



**HAL**  
open science

# Etude d'effets relativistes en champ gravitationnel fort

Frédéric Vincent

► **To cite this version:**

Frédéric Vincent. Etude d'effets relativistes en champ gravitationnel fort. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 2011. Français. NNT: . tel-00624816

**HAL Id: tel-00624816**

**<https://theses.hal.science/tel-00624816>**

Submitted on 19 Sep 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

OBSERVATOIRE DE PARIS

École doctorale Astronomie et Astrophysique d'Île de France (ED 127)

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité

ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE

---

ÉTUDE D'EFFETS RELATIVISTES  
EN CHAMP GRAVITATIONNEL FORT

SIMULATIONS D'OBSERVATIONS DU CENTRE GALACTIQUE  
PAR L'INSTRUMENT GRAVITY

par

FRÉDÉRIC VINCENT

---

Thèse dirigée par Guy PERRIN  
et Eric GOURGOULHON

Soutenue publiquement

le 8 juillet 2011

à l'Observatoire de Meudon

devant le jury composé de :

Didier PELAT	Président du jury
Denis MOURARD	Rapporteur
Clifford M. WILL	Rapporteur
Stefan GILLESSEN	Examineur
Alain RIAZUELO	Examineur
Michel TAGGER	Examineur
Guy PERRIN	Directeur de thèse
Eric GOURGOULHON	Co-directeur de thèse
Thibaut PAUMARD	Invité



# Remerciements

Je tiens à remercier très chaleureusement mes trois encadrants, Guy Perrin, Éricourgoulhon et Thibaut Paumard. Ils ont su tout à la fois m'aiguiller, me conseiller et me laisser la liberté nécessaire à tout travail de recherche au cours de ces trois années. Leur soutien et leur profonde connaissance des domaines que j'ai été amené à étudier ont été pour beaucoup dans le déroulement de ma thèse.

Je remercie les membres de mon jury, Didier Pelat, Denis Mourard, Clifford M. Will, Stefan Gillessen, Alain Riazuelo et Michel Tagger pour avoir accepté d'être présents à ma soutenance et pour leur lecture attentive de mes travaux.

Je suis également reconnaissant à la Région Île de France pour avoir accepté de financer mes travaux de thèse.

C'est un plaisir de remercier toutes les personnes avec qui j'ai été amené à collaborer au cours de ma thèse. Je remercie en particulier Frank Eisenhower et Stefan Gillessen dont les conseils et le soutien ont toujours été précieux. Un grand merci à Laurent Mugnier pour le temps qu'il m'a consacré au début de ma thèse. Je remercie également Odele Straub, Marek Abramowicz, Héloïse Méheut et Jérôme Novak. J'espère que ces collaborations continueront dans l'avenir.

Un très grand merci aux occupants des bâtiments 5 et 6 du LESIA et aux membres de l'équipe de relativité numérique du LUTH : travailler en leur compagnie a toujours été un plaisir. Un merci particulier revient aux étudiants de mes deux équipes pour leur présence revigorante, et tous mes encouragements à ceux qui finissent leur thèse, en particulier Alex et Michaël avec qui j'ai partagé les affres des derniers mois.

Je tiens également à remercier tous les ITA de l'Observatoire de Meudon qui rendent possible le travail de recherche au quotidien : informaticiens, administratifs, bibliothécaires, ... ils ont tous été nécessaires au bon déroulement de ma thèse.

Un merci très chaleureux revient à Elisabeth Vangioni de l'Institut d'Astrophysique de Paris pour m'avoir guidé lors de mes premiers pas en astro, ainsi qu'à Jean-Philippe Uzan, Frédéric Daigne, Yannick Mellier et Patrick Boissé.

Ces années passées à l'Observatoire ont également été très riches en amitiés nouvelles. Il me faudrait probablement plusieurs pages pour décrire tout ce que je dois à Rhita : je me contenterai ici d'un merci particulièrement chaleureux. C'est une joie de remercier également Sophie, Seb et João pour les innombrables moments d'anthologie partagés. Un très grand merci à Cécile et Fabrice ainsi qu'à Julien et Denis. Merci beaucoup enfin à Odele et Michal pour tous les moments passés à étudier la composition chimique des shots varsoviens.

Les vraies amitiés étant celles qui durent, c'est un plaisir pour moi de remercier mes amis d'enfance, Grégoire, Guillaume, François, Thomas, Simon. Un merci particulier à Noémie pour sa grande maîtrise du Grec et des textes antiques.

Je tiens à remercier très chaleureusement ma famille, sur le soutien de laquelle j'ai toujours pu compter. Un très grand merci revient à mes parents et à mon frère : leur présence attentive m'a toujours accompagné et m'a servi de port d'attache au cours de ma vie.

Ma dernière pensée sera pour Elsa sans qui tout le reste ne ferait pas beaucoup de sens.



# Simulations d'observations en champ gravitationnel fort

## Résumé

Le centre de la Galaxie constitue un laboratoire idéal pour mettre à l'épreuve les prédictions de la relativité générale. Le trou noir supermassif qui y siège possède le rayon de Schwarzschild ayant la plus grande taille angulaire sur le ciel ( $10 \mu\text{as}$ ). C'est donc un candidat de choix pour observer avec une grande précision les phénomènes relativistes qui se déroulent dans son environnement immédiat.

La première partie de ma thèse a consisté à étudier la précision astrométrique de l'instrument de deuxième génération du VLTI, GRAVITY. Ce recombinateur de faisceau qui sera installé à Paranal en 2014 est conçu pour atteindre une précision astrométrique de l'ordre de  $10 \mu\text{as}$ . Afin de vérifier si ce but pourra être atteint, j'ai utilisé un programme de simulation de l'instrument pour déterminer de façon réaliste l'erreur astrométrique commise, en prenant en compte les caractéristiques réelles de GRAVITY. J'ai pu ainsi montrer que l'instrument était capable d'atteindre son objectif pour des sources suffisamment brillantes, ainsi que de mettre en évidence le mouvement d'objets à proximité immédiate du trou noir.

J'ai ensuite développé un code de calcul d'orbites relativistes, GYOTO, permettant de calculer les images et les spectres d'objets situés à proximité d'un trou noir. Différents objets sont à l'heure actuelle implémentés dans le code. On peut citer en particulier le disque mince d'accrétion, le tore d'accrétion, ou l'étoile en orbite autour du trou noir. GYOTO permet également de réaliser des calculs de transfert radiatif au sein de l'objet considéré, ce qui permet de prendre en compte la physique interne des structures d'accrétion. Signalons que GYOTO sera rendu public dans un proche avenir.

J'ai pu alors utiliser GYOTO pour calculer la silhouette et le spectre d'un tore d'accrétion entourant le trou noir central de la Galaxie, en prenant en compte l'émission synchrotron générée par cette structure. L'intérêt de ce genre de simulation est de contraindre les paramètres du trou noir et du tore d'accrétion en ajustant les spectres modélisés aux données observées. J'ai également simulé grâce à GYOTO l'évolution d'une sphère de gaz chauffée en orbite très serrée autour du trou noir. Ce schéma constitue un modèle prometteur pour les phénomènes de sursauts de rayonnement qui sont régulièrement observés aux abords du trou noir central. Il a alors été possible de simuler de façon réaliste une observation par GRAVITY de ce phénomène, et de déterminer les contraintes que l'instrument permettra d'apporter sur ce modèle, et sur le paramètre d'inclinaison du trou noir.

Je me suis également intéressé à la possibilité de modéliser des objets compacts alternatifs afin de tester le paradigme du trou noir au centre de la Galaxie. Afin de pouvoir prendre en compte de tels objets, il a fallu permettre à GYOTO d'intégrer des orbites de particules dans des métriques non standards calculées numériquement, dans le formalisme  $3+1$  de la relativité générale. Cette capacité de GYOTO à prendre en compte des métriques non standards en fait un code unique parmi les algorithmes de calcul d'orbites existant dans la littérature.

Je me suis alors intéressé à fournir quelques perspectives d'utilisation de GYOTO en métriques numériques. L'implémentation d'un objet gravastar au sein de la bibliothèque LORENE n'ayant pas abouti, je me suis intéressé à représenter les images observées d'une étoile à neutrons en effondrement, à différents stades de son évolution. Ce genre de calculs pourra permettre dans l'avenir de calculer numériquement les contreparties électromagnétiques de phénomènes en champ gravitationnel fort, telle que l'émission de rayonnement à proximité d'un système d'étoiles à neutrons en coalescence.



# Simulating observations in strong gravitational fields

## Abstract

The Galactic center is an ideal laboratory to put to the test general relativistic predictions. The supermassive black hole lying there has the biggest angular Schwarzschild radius ( $10 \mu\text{as}$ ): its environment is thus a perfect candidate for the observation of strong relativistic phenomena.

My first interest was to study the astrometric precision of the second generation VLTI instrument named GRAVITY. This beam combiner, which will take place in Paranal in 2014, was conceived in order to reach an astrometric precision of  $10 \mu\text{as}$ . In order to check whether this goal is possible to achieve, I have used a programme simulating the instrument that allows to compute precisely the astrometric error that will affect the observed signal, taking into account the actual performance of GRAVITY. I came to the conclusion that the instrument is capable of reaching its goal, provided the observed point like source is bright enough. I was also able to show that GRAVITY can distinguish between a moving and a motionless source at a few Schwarzschild radii from the black hole.

I then developed a new general relativistic ray-tracing code, GYOTO, allowing the computation of images and spectra of objects lying close to a black hole. A few astrophysical objects are implemented at the time being: a thin accretion disk, an accretion torus, a star orbiting around the black hole, for instance. GYOTO is also capable of integrating the radiative transfer equation inside optically thin objects. Let us highlight the fact that GYOTO will be made public in the near future.

I was then able to use GYOTO in order to compute the silhouette and the spectrum of an accretion torus surrounding Sgr A\*, emitting synchrotron radiation. The interest of such simulations is to constrain the black hole's parameters by fitting the theoretical model to observed data. I also computed the evolution of a blob of gas orbiting very close to the black hole's radius. This scenery can account for the radiation flares observed in the vicinity of the Galactic center. I performed realistic simulations of a GRAVITY observation of such a phenomenon, that allowed me to determine to what level GRAVITY could constrain this flare model, as well as the inclination of the black hole.

I am also interested in the possibility to simulate observations of alternative compact objects at the Galactic center, in order to test the black hole paradigm. In this perspective, I developed a specific way of integrating geodesics with GYOTO, in the framework of the 3+1 formalism of general relativity. This formalism allows GYOTO to take into account non-standard metrics, computed numerically. This is a specific feature of GYOTO, that was not developed by other ray-tracing algorithm in the literature.

The last part of my work was to give some perspectives of the use of GYOTO in numerically computed metrics. After having unsuccessfully tried to implement a gravastar metric inside the LORENE library, I developed the integration of null geodesics in the non-stationary spacetime of a collapsing neutron star. I computed images of such a neutron star, at different stages of its evolution. This kind of simulation could allow in the future to compute the electromagnetic counterpart of strong gravity phenomena, such as radiation emission in the vicinity of coalescing neutron stars.





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>I Contexte</b>	<b>19</b>
<b>1 Mouvement géodésique à proximité d'un trou noir</b>	<b>23</b>
1.1 Trou noir . . . . .	23
1.1.1 Gravitation et géométrie . . . . .	23
1.1.2 Solution de Schwarzschild . . . . .	24
1.1.3 L'espacetemps de Kerr . . . . .	26
1.1.4 Théorème d'absence de chevelure . . . . .	27
1.2 Orbites en métrique de Kerr . . . . .	28
1.2.1 Équation des géodésiques . . . . .	28
1.2.2 Quelques aspects des orbites relativistes . . . . .	31
<b>2 Notions d'interférométrie</b>	<b>39</b>
2.1 Imagerie et interférométrie . . . . .	39
2.1.1 Composantes de Fourier d'une image . . . . .	39
2.1.2 Imagerie, diffraction et interférométrie . . . . .	42
2.2 Interférométrie à plusieurs télescopes . . . . .	42
2.2.1 Fonction de cohérence, fonction de visibilité . . . . .	42
2.2.2 Fonction de transfert et PSF . . . . .	44
2.2.3 Résolution et précision astrométrique . . . . .	46
2.2.4 Difficultés liées à la mesure de la phase . . . . .	47
<b>3 Le trou noir au centre de la Galaxie</b>	<b>49</b>
3.1 Un bref aperçu du parsec central de la Galaxie . . . . .	49
3.1.1 Les principales structures . . . . .	49
3.1.2 L'amas nucléaire . . . . .	50
3.2 Sagittarius A* . . . . .	53
3.2.1 Un trou noir au centre de la Galaxie? . . . . .	53
3.2.2 Alternatives au trou noir . . . . .	54
3.3 Spectre d'émission, disque d'accrétion . . . . .	58
3.3.1 Spectre d'émission . . . . .	58

3.3.2	Structure d'accrétion . . . . .	59
<b>4</b>	<b>L'instrument GRAVITY</b>	<b>61</b>
4.1	Description succincte de l'instrument . . . . .	61
4.1.1	Concept instrumental . . . . .	61
4.1.2	Performances visées pour l'instrument . . . . .	64
4.2	Les cas scientifiques de GRAVITY . . . . .	64
4.2.1	Le centre galactique . . . . .	64
4.2.2	Autres cas scientifiques de l'instrument . . . . .	65
<b>II</b>	<b>Performance astrométrique de l'instrument GRAVITY</b>	<b>67</b>
<b>5</b>	<b>Astrométrie en mode imageur</b>	<b>71</b>
5.1	Mesure astrométrique en interférométrie . . . . .	71
5.1.1	Méthode classique . . . . .	71
5.1.2	Intérêt du mode imageur . . . . .	73
5.2	Simulation du bruit instrumental induit par GRAVITY . . . . .	74
5.2.1	Bruit de détection . . . . .	75
5.2.2	Fluctuations du rapport de Strehl . . . . .	75
5.2.3	Bruits sur la visibilité complexe . . . . .	76
5.3	Simulation des données observationnelles . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Précision astrométrique de GRAVITY</b>	<b>83</b>
6.1	Observation de sources ponctuelles fixes . . . . .	83
6.1.1	Commentaires généraux sur les résultats astrométriques . . . . .	86
6.1.2	Résultats pour une étoile . . . . .	88
6.1.3	Résultats pour deux étoiles . . . . .	89
6.1.4	Résultats pour trois étoiles . . . . .	89
6.2	Observation d'une source ponctuelle variable . . . . .	90
6.2.1	Simulations réalisées . . . . .	91
6.2.2	Mise en évidence du mouvement du point chaud . . . . .	92
<b>III</b>	<b>GYOTO, un code de calcul d'orbite en relativité générale</b>	<b>97</b>
<b>7</b>	<b>GYOTO en métrique de Kerr</b>	<b>101</b>
7.1	Méthode d'intégration des géodésiques . . . . .	101
7.1.1	Équation des géodésiques utilisée . . . . .	101
7.1.2	Déroulement de l'intégration . . . . .	105
7.2	Transfert radiatif . . . . .	113
7.3	Calcul de spectres . . . . .	115
7.3.1	Spectre d'objets optiquement épais . . . . .	115
7.3.2	Spectre d'objets optiquement minces . . . . .	117

7.4	Objets astrophysiques implémentés . . . . .	118
7.4.1	Étoile en orbite . . . . .	118
7.4.2	Disque mince . . . . .	118
7.4.3	Disque avec instabilité de Rossby . . . . .	119
7.4.4	Tore d'accrétion ( <i>polish doughnut</i> ) . . . . .	120
<b>8</b>	<b>Calcul d'orbite dans des métriques numériques</b>	<b>123</b>
8.1	Le formalisme 3+1 . . . . .	123
8.1.1	Le formalisme et son application à GYOTO . . . . .	123
8.1.2	Aperçu des fondements théoriques . . . . .	125
8.2	Équation des géodésiques en formalisme 3+1 . . . . .	128
8.2.1	Intérêt d'une équation des géodésiques en 3+1 . . . . .	128
8.2.2	Dérivation . . . . .	128
8.3	Étoile relativiste en rotation . . . . .	131
8.3.1	Étoile relativiste en rotation . . . . .	131
8.3.2	Équation des géodésiques pour un espace-temps axisymétrique stationnaire . . . . .	132
8.3.3	Application à la métrique d'une étoile relativiste en rotation . . . . .	133
<b>IV</b>	<b>Simulations d'observations pour contraindre l'objet compact au centre de la Galaxie</b>	<b>135</b>
<b>9</b>	<b>Tore d'accrétion autour de Sgr A*</b>	<b>139</b>
9.1	Le modèle du <i>polish doughnut</i> . . . . .	139
9.1.1	Motivations physiques . . . . .	139
9.1.2	Le <i>polish doughnut</i> : développements théoriques . . . . .	141
9.1.3	Processus radiatifs au sein du tore ionisé . . . . .	145
9.2	Simulations d'observation . . . . .	149
9.2.1	Modélisation de l'image d'un tore ionisé . . . . .	149
9.2.2	Modélisation du spectre émis par un tore ionisé . . . . .	149
<b>10</b>	<b>Sursaut de rayonnement aux abords de Sgr A*</b>	<b>153</b>
10.1	Un trou noir qui sursaute . . . . .	153
10.1.1	Les sursauts de rayonnement de Sgr A* . . . . .	153
10.1.2	Origine des sursauts . . . . .	155
10.2	Le modèle du point chaud . . . . .	158
10.2.1	La physique sous-jacente . . . . .	158
10.2.2	Des périodes mesurées au spin du trou noir . . . . .	159
10.3	Simulations d'un point chaud en orbite autour de Sgr A* . . . . .	160
10.3.1	Modélisation d'un point chaud par GYOTO . . . . .	160
10.3.2	Simulations de courbes de lumière et de trajectoires de centroïde . . . . .	162

10.3.3	Allure de la courbe de lumière et de la trajectoire du centroïde en fonction des paramètres du point chaud . . . . .	164
10.4	Simulations d'observations par GRAVITY . . . . .	167
10.4.1	Cadre de l'analyse . . . . .	167
10.4.2	Observations simulées . . . . .	167
10.4.3	Mise en évidence du mouvement du point chaud en fonction de l'inclinaison . . . . .	169
<b>V Perspectives d'application de GYOTO dans des métriques non analytiques</b>		<b>181</b>
<b>11</b>	<b>Le gravastar</b>	<b>185</b>
11.1	Le gravastar dans la littérature . . . . .	185
11.1.1	Une approche intuitive du gravastar . . . . .	185
11.1.2	Les modèles de gravastar . . . . .	187
11.1.3	Vers des contraintes observationnelles? . . . . .	189
11.2	Implémentation du gravastar dans LORENE . . . . .	190
11.2.1	L'objet gravastar dans LORENE . . . . .	190
11.2.2	Difficultés rencontrées et orientations de travail futur . . . . .	193
<b>12</b>	<b>Effondrement d'une étoile à neutrons</b>	<b>197</b>
12.1	Espacetemps dynamique . . . . .	197
12.2	Calculs d'effondrement : le code CoCoNuT . . . . .	198
12.3	Visualisation GYOTO . . . . .	199
12.3.1	Déroulement de l'intégration des photons . . . . .	199
12.3.2	Visualisation de l'étoile en effondrement . . . . .	200
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>205</b>
<b>Annexe</b>		<b>211</b>

# Introduction



La relativité générale est la description la plus satisfaisante dont on dispose à l'heure actuelle pour rendre compte de l'une des quatre interactions fondamentales : la gravitation. La compréhension la plus fine possible de cette interaction est nécessaire pour obtenir une représentation valable des phénomènes à toutes les échelles astrophysiques. Bien que très bien vérifiée par les différents tests menés à l'échelle du système solaire, la relativité générale est peu contrainte dans son domaine d'application le plus extrême : les environnements à champ gravitationnel fort tels que les abords des objets les plus compacts que sont les trous noirs.

Cette thèse s'intéresse à la simulation d'effets relativistes en champ gravitationnel fort. Il s'agit de rendre compte le plus précisément possible des phénomènes extrêmes auxquels la matière est soumise à proximité d'un trou noir supermassif, et de déterminer les effets observables pour un observateur lointain.

Ce genre de calcul ne peut être mené qu'en utilisant un code numérique permettant de déterminer la trajectoire des photons et des particules de matière au voisinage de l'objet compact et au cours de la propagation du rayonnement jusqu'à l'observateur. Le développement d'un tel code, nommé GYOTO (General relativitY Orbit Tracer of Observatoire de Paris), est le premier objectif de ma thèse.

La mise en évidence d'effets relativistes en champ fort nécessite également des moyens d'observation développés spécifiquement dans cette perspective. Les détecteurs d'ondes gravitationnelles, développés depuis plusieurs décennies, sont un exemple de tels instruments. En se souvenant que ces détecteurs font appel à l'interférométrie, on ne sera pas étonné qu'un nouvel instrument candidat à la détection d'effets relativistes en champ fort soit également un interféromètre : il s'agit de l'instrument GRAVITY, recombineur de faisceaux qui sera installé au *Very Large Telescope* à Paranal en 2014.

Le deuxième objectif de cette thèse est d'étudier la capacité de GRAVITY à réaliser ses objectifs en observant le voisinage du trou noir supermassif situé au centre de notre Galaxie, Sagittarius A\* (Sgr A\*). L'instrument devra sonder l'espace-temps aux abords de l'objet compact central en suivant avec une précision suffisante le mouvement des sources lumineuses évoluant au plus près du trou noir.

La détermination de cette précision astrométrique, en fonction du champ de vue observé, sera étudiée. On souhaite vérifier si l'objectif de GRAVITY d'atteindre une précision astrométrique de  $10 \mu\text{as}$ , correspondant à la taille angulaire de l'horizon des événements de Sgr A\*, est réalisable.

La source lumineuse la plus prometteuse dans la perspective d'un test de la relativité générale en champ fort est celle qui donne lieu aux sursauts de rayonnement qui affectent régulièrement le centre galactique. Dans le cadre de l'un des modèles proposés pour rendre compte de ce phénomène, cette source est constituée d'un amas de gaz en orbite très serrée autour du trou noir central, à une distance de quelques fois la taille de son horizon des événements. Si proche de l'objet compact central, la dynamique de cet amas de gaz constitue une sonde idéale des propriétés de l'espace-temps dans sa région la plus relativiste.

On souhaite donc étudier les caractéristiques observationnelles impliquées par ce modèle de sursaut. Pour ce faire, on déterminera la précision avec laquelle GRAVITY sera capable de suivre l'évolution d'une source variable située à une distance de quelques fois la



taille de l'horizon des événements de Sgr A\*. Il s'agira également de simuler au moyen du code GYOTO la courbe de lumière et la trajectoire sur le ciel associées à l'évolution d'un tel sursaut, afin de permettre de simuler de façon très réaliste l'acquisition des données observationnelles par GRAVITY. On pourra alors se demander si l'instrument aura une précision astrométrique suffisante pour mettre en évidence le mouvement de cet amas de gaz en orbite autour de Sgr A\*. Si tel est le cas, on étudiera dans quelle mesure ce type d'observation permettra de contraindre l'objet compact central.

En s'écartant un peu des environs immédiats de l'horizon du trou noir central, on peut s'intéresser à la structure d'accrétion qui est susceptible de l'entourer. J'ai donc envisagé que Sgr A\* puisse être entouré d'un tore ionisé d'accrétion, structure dérivée de la classe des *polish doughnuts* proposée à la fin des années 70 comme un modèle analytique de structure d'accrétion géométriquement épaisse et optiquement mince. Je me suis intéressé à simuler l'allure du spectre émis par cet objet rayonnant en synchrotron. Pour ce faire, il a fallu rendre GYOTO capable de tenir compte du transfert radiatif au cours de l'intégration des photons au sein de l'objet émetteur. L'objectif de cette étude est de déterminer si le tore ionisé est un candidat digne de considération pour modéliser la structure d'accrétion entourant Sgr A\*, et de déterminer l'impact des paramètres décrivant le trou noir sur l'allure du spectre observé.

Bien que l'existence des trous noirs soit admise par la grande majorité de la communauté, il est important de garder à l'esprit qu'il n'existe aucune preuve irréfutable que l'objet compact qui est mis en évidence par les observations du centre galactique est effectivement un trou noir. Il existe quelques objets alternatifs susceptibles de rendre compte des effets observés, tels que le gravastar et l'étoile bosonique. Dans cette perspective, GYOTO a été développé pour permettre l'intégration des particules massives et des photons dans des métriques différentes de celle de Kerr, décrivant les trous noirs de la relativité générale. GYOTO est en effet capable de calculer des trajectoires de particules dans des métriques non analytiques calculées numériquement dans le cadre du formalisme 3+1 de la relativité générale, formalisme utilisé par la communauté de la relativité numérique.

Je me suis donc proposé de dériver l'équation du mouvement de particules soumises à la gravitation dans ce formalisme afin de pouvoir mener à bien des simulations dans des métriques alternatives à celle de Kerr. Je me suis alors intéressé à calculer numériquement la métrique d'un gravastar en formalisme 3+1 en utilisant la bibliothèque LORENE développée par l'équipe de relativité numérique du LUTH. Cette étude n'ayant pas abouti, j'ai étudié un exemple d'utilisation de GYOTO en métrique numérique en calculant l'évolution de l'image d'une étoile à neutrons s'effondrant en trou noir. Ce genre de simulation, dont on ne trouvera ici qu'une présentation préliminaire, sera susceptible de conduire à des résultats astrophysiques intéressants dans un avenir proche dans le cadre de la modélisation d'émission de rayonnement au voisinage d'étoiles à neutrons en coalescence.

Dans la perspective de traiter les différents thèmes présentés dans cette introduction, le plan de ce manuscrit est le suivant.

La partie I s'attachera à présenter le contexte dans lequel se place mon travail : on y trouvera rappelées quelques notions fondamentales concernant la physique des trous noirs, quelques caractéristiques des trajectoires de particules évoluant dans leur voisinage,

quelques notions fondamentales d'interférométrie, ainsi qu'une présentation succincte du centre galactique et de l'instrument GRAVITY.

La partie II traitera de la précision astrométrique de l'instrument GRAVITY lorsque son champ de vue est constitué de sources ponctuelles fixes ou d'une source unique variable.

La partie III présente en détail le code de calcul d'orbites GYOTO.

La partie IV décrit des simulations effectuées par GYOTO de spectres émis par un tore ionisé entourant le trou noir central Sgr A\*. Cette partie étudie également des simulations d'observation de sursauts de rayonnement qui utilisent le code GYOTO et l'analyse précédente de la précision astrométrique de GRAVITY.

La partie V propose des perspectives d'utilisation de GYOTO dans des métriques non analytiques en étudiant l'implémentation d'un gravastar dans la bibliothèque LORENE et la visualisation de l'effondrement d'une étoile à neutrons en trou noir.



# Première partie

## Contexte



# Introduction

On souhaite présenter ici de façon succincte les principaux concepts physiques qui seront utilisés dans toute la suite de ce manuscrit.

La théorie de la relativité générale induit l'existence d'objets extrêmement compacts, au sens où leur paramètre de compacité, qui s'exprime en fonction de leur masse  $M$  et de leur taille caractéristique  $r$  selon  $\Xi = G M / r c^2$ , est égal à 1<sup>1</sup>. Les objets les plus compacts, pour lesquels le paramètre de compacité est de l'ordre de 1, ne peuvent être compris que dans le cadre de la relativité générale. Pour des objets classiques tels que la Terre ou le Soleil, le paramètre de compacité vaut  $10^{-10}$  et  $10^{-6}$  et la relativité générale n'apporte qu'une petite correction à l'excellente description newtonienne<sup>2</sup>.

Le chapitre 1 présente le cadre théorique permettant l'étude des objets les plus compacts : les trous noirs. Après de brefs rappels concernant les bases de la relativité générale, on s'intéressera à décrire l'espace-temps d'un trou noir, et à présenter les principales caractéristiques des trajectoires de particules dans son voisinage. Ces notions seront largement utilisées par la suite lorsqu'il s'agira de développer un code de calcul de trajectoires de particules (voir la partie III).

Bien qu'abondamment mise à l'épreuve à l'échelle du système solaire (et toujours parfaitement vérifiée), la théorie de la relativité générale n'est que peu contrainte en champ gravitationnel très intense, c'est-à-dire à proximité des objets les plus compacts tels que les étoiles à neutrons et les trous noirs (pour une revue des tests de la relativité générale, voir Will 1993, 2006; Psaltis 2008; Will 2009).

L'une des perspectives prometteuses permettant de tester la relativité générale en champ gravitationnel fort est d'utiliser la très haute résolution angulaire permise par l'utilisation d'interféromètres. C'est dans cette perspective que le chapitre 2 rappelle quelques notions élémentaires de la théorie de l'interférométrie.

Des contraintes portant sur la taille de la silhouette du trou noir central de notre Galaxie, Sagittarius A\* (Sgr A\*), ont déjà été obtenues en utilisant l'interférométrie à très longues lignes de base (Doeleman *et al.* 2008). Le sondage d'événements dynamiques ayant lieu dans le voisinage immédiat de l'horizon des événements de Sgr A\* sera rendu possible

---

1. Ce qui n'implique pas forcément que ces objets soient très denses, comme on le comprend dans la discussion de Gourgoulhon (2010c).

2. Rappelons tout de même que pour des applications nécessitant une précision particulièrement fine, telles que les mesures GPS, l'utilisation de la relativité générale est nécessaire.

dans un futur très proche par l'instrument de deuxième génération de l'interféromètre du *Very Large Telescope*, GRAVITY.

Les chapitres 3 et 4 présentent brièvement l'extrême centre galactique (compris comme les environs immédiats du trou noir central) et les principales caractéristiques de l'instrument GRAVITY.

# Chapitre 1

## Mouvement géodésique à proximité d'un trou noir

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Trou noir</b>	<b>23</b>
1.1.1	Gravitation et géométrie	23
1.1.2	Solution de Schwarzschild	24
1.1.3	L'espacetemps de Kerr	26
1.1.4	Théorème d'absence de chevelure	27
<b>1.2</b>	<b>Orbites en métrique de Kerr</b>	<b>28</b>
1.2.1	Équation des géodésiques	28
1.2.2	Quelques aspects des orbites relativistes	31

---

## 1.1 Trou noir

### 1.1.1 Gravitation et géométrie

En novembre 1915, Einstein publie un article qui va révolutionner la façon de concevoir la gravitation. Dans ce nouveau formalisme, une particule test placée dans un champ de gravitation ne se déplace plus parce qu'elle serait soumise à une force gravitationnelle, comme c'était le cas dans le formalisme newtonien. Son mouvement est dicté par la géométrie de l'espacetemps, cette géométrie étant elle-même imposée par le contenu en matière-énergie de l'espacetemps.

Toute l'information sur la géométrie d'un espacetime est contenue dans l'outil mathématique qui permet de déterminer la distance entre deux points infiniment voisins, la métrique. Un système de coordonnées  $x^\mu$  étant choisi, on peut exprimer la métrique dans ce système de coordonnées selon :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.1}$$



où les  $g_{\mu\nu}$  sont les coefficients métriques, contenant toute l'information sur la géométrie, et où  $ds^2$  représente l'élément de longueur entre deux points séparés par le vecteur infinitésimal  $d\mathbf{P} = dx^\mu \mathbf{e}_\mu$  dans la base naturelle associée aux coordonnées  $\mathbf{e}_\mu$ . On a utilisé dans l'Eq. 1.1 la convention de sommation d'Einstein : on somme implicitement sur les indices répétés.

Les équations d'Einstein permettent de déterminer la métrique de l'espacetemps à partir de son contenu en matière-énergie. Elles s'expriment en notation tensorielle<sup>1</sup> selon :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

Dans cette équation, le terme de droite  $T_{\mu\nu}$  est appelé tenseur énergie-impulsion, il représente le contenu en matière-énergie de l'espacetemps. Le terme de gauche contient des quantités géométriques. On y retrouve les coefficients métriques  $g_{\mu\nu}$ , mais aussi le tenseur de Ricci  $R_{\mu\nu}$  qui dérive lui-même d'un tenseur de rang plus élevé, le tenseur de Riemann  $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$  qui contient toute l'information sur la courbure de l'espacetemps. Le scalaire  $R$  est appelé scalaire de courbure et dérive du tenseur de Ricci.

Dans l'équation précédente, on s'est placé dans un système d'unité dans lequel la constante de gravitation  $G$  et la vitesse de la lumière  $c$  valent 1. On continuera d'utiliser cette convention dans tout ce document, sauf mention contraire. Remarquons qu'avec cette convention, une longueur est homogène à un temps, tous deux homogènes à une masse.

### 1.1.2 Solution de Schwarzschild

La première solution exacte des équations d'Einstein fut établie par Karl Schwarzschild dans une lettre à Einstein du 22 décembre 1915<sup>2</sup>. Il s'agit d'une solution du vide, c'est-à-dire que le tenseur énergie-impulsion est pris nul. De plus, l'espacetemps est supposé statique et à symétrie sphérique<sup>3</sup>. La métrique suivante, exprimée dans le système de coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi)$  dit de Schwarzschild, est alors solution des équations d'Einstein<sup>4</sup> :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1.3)$$

où  $M$  est une constante qui apparaît au cours de la dérivation de la métrique de Schwarzschild et est homogène à une masse.

On remarque que la métrique de Schwarzschild est singulière en  $r = 0$  et en  $r = 2M$ . La première singularité ne peut être évitée en se plaçant dans un autre système de coordonnées. En effet on peut montrer que le scalaire  $R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}$  obtenu en contractant complètement le tenseur de Riemann vaut :

- 
1. Pour une introduction à la notion de tenseur, voir Gourgoulhon (2010c)
  2. soit moins d'un mois après la publication originale, et alors que Schwarzschild était engagé sur le front russe, où il mourra peu après
  3. On trouvera une définition précise de ces termes dans Gourgoulhon (2010c)
  4. On en trouvera une dérivation dans, par exemple, Gourgoulhon (2010c)

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{48 M^2}{r^6}. \quad (1.4)$$

Ce scalaire diverge donc en  $r = 0$ , et ce sera également le cas dans n'importe quel autre système de coordonnées (puisque la valeur d'un champ scalaire en un point ne dépend pas du système de coordonnées). Le point  $r = 0$  est donc une vraie singularité, appelée singularité centrale.

Par contre, la singularité  $r = 2M$  n'est qu'une singularité de coordonnées liée à l'expression de la métrique dans le système de coordonnées particulier que forment les coordonnées de Schwarzschild. Il suffit d'exprimer la métrique dans un autre système de coordonnées pour s'en convaincre. Ainsi, en utilisant les coordonnées d'Eddington-Finkelstein entrantes  $(V, r, \theta, \varphi)$ , où  $V \equiv t + r + 2M \ln|r/2M - 1|$ , la métrique s'écrit :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dV^2 + 2 dV dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1.5)$$

On lit immédiatement sur cette expression que la métrique reste régulière en  $r = 2M$  (qui correspond bien à l'hypersurface  $r = 2M$  en coordonnées de Schwarzschild puisque la coordonnée  $r$  est la même dans les deux systèmes). Cependant, cette surface a une propriété très particulière. On peut en effet démontrer facilement (en utilisant encore les coordonnées d'Eddington-Finkelstein, cf Gourgoulhon 2010c) que la coordonnée  $r$  d'une particule (massive ou non) vérifiant  $r < 2M$  ne peut que décroître. Ainsi, une particule se trouvant à l'intérieur de la surface  $r = 2M$  ne peut pas rejoindre l'infini et est contrainte à se rapprocher de la singularité centrale. La surface  $r = 2M$  est donc unidirectionnelle : une particule (massive ou non) peut la traverser dans le sens des valeurs décroissantes de  $r$ , mais pas dans l'autre sens. La surface  $r = 2M$  est alors appelée horizon des événements.

On appelle trou noir de Schwarzschild cette solution du vide des équations d'Einstein. D'un point de vue astrophysicien, un trou noir est donc caractérisé par l'existence de son horizon des événements. La zone d'espace-temps comprise à l'intérieur de l'horizon des événements ne pouvant influencer la zone externe (en conséquence de la définition précédente), elle n'a aucune incidence sur l'information qu'un observateur éloigné peut espérer acquérir d'un trou noir.

Cette solution de Schwarzschild a une importance remarquable puisqu'elle constitue également l'unique solution aux équations d'Einstein à l'extérieur de tout corps à symétrie sphérique de masse  $M$ . Cette métrique n'est donc pas limitée à décrire les seuls trous noirs, elle est aussi valable à l'extérieur d'une étoile, d'une planète, ou de tout autre corps à symétrie sphérique. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Birkhoff.

Cependant, l'hypothèse de symétrie sphérique est extrêmement contraignante et limite fortement la possibilité d'appliquer la solution de Schwarzschild à des cas astrophysiques réels. La plupart des corps qui occupent l'univers sont en rotation, et perdent ainsi la symétrie sphérique. On peut penser aux étoiles en rotation rapide dont la surface n'a plus rien de sphérique. Il semble donc nécessaire pour d'éventuelles applications astrophysiques d'être doté d'une solution à symétrie axiale.

### 1.1.3 L'espacetemps de Kerr

Ce n'est qu'en 1963 qu'une solution exacte aux équations d'Einstein dans le vide en symétrie axiale fut établie par Roy Kerr (voir Kerr 1963). Cette solution est aujourd'hui usuellement exprimée dans les coordonnées de Boyer-Lindquist  $(t, r, \theta, \varphi)$  (voir Boyer & Lindquist 1967), bien que ce ne soit pas dans ce système de coordonnées que Kerr ait dérivé sa solution originale.

La métrique de Kerr en coordonnées de Boyer-Lindquist s'exprime selon :

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 \\ & + \Sigma d\theta^2 + \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) d\varphi^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

où  $M$  désigne la masse du trou noir et  $a$  son paramètre de spin, relié au moment cinétique du trou noir  $J$  selon<sup>5</sup>  $a = \frac{J}{M}$ . On définit également :

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2. \quad (1.7)$$

La métrique de Kerr est singulière en  $\Sigma = 0$ , soit en  $r = 0$  et  $\theta = \pi/2$ , et en  $\Delta = 0$ , soit en  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ .

La singularité  $\Sigma = 0$  est une vraie singularité qui ne dépend pas du système de coordonnées choisi. En effet, le scalaire  $R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}$  y diverge. C'est le prolongement de la singularité centrale de la solution de Schwarzschild. Cependant, la singularité centrale de Kerr n'est pas ponctuelle mais annulaire. On peut le voir en effectuant un changement de coordonnées vers les coordonnées  $(T, x, y, z)$  de Kerr-Schild dont la partie spatiale est reliée aux coordonnées de Boyer-Lindquist selon :

$$x + iy = (r + ia) e^{i \int (d\varphi + \frac{a dr}{\Delta})} \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (1.8)$$

On voit que le "point"  $r = 0$  en coordonnées de Boyer-Lindquist correspond dans ce nouveau système de coordonnées au disque :

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 \leq a^2. \quad (1.9)$$

La singularité  $r = 0$  et  $\theta = \pi/2$  correspond donc au cercle  $z = 0, x^2 + y^2 = a^2$  : on parle donc bien d'une singularité annulaire.

Les deux autres singularités sont des singularités de coordonnées.

La surface  $r = r_+$  est un horizon des événements : elle constitue le bord de la région de l'espacetemps permettant une liaison causale avec l'infini (c'est-à-dire permettant à des particules massives ou à des photons de rejoindre l'infini). On a donc affaire à une solution

---

5. Remarquons que ce paramètre de spin est homogène à une masse. On peut également définir un paramètre de spin adimensionné  $\bar{a} = J/M^2 = a/M$ .

de type trou noir, et on parlera désormais de trou noir de Kerr. Pour que  $r_+$  soit défini on impose :

$$0 \leq a \leq M. \quad (1.10)$$

Pour les solutions ayant  $a > M$ , l'horizon des événements n'existe pas, et on parle de singularité nue, notion qui ne sera pas étudiée ici.

La surface  $r = r_-$  est appelée horizon interne, et située donc sous l'horizon des événements. Elle marque une limite causale : il n'y a pas de brisure de la causalité pour  $r_- < r < r_+$ , au sens où le futur d'un événement ne peut pas influencer son passé, mais par contre pour  $r < r_-$ , il est possible pour une particule massive de repasser plusieurs fois par un même événement  $(t, r, \theta, \varphi)$  (ce qui est en contradiction claire avec la causalité). Gardant un point de vue astrophysique sur les trous noirs, on ne s'intéressera pas à la région de l'espace-temps de Kerr située à  $r < r_+$ . Pour une présentation exhaustive de la structure de l'espace-temps de Kerr, on pourra consulter Hawking & Ellis (1973).

L'horizon des événements du trou noir de Kerr a donc pour coordonnée radiale :

$$r_{\text{hor}} = M + \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (1.11)$$

On remarque que cette fonction décroît avec le paramètre de spin  $a$  : plus le spin du trou noir est important, plus l'horizon des événements se situe à une faible valeur de  $r$ . On remarque qu'on retrouve bien, pour un spin nul,  $r_{\text{hor}}(a = 0) = 2M$ , l'horizon des événements en métrique de Schwarzschild.

Une dernière surface importante de l'espace-temps de Kerr est l'ergosphère. Cette surface est définie par :

$$r_{\text{ergo}} = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (1.12)$$

On peut montrer facilement (Gourgoulhon 2010c) qu'une particule test ne peut rester statique par rapport à l'infini (c'est-à-dire, à  $(r, \theta, \varphi)$  fixés) lorsqu'elle se trouve à l'intérieur de l'ergosphère : elle est entraînée par la rotation du trou noir. On parle d'effet Lense-Thirring, du nom des physiciens autrichiens qui prédirent cet effet en 1918.

La Fig. 1.1 représente les différentes surfaces dont il a été question dans les précédents paragraphes.

#### 1.1.4 Théorème d'absence de chevelure

Au contraire de la métrique de Schwarzschild, il n'existe pas d'équivalent du théorème de Birkhoff en métrique de Kerr. Cette géométrie ne décrit donc que les trous noirs en rotation, et non pas l'espace-temps extérieur à d'autres objets telles que des étoiles en rotation.

Cependant, la solution de Kerr a une propriété fondamentale, établie dans les années 70 par Carter, Hawking et Israel : tout trou noir stationnaire et non chargé électriquement est un trou noir de Kerr. Un trou noir apparaît donc comme un objet particulièrement

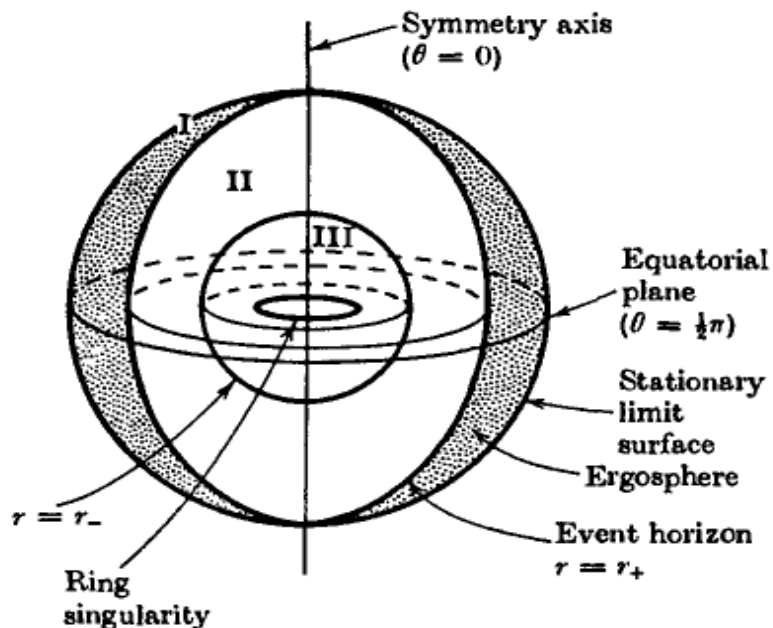


FIGURE 1.1 – Surface particulières de la métriques de Kerr. Issu de Hawking &amp; Ellis (1973).

simple à décrire : il est complètement défini par deux paramètres uniquement : sa masse  $M$  et son paramètre de spin  $a$ . Cette propriété remarquable est connue sous le nom de théorème d'absence de chevelure (les "cheveux" auxquels il est fait référence ici symbolisent les paramètres nécessaires à la description du trou noir, on devrait donc plutôt parler d'un "théorème des deux cheveux" !)

La suite de ce chapitre va être consacrée à l'étude des trajectoires de particules test évoluant dans la métrique de Kerr.

## 1.2 Orbites en métrique de Kerr

### 1.2.1 Équation des géodésiques

Étant donné un espace-temps muni d'une métrique donnée, on définit les géodésiques comme les courbes rendant extrémale la distance<sup>6</sup> entre deux points de l'espace-temps. Une géodésique de genre espace rend minimale cette distance, tandis qu'une géodésique de genre temps la rend maximale. Les géodésiques lumière, enfin, assurent une distance nulle entre deux points quelconques.

La relativité générale traduit le principe d'équivalence (qui stipule que toute particule subit une même accélération dans un champ de pesanteur) en imposant aux particules

6. Cette distance est, bien entendu, calculée en utilisant la métrique  $g_{\mu\nu}$  de l'espace-temps considéré. Ce n'est pas, en général, une distance euclidienne.

soumises uniquement à la gravitation de suivre de telles géodésiques. Une particule massive suivra une géodésique de genre temps alors qu'une particule de masse nulle (un photon) suivra une géodésique de genre lumière.

La norme au carré d'un vecteur unitaire tangent à une géodésique dépend du type de la géodésique considérée. Un vecteur unitaire tangent à une géodésique de genre temps a une norme au carré égale à  $-1$ . Un vecteur tangent à une géodésique de genre lumière a une norme au carré égale à  $0$ .<sup>7</sup>

On peut montrer (Gourgoulhon 2010c) que l'équation régissant le mouvement d'une particule (massive ou non) le long d'une géodésique (de genre temps ou de genre lumière) est :

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (1.13)$$

où l'on a introduit les symboles de Christoffel définis en fonction des coefficients métriques et de leurs dérivées selon :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (1.14)$$

avec  $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ .

Les équations des géodésiques forment donc un système d'équations différentielles couplées du second ordre.

Dans le cas très particulier de la métrique de Kerr, on peut réduire ce système à quatre équations du premier ordre en mettant en lumière quatre constantes du mouvement.

La première constante est immédiate : il s'agit de la masse de la particule  $m$ . Deux autres constantes apparaissent naturellement grâce aux symétries de la métrique (stationnarité et axisymétrie). On peut montrer qu'il s'agit de l'énergie de la particule mesurée par un observateur à l'infini,  $E$ , et de la composante axiale  $L$  de son moment cinétique (Misner *et al.* 1973), qui peuvent s'exprimer en fonction des composantes covariantes<sup>8</sup> de la 4-impulsion<sup>9</sup> de la particule selon :

$$\begin{aligned} E &= -p_t, \\ L &= p_\varphi. \end{aligned} \quad (1.15)$$

---

7. Les valeurs "inhabituelles" de ces normes proviennent du caractère non euclidien de la métrique, qui n'est plus définie positive comme c'était le cas de la métrique euclidienne.

8. On rappelle qu'un indice d'une composante d'un tenseur est dit covariant lorsqu'il est placé en position basse, et contravariant lorsqu'il est placé en position haute.

9. Étant donné une particule (massive ou non) soumise uniquement à la gravitation, sa dynamique est entièrement décrite par la donnée d'un champ de vecteurs  $\mathbf{p}$  tangents à sa géodésique (de genre temps ou de genre lumière). Imposant par ailleurs que ce champ de vecteur soit homogène à une masse (la masse  $m$  de la particule est alors définie par la relation  $m^2 = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$ ), la quantité  $\mathbf{p}$  est appelée quadri-impulsion de la particule. On trouvera une discussion détaillée de cette quantité dans Gourgoulhon (2010b).

De façon beaucoup moins naturelle, il se trouve qu'existe une quatrième constante (Carter 1968), qui s'exprime selon :

$$Q = p_\theta^2 + \cos^2\theta \left[ a^2 (m^2 - p_t^2) + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} \right]. \quad (1.16)$$

On peut alors résoudre les Eqs. 1.15 et 1.16 en fonction des composantes covariantes de la 4-impulsion, et remonter ensuite aux composantes contravariantes :

$$\begin{aligned} p^\alpha &= g^{\alpha\beta} p_\beta = m \frac{dx^\alpha}{d\tau} && \text{particule massive} \\ p^\alpha &= g^{\alpha\beta} p_\beta = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} && \text{photon} \end{aligned} \quad (1.17)$$

où  $g^{\alpha\beta}$  représentent les composantes de la métrique inverse,  $\tau$  représente le temps propre pour une particule massive et  $\lambda$  un paramètre affine pour un photon. Les composantes contravariantes de la 4-impulsion n'étant rien d'autre que les dérivées des coordonnées par rapport au paramètre d'intégration de la géodésique (à un facteur  $m$  près), on obtient exactement les équations du mouvement recherchées.

On obtient (voir par exemple Bardeen *et al.* 1972) :

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{dr}{d\lambda} &= \pm\sqrt{R}, \\ \Sigma \frac{d\theta}{d\lambda} &= \pm\sqrt{\Theta}, \\ \Sigma \frac{d\varphi}{d\lambda} &= -\left( aE - \frac{L}{\sin^2\theta} \right) + \frac{a}{\Delta} P \\ \Sigma \frac{dt}{d\lambda} &= -a(aE \sin^2\theta - L) + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} P \end{aligned} \quad (1.18)$$

où :

$$\begin{aligned} \Theta &= \Theta(\theta) = Q - \cos^2\theta \left[ a^2 (m^2 - E^2) + \frac{L^2}{\sin^2\theta} \right], \\ P &= P(r) = E(r^2 + a^2) - aL, \\ R &= R(r) = P^2 - \Delta [m^2 r^2 + (L - aE)^2 + Q] \end{aligned} \quad (1.19)$$

et où  $\lambda$  est relié au temps propre selon  $\lambda = \tau/m$  pour une particule massive, et est un paramètre affine pour un photon.

On remarque au vu des équations 1.18 que l'on peut supposer sans perte de généralité que  $m = 1$  pour une particule massive, au prix de redéfinir  $E$  et  $L$  comme étant des quantités par unité de masse. Pour le photon on a bien sûr toujours  $m = 0$ .

Il apparaît au vu de l'Eq. 1.18 que l'utilisation numérique de cette expression de l'équation des géodésiques sera compliquée par l'apparition des racines carrées dans les équations différentielles portant sur les variables  $r$  et  $\theta$  : il faudra prendre en compte explicitement les changements de signe des dérivées de ces variables, ce qui constitue une complication de l'algorithme.

On verra dans le chapitre 7 qu'il existe une formulation différente de ces équations des géodésiques qui permet d'éviter cette complication.

Il suffit désormais d'intégrer les équations des géodésiques pour différentes conditions initiales afin d'obtenir les lignes d'univers de particules plongées dans la métrique de Kerr. La section suivante présente quelques-unes de ces orbites.

## 1.2.2 Quelques aspects des orbites relativistes

On cherche, dans cette section, à présenter de façon visuelle quelques traits particuliers des orbites de particules en champ fort en métrique de Kerr, afin de permettre une compréhension plus aisée des simulations qui seront présentées plus tard, et afin de donner une idée de la complexité pouvant résider dans l'image calculée d'un phénomène relativiste.

Toutes les figures présentées dans cette section ont été obtenues avec le code de calcul d'orbites GYOTO qui sera présenté en détail dans le chapitre 7.

### Géodésiques de genre temps

Concentrons nous sur les trajectoires de particules massives suivant des orbites liées (c'est-à-dire ne s'échappant pas à l'infini). En négligeant leur physique interne ainsi que les effets de marées, ce seront des trajectoires possibles pour les étoiles se trouvant aux abords du trou noir.

Un effet bien connu des orbites relativistes est la précession du périastre qui a constitué la première vérification de la théorie d'Einstein sur le cas de Mercure. La Fig. 1.2 illustre cet effet pour une orbite équatoriale en métrique de Schwarzschild. Au vu des axes, on constate que l'on est ici en champ faible : la valeur de la coordonnée  $r$  au périastre<sup>10</sup>

---

10. Lorsqu'il s'agit d'un trou noir, l'appellation périastre peut se discuter, mais elle sera utilisée dans ce manuscrit. On rencontre dans la littérature :

- *périapse*, du Grec *peri*, autour de, et *hapsis*, désignant un objet de forme courbe ou circulaire ;
- *péribothron*, du Grec *bothros*, le trou ;
- *périnegricon*, du Latin *niger*, noir, la terminaison en *on* étant "à la grecque" ;
- *périmélanophrear*, du Grec *melas*, au génitif *melanos*, signifiant noir, obscur, et *phrear* qui veut dire puits ; l'utilisation de *phrear* est d'autant plus convaincante qu'on en trouve une occurrence chez Platon (*Théétète*, 174 c) pour désigner un lieu où la pensée s'égaré...

On pourrait proposer aussi bien *périmélandinè*, du Grec *dinè* signifiant gouffre, tourbillon, c'est-à-dire quelque chose qui aspire en tournoyant. Cela conviendrait parfaitement pour un trou noir de Kerr.



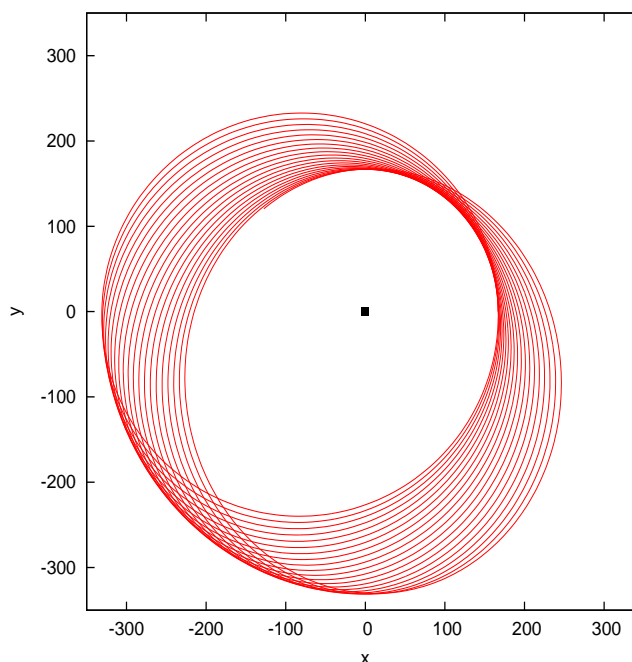


FIGURE 1.2 – Précession du périastre d’une orbite faiblement relativiste en métrique de Schwarzschild. La position du trou noir est repérée par le carré noir à l’origine des coordonnées. Les axes sont gradués en unité de la masse du trou noir  $M$ , avec  $c = G = 1$ .

est<sup>11</sup>  $r \approx 170 M$ . Cet effet d’avancée du périastre est également présent pour les orbites elliptiques képlériennes, mais dû dans ce cas à l’attraction gravitationnelle cumulée des différents corps en présence.<sup>12</sup>

Cependant, dès que la particule se rapproche de l’objet compact, l’aspect des orbites se diversifie énormément par rapport au cas newtonien.

Même si l’on se restreint aux orbites liées et confinées au plan équatorial du trou noir de Kerr, le paysage est très varié. Les orbites ne sont plus elliptiques, et plus forcément périodiques. Cependant, et c’est ce qui confère une certaine simplicité aux orbites équatoriales, elles resteront confinées dans ce plan au cours de leur évolution. Au contraire, les orbites non équatoriales ne seront même plus planes lorsque le paramètre de spin est non nul.

Une intéressante taxonomie des orbites équatoriales en métrique de Kerr a été établie récemment dans une étude menée par Levin & Perez-Giz (2008) à laquelle le lecteur est renvoyé pour plus de détails, et plus d’exemples d’orbites relativistes en champ fort.

La Fig. 1.3 représente une orbite confinée au plan équatorial. On constate que cette orbite n’est pas fermée et précède comme celle de la Fig. 1.2. Ici pourtant, l’orbite n’a plus

11. Comme on l’a vu plus haut, longueurs et temps sont homogènes à des masses lorsqu’on utilise un système d’unités dans lequel  $c = G = 1$ .

12. La particularité du cas de Mercure n’était donc pas l’existence d’une dérive du périastre, mais la non adéquation entre la valeur mesurée et la valeur prédite par la théorie newtonienne.

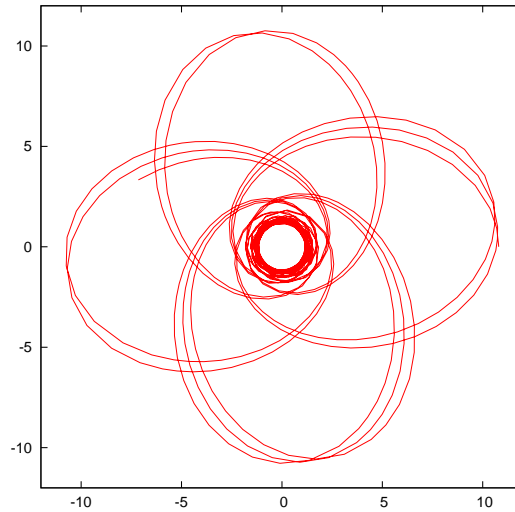


FIGURE 1.3 – Orbite d’une particule massive dans le plan équatorial d’un trou noir de Kerr de masse  $M = 1$ , de spin  $a = 0,995$ , situé à l’origine des coordonnées. L’énergie de la particule vaut  $E = 0,92103$  et son moment cinétique le long de l’axe du trou noir  $L = 2$ . La constante de Carter  $Q$  est nulle comme pour toute orbite équatoriale. On voit ici clairement l’avancée du périastre.

rien d’elliptique, et présente une succession de phénomènes d’étirement de l’orbite loin du trou noir et de tourbillons serrés autour de l’objet compact (*zoom - whirl* en anglais, voir Levin & Perez-Giz 2008).

La Fig. 1.4 représente une orbite générale, qui n’est plus ni fermée, ni plane : on est loin de l’ellipse képlérienne...

Toutes les orbites de particules massives autour d’un trou noir de Kerr ne sont pas aussi complexes que les Figs. 1.3 et 1.4 le laissent supposer. Une particule peut suivre, dans le plan équatorial d’un trou noir de Kerr, une orbite circulaire de n’importe quel rayon supérieur à un rayon critique,  $r_{\text{ISCO}}$ , correspondant à la dernière orbite circulaire stable (souvent appelée ISCO, de l’acronyme anglais *innermost stable circular orbit*). Le rayon de l’ISCO varie en fonction du spin du trou noir, mais la relation n’est pas immédiate. On la trouvera, ainsi qu’une discussion approfondie des orbites en métriques de Kerr, dans Bardeen *et al.* (1972). On peut retenir qu’il s’agit d’une fonction décroissante du spin. Sa valeur varie entre  $r_{\text{ISCO}}(a = 1) = M$  et  $r_{\text{ISCO}}(a = 0) = 6M$ .

On verra dans la suite le rôle particulier que joue l’ISCO dans l’étude des trous noirs : elle peut permettre d’avoir accès au spin  $a$ .

### Géodésiques de genre lumière

Les rayons lumineux sont eux aussi soumis à la gravitation. On va voir dans cette section que la courbure qu’ils subissent au voisinage d’un objet compact rend ardue l’interprétation d’une image d’un phénomène relativiste.

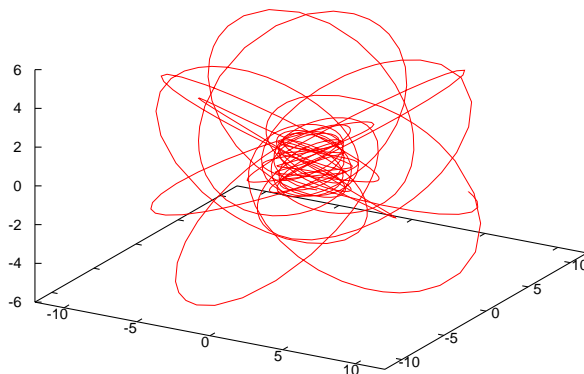


FIGURE 1.4 – Dans les mêmes conditions que pour la Fig. 1.3, mais en choisissant les conditions initiales de façon à ne pas restreindre la trajectoire au plan équatorial.

La Fig. 1.5 met en lumière l'effet Lense-Thirring. On y voit deux géodésiques lumière partageant les mêmes conditions initiales<sup>13</sup>, mais intégrées dans des métriques différentes. L'une est calculée au voisinage d'un trou noir de Schwarzschild (de spin  $a = 0$ ), l'autre est calculée aux abords d'un trou noir de Kerr quasi-extrême (de spin  $a = 0,99 M$ ). On constate immédiatement sur cette figure que le spin du trou noir a en particulier pour effet d'entraîner les géodésiques.

La Fig. 1.6 représente l'image d'une étoile en orbite sur l'ISCO d'un trou noir de spin  $a = 0,9$ , qui a pour valeur de coordonnée radiale :  $r_{\text{ISCO}}(a = 0,9) = 2,32 M$ . On y distingue clairement un amas principal de pixels formant l'image primaire, un arc plus mince formant l'image secondaire, et un arc très fin formant l'image tertiaire. On peut même remarquer la présence de deux pixels éclairés en bas de l'image, formant l'image quaternaire. Ces images d'ordre supérieur sont dues à l'effet de lentille gravitationnelle exercé par le trou noir sur les rayons lumineux, comme on va l'illustrer dans la suite.

La Fig. 1.7 représente quatre géodésiques lumière correspondant à quatre pixels éclairés dans la Fig. 1.6. Chaque géodésique correspond à l'un des pixels de l'une des images, primaire, secondaire, tertiaire ou quaternaire évoquées plus haut. La géodésique correspondant à l'image primaire est assez peu courbée dans son parcours la reliant à l'observateur. Par contre, plus l'ordre de l'image considérée augmente, plus la géodésique suit une trajectoire fortement courbée, au point de faire plusieurs fois le tour du trou noir avant de rejoindre l'observateur. De ce fait, il faut prendre garde au fait que les différents pixels éclairés dans une image relativiste telle que la Fig. 1.6 ne sont pas simultanément émis par la source.

13. Lorsqu'il s'agit de géodésiques lumière, on entend par condition initiale la quadri-position et le quadri-vecteur tangent du photon au niveau de l'observateur, l'intégration étant effectuée en remontant le temps. On reviendra sur ce point dans le chapitre 7.

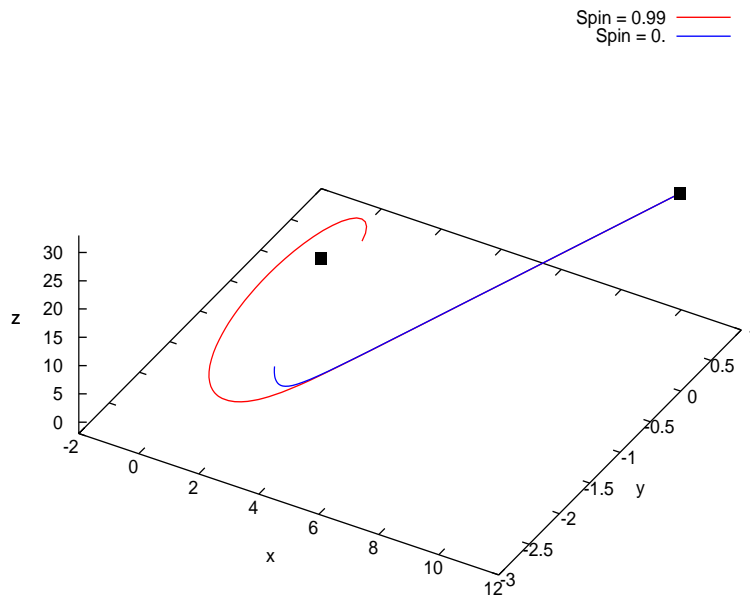


FIGURE 1.5 – Deux géodésiques lumière ayant les mêmes conditions initiales, calculées avec deux spins différents,  $a = 0$  et  $a = 0,99$ . On distingue clairement l'effet de Lense-Thirring : le spin du trou noir entraîne les géodésiques. Le carré noir de gauche se trouve à l'emplacement du trou noir, le carré noir de droite représente la position d'un observateur distant, à  $r = 35 M$ . L'intégration (effectuée en remontant le temps coordonnée) est arrêtée à proximité de l'horizon des événements. Les axes sont gradués en unité de la masse du trou noir.

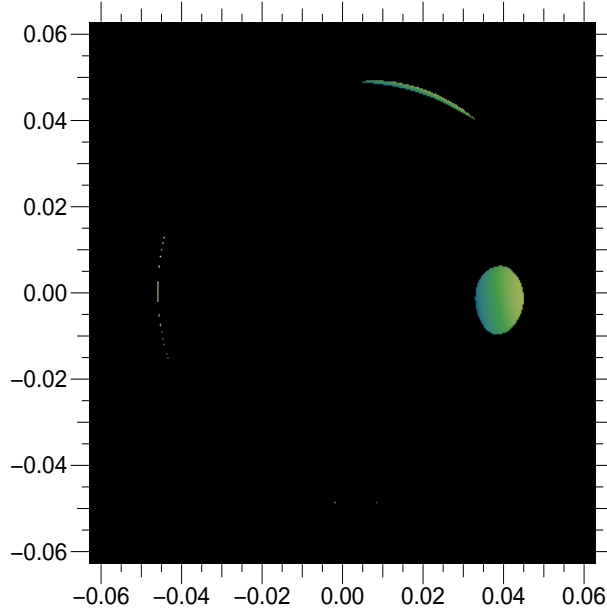


FIGURE 1.6 – Image d’une étoile en orbite sur l’ISCO d’un trou noir de spin  $a = 0,9$ . On distingue nettement les images primaire, secondaire et tertiaire. Les axes sont gradués en radians.

En effet, un pixel de l’image quaternaire est émis à une valeur du temps coordonnée  $t$  bien inférieure à la date d’émission d’un photon de l’image primaire. Ainsi, les durées en temps coordonnée séparant l’émission du photon de sa réception par l’observateur pour les géodésiques illustrées Fig. 1.7 correspondant aux images primaire et quaternaire sont de :

$$\begin{aligned}\Delta t_{\text{primaire}} &= 109 M, \\ \Delta t_{\text{quaternaire}} &= 154 M.\end{aligned}\tag{1.20}$$

Un exemple bien connu de lentillage gravitationnel est représenté sur la Fig. 1.8. Cette fois, l’observateur est aligné avec le trou noir et une étoile, le trou noir étant placé entre l’observateur et l’étoile. La taille angulaire de l’étoile étant inférieure à celle de l’horizon du trou noir, celui-ci “cache” la source au sens de la physique newtonienne. Pourtant, des rayons lumineux peuvent rejoindre l’observateur comme le montre la Fig. 1.8, l’image obtenue formant un anneau d’Einstein.

Ces quelques exemples montrent la complexité qui est contenue dans une image de phénomène relativiste. Il est clair que la simulation numérique est le seul outil qui permettra d’analyser efficacement ce genre d’image.

