1.964 \times 10^{-5}$	
$I_y$ (m <sup>4</sup> )	$1.786 \times 10^{-5}$	$1.745 \times 10^{-5}$	
$I_z$ (m <sup>4</sup> )	$9.866 \times 10^{-6}$	$9.592 \times 10^{-6}$	
$k_y$	0.32	0.36	$\phi_y = 0.103$
$k_z$	0.55	0.60	$\phi_z = 0.113$
$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	7800	7765	

Tableau 3.1 : Caractéristiques de la poutre équivalente

Un calcul dynamique a été effectué afin de valider le comportement du modèle simplifié par rapport à celui du modèle coque. Le Tableau 3.2 présente les fréquences des premiers modes propres de la structure libre-libre (voir Figure 3.6). Elle est maillée d'une part en éléments coques (modèle initial de référence à 2016 ddl), et d'autre part en éléments poutres générés à partir des valeurs de paramètres du Tableau 3.1 (modèle équivalent à 126 ddl). Le modèle de poutre utilisé est issu de la formulation de type Timoshenko présentée dans le chapitre précédent.

Mode n°	Modèle coques		Modèle poutres équivalent				
	2016 ddl		126 ddl				
	Référence		Théorique		Identifié		Nature du mode
$f_R$ (Hz)		$f$ (Hz)	$e$ (%)	$f$ (Hz)	$e$ (%)		
1	593.11		598.00	0.82	594.88	0.29	Flexion 1 ( $xy$ )
2	782.94		787.77	0.62	784.25	0.16	Flexion 1 ( $xz$ )
3	1366.0		1313.1	-3.87	1375.9	0.72	Torsion 1
4	1432.0		1431.1	-0.06	1445.8	0.96	Flexion 2 ( $xy$ )
5	1866.7		1859.9	-0.36	1872.5	0.31	Flexion 2 ( $xz$ )

Tableau 3.2 : Précision du modèle équivalent ;  $e(\%) = 100(f - f_R)/f_R$

Les résultats obtenus montrent clairement que le modèle équivalent de poutre, bien que de taille très inférieure à celle du modèle initial (environ 90 % de réduction), permet de représenter correctement les premiers modes d'ensemble de la structure. L'utilisation des valeurs identifiées des paramètres conduit à une précision du même ordre que celle obtenue à partir des valeurs théoriques, et même meilleure en ce qui concerne le mode de torsion.

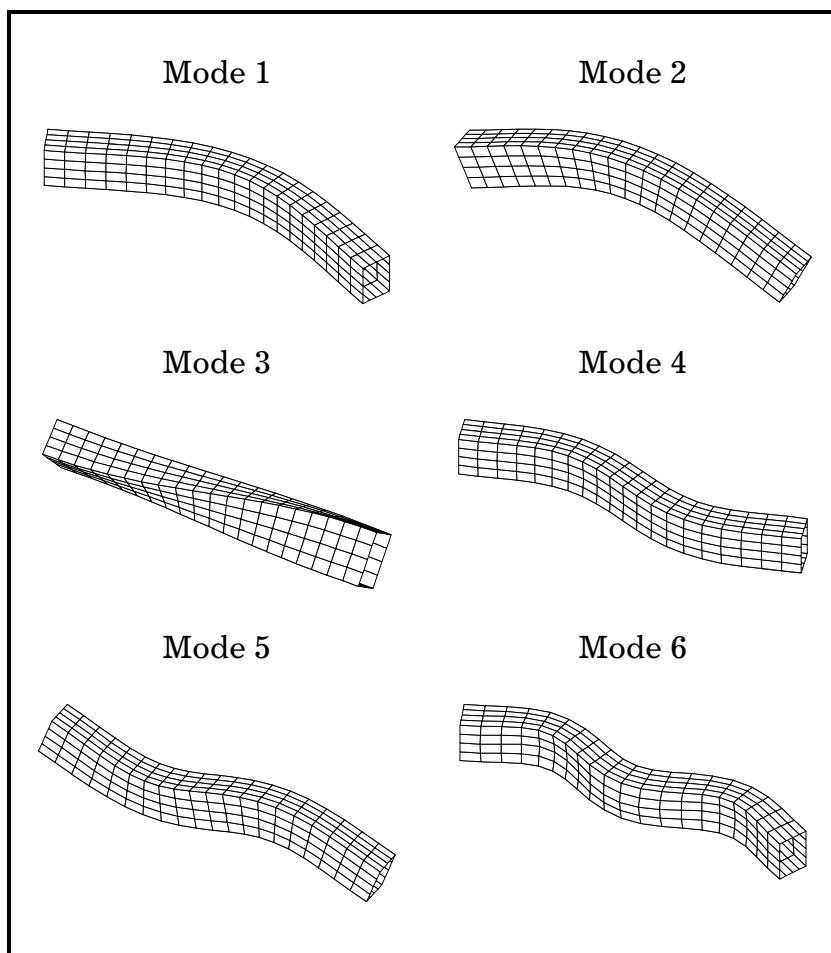


Figure 3.6 : Premiers modes propres du tube - Modèle coques

La Figure 3.7 présente la précision, par rapport au modèle initial, des fréquences propres calculées par un modèle simplifié à 126 ddl issu des différents modèles de flexion de poutre suivants (définis au Chapitre 2) :

- modèle de Timoshenko
- modèle de Bernoulli
- modèle Mixte

Les valeurs de paramètres utilisées pour ces modèles correspondent aux valeurs identifiées présentées dans le Tableau 3.1.

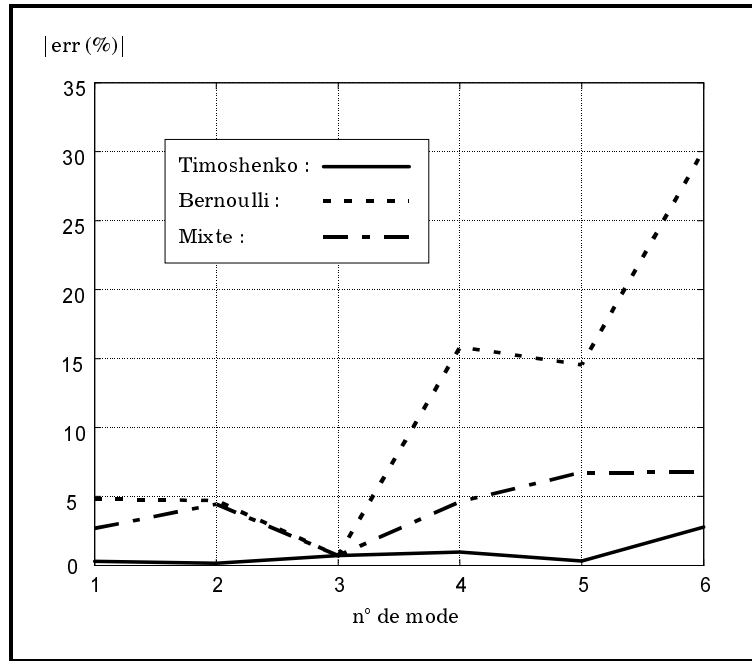


Figure 3.7 : Précision de différentes formulations de poutre

Notons que la formulation de Timoshenko utilisée dans le modèle équivalent est celle qui donne les meilleurs résultats pour tous les modes de poutre. La formulation simplifiée de Bernoulli a tendance à surestimer les fréquences propres, conduisant à des erreurs inacceptables dès les premiers modes. La formulation Mixte donne des résultats de qualité intermédiaire.

### Tube à section elliptique

La structure étudiée est un tube en acier de section elliptique (Figure 3.8) et de longueur  $L=1.2$  m.

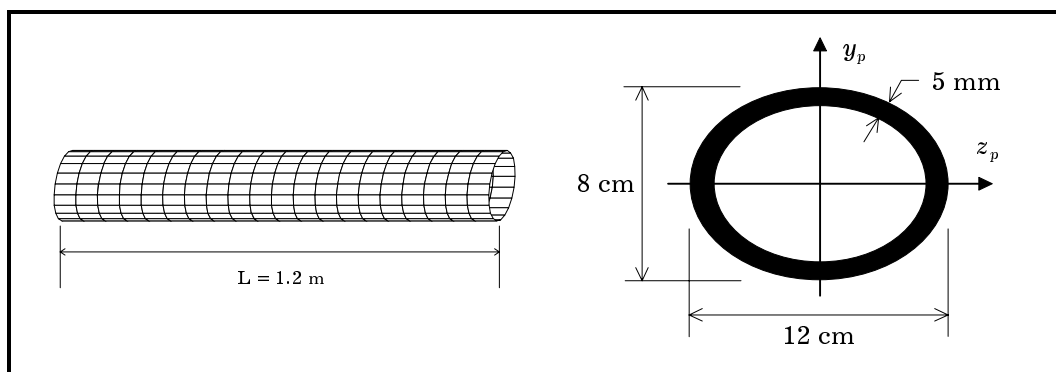


Figure 3.8 : Géométrie du tube à section elliptique

Les valeurs identifiées des paramètres du modèle de poutre équivalent ainsi que les valeurs théoriques correspondantes (quand elles existent) sont données dans le Tableau 3.3 :

Paramètre	Valeur théorique	Valeur identifiée	
$A$ (m <sup>2</sup> )	$1.50 \times 10^{-3}$	$1.51 \times 10^{-3}$	
$J$ (m <sup>4</sup> )	$3.07 \times 10^{-6}$	$2.97 \times 10^{-6}$	
$I_y$ (m <sup>4</sup> )	$2.21 \times 10^{-6}$	$2.20 \times 10^{-6}$	
$I_z$ (m <sup>4</sup> )	$1.16 \times 10^{-6}$	$1.15 \times 10^{-6}$	
$k_y$	-	0.40	$\phi_y = 0.041$
$k_z$	-	0.76	$\phi_z = 0.042$
$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	7800	7778	

Tableau 3.3 : Caractéristiques de la poutre équivalente

En configuration libre-libre, les premiers modes propres de la structure sont essentiellement des « modes de coque », c'est à dire, des modes pour lesquels la section droite du tube se déforme localement. Par conséquent, les hypothèses fondamentales de la formulation de poutre ne sont alors plus respectées, et le modèle équivalent proposé est inadéquat dans ce cas. Aussi, afin d'étudier le comportement de poutre de la structure dans le but de qualifier le modèle équivalent, on envisage de charger ses deux extrémités par des masses ponctuelles (20 kg à chaque extrémité). Les résultats obtenus dans cette configuration « chargée-chargée » sont présentés dans le Tableau 3.4. On peut ainsi noter l'excellente précision du modèle équivalent malgré un rapport de réduction de 20 en ce qui concerne la taille du modèle. De plus, soulignons à nouveau l'inadéquation du modèle de Bernoulli dans ce cas.

Mode n°	Modèle coques		Modèle poutres équivalent				Nature du mode
	Référence	2400 ddl	120 ddl		Nature		
			Timoshenko	Bernoulli			
$f_R$ (Hz)	$f$ (Hz)	$e$ (%)	$f$ (Hz)	$e$ (%)			
1	172.9	172.9	-0.01	175.7	1.63	Flexion 1 ( $xy$ )	
2	238.3	238.4	0.04	242.3	1.69	Flexion 1 ( $xz$ )	
3	604.8	602.9	-0.31	640.2	5.87	Flexion 2 ( $xy$ )	
4	772.1	772.3	0.03	772.3	0.03	Traction 1	
5	828.4	826.8	-0.19	877.0	5.86	Flexion 2 ( $xz$ )	

Tableau 3.4 : Précision du modèle équivalent ;  $e(\%) = 100(f - f_R) / f_R$

## Section symétrique de forme quelconque

La structure tubulaire de longueur  $L=1$  m est maillée en coques minces. La forme de sa section droite est quelconque mais reste symétrique par rapport au point central O (l'axe neutre et l'axe élastique sont donc confondus). Toujours est-il que dans ce cas, on ne dispose d'aucune valeur théorique des paramètres du modèle poutre.

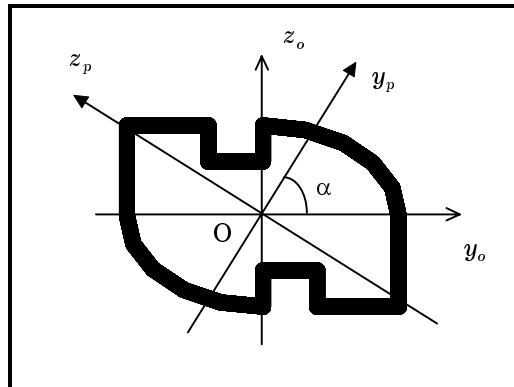


Figure 3.9 : Forme de la section droite du tube

La méthode proposée a permis néanmoins d'identifier **automatiquement** les valeurs numériques des paramètres à introduire dans le modèle équivalent, y compris l'orientation des directions principales par rapport aux axes de calcul. Ces valeurs sont groupées dans le Tableau 3.5 ci-dessous :

Paramètre	Valeur identifiée	
$A$ (m <sup>2</sup> )	$2.06 \times 10^{-3}$	
$J$ (m <sup>4</sup> )	$2.51 \times 10^{-6}$	
$I_y$ (m <sup>4</sup> )	$3.42 \times 10^{-6}$	
$I_z$ (m <sup>4</sup> )	$1.46 \times 10^{-6}$	
$k_y$	0.21	$\phi_y = 0.105$
$k_z$	0.43	$\phi_z = 0.120$
$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	7778	
$\alpha$ (degrés)	<b>72.7</b>	

Tableau 3.5 : Paramètres équivalents

Afin de qualifier la poutre équivalente, la structure a été encastree à une extrémité et chargée à l'autre par une masse ponctuelle de 40 kg. Les modes propres calculés dans cette configuration sont présentés dans le Tableau 3.6.

Mode n°	Modèle coques	Modèle poutres équivalent				Nature du mode
	2400 ddl	120 ddl				
	Référence	Timoshenko		Bernoulli		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	f (Hz)	e (%)		
1	22.75	22.75	0.01	23.05	1.32	Flexion 1 ( $xy$ )
2	34.76	34.76	0.00	35.29	1.51	Flexion 1 ( $xz$ )
3	304.1	311.1	2.31	345.1	13.5	Flexion 2 ( $xy$ )
4	463.2	467.8	0.98	525.2	13.4	Flexion 2 ( $xz$ )
5	491.8	491.6	-0.04	491.6	-0.04	Traction 1
6	561.7	578.6	3.01	578.6	3.01	Torsion 1

Tableau 3.6 : Précision du modèle équivalent ;  $e(\%)=100(f-f_R)/f_R$

Cet exemple illustre la capacité de la méthode proposée pour identifier les paramètres de sections symétriques de géométrie quelconque. Les résultats obtenus pour les fréquences propres confirment le bon comportement dynamique du modèle équivalent. Toutefois, notons que la précision des résultats peut être dégradée par l'apparition de déformations locales de coque (mode 3 et mode 6), et ce malgré un comportement global de type poutre.

La série de cas tests présentée confirme le fait que, bien que les paramètres de poutre soient identifiés à partir de la raideur statique, ils permettent néanmoins de générer (avec correction de la masse totale) une matrice d'inertie suffisamment précise pour donner de bons résultats en dynamique.

### 3.2.2 Cas où les centres C et G sont distincts

#### Structure à section « delta »

La structure étudiée est un tube rectiligne en acier de longueur  $L = 3\text{ m}$  et de section droite de forme « delta » dont la géométrie est décrite sur la Figure 3.10. Le modèle éléments finis coques comporte 8 divisions sur chaque coté de la section et 30 divisions sur la longueur. Pour une forme telle que celle-ci, on ne dispose pas a priori de la totalité du jeu de paramètres caractéristiques de l'élément de poutre équivalent. Ceux-ci ont été identifiés par la méthode proposée et sont présentés dans le Tableau 3.7.

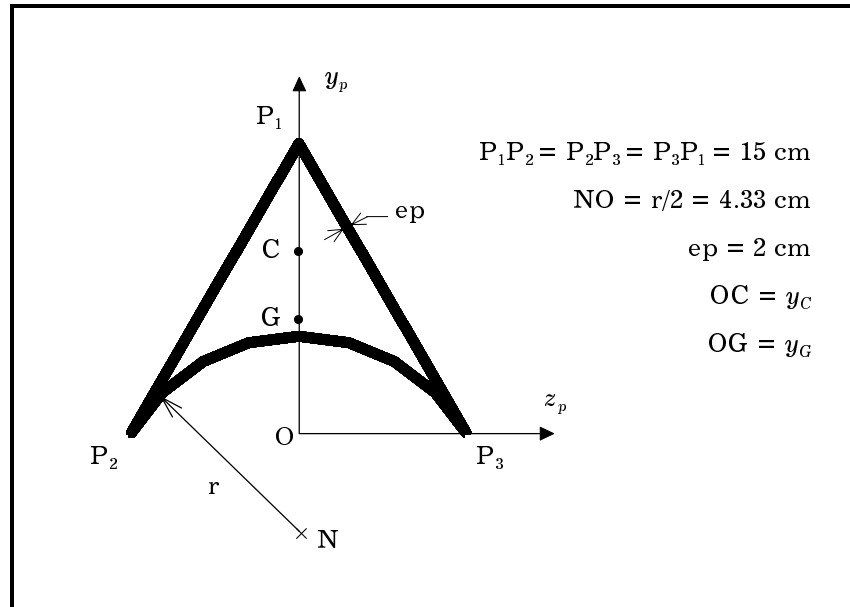


Figure 3.10 : Géométrie de la section « delta »

Paramètre	Valeur identifiée	
$y_C$ (cm)	8.21	
$y_G$ (cm)	5.10	
$A$ (m <sup>2</sup> )	$9.638 \times 10^{-3}$	
$J$ (m <sup>4</sup> )	$5.912 \times 10^{-6}$	
$I_y$ (m <sup>4</sup> )	$1.934 \times 10^{-5}$	
$I_z$ (m <sup>4</sup> )	$1.231 \times 10^{-5}$	
$k_y$	0.49	$\phi_y = 0.009$
$k_z$	0.51	$\phi_z = 0.013$
$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	7783	

Tableau 3.7 : Paramètres équivalents

La précision du modèle équivalent a été testée dans les conditions aux limites « encastré-libre ». Le modèle coques de référence (dont les modes propres sont représentés Figure 3.11) compte 4464 ddl, c'est à dire 24 fois plus que le modèle poutres qui en comporte seulement 186. Les points C et G n'étant pas confondus ( $\bar{y}_G \neq 0$ ), cette structure présente un couplage dynamique entre la flexion dans le plan  $x_p z_p$  et la torsion autour de l'axe  $x_p$ . Par contre, la flexion dans l'autre plan est découplée de la torsion par raison de symétrie de la section par rapport à l'axe  $y_p$  ( $\bar{z}_G = 0$ ).



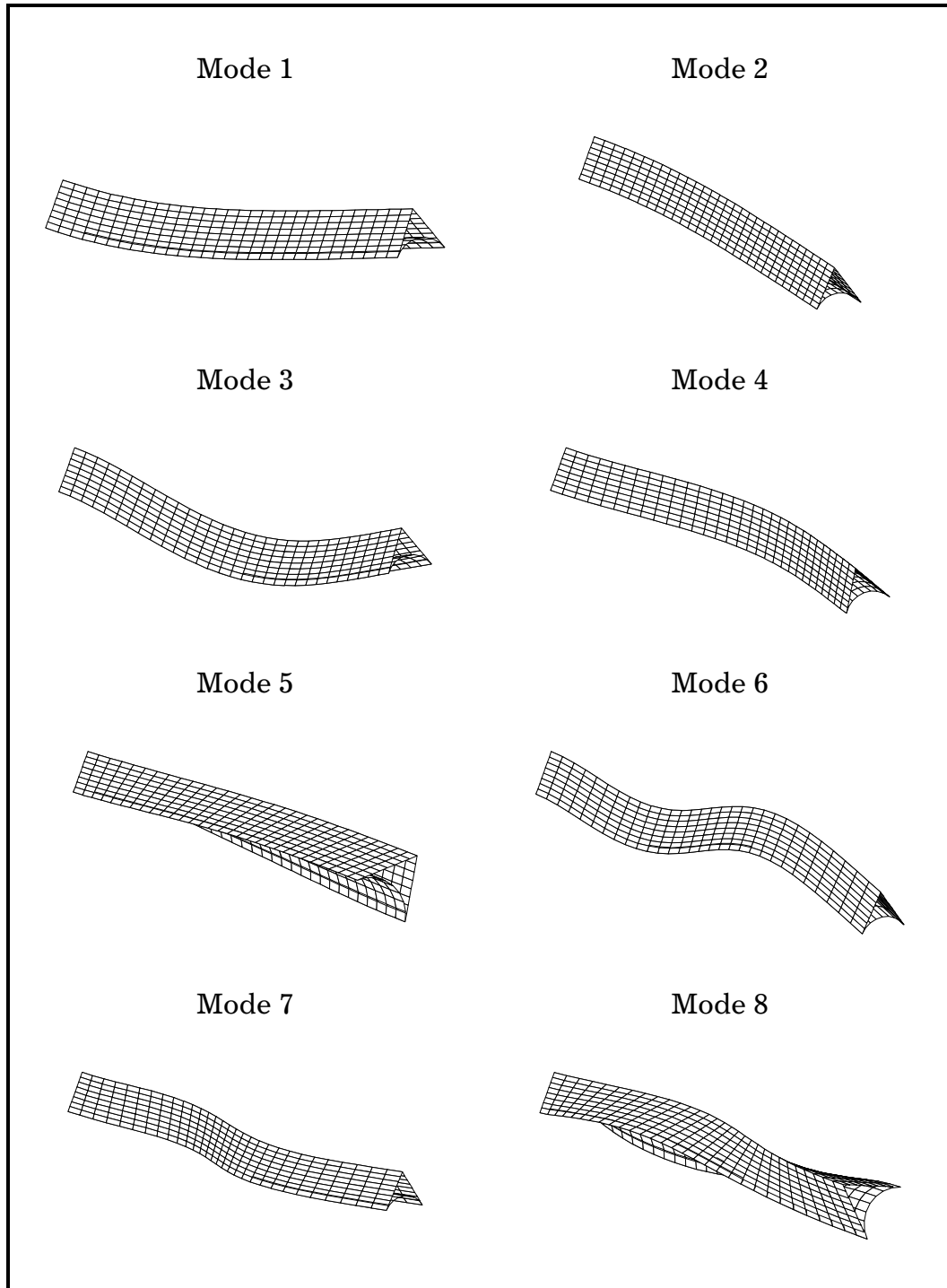


Figure 3.11 : Premiers modes propres du tube - Modèle coques

On présente dans le Tableau 3.8 les résultats calculés à partir du modèle de poutre proposé, avec et sans prise en compte du couplage flexion-torsion dans la matrice de masse  $M_C^p$ . On montre ainsi d'une part la bonne précision du modèle équivalent intégrant le couplage pour une large bande fréquentielle d'analyse. D'autre part, on peut noter que ne pas tenir compte du couplage

dynamique conduit à une dégradation très significative des résultats. Par conséquent, le modèle sans couplage doit être définitivement écarté car il est incapable de représenter correctement le comportement dynamique de la structure au delà des quatre premiers modes propres.

Mode n°	Modèle coques	Modèle poutres équivalent			
	4464 ddl	186 ddl			
	Référence	Avec Couplage		Sans Couplage	
	$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	f (Hz)	e (%)
1	11.519	11.517	-0.02	11.517	-0.02
2	14.394	14.391	-0.02	14.422	0.19
3	71.082	71.299	0.30	71.299	0.30
4	86.499	86.771	0.31	88.720	2.56
5	118.33	117.81	-0.44	102.03	-13.7
6	194.55	195.91	0.69	195.91	0.69
7	230.23	232.26	0.88	241.53	4.91
8	357.40	356.05	-0.37	306.38	-14.2
9	369.88	374.05	1.12	374.05	1.12
10	418.16	424.94	1.62	455.76	8.99
11	432.90	432.91	0.00	432.91	0.00
12	590.26	599.38	1.54	599.38	1.54
13	606.65	606.01	-0.10	511.57	-15.7
14	630.08	645.51	2.45	718.16	14.0
15	848.17	864.64	1.94	864.64	1.94

Tableau 3.8 : Précision du modèle équivalent ;  $e(\%) = 100(f - f_R)/f_R$

Afin de déterminer la nature des modes propres obtenus, et en particulier de ceux qui présentent un couplage flexion - torsion, il peut être envisageable d'exprimer ces modes en fonction de ceux du modèle découplé (pour lequel on connaît parfaitement la nature de chaque mode).

Notons  $Y_1$  la base modale calculée avec le modèle de poutre prenant en compte le couplage, et  $Y_0$  la base modale résultant du modèle sans couplage. On cherche à représenter chaque colonne de  $Y_1$  par une combinaison linéaire des vecteurs colonnes de  $Y_0$ . Cela revient à chercher la matrice « de projection », notée  $P$ , vérifiant :

$$Y_1 = Y_0 P \quad (3.25)$$

Puisque la base modale  $Y_0$  est tronquée, cette égalité doit être considérée au sens des moindres carrés. Ainsi, on cherche en fait la matrice  $P$  permettant de minimiser l'erreur  $\varepsilon$  sur la norme :

$$\varepsilon = \|Y_1 - Y_0 P\| \quad (3.26)$$

On montre que la matrice  $P$  solution de ce problème s'exprime en fonction des deux bases modales par :

$$P = Y_0^+ Y_1 \quad (3.27)$$

où  $Y_0^+$  est la pseudo-inverse au sens de Moore-Penrose de  $Y_0$ , définie par :

$$Y_0^+ = (Y_0^T Y_0)^{-1} Y_0^T \quad (3.28)$$

Les résultats numériques obtenus permettent de tracer une représentation graphique de la matrice de projection  $P$  dans le cas de la structure à section « delta ». La Figure 3.12 permet ainsi de visualiser de façon simple l'origine des modes propres de la poutre et, plus particulièrement, des modes propres couplés (dont les numéros sont soulignés).