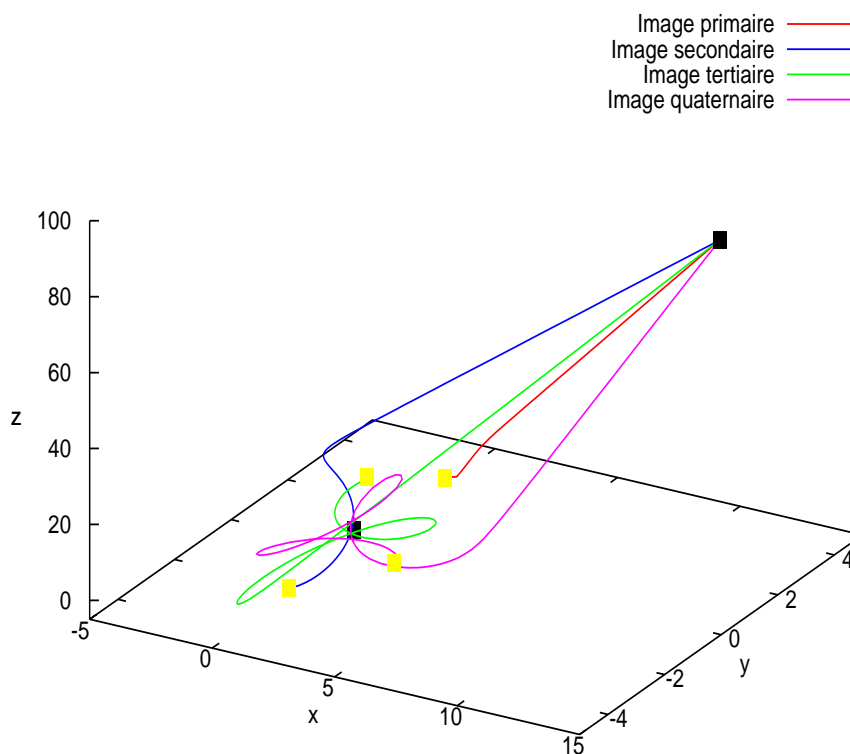


FIGURE 1.7 – Géodésiques lumière donnant lieu à un pixel éclairé des images primaire, secondaire, tertiaire et quaternaire de la Fig 1.6. Le trou noir a un spin  $a = 0,9$ . Les carrés noirs représentent les positions du trou noir et de l'observateur, et les carrés jaunes les différents lieux d'émission des photons. Certaines géodésiques présentent des coudes très brusques, qui sont expliqués par les échelles différentes des axes (gradués en unité de la masse du trou noir).

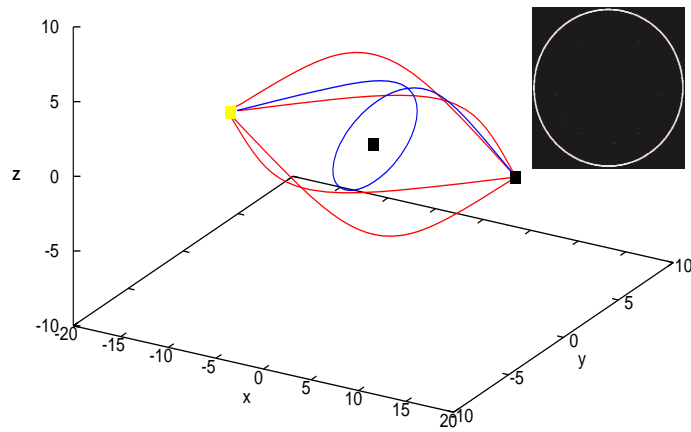


FIGURE 1.8 – La source lumineuse (en jaune), le trou noir (de spin  $a = 0$ ) et l'observateur (tous deux en noir) sont alignés. La courbure des rayons lumineux leur permet de rejoindre l'observateur et de former sur son écran d'observation un anneau d'Einstein, représenté dans l'encart. Les géodésiques représentées en rouge relient la source à quatre pixels de l'écran. La géodésique représentée en bleu est responsable d'une image secondaire, qui se traduit par un autre cercle de rayon plus petit sur l'écran, mais qu'on ne peut pas distinguer sur l'encart.

# Chapitre 2

## Notions d'interférométrie

### Sommaire

---

<b>2.1 Imagerie et interférométrie . . . . .</b>	<b>39</b>
2.1.1 Composantes de Fourier d'une image . . . . .	39
2.1.2 Imagerie, diffraction et interférométrie . . . . .	42
<b>2.2 Interférométrie à plusieurs télescopes . . . . .</b>	<b>42</b>
2.2.1 Fonction de cohérence, fonction de visibilité . . . . .	42
2.2.2 Fonction de transfert et PSF . . . . .	44
2.2.3 Résolution et précision astrométrique . . . . .	46
2.2.4 Difficultés liées à la mesure de la phase . . . . .	47

---

Ce chapitre vise à établir quelques notions de base sur l'interférométrie. Cette présentation restera très succincte et ne vise qu'à mettre en perspective les fondamentaux de l'interférométrie.

Pour une description approfondie de ce thème, on pourra consulter Born & Wolf (1999).

## 2.1 Imagerie et interférométrie

Cette section vise à rappeler quelques notions fondamentales d'imagerie.

La section 2.1.1 présente quelques notions de théorie de l'imagerie utilisant le formalisme de Fourier. Ces notions seront immédiatement transposées au cas interférométrique : ce détour par l'imagerie vise à les introduire dans un contexte peut-être plus familier au lecteur.

La section 2.1.2 montre en quoi il est naturel que ces notions d'imagerie soient transposables au cas interférométrique.

### 2.1.1 Composantes de Fourier d'une image

Cette section est très largement inspirée de Haniff (2007).



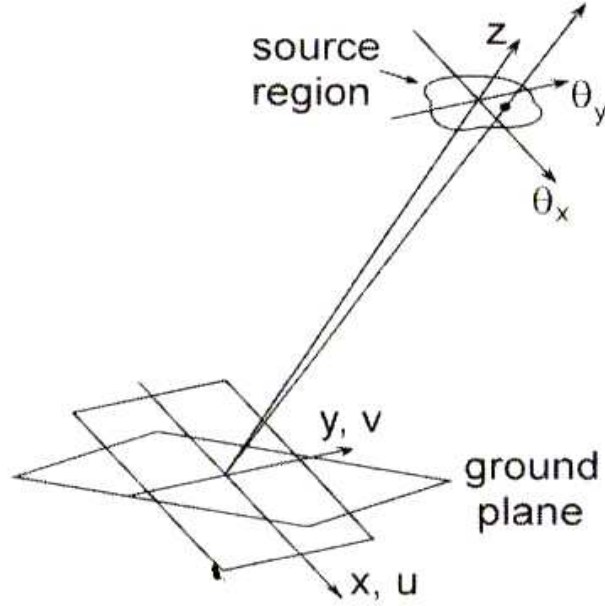


FIGURE 2.1 – Coordonnées angulaires dans le plan du ciel  $(\theta_x, \theta_y)$ , coordonnées conjuguées de Fourier  $(u, v)$ , dans le plan orthogonal à la ligne de visée, reliées aux coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  par  $(u, v) = (\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda})$ . Source : Labeyrie *et al.* (2006).

On considère un objet astrophysique étendu de distribution d'intensité  $O(\theta_x, \theta_y)$  où  $\theta_x$  et  $\theta_y$  sont des coordonnées angulaires sur le ciel. Cet objet est observé à travers un système optique de fonction d'étalement de point (PSF<sup>1</sup>)  $P(\theta_x, \theta_y)$ . Du fait de la limitation de l'ouverture du système optique, l'image d'une source ponctuelle sera étalée en une certaine distribution d'intensité, la PSF.

La théorie de l'imagerie (voir par exemple Goodman 2005) permet de relier la distribution d'intensité observée  $I(\theta_x, \theta_y)$  (c'est-à-dire, l'image observée) à  $O(\theta_x, \theta_y)$  et  $P(\theta_x, \theta_y)$  selon :

$$I(\theta_x, \theta_y) = P(\theta_x, \theta_y) * O(\theta_x, \theta_y) \quad (2.1)$$

où l'opérateur  $*$  désigne la convolution.

En prenant la transformée de Fourier de cette égalité on obtient :

$$\tilde{I}(u, v) = T(u, v) \times \tilde{O}(u, v) \quad (2.2)$$

où  $\tilde{X}$  désigne la transformée de Fourier d'une quantité  $X$ , et où l'on a introduit la fonction de transfert optique (FTO)  $T = \tilde{P}$ .

Les coordonnées  $(u, v)$ , conjuguées de Fourier des coordonnées angulaires sur le ciel  $(\theta_x, \theta_y)$ , sont reliées aux coordonnées  $(x, y)$  du plan orthogonal à la ligne de visée par  $(u, v) = (\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda})$  (Labeyrie *et al.* 2006), où  $\lambda$  est la longueur d'onde du rayonnement supposé

1. On garde l'acronyme anglais correspondant à *point spread function*.

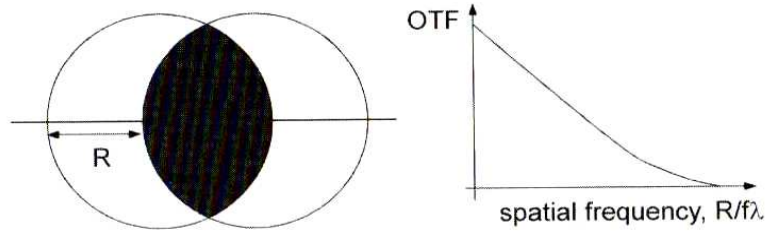


FIGURE 2.2 – A droite, fonction de transfert optique d’une ouverture circulaire de rayon  $R$ , en fonction de la variable  $f = \sqrt{u^2 + v^2}$ . Le schéma de gauche illustre l’identité entre la FTO et l’autocorrélation de l’ouverture (représentée par l’aire de la surface hachurée, qui varie en fonction de la distance entre les centres des deux ouvertures). Source : Labeyrie *et al.* (2006).

monochromatique. Ces coordonnées  $(u, v)$  sont appelées fréquences spatiales. Par analogie avec la fréquence  $\nu$  conjuguée de Fourier d’un temps  $t$ , on associe la fréquence spatiale  $u$  à la coordonnée angulaire  $\theta_x$ . On voit déjà à ce stade que le spectre en fréquences spatiales de l’objet va être limité par l’ouverture du télescope : à des valeurs de  $(u, v)$  correspondant à des points  $(x, y)$  situés en dehors de la projection de l’ouverture orthogonalement à la ligne de visée, la composante de Fourier  $\tilde{I}(u, v)$  sera nulle.

Toute l’information sur l’objet observé se retrouve dans la transformée de Fourier de cet objet,  $\tilde{O}$ . Si l’on connaît parfaitement la transformée de Fourier de l’objet, on remonte à sa distribution d’intensité par simple transformée inverse. L’Eq. 2.2 établit le lien entre les composantes de Fourier de l’image et celles de la distribution objet. Les composantes de Fourier de l’image pour des fréquences spatiales  $u$  et  $v$ ,  $\tilde{I}(u, v)$ , sont égales aux composantes de Fourier de la distribution objet,  $\tilde{O}(u, v)$ , pondérées par la valeur de la fonction de transfert optique évaluée aux mêmes fréquences spatiales,  $T(u, v)$ . Cette fonction de transfert agit donc comme un filtre sur la transformée de Fourier de la distribution objet.

On a vu que le spectre en fréquence spatiale de l’objet était limité par l’ouverture du télescope. Il est donc naturel que la FTO soit reliée directement à cette même ouverture. On peut montrer qu’effectivement, la FTO n’est rien d’autre que l’autocorrélation de l’ouverture. Ainsi pour une ouverture circulaire, on obtiendra la fonction de transfert représentée sur la Fig. 2.2, en fonction de la coordonnée  $f = \sqrt{u^2 + v^2}$ . On constate sur cette figure que la FTO décroît avec l’augmentation de la fréquence spatiale, jusqu’à s’annuler en une fréquence  $f_c = \frac{D}{\lambda}$  où  $D$  est le diamètre de l’ouverture. La fonction de transfert optique agit donc comme un filtre spatial passe-bas. Cette fréquence de coupure permet d’obtenir la résolution angulaire  $\delta\theta$  du télescope, que l’on peut définir égale à l’inverse de la fréquence de coupure :

$$\delta\theta \equiv \frac{\lambda}{D}. \quad (2.3)$$

La section suivante tente d’expliquer en quoi le détour par le formalisme de Fourier qui a été opéré jusqu’ici est naturel en imagerie.

### 2.1.2 Imagerie, diffraction et interférométrie

L'imagerie consiste à analyser l'image d'une source à travers une ouverture unique. Cela revient à étudier la figure de diffraction de la source à travers l'ouverture, qui n'est rien d'autre qu'une figure d'interférences. En effet, le principe de Huygens-Fresnel stipule que chaque point du front d'onde peut être considéré comme une source secondaire émettant une onde sphérique dans la direction de propagation (on ignore la partie de l'onde se propageant dans le sens contraire) et que ces ondes vont interférer pour former la figure de diffraction.

On constate donc que les notions de diffraction et d'interférence (donc d'imagerie et d'interférométrie) sont essentiellement identiques. On parle d'interférences quand deux faisceaux ayant suivi des chemins différents se rencontrent ; on parle de diffraction quand il s'agit d'une même onde dont les différentes composantes de Huygens-Fresnel interfèrent.

Or, on verra dans la section 2.2 que les observables interférométriques sont directement reliées aux composantes de Fourier de la distribution image,  $\tilde{I}(u, v)$ . On voit donc ici le lien qui rend naturel l'utilisation du formalisme de Fourier en interférométrie, et donc, d'après ce qui précède, en imagerie.

## 2.2 Interférométrie à plusieurs télescopes

### 2.2.1 Fonction de cohérence, fonction de visibilité

On considère une source astrophysique émettant un rayonnement qui est échantillonné par deux télescopes. Le télescope  $T_1$  détecte à la date  $t$  une intensité  $I_1 = \langle |E_1(\vec{r}_1, t)|^2 \rangle$  et le télescope  $T_2$  une intensité  $I_2 = \langle |E_2(\vec{r}_2, t)|^2 \rangle$ , où  $\langle \cdot \rangle$  représente l'opération de moyenne temporelle sur une durée longue devant la période d'oscillation du champ électrique. Si on combine ces deux signaux on obtient l'intensité :

$$I_{\text{interf}} = I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} (\langle E_1(\vec{r}_1, t)^* E_2(\vec{r}_2, t) \rangle) \quad (2.4)$$

où  $X^*$  désigne le complexe conjugué de  $X$  et  $\operatorname{Re}$  désigne la partie réelle d'une quantité complexe.

On constate que toute l'information sur la figure d'interférence est contenue dans la grandeur  $\langle E_1(\vec{r}_1, t)^* E_2(\vec{r}_2, t) \rangle$  qui ne mesure rien d'autre que la corrélation entre les deux échantillons du champ électrique prélevés en deux points différents  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  (correspondant aux vecteurs coordonnées des deux télescopes) à un même instant  $t$  (la date de l'observation). Cette quantité est directement fonction de la différence de chemin optique entre les rayons lumineux incidents sur les deux télescopes.

La valeur de l'intensité après recombinaison des faisceaux dépend donc de la différence de marche entre les faisceaux. Si les rayons lumineux impactant  $T_1$  ont parcouru une distance exactement égale à la distance parcourue par les rayons qui impactent  $T_2$ , le terme de corrélation sera maximum. Au contraire, si la différence de chemin optique parcouru

est trop grande, le terme de corrélation s'annulera. On peut montrer (Labeyrie *et al.* 2006) que la distance à partir de laquelle le terme de corrélation devient négligeable vaut :

$$r_c = \frac{\lambda}{\Delta\theta} \quad (2.5)$$

où  $\Delta\theta$  est la taille angulaire de la source. Cette grandeur  $r_c$  est appelée distance de cohérence.

Afin de pouvoir observer des franges d'interférences, il faudra faire en sorte d'égaliser les chemins parcourus par les rayons impactant les télescopes à moins que  $r_c$ .

On appelle fonction de cohérence<sup>2</sup> spatiale  $\mathcal{V}$  la quantité :

$$\mathcal{V}(\vec{B} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1) \equiv \langle E_1(\vec{r}_1, t)^* E_2(\vec{r}_2, t) \rangle \quad (2.6)$$

où l'on a supposé l'invariance spatiale de la fonction de cohérence en écrivant que  $\mathcal{V}$  ne dépend que de la séparation  $\vec{B}$  entre les télescopes, appelée ligne de base, et où l'on suppose également la stationnarité de sorte que la valeur du terme de droite ne dépend pas de la date  $t$  à laquelle on calcule la corrélation.

Plutôt que d'exprimer la fonction de cohérence spatiale comme dépendant de la séparation entre les télescopes  $\vec{B}$ , on peut l'exprimer en fonction des coordonnées  $(u, v)$  introduites Fig. 2.1. On peut également séparer la fonction de cohérence complexe  $\mathcal{V}$  en module et argument selon :

$$\mathcal{V}(u, v) = V(u, v) e^{i\varphi(u, v)}. \quad (2.7)$$

Les quantités  $V(u, v)$  et  $\varphi(u, v)$  sont appelées module de la visibilité et phase. Ce sont les observables interférométriques qui peuvent être déduites de la figure d'interférence définie par l'Eq. 2.4. En lumière monochromatique, la visibilité est égale au contraste des franges, et la phase est égale à l'écart entre la position du maximum du système de franges et la position du zéro de différence de marche (voir Fig. 2.3).

Munis de ces définitions, on peut énoncer un théorème essentiel : le théorème de Zernike-van Cittert. Celui-ci permet de relier visibilité, phase et distribution d'intensité de l'objet observé  $I(\theta_x, \theta_y)$  (on utilise ici les notations introduites dans la section 2.1.1).

Il s'énonce (Haniff 2007) :

$$\mathcal{V}(u, v) = \frac{\tilde{I}(u, v)}{\tilde{I}(0, 0)} \quad (2.8)$$

On obtient donc ici ce que la section 2.1.2 avait annoncé : les composantes de Fourier de l'image observée sont exactement égales (aux facteurs de normalisation près) aux valeurs prises par la fonction de cohérence spatiale, c'est-à-dire, aux valeurs des observables interférométriques que sont la visibilité et la phase.

De façon moins condensée, le théorème de Zernike-van Cittert s'écrit donc :

---

2. le terme "cohérence" est donc ici à prendre comme un synonyme de "corrélation"

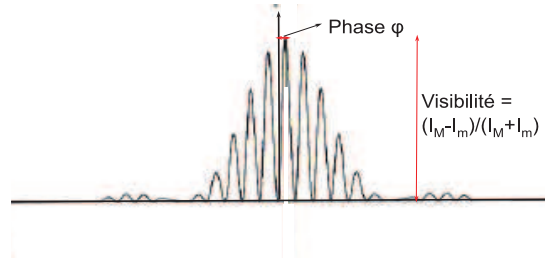


FIGURE 2.3 – Figure d’interférence en lumière monochromatique : variation de l’intensité en fonction de la différence de marche entre les rayons. La visibilité est égale au contraste des franges ( $I_M$  et  $I_m$  désignant respectivement la valeur maximale et minimale de l’intensité), la phase vaut l’écart entre la position du maximum des franges et la position de différence de marche nulle.

$$V(u, v) e^{i\varphi(u, v)} = \frac{\iint I(\theta_x, \theta_y) \exp(-i 2 \pi (u \theta_x + v \theta_y)) d\theta_x d\theta_y}{\iint I(\theta_x, \theta_y) d\theta_x d\theta_y}. \quad (2.9)$$

Ainsi, la fonction de cohérence spatiale est égale à la transformée de Fourier normalisée de la distribution d’intensité de l’objet observé.

Il est donc possible de reconstituer l’image de l’objet à partir des données interférométriques : si la visibilité et la phase sont connues pour suffisamment de valeurs de couples de fréquences spatiales  $(u, v)$ , on peut déterminer l’image par transformée de Fourier inverse. Sachant que lors du calcul de transformée de Fourier inverse la connaissance de la phase  $\varphi$  est cruciale (elle a un impact plus important que la connaissance du module  $V$ ), on peut déjà conclure que deux conditions sont nécessaires pour espérer obtenir une image à partir de mesures interférométriques :

- une connaissance suffisamment précise de la phase,
- un échantillonnage suffisamment fin du plan des fréquences spatiales  $(u, v)$ .

### 2.2.2 Fonction de transfert et PSF

On considère deux télescopes représentés sur la Fig. 2.4.

On peut calculer la fonction de transfert optique de ce système de la même façon que dans la section 2.1.1, par autocorrélation de la fonction d’ouverture (en tenant compte du fait que l’on a désormais deux ouvertures au lieu d’une seule). On obtient la fonction représentée Fig. 2.5, qui n’a qu’une seule dimension, celle de la droite joignant les deux télescopes. On peut généraliser immédiatement à plusieurs télescopes, la FTO étant désormais représentée dans le plan  $(u, v)$ , et prenant des valeurs non nulles autour des points  $(u, v)$  tels qu’il existe une base projetée orthogonalement à la ligne de visée  $\vec{B}_\perp = (\lambda u, \lambda v)$  qui relie deux télescopes. En pratique, la dimension de l’ouverture des télescopes étant négligeable devant les lignes de bases, la FTO devient une assemblée de pics de Dirac dans le plan  $(u, v)$  représentant les fréquences spatiales échantillonnées par l’interféromètre.

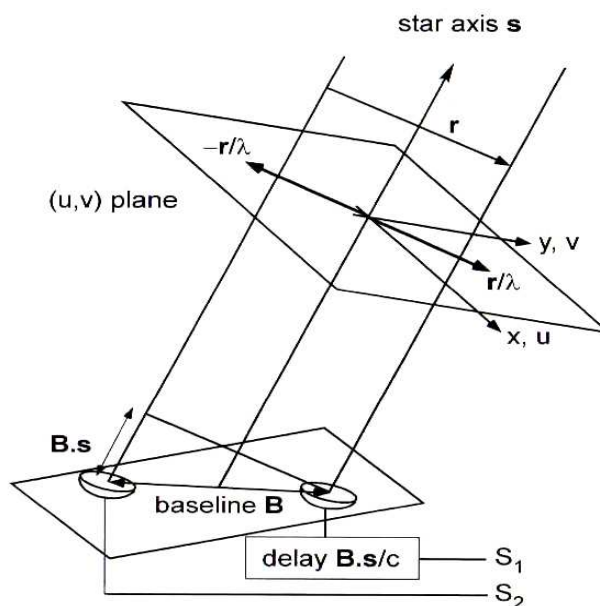


FIGURE 2.4 – Interféromètre à deux télescopes séparés de la distance  $B$ . La différence de marche entre les deux faisceaux détectés par les deux télescopes vaut  $\vec{B} \cdot \vec{s}$  où  $\vec{s}$  est le vecteur directeur de la ligne de visée. Cette différence de marche sera corrigée par les lignes à retard (*delay lines*) afin d'obtenir des franges d'interférence lors de la recombinaison des faisceaux  $S_1$  et  $S_2$ . Le plan  $(u, v)$  est représenté, orthogonalement à la ligne de visée. Source : Labeyrie *et al.* (2006).

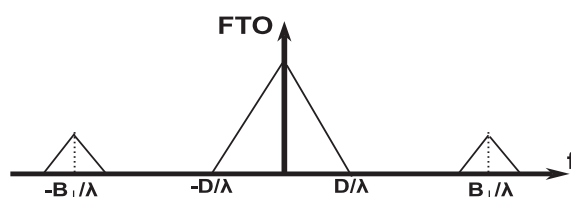


FIGURE 2.5 – Fonction de transfert optique (FTO) d'un interféromètre à deux télescopes d'ouverture de diamètre  $D$ , séparés d'une distance  $B_{\perp}$  en projection orthogonalement à la ligne de visée. On note  $f$  la fréquence spatiale.

La notion de PSF introduite dans la section 2.1.1 peut également être définie dans le cadre de l'interférométrie. On a vu que le théorème de Zernike-van Cittert (Eq. 2.9) établit que la distribution d'intensité de l'objet est égale à la transformée de Fourier inverse de la fonction de cohérence spatiale  $\mathcal{V}(u, v)$ . Dans la pratique, on n'a accès qu'à un certain échantillon de fréquences spatiales  $(u, v)$ , jamais au plan tout entier. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} I(\theta_x, \theta_y) &= \iint S(u, v) \mathcal{V}(u, v) \exp(i 2 \pi (\theta_x u + \theta_y v)) \, dudv \\ &= P(\theta_x, \theta_y) * O(\theta_x, \theta_y) \end{aligned} \quad (2.10)$$

où la fonction  $S$  désigne la fonction d'échantillonnage du plan  $(u, v)$  (qui est égale à la fonction de transfert lorsque qu'on la considère comme une assemblée de pic de Dirac en négligeant l'ouverture des télescopes) et  $O(\theta_x, \theta_y)$  désigne la distribution d'intensité de l'objet, égale à la transformée inverse de  $\mathcal{V}(u, v)$ . La fonction  $P(\theta_x, \theta_y)$  définie par l'Eq. 2.10, égale à la transformée de Fourier de la fonction d'échantillonnage du plan  $(u, v)$ , n'est autre que la PSF de l'interféromètre.

### 2.2.3 Résolution et précision astrométrique

On constate au vu de la Fig. 2.5 que le recours à plusieurs télescopes permet de sonder des fréquences spatiales nettement plus élevées que celles qui sont accessibles au moyen d'une seule ouverture. En terme de précision angulaire, ceci se traduit par un gain considérable puisque, de la même manière que la résolution atteignable par une ouverture monolithique de diamètre  $D$  est  $\frac{\lambda}{D}$ , la résolution d'un interféromètre à deux télescopes atteint  $\frac{\lambda}{B_{\perp}}$  où  $B_{\perp}$  est la distance maximale entre les télescopes projetée orthogonalement à la ligne de visée. On peut donc espérer atteindre un niveau de détail bien supérieur à celui fourni par un télescope unique.

Par ailleurs, l'interférométrie permet de réaliser des mesures astrométriques de haute précision. Soit en effet deux sources sur le ciel séparées d'un écart angulaire  $\theta$ . Chaque étoile va donner naissance à un paquet de franges, qui seront séparés d'une distance (différence de marche)  $\delta$ . On a :

$$\delta = B_{\perp} \times \theta. \quad (2.11)$$

L'incertitude sur ces grandeurs, notée  $\sigma$ , sera donnée par :

$$\sigma(\delta) = B_{\perp} \times \sigma(\theta). \quad (2.12)$$

où on a supposé en première approximation que la ligne de base est parfaitement connue.

La quantité  $\sigma(\theta) = \sigma(\delta)/B_{\perp}$  est alors la précision astrométrique de l'interféromètre.

Cette précision astrométrique est donc inversement proportionnelle à la longueur de la base : plus la base est grande, meilleure sera la précision. Cette notion est différente

de la résolution de l'interféromètre qui est de  $\frac{\lambda}{B_{\perp}}$ . En effet, la résolution désigne la largeur angulaire des franges (c'est l'interfrange). Ce qui importe pour l'astrométrie c'est la capacité à mesurer un décalage  $\delta$  entre deux franges centrales pour deux paquets de franges formés par deux sources. L'incertitude sur cette quantité dépend de la précision métrologique  $\sigma(\delta)$  dont on est capable et peut être très inférieure à la résolution.

On constate que la précision astrométrique, qui cherche à mesurer un intervalle entre deux maxima de paquets de franges, est directement reliée à la précision sur la mesure de la phase, celle-ci étant égale à l'écart entre le maximum du paquet de franges et la position de différence de marche nulle (voir Fig. 2.3).

L'importance d'une mesure précise de la phase apparaît donc clairement.

### 2.2.4 Difficultés liées à la mesure de la phase

Les sections précédentes, assez théoriques, ne se sont pas du tout intéressées à la mesure effective des observables interférométriques que sont le module de la fonction de visibilité  $V(u, v)$  et la phase  $\varphi(u, v)$ . Il n'est pas question ici d'aborder ces sujets qui demanderaient de trop longs développements. On ne va décrire, très succinctement, que les effets de l'atmosphère terrestre sur la mesure de la phase (quantité cruciale, comme on l'a vu plus haut, pour obtenir des images à partir des données interférométriques, et pour parvenir à une haute précision astrométrique).

On a vu dans la section 2.1.1 que la résolution angulaire d'un télescope de diamètre  $D$  était de  $\lambda/D$ . Cependant, ceci ne tient aucun compte de la turbulence atmosphérique. Celle-ci a pour effet de rendre complètement décorrélés en phase deux points de l'ouverture distants de moins d'une certaine longueur appelée paramètre de Fried,  $r_0$ , qui est typiquement égal à quelques dizaines de centimètres en infrarouge. Si  $r_0 < D$  (ce qui est toujours le cas!), c'est la turbulence atmosphérique qui dicte les performances du télescope, limitant la résolution à la valeur du *seeing* :  $\lambda/r_0$ .

L'optique adaptative est une technique qui permet de corriger les effets de la turbulence pour s'approcher de la limite de diffraction. L'idée est de corriger les distorsions du front d'onde en réfléchissant la lumière sur un miroir pouvant se déformer à une cadence suffisamment élevée pour suivre les variations de la turbulence (typiquement de l'ordre de la dizaine de millisecondes en infrarouge).

On obtient alors des fronts d'onde plans au niveau de chaque télescope, mais décalés d'une certaine valeur de chemin optique, appelée piston atmosphérique. Cet effet est illustré Fig. 2.6. On constate que ce piston atmosphérique décale les franges d'interférence par rapport au zéro de différence de marche où les franges se trouveraient en l'absence d'effet atmosphérique. Ceci se traduit par une variation rapide de la valeur de la phase  $\varphi$  au même rythme que la turbulence.

Il faut donc corriger ce piston atmosphérique en ramenant les franges d'interférence à leur position de référence (c'est-à-dire à la position de différence de marche nulle pour la Fig. 2.6). Une boucle d'asservissement permet de réaliser cette opération : on l'appelle suiveur de frange. Cette correction est absolument nécessaire pour obtenir des observables interférométriques exploitables, puisqu'elle permet d'intégrer suffisamment longtemps sur



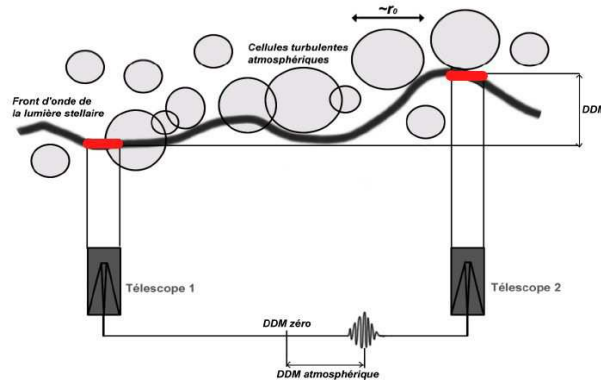


FIGURE 2.6 – L'optique adaptative corrige les distorsions du front d'onde et l'aplanit devant chaque télescope (traits rouges). Cependant, les différents fronts d'onde seront affectés d'une certaine différence de marche (DDM) qui a pour effet de décaler la figure d'interférence de la position du zéro de DDM. Source : Kervella (2001)

la source observée, sans être limité par le temps caractéristique de variation de la turbulence.

Une difficulté supplémentaire intervient lorsque la source d'intérêt scientifique est trop faible pour que des franges soient observables en intégrant seulement pendant un temps inférieur à la variation de la turbulence. Dans ce cas, il est nécessaire d'opérer la correction de piston sur une autre source plus brillante, affectée par la turbulence de façon analogue à la source d'intérêt (donc située suffisamment proche d'elle sur le ciel). On parle alors d'interférométrie à référence de phase.

Ces différentes techniques (optique adaptative, suivi de frange, référence de phase), nécessaires pour obtenir une bonne mesure de phase, vont permettre de pousser à son maximum la précision astrométrique de l'instrument (voir section 2.2.3) et vont permettre d'envisager de construire des images<sup>3</sup> à partir des données interférométrique à condition que l'échantillonnage du plan  $(u, v)$  soit suffisant (voir section 2.2.1).

On verra dans le chapitre 4 que la réalisation de ces performances permet d'envisager d'utiliser l'interférométrie pour mettre à l'épreuve certaines prédictions de la relativité générale.

3. L'accès aux clôtures de phases permet déjà d'obtenir des images, mais la connaissance de la phase elle-même est une information supplémentaire permettant d'obtenir une image plus précise.

# Chapitre 3

## Le trou noir au centre de la Galaxie

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Un bref aperçu du parsec central de la Galaxie</b>	<b>49</b>
3.1.1	Les principales structures	49
3.1.2	L'amas nucléaire	50
<b>3.2</b>	<b>Sagittarius A*</b>	<b>53</b>
3.2.1	Un trou noir au centre de la Galaxie ?	53
3.2.2	Alternatives au trou noir	54
<b>3.3</b>	<b>Spectre d'émission, disque d'accrétion</b>	<b>58</b>
3.3.1	Spectre d'émission	58
3.3.2	Structure d'accrétion	59

---

Le centre galactique est un environnement riche et complexe. La présente section ne vise qu'à dresser un portrait rapide et succinct du parsec central abritant la source Sgr A\*. Pour une description nettement plus complète (et en Français) on pourra se reporter à Paumard (2003). Genzel *et al.* (2010) ont publié récemment une revue exhaustive sur le sujet.

### 3.1 Un bref aperçu du parsec central de la Galaxie

#### 3.1.1 Les principales structures

Les 10 parsecs centraux de notre Galaxie sont occupés par le complexe Sagittarius A (Sgr A). La Fig. 3.1 représente les principaux constituant de ce complexe, ainsi que sa localisation dans le degré central.

Sgr A est constitué de quatre sous-structures principales. Sgr A Est est une bulle en expansion, probablement un reste de supernova, de  $7 \times 9$  parsecs. Il est possible que Sgr A Ouest et Sgr A\* soient à l'intérieur de cette bulle. Le disque circumnucléaire est probablement composé de 10 à 20 nuages moléculaires de taille caractéristique 0,5 parsec. Il se trouve en projection au bord de Sgr A Est. La minispirale Sgr A Ouest occupe les deux

parsecs centraux de la Galaxie. Cette structure est dominée par l'émission du gaz ionisé et de la poussière.

### 3.1.2 L'amas nucléaire

Le parsec central est occupé par un amas dense d'étoiles, l'amas nucléaire.

Celui-ci est constitué d'étoiles de différents types. Les premières étoiles observées (Rieke & Low 1973; Becklin & Neugebauer 1975), de loin les plus nombreuses (96% du total), sont des étoiles chaudes et vieilles (géantes et supergéantes rouges, étoiles AGB), ce qui est attendu dans un amas si proche d'un trou noir : la formation *in situ* d'étoiles jeunes y serait extrêmement perturbée par la présence de l'objet compact central du fait de l'extrême densité que doit atteindre un nuage de gaz pour former des étoiles à proximité d'un trou noir supermassif (la densité des particules de gaz doit être de l'ordre de  $10^8 \text{ cm}^{-3}$ , à comparer aux  $10^4 \text{ cm}^{-3}$  que l'on trouve usuellement dans les nuages moléculaires de la Galaxie, Alexander 2005).

Cependant, des observations ultérieures (Forrest *et al.* 1987; Allen *et al.* 1990; Paumard *et al.* 2006) ont démontré la présence d'étoiles chaudes et jeunes (quelques millions d'années), de type O et B sur la séquence principale, ou même des étoiles Wolf-Rayet (WR), probablement réparties sur deux disques tournant en sens opposé (Paumard *et al.* 2006). La distribution spatiale de ces étoiles O/B/WR présente une rupture nette : elles ne sont pas observées à moins de 0,8 seconde d'angle de la source ponctuelle Sgr A\* (Bartko *et al.* 2010).

Ces étoiles pourraient s'être formées sur place par fragmentation d'un disque d'accrétion. Cette hypothèse est soutenue par des considérations théoriques qui ont prédit, bien avant l'observation des étoiles de l'amas nucléaire galactique, l'existence sous certaines conditions de formation d'étoiles dans les disques d'accrétion (Paczynski 1978). Il est aussi envisageable que ces étoiles aient été formées dans un amas d'étoiles plus éloigné de l'objet central, qui aurait spiralé vers le centre sous l'effet de la friction dynamique, et aurait finalement été fragmenté par les forces de marées au voisinage du trou noir (Gerhard 2001). La difficulté que rencontre ce modèle est que les forces de marées risquent de fragmenter l'amas avant qu'il n'atteigne l'extrême centre galactique. Toutefois, on peut envisager qu'un trou noir de masse intermédiaire au cœur de l'amas puisse lutter contre ces effets de marées et permettre de conserver la stabilité de l'amas suffisamment longtemps. Cette hypothèse est appuyée par des observations récentes suggérant l'existence d'un trou noir de masse intermédiaire au cœur de la source IRS13E (Schödel *et al.* 2005). On trouvera une discussion de toutes ces questions dans Alexander (2005) et Genzel *et al.* (2010).

Plus surprenant encore, Eckart *et al.* (1995) ont découvert un amas dense d'étoiles faibles ( $m_K \leq 16$ ) principalement de type B occupant la seconde d'angle centrale, sans rupture de distribution spatiale observée jusqu'à Sgr A\*. Il s'agit de l'amas S (voir la Fig 3.2), constitué des étoiles les plus proches du trou noir observables à l'heure actuelle. Contrairement aux étoiles O/B/WR plus lointaines qui sont réparties dans des disques, les étoiles de l'amas S sont réparties de façon isotrope (Ghez *et al.* 2005). Les observations récentes des positions et mouvements propres de ces étoiles très proches de la source Sgr A\*

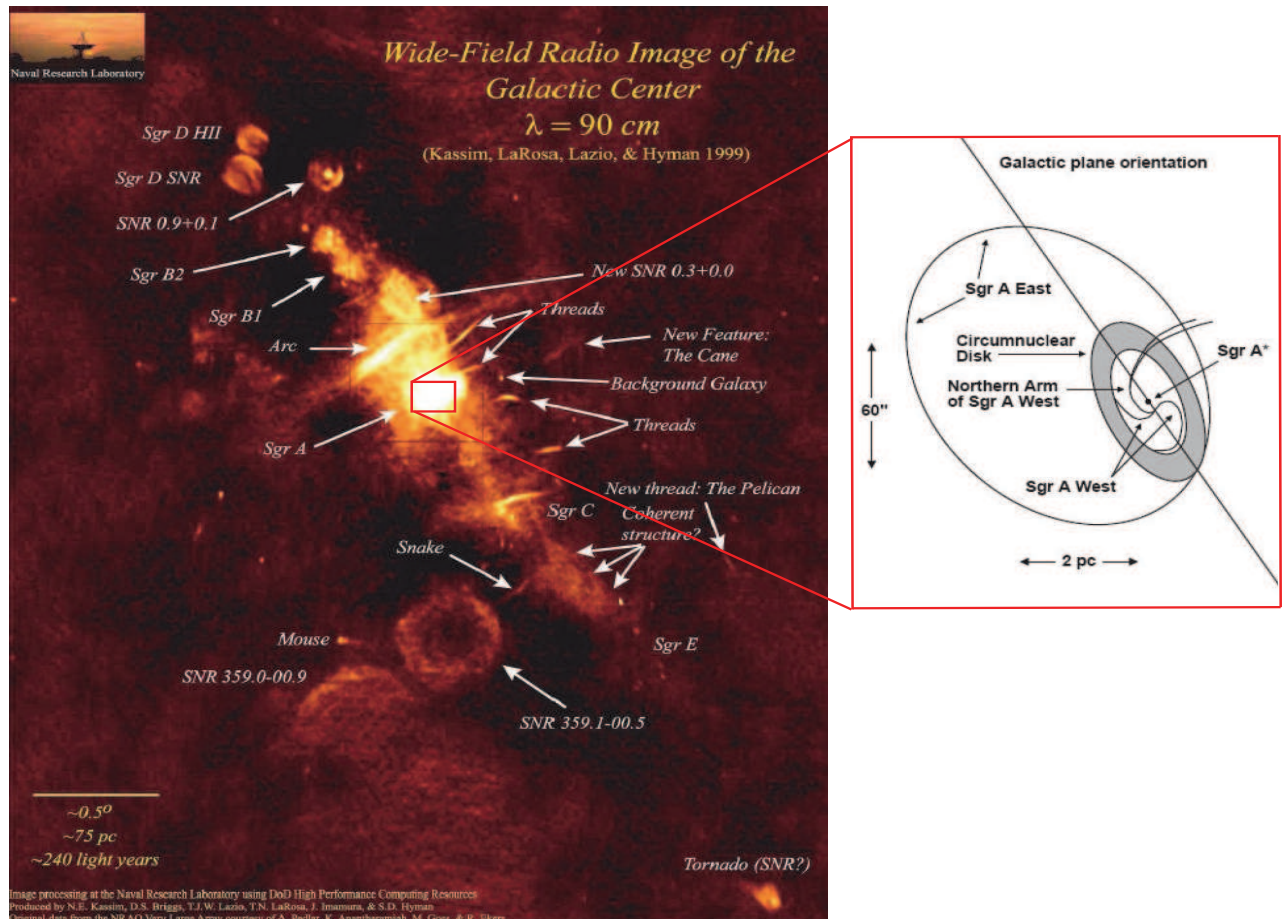


FIGURE 3.1 – Image radio (source : Kassim *et al.* 1999) du degré central ( $\approx 100 \text{ pc}$ ) faisant apparaître le complexe central Sgr A, les régions HII Sgr B1 et Sgr C, le nuage moléculaire géant Sgr B2, des restes de supernovae (SNR) ainsi que des structures filamenteuses traçant les lignes du champ magnétique central. L'encart de droite (source : Baganoff *et al.* 2003) est un schéma des quelques parsecs centraux.

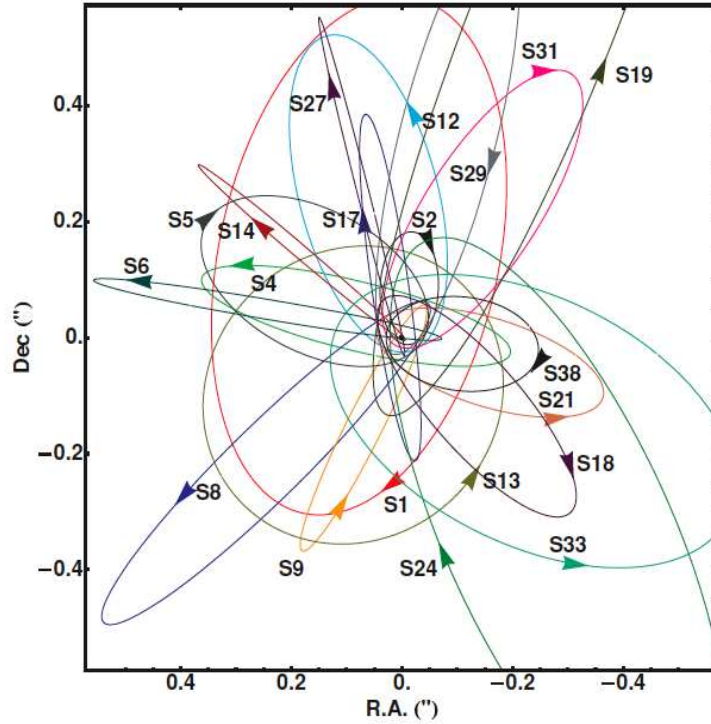


FIGURE 3.2 – L’amas d’étoiles S occupant la seconde d’angle centrale du centre galactique. Source : Gillessen *et al.* (2009).

ont permis de contraindre la distance au centre galactique ( $R_0$ ), la masse ( $M_{\text{bh}}$ ) et le mouvement propre de l’objet central avec une précision inégalée :  $R_0 = 8,0 \pm 0,6$  kpc,  $M_{\text{bh}} = 4,1 \pm 0,6 \times 10^6 M_{\odot}$  et un mouvement propre nul à l’incertitude de  $30 \text{ km s}^{-1}$  près (Ghez *et al.* 2008) ;  $R_0 = 8,33 \pm 0,35$  kpc,  $M_{\text{bh}} = 4,31 \pm 0,36 \times 10^6 M_{\odot}$  (Gillessen *et al.* 2009). Signalons que l’erreur sur la masse dans ces ajustements est complètement dominée par l’impact de l’erreur sur la distance (voir la discussion à ce propos dans Gillessen *et al.* 2009). Ceci est dû au fait que la contrainte sur la masse provient (via les lois de Kepler) de contraintes sur le demi grand axe des orbites, dont la distance physique est déduite des mesures angulaires sur le ciel via la distance au centre galactique. Les erreurs sur  $R_0$  et  $M_{\text{bh}}$  sont donc fortement corrélées.

Ces étoiles S constituent donc une sonde idéale des propriétés de l’objet compact central Sgr A\*.

## 3.2 Sagittarius A\*

### 3.2.1 Un trou noir au centre de la Galaxie ?

L'hypothèse de l'existence d'un trou noir au centre de la Galaxie a été émise pour la première fois par Lynden-Bell & Rees (1971), s'inspirant de la découverte récente des quasars et du mécanisme qui avait été proposé pour expliquer ces phénomènes : l'accrétion par un trou noir supermassif. Balick & Brown (1974) découvrent peu après l'existence d'une source compacte radio au centre de la Galaxie, qui sera nommée Sgr A\* par Brown (1982) pour la différencier du complexe plus étendu Sgr A. Des mesures de vitesse radiale du gaz ionisé à proximité du centre galactique (Wollman *et al.* 1977) ont ensuite permis, via l'utilisation du théorème du viriel, d'inférer la présence d'une masse de quelques millions de masses solaires dans le parsec central.

Grâce à l'étude de la population stellaire connue à l'époque dans l'amas nucléaire, Genzel *et al.* (1996) ont conclu que le centre galactique était constitué d'une masse centrale de  $3,0 \times 10^6 M_{\odot}$  et d'un amas stellaire de  $1,0 \times 10^6 M_{\odot}$ .

L'existence d'une source centrale compacte a été corroborée par les mesures de mouvements propres des étoiles (Eckart & Genzel 1997; Ghez *et al.* 1998). Mais les arguments les plus déterminants en faveur d'un trou noir ont été apportés par l'étude de l'accélération des étoiles S, et surtout par l'observation de l'orbite complète de l'étoile S2, dont la période est d'approximativement 15 ans, et qui passe à son périastre à seulement 1400 rayons de Schwarzschild pour un trou noir de quatre millions de masses solaires (Ghez *et al.* 2000; Schödel *et al.* 2002). Les travaux les plus récents précédemment cités (Ghez *et al.* 2008; Gillessen *et al.* 2009) ont confirmé eux aussi l'accord parfait des observations avec la présence d'un trou noir supermassif.

Il faut toutefois noter que ces tests observationnels souffrent de quelques limitations. Tout d'abord, l'étoile S2 était plus brillante que d'habitude lors de son passage au périastre en 2002, ce qui laisse supposer qu'elle pouvait être alors superposée à une autre étoile plus faible, perturbant ainsi les mesures astrométriques. Pour tenir compte de ce problème, Ghez *et al.* (2008) n'ont pas tenu compte de ce point d'observation dans leur ajustement, et Gillessen *et al.* (2009) lui ont attribué un poids plus faible. Ceci est préjudiciable puisque c'est précisément au périastre que l'étoile est la plus affectée par l'objet central. Par ailleurs, le mouvement propre de Sgr A\* n'est pas parfaitement connu, ce qui entraîne une source d'erreur supplémentaire dans les ajustements.

De plus, il est important de garder en tête que ces observations n'ont sondé le potentiel central que jusqu'à une distance de l'ordre de 1400 rayons de Schwarzschild (avec les restrictions du paragraphe précédent). Il est donc tout à fait possible que des observations de phénomènes plus proches du centre contredisent l'hypothèse du trou noir, en privilégiant un autre type d'objet qui serait très semblable à un trou noir à grande distance.

Par ailleurs, l'observation par interférométrie à très longue base (VLBI) a permis récemment de contraindre la taille de la région émettrice à  $1,3 \text{ mm}$  à seulement  $37_{-10}^{+16} (3\sigma) \mu\text{as}$  (Doleman *et al.* 2008), valeur particulièrement impressionnante si on se souvient que la taille angulaire du rayon de Schwarzschild d'un trou noir de quatre millions de masses solaires

au centre de la Galaxie vaut  $10 \mu\text{as}$  à 8 kpc. Cette valeur n'est que très marginalement en accord avec la taille de la silhouette<sup>1</sup> du trou noir qui varie entre 45 et  $50 \mu\text{as}$  selon la valeur du spin. Cependant, il est probable que l'émission détectée ne coïncide pas avec la source Sgr A\*, mais soit émise dans son voisinage, par exemple dans un disque d'accrétion ou dans un jet.

Enfin, Broderick *et al.* (2009b) ont montré que, tenant compte des observations réalisées jusqu'alors, et en imaginant que Sgr A\* est doté d'une surface émettant un rayonnement de corps noir, on aboutit à une contradiction. Ils en concluent qu'il ne peut exister de surface, ce qui est un argument fort en faveur de l'existence d'un horizon des événements. Cependant, il convient de garder en tête les limites des arguments en faveur de l'existence d'un horizon des événements, mis en lumière dans Abramowicz *et al.* (2002).

### 3.2.2 Alternatives au trou noir

#### Un amas sombre d'étoiles faibles ou de résidus stellaires

On peut imaginer que le centre galactique ne contienne pas de trou noir supermassif mais soit constitué d'un amas sombre très dense d'étoiles faibles et de résidus stellaires (étoiles à neutrons, trous noirs stellaires).

En étudiant l'orbite de l'étoile S2, Schödel *et al.* (2002) ont montré, en supposant un profil de Plummer<sup>2</sup> pour la densité, que la densité centrale de l'amas devrait alors atteindre  $10^{17} M_{\odot} \text{pc}^{-3}$ .

Un tel amas ne sera stable que si ses constituants ne s'évaporent pas (c'est-à-dire, ne s'échappent pas de l'amas sous l'effet de déflexion gravitationnelle des autres constituants de l'amas) et si l'amas n'est pas détruit par les collisions entre ses constituants. Maoz (1998) montre que le temps caractéristique de stabilité d'un amas soumis à ces deux seuls effets (qui sont les effets dominants à prendre en compte pour l'étude de la stabilité de l'amas) avec la densité centrale établie plus haut n'est que de quelques  $10^5$  ans, durée bien trop courte pour être envisageable, les étoiles S ayant une durée de vie supérieure.

#### Une boule de fermions

Viollier *et al.* (1993) ont proposé d'expliquer les masses compactes observées aux centres des galaxies par des boules de fermions massifs (dont la masse était initialement proposée de l'ordre de 17 keV). Ces fermions pourraient être des neutrinos stériles, des axinos ou des gravitinos, dont les masses supposées varient selon les modèles de 1 keV à 100 GeV (Mu-

---

1. On rappelle que la silhouette d'un trou noir est la zone d'ombre qui l'entoure en projection sur le ciel. Cette zone est plus grande que la taille angulaire de l'horizon des événements car les rayons lumineux qui passent suffisamment près de l'horizon sont courbés à tel point qu'ils finissent par tomber dans le trou noir. Voir par exemple Broderick & Narayan (2006).

2. c'est-à-dire un profil de densité en  $\rho(r) = \rho_0 \left(1 + \frac{r^2}{r_c^2}\right)^{-\frac{5}{2}}$  avec  $\rho_0 = \frac{3M}{4\pi r_c^3}$ ,  $r_c$  étant un paramètre fixant le rayon de l'amas et  $M$  étant la masse totale de l'amas.

nyaneza & Viollier 2002). Ces structures compensent l'attraction gravitationnelle par la pression de dégénérescence des fermions qui empêche l'objet de s'effondrer en trou noir.

Munyanza & Viollier (2002) ont spécifiquement étudié les orbites des étoiles S1 et S2 du centre galactique et ont montré que les mesures obtenues jusqu'alors étaient en accord avec leur modèle d'une boule de fermions massifs de 17 keV.

Cependant, les mesures de mouvement propre les plus contraignantes sur l'étoile S2 (Schödel *et al.* 2002) (qui approche à 125 UA de Sgr A\* à 600 km/s) et sur l'étoile<sup>3</sup> S0-16 (S14) (Ghez *et al.* 2005) ( qui approche à 45 UA de Sgr A\* à une vitesse de 12000 km/s) ont imposé une modification du modèle, repoussant la masse de l'hypothétique fermion massif à 76 keV (Bilic *et al.* 2003). De plus, les objets compacts les plus massifs ( $> 10^8 M_\odot$ ) ne peuvent pas être expliqués par ce nouveau modèle.

### Un gravastar

Mazur & Mottola (2004) s'appuient sur des difficultés rencontrées lorsque l'on tente de traiter un trou noir de Schwarzschild de façon semi-classique (au sens de semi-quantique) pour justifier la recherche d'une solution aux équations d'Einstein ayant une compacité proche de celle des trous noirs, tout en évitant l'apparition d'un horizon des événements et celle de la singularité centrale. Ces auteurs proposent un modèle à symétrie sphérique constitué de deux couches (le cœur et la croûte) et de deux zones de transition infiniment minces (entre le cœur et la croûte, et entre la croûte et l'extérieur). La Fig. 3.3 représente ce modèle.

Le cœur est constitué d'un vide doté d'une équation d'état de type énergie noire  $p = -\rho = cst$ . La métrique y est celle d'un espace-temps de de Sitter, qui s'écrit en coordonnées statiques  $(t, r, \theta, \varphi)$  (voir par exempleourgoulhon 2010c, où l'on trouvera une étude détaillée de l'espace-temps de de Sitter) :

$$ds^2 = - (1 - b^2 r^2) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b^2 r^2} + r^2 d\Omega^2 \quad (3.1)$$

où  $b^2 = 8\pi\rho/3$  est une constante et  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ .

La croûte est formée d'un fluide parfait dont l'équation d'état est extrême  $p = \rho$ , la vitesse du son y étant égale à la vitesse de la lumière. Une transition de phase a lieu dans cette région, qui conduit à un changement de valeur de la constante cosmologique entre l'extérieur et le cœur du gravastar, et permet d'empêcher l'apparition d'un horizon des événements.

L'extérieur est raccordé à la solution du vide de Schwarzschild.

Enfin, les deux interfaces sont caractérisées par la présence de discontinuités des coefficients métriques et des grandeurs hydrodynamiques.

On peut désormais comprendre l'étymologie du nom de cette structure : *GRA*vitationnal *V*acuum *S*TAR.

---

3. Les différentes équipes travaillant sur le centre galactique n'utilisant pas toutes la même terminologie, une même étoile peut être connue sous plusieurs noms différents. Par exemple la source S0-16 est la même que la source S14.



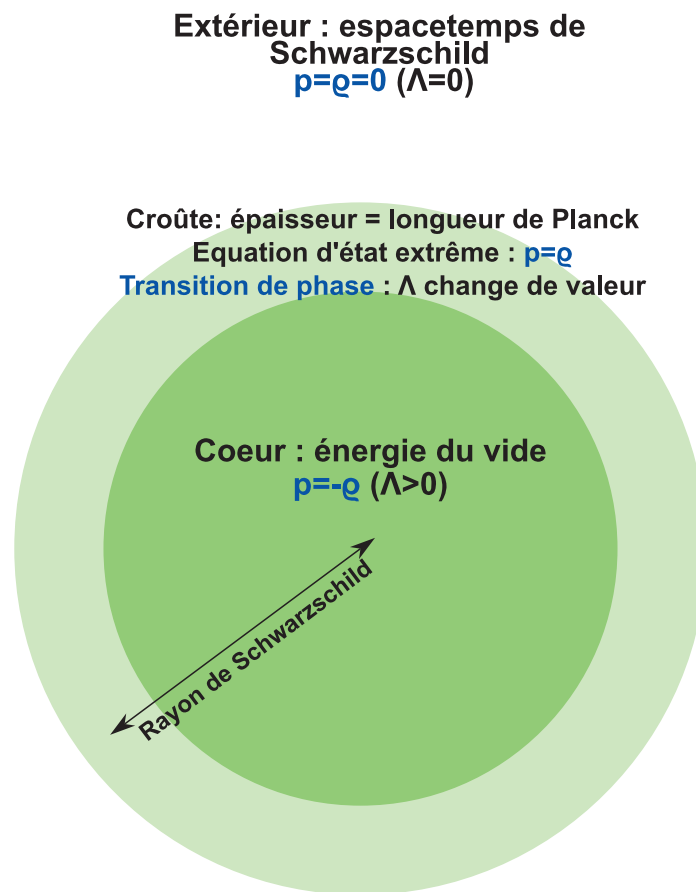


FIGURE 3.3 – Schéma d'un gravastar dans le modèle original de Mazur & Mottola (2004).

Bien qu'il évite d'avoir recours à un horizon des événements et à une singularité centrale, on constate que le modèle du gravastar fait appel à des concepts physiques qui ne sont pas forcément plus satisfaisants : cœur d'énergie noire dont la nature est inconnue, discontinuité des grandeurs physiques, transition de phase dans la croûte faisant appel à une physique semi-quantique qui ne dispose pas encore d'un soubassement théorique stable.

Cependant, ce modèle reste une des alternatives aux trous noirs les plus sérieuses, qui mérite d'être prise en compte, en particulier en ce qui concerne la nature de l'objet compact coïncidant avec la source Sgr A\*.

### Une étoile bosonique

Le modèle de l'étoile bosonique a été développé par Feinblum & McKinley (1968); Kaup (1968); Ruffini & Bonazzola (1969). Pour une introduction claire et succincte au formalisme de base on pourra consulter Sharma *et al.* (2008).

On considère une assemblée de bosons de spin 0 dont on étudie l'évolution sous l'effet de leur propre gravitation. Les équations régissant l'évolution de ce système sont donc les équations d'Einstein qui permettent de déterminer la métrique de l'espacetemps (le côté droit des équations d'Einstein n'étant plus égal à zéro, mais au tenseur énergie-impulsion du champ scalaire  $\Phi$  associé aux bosons) et l'équation de Klein-Gordon qui régit l'évolution du champ scalaire :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} &= 8\pi T_{\mu\nu}, \\ T_{\mu\nu} &= \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \Phi \partial_\sigma \Phi + V(|\Phi|^2) \right), \\ (\square + m^2) \Phi &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

où  $V(|\Phi|^2)$  représente le potentiel d'auto-interaction du champ,  $m$  la masse de chaque boson et  $\square$  est l'opérateur d'Alembertien associé à la métrique.

Afin de résoudre ce système d'équations (en symétrie sphérique), il faut déterminer le potentiel  $V$ , la masse des bosons  $m$  et les conditions aux limites. Celles-ci sont choisies en demandant que la métrique se raccorde à la métrique de Schwarzschild (dont la constante  $M$  sera interprétée comme la masse totale de l'étoile bosonique) à une certaine valeur de la coordonnée radiale  $R$  qui sera interprétée comme le rayon de l'étoile.

Le modèle initial (Ruffini & Bonazzola 1969) considérait des bosons sans auto-interaction  $V(|\Phi|^2) = \frac{1}{2} m^2 |\Phi|^2$ . Il s'ensuit alors une masse totale trop faible pour permettre aux étoiles bosoniques d'accéder au statut d'alternative plausible aux objets compacts supermassifs. Cependant, la motivation astrophysique initiale de l'étoile de bosons n'était pas celle-ci, elle était envisagée comme candidat au titre de matière noire.

En introduisant un terme d'interaction au Lagrangien (usuellement pris quartique,  $V(|\Phi|^2) = \frac{1}{2} m^2 |\Phi|^2 + \frac{1}{4} \lambda |\Phi|^4$ ), on constate alors qu'il est possible d'obtenir des objets de

masse comparable à celle des étoiles à neutrons, et même un spectre de masse allant jusqu'à  $10^{12} M_{\odot}$  en fonction du potentiel considéré (Colpi *et al.* 1986; Alcubierre *et al.* 2002). Il est également envisageable de considérer des étoiles mixtes bosons-fermions (Henriques & Mendes 2005), dotées d'un spectre de masse très large allant de  $10^{-15} M_{\odot}$  à  $10^{13} M_{\odot}$ .

Torres *et al.* (2000) analysent en détail l'éventualité que le centre galactique abrite une étoile bosonique plutôt qu'un trou noir supermassif. Ils montrent que des observations du disque d'accrétion très proche de l'horizon des événements (d'un éventuel trou noir de Kerr, l'étoile bosonique n'ayant pas d'horizon, pas plus que de surface solide) pourraient contraindre la nature de l'objet central.

Du fait de leur assise théorique solide et de l'importante littérature existant sur le sujet, les étoiles bosoniques apparaissent comme un candidat digne de considération au titre d'alternative au trou noir de Kerr.

### 3.3 Spectre d'émission, disque d'accrétion

Cette section vise à présenter succinctement le spectre d'émission de la source Sgr A\* ainsi qu'une structure d'accrétion qui permet de rendre compte de ses caractéristiques observationnelles.

#### 3.3.1 Spectre d'émission

On ne s'intéresse ici qu'à l'émission de la source Sgr A\* à l'état passif, c'est-à-dire lorsqu'elle n'est pas soumise à un sursaut de rayonnement (voir section 10.1).

La luminosité bolométrique  $L_{\text{Sgr A}^*}$  de Sgr A\* est extrêmement sub-Eddington (voir par exemple Genzel *et al.* 2010)<sup>4</sup> :

$$L_{\text{Sgr A}^*} \approx 10^{36} \text{ erg s}^{-1} \approx 10^{-8,5} L_{\text{Eddington}}. \quad (3.3)$$

La Fig. 3.4 représente le spectre d'émission de Sgr A\*<sup>5</sup>. On constate que le flux observé croît avec la fréquence, jusqu'à un maximum au niveau des longueurs d'onde sub-millimétriques (on parle en anglais de *submillimetric bump*) à environ  $5 \cdot 10^{35} \text{ erg s}^{-1}$ . Le flux diminue ensuite brutalement au niveau de l'infrarouge moyen, où seules des limites supérieures sont fournies par les observations (représentées sur la Fig. 3.4 par des flèches verticales dirigées vers le bas). En infrarouge proche, Sgr A\* est détecté à environ  $3 \cdot 10^{34} \text{ erg s}^{-1}$  (Do *et al.* 2009; Dodds-Eden *et al.* 2011). Sgr A\* est de nouveau détecté en

---

4. On rappelle que la luminosité d'Eddington correspond à la luminosité entraînant une pression radiative (équivalente à une force dirigée vers l'extérieur) capable d'équilibrer la force gravitationnelle (dirigée vers l'intérieur).

5. Pour la bonne compréhension de cette figure, on rappelle que le rayonnement Bremsstrahlung est le rayonnement généré lors de la déflexion d'une charge dans le champ électrique créé par une autre charge ; le rayonnement synchrotron est le rayonnement émis par une charge évoluant dans un champ magnétique ; l'effet Compton inverse consiste en la diffusion d'un photon par une particule, le photon gagnant de l'énergie aux dépens de la particule lors de l'interaction.

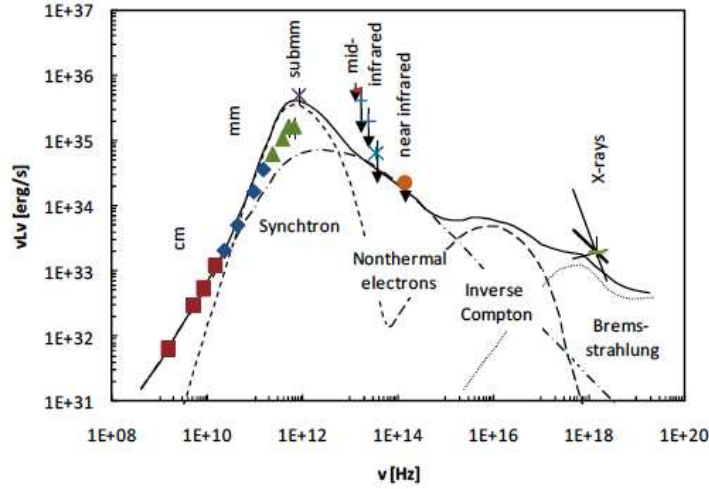


FIGURE 3.4 – Spectre de Sgr A\* à l'état passif (sans sursaut de rayonnement). Les données, en couleur, proviennent de divers auteurs dont on trouvera les références dans Genzel *et al.* (2010). Les spectres modélisés proviennent du modèle de Yuan *et al.* (2003) : en tirets courts, l'émission synchrotron d'électrons thermiques; en tirets longs, la diffusion Compton inverse des photons émis par synchrotron sur les électrons thermiques; en tirets-points, l'émission synchrotron d'une population non-thermique d'électrons; en pointillés, l'émission Bremsstrahlung des régions externes de la structure d'accrétion. Source : Genzel *et al.* (2010)

rayons X à environ  $2 \cdot 10^{33}$  erg s<sup>-1</sup> (Xu *et al.* 2006). À plus haute fréquence, la faible résolution angulaire permet difficilement de distinguer Sgr A\* de son environnement, ce qui peut entraîner des résultats d'observation contradictoires (Aharonian *et al.* 2004; Albert *et al.* 2006).

### 3.3.2 Structure d'accrétion

Aucune observation directe d'un hypothétique disque d'accrétion autour de Sgr A\* n'a été réalisée à l'heure actuelle. La taille caractéristique d'un tel disque dans les longueurs d'ondes radio est limitée à  $r_{\text{disque}} \lesssim 1$  UA (Shen 2008).

Une structure d'accrétion très plausible à l'heure actuelle et permettant de rendre compte de ces résultats observationnels est le modèle *ADAF* (pour *advection dominated accretion flow*, Narayan & Yi 1994) et plus particulièrement la version plus récente développée par Yuan *et al.* (2003) spécifiquement pour Sgr A\*, connue sous le nom de *RIAF* (pour *radiatively inefficient accretion flow* - les *RIAF* étant donc une sous-classe des *ADAF*).

Le modèle standard du disque mince d'accrétion (Shakura & Sunyaev 1973) ne peut être appliqué ici, car la luminosité prédite par ce type de modèle appliqué au cas de Sgr A\*

donne une luminosité bolométrique de l'ordre de  $10^{41}$  erg s<sup>-1</sup> (Yuan 2010), bien supérieure à la luminosité observée.

Le modèle *ADAF*, au contraire, est caractérisé par des luminosités beaucoup plus faibles. Ceci est dû au fait que les électrons sont beaucoup plus chauds et ne se refroidissent par rayonnement que très inefficacement. L'énergie est donc stockée sous forme thermique à l'intérieur du disque, plutôt que rayonnée à l'extérieur.

Le modèle *RIAF* développé par Yuan *et al.* (2003) permet de rendre parfaitement compte des observations, comme on l'a déjà observé sur la Fig. 3.4. Les émissions radio à infrarouge ont leur origine près du trou noir, de quelques rayons de Schwarzschild ( $R_S$ ) jusqu'à  $100 R_S$  typiquement. L'émission en rayons X s'effectue plus loin de l'objet compact, typiquement à  $10^5 R_S$  (Xu *et al.* 2006).

Signalons, afin de compléter cette image de l'hypothétique disque d'accrétion entourant Sgr A\*, l'étude de Cuadra *et al.* (2005) examinant l'évolution des vents stellaires accrétés à proximité du trou noir. Selon ce modèle, le disque d'accrétion résultant serait créé continuellement par éjection de masse stellaire des étoiles environnantes, et pourrait être également régulièrement détruit, en particulier lors d'explosions de supernovae suffisamment proches.

Enfin, précisons que le modèle *RIAF* évoqué ci-dessus n'est pas la seule tentative pour expliquer le spectre de Sgr A\* à l'état passif. On peut en particulier citer le modèle du jet permanent (Falcke & Markoff 2000), capable également de rendre compte de façon très satisfaisante des observations.

# Chapitre 4

## L'instrument GRAVITY

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Description succincte de l'instrument</b>	<b>61</b>
4.1.1	Concept instrumental	61
4.1.2	Performances visées pour l'instrument	64
<b>4.2</b>	<b>Les cas scientifiques de GRAVITY</b>	<b>64</b>
4.2.1	Le centre galactique	64
4.2.2	Autres cas scientifiques de l'instrument	65

---

## 4.1 Description succincte de l'instrument

### 4.1.1 Concept instrumental

GRAVITY est un recombineur de faisceaux qui permettra de combiner la lumière dans l'infrarouge proche issue des quatre télescopes principaux de 8 m, ou des télescopes auxiliaires de 1,8 m du *Very Large Telescope* (VLT) à Paranal, au Chili. Sa première lumière astrophysique aura lieu en 2014.

L'instrument est composé de trois parties distinctes : le recombineur lui-même qui sera installé dans le laboratoire de l'interféromètre du VLT (le *Very Large Telescope Interferometer* - VLTI), un système d'optique adaptative infrarouge pour chaque télescope, et un système de métrologie laser qui calculera précisément les différences de marche entre les différentes voies de l'instrument. La Fig. 4.1 représente les quatre télescopes principaux du VLT ainsi que le recombineur de faisceaux et l'un des systèmes d'optique adaptative. La Fig. 4.2 schématise les grandes lignes du concept de l'instrument, qui vont être présentées de façon succincte dans la suite de cette section.

Pour une présentation plus détaillée de l'instrument, on pourra consulter Eisenhauer *et al.* (2008); Gillessen *et al.* (2010); Eisenhauer *et al.* (2011).

On considère dans ce qui suit une observation du centre galactique. La présentation qui suit est illustrée pas à pas sur la Fig. 4.2.

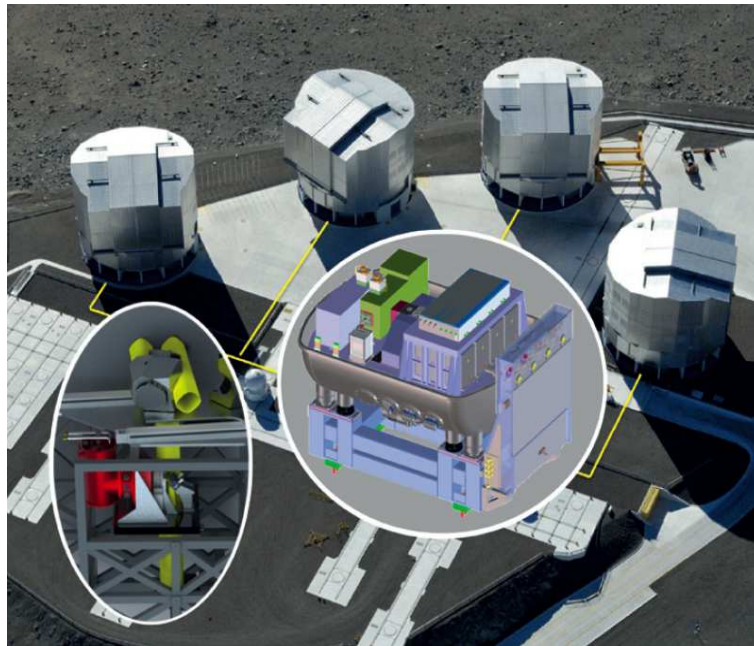


FIGURE 4.1 – Les quatre télescopes principaux du *Very Large Telescope* (VLT) à Paranal au Chili. Le recombineur de faisceaux de GRAVITY est représenté dans l'encart central, il sera situé dans la salle de contrôle du VLTI. L'encart de gauche représente l'un des quatre analyseurs de front d'onde de l'instrument. Source : Eisenhauer *et al.* (2011)

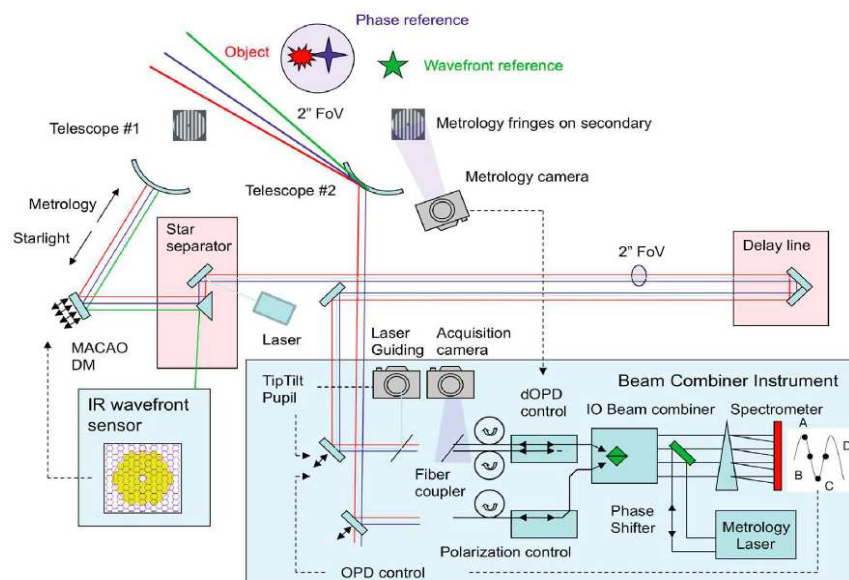


FIGURE 4.2 – Design de l'instrument GRAVITY. Les différents éléments apparaissant dans ce schéma sont présentés dans le texte. Source : Eisenhauer *et al.* (2011)

L'instrument va observer en permanence trois sources simultanément. On distingue : la voie scientifique (constituée par exemple d'une source en orbite proche autour du trou noir), la voie d'optique adaptative (constituée de l'étoile IRS 7) qui permettra de corriger la distorsion du front d'onde générée par l'atmosphère, et la voie de référence de phase (constituée de l'étoile IRS 16C) qui sera nécessaire pour la mesure précise de la phase de la figure d'interférence.

Le faisceau d'optique adaptative est séparé des deux autres grâce au séparateur d'étoiles de l'instrument PRIMA (Delplancke *et al.* 2004). Il est ensuite dirigé vers l'analyseur de front d'onde qui permet d'effectuer la boucle de correction du front d'onde grâce au miroir déformable de MACAO (déjà en place au VLT), la même correction étant appliquée aux deux autres voies.

Les voies scientifique et de référence de phase sont acheminées dans les lignes à retard du VLTI qui permettent d'égaliser les chemins optiques parcourus par les faisceaux issus des différents télescopes. Arrivant au recombineur de faisceaux, elles sont introduites dans des fibres monomodes, qui ont un champ de vue gaussien de largeur à mi-hauteur égale à environ 60 mas (cette largeur à mi-hauteur vaut précisément  $\lambda/D$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde du rayonnement et  $D$  le diamètre d'un télescope).

A ce stade, les fronts d'onde arrivant en entrée du recombineur sont plans (grâce à l'optique adaptative qui a corrigé les distorsions atmosphériques) mais sont affectés par une certaine différence de marche différentielle entre les télescopes : le piston atmosphérique présenté dans la section 2.2.4. C'est à la correction de ce piston que va servir la voie de référence de phase.

Une fois les faisceaux des voies scientifique et de référence de phase recombinaés, on obtient après dispersion par un prisme la figure d'interférence. Comme on l'a vu dans la section 2.2.4, l'effet du piston atmosphérique est de faire varier à la cadence de la turbulence atmosphérique (typiquement  $\tau=10$  ms) la position du maximum de la figure d'interférence. Il est donc impossible d'intégrer pendant un temps supérieur à  $\tau$ , ce qui a pour conséquence l'impossibilité d'observer quoi que ce soit sur la voie scientifique, trop faible pour permettre d'obtenir un signal en un temps d'intégration si faible. Cependant, la voie de référence de phase étant nettement plus brillante, il est possible de détecter les franges d'interférence même sur une aussi courte durée. On peut alors corriger les effets du piston atmosphérique en astreignant la figure d'interférence de la voie de référence à une position fixe via une correction en temps réel : c'est le rôle du suiveur de frange (Choquet *et al.* 2010) qui permet de corriger la part de chemin optique due au piston en agissant sur la position d'un miroir (voir la flèche *OPD control* sur le schéma 4.2) commun à la voie de référence et à la voie scientifique. On peut ainsi observer la figure d'interférence de l'objet scientifique d'intérêt.

Par ailleurs, la position de la figure d'interférence de la voie scientifique va être décalée par rapport à celle de la voie de référence de phase étant donné que les deux sources sont éloignées d'une certaine distance angulaire sur le ciel. Ainsi, si on appelle  $\mathbf{S}_{sc}$  et  $\mathbf{S}_{ref}$  les vecteurs position sur le ciel des sources scientifique et de référence,  $\mathbf{B}$  le vecteur joignant les deux télescopes, et si  $\Delta\mathbf{S} = \mathbf{S}_{sc} - \mathbf{S}_{ref}$ , alors les réseaux de franges des deux voies seront séparés d'une différence de marche de  $\Delta\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ . La connaissance précise de cette différence de marche différentielle entre les voies scientifique et de référence est permise par



le laser de métrologie (*metrology laser*<sup>1</sup> sur la Fig. 4.2). Ce laser est envoyé en remontant tout le chemin optique, à travers la voie scientifique et la voie de référence, à partir du recombineur jusqu'au miroir secondaire de chaque télescope. Une figure d'interférence est alors produite sur ce miroir, qui permet de déduire la différence de marche différentielle entre les deux voies (*dOPD control* sur le schéma 4.2). On est ainsi en mesure de déterminer le zéro de différence de marche de la voie scientifique, qui est maintenue à cette position au moyen de la compression ou de l'étirement d'une ligne à retard fibrée (le *Fiber coupler* indiqué sur le schéma 4.2 injecte la lumière provenant de chacune des deux voies dans sa ligne à retard fibrée).

A ce stade, la figure d'interférence de la voie scientifique est stabilisée (grâce au suiveur de frange) et le zéro de différence de marche est connu (grâce à la métrologie). On peut donc déterminer les observables interférométriques de l'objet d'étude que sont le contraste des franges et la phase.

### 4.1.2 Performances visées pour l'instrument

Pour les cas scientifiques qui nous intéresseront dans la suite, la principale performance de GRAVITY est sa précision astrométrique de  $10 \mu\text{as}$  sur une source scientifique de magnitude en bande K  $m_K = 15$  pour un temps d'intégration de 5 minutes, cette précision devant rester stable pendant plusieurs heures.

Il faut s'attarder un instant sur cette valeur :  $10 \mu\text{as}$  représente la taille angulaire d'une pièce de 1€ sur la Lune observée depuis la Terre... Plus scientifiquement, c'est précisément la taille angulaire de l'horizon des événements du trou noir central de la Galaxie, Sgr A\*.

Ainsi, GRAVITY permettra de suivre des phénomènes dynamiques d'une taille comparable à l'horizon du trou noir central, avec un temps d'intégration de quelques minutes seulement.

## 4.2 Les cas scientifiques de GRAVITY

### 4.2.1 Le centre galactique

L'analyse de la population stellaire du centre galactique (Genzel *et al.* 2003b; Paumard *et al.* 2006), extrapolée au  $60 \text{ mas}$  centrales (correspondant au diamètre du champ de vue gaussien de GRAVITY), permet de prédire le nombre d'étoiles que l'instrument pourra observer. La Fig. 7 de Genzel *et al.* (2003b) permet d'extrapoler une densité numérique d'environ 80 étoiles vérifiant  $10 < m_K < 17$  par seconde d'angle au carré ayant une distance au centre inférieure à  $30 \text{ mas}$  (c'est-à-dire, dans le champ de vue de GRAVITY). Il y a donc  $80 \times \pi \times 0.03^2 \approx 0.2$  étoile dans le champ de vue de l'instrument, soit moins d'une étoile continûment détectable. Cependant, comme la densité numérique augmente lorsque

---

1. Ce laser de métrologie ne doit pas être confondu avec le laser de guidage (*laser guiding system* sur la Fig. 4.2) qui permet de corriger les perturbations du front d'onde induites par le VLTI lui-même.

le rayon diminue, on pourra détecter davantage d'étoiles moins brillantes, soit à  $m_K > 17$ , mais ceci demandera un plus long temps d'intégration.

On a vu dans la section 3.2 que l'étoile S2, très proche du trou noir (125 UA au périastre), a une période d'une quinzaine d'années. Les nouvelles étoiles faibles qui seront très probablement détectées par GRAVITY auront une période de l'ordre de l'année, permettant de mettre en lumière la précession relativiste de Schwarzschild du périastre de leurs orbites (Paumard *et al.* 2008; Gillessen *et al.* 2010).

Par ailleurs, la meilleure précision que permettra GRAVITY sur les mouvements propres et les accélérations des étoiles du centre galactique, et de ce fait sur leurs éléments orbitaux, permettra probablement de faire progresser le débat sur la formation des étoiles aux abords du trou noir central qui a été présenté dans la section 3.1.

De plus, la source Sgr A\* présente des sursauts intenses de rayonnement en submillimétrique, infrarouge et en rayons X. Dans l'infrarouge proche, ces événements sont observables statistiquement une à deux fois par jour (voir la section 10.1), durent une à deux heures, et présentent une pseudo-période de l'ordre de la vingtaine de minutes. La physique sous-jacente à ces événements, et l'existence même d'une pseudo-période, sont très débattues et aucun consensus n'a encore émergé, comme on le verra dans la section 10.1. Il est possible que ces phénomènes soient dus à une boule d'électrons chauffés par reconnexion magnétique dans un disque d'accrétion entourant le trou noir, et qui orbiterait sur une orbite proche de l'ISCO : c'est le cadre proposé par le modèle dit du point chaud. Avec sa précision astrométrique de l'ordre de la taille angulaire du rayon de Schwarzschild du trou noir, GRAVITY est l'instrument idéal pour mettre à l'épreuve ce modèle : on verra dans le chapitre 10 que l'instrument pourra être utilisé pour contraindre le mouvement d'un éventuel point chaud.

### 4.2.2 Autres cas scientifiques de l'instrument

On se reportera à Gillessen *et al.* (2010) pour une description plus détaillée des cas scientifiques en dehors du centre galactique.

GRAVITY ne se limitera pas à l'étude du centre de notre Galaxie. Sa précision astrométrique permettra d'étudier les noyaux actifs des galaxies situées à moins de 20 Mpc à des échelles de l'ordre de 0,5 pc, permettant de sonder les régions les plus internes des galaxies proches.

L'instrument permettra également d'étudier le mouvement et l'accélération des étoiles dans certains amas globulaires de la Galaxie, permettant de mettre à l'épreuve l'hypothèse que leur centre abrite un trou noir de masse intermédiaire (de  $10^2$  à  $10^4 M_\odot$ ).

GRAVITY permettra d'étudier les disques circumstellaires, berceaux des planètes en formation. L'instrument permettra d'avoir accès à des échelles inexplorées jusqu'à maintenant dans cette sorte d'objet, atteignant l'échelle de l'unité astronomique pour les objets stellaires jeunes les plus proches (Eisenhauer *et al.* 2011).

Enfin, GRAVITY sera capable de mettre en lumière la fluctuation de position du photocentre d'une étoile lors du passage d'une planète devant la ligne de visée. L'instrument pourra donc également être utilisé pour la recherche d'exoplanètes.



## Deuxième partie

# Performance astrométrique de l'instrument GRAVITY



# Introduction

On a vu dans le chapitre 4 que la précision astrométrique visée pour l'instrument GRAVITY est de  $10 \mu\text{as}$ , c'est-à-dire la taille angulaire de l'horizon des événements du trou noir central de la Galaxie, Sgr A\*.

Cette partie vise à démontrer que cet objectif ambitieux est réalisable, et que les caractéristiques de l'instrument lui permettront de l'atteindre en faisant appel à un mode d'utilisation particulier de l'instrument, le mode imageur.

Le chapitre 5, après avoir rappelé la méthode de détection astrométrique la plus classique à l'heure actuelle en interférométrie, va présenter les caractéristiques de l'astrométrie en mode imageur et les avantages qui en découlent. Le recours à la reconstruction d'image induit l'apparition de bruits particuliers qui seront décrits dans la suite. On décrira enfin l'algorithme suivi pour simuler l'acquisition des observables interférométriques, reconstruire une image, et en déduire l'information astrométrique.

Le chapitre 6 a pour but de déterminer la précision astrométrique de l'instrument GRAVITY en mode imageur en fonction des caractéristiques du champ de vue considéré.

On va s'intéresser plus particulièrement à la précision astrométrique obtenue en fonction du nombre de sources ponctuelles présentes et de leur magnitude intégrée sur le champ de vue. Ces résultats sont importants pour les perspectives d'observations des populations stellaires les plus proches du trou noir central, qui pourront servir de sondes pour certains effets relativistes (voir à ce propos Paumard *et al.* 2008; Will 2008).

On va ensuite étudier la précision astrométrique dont l'instrument est capable lorsque le champ de vue est constitué d'une source mobile et de magnitude variable. Le cas scientifique en perspective est l'étude des sursauts de rayonnement du trou noir central qui ont été présentés succinctement au chapitre 4 et qui seront étudiés en détail au chapitre 10. Si ces événements sont dus à de la matière en orbite très serrée autour de Sgr A\*, comme le propose le modèle dit du point chaud, ces sursauts constitueront une sonde idéale des propriétés de l'espace-temps au voisinage immédiat d'un trou noir supermassif. Il est donc important de déterminer avec quelle précision l'instrument GRAVITY sera capable de suivre l'évolution de ces bouffées de rayonnement.

Les résultats de cette partie ont été obtenus en collaboration avec Thibaut Paumard (LESIA), Laurent Mugnier (ONERA), Frank Eisenhauer (MPE, Garching) et Stefan Gillessen (MPE, Garching)



# Chapitre 5

## Astrométrie en mode imageur

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Mesure astrométrique en interférométrie . . . . .</b>	<b>71</b>
5.1.1	Méthode classique . . . . .	71
5.1.2	Intérêt du mode imageur . . . . .	73
<b>5.2</b>	<b>Simulation du bruit instrumental induit par GRAVITY . . .</b>	<b>74</b>
5.2.1	Bruit de détection . . . . .	75
5.2.2	Fluctuations du rapport de Strehl . . . . .	75
5.2.3	Bruits sur la visibilité complexe . . . . .	76
<b>5.3</b>	<b>Simulation des données observationnelles . . . . .</b>	<b>77</b>

---

## 5.1 Mesure astrométrique en interférométrie

### 5.1.1 Méthode classique

Considérons un interféromètre à deux télescopes observant deux sources. L’une de ces sources (appelée “référence” dans la suite) définit une référence de position sur le ciel et on souhaite déterminer la position relative de la deuxième source (dite “astrophysique” dans la suite), supposée suffisamment proche pour être affectée par l’atmosphère de la même façon que la source de référence (on dit alors que les deux sources sont dans le même domaine d’isoplanétisme). La correction du front d’onde par optique adaptative permet d’obtenir une surface d’onde plane au niveau de chaque télescope, mais les fronts d’ondes sont affectés d’une certaine différence de marche les uns par rapport aux autres. C’est l’effet de piston atmosphérique illustré sur la Fig. 2.6. On a vu dans la section 2.2.4 que ce décalage des fronts d’onde “en marche d’escalier” a pour effet d’introduire un décalage de la phase par rapport à la position du zéro de différence de marche (définie par la position de la frange centrale de la source de référence), que l’on note  $\Delta\varphi_{\text{piston}}$ .

De plus, la différence de position angulaire des sources sur le ciel se traduit elle aussi par une séparation des paquets d’ondes de la source de référence et de la source astrophysique.



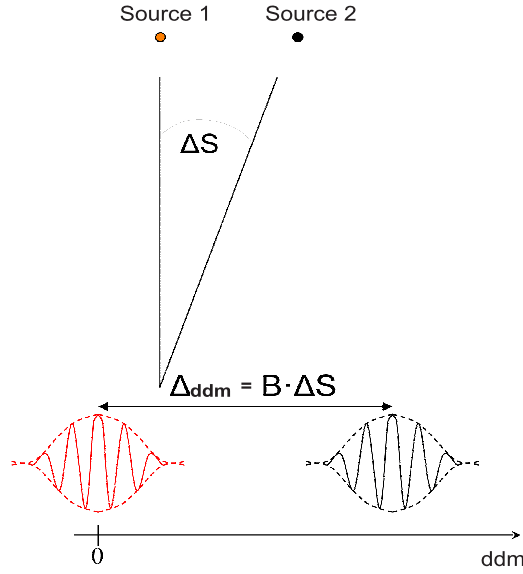


FIGURE 5.1 – Méthode astrométrique standard en interférométrie, illustrée à une dimension. On veut remonter à l'écart de position angulaire entre deux sources à partir de l'écart entre leur figures d'interférence. L'écart entre les phases des figures d'interférence est relié à la différence de marche (ddm)  $\Delta_{\text{ddm}}$  entre les positions des maxima des interférogrammes par  $\Delta\varphi_{\text{geom}} = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta_{\text{ddm}}$ . Crédit : G. Perrin.

En effet, si l'on note  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$  les vecteurs position des deux sources sur le ciel, si  $\Delta\mathbf{S} = \mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1$ , et si  $\mathbf{B}$  représente le vecteur de base joignant les deux télescopes, l'écart des positions des figures d'interférence des deux sources vérifie :

$$\Delta\varphi_{\text{geom}} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{B} \cdot \Delta\mathbf{S} \quad (5.1)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde d'observation du rayonnement, que l'on suppose ici monochromatique. La Fig. 5.1 illustre cette dernière équation.

La différence totale, due au piston atmosphérique et à la séparation angulaire des sources est simplement la somme des deux contributions :

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{\text{piston}} + \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{B} \cdot \Delta\mathbf{S} \quad (5.2)$$

Si l'on est capable de mesurer cet écart de phase, on peut remonter à la position relative de la source astrophysique, aux bruits (de piston et de mesure) près.

Cette méthode astrométrique dépend fortement de deux hypothèses qui ont été faites ici : les sources doivent être ponctuelles et isolées. Que l'une des sources soit étendue, ou que d'autres sources soient présentes dans le champ de vue de l'instrument, le terme de phase ne sera plus aussi simple que ce que l'on a développé dans ce qui précède. En particulier, si

la source de référence est étendue, la phase intrinsèque de la source de référence risque de ne plus être nulle, ce qui fausse la détermination du point de différence de marche nulle.

De plus, même dans le cadre de l'hypothèse de sources ponctuelles et isolées, on peut imaginer que l'une des sources, bien que fixe, voit son intensité varier, ce qui se traduira par une variation du photocentre du champ de vue, et par la détection d'un signal astrométrique alors même qu'aucun mouvement n'a eu lieu. On peut même imaginer un cas extrême pour lequel un mouvement réel ne serait pas mesurable, pour peu que le photocentre reste immobile : c'est le cas pour une binaire parfaitement équilibrée par exemple.

Dans ces cas plus complexes, la méthode standard décrite schématiquement dans ce qui précède peut tout de même être utilisée, en faisant appel à un ajustement de modèle afin de déterminer le modèle le plus vraisemblable compte tenu des données observées. Cependant, si le champ de vue est complexe, le modèle imposera de nombreux paramètres qu'il sera difficile de contraindre en même temps.

Il est de ce fait intéressant d'étudier une méthode astrométrique qui puisse faire l'économie du recours à un ajustement, ou du moins qui limite la part du recours a priori.

### 5.1.2 Intérêt du mode imageur

On peut faire l'économie du postulat d'un modèle en utilisant un interféromètre en mode imageur. Pour ce faire, on veut reconstruire une image du champ de vue observé à partir des visibilités complexes mesurées. Cette transformation se fait en utilisant le théorème de Zernicke - van Cittert (Eq. 2.9) qui relie les visibilités complexes à la transformée de Fourier de l'image observée : on n'a donc jamais besoin de faire appel à une connaissance a priori du milieu étudié.

Cette propriété est particulièrement intéressante si l'on se souvient que l'environnement proche de Sgr A\* est probablement complexe : un modèle adapté, dépendant d'un certain nombre de paramètres, pourrait être difficile à déterminer.

Cependant, l'algorithme de reconstruction d'image qui va être utilisé dans la suite, CLEAN (Högbom 1974), est fondé sur l'hypothèse d'un champ de vue constitué d'un petit nombre de sources ponctuelles. Hors de ce contexte, l'algorithme ne permet plus de reconstruire proprement l'image. Les résultats qui suivent sont donc fondés sur l'hypothèse implicite que le champ de vue est suffisamment simple pour que CLEAN puisse être utilisé. L'utilisation du mode imageur pour des cas plus complexes nécessiterait de faire appel à des algorithmes nettement plus évolués (voir les algorithmes de reconstruction d'image MIRA et WISARD, Thiébaud 2008; Meimon *et al.* 2008) qui ne seront pas utilisés dans ce chapitre. Ces algorithmes pouvant faire appel à certaines connaissances a priori sur le champ de vue pour régulariser la reconstruction, il peut sembler que l'on perd alors l'intérêt principal du mode imageur. Pourtant, la connaissance a priori utilisée par les algorithmes de reconstruction d'image est nettement moins contraignante que celle qui est injectée dans un ajustement de modèle. Pour une comparaison des ajustements de modèle avec l'utilisation d'algorithmes de reconstruction d'image, on pourra consulter Le Besnerais *et al.* (2008).

Ce chapitre et le suivant se proposent de démontrer que le mode imageur de l'instrument GRAVITY (voir chapitre 4), dans la limite d'un champ de vue composé de sources

ponctuelles et peu nombreuses, permet d'obtenir une précision astrométrique scientifiquement significative dans la perspective d'une utilisation en vue de tester des phénomènes gravitationnels en champ fort au voisinage du trou noir central Sgr A\* (voir chapitre 10).

## 5.2 Simulation du bruit instrumental induit par GRAVITY

Le recours au mode imageur d'un instrument tel que GRAVITY donne naissance à des bruits d'origines diverses qui vont affecter la précision de la mesure astrométrique. Cette section présente ces différentes sources de bruits.

Commençons par décrire la mesure des visibilité complexes en l'absence de bruit de mesure.

On appelle  $V_{\text{obj}}$  et  $\varphi_{\text{obj}}$  les visibilité et phase intrinsèques d'un objet astrophysique observé par l'instrument (par exemple, une étoile en orbite autour du trou noir central). Ces quantités intrinsèques sont celles qui seraient mesurées en l'absence de tout bruit de mesure et de toute perturbation atmosphérique. Ce sont ces quantités que l'on souhaite mesurer avec la plus grande précision possible, pour chaque ligne de base de l'instrument. On pourra alors utiliser le théorème de Zernicke - van Cittert pour déterminer l'image de l'objet étudié.

L'instrument GRAVITY, comme on l'a vu dans le chapitre 4, est doté de six lignes de base. Le recombineur de faisceaux va superposer les intensités  $I_p$  et  $I_q$  de chaque paire de télescopes  $p$  et  $q$ . L'intensité courbe pose<sup>1</sup> résultante s'écrit en fonction de la différence de phase  $\delta\varphi$  entre les trajets parcourus par la lumière en provenance des deux télescopes :

$$I(\delta\varphi) = I_p + I_q + 2\sqrt{I_p I_q} V_{\text{obj}} \cos(\delta\varphi + \varphi_{\text{obj}} + \varphi_{\text{piston,court}}) \quad (5.3)$$

où  $\varphi_{\text{piston,court}}$  est la phase due au piston atmosphérique courbe pose.

La mesure de quatre échantillons de cette fonction permet de déterminer la visibilité complexe. En effet, si l'on est capable de mesurer :

$$\begin{aligned} A &= I(0), \\ B &= I\left(\frac{\pi}{2}\right), \\ C &= I(\pi), \\ D &= I\left(\frac{3\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (5.4)$$

il est facile de montrer qu'on a alors :

$$V_{\text{obj}} e^{i\varphi_{\text{obj}}} = 2 \frac{(A - C) - i(B - D)}{A + B + C + D}. \quad (5.5)$$

---

1. C'est-à-dire avec un temps d'intégration inférieur au temps d'évolution de la turbulence, qui est de l'ordre de la milliseconde

La suite de cette section va chercher à déterminer l'équivalent bruité de l'équation précédente, après avoir passé en revue les différentes sources de bruits instrumentaux affectant la mesure.

### 5.2.1 Bruit de détection

Commençons par rappeler quelques définitions. L'efficacité quantique du détecteur est égale au rapport du nombre de photo-électrons créés par effet photoélectrique au nombre de photons incidents. Le courant d'obscurité est le signal détecté par l'instrument lorsqu'il n'est pas exposé à la lumière; ce signal est causé par le bruit thermique de l'instrument lui-même, et augmente avec le temps d'intégration. Lorsque les photo-électrons accumulés dans chaque pixel de l'écran sont lus, un certain bruit de lecture est ajouté au signal, indépendamment du temps d'intégration. Enfin, le bruit de photon est dû à la nature aléatoire de l'événement de détection d'un photon : si le détecteur reçoit en moyenne  $N$  photons durant une durée  $\tau$ , le nombre de photons effectivement détectés pendant une durée  $\tau$  suivra une loi de Poisson ayant un écart-type de  $\sqrt{N}$ .

On appelle  $N_{\text{ph}}$  le nombre de photons arrivant depuis chacun des  $N_{\text{tel}} = 4$  télescopes formant l'instrument. Chaque lot de  $N_{\text{ph}}$  photon est réparti entre les  $N_{\text{tel}} - 1$  autres télescopes. Il y a donc, dans chaque ligne de base joignant deux télescopes,  $\frac{2N_{\text{ph}}}{N_{\text{tel}} - 1}$  photons.

Soit alors  $T$  le facteur de transmission de l'instrument, multiplié par son efficacité quantique. Sachant que l'intensité combinée pour chaque ligne de base est répartie sur quatre sous-faisceaux correspondant aux quatre échantillons  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ , le nombre moyen de photo-électrons par sous-faisceau et par ligne de base vaut :

$$\langle m \rangle = \frac{2N_{\text{ph}}T}{4(N_{\text{tel}} - 1)}. \quad (5.6)$$

D'où l'on déduit le bruit de photon :  $\sigma_{\text{phot}} = \sqrt{\langle m \rangle}$ .

Pour un bruit de lecture  $\sigma_{\text{RON}}$  donné et un taux d'électrons participant au courant d'obscurité de  $N_{\text{obscur}}$ , on déduit la variance du bruit de détection pour un temps d'intégration de  $\tau$  :

$$\sigma_{\text{detec}}^2 = \sigma_{\text{phot}}^2 + \sigma_{\text{RON}}^2 + N_{\text{obscur}} \tau. \quad (5.7)$$

En supposant que le bruit de détection suit une distribution gaussienne, on peut déduire de cette expression quatre réalisations de bruits  $n_A, n_B, n_C, n_D$  affectant les signaux  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .

### 5.2.2 Fluctuations du rapport de Strehl

La qualité de la correction d'optique adaptative du front d'onde est évaluée par le rapport de Strehl, qui détermine le rapport du pic principal de la PSF corrigée à celui que l'on aurait si les télescopes étaient limités par la diffraction de leur ouverture. Ce rapport de Strehl fluctue au cours du temps, ce qui donne lieu à des bruits sur les intensités

transmises par les télescopes,  $I_p$  et  $I_q$ , puisque la quantité de photons injectés dans les fibres est proportionnelle au rapport de Strehl (voir à ce sujet Haubois 2009).

On note  $n_p$  et  $n_q$  deux réalisations de ces bruits.

### 5.2.3 Bruits sur la visibilité complexe

Pour un temps de pose inférieur au temps d'évolution de la turbulence, la visibilité complexe mesurée en faisant appel à l'Eq. 5.5 vaut :

$$\mathbf{V}_{\text{courte pose}} = V_{\text{obj}} e^{i(\varphi_{\text{obj}} + \varphi_{\text{piston, court}})}. \quad (5.8)$$

Dans les simulations qui vont suivre, le temps d'intégration est choisi égal à 100 s. La visibilité complexe associée à cette intégration longue pose s'écrit donc :

$$\mathbf{V}_{\text{sc}} = C V_{\text{obj}} e^{i(\varphi_{\text{obj}} + \varphi_{\text{piston}})}, \quad (5.9)$$

où  $C$  est un paramètre de contraste compris entre 0 et 1, et  $\varphi_{\text{piston}}$  est la phase associée au piston atmosphérique longue pose, résultat d'une moyenne des pistons courte pose. L'indice *sc* associé à la visibilité indique qu'il s'agit de la visibilité complexe de la voie scientifique. On se souvient en effet que GRAVITY possède également une voie de référence de phase.

Cette source de référence de phase va permettre d'éliminer le terme de piston atmosphérique. En effet, le suiveur de franges de l'instrument a précisément pour but d'assigner les franges d'interférences de la source de référence à une position fixe, et d'appliquer la même correction à la source d'intérêt scientifique. Deux sources de bruits vont polluer cette correction : l'écart angulaire entre la source scientifique et la référence va se traduire par un piston différent dans les deux voies ; les capacités du suiveur de franges entraîneront une correction imparfaite.

La référence étant à une certaine distance angulaire de la source scientifique, le piston atmosphérique n'affecte pas les deux sources strictement de la même façon. La correction du piston de l'objet scientifique par la valeur du piston mesurée sur la référence entraîne une erreur dite d'anisopistonisme qui, pour des conditions atmosphériques typique de Paranal, est donnée dans Delplancke (2008); Shao & Colavita (1992) :

$$\sigma_{\text{piston res}}[\text{arcsec}] = 370 \frac{L_0[\text{m}]^{\frac{1}{3}} \theta[\text{rad}]}{B[\text{m}] \sqrt{\tau[\text{s}]}} \quad (5.10)$$

où  $B$  est la ligne de base,  $L_0$  désigne l'échelle externe de la turbulence,  $\tau$  le temps d'intégration, et l'indice *res* désigne une quantité résiduelle.

Si l'on note  $\alpha_{\text{piston res}}$  une réalisation de cette erreur, en supposant gaussienne la distribution, on peut en déduire l'erreur d'anisopistonisme affectant la phase :

$$\varphi_{\text{piston res}} = \frac{2\pi}{\lambda} B \alpha_{\text{piston res}}. \quad (5.11)$$

Les capacités limitées du suiveur de franges se traduisent elles par l'existence d'un terme de phase résiduelle  $\varphi_{\text{SF res}}$ .

Enfin, la position angulaire de l'objet de référence n'est jusqu'ici connue que relativement à la référence. Afin de connaître sa position absolue, il faut connaître le terme de phase imposé par la séparation angulaire des deux sources,  $\varphi_{\text{met}} = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ , où on a réutilisé les notations de la section 5.1.1. Cette phase est obtenue grâce au système métrologique de l'instrument, qui permet de la mesurer avec une erreur de  $\varphi_{\text{met res}} = 0,07$  rad Rabien *et al.* (2008).

Il est désormais possible d'écrire les valeurs bruitées mesurées pour la visibilité et la phase :

$$\begin{aligned}\hat{V}_{\text{sc}} &= C V_{\text{obj}} + n_{V_{\text{sc}}}, \\ \hat{\varphi}_{\text{sc}} &= \varphi_{\text{obj}} + \varphi_{\text{piston res}} + \varphi_{\text{SF res}} + \varphi_{\text{met res}} + n_{\varphi_{\text{sc}}},\end{aligned}\tag{5.12}$$

où  $n_{V_{\text{sc}}}$  et  $n_{\varphi_{\text{sc}}}$  désignent des réalisations du bruit de mesure de la visibilité et de la phase.

Ces visibilité et phase bruitées sont mesurables en pratique en utilisant l'Eq. 5.5, pour laquelle les signaux  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont définis en utilisant cette fois l'intensité longue pose bruitée :

$$\begin{aligned}\hat{I}(\delta\varphi) &= I_p + n_p + I_q + n_q \\ &+ 2\sqrt{(I_p + n_p)(I_q + n_q)} \hat{V}_{\text{sc}} \cos(\delta\varphi + \hat{\varphi}_{\text{sc}}) \\ &+ n_{\text{detec}},\end{aligned}\tag{5.13}$$

où  $n_{\text{detec}}$  désigne une réalisation du bruit de détection.

La prise en compte de ces différentes sources de bruit pour la simulation du bruit affectant les visibilité et phase fournies par l'instrument a été réalisée par un programme simulant l'instrument GRAVITY (Perrin 2007). Dans les simulations dont il est question dans la suite, les bruits de mesure utilisés proviennent directement de ce programme, et tiennent donc compte des capacités réalistes de l'instrument.

### 5.3 Simulation des données observationnelles

On va se donner un jeu de positions angulaires d'étoiles  $(x_i^{\text{modèle}}, y_i^{\text{modèle}})$  qui sont choisies aléatoirement dans un champ de vue carré dont le côté mesure 100 mas. On associe à ces sources des valeurs d'intensité  $I_i^{\text{modèle}}$ . Dans les simulations qui vont suivre, on considère entre une et trois étoiles.

Étant donné la géométrie des télescopes du VLT et la position du centre galactique, on peut calculer les différents points  $(u, v)$  accessibles (qui ne sont rien d'autre, comme le rappelle la Fig. 2.1, que les coordonnées des vecteurs de base projetés orthogonalement à la ligne de visée, divisées par la longueur d'onde d'observation).

On peut alors calculer les visibilitées complexes  $\mathbf{V}(u, v)$ , pour chaque couple  $(u, v)$ , associées au modèle  $(x_k^{\text{modèle}}, y_k^{\text{modèle}}, I_k^{\text{modèle}})$  par transformée de Fourier :

$$\mathbf{V}(u, v) = \sum_{k=1}^{N_{\text{sources}}} I_k e^{-2\pi i(u x_k + v y_k)} \quad (5.14)$$

où  $N_{\text{sources}}$  désigne le nombre de sources dans le champ de vue.

On ajoute alors au module et à la phase de chaque visibilité complexe une erreur calculée en tenant compte des différentes sources de bruit envisagées dans la section 5.2. Ce sont ces visibilitées et ces phases qui simulent les quantités qui seront délivrées par l'instrument.

A partir de ces visibilitées complexes bruitées, on peut calculer l'image observée par transformée inverse :

$$\mathbf{I} = \sum_{k=1}^{N_{\text{uv}}} V(k) e^{i\varphi(k)} e^{2\pi i(u(k)\mathbf{x} + v(k)\mathbf{y})} \quad (5.15)$$

où  $N_{\text{uv}}$  désigne le nombre de points du plan u-v, et où les quantités en gras sont à deux dimensions :  $\mathbf{I}$  contient l'image cherchée,  $\mathbf{x}$  une carte de valeurs d'abscisses angulaires et  $\mathbf{y}$  une carte de valeurs d'ordonnées angulaires<sup>2</sup>.

On peut également calculer la PSF de l'interféromètre par transformée de Fourier de la fonction de remplissage du plan u-v. Il est alors possible de déconvoluer l'image observée  $\mathbf{I}$  au moyen de la PSF de l'interféromètre. C'est pour cette opération que l'on fait appel à l'algorithme CLEAN<sup>3</sup> (Högbom 1974).

L'utilisation de CLEAN permet d'obtenir une carte contenant des ensembles de pixels éclairés correspondant aux différentes sources. On définit la position retrouvée par CLEAN comme coïncidant avec le barycentre de ces ensembles de pixels pondérés par leur intensité :

$$\begin{aligned} x^{\text{déconvolué}} &= \frac{\sum_{\mathbf{k}} x_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}}}{I_{\text{tot}}} \\ y^{\text{déconvolué}} &= \frac{\sum_{\mathbf{k}} y_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}}}{I_{\text{tot}}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

où  $I_{\mathbf{k}}$  désigne l'intensité du pixel  $(x_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{k}})$  et  $I_{\text{tot}}$  désigne l'intensité totale de l'ensemble de pixels.

La Fig. 5.2 illustre cette procédure.

En réalisant une boucle Monte Carlo à partir de ce schéma, il est possible de déterminer la précision astrométrique de GRAVITY en mode imageur que l'on définit comme :

2. L'exponentielle de ces tableaux est à prendre dans le sens de l'exponentielle des éléments des tableaux, on ne parle pas ici d'exponentielle de matrice.

3. On utilise une implémentation de CLEAN en Yorick disponible à l'adresse <http://www.lesia.obspm.fr/perso/thibaut-paumard/yorick/CLEAN.i>

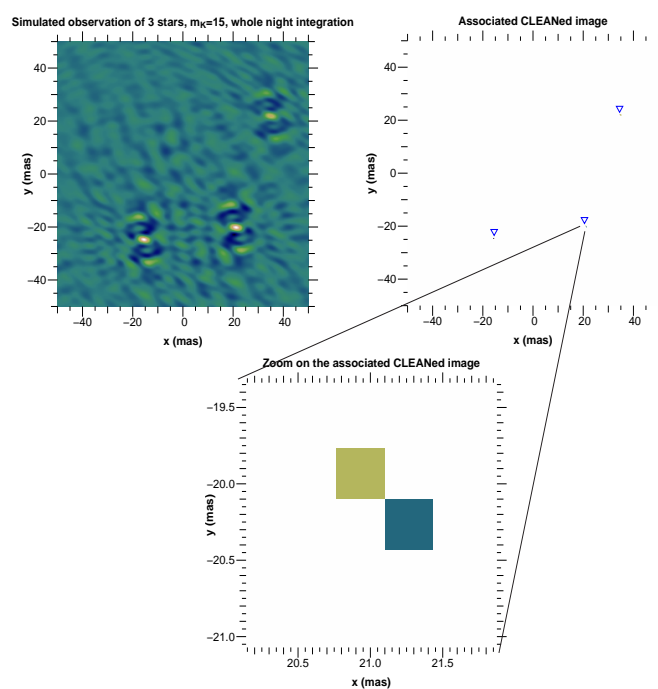


FIGURE 5.2 – En haut à gauche : image d’une simulation d’observation de trois étoiles d’intensité intégrée  $m_K = 15$ , en intégrant durant toute la nuit. En haut à droite : carte de pixels éclairés obtenus après déconvolution de l’image observée par CLEAN, les triangles bleus montrant les positions des ensembles de pixels éclairés. En bas : zoom sur l’un des ensembles de pixels.



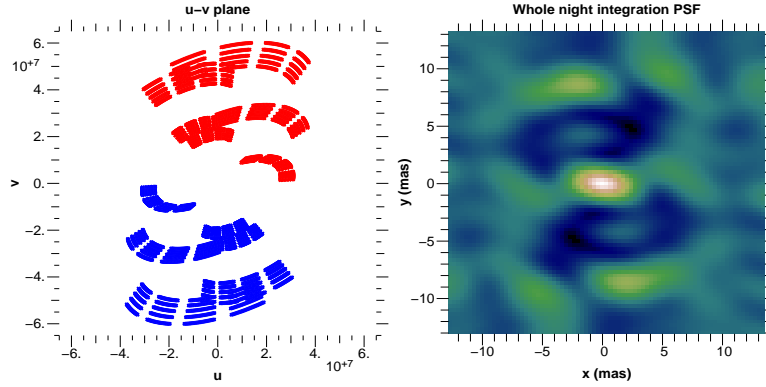


FIGURE 5.3 – Plan u-v et PSF de l'instrument.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \text{RMS}(x_i^{\text{modèle}} - x_i^{\text{déconvolué}}) \\ \sigma_y &= \text{RMS}(y_i^{\text{modèle}} - y_i^{\text{déconvolué}})\end{aligned}\quad (5.17)$$

où l'opérateur *RMS* désigne l'écart quadratique moyen.

Dans les simulations qui vont suivre, on considère deux temps d'intégration différents : soit 5 h, c'est-à-dire toute la partie de la nuit pendant laquelle le centre galactique est observable pour une nuit moyenne à Paranal, soit 100 s (on justifiera dans la suite le choix de cette durée). Lorsqu'on intègre toute la nuit, la procédure d'observation est choisie comme suit. On intègre pendant 1 h sur la source scientifique en subdivisant cette durée en blocs élémentaires de 100 s d'intégration, puis on intègre pendant 30 min sur une source de calibration, et ainsi de suite durant toute la nuit. La rotation de la Terre pendant la durée élémentaire de 100 s est négligée, ce qui est justifié par le fait que la trace des points  $(u, v)$  dans le plan u-v décrit une droite parfaite pendant cette durée. On peut donc utiliser la moyenne des points  $(u, v)$  plutôt que de tenir compte de leur variation instantanée. Sachant que l'instrument dispose de six lignes de bases et de cinq canaux spectraux (de longueur d'onde : 2, 2,1, 2,2, 2,3 et 2,4  $\mu\text{m}$ ) on peut calculer le plan u-v et en déduire la PSF de l'instrument, tels qu'illustrés sur la Fig. 5.3. La PSF a subi une rotation de telle façon que ses axes correspondent aux axes horizontaux et verticaux  $x$  et  $y$ .

L'échantillonnage (défini comme le nombre de pixels par milliseconde d'angle) est choisi dans le cadre d'un compromis entre le temps de calcul et la meilleure précision qu'il soit possible d'atteindre. Lorsqu'on intègre durant toute la nuit, un échantillonnage de 3 pixels par mas est choisi. Lorsqu'on n'intègre que 100 s, le gain en temps de calcul permet de choisir un échantillonnage de 10 pixels par mas. Cependant, cet échantillonnage plus fin ne donne lieu à une précision meilleure que s'il n'y a qu'une seule source dans le champ de vue. Lorsque plusieurs sources sont présentes, leurs PSF se superposent et se polluent donc mutuellement, ce qui entraîne une perte de précision supérieure au gain du raffinement de l'échantillonnage. Notons pour terminer que ces échantillonnages permettent de vérifier le

critère de Shannon puisque l'inverse de la fréquence spatiale maximale vaut :  $\frac{\lambda_{\min}}{B_{\max}} \approx 1,5$  mas.



# Chapitre 6

## Précision astrométrique de GRAVITY

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Observation de sources ponctuelles fixes . . . . .</b>	<b>83</b>
6.1.1	Commentaires généraux sur les résultats astrométriques . . . . .	86
6.1.2	Résultats pour une étoile . . . . .	88
6.1.3	Résultats pour deux étoiles . . . . .	89
6.1.4	Résultats pour trois étoiles . . . . .	89
<b>6.2</b>	<b>Observation d'une source ponctuelle variable . . . . .</b>	<b>90</b>
6.2.1	Simulations réalisées . . . . .	91
6.2.2	Mise en évidence du mouvement du point chaud . . . . .	92

---

### 6.1 Observation de sources ponctuelles fixes

Dans cette section, on s'intéresse à établir la précision astrométrique de l'instrument GRAVITY utilisé en mode imageur, lorsque le champ de vue contient entre une et trois étoiles de magnitudes  $12 \leq m_K \leq 17$ . On a vu dans la section 4.2.1 que le nombre d'étoiles continûment observables dans cette bande de magnitude n'était que de 0,2. Cependant, des étoiles plus lointaines peuvent traverser le champ de vue de l'instrument de temps en temps, à cause de leur grande excentricité, telles que les étoiles S de magnitude  $m_K = 15$  : S2, S14 et S17. De ce fait, considérer que le nombre d'étoiles de magnitude  $m_K \approx 15$  présentes dans le champ de vue sera compris entre 1 et 3 est un peu optimiste, mais pas irréaliste, à condition de bien choisir la période d'observation de telle façon que les étoiles S les plus proches soient présentes.

Le temps d'intégration est établi à 5 h (décomposé en blocs élémentaires de 100 s comme on l'a vu dans la section 5.3) ou à 100 s. Dans le cadre d'une observation réelle, un temps d'intégration de 5 h sera utilisé pour imager un champ de vue contenant des étoiles proches du trou noir central, qui n'évoluent que très peu durant la nuit. Le temps d'intégration de 100 s sera utilisé pour étudier les phénomènes de sursauts de rayonnement, déjà évoqués

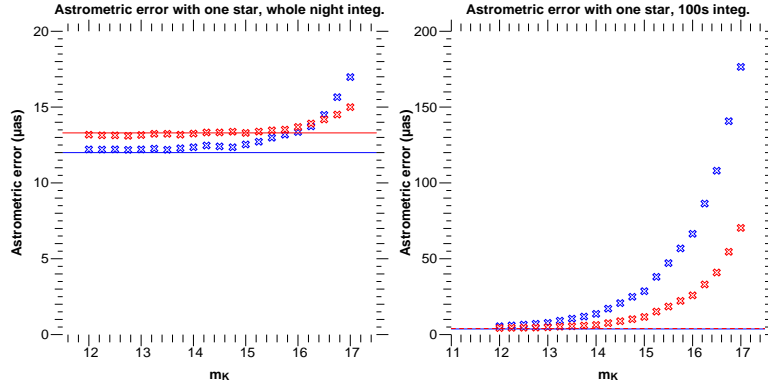


FIGURE 6.1 – Précision astrométrique en mode imageur, en  $\mu\text{as}$ , lorsqu’une étoile est présente dans le champ de vue, en fonction de la magnitude de l’étoile ; dans les directions  $x$  (bleu) et  $y$  (rouge). Le temps d’intégration est de 5 h (à gauche) ou de 100 s (à droite). Les lignes horizontales montrent la précision atteinte en l’absence de bruit sur la visibilité et la phase.

dans la section 4.2.1. On a vu que le temps caractéristique d’évolution de ces phénomènes était de l’ordre de la vingtaine de minutes. Une intégration de 100 s permettra donc de suivre la dynamique de ces bouffées de rayonnement.

On réalise des simulations Monte Carlo comprenant  $N$  nuits d’observation. Chaque nuit, numérotée par l’indice  $1 \leq i \leq N$ , permet de calculer une valeur des différences  $d_i^x$  et  $d_i^y$  entre les coordonnées modèles et les coordonnées déconvoluées par CLEAN :

$$\begin{aligned} d_i^x &= x_i^{\text{modèle}} - x_i^{\text{déconvolué}}, \\ d_i^y &= y_i^{\text{modèle}} - y_i^{\text{déconvolué}}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

On peut alors calculer l’écart quadratique moyen défini par l’Eq. 5.17 qui correspond à la précision astrométrique recherchée.

Lorsqu’une seule étoile est présente dans le champ de vue, les résultats du mode imageur sont d’un intérêt purement théorique, étant donné que l’on se trouve alors dans le cas optimal de la mesure astrométrique pour un ajustement de modèle (le modèle est le plus simple possible). On cherche dans ce cas uniquement à montrer la précision limite du mode imageur. Cependant, on va voir que la précision astrométrique en mode imageur associée à un temps d’intégration de 100 s est très proche du résultat obtenu par ajustement de modèle, ce qui est un argument convaincant en faveur de l’intérêt du mode imageur.

Les Figs. 6.1, 6.2 et 6.3 illustrent les résultats obtenus en fonction du nombre d’étoiles présentes dans le champ de vue.

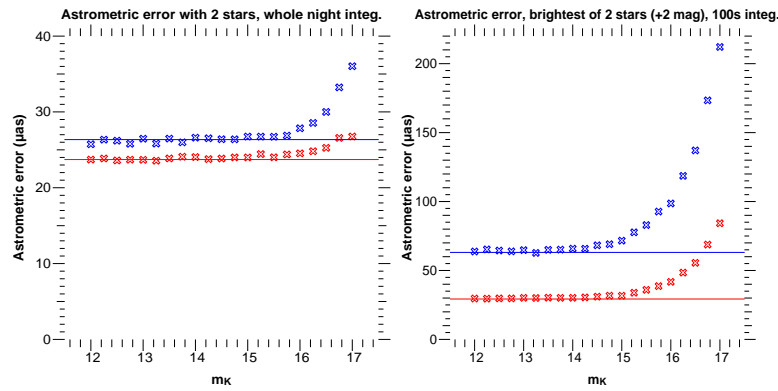


FIGURE 6.2 – Précision astrométrique en mode imageur, en  $\mu\text{as}$ , lorsque deux étoiles sont présentes dans le champ de vue, en fonction de la magnitude intégrée sur le champ de vue ; dans les directions  $x$  (bleu) et  $y$  (rouge). Le temps d'intégration est de 5 h (à gauche) ou de 100 s (à droite). Dans ce dernier cas, seule la source la plus brillante (écart de deux magnitudes par rapport à la seconde) est recherchée. Les lignes horizontales montrent la précision atteinte en l'absence de bruit.

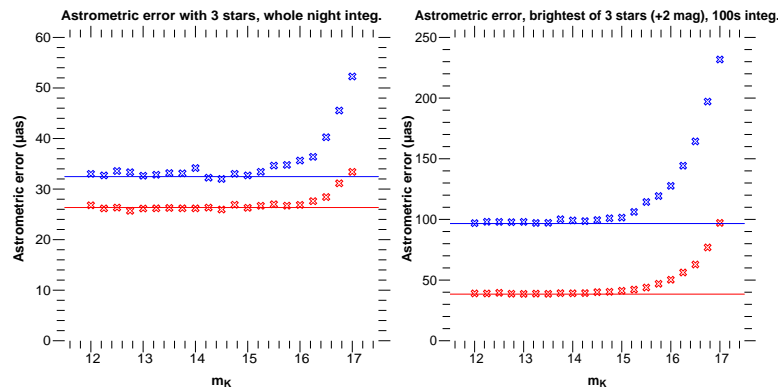


FIGURE 6.3 – Précision astrométrique en mode imageur, en  $\mu\text{as}$ , lorsque trois étoiles sont présentes dans le champ de vue, en fonction de la magnitude intégrée sur le champ de vue ; dans les directions  $x$  (bleu) et  $y$  (rouge). Le temps d'intégration est de 5 h (à gauche) ou de 100 s (à droite). Dans ce dernier cas, seule la source la plus brillante (écart de deux magnitudes par rapport à la suivante) est recherchée. Les lignes horizontales montrent la précision atteinte en l'absence de bruit.

### 6.1.1 Commentaires généraux sur les résultats astrométriques

#### Allure des courbes d'erreur

L'allure générale des résultats illustrés sur les Figs. 6.1, 6.2 et 6.3 peut s'expliquer comme suit. On distingue un plateau qui se prolonge jusqu'à une certaine magnitude limite, puis une augmentation plus ou moins brusque de l'erreur astrométrique pour des magnitudes plus faibles que cette limite. Ce comportement s'explique en remarquant que le niveau du plateau correspond à l'erreur numérique introduite par la procédure de déconvolution effectuée par CLEAN (comme le démontre la position des lignes horizontales qui représentent le niveau de l'erreur astrométrique sans bruit ajouté aux visibilité complexes, la seule erreur étant donc induite par la déconvolution). L'augmentation de l'erreur pour des magnitudes plus faibles s'explique par le poids du bruit de détection qui devient prépondérant.

Par ailleurs, le niveau du plateau correspondant à l'erreur numérique de CLEAN dépend fortement de l'échantillonnage. Ainsi, dans la Fig. 6.1, le plateau se situe à  $12 \mu\text{as}$  pour 5 h d'intégration (échantillonnage de 3 pixels par mas), et à  $3,7 \mu\text{as}$  pour 100 s d'intégration (échantillonnage de 10 pixels par mas). Si l'on dégrade l'échantillonnage pour ce dernier cas à 3 pixels par mas, le plateau remonte à une valeur proche de  $12 \mu\text{as}$ , semblable à la valeur obtenue avec 5 h d'intégration.

Bien entendu, la précision astrométrique ne peut être améliorée indéfiniment en raffinant l'échantillonnage. On peut en effet calculer la précision théorique ultime de l'instrument. L'erreur sur la phase associée à un temps d'intégration de 100 s sur une source de magnitude  $m_K = 12$  peut être calculée par le programme simulant l'instrument GRAVITY. On obtient :  $\sigma_\varphi = 0,0085$  rad. Pour  $N = 30$  points u-v (soit le nombre de canaux spectraux - 5 - multiplié par le nombre de lignes de base - 6 -), une base moyenne de  $B = 100$  m, et une longueur d'onde moyenne de  $\lambda = 2,2 \times 10^{-6}$  m, l'erreur astrométrique correspondante vaut :  $\sigma_{\text{theo}} = \frac{\lambda}{2\pi B} \frac{\sigma_\varphi}{\sqrt{N}} \sim 1,12 \mu\text{as}$ . Cette estimation suppose que tous les points u-v sont alignés dans une même direction. On peut donc estimer l'erreur dans n'importe quelle direction selon :  $\sigma_{y \text{ theo}} \approx \sqrt{2} \sigma_{\text{theo}} = 1,58 \mu\text{as}$ . Cette précision théorique ne sera jamais dépassée quel que soit l'échantillonnage choisi.

On remarque également sur les Figs. 6.1, 6.2 et 6.3 que l'erreur dans la direction du grand axe de la PSF ( $x$ ) est plus importante que l'erreur dans la direction du petit axe de ( $y$ ), ce qui est le comportement attendu.

Signalons également qu'il a été envisagé d'utiliser une des sources retrouvées comme référence afin de positionner les autres étoiles par rapport à cette référence et de déterminer l'erreur astrométrique relative. Cependant, cette méthode ne permet pas d'obtenir une précision plus fine car le poids des erreurs non corrélées (dues en particulier au processus de reconstruction d'image) entre les sources est plus important. Le passage à l'erreur relative ne fait que dégrader le résultat absolu.

### Simulations non prises en compte

Dans certains cas, correspondant à des niveaux de bruit élevés, la déconvolution par CLEAN s'effectue mal et conduit à des positions retrouvées très différentes des positions du modèle. Ce genre de cas pathologique dégrade violemment la précision finale, aussi est-il justifié de les ignorer, à condition de vérifier que leur occurrence soit extrêmement limitée.

Afin d'éviter au maximum l'apparition de ces cas extrêmes, on a modifié le déroulement des étapes qui ont été évoquées dans la section 5.3.

Ainsi, lorsque le temps d'intégration est de 5 h, des cas pathologiques peuvent apparaître lorsque plusieurs sources sont présentes dans le champ de vue, et lorsqu'elles sont proches les unes des autres. Aussi, une distance minimale de 5 mas entre les sources a été imposée dans le processus de choix des coordonnées du modèle, ce qui correspond à la taille caractéristique du pic central de la PSF.

Lorsque le temps d'intégration vaut 100 s, il faut raffiner encore davantage la procédure pour éviter l'apparition de ces cas extrêmes. On a déjà limité le choix des coordonnées du modèle à un disque de rayon 30 mas, correspondant à la largeur à mi hauteur du champ de vu gaussien de l'instrument GRAVITY (voir la section 4.1.1). De plus, on a modifié le déroulement standard de l'algorithme CLEAN, qui est rappelé ci-dessous.

Considérons une image d'observation simulée, et une image "CLEANée" initialement nulle.

- Étape 1 : Le maximum d'intensité de l'image simulée est localisé ;
- Étape 2 : On ajoute une certaine valeur d'intensité (définie à l'avance comme un paramètre de l'algorithme) au pixel correspondant dans la carte CLEANée ;
- Étape 3 : On soustrait une fraction équivalente de la PSF à l'image, au niveau du même pixel, en multipliant par un gain de boucle lui aussi déterminé à l'avance comme un paramètre de l'algorithme
- Retour à l'étape 1.

La boucle se prolonge jusqu'à ce que le nouveau maximum de l'image simulée devienne inférieur à une certaine fraction de son maximum initial :

$$\max_{\text{nouveau}} \leq \frac{\max_{\text{initial}}}{D} \quad (6.2)$$

où  $D$  est un paramètre de l'algorithme, qui vaut entre quelques unités et 10.

Intuitivement, on pourrait penser qu'il suffit de choisir  $D$  élevé de façon à obtenir un résultat particulièrement précis. Cependant, lorsque le niveau de bruit est élevé, la soustraction de nombreuses PSF au niveau du pic principal de l'image simulée peut conduire à l'apparition de pics secondaires qui peuvent devenir plus intenses que le pic principal si la boucle se prolonge, conduisant à une valeur des coordonnées retrouvées très éloignée de la position du modèle. Pour éviter ce genre d'artefact, on vérifie à la fin de la boucle CLEAN que le nouveau maximum n'est pas trop éloigné du maximum initial (on tolère un éloignement de l'ordre d'une fraction de la taille caractéristique du pic central de la PSF). Si cette condition n'est pas validée, l'algorithme CLEAN est relancé avec une valeur inférieure de  $D$ .



Malgré toutes ces précautions pour éviter l'apparition de cas pathologiques, une fraction négligeable des cas Monte Carlo simulés a pour résultat des coordonnées retrouvées très éloignées des coordonnées du modèle : si, à cause d'un niveau de bruit élevé, le maximum de l'image simulée ne coïncide pas avec la position de l'étoile la plus brillante du modèle, il n'y a aucun moyen de retrouver cette étoile (et encore moins les éventuelles autres sources). Afin de ne pas polluer les résultats finaux, on ne tient pas compte de ces cas extrêmes. On prend garde de fournir, pour chaque résultat de simulation, le pourcentage de ces cas éliminés (qui devra rester négligeable).

### 6.1.2 Résultats pour une étoile

L'algorithme CLEAN est ici utilisé dans une configuration optimale avec une unique source ponctuelle. On constate sur la Fig. 6.1 que l'erreur dépend très peu de la direction, CLEAN étant à peu près insensible à l'allure de la PSF. La valeur de la précision astrométrique obtenue dans les deux directions est surtout imposée par l'échantillonnage.

La meilleure précision obtenue, 12  $\mu\text{as}$  environ pour un temps d'intégration de 5 h, est nettement meilleure que la taille du pixel, qui vaut dans ce cas 0,33 mas. Ceci est dû au fait que la précision astrométrique porte sur la position du barycentre de chaque ensemble de pixels éclairés retrouvés par CLEAN, position qui peut être déterminée avec une précision inférieure au pixel.

La meilleure précision obtenue avec un temps d'intégration de 100 s (et un échantillonnage de 10 pixels par mas) est très proche de la limite théorique obtenue dans la section 6.1.1 : 4  $\mu\text{as}$ . On a vérifié que l'on pouvait obtenir une précision astrométrique en mode imageur égale à la limite théorique en raffinant l'échantillonnage : on descend jusqu'à 1,6  $\mu\text{as}$  pour un échantillonnage de 150 pixels par mas (mais au prix d'un temps de calcul très long, ce qui explique que l'échantillonnage ait été choisi moins fin pour les simulations Monte Carlo).

On s'est également intéressé à la possibilité d'utiliser les résultats obtenus en mode imageur avec 100 s d'intégration (et un échantillonnage de 10 pixels par mas) dans le cadre d'un ajustement de modèle. Dans ce contexte, les résultats en mode imageur peuvent être utilisés comme une première approximation des résultats de l'ajustement. On n'a pas ajusté l'intensité, qui est supposée connue à 10 % près.

L'ajustement, réalisé avec la routine Yorick `lmfit`, permet d'obtenir la précision limite de 1,6  $\mu\text{as}$  pour une source de magnitude  $m_K = 12$ .

Lorsqu'une seule source est présente dans le champ de vue, des cas pathologiques signalés dans la section 6.1.1 surviennent uniquement lorsque la magnitude de l'étoile vaut  $m_K = 17$  et pour 100 s d'intégration.

La Fig. 6.4 représente un histogramme des quantités  $d_i^x$  et  $d_i^y$  définies par l'Eq. 6.1. La proportion des cas pathologiques qui apparaissent clairement sur cette figure est de 0,03%.

Au regard de ces résultats, on peut déjà conclure que la précision astrométrique en mode imageur de l'instrument, lorsqu'une seule source est imagée, vérifie les objectifs fixés à l'instrument pour ses cas scientifiques les plus extrêmes.

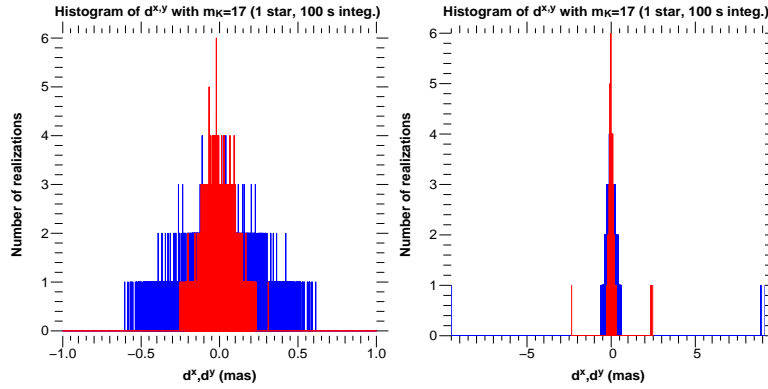


FIGURE 6.4 – Histogramme des quantités  $d^x$  (bleu) et  $d^y$  (rouge) définies par l’Eq. 6.1 pour une source de magnitude  $m_K = 17$  avec 100 s d’intégration. En dehors de la distribution gaussienne (à gauche), on distingue trois réalisations à des valeurs de  $d^x$  et  $d^y$  comprises entre 2 et 10 mas (à droite), donc déconnectées de la distribution. Ce sont des cas pathologiques : un haut niveau de bruit a pour conséquence un déplacement du pic principal de l’image simulé à l’écart de la position de l’étoile la plus brillante du modèle.

### 6.1.3 Résultats pour deux étoiles

Lorsque deux étoiles sont présentes dans le champ de vue, et pour un temps d’intégration de 5 h, la Fig. 6.2 montre que la précision astrométrique pour toutes les magnitudes considérées est de l’ordre de la taille de l’ISCO en métrique de Schwarzschild ( $30 \mu\text{as}$ ).

Lorsque le temps d’intégration est réduit à 100 s, un histogramme similaire à celui représenté sur la Fig. 6.4 est trop bruité pour permettre d’établir un critère de rejet clair. On est contraint de se limiter à ne rechercher que la source la plus brillante, qui est supposée être de deux magnitudes plus intense que la seconde étoile. Dans le cadre de cette restriction, le pourcentage de cas pathologiques est restreint à 0,1%. Par ailleurs, cette restriction ne diminue en rien l’intérêt scientifique des résultats obtenu, puisque le cas de deux sources dont l’une est nettement plus brillante que l’autre peut avoir lieu au centre galactique si l’on imagine un sursaut de rayonnement qui serait observé en même temps qu’une étoile proche.

Les résultats présentés sur la Fig. 6.2 montrent que la précision obtenue dans la direction du petit axe de la PSF pour des magnitudes  $m_K \leq 15$  est de l’ordre de grandeur de l’ISCO en métrique de Schwarzschild.

### 6.1.4 Résultats pour trois étoiles

La Fig. 6.3 montre que lorsque trois sources sont observées pendant 5 h, la précision astrométrique reste de l’ordre de l’ISCO en métrique de Schwarzschild pour une magnitude intégrée plus brillante que  $m_K = 16$ .

Lorsque le temps d’intégration est réduit à 100 s, la précision sur la source la plus brillante reste meilleure que  $40 \mu\text{as}$  (donc un peu au-delà de l’ISCO) lorsque la magnitude

intégrée est plus intense que  $m_K = 15,5$ . Le pourcentage de cas pathologiques associés reste inférieur à 0,5%.