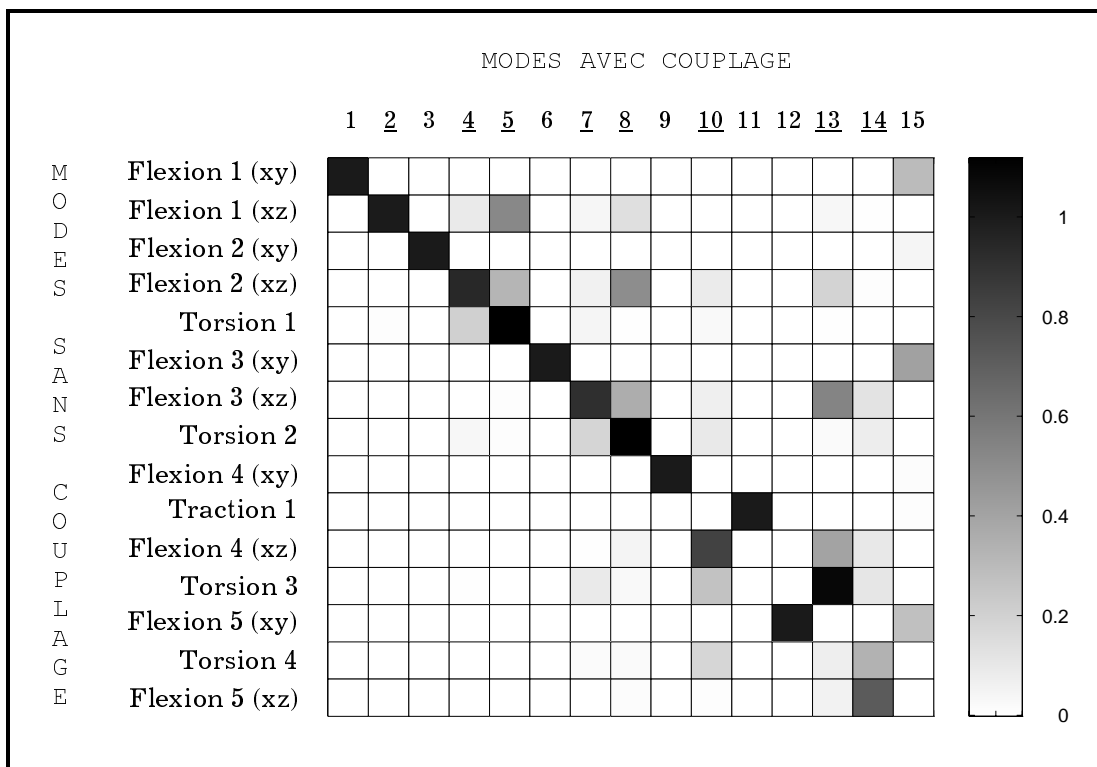


Figure 3.12 : Matrice de projection modale

Une autre façon de visualiser la nature d'un mode couplé consiste à représenter simultanément pour ce mode la déformée en flexion et en torsion. On peut ainsi tracer, de l'encastrement à l'extrémité libre ( $L = 3\text{ m}$ ), le déplacement  $w_C$  de flexion suivant  $z_p$  ainsi que le déplacement de même direction  $\bar{y}_G \theta_x$  dû à la torsion [2]. Les courbes présentées sur la Figure 3.13 montrent les résultats obtenus pour quelques uns des premiers modes fortement couplés.

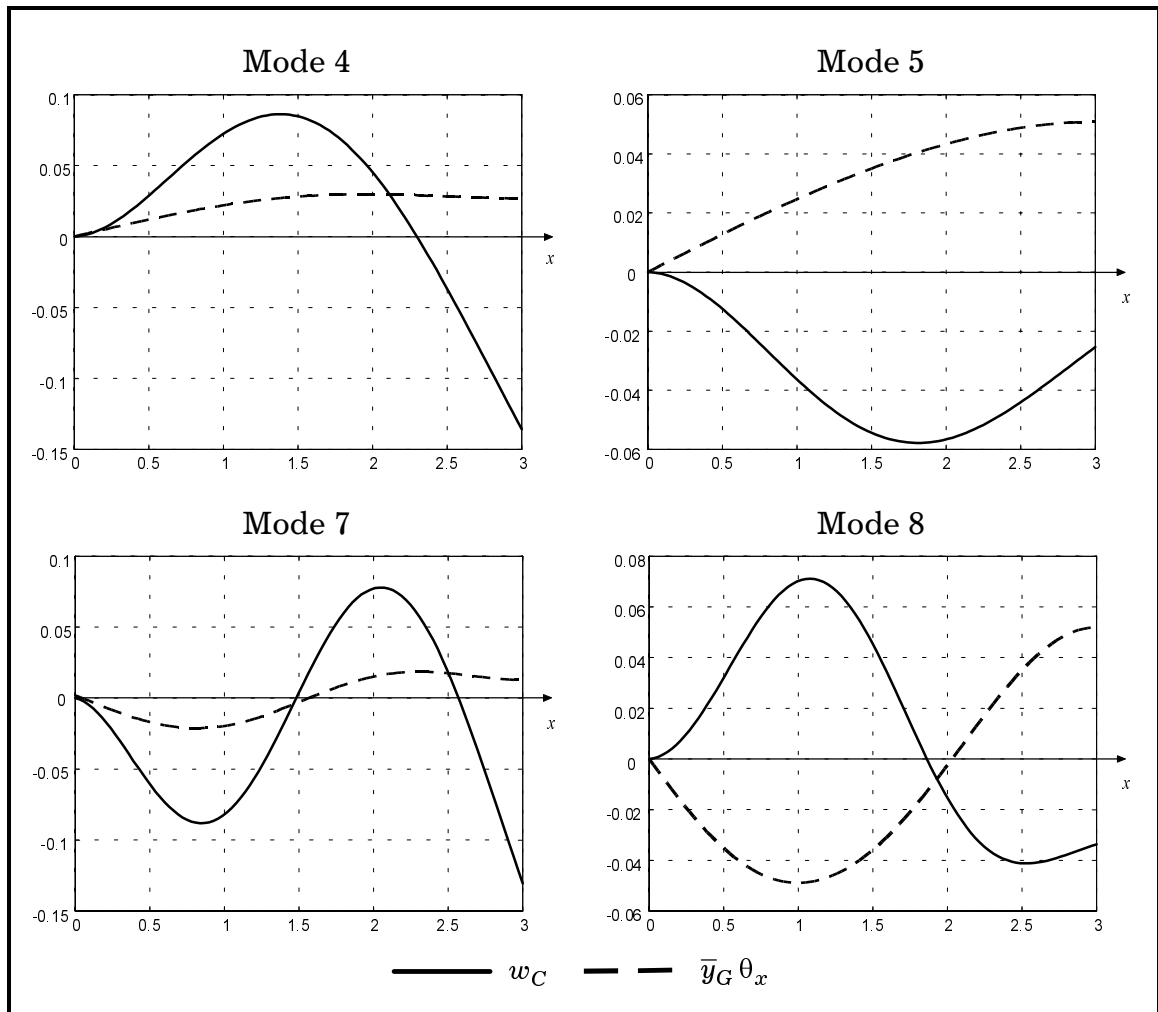


Figure 3.13 : Déformées de modes propres couplés

### Structure à section en « U »

La structure examinée est un profilé en U à section fermée, en acier et de longueur  $L = 0.5\text{ m}$ . La géométrie et les dimensions de la section sont détaillées sur la Figure 3.14.

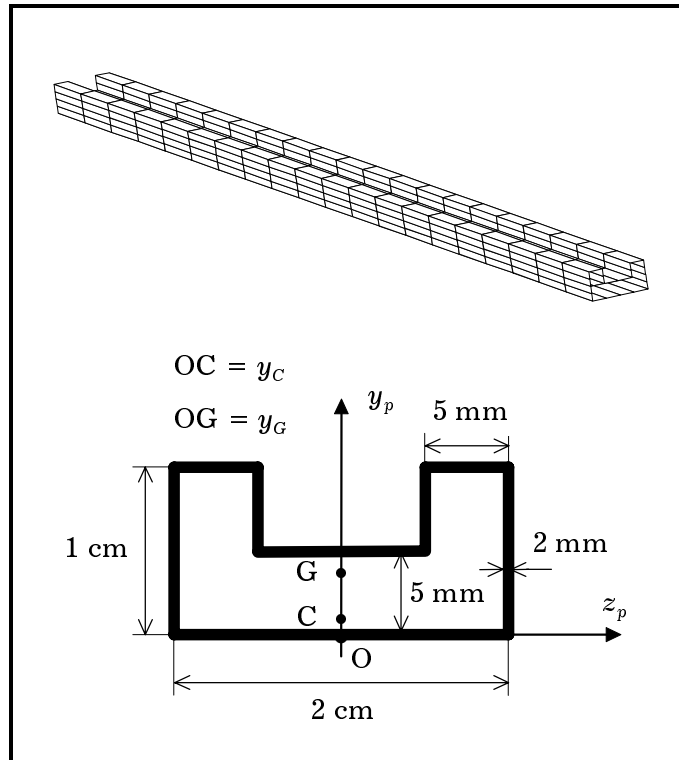


Figure 3.14 : Dimensions du profilé en « U »

Le maillage en éléments coques initial est constitué de 20 divisions longitudinales. Il conduit à un modèle éléments finis à 2520 ddl. Les paramètres de la poutre équivalente ont été identifiés de façon automatique à partir de la méthode proposée, et sont présentés dans le Tableau 3.9. Les premiers modes propres de la structure en configuration libre-libre sont représentés sur la Figure 3.15.

Paramètre	Valeur identifiée	
$y_C$ (mm)	0.81	
$y_G$ (mm)	4.64	
$A$ (m <sup>2</sup> )	$1.404 \times 10^{-4}$	
$J$ (m <sup>4</sup> )	$2.809 \times 10^{-9}$	
$I_y$ (m <sup>4</sup> )	$7.205 \times 10^{-9}$	
$I_z$ (m <sup>4</sup> )	$2.014 \times 10^{-9}$	
$k_y$	1.14	$\phi_y = 0.002$
$k_z$	0.85	$\phi_z = 0.008$
$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	7779	

Tableau 3.9 : Paramètres équivalents

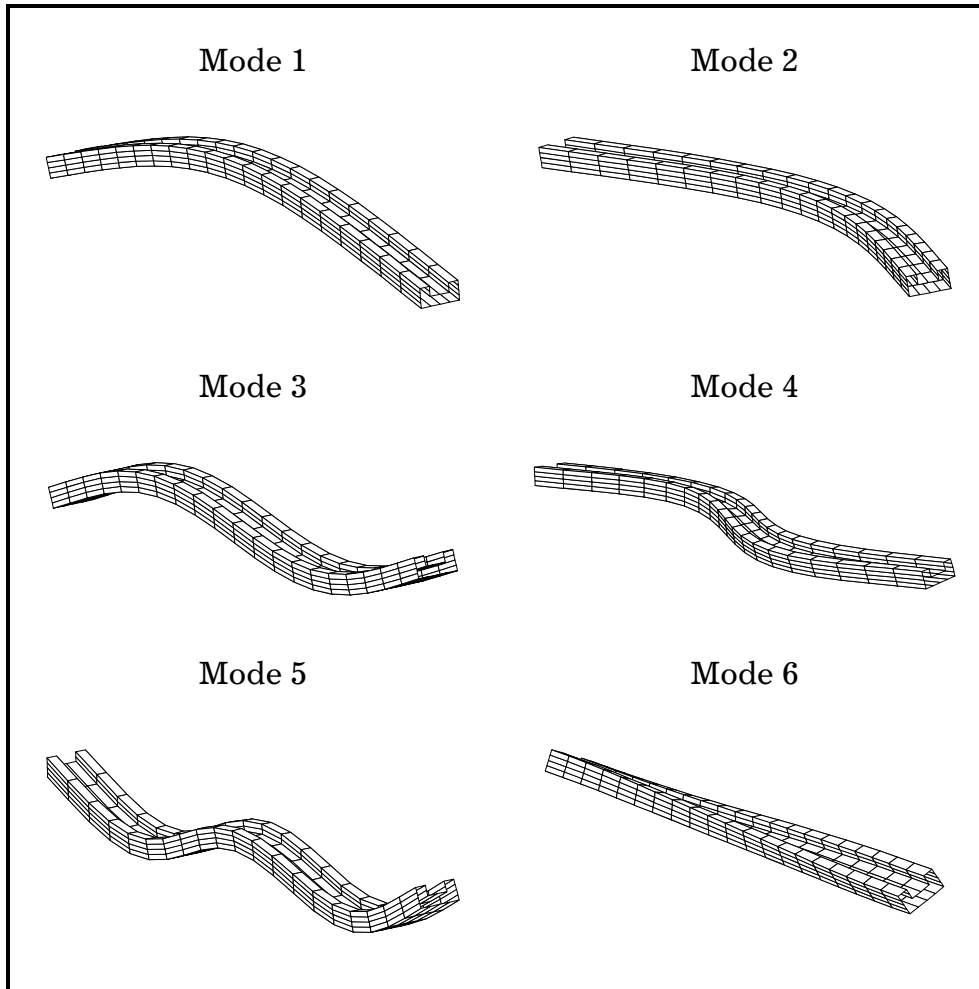


Figure 3.15 : Premiers modes propres du profilé en « U »

Le modèle de poutre identifié a été testé avec les mêmes conditions aux limites. Les fréquences propres obtenues sont présentées dans le Tableau 3.10 et comparées à celles du modèle initial. Notons la remarquable précision du modèle équivalent, ainsi qu'un taux de réduction de l'ordre de 95 %.

Mode n°	Modèle coques	Modèle poutres		Nature du mode
	2520 ddl	120 ddl	e (%)	
	$f_R$ (Hz)	f (Hz)		
1	279.0	279.7	0.2	Flexion 1 ( $xy$ )
2	523.1	524.3	0.2	Flexion couplée
3	762.9	768.1	0.7	Flexion 2 ( $xy$ )
4	1402	1411	0.6	Flexion couplée
5	1474	1497	1.6	Flexion 3 ( $xy$ )
6	1755	1784	1.7	Torsion 1

Tableau 3.10 : Précision du modèle équivalent ;  $e(\%) = 100(f - f_R)/f_R$

### 3.3 Qualification a priori des modes de poutre

Les résultats obtenus pour chacun des cas tests présentés montrent que la méthode de simplification est fiable, à condition que la structure se comporte « globalement » comme une poutre. En effet, le modèle élément fini de poutre est évidemment inapte à représenter les modes propres de type coque. Il est alors nécessaire de pouvoir qualifier *a priori* le comportement de la structure dans la bande fréquentielle d'intérêt. La connaissance préalable des modes de poutre et de coque peut en effet permettre de juger à l'avance si il est pertinent ou non d'appliquer la méthode d'identification paramétrique dans le cas considéré. Pour cela, nous avons développé un critère de qualification de mode basé sur la propriété suivante : si le mode propre considéré est un mode de poutre, alors chaque section droite présente une cinématique de corps solide. Cette propriété n'est pas vérifiée par les modes de coque, pour lesquels on observe au contraire des déformations locales des sections droites. Le critère utilisé permet de quantifier globalement pour chaque mode propre le taux de déformabilité des sections. Les calculs sont effectués à partir de la matrice modale du modèle résultant d'un maillage coques régulier de la structure rectiligne.

Afin d'illustrer la présentation des calculs, on se propose d'appliquer la méthode en question au tube à section elliptique, dont les caractéristiques (dimensions, matériau, maillage) ont été présentées précédemment.

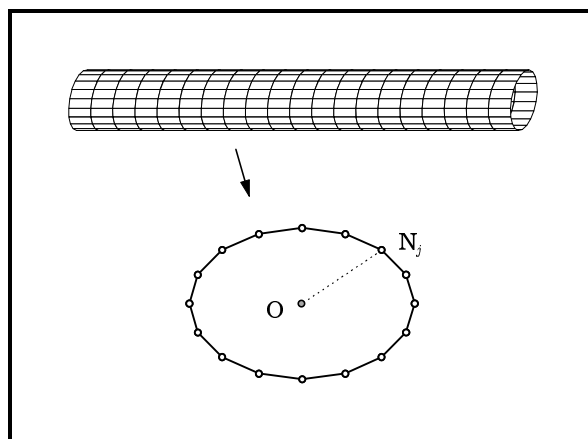


Figure 3.16 : Maillage du tube - Plan nodal

Considérons une section droite du tube correspondant à un plan nodal. Notons  $y_v$  le vecteur des déplacements nodaux associés au mode de rang  $v$

(pour un modèle à 6 ddl par noeud). Le mouvement de la section droite peut être représenté, au sens de Ritz, par un déplacement de corps solide  $\tilde{y}_v$  et une déformation de section, sous la forme :

$$y_v = \tilde{y}_v + \varepsilon_v \quad (3.29)$$

Si le mode considéré est un mode de poutre « pur », alors l'erreur  $\varepsilon_v$  est nulle. On peut donc lier les déplacements de chaque noeud à ceux d'un point moyen. En pratique, on choisit le point O, isobarycentre des noeuds de la section (Figure 3.16). Pour les déplacements  $\tilde{y}_{jv}$  du noeud  $N_j$ , on écrit ainsi :

$$\tilde{y}_{jv} = T_j y_{Ov} \quad (3.30)$$

La matrice de transformation rigide  $T_j$  à 6 ddl dépend uniquement des coordonnées du noeud  $N_j$  et du point O. En assemblant les matrices  $T_j$ , on obtient la relation suivante pour l'ensemble des ddl de la section :

$$\tilde{y}_v = T y_{Ov} \quad (3.31)$$

Par conséquent, pour un mode quelconque, le déplacement exact sur la section a pour expression :

$$y_v = T y_{Ov} + \varepsilon_v \quad (3.32)$$

On cherche le déplacement de corps solide le plus proche du déplacement exact, c'est à dire, celui qui permet de le représenter au mieux. Cela revient à minimiser l'erreur  $\varepsilon_v$ . La solution obtenue pour les moindres carrés est :

$$y_{Ov} = T^+ y_v \quad (3.33)$$

où  $T^+$  est la pseudo-inverse au sens de Moore-Penrose, définie par :

$$T^+ = (T^T T)^{-1} T^T \quad (3.34)$$

Le déplacement de corps solide  $\tilde{y}_v$  ( $v = 1, 2, 3, \dots$ ) peut alors s'exprimer en fonction du déplacement exact  $y_v$  par :

$$\tilde{y}_v = T T^+ y_v \stackrel{\Delta}{=} R y_v \quad (3.35)$$

La transformation  $R = T T^+$  est la matrice de projection orthogonale des déplacements exacts de la section sur les déplacements de corps solide associés. On montre aisément qu'elle en vérifie les propriétés, à savoir l'idempotence ( $R^2 = R$ ) et la symétrie ( $R^T = R$ ).



Considérons désormais la totalité des déplacements nodaux du maillage, que nous noterons également  $y_v$  afin de simplifier l'exposé. De même, notons  $\tilde{y}_v$  le déplacement rigidifié associé. Afin de qualifier le comportement de la structure, le critère utilisé consiste à calculer le MAC (modal assurance criteria) entre les deux déformées modales  $y_v$  et  $\tilde{y}_v$ . Rappelons que le MAC est une fonction bivectorielle, permettant d'évaluer la colinéarité de deux vecteurs. Notons  $\mu_v$  le critère en question, défini ainsi par :

$$\mu_v = \text{MAC}(y_v, \tilde{y}_v) \stackrel{\Delta}{=} \frac{|y_v^T \tilde{y}_v|}{\|y_v\| \|\tilde{y}_v\|} \in [0;1] \quad (3.36)$$

Plusieurs cas peuvent alors se présenter suivant la valeur de  $\mu_v$  :

- $\mu_v \approx 1$  : le mode propre considéré est un mode de poutre
- $\mu_v \approx 0$  : le mode propre n'est pas un mode de poutre

Pour des valeurs intermédiaires, le mode propre peut généralement être interprété comme la combinaison d'un comportement de poutre et d'une déformation de la section difficile à estimer a priori.

On peut montrer à l'aide d'un calcul simple que le critère  $\mu_v$  proposé, basé sur la colinéarité des vecteurs propres exacts et rigidifiés, revient en fait à calculer l'erreur en norme entre ces vecteurs. Considérons pour cela la fonction  $\xi_v$  permettant de quantifier cette erreur, définie par :

$$\xi_v = \frac{\|y_v - \tilde{y}_v\|}{\|y_v\|} = \frac{\|\varepsilon_v\|}{\|y_v\|} \quad (3.37)$$

L'erreur  $\varepsilon_v$  étant issue de la résolution par la méthode des moindres carrés, elle est orthogonale à la solution  $\tilde{y}_v$ . En effet, on a :

$$\tilde{y}_v^T \varepsilon_v = y_v^T R^T (I - R) y_v = y_v^T (R^T - R) y_v = 0 \quad (3.38)$$

En combinant les expressions (3.29), (3.36) et (3.38), on aboutit d'une part à :

$$\mu_v = \frac{\|\tilde{y}_v\|}{\|y_v\|} \quad (3.39)$$

et d'autre part, on peut finalement écrire la relation liant les critères  $\mu_v$  et  $\xi_v$  :

$$\mu_v^2 + \xi_v^2 = 1 \quad (3.40)$$

Afin d'évaluer la fiabilité du critère établi, les premiers modes propres du tube en configuration libre-libre ont été calculés à partir du modèle coque et sont présentés sur la Figure 3.17. On peut distinguer de façon claire les modes de poutre et les modes de coque.

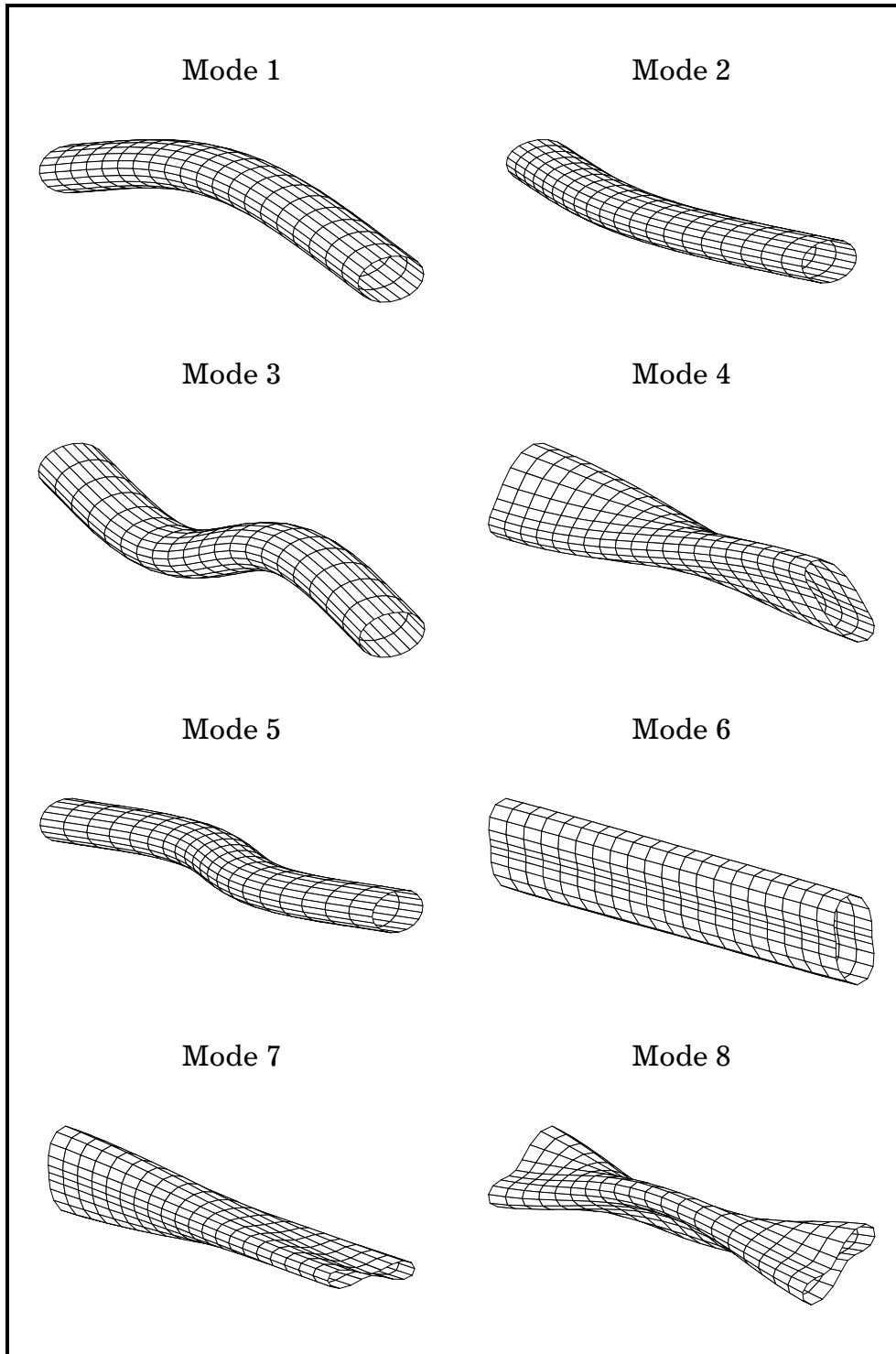


Figure 3.17 : Premiers modes propres de la structure

Le critère du MAC a été appliqué à ces modes propres. Les résultats obtenus sont représentés graphiquement sur la Figure 3.18. Ainsi, notons que ce critère semble être en parfaite adéquation avec ce qui peut être déduit visuellement de l'allure des déformées.