Tous ces résultats sont encourageants pour l'étude de la population stellaire du centre galactique la plus proche du trou noir central. On constate en particulier que les précisions obtenues permettent d'atteindre le rayon de Schwarzschild du trou noir ( $10 \mu\text{as}$ ) lorsqu'une seule source suffisamment brillante est présente, ce qui est particulièrement intéressant dans la perspective de l'étude des sursauts de rayonnement évoqués dans la section 4.2.1. On peut également conclure de cette étude que le mode imageur de l'instrument peut être utilisé pour obtenir un niveau de précision permettant d'accéder à des phénomènes gravitationnels en champ fort (quelques rayons de Schwarzschild).

## 6.2 Observation d'une source ponctuelle variable

Après avoir considéré dans la section précédente des sources immobiles et d'intensité constante, on va désormais s'intéresser à une source en mouvement et d'intensité variable. L'intérêt scientifique de cette étude est bien entendu l'observation des sursauts de rayonnement aux environs du trou noir Sgr A\*. On a vu dans la section 4.2.1 que ces sursauts étaient caractérisés par une pseudo-période de l'ordre de la vingtaine de minutes, la durée totale du phénomène étant de l'ordre de 1 à 2 h. On a vu également que dans le cadre du modèle dit du point chaud, ces sursauts sont dus à du gaz émettant du rayonnement synchrotron en orbite sur l'ISCO du trou noir.

Afin de tenir compte de ces caractéristiques, on va considérer ici une source mobile sur une trajectoire circulaire, dont le rayon est de  $30 \mu\text{as}$  (le rayon de l'ISCO d'un trou noir de Schwarzschild de la masse de Sgr A\*). La courbe de lumière de cette source est modélisée par la superposition d'une gaussienne dont la largeur à mi-hauteur est de l'ordre d'1 h et d'une sinusoïde dont la période est de l'ordre de la vingtaine de minutes. La Fig. 6.5 représente une telle courbe de lumière.

On va considérer trois valeurs de la magnitude maximale de la source :  $m_K = 13, 14, 15$ . Ces choix tiennent compte de la magnitude du sursaut le plus brillant observé à l'heure actuelle :  $m_K = 13,5$  (Dodds-Eden *et al.* 2011).

Ce modèle de sursaut est bien entendu très simpliste pour trois raisons principales. Il ne tient aucun compte des effets relativistes qui sont très importants<sup>1</sup> si près du trou noir (Hamaus *et al.* 2009). L'inclinaison du trou noir est supposée être nulle (on voit l'orbite de face). Et le point chaud constituant le sursaut est supposé être une source quasi-ponctuelle, ce qui n'est pas vraisemblable compte tenu des forces de friction dues

---

1. On peut imaginer le cas le plus extrême d'une inclinaison de  $90^\circ$  : du fait de l'effet de *beaming*, on ne verrait alors qu'un point fixe sur le ciel!

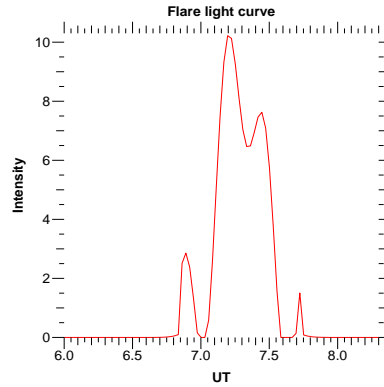


FIGURE 6.5 – Courbe de lumière de la source variable en orbite circulaire autour du centre galactique. L’intensité est en unités arbitraires et l’axe des abscisses est gradué en heures, temps universel.

au gradient de vitesse de rotation dans les zones les plus internes du disque d’accrétion entourant le trou noir : une source initialement quasi-ponctuelle sera déformée.

Les résultats qui suivent doivent donc être considérés comme une première étape, nécessitant le développement d’un modèle plus complexe tenant compte des effets relativistes et du caractère étendu de la source. Un tel modèle sera développé au chapitre 10.

Dans les sections qui suivent, on va s’intéresser à déterminer si l’instrument GRAVITY est capable de mettre en évidence le mouvement du point chaud simulé.

### 6.2.1 Simulations réalisées

On va considérer deux types de simulations :

Premier type : la source est en orbite circulaire de rayon  $30 \mu\text{as}$  autour du centre galactique, avec une courbe de lumière définie par la Fig. 6.5,

Deuxième type : la source est immobile en un point du cercle de rayon  $30 \mu\text{as}$  entourant le centre galactique, avec une courbe de lumière toujours définie par la Fig. 6.5.

Il va s’agir de différencier ces deux modèles, l’objectif étant de déterminer si GRAVITY est capable de mettre en évidence le mouvement de la source.

Pour toutes les simulations qui suivent, le temps d’intégration est de 100 s. On ne s’intéresse qu’à la partie de la nuit durant laquelle l’intensité de la source (mobile ou immobile) est supérieure à la moitié de son maximum observé : on sélectionne ainsi 15 blocs d’intégration de 100 s durant lesquels la source est suffisamment brillante. A partir de cette sélection, on va rechercher la position de la source pour chaque bloc d’intégration de 100 s, en utilisant la méthode qui a été présentée dans la section 6.1. Pour ce faire, on utilisera soit le mode imageur de l’instrument uniquement, soit la combinaison du mode imageur et d’un ajustement de modèle (en utilisant les résultats du mode imageur comme première approximation de la solution de l’ajustement).

Une fois ces calculs réalisés au cours d’une nuit, il est possible de déterminer la dispersion des positions retrouvées, définie comme suit :

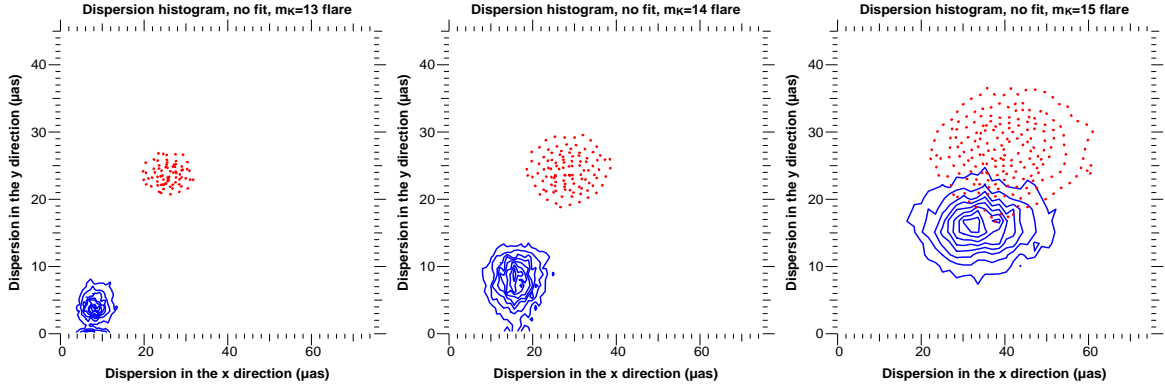


FIGURE 6.6 – Diagrammes de contours des histogrammes bidimensionnels de dispersion pour une source mobile (points rouges) ou immobile (traits bleus) ; la magnitude maximum de la source vaut, de gauche à droite, 13, 14 et 15. Les positions sont retrouvées en utilisant le mode imageur de l’instrument uniquement. Les axes sont gradués en  $\mu\text{as}$ .

$$\delta_x = \sqrt{\frac{1}{14} \sum_{k=0}^{14} (x_k - \bar{x})^2}, \quad (6.3)$$

$$\delta_y = \sqrt{\frac{1}{14} \sum_{k=0}^{14} (y_k - \bar{y})^2}$$

où  $x_k$  et  $y_k$  désignent les positions retrouvées de la source pour chacun des 15 blocs d’intégration sélectionnés, et où  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  désignent les moyennes des positions retrouvées au cours de la nuit dans chaque direction.

Il est alors possible de réaliser une simulation Monte Carlo basée sur cette procédure, chaque nuit simulée étant associée à un couple de valeurs de dispersions  $(\delta_x, \delta_y)$ . On peut alors tracer les diagrammes de contours des histogrammes relatifs à la distribution des dispersions obtenues dans le plan  $(\delta_x, \delta_y)$ .

### 6.2.2 Mise en évidence du mouvement du point chaud

Les Figs. 6.6 et 6.7 représentent les histogrammes bidimensionnels de dispersion lorsque le mode imageur de l’instrument est uniquement utilisé, et lorsque l’on fait appel de surcroît à un ajustement de modèle.

#### Commentaires généraux sur les histogrammes de dispersion

L’intérêt des ces histogrammes est le suivant. Si l’on imagine avoir obtenu une certaine valeur de dispersion au cours d’une nuit de véritable observation, on peut utiliser les Figs. 6.6 et 6.7 pour déterminer si oui ou non la source observée était en mouvement. Si la

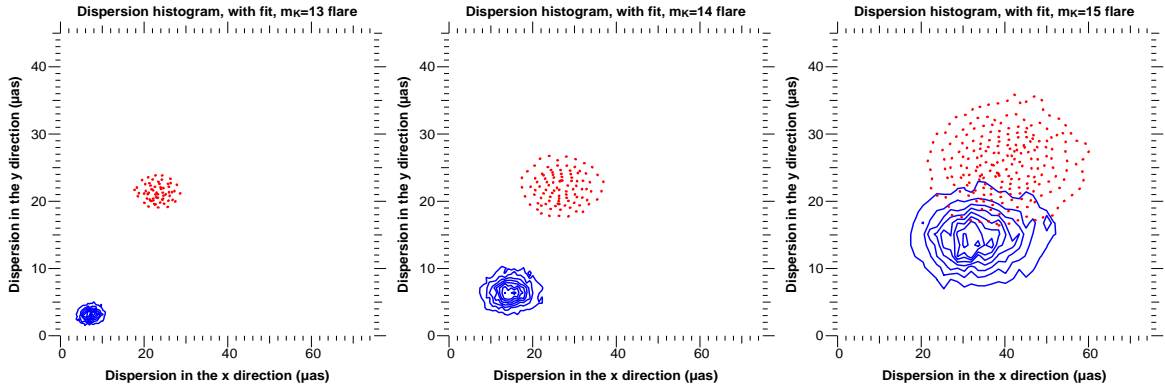


FIGURE 6.7 – Identique à la Fig. 6.6, les positions étant retrouvées en utilisant un ajustement de modèle, les résultats du mode imageur étant utilisés comme première approximation à la solution.

valeur de dispersion obtenue se situe à l'intérieur des contours représentés en bleu, alors la source était immobile. Par contre, si la dispersion obtenue se situe dans le domaine rouge, la source était en mouvement.

Il faut encore garder en tête que la simplicité du modèle considéré fait l'économie d'un grand nombre d'effets qui dans la pratique viendront compliquer l'interprétation, comme on l'a mentionné plus haut : l'orbite est supposée être observée avec une inclinaison nulle, et tous les effets relativistes ont été négligés. Il faut donc considérer les résultats obtenus comme une illustration de l'intérêt scientifique potentiel de la méthode proposée, plutôt que comme des résultats astrophysiques fermement établis.

On peut déjà remarquer que les contours associés à une source immobile sont centrés, comme on l'attend, sur une valeur  $(\delta_x, \delta_y)$  proche de la précision astrométrique (du mode imageur pur, ou de l'ajustement) à la magnitude considérée. En effet, les précisions astrométriques en mode imageur pur pour une source de magnitude  $m_K = 13, 14, 15$  sont, en  $\mu\text{as}$  :  $(\sigma_x = 7,7; \sigma_y = 4,8)$ ,  $(\sigma_x = 13,6; \sigma_y = 6,3)$  et  $(\sigma_x = 28,6; \sigma_y = 11,6)$ . Les précisions correspondantes lorsqu'un ajustement est utilisé également sont :  $(\sigma_x = 6,7; \sigma_y = 2,6)$ ,  $(\sigma_x = 12,8; \sigma_y = 5,0)$  et  $(\sigma_x = 27,4; \sigma_y = 10,6)$ .

On constate également au vu des Figs. 6.6 et 6.7 que les résultats obtenus en mode imageur pur sont quasi identiques à ceux que l'on obtient en ayant recours à un ajustement. C'est un argument de plus en faveur de l'intérêt scientifique de ce mode astrométrique.

### Mise en évidence du mouvement de la source en fonction de la magnitude

Dans le cadre du modèle simple étudié ici, les Figs. 6.6 et 6.7 montrent clairement qu'il est possible de distinguer facilement entre les distributions dues à la source mobile et immobile lorsque la magnitude maximale de la source est plus brillante que  $m_K = 14$ .

De plus, on peut utiliser le fait que le mouvement du point chaud est connu afin d'obtenir un critère de distinction entre les deux types de sources même lorsque la magnitude maximale n'est que de  $m_K = 15$ . La Fig. 6.8 représente en effet les histogrammes de  $\chi^2$

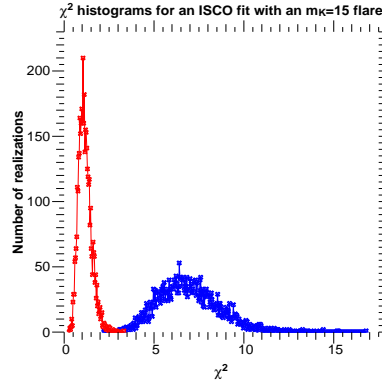


FIGURE 6.8 – Histogrammes des  $\chi^2$  réduits pour une source immobile (en bleu) ou mobile (en rouge). Ce  $\chi^2$  est l'écart quadratique moyen de la différence entre les positions retrouvées et un modèle faisant l'hypothèse d'un mouvement circulaire de rayon  $30 \mu\text{as}$ .

réduit associés à l'ajustement de la trajectoire retrouvée de la source à un cercle de rayon  $30 \mu\text{as}$ . On constate que les deux distributions sont nettement séparées, ce qui permet de conclure également dans ce cas.

Cependant, lorsque la magnitude du sursaut devient plus faible que  $m_K = 15$ , il devient impossible de différencier les deux types de sources, même en ayant recours à un ajustement de la trajectoire.

### Contrainte sur la taille de l'orbite

On peut extraire une dernière information des histogrammes de dispersion représentés sur les Figs. 6.6 et 6.7.

Dans les simulations réalisées, le point chaud a une période orbitale de 20 minutes. Un tour d'orbite est donc effectué en 12 blocs d'intégrations de 100 s. L'angle décrit entre deux simulations successives est donc de  $\theta = \frac{2\pi}{12}$ . La dispersion théorique peut donc être calculée, si on note  $R_{\text{isco}}$  le rayon de la trajectoire, et en se souvenant que la simulation complète porte sur 15 blocs d'intégration de 100 s :

$$\begin{aligned} \delta_{\text{theo}} &= \sqrt{\frac{1}{14} \sum_{k=0}^{14} R_{\text{isco}}^2 \cos^2(k\theta)} \\ &= 23 \mu\text{as}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Cette valeur est proche du centre des contours de l'histogramme de dispersion correspondant à une source mobile de magnitude maximale égale à  $m_K = 13$  et 14.

La taille caractéristique de l'orbite peut donc être déduite de la valeur de la dispersion obtenue pour peu que le sursaut considéré ait une magnitude supérieure à  $m_K = 14$ .

Encore une fois, on prend garde de rappeler que ce résultat doit être considéré dans les limites de la simplicité du modèle envisagé. Cependant, il n'en reste pas moins que cette constatation est de bon augure pour la méthode astrométrique présentée ici.

Tous les résultats obtenus dans cette partie sont encourageants dans la perspective de l'utilisation de GRAVITY pour tester la relativité générale en champ fort aux abords du trou noir central Sgr A\*. On a vu dans la section 6.1 que la précision astrométrique de l'instrument lorsqu'une seule source suffisamment brillante est située dans le champ de vue atteint le rayon de Schwarzschild du trou noir.

On vient maintenant de voir que, dans le cadre d'un modèle simpliste de sursaut, l'instrument est capable de mettre en lumière le mouvement d'un point chaud de magnitude maximale  $m_K = 15$  et même de donner une estimation de la taille caractéristique de l'orbite si l'on se restreint à un sursaut de magnitude plus brillante que  $m_K = 14$ .

Il reste à mettre à l'épreuve ces résultats dans le cadre d'un modèle réaliste de sursaut. Ce sera l'objectif du chapitre 10. On y sera plus à même d'étudier la possibilité, pour le genre d'observations simulées dans cette section, d'apporter des contraintes sur les paramètres du trou noir central.





## Troisième partie

GYOTO, un code de calcul d'orbite en  
relativité générale



# Introduction

De nombreux codes de calcul de trajectoires de particules en relativité générale existent à l'heure actuelle.

Les premiers développements de ce champ de recherche remontent aux années 70 avec les travaux de Cunningham & Bardeen (1973) relatifs à l'apparence d'une étoile en mouvement autour d'un trou noir de Kerr, de Cunningham (1975) calculant le spectre observé d'un disque d'accrétion autour d'un trou noir de Kerr exprimé en fonction des quantités émises au moyen d'une fonction de transfert, et de Luminet (1979) qui présente la première image d'un disque d'accrétion entourant un trou noir de Schwarzschild.

Depuis, les codes de propagation de rayonnement ont fleuri dans la littérature, principalement pour calculer des spectres, et en particulier la raie du fer à 6,4 keV (voir en particulier Fabian *et al.* 1989; Hameury *et al.* 1994; Fanton *et al.* 1997; Fuerst & Wu 2004; Li *et al.* 2005; Wu *et al.* 2006; Dexter & Agol 2009), et pour calculer des images de disques d'accrétion (Karas *et al.* 1992; Marck 1996; Fuerst & Wu 2004; Dexter & Agol 2009). Certains auteurs s'intéressent plus particulièrement à la simulation de phénomènes d'oscillation quasi-périodique à proximité d'un trou noir supermassif (Broderick & Loeb 2006; Schnittman *et al.* 2006), aux trajectoires et à l'apparence d'étoiles proches d'objets compacts (Levin & Perez-Giz 2008; Müller 2009), à des simulations incluant les effets magnétohydrodynamiques d'un disque d'accrétion entourant un trou noir de Kerr (Noble *et al.* 2007; Dolence *et al.* 2009), ou à prendre en compte la polarisation du rayonnement émis (Broderick 2004; Zamaninasab *et al.* 2010; Shcherbakov & Huang 2011). On trouvera également sur le site d'Alain Riazuelo<sup>2</sup> quelques présentations concernant la visualisation d'objets compacts ainsi que des animations et simulations très pédagogiques disponibles en ligne.

Dans ce contexte, on peut se demander quelle est l'utilité de développer un code supplémentaire. Il y a trois raisons principales au choix du développement du code GYOTO qui va être présenté dans cette partie.

Tout d'abord, et c'est ce qui explique la diversité des codes à l'heure actuelle, il est toujours préférable de maîtriser complètement un code plutôt que de l'utiliser comme une boîte noire. GYOTO était donc nécessaire afin de permettre de mener à bien de façon optimale les travaux de simulations nécessaires entourant le développement de l'instrument GRAVITY.

---

2. <http://www2.iap.fr/users/riazuelo/bh/index.html>

Il est toujours possible d'utiliser un code écrit par d'autres auteurs en le maîtrisant suffisamment, à condition que ce code soit public. Or il est très rare de rencontrer dans la littérature des codes de propagation de rayonnement en relativité générale dont la source soit mise à disposition (citons l'exception que constitue le code de Dexter & Agol 2009). Dans cette perspective, GYOTO est appelé à devenir public dans un avenir très proche. Tout le développement du code a été réalisé dans cet objectif, en particulier le développement d'un plugin en langage Yorick développé par Thibaut Paumard, qui rendra l'utilisation de GYOTO très aisée. Le choix du langage, C++, rend également le code particulièrement modulable, ce qui permettra à de futurs utilisateurs de pouvoir facilement continuer à développer leur propre version du code.

Enfin, GYOTO dispose d'une particularité qui le rend unique en comparaison des autres codes de calcul de trajectoires de particules en relativité générale. Il permet de prendre en compte des métriques non analytiques, calculées numériquement dans le cadre du formalisme 3+1 de la relativité générale. Ceci permet à GYOTO de pouvoir effectuer des calculs au voisinage d'objets beaucoup plus divers que les seuls trous noirs de Kerr, comme on le verra dans le chapitre 8 et plus en détail dans la partie V.

# Chapitre 7

## GYOTO en métrique de Kerr

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Méthode d'intégration des géodésiques</b>	<b>101</b>
7.1.1	Équation des géodésiques utilisée	101
7.1.2	Déroulement de l'intégration	105
<b>7.2</b>	<b>Transfert radiatif</b>	<b>113</b>
<b>7.3</b>	<b>Calcul de spectres</b>	<b>115</b>
7.3.1	Spectre d'objets optiquement épais	115
7.3.2	Spectre d'objets optiquement minces	117
<b>7.4</b>	<b>Objets astrophysiques implémentés</b>	<b>118</b>
7.4.1	Étoile en orbite	118
7.4.2	Disque mince	118
7.4.3	Disque avec instabilité de Rossby	119
7.4.4	Tore d'accrétion ( <i>polish doughnut</i> )	120

---

## 7.1 Méthode d'intégration des géodésiques

### 7.1.1 Équation des géodésiques utilisée

#### Équation des géodésiques en coordonnées de Boyer-Lindquist

Lorsque GYOTO est utilisé pour calculer des géodésiques en métrique de Kerr, on se placera presque exclusivement en coordonnées de Boyer-Lindquist, qui ont été présentées dans le chapitre 1.

On a déjà rappelé une expression de l'équation des géodésiques dans ces coordonnées au chapitre 1. Cependant, cette équation entraînait une difficulté numérique du fait de l'apparition de racines carrées qui imposaient de déterminer le signe de  $\dot{r}$  et de  $\dot{\theta}$  au cours de l'intégration.

Cette complication peut être évitée en utilisant une formulation hamiltonienne du problème, telle qu'exposée, par exemple, dans Levin & Perez-Giz (2008). En faisant appel à l'impulsion dont les composantes covariantes sont (voir par exemple Levin & Perez-Giz 2008) :

$$\begin{aligned}
p_t &= -\left(1 - \frac{2r}{\Sigma}\right) \dot{t} - \frac{2ar \sin^2 \theta}{\Sigma} \dot{\varphi}, \\
p_r &= \frac{\Sigma}{\Delta} \dot{r}, \\
p_\theta &= \Sigma \dot{\theta}, \\
p_\varphi &= \sin^2 \theta \left( r^2 + a^2 + \frac{2a^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \dot{\varphi} - \frac{2ar \sin^2 \theta}{\Sigma} \dot{t}
\end{aligned} \tag{7.1}$$

on peut montrer que l'équation des géodésiques devient :

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{\Delta}{\Sigma} p_r, \\
\dot{p}_r &= -\left(\frac{\Delta}{2\Sigma}\right)' p_r^2 - \left(\frac{1}{2\Sigma}\right)' p_\theta^2 + \left(\frac{R + \Delta\Theta}{2\Delta\Sigma}\right)', \\
\dot{\theta} &= \frac{1}{\Sigma} p_\theta, \\
\dot{p}_\theta &= -\left(\frac{\Delta}{2\Sigma}\right)^\theta p_r^2 - \left(\frac{1}{2\Sigma}\right)^\theta p_\theta^2 + \left(\frac{R + \Delta\Theta}{2\Delta\Sigma}\right)^\theta, \\
\dot{\varphi} &= -\frac{1}{2\Delta\Sigma} \partial_L (R + \Delta\Theta), \\
\dot{p}_\varphi &= 0, \\
\dot{t} &= \frac{1}{2\Delta\Sigma} \partial_E (R + \Delta\Theta), \\
\dot{p}_t &= 0
\end{aligned} \tag{7.2}$$

où les exposants ' et  $\theta$  indiquent la dérivation par rapport à  $r$  et  $\theta$  respectivement, et le point la dérivation par rapport au paramètre de la géodésique. Les fonctions  $\Delta$ ,  $\Sigma$ ,  $\Theta$  et  $R$  ont ici la même définition que dans la section 1.2, que l'on rappelle :

$$\begin{aligned}
\Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\
\Delta &= r^2 - 2 M r + a^2, \\
\Theta &= Q - \cos^2 \theta \left[ a^2 (m^2 - E^2) + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right], \\
P &= E (r^2 + a^2) - a L, \\
R &= P^2 - \Delta [m^2 r^2 + (L - a E)^2 + Q],
\end{aligned} \tag{7.3}$$

les constantes du mouvement  $E$ ,  $L$  et  $Q$  correspondant, on le rappelle, à l'énergie par unité de masse de la particule mesurée par un observateur à l'infini, à la composante axiale de son moment cinétique et à la constante de Carter.

Cette formulation de l'équation des géodésiques ne contient plus de racines carrées, elle est parfaitement adaptée pour une intégration numérique.

C'est cette formulation de l'équation des géodésiques qui est implémentée dans GYOTO.

### Équation des géodésiques lumière en coordonnées de Kerr-Schild

On a déjà évoqué les coordonnées de Kerr-Schild  $(T, x, y, z)$  dans le chapitre 1. En utilisant ce jeu de coordonnées, l'élément de métrique s'écrit :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dT^2 + \frac{2 M r^3}{r^4 + a^2 z^2} \left[ \frac{r (x dx + y dy) - a (x dy - y dx)}{r^2 + a^2} + \frac{z dz}{r} + dT \right]^2 \tag{7.4}$$

où  $M$  désigne la masse du trou noir et  $a$  son paramètre de spin. La fonction  $r(x, y, z)$ , qui n'est rien d'autre que la coordonnée radiale de Boyer-Lindquist, est définie implicitement par :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + a^2 \left[ 1 - \frac{z^2}{r^2} \right] \tag{7.5}$$

à partir de quoi il est immédiat de déduire :

$$r = \sqrt{\frac{1}{2} \left( x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^2 + 4 a^2 z^2} \right)}. \tag{7.6}$$

On pourra se reporter à Visser (2007) pour obtenir les équations liant les coordonnées de Kerr-Schild aux coordonnées de Boyer-Lindquist <sup>1</sup>.

---

1. Attention cependant aux notations : la coordonnées  $\phi$  utilisée dans les équations 34 à 36 de Visser (2007) est la coordonnée  $\phi_K$  du système de coordonnées de Kerr - non utilisé dans ce manuscrit - et non pas la coordonnée  $\phi_{BL}$  de Boyer-Lindquist ; cependant toutes les équations nécessaires aux transformations entre les systèmes de coordonnées sont fournies dans Visser (2007).



On constate immédiatement au vu de 7.4 que les coordonnées de Kerr-Schild, si elles sont bien entendu également affectées d'une singularité en  $r = 0$ , ne comportent aucune pathologie au niveau de l'horizon des événements. C'est le principal intérêt de leur utilisation, par rapport aux coordonnées de Boyer-Lindquist. En particulier, si l'on souhaite intégrer des géodésiques à travers l'horizon (par exemple dans le cas où l'observateur se situe lui-même à l'intérieur de l'horizon, voir à ce sujet les simulations de Marck 1996), l'utilisation des coordonnées de Kerr-Schild sera particulièrement adaptée.

L'équation des géodésiques lumières en coordonnées de Kerr-Schild est donnée dans Ha-meury *et al.* (1994) :

$$\begin{aligned}
\Sigma^3 \frac{\ddot{x}}{M} &= -4 a r \frac{S}{\Delta} \Sigma \dot{y} \\
&+ (\Sigma - 4 r^2) \frac{x r + a y}{r^2 + a^2} \left[ K - \left( \frac{a S}{\Delta} \right)^2 \right] \\
&- a r \frac{r y - a x}{r^2 + a^2} \frac{S}{\Delta} \left[ 4 (E \Sigma - S) + (4 a^2 - \Sigma) \frac{S}{\Delta} \right] \\
\Sigma^3 \frac{\ddot{y}}{M} &= 4 a r \frac{S}{\Delta} \Sigma \dot{x} \\
&+ (\Sigma - 4 r^2) \frac{r y - a x}{r^2 + a^2} \left[ K - \left( \frac{a S}{\Delta} \right)^2 \right] \\
&+ a r \frac{x r + a y}{r^2 + a^2} \frac{S}{\Delta} \left[ 4 (E \Sigma - S) + (4 a^2 - \Sigma) \frac{S}{\Delta} \right] \\
\Sigma^3 \frac{\ddot{z}}{M} &= -K \cos \theta (3 r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \\
\dot{T} &= \frac{2 M K r}{\Sigma (P - \Sigma \dot{r})} + E
\end{aligned} \tag{7.7}$$

où on a utilisé :

$$\begin{aligned}
\Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\
P &= E (r^2 + a^2) - a L, \\
S &= \Sigma \dot{r} + P,
\end{aligned} \tag{7.8}$$

les constantes  $E$ ,  $L$  et  $K$  étant toujours l'énergie par unité de masse de la particule mesurée par un observateur à l'infini, la composante axiale de son moment cinétique, et  $K = Q + (L - a E)^2$ , où  $Q$  est la constante de Carter.

On attire l'attention du lecteur sur le fait que le système d'équation 7.7 n'est valable que pour une particule de masse nulle. Il faudrait disposer de la même équation, mais

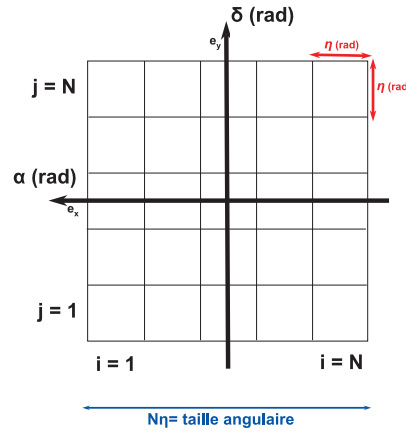


FIGURE 7.1 – L'écran GYOTO est constitué de  $N$  pixels dans chaque direction  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$ , chaque pixel faisant une taille angulaire  $\eta$ . Le champ de vue est égal à  $N\eta$ . Pour obtenir une vue complète du ciel, on prendra ainsi  $N\eta = \pi/2$ .

dépendante de la masse de la particule, afin de pouvoir intégrer, par exemple, des orbites d'étoiles en coordonnées de Kerr-Schild.

Le développement de l'implémentation des coordonnées de Kerr-Schild dans GYOTO n'a pas été poussé très loin étant donné que toutes les applications observationnelles qui seront développées dans la suite utilisent les coordonnées de Boyer-Lindquist. Pour toute la suite de cette section, on se placera donc en coordonnées de Boyer-Lindquist.

## 7.1.2 Déroulement de l'intégration

### De l'observateur à la source : conditions initiales

L'intégration des géodésiques se fait en remontant le temps coordonnée, depuis l'observateur jusqu'à la source astrophysique. Ceci permet d'économiser en temps de calcul étant donné que les géodésiques qui quittent l'objet astrophysique mais ne rejoignent pas l'observateur ne sont pas calculées.

L'observateur est supposé statique, aux coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi)$ . Il est modélisé par un écran supposé ponctuel, dont les pixels correspondent aux différentes directions initiales des photons : chaque pixel de l'écran est ainsi associé à deux coordonnées angulaires sur le ciel correspondant à la direction initiale du photon<sup>2</sup>. L'écran est ainsi complètement défini par son nombre de pixels et sa taille angulaire (voire Fig. 7.1).

Un des objectifs de GYOTO est d'être le plus transparent possible pour un utilisateur non spécialiste du formalisme de calcul de trajectoires relativistes. De ce fait, on veut pouvoir décrire un photon incident à partir des trois quantités qui le caractérisent pour un

2. On insiste encore une fois sur le fait que l'intégration se fait en remontant le temps, le vecteur tangent initial du photon quitte donc l'écran.

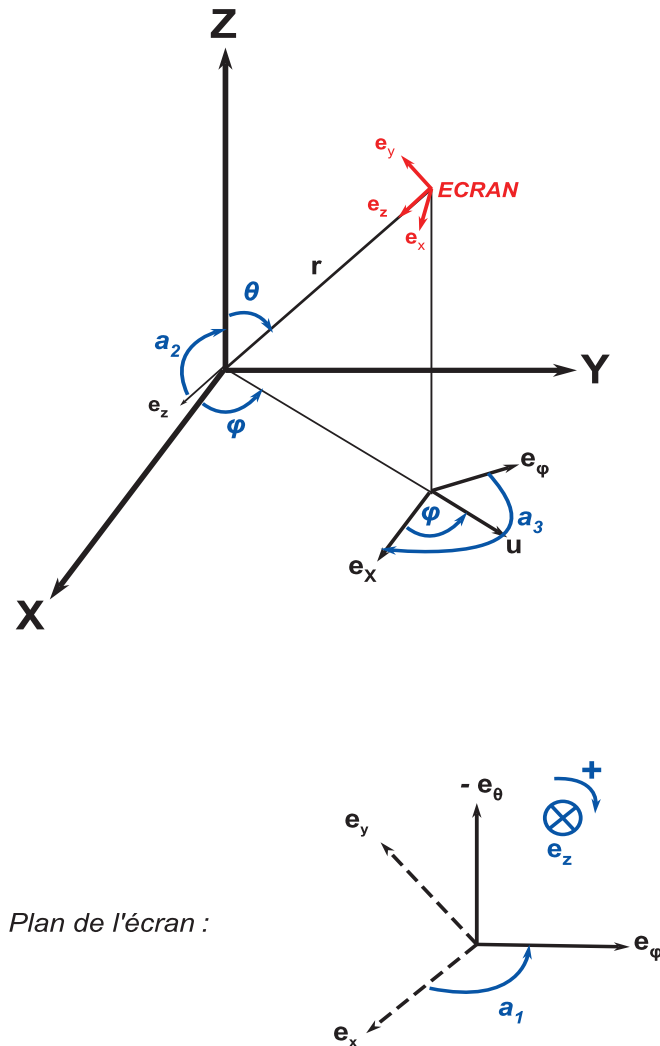


FIGURE 7.2 – Systèmes de coordonnées utilisés dans GYOTO pour repérer l'observateur. Le système de coordonnées  $(X, Y, Z)$  est centré sur le trou noir, l'axe des  $Z$  coïncide avec l'axe de rotation de l'objet central; le système  $(x, y, z)$  est centré sur l'observateur, le vecteur  $e_z$  étant dirigé selon la ligne de visée. Les angles d'Euler  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  permettent de passer d'un système à l'autre. En particulier, le choix de l'angle  $a_1$  permet d'orienter les vecteurs  $e_x$  et  $e_y$  dans le plan de l'écran. Les angles  $a_2$  et  $a_3$  sont reliés aux angles sphériques  $\theta$  et  $\varphi$  selon :  $a_2 = \pi - \theta$ ,  $a_3 = -\pi/2 - \varphi$ .

observateur : ses coordonnées angulaires sur le ciel  $\alpha$  et  $\delta$  (comme illustré sur la Fig. 7.1), et sa fréquence observée  $\nu_{\text{obs}}$  (imposée par le filtre choisi par l'observateur).

A partir de ces trois quantités, qui sont les conditions initiales fournies à GYOTO pour chaque photon, on va dériver le 4-vecteur d'onde du photon  $\mathbf{k}$  au niveau de l'écran, relié à la 4-impulsion  $\mathbf{p}$  par  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ .

Pour ce faire, on introduit le repère cartésien  $(x, y, z)$  associé à l'écran (voir Fig. 7.2). On définit la vitesse coordonnée d'un photon comme le 3-vecteur tangent initial du photon au niveau de l'écran, qui peut s'exprimer dans le repère  $(x, y, z)$  en fonction des angles sphériques  $\mu_1$  et  $\mu_2$  définis sur la Fig. 7.3 selon :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathcal{N} \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{v}_1 &= \sin\mu_1 \cos\mu_2 \mathbf{e}_x + \sin\mu_1 \sin\mu_2 \mathbf{e}_y + \cos\mu_1 \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (7.9)$$

où  $\mathcal{N}$  est un coefficient de normalisation qui reste à déterminer.

Afin de faire le lien avec les coordonnées de Boyer-Lindquist, on peut exprimer  $\mathbf{v}$  dans les coordonnées sphériques associées au repère  $(X, Y, Z)$  centré sur le trou noir (voir Fig. 7.2). Les vecteurs de la base orthonormée associée à ce système de coordonnées sont liés aux vecteurs de la base naturelle associée aux coordonnées de Boyer-Lindquist  $\boldsymbol{\partial}_i$  par :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}} \boldsymbol{\partial}_r, \\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} \boldsymbol{\partial}_\theta, \\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} \boldsymbol{\partial}_\varphi \end{aligned} \quad (7.10)$$

où on a supposé que la métrique spatiale  $g_{ij}$  était diagonale.

Le vecteur  $\mathbf{v}$  s'exprime alors selon :

$$\mathbf{v} = \dot{r} \sqrt{g_{rr}} \mathbf{e}_r + \dot{\theta} \sqrt{g_{\theta\theta}} \mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi} \sqrt{g_{\varphi\varphi}} \mathbf{e}_\varphi. \quad (7.11)$$

Remarquons que si l'observateur est suffisamment loin du trou noir pour que l'espace puisse être considéré comme plat en son voisinage, l'équation précédente donne :

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \sin\theta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (7.12)$$

Le lien entre les bases utilisées dans les deux précédentes équations est donné par les angles d'Euler (voir Fig. 7.2) :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= -\mathbf{e}_z; & \mathbf{e}_\theta &= -\sin a_1 \mathbf{e}_x + \cos a_1 \mathbf{e}_y; \\ \mathbf{e}_\varphi &= \cos a_1 \mathbf{e}_x + \sin a_1 \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (7.13)$$

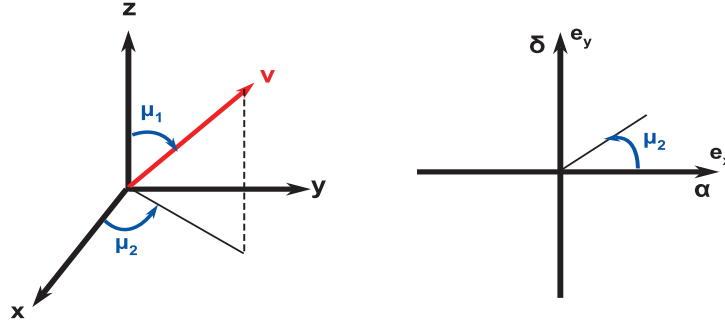


FIGURE 7.3 – Lien entre les coordonnées angulaires  $\alpha$  et  $\delta$  sur le ciel et les coordonnées angulaires sphériques  $\mu_1$  et  $\mu_2$  associées au repère  $(x, y, z)$  de l'observateur.

On déduit alors par identification les coordonnées initiales du photon  $\dot{r}$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\varphi}$  :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{\mathcal{N} \cos \mu_1}{\sqrt{g_{rr}}}; & \dot{\theta} &= \mathcal{N} \frac{-\sin a_1 \sin \mu_1 \cos \mu_2 + \cos a_1 \sin \mu_1 \sin \mu_2}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}; \\ \dot{\varphi} &= \mathcal{N} \frac{\cos a_1 \sin \mu_1 \cos \mu_2 + \sin a_1 \sin \mu_1 \sin \mu_2}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Les angles d'Euler  $a_i$  étant fixés<sup>3</sup>, il ne reste donc plus qu'à relier les angles  $\mu_1$  et  $\mu_2$  à  $\alpha$  et  $\delta$ , et à déterminer le facteur  $\mathcal{N}$ .

La Fig. 7.3 montre que l'on peut relier aisément  $\mu_2$  aux angles  $\alpha$  et  $\delta$  selon :

$$\mu_2 = \begin{cases} \tan^{-1}(\delta/\alpha) & \alpha > 0 \\ \pi + \tan^{-1}(\delta/\alpha) & \alpha < 0 \end{cases} \quad (7.15)$$

Par ailleurs, la formule des cosinus en trigonométrie sphérique permet de déterminer  $\mu_1$ . Rappelons cette formule due au mathématicien François Viète (1593), avec les notations de la Fig. 7.4 :

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma. \quad (7.16)$$

Dans notre cas, les arcs  $\alpha$ ,  $\delta$  et  $\mu_1$  forment un triangle sphérique. Les grands cercles sur lesquels s'appuient  $\alpha$  et  $\delta$  étant orthogonaux, on a :

$$\cos \mu_1 = \cos \alpha \cos \delta. \quad (7.17)$$

D'où :

$$\mu_1 = \cos^{-1}(\cos \alpha \cos \delta). \quad (7.18)$$

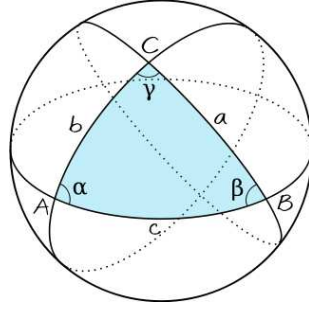


FIGURE 7.4 – Un triangle sphérique. Si on note  $O$  le centre de la sphère, les quantités  $a$ ,  $b$  et  $c$  désignent les angles  $COB$ ,  $COA$  et  $AOB$ . La formule des cosinus donne alors :  $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$ . Source : Wikipedia

Soit  $\mathbf{u} = (u^t, 0, 0, 0)$  la 4-vitesse de l'observateur statique. On peut toujours décomposer le 4-vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  selon :

$$\mathbf{k} = \rho \mathbf{u} + \perp_{\mathbf{u}} \mathbf{k} \quad (7.19)$$

où  $\rho$  est un facteur multiplicatif et  $\perp_{\mathbf{u}}$  désigne l'opérateur de projection sur l'espace local de repos de l'observateur.

Le 3-vecteur  $\mathbf{v}$  introduit plus haut n'est autre que la partie spatiale du 4-vecteur  $\perp_{\mathbf{u}} \mathbf{k}$  :

$$\perp_{\mathbf{u}} \mathbf{k} = (0, \mathbf{v}). \quad (7.20)$$

De plus, en prenant le produit scalaire de l'Eq. 7.19 par  $\mathbf{u}$  on obtient :

$$\rho = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = \omega_{\text{obs}} \quad (7.21)$$

où  $\omega_{\text{obs}} = 2\pi\nu_{\text{obs}}$  est la pulsation du photon mesurée par l'observateur, et  $\nu_{\text{obs}}$  est la fréquence observée.

Considérons alors la situation représentée par un diagramme d'espace-temps sur la Fig. 7.5. Soit  $O$  l'événement d'impact du photon sur l'écran de l'observateur. Soit  $A$  un événement sur la ligne d'univers du photon distant de  $O$  d'une quantité  $d\lambda$  du paramètre affine paramétrant la géodésique lumière. Soit  $B$  l'événement simultané pour l'observateur, distant de  $O$  d'un intervalle de temps propre  $d\tau$ . Si on note  $\mathbf{w}$  la vitesse de la lumière mesurée par l'observateur, on a la relation :  $\mathbf{w} d\tau = \mathbf{BA}$ . La relation de Chasles appliquée dans le triangle  $OAB$  donne :

$$d\lambda \mathbf{k} = d\tau \mathbf{u} + d\tau \mathbf{w}. \quad (7.22)$$

---

3. Pour toutes les simulations en métrique de Kerr qui seront présentées dans ce manuscrit, la projection de l'axe de rotation du trou noir est supposée coïncider avec l'axe  $y$  de l'écran. Ceci fixe l'angle d'Euler  $a_1$ .

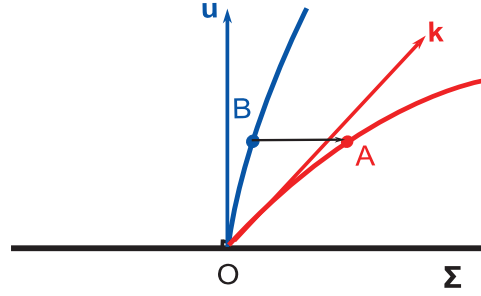


FIGURE 7.5 – Vitesse du photon mesurée par l’observateur. La 4-vitesse de l’observateur est notée  $\mathbf{u}$ , le 4-vecteur tangent du photon est noté  $\mathbf{k}$ . Le point O désigne l’événement de l’impact du photon sur l’écran d’observation. Le point A est un événement infiniment proche de O sur la ligne d’univers du photon (en rouge), le point B est l’événement simultané de A pour l’observateur (dont la ligne d’univers est représentée en bleu). La surface  $\Sigma$  représente l’espace local de repos de l’observateur.

En prenant le produit scalaire de cette équation par la 4-vitesse de l’observateur<sup>4</sup> on déduit :

$$\mathbf{k} = \omega_{\text{obs}} (\mathbf{u} + \mathbf{w}) \quad (7.23)$$

Soit :

$$\perp_{\mathbf{u}} \mathbf{k} = (0, \mathbf{v}) = \omega_{\text{obs}} \mathbf{w}. \quad (7.24)$$

Le vecteur  $\mathbf{w}$  étant normalisé à 1 (c’est la vitesse de la lumière mesurée par l’observateur), on en déduit que le 4-vecteur  $(0, \mathbf{v})$  doit être normalisé à  $\omega_{\text{obs}}$ , ce qui entraîne :

$$\mathcal{N} = \frac{\omega_{\text{obs}}}{\sqrt{g_{ij} v_1^i v_1^j}} \quad (7.25)$$

où l’expression du 3-vecteur  $\mathbf{v}_1$  est donnée par l’Eq. 7.9.

Les Eqs. 7.14, 7.15, 7.18 et 7.25 permettent d’obtenir les composantes spatiales du 4-vecteur tangent initial  $\mathbf{k}$  à partir des conditions initiales GYOTO  $\alpha$ ,  $\delta$  et  $\nu_{\text{obs}} = \omega_{\text{obs}}/2\pi$ . La composante temporelle est ensuite déterminée par normalisation à 0 de  $\mathbf{k}$ .

Cependant, lorsque GYOTO est utilisé pour calculer le spectre émis par un objet (voir section 7.3) et qu’on souhaite faire varier  $\nu_{\text{obs}}$  dans une bande de fréquences, il n’est pas utile de refaire les calculs de propagation des géodésiques pour chaque valeur de fréquence : les géodésiques sont bien entendu indépendantes de la fréquence du photon comme le montre

4. Et en utilisant les relations :  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = -\omega_{\text{obs}}$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$  et  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0$ . Cette dernière égalité est vérifiée parce que A et B étant simultanés, le vecteur infinitésimal  $\mathbf{BA} = \mathbf{w}/d\tau$  appartient à l’espace local de repos de l’observateur (Voir Eq. 3.8 de Gourgoulhon 2010b). On fait l’hypothèse que B est suffisamment proche de O pour pouvoir confondre la 4-vitesse de l’observateur en O et en B.

l'Eq. 7.23 : le vecteur tangent est simplement proportionnel à la fréquence observée. Aussi, tous les calculs internes à GYOTO se font avec une fréquence observée  $\nu_{\text{obs}} = 1$ , les valeurs physiques de la fréquence choisies par l'utilisateur étant utilisées uniquement au cours du calcul du spectre émis.

### De l'observateur à la source : conditions d'arrêt

Chaque photon est intégré en remontant le temps à partir de l'écran de l'observateur. La géodésique lumière correspondante est calculée jusqu'à ce que l'une des quatre conditions d'arrêt suivantes soit vérifiée :

- le photon atteint l'objet astrophysique cible (objet optiquement épais), ou la transmission devient inférieure à un certain seuil (objet optiquement mince),
- le temps coordonnée devient inférieur à une certaine valeur spécifiée par l'utilisateur,
- le photon parvient à une valeur de la coordonnée radiale  $r$  inférieure à une certaine limite
- le nombre de pas d'intégration dépasse une certaine valeur maximale admise.

La deuxième condition permet d'arrêter l'intégration des géodésiques qui ne rencontrent pas l'objet et qui ne plongent pas dans le trou noir. Il faut cependant prendre garde à choisir une valeur du temps coordonnée minimale suffisamment petite pour permettre l'intégration des géodésiques très courbées qui passent près de l'horizon et sont susceptibles de rencontrer l'objet après plusieurs orbites autour du trou noir.

La troisième condition permet d'éviter l'apparition des pathologies des coordonnées de Boyer-Lindquist à l'approche de l'horizon : l'intégration est stoppée suffisamment tôt pour les éviter. Comme pour la précédente condition, la détermination de la valeur critique  $r_c$  en dessous de laquelle l'intégration est arrêtée devra être faite avec soin : si  $r_c$  est trop petit, l'intégrateur risquera d'utiliser des valeurs divergentes des coefficients métriques (du fait du comportement pathologique des coordonnées de Boyer-Lindquist près de l'horizon), mais si  $r_c$  est trop grand, on risque d'empêcher l'intégration des géodésiques rasantes donnant lieu aux images d'ordre supérieur.

La dernière condition n'est présente que pour empêcher des calculs infinis en cas de problème imprévu lors de l'intégration. Elle donne lieu à l'affichage d'un message d'alerte.

### Pas d'intégration adaptatif, conservation des constantes du mouvement

L'intégration des géodésiques est effectuée à l'aide d'un intégrateur de Runge-Kutta du quatrième ordre, avec pas adaptatif (voir par exemple Press *et al.* 1986).

La détermination du pas adaptatif est effectuée de la façon standard suivante. Considérons la 4-position  $\mathbf{p}$  et le 4-vecteur tangent  $\mathbf{v}$  d'une particule à un pas d'intégration donné. On calcule la 4-position  $\mathbf{p}'$  et le 4-vecteur tangent  $\mathbf{v}'$  au pas suivant grâce à un algorithme de Runge-Kutta à l'ordre quatre standard (voir par exemple Press *et al.* 1986). Puis on divise le pas par deux, et on calcule la 4-position  $\mathbf{p}''$  et le 4-vecteur tangent  $\mathbf{v}''$  deux demi-pas plus loin. Le pas initialement proposé n'est accepté que si  $\mathbf{p}'$  et  $\mathbf{v}'$  ne diffèrent pas trop



de  $\mathbf{p}''$  et  $\mathbf{v}''$ . La différence admise est fixée par la valeur de la dérivée de la 4-position et du 4-vecteur tangent initiaux, multipliée par le pas proposé.

Afin de garantir une intégration correcte, on corrige la 4-position et le 4-vecteur tangent calculés par l'intégrateur à pas adaptatif afin d'assurer la conservation des constantes du mouvement. On a vu déjà plusieurs fois qu'une particule suivant une géodésique en métrique de Kerr est dotée de quatre constantes du mouvement : la norme au carré de son 4-vecteur tangent<sup>5</sup> (qui vaut 0 si l'on intègre un photon, -1 s'il s'agit d'une particule massive), l'énergie  $E$  par unité de masse mesurée par un observateur à l'infini, la composante axiale  $L$  de son moment cinétique mesurée par un observateur à l'infini, et la constante de Carter  $Q$ .

La conservation de  $E$  et de  $L$  est directement imposée par la forme choisie pour exprimer l'équation des géodésiques, comme on le constate au vu de l'Eq. 7.2, en se rappelant (voir Eq. 1.15) que  $E = -p_t$  et  $L = p_\varphi$ .

La constante de Carter (voir Eq. 1.16) s'exprime selon :

$$Q = \Sigma^2 \dot{\theta}^2 + \cos^2\theta [a^2 (\mu^2 - E^2) + \sin^{-2}\theta L^2] \quad (7.26)$$

où  $\mu$  désigne la masse de la particule considérée. On va donc imposer à  $\dot{\theta}$  de prendre la valeur assurant cette égalité à la position courante  $(r, \theta, \varphi)$ .

La valeur de  $\dot{\theta}$  issue du système 7.2 est donc modifiée. Cependant, on s'assure à chaque itération que la valeur modifiée ne s'écarte pas de plus de 1% de la valeur prescrite par le système 7.2. Si l'écart est supérieur, la modification de  $\dot{\theta}$  n'est pas effectuée et un message d'alerte s'affiche si la constante de Carter s'écarte de sa valeur initiale d'une quantité supérieure à  $10^{-5}$ .

On préfère procéder ainsi, plutôt que de déterminer  $\dot{\theta}$  directement à partir de 7.26, afin d'éviter le recours à des racines carrées et donc à une indétermination de signe, comme on l'a déjà signalé plus haut.

À ce stade, les valeurs de  $\dot{t}$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\varphi}$  sont directement dictées par les constantes du mouvement  $E$ ,  $Q$  et  $L$ . Il ne reste donc que la coordonnée  $\dot{r}$  sur laquelle on puisse jouer afin d'imposer la conservation de la norme au carré du 4-vecteur tangent à la géodésique. Si l'on considère une géodésique de genre lumière, cette norme au carré s'écrit :

$$g_{tt} \dot{t}^2 + g_{rr} \dot{r}^2 + g_{\theta\theta} \dot{\theta}^2 + g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}^2 + 2 g_{t\varphi} \dot{t} \dot{\varphi} = 0. \quad (7.27)$$

De cette dernière équation, on tire la valeur modifiée de  $\dot{r}$ , en vérifiant de la même façon que pour  $\dot{\theta}$  que cette valeur modifiée ne s'écarte pas trop de la valeur prescrite par le système 7.2.

### Difficultés liées aux coordonnées de Boyer-Lindquist

L'utilisation de coordonnées de type sphérique entraîne un comportement pathologique sur l'axe  $\theta = 0 [\pi]$ . Les équations du mouvement (7.2), une fois explicitées complètement, font apparaître des termes en  $\cotan\theta$  qui divergent sur cet axe.

---

5. Ce qui équivaut à fournir la masse de la particule.

De façon à éviter ces comportements divergents, on multiplie le pas proposé à l'intégrateur adaptatif par un coefficient 1,1 afin de dépasser les abords de l'axe lorsque les termes faisant apparaître des facteurs  $\cotan\theta$  dans l'équation des géodésiques deviennent supérieurs à une certaine limite. Cette limite dépend de la position : on la prendra plus petite aux abords de l'horizon, car les géodésiques qui croisent l'axe dans cette région vont faire perdre beaucoup de temps de calcul, le pas adaptatif diminuant violemment pour tenter de pallier les effets pathologiques des coordonnées.

Ce comportement pathologique sur l'axe constitue la deuxième principale difficultés de l'utilisation des coordonnées de Boyer-Lindquist, avec le comportement divergent près de l'horizon des événements.

## 7.2 Transfert radiatif

GYOTO permet également d'intégrer l'équation de transfert radiatif à l'intérieur des objets astrophysiques calculés. Cette section rappelle l'équation du transfert radiatif relativiste, et présente son implémentation dans le code.

On va décrire le rayonnement au moyen de l'intensité spécifique  $I_\nu$  dont l'unité dans le système SI s'exprime en  $\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{ster}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ . Considérons un observateur pour lequel la fréquence du rayonnement mesuré est  $\nu$ . Lorsqu'un photon se propage d'un certain élément de longueur propre (pour l'observateur)  $ds$  dans l'objet astrophysique, il est affecté par l'absorption et l'émission du milieu traversé. Ces processus sont décrits par deux coefficients<sup>6</sup> :

- le coefficient d'absorption  $\alpha_\nu$ , dont l'unité SI est le  $\text{m}^{-1}$  et qui est relié à l'intensité spécifique selon :

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds, \quad (7.28)$$

- et le coefficient d'émission  $j_\nu$ , dont l'unité SI est le  $\text{J m}^{-3} \text{s}^{-1} \text{ster}^{-1} \text{Hz}^{-1}$  et qui est relié à la variation d'intensité spécifique selon :

$$dI_\nu = j_\nu ds. \quad (7.29)$$

Mihalas & Mihalas (1984) montrent que l'équation du transfert radiatif relativiste s'écrit :

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\lambda} = \mathcal{E} - \mathcal{A}\mathcal{I} \quad (7.30)$$

où  $\lambda$  est un paramètre affine le long de la géodésique lumière considérée<sup>7</sup>, et où on a introduit l'intensité spécifique invariante, le coefficient d'émission invariant et le coefficient d'absorption invariant :

---

6. On n'utilise pas de coefficient de diffusion, les phénomènes de diffusion étant inclus dans les phénomènes d'absorption (si de l'énergie est soustraite au faisceau) ou d'émission (si de l'énergie est ajoutée)

7. Attention,  $\lambda$  n'est pas une longueur d'onde ! On ne parlera d'ailleurs ici que de fréquence, et jamais de longueur d'onde, pour éviter toute ambiguïté.

$$\mathcal{I} = \frac{I_\nu}{\nu^3}, \quad \mathcal{E} = \frac{j_\nu}{\nu^2}, \quad \mathcal{A} = \nu \alpha_\nu. \quad (7.31)$$

Toutes ces quantités sont invariantes au sens où elles ne dépendent pas du référentiel dans lequel elles sont évaluées.

Vérifions que cette équation redonne la forme standard de l'équation de transfert radiatif lorsqu'elle est exprimée dans le référentiel d'un observateur comobile avec le référentiel du fluide émettant le rayonnement. L'équation invariante 7.30 devient :

$$\frac{dI_{\nu_{\text{em}}}}{d\lambda} = \nu_{\text{em}} [j_{\nu_{\text{em}}} - \alpha_{\nu_{\text{em}}} I_{\nu_{\text{em}}}] \quad (7.32)$$

où  $\nu_{\text{em}}$  est la fréquence mesurée par l'observateur comobile avec le fluide émetteur, et où l'on a utilisé le fait que la fréquence mesurée par cet observateur ne varie pas le long de la géodésique (soit :  $d\nu_{\text{em}}/d\lambda = 0$ ).

Par ailleurs, un raisonnement exactement analogue à celui illustré sur la Fig. 7.5 permet d'obtenir, en notant  $ds_{\text{em}}$  l'élément de longueur propre mesurée par l'observateur correspondant au déplacement de  $d\lambda$  du photon le long de sa géodésique :

$$d\lambda \nu_{\text{em}} = ds_{\text{em}}. \quad (7.33)$$

On obtient alors l'équation bien connue du transfert radiatif, exprimée dans le référentiel de l'observateur comobile :

$$\frac{dI_{\nu_{\text{em}}}}{ds_{\text{em}}} = j_{\nu_{\text{em}}} - \alpha_{\nu_{\text{em}}} I_{\nu_{\text{em}}}. \quad (7.34)$$

C'est cette équation qui est implémentée dans GYOTO. Sa solution s'obtient aisément<sup>8</sup> :

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp\left(-\int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds'\right) + \int_{s_0}^s \exp\left(-\int_{s'}^s \alpha_\nu(s'') ds''\right) j_\nu(s') ds' \quad (7.35)$$

où  $s_0$  est la valeur initiale de la coordonnée  $s$ , c'est-à-dire sa valeur à la sortie<sup>9</sup> de la géodésique de l'objet astrophysique, si l'on suppose que l'objet n'est traversé qu'une seule fois par la géodésique<sup>10</sup>. Comme l'émission à l'extérieur de l'objet est supposée nulle, la valeur correspondante  $I_\nu(s_0)$  de l'intensité spécifique est nulle.

On a donc :

---

8. Afin d'alléger les équations, on abandonne le suffixe "em" pour les différentes quantités mesurées par l'observateur comobile.

9. On rappelle que l'intégration est effectuée en remontant le temps, on appelle ici point de sortie de l'objet le point ayant la plus petite valeur du temps coordonnée parmi les points d'intégration situés dans l'objet.

10. Ce qui n'est pas forcément le cas, on peut imaginer que l'absorption est suffisamment faible pour qu'une géodésique très courbée décrive plusieurs passages à travers l'objet avant de rejoindre l'observateur.

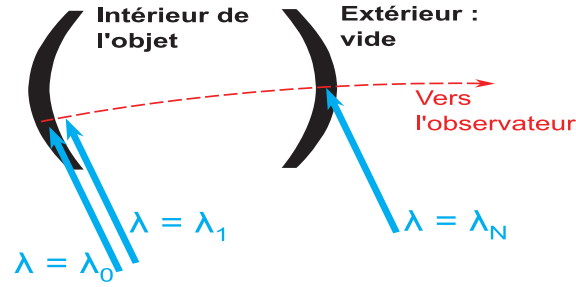


FIGURE 7.6 – Intégration à l’intérieur de l’objet.  $\lambda$  est un paramètre affine. La géodésique se trouve à l’intérieur de l’objet astrophysique pour  $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_N$ . Sur cette figure, l’intégration est supposée s’arrêter lorsque la géodésique quitte l’objet (en remontant le temps, c’est-à-dire à l’extrémité gauche sur cette figure).

$$I_\nu(s) = \int_{s_0}^s \exp\left(-\int_{s'}^s \alpha_\nu(s'') ds''\right) j_\nu(s') ds'. \quad (7.36)$$

En un point donné à l’intérieur de l’objet, l’incrément d’intensité spécifique pour un incrément de distance  $\delta s$  (qui se déduit de l’incrément de paramètre affine au pas considéré au moyen de l’Eq. 7.33) s’écrit donc :

$$\delta I_\nu = \exp(-\alpha_\nu \delta s) j_\nu \delta s. \quad (7.37)$$

L’intensité spécifique émise s’obtient en sommant ces incréments sur les différents pas d’intégration à l’intérieur de l’objet (voir la Fig. 7.6).

Il ne reste donc plus qu’à fournir les valeurs des coefficients d’absorption et d’émission en tout point à l’intérieur de l’objet astrophysique.

## 7.3 Calcul de spectres

Il est possible de calculer avec GYOTO les spectres d’émission d’objets astrophysiques. Ce calcul peut se faire pour des objets optiquement épais ou optiquement minces.

### 7.3.1 Spectre d’objets optiquement épais

On considère un disque mince d’accrétion, en supposant que les orbites des particules qui le composent sont képlériennes. On s’intéresse à modéliser le spectre d’une raie d’émission de fréquence propre  $\nu_{\text{raie}}$ . En suivant Fanton *et al.* (1997), on considère que l’intensité spécifique émise par le disque à un rayon  $r$  s’écrit :

$$I_{\nu_{\text{em}}} \propto \delta(\nu_{\text{em}} - \nu_{\text{raie}}) \epsilon(r) \quad (7.38)$$

où  $\delta$  représente la distribution de Dirac et où  $\epsilon(r)$  suit une loi de puissance décrite par un paramètre  $p$  selon :

$$\epsilon(r) \propto r^{-p}. \quad (7.39)$$

L'intégration des géodésiques par GYOTO va permettre de déterminer pour chaque pixel de l'écran de l'observateur, c'est-à-dire pour chaque direction d'incidence sur le ciel, l'intensité spécifique observée, qui est reliée à l'intensité émise selon :

$$I_{\nu_{\text{obs}}} = g^3 I_{\nu_{\text{em}}} \quad (7.40)$$

où :

$$g = \frac{\nu_{\text{obs}}}{\nu_{\text{em}}}. \quad (7.41)$$

L'Eq. 7.40 résulte immédiatement de l'expression de l'invariant d'intensité introduit plus haut,  $\mathcal{I} = I_{\nu}/\nu^3$ .

Le flux observé  $F_{\nu}$  est relié à l'intensité spécifique selon :

$$dF_{\nu} = I_{\nu} \cos\theta d\Omega \quad (7.42)$$

où  $\Omega$  désigne l'angle solide sous lequel est vu l'élément émetteur, et  $\theta$  représente l'angle séparant la normale à la surface collectrice et la direction d'incidence du photon (Rybicki & Lightman 1979).

Chaque pixel de l'écran GYOTO correspondant à un petit angle solide autour d'une direction donnée sur le ciel, on peut écrire :

$$F_{\nu_{\text{obs}}} = \sum_{\text{pixels}} I_{\nu_{\text{obs,pixel}}} \cos(\theta_{\text{pixel}}) \delta\Omega_{\text{pixel}} \quad (7.43)$$

où  $I_{\nu_{\text{obs,pixel}}}$  est l'intensité spécifique calculée pour le pixel considéré,  $\theta_{\text{pixel}}$  est l'angle entre la normale à l'écran et la direction d'incidence correspondant au pixel considéré et  $\delta\Omega_{\text{pixel}}$  est l'élément d'angle solide couvert par un pixel, que l'on définit comme l'angle solide couvert par l'écran divisé par le nombre de pixels :

$$\delta\Omega_{\text{pixel}} = \frac{2\pi(1 - \cos f)}{N_{\text{pixels}}}, \quad (7.44)$$

où  $f$  désigne l'angle entre la normale à l'écran et la direction d'incidence la plus rasante observée. Cet angle est immédiatement relié au champ de vue  $F$  par :  $f = F/2$  (voir la Fig. 7.1).

La détermination du flux observé pour une bande de fréquences ne nécessite de réaliser qu'une image du disque d'accrétion, en stockant les valeurs du rayon d'impact et du facteur de décalage vers le rouge  $g$  pour chaque pixel de l'écran. Muni de ces résultats, on peut se donner une bande de fréquences observées  $\nu_{\text{obs}}^i$ , et déterminer pour chaque pixel la fréquence émise associée  $\nu_{\text{em,pixel}}^i = \nu_{\text{obs}}^i/g_{\text{pixel}}$ , puis l'intensité spécifique

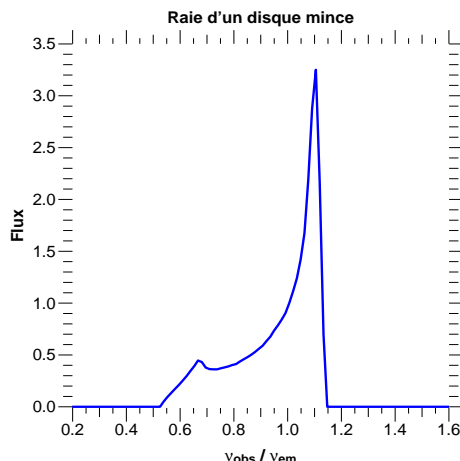


FIGURE 7.7 – Raie d’émission d’un disque mince d’accrétion vu à  $45^\circ$  d’inclinaison autour d’un trou noir de Schwarzschild de masse  $M$ . Le rayon interne du disque vaut  $r = 6M$  et le rayon externe  $r = 10M$ . Le paramètre de la loi de puissance d’émission est  $p = -3$ . On ne tient compte ici que de la contribution de l’image de premier ordre. On peut comparer ce résultat avec la Fig. 3 de Wu *et al.* (2006).

$I_{\nu_{\text{obs,pixel}}} = g_{\text{pixel}}^3 r_{\text{impact,pixel}}^{-p} \delta(\nu_{\text{em,pixel}}^i - \nu_{\text{raie}})$ . Le flux observé à la fréquence  $\nu_{\text{obs}}^i$  étant finalement la somme sur les pixels des  $I_{\nu_{\text{obs,pixel}}}$ .

La Fig. 7.7 représente un tel spectre calculé pour un disque d’accrétion vu à  $45^\circ$  d’inclinaison autour un trou noir de Schwarzschild de masse  $M$ , le disque ayant pour rayon interne  $r = 6M$  et pour rayon externe  $r = 10M$ , le paramètre  $p$  valant  $-3$ .

### 7.3.2 Spectre d’objets optiquement minces

Le calcul du spectre émis par un objet optiquement mince est plus complexe que celui d’un objet optiquement épais puisqu’il va falloir réaliser les calculs au fur et à mesure de l’intégration de la géodésique à travers l’objet, et non plus en post-traitement.

L’implémentation réalisée dans GYOTO est la suivante.