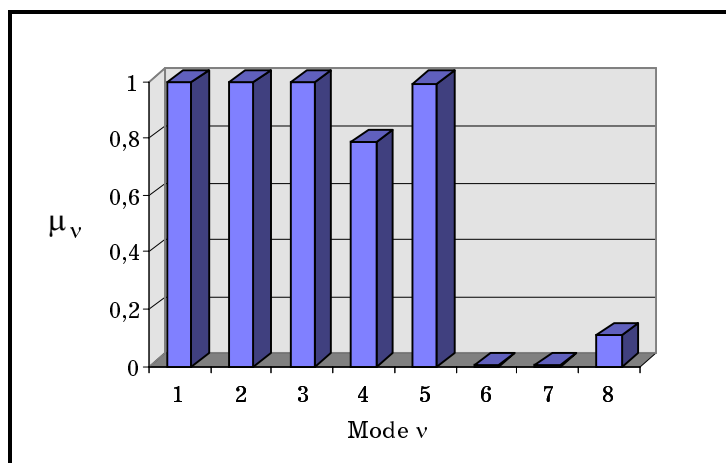


Figure 3.18 : MAC entre modes exacts et modes rigidifiés

D'autre part, les paramètres du modèle équivalent de poutre ont été identifiés précédemment (Tableau 3.3). Ils ont permis d'évaluer la précision de celui-ci dans la même configuration. Les valeurs obtenues sont les suivantes :

Mode n°	Modèle coques	Modèle poutres		Nature du mode
	2400 ddl	120 ddl		
	$f_R$ (Hz)	$f$ (Hz)	$e$ (%)	
1	343.7	343.7	0.0	Flexion 1 ( $xy$ )
2	470.1	470.3	0.0	Flexion 1 ( $xz$ )
3	891.7	890.9	0.0	Flexion 2 ( $xy$ )
4	1157	1265	9.3	Torsion 1
5	1208	1207	0.0	Flexion 2 ( $xz$ )
6	1405	-	-	Coque
7	1410	-	-	Coque
8	1428	-	-	Coque

Tableau 3.11 : Précision du modèle équivalent ;  $e(\%) = 100(f - f_R)/f_R$

Ces résultats confirment *a posteriori* les indications préalablement établies à partir du critère (Figure 3.18). En particulier, on peut constater que le

manque de précision du modèle équivalent en ce qui concerne le mode propre de torsion s'explique par le fait que, pour ce mode, la section droite du tube se déforme considérablement. Ceci a pu être détecté par la valeur de 0.78 obtenue pour le MAC. Le critère établi permet donc de donner *a priori* une estimation du domaine de validité du modèle équivalent.

### 3.4 Stabilité de l'identification

Afin d'évaluer la stabilité de la méthode d'identification proposée, on propose le cas test suivant. Considérons le tronçon de tube à section rectangulaire étudié précédemment. La longueur du tube est  $L_0 = 1\text{m}$ , et la dimension moyenne de la section est d'environ 10 cm (voir Figure 3.5). On s'intéresse à la stabilité des paramètres identifiés en fonction de la longueur d'identification. Pour cela, faisons varier la longueur  $L$  du tronçon (sans pour autant changer la taille du modèle éléments finis) et appliquons la méthode proposée. Les paramètres identifiés pour chaque longueur sont groupés dans le Tableau 3.12.

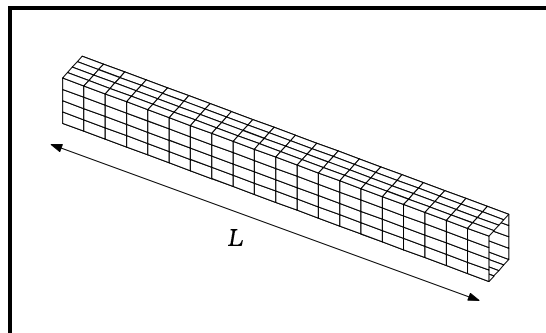


Figure 3.19 : Tronçon d'identification

$L/L_0$	$A$	$J$	$I_y$	$I_z$	$k_y$	$k_z$
1/8	8,3091	2,1391	1,7893	9,9068	0,409	0,602
1/4	8,1437	2,0337	1,7627	9,7178	0,366	0,587
1/2	8,0695	1,9849	1,7504	9,6307	0,356	0,586
1	8,0364	1,9646	1,7452	9,5916	0,369	0,609
2	8,0243	1,9558	1,7435	9,5768	0,462	0,745
4	8,0214	1,9527	1,7432	9,5728	-	-
8	8,0209	1,9515	1,7432	9,5721	-	-

Tableau 3.12 : Paramètres identifiés pour plusieurs longueurs

Les paramètres du modèle équivalent étant définis sur la section, ils devraient être insensibles à la longueur d'identification. Les résultats obtenus et présentés dans le Tableau 3.12 montrent qu'il n'en est rien.

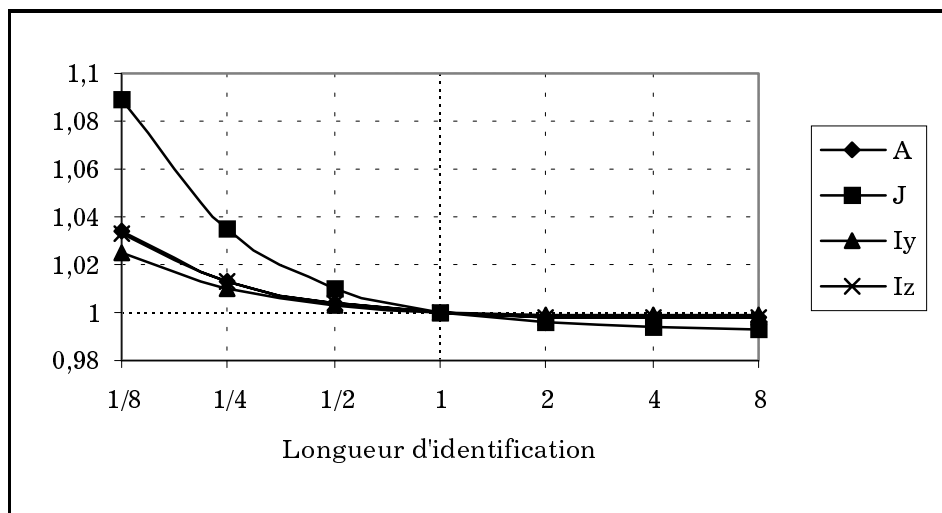


Figure 3.20 : Variation des paramètres en fonction de la longueur

Le graphique de la Figure 3.20 représente les variations de  $A$ ,  $J$ ,  $I_y$  et  $I_z$  relativement aux valeurs nominales identifiées sur  $L_0$ . On peut ainsi noter que la variation relative de  $A$ ,  $I_y$  et  $I_z$  est très faible : moins de 2 % pour une zone de stabilité allant de  $L=25$  cm à  $L=8$  m ! Par contre, la variation de  $J$  est légèrement plus prononcée. On remarque que lorsque la longueur d'identification diminue, la valeur des paramètres a tendance à augmenter. Cela s'explique de la façon suivante :

Lorsque l'élançement devient faible, la structure présente des déformations locales (gauchissement, écrasements, ...). L'hypothèse de non déformabilité de la section droite n'est plus alors vérifiée. Considérons la structure soumise à un effort donné. L'énergie de déformation totale est la somme de l'énergie de déformation de poutre et de l'énergie de déformation locale. En d'autres termes, le déplacement d'ensemble de la section droite est moindre que dans le cas où l'énergie de déformation locale est négligeable. Par conséquent, la méthode d'identification proposée, basée uniquement sur le comportement de poutre, a tendance à surestimer les rigidités de la structure, et donc les valeurs des paramètres associés. Afin d'éviter ce phénomène, l'expérience montre que pour de telles structures, la longueur d'identification doit être au moins égale à trois fois la dimension transversale de la section.

En ce qui concerne l'identification des coefficients de cisaillement, la zone de stabilité est plus réduite que pour les autres paramètres. En effet, on sait que lorsque l'élanement de la structure est grand, l'influence du cisaillement dans son comportement global devient négligeable. Ainsi, pour de grandes longueurs du tronçon d'identification, la correction apportée par le coefficient de cisaillement est du même ordre de grandeur que l'erreur intrinsèque due à la discrétisation. Il est alors impossible d'identifier  $k_y$  et  $k_z$  pour de grands élanements. En pratique, on peut aboutir à des valeurs négatives (ce qui est absurde, et explique les signes « - » dans le Tableau 3.12). Néanmoins, cela ne pose aucun problème quant à l'utilisation de la poutre équivalente pour une longueur du même ordre que la longueur d'identification.

On peut alors se demander quel est la validité d'un jeu de paramètres identifiés sur une longueur donnée, quant la poutre équivalente est utilisée sur une longueur différente. En pratique, on observe que les paramètres permettant de générer la poutre présentant le meilleur comportement doivent être identifiés sur un tronçon d'identification de longueur voisine de la longueur réelle de la structure initiale. Cette propriété, inhérente au principe d'identification mis en œuvre, peut apparaître en premier lieu comme une contrainte d'utilisation, mais nous verrons dans le chapitre suivant que c'est précisément ce qui garantit l'efficacité de la méthode proposée.



# Chapitre 4

## Application à l'homogénéisation

L'étude présentée dans les chapitres précédents traite le cas des poutres droites uniformes. Cela suppose que les structures étudiées ont une section droite de forme constante le long de l'axe et sont constituées d'un matériau unique homogène et isotrope. Or, il existe de nombreuses structures qui ne vérifient pas ces propriétés mais qui se comportent néanmoins globalement comme des poutres. Dans ce chapitre, on montre comment la méthode d'identification proposée peut être appliquée à de telles structures hétérogènes.

### 4.1 Poutre composite

Les structures concernées dans cette partie sont de type « sandwich », c'est à dire, constituées d'un assemblage de plusieurs couches de matériaux isotropes différents. En général, il s'agit de deux *semelles* (ou *peaux*) minces d'un matériau rigide autour d'une *âme* (ou *cœur*) plus légère servant essentiellement à maintenir leur écartement. Les propriétés spécifiques à ce type de structures sont une grande légèreté ainsi qu'une grande rigidité à la flexion (justement due à cet écartement). De plus, elles occupent un large créneau de la construction des pièces composites, et constituent de ce fait un domaine d'application intéressant pour la méthode de simplification de modèle proposée.



Les résultats concernant les poutres sandwich seront établis à partir de la structure test suivante. Il s'agit d'une poutre droite de longueur  $L = 65 \text{ cm}$ , dont les caractéristiques de la section droite sont présentées sur la Figure 4.1.

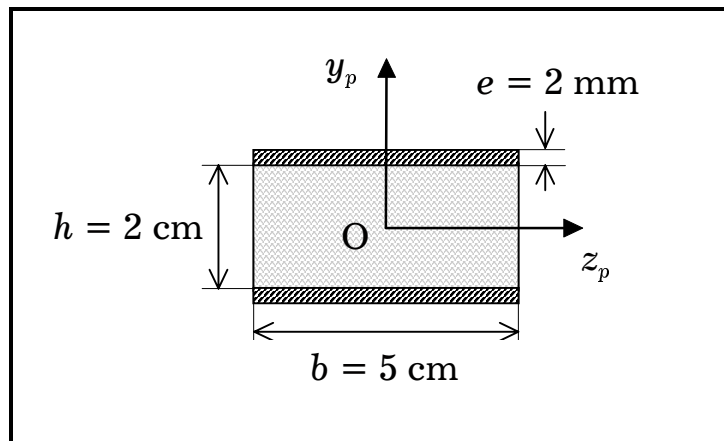


Figure 4.1 : Caractéristiques de la section composite

Les propriétés mécaniques des deux matériaux isotropes et homogènes sont pour les semelles : ( $E_1 = 2.1 \times 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$ ,  $\rho_1 = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$ ), et pour le cœur : ( $E_2 = 2.0 \times 10^9 \text{ N.m}^{-2}$ ,  $\rho_2 = 100 \text{ kg.m}^{-3}$ ).

Du fait de son élancement, cette structure peut être assimilable à une poutre. Une méthode permettant d'étudier simplement les déformations globales d'une telle poutre consiste à rechercher quelles sont les caractéristiques de la poutre homogène ayant un comportement statique similaire. On peut dire alors que l'on aboutit à une formulation **homogénéisée** de la traction, de la flexion, et de la torsion.

#### 4.1.1 Méthode classique d'homogénéisation

Afin de définir les rigidités équivalentes pour chacun des effets, la méthode d'homogénéisation classique consiste à écrire la rigidité dans une direction comme la superposition des rigidités des différentes couches constituant le sandwich.

Ainsi, pour la traction et la flexion, on peut définir sur chaque section droite  $S$  :

$$\langle EA \rangle = \int_S E_i dS = \sum_i E_i S_i \quad (4.1)$$

$$\langle EI_y \rangle = \int_S E_i z^2 dS = \sum_i E_i I_{yi} \quad (4.2)$$

$$\langle EI_z \rangle = \int_S E_i y^2 dS = \sum_i E_i I_{zi} \quad (4.3)$$

Dans le cas présent, les sections prises en compte sont toutes de forme rectangulaire. Cela conduit immédiatement aux expressions suivantes :

$$\langle EA \rangle = b [2E_1 e + E_2 h] \quad (4.4)$$

$$\langle EI_y \rangle = \frac{b^3}{12} [2E_1 e + E_2 h] \quad (4.5)$$

$$\langle EI_z \rangle = \frac{b}{12} [E_1 (2e^3 + 6(h+e)^2 e) + E_2 h^3] \quad (4.6)$$

Par contre, le calcul des expressions associées aux paramètres tels que la rigidité de torsion ou les coefficients de cisaillement n'est pas direct. En effet, il requiert la détermination préalable des fonctions de forme dans chaque sous-domaine de la section droite, ce qui constitue généralement un problème difficile à résoudre de manière explicite. On pourra en trouver une formulation technique complète dans l'ouvrage de Gay [19] ou dans celui de Batoz [3].

### 4.1.2 Méthode proposée

Afin d'appliquer la méthode d'identification que nous avons élaborée, le volume de la structure a été maillé en éléments finis hexaédriques à 8 noeuds et à 6 ddl par noeud. Le maillage, comprenant 20 divisions sur la longueur, conduit à un modèle numérique à 1890 ddl.

La méthode d'identification présentée au chapitre précédent permet d'obtenir de manière automatique les paramètres à introduire dans le modèle de poutre homogène équivalent. Les valeurs des paramètres identifiés sont présentées dans le Tableau 4.1, et comparées avec celles obtenues par la méthode classique. On peut constater une très bonne concordance entre les résultats issus des deux méthodes. En outre, notons que la méthode proposée permet **toujours** d'affecter une valeur numérique à chaque paramètre, ce qui n'est pas le cas de la méthode classique qui peut conduire à des calculs analytiques fastidieux suivant la forme de la section.

Paramètre équivalent	Méthode classique	Méthode proposée	
$\langle EA \rangle$ (N)	$4.40 \times 10^{+7}$	$4.42 \times 10^{+7}$	
$\langle EI_y \rangle$ (N.m <sup>2</sup> )	$9.16 \times 10^{+3}$	$9.19 \times 10^{+3}$	
$\langle EI_z \rangle$ (N.m <sup>2</sup> )	$5.16 \times 10^{+3}$	$5.18 \times 10^{+3}$	
$\langle GJ \rangle$ (N.m <sup>2</sup> )	-	$7.80 \times 10^{+2}$	
$k_y$	0.055 <sup>(*)</sup>	<b>0.061</b>	$\phi_y = 1.442$
$k_z$	-	1.91	$\phi_z = 0.008$
$\langle \rho A \rangle$ (kg.m <sup>-1</sup> )	1.66	1.66	

Tableau 4.1 : Caractéristiques de la poutre équivalente

La précision du modèle de poutre équivalente identifié a été évaluée dans les conditions aux limites de la poutre console. Ce modèle comporte 126 ddl, ce qui représente une réduction de taille de plus de 90 % par rapport au modèle initial. Les fréquences propres calculées à partir des deux modèles sont présentées dans le Tableau 4.2. Les résultats obtenus confirment le bon comportement dynamique du modèle équivalent ainsi que la fiabilité de l'identification.

Mode n°	Modèle hexaèdres	Modèle poutres		Nature du mode
	1890 ddl	126 ddl	e (%)	
	$f_R$ (Hz)	f (Hz)		
1	72.05	72.03	0.0	Flexion 1 ( $xy$ )
2	98.36	98.33	0.0	Flexion 1 ( $xz$ )
3	391.2	393.2	0.5	Flexion 2 ( $xy$ )
4	463.6	462.4	-0.3	Torsion 1
5	602.4	606.6	0.7	Flexion 2 ( $xz$ )
6	933.0	941.7	0.9	Flexion 3 ( $xy$ )

Tableau 4.2 : Précision du modèle équivalent ;  $e(\%) = 100(f - f_R)/f_R$

Considérons plus précisément le comportement de la structure associé à la flexion dans le plan ( $x_p y_p$ ). Il est important de noter que la valeur très faible (0.061) identifiée pour  $k_y$  signifie que la contribution du cisaillement est dans ce cas très importante comparée à celle de la flexion pure.

(\*) Valeur calculée à partir de l'ouvrage de J.L. Batoz & G. Dhatt [3], eq. (3.2.42).

Les effets du cisaillement sont parfois considérés comme secondaires pour l'étude des poutres homogènes. Ce n'est plus vrai dans le cas des poutres composites de type « sandwich ». Le Tableau 4.3 illustre ce phénomène en comparant la précision des résultats calculés à partir du modèle de Timoshenko utilisé et du modèle de Bernoulli. Les erreurs inacceptables obtenues par ce dernier (dès les premiers modes propres) montrent que, pour de telles structures, il est indispensable d'utiliser la formulation de poutre de Timoshenko.

Coques	Timoshenko		Bernoulli	
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	f (Hz)	e (%)
72.05	72.03	0.0	73.99	2.7
391.2	393.2	0.5	461.9	18.1
933.0	941.7	0.9	1285	37.8

Tableau 4.3 : Fréquences propres de flexion ( $x_p, y_p$ )

## 4.2 Simulations numériques

### 4.2.1 Structure à discontinuités uniformément réparties

Considérons une structure rectiligne constituée d'un matériau homogène unique, mais possédant des discontinuités réparties régulièrement sur sa longueur. Afin d'illustrer cette configuration, on présente le cas test suivant constitué d'un tube en acier de section elliptique perforé périodiquement par des ouvertures de dimensions constantes (Figure 4.2).

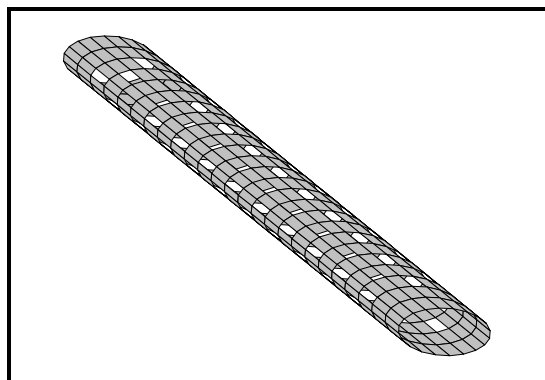


Figure 4.2 : Tube perforé

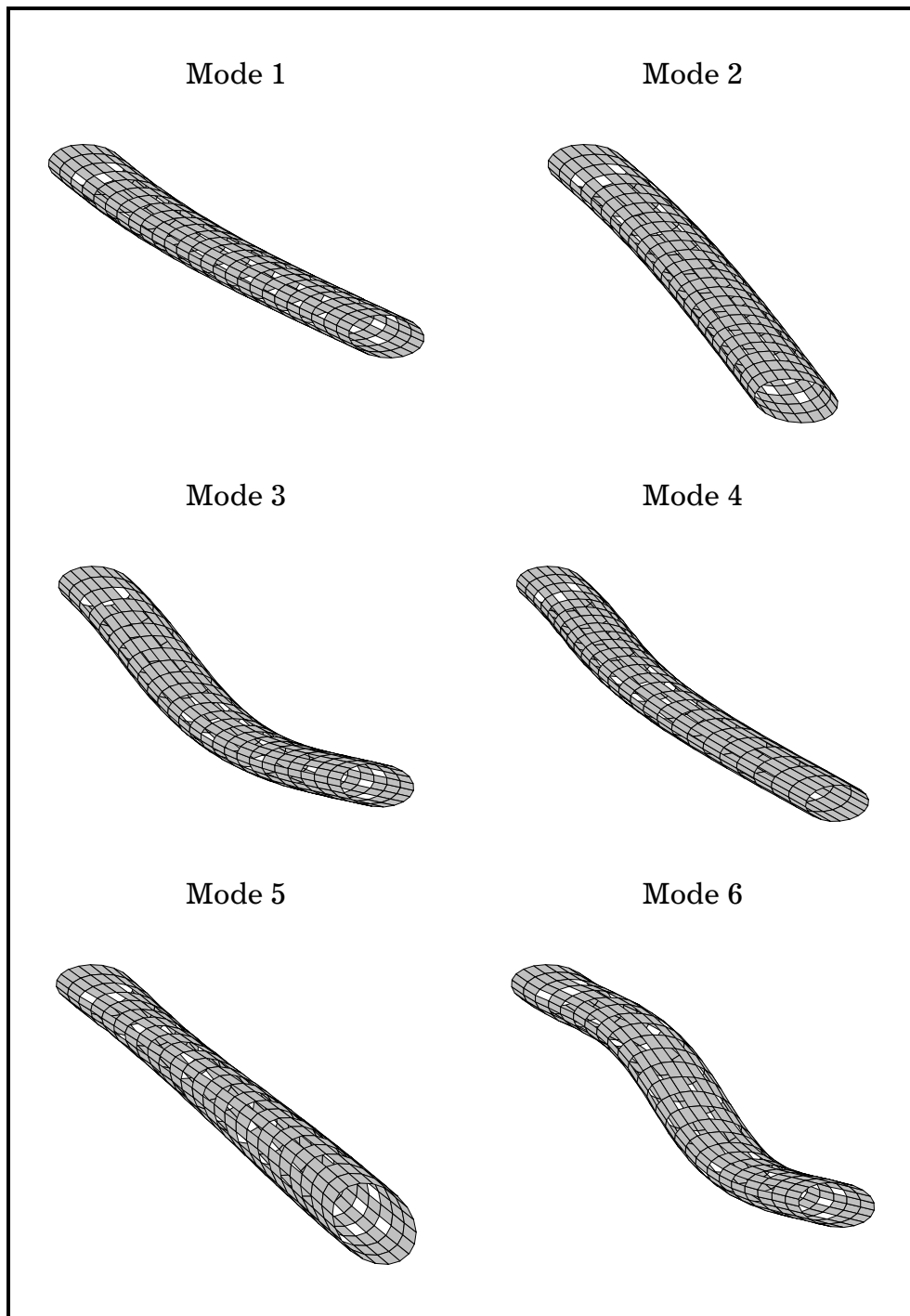


Figure 4.3 : Premières déformées modales du tube perforé

La longueur du tube est de 1.2 m et les dimensions extérieures de la section sont de 12 cm et 8 cm pour les axes, et 5 mm pour l'épaisseur. Pour de telles dimensions, il est raisonnable de supposer que la structure en question peut présenter **globalement** un comportement de type poutre. Ceci est confirmé par les premières déformées propres calculées à partir d'un modèle coque dans les conditions aux limites encastré-libre (Figure 4.3).

En conséquence, la structure en question peut alors être homogénéisée à partir du modèle de poutre uniforme présenté précédemment. Cela n'est évidemment envisageable qu'à la condition que les perforations n'engendrent pas de déformations locales trop importantes. Les paramètres identifiés du modèle de poutre équivalent sont présentés dans le Tableau 4.4, et ce à partir d'un modèle coque à 3000 ddl. Notons que seuls les coefficients de cisaillement n'ont pu être identifiés. En effet, le calcul usuel a montré que l'effet du cisaillement est négligeable dans ce cas. D'autre part, il est important de remarquer que la valeur élevée obtenue pour la masse volumique s'explique par le fait que la poutre équivalente est de section constante. Le défaut de masse lié aux perforations doit alors être compensé par une valeur de  $\rho$  supérieure à la valeur initiale introduite pour le modèle coque.