Pour chaque pas d’intégration à l’intérieur de l’objet, on calcule le facteur de décalage vers le rouge  $g = 1/(-\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_{\text{em}})$ , où  $\mathbf{p}$  est la 4-impulsion du photon et  $\mathbf{u}_{\text{em}}$  est la 4-vitesse de l’émetteur. Le facteur 1 au numérateur vient du fait que, comme on l’a expliqué à la fin de la section 7.1.2, l’intégration de GYOTO est effectuée avec une fréquence observée égale à 1.

Pour chaque valeur de fréquence observée  $\nu_{\text{obs}}$  voulue par l’utilisateur, on calcule la fréquence émise correspondante selon :  $\nu_{\text{em}} = \nu_{\text{obs}}/g$ .

On peut alors utiliser l’expression de l’incrément d’intensité spécifique émise  $\delta I_{\nu_{\text{em}}}$  (Eq. 7.37), en utilisant pour le calcul la valeur en unité SI de  $\nu_{\text{em}}$  calculée précédemment. Le fait que l’intégration des géodésiques soit réalisée avec une fréquence observée conventionnelle égale à 1 n’impacte donc en rien les calculs spectraux.

L'incrément d'intensité spécifique observée pour chaque valeur de la fréquence observée choisie par l'utilisateur s'écrit alors :

$$\delta I_{\nu_{\text{obs}}} = g^3 \delta I_{\nu_{\text{em}}}. \quad (7.45)$$

On peut ainsi calculer un cube de cartes d'intensité spécifique correspondant aux différentes valeurs de fréquences observées choisies par l'utilisateur. Le flux observé pour chaque fréquence se déduit immédiatement par sommation des cartes, selon la formule 7.43.

On trouvera au chapitre 9 des illustrations de ce qui précède.

## 7.4 Objets astrophysiques implémentés

Cette section présente les objets astrophysiques déjà implémentés dans GYOTO. Elle ne vise qu'à donner un aperçu des potentialités du code, et ne recense aucun résultat astrophysique exploitable. L'utilisation de GYOTO à des fins astrophysiques sera étudiée dans les chapitres 9 et 10.

### 7.4.1 Étoile en orbite

GYOTO peut calculer l'orbite d'une étoile plongée dans la métrique de Kerr. L'étoile est modélisée de façon extrêmement simple. Seule la trajectoire de son centre est calculé, et un rayon lui est attribué. Au cours de l'intégration des photons, on détermine si l'étoile est ou non atteinte en comparant la distance du photon au centre de l'étoile à la valeur du rayon.

Aucune physique interne n'est donc prise en compte, ni aucun effet de marée sur l'étoile. La prise en compte de la déformation de l'étoile par effet de marée, pouvant éventuellement aller jusqu'à son déchirement complet, serait un développement intéressant du code qui pourra être traité dans l'avenir.

On a déjà présenté Fig. 1.6 l'image d'une étoile en orbite sur l'ISCO d'un trou noir de Kerr de spin  $a = 0,9$ .

### 7.4.2 Disque mince

Un autre objet simple à implémenter est le disque mince d'accrétion, dans le cadre du modèle de Page & Thorne (1974). L'expression du flux émis par un tel disque est donnée de façon plus compacte par Marck (1996) qui calcule également des images de ces structures. On pourra se reporter à cet article pour y comparer les résultats obtenus avec GYOTO.

En supposant une émission isotrope, l'intensité spécifique est proportionnelle au flux, si bien que l'intensité spécifique émise en un point du disque vérifie (Marck 1996) :

$$I_{\nu} \propto \frac{1}{(\rho^2 - 3) \rho^5} \left( \rho - \sqrt{6} \frac{\sqrt{3}}{2} \log \left( (3 - 2\sqrt{2}) \frac{\rho + \sqrt{3}}{\rho + \sqrt{3}} \right) \right) \quad (7.46)$$

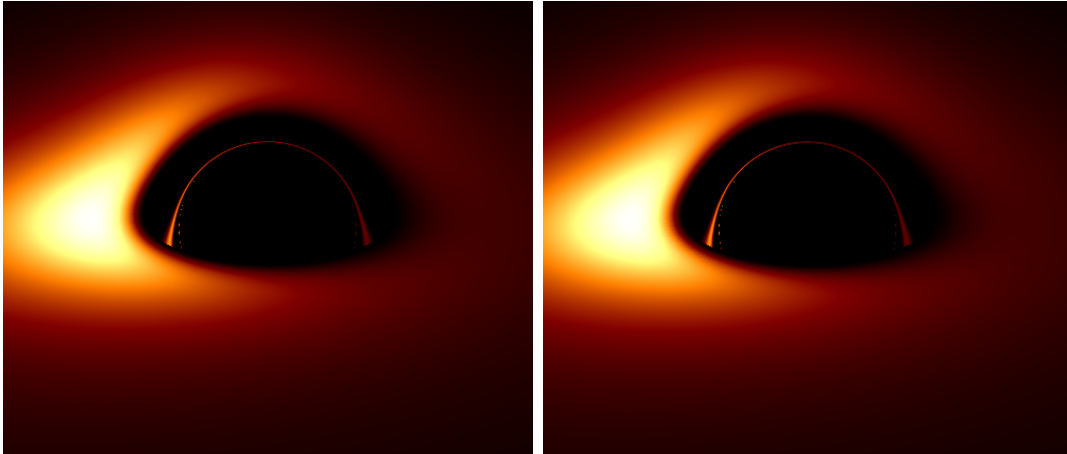


FIGURE 7.8 – Image d’un disque mince d’accrétion autour d’un trou noir de Schwarzschild calculé en coordonnées de Boyer-Lindquist (gauche) ou de Kerr-Schild (droite).

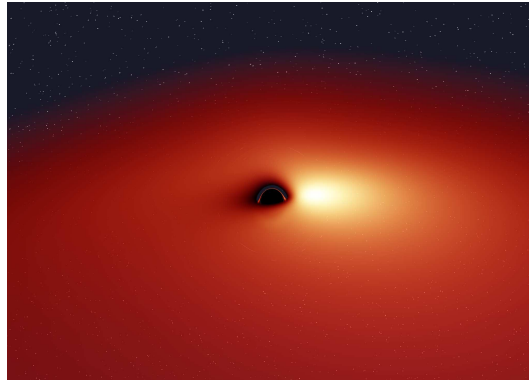


FIGURE 7.9 – Image d’un disque mince d’accrétion autour d’un trou noir de Schwarzschild calculé en coordonnées de de Kerr-Schild par Marck (1996).

où  $\rho = \sqrt{r}/M$ ,  $M$  étant la masse du trou noir.

La Fig. 7.8 représente des images de disques minces d’accrétion autour d’un trou noir de Schwarzschild, calculé l’un en coordonnées de Boyer-Lindquist, l’autre en coordonnées de Kerr-Schild. On pourra comparer ces résultats à la Fig. 7.9 issue de Marck (1996).

### 7.4.3 Disque avec instabilité de Rossby

L’instabilité de Rossby peut se déclencher dans des disques minces lorsque le profil de densité présente un extremum en une certaine valeur du rayon  $r_{\text{RWI}}$ . Des ondes de densité vont être émises à partir de l’extremum de densité en s’en éloignant, des vortex apparaissant à proximité de  $r = r_{\text{RWI}}$ . On pourra se reporter à Meheut *et al.* (2010) pour plus de détails.

Un disque mince présentant ce type d’instabilité a été implémenté dans GYOTO, dans le cadre d’une collaboration avec Héloïse Méheut (APC, Paris). Le profil de densité est



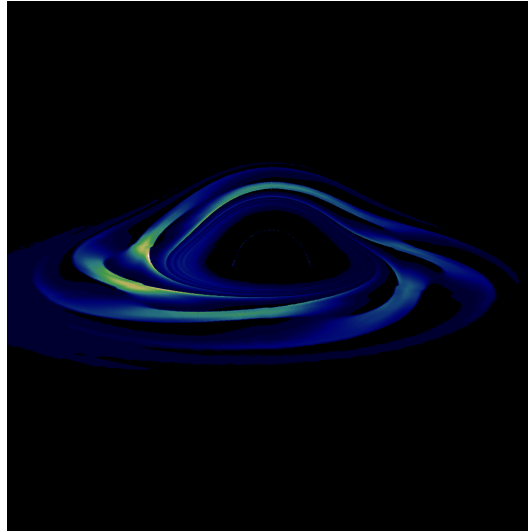


FIGURE 7.10 – Image d'un disque mince soumis à une instabilité de Rossby. Cette figure peut être comparée à celles obtenues par Falanga *et al.* (2007).

calculé en utilisant le code VAC de Tóth (1996), l'intensité spécifique émise est calculée en utilisant l'expression fournie par Falanga *et al.* (2007).

La Fig. 7.10 représente l'image d'un disque affecté d'une telle instabilité.

L'exploitation astrophysique de ces résultats sera menée dans un futur proche, comme on l'indique dans la Conclusion.

#### 7.4.4 Tore d'accrétion (*polish doughnut*)

GYOTO dispose également d'une structure d'accrétion torique, géométriquement épaisse et optiquement mince, dérivée d'une structure d'accrétion nommée *polish doughnut* et appelée tore ionisé. Cette structure a été implémentée dans le cadre d'une collaboration avec Odele Straub et Marek Abramowicz (CAMK, Varsovie ; Université de Göteborg). Elle sera présentée en détail, ainsi que ces possibles applications astrophysiques, dans le chapitre 9.

On se contente ici de montrer Fig. 7.11 la géométrie de cette structure d'accrétion. Pour cette figure, l'équation du transfert radiatif est intégrée, avec un coefficient d'émission constant et aucune absorption. Le calcul du facteur de décalage vers le rouge au niveau du point d'impact permet de calculer l'effet de *beaming*<sup>11</sup> qui affecte l'objet.

L'existence de tores d'accrétion dans les noyaux actifs de galaxies est rendue probable par le fait que, du fait de leur intense taux d'accrétion (proche de la limite d'Eddington), l'hypothèse du disque mince pour les parties les plus internes du disque n'est plus admissible. Cette partie interne du disque devient donc géométriquement épaisse, ressemblant alors à un tore, comme le remarque Fuerst & Wu (2007).

11. On rappelle que le *beaming* est l'effet d'atténuation ou d'augmentation de l'intensité lumineuse due à la concentration du rayonnement dans la direction de déplacement de la source du fait de l'aberration de la lumière (voir par exemple le chapitre 9.5 de Semay & Silvestre-Brac 2005)

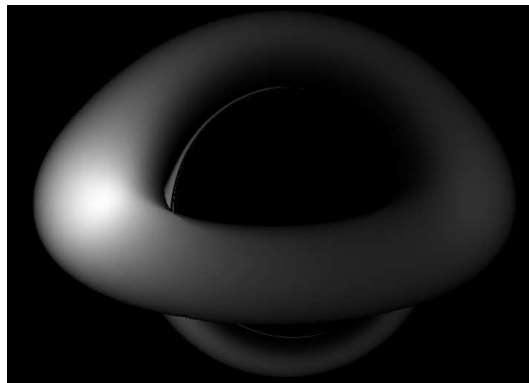


FIGURE 7.11 – Image d’un tore ionisé autour d’un trou noir de Kerr de spin 0,5, avec transfert radiatif trivial (coefficient d’émission constant, aucune absorption). On peut comparer ce résultat avec les simulations de la Fig. 5 de Fuerst & Wu (2007), représentant des tores d’accrétion.



# Chapitre 8

## Calcul d'orbite dans des métriques numériques

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Le formalisme 3+1 . . . . .</b>	<b>123</b>
8.1.1	Le formalisme et son application à GYOTO . . . . .	123
8.1.2	Aperçu des fondements théoriques . . . . .	125
<b>8.2</b>	<b>Équation des géodésiques en formalisme 3+1 . . . . .</b>	<b>128</b>
8.2.1	Intérêt d'une équation des géodésiques en 3+1 . . . . .	128
8.2.2	Dérivation . . . . .	128
<b>8.3</b>	<b>Étoile relativiste en rotation . . . . .</b>	<b>131</b>
8.3.1	Étoile relativiste en rotation . . . . .	131
8.3.2	Équation des géodésiques pour un espace-temps axisymétrique stationnaire . . . . .	132
8.3.3	Application à la métrique d'une étoile relativiste en rotation . . .	133

---

## 8.1 Le formalisme 3+1

### 8.1.1 Le formalisme et son application à GYOTO

Le formalisme 3+1 de la relativité générale est basé sur un feuilletage de l'espace-temps quadridimensionnel en hypersurfaces tridimensionnelles de genre espace (c'est-à-dire que tout vecteur appartenant à ces hypersurfaces est de genre espace). Ces hypersurfaces sont paramétrées par un paramètre  $t$  (voir Fig. 8.1).

Intuitivement, cette approche revient à concevoir la résolution des équations d'Einstein de la façon suivante. On se donne des conditions initiales sur une "tranche"  $\Sigma_t$  d'espace-temps tridimensionnelle correspondant à l'ensemble des événements ayant la "date"  $t$ . On va ensuite faire évoluer dans le "temps"  $t$  ces sections tridimensionnelles de façon à construire

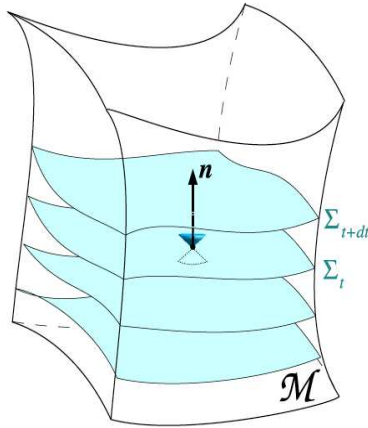


FIGURE 8.1 – Feuilletage de l’espacetemps  $\mathcal{M}$  par une famille d’hypersurfaces  $\Sigma_t$ . Source : Gourgoulhon (2007).

l’espacetemps quadridimensionnel. Cependant il faut garder à l’esprit que ce “temps” n’a rien d’absolu, il résulte du choix du feuilletage de l’espacetemps quadridimensionnel, qui est arbitraire.

Cette vision évolutive de l’espacetemps n’est cohérente que si l’on suppose qu’une ligne d’univers causale (c’est-à-dire qui puisse être suivie par une particule massive ou un photon) et sans point d’arrêt (c’est-à-dire, par exemple, que cette ligne d’univers ne termine pas son évolution dans la singularité centrale d’un trou noir) intersecte exactement une fois chaque  $\Sigma_t$  au cours de son évolution dans le “temps”  $t$ . Un espacetime satisfaisant cette propriété est appelé globalement hyperbolique. On se placera toujours dans ce cadre.

L’intérêt de ce formalisme est d’abord mathématique : il permet de rendre la résolution des équations d’Einstein équivalente à la résolution d’un problème de Cauchy, c’est-à-dire d’un jeu d’équations différentielles avec valeurs initiales fournies sur une hypersurface  $\Sigma_{t_0}$ . Ce sont donc des mathématiciens qui sont à l’origine de son développement : Georges Darmois dans les années 1920, André Lichnerowicz dans les années 1930-1940 et Yvonne Choquet-Bruhat dans les années 1950 (Darmois 1927; Lichnerowicz 1939; Choquet-Bruhat 1952). C’est d’ailleurs Choquet-Bruhat (1952) qui montre que le problème de Cauchy équivalent à la décomposition 3+1 des équations d’Einstein a localement une solution unique.

L’essor de la relativité numérique à partir des années 1970 s’est appuyé sur cette formulation des équations d’Einstein. L’intérêt de développer une implémentation du formalisme 3+1 dans GYOTO est de pouvoir utiliser les métriques calculées par la communauté de la relativité numérique. Tous les calculs de métriques numériques effectués à l’heure actuelle étant réalisés dans ce formalisme, il est nécessaire d’implémenter la vision 3+1 au sein de GYOTO si l’on veut s’intéresser à des métriques différentes de celle de Kerr.

Cet objectif rend GYOTO unique au sein des codes de calcul d'orbites existant à l'heure actuelle (voir l'introduction de la présente partie) : c'est le seul code qui est capable d'intégrer des géodésiques dans des métriques différentes de Kerr.<sup>1</sup>

Pour une présentation exhaustive du formalisme 3+1, on pourra se reporter à Gourgoulhon (2007).

### 8.1.2 Aperçu des fondements théoriques

Le lecteur non familier avec le formalisme de la géométrie différentielle utilisé ici (et dans la suite de cette partie) pourra se reporter à Gourgoulhon (2010c) pour une introduction. Cette section ne vise qu'à donner un rapide aperçu du formalisme 3+1 qui sera utilisé dans la section 8.2 pour dériver l'équation des géodésiques. Il n'est pas question ici d'être exhaustif, ni même complètement rigoureux.

L'objectif des paragraphes qui suivent est de définir les outils mathématiques qui vont permettre de décrire la géométrie des hypersurfaces  $\Sigma_t$ . On va s'intéresser à la fois à la géométrie intrinsèque des  $\Sigma_t$  (c'est-à-dire en considérant ces hypersurfaces comme des variétés autonomes de l'espacetemps ambiant  $\mathcal{M}$ ) et à leur géométrie extrinsèque (c'est-à-dire la façon dont ces hypersurfaces sont "courbées" au sein de  $\mathcal{M}$ ).

Dans les sections qui suivent, les indices grecs ( $\mu, \nu, \alpha, \beta$ ) varient entre 0 et 3 et sont donc relatifs à l'espacetemps quadridimensionnel  $\mathcal{M}$ . Les indices latins ( $i, j, k$ ) varient entre 1 et 3 et sont relatifs aux hypersurfaces  $\Sigma_t$ .

#### Géométrie intrinsèque

Une hypersurface  $\Sigma_t$  peut être considérée soit comme une variété de dimension trois, autonome de la variété d'espacetemps  $\mathcal{M}$ , soit comme une sous-variété de  $\mathcal{M}$ . Plus généralement, on peut faire correspondre à chaque tenseur de  $\Sigma_t$  (considérée comme une variété de dimension trois autonome) un tenseur de  $\mathcal{M}$  (en considérant cette fois  $\Sigma_t$  comme une sous-variété), et inversement. En particulier, on peut associer à la 4-métrique  $\mathbf{g}$  de  $\mathcal{M}$  la 3-métrique  $\gamma$  de  $\Sigma_t$ . On l'appelle métrique induite par  $\mathbf{g}$  sur  $\Sigma_t$ . Les produits scalaires de vecteurs de  $\Sigma_t$  calculés au moyen de  $\gamma$  coïncident bien entendu avec ceux calculés par  $\mathbf{g}$ .

La 3-variété  $\Sigma_t$  étant dotée de sa 3-métrique  $\gamma$ , on peut définir son opérateur de dérivée covariante  $\mathbf{D}$ , exactement de la même manière qu'on définit la dérivée covariante  $\nabla$  compatible avec la 4-métrique  $\mathbf{g}$ . Le tenseur de Riemann qui dérive de la 3-connexion  $\mathbf{D}$  est appelée tenseur de courbure intrinsèque de  $\Sigma_t$ .

Les quantités introduites jusqu'ici ne décrivent que la courbure intrinsèque à  $\Sigma_t$ . On ne s'est pas encore soucié de la géométrie de la 3-variété  $\Sigma_t$  plongée dans la 4-variété  $\mathcal{M}$ . C'est l'objet de la section qui suit.

---

1. Signalons cependant le récent article de Psaltis & Johannsen (2010) dans lequel des géodésiques sont intégrées en métrique de Kerr perturbée. Cependant, la métrique reste analytique.

### Géométrie extrinsèque

La famille d'hypersurfaces  $\Sigma_t$  étant donnée, on veut décrire leur géométrie au sein de l'espace ambiant quadridimensionnel. Le paramètre  $t$  peut être envisagé comme un champ scalaire dont les  $\Sigma_t$  sont les lignes de niveau. Une hypersurface  $\Sigma_{t_0}$  est ainsi le lieu des points tels que la valeur du champ scalaire  $t$  soit égale à  $t_0$ .

Le quadrivecteur gradient du champ scalaire,  $\nabla t$ , est par construction orthogonal aux hypersurfaces  $\Sigma_t$ . On peut donc introduire le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  normal aux hypersurfaces  $\Sigma_t$  :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla t}{\sqrt{-\nabla t \cdot \nabla t}} \quad (8.1)$$

le signe - sous la racine étant dû au fait que le vecteur gradient, orthogonal à une hypersurface de genre espace, est de genre temps :  $\nabla t \cdot \nabla t < 0$ .

La courbure extrinsèque de  $\Sigma_t$ , c'est-à-dire sa courbure "au sein de  $\mathcal{M}$ ", peut être définie en examinant la variation de direction du vecteur normal  $\mathbf{n}$  lorsqu'il évolue à la surface de  $\Sigma_t$ . Plus précisément, on peut définir l'opérateur de Weingarten  $\chi$  qui associe à chaque vecteur  $\mathbf{v}$  de  $\Sigma_t$  la dérivée covariante du vecteur  $\mathbf{n}$  le long de  $\mathbf{v}$  :

$$\chi : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_P(\Sigma_t) & \rightarrow & \mathcal{T}_P(\Sigma_t) \\ \mathbf{v} & \mapsto & \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{n} \end{array} \quad (8.2)$$

où  $\mathcal{T}_P(\Sigma_t)$  désigne l'espace vectoriel tangent à  $\Sigma_t$  en un point  $P$  de  $\Sigma_t$ . On peut montrer (Gourgoulhon 2007) que cette application est bien définie, c'est-à-dire que l'ensemble d'arrivée est bien  $\mathcal{T}_P(\Sigma_t)$ .

On peut alors définir le tenseur de courbure extrinsèque  $\mathbf{K}$  selon :

$$\mathbf{K} : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_P(\Sigma_t) \times \mathcal{T}_P(\Sigma_t) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \mapsto & -\mathbf{u} \cdot \chi(\mathbf{v}) \end{array} \quad (8.3)$$

On peut démontrer que cet opérateur est symétrique.

Afin de décrire la géométrie des hypersurfaces  $\Sigma_t$ , on a donc introduit la métrique induite  $\gamma$ , l'opérateur de dérivation covariante associé à cette métrique  $\mathbf{D}$  (courbure intrinsèque), le vecteur unitaire normal  $\mathbf{n}$  et le tenseur de courbure extrinsèque  $\mathbf{K}$ .

Deux quantités restent encore à introduire : le *lapse* et le *shift*.

### Lapse et shift

Le *lapse* est immédiatement accessible. C'est le champ scalaire  $N$  tel que :

$$\mathbf{n} = -N \nabla t. \quad (8.4)$$

D'après l'Eq. 8.1, on a immédiatement :  $N = \sqrt{-\nabla t \cdot \nabla t}$ . Le terme de *lapse* vient du fait que l'intervalle de temps propre  $d\tau$  mesuré par un observateur (dit eulérien) dont la 4-vitesse serait  $\mathbf{n}$  lors de son passage de  $\Sigma_t$  à  $\Sigma_{t+dt}$  vaut :

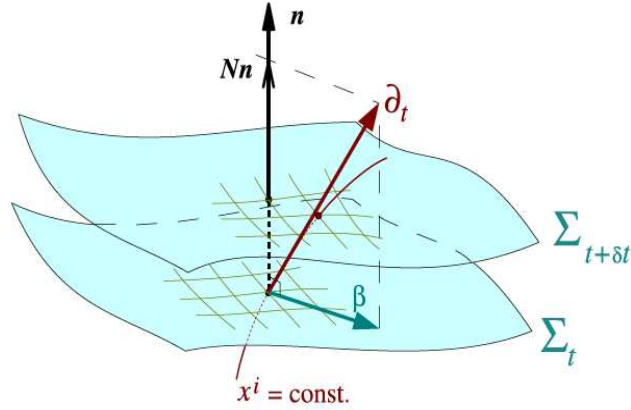


FIGURE 8.2 – Définition du vecteur *shift*  $\beta$  en fonction du *lapse*  $N$ , du vecteur normal unitaire  $\mathbf{n}$  et du vecteur de base associé à la coordonnée  $t$ ,  $\partial_t$  :  $\partial_t = N \mathbf{n} + \beta$ . Source : Gourgoulhon (2007).

$$d\tau = N dt. \quad (8.5)$$

Le *lapse* mesure donc le rapport entre l'intervalle de temps propre de l'observateur eulérien et l'intervalle de temps coordonnée.

Introduisons alors un système de coordonnées adaptées au feuilletage en prenant  $t$  comme coordonnée temporelle. On note  $\partial_t$  le vecteur de base naturelle associé à cette coordonnée. Ce vecteur est de genre temps, mais n'a aucune raison a priori d'être orthogonal à  $\Sigma_t$ , c'est-à-dire colinéaire au vecteur normal  $\mathbf{n}$ . Autrement dit, les lignes de coordonnées  $x^i = \text{cst}$  ne sont, en général, pas orthogonales aux hypersurfaces  $\Sigma_t$ .

C'est cet écart à la colinéarité de  $\partial_t$  et de  $\mathbf{n}$  qui permet de définir le vecteur *shift*,  $\beta$  (voir la Fig. 8.2) :

$$\partial_t = N \mathbf{n} + \beta. \quad (8.6)$$

### Opérateur de projection

Le dernier objet mathématique qui nous sera très utile pour la dérivation de l'équation des géodésiques est l'opérateur de projection sur une hypersurface  $\Sigma_t$ .

$$\begin{aligned} \gamma^* : \mathcal{T}_P(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{T}_P(\Sigma_t) \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{v} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (8.7)$$

Comme son nom le laisse entendre, son action sur le vecteur normal  $\mathbf{n}$  donne le vecteur nul.

Ses composantes s'expriment selon :



$$\gamma^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + n^\alpha n_\beta. \quad (8.8)$$

Nous disposons désormais de tous les objets mathématiques nécessaires pour dériver l'équation des géodésiques.

## 8.2 Équation des géodésiques en formalisme 3+1

### 8.2.1 Intérêt d'une équation des géodésiques en 3+1

Munis d'une métrique exprimée dans le formalisme 3+1, on peut toujours utiliser l'équation standard quadridimensionnelle des géodésiques :

$$\ddot{x}^\alpha + {}^4\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (8.9)$$

où l'indice supérieur 4 rappelle que l'on utilise ici les 4-Christoffels associés à la 4-métrique  $\mathbf{g}$ .

En effet, on peut exprimer la 4-métrique en fonction des quantités 3+1 selon (voir par exemple Gourgoulhon 2007) :

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt) (dx^j + \beta^j dt). \quad (8.10)$$

En dérivant ces quantités, on peut donc calculer les 4-Christoffels et intégrer directement l'Eq. 8.9.

Cependant, afin d'éviter ces manipulations depuis les quantités tridimensionnelles vers les quantités quadridimensionnelles, il serait utile de disposer d'une équation équivalente à (8.9) mais faisant uniquement appel à des quantités 3+1.

De plus, si l'on considère des métriques non stationnaires, telle que des métriques d'effondrement gravitationnel, il ne sera plus aussi simple de faire appel à l'équation quadridimensionnelle (8.9). Cet aspect particulier de l'équation des géodésiques en 3+1 sera présenté en détail dans le chapitre 12.

### 8.2.2 Dérivation

On considère le point O d'intersection de la géodésique de genre temps d'un observateur eulérien et de la géodésique de genre temps (resp. lumière) d'un autre observateur (resp. d'un photon). Soit A le point distant de  $d\lambda$  de O sur la géodésique de l'observateur non-eulérien (resp. du photon), où  $\lambda$  désigne le temps propre (resp. le paramètre de la géodésique lumière). Soit B l'événement simultané pour l'observateur eulérien. Soit enfin  $\mathbf{w} = \mathbf{BA}/d\tau$  où  $\tau$  désigne le temps propre de l'observateur eulérien (voir la Fig. 8.3). Un raisonnement analogue à celui mené pour obtenir l'Eq. 7.23 permet d'obtenir :

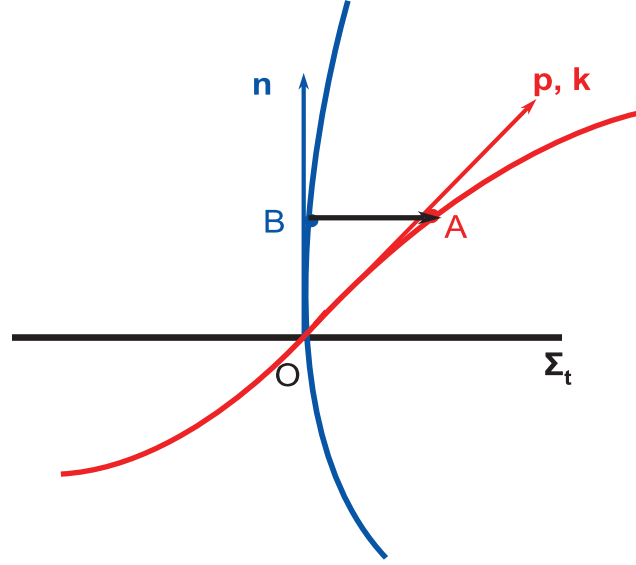


FIGURE 8.3 – En bleu, la géodésique de genre temps suivie par l’observateur eulérien de 4-vitesse  $\mathbf{n}$ . En rouge la géodésique suivie soit par un autre observateur de 4-vitesse  $\mathbf{p}$ , soit par un photon de 4-vecteur tangent  $\mathbf{k}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \Gamma (\mathbf{n} + \mathbf{w}) && \text{observateur,} \\ \mathbf{k} &= \mathbf{n} + \mathbf{w} && \text{photon} \end{aligned} \quad (8.11)$$

où  $\Gamma = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = d\tau/d\lambda$ , et où on a imposé  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = -1$ , ce dernier choix étant permis par le fait que le vecteur de genre lumière  $\mathbf{k}$  n’est défini qu’à un facteur multiplicatif près.

L’équation des géodésiques a été jusqu’ici toujours exprimée dans un système de coordonnées particulier, comme dans l’Eq. 8.9. Son expression covariante s’écrit, pour un vecteur tangent de genre temps associé au temps propre :

$$\nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{p} = 0, \quad (8.12)$$

et pour un vecteur de genre lumière :

$$\nabla_{\mathbf{k}} \mathbf{k} = \kappa \mathbf{k}, \quad (8.13)$$

où  $\kappa$  est un champ scalaire qui n’est nul que dans le cas d’un paramétrage affine de la géodésique, c’est-à-dire tel que tout reparamétrage  $\lambda' = a\lambda + b$ , avec  $a$  et  $b$  deux constantes, laisse l’équation des géodésiques invariante.

Déterminer l’équation des géodésiques en formalisme 3+1, c’est projeter les Eqs. 8.12 et 8.13 sur les hypersurfaces  $\Sigma_t$ , et orthogonalement à ces hypersurfaces, c’est-à-dire le long du vecteur normal  $\mathbf{n}$ .

Les calculs qui suivent ne font que résumer les étapes principales de la dérivation. On pourra se reporter à l'Annexe pour les détails calculatoires.

### Équation des géodésiques de genre temps

On commence par projeter l'Eq. 8.12 le long du vecteur normal  $\mathbf{n}$ . En notant  $\underline{\mathbf{n}}$  la forme linéaire associée à  $\mathbf{n}$  par dualité métrique, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}, \underline{\mathbf{n}} \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \Gamma^2 (-w^i D_i \ln N + w^i w^j K_{ij}) - \frac{d\Gamma}{d\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (8.14)$$

où la deuxième ligne fait abondamment appel aux relations établies dans l'Annexe.

Cette dernière équation est scalaire, elle permet d'exprimer la quantité  $d\Gamma/d\tau$  en fonction de quantités 3+1 ( $w^i$ ,  $D_i$ ,  $K_{ij}$ ).

Projetons l'Eq. 8.12 sur l'hypersurface  $\Sigma_t$  au moyen de l'opérateur de projection introduit Eq. 8.7 :

$$\begin{aligned} (\gamma^* \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u})^\alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow \Gamma^2 (D^i \ln N - 2 w^j K^i_j + \frac{1}{N} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} w^i + w^j D_j w^i) + \frac{d\Gamma}{d\tau} w^i &= 0 \end{aligned} \quad (8.15)$$

où l'opérateur  $\mathcal{L}$  désigne la dérivée de Lie et où l'on a introduit le vecteur  $\mathbf{m} = N \mathbf{n}$ .

En utilisant l'équation scalaire 8.14 pour exprimer le terme  $d\Gamma/d\tau$  de l'Eq. 8.15 on obtient :

$$D^i \ln N - 2 w^j K^i_j + \frac{1}{N} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} w^i + w^j D_j w^i + (w^j w^k K_{jk} - w^j D_j \ln N) w^i = 0. \quad (8.16)$$

Cette équation est vectorielle, elle constitue l'équation des géodésiques de genre temps. On va démontrer dans la section suivante que l'équation des géodésiques de genre lumière s'exprime de la même façon.

### Équation des géodésiques de genre lumière

Projetons désormais l'Eq. 8.13 le long du vecteur  $\mathbf{n}$  :

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\mathbf{l}} \mathbf{l}, \underline{\mathbf{n}} \rangle &= \kappa \langle \mathbf{l}, \underline{\mathbf{n}} \rangle \\ \Leftrightarrow w^i D_i \ln N - w^i w^j K_{ij} &= \kappa. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Cette équation scalaire va permettre d'exprimer  $\kappa$  en fonction des quantités 3+1.

La projection sur l'hypersurface  $\Sigma_t$  s'écrit :

$$\begin{aligned} (\gamma^* \nabla_{\mathbf{1}})^\alpha &= \kappa (\gamma^* \mathbf{1})^\alpha \\ \Leftrightarrow D^i \ln N - 2 w^j K^i_j + \frac{1}{N} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} w^i + w^j D_j w^i &= (w^j D_j \ln N - w^j w^k K_{jk}) w^i \end{aligned} \quad (8.18)$$

où l'Eq. 8.17 a été utilisée pour exprimer le champ scalaire  $\kappa$ . Cette dernière équation est scalaire et constitue l'équation des géodésiques de genre lumière.

On constate immédiatement l'équivalence des Eqs. 8.16 et 8.18. La section suivante va établir l'équation générale des géodésiques (de genre temps ou lumière) sous la forme d'un système d'équations différentielles en la variable  $t$  portant sur les variables d'espace  $x^i$ .

### Équation des géodésiques comme système d'équations différentielles

Les relations établies dans l'Annexe permettent de transformer les Eqs 8.16 et 8.18 en :

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= N w^i - \beta^i, \\ \frac{dw^i}{dt} &= N [w^i (w^j \partial_j \ln N - K_{jk} w^j w^k) + 2K^i_j w^j - \Gamma^i_{jk} w^j w^k] \\ &\quad - \gamma^{ij} \partial_j N - w^j \partial_j \beta^i \end{aligned} \quad (8.19)$$

où l'on a utilisé les coordonnées spatiales  $x^i$ .

Ce sont les équations des géodésiques exprimées dans le formalisme 3+1 : toutes les quantités utilisées ici sont définies dans les hypersurfaces  $\Sigma_t$ . En particulier le symbole de Christoffel  $\Gamma^i_{jk}$  est associé à la 3-métrie  $\gamma$ .

La section suivante va montrer un premier exemple d'utilisation de cette équation. On trouvera dans le chapitre 12 une application plus poussée à la visualisation d'espacetemps dynamiques.

## 8.3 Un objet GYOTO en formalisme 3+1 : l'étoile relativiste en rotation

Cette section a pour but de montrer un premier exemple de calcul d'orbites réalisé dans une métrique calculée numériquement en formalisme 3+1, faisant appel à l'Eq. 8.19. On va également fournir une vérification de cette équation en comparant le résultat qu'elle fournit avec celui d'une intégration quadridimensionnelle.

### 8.3.1 Étoile relativiste en rotation

On considère la métrique d'une étoile relativiste en rotation, telle que décrite par Gourgoulhon (2010a).

On utilise un système de coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi)$  adaptées au feuilletage par les hypersurfaces  $\Sigma_t$ . On suppose l'espacetemps axisymétrique ( $\partial_\varphi g_{\mu\nu} = 0$ ), stationnaire ( $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$ ) et circulaire (voir Gourgoulhon 2010a, Eq. 2.19 et 2.20, pour une définition).

La vitesse de rotation de l'étoile  $\Omega = d\varphi/dt$  est prise égale à 700 Hz. L'équation d'état de la matière stellaire est supposée polytropicque :

$$p = \kappa n^\gamma \quad (8.20)$$

où  $p$  est la pression,  $n$  est la densité numérique,  $\kappa$  est le coefficient de pression et  $\gamma$  est l'indice adiabatique.

On choisit les valeurs suivantes pour ces constantes :  $\kappa = 0,04$ ,  $\gamma = 2$ .

Munis de ce modèle simple, on peut résoudre les équations d'Einstein en utilisant la bibliothèque numérique LORENE<sup>2</sup> développée par le groupe de relativité numérique du LUTH.

### 8.3.2 Équation des géodésiques pour un espacetemps axisymétrique stationnaire

La métrique ainsi que les différentes quantités 3+1 introduites ci-dessus étant calculées par LORENE, il ne reste plus qu'à exprimer l'équation des géodésiques dans l'hypothèse axisymétrique et stationnaire afin de pouvoir calculer des images d'objets astrophysiques.

Dans le cas stationnaire axisymétrique, Gourgoulhon (2010a) montre que le *lapse* et les composantes du *shift* ne dépendent que de  $r$  et de  $\theta$  :

$$\begin{aligned} N &= N(r, \theta), \\ \beta^i &= \beta^i(r, \theta). \end{aligned} \quad (8.21)$$

On peut encore simplifier l'expression du *shift* en montrant qu'il s'exprime en fonction du champ scalaire  $\omega = -g_{t\varphi}/g_{\varphi\varphi}$  selon :

$$\boldsymbol{\beta} = (0, 0, -\omega). \quad (8.22)$$

Le tenseur de courbure extrinsèque  $\mathbf{K}$  est lui aussi grandement simplifié par rapport au cas général. Ces composantes non nulles sont seulement  $K_{r\varphi}$  et  $K_{\theta\varphi}$ .

Il ne reste plus qu'à calculer les symboles de Christoffel (relatifs à la 3-métrique) pour obtenir l'expression de l'équation des géodésiques pour un espacetemps axisymétrique et stationnaire :

---

2. Disponible à l'adresse <http://www.lorene.obspm.fr>

$$\begin{aligned}
\ddot{r} &= \mathcal{F} \dot{r} - N \gamma^{rr} N_{,r} + 2 N \gamma^{rr} (\dot{\varphi} - \omega) K_{r\varphi} - \mathcal{C}_r, \\
\ddot{\theta} &= \mathcal{F} \dot{\theta} - N \gamma^{\theta\theta} N_{,\theta} + 2 N \gamma^{\theta\theta} (\dot{\varphi} - \omega) K_{\theta\varphi} - \mathcal{C}_\theta, \\
\ddot{\varphi} &= \mathcal{F} (\dot{\varphi} - \omega) + 2 \left( \dot{r} \omega_{,r} + \dot{\theta} \omega_{,\theta} \right) + 2 N \gamma^{\varphi\varphi} \left( \dot{r} K_{r\varphi} + \dot{\theta} K_{\theta\varphi} \right) - \mathcal{C}_\varphi,
\end{aligned} \tag{8.23}$$

où  $\dot{X}$  désigne la dérivée par rapport au temps coordonnée  $t$  de la quantité  $X$ , et où l'on a introduit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \frac{2}{N} \left( N_{,r} \dot{r} + N_{,\theta} \dot{\theta} - \dot{r} (\dot{\varphi} - \omega) K_{r\varphi} - \dot{\theta} (\dot{\varphi} - \omega) K_{\theta\varphi} \right), \\
\mathcal{C}_r &= \dot{r}^2 \Gamma^r_{rr} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \Gamma^r_{r\theta} + \dot{\theta}^2 \Gamma^r_{\theta\theta} + (\dot{\varphi} - \omega)^2 \Gamma^r_{\varphi\varphi}, \\
\mathcal{C}_\theta &= \dot{r}^2 \Gamma^\theta_{rr} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \Gamma^\theta_{r\theta} + \dot{\theta}^2 \Gamma^\theta_{\theta\theta} + (\dot{\varphi} - \omega)^2 \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}, \\
\mathcal{C}_\varphi &= 2 \dot{r} (\dot{\varphi} - \omega) \Gamma^\varphi_{r\varphi} + 2 \dot{\theta} (\dot{\varphi} - \omega) \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}.
\end{aligned} \tag{8.24}$$

### 8.3.3 Application à la métrique d'une étoile relativiste en rotation

La Fig. 8.4 représente la trajectoire d'un photon intégré dans la métrique d'une étoile relativiste telle que définie dans la section 8.3.1. On a calculé cette géodésique de deux façon différentes : en utilisant l'équation des géodésiques en formalisme 3+1 dérivée plus haut (Eq. 8.23), et en utilisant l'équation des géodésiques 4D standard (Eq. 8.9). Cette dernière équation peut être utilisée étant donné qu'il est possible d'exprimer les symboles de Christoffel quadridimensionnels qui y apparaissent au moyen des quantités 3+1 grâce à la relation 8.10 reliant la métrique 4D aux quantités 3+1.

On constate sur la Fig. 8.4 que les deux calculs donnent exactement le même résultat, ce qui est une illustration de la validité de l'équation des géodésiques en 3+1.

La Fig. 8.5 représente la trajectoire d'une particule massive en orbite autour de l'étoile relativiste, là aussi calculée par les deux manières évoquées plus haut. On constate là aussi le parfait accord des deux calculs.

Des exemples d'intérêt astrophysique de l'utilisation des capacités de GYOTO à intégrer des géodésiques dans des métriques numériques seront proposés dans la partie V.

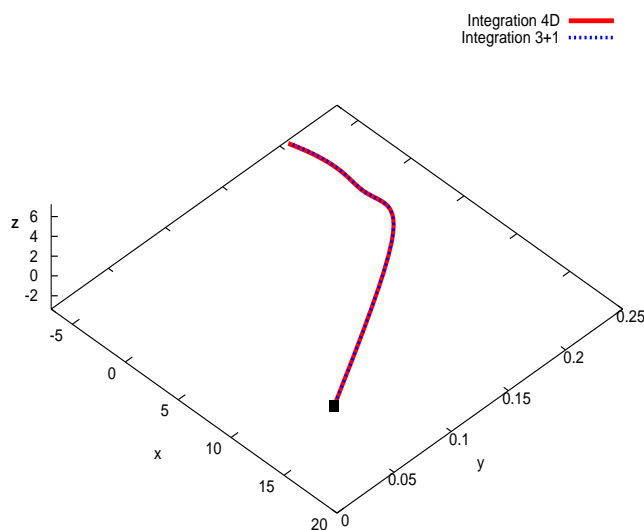


FIGURE 8.4 – Trajectoire d'un photon intégrée dans la métrique d'une étoile relativiste en rotation calculée par le code LORENE/nrotstar. Le calcul est mené en utilisant l'équation des géodésiques quadridimensionnelle standard (en trait plein rouge) ou l'équation des géodésiques en formalisme 3+1 (tirets bleus). La position de l'observateur est marquée par un carré noir.

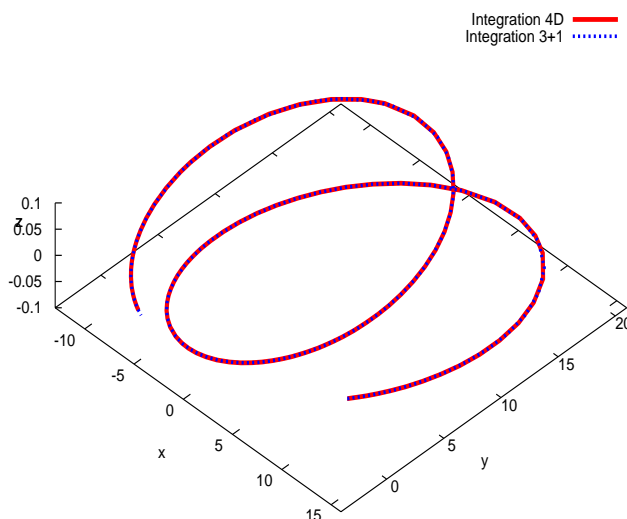


FIGURE 8.5 – Trajectoire d'une particule massive intégrée dans la métrique d'une étoile relativiste en rotation calculée par le code LORENE/nrotstar. Le calcul est mené en utilisant l'équation des géodésiques quadridimensionnelle standard (en trait plein rouge) ou l'équation des géodésiques en formalisme 3+1 (tirets bleus).

## Quatrième partie

Simulations d'observations pour  
contraindre l'objet compact au centre  
de la Galaxie





# Introduction

Cette partie vise à exploiter le développement du code de calcul de trajectoires de particules GYOTO dans le but d'étudier des phénomènes physiques en champ gravitationnel fort au centre de la Galaxie.

Le chapitre 9 s'intéresse à une structure d'accrétion particulière susceptible d'entourer le trou noir supermassif Sgr A\* : le tore ionisé. Cet objet dérive de la classe des *polish doughnuts*, structure d'accrétion qui a été développée à la fin des années 70 et dont les caractéristiques physiques sont connues de façon analytique, en fonction d'un nombre relativement restreint de paramètres. Le tore ionisé est constitué d'une population d'électrons et d'ions qui émettent du rayonnement synchrotron, Bremsstrahlung, et Compton inverse. Il sera donc nécessaire d'utiliser ici la capacité de GYOTO de tenir compte du transfert radiatif lors de l'intégration des rayons lumineux à travers le tore, optiquement mince. On se propose lors de cette étude de déterminer si le tore ionisé est une structure d'accrétion permettant d'expliquer les caractéristiques observées du spectre de Sgr A\*, en considérant uniquement l'émission synchrotron, responsable du pic sub-millimétrique comme on l'a vu dans la section 3.3. Il n'est pas question ici de contraindre de façon quantitative les paramètres du modèle en fonction du spectre observé de Sgr A\*, mais seulement de déterminer si le tore ionisé est un candidat digne ou non de considération pour rendre compte de l'aspect observationnel de l'émission des abords du trou noir central.

Le chapitre 10 va développer une analyse des sursauts de rayonnement qui affectent le centre galactique, et dont il a déjà été question plusieurs fois dans ce manuscrit (voir la section 4.2.1). Cette étude va permettre d'utiliser de nombreux résultats obtenus dans les parties II et III puisqu'on se propose d'aboutir à des simulations d'observations réalisées par l'instrument GRAVITY de phénomènes de sursauts dans le cadre du modèle dit du point chaud, pour lequel les bouffées de rayonnement observées sont dues à de la matière chauffée en orbite très resserrée autour du trou noir. Après avoir passé en revue les différents modèles proposés pour expliquer les sursauts de rayonnement de Sgr A\*, on se propose de simuler la courbe de lumière et la trajectoire du centroïde<sup>3</sup> d'un point chaud en orbite autour de Sgr A\*. Ces simulations serviront à leur tour de données initiales pour le code de simulation d'observations de GRAVITY présenté dans la partie II. On aboutira donc à une simulation très réaliste d'une observation par GRAVITY d'un phénomène de sursaut dans le cadre du modèle du point chaud. L'objectif de ces simulations est d'apporter une

---

3. C'est-à-dire du barycentre des positions pondérées par leur luminosité.

réponse plus précise à la question que l'on s'était déjà posée dans la section 6.2 : GRAVITY sera-t-il capable de mettre en évidence le mouvement d'un tel point chaud ?

# Chapitre 9

## Simulations d'observation d'un tore d'accrétion autour de Sgr A\*

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Le modèle du <i>polish doughnut</i></b>	<b>139</b>
9.1.1	Motivations physiques	139
9.1.2	Le <i>polish doughnut</i> : développements théoriques	141
9.1.3	Processus radiatifs au sein du tore ionisé	145
<b>9.2</b>	<b>Simulations d'observation</b>	<b>149</b>
9.2.1	Modélisation de l'image d'un tore ionisé	149
9.2.2	Modélisation du spectre émis par un tore ionisé	149

---

## 9.1 Le modèle du *polish doughnut*

### 9.1.1 Motivations physiques

La physique des structures d'accrétion fait appel à de multiples ingrédients décrits par des temps caractéristiques d'évolution spécifiques. Très schématiquement, il s'agit de décrire l'évolution d'une assemblée de particules en orbite autour d'un objet compact, qui vont voir leur moment cinétique diminuer peu à peu sous l'effet des forces de friction, ce qui se traduit par un mouvement spiralant vers le centre. Les forces visqueuses agissant sur les particules vont les chauffer, et le disque pourra se refroidir principalement par deux processus : soit par rayonnement (comme pour les disques minces d'accrétion, Shakura & Sunyaev 1973), soit par advection (c'est-à-dire, transport par le flux de matière) de cette chaleur jusqu'au trou noir si l'émission de rayonnement est peu efficace (c'est le cas pour les structures dites *ADAF*, *advection dominated accretion flow*, Narayan & Yi 1994).

On peut décrire de façon très générale une structure d'accrétion en introduisant trois temps caractéristiques :

- le temps dynamique  $t_{\text{dyn}}$  : il décrit le temps d'évolution des forces de pression qui permettent d'équilibrer le disque,
- le temps thermique  $t_{\text{ther}}$  : il décrit le temps d'évolution de l'entropie qui varie en fonction de la chaleur produite par les forces visqueuses ou prélevée par le rayonnement émis,
- le temps visqueux  $t_{\text{visc}}$  : il décrit le temps d'évolution du moment cinétique sous l'effet des forces visqueuses.

Les modèles analytiques de structures d'accrétion se basent sur une hiérarchie de ces temps d'évolution. Ainsi le modèle du disque mince (Shakura & Sunyaev 1973) suppose :

$$t_{\text{dyn}} \ll t_{\text{ther}} \ll t_{\text{visc}}. \quad (9.1)$$

Cette hiérarchie, tout comme l'existence même de ces échelles de temps séparées, n'est pas à l'heure actuelle établie de façon ferme. C'est une hypothèse que beaucoup de modèles analytiques utilisent.

C'est également dans ce cadre que se place le modèle du *polish doughnut*. Comme le présente Abramowicz (2009), le moment cinétique par unité de masse et l'entropie  $\mathcal{L}(r, \theta)$  et  $\mathcal{S}(r, \theta)$  sont alors constants sur une durée de l'ordre du temps dynamique  $t_{\text{dyn}}$ . Plutôt que de calculer ces grandeurs physiques en faisant nécessairement des hypothèses peu vérifiables sur la physique sous-jacente<sup>1</sup>, il est plus simple et aussi justifié de choisir de façon *ad hoc* ces grandeurs elles-mêmes (Abramowicz *et al.* 1978).

Les motivations à la base du développement du *polish doughnut* sont donc essentiellement de parvenir à une description la plus simple possible d'une structure d'accrétion, qui soit décrite par des paramètres physiques dont l'interprétation soit claire.

Le moment cinétique et l'entropie sont donc choisis de la façon la plus simple possible :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(r, \theta) &= \mathcal{L}_0 = \text{cst}, \\ \mathcal{S}(r, \theta) &= \mathcal{S}_0 = \text{cst}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Cette hypothèse sur le moment cinétique et l'entropie est à la base de la théorie des *polish doughnuts* : elle permet d'exprimer analytiquement toutes les quantités physiques utiles à la description de la structure d'accrétion, comme on va le voir dans la section suivante.

Cependant, les expressions proposées dans les Eqs. 9.2 ne sont que les plus simples que l'on puisse avancer, et certains auteurs ont imaginé des modèles plus évolués (Qian *et al.* 2009).

---

1. L'exemple le plus fameux de ce genre d'hypothèse est la description de la viscosité dans les disques minces d'accrétion par le paramètre  $\alpha$  (Shakura & Sunyaev 1973).

### 9.1.2 Le *polish doughnut* : développements théoriques

En plus du choix de la constance du moment cinétique (Eq. 9.2), on va supposer que l'espace-temps est stationnaire et axisymétrique, et que les particules constituant la structure d'accrétion forment un fluide parfait et suivent des orbites circulaires. En utilisant le système de coordonnées de Boyer-Lindquist  $(t, r, \theta, \varphi)$ , ceci se traduit par :

$$T^\mu{}_\nu = (\rho + p) u^\mu u_\nu + p \delta^\mu{}_\nu, \quad \mathbf{u} = (u^t, u^r = 0, u^\theta = 0, u^\varphi) \quad (9.3)$$

où  $T^\mu{}_\nu$  est le tenseur énergie-impulsion du fluide,  $\mathbf{u}$  est sa 4-vitesse,  $\delta^\mu{}_\nu$  est le symbole de Kronecker,  $p$  est la pression du fluide et  $\rho$  sa densité d'énergie.

On a déjà établi (voir Eq. 1.15) l'existence des constantes du mouvement géodésique<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} E &= -u_t, \\ L &= u_\varphi \end{aligned} \quad (9.4)$$

où l'on a supposé que la masse de la particule vaut 1 (ce qui permet de confondre la 4-impulsion  $\mathbf{p}$  et la 4-vitesse  $\mathbf{u}$ ).

On va redéfinir ces constantes du mouvement en introduisant :

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= -\ln(u_t), \\ \mathcal{L} &= -\frac{u_\varphi}{u_t}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

La quantité  $\mathcal{L}$  correspond au moment cinétique<sup>3</sup> introduit dans l'Eq. 9.2. On peut démontrer (Abramowicz 2009) que cette quantité  $\mathcal{L}$  est également une constante de type Bernoulli le long des lignes de courant du fluide. Il n'en reste par moins que l'hypothèse de l'Eq. 9.2 reste très forte : on suppose  $\mathcal{L}$  constant, quelque soit la ligne de courant considérée.

On utilise usuellement une quantité adimensionnée dérivée de  $\mathcal{L}$  :

$$\Lambda = \frac{\mathcal{L} - \mathcal{L}_{\text{K,ms}}}{\mathcal{L}_{\text{K,mb}} - \mathcal{L}_{\text{K,ms}}} \quad (9.6)$$

où  $\mathcal{L}_{\text{K,ms}}$  désigne la valeur képlérienne du moment cinétique au rayon de l'ISCO (*marginally stable orbit* en anglais) et  $\mathcal{L}_{\text{K,mb}}$  désigne la valeur képlérienne du moment cinétique au rayon de l'orbite marginalement liée (*marginally bound orbit* en anglais). On trouvera la

---

2. On précise bien ici que l'on parle du mouvement *géodésique*, et non pas du mouvement des particules de la structure d'accrétion qui ne sont pas soumises uniquement à la gravitation

3. Il faut toutefois prendre garde au fait que, d'après l'expression 9.5, le "moment cinétique"  $\mathcal{L}$  utilisé ici ne correspond pas au moment cinétique  $L$  introduit dans l'Eq. 1.15, mais au rapport  $L/E$ , où  $E$  est l'énergie introduite également dans l'Eq. 1.15.

définition et l'expression de cette orbite marginalement liée dans Bardeen *et al.* (1972). La Fig. 3 de Abramowicz & Fragile (2011) illustre le fait que :

$$0 \leq \Lambda \leq 1. \quad (9.7)$$

La quantité  $\mathcal{W}$  sera dorénavant appelée potentiel du *polish doughnut*, car on peut montrer (Abramowicz 2009) qu'elle joue un rôle analogue au potentiel gravitationnel newtonien dans l'expression des équations du mouvement d'une particule.

En utilisant la normalisation de la 4-vitesse du fluide, on arrive aisément à l'expression suivante pour le potentiel<sup>4</sup> :

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \ln \left( -\frac{g_{tt} + 2\Omega g_{t\varphi} + \Omega^2 g_{\varphi\varphi}}{(g_{tt} + \Omega g_{t\varphi})^2} \right) \quad (9.8)$$

où on a introduit la vitesse angulaire du fluide  $\Omega = u^\varphi/u^t$ .

L'équation de conservation  $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$  entraîne alors (Abramowicz 2009) :

$$\frac{\nabla_\nu p}{p + \rho} = \nabla_\nu \mathcal{W} \quad (9.9)$$

où on a utilisé le fait que le moment cinétique  $\mathcal{L}$  est constant pour simplifier l'expression de Abramowicz (2009).

Les surfaces isobares coïncident donc avec les surfaces équipotentielles du modèle. La Fig. 9.1 représente en coupe les surfaces équipotentielles d'un *polish doughnut*. On remarque qu'il existe un point critique  $r_{\text{crit}}$  pour lequel la surface équipotentielle s'intersecte elle-même. Toutes les surfaces contenues à l'intérieur de cette surface critique ne sont pas connectées au trou noir : la matière ne peut donc pas y tomber. On peut donc définir la surface équipotentielle critique comme la surface physique du *polish doughnut*. Un autre point intéressant apparaissant sur la Fig. 9.1 est le point central,  $r_{\text{central}}$ , qui correspond à la surface équipotentielle limite la plus interne. Le potentiel et la pression augmente continûment depuis le point critique jusqu'au point central. Le dernier point intéressant est celui correspondant à la plus grande valeur du rayon sur la surface physique du *polish doughnut*,  $r_{\text{max}}$ .

On remarque également sur la Fig. 9.1, et ceci peut être démontré par le calcul (Abramowicz 2009), que les surfaces équipotentielles sont de forme conique près de l'axe de rotation, et de forme sphérique loin de l'axe. La forme conique des surfaces équipotentielles le long de l'axe permet de collimater des jets à des luminosités très élevées (et même super-Eddington, voir la discussion dans Abramowicz 2009).

On peut à ce stade introduire le paramètre adimensionné  $w$  suivant :

$$w = \frac{\mathcal{W} - \mathcal{W}_{\text{surf}}}{\mathcal{W}_{\text{central}} - \mathcal{W}_{\text{surf}}}. \quad (9.10)$$

---

4. La différence de signe par rapport aux expressions équivalentes fournies dans la littérature (Abramowicz 2009; Qian *et al.* 2009) provient du choix de la signature (+,-,-) effectué par les théoriciens des *polish doughnuts*.

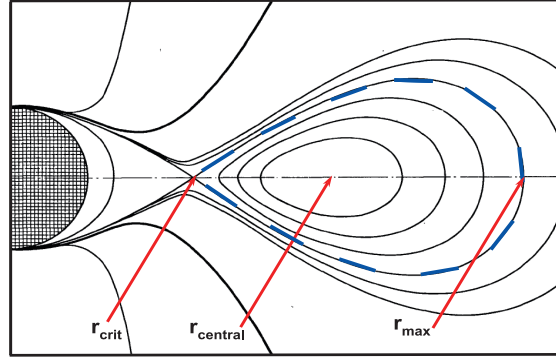


FIGURE 9.1 – Surfaces équipotentielles d'un *polish doughnut*. Les points critique, central et de rayon maximal sont indiqués, ainsi que la surface physique en pointillés bleus. Source : Abramowicz *et al.* (1978).

où  $\mathcal{W}_{\text{surf}}$  et  $\mathcal{W}_{\text{central}}$  désignent la valeur du potentiel à la surface du *doughnut* et au point central respectivement.

On déduit de ce qui précède que l'intérieur du *polish doughnut* est défini par :

$$0 \leq w \leq 1 \quad (9.11)$$

avec  $w = 0$  sur la surface et  $w = 1$  au point central.

Pour finir, on précise que la luminosité totale émise par un *polish doughnut* est de l'ordre, ou légèrement supérieure à la luminosité d'Eddington (Abramowicz 2009) :

$$\frac{L_{\text{tot}}}{L_{\text{Edd}}} \approx 1,15 \log \left( \frac{r_{\text{max}}}{r_{\text{central}}} \right). \quad (9.12)$$

Le modèle du *polish doughnut* n'est donc pas applicable tel quel pour modéliser des sources très peu lumineuses (c'est-à-dire pour lesquelles  $L \ll L_{\text{Edd}}$ ), telle que la source coïncidant avec Sgr A\* au centre de la Galaxie.

Cependant, une structure dérivée du *polish doughnut* a été développée, le tore ionisé (Rees *et al.* 1982), qui est adaptée pour ce genre de source, comme on peut le voir sur la Fig. 9.2, représentant les différentes structures d'accrétion évoquées jusqu'ici dans le plan  $(\dot{m}, \tau)$  où  $\dot{m}$  est le taux d'accrétion et  $\tau$  la profondeur optique.

On rappelle que la profondeur optique d'un milieu est définie par :

$$d\tau = \alpha ds \quad (9.13)$$

où  $\alpha$  est le coefficient d'absorption du milieu déjà introduit dans la section 7.2, et où  $ds$  est un élément de longueur. La profondeur optique est donc une quantité sans dimension, qui permet de définir de façon claire un milieu "optiquement mince" et un milieu "optiquement épais". Un milieu sera ainsi dit optiquement mince si  $\tau < 1$  lorsqu'on intègre l'Eq. 9.13 à travers le milieu traversé : le rayonnement  $\gamma$  est donc peu absorbé et peut se propager sur



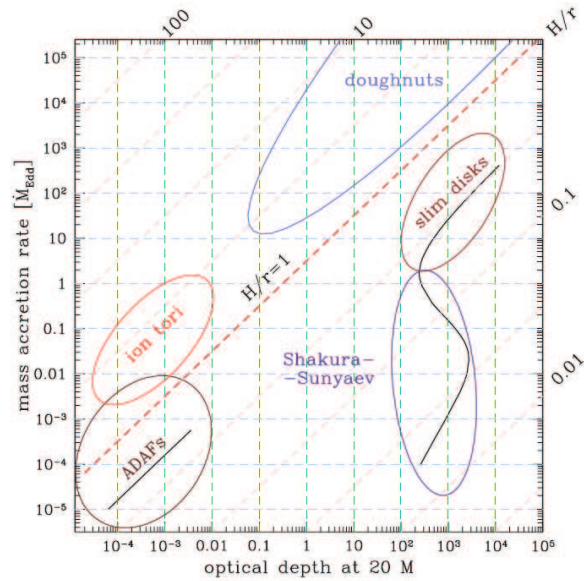


FIGURE 9.2 – Structures d’accrétion dans le plan formé du taux d’accrétion par rapport au taux d’Eddington et de la profondeur optique  $\tau$  pour un rayon maximal  $r_{\max} = 20 M$ . Les lignes tiretées diagonales correspondent à des valeurs constantes du rapport  $H/r$  de la hauteur au rayon de l’objet. Le *slim disk*, qui n’a pas été présenté jusqu’ici, est une structure d’accrétion proche du modèle standard de Shakura & Sunyaev (1973), mais qui permet des taux d’accrétion plus élevés (voir Sądowski 2009). Source : Abramowicz *et al.* (2010).

une grande distance à l’intérieur du milieu. Si  $\tau > 1$ , le milieu est dit optiquement épais : le rayonnement est très absorbé et ne pénètre que très peu dans le milieu.

On constate sur la Fig. 9.2 que le *polish doughnut* est une structure optiquement épaisse et à fort taux d’accrétion, alors que le tore ionisé (*ion torus* sur la figure) est optiquement mince et à faible taux d’accrétion.

Deux différences principales séparent le tore ionisé du *polish doughnut* standard :

- l’existence d’un champ magnétique, le tore étant maintenu par l’addition de la pression du gaz et de la pression magnétique,
- la coexistence d’une population d’électrons et d’une population d’ions (d’où le nom de cette nouvelle structure), caractérisées par des températures différentes.

Le tore ionisé possède des propriétés voisines de celles des *polish doughnuts* et de celles des *ADAF* (Narayan & Yi 1994). Il est de ce fait naturel que les processus radiatifs à l’oeuvre au sein des tores d’accrétion soient proches de ce que l’on connaît pour les *ADAF*. La présentation de ces processus est l’objet de la section suivante.

### 9.1.3 Processus radiatifs au sein du tore ionisé

Dans cette section, on va utiliser explicitement la vitesse de la lumière,  $c$ , et la constante de gravitation,  $G$ , qui ne sont plus supposées être égales à 1. On utilise, dans cette section uniquement, le système cgs (centimètre-gramme-secondes).

Les résultats qui suivent ont été obtenus en collaboration avec Odele Straub (CAMK, Varsovie) et Marek Abramowicz (Université de Göteborg).

#### Dérivation des expressions des grandeurs physiques au sein du tore ionisé

On considère un tore d'accrétion constitué d'un gaz d'électrons et d'ions caractérisés par deux températures  $T_e$  et  $T_i$ . Cette structure est maintenue en équilibre grâce à la pression du gaz  $p_{\text{gaz}}$  et à la pression magnétique  $p_{\text{magn}}$ . La pression totale est donc :

$$p = p_{\text{gaz}} + p_{\text{magn}} \quad (9.14)$$

où la pression magnétique est reliée au champ magnétique de norme  $B$  selon :

$$p_{\text{magn}} = \frac{B^2}{8\pi}. \quad (9.15)$$

On introduit le paramètre  $\beta = p_{\text{magn}}/p$  caractérisant l'importance des forces de pression magnétique. On a donc :

$$p_{\text{gaz}} = (1 - \beta)p. \quad (9.16)$$

L'équation de conservation (9.9) s'écrit :

$$\frac{\nabla_\nu p}{p + \rho c^2} = \nabla_\nu \mathcal{W} \quad (9.17)$$

La quantité  $\rho$  utilisée dans l'équation précédente représente une densité massique, exprimée en  $\text{g cm}^{-3}$ .

On va considérer un gaz polytropique caractérisé par l'équation d'état :

$$p = \kappa (\rho c^2)^{1+1/n} \quad (9.18)$$

où  $n$  est l'indice polytropique.

L'Eq. 9.17 devient alors :

$$\frac{\mathcal{A} \rho^{1/n}}{\mathcal{B} \rho^{1+1/n} + c^2 \rho} d\rho = d\mathcal{W} \quad (9.19)$$

où on a introduit les constantes  $\mathcal{A} = \kappa (1 + \frac{1}{n}) c^{2+2/n}$  et  $\mathcal{B} = \mathcal{A}/(1 + 1/n)$ .

En intégrant entre la surface du tore ionisé et une certaine position à l'intérieur du tore on obtient :

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} n \ln \left( 1 + \frac{\mathcal{B}}{c^2} \rho^{1/n} \right) = \mathcal{W} - \mathcal{W}_{\text{surf}} \quad (9.20)$$

En écrivant cette même équation au centre du tore, on obtient finalement l'expression de la densité  $\rho$  en fonction de la densité centrale  $\rho_c$  et du potentiel adimensionné  $w$  :

$$\rho c^2 = \frac{[(1 + \kappa (\rho_c c^2)^{1/n})^w - 1]^n}{\kappa^n}. \quad (9.21)$$

On va alors tenter d'exprimer les températures des électrons et des ions en fonction de la pression totale  $p$ .

En utilisant la loi des gaz parfaits, on peut écrire (voir par exemple Narayan & Yi 1995) :

$$p_{\text{gaz}} = \frac{\rho k T_e}{\mu_e m_u} + \frac{\rho k T_i}{\mu_i m_u} \quad (9.22)$$

où  $k$  désigne la constante de Boltzmann,  $m_u$  désigne l'unité de masse atomique,  $\mu_i$  et  $\mu_e$  désignent les poids moléculaires moyens des ions et des électrons, qui s'expriment selon :

$$\mu_i = \frac{4}{1 + 3X}, \quad \mu_e = \frac{2}{1 + X} \quad (9.23)$$

$X$  étant la fraction massique en hydrogène, que l'on peut typiquement prendre égale à 1 (tous les ions étant des protons) ou à 0,75 (les ions étant formés de 75 % de protons et 25 % de noyaux d'hélium).