Paramètre	Valeur identifiée
$A$ (m <sup>2</sup> )	$9.754 \times 10^{-4}$
$J$ (m <sup>4</sup> )	$1.916 \times 10^{-6}$
$I_y$ (m <sup>4</sup> )	$1.433 \times 10^{-6}$
$I_z$ (m <sup>4</sup> )	$7.466 \times 10^{-7}$
$k_y$	non identifié
$k_z$	non identifié
$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	9493

Tableau 4.4 : Paramètres équivalents

Mode n°	Modèle coques	Modèle poutres		Nature du mode
	3000 ddl	60 ddl	e (%)	
	$f_R$ (Hz)	f (Hz)		
1	50.51	50.51	0.00	Flexion 1 ( $xy$ )
2	69.93	69.90	-0.04	Flexion 1 ( $xz$ )
3	298.54	314.2	5.25	Flexion 2 ( $xy$ )
4	410.38	431.9	5.27	Flexion 2 ( $xz$ )
5	565.8	570.3	0.80	Torsion 1
6	770.2	869.9	12.9	Flexion 3 ( $xy$ )

Tableau 4.5 : Précision du modèle équivalent ;  $e(\%) = 100(f - f_R)/f_R$ 

Afin d'évaluer la qualité de l'identification, un maillage élément fini poutre à 60 ddl a été généré. L'examen du Tableau 4.5 montre l'excellente précision obtenue pour le premier mode de flexion dans chaque plan. Cependant,

l'erreur augmente rapidement avec le rang du mode, ce qui prouve le fait que les déformées des modes suivants ne peuvent plus être assimilées à celles d'une poutre uniforme. En effet, des écrasements locaux apparaissent à cause des perforations, et l'hypothèse de non déformabilité des sections droites n'est plus vérifiée. Notons toutefois que la taille du modèle a été réduite de **98 %**, ce qui est considérable.

### 4.2.2 Structure fortement discontinue

Considérons tout d'abord un tube rectiligne de longueur  $L = 6\text{ m}$  et de section en « aile d'avion » dont la géométrie est décrite sur la Figure 4.4. Le maillage de la structure en éléments coques est basé sur un découpage en 8 divisions pour chacun des trois arcs de cercle formant la section, et 20 divisions sur la longueur. La position des points caractéristiques C et G ainsi que l'orientation des directions principales ( $y_p, z_p$ ) sont a priori inconnues.

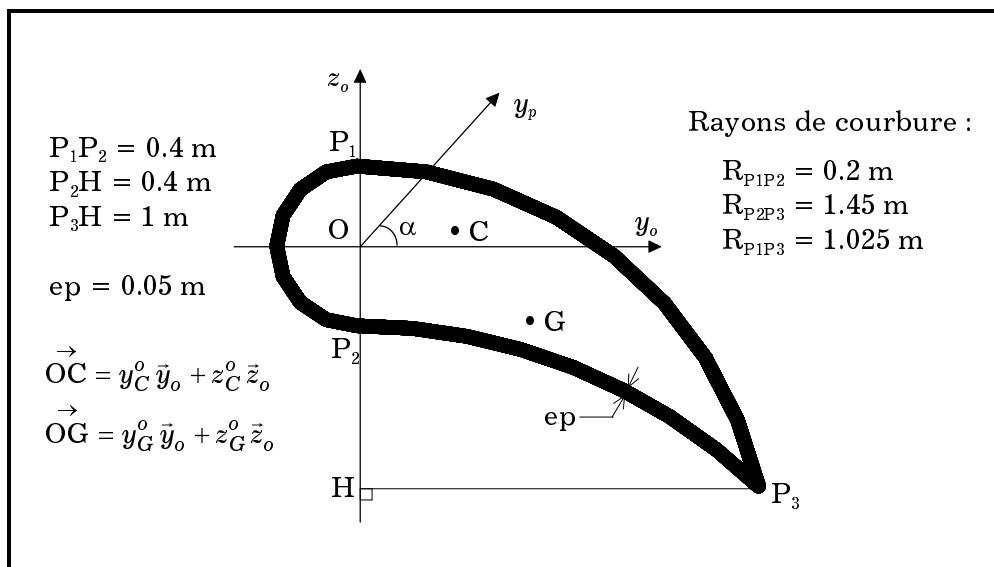


Figure 4.4 : Géométrie du profil en « aile d'avion »

La méthode proposée permet d'identifier l'ensemble des paramètres du modèle poutre équivalent. Ceux-ci sont présentés dans le Tableau 4.6. Le comportement dynamique du modèle éléments finis condensé à 126 ddl ainsi obtenu est comparé à celui du modèle coques initial à 3024 ddl. Le rapport de réduction est dans ce cas supérieur à 95 %.

Paramètre	Valeur identifiée	
$y_C^o$ (m)	0.241	
$z_C^o$ (m)	0.031	
$y_G^o$ (m)	0.424	
$z_G^o$ (m)	-0.157	
$\alpha$ (deg)	63.7	
$A$ (m <sup>2</sup> )	1.561×10 <sup>-1</sup>	
$J$ (m <sup>4</sup> )	9.619×10 <sup>-3</sup>	
$I_y$ (m <sup>4</sup> )	2.771×10 <sup>-2</sup>	
$I_z$ (m <sup>4</sup> )	3.791×10 <sup>-3</sup>	
$k_y$	0.14	$\phi_y=0.150$
$k_z$	0.78	$\phi_z=0.197$
$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	7765	

Tableau 4.6 : Paramètres équivalents

Le Tableau 4.7 présente les premières fréquences propres calculées à partir de ces deux modèles éléments finis. Afin de solliciter les modes de type poutre, la structure est encastree à une extrémité, et chargée à l'autre. Le chargement, appliqué au centre de torsion de l'extrémité libre, est de masse  $5 \times 10^3$  kg et d'inertie  $5 \times 10^4$  kg.m<sup>2</sup> dans les trois directions.

Mode n°	Modèle coques	Modèle poutres		Nature du mode
	3024 ddl	126 ddl	e (%)	
	$f_R$ (Hz)	f (Hz)		
1	5.211	5.212	0.02	Flexion 1 ( $xy$ )
2	8.047	8.049	0.02	Torsion fléchie
3	14.02	14.02	0.00	Flexion 1 ( $xz$ )
4	17.26	17.27	0.05	Flexion 2 ( $xy$ )
5	45.76	45.79	0.07	Flexion 2 ( $xz$ )
6	64.69	67.87	4.92	Flexion 3 ( $xy$ )
7	102.2	135.3	32.4	Coque

Tableau 4.7 : Précision du modèle équivalent ;  $e(\%)=100(f-f_R)/f_R$



Les résultats obtenus pour les cinq premiers modes confirment la bonne précision du modèle équivalent, malgré une taille très inférieure à celle du modèle initial. Les erreurs obtenues à partir du sixième mode sont dues à l'apparition de modes de type coque que le modèle équivalent de poutre ne peut évidemment pas représenter.

Dans cet exemple, les valeurs des paramètres équivalents ont été identifiées à partir de la méthode proposée. Il existe cependant dans certains codes de calcul éléments finis des méthodes permettant de déterminer ces paramètres, à partir de la discrétisation de la section en éléments finis spécifiques, ou par des techniques d'équations intégrales [12]. Ces méthodes ne sont évidemment applicables que si la section droite est de forme et de caractéristiques constantes le long de l'axe de la poutre. La méthode proposée, quant à elle, présente l'avantage d'être basée sur une identification des paramètres à partir du comportement élastique de poutre de la structure, et non pas à partir d'un calcul sur la section. Aussi est-il possible de l'appliquer à des structures possédant de fortes irrégularités locales mais dont le comportement dynamique global est de type poutre.

Cette propriété est illustrée par le cas test numérique suivant, où la structure étudiée est le tube à profil en aile d'avion précédent, mais perforé par endroits comme le montre la Figure 4.5.

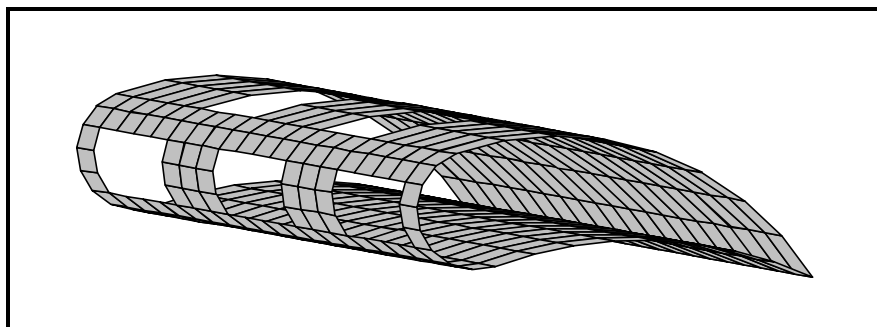


Figure 4.5 : Structure à section « en aile d'avion » perforée

Le Tableau 4.8 présente les nouvelles valeurs des paramètres identifiées que l'on peut comparer à celles obtenues dans le cas de la structure uniforme. Le modèle de poutre ainsi obtenu est un modèle équivalent au sens de l'homogénéisation.

Paramètre	Aile uniforme	Aile perforée	
$y_C^o$ (m)	0.241	0.848	
$z_C^o$ (m)	0.031	-0.318	
$y_G^o$ (m)	0.424	0.495	
$z_G^o$ (m)	-0.157	-0.216	
$\alpha$ (deg)	63.7	64.5	
$A$ (m <sup>2</sup> )	$1.561 \times 10^{-1}$	$1.285 \times 10^{-1}$	
$J$ (m <sup>4</sup> )	$9.619 \times 10^{-3}$	$2.651 \times 10^{-3}$	
$I_y$ (m <sup>4</sup> )	$2.771 \times 10^{-2}$	$2.095 \times 10^{-2}$	
$I_z$ (m <sup>4</sup> )	$3.791 \times 10^{-3}$	$2.852 \times 10^{-3}$	
$k_y$	0.14	0.09	$\phi_y = 0.213$
$k_z$	0.78	0.56	$\phi_z = 0.252$
$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	7765	8539	

Tableau 4.8 : Paramètres équivalents

On peut ainsi noter que les positions de C et de G (Figure 4.6), ainsi que les valeurs des moments d'inertie de flexion et torsion, ont subi des variations significatives par rapport aux valeurs obtenues pour le cas non perforé. En effet, comme l'on pouvait s'y attendre, toutes les rigidités identifiées dans ce cas sont plus faibles car les perforations ont tendance à assouplir la structure.

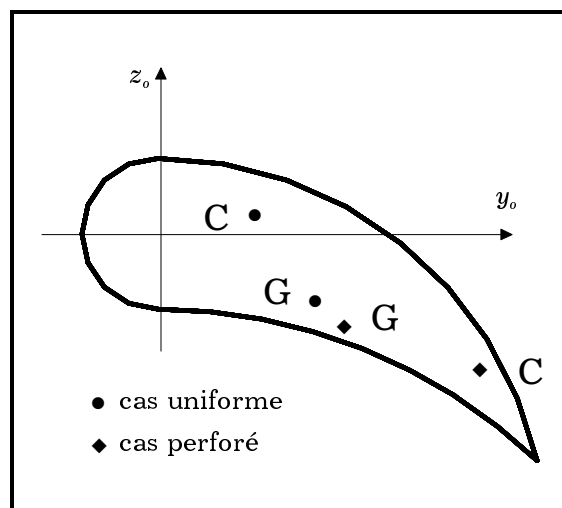


Figure 4.6 : Évolution des positions de C et G

Les modes propres de la structure ont été évalués afin de confirmer la robustesse du modèle équivalent ainsi que la validité de l'homogénéisation. Les conditions de chargement sont les mêmes que pour la structure non perforée. Les résultats obtenus pour les premières fréquences propres sont présentés dans le Tableau 4.9. Le modèle poutre équivalent donne des résultats très satisfaisants dont la précision des premiers modes est comparable au cas précédent, même en présence de fortes discontinuités géométriques dans le modèle initial. Insistons sur le fait qu'une méthode basée uniquement sur la forme de la section droite serait ici totalement inadéquate, comme le montre la comparaison des fréquences propres issues des deux modèles (Tableau 4.7 et Tableau 4.9).

Mode n°	Modèle coques	Modèle poutres		Nature du mode
	2868 ddl	126 ddl		
	$f_R$ (Hz)	$f$ (Hz)	$e$ (%)	
1	4.203	4.211	0.20	Torsion fléchie
2	4.555	4.558	0.05	Flexion 1 ( $xy$ )
3	12.22	12.24	0.20	Flexion 1 ( $xz$ )
4	14.78	14.86	0.51	Flexion 2 ( $xy$ )
5	39.14	39.45	0.78	Flexion 2 ( $xz$ )
6	47.08	50.43	7.10	Coque
7	78.54	98.89	25.9	Coque

Tableau 4.9 : Précision du modèle équivalent ;  $e(\%)=100(f-f_R)/f_R$

### 4.2.3 Structure treillis de poutres

La structure étudiée est un treillis spatial en Dural ( $E = 7.0 \times 10^{10} \text{ N.m}^{-2}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$ ) de longueur  $L = 2.4 \text{ m}$  composé de plusieurs poutrelles rectilignes. Les dimensions extérieures de chacun des 12 motifs élémentaires (voir Figure 4.7) sont de  $0.2 \times 0.15 \times 0.1 \text{ m}$ . Chaque poutrelle est en fait un tube rectiligne à section circulaire de diamètre extérieur 2 cm et d'épaisseur 2 mm. Le maillage du modèle initial constitué d'éléments de poutre de Timoshenko (2 éléments par poutrelle) compte 2502 ddl.

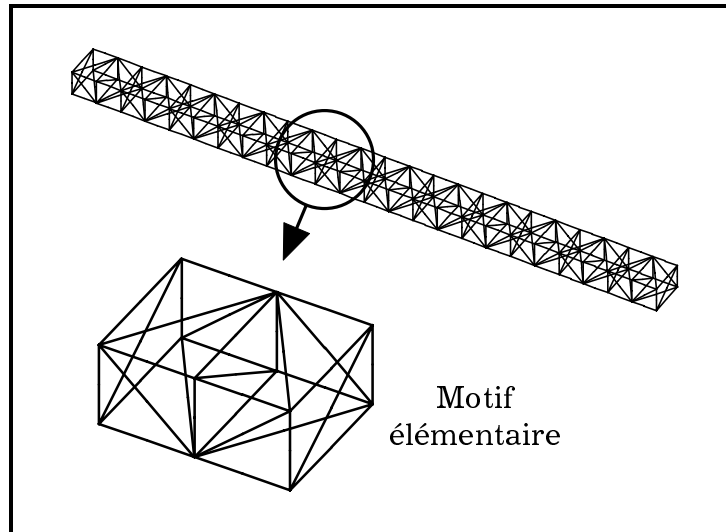


Figure 4.7 : Treillis de poutres

On peut remarquer que, malgré le fait que l'on ne puisse pas réellement parler de « section droite » pour la structure considérée, la méthode proposée permet d'identifier un jeu de paramètres pour la poutre homogène associée (Tableau 4.10).

Paramètre équivalent	Valeur identifiée	
$\langle EA \rangle$ (N)	$3.486 \times 10^{+7}$	
$\langle EI_y \rangle$ (N.m <sup>2</sup> )	$18.93 \times 10^{+4}$	
$\langle EI_z \rangle$ (N.m <sup>2</sup> )	$8.301 \times 10^{+4}$	
$\langle GJ \rangle$ (N.m <sup>2</sup> )	$4.790 \times 10^{+4}$	
$k_y$	0.43	$\phi_y = 0.030$
$k_z$	0.48	$\phi_z = 0.061$
$\langle \rho A \rangle$ (kg.m <sup>-1</sup> )	5.350	

Tableau 4.10 : Caractéristiques de la poutre équivalente

La validité des paramètres identifiés a été testée à partir d'un maillage de 12 éléments de poutre intégrant les paramètres identifiés. Les conditions de fonctionnement sont représentées par un encastrement à une extrémité et une surcharge à l'autre, dont les caractéristiques (masse 10kg et inerties 0.4kg.m<sup>2</sup> dans les trois directions) ont été obtenues à l'aide d'un calcul basé sur le quotient de Rayleigh présenté au chapitre suivant. Les premières

déformées modales calculées à partir du modèle initial, qui sont représentées sur la Figure 4.8, correspondent toutes à des modes de type poutre.

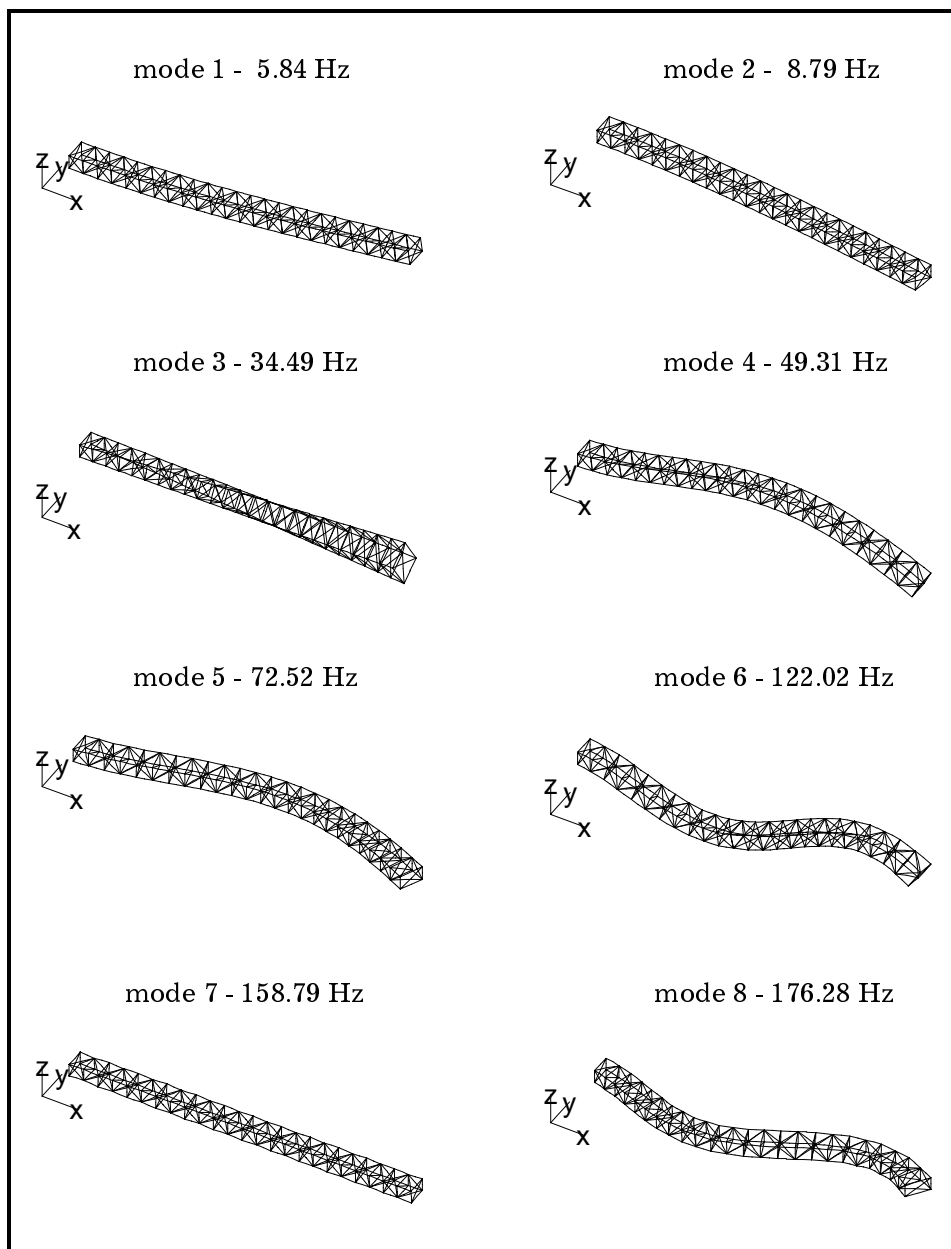


Figure 4.8 : Premiers modes propres du treillis de poutres

Les fréquences propres issues des deux modèles sont présentées dans le Tableau 4.11. La précision du modèle équivalent est significative. Elle permet de conclure sur la bonne adaptation de la méthode proposée à l'homogénéisation de modèles de structures mécaniques à comportement global de poutre.

Mode n°	Modèle initial	Modèle équivalent		Nature du mode
	2502 ddl f <sub>R</sub> (Hz)	78 ddl f (Hz)	e (%)	
1	5.84	5.86	0.2	Flexion 1 ( <i>xy</i> )
2	8.79	8.80	0.2	Flexion 1 ( <i>xz</i> )
3	34.49	34.13	-1.0	Torsion 1
4	49.31	49.02	-0.6	Flexion 2 ( <i>xy</i> )
5	72.52	72.06	-0.6	Flexion 2 ( <i>xz</i> )
6	122.0	121.5	-0.4	Flexion 3 ( <i>xy</i> )
7	158.8	159.0	0.1	Traction 1
8	176.3	175.4	-0.5	Flexion 3 ( <i>xz</i> )

Tableau 4.11 : Précision du modèle équivalent ;  $e(\%) = 100(f - f_R)/f_R$



# Chapitre 5

## Applications industrielles

### 5.1 Contexte de l'étude

La validation des méthodes proposées a fait l'objet d'un contrat de recherche LMARC - PSA (1997/1998). En effet, dans le cadre d'un projet de modélisation vibro-acoustique, PSA souhaite développer des modèles simplifiés de caisse de véhicule automobile. Ce contrat concerne la mise au point d'une méthodologie de création de modèles équivalents pour représenter les **corps creux des ossatures automobiles**.

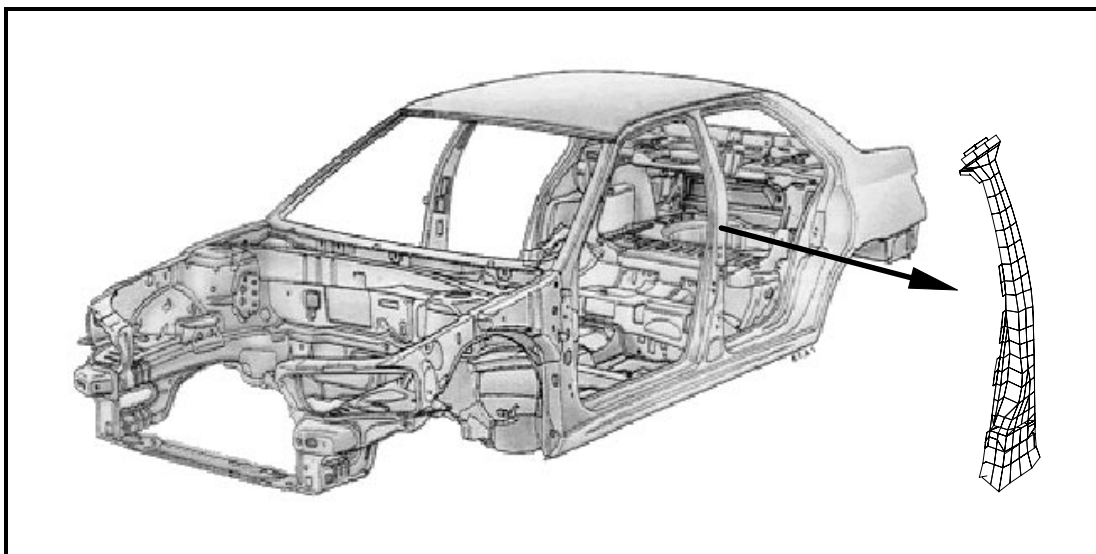


Figure 5.1 : Caisse de véhicule - Sous-structure de type poutre



En construction automobile, un grand nombre de sous-ensembles ont des comportements de type poutre : traverses, montants de portières, montants de pare-brise... Ces sous-ensembles sont réalisés pour la plupart à partir de tôles embouties, soudées par points, rigidifiées par des renforts et des nervures, dont la modélisation précise est désormais possible grâce au couplage entre CAO et calcul. On obtient généralement un bon modèle de comportement dynamique, mais au prix de tailles élevées (de l'ordre de quelques dizaines de milliers de degrés de liberté pour chaque sous-ensemble). Dans le but d'obtenir un modèle du véhicule complet de taille raisonnable, il est nécessaire de simplifier ces composants.

La méthode d'identification de modèles équivalents de poutre a été développée et adaptée au traitement de structures de forme complexe. Sa mise en œuvre ainsi que ses possibilités sont illustrées dans ce chapitre par des cas tests représentatifs empruntés à l'industrie automobile.

## 5.2 Adaptation de la méthode

### 5.2.1 Structure « montant de pare-brise »

La structure étudiée est un montant de pare-brise constitué d'un profilé creux comportant soudures, perforations, et tôles minces d'épaisseur variable.