On peut réécrire l'équation des gaz parfaits selon :

$$\frac{p_{\text{gaz}} m_u}{\rho k} = \frac{T_e}{\mu_e} + \frac{T_i}{\mu_i}. \quad (9.24)$$

On va alors chercher à écrire séparément les températures  $T_e$  et  $T_i$  sous la forme :

$$\begin{aligned} T_e &= f(w) \mu_e \frac{p_{\text{gaz}} m_u}{\rho k}, \\ T_i &= g(w) \mu_i \frac{p_{\text{gaz}} m_u}{\rho k} \end{aligned} \quad (9.25)$$

où  $f(w)$  et  $g(w)$  sont des fonctions à déterminer dépendant linéairement du paramètre  $w$  introduit dans l'Eq. 9.10.

Pour cela, on va faire l'hypothèse supplémentaire que, au centre du tore ionisé ( $w = 1$ ), les températures sont dans un rapport fixé :  $\xi T_i = T_e$ , et qu'à la surface ( $w = 0$ ) les températures sont égales.

Pour que l'Eq. 9.24 soit satisfaite, on doit avoir :  $f(w) + g(w) = 1$ . Par ailleurs, les conditions  $T_e = T_i$  en  $w = 0$  et  $T_e = \xi T_i$  en  $w = 1$  permettent de fixer :

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{\mu_i}{\mu_e + \mu_i} \equiv \mathcal{M}, \\ f(1) &= \frac{\mu_i \xi}{\mu_e + \mu_i \xi} \equiv \mathcal{M}_\xi. \end{aligned} \quad (9.26)$$

On en déduit aisément  $f(w)$ , puis  $g(w) = 1 - f(w)$ , et on obtient finalement :

$$\begin{aligned} T_e &= (\mathcal{M}(1-w) + w \mathcal{M}_\xi) \mu_e (1-\beta) \frac{p m_u}{\rho k}, \\ T_i &= \left( \frac{\mu_e}{\mu_i} \mathcal{M} + w (\mathcal{M} - \mathcal{M}_\xi) \right) \mu_i (1-\beta) \frac{p m_u}{\rho k}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Par ailleurs, la condition  $T_e = \xi T_i$  en  $w = 1$ , utilisée de paire avec l'équation d'état polytropique  $p = \kappa (\rho c^2)^{1+1/n}$  donne :

$$\kappa = \frac{k T_{e,C}}{(1-\beta) \rho_C^{1/n} m_u \mu_e \mathcal{M}_\xi c^{2+2/n}} \quad (9.28)$$

où  $T_{e,C}$  et  $\rho_C$  désignent la température des électrons et la densité au centre du tore ionisé.

La pression totale s'exprime alors en fonction de la densité centrale et du potentiel adimensionné  $w$  au moyen de l'équation polytropique  $p = \kappa (\rho c^2)^{1+1/n}$ , en utilisant l'expression 9.21 de la densité  $\rho$ .

Dans ce manuscrit, on ne va s'intéresser qu'à modéliser l'émission synchrotron du tore ionisé, qui, comme on l'a vu dans la section 3.3, est responsable du pic d'émission submillimétrique de Sgr A\*. Les équations établies dans la présente section vont nous permettre d'exprimer le coefficient d'émission associé à ce processus radiatif.

Les paramètres du modèle, qui joueront sur l'allure du spectre obtenu, sont : la valeur de la densité centrale  $\rho_C$ , la température centrale des électrons  $T_{e,C}$ , le paramètre  $\beta = p_{\text{magn}}/p$ , le paramètre  $\xi = T_{e,C}/T_{i,C}$ , la fraction massique en hydrogène  $X$ , l'indice polytropique  $n$ , la valeur du moment cinétique adimensionné  $\Lambda$  (voir Eqs. 9.5 et 9.6), ainsi que l'inclinaison  $\theta_i$  et le spin  $a$  du trou noir.

Afin de restreindre la variété des paramètres envisageables, on fixe :

$$\begin{aligned} X &= 1, \\ n &= 3/2, \\ \Lambda &= 0,3, \end{aligned} \quad (9.29)$$

Par ailleurs, la température centrale des électrons est fixée au dixième de la température du Viriel des protons au centre du tore<sup>5</sup> :

$$T_{e,C} = 0,1 T_{\text{vir}}, \quad T_{\text{vir}} = \frac{2}{3} \frac{G M m_p}{k r_c} \quad (9.30)$$

---

5. La température du Viriel est obtenue en écrivant, dans l'hypothèse de l'équipartition de l'énergie, que l'énergie thermique d'un proton est égale à son énergie gravitationnelle :  $\frac{3}{2} k T_{\text{vir}} = \frac{G M m_p}{r_c}$  avec les notations de l'Eq. 9.30.

où  $M$  est la masse du trou noir central,  $m_p$  la masse du proton et  $r_c$  la valeur de la coordonnée radiale au centre du tore. Pour un tore ionisé de moment cinétique adimensionné  $\Lambda = 0,3$  autour d'un trou noir de paramètre de spin 0,5, on obtient  $T_{e,C} = 1,3 \cdot 10^{12}$  K.

Seuls restent donc les paramètres :  $\rho_C$ ,  $\beta$ ,  $\xi$ ,  $\theta_i$  et  $a$ .

### Émission synchrotron

En suivant Narayan & Yi (1995) dans leur dérivation des processus d'émission dans un ADAF, on va utiliser les résultats de Mahadevan *et al.* (1996) pour déterminer l'émission synchrotron.

En introduisant la température adimensionnée des électrons  $\theta_e = k T_e / m_e c^2$  et la densité numérique des électrons  $n_e = \rho / \mu_e m_u$  (en  $\text{cm}^{-3}$ ), le coefficient d'émission s'écrit :

$$j_\nu^{\text{Synch}} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{\sqrt{3}c} \frac{4\pi n_e \nu}{K_2(1/\theta_e)} M(x_M) \quad (9.31)$$

exprimé en [ $\text{erg cm}^{-3} \text{s}^{-1} \text{ster}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ ]

où  $K_2$  est une fonction de Bessel modifiée et  $x_M = 2\nu/3\nu_0\theta_e^2$  avec  $\nu_0 = eB/2\pi m_e c$ . Le préfacteur  $1/4\pi$  suppose l'émission isotrope dans le référentiel de l'émetteur et permet d'obtenir une quantité en  $\text{ster}^{-1}$ .

Mahadevan *et al.* (1996) donnent l'expression de la fonction  $M(x_M)$  en fonction de la température des électrons dans leur Eq. 33 et leur Tab. 1. Il convient de remarquer que cette expression n'est valide que dans la limite d'électrons très relativistes (typiquement,  $T_e > 5 \cdot 10^8$  K). Cette hypothèse a été vérifiée au cours des calculs.

### Absorption

La loi de Kirchhoff permet d'exprimer le coefficient d'absorption  $\alpha_\nu$  en fonction du coefficient d'émission  $j_\nu$  et de la loi de Planck  $B_\nu(T)$  :

$$\alpha_\nu = \frac{j_\nu}{B_\nu(T)}. \quad (9.32)$$

Pour les valeurs des paramètres du tore ionisé que l'on utilisera dans la suite et les températures rencontrées, ce rapport sera toujours négligeable, aussi n'est-il pas nécessaire de tenir compte de l'absorption.

Ainsi, la donnée de la relation 9.31 va permettre à GYOTO d'intégrer les géodésiques des photons émis par le tore ionisé en tenant compte du transfert radiatif intervenant à l'intérieur de l'objet, selon le schéma décrit dans la section 7.2.

La section suivante va présenter quelques résultats de ces simulations GYOTO.

## 9.2 Simulations d'observation

### 9.2.1 Modélisation de l'image d'un tore ionisé

On dispose désormais de tout ce qui est nécessaire pour calculer grâce à GYOTO une image d'un tore ionisé émettant en synchrotron.

On fixe la densité centrale des électrons à une valeur couramment obtenue par les modèles d'accrétion autour de Sgr A\* (Yuan *et al.* 2003; Liu *et al.* 2004; Mościbrodzka *et al.* 2009; Dodds-Eden *et al.* 2010) :  $n_e \approx 10^6 - 10^7 \text{ cm}^{-3}$ . On va donc utiliser une valeur de la densité centrale correspondante :  $\rho_C = 10^{-17} \text{ g cm}^{-3}$ .

On fixe le facteur de pression magnétique à  $\beta = 0,1$  et le rapport de la température centrale des électrons et des protons à  $\xi = 0,1$ .

La Fig 9.3 montre la dépendance de l'image observée par un observateur terrestre en fonction du spin du trou noir. On y distingue une zone centrale d'intensité nulle correspondant à la silhouette du trou noir. La taille angulaire de cette région étant fonction du spin, ce genre de simulation permettrait d'obtenir une contrainte sur le paramètre de spin de l'objet central s'il était possible de mesurer la taille de cette silhouette observationnellement. Ce genre d'observation ayant déjà été réalisé par Doeleman *et al.* (2008), on a là une voie prometteuse d'accès au paramètre de spin de Sgr A\* (voir à ce propos Broderick *et al.* 2009a, 2010).

### 9.2.2 Modélisation du spectre émis par un tore ionisé

On peut également calculer le coefficient d'émission fourni Eq. 9.31 pour calculer, selon le procédé détaillé dans la section 7.2, le spectre émis par le tore ionisé.

La Fig 9.4 représente le spectre du tore ionisé ayant les mêmes paramètres que ceux décrits dans la section précédente, l'inclinaison étant fixée à  $60^\circ$  et le spin étant varié. Si l'on compare avec le spectre sub-millimétrique observé de Sgr A\*, on constate que l'ordre de grandeur du maximum du flux et la valeur de la fréquence correspondant à ce maximum sont très correctes (voir par exemple la Fig. 9 de Trap *et al.* 2011).

On peut conclure de ce résultat que le tore ionisé est un candidat digne de considération pour rendre compte de la structure d'accrétion entourant Sgr A\*. Afin de confirmer ce premier résultat, et pour arriver à des résultats astrophysiques intéressants pour Sgr A\*, il faudra tenir compte des autres processus radiatifs dont il n'a pas été question ici : Bremsstrahlung et rayonnement Compton inverse.

Les Figs. 9.4 et 9.5 donnent une première idée du genre de résultats que l'on peut espérer obtenir en comparant les prédictions du modèle du tore ionisé aux observations. Si l'effet de l'inclinaison sur l'allure générale du spectre est très limité (Fig 9.5), l'impact du paramètre de spin est plus marqué (Fig 9.4) et il sera très intéressant de déterminer si une contrainte sur le spin est envisageable par ce biais.

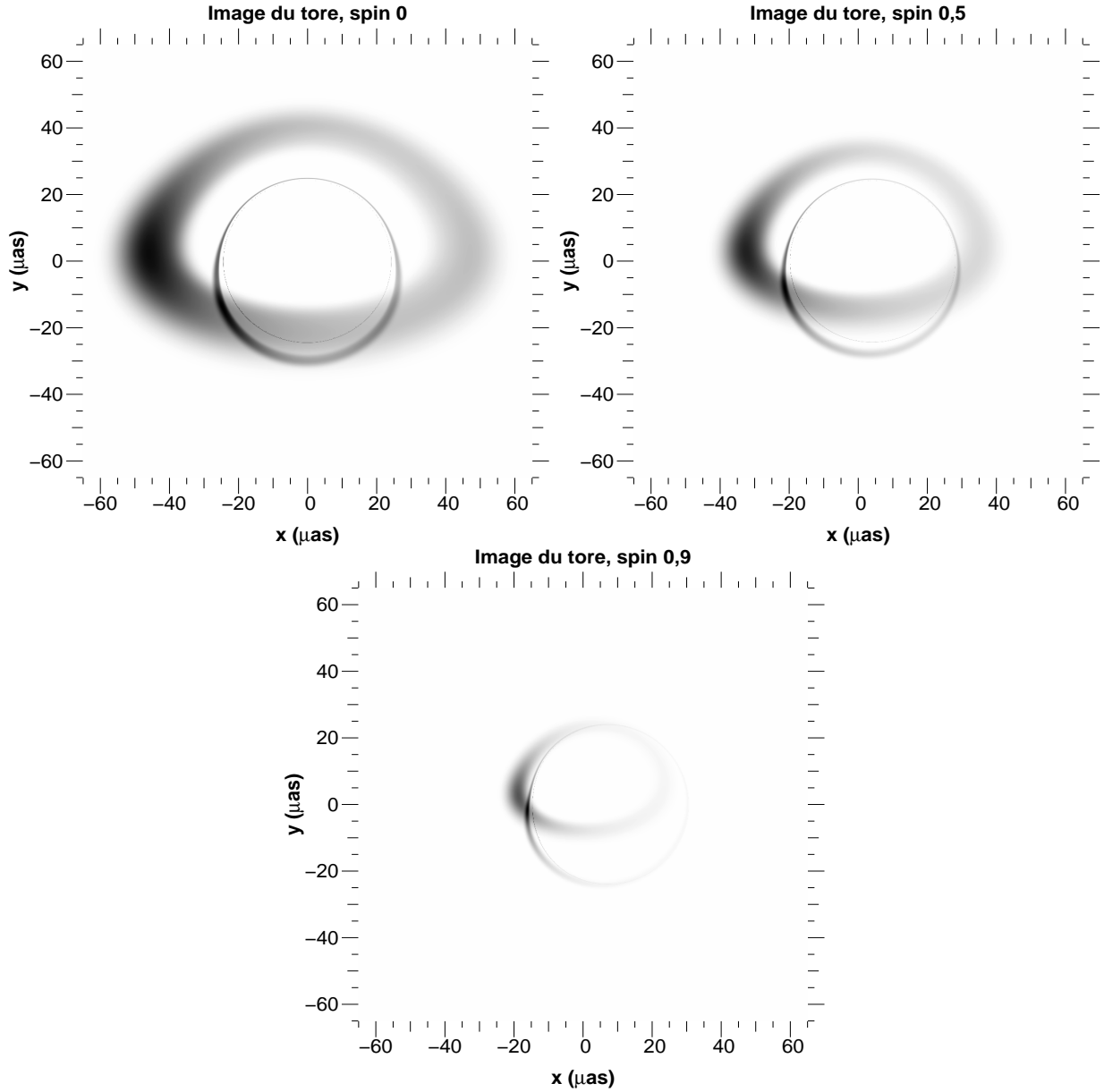


FIGURE 9.3 – Images simulées d'un tore ionisé décrit par les paramètres donnés dans l'Eq. 9.29, avec  $\rho_C = 10^{-17} \text{ g cm}^{-3}$ ,  $\beta = 0,1$ ,  $\xi = 0,1$ ,  $\theta_i = 60^\circ$  et le paramètre de spin valant 0 (en haut à gauche), 0,5 (en haut à droite) ou 0,9 (en bas). La dynamique des images varie fortement en fonction de la valeur du spin. Le rapport de l'intensité obtenue au point de *beaming* maximal à l'intensité obtenue au point de *beaming* minimal vaut environ 4 pour le spin nul, 6 pour le spin 0,5, et 20 pour le spin 0,9.

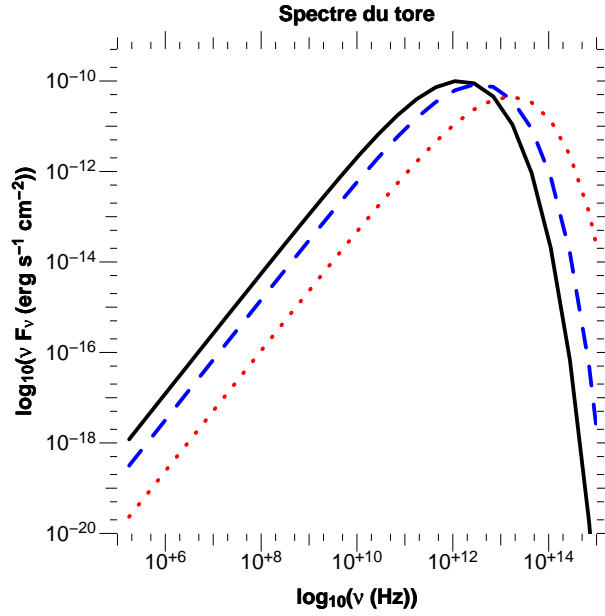


FIGURE 9.4 – Effet du spin : spectre émis par un tore ionisé décrit par les paramètres donnés dans l'Eq. 9.29, avec  $\rho_C = 10^{-17} \text{ g cm}^{-3}$ ,  $\beta = 0,1$ ,  $\xi = 0,1$ ,  $\theta_i = 60^\circ$  et le paramètre de spin valant 0 (trait plein noir), 0,5 (tirets bleus) ou 0,9 (pointillés rouges).

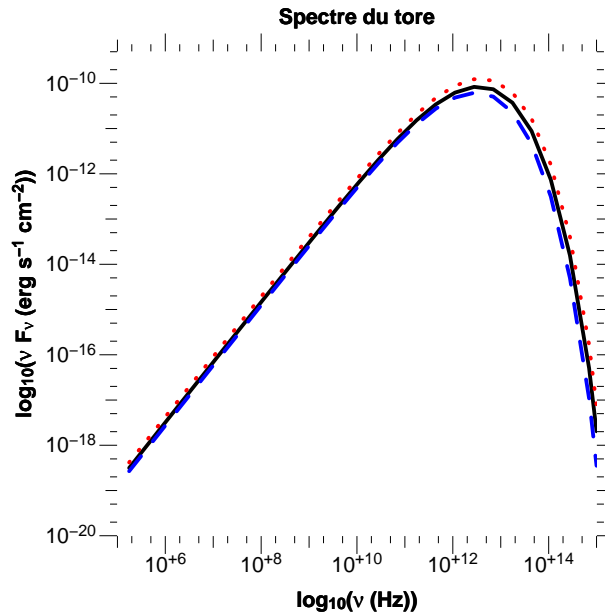


FIGURE 9.5 – Effet de l'inclinaison : spectre émis par un tore ionisé décrit par les mêmes paramètres que pour la Fig. 9.4, le paramètre de spin valant 0,5, et l'inclinaison étant égale à  $40^\circ$  (tirets bleus),  $60^\circ$  (trait plein noir) ou  $80^\circ$  (pointillés rouges).





# Chapitre 10

## Simulation d'observation d'un sursaut de rayonnement aux abords immédiats du trou noir central

### Sommaire

---

<b>10.1 Un trou noir qui sursaute</b>	<b>153</b>
10.1.1 Les sursauts de rayonnement de Sgr A*	153
10.1.2 Origine des sursauts	155
<b>10.2 Le modèle du point chaud</b>	<b>158</b>
10.2.1 La physique sous-jacente	158
10.2.2 Des périodes mesurées au spin du trou noir	159
<b>10.3 Simulations d'un point chaud en orbite autour de Sgr A*</b>	<b>160</b>
10.3.1 Modélisation d'un point chaud par GYOTO	160
10.3.2 Simulations de courbes de lumière et de trajectoires de centroïde	162
10.3.3 Allure de la courbe de lumière et de la trajectoire du centroïde en fonction des paramètres du point chaud	164
<b>10.4 Simulations d'observations par GRAVITY</b>	<b>167</b>
10.4.1 Cadre de l'analyse	167
10.4.2 Observations simulées	167
10.4.3 Mise en évidence du mouvement du point chaud en fonction de l'inclinaison	169

---

### 10.1 Un trou noir qui sursaute

#### 10.1.1 Les sursauts de rayonnement de Sgr A\*

On a déjà abordé brièvement dans la section 4.2.1 l'existence de sursauts de rayonnement de la source Sgr A\*.

La première détection d'un sursaut a été réalisée en rayons X par Baganoff *et al.* (2001). Dans le domaine du proche infrarouge, la détection a été réalisée deux ans plus tard par Genzel *et al.* (2003a). Dès l'année suivante, une nouvelle observation a mis en évidence une corrélation entre les événements en X et les événements infrarouges (Eckart *et al.* 2004). Yusef-Zadeh *et al.* (2006a) observent le premier sursaut dans le domaine sub-millimétrique lors d'une campagne multi-longueurs d'onde, et exhibent une corrélation entre des sursauts infrarouge et sub-millimétrique d'une part, et entre des événements infrarouge et X d'autre part. Si les observations consécutives ont démontré de façon convaincante la simultanéité des événements en infrarouge et en X (Dodds-Eden *et al.* 2009; Trap *et al.* 2011), il semble exister un décalage de plus d'une heure entre les sursauts infrarouges et leur contrepartie sub-millimétrique (Marrone *et al.* 2008; Eckart *et al.* 2008; Trap *et al.* 2011). Des sursauts ont également été mesurés jusqu'au domaine millimétrique, qui laissent penser que les sursauts à différentes longueurs d'onde sont observés avec d'autant plus de retard que la longueur d'onde grandit (Yusef-Zadeh *et al.* 2006b, 2008).

Signalons quelques chiffres intéressants pour les sursauts aux différentes longueurs d'onde (voir, pour la plupart de ces chiffres, les introductions particulièrement pédagogiques de Dodds-Eden *et al.* 2009, 2010) : le flux en radio (millimétrique, sub-millimétrique) augmente typiquement lors d'un sursaut d'un facteur  $1,3^1$  ; dans le domaine infrarouge ce facteur varie de quelques unités à 27, et il peut atteindre jusqu'à 160 en X ; la fréquence d'observation de ces événements est de 4 par jour environ en infrarouge, et de 1 par jour en X.

En ce qui concerne les sursauts en proche infrarouge, qui nous intéresseront dans la suite, de nombreux auteurs ont signalé deux temps caractéristiques de variation : la durée générale du sursaut, de l'ordre de 1 à 2 h, et une pseudo-période de l'ordre de la vingtaine de minutes (voir par exemple : Genzel *et al.* 2003a; Trippe *et al.* 2007). La densité de flux typique au maximum d'intensité est de l'ordre de 10 mJy (voir la Table 1 de Dodds-Eden *et al.* 2011), ce qui se traduit par une magnitude de  $m_K = 14,75$ , à comparer avec la densité de flux de Sgr A\* sans sursaut, de l'ordre du mJy. Le sursaut le plus brillant recensé à l'heure actuelle a atteint  $m_K = 13,5$  (Dodds-Eden *et al.* 2011).

Un consensus assez large s'est établi au vu de ces résultats quant aux procédés radiatifs à l'œuvre. En particulier, le fort degré de polarisation des sursauts infrarouge (Eckart *et al.* 2006) a contribué à affermir le scénario d'un flux infrarouge dû à du rayonnement synchrotron d'électrons chauffés dans les zones internes de la source Sgr A\*, le rayonnement X étant dû à une diffusion Compton inverse des photons infrarouges par les électrons les ayant précédemment émis par rayonnement synchrotron. On parle alors de rayonnement synchrotron-self-Compton, SSC. Le rayonnement sub-millimétrique serait, lui, dû au rayonnement synchrotron d'une population non chauffée d'électrons (voir par exemple Liu *et al.* 2006; Dodds-Eden *et al.* 2009).

---

1. La petitesse de ce rapport peut sembler en contradiction avec la notion de sursaut de rayonnement. On peut également considérer que l'on a affaire à une émission variable mais sans sursaut. C'est une question de vocabulaire et de définition. On pourra à ce propos se reporter à la discussion dans Dodds-Eden *et al.* (2011).

### 10.1.2 Origine des sursauts

Plusieurs modèles coexistent à l'heure actuelle, qui tentent d'expliquer les processus physiques donnant lieu aux sursauts de rayonnement de la source Sgr A\*.

Cette section et la suivante ont pour but de montrer que tous les modèles actuellement concurrents sont des candidats très sérieux pour expliquer l'origine des sursauts de rayonnement de Sgr A\*. Il ne saurait être question à l'heure actuelle de privilégier l'une des ces options au détriment des autres. La suite de ce chapitre ne sera consacrée qu'à l'étude de l'un de ces modèles (le modèle du "point chaud"), mais il faut garder présent à l'esprit la grande incertitude qui règne encore aujourd'hui sur la véritable nature de ces sursauts. Il est en particulier possible que seule une combinaison des différents modèles permettra de rendre compte des observations futures.

#### Le plasmon

Yusef-Zadeh *et al.* (2006b) proposent de modéliser les sursauts de rayonnement par l'émission d'une boule de plasma en expansion. Ces auteurs utilisent pour cela le modèle du plasmon développé par van der Laan (1966) qui décrit l'émission d'une telle structure.

On considère une sphère d'électrons émettant dans une région magnétisée un rayonnement synchrotron. L'émission est supposée initialement optiquement épaisse, et l'accroissement de la luminosité jusqu'au maximum du sursaut est dû à l'expansion adiabatique de la sphère d'électrons (conduisant donc à un accroissement de la surface émissive). Le champ magnétique et la densité d'énergie des électrons variant comme  $R^{-4}$  où  $R$  est le rayon de la sphère (van der Laan 1966), la sphère va devenir optiquement mince à un certain moment du fait de la diminution de l'intensité du champ magnétique, du refroidissement des électrons et de la réduction de la densité de colonne au fur et à mesure de l'expansion de la sphère.

Le flux synchrotron et la profondeur optique ont pour expression en fonction de la fréquence (Yusef-Zadeh *et al.* 2006b) :

$$F_\nu = F_0 \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^{2.5} \left( \frac{R}{R_0} \right)^3 \frac{1 - \exp(-\tau)}{1 - \exp(-\tau_0)} \quad (10.1)$$

$$\tau = \tau_0 \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^{-(p+4)/2} \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-(2p+3)}$$

où les quantités indicées par un 0 sont prises à l'instant initial et  $p$  est l'indice spectral des électrons, défini de telle sorte que la densité des électrons ayant l'énergie  $E$  est proportionnelle à  $E^{-p}$  ( $p > 0$ ).

Si l'on fait l'hypothèse simple que  $R(t) \propto t$ , ce modèle permet de calculer l'évolution temporelle du flux observé pour tout le spectre.

On remarque que la profondeur optique  $\tau(\nu)$  décroît lorsque  $\nu$  augmente. Le passage de l'état optiquement épais à l'état optiquement mince est donc d'autant plus tardif que

la fréquence est basse (le milieu sera même optiquement mince dès le début du phénomène pour les fréquences les plus élevées). Le pic de la courbe de lumière correspondant à cette transition, on comprend que ce modèle du plasmon rendra compte du délai observé entre les sursauts à basse et à haute fréquence. Les simulations de Yusef-Zadeh *et al.* (2006b) établissent quantitativement ces résultats.

## Jet

Il est probable que, comme beaucoup d'autres noyaux de galaxies, le centre galactique donne naissance à des jets relativistes collimatés, dont l'origine physique n'est pas encore clairement établie à l'heure actuelle. Le mécanisme de Blandford-Znajek (Blandford & Znajek 1977) propose un modèle dans lequel les lignes de champ d'un disque d'accrétion magnétisé sont entraînées par la rotation du trou noir central et permettent la collimation du plasma constituant le disque en deux jets diamétralement opposés.

Falcke (1996) et Falcke & Markoff (2000) développent un modèle de jet applicable à Sgr A\*, qui leur permet de rendre compte du spectre de la source, en l'absence de sursaut. Ce travail est généralisé par Markoff *et al.* (2001) pour tenir compte de la présence des sursauts.

On considère un plasma d'électrons et de protons éjecté de façon symétrique de part et d'autre d'un disque d'accrétion. Markoff *et al.* (2001) calculent le flux émis dû au rayonnement synchrotron des particules dans le champ magnétique à l'intérieur du jet. Ce modèle permet donc à la fois de rendre compte de l'état passif et de l'état actif (c'est-à-dire, avec sursaut) de Sgr A\*, pour l'ensemble du spectre.

## Instabilité de Rossby

On a déjà présenté rapidement l'instabilité de Rossby dans les disques d'accrétion dans la section 7.4.3.

L'instabilité de Rossby se développe dans un disque à partir du moment où il existe un rayon pour lequel la vorticité spécifique moyennée verticalement,  $\mathcal{L}_v = \nabla \times \mathbf{v} / \Sigma$ ,  $\Sigma$  étant la densité surfacique, présente un extremum. Dans la pratique, l'extremum de  $\mathcal{L}_v$  est causé par un extremum de la densité surfacique du disque. Des ondes de densité vont alors se déployer de part et d'autre du rayon correspondant à l'extremum de densité, qui coïncide avec le rayon de corotation  $r_c$ , c'est-à-dire pour lequel l'onde est en rotation à la même fréquence que le gaz constituant le disque (voir la Fig. 10.1 issue de Meheut *et al.* 2010). Pour  $r > r_c$  l'onde progresse donc plus vite que le gaz, et inversement pour  $r < r_c$ . On obtient ainsi une structure spiralante qui a déjà été illustrée sur la Fig. 7.10.

Tagger & Melia (2006) développent un code magnétohydrodynamique bidimensionnel permettant de simuler l'évolution d'un disque mince magnétisé soumis à une instabilité de Rossby. La gravitation est simulée par un potentiel de Paczynski-Wiita (Paczynski & Wiita 1980), potentiel pseudo-newtonien permettant de reproduire certains aspects de la métrique de Schwarzschild. Ces auteurs appliquent ce modèle à la source Sgr A\* en prenant en compte l'existence des sursauts de rayonnement. Ils supposent qu'une boule de plasma

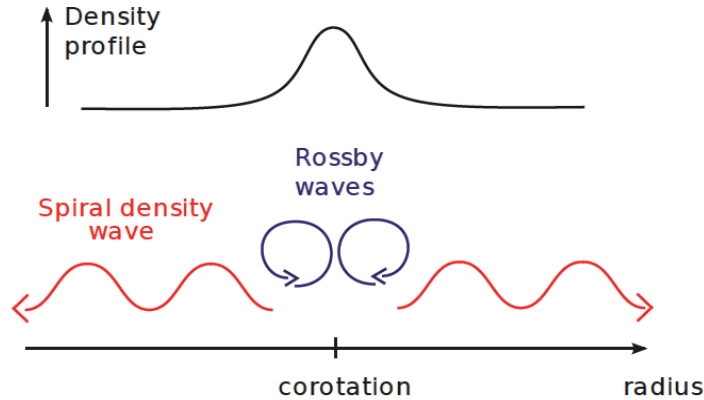


FIGURE 10.1 – Schéma d’une onde de Rossby. Source : Meheut *et al.* (2010)

va traverser le disque, créant une surdensité initialement localisée à un rayon  $r = 4 r_{\text{ISCO}}$ , et qui va rapidement évoluer pour former un anneau. Une forte surdensité apparaît donc au niveau de l’anneau, entraînant le déclenchement de l’instabilité de Rossby. Il s’ensuit une évolution violente du taux d’accrétion, le surplus de matière formant la surdensité migrant rapidement vers les zones les plus internes du disque. Les temps caractéristiques associés à ces phénomènes coïncident avec ceux des sursauts observés.

Falanga *et al.* (2007) utilisent ces simulations pour calculer les courbes de lumière et les images observées par un observateur distant en utilisant un code de calcul d’orbites relativistes. L’émission en rayons X est calculée en supposant qu’elle a pour origine le rayonnement Compton inverse issu d’une population initiale de photons émis par rayonnement synchrotron. Ce rayonnement synchrotron peut être calculé à partir des simulations magnétohydrodynamique du disque. Les courbes de lumière obtenues sont en très bon accord avec les données observées, comme le montre la Fig. 3 de Falanga *et al.* (2007).

## Bruit rouge

Au-delà même de l’absence de consensus sur un modèle rendant compte de la physique sous-jacente aux sursauts de Sgr A\*, certains auteurs mettent en doute le caractère d’événement particulier associé à ces sursauts. Ainsi Do *et al.* (2009) proposent d’expliquer les variations observées sur les courbes de lumière en utilisant le paradigme du “bruit rouge” développé par Press (1978).

Un bruit rouge possède un spectre de puissance en loi de puissance inverse, d’où son nom : la puissance est une fonction décroissante de la fréquence, donc plus importante dans la partie rouge du spectre que dans sa partie bleue. Toute réalisation d’un bruit rouge entraînera l’apparition de fluctuations autour de la loi de puissance inverse, ce qui peut générer l’apparition de pseudo-périodes n’ayant rien à voir avec un quelconque processus physique sous-jacent : il ne s’agit que de fluctuations associées à une distribution statistique

donnée. Un bruit rouge peut être créé par des fluctuations aléatoires de quantités physiques associées au disque d'accrétion, telle que la densité ou le taux d'accrétion.

Do *et al.* (2009) étudient les courbes de lumière associées à un sursaut de rayonnement de Sgr A\* en infrarouge proche, et montrent qu'elle sont parfaitement compatibles avec un tel bruit rouge.

Bien que des événements quasi-périodiques (QPO, pour *quasiperiodic oscillation*) aient été mis en évidence de façon claire dans les binaires X (voir par exemple van der Klis 2000), une telle détection dans les noyaux de galaxies fait débat parmi les auteurs (voir par exemple Benlloch *et al.* 2001). Cependant, en ce qui concerne Sgr A\*, on peut citer l'étude de Meyer *et al.* (2006a) qui utilise un test développé par Vaughan (2005) afin de vérifier si un signal est significativement différent d'un bruit rouge. La Fig. 1 de Meyer *et al.* (2006a) montre que le sursaut infrarouge détecté par Genzel *et al.* (2003a) est différent d'un bruit rouge à  $4,2\sigma$ .

Pour terminer cette discussion, on pourra consulter Dodds-Eden *et al.* (2011) à propos de l'existence de deux états distincts de Sgr A\*, l'un passif (sans sursaut) et l'autre actif (avec sursaut associé ou non à un mécanisme physique propre).

## Le point chaud

C'est ce modèle qui va être étudié en détail dans la suite de ce chapitre.

## 10.2 Le modèle du point chaud

### 10.2.1 La physique sous-jacente

Une description succincte et claire du modèle du point chaud peut être trouvée dans Trippe *et al.* (2007), que l'on reprend ici.

On considère un disque d'accrétion magnétisé, en rotation autour du trou noir central. Du fait de la rotation différentielle, les lignes de champ magnétique vont être distordues, jusqu'à provoquer des conditions favorables au déclenchement d'une reconnexion magnétique. L'énergie libérée lors de cet événement permet de chauffer violemment les électrons voisins qui vont émettre en synchrotron, tout en poursuivant leur rotation autour du trou noir. La rotation différentielle va déchirer cette population initiale d'électrons qui va évoluer, à partir d'une configuration initialement sphérique, pour former un arc. C'est l'émission synchrotron de cet arc, en orbite circulaire proche autour du trou noir central, qui est responsable de la courbe de lumière infrarouge observée. Une fois le phénomène de reconnexion magnétique terminé, l'arc chauffé va peu à peu se refroidir par rayonnement. On aura donc une phase de chauffage suivie d'une phase de refroidissement, le tout modulé par la période de rotation de l'arc autour de l'objet compact central. On voit que ce scénario rend compte des principales caractéristiques observées des sursauts de rayonnement.

Une des motivations essentielles de ce modèle est donnée par la formule suivante, qui relie la période orbitale pour une orbite circulaire de rayon  $r$  autour d'un trou noir de rayon gravitationnel  $r_g \equiv GM/c^2$  et de spin  $a$  (Hamaus *et al.* 2009) :

Référence	Pseudo-période (min)	Domaine spectral
Genzel <i>et al.</i> (2003a)	17	IR
Aschenbach <i>et al.</i> (2004)	4	X
Eckart <i>et al.</i> (2006)	20	IR
Meyer <i>et al.</i> (2006b)	15,5	IR
Bélangier <i>et al.</i> (2006)	22	X
Trippe <i>et al.</i> (2007)	15	IR
Hamaus <i>et al.</i> (2009)	45	IR
Dodds-Eden <i>et al.</i> (2009)	20	IR
Dodds-Eden <i>et al.</i> (2010)	40	IR

TABLE 10.1 – Pseudo-périodes mesurées dans les courbes de lumière des sursauts de Sgr A\*, en infrarouge et en rayons X, pour différents auteurs.

$$T = \frac{2\pi r_g}{c} \left( \left[ \frac{r}{r_g} \right]^{3/2} + a \right). \quad (10.2)$$

On déduit immédiatement que la période d'une sphère de gaz en orbite sur l'ISCO d'un trou noir de spin 0,5 et de masse  $4,3 \cdot 10^6 M_\odot$  vaut  $T = 20,5$  min. On obtient l'ordre de grandeur de la pseudo-période mesurée sur les courbes de lumière infrarouges des sursauts de Sgr A\*.

Plusieurs auteurs ont affermi la base théorique de ce modèle. Yuan *et al.* (2004) montre comment il est possible d'ajuster le spectre observé de Sgr A\* lors d'un sursaut en considérant un disque radiativement inefficace (*RIAF - radiatively inefficient accretion flow*, Yuan *et al.* 2003) constitué d'une population d'électrons dont une partie possède une distribution d'énergie  $n(E)$  non thermique, c'est-à-dire suivant une loi de puissance  $n(E) \propto E^{-p}$  où  $p$  est un indice spectral, donc non assimilable à une Maxwellienne. L'obtention d'une distribution non thermique à partir d'une distribution Maxwellienne, sous l'effet de la reconnexion magnétique, est étudiée par Ding *et al.* (2010). La formation d'un point chaud pourrait parfaitement suivre le scénario avancé par ces auteurs.

Signalons pour finir que des travaux ont également été menés afin de simuler l'aspect d'un tel point chaud, tel qu'observé par un observateur distant (Broderick & Loeb 2006; Hamaus *et al.* 2009). C'est dans la lignée de ces travaux que ce situe la section 10.3 de ce chapitre.

### 10.2.2 Des périodes mesurées au spin du trou noir

Ce modèle du point chaud a été utilisé par de nombreux auteurs pour expliquer les courbes de lumière de Sgr A\*. Le Tab. (10.1) recense une liste non exhaustive de ces auteurs, en précisant pour chaque observation la valeur de la pseudo-période mesurée.



On constate que, si l'existence d'une pseudo-période est confirmée par de nombreux auteurs, sa valeur peut varier fortement d'une observation à l'autre : on ne peut donc pas faire l'hypothèse que le sursaut apparaît toujours à la même orbite (par exemple toujours sur l'ISCO du trou noir). La Fig. 10.2 représente l'évolution de la période d'une particule en rotation circulaire dans le plan équatorial du trou noir en fonction du rayon de l'orbite pour différente valeur de spin. On conclut de l'encart du haut que des valeurs de spin inférieures à 0,5 sont exclues par le modèle du point chaud : on ne pourrait pas rendre compte des valeurs de pseudo-périodes de l'ordre de la vingtaine de minutes. On va donc considérer dans la suite des valeurs de spin  $a \geq 0,5$ .

Pour rendre compte des valeurs de pseudo-périodes les plus courtes observées (quelques minutes), il est nécessaire d'avoir un spin très proche de la valeur maximale. Cependant, la majorité des observations donnant une pseudo-période de l'ordre de la vingtaine de minute, il convient de ne pas surinterpréter les résultats les plus extrêmes du Tab. (10.1).

Au vu de l'encart du bas de la Fig. 10.2, on conclut qu'afin de rendre compte des valeurs de pseudo-périodes comprises entre 20 et 40 minutes, qui sont les plus fréquemment observées, il faut considérer un point chaud en orbite à une distance  $r_{\text{circ}}$  vérifiant (quel que soit le spin) :

$$2r_S \lesssim r_{\text{circ}} \lesssim 3,5r_S. \quad (10.3)$$

Il faut garder en tête qu'en fonction du spin, à un rayon donné, on se trouve plus ou moins éloigné de l'ISCO : pour  $r = 2r_S$  par exemple, on est en dessous de l'ISCO d'un trou noir de spin 0,5, et à quatre fois l'ISCO d'un trou noir en rotation maximale.

## 10.3 Simulations d'un point chaud en orbite autour de Sgr A\*

### 10.3.1 Modélisation d'un point chaud par GYOTO

Le modèle du point chaud est simulé par GYOTO en suivant les idées développées par Hamaus *et al.* (2009).

On considère donc un observateur situé à une distance de  $r = 100 M$  d'un trou noir de Kerr de spin donné, pour une inclinaison donnée. On considère une sphère de gaz émettant de façon isotrope, en orbite circulaire proche autour du trou noir dans son plan équatorial. Le rayon de la sphère de gaz est supposé valoir  $0,25 r_S$ , où  $r_S$  est le rayon de Schwarzschild du trou noir. Cette valeur est compatible avec la borne supérieure sur la taille du point chaud estimée par Gillessen *et al.* (2006) à  $r < 0,3 r_S$ .

On peut alors calculer l'image observée de cette sphère de gaz par l'observateur, pour une série de dates étalées sur quelques périodes de rotation.

La source du rayonnement est modélisée par la superposition d'un arc et d'une sphère de gaz. L'arc est obtenu en sommant toutes les images de la sphère obtenues sur une période entière. Afin de rendre compte des processus de chauffage par reconnexion magnétique puis

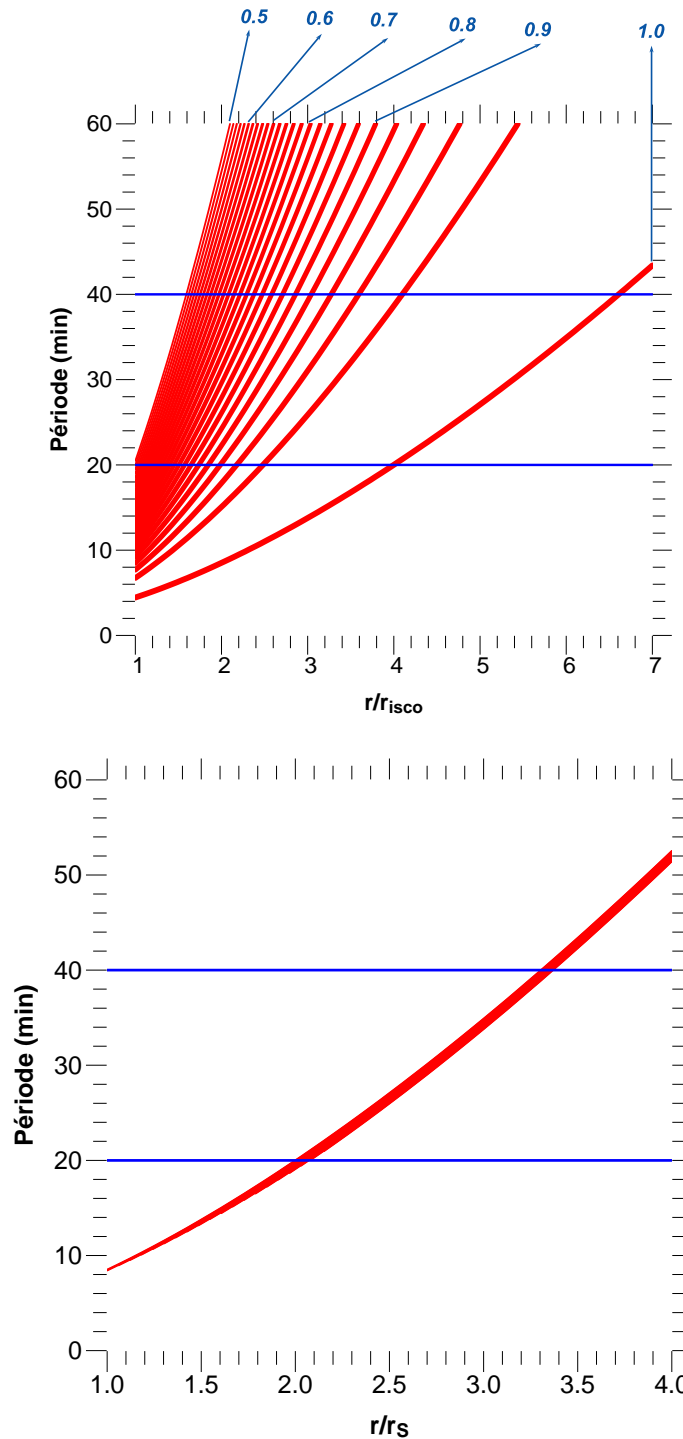


FIGURE 10.2 – Évolution de la période en fonction du rayon de l'orbite circulaire considérée (voir Eq. 10.2), pour différentes valeurs du paramètre de spin (données en bleu sur la figure du haut) comprises entre 0,5 et 1. On a mis en évidence deux valeurs de période : 20 et 40 min (traits horizontaux bleus). En haut, le rayon est exprimé en unité du rayon de l'ISCO, en bas, en fonction du rayon de Schwarzschild. Les différentes valeurs de spins sont presque confondues dans cette dernière représentation, les courbes correspondant à des spins plus élevées sont situées au-dessus de celles correspondant à des spins plus faibles (les courbes ont été interrompues lorsque la valeur du rayon devient inférieur au rayon de l'ISCO au spin considéré).

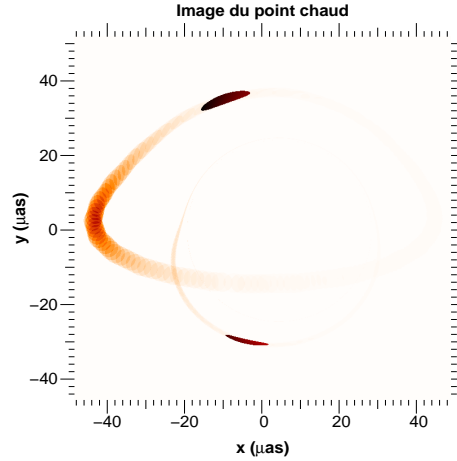


FIGURE 10.3 – Image d’un point chaud obtenu en superposant l’image d’une sphère et la somme des images de cette sphère sur une période, modulées par des gaussiennes temporelle et angulaire (voir texte). Les paramètres utilisés sont ceux donnés dans le Tableau 2 de Hamaus *et al.* (2009).

de refroidissement, on module la luminosité émise par l’arc et la sphère par une gaussienne paramétrée par des temps caractéristiques pour la sphère et l’arc, respectivement,  $\sigma_{\uparrow, \text{sph}}$ ,  $\sigma_{\downarrow, \text{sph}}$ , et  $\sigma_{\uparrow, \text{arc}}$ ,  $\sigma_{\downarrow, \text{arc}}$ , la flèche vers le haut  $\uparrow$  indiquant un temps caractéristique de chauffage et la flèche vers le bas  $\downarrow$ , un refroidissement. Afin de tenir compte du fait que l’arc est dû au déchirement de la sphère par la rotation différentielle, on module en plus la luminosité émise par l’arc par une gaussienne angulaire piquée à la position de la sphère et caractérisée par un écart-type  $\sigma_{\text{angulaire, arc}}$ . La coordonnée angulaire associée à cette gaussienne est définie de la façon suivante : elle vaut 0 au niveau de la position de la sphère, et  $2\pi \frac{t-t_{\text{sph}}}{t_{\text{per}}}$  à une date  $t$  quelconque,  $t_{\text{sph}}$  étant la date d’émission de l’image primaire de la sphère et  $t_{\text{per}}$  la valeur de la période. Enfin, étant donné que l’on suppose que la région chauffée est localisée au niveau de la sphère, on utilise un dernier paramètre, le rapport d’intensité  $\rho_I$ , tel que l’intensité émise par chaque sphère élémentaire constituant l’arc voit son intensité divisée par un facteur  $\rho_I$  par rapport à l’intensité directement calculée par GYOTO.

La Fig 10.3 représente la superposition de l’arc et de la sphère à une date donnée, pour un paramètre de spin de 0,52 et une inclinaison de  $70^\circ$ . On distingue très clairement les images d’ordre 1 et 2.

### 10.3.2 Simulations de courbes de lumière et de trajectoires de centroïde

On souhaite désormais obtenir la courbe de lumière et la trajectoire du point chaud au cours d’une nuit d’observation. Pour commencer, définissons plus précisément comment ces quantités sont calculées par GYOTO.

Afin de tenir compte de l'analyse de la couleur du sursaut menée par Gillessen *et al.* (2006), on affecte à la sphère un indice spectral  $\alpha_{\text{sph}} = 0$  et à l'arc un indice spectral  $\alpha_{\text{arc}} = -3$ , où on définit l'indice spectral par :

$$\nu_{\text{em}} I_{\nu_{\text{em}}} \propto \nu_{\text{em}}^{\alpha} \quad (10.4)$$

où  $\nu_{\text{em}}$  est la fréquence émise par la source.

La quantité mesurée par l'observateur est l'intensité :

$$I_{\nu_{\text{obs1}}, \nu_{\text{obs2}}} = \int_{\nu_{\text{obs1}}}^{\nu_{\text{obs2}}} I_{\nu_{\text{obs}}} d\nu_{\text{obs}}. \quad (10.5)$$

En utilisant l'invariant relativiste  $I_{\nu}/\nu^3$  introduit section 7.2, on obtient alors immédiatement la relation suivante :

$$I_{\nu_{\text{obs1}}, \nu_{\text{obs2}}} \propto g^{4-\alpha} \quad (10.6)$$

où  $g$  est le paramètre de décalage vers le rouge défini par :

$$g = \frac{\nu_{\text{obs}}}{\nu_{\text{em}}}. \quad (10.7)$$

GYOTO permet de calculer la quantité  $g$  pour chaque géodésique impactant chaque pixel de l'écran d'observation. On peut donc calculer l'intensité mesurée au niveau de chaque pixel en multipliant le facteur  $g^{4-\alpha}$  par les modulations gaussiennes introduites dans la section précédente. L'intensité totale observée s'obtient en sommant les intensités reçues par chaque pixel.

La trajectoire du point chaud s'obtient en calculant à chaque date le barycentre des positions des pixels éclairés pondérés par leur intensité. Afin d'obtenir des valeurs d'angles correspondant à ce qui serait observé par un observateur situé sur Terre, on multiplie les angles calculés par GYOTO (on rappelle que chaque pixel de l'écran correspond à un couple de coordonnées angulaires sur le ciel, comme le montre la Fig. 7.1) par un facteur d'échelle  $f_{\text{ech}}$  :

$$f_{\text{ech}} = \frac{r_{\text{obs}}}{r_S} \theta_S \quad (10.8)$$

où  $r_{\text{obs}}$  est la valeur de la coordonnée radiale de l'écran GYOTO,  $r_S$  est le rayon de Schwarzschild et  $\theta_S$  est la taille angulaire du rayon de Schwarzschild observé par un observateur sur Terre, soit  $10 \mu\text{as}$ .

La Fig. 10.4 représente la courbe de lumière<sup>2</sup> et la trajectoire du point chaud associée pour un trou noir de paramètre de spin 0,52, et pour une inclinaison de  $70^\circ$ . On a choisit les paramètres du point de chaud selon les valeurs fournies par le Tab. 2 de Hamaus *et al.* (2009). L'accord avec la Fig. 13 de Hamaus *et al.* (2009) est excellent.

---

2. On remarque une différence entre la durée du sursaut simulé dans la Fig. 11 de Hamaus *et al.* (2009) et la durée du sursaut simulé Fig. 10.4 de ce manuscrit. Ceci est dû à la différence de masse de Sgr A\*,  $3,61 \cdot 10^6 M_{\odot}$  pour Hamaus *et al.* (2009) et  $4,31 \cdot 10^6 M_{\odot}$  ici, ce qui change l'échelle de temps.

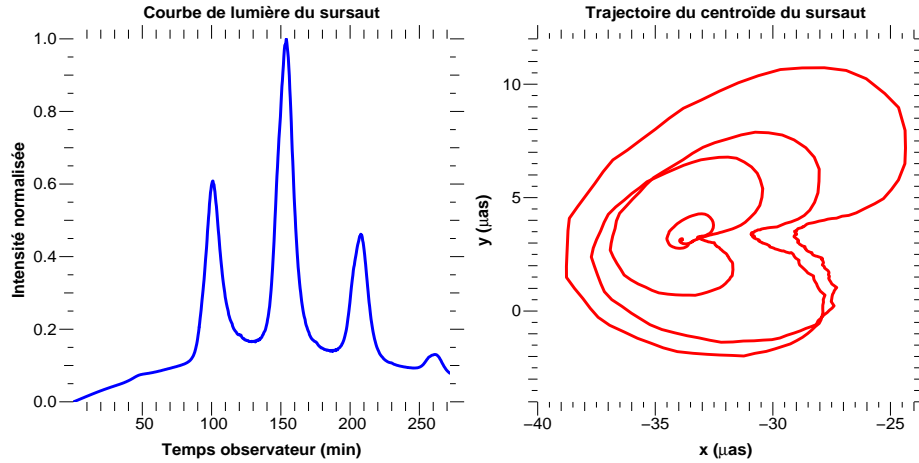


FIGURE 10.4 – Courbe de lumière et trajectoire d’un point chaud ayant les mêmes paramètres que ceux utilisés pour obtenir la Fig. 13 de Hamaus *et al.* (2009), avec une inclinaison de  $70^\circ$ .

### 10.3.3 Allure de la courbe de lumière et de la trajectoire du centroïde en fonction des paramètres du point chaud

Cette section se propose de donner quelques intuitions sur la manière dont la trajectoire évolue en fonction des paramètres choisis pour le point chaud. Plus précisément, on veut déterminer quels sont les paramètres qui permettent d’obtenir une taille caractéristique de l’orbite plus ou moins grande : il est clair que la taille caractéristique de l’orbite est une donnée cruciale pour GRAVITY. Si elle est de l’ordre du  $\mu\text{as}$ , il n’y aura aucun espoir de mettre en évidence un quelconque mouvement. Si elle est de l’ordre de la dizaine de  $\mu\text{as}$ , on pourra espérer y parvenir.

Afin de limiter les cas, on ne fera varier que le rapport d’intensité  $\rho_I$  et les différents paramètres de la gaussienne temporelle  $\sigma_{\uparrow,\text{sph}}$ ,  $\sigma_{\downarrow,\text{sph}}$ ,  $\sigma_{\uparrow,\text{arc}}$ ,  $\sigma_{\downarrow,\text{arc}}$ , qui sont les paramètres ayant le plus d’impact sur la taille caractéristique de l’orbite. On ne s’intéresse pas ici à l’impact sur la trajectoire de la valeur du paramètre de spin, de l’inclinaison et du rayon de l’orbite, ceci ayant déjà été fait en détail par Hamaus *et al.* (2009).

Pour fixer les idées, considérons un trou noir de paramètre de spin 0,5, vu sous une inclinaison de  $60^\circ$ , le rayon de l’orbite du point chaud vérifiant  $r/r_{\text{ISCO}} = 3$ . Le choix d’une forte inclinaison va entraîner une orbite resserrée (voir la Fig. 13 de Hamaus *et al.* 2009), rendant très difficile l’acquisition de données astrométriques. On souhaite déterminer ici si les paramètres du point chaud sont en mesure, selon leurs valeurs, d’améliorer la situation pour une détection astrométrique.

Les Fig. 10.5, 10.6 et 10.7 illustrent la dépendance de la courbe de lumière et de la trajectoire en fonction des paramètres étudiés. Dans toutes ces figures, les paramètres dont la valeur n’est pas précisée est la suivante :

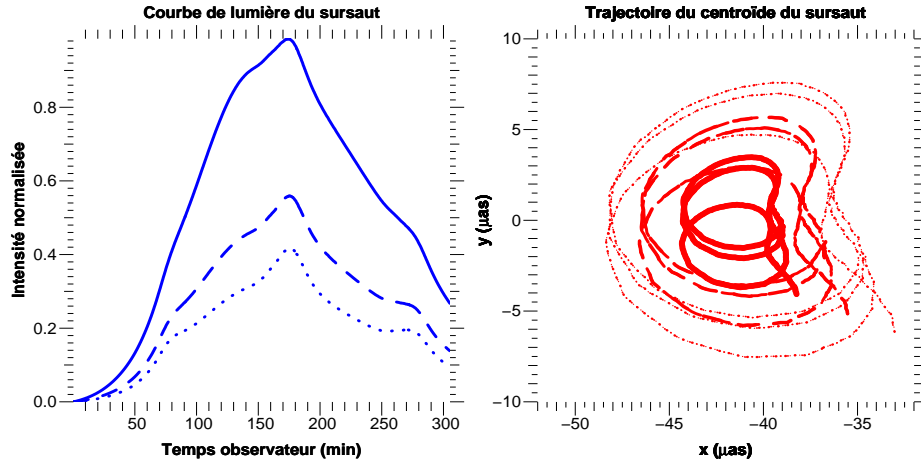


FIGURE 10.5 – Impact de  $\rho_I$  : courbe de lumière et trajectoire d'un point chaud dont les paramètres ont les valeurs données par l'Eq. 10.9 (pointillés), ou en changeant  $\rho_I = 40$  (tirets) et  $\rho_I = 20$  (traits pleins).

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\text{angulaire,arc}} &= 2\pi & (10.9) \\
 \rho_I &= 60 \\
 \sigma_{\uparrow,\text{sph}} &= 0,5 t_{\text{per}}, \sigma_{\downarrow,\text{sph}} = t_{\text{per}} \\
 \sigma_{\uparrow,\text{arc}} &= 0,5 t_{\text{per}}, \sigma_{\downarrow,\text{arc}} = t_{\text{per}}.
 \end{aligned}$$

où  $t_{\text{per}}$  est la valeur de la période du point chaud.

La Fig. 10.5 montre que la taille caractéristique de l'orbite dépend crucialement de la valeur de  $\rho_I$  : dans le cas considéré, il faut avoir  $\rho_I \gtrsim 50$  pour obtenir un déplacement de l'ordre de  $10 \mu\text{as}$ . Le maximum de la courbe de lumière varie en fonction de  $\rho_I$  : il augmente lorsque  $\rho_I$  diminue (puisque l'arc est alors moins atténué). Par contre, les variations de la courbe de lumière sont peu influencées par ce paramètre.

Les Fig. 10.6 et 10.7 montrent l'impact du rapport entre les temps caractéristiques de chauffage et de refroidissement de la sphère et de l'arc. Lorsque l'arc évolue plus lentement que la sphère (Fig. 10.6), la trajectoire du point chaud n'est que peu impactée par rapport au cas standard où les évolutions sont simultanées, mais par contre les variations de la courbe de lumière changent radicalement : étant donné que la luminosité de l'arc varie peu (puisque son temps d'évolution est long), les fluctuations dues à la sphère sont très visibles et des pics très marqués, dus au phénomène de *beaming*, apparaissent. L'écart entre les valeurs minimale et maximale de la courbe de lumière diminue lorsque l'arc évolue moins rapidement, puisque son intensité évolue peu durant l'existence de la sphère.

Lorsque l'arc évolue rapidement par rapport à la sphère (Fig. 10.7), il existe des périodes pour lesquelles la sphère domine complètement l'émission globale, ce qui entraîne une taille caractéristique de l'orbite beaucoup plus grande, dictée par le mouvement de la sphère.

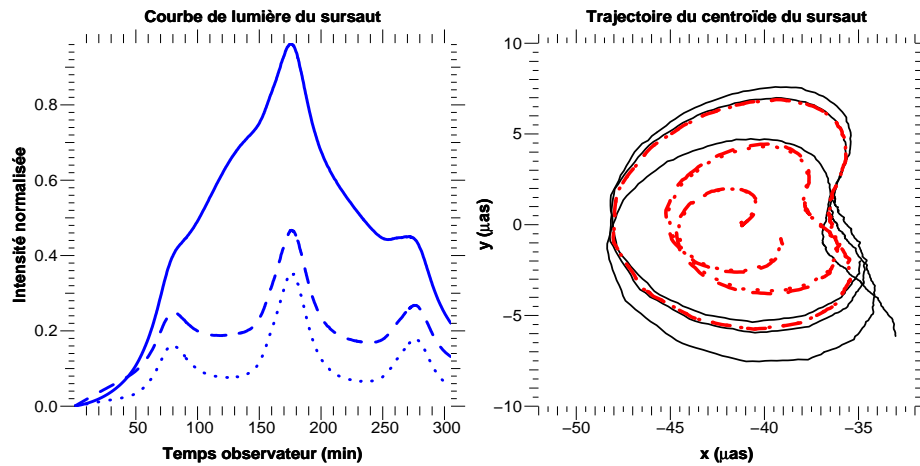


FIGURE 10.6 – Impact de  $\sigma_{\uparrow-\downarrow,\text{arc}}$  : courbe de lumière et trajectoire d'un point chaud dont les paramètres ont les valeurs données par l'Eq. 10.9 (trait plein à gauche, trait noir à droite), ou en changeant  $\sigma_{\uparrow,\text{arc}} = 2 t_{\text{per}}, \sigma_{\downarrow,\text{arc}} = 4 t_{\text{per}}$  (tirets à gauche, tirets rouges à droite) et  $\sigma_{\uparrow,\text{arc}} = 4 t_{\text{per}}, \sigma_{\downarrow,\text{arc}} = 8 t_{\text{per}}$  (pointillés à gauche, pointillés rouges à droite).

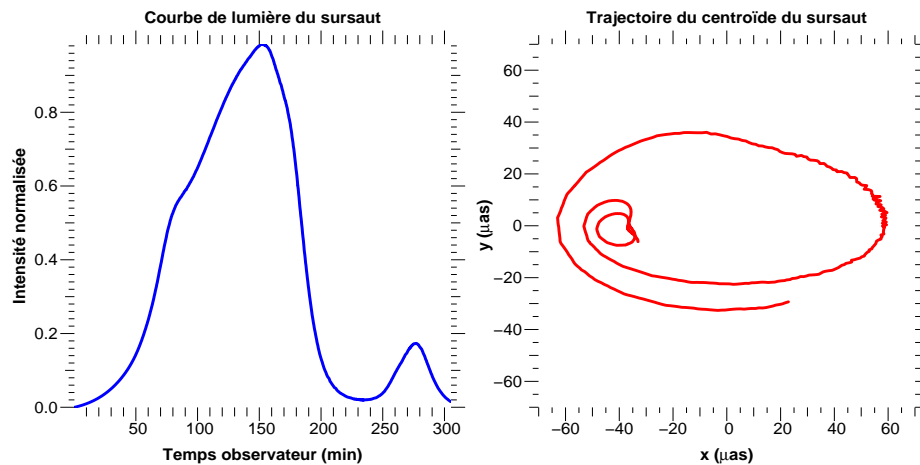


FIGURE 10.7 – Impact de  $\sigma_{\uparrow-\downarrow,\text{arc}}$  : courbe de lumière et trajectoire d'un point chaud dont les paramètres ont les valeurs données par l'Eq. 10.9 sauf pour :  $\sigma_{\downarrow,\text{arc}} = 0,2 t_{\text{per}}$ .

Ce cas pour lequel l'arc évolue plus rapidement que la sphère serait très prometteur pour GRAVITY, mais il est malheureusement physiquement peu vraisemblable : l'arc, causé par la distorsion de la sphère, n'a aucune raison de se refroidir avant celle-ci.

Cette courte étude a montré la diversité des résultats possibles en fonction des paramètres du point chaud. Étant donné qu'une analyse complète prenant en compte tous les paramètres du trou noir et du point chaud sort de la portée de ce manuscrit, on va se limiter au jeu de paramètre standard introduit plus haut, équation 10.9.

La prochaine section se propose de déterminer l'impact que pourra avoir l'étude des résultats astrométriques (et eux seuls) obtenus par GRAVITY sur notre connaissance des sursauts et du trou noir central.

## 10.4 Simulations d'observations par GRAVITY

### 10.4.1 Cadre de l'analyse

Considérons un point chaud en orbite circulaire de rayon  $r_{\text{circ}}$  vérifiant (voir Eq. 10.3) :

$$2r_S \lesssim r_{\text{circ}} \lesssim 3,5r_S. \quad (10.10)$$

On va considérer trois valeurs différentes de rayons :  $r = 4M$ ,  $r = 5,5M$  et  $r = 7M$ , en unités géométriques (on se rappelle que dans ce système d'unités,  $r_S = 2M$ ).

On considère un point chaud décrit par les paramètres définis dans l'équation 10.9.

On s'intéresse, dans cette section, à déterminer si GRAVITY pourra mettre en évidence le mouvement du point chaud, grâce à ses capacités astrométriques. Dans la lignée de l'étude menée au chapitre 6, on ne va s'intéresser qu'aux mesures astrométriques, en ne tenant compte de la courbe de lumière que pour fixer l'erreur astrométrique en fonction de la magnitude de la source, en utilisant les résultats obtenus au chapitre 6.

Au-delà de la mise en évidence du mouvement du point chaud, on va s'intéresser à l'impact de l'un des paramètres fondamentaux de Sgr A\* : son inclinaison sur le ciel. On considérera dans toute la suite un trou noir de spin 0,7, sauf mention contraire.

Une étude plus générale portant sur l'utilisation combinée des données astrométriques et photométriques sera intéressante à mener dans la suite. On peut se référer à la Fig. 5 de Hamaus *et al.* (2009) pour avoir une idée du potentiel d'une telle analyse combinée, en particulier en ce qui concerne d'éventuelles contraintes sur le paramètre de spin.<sup>3</sup>

### 10.4.2 Observations simulées

Cette section va généraliser les résultats obtenus dans la section 6.2. On va utiliser le programme de simulation de GRAVITY présenté au chapitre 5 afin de simuler de façon

---

3. Notons cependant à propos de la Fig 5 de Hamaus *et al.* (2009) qu'elle ne concerne qu'une sphère en orbite, et non pas un point chaud constitué de la superposition d'une sphère et d'un arc. Au vu de l'analyse de la section 10.3.3, on peut supposer que les choses seront nettement compliquées par la prise en compte d'une source étendue.



réaliste les données astrométriques fournies par GRAVITY lors de l'observation d'un point chaud, la trajectoire du point chaud étant calculée par GYOTO selon la méthode exposée plus haut, et tenant donc compte de tous les effets relativistes.

Étant donné que l'on s'intéresse ici à un mouvement extrêmement réduit dont la taille caractéristique est de l'ordre de quelques fois  $10 \mu\text{as}$ , il n'est pas crucial de disposer d'une estimation de la position de la source qui serait fournie par le mode imageur de l'instrument, présenté dans la section 5 : on va directement ajuster la position de la source, en la supposant unique et ponctuelle, en établissant une première estimation de la solution par minimisation du  $\chi^2$  sur une grille de  $100 \mu\text{as}$  de côté. Ceci permet de gagner considérablement en temps de calcul puisqu'on évite la reconstruction des images.

Signalons que ce choix ne remet pas en cause l'intérêt du mode imageur de l'instrument dont le principal avantage sera de déterminer l'allure du champ de vue complet de l'instrument (de taille caractéristique  $60 \text{ mas}$ ) de façon indépendante de tout modèle (voir le chapitre 5).

On va donc procéder de la façon suivante : à partir des couples de valeurs d'intensité et de position sur le ciel obtenues à chaque instant par les simulations GYOTO, on peut calculer les visibilité complexes non bruitées. En tenant compte de la magnitude de la source à l'instant considéré, on déduit le bruit affectant ces visibilité, ce qui permet de calculer un jeu de visibilité bruitées, qui seront ajustées par un modèle supposant une source ponctuelle unique dans le champ de vue.

Les positions retrouvées sur le ciel seront affectées dans les figures qui suivent de barres d'erreur dont la taille est issue des simulations de précision astrométrique pour une seule source présente dans le champ de vue obtenues au chapitre 6. Cependant, on ne peut plus effectuer une rotation de la PSF de l'instrument telle qu'on l'avait fait dans le chapitre 6, étant donné que les simulations GYOTO réalisées supposent que l'axe vertical  $y$  de l'écran coïncide avec la projection de l'axe de rotation du trou noir. Il n'y a aucune raison de privilégier cette direction  $y$  par rapport à la direction orthogonale. Aussi utilisera-t-on la même valeur d'erreur dans les deux directions  $x$  et  $y$ , correspondant à la moyenne quadratique des erreurs dans les directions  $x$  et  $y$  obtenues au chapitre 6. On suppose ainsi que la PSF de l'instrument fait un angle de  $45^\circ$  avec la projection de l'axe de rotation du trou noir.