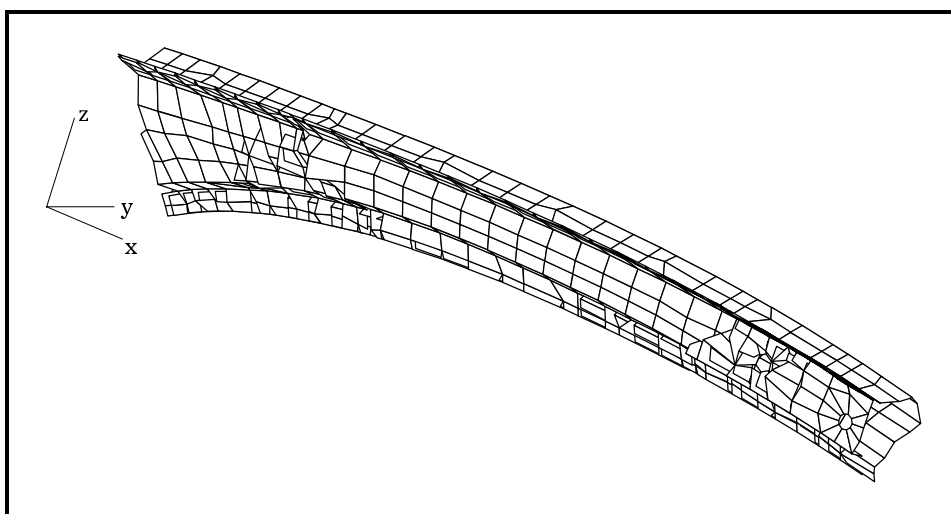


Figure 5.2 : Modèle initial du montant de pare-brise

La structure a été maillée en éléments finis de coque quadrangulaires et triangulaires, aboutissant ainsi à un modèle initial de 4830 ddl. On souhaite simplifier cette structure par un modèle équivalent de poutre. La méthode proposée dans les chapitres précédents est basée sur une identification des paramètres à partir d'une formulation de poutre rectiligne uniforme. Or, la structure étudiée s'apparente plutôt à une poutre courbe de section évolutive. Il est donc inopportun de la simplifier par une seule poutre équivalente. On se propose alors de définir un découpage de zones adjacentes sur le modèle initial, dans le but de pouvoir ensuite identifier un jeu de paramètres de poutre pour chacune de ces zones. Dans le cas présent, le découpage effectué est le suivant, chaque zone (ou tronçon) étant représentée par une couleur :

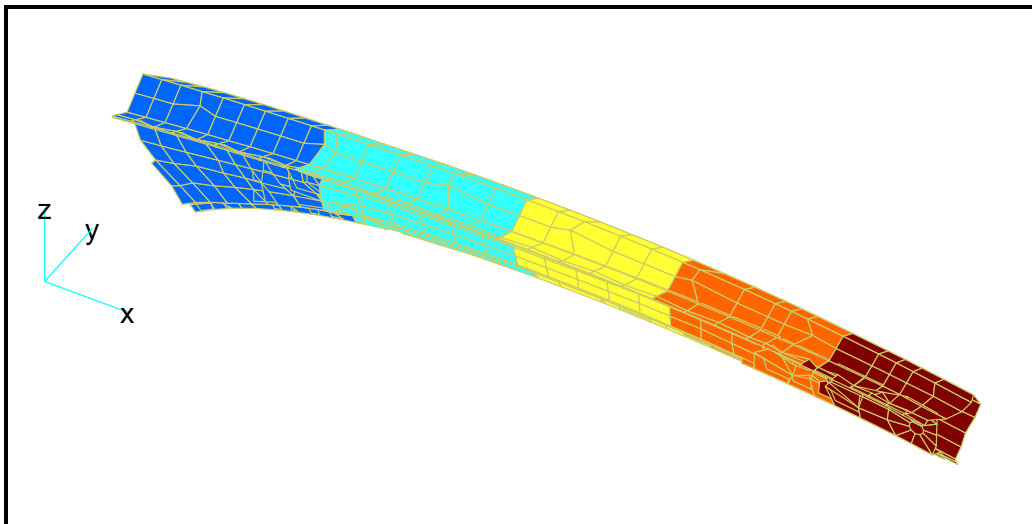


Figure 5.3 : Définition des zones du montant de pare-brise

Notons que le nombre de zones à définir pour une structure donnée dépend essentiellement de la variation de sa géométrie et de la courbure de sa ligne moyenne. Pour une structure présentant une courbure prononcée, ou dont la section évolue rapidement, il est évident qu'il est nécessaire de définir des zones d'identification se rapprochant le plus possible de la poutre uniforme et rectiligne, ce qui tend à restreindre leur longueur. Toutefois, celle-ci ne doit pas être trop faible car, dans ce cas, l'identification serait entachée de l'erreur engendrée par la souplesse locale de type coque (comme on l'a vu au Chapitre 3).

Il s'agit donc de trouver un compromis entre ces deux tendances opposées. Notons toutefois que, en l'absence de règles de découpage précises, il est toujours possible de vérifier a posteriori l'adéquation du découpage puisque,

au terme de l'étude, le comportement du modèle simplifié est toujours comparé à celui du modèle initial.

### Identification des paramètres

Un jeu de paramètres équivalents doit être identifié indépendamment pour chaque zone, considérée comme une sous-structure prise séparément. D'un point de vue numérique, il s'agit de considérer l'assemblage des matrices élémentaires de tous les éléments finis contenus dans la zone en question. Un des cinq tronçons d'identification du montant est représenté sur la Figure 5.4.

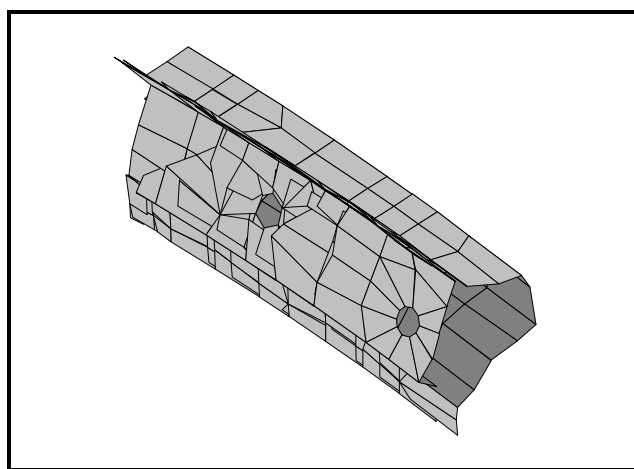


Figure 5.4 : Une zone d'identification

Conformément à ce qui a été présenté dans le Chapitre 3, la condensation de Guyan est appliquée aux matrices de raideur et de masse résultant de cet assemblage. Pour cela, les noeuds maîtres correspondant aux extrémités du tronçon sont systématiquement définis comme les noeuds communs à la zone considérée et à la zone adjacente. Notons que dans le cas où une extrémité du tronçon correspond à une des deux sections terminales de la structure, la sélection des noeuds maîtres n'est pas automatique et elle doit être effectuée a priori. Une fois la condensation de Guyan effectuée, les matrices ainsi obtenues sont condensées par une transformation de corps solide sur deux points  $O_1$  et  $O_2$ . En pratique, ces points sont définis comme les points géométriques moyens des noeuds maîtres à chacune des extrémités correspondantes du tronçon. Au terme de ces opérations, on obtient les matrices numériques réduites de raideur  $\tilde{K}_O$  et de masse  $\tilde{M}_O$  à 12 ddl, exprimées en  $(O_1, O_2)$  dans les directions globales du référentiel de calcul.

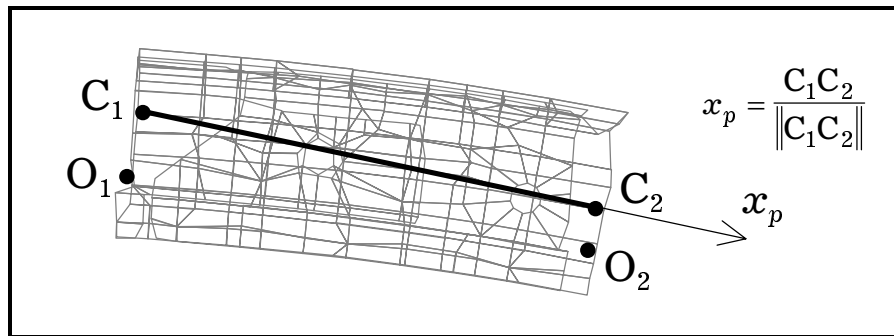


Figure 5.5 : Localisation de la poutre équivalente

Par rapport au cas des structures rectilignes, la difficulté supplémentaire rencontrée en ce qui concerne l'identification paramétrique réside ici dans le fait que l'on ne connaît a priori ni les positions des centres de torsion  $C_1$  et  $C_2$ , ni l'orientation de la direction principale longitudinale dans le référentiel de calcul. Ces difficultés sont résolues de la manière suivante :

Tout d'abord, rappelons que l'on a montré précédemment que les trois directions principales de la poutre peuvent être identifiées directement à partir d'un simple calcul de vecteurs propres sur un sous-bloc de  $\tilde{K}_O$ . En pratique, l'axe de la poutre est alors donné par celui de ces trois vecteurs propres qui forme l'angle le plus petit avec la direction  $O_1O_2$ . Les deux autres vecteurs propres correspondent donc aux directions principales de flexion, et on peut alors exprimer la matrice numérique de raideur  $\tilde{K}_O^p$  dans le référentiel principal orienté par ces trois directions.

En outre, on montre que la décomposition de la matrice analytique de raideur  $K_O^p$  correspondante qui a été proposée dans le Chapitre 3 peut être généralisée au cas où  $C_1C_2$  n'est pas parallèle à  $O_1O_2$ . En effet, on peut écrire dans ce cas :

$$K_O^p = \begin{bmatrix} K_1 & K_1 Q_1 & -K_1 & -K_1 Q_2 \\ & Q_1^T K_1 Q_1 + K_2 & -Q_1^T K_1 & -Q_1^T K_1 Q_2 - K_2 \\ & & K_1 & K_1 Q_2 \\ & \text{sym} & & Q_2^T K_1 Q_2 + K_2 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Les matrices génératrices  $K_1$  et  $K_2$  ont pour expressions :

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{(1+\phi_z)L^3} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Les matrices  $Q_1$  et  $Q_2$  s'expriment désormais à partir des coordonnées  $(y_{C_i}, z_{C_i})_{i=1..2}$  de  $\vec{O_i C_i}$  et  $(y_{G_i}, z_{G_i})_{i=1..2}$  de  $\vec{O_i G_i}$  dans les directions principales :

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & z_{G_1} & -y_{G_1} \\ -z_{C_1} & 0 & \frac{1}{2}L \\ y_{C_1} & -\frac{1}{2}L & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & z_{G_2} & -y_{G_2} \\ -z_{C_2} & 0 & -\frac{1}{2}L \\ y_{C_2} & \frac{1}{2}L & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

avec :

$$y_{G_i} = y_{C_i} + \bar{y}_G \quad ; \quad z_{G_i} = z_{C_i} + \bar{z}_G \quad (5.6)$$

Remarques :

- La coordonnée longitudinale de  $C_i$  est fixée implicitement par définition de la zone car on suppose que le vecteur  $O_i C_i$  est orthogonal à l'axe  $x_p$ .
- La longueur  $L$  de la poutre à identifier est égale à la distance  $C_1 C_2$ .
- La relation (5.6) corrobore le fait que l'axe neutre et l'axe élastique sont, par hypothèse, parallèles.

L'identification des paramètres de la poutre équivalente peut alors être effectuée conformément à la démarche présentée dans le Chapitre 3. On écrit ainsi l'égalité terme à terme entre les expressions de  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $Q_1$  et  $Q_2$  et les valeurs numériques correspondantes. Toutefois, il peut arriver que la structure de ces matrices analytiques ne soit pas respectée par leurs équivalents numériques. Cela s'explique par le fait que le modèle de poutre n'est qu'un modèle de comportement **approché** pour la structure considérée.

Le Tableau 5.1 présente les valeurs de paramètres identifiées pour chacune des cinq zones du montant de pare-brise (numérotées de 1 à 5 dans l'ordre des  $x$  croissants). Notons que les valeurs des constantes matérielles introduites dans le modèle sont  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$ ,  $\nu = 0.295$ ,  $\rho = 7810 \text{ kg.m}^{-3}$ .

Paramètre	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4	Zone 5
$x_{C_1}^o$ (mm)	4.061e+00	1.403e+02	3.010e+02	4.358e+02	5.621e+02
$y_{C_1}^o$ (mm)	-1.615e+00	2.625e+00	2.612e+00	6.688e+00	-4.632e+00
$z_{C_1}^o$ (mm)	8.913e+00	3.185e+01	3.659e+01	4.134e+01	2.759e+01
$x_{C_2}^o$ (mm)	1.403e+02	2.999e+02	4.344e+02	5.620e+02	6.629e+02
$y_{C_2}^o$ (mm)	6.353e-01	4.690e+00	5.564e-01	2.749e+00	-3.408e+00
$z_{C_2}^o$ (mm)	1.906e+01	3.481e+01	3.413e+01	3.130e+01	1.231e+01
$y_p \cdot x_o$	-3.645e-02	-2.026e-02	-2.224e-02	-5.355e-02	-4.334e-02
$y_p \cdot y_o$	9.603e-01	8.766e-01	-8.846e-01	-9.527e-01	-9.319e-01
$y_p \cdot z_o$	2.765e-01	4.808e-01	-4.658e-01	-2.991e-01	-3.602e-01
$\bar{y}_G$ (mm)	-5.961e+00	-8.022e+00	7.202e+00	1.115e+01	6.021e+00
$\bar{z}_G$ (mm)	-4.775e+00	-1.597e+00	3.602e+00	1.117e+01	9.806e+00
$A$ (mm <sup>2</sup> )	2.473e+02	1.839e+02	1.949e+02	1.539e+02	2.088e+02
$J$ (mm <sup>4</sup> )	1.220e+05	4.861e+04	4.248e+04	2.377e+04	3.538e+04
$I_y$ (mm <sup>4</sup> )	2.372e+05	1.127e+05	1.149e+05	7.857e+04	1.254e+05
$I_z$ (mm <sup>4</sup> )	9.706e+04	5.054e+04	4.604e+04	3.421e+04	3.878e+04
$k_y$	2.364e-01	2.231e-01	2.392e-01	2.696e-01	2.652e-01
$k_z$	5.703e-01	4.719e-01	4.984e-01	4.435e-01	5.696e-01
$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	9.468e+03	9.038e+03	7.717e+03	10.88e+03	8.311e+03

Tableau 5.1 : Paramètres équivalents

Deux catégories de paramètres sont présentées dans le Tableau 5.1. Dans la première partie, les valeurs correspondent à des paramètres de position tels que localisation et orientation des poutres équivalentes. Notons la vraisemblance des valeurs identifiées suggérée par leur continuité géométrique : les poutres identifiées semblent effectivement correspondre à une ligne moyenne pour le profilé (voir Figure 5.6), et l'orientation de leurs directions principales de flexion est sensiblement la même pour toutes les zones. La seconde partie du Tableau 5.1 concerne essentiellement les paramètres classiques relatifs aux rigidités des poutres équivalentes.

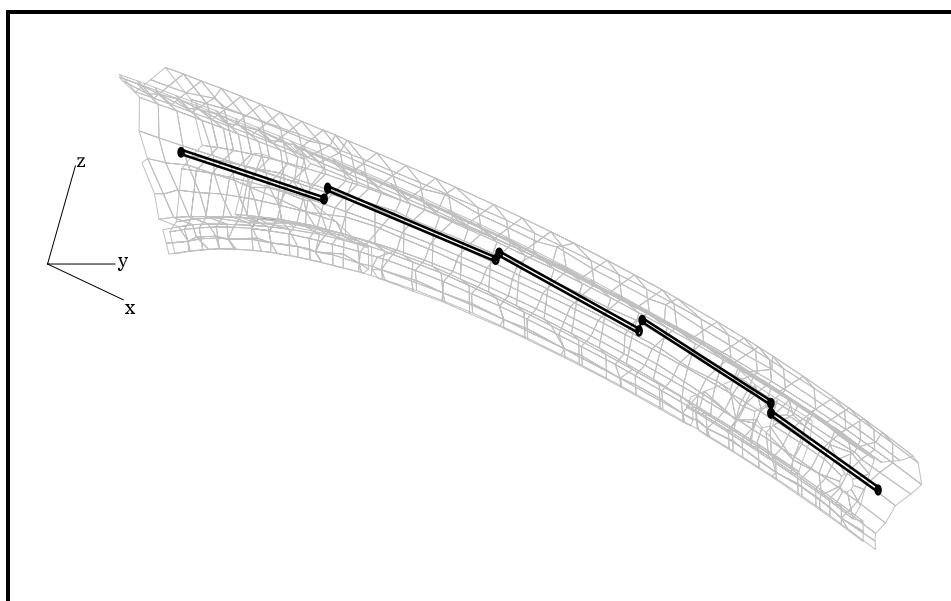


Figure 5.6 : Visualisation des poutres identifiées

Lorsque les paramètres de toutes les zones ont été identifiés, on est en mesure de construire les matrices de raideur et de masse assemblées du modèle équivalent correspondant. Celui-ci est tracé sur la Figure 5.6, où chaque jeu de paramètres est représenté de façon symbolique par un segment (cinq au total). Chacun de ces segments est maillé en plusieurs éléments finis de poutre constitués des mêmes paramètres. Le nombre d'éléments finis par zone doit être suffisant pour pouvoir représenter correctement les premiers modes globaux de la structure. Dans, le cas présent, on a choisi de mailler chaque segment par 4 éléments finis de poutre, ce qui permet d'aboutir à une taille finale de 150 ddl pour le modèle simplifié, soit une réduction d'environ 97 % par rapport à la taille du modèle initial.

Il est important de noter que dans le modèle simplifié, deux segments consécutifs ne coïncident généralement pas. On propose alors de les raccorder par une liaison de type rigide. En pratique, on relie par une transformation de corps solide les déplacements du dernier noeud de la zone  $i$  à ceux du premier noeud de la zone  $i+1$ . Cette opération se justifie par le fait que ces deux noeuds appartiennent sensiblement à la même section droite de poutre et donc, par hypothèse, peuvent être liés par une cinématique de corps solide. Dans les codes de calcul, cela se traduit par l'utilisation d'un élément rigide (de type RBE2 pour Nastran™, ou CERIG pour Ansys™).

### Qualification du modèle équivalent

Le modèle équivalent de type poutre étant identifié, il s'agit maintenant de valider son comportement dynamique par rapport à celui du modèle initial. Toutefois, on ne connaît généralement pas l'environnement réel de fonctionnement de la sous-structure étudiée. En effet, on ne dispose que très rarement du modèle complet dans lequel est intégrée la sous structure étudiée (par exemple, la caisse de véhicule d'où est extrait le montant de pare-brise). Le principe de validation proposé consiste alors à appliquer un chargement aux extrémités de la sous-structure de sorte que les premiers modes propres calculés soient situés dans la bande fréquentielle d'intérêt de la structure complète, qui a été fixée a priori entre 0 et 150 Hz dans ce cas.

Afin d'évaluer très approximativement les caractéristiques de masse et d'inertie de ces surcharges, on effectue un calcul simple basé sur le quotient de Rayleigh. Considérons le cas de la structure poutre encastree à l'extrémité «  $x=0$  », et chargée en «  $x=l$  » par une masse  $m$ . La pulsation  $\omega_1$  du premier mode propre de ce système, appelé *fondamental*, peut alors s'écrire :

$$\omega_1^2 = \frac{\mathbf{y}_1^T \mathbf{K} \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1^T \mathbf{M} \mathbf{y}_1 + m[\mathbf{y}_1(l)]^2} \quad (5.7)$$

où  $\mathbf{y}_1$  est le vecteur de déformée modale associé à ce mode propre.

Dans le cas où la déformée est celle du premier mode propre de flexion, elle peut alors être approchée par la déformée statique  $\mathbf{y}_s$  de la poutre soumise à une force  $F$  située au point de chargement et dirigée suivant la direction principale d'inertie correspondante.



Des directions principales de flexion globales peuvent être aisément identifiées à partir d'un simple calcul statique. Supposons alors que la force  $F$  soit appliquée dans la direction souple de flexion. En résolvant :

$$K y_s = F \quad (5.8)$$

on obtient le vecteur de déformée statique. On peut alors calculer la raideur équivalente vue du point de chargement, notée  $\tilde{k}$ , définie par la relation scalaire suivante :

$$\tilde{k} y_s(l) = \|F\| \quad (5.9)$$

Ainsi, la pulsation propre du mode en question peut alors s'exprimer à partir de l'approximation :

$$\omega_1^2 \approx \frac{\tilde{k}[y_s(l)]^2}{y_s^T M y_s + m[y_s(l)]^2} \quad (5.10)$$

De plus, si la masse de la poutre est négligeable devant la masse  $m$  du chargement, on obtient finalement l'expression liant la valeur de  $m$  en fonction de la fréquence propre  $f_1$  que l'on souhaite imposer pour le fondamental :

$$m \approx \frac{\tilde{k}}{(2\pi f_1)^2} \quad (5.11)$$

Un calcul analogue appliqué au premier mode propre de torsion permet de calculer la valeur de l'inertie axiale de la surcharge. En pratique, la valeur obtenue est également affectée aux inerties dans les deux autres directions.

Les chargements étant déterminés, on peut alors procéder à la qualification du modèle simplifié en calculant les premiers modes propres pour les configurations : encasté-chargé, chargé-encasté, et chargé-chargé. Les fréquences propres obtenues sont comparées à celles du modèle initial dans les mêmes conditions aux limites. Pour ce dernier, les surcharges sont également situées au niveau des centres de torsion des deux sections terminales (dont les coordonnées ont été précédemment identifiées) et reliées aux noeuds voisins à l'aide de liaisons rigides.

Les directions des vecteurs propres du modèle simplifié sont comparées à celles du modèle initial par l'intermédiaire du critère MAC de la façon suivante. En ce qui concerne le modèle simplifié, on forme le vecteur  $\tilde{y}_v$  des déplacements associés au mode propre de rang  $v$  et observés au niveau des

noeuds  $C_i$  situés aux deux extrémités de chaque zone (segment) d'identification. En général, ces noeuds n'existent pas sur le modèle initial, et le déplacement correspondant  $y_v$  est alors constitué en écrivant pour chaque jonction de zone une relation de corps solide entre les déplacements du noeud fictif  $C_i$  considéré et ceux des noeuds de la section correspondante (noeuds communs à deux zones adjacentes). Puisque le comportement effectif des noeuds en question n'est pas un mouvement de corps solide, le système d'équations linéaires formé par cette relation permettant d'aboutir aux déplacements du noeud  $C_i$  est résolu au sens des moindres carrés. Rappelons en outre que le MAC entre les deux vecteurs propres est défini par :

$$\text{MAC}(y_v, \tilde{y}_v) = \frac{|y_v^T \tilde{y}_v|}{\|y_v\| \|\tilde{y}_v\|} \quad (5.12)$$

En fait, nous préférons séparer le MAC en deux fonctions notées  $\text{MAC}_T$  et  $\text{MAC}_R$  définies respectivement comme le MAC sur les ddl de translation et le MAC sur les ddl de rotation. En effet, les translations et les rotations aux noeuds ne sont pas des quantités directement comparables. On peut en effet être amené à rencontrer des modes globaux de la structure tels que le MAC complet signale de mauvais résultats, alors que le  $\text{MAC}_T$  et le  $\text{MAC}_R$  indiquent le contraire. C'est par exemple le cas pour les modes de torsion, pour lesquels la prise en compte dans le MAC des déplacements de translation (en théorie insignifiants) a tendance à en fausser l'interprétation.

Le Tableau 5.2 présente les résultats obtenus pour le montant de pare-brise découpé en cinq zones d'identification.

Configuration encastré-chargé					
Modèle initial	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	$\text{MAC}_T$ (%)	$\text{MAC}_R$ (%)	Appariage
5.79	6.15	6.20	99.94	96.80	(1,1)
8.45	9.67	14.45	99.20	91.42	(2,2)
10.48	12.01	14.59	99.01	98.07	(3,3)
43.89	47.27	7.72	99.68	96.63	(4,4)
65.51	71.50	9.14	99.28	68.49	(5,5)
150.77	162.70	7.92	96.64	41.57	(6,6)
485.26	625.65	28.93	78.51	21.52	(7,7)
569.87	974.76	71.05	24.48	64.22	(8,8)

Configuration chargé-encasté					
Modèle initial	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	$MAC_T$ (%)	$MAC_R$ (%)	Appariage
7.29	7.84	7.59	99.80	98.42	(1,1)
9.29	11.23	20.98	96.89	98.64	(2,2)
11.18	12.06	7.90	99.86	87.00	(3,3)
35.59	37.71	5.95	99.54	94.34	(4,4)
55.92	61.23	9.51	99.24	68.67	(5,5)
149.03	161.35	8.27	96.84	44.87	(6,6)
484.03	624.37	28.99	78.53	21.72	(7,7)
569.58	973.37	70.89	24.70	64.19	(8,8)
Configuration chargé-chargé					
Modèle initial	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	$MAC_T$ (%)	$MAC_R$ (%)	Appariage
13.34	16.10	20.73	60.31	98.67	(1,1)
25.70	27.28	6.13	99.93	98.30	(2,2)
39.16	42.61	8.82	99.23	79.93	(3,3)
51.44	55.06	7.04	98.48	93.88	(4,4)
78.52	85.99	9.52	97.95	56.17	(5,5)
210.90	228.69	8.43	95.60	41.84	(6,6)
486.14	628.85	29.36	78.32	21.46	(7,7)
572.97	979.14	70.89	23.16	64.60	(8,8)

Tableau 5.2 : Qualification du modèle équivalent

Il apparaît à l'examen de ces tableaux que les fréquences propres calculées avec le modèle simplifié sont toutes surestimées et peuvent atteindre 20 % pour les premiers modes propres, ce qui est rédhibitoire par rapport aux objectifs que nous nous étions fixé. Cependant, le MAC donne malgré tout de bons résultats pour les modes concernés, ce qui tendrait à prouver qu'ils correspondent effectivement à des modes propres globaux de type poutre. Cette apparente contradiction s'explique par le fait que la procédure de réduction numérique intervenant lors de la phase d'identification impose (par construction) des liaisons rigides entre les noeuds d'une section et le noeud de condensation, et ce pour toutes les sections correspondant aux jonctions de zones. Ces liaisons contraignent alors les déformations des sections droites concernées et conduisent donc à une rigidification de la structure, décalant ainsi le modèle de référence. Afin de s'en convaincre, comparons les

fréquences propres du modèle simplifié à celles du modèle **effectivement** rigidifié. Les résultats sont présentés dans le Tableau 5.3.

Configuration encastré-chargé					
Modèle rigide	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	MAC <sub>T</sub> (%)	MAC <sub>R</sub> (%)	Appariage
6.08	6.15	1.07	99.94	99.96	(1,1)
9.60	9.67	0.73	99.83	99.84	(2,2)
11.96	12.01	0.45	97.21	99.99	(3,3)
47.45	47.27	-0.37	99.79	99.86	(4,4)
71.31	71.50	0.27	99.85	99.70	(5,5)
162.28	162.70	0.26	99.81	98.42	(6,6)
624.20	625.54	0.22	99.87	96.48	(7,7)
873.29	974.49	11.59	67.03	75.87	(8,8)
Configuration chargé-encastré					
Modèle rigide	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	MAC <sub>T</sub> (%)	MAC <sub>R</sub> (%)	Appariage
7.87	7.84	-0.35	99.83	99.90	(1,1)
11.21	11.23	0.23	99.39	99.95	(2,2)
12.05	12.06	0.14	99.80	99.88	(3,3)
37.27	37.71	1.19	99.79	99.89	(4,4)
60.87	61.23	0.59	99.85	99.79	(5,5)
160.60	161.35	0.46	99.81	98.51	(6,6)
622.77	624.26	0.24	99.88	96.53	(7,7)
872.60	973.10	11.52	68.29	75.92	(8,8)
Configuration chargé-chargé					
Modèle rigide	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	MAC <sub>T</sub> (%)	MAC <sub>R</sub> (%)	Appariage
16.10	16.10	0.02	63.15	100.00	(1,1)
27.11	27.28	0.61	99.88	99.95	(2,2)
42.14	42.61	1.12	99.57	99.61	(3,3)
55.08	55.06	-0.04	99.24	99.64	(4,4)
85.73	85.99	0.30	99.40	99.66	(5,5)
227.77	228.69	0.40	99.68	98.70	(6,6)
627.43	628.74	0.21	99.88	96.40	(7,7)
874.20	978.86	11.97	64.07	75.86	(8,8)

Tableau 5.3 : Qualification du modèle équivalent

Dans ce cas, les résultats obtenus pour les modes propres globaux de type poutre sont excellents par rapport au modèle rigidifié. Par conséquent, afin d'obtenir un modèle équivalent qui soit aussi proche que possible du modèle initial, il est indispensable de corriger le modèle que l'on a préalablement identifié. La solution que nous proposons est basée sur une méthode de recalage des paramètres.

### Recalage des paramètres du modèle équivalent

La démarche proposée fait l'hypothèse que la procédure d'identification a permis de déterminer correctement les positions des points caractéristiques des poutres ainsi que leurs directions principales de flexion. Les modes propres globaux rencontrés étant en majorité des modes de flexion ou de torsion (ou une combinaison des deux), les paramètres sur lesquels on peut agir efficacement pour le recalage sont alors au nombre de trois pour chaque zone d'identification. Il s'agit des moments d'inertie de flexion  $I_y$  et  $I_z$ , ainsi que du moment d'inertie de torsion  $J$ .

Une méthode simple pour effectuer le recalage des paramètres consiste à utiliser une technique de sensibilité modale : le résidu à minimiser est construit à partir des **distances sur les fréquences propres** de  $n$  modes dans les trois configurations (encasturé-chargé, chargé-encasturé, et chargé-chargé), c'est-à-dire  $3 \times n$  fréquences propres. Le nombre de paramètres à recalculer est égal à  $3 \times z$ ,  $z$  étant le nombre de zones définies lors du découpage. Le modèle simplifié comporte un nombre réduit de ddl (de l'ordre de la centaine). Il est par conséquent parfaitement adapté au calcul des colonnes de la matrice Jacobienne par voie numérique à l'aide des différences finies. En pratique, le calcul est effectué de la manière suivante, les modes propres pris en compte ayant été préalablement appariés :

- a) Évaluation du vecteur de résidus  $\Delta f$  à partir des résultats de la qualification
- b) Construction par différences finies de la matrice Jacobienne  $S$  : chaque colonne est évaluée en effectuant un calcul de fréquences propres avec le modèle simplifié dans lequel on a perturbé de 10 % le paramètre  $p$  concerné. On obtient alors un problème de la forme :

$$\Delta f = S \Delta p \quad (5.13)$$

c) Calcul du jeu de paramètres permettant de représenter au mieux les résidus par pseudo-inverse :

⇒ si le nombre d'équations est supérieur ou égal au nombre d'inconnues ( $n \geq z$ ), on utilise la méthode des moindres carrés conduisant à :

$$\Delta p = (S^T S)^{-1} S^T \Delta f \quad (5.14)$$

⇒ si le nombre d'équations est inférieur au nombre d'inconnues ( $n < z$ ), on choisit la solution de norme minimale donnée par :

$$\Delta p = S^T (S S^T)^{-1} \Delta f \quad (5.15)$$

Précisons qu'une tolérance par itération ( $\pm 20 \%$ ) et une tolérance globale ( $\pm 50 \%$ ) sont imposées aux variations paramétriques lors de la résolution.

c) Réactualisation des paramètres et calcul des nouvelles fréquences propres (et du nouveau résidu).

d) La méthode de sensibilité étant basée sur la linéarisation par la matrice Jacobienne, le processus est réitéré jusqu'à stabilisation du résidu.

Cette procédure est appliquée au cas du montant de pare-brise. Pour cela, on choisit de former le résidu à partir des 5 premières fréquences propres, pour les trois configurations, le nombre d'équations étant alors égal au nombre d'inconnues. Les six figures suivantes présentent l'évolution de l'erreur en fréquence au cours des itérations, ainsi que celles des coefficients de correction associés aux paramètres recalés pour chaque zone. Le coefficient de correction est le rapport entre la valeur du paramètre à l'itération  $i$  et sa valeur initiale (avant recalage).

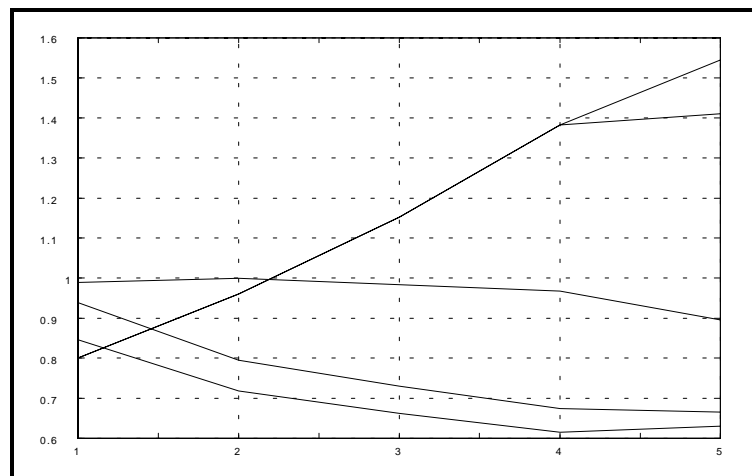


Figure 5.7 : Évolution des coefficients de correction de  $I_z$

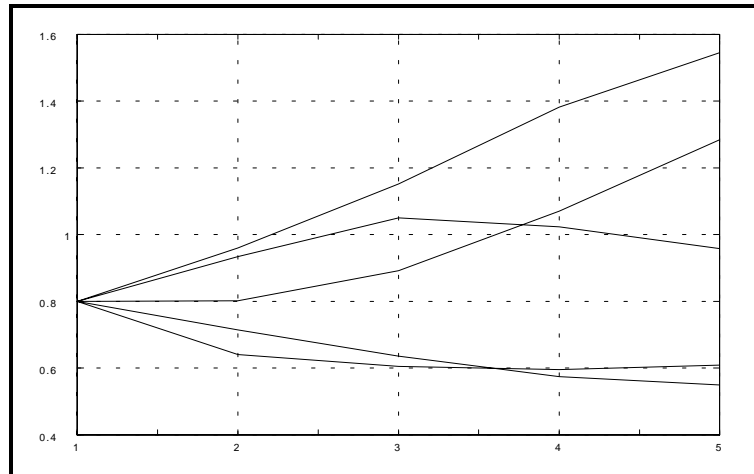


Figure 5.8 : Évolution des coefficients de correction de  $I_y$

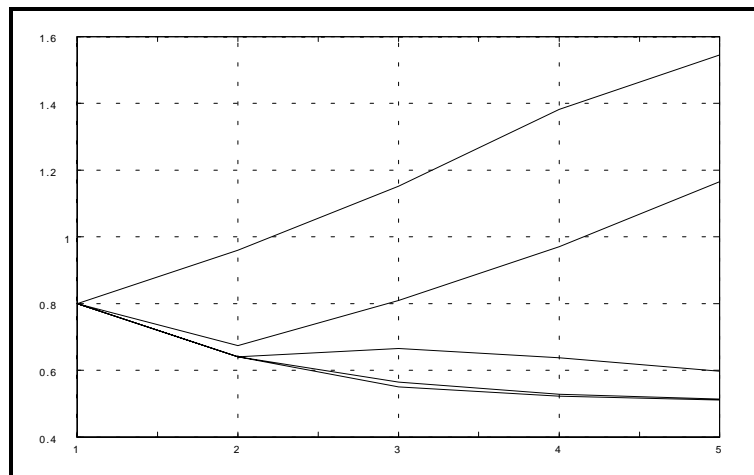


Figure 5.9 : Évolution des coefficients de correction de  $J$

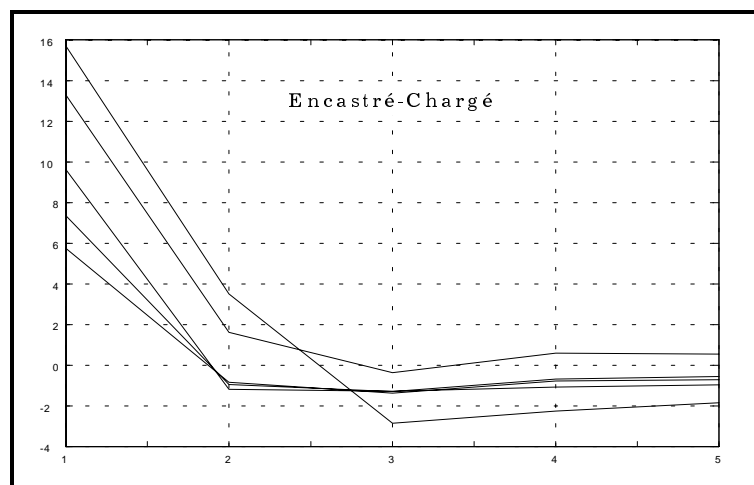


Figure 5.10 : Évolution de l'erreur en fréquence (en %)

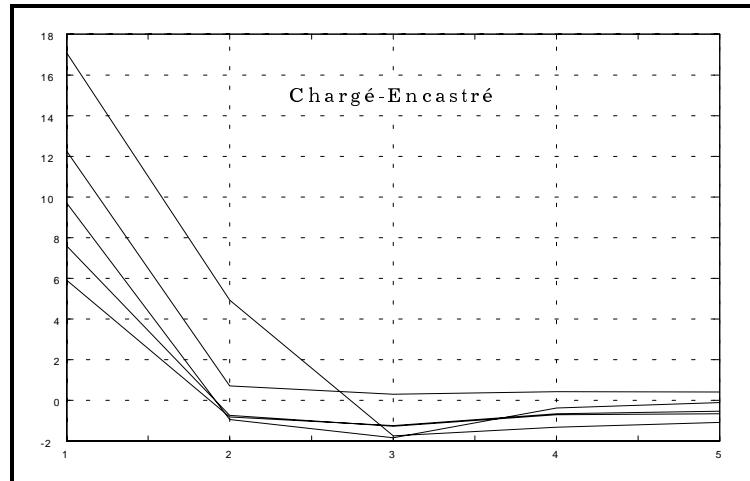


Figure 5.11 : Évolution de l'erreur en fréquence (en %)

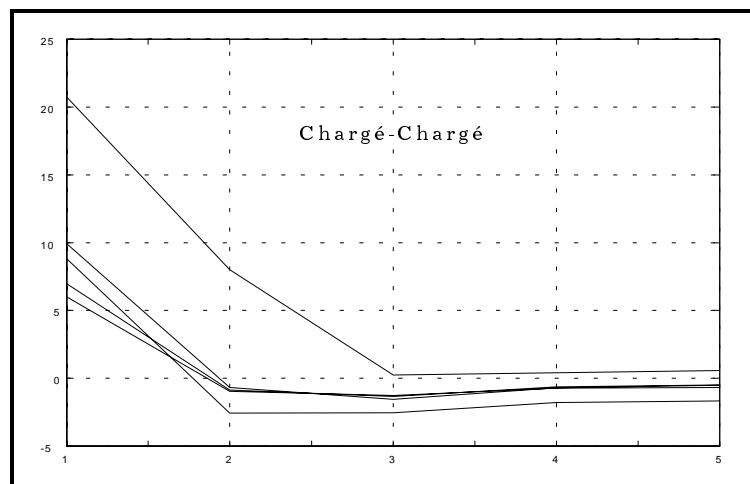


Figure 5.12 : Évolution de l'erreur en fréquence (en %)

Bien que les valeurs des paramètres recalés ne semblent pas converger (certains d'entre eux atteignent rapidement les « butées »), il est clair que l'erreur en fréquence tend à diminuer, et se stabilise au bout de quelques itérations seulement. La convergence est rapide, et la précision du modèle équivalent corrigé est présentée dans le Tableau 5.4. On peut ainsi noter une très nette amélioration des résultats pour les modes propres pris en compte dans la procédure de recalage. En effet, l'erreur maximale sur les fréquences est maintenant de l'ordre de 2 % pour le modèle simplifié. Rappelons que la taille du modèle a dans ce cas été réduite d'environ 97 %, ce qui permet de raccourcir considérablement les temps de calcul (la résolution du système homogène passe de plusieurs minutes à quelques secondes seulement).



Configuration encastré-chargé					
Modèle initial	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	$MAC_T$ (%)	$MAC_R$ (%)	Appariage
5.79	5.70	-1.51	99.98	99.05	(1,1)
8.45	8.47	0.25	99.87	99.22	(2,2)
10.48	10.29	-1.82	99.60	98.89	(3,3)
43.89	43.57	-0.73	99.45	96.66	(4,4)
65.51	64.96	-0.85	99.38	66.87	(5,5)
150.77	161.46	7.09	97.39	43.69	(6,6)
485.26	585.13	20.58	78.70	23.90	(7,7)
569.87	909.63	59.62	26.11	72.85	(8,8)
Configuration chargé-encasté					
Modèle initial	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	$MAC_T$ (%)	$MAC_R$ (%)	Appariage
7.29	7.22	-0.96	99.90	99.36	(1,1)
9.29	9.29	0.01	95.85	99.25	(2,2)
11.18	10.93	-2.23	99.74	89.63	(3,3)
35.59	35.58	-0.04	99.59	95.00	(4,4)
55.92	55.20	-1.28	99.56	67.56	(5,5)
149.03	159.51	7.03	98.18	45.31	(6,6)
484.03	583.35	20.52	78.79	24.12	(7,7)
569.58	907.50	59.33	26.33	72.72	(8,8)
Configuration chargé-chargé					
Modèle initial	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	$MAC_T$ (%)	$MAC_R$ (%)	Appariage
13.34	13.13	-1.59	52.57	99.43	(1,1)
25.70	25.51	-0.77	99.86	97.96	(2,2)
39.16	38.87	-0.72	99.32	82.08	(3,3)
51.44	51.17	-0.53	97.83	93.58	(4,4)
78.52	77.76	-0.97	98.47	51.46	(5,5)
210.90	226.34	7.32	96.57	43.30	(6,6)
486.14	588.18	20.99	78.67	24.05	(7,7)
572.97	913.62	59.45	24.85	73.07	(8,8)

Tableau 5.4 : Précision du modèle équivalent après correction

### Stabilité vis à vis du découpage

Compte tenu de la procédure proposée pour la détermination des centres de torsion, on peut supposer que la qualité des résultats est conditionnée par la façon dont sont découpées les zones d'identification. Afin d'étudier l'influence éventuelle de ce facteur, la méthode de simplification proposée est successivement appliquée à deux maillages du montant de pare-brise : le maillage initial présenté précédemment, et un maillage modifié se différenciant du premier uniquement par le fait que les noeuds ont été déplacés au niveau de chaque jonction de zones de manière à ce qu'ils soient contenus dans un plan normal à la fibre moyenne du profilé, qui pourra ainsi être légitimement qualifié de *plan de coupe* (Figure 5.13 et Figure 5.14).

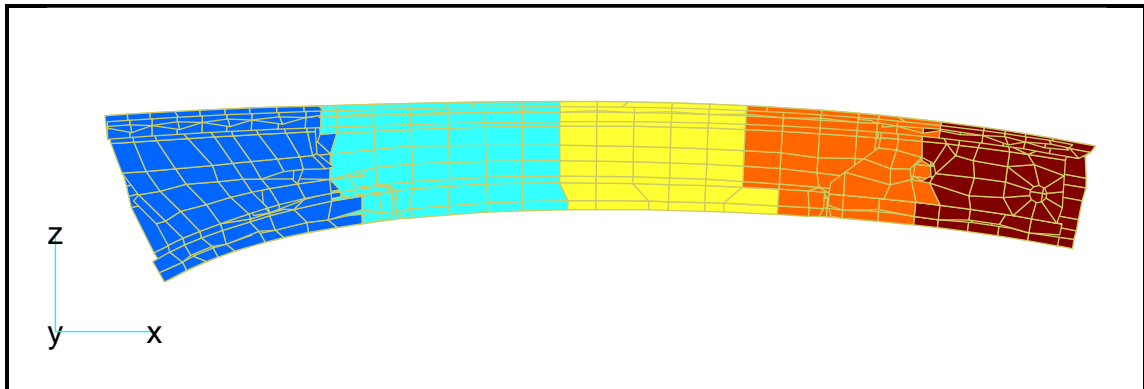


Figure 5.13 : Maillage initial

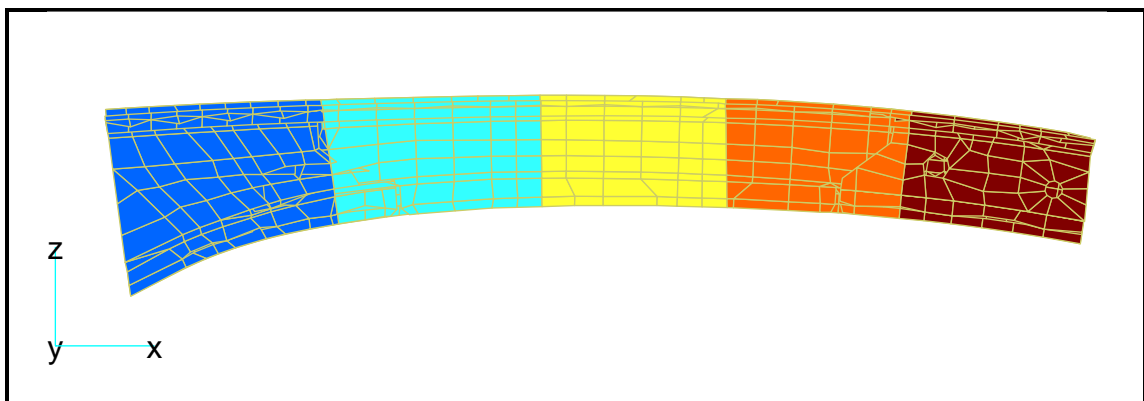


Figure 5.14 : Maillage modifié - Plans de coupe

Encastré-Chargé		Chargé-Encastré		Chargé-Chargé	
$f_R$ (Hz)	e (%)	$f_R$ (Hz)	e (%)	$f_R$ (Hz)	e (%)
5.79	-1.03	7.29	-0.26	13.34	-1.43
8.45	0.42	9.29	0.07	25.70	-0.22
10.48	-1.65	11.18	-2.30	39.16	-0.66
43.89	-0.50	35.59	-0.19	51.44	-0.37
65.51	-0.88	55.92	-0.91	78.52	-0.95

Tableau 5.5 : Précision du modèle équivalent - Maillage initial

Encastré-Chargé		Chargé-Encastré		Chargé-Chargé	
$f_R$ (Hz)	e (%)	$f_R$ (Hz)	e (%)	$f_R$ (Hz)	e (%)
5.66	-1.10	7.28	-0.20	13.29	-1.83
8.24	-0.22	9.26	-0.42	25.66	-0.18
10.31	-1.77	11.06	-2.16	38.88	-0.92
45.18	-0.29	35.70	0.05	52.65	-0.10
66.87	-0.77	55.64	-1.70	79.47	-1.22

Tableau 5.6 : Précision du modèle équivalent - Maillage modifié

Les résultats obtenus après l'identification des modèles simplifiés et leur recalage sont présentés dans le Tableau 5.5 et le Tableau 5.6. Ils montrent ainsi que la qualité du découpage des zones n'a pas d'incidence significative sur la précision du modèle équivalent. Cette conclusion est déterminante quant à l'utilisation industrielle de la méthode. En effet, les maillages de ce type de profilés sont généralement générés automatiquement à partir de la CAO, pour laquelle cette condition de découpage peut difficilement être prise en compte.

### 5.2.2 Structure « pied milieu »

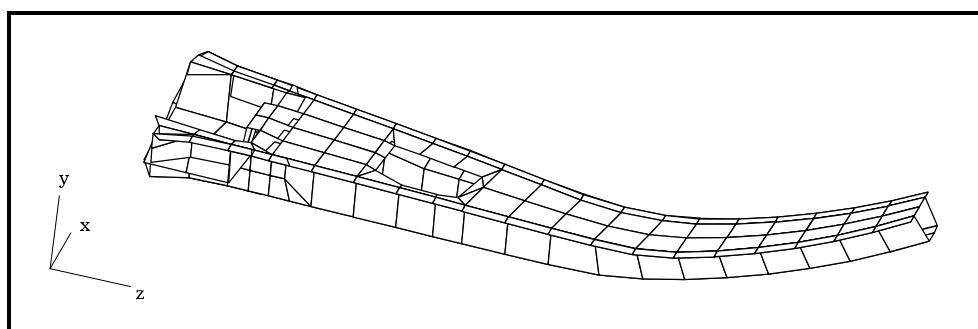


Figure 5.15 : Modèle initial du pied milieu

La structure étudiée est un profilé creux appelé « pied milieu » (situé entre les portières avant et arrière, comme cela est indiqué sur la Figure 5.1).

Le Tableau 5.7 présente les valeurs de paramètres identifiées pour chacune des trois zones du modèle (numérotées de 1 à 3 dans l'ordre des  $z$  croissants). Les valeurs des constantes matérielles introduites dans le modèle sont  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$ ,  $\nu = 0.29$  et  $\rho = 8370 \text{ kg.m}^{-3}$ .

Paramètre	Zone 1	Zone 2	Zone 3
$x_{C_1}^o$ (mm)	-3.118e+02	-3.088e+02	-4.044e+02
$y_{C_1}^o$ (mm)	-7.598e+02	-7.541e+02	-6.982e+02
$z_{C_1}^o$ (mm)	1.682e+02	6.119e+02	8.323e+02
$x_{C_2}^o$ (mm)	-3.875e+02	-4.426e+02	-4.570e+02
$y_{C_2}^o$ (mm)	-7.420e+02	-7.070e+02	-5.846e+02
$z_{C_2}^o$ (mm)	5.843e+02	8.164e+02	1.050e+03
$y_p \cdot x_o$	-5.023e-02	-1.222e-02	-8.722e-03
$y_p \cdot y_o$	9.974e-01	9.727e-01	8.861e-01
$y_p \cdot z_o$	-5.179e-02	-2.319e-01	-4.634e-01
$\bar{y}_G$ (mm)	1.443e+01	7.154e+00	5.466e+00
$\bar{z}_G$ (mm)	-2.049e+01	8.342e+00	-2.637e-01
$A$ (mm <sup>2</sup> )	2.476e+02	1.095e+02	1.736e+02
$J$ (mm <sup>4</sup> )	1.401e+05	9.135e+04	5.437e+04
$I_y$ (mm <sup>4</sup> )	7.630e+05	1.426e+05	1.269e+05
$I_z$ (mm <sup>4</sup> )	1.514e+05	4.847e+04	3.918e+04
$k_y$	1.878e-01	9.107e-01	2.650e-01
$k_z$	3.507e-01	-	1.075e+00
$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	1.854e+04	1.994e+04	1.592e+04

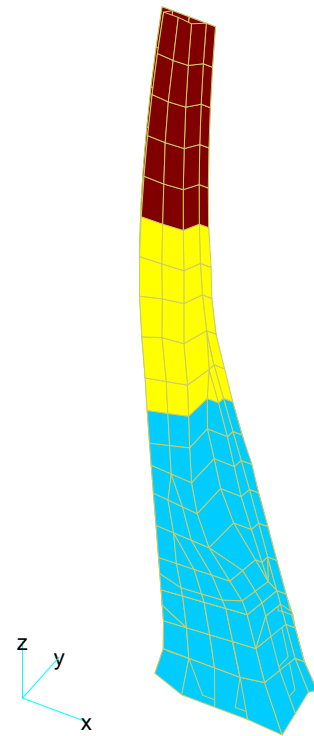


Tableau 5.7 : Paramètres équivalents

Les tailles respectives du modèle initial et du modèle simplifié sont 2148 et 132 ddl. La qualification avec un chargement fixé (calculé automatiquement) montre là encore des erreurs sur les fréquences pouvant atteindre 30 % dès les premiers modes propres. La méthode itérative de recalage par sensibilité a

donc été appliquée. Les coefficients de correction des paramètres en fin de procédure sont donnés dans le Tableau 5.8.