De la même façon que dans la section 6.2, on va s'intéresser aux dispersions  $\delta_x$  et  $\delta_y$  des positions retrouvées au cours d'une nuit, dans les deux directions  $x$  et  $y$  de l'écran d'observation, telles que définies par l'équation :

$$\begin{aligned}\delta_x &= \sqrt{\frac{1}{N_{\text{obs}} - 1} \sum_{k=0}^{N_{\text{obs}}-1} (x_k - \bar{x})^2}, \\ \delta_y &= \sqrt{\frac{1}{N_{\text{obs}} - 1} \sum_{k=0}^{N_{\text{obs}}-1} (y_k - \bar{y})^2}\end{aligned}\tag{10.11}$$

où  $x_k$  et  $y_k$  désignent les positions retrouvées de la source pour chacune des  $N_{\text{obs}}$  poses réalisées au cours de la nuit, et où  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  désignent les moyennes des positions retrouvées au cours de la nuit dans chaque direction.

Les Figs. 10.8 représentent des observations simulées autour d'un trou noir de spin 0,7, en supposant le point chaud soit fixe à une position donnée, soit en orbite circulaire avec un rayon orbital maximal (voir Eq. 10.3)  $r_{\text{circ}} = 7M$ . On a choisi une valeur réduite de l'inclinaison,  $20^\circ$ , conduisant à l'obtention d'une orbite étendue : on est donc dans un cas particulièrement favorable pour la détection astrométrique (on se reportera à la Fig. 10.9 pour un exemple de ce que l'on peut obtenir dans un cas nettement moins favorable).

Afin de restreindre les barres d'erreur, on a sélectionné la partie du sursaut pour laquelle l'intensité est supérieure à 35% de sa valeur maximale (la valeur de ce pourcentage est choisie de telle façon que la durée du sursaut prise en compte soit supérieure à la période du sursaut, de façon à ne pas sélectionner une sous-partie de la trajectoire). On suppose que la magnitude du sursaut à son maximum vaut  $m_K = 13$  (ce qui est très optimiste étant donné que le sursaut le plus brillant observé actuellement a atteint  $m_K = 13,5$ , Dodds-Eden *et al.* 2011)<sup>4</sup>. En réalisant des intégrations de 100 s, on obtient alors une soixantaine de points d'observation, qui sont moyennés afin de n'en garder qu'une dizaine au final pour le calcul de la dispersion (ce qui permet de diminuer encore les barres d'erreur).

On a déjà vu plus haut qu'il n'était pas possible de supposer que deux sursauts successifs étaient définis par le même jeu de paramètres : au-delà du fait que les paramètres du point chaud lui-même peuvent certainement varier d'une nuit à l'autre, le rayon du sursaut ne peut être supposé constant au vu des différences de pseudo-périodes mesurées. On en déduit qu'il n'est pas possible de moyenniser des résultats d'observation portant sur des nuits différentes, ce qui limite la possibilité de restreindre les barres d'erreur par moyennage<sup>5</sup>.

L'objectif de la prochaine section est de déterminer quelle information ces mesures de dispersion pourront apporter sur les paramètres du trou noir central, et dans quelles circonstances il sera possible de faire quantitativement la différence entre une source fixe et une source en orbite circulaire.

### 10.4.3 Mise en évidence du mouvement du point chaud en fonction de l'inclinaison

A ce stade, il est possible de calculer pour une nuit d'observation simulée d'un point chaud, mobile ou non, la valeur de la dispersion des coordonnées retrouvées, dans les directions des axes de l'écran d'observation ( $x$  et  $y$ ), au moyen de l'équation 10.11.

On peut alors lancer une procédure Monte Carlo, calculant cette valeur de dispersion pour un grand nombre de nuits simulées, et représenter les histogrammes bidimensionnels des dispersions dans les deux directions ainsi obtenues.

---

4. Ce choix est effectivement très optimiste, mais pas irréaliste, étant donné que les résultats qui vont suivre ne font appel qu'aux données observées sur une nuit (pour les raisons exposées dans la suite). Il suffit donc d'observer un seul sursaut suffisamment brillant.

5. Par contre, il est bien entendu possible d'utiliser, séparément, les résultats d'observation obtenus sur plusieurs nuits de sursaut, afin d'affiner leur interprétation.

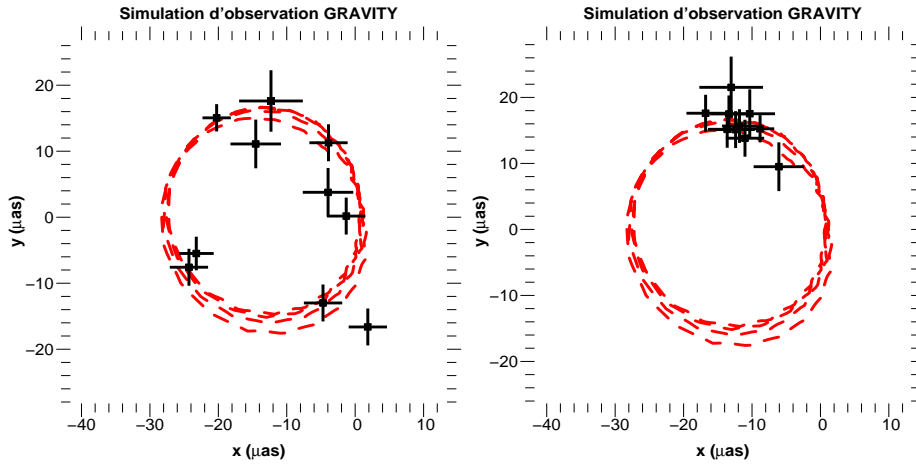


FIGURE 10.8 – Simulations d’observation par GRAVITY d’un point chaud autour d’un trou noir de spin 0,7 vu sous une inclinaison de  $20^\circ$ , en rotation circulaire à une distance  $r = 7 M$  (à gauche) ou bien fixe à une certaine position de cette orbite circulaire (à droite). Les barres d’erreur variables tiennent compte de l’évolution de la magnitude du sursaut dont la magnitude maximale vaut  $m_K = 13$ . La trajectoire théorique calculée par GYOTO est représentée en tirets rouges.

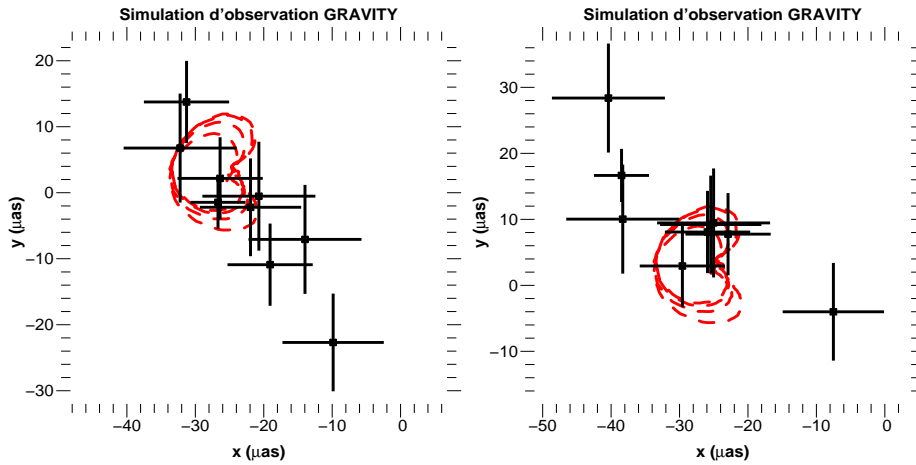


FIGURE 10.9 – Même figure que la Fig. 10.8, l’inclinaison valant  $60^\circ$  et la magnitude maximale du sursaut  $m_K = 14$ . A gauche le point chaud est en rotation à  $r = 7 M$ , à droite il est fixe.

### Analyse générale des histogrammes

Les Figs. 10.10 à 10.12 représentent ces histogrammes de dispersions pour un point chaud (fixe ou mobile) à la distance  $r = 7M$ ,  $5,5M$  ou  $4M$  autour d'un trou noir de spin  $0,7$ , vu sous une inclinaison de  $20^\circ$ ,  $40^\circ$  ou  $60^\circ$ , et ayant une magnitude maximale de  $m_K = 13$ . Les contours représentés englobent respectivement 68%, 95% et 99% des dispersions obtenues au cours de la procédure Monte Carlo.

Vérifions dans un premier temps que ces résultats sont cohérents, pour l'un des cas illustrés.

Considérons le cas du point chaud de magnitude maximale  $m_K = 13$  fixe à  $r = 7M$ , observé sous une inclinaison de  $20^\circ$  (Fig. 10.10 en haut à gauche). La magnitude du point chaud variant au cours de la nuit, on va prendre comme magnitude moyenne du sursaut :  $m_K = 13,5$ . A cette magnitude, la précision astrométrique obtenue par ajustement, dans les deux directions de l'écran<sup>6</sup>, est de  $\sigma = 6,3 \mu\text{as}$ . Pour un rayon d'orbite de  $r = 7M$  et à une inclinaison de  $20^\circ$ , on peut réaliser environ 60 intégrations de 100 s par nuit. Ces observations sont moyennées afin de ne garder qu'une dizaine de points dont on calculera la dispersion. La valeur de la précision sur les données moyennées est donc d'environ  $\sigma_{\text{moy}} \approx 6,3/\sqrt{6} = 2,6 \mu\text{as}$ . Cette valeur est proche du centre de l'histogramme des dispersions représenté en bleu sur l'encart en haut à gauche de la Fig. 10.10.

Intéressons-nous alors au cas du même point chaud, en rotation et non plus fixe. On constate sur la Fig. 10.8 que la trajectoire peut être assez bien approximée par un cercle de rayon  $R \approx 15 \mu\text{as}$ . Il est facile de calculer la dispersion de points répartis de façon homogène sur la circonférence d'un cercle de rayon  $R$  : elle vaut  $\delta_{\text{th}} = R/\sqrt{2}$ . L'histogramme représenté en rouge sur l'encart en haut à gauche de la Fig. 10.10 doit donc être centré sur une valeur proche de  $\delta_{\text{th}} = 15/\sqrt{2} = 10,6 \mu\text{as}$ , ce qui est effectivement le cas.

On conclut de cette analyse que les histogrammes représentés sur l'encart en haut à gauche de la Fig. 10.10 sont cohérents, ce qui constitue une validation de la procédure Monte Carlo suivie.

Comparons désormais les résultats obtenus pour des rayons différents sur les Figs. 10.10 à 10.12. On constate que pour une inclinaison de  $20^\circ$ , les histogrammes correspondants aux points chauds en mouvement sont centrés dans les trois cas sur des valeurs proches. Ceci est dû au fait que la taille caractéristique de la trajectoire projetée à faible inclinaison dépend peu du rayon de l'orbite, comme l'illustre l'encart de droite de la Fig. 10.13 : on n'aura pas forcément une trajectoire projetée sur le ciel plus petite pour un rayon plus petit. Par contre, on constate sur la Fig. 10.13 que la position du centre de la trajectoire projetée (ou, ce qui revient au même, la valeur maximale de la distance angulaire au centre galactique), varie de façon nette en fonction du rayon. Lorsque l'inclinaison augmente, jusqu'à atteindre  $60^\circ$ , on constate sur les Figs. 10.10 à 10.12 que les histogrammes correspondants aux points chauds en mouvement ne sont plus centrés sur la même valeur : la Fig. 10.14 montre qu'en effet, la taille caractéristique de l'orbite varie en fonction du rayon lorsque l'inclinaison est

---

6. On rappelle qu'on suppose ici que la PSF de l'instrument fait un angle de  $45^\circ$  avec l'axe horizontal de l'écran, la précision dans les deux directions étant la moyenne quadratique des précisions obtenues dans le chapitre 6 lorsque la PSF était alignée sur les axes de l'écran.

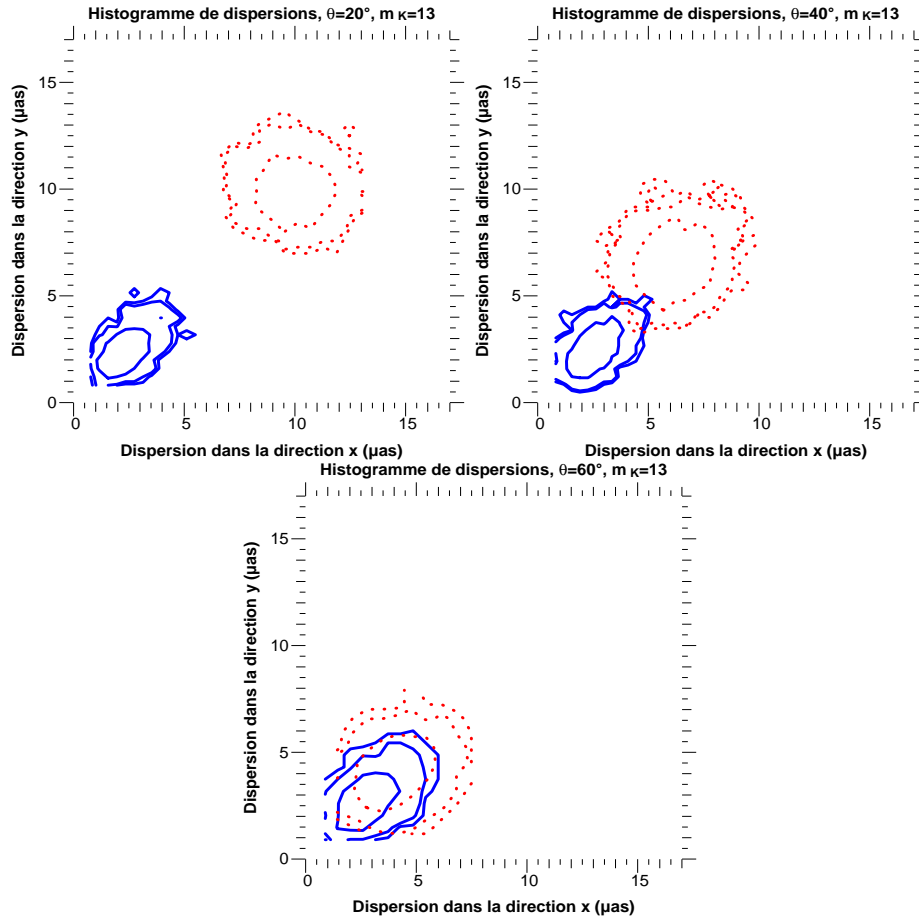


FIGURE 10.10 – Histogrammes bidimensionnels des dispersions  $\delta_x$  et  $\delta_y$  définies par l'équation 10.11 pour un point chaud autour d'un trou noir de spin 0,7 vu sous une inclinaison de  $\theta = 20^\circ$  (en haut à gauche),  $\theta = 40^\circ$  (en haut à droite), ou  $\theta = 60^\circ$  (en bas), en rotation circulaire à une distance  $\mathbf{r} = 7 \mathbf{M}$  (en pointillé rouge) ou bien fixe à une certaine position de cette orbite circulaire (en trait plein bleu). La magnitude maximale du sursaut vaut  $m_K = 13$ .

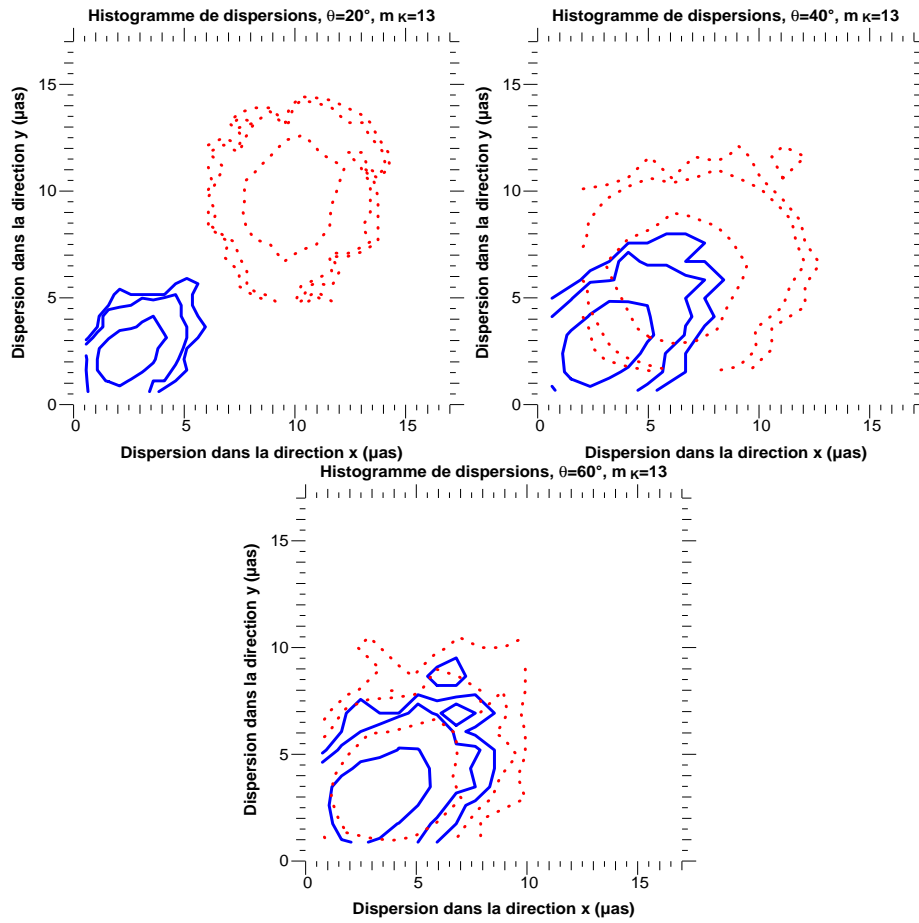


FIGURE 10.11 – Histogrammes bidimensionnels des dispersions  $\delta_x$  et  $\delta_y$  définies par l'équation 10.11 pour un point chaud autour d'un trou noir de spin 0,7 vu sous une inclinaison de  $\theta = 20^\circ$  (en haut à gauche),  $\theta = 40^\circ$  (en haut à droite), ou  $\theta = 60^\circ$  (en bas), en rotation circulaire à une distance  $r = 5,5 M$  (en pointillé rouge) ou bien fixe à une certaine position de cette orbite circulaire (en trait plein bleu). La magnitude maximale du sursaut vaut  $m_K = 13$ .

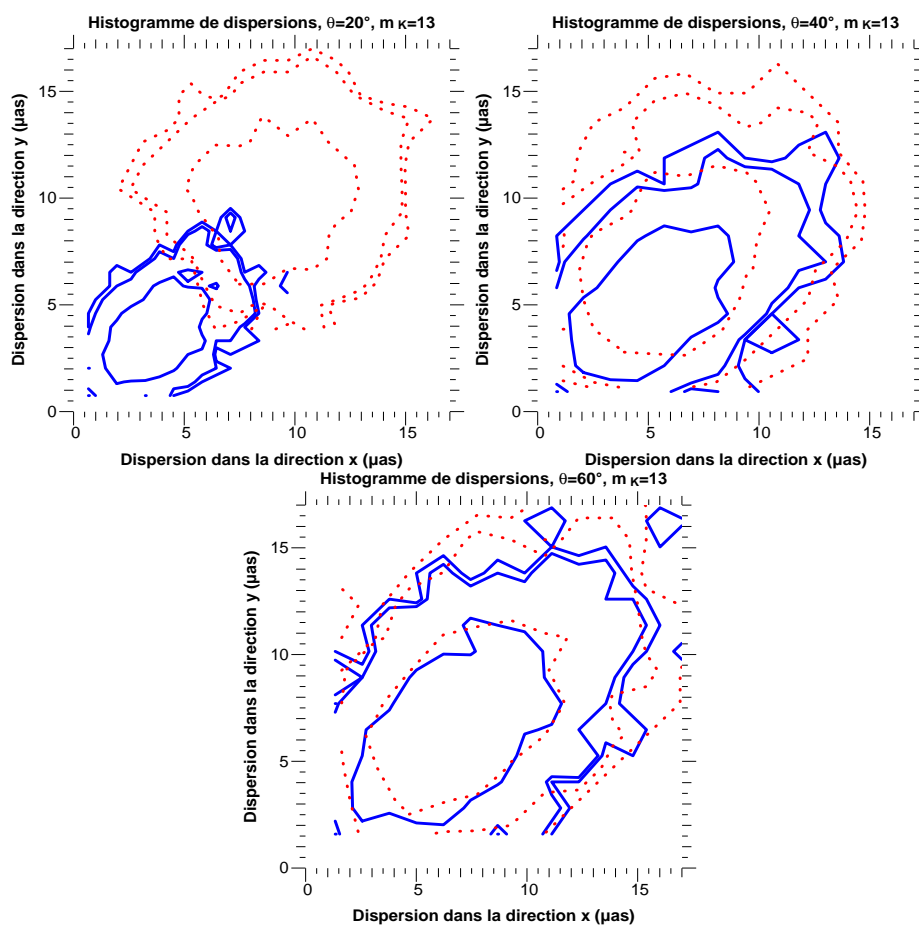


FIGURE 10.12 – Histogrammes bidimensionnels des dispersions  $\delta_x$  et  $\delta_y$  définies par l'équation 10.11 pour un point chaud autour d'un trou noir de spin 0,7 vu sous une inclinaison de  $\theta = 20^\circ$  (en haut à gauche),  $\theta = 40^\circ$  (en haut à droite), ou  $\theta = 60^\circ$  (en bas), en rotation circulaire à une distance  $r = 4M$  (en pointillé rouge) ou bien fixe à une certaine position de cette orbite circulaire (en trait plein bleu). La magnitude maximale du sursaut vaut  $m_K = 13$ .

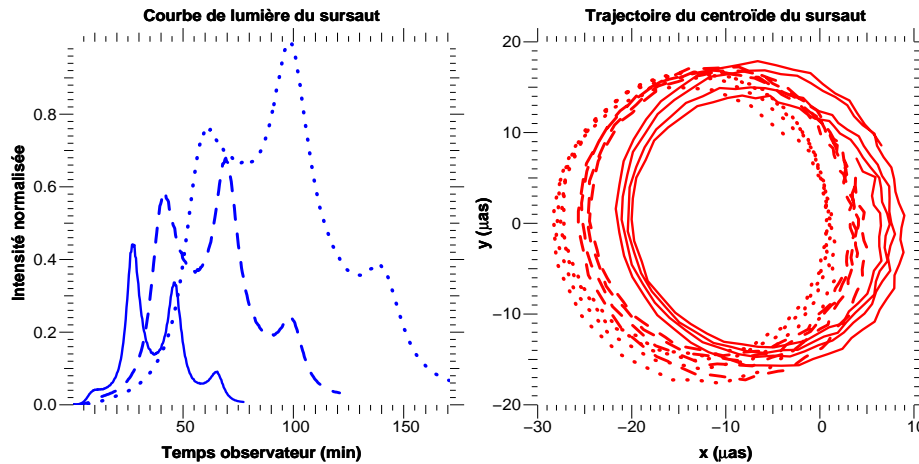


FIGURE 10.13 – Comparaison des courbes de lumière et des trajectoires du point chaud en rotation autour d'un trou noir de spin 0,7, vu sous une inclinaison de  $20^\circ$ , et pour un rayon d'orbite de  $4M$  (en trait plein),  $5,5M$  (tirets) ou  $7M$  (pointillés).

plus forte. Cette dépendance de la taille de l'orbite avec l'inclinaison est fonction de l'effet de *beaming*, qui est plus intense à grande inclinaison.

Les histogrammes correspondant aux points chauds fixes sont, eux, centrés sur des valeurs différentes suivant la valeur du rayon, quelque soit l'inclinaison. Cet effet est dû au nombre moins grand de points d'observation disponibles pour de petits rayons, la période étant plus faible pour un plus petit rayon. De plus, l'effet de *beaming* étant plus intense à petit rayon, la courbe de lumière est d'autant plus piquée que le rayon est petit (voir l'encart de gauche de la Fig. 10.13 par exemple). Il en résulte un moins grand nombre de points d'observation de magnitude brillante. Ces deux effets cumulés se traduisent par un décalage du centre de l'histogramme vers les plus grandes valeurs de dispersion à petit rayon.

Que ce soit pour les histogrammes correspondant aux points chauds fixes ou mobiles, l'étalement plus important des histogrammes à petit rayon s'explique par les mêmes effets : le moins grand nombre de points d'observation disponibles entraîne une distribution moins piquée de valeurs de dispersions.

### Contrainte sur le mouvement de la source et l'inclinaison

Considérons une nuit d'observation de GRAVITY au cours de laquelle un sursaut est observé. Une courbe de lumière est mesurée, qui permet de déterminer la période de rotation du point chaud. Au vu de l'encart du bas de la Fig. 10.2, on peut déduire une estimation du rayon de l'orbite, qui permet de déterminer dans lequel des trois cas illustrés dans les Figs. 10.10 à 10.12 on se trouve. Bien entendu, il sera possible de raffiner cette étude en prenant un échantillonnage plus fin en rayon, les trois valeurs choisies ici dans chacune des trois Figs. 10.10 à 10.12 permettent d'illustrer la méthode que l'on pourra suivre avec une précision plus grande lorsque les données de GRAVITY seront disponibles.



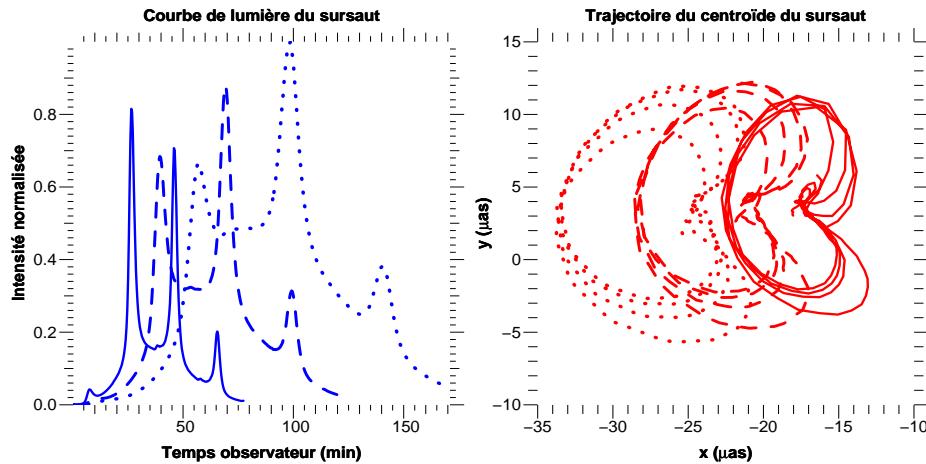


FIGURE 10.14 – Comparaison des courbes de lumière et des trajectoires du point chaud en rotation autour d’un trou noir de spin 0,7, vu sous une inclinaison de  $60^\circ$ , et pour un rayon d’orbite de  $4M$  (en trait plein),  $5,5M$  (tirets) ou  $7M$  (pointillés).

A ce stade, tout dépend de la valeur du rayon obtenu. Supposons que l’on soit dans un cas favorable et que le rayon soit proche du rayon maximal  $r = 7M$ , de sorte que l’on se trouve dans le cas illustré par la Fig. 10.10. Supposons également que la dispersion des positions retrouvées soit de  $8\mu\text{as}$ . La Fig. 10.15 montre qu’on peut en déduire immédiatement une contrainte sur l’inclinaison du trou noir : les valeurs d’inclinaison  $< 20^\circ$  et  $> 60^\circ$  sont exclues. Encore une fois, cette contrainte pourra être facilement raffinée en réalisant des simulations pour d’autres valeurs de l’inclinaison. Par ailleurs, l’examen de la Fig. 10.10 indique également que cette valeur de dispersion est incompatible avec une source fixe. On a donc deux informations : une contrainte sur l’inclinaison et une contrainte sur le mouvement de la source. Si la dispersion obtenue est moins grande, par exemple  $4\mu\text{as}$ , on perd la possibilité de contraindre le mouvement de la source puisque cette valeur est compatible à  $1\sigma$  avec les distributions correspondant au point chaud fixe et mobile pour une inclinaison de  $60^\circ$ . Si on fait l’hypothèse que le modèle du point chaud est valide, on garde une contrainte sur l’inclinaison, puisque cette valeur de  $4\mu\text{as}$  n’est pas compatible avec une inclinaison  $\lesssim 40^\circ$ .

Ainsi, quelle que soit la valeur de la dispersion obtenue, on peut obtenir de l’information sur l’inclinaison du trou noir, et si la dispersion est suffisamment grande, on peut déduire également de l’information sur le mouvement de la source.

Rappelons que cette analyse fait l’hypothèse d’un sursaut à grande distance du trou noir ( $r \approx 7M$ ), ce qui correspond à une période proche de 40 min (voir l’encart du bas de la Fig. 10.2), ordre de grandeur qui a déjà été observé (voir le Tab. 10.1). L’hypothèse très forte qui demeure est celle faite sur la magnitude la plus brillante du sursaut, supposée égale à  $m_K = 13$ .

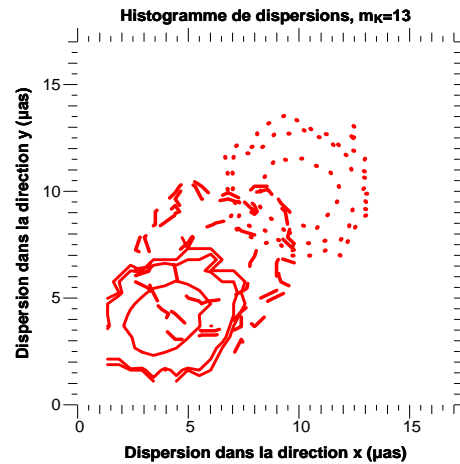


FIGURE 10.15 – Histogrammes bidimensionnels des dispersions  $\delta_x$  et  $\delta_y$  définies par l'équation 10.11 pour un point chaud en rotation à  $r = 7 M$  autour d'un trou noir de spin 0,7 vu sous une inclinaison de  $\theta = 20^\circ$  (pointillés),  $\theta = 40^\circ$  (tirets), ou  $\theta = 60^\circ$  (traits pleins). La magnitude maximale du sursaut vaut  $m_K = 13$ .

L'examen des Figs. 10.10 à 10.12 montre que plus le rayon diminue, plus il sera difficile d'obtenir des informations intéressantes, étant donné que les histogrammes se superposent de plus en plus.

### Vers des contraintes sur le spin ?

Dans tout ce qui précède, on a fait l'hypothèse d'une valeur unique fixée du spin du trou noir :  $a = 0,7$ . On peut se demander désormais si l'étude des données astrométriques recueillies par GRAVITY seront susceptibles d'apporter également une contrainte sur ce spin.

Les Figs. 10.16, représentant les courbes de lumière et les trajectoires d'un même point chaud pour deux spins différents et deux inclinaisons différentes montrent immédiatement l'extrême difficulté d'une telle mesure : l'impact du spin sur les observables est très limité.

L'accès le plus immédiat au spin requiert une connaissance indépendante de la période et du rayon orbital, afin de déduire le spin en utilisant la relation 10.2. Une mesure du spin nécessiterait à la fois une mesure suffisamment précise de la période sur la courbe de lumière, et une contrainte indépendante, suffisamment précise, sur le rayon. Les Figs. 10.13 et 10.14 illustrent le genre d'observables qui pourront être utilisées en vue d'une contrainte sur la valeur du rayon : il s'agira de la distance angulaire maximale au centre galactique et de l'amplification de la courbe de lumière (voir également à ce sujet la Fig. 5 de Hamaus *et al.* 2009).

Peut-on envisager avoir effectivement accès au spin en suivant cette voie ?

L'Eq. 10.2 entraîne :

$$a = \frac{c}{2\pi r_g} T - \left(\frac{r}{r_g}\right)^{3/2} \quad (10.12)$$

où on garde les notations de l'Eq. 10.2.

On en déduit l'incertitude sur le spin,  $\sigma_a$  en fonction des incertitudes<sup>7</sup> sur la période et le rayon  $\sigma_T$  et  $\sigma_r$

$$\sigma_a = \sqrt{\left(\frac{c}{2\pi r_g}\right)^2 \sigma_T^2 + \frac{9r}{4r_g^3} \sigma_r^2}. \quad (10.13)$$

Si l'on suppose une précision sur la période de l'ordre de la minute, un rayon de  $5,5 r_g$  et une incertitude sur le rayon de  $0,1 r_g$  (ce qui est très optimiste, au vu des Figs. 10.13 et 10.14), l'incertitude sur le spin est de  $\sigma_a \approx 0,6$ . Une telle mesure ne donnerait donc aucune contrainte valable sur le spin.

Il faudra donc envisager des méthodes plus complexes, si elles existent, afin d'espérer apporter une contrainte sur le spin de Sgr A\*.

Pour conclure ce chapitre, signalons une fois encore que tous les résultats qui précèdent sont basés sur un seul jeu de paramètres du point chaud (défini par l'Eq. 10.9). Une étude complète, faisant varier ces paramètres, serait utile pour affiner les résultats proposés dans les paragraphes qui précèdent. Une telle étude, assez lourde à mettre en place, est laissée pour l'avenir.

---

7. On utilise pour le cela la formule de propagation des incertitudes. Si  $X = f(Y, Z)$ ,  $\sigma_X = \sqrt{\partial_Y f^2 \sigma_Y^2 + \partial_Z f^2 \sigma_Z^2}$

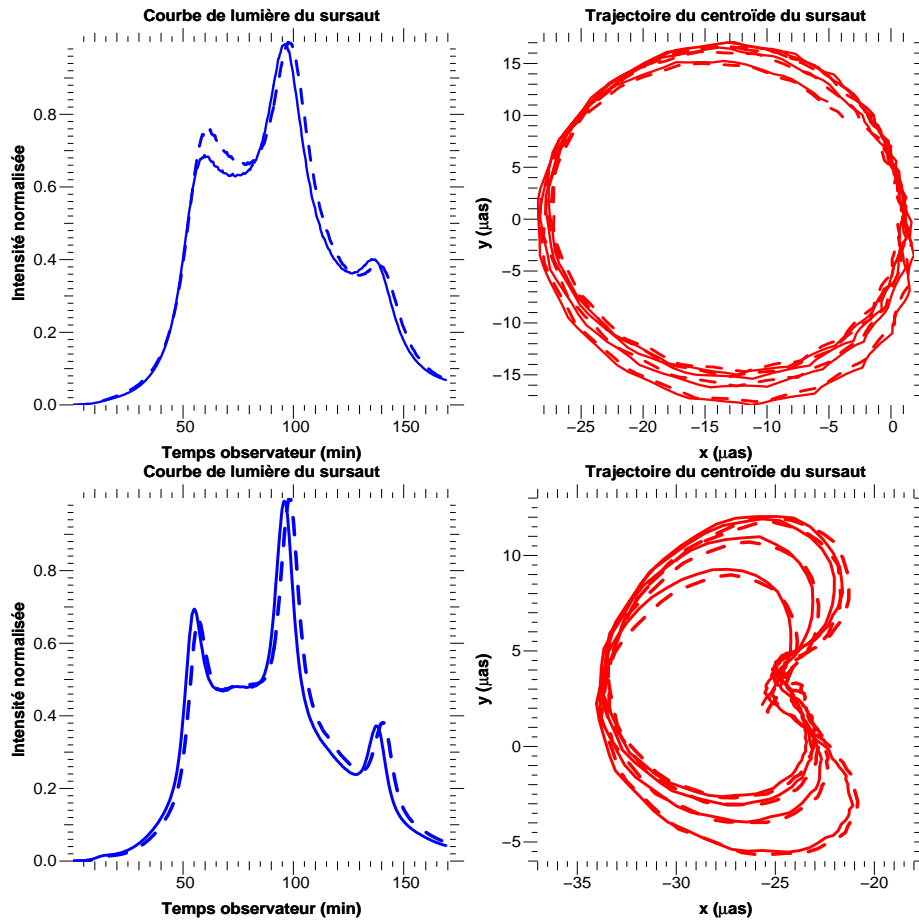


FIGURE 10.16 – Comparaison des courbes de lumière et des trajectoires d'un point chaud en orbite à  $r = 7M$  vu sous une inclinaison de  $20^\circ$  (en haut) ou  $60^\circ$  (en bas) autour d'un trou noir de spin 0,5 (traits pleins) ou 0,7 (tirets).



## Cinquième partie

# Perspectives d'application de GYOTO dans des métriques non analytiques



# Introduction

Comme on l'a vu dans la partie III, une spécificité du code de calcul GYOTO est sa capacité à prendre en compte des métriques numériques calculées dans le cadre du formalisme 3+1 de la relativité générale.

Cette dernière partie se propose de présenter les premiers développements des applications de GYOTO à de telles métriques. Il n'est pas question ici d'aboutir à des résultats définitifs et pleinement aboutis, mais plutôt de présenter les premiers résultats obtenus à ce stade afin de montrer la richesse des développements qui pourront être menés dans un futur proche en poursuivant ces voies de recherche.

Le chapitre 11 s'intéresse à implémenter dans le cadre du formalisme 3+1 et au sein de la bibliothèque LORENE du groupe de relativité numérique du LUTH un objet alternatif aux trous noirs de la relativité générale : le gravastar. Une implémentation effective de ce type d'objet n'a pas pu être obtenue : ce chapitre va donc, après une brève revue des différents modèles de gravastar, présenter l'état actuel du développement de l'objet gravastar au sein de LORENE, détailler les causes des difficultés rencontrées, et proposer des voies de développement pour le futur. L'obtention d'une métrique de gravastar en rotation serait extrêmement intéressante puisqu'elle permettrait de développer des simulations dans une métrique alternative à la métrique de Kerr, ce qui rendrait possible la comparaison entre les trous noirs de la relativité générale et l'une de leurs alternatives les plus crédibles (comme on l'a vu dans la section 3.2.2).

Le chapitre 12 propose une application de l'équation des géodésiques en formalisme 3+1 développée dans la section 8.2. Il s'agit de présenter une simulation dynamique d'une étoile à neutrons s'effondrant en trou noir, dont la métrique, non stationnaire, est calculée au cours du temps coordonnée par le code CoCoNuT qui utilise la bibliothèque LORENE.





# Chapitre 11

## Développement d'objets compacts alternatifs : le cas du gravastar

### Sommaire

---

<b>11.1 Le gravastar dans la littérature . . . . .</b>	<b>185</b>
11.1.1 Une approche intuitive du gravastar . . . . .	185
11.1.2 Les modèles de gravastar . . . . .	187
11.1.3 Vers des contraintes observationnelles? . . . . .	189
<b>11.2 Implémentation du gravastar dans LORENE . . . . .</b>	<b>190</b>
11.2.1 L'objet gravastar dans LORENE . . . . .	190
11.2.2 Difficultés rencontrées et orientations de travail futur . . . . .	193

---

## 11.1 Le gravastar dans la littérature

### 11.1.1 Une approche intuitive du gravastar

#### Construire un espace-temps de gravastar en symétrie sphérique

Cette section se propose de justifier de façon très intuitive le modèle du gravastar, en utilisant des arguments simples issus de la relativité générale.

Comme on l'a déjà présenté dans la section 3.2.2, le modèle du gravastar a été développé en particulier afin de proposer un objet dont la compacité puisse être de l'ordre de celle d'un trou noir mais sans posséder d'horizon des événements.

Pour simplifier les choses, considérons un espace-temps stationnaire à symétrie sphérique. Le théorème de Birkhoff (voir la section 1.1.2) impose la métrique extérieure à l'objet : ce sera celle de Schwarzschild.

Par ailleurs, afin qu'un horizon des événements ne se forme pas, il est clair qu'il faudra "couper" la partie de l'espace-temps pour laquelle  $r \leq 2M$ , puisqu'on a vu (voir la

section 1.1.2) que l'horizon des événements se formait en  $r = 2M$  dans la métrique de Schwarzschild.

Il faut donc déterminer une nouvelle métrique qui couvrira la partie de l'espacetemps  $0 \leq r \leq R$ , où  $R \gtrsim 2M$ . Afin de prévenir la formation d'un horizon des événements en  $r = 2M$ , il paraît raisonnable de s'intéresser à un espacetemps interne qui possède une forme d'énergie conduisant à un comportement inflationniste, qui permettra de lutter contre l'effondrement de l'espacetemps externe. Une telle forme d'énergie est bien connue en cosmologie : c'est l'énergie noire qui est responsable de l'accélération de l'expansion de l'univers (Riess *et al.* 1998). Cette énergie peut être modélisée par une constante cosmologique. Il paraît donc naturel d'utiliser pour la partie interne de l'espacetemps la métrique de de Sitter, qui est la solution aux équations d'Einstein maximale-ment symétrique de courbure positive, et dotée d'une constante cosmologique directement proportionnelle à cette courbure.

On conçoit donc que les modèles de gravastar qui vont suivre soient essentiellement des espacetemps présentant deux régions : une région externe, vide, où la métrique est celle de Schwarzschild, et une région interne, également vide, mais pourvue d'une constante cosmologique non nulle, où la métrique est celle de de Sitter. La transition entre ces deux régions étant définie grâce aux conditions de jonction d'Israel (Israel 1966, 1967) qui définissent le raccord entre deux métriques au niveau d'une hypersurface.

### Le cœur du gravastar : gravitation répulsive

On veut démontrer dans cette section ce qui a été intuitivement introduit dans la section précédente : la région interne du gravastar, constituée d'un espacetemps de de Sitter, agit répulsivement sur la matière et s'oppose ainsi à l'effondrement de la région externe.

La métrique de de Sitter en coordonnées statiques  $(t, r, \theta, \varphi)$  s'écrit (voir par exemple Gourgoulhon 2010c) :

$$ds^2 = - (1 - b^2 r^2) dt^2 + (1 - b^2 r^2)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (11.1)$$

Pour faire le lien avec ce qui précède, on peut exprimer la constante  $b$  en fonction de la densité d'énergie du vide régnant dans cette région :

$$b^2 = \frac{8\pi}{3} \rho. \quad (11.2)$$

On rappelle que la densité d'énergie du vide est elle-même directement reliée à la valeur de la constante cosmologique  $\Lambda$  de l'espacetemps de de Sitter selon (voir par exemple Carroll 2008) :

$$\rho = \frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (11.3)$$

On s'intéresse à une particule massive libre de se mouvoir radialement dans cette métrique. Sa 4-vitesse s'écrit donc ( $\dot{X}$  représentant la dérivée de  $X$  par rapport au temps propre de la particule) :

$$\mathbf{u} = (\dot{t}, \dot{r}, 0, 0) \quad (11.4)$$

et se normalise selon :

$$-(1 - b^2 r^2) \dot{t}^2 + \frac{1}{1 - b^2 r^2} \dot{r}^2 = -1. \quad (11.5)$$

On suppose de plus qu'à une certaine date  $t_0$  on a :

$$\dot{r}(t_0) \geq 0. \quad (11.6)$$

L'équation du mouvement de la particule est donnée par l'équation des géodésiques :

$$\ddot{r} + \Gamma_{tt}^r \dot{t}^2 + \Gamma_{rr}^r \dot{r}^2 + 2\Gamma_{tr}^r \dot{t} \dot{r} = 0. \quad (11.7)$$

Les symboles de Christoffel se calculent aisément grâce à la métrique (11.1) et à ses dérivées. En utilisant la relation de normalisation (11.5), l'équation (11.7) se simplifie en :

$$\ddot{r} - b^2 r = 0. \quad (11.8)$$

Cette équation différentielle s'intègre immédiatement :

$$r(t) = \mathcal{A} e^{bt} + \mathcal{B} e^{-bt} \quad (11.9)$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont deux constantes.

Supposons que  $\mathcal{A}$  soit nulle. On en déduit que  $\mathcal{B}$  doit être strictement positive (la coordonnée  $r$  devant rester positive). La dérivée  $\dot{r}$  serait alors strictement négative ce qui est en contradiction avec l'hypothèse 11.6. La constante  $\mathcal{A}$  est alors non nulle, et on obtient un comportement exponentiellement divergent pour la coordonnée radiale : on obtient effectivement le comportement répulsif annoncé.

### 11.1.2 Les modèles de gravastar

La présente section recense les modèles de gravastars qui ont été développés depuis l'article pionnier de Mazur & Mottola (2001).

#### Le modèle initial MM01

Le premier modèle de gravastar a été proposé par Mazur & Mottola (2001). On le nommera désormais MM01. Il a déjà été présenté dans la section 3.2.2 et on va ici se contenter de rappeler ses traits fondamentaux.

Le modèle MM01 décrit un objet à symétrie sphérique constitué d'un cœur composé de vide ayant une équation d'état d'énergie noire  $p = -\rho = cst$  et dont la métrique est celle de de Sitter qu'on a rappelée plus haut.

L'extérieur de l'objet est constitué du vide de Schwarzschild. Ces deux vides sont séparés par une croûte extrêmement fine (de l'ordre de la longueur de Planck) composée

d'un fluide parfait d'équation d'état extrême  $p = \rho$ . Cette croûte est séparée des vides interne et externe par deux enveloppes infiniment minces, au niveau desquelles les grandeurs physiques subissent une discontinuité.

Rappelons que l'intérêt de cette structure est d'être extrêmement compacte (très proche d'un trou noir), sans horizon des événements et sans singularité centrale.

### **Le modèle de Chapline (2003)**

Chapline (2003) se base sur une analogie entre gravitation et matière condensée pour proposer un modèle similaire au gravastar (de façon indépendante de Mazur & Mottola 2001, qui ne sont pas cités).

Cet auteur montre que le fait que le facteur de décalage vers le rouge gravitationnel diverge à l'horizon en métrique de Schwarzschild<sup>1</sup> peut être résolu en considérant une transition de phase quantique au niveau de l'horizon, la métrique interne étant alors celle de de Sitter.

### **Le modèle de Visser & Wiltshire (2004)**

Visser & Wiltshire (2004) simplifient le modèle initial MM01 en ne considérant plus de croûte mince : leur modèle n'a plus que deux zones, le cœur d'équation d'état  $p = -\rho$  et l'extérieur rempli de vide de Schwarzschild, séparées par une enveloppe infiniment mince située à un rayon légèrement supérieur au rayon de l'horizon des événements d'un trou noir de masse correspondante, et au niveau de laquelle les quantités physiques subissent une discontinuité.

L'enveloppe infiniment mince est décrite par une densité d'énergie surfacique  $\sigma$  et une tension de surface  $\theta$  qui sont ajustées de façon à permettre la transition entre les métriques des deux espaces intérieur et extérieur. Visser & Wiltshire (2004) étudient la stabilité de cette structure en permettant à l'enveloppe de se mouvoir radialement.

Ils concluent que certaines équations d'état (de la forme  $\sigma(\theta)$ ) permettent d'obtenir une structure stable.

Ce modèle a été généralisé par Carter (2005), pour des gravastars chargés, et par Gáspár & Rácz (2010) qui considèrent la stabilité du modèle lors de l'accrétion d'une enveloppe de poussière.

### **Le modèle de Cattoen *et al.* (2005)**

Cattoen *et al.* (2005) développent un modèle de gravastar particulièrement intéressant en ce sens qu'il permet de ne plus avoir de discontinuité de pression ou de densité d'énergie au niveau de l'interface entre le cœur et l'extérieur : les enveloppes infiniment minces placées de part et d'autre de la croûte dans le modèle MM01 ne sont plus utilisées ici, ce qui est satisfaisant étant donné le caractère non physique de telles distributions limites.

---

1. Ce qui rend cette description de la gravitation incompatible avec la théorie quantique (Chapline 2003).

Cattoen *et al.* (2005) établissent que, pour éviter d'avoir recours à des discontinuités, le fluide constituant le gravastar (la croûte comme le cœur) ne peut pas être parfait, et doit posséder une pression anisotrope : la pression radiale  $p_r$  est différente de la pression tangentielle  $p_t$  à l'intérieur du gravastar. Les équations d'état reliant les pressions à la densité d'énergie n'est plus aussi simple que celle du modèle initial MM01. Ces équations d'état (et les diverses façon de les définir) sont étudiées par Cattoen *et al.* (2005).

Remarquons que, bien que ce nouveau modèle de gravastar permette un profil de pression continu, l'évolution de la pression radiale avec le rayon est très contre-intuitif, comme l'illustre la Fig. 1 de Cattoen *et al.* (2005).

Signalons l'étude de DeBenedictis *et al.* (2006) qui prolonge l'analyse de ce modèle de gravastar à pression anisotrope.

### Le modèle de Lobo (2006)

Lobo (2006) étudie des modèles de gravastar à partir des modèles antécédents développés par Visser & Wiltshire (2004) et Cattoen *et al.* (2005). La spécificité de Lobo (2006) est de considérer une équation d'état du cœur qui s'exprime selon  $p_r = \omega \rho$ ,  $\rho$  étant la densité d'énergie dans le cœur et  $\omega < -1/3$  de façon à obtenir une équation d'état de type énergie noire.

La stabilité de certains gravastars ainsi définis, lorsqu'ils sont soumis à des perturbations radiales de l'interface entre le cœur et l'extérieur, est démontrée.

Signalons l'étude de Bilic *et al.* (2006) portant sur un modèle d'équation d'état  $\omega < -1$ .

### Vers un gravastar en rotation : Chirenti & Rezzolla (2008)

Signalons pour finir cette revue des modèles de gravastar le récent modèle de Chirenti & Rezzolla (2008) décrivant des gravastars en rotation lente. Ce modèle a été développé afin d'étudier la stabilité des gravastars à l'instabilité de l'ergorégion décrite par Cardoso *et al.* (2008).

Un modèle de gravastar magnétisé en rotation lente a également été développé par Turimov *et al.* (2009).

Cependant, il est à noter qu'aucun modèle de gravastar en symétrie axiale (c'est-à-dire, admettant la rotation rapide) n'est disponible à l'heure actuelle.

### 11.1.3 Vers des contraintes observationnelles ?

Cette section recense les différentes études qui ont été consacrées à l'apport de contraintes observationnelles aux modèles de gravastars.

#### Broderick & Narayan (2007) : contrainte sur le modèle de Chapline (2003)

Broderick & Narayan (2007) expriment la température de surface d'un gravastar décrit par le modèle de Chapline (2003) en fonction du paramètre  $\xi = l/l_P$  caractérisant la

longueur (en unité de longueur de Planck) à partir de laquelle ce modèle prédit l'échec de la relativité générale classique à décrire l'espacetemps.

En utilisant les données observationnelles de quelques candidats trous noirs, Broderick & Narayan (2007) déduisent une contrainte forte sur ce paramètre :  $\xi \lesssim 1$ .

### **Chirenti & Rezzolla (2007) : fréquences propres de vibration**

Chirenti & Rezzolla (2007) se basent sur un modèle de gravastar proche de celui développé par Cattoen *et al.* (2005). Ces auteurs étudient la stabilité de la structure à des perturbations radiales de la métrique et calculent les fréquences des modes quasi-normaux de vibrations associés à cette perturbation (sur ce sujet, voir également Pani *et al.* 2009). Ces fréquences sont trouvées nettement différentes de celles associées aux modes quasi-normaux d'un trou noir de Schwarzschild.

Ces auteurs en concluent que la mesure de ces fréquences de vibrations, accessibles si l'objet compact émet des ondes gravitationnelles, est un moyen de distinguer un gravastar d'un trou noir.

### **Harko *et al.* (2009) : un disque d'accrétion autour d'un gravastar**

Harko *et al.* (2009) calculent, dans le cadre d'un modèle de gravastar en rotation lente, le flux émis par un disque mince d'accrétion se trouvant autour de l'objet compact. Ces calculs permettent de comparer les spectres émis lorsque l'objet central est un gravastar ou un trou noir de Kerr.

## **11.2 Vers une implémentation du gravastar dans la bibliothèque LORENE**

### **11.2.1 L'objet gravastar dans LORENE**

#### **Modèle de gravastar utilisé**

Je me suis tout d'abord orienté vers un modèle proche de celui de Cattoen *et al.* (2005) en considérant donc des pressions anisotropes à l'intérieur du gravastar.

J'ai utilisé le code LORENE/nrotstar en tentant de le modifier pour lui permettre de prendre en compte les spécificités d'un gravastar. Ce code résout les équations d'Einstein pour une étoile relativiste en rotation, en utilisant l'existence d'une intégrale première, donnée dans l'Eq. 3.94 de Gourgoulhon (2010a), qui permet de calculer à chaque pas d'itération la densité d'énergie et la pression du fluide qui constituent les sources des équations d'Einstein.

L'idée est alors de suivre la démarche de Gourgoulhon (2010a) en exhibant une intégrale première applicable au cas du gravastar.

La grande différence entre le cas qui nous intéresse ici et celui envisagé dans le chapitre 3 de Gourgoulhon (2010a) est que l'on ne va plus faire l'hypothèse d'un fluide parfait, mais

suivre Cattoen *et al.* (2005) en utilisant des pressions anisotropes. De plus, on n'a plus affaire à de la matière baryonique standard dans le cœur du gravastar, ce qui interdit d'utiliser les relations thermodynamiques standards telle que l'Eq. 3.73 de Gourgoulhon (2010a) qui fait appel au nombre baryonique.

Cette approche n'a pas abouti, une intégrale première n'ayant pas été obtenue. Cependant, ce travail méritera d'être poursuivi lors de travaux futurs (voir la section 11.2.2).

J'ai donc utilisé le modèle initial MM01, constitué de trois zones (le cœur, la croûte et l'extérieur) et de deux enveloppes infiniment minces aux frontières entre ces zones. L'intérêt de ce modèle, s'il est physiquement moins satisfaisant que celui de Cattoen *et al.* (2005), est que l'on fait partout l'hypothèse d'un fluide parfait, ce qui va permettre de définir facilement des quantités conservées à partir de Gourgoulhon (2010a).

Le tenseur énergie-impulsion s'exprime dans tout l'espace-temps selon :

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (11.10)$$

où  $\mathbf{u}$  est la 4-vitesse du fluide considéré.

On a donc le modèle suivant :

- Le cœur :  $0 \leq r \leq r_1$ , équation d'état  $p = -\rho$ ,  $T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu}$ ,
- La croûte :  $r_1 \leq r \leq r_2$ , équation d'état  $p = \rho$ ,
- L'extérieur :  $r \geq r_2$ , avec  $p = \rho = 0$ .

LORENE/nrotstar traite séparément les différentes zones du modèle. On va donc déterminer pour chaque zone une intégrale première.

La cas du cœur est immédiat :

$$\nabla^\mu T_{\alpha\mu} = 0 \Rightarrow \nabla_\alpha p = 0 \Rightarrow p = cst \quad (11.11)$$

la pression est donc elle même constante dans le cœur du gravastar.

A l'extérieur du gravastar, l'intégrale est encore plus triviale puisqu'on a toute simplement  $p = \rho = cst = 0$ .

Enfin, le cas de la croûte ne pose pas davantage de problème, puisqu'on a affaire à de la matière "standard"<sup>2</sup>, on peut utiliser l'intégrale première établie par l'Eq. 3.94 de Gourgoulhon (2010a).

## Tentative d'implémentation dans LORENE

Une nouvelle classe C++, *Gravastar*, a été développée dans la bibliothèque LORENE, qui dérive de la classe déjà existante *Star\_rot* permettant de calculer les métriques générées par des étoiles relativistes en rotation. L'objectif final étant de permettre le calcul de métriques de gravastars en rotation (pas uniquement en rotation lente).

Cependant, afin de se placer dans un cas initial simple, on a supposé que le gravastar ne tourne pas, et que l'espace-temps est à symétrie sphérique. L'idée est alors de développer

---

2. Même si elle est caractérisée par une équation d'état extrême rendant la vitesse du son égal à la vitesse de la lumière.



un code LORENE/gravastar, équivalent de LORENE/nrotstar pour calculer la métrique d'un gravastar.

Les équations d'état étant triviales dans le cœur et l'extérieur, on n'utilise les fonctions de la classe *Eos* (pour *equation of state*) de LORENE que pour la croûte du gravastar. On décide de modéliser cette croûte à partir d'une équation d'état polytropique dont les paramètres sont choisis de telle façon qu'ils imposent l'équation d'état requise :  $p = \rho$ . Plus précisément, une équation d'état polytropique s'écrit :

$$\begin{aligned} p(n) &= \kappa n^\gamma \\ \rho(n) &= \frac{\kappa}{\gamma - 1} n^\gamma + \mu_0 n \\ n(H) &= \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{m_0}{\kappa} \left( e^H - \frac{\mu_0}{m_0} \right) \right]^{1/(\gamma-1)} \end{aligned} \quad (11.12)$$

où  $n$  est le nombre baryonique,  $H = \ln(\mu/m_0)$  la log-enthalpie,  $\mu = d\rho/dn$  le potentiel chimique,  $\mu_0$  le potentiel chimique à pression nulle,  $m_0$  la masse des baryons considérés,  $\kappa$  le coefficient de pression et  $\gamma$  l'indice adiabatique.

En prenant  $\gamma = 2$  et  $\mu_0 = 0$ , on constate immédiatement qu'on obtient  $p = \rho$ .

Les grandeurs thermodynamiques sont donc toutes fonctions de la log-enthalpie, qui intervient elle-même directement dans la quantité conservée établie par l'Eq. 3.94 de Gourgoulhon (2010a). Cette loi de conservation permet donc de calculer  $H$  à chaque pas d'intégration, ce qui permet d'obtenir les valeurs actualisées de  $p$  et de  $\rho$ , puis de résoudre les équations d'Einstein.

La boucle de LORENE/gravastar prend fin lorsque la variation de  $H$  devient inférieure à un certain seuil entre deux pas successifs. Les conditions initiales du calcul reviennent essentiellement à spécifier le profil initial de  $H$  qui est représenté sur la Fig. 11.1, et à choisir la valeur de la densité d'énergie centrale, prise ici égale à 0,5 en unités naturelles.

LORENE/gravastar permet de calculer à chaque pas d'itération la valeur de l'expansion. On vérifie sur la Fig. 11.3, représentant l'expansion en fin d'itération, que cette quantité ne s'annule jamais à part au centre.

Les Figs. 11.2 et 11.4 représentent l'allure des profils de pression et de densité au début et à la fin du calcul. On constate que le modèle présente, comme on s'y attendait, des discontinuités brutales de ces deux quantités.

Cependant, bien que le calcul de LORENE/gravastar se termine (c'est-à-dire, bien que  $H$  converge vers une certaine valeur), le résultat obtenu ne peut pas être satisfaisant. En effet, LORENE/gravastar vérifie à la fin du calcul que l'identité du viriel relativiste (Gourgoulhon & Bonazzola 1994) est bien vérifiée par le modèle obtenu. Or ce n'est pas le cas pour le gravastar obtenu : la quantité définie par l'Eq. 44 de Gourgoulhon & Bonazzola (1994), qui devrait être nulle, est de l'ordre de 0,1 en fin d'itération.

Un modèle de gravastar satisfaisant l'identité du viriel n'a pas été obtenu. La section suivante analyse les causes probables de cet insuccès, et propose des pistes de développements futurs.

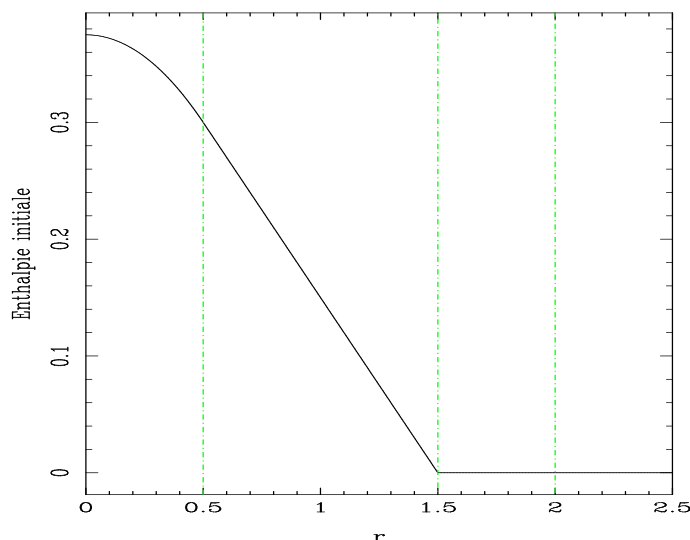


FIGURE 11.1 – Enthalpie initiale du gravastar. Dans cette figure comme dans les suivantes, les traits verticaux marquent les frontières entre les domaines : cœur - croûte - extérieur. L'extérieur du gravastar est lui-même séparé en deux zones, la dernière étant compactifié par un changement de variables  $r \rightarrow \frac{1}{r}$ .

### 11.2.2 Difficultés rencontrées et orientations de travail futur

Un point important à réaliser est que, contrairement aux apparences, le modèle de gravastar calculé par LORENE/gravastar n'est pas le même que celui de MM01.

En effet, LORENE/gravastar résout les équations d'Einstein sous la forme des Eqs. 3.14 à 3.17 de Gourgoulhon (2010a), qui sont des équations de Poisson. Ces équations sont résolues en imposant la continuité des coefficients métrique et de leurs dérivées aux interfaces entre les différentes régions de l'espacetemps. Or ceci implique que le tenseur de courbure extrinsèque ne présente aucune discontinuité, puisque ce tenseur s'exprime en fonction des dérivées premières de la métrique (voir les Eqs. 2.43 et 2.44 de Gourgoulhon 2010a).

Cependant, le modèle de MM01 fait appel à des discontinuités du tenseur de courbure extrinsèque, comme on le voit sur les Eqs. 20 et 21 de Mazur & Mottola (2004). Ces discontinuités se traduisent, via les conditions de jonction d'Israel, par l'existence d'une distribution surfacique d'énergie-impulsion, qui n'est pas présente dans le modèle calculé par LORENE/gravastar.

La raison profonde expliquant le résultat incorrect (puisque ne vérifiant pas le viriel) obtenu par LORENE/gravastar n'a pas été déterminée. Il est possible que l'identité de Bianchi soit violée au cours des calculs, car elle n'est pas formellement imposée dans le code.

Cependant, quelle que soit cette raison, la seule option qui permettrait d'obtenir un résultat satisfaisant en accord avec le modèle de MM01 serait de modifier la partie de LORENE qui gère la résolution des équations d'Einstein. Cette modification serait assez lourde, et n'aurait aucun autre intérêt que l'application au modèle MM01 du gravastar.

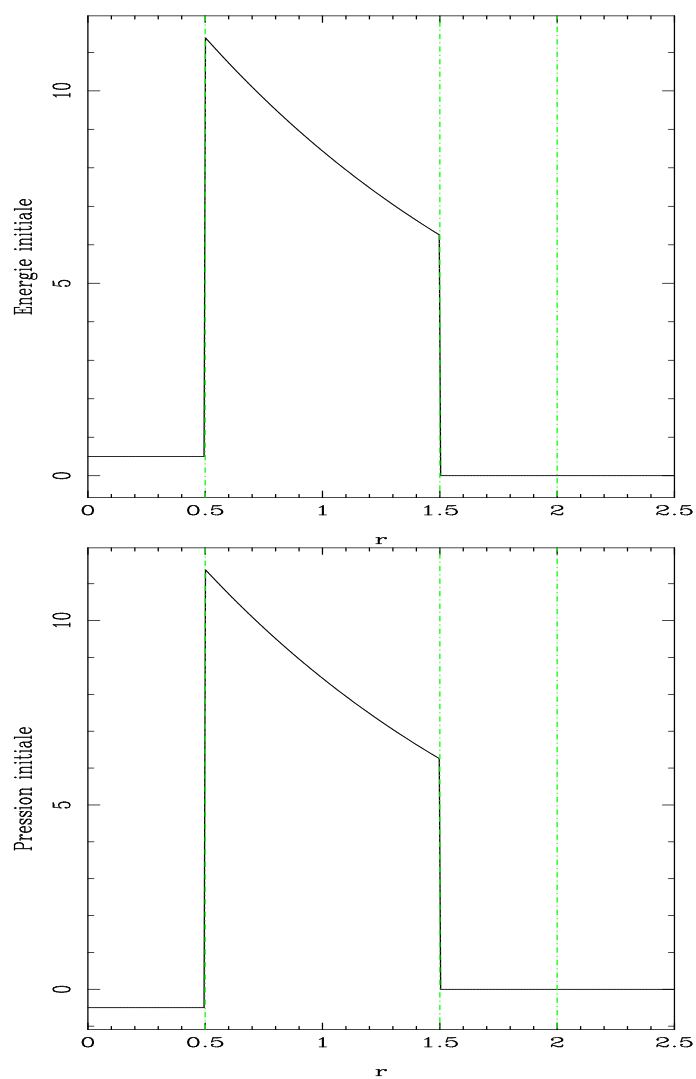


FIGURE 11.2 – Densité d'énergie et pression initiales du gravastar.

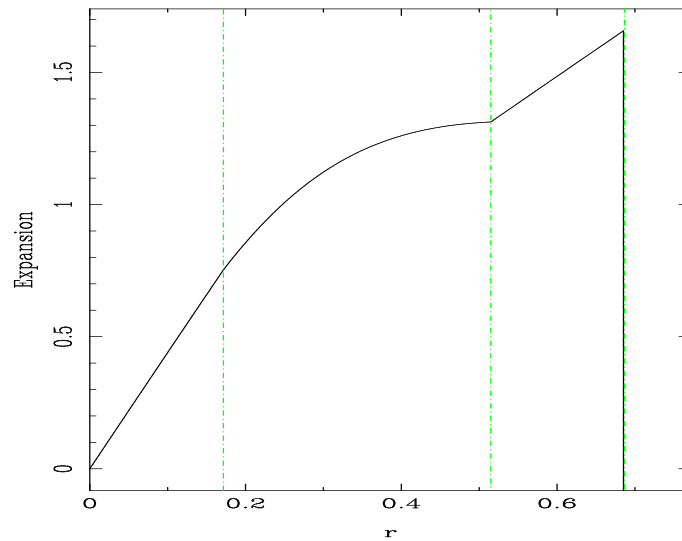


FIGURE 11.3 – Expansion du gravastar. On constate que cette grandeur ne s’annule jamais si ce n’est au centre : il n’y a donc pas de formation d’horizon des événements.

Étant donné que ce modèle n’est pas le plus physiquement réaliste pour décrire un gravastar (on a vu que le modèle de Cattoen *et al.* 2005, était plus satisfaisant), il sera préférable d’orienter les recherches futures dans une autre direction.

L’approche la plus prometteuse est de reconsidérer le modèle initialement envisagé de Cattoen *et al.* (2005). Dépourvu de surface infiniment mince du type de celles utilisées par MM01, ce modèle est à la fois physiquement plus satisfaisant (puisque la pression radiale est continue) et numériquement plus adapté à la bibliothèque LORENE (puisque’il sera correct, cette fois-ci, de considérer des coefficients métriques de classe  $C^1$ ).