Paramètre corrigé	Zone 1	Zone 2	Zone 3
$I_y$	1.50	0.50	0.69
$I_z$	1.24	0.77	0.85
$J$	0.62	1.50	0.78

Tableau 5.8 : Coefficients de correction

La précision du modèle équivalent corrigé est présentée dans le Tableau suivant (pour les modes pris en compte dans la procédure de recalage) :

Configuration encastré-chargé					
Modèle initial	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	$MAC_T$ (%)	$MAC_R$ (%)	Appariage
5.02	5.16	2.77	99.93	97.90	(1,1)
7.11	7.34	3.30	99.72	95.43	(2,2)
11.57	11.63	0.52	96.80	98.51	(3,3)
24.86	25.11	1.01	99.75	99.02	(4,4)
47.10	44.99	-4.49	92.63	80.96	(5,5)
Configuration chargé-encastré					
Modèle initial	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	$MAC_T$ (%)	$MAC_R$ (%)	Appariage
3.01	3.02	0.08	99.85	99.53	(1,1)
3.94	4.07	3.32	99.84	96.41	(2,2)
11.48	11.31	-1.47	93.31	97.92	(3,3)
39.15	37.93	-3.12	99.48	95.87	(4,4)
61.50	62.12	1.00	77.37	90.90	(5,5)
Configuration chargé-chargé					
Modèle initial	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	$MAC_T$ (%)	$MAC_R$ (%)	Appariage
15.21	14.85	-2.38	5.76	96.11	(1,1)
18.64	18.80	0.86	99.86	98.58	(2,2)
26.65	28.15	5.61	99.37	86.96	(3,3)
47.12	46.88	-0.51	98.75	95.36	(4,4)
82.41	79.00	-4.14	81.95	83.53	(5,5)

Tableau 5.9 : Précision du modèle équivalent

Le Tableau 5.9 montre une fois de plus que le modèle simplifié recalé est globalement satisfaisant, bien que dans ce cas l'erreur sur la fréquence atteigne environ 5 % pour quelques modes propres. L'examen visuel de la déformée associée aux modes incriminés nous apprend toutefois qu'ils présentent des écrasements très locaux. On ne peut donc pas les représenter exactement par un modèle de poutre.

### 5.2.3 Influence du découpage en zones

Le cas traité concerne une traverse de plancher de véhicule automobile. Cette structure ayant une ligne moyenne « globalement » rectiligne, on envisage dans un premier temps d'identifier le modèle poutre équivalent en ne considérant qu'une seule zone d'identification.

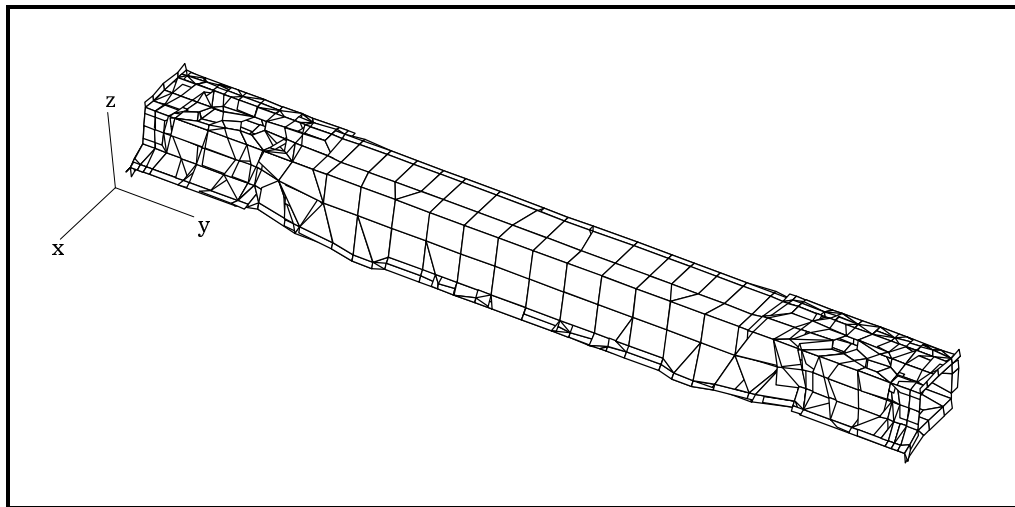


Figure 5.16 : Traverse de plancher

Dans un souci de simplicité, nous ne présenterons pas ici les valeurs des paramètres identifiés. Le modèle simplifié généré à partir de ces paramètres a été testé dans les configurations encasté-chargé et chargé-chargé. La configuration chargé-encasté n'apporte pas dans ce cas d'information supplémentaire car la structure possède un plan de symétrie à mi-longueur.

Le Tableau 5.10 présente la précision obtenue sur les fréquences propres dans ces deux configurations :

Configuration encastré-chargé					
Modèle initial	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	MAC <sub>T</sub> (%)	MAC <sub>R</sub> (%)	Appariage
8.76	8.87	1.20	100.00	99.97	(1,1)
14.09	14.11	0.11	99.62	100.00	(2,2)
15.92	15.87	-0.28	100.00	99.81	(3,3)
42.55	41.95	-1.41	99.92	99.93	(4,4)
83.08	78.27	-5.78	99.97	99.99	(5,5)
212.64	144.69	-31.95	27.08	95.30	(6,6)
Configuration chargé-chargé					
Modèle initial	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	MAC <sub>T</sub> (%)	MAC <sub>R</sub> (%)	Appariage
19.95	19.99	0.18	99.74	100.00	(1,1)
30.48	29.91	-1.87	97.25	99.96	(2,2)
52.70	52.35	-0.67	98.85	99.87	(3,3)
54.50	55.17	1.23	99.90	99.89	(4,4)
111.20	104.87	-5.69	99.95	99.92	(5,5)
226.45	153.32	-32.29	68.07	87.22	(6,6)

Tableau 5.10 : Qualification du modèle équivalent

Afin de tenter d'améliorer les résultats, le modèle simplifié est corrigé (à partir des 5 premières fréquences propres). La précision du modèle ainsi obtenu est présentée dans le Tableau 5.11. L'erreur est dans ce cas inférieure à 3 % pour les fréquences prises en compte :

Configuration encastré-chargé					
Modèle initial	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	MAC <sub>T</sub> (%)	MAC <sub>R</sub> (%)	Appariage
8.76	8.88	1.41	100.00	99.97	(1,1)
14.09	14.09	-0.02	99.32	99.99	(2,2)
15.92	16.39	2.99	100.00	99.61	(3,3)
42.55	42.03	-1.22	99.92	99.93	(4,4)
83.08	80.83	-2.70	99.97	99.99	(5,5)
212.64	144.79	-31.91	27.03	95.23	(6,6)

Configuration chargé-chargé					
Modèle initial	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	$f$ (Hz)	$e$ (%)	$MAC_T$ (%)	$MAC_R$ (%)	Appariage
19.95	19.96	0.04	99.74	100.00	(1,1)
30.48	29.97	-1.66	97.24	99.96	(2,2)
52.70	54.06	2.58	98.85	99.86	(3,3)
54.50	55.27	1.41	99.90	99.89	(4,4)
111.20	108.31	-2.60	99.95	99.92	(5,5)
226.45	153.41	-32.25	68.06	87.21	(6,6)

Tableau 5.11 : Précision du modèle corrigé

Bien que le modèle équivalent identifié à partir d'une seule zone possède une précision satisfaisante, il peut être intéressant d'évaluer la qualité des résultats obtenus à l'aide d'un découpage en 3 zones (Figure 5.17) :

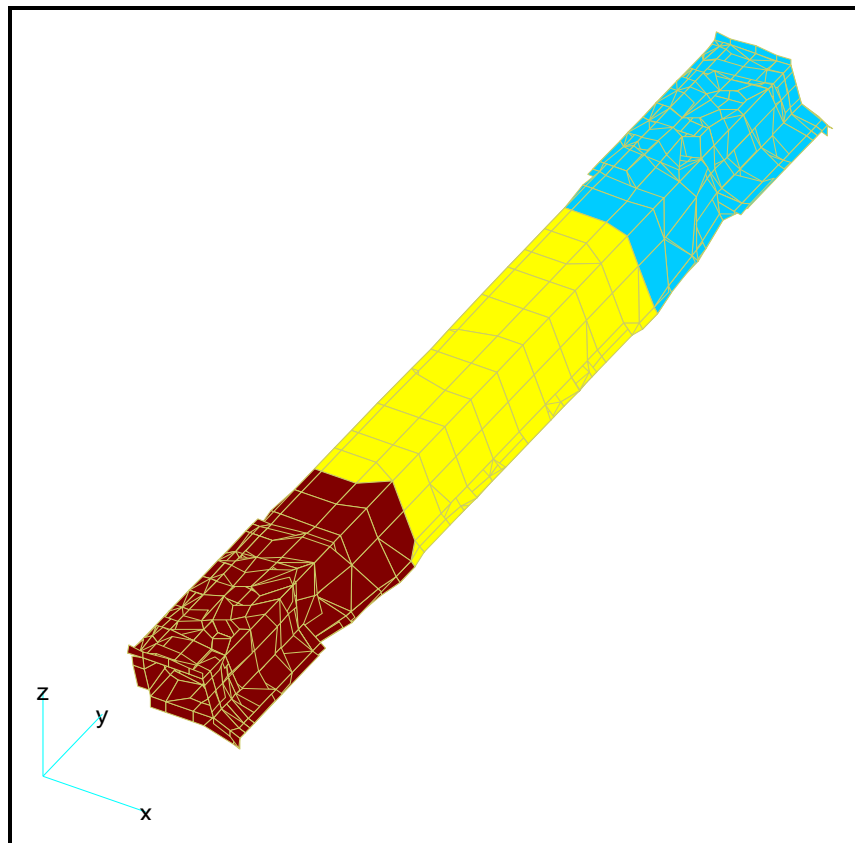


Figure 5.17 : Définition de trois zones sur la traverse



Les résultats de qualification obtenus à l'issue de l'identification sont présentés dans le Tableau 5.12 et font apparaître pour les premières fréquences des écarts maximums de l'ordre de 10 %. Ces écarts sont plus importants que ceux obtenus à partir de l'identification sur une seule zone. Ils corroborent ainsi le fait que cette dégradation des résultats est essentiellement due à la rigidification au niveau des plans de coupe.

Configuration encastré-chargé					
Modèle initial	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	MAC <sub>T</sub> (%)	MAC <sub>R</sub> (%)	Appariage
5.36	5.58	4.20	99.71	99.11	(1,1)
9.09	9.83	8.15	99.53	99.15	(2,2)
10.86	11.77	8.39	99.83	98.73	(3,3)
30.21	31.24	3.39	99.86	98.25	(4,4)
59.82	61.10	2.15	97.19	94.66	(5,5)
169.77	156.58	-7.77	96.95	83.06	(6,6)
Configuration chargé-chargé					
Modèle initial	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	MAC <sub>T</sub> (%)	MAC <sub>R</sub> (%)	Appariage
14.01	15.45	10.29	98.87	98.69	(1,1)
21.74	22.53	3.62	99.98	97.70	(2,2)
38.06	39.45	3.64	99.15	96.88	(3,3)
38.19	41.15	7.76	97.57	95.46	(4,4)
77.82	78.60	1.00	93.97	95.28	(5,5)
208.86	199.01	-4.72	99.20	94.70	(6,6)

Tableau 5.12 : Qualification du modèle équivalent (3 zones)

L'optimisation des paramètres a été effectuée à partir des fréquences propres inférieures à 150 Hz (5 premiers modes dans chaque configuration). Après 5 itérations, on obtient les coefficients de correction des paramètres donnés dans le Tableau 5.13 :

Paramètre corrigé	Zone 1	Zone 2	Zone 3
$I_y$	1.02	0.70	1.00
$I_z$	0.94	0.92	0.94
$J$	0.80	0.84	0.82

Tableau 5.13 : Coefficients de correction

Notons que les corrections apportées aux paramètres ont tendance à tous les diminuer, ce qui va dans le sens physique de « l'assouplissement » du modèle simplifié. Un résultat aussi caractéristique dans ce cas est probablement dû à la relative régularité de la structure (rectiligne et à peu près uniforme) par opposition aux cas tests précédemment traités.

La précision du modèle simplifié après correction est présentée dans le Tableau 5.14. Notons l'excellente qualité du modèle équivalent ainsi obtenu (l'erreur maximale est inférieure à 0.3 %), sachant que la taille du modèle est passée de 6744 à 132 ddl. On peut toutefois remarquer que les faibles valeurs de MAC obtenues pour les deux modes voisins de 38 Hz résultent en fait d'un croisement de ces modes lors de la phase d'optimisation, ce qui aurait pu être évité en effectuant un nouvel appariage à l'issue de la procédure.

Configuration encastré-chargé					
Modèle initial	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	MAC <sub>T</sub> (%)	MAC <sub>R</sub> (%)	Appariage
5.36	5.37	0.19	99.84	98.73	(1,1)
9.09	9.09	0.00	99.85	99.50	(2,2)
10.86	10.86	0.06	99.84	99.00	(3,3)
30.21	30.16	-0.16	99.90	97.77	(4,4)
59.82	59.77	-0.08	97.09	94.11	(5,5)
169.77	153.38	-9.65	97.32	80.00	(6,6)
Configuration chargé-chargé					
Modèle initial	Modèle équivalent		Comparaison des directions propres		
$f_R$ (Hz)	f (Hz)	e (%)	MAC <sub>T</sub> (%)	MAC <sub>R</sub> (%)	Appariage
14.01	14.00	-0.05	97.35	98.60	(1,1)
21.74	21.69	-0.24	99.94	96.72	(2,2)
38.06	37.99	-0.21	17.97	19.80	(3,3)
38.19	38.22	0.08	40.64	39.30	(4,4)
77.82	77.94	0.15	93.77	93.62	(5,5)
208.86	192.62	-7.78	99.52	93.36	(6,6)

Tableau 5.14 : Précision du modèle simplifié (3 zones)

### 5.3 Mise en œuvre informatique

La méthode de simplification de modèle proposée est actuellement utilisée par le partenaire industriel de cette étude. Plusieurs dizaines de sous-structures ont pu ainsi être traitées avec succès, et dans un temps relativement réduit grâce à l'automatisation informatique du procédé. En effet, ce travail a été formalisé dans un logiciel écrit en langage Matlab™ sous environnement Unix, et intégré dans la plateforme de calcul Proto-Dynamique™ développée conjointement par le LMARC et Intespace (Toulouse). En évitant d'aborder les détails de la programmation, on présente ici les principales fonctionnalités de ce logiciel (résumées sur la Figure 5.18).

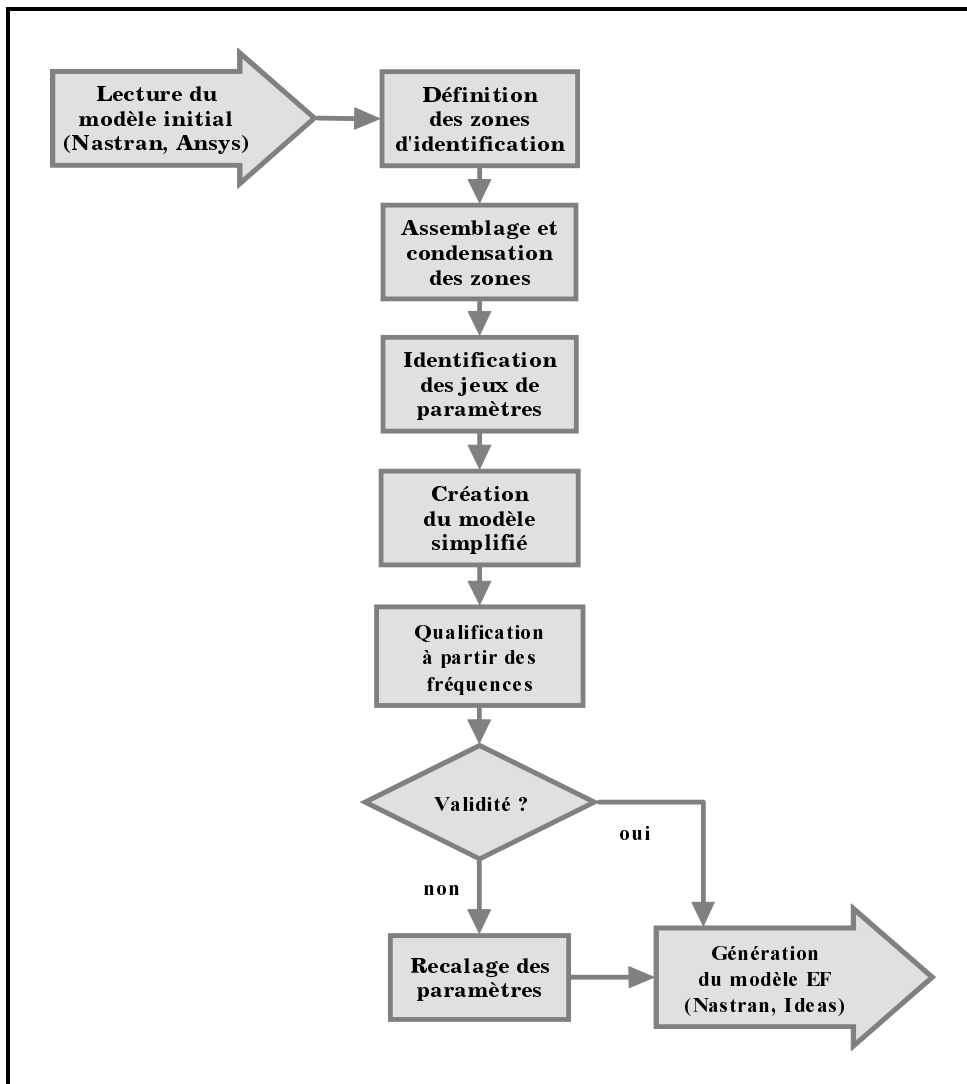


Figure 5.18 : Principales fonctionnalités du logiciel

Le partenaire industriel du contrat de recherche occasionné par cette étude a défini dans le cahier des charges l'objet du logiciel :

*« le logiciel doit permettre une automatisation partielle du passage d'un modèle coque de corps creux à un modèle poutre équivalent »*

Le logiciel réalisé répond à cette attente. Il permet, à partir d'un maillage fin d'une structure issu d'un code de calcul, de générer de manière automatique les cartes de définition (au format du code) du modèle équivalent. Les fichiers résultants contiennent les coordonnées des noeuds, la connectivité des éléments, les constantes réelles et orientations, ...

Les principales difficultés rencontrées lors de la programmation sont liées d'une part au souci constant de réduire les temps de calcul et, d'autre part, à la volonté de permettre à l'utilisateur de traiter des modèles de taille relativement importante (jusqu'à 10000 ddl). La gestion modulaire des tâches à effectuer par le logiciel a été orientée dans ce sens.

Outre ces considérations techniques, le produit fini est effectivement pratique d'utilisation, le dialogue entre logiciel et utilisateur étant aussi souvent que possible basé sur l'emploi de menus interactifs et d'interfaces graphiques. De plus, grâce à la souplesse du langage Matlab™, la totalité des variables et résultats des calculs intermédiaires est accessible en permanence pour l'utilisateur.



# Conclusion générale

Nous avons présenté dans ce mémoire de thèse une méthodologie générale de simplification de modèles éléments finis de structures à comportement global de poutre. Un large champ disciplinaire a été abordé, de la formulation d'éléments généraux de poutre de Timoshenko, au recalage de modèles dynamiques, en passant par des procédures de condensation et d'identification paramétrique.

Ce travail a le mérite de clarifier la formulation de poutre générale de Timoshenko en proposant une expression formelle explicite des matrices de raideur et de masse, mettant en évidence le couplage entre la flexion et la torsion dans la matrice de masse. De plus nous avons montré que la matrice de raideur de la poutre générale de Timoshenko peut s'écrire en fonction de quatre matrices à trois ddl, à partir desquelles nous avons pu proposer une méthode d'identification des paramètres constitutifs fiable et robuste.

Les applications traitées ont permis de valider la méthode dans de nombreuses configurations. Il a été montré en particulier que cette technique pouvait être utilisée pour homogénéiser les paramètres de structures composites. L'extension de la méthode aux structures courbes de section variable ouvre un large champ d'application dans le domaine industriel. Nous avons pu lever le handicap lié à la rigidification des sections droites en appliquant une méthode de recalage paramétrique assurant une excellente corrélation entre les comportements dynamiques du modèle initial et du modèle simplifié.

Enfin, les développements théoriques ont été formalisés dans un logiciel d'application écrit dans le langage Matlab™, assurant une automatisation

poussée du processus de détermination des paramètres de poutres équivalentes. Le couplage avec Nastran™ en fait un outil simple et efficace, actuellement largement utilisé par PSA pour établir une banque de données de modèles équivalents.

Ce travail de thèse a permis d'initier de nouvelles voies de recherche dans le domaine de la simplification et de l'amélioration de modèles de calcul. Afin de généraliser son champ d'application, il conviendra de s'intéresser aux problèmes de connexion entre éléments de poutres (traitement des noeuds d'ossature de véhicules automobiles) ainsi qu'à celui des liaisons entre poutres équivalentes et coques. On disposera alors d'un outil performant de simplification de modèles dynamiques complexes. Les modèles simplifiés pourront alors être utilisés dans le but d'optimiser le comportement dynamique de la caisse complète du véhicule. D'autres points restent à aborder ; ils concernent d'une part la prise en compte du gauchissement dans l'élément fini de poutre et, d'autre part, l'étude des modifications à apporter au modèle initial à partir de celles du modèle équivalent.

# Références bibliographiques

- [1] AGGARWAL H.R., CRANCH E.T., *A theory of torsional and coupled bending torsional waves in thin-walled open section beams*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, vol. 34, p. 337-343, 1967.
- [2] BANERJEE J.R., *Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for beam elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 28, p. 1283-1298, 1989.
- [3] BATOZ J.L., DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis*, vol. 2, Poutres et plaques, Ed. Hermès, Paris, 1990.
- [4] BISHOP R.E.D., PRICE W.G., *Coupled bending and twisting of a Timoshenko beam*, Journal of Sound and Vibration, vol. 50, p. 469-477, 1977.
- [5] BLEVINS R.D., *Formulas for natural frequency and mode shape*, Van Nostrand Reinhold, 1979.
- [6] BOUHADDI N., *Sous-structuration par condensation dynamique linéarisée*, Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté, Besançon, 1992.
- [7] CORN S., BOUHADDI N., PIRANDA J., *Simplification of finite element models for structures having a beam-like behaviour*, Journal of Sound and Vibration, à paraître en 1999.
- [8] CORN S., BOUHADDI N., PIRANDA J., *Transverse vibrations of short beams : finite element models obtained by a condensation method*, Journal of Sound and Vibration, vol. 201, p. 353-363, 1997.



- [9] CORN S., PIRANDA J., BOUHADDI N., *Homogenization method for beam-like structures*, Proc. of the 23<sup>rd</sup> International Seminar on Modal Analysis (ISMA), Leuven, Vol. 3, p. 1145-1151, 1998.
- [10] CORN S., PIRANDA J., BOUHADDI N., *Simplification de modèles éléments finis de structures à comportement de poutre par des éléments de poutres équivalentes*, Actes du 3<sup>ème</sup> Colloque National en Calcul des Structures, Giens, Vol. 1, p. 259-264, Ouest-Editions, 1997.
- [11] COWPER G.R., *The shear coefficient in Timoshenko's beam theory*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, vol. 33, p. 335-340, 1966.
- [12] CZEKAJSKI C., LAROZE S., GAY D., *Application of a boundary integral element method to the study of dynamical torsion of beams*, Research in Structural and Solid Mechanics, NASA Conference Pub. 2245, 1982.
- [13] DAVIS R., HENSHELL R.D., WARBURTON G.B., *A Timoshenko beam element*, Journal of Sound and Vibration, vol. 22, p. 475-487, 1972.
- [14] DUBIGEON S., KIM C.B., *A finite element for the study of coupled bending-prevented torsion of a straight beam*, Journal of Sound and Vibration, vol. 81, p. 255-270, 1982.
- [15] FERRARIS-BESSO G., *Prévision du comportement dynamique des ensembles disque-aubes*, Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard, Lyon, 1982.
- [16] FRIBERG P.O., *Coupled vibrations of beams - An exact dynamic element stiffness matrix*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 19, p. 479-493, 1983.
- [17] FRIEDMAN Z., KOSMATA J.B., *An improved two-node Timoshenko beam finite element*, Computers and Structures, vol. 47, p. 473-481, 1993.
- [18] GAY D., *Influence des effets secondaires sur les vibrations de flexion et de torsion des poutres*, Thèse de Doctorat, Université P. Sabatier, Toulouse, 1979.
- [19] GAY D., *Matériaux composites*, Ed. Hermès, Paris, 1991.
- [20] GÉRADIN M., RIXEN D., *Théorie des vibrations. Application à la dynamique des structures*, Ed. Masson, Paris, 1993.

- [21] GERMAIN P., MULLER P., *Introduction à la mécanique des milieux continus*, Ed. Masson, Paris, 1995.
- [22] GUYAN R.J., *Reduction of stiffness and mass matrices*, American Institute of Aeronautics Journal, vol. 3, p. 380, 1965.
- [23] HALLAUER W., LIU R.Y.L., *Beam bending-torsion dynamic stiffness method for calculation of exact vibration modes*, Journal of Sound and Vibration, vol. 85, p. 105-113, 1982.
- [24] HUANG T.C., *The effect of rotary inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, vol. 28, p. 579-584, 1961.
- [25] HUTCHINSON J.R., *Transverse vibrations of beams, exact versus approximate solutions*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, vol. 48, p. 923-928, 1981.
- [26] IMBERT J.F., *Analyse des structures par éléments finis*, Ed. Cepadue, Toulouse, 1991.
- [27] KRISHNAN A., SINGH V.K., *Some studies on vibration of thin walled open sections*, Journal of Sound and Vibration, vol. 149, p. 297-310, 1991.
- [28] LAROZE S., *Résistance des matériaux et structures*, vol. 2, Théorie des poutres, Ed. Eyrolles-Masson, Paris, 1974.
- [29] LEVINSON M., *A new rectangular beam theory*, Journal of Sound and Vibration, vol. 74, p. 81-87, 1981.
- [30] LOVE A.E.H., *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Dover Ed., New York, 1944.
- [31] MUSKHELISHVILI N.I., *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Noordhoff international publishing, Leyden, 1954.
- [32] PIRANDA J., CORN S., BOUHADDI N. (LMARC), STAWICKI C., VAN HERPE F. (PSA-Peugeot-Citroën), *Determination of equivalent beam properties for hollow girders typically used in the automotive industry*, Proc. of the 16<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference (IMAC), p. 1227-1232, 1998.

- [33] PIRANDA J., *Cours de Vibrations des structures*, École Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques, Besançon, 1992.
- [34] POTIRON A., *Étude du comportement dynamique des poutres par une cinématique à sept paramètres. Formulation par éléments finis correspondante*, Thèse de Doctorat, Université P. Sabatier, Toulouse, 1979.
- [35] PRZEMIENIECKI J.S., *Theory of matrix structural analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [36] REISSNER E., TSAI W.T., *On the determination of the centers of twist and of shear for cylindrical shell beams*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, vol. 39, p. 1098-1102, 1972.
- [37] ROARK R.J., *Formulas for stress and strain*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [38] SALENÇON J., *Mécanique des milieux continus*, vol. 2, Élasticité - Milieux curvilignes, Ed. Ellipses, Paris, 1988.
- [39] SOLOMON L., *Élasticité linéaire*, Ed. Masson, Paris, 1968.
- [40] STEPHEN N.G., *On the variation of Timoshenko's shear coefficient with frequency*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, vol. 45, p. 695-697, 1978.
- [41] THOMAS D.L., WILSON J.M., WILSON R.R., *Timoshenko beam finite elements*, Journal of Sound and Vibration, vol. 31, p. 315-330, 1973.
- [42] THOMAS J., ABBAS B.A.H., *Finite element model for dynamic analysis of Timoshenko beam*, Journal of Sound and Vibration, vol. 41, p. 291, 1975.
- [43] TIMOSHENKO S.P., *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*, Philosophical Magazine, vol. 41, p. 744-746, 1921.
- [44] TIMOSHENKO S.P., *On the transverse vibrations of bars of uniform cross section*, Philosophical Magazine, vol. 43, p. 125-131, 1922.
- [45] TROMPETTE P., *Mécanique des structures par la méthode des éléments finis*, Ed. Masson, Paris, 1992.
- [46] VLASSOV B.Z., *Pièces longues en voiles minces*, Ed. Eyrolles, Paris, 1962.

# Annexe A

## À propos de la constante de torsion

La constante de torsion, notée  $J$ , permet d'établir la relation de rigidité entre le moment de torsion  $M_x$  et le taux de rotation  $\frac{\partial \theta_x}{\partial x}$  :

$$M_x = GJ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (\text{A.1})$$

avec :

$$M_x = \iint_S (y \sigma_{xz}^T - z \sigma_{xy}^T) dS \quad (\text{A.2})$$

En remplaçant  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{xz}$  par leurs valeurs respectives, on obtient pour  $J$  :

$$J = \iint_S (y^2 + z^2 + y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial y}) dS \quad (\text{A.3})$$

qui peut également s'écrire en introduisant le moment polaire en C, noté  $I_C$  :

$$J = I_C + \iint_S (y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial y}) dS \quad (\text{A.4})$$

Rappelons que le moment polaire  $I_C$  est défini par :

$$I_C = \iint_S (y^2 + z^2) dS = I_y + I_z + (\bar{y}_G^2 + \bar{z}_G^2) A \quad (\text{A.5})$$

En effectuant une intégration par parties de l'expression (A.4), on obtient :

$$\iint_S (y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial y}) dS = \int_{\Gamma} (y \varphi n_z - z \varphi n_y) d\Gamma \quad (\text{A.6})$$

Or, en utilisant les conditions du problème de Neumann (Chapitre 1), on a :

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{y} \varphi n_z - z \varphi n_y) d\Gamma = - \int_{\Gamma} \varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{y}} n_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} n_z \right) d\Gamma \quad (\text{A.7})$$

En effectuant une nouvelle intégration par parties, on peut alors écrire :

$$\int_{\Gamma} \varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{y}} n_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} n_z \right) d\Gamma = \iint_{\mathcal{S}} \varphi \Delta \varphi d\mathcal{S} + \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \varphi)^2 d\mathcal{S} \quad (\text{A.8})$$

La fonction de gauchissement étant de laplacien nul sur tout le domaine, on aboutit finalement à la forme suivante de  $J$  :

$$J = I_C - \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \varphi)^2 d\mathcal{S} \quad (\text{A.9})$$

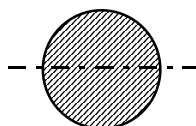
Le dernier terme de (A.9) étant manifestement de signe positif, nous avons ainsi montré que  $J$  est toujours inférieur à  $I_C$ .

## Annexe B

### Coefficient de cisaillement

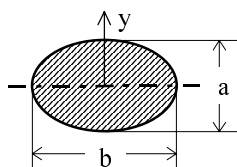
Dans cette Annexe, on présente pour des formes classiques de la section droite, les valeurs du coefficient de cisaillement transverse  $k$  calculées par Cowper [8] à partir du problème d'élasticité tridimensionnelle de la poutre console.

Cercle :



$$k = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu}$$

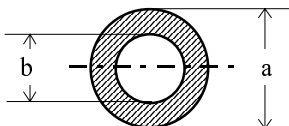
Ellipse :



$$k_y = \frac{12(1+\nu)(3+m^2)}{40+37\nu+(16+10\nu)m^2+\nu m^4}$$

$$\text{avec } m = \frac{b}{a}$$

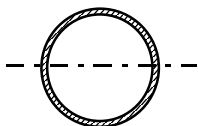
Tube circulaire :



$$k = \frac{6(1+\nu)(1+m^2)^2}{(7+6\nu)(1+m^2)^2 + (20+12\nu)m^2}$$

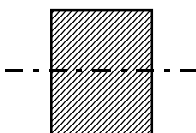
avec  $m = \frac{b}{a}$

Tube circulaire à paroi mince :



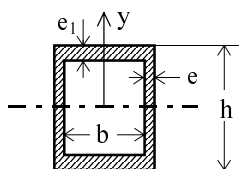
$$k = \frac{2(1+\nu)}{4+3\nu}$$

Rectangle :



$$k = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$$

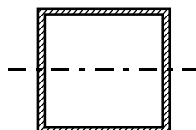
Tube rectangulaire :



$$k_y = \frac{10(1+\nu)(1+3m)^2}{(12+72m+150m^2+90m^3) + \nu(11+66m+135m^2+90m^3) + 10mn^2(3+\nu+3m)}$$

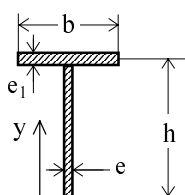
avec  $n = \frac{b}{h}$  et  $m = \frac{e_1}{e} n$

Tube carré à paroi mince :



$$k = \frac{20(1+\nu)}{48 + 39\nu}$$

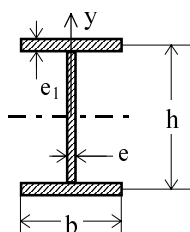
Profilé en « T » :



$$k_y = \frac{10(1+\nu)(1+4m)^2}{(12+96m+276m^2+192m^3) + \nu(11+88m+248m^2+216m^3) + 10mn^2(3+3m+\nu(4+5m+m^2))}$$

$$\text{avec } n = \frac{b}{h} \text{ et } m = \frac{e_1}{e} n$$

Profilé en « I » :



$$k_y = \frac{10(1+\nu)(1+3m)^2}{(12+72m+150m^2+90m^3) + \nu(11+66m+135m^2+90m^3) + 5mn^2(6+6m+\nu(8+9m))}$$

$$\text{avec } n = \frac{b}{h} \text{ et } m = 2\frac{e_1}{e} n$$





# Annexe C

## Valeurs du paramètre fréquentiel

Conformément à la formulation de Timoshenko, l'expression des fréquences propres d'une poutre est :

$$f = \frac{\tau^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{C.1})$$

où  $\tau$  est le paramètre fréquentiel.

On présente dans cette Annexe des tables donnant les valeurs numériques du paramètre fréquentiel en fonction de l'élanement  $\delta = \frac{l}{r} \Delta = \sqrt{\frac{Al^2}{I}}$ , pour deux formes usuelles de section droite et toutes les conditions aux limites :

Libre-Libre (**L-L**), Libre-Guidée (**L-G**), Encastrée-Libre (**E-L**), Libre-Appuyée (**L-A**), Bi-Appuyée (**A-A**), Encastrée-Appuyée (**E-A**), Bi-Encastrée (**E-E**), Encastrée-Guidée (**E-G**), Guidée-Appuyée (**G-A**), et Bi-Guidée (**G-G**).

Remarque : ces tables présentent seulement les valeurs correspondant au premier domaine fréquentiel de solutions ( $\tau < \tau_c$ ). Les signes « - » correspondent à des valeurs du second domaine (voir Chapitre 1).

Ces résultats ont été obtenus en résolvant numériquement l'équation transcendante en  $\tau$  pour chaque conditions aux limites, pour les poutres de section circulaire et rectangulaire pleine.

## C.1 Poutre de section circulaire pleine

$$k = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu} \quad \nu = 0.3$$

L - L	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	-	-	3.9109	4.4176	4.6377	4.7058	4.7239	4.7285
Mode 2	-	-	5.3162	6.7121	7.4571	7.7415	7.8243	7.8459
Mode 3	-	-	-	8.6209	10.0408	10.7024	10.9174	10.9757
Mode 4	-	-	-	10.1885	12.3689	13.5454	13.9735	14.0951
Mode 5	-	-	-	11.4970	14.4716	16.2600	16.9854	17.2023
Mode 6	-	-	-	-	16.3804	18.8428	19.9461	20.2949
Mode 7	-	-	-	-	18.1236	21.2960	22.8504	23.3705

L - G	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	-	1.9554	2.2088	2.3189	2.3529	2.3619	2.3642	2.3648
Mode 2	-	-	4.3105	5.0204	5.3512	5.4587	5.4879	5.4953
Mode 3	-	-	5.7485	7.2358	8.1300	8.4927	8.6012	8.6297
Mode 4	-	-	-	9.0618	10.6480	11.4252	11.6853	11.7566
Mode 5	-	-	-	10.5975	12.9193	14.2371	14.7311	14.8732
Mode 6	-	-	-	11.8740	14.9748	16.9193	17.7309	17.9770
Mode 7	-	-	-	-	16.8465	19.4699	20.6781	21.0656

E - L	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	1.2597	1.5680	1.7643	1.8434	1.8668	1.8730	1.8746	1.8750
Mode 2	-	2.6582	3.5717	4.2477	4.5591	4.6583	4.6850	4.6918
Mode 3	-	-	5.2083	6.5220	7.3721	7.7165	7.8188	7.8457
Mode 4	-	-	-	8.3723	9.8991	10.6529	10.9036	10.9721
Mode 5	-	-	-	9.9584	12.1817	13.4699	13.9513	14.0893
Mode 6	-	-	-	11.3052	14.2500	16.1571	16.9531	17.1937
Mode 7	-	-	-	-	16.1373	18.7127	19.9025	20.2830

L - A	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	-	2.6581	3.3560	3.7286	3.8708	3.9122	3.9230	3.9257
Mode 2	-	-	5.0942	6.1845	6.7727	6.9868	7.0475	7.0633
Mode 3	-	-	-	8.1902	9.4214	9.9731	10.1475	10.1943
Mode 4	-	-	-	9.8617	11.8127	12.8470	13.2135	13.3163
Mode 5	-	-	-	11.2713	13.9720	15.5947	16.2372	16.4268
Mode 6	-	-	-	-	15.9317	18.2109	19.2114	19.5234
Mode 7	-	-	-	-	17.7224	20.6968	22.1303	22.6035

A - A	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	-	2.3750	2.8102	3.0351	3.1127	3.1342	3.1397	3.1411
Mode 2	-	-	4.7499	5.6204	6.0703	6.2254	6.2684	6.2795
Mode 3	-	-	-	7.7346	8.7853	9.2366	9.3754	9.4123
Mode 4	-	-	-	9.4999	11.2408	12.1406	12.4508	12.5368
Mode 5	-	-	-	11.0178	13.4578	14.9209	15.4859	15.6505
Mode 6	-	-	-	-	15.4693	17.5706	18.4732	18.7508
Mode 7	-	-	-	-	17.3073	20.0893	21.4065	21.8352

E - A	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	-	2.4658	3.1635	3.6423	3.8440	3.9050	3.9211	3.9252
Mode 2	-	-	4.8582	6.0013	6.6980	6.9646	7.0417	7.0618
Mode 3	-	-	-	7.9506	9.2929	9.9297	10.1356	10.1912
Mode 4	-	-	-	9.6135	11.6357	12.7783	13.1936	13.3111
Mode 5	-	-	-	11.0691	13.7572	15.4987	16.2076	16.4190
Mode 6	-	-	-	-	15.6918	18.0875	19.1708	19.5123
Mode 7	-	-	-	-	17.4697	20.5472	22.0775	22.5888

E - E	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	-	2.6370	3.4921	4.2040	4.5650	4.6857	4.7188	4.7272
Mode 2	-	-	4.9316	6.3269	7.2846	7.6880	7.8101	7.8423
Mode 3	-	-	-	8.1449	9.7647	10.6044	10.8900	10.9687
Mode 4	-	-	-	9.7164	12.0027	13.3961	13.9293	14.0835
Mode 5	-	-	-	11.1197	14.0369	16.0566	16.9211	17.1851
Mode 6	-	-	-	-	15.9012	18.5858	19.8593	20.2711
Mode 7	-	-	-	-	17.6239	20.9882	22.7390	23.3392

Annexe C

E - G	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	1.3185	1.7461	2.1020	2.2825	2.3429	2.3594	2.3636	2.3647
Mode 2	-	-	4.0724	4.8824	5.3022	5.4450	5.4843	5.4944
Mode 3	-	-	5.5598	7.0184	8.0283	8.4606	8.5926	8.6275
Mode 4	-	-	-	8.8119	10.4941	11.3695	11.6696	11.7525
Mode 5	-	-	-	10.3637	12.7219	14.1549	14.7066	14.8667
Mode 6	-	-	-	11.7342	14.7458	16.8095	17.6959	17.9676
Mode 7	-	-	-	-	16.5986	19.3332	20.6315	21.0528

G - A	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	1.1875	1.4051	1.5176	1.5563	1.5671	1.5699	1.5706	1.5707
Mode 2	-	-	3.8673	4.3926	4.6183	4.6877	4.7061	4.7108
Mode 3	-	-	5.5089	6.7289	7.4605	7.7429	7.8253	7.8467
Mode 4	-	-	-	8.6536	10.0447	10.7033	10.9176	10.9757
Mode 5	-	-	-	10.2848	12.3771	13.5468	13.9739	14.0952
Mode 6	-	-	-	11.7062	14.4871	16.2622	16.9859	17.2025
Mode 7	-	-	-	-	16.4081	18.8461	19.9469	20.2951

G - G	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	-	2.3750	2.8102	3.0351	3.1127	3.1342	3.1397	3.1411
Mode 2	-	-	4.7499	5.6204	6.0703	6.2254	6.2684	6.2795
Mode 3	-	-	-	7.7346	8.7853	9.2366	9.3754	9.4123
Mode 4	-	-	-	9.4999	11.2408	12.1406	12.4508	12.5368
Mode 5	-	-	-	11.0178	13.4578	14.9209	15.4859	15.6505
Mode 6	-	-	-	-	15.4693	17.5706	18.4732	18.7508
Mode 7	-	-	-	-	17.3073	20.0893	21.4065	21.8352

## C.2 Poutre de section rectangulaire pleine

$$k = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \quad \nu = 0.3$$

L - L	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	-	-	3.9030	4.4132	4.6361	4.7053	4.7238	4.7285
Mode 2	-	-	5.2842	6.6937	7.4490	7.7390	7.8236	7.8457
Mode 3	-	-	-	8.5855	10.0212	10.6953	10.9154	10.9752
Mode 4	-	-	-	10.1330	12.3342	13.5309	13.9691	14.0939
Mode 5	-	-	-	11.4215	14.4195	16.2355	16.9774	17.2002
Mode 6	-	-	-	-	16.3098	18.8058	19.9333	20.2913
Mode 7	-	-	-	-	18.0339	21.2446	22.8311	23.3650

L - G	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	-	1.9515	2.2066	2.3181	2.3527	2.3619	2.3642	2.3648
Mode 2	-	-	4.2927	5.0106	5.3476	5.4577	5.4876	5.4952
Mode 3	-	-	5.7107	7.2098	8.1177	8.4887	8.6001	8.6294
Mode 4	-	-	-	9.0170	10.6223	11.4156	11.6825	11.7559
Mode 5	-	-	-	10.5333	12.8771	14.2190	14.7256	14.8717
Mode 6	-	-	-	11.7869	14.9142	16.8900	17.7213	17.9744
Mode 7	-	-	-	-	16.7668	19.4272	20.6630	21.0614

E - L	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	1.2505	1.5613	1.7612	1.8424	1.8666	1.8730	1.8746	1.8750
Mode 2	-	2.6426	3.5528	4.2364	4.5550	4.6572	4.6847	4.6917
Mode 3	-	-	5.1764	6.4952	7.3590	7.7122	7.8177	7.8454
Mode 4	-	-	-	8.3282	9.8722	10.6427	10.9007	10.9714
Mode 5	-	-	-	9.8980	12.1383	13.4511	13.9456	14.0878
Mode 6	-	-	-	11.2265	14.1889	16.1268	16.9432	17.1910
Mode 7	-	-	-	-	16.0581	18.6688	19.8870	20.2787

Annexe C

L - A	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	-	2.6421	3.3469	3.7245	3.8695	3.9118	3.9229	3.9257
Mode 2	-	-	5.0665	6.1671	6.7655	6.9846	7.0470	7.0631
Mode 3	-	-	-	8.1549	9.4029	9.9666	10.1457	10.1938
Mode 4	-	-	-	9.8073	11.7791	12.8335	13.2095	13.3153
Mode 5	-	-	-	11.1966	13.9207	15.5713	16.2298	16.4249
Mode 6	-	-	-	-	15.8617	18.1752	19.1992	19.5200
Mode 7	-	-	-	-	17.6330	20.6467	22.1120	22.5983

A - A	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	-	2.3614	2.8021	3.0320	3.1118	3.1340	3.1397	3.1411
Mode 2	-	-	4.7228	5.6042	6.0640	6.2236	6.2679	6.2794
Mode 3	-	-	-	7.6999	8.7681	9.2308	9.3738	9.4119
Mode 4	-	-	-	9.4456	11.2084	12.1281	12.4472	12.5359
Mode 5	-	-	-	10.9445	13.4076	14.8988	15.4790	15.6487
Mode 6	-	-	-	-	15.3998	17.5362	18.4617	18.7476
Mode 7	-	-	-	-	17.2183	20.0406	21.3890	21.8303

E - A	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	-	2.4466	3.1460	3.6333	3.8411	3.9042	3.9209	3.9252
Mode 2	-	-	4.8247	5.9756	6.6864	6.9611	7.0408	7.0616
Mode 3	-	-	-	7.9068	9.2676	9.9206	10.1330	10.1906
Mode 4	-	-	-	9.5525	11.5937	12.7607	13.1883	13.3097
Mode 5	-	-	-	10.9918	13.6970	15.4699	16.1984	16.4165
Mode 6	-	-	-	-	15.6130	18.0452	19.1561	19.5083
Mode 7	-	-	-	-	17.3724	20.4895	22.0560	22.5826

E - E	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	-	2.6122	3.4671	4.1881	4.5590	4.6840	4.7183	4.7271
Mode 2	-	-	4.8932	6.2920	7.2667	7.6821	7.8085	7.8419
Mode 3	-	-	-	8.0931	9.7310	10.5913	10.8863	10.9677
Mode 4	-	-	-	9.6493	11.9512	13.3729	13.9221	14.0816
Mode 5	-	-	-	11.0387	13.9672	16.0208	16.9092	17.1819
Mode 6	-	-	-	-	15.8136	18.5352	19.8411	20.2660
Mode 7	-	-	-	-	17.5189	20.9215	22.7130	23.3317

E - G	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	1.3061	1.7335	2.0941	2.2795	2.3420	2.3592	2.3635	2.3647
Mode 2	-	-	4.0465	4.8655	5.2957	5.4431	5.4838	5.4943
Mode 3	-	-	5.5194	6.9836	8.0104	8.4546	8.5909	8.6271
Mode 4	-	-	-	8.7594	10.4607	11.3565	11.6658	11.7515
Mode 5	-	-	-	10.2945	12.6709	14.1321	14.6995	14.8648
Mode 6	-	-	-	11.6490	14.6764	16.7742	17.6841	17.9644
Mode 7	-	-	-	-	16.5106	19.2834	20.6136	21.0478

G - A	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	1.1807	1.4010	1.5160	1.5559	1.5670	1.5698	1.5706	1.5707
Mode 2	-	-	3.8500	4.3841	4.6154	4.6869	4.7059	4.7108
Mode 3	-	-	5.4723	6.7038	7.4494	7.7395	7.8243	7.8465
Mode 4	-	-	-	8.6091	10.0203	10.6945	10.9152	10.9751
Mode 5	-	-	-	10.2209	12.3360	13.5299	13.9688	14.0938
Mode 6	-	-	-	11.6239	14.4274	16.2343	16.9769	17.2000
Mode 7	-	-	-	-	16.3289	18.8048	19.9326	20.2912

G - G	$\delta = 2$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 16$	$\delta = 32$	$\delta = 64$	$\delta = 128$	$\delta = 256$
Mode 1	-	2.3614	2.8021	3.0320	3.1118	3.1340	3.1397	3.1411
Mode 2	-	-	4.7228	5.6042	6.0640	6.2236	6.2679	6.2794
Mode 3	-	-	-	7.6999	8.7681	9.2308	9.3738	9.4119
Mode 4	-	-	-	9.4456	11.2084	12.1281	12.4472	12.5359
Mode 5	-	-	-	10.9445	13.4076	14.8988	15.4790	15.6487
Mode 6	-	-	-	-	15.3998	17.5362	18.4617	18.7476
Mode 7	-	-	-	-	17.2183	20.0406	21.3890	21.8303





---

## RÉSUMÉ

---

Une méthodologie générale de simplification de modèles éléments finis de structures à comportement de poutre est proposée dans ce mémoire. Elle concerne les structures mécaniques constituées de composants qui présentent un comportement dynamique global de poutre dans le domaine fréquentiel d'utilisation. C'est en particulier le cas des véhicules automobiles, dont l'ossature comporte des corps creux et des profilés modélisés finement par des éléments finis de type coque. Le principe de simplification mis en œuvre consiste à remplacer le maillage fin de ces sous-structures par un modèle « équivalent » constitué d'éléments finis de poutre adéquats, réduisant ainsi de manière

drastique la taille du modèle sans dégradation significative de sa précision. On propose une méthode originale permettant d'identifier de manière automatique tous les paramètres physiques à introduire dans le modèle équivalent, basé sur la formulation de Timoshenko et prenant en compte le couplage dynamique flexion-torsion. Les nombreux tests numériques présentés mettent en évidence les performances et la fiabilité de la stratégie élaborée. Son adaptation à des structures industrielles de forme complexe, ainsi que l'efficacité du logiciel d'application développé à cet effet, sont illustrées dans ce mémoire.

**Mots clés :** Dynamique des structures, Poutre de Timoshenko, Éléments finis, Condensation, Identification paramétrique, Modèle équivalent.

---

## ABSTRACT

---

A general methodology for simplifying finite element models of structures having a beam-like behaviour is proposed in this study. It concerns mechanical structures composed of components that have a beam-like global dynamical behaviour in a given frequency domain. This is especially the case for automotive vehicles, whose frame consists of hollow girders finely meshed with shell finite elements. The implemented principle of simplification consists in replacing the refined mesh of these sub-structures with an « equivalent » model of appropriate beam elements, thus drastically reducing the size of the model while preserving its accuracy.

An original method is proposed which allows the set of physical parameters to be introduced in the equivalent model to be identified automatically. This model is based on the Timoshenko formulation and it takes into account the dynamical coupling between bending and torsion. The many numerical test cases that are presented demonstrate the performance and the reliability of the elaborated strategy. Its adaptation to industrial structures of complex shape, as well as the efficiency of the developed application software, are illustrated in this study.

**Key words :** Structural dynamics, Timoshenko beam, Finite elements, Condensation, Parametric identification, Equivalent model.

---

**Université de Franche-Comté \* U.F.R. des Sciences et Techniques**

Laboratoire de Mécanique Appliquée R. Chaléat UMR 6604  
24, Chemin de l'Épitaphe 25030 Besançon Cedex