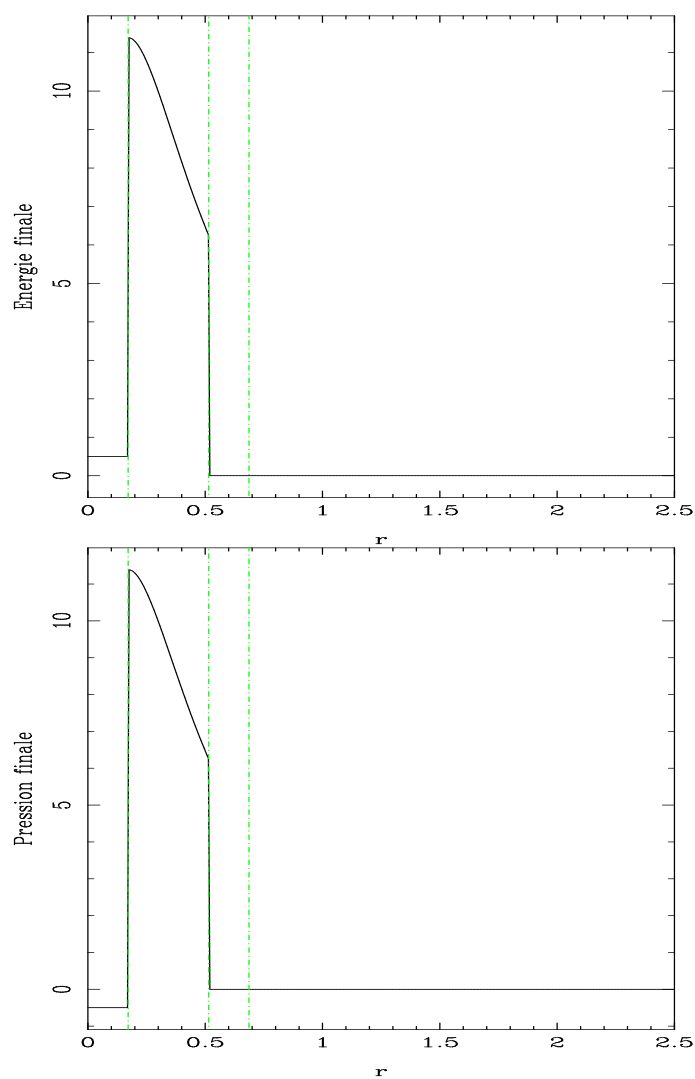


FIGURE 11.4 – Densité d'énergie et pression finales du gravastar.

# Chapitre 12

## Visualisation d'un espace-temps dynamique : effondrement d'une étoile à neutrons

### Sommaire

---

<b>12.1</b>	<b>Espace-temps dynamique</b>	<b>197</b>
<b>12.2</b>	<b>Calculs d'effondrement : le code CoCoNuT</b>	<b>198</b>
<b>12.3</b>	<b>Visualisation GYOTO</b>	<b>199</b>
12.3.1	Déroulement de l'intégration des photons	199
12.3.2	Visualisation de l'étoile en effondrement	200

---

### 12.1 Un exemple d'utilisation de l'équation des géodésiques en formalisme 3+1 : cas d'un espace-temps dynamique

On souhaite proposer dans ce chapitre un autre exemple d'utilisation de GYOTO dans des métriques non analytiques, après la tentative de visualisation d'espace-temps de gravastar détaillée dans le chapitre 11.

On a déjà présenté et illustré l'utilisation de l'équation des géodésiques en formalisme 3+1 dans la section 8.2. L'intérêt immédiat d'une telle équation est de permettre une intégration des géodésiques directement à partir des quantités 3+1 fournies par la métrique, sans avoir à reconstruire les quantités quadridimensionnelles nécessaires pour utiliser l'équation standard des géodésiques 8.9.

Cependant, cette équation montre tout son intérêt lorsqu'il s'agit d'intégrer des géodésiques dans un espace-temps dynamique, pour lequel les quantités 3+1 varient en fonction du temps. Si l'on veut alors utiliser l'équation standard des géodésiques, on aura à évaluer par différences finies des dérivées temporelles des coefficients de la 4-métrique intervenant

dans l'expression des symboles de Christoffel. Or, l'un des atouts de la bibliothèque numérique LORENE (que l'on souhaite utiliser pour calculer la métrique 3+1) est d'éviter le recours aux différences finies en utilisant des méthodes spectrales permettant d'obtenir une meilleure précision sur les quantités calculées (pour une discussion de la méthode des différences finies et des méthodes spectrales, voir par exemple Lehner 2001; Grandclément & Novak 2009).

Dans ce contexte, l'utilisation de l'équation des géodésiques 8.19, qui ne fait apparaître aucune dérivée temporelle, est préférable.

On va utiliser dans cette partie l'équation des géodésiques 8.19 afin de visualiser l'effondrement d'une étoile à neutrons en trou noir.

L'intérêt à long terme de ce genre de simulations pourrait être de modéliser les contreparties électromagnétiques de phénomènes gravitationnels en champ fort telles que les coalescences de systèmes binaires d'étoiles à neutrons ou de systèmes binaires étoile à neutrons - trou noir stellaire, systèmes qui pourraient être à l'origine des sursauts gammas dits *short-hard*. Pour une bibliographie de ce genre de phénomènes, on pourra se reporter à Bloom *et al.* (2009); Chassande-Mottin *et al.* (2011).

## 12.2 Calculs d'effondrement : le code CoCoNuT

Le calcul de l'effondrement de l'étoile à neutrons est effectué par le code CoCoNuT (Core Collapse with New Technology, voir Dimmelmeier *et al.* 2002a,b, 2005; Cordero-Carrión *et al.* 2009).

Ce code résout les équations d'Einstein en utilisant la bibliothèque LORENE (et donc les méthodes spectrales) ainsi que les équations de l'hydrodynamique relativiste pour le fluide constituant l'étoile (en utilisant la méthode des différences finies).

Une hypothèse forte est faite sur la métrique spatiale qui est supposée être conformément plate, c'est-à-dire que l'on a :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= -N^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt) (dx^j + \beta^j dt), \\ \gamma_{ij} &= \phi^4 \delta_{ij} \end{aligned} \quad (12.1)$$

où les grandeurs introduites ont le même sens que dans le chapitre 8,  $\phi$  étant une fonction scalaire positive et  $\delta_{ij}$  la métrique plate (c'est-à-dire le symbole de Kronecker en coordonnées cartésiennes).

La validité de cette hypothèse a été renforcée par de récents résultats numériques (voir la discussion à ce propos dans Dimmelmeier *et al.* 2005).

Le feuilletage choisi pour l'espacetemps est dit maximal : la trace du tenseur de courbure extrinsèque est nulle, ce qui a pour conséquence que les hypersurfaces  $\Sigma_t$  ont un volume maximal, d'où le nom du feuilletage (voirourgoulhon 2007). Une propriété très intéressante de ce feuilletage particulier, lorsqu'on a affaire à un effondrement en trou noir, est

que les hypersurfaces  $\Sigma_t$  ne rencontrent jamais la singularité centrale : elle “s’accumulent” à l’approche de la singularité (voir la Fig. 9.4 de Gourgoulhon 2007) de telle façon que le temps propre mesuré par un observateur eulérien séparant deux hypersurfaces tend vers 0 dans cette région.

Faisant tourner ce code en symétrie sphérique, on obtient une succession de valeurs des quantités 3+1 ( $\gamma_{ij}$ ,  $K_{ij}$ ,  $N$ ,  $\beta^i$ ) pour une série de valeurs du temps coordonnée couvrant les différentes étapes de l’effondrement de l’étoile à neutrons. Le stade final d’évolution n’est pas une métrique de trou noir de Kerr car pour des raisons techniques, il n’est pas possible de pousser le calcul jusqu’à l’apparition de la singularité centrale. Cependant, la simulation est menée au-delà de l’apparition de l’horizon des événements et de la disparition de l’étoile sous son horizon, ce qui est suffisant pour la visualisation.

Ces simulations m’ont été fournies par Jérôme Novak de l’équipe de relativité numérique du LUTH.

## 12.3 Visualisation GYOTO d’une étoile à neutrons en effondrement sphérique

### 12.3.1 Déroulement de l’intégration des photons

Afin d’intégrer l’équation des géodésiques 8.19, GYOTO doit être capable de calculer les quantités 3+1 pour n’importe quelle valeur du temps coordonnée  $t$ . Il va donc falloir interpoler et extrapoler les résultats fournis par CoCoNuT. L’extrapolation est immédiate : on considère que pour tous les temps antérieurs au début de l’effondrement, la métrique est stationnaire, égale à la métrique initiale de l’étoile à neutrons. De même, pour tous les temps supérieurs à la fin de l’effondrement, la métrique est stationnaire, égale à la métrique la plus évoluée calculée par CoCoNuT (ce qui constitue une approximation : il faudrait en toute rigueur raccorder la métrique ultime de CoCoNuT à une métrique de Kerr).

Pour chaque pas d’intégration, les quantités 3+1 sont calculées en utilisant une interpolation du troisième ordre.

L’équation des géodésiques 8.19, étant exprimée en 3+1, ne donne bien évidemment pas l’évolution de la dérivée du temps coordonnée en fonction du paramètre affine  $\lambda$  de la géodésique,  $\dot{t} = dt/d\lambda$ . Cependant, cette quantité est nécessaire pour permettre de calculer le facteur de décalage vers le rouge qui affecte le rayonnement. En effet, on a vu dans la section 7.2 que l’intensité mesurée par un observateur distant,  $I_{\nu_{\text{obs}}}$ , est reliée à l’intensité émise  $I_{\nu_{\text{em}}}$  selon :

$$I_{\nu_{\text{obs}}} = \left( \frac{\nu_{\text{obs}}}{\nu_{\text{em}}} \right)^3 I_{\nu_{\text{em}}} \quad (12.2)$$

où  $\nu_{\text{obs}}$  et  $\nu_{\text{em}}$  sont les fréquences observée et émise. La fréquence d’un photon de 4-impulsion  $\mathbf{p}$  émis par une particule de 4-vitesse  $\mathbf{u}$  s’exprime selon :

$$\nu_{\text{em}} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}. \quad (12.3)$$



Le 4-vecteur  $\mathbf{u}$  est fourni par CoCoNuT. Le 4-vecteur  $\mathbf{p}$  s'exprime quant à lui dans un système de coordonnées de type sphérique selon :

$$\mathbf{p} = \dot{t} (1, r', \theta', \varphi') \quad (12.4)$$

où le symbole prime désigne une dérivation par rapport au temps coordonnée  $t$ .

Les quantités  $r'$ ,  $\theta'$  et  $\varphi'$  sont calculées lors de la résolution de l'équation des géodésiques. Mais il n'y a aucun moyen direct de remonter à  $\dot{t}$  à partir des quantités 3+1.

Cependant, il est possible d'obtenir cette quantité en tenant compte de la symétrie de l'espacetemps. Les coefficients métriques étant indépendants de la coordonnée  $\varphi$ , on en déduit l'existence de la constante du mouvement :

$$p_\varphi = g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}, \quad (12.5)$$

où l'on a utilisé l'hypothèse de symétrie sphérique.

On en déduit alors :

$$\dot{t} = \frac{p_\varphi}{g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}}. \quad (12.6)$$

La quantité  $\dot{t}$  peut donc être calculée à chaque pas d'intégration, et en particulier au moment de l'impact avec l'étoile, permettant de calculer le facteur de décalage vers le rouge  $\nu_{\text{obs}}/\nu_{\text{em}}$ .

Les figures qui seront présentées dans la suite sont des cartes de la quantité  $g \equiv (\nu_{\text{obs}}/\nu_{\text{em}})^3$ . On suppose donc que l'intensité spécifique émise est constante et vaut 1 (voir l'Eq. 12.2). On n'a pas attribué de loi d'émission à l'étoile à neutrons en effondrement car, si l'émission d'une étoile à neutrons stable est typiquement celle d'un corps noir à  $10^6$  K (voir par exemple Burwitz *et al.* 2001), on ne peut supposer raisonnablement que cette émission soit conservée au cours de l'effondrement. Les images qui seront présentées dans la suite sont donc des représentations des effets de décalage vers le rouge affectant l'étoile.

### 12.3.2 Visualisation de l'étoile en effondrement

Afin de visualiser l'étoile à neutrons en effondrement, on place un observateur à  $r = 100 M$ , où  $M$  est une masse fixant l'échelle de temps et de distance, que l'on choisit de l'ordre de celle de l'étoile à neutrons initiale.

On choisit le temps coordonnée de début de l'effondrement, fixé à :  $t_{\text{eff}} = 720 M$ .

On peut alors réaliser des images de l'étoile à neutrons en faisant varier le temps d'observation,  $t_{\text{obs}}$ , de telle façon que les photons, intégrés en remontant le temps coordonnée, arrivent au niveau de la source à différents stades de son évolution.

La Fig. 12.1 représente les images obtenues à différents temps coordonnée d'observation<sup>1</sup>. Ces images, de  $200 \times 200$  pixels, ont nécessité un temps de calcul d'environ 30 h,

---

1. On peut s'étonner du fait que le rayon de l'étoile ne varie pas significativement sur les différentes images représentées. Ceci est dû au fait que l'horizon apparaît avant que l'étoile n'ait atteint des valeurs

à comparer au temps de calcul nécessaire pour une image  $1000 \times 1000$  pixels d'un disque d'accrétion mince en métrique de Kerr, qui est d'environ 15 min... Cette différence impressionnante est due aux multiples appels aux objets LORENE qui sont nécessaires pour mener à bien les nombreuses interpolations rencontrées au cours de l'intégration.

Pour chaque image, on donne la valeur maximale de la valeur absolue du carré de la norme des 4-vecteurs tangents aux photons calculés lors de l'intégration. On remarque que plus les photons s'approchent de l'étoile à un stade avancé de son évolution (c'est-à-dire, plus on est proche de la formation d'un horizon), plus le carré de la norme s'éloigne de sa valeur initiale (qui est 0). C'est pour cette raison qu'on ne représentera pas ici d'image obtenue après la formation de l'horizon, à une date telle qu'une partie de l'étoile est déjà englobée par l'horizon, car la norme n'est plus conservée dans ces cas-là. Afin de permettre une meilleure conservation de cette quantité, un algorithme est en cours d'implémentation, qui modifie légèrement les coordonnées fournies par l'intégrateur afin de minimiser la valeur absolue de la norme au carré. On a également réalisé des simulations en raffinant l'échantillonnage des tranches temporelles fournies par CoCoNuT, sans parvenir à améliorer de façon significative la conservation de la norme.

Si l'on représente l'image de l'étoile au temps d'observation  $t_{\text{obs}} = 820 M$  en modifiant les paramètres d'affichage (voir la Fig. 12.2), on constate que l'image apparaît bruitée : ceci est dû à l'intégration de la coordonnée  $\dot{t}$  via l'utilisation de la relation 12.6. En effet, si l'on calcule la même image mais sans plus dériver  $\dot{t}$ , en le laissant simplement constant à sa valeur initiale (c'est-à-dire à sa valeur au niveau de l'écran de l'observateur) sur toute la carte, on obtient la Fig. 12.3, qui ne présente plus aucune trace de bruit numérique. L'amélioration de la dérivation de la coordonnée  $\dot{t}$  en vue de diminuer ce bruit numérique sera étudiée dans l'avenir.

La Fig. 12.3 montre que le facteur de décalage vers le rouge  $g$  augmente depuis le centre vers la surface de l'étoile, ce qui est attendu en terme d'effet Doppler classique étant donné qu'au niveau du centre de l'image, la surface de l'étoile s'éloigne radialement de l'observateur, maximisant le produit scalaire du 4-vecteur tangent au photon  $\mathbf{p}$  et de la 4-vitesse de l'émetteur  $\mathbf{u}$ , et minimisant donc le facteur  $g$ .

Ces différents résultats visent à donner un premier exemple d'une utilisation de GYOTO dans des métriques non-analytiques ayant un intérêt astrophysique. On a vu que l'utilisation de l'équation des géodésiques permettait à GYOTO de calculer des images d'étoiles à neutrons en effondrement en symétrie sphérique de façon satisfaisante à condition de se restreindre à des stades de l'étoile suffisamment peu évolués.

Deux études seront à mener dans un futur proche afin d'obtenir des résultats plus fermes. Il s'agira d'abord d'améliorer la conservation de la norme du vecteur tangent au photon afin de permettre de poursuivre l'intégration jusqu'à des stades évolués de l'étoile (y compris après l'apparition de l'horizon des événements). Il faudra également améliorer

---

de rayon très inférieures à son rayon initial. Les simulations présentées ici sont antérieures à l'apparition de l'horizon.

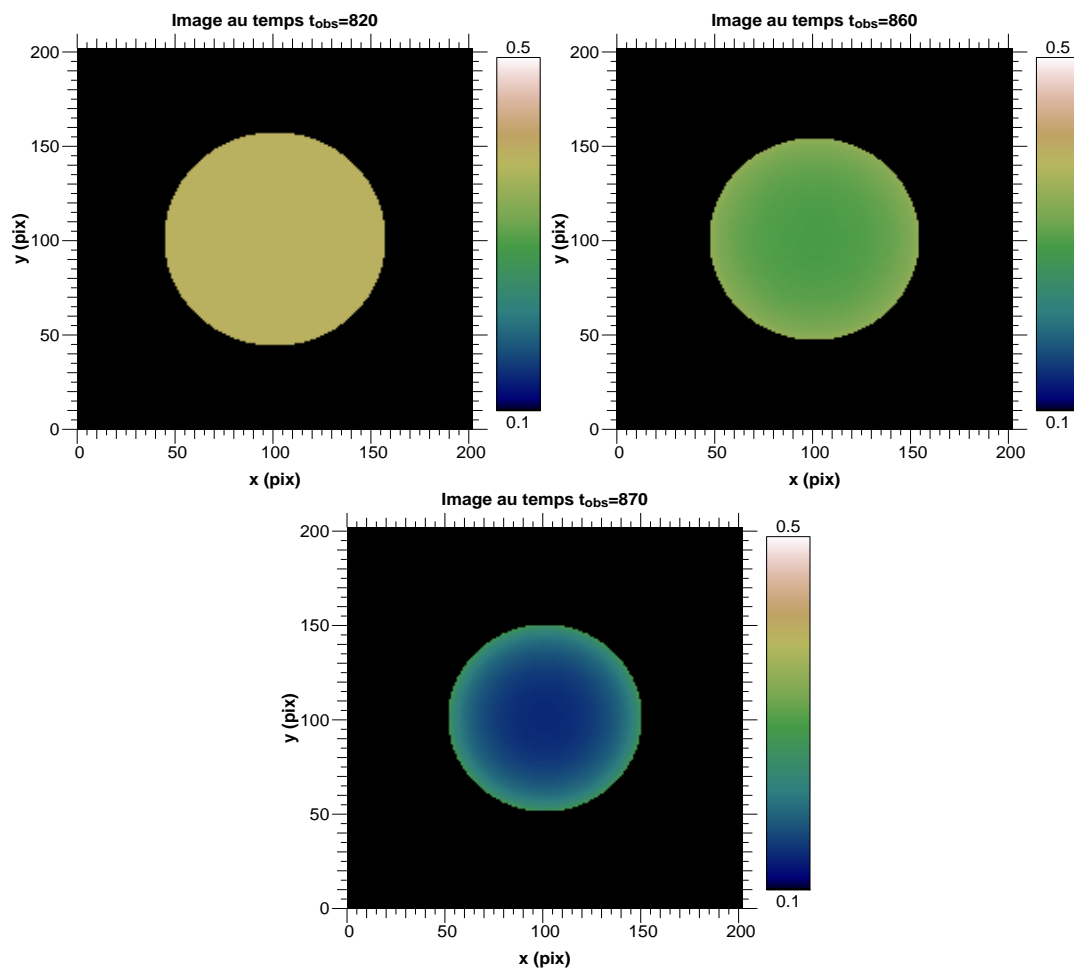


FIGURE 12.1 – Carte de facteur de décalage vers le rouge  $(\nu_{\text{obs}}/\nu_{\text{em}})^3$  pour l'étoile à neutrons aux temps d'observation  $t_{\text{obs}} = 820 M$ ,  $t_{\text{obs}} = 860 M$ ,  $t_{\text{obs}} = 870 M$ . Les axes sont gradués en pixels de l'écran de l'observateur. Le rayon de l'étoile lors de l'émission des photons est de, respectivement,  $0,765 M$ ,  $0,669 M$ ,  $0,524 M$ . La norme au carré maximale obtenue au cours de l'intégration vaut, respectivement,  $7 \cdot 10^{-4} M^2$ ,  $6 \cdot 10^{-3} M^2$ ,  $3 \cdot 10^{-2} M^2$ .

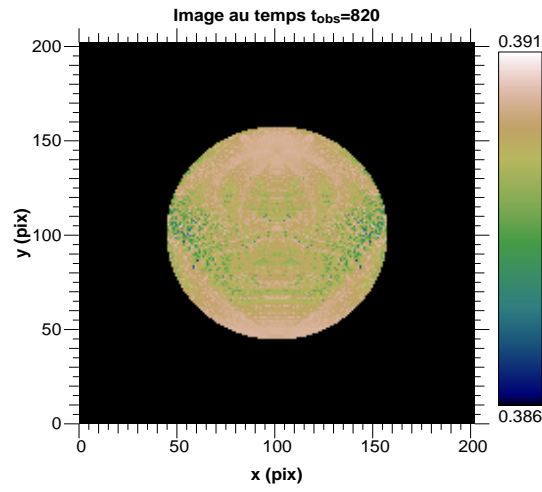


FIGURE 12.2 – Carte de facteur de décalage vers le rouge  $(\nu_{\text{obs}}/\nu_{\text{em}})^3$  pour l'étoile à neutrons aux temps d'observation  $t_{\text{obs}} = 820 M$ , en modifiant les paramètres d'affichage (voir les valeurs minimale et maximale affichée sur la barre de couleur).

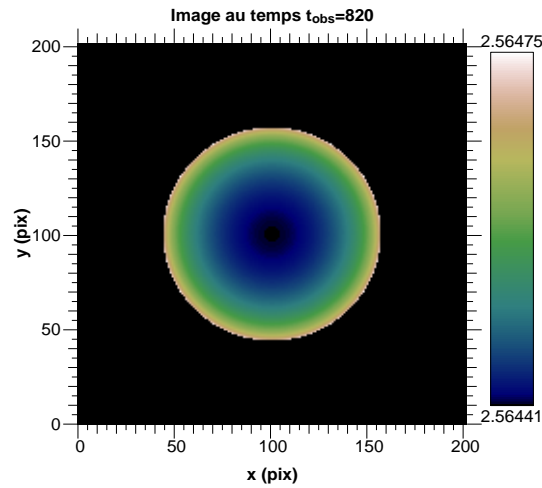


FIGURE 12.3 – Carte de facteur de décalage vers le rouge  $(\nu_{\text{obs}}/\nu_{\text{em}})^3$  pour l'étoile à neutrons aux temps d'observation  $t_{\text{obs}} = 820 M$ , en maintenant la quantité  $\dot{t}$  constante, égale à sa valeur initiale, tout au long de l'intégration de chaque géodésique.

la dérivation de la quantité  $\dot{t}$  afin d'éliminer l'effet de bruit sur l'image mis en évidence dans la Fig. 12.2.

## Conclusion et perspectives



## Conclusion

L'objectif de ma thèse est de développer des simulations permettant d'étudier des phénomènes liés à la gravitation dans son domaine d'application le plus extrême : à proximité d'objets compacts. Ces simulations sont menées dans le souci de permettre d'établir des contraintes sur ces objets, en comparant les prédictions théoriques à des observations déjà disponibles ou appelées à le devenir dans un futur proche.

Dans cette perspective, je me suis intéressé à un objet compact particulier, le candidat trou noir coïncidant avec la source Sgr A\* au centre de la Galaxie. Je me suis également penché sur un instrument particulier susceptible d'apporter un éclairage nouveau sur cet objet compact, GRAVITY. Afin de mener à bien des simulations d'effets relativistes à proximité de Sgr A\*, j'ai été amené à développer un code de calcul de trajectoires de particules en relativité générale, GYOTO.

Mon premier travail a consisté à étudier la précision astrométrique de l'instrument GRAVITY, utilisé en mode imageur, lorsque son champ de vue est constitué de quelques sources ponctuelles fixes. Cette étude a été réalisée en collaboration avec Thibaut Pau-mard (LESIA), Laurent Mugnier (ONERA), Frank Eisenhauer (MPE, Garching) et Stefan Gillessen (MPE, Garching). J'ai pu établir que la précision astrométrique de l'instrument atteignait, et dépassait même dans certains cas, l'objectif fixé à l'instrument de  $10 \mu\text{as}$  (voir la section 6.1). En effet, la précision atteinte par GRAVITY observant une unique source ponctuelle, dans la direction de meilleure précision et pour un temps d'intégration de 100 s, est inférieure ou de l'ordre de  $10 \mu\text{as}$  pour une source de magnitude en bande K  $m_K \leq 15$ . J'ai pu montrer que la précision atteignait quelques  $\mu\text{as}$  pour une source de magnitude  $m_K \approx 13$ . Cette étude s'est poursuivie par la prise en compte de la variabilité de la source, en considérant un émetteur ponctuel en orbite circulaire à un rayon de  $30 \mu\text{as}$  du centre, dont la courbe de lumière est variable (voir la section 6.2). Ce travail s'inscrit dans la perspective de l'étude des sursauts de rayonnement au centre galactique, qui peuvent être modélisés par de la matière en orbite autour du trou noir central. Je suis arrivé à la conclusion que GRAVITY était capable de mettre en évidence le mouvement d'une telle source, pour peu que sa magnitude maximale vérifie  $m_K \leq 15$ , et d'aboutir à une contrainte sur la taille caractéristique de son orbite.

Ces résultats, prometteurs pour l'instrument GRAVITY, constituent une première approche d'un problème complexe nécessitant de tenir compte de tous les effets relativistes affectant le mouvement de la source et la propagation du rayonnement jusqu'à l'observateur.

Dans cette perspective, j'ai développé un nouveau code de calcul d'orbites relativistes, GYOTO, rédigé en langage C++. GYOTO permet de calculer les trajectoires de particules massives et de masse nulle en métrique de Kerr, c'est-à-dire autour d'un trou noir en rotation (voir le chapitre 7). Un certain nombre d'objets astrophysiques ont été implémentés, tels que le disque mince d'accrétion, l'étoile en orbite ou le tore d'accrétion (voir la section 7.4). GYOTO permet également de calculer le transfert de rayonnement s'opérant à l'intérieur d'un objet optiquement mince, et d'en déduire en particulier le spectre émis par l'objet tel qu'il est observé par un observateur distant (voir les sections 7.2 et 7.3). Une



spécificité de GYOTO, en comparaison des autres codes de calculs d'orbites relativistes existant dans la littérature, est de permettre d'intégrer des géodésiques dans des métriques non analytiques, calculées numériquement dans le formalisme 3+1 de la relativité générale (voir le chapitre 8). Dans le cadre de ce formalisme, j'ai dérivé l'expression de l'équation des géodésiques (voir la section 8.2).

Muni du code GYOTO, je me suis intéressé à étudier une structure d'accrétion particulière susceptible d'entourer Sgr A\* : le tore ionisé (voir le chapitre 9). Cette étude a été menée en collaboration avec Odele Straub (CAMK, Varsovie) et Marek Abramowicz (Université de Göteborg). Il s'est tout d'abord agi de calculer de façon cohérente l'émission de rayonnement à l'intérieur du tore. Seule l'émission synchrotron thermique a été envisagée (voir la section 9.1.3). J'ai alors pu utiliser GYOTO de façon à modéliser l'image d'un tel tore d'accrétion telle qu'observée par un observateur terrestre, et le spectre émis par cette structure (voir la section 9.2).

L'utilisation combinée de GYOTO et des résultats obtenus concernant la précision astrométrique de l'instrument GRAVITY a alors été envisagée. Je me suis ainsi intéressé à étudier les phénomènes de sursauts de rayonnement qui affectent le centre galactique, et plus précisément l'un des modèles rendant compte de cet effet : le modèle du point chaud (voir le chapitre 10). Il s'est agi de modéliser l'évolution d'un arc de gaz en rotation autour d'un trou noir de Kerr (voir la section 10.3). J'ai donc calculé grâce à GYOTO les courbes de lumière et les trajectoires projetées sur le ciel de tels objets. J'ai pu ensuite simuler des observations par l'instrument GRAVITY de ce genre de phénomène (voir la section 10.4), et étudier la question suivante : à quel point GRAVITY sera-t-il capable de mettre en évidence le mouvement d'un tel point chaud, en fonction des paramètres décrivant le trou noir central. J'ai pu montrer que l'étude de la dispersion des positions retrouvées par GRAVITY est susceptible de mettre en évidence le mouvement du point chaud si l'inclinaison du trou noir est suffisamment faible, et de fournir une contrainte sur cette inclinaison.

La dernière partie de ce manuscrit (partie V) est consacrée à des perspectives d'utilisation de GYOTO dans des métriques non analytiques. Je me suis intéressé dans le chapitre 11 à calculer numériquement la métrique d'un gravastar, en utilisant pour cela la bibliothèque LORENE développée par l'équipe de relativité numérique du LUTH. L'ambition de ce travail était de développer une métrique alternative, qui permette de calculer grâce à GYOTO des images et des spectres susceptibles de mettre en évidence d'éventuelles différences observationnelles entre un gravastar et un trou noir de la relativité générale. Cette étude n'a pas abouti, et elle devra être poursuivie dans l'avenir. Enfin, une illustration de l'utilisation de l'équation des géodésiques en formalisme 3+1 a été proposée sous la forme de la visualisation de l'espace-temps dynamique d'une étoile à neutrons s'effondrant en trou noir en symétrie sphérique (voir le chapitre 12). J'ai donc simulé les images observées par un observateur distant d'une telle étoile à différents stades de son évolution. Cette étude a été réalisée en collaboration avec Jérôme Novak (LUTH).

## Perspectives

Les perspectives offertes par les travaux récapitulés ci-dessus sont multiples. Maintenant que le code GYOTO est arrivé à un degré de maturité et de développement suffisant, il va être possible de l'utiliser dans de nombreuses problématiques.

Les travaux menés sur le tore ionisé d'accrétion ont permis d'obtenir des résultats prometteurs en vue d'une application à Sgr A\*. Il reste désormais à compléter les mécanismes d'émission de rayonnement pris en compte en calculant également le rayonnement Bremsstrahlung et Compton inverse, afin d'aboutir à des spectres réalistes. Il sera alors possible d'utiliser les données observationnelles spectroscopiques connues pour ajuster le modèle théorique proposé et déterminer si les observations actuelles permettent de contraindre les paramètres du trou noir central, tel que son spin.

L'étude du modèle du point chaud pourra être approfondie en travaillant sur des contraintes prenant en compte à la fois les données astrométriques qui seront obtenues par l'instrument GRAVITY et les données photométriques disponibles sur la courbe de lumière. On a vu que l'utilisation de la seule astrométrie pourrait permettre de contraindre l'inclinaison de la source. Il sera intéressant de déterminer si une information valable pourra être déduite à propos du spin en prenant également en compte l'information photométrique. Les simulations réalistes d'observations GRAVITY développées dans ce manuscrit seront cruciales afin d'aboutir à des prédictions dignes de confiance.

Le modèle du point chaud n'étant pas le seul modèle susceptible d'expliquer l'origine des sursauts de rayonnement du centre galactique, il sera important de prendre en considération d'autres modèles, dans la perspective de pouvoir les comparer, et de déterminer si les observations de demain permettront de les discriminer. Le premier modèle alternatif que je compte étudier est le modèle de l'instabilité de Rossby, étant donné que GYOTO possède déjà une implémentation simple de cette structure.

Au-delà de l'étude du voisinage de l'objet compact central de la Galaxie, il est important d'étudier sa nature même, et de déterminer des voies susceptibles de permettre la mise évidence d'éventuelles différences observables entre le modèle du trou noir et d'autres objets. On a vu au chapitre 11 que l'étude du gravastar devait s'orienter vers la dérivation d'une intégrale première dans le cas axisymétrique (en ne supposant plus la symétrie sphérique). L'obtention d'une telle quantité conservée permettrait de mettre assez facilement au point un code LORENE/gravastar capable de calculer la métrique d'un gravastar en rotation. Dans cette même lignée, il serait intéressant de développer au sein de LORENE une classe *boson-star*, susceptible de calculer la métrique d'une étoile bosonique. Ces deux objets étant les alternatives les plus plausibles aux trous noirs de la relativité générale, il serait extrêmement intéressant de développer au moins l'un de ces deux thèmes de recherche afin de permettre à GYOTO d'utiliser sa capacité d'intégration dans les métriques numériques pour explorer d'éventuelles contraintes sur la nature de l'objet compact Sgr A\*.

L'étude de la visualisation de l'espace-temps d'une étoile à neutrons en effondrement pourra être poursuivie. Les principales pistes d'investigation sont les suivantes. Il conviendra de poursuivre le développement d'un algorithme permettant d'assurer la conservation de la norme du vecteur tangent aux photons intégrés, y compris lorsque ceux-ci approchent

de l'horizon des événements. Il sera également nécessaire d'améliorer la dérivation de la coordonnée  $dt/d\lambda$  pour les photons, où  $\lambda$  est le paramètre affine de leur géodésique. Par ailleurs, il faudra envisager d'étendre ces calculs à un espace-temps en symétrie seulement axiale, c'est-à-dire prendre en compte la rotation de l'étoile. Enfin, il sera important de s'intéresser plus en détail à l'utilisation astrophysique de ce genre de simulations, en particulier dans le cadre du calcul des contreparties électromagnétiques à des phénomènes en champ gravitationnel fort telle que la coalescence d'étoiles à neutrons. Ces travaux nécessiteront des collaborations avec des spécialistes de ce domaine.

Dans la lignée des récents travaux de Vigeland & Hughes (2010); Johannsen & Psaltis (2010a,b, 2011), GYOTO pourrait également être utilisé afin de calculer des images, des spectres, ou d'autres quantités observables dans des métriques de Kerr modifiées. L'intérêt de ces simulations serait de déterminer s'il serait possible de mettre en évidence des différences observables (en particulier par GRAVITY) entre ces espace-temps, ce qui pourrait alors conduire à un test des théorèmes d'absence de chevelure de la relativité générale.

# Annexe



# Relations utiles en formalisme 3+1 pour la dérivation de l'équation des géodésiques

Les relations qui sont données dans cette section sont utilisées abondamment pour obtenir les équations des géodésiques en formalisme 3+1 (voir la section 8.2).

Toutes les références à des équations dans la suite de cette section font références à Gourgoulhon (2007).

– 1<sup>ère</sup> relation

L'Eq. 3.17 entraîne :

$$n^\nu \nabla_\nu n_\alpha = D_\alpha \ln N \quad (7)$$

où  $\mathbf{D}$  est l'opérateur de dérivation covariante associé à la 3-métrie, et  $N$  est la fonction *lapse*.

– 2<sup>ème</sup> relation

Comme le vecteur  $\mathbf{n}$  est normalisé de genre temps, on a :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$$

pour tout vecteur  $\mathbf{x}$ . Donc :

$$n_\sigma \nabla_\nu n^\sigma = 0, \quad n^\sigma \nabla_\nu n_\sigma = 0. \quad (8)$$

– 3<sup>ème</sup> relation

L'Eq. 3.20 entraîne :

$$\nabla_\nu n_\beta = -K_{\beta\nu} - D_\beta \ln N n_\nu \quad (9)$$

où  $\mathbf{K}$  est le tenseur de courbure extrinsèque.

L'Eq. 3.22 entraîne alors :

$$\nabla_\nu m^\alpha = -NK^\alpha_\nu - D^\alpha N n_\nu + n^\alpha \nabla_\nu N \quad (10)$$

où l'on a introduit  $\mathbf{m} = N\mathbf{n}$ .

– 4<sup>ème</sup> relation

L'Eq. 2.83 permet d'écrire :

$$v^\nu \nabla_\nu v^\alpha = v^\nu D_\nu v^\alpha - v^\beta v^\nu K_{\beta\nu} n^\alpha. \quad (11)$$

- 5<sup>ème</sup> relation

L'orthogonalité de  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{v}$  conduit à :

$$n_\mu \nabla_\nu v^\mu = -v^\mu \nabla_\nu n_\mu. \quad (12)$$

- 6<sup>ème</sup> relation

En utilisant l'Eq. 3.20 de paire avec la première relation établie ci-dessus, on arrive à :

$$n^\sigma K^\mu_\sigma = 0, \quad n_\mu K^\mu_\sigma = 0, \quad n^\mu K_{\mu\sigma} = 0. \quad (13)$$

- 7<sup>ème</sup> relation

En utilisant la définition de l'opérateur de projection  $\gamma^*$  défini par l'Eq. 2.71, dont les composantes  $\gamma^\alpha_\mu$  sont définies par l'Eq. 2.64, on arrive aisément à :

$$n^\sigma \gamma^\alpha_\sigma = 0. \quad (14)$$

- 8<sup>ème</sup> relation

A partir de la définition de la dérivée de Lie  $\mathcal{L}$  on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} v^\alpha &= m^\nu \nabla_\nu v^\alpha - v^\nu \nabla_\nu m^\alpha \\ &= m^\nu \nabla_\nu v^\alpha - v^\nu [-N K^\alpha_\nu + n^\alpha \nabla_\nu N] \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'orthogonalité de  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{v}$ . En projetant sur  $\Sigma_t$  grâce à l'opérateur  $\gamma^*$  on aboutit à :

$$\begin{aligned} \gamma^* \mathcal{L}_{\mathbf{m}} v^\alpha &= \gamma^\alpha_\mu \mathcal{L}_{\mathbf{m}} v^\mu = \mathcal{L}_{\mathbf{m}} v^\alpha \\ &= \gamma^\alpha_\mu m^\nu \nabla_\nu v^\mu + N v^\nu K^\alpha_\nu \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que la dérivée de Lie le long du vecteur  $\mathbf{m}$  d'un tenseur tangent à l'hypersurface  $\Sigma_t$  est lui-même tangent à cette hypersurface, sa partie projetée étant alors égale à lui-même (voir l'Eq. 3.35). On conclut alors :

$$\gamma^\alpha_\mu n^\nu \nabla_\nu v^\mu = \frac{1}{N} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} v^\alpha - v^\nu K^\alpha_\nu. \quad (15)$$

- 9<sup>ème</sup> relation

Le vecteur normal  $\mathbf{n}$  est orthogonal à  $\mathbf{D}_{\mathbf{v}} \mathbf{v}$  car ce dernier vecteur est défini dans l'hypersurface  $\Sigma_t$ . De ce fait :

$$n_\alpha v^\nu D_\nu v^\alpha = 0. \quad (16)$$

- 10<sup>ème</sup> relation

Sur l'hypersurface :

$$\begin{aligned}
D_i \ln N &= \frac{\partial \ln N}{\partial x^i}, & D_j v^i &= \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} v^k, \\
\mathcal{L}_{\mathbf{m}} v^i &= \frac{\partial v^i}{\partial t} - \beta^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + v^k \frac{\partial \beta^i}{\partial x^k}
\end{aligned} \tag{17}$$

où l'on a utilisé les Eqs. 4.56 à 4.58 pour transformer la dérivée de Lie. Ici, les  $\Gamma^i_{jk}$  sont les symboles de Christoffel associés à la 3-métrie induite sur  $\Sigma_t$ . Le vecteur  $\beta^k$  est le *shift*.

Munis de ces relations, on peut obtenir les relations obtenues plus haut dans la section 8.2.





# Bibliographie

- Abramowicz M., Jaroszynski M., & Sikora M., 1978. Relativistic, accreting disks. *A&A*, 63 : 221. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1978A%26A...63..221A>.
- Abramowicz M.A., 2009. Five Ideas on Black Hole Accretion Disks. Dans *The Variable Universe : A Celebration of Bohdan Paczynski*, édité par K. Z. Stanek, volume 403 de *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, p. 29–30. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ASPC..403..29A>.
- Abramowicz M.A. & Fragile P.C., 2011. Black Hole Accretion Disks. ArXiv e-prints. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2011arXiv1104.5499A>.
- Abramowicz M.A., Jaroszyński M., Kato S., Lasota J., Różańska A., & Sądowski A., 2010. Leaving the innermost stable circular orbit : the inner edge of a black-hole accretion disk at various luminosities. *A&A*, 521 : A15+. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010A%26A...521A..15A>.
- Abramowicz M.A., Kluźniak W., & Lasota J., 2002. No observational proof of the black-hole event-horizon. *A&A*, 396 : L31. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2002A%26A...396L..31A>.
- Aharonian F., Akhperjanian A.G., Aye K., Bazer-Bachi A.R., Beilicke M., Benbow W., Berge D., Berghaus P., Bernlöhr K., Bolz O., Boisson C., Borgmeier C., Breitling F., Brown A.M., Bussons Gordo J., Chadwick P.M., Chitnis V.R., Chounet L., Cornils R., Costamante L., Degrange B., Djannati-Ataï A., O’C. Drury L., Ergin T., Espigat P., Feinstein F., Fleury P., Fontaine G., Funk S., Gallant Y., Giebels B., Gillessen S., Goret P., Guy J., Hadjichristidis C., Hauser M., Heinzlmann G., Henri G., Hermann G., Hinton J.A., Hofmann W., Holleran M., Horns D., de Jager O.C., Jung I., Khélifi B., Komin N., Konopelko A., Latham I.J., Le Gallou R., Lemoine M., Lemièrre A., Leroy N., Lohse T., Marcowith A., Masterson C., McComb T.J.L., de Naurois M., Nolan S.J., Noutsos A., Orford K.J., Osborne J.L., Ouchrif M., Panter M., Pelletier G., Pita S., Pohl M., Pühlhofer G., Punch M., Raubenheimer B.C., Raue M., Raux J., Rayner S.M., Redondo I., Reimer A., Reimer O., Ripken J., Rivoal M., Rob L., Rolland L., Rowell G., Sahakian V., Saugé L., Schlenker S., Schlickeiser R., Schuster C., Schwanke U., Siewert M., Sol H., Steenkamp R., Stegmann C., Tavernet J., Théoret C.G., Tluczykont M., van der Walt D.J., Vasileiadis G., Vincent P., Visser B., Völk H.J., & Wagner S.J., 2004.

- Very high energy gamma rays from the direction of Sagittarius A\*. *A&A*, 425 : L13. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2004A%26A...425L..13A>.
- Albert J., Aliu E., Anderhub H., Antoranz P., Armada A., Asensio M., Baixeras C., Barrio J.A., Bartelt M., Bartko H., Bastieri D., Bavikadi R., Bednarek W., Berger K., Bigongiari C., Biland A., Bisesi E., Bock R.K., Bretz T., Britvitch I., Camara M., Chilingarian A., Ciprini S., Coarasa J.A., Commichau S., Contreras J.L., Cortina J., Curtef V., Danielyan V., Dazzi F., De Angelis A., de los Reyes R., De Lotto B., Domingo-Santamaría E., Dorner D., Doro M., Errando M., Fagiolini M., Ferenc D., Fernández E., Firpo R., Flix J., Fonseca M.V., Font L., Galante N., Garczarczyk M., Gaug M., Giller M., Goebel F., Hakobyan D., Hayashida M., Hengstebeck T., Höhne D., Hose J., Jaco P., Kalekin O., Kranich D., Laille A., Lenisa T., Liebing P., Lindfors E., Longo F., López J., López M., Lorenz E., Lucarelli F., Majumdar P., Maneva G., Mannheim K., Mariotti M., Martínez M., Mase K., Mazin D., Merck M., Meucci M., Meyer M., Miranda J.M., Mirzoyan R., Mizobuchi S., Moralejo A., Nilsson K., Oña-Wilhelmi E., Orduña R., Otte N., Oya I., Paneque D., Paoletti R., Pasanen M., Pascoli D., Paus F., Pavel N., Pegna R., Peruzzo L., Piccioli A., Prandini E., Rico J., Rhode W., Riegel B., Rissi M., Robert A., Rügamer S., Saggion A., Sánchez A., Sartori P., Scalzotto V., Schmitt R., Schweizer T., Shayduk M., Shinozaki K., Shore S.N., Sidro N., Sillanpää A., Sobczynska D., Stamerra A., Stepanian A., Stark L.S., Takalo L., Temnikov P., Tesaro D., Teshima M., Tonello N., Torres A., Torres D.F., Turini N., Vankov H., Vardanyan A., Vitale V., Wagner R.M., Wibig T., Wittek W., & Zapatero J., 2006. Observation of Gamma Rays from the Galactic Center with the MAGIC Telescope. *ApJL*, 638 : L101. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006ApJ...638L.101A>.
- Alcubierre M., Guzmán F.S., Matos T., Núñez D., Ureña-López L.A., & Wiederhold P., 2002. Galactic collapse of scalar field dark matter. *Classical and Quantum Gravity*, 19 : 5017. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2002CQGra...19.5017A>.
- Alexander T., 2005. Stellar processes near the massive black hole in the Galactic center [review article]. *Physics Reports*, 419 : 65. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2005PhR...419...65A>.
- Allen D.A., Hyland A.R., & Hillier D.J., 1990. The source of luminosity at the Galactic Centre. *MNRAS*, 244 : 706. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1990MNRAS.244..706A>.
- Aschenbach B., Grosso N., Porquet D., & Predehl P., 2004. X-ray flares reveal mass and angular momentum of the Galactic Center black hole. *A&A*, 417 : 71. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2004A%26A...417...71A>.
- Baganoff F.K., Bautz M.W., Brandt W.N., Chartas G., Feigelson E.D., Garmire G.P., Maeda Y., Morris M., Ricker G.R., Townsley L.K., & Walter F., 2001. Rapid X-ray flaring from the direction of the supermassive black hole at the Galactic Centre. *Nature*, 413 : 45. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2001Natur.413...45B>.

- Baganoff F.K., Maeda Y., Morris M., Bautz M.W., Brandt W.N., Cui W., Doty J.P., Feigelson E.D., Garmire G.P., Pravdo S.H., Ricker G.R., & Townsley L.K., 2003. Chandra X-Ray Spectroscopic Imaging of Sagittarius A\* and the Central Parsec of the Galaxy. *ApJ*, 591 : 891. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2003ApJ...591..891B>.
- Balick B. & Brown R.L., 1974. Intense sub-arcsecond structure in the galactic center. *ApJ*, 194 : 265. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1974ApJ...194..265B>.
- Bardeen J.M., Press W.H., & Teukolsky S.A., 1972. Rotating black holes : locally non-rotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation. *ApJ*, 178 : 347.
- Bartko H., Martins F., Trippe S., Fritz T.K., Genzel R., Ott T., Eisenhauer F., Gillessen S., Paumard T., Alexander T., Dodds-Eden K., Gerhard O., Levin Y., Mascetti L., Nayakshin S., Perets H.B., Perrin G., Pfuhl O., Reid M.J., Rouan D., Zilka M., & Sternberg A., 2010. An Extremely Top-Heavy Initial Mass Function in the Galactic Center Stellar Disks. *ApJ*, 708 : 834. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010ApJ...708..834B>.
- Becklin E.E. & Neugebauer G., 1975. High-resolution maps of the galactic center at 2.2 and 10 microns. *ApJ*, 200 : L71. [http://cdsads.u-strasbg.fr/cgi-bin/nph-bib\\_query?bibcode=1975ApJ...200L..71B&db\\_key](http://cdsads.u-strasbg.fr/cgi-bin/nph-bib_query?bibcode=1975ApJ...200L..71B&db_key)
- Bélangier G., Terrier R., de Jager O.C., Goldwurm A., & Melia F., 2006. Periodic Modulations in an X-ray Flare from Sagittarius A\*. *Journal of Physics Conference Series*, 54 : 420. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006JPhCS..54..420B>.
- Benlloch S., Wilms J., Edelson R., Yaqoob T., & Staubert R., 2001. Quasi-periodic Oscillation in Seyfert Galaxies : Significance Levels. The Case of Markarian 766. *ApJL*, 562 : L121. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2001ApJ...562L.121B>.
- Bilic N., Tupper G.B., & Viollier R.D., 2003. Supermassive fermion balls and constraints from stellar dynamics near Sgr A\*. *ArXiv*. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2003astro.ph.10172B>.
- Bilic N., Tupper G.B., & Viollier R.D., 2006. Born Infeld phantom gravastars. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2 : 13. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006JCAP...02..013B>.
- Blandford R.D. & Znajek R.L., 1977. Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes. *MNRAS*, 179 : 433. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1977MNRAS.179..433B>.
- Bloom J.S., Holz D.E., Hughes S.A., Menou K., Adams A., Anderson S.F., Becker A., Bower G.C., Brandt N., Cobb B., Cook K., Corsi A., Covino S., Fox D., Fruchter A., Fryer C., Grindlay J., Hartmann D., Haiman Z., Kocsis B., Jones L., Loeb A., Marka S., Metzger B., Nakar E., Nissanke S., Perley D.A., Piran T., Poznanski D., Prince T., Schnittman J., Soderberg A., Strauss M., Shawhan P.S., Shoemaker D.H., Sievers J., Stubbs C., Tagliaferri G., Ubertini P., & Woźniak P., 2009. Astro2010 Decadal Survey

- Whitepaper : Coordinated Science in the Gravitational and Electromagnetic Skies. ArXiv e-prints. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009arXiv0902.1527B>.
- Born M. & Wolf E., 1999. *Principles of Optics, 7<sup>e</sup> édition*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Boyer R.H. & Lindquist R.W., 1967. Maximal analytic extension of the Kerr metric. *J. Math. Phys.*, 8 : 265.
- Broderick A.E., 2004. *Radiative transfer in accreting environments*. Thèse de doctorat, California Institute of Technology, United States – California. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2004PhDT.....34B>.
- Broderick A.E., Fish V.L., Doeleman S.S., & Loeb A., 2009a. Estimating the Parameters of Sagittarius A\*'s Accretion Flow Via Millimeter VLBI. *ApJ*, 697 : 45. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...697...45B>.
- Broderick A.E., Fish V.L., Doeleman S.S., & Loeb A., 2010. Evidence for Low Black Hole Spin and Physically Motivated Accretion Models from Millimeter VLBI Observations of Sagittarius A\*. ArXiv e-prints. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010arXiv1011.2770B>.
- Broderick A.E. & Loeb A., 2006. Imaging optically-thin hotspots near the black hole horizon of Sgr A\* at radio and near-infrared wavelengths. *MNRAS*, 367 : 905. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006MNRAS.367..905B>.
- Broderick A.E., Loeb A., & Narayan R., 2009b. The Event Horizon of Sagittarius A\*. *ApJ*, 701 : 1357. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...701.1357B>.
- Broderick A.E. & Narayan R., 2006. On the Nature of the Compact Dark Mass at the Galactic Center. *ApJL*, 638 : L21. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006ApJ...638L..21B>.
- Broderick A.E. & Narayan R., 2007. Where are all the gravastars? Limits upon the gravastar model from accreting black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 24 : 659. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2007CQGra..24..659B>.
- Brown R.L., 1982. Precessing jets in Sagittarius A - Gas dynamics in the central parsec of the galaxy. *ApJ*, 262 : 110. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1982ApJ...262..110B>.
- Burwitz V., Zavlin V.E., Neuhäuser R., Predehl P., Trümper J., & Brinkman A.C., 2001. The Chandra LETGS high resolution X-ray spectrum of the isolated neutron star RX J1856.5-3754. *A&A*, 379 : L35. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2001A%26A...379L..35B>.

- Cardoso V., Pani P., Cadoni M., & Cavaglià M., 2008. Ergoregion instability of ultracompact astrophysical objects. *Phys. Rev. D*, 77(12) : 124044. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008PhRvD..7714044C>.
- Carroll S., 2008. The Cosmological Constant. *Living Reviews In Relativity*. <http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2001-1/index.html>.
- Carter B., 1968. Global structure of the Kerr family of gravitationnal fields. *Phys. Rev.*, 174 : 1559.
- Carter B.M.N., 2005. Stable gravastars with generalized exteriors. *Classical and Quantum Gravity*, 22 : 4551. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2005CQGra..22.4551C>.
- Cattoen C., Faber T., & Visser M., 2005. Gravastars must have anisotropic pressures. *Classical and Quantum Gravity*, 22 : 4189. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2005CQGra..22.4189C>.
- Chapline G., 2003. Quantum Phase Transitions and the Failure of Classical General Relativity. *International Journal of Modern Physics A*, arXiv :gr-qc/0012094, 18 : 3587. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2003IJMPA..18.3587C>.
- Chassande-Mottin E., Hendry M., Sutton P.J., & Márka S., 2011. Multimessenger astronomy with the Einstein Telescope. *General Relativity and Gravitation*, 43 : 437. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2011GReGr..43..437C>.
- Chirenti C.B.M.H. & Rezzolla L., 2007. How to tell a gravastar from a black hole. *Classical and Quantum Gravity*, 24 : 4191. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2007CQGra..24.4191C>.
- Chirenti C.B.M.H. & Rezzolla L., 2008. Ergoregion instability in rotating gravastars. *Phys. Rev. D*, 78(8) : 084011. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008PhRvD..78h4011C>.
- Choquet E., Cassaing F., Perrin G., Eisenhauer F., Brandner W., Straubmeier C., Perraut K., & Gillessen S., 2010. GRAVITY : design and performance of the fringe tracker. Dans *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, volume 7734 de *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010SPIE.7734E..59C>.
- Choquet-Bruhat Y., 1952. Théorèmes d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. *Acta Mathematica*, 88 : 141.
- Colpi M., Shapiro S.L., & Wasserman I., 1986. Boson stars - Gravitational equilibria of self-interacting scalar fields. *Physical Review Letters*, 57 : 2485. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1986PhRvL..57.2485C>.

- Cordero-Carrión I., Cerdá-Durán P., Dimmelmeier H., Jaramillo J.L., Novak J., & Gourgoulhon E., 2009. Improved constrained scheme for the Einstein equations : An approach to the uniqueness issue. *Phys. Rev. D*, 79(2) : 024017. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009PhRvD..79b4017C>.
- Cuadra J., Nayakshin S., Springel V., & Di Matteo T., 2005. Accretion of cool stellar winds on to Sgr A\* : another puzzle of the Galactic Centre? *MNRAS*, 360 : L55. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2005MNRAS.360L..55C>.
- Cunningham C.T., 1975. The effects of redshifts and focusing on the spectrum of an accretion disk around a Kerr black hole. *ApJ*, 202 : 788. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1975ApJ...202..788C>.
- Cunningham C.T. & Bardeen J.M., 1973. The Optical Appearance of a Star Orbiting an Extreme Kerr Black Hole. *ApJ*, 183 : 237. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1973ApJ...183..237C>.
- Darmois G., 1927. *Les équations de la gravitation einsteinienne*. Gauthier-Villars, Paris.
- DeBenedictis A., Horvat D., Ilijic S., Kloster S., & Viswanathan K.S., 2006. Gravastar Solutions with Continuous Pressures and Equation of State. *Classical and Quantum Gravity*, 23 : 2303. <http://iopscience.iop.org/0264-9381/23/7/007/>.
- Delplancke F., 2008. The PRIMA facility phase-referenced imaging and micro-arcsecond astrometry. *New Astronomy Reviews*, 52 : 199. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008NewAR..52..199D>.
- Delplancke F., Nijenhuis J., de Man H., Andolfato L., Treichel R., Hopman J., & Derie F., 2004. Star separator system for the dual-field capability (PRIMA) of the VLTI. Dans *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, édité par W. A. Traub, volume 5491 de *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, p. 1528–+. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2004SPIE.5491.1528D>.
- Dexter J. & Agol E., 2009. A Fast New Public Code for Computing Photon Orbits in a Kerr Spacetime. *ApJ*, 696 : 1616. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...696.1616D>.
- Dimmelmeier H., Font J.A., & Müller E., 2002a. Relativistic simulations of rotational core collapse I. Methods, initial models, and code tests. *A&A*, 388 : 917. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2002A%26A...388..917D>.
- Dimmelmeier H., Font J.A., & Müller E., 2002b. Relativistic simulations of rotational core collapse II. Collapse dynamics and gravitational radiation. *A&A*, 393 : 523. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2002A%26A...393..523D>.

- Dimmelmeier H., Novak J., Font J.A., Ibáñez J.M., & Müller E., 2005. Combining spectral and shock-capturing methods : A new numerical approach for 3D relativistic core collapse simulations. *Phys. Rev. D*, 71(6) : 064023. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2005PhRvD..71f4023D>.
- Ding J., Yuan F., & Liang E., 2010. Electron Heating and Acceleration by Magnetic Reconnection in Hot Accretion Flows. *ApJ*, 708 : 1545. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010ApJ...708.1545D>.
- Do T., Ghez A.M., Morris M.R., Yelda S., Meyer L., Lu J.R., Hornstein S.D., & Matthews K., 2009. A Near-Infrared Variability Study of the Galactic Black Hole : A Red Noise Source with NO Detected Periodicity. *ApJ*, 691 : 1021. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...691.1021D>.
- Dodds-Eden K., Gillessen S., Fritz T.K., Eisenhauer F., Trippe S., Genzel R., Ott T., Bartko H., Pfuhl O., Bower G., Goldwurm A., Porquet D., Trap G., & Yusef-Zadeh F., 2011. The Two States of Sgr A\* in the Near-infrared : Bright Episodic Flares on Top of Low-level Continuous Variability. *ApJ*, 728 : 37. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2011ApJ...728...37D>.
- Dodds-Eden K., Porquet D., Trap G., Quataert E., Haubois X., Gillessen S., Grosso N., Pantin E., Falcke H., Rouan D., Genzel R., Hasinger G., Goldwurm A., Yusef-Zadeh F., Clenet Y., Trippe S., Lagage P., Bartko H., Eisenhauer F., Ott T., Paumard T., Perrin G., Yuan F., Fritz T.K., & Mascetti L., 2009. Evidence for X-Ray Synchrotron Emission from Simultaneous Mid-Infrared to X-Ray Observations of a Strong Sgr A\* Flare. *ApJ*, 698 : 676. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...698..676D>.
- Dodds-Eden K., Sharma P., Quataert E., Genzel R., Gillessen S., Eisenhauer F., & Porquet D., 2010. Time-Dependent Models of Flares from Sagittarius A\*. *ApJ*, 725 : 450. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010ApJ...725..450D>.
- Doeleman S.S., Weintroub J., Rogers A.E.E., Plambeck R., Freund R., Tilanus R.P.J., Friberg P., Ziurys L.M., Moran J.M., Corey B., Young K.H., Smythe D.L., Titus M., Marrone D.P., Cappallo R.J., Bock D., Bower G.C., Chamberlin R., Davis G.R., Krichbaum T.P., Lamb J., Maness H., Niell A.E., Roy A., Strittmatter P., Werthimer D., Whitney A.R., & Woody D., 2008. Event-horizon-scale structure in the supermassive black hole candidate at the Galactic Centre. *Nature*, 455 : 78. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008Natur.455...78D>.
- Dolence J.C., Gammie C.F., Mościbrodzka M., & Leung P.K., 2009. grmonty : A Monte Carlo Code for Relativistic Radiative Transport. *ApJS*, 184 : 387. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJS..184..387D>.
- Eckart A., Baganoff F.K., Morris M., Bautz M.W., Brandt W.N., Garmire G.P., Genzel R., Ott T., Ricker G.R., Straubmeier C., Viehmann T., Schödel R., Bower G.C., & Goldston



- J.E., 2004. First simultaneous NIR/X-ray detection of a flare from Sgr A\*. *A&A*, 427 : 1. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2004A%26A...427...1E>.
- Eckart A. & Genzel R., 1997. Stellar proper motions in the central 0.1 PC of the Galaxy. *MNRAS*, 284 : 576. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1997MNRAS.284..576E>.
- Eckart A., Genzel R., Hofmann R., Sams B.J., & Tacconi-Garman L.E., 1995. High angular resolution spectroscopic and polarimetric imaging of the galactic center in the near-infrared. *ApJ*, 445 : L23. [http://cdsads.u-strasbg.fr/cgi-bin/nph-bib\\_query?bibcode=1995ApJ...445L..23E&db\\_key](http://cdsads.u-strasbg.fr/cgi-bin/nph-bib_query?bibcode=1995ApJ...445L..23E&db_key)
- Eckart A., Schödel R., García-Marín M., Witzel G., Weiss A., Baganoff F.K., Morris M.R., Bertram T., Dovčiak M., Duschl W.J., Karas V., König S., Krichbaum T.P., Krips M., Kunneriath D., Lu R., Markoff S., Mauerhan J., Meyer L., Moutaka J., Mužić K., Najarro F., Pott J., Schuster K.F., Sjouwerman L.O., Straubmeier C., Thum C., Vogel S.N., Wiesemeyer H., Zamaninasab M., & Zensus J.A., 2008. Simultaneous NIR/sub-mm observation of flare emission from Sagittarius A\*. *A&A*, 492 : 337. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008A%26A...492..337E>.
- Eckart A., Schödel R., Meyer L., Trippe S., Ott T., & Genzel R., 2006. Polarimetry of near-infrared flares from Sagittarius A\*. *A&A*, 455 : 1. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006A%26A...455...1E>.
- Eisenhauer F., Perrin G., Brandner W., Straubmeier C., Perraut K., Amorim A., Schöller M., Gillessen S., Kervella P., Benisty M., Araujo-Hauck C., Jocou L., Lima J., Jakob G., Haug M., Clénet Y., Henning T., Eckart A., Berger J., Garcia P., Abuter R., Kellner S., Paumard T., Hippler S., Fischer S., Moulin T., Villate J., Avila G., Gräter A., Lacour S., Huber A., Wiest M., Nolot A., Carvas P., Dorn R., Pfuhl O., Gendron E., Kendrew S., Yazici S., Anton S., Jung Y., Thiel M., Choquet É., Klein R., Teixeira P., Gitton P., Moch D., Vincent F., Kudryavtseva N., Ströbele S., Sturm S., Fédou P., Lenzen R., Jolley P., Kister C., Lapeyrère V., Naranjo V., Lucuix C., Hofmann R., Chapron F., Neumann U., Mehrgan L., Hans O., Rousset G., Ramos J., Suarez M., Lederer R., Reess J., Rohloff R., Haguenaue P., Bartko H., Sevin A., Wagner K., Lizon J., Rabien S., Collin C., Finger G., Davies R., Rouan D., Wittkowski M., Dodds-Eden K., Ziegler D., Cassaing F., Bonnet H., Casali M., Genzel R., & Lena P., 2011. GRAVITY : Observing the Universe in Motion. *The Messenger*, 143 : 16. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2011Msngr.143...16E>.
- Eisenhauer F., Perrin G., Brandner W., Straubmeier C., Richichi A., Gillessen S., Berger J.P., Hippler S., Eckart A., Schöller M., Rabien S., Cassaing F., Lenzen R., Thiel M., Clénet Y., Ramos J.R., Kellner S., Fédou P., Baumeister H., Hofmann R., Gendron E., Boehm A., Bartko H., Haubois X., Klein R., Dodds-Eden K., Houairi K., Hormuth F., Gräter A., Jocou L., Naranjo V., Genzel R., Kervella P., Henning T., Hamaus N., Lacour S., Neumann U., Haug M., Malbet F., Laun W., Kolmender J., Paumard T., Rohloff R., Pfuhl O., Perraut K., Ziegler J., Rouan D., &

- Rousset G., 2008. GRAVITY : getting to the event horizon of Sgr A\*. Dans *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, volume 7013 de *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008SPIE.7013E..69E>.
- Fabian A.C., Rees M.J., Stella L., & White N.E., 1989. X-ray fluorescence from the inner disc in Cygnus X-1. *MNRAS*, 238 : 729. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1989MNRAS.238..729F>.
- Falanga M., Melia F., Tagger M., Goldwurm A., & Bélanger G., 2007. General Relativistic Flux Modulations from Disk Instabilities in Sagittarius A\*. *ApJl*, 662 : L15. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2007ApJ...662L..15F>.
- Falcke H., 1996. The Nuclear Jet in M81. *ApJL*, 464 : L67+. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1996ApJ...464L..67F>.
- Falcke H. & Markoff S., 2000. The jet model for Sgr A\* : Radio and X-ray spectrum. *A&A*, 362 : 113. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2000A%26A...362..113F>.
- Fanton C., Calvani M., de Felice F., & Cadez A., 1997. Detecting Accretion Disks in Active Galactic Nuclei. *Publ. of the Astronomical Society of Japan*, 49 : 159. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1997PASJ...49..159F>.
- Feinblum D.A. & McKinley W.A., 1968. Stable states of a scalar particle in its own gravitationnal field. *Phys. Rev.*, 168 : 1445.
- Forrest W.J., Shure M.A., Pipher J.L., & Woodward C.E., 1987. Brackett alpha images of the Galactic center. Dans *The Galactic Center*, édité par D. C. Backer, volume 155 de *American Institute of Physics Conference Series*, p. 153–156. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1987AIPC...155..153F>.
- Fuerst S.V. & Wu K., 2004. Radiation transfer of emission lines in curved space-time. *A&A*, 424 : 733. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2004A%26A...424..733F>.
- Fuerst S.V. & Wu K., 2007. Line emission from optically thick relativistic accretion tori. *A&A*, 474 : 55. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2007A%26A...474...55F>.
- Gáspár M.E. & Rácz I., 2010. Probing the stability of gravastars by dropping dust shells onto them. *Classical and Quantum Gravity*, 27(18) : 185004. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010CQGra..27r5004G>.
- Genzel R., Eisenhauer F., & Gillessen S., 2010. The Galactic Center massive black hole and nuclear star cluster. *Reviews of Modern Physics*, 82 : 3121. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010RvMP...82.3121G>.

- Genzel R., Schödel R., Ott T., Eckart A., Alexander T., Lacombe F., Rouan D., & Aschenbach B., 2003a. Near-infrared flares from accreting gas around the supermassive black hole at the Galactic Centre. *Nature*, 425 : 934. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2003Natur.425..934G>.
- Genzel R., Schödel R., Ott T., Eisenhauer F., Hofmann R., Lehnert M., Eckart A., Alexander T., Sternberg A., Lenzen R., Clénet Y., Lacombe F., Rouan D., Renzini A., & Tacconi-Garman L.E., 2003b. The Stellar Cusp around the Supermassive Black Hole in the Galactic Center. *ApJ*, 594 : 812. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2003ApJ...594..812G>.
- Genzel R., Thatte N., Krabbe A., Kroker H., & Tacconi-Garman L.E., 1996. The Dark Mass Concentration in the Central Parsec of the Milky Way. *ApJ*, 472 : 153. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1996ApJ...472..153G>.
- Gerhard O., 2001. The Galactic Center HE I Stars : Remains of a Dissolved Young Cluster ? *ApJ*, 546 : L39. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2001ApJ...546L..39G>.
- Ghez A.M., Klein B.L., Morris M., & Becklin E.E., 1998. High Proper-Motion Stars in the Vicinity of Sagittarius A\* : Evidence for a Supermassive Black Hole at the Center of Our Galaxy. *ApJ*, 509 : 678. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1998ApJ...509..678G>.
- Ghez A.M., Morris M., Becklin E.E., Tanner A., & Kremenek T., 2000. The accelerations of stars orbiting the Milky Way's central black hole. *Nature*, 407 : 349. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2000Natur.407..349G>.
- Ghez A.M., Salim S., Hornstein S.D., Tanner A., Lu J.R., Morris M., Becklin E.E., & Duchêne G., 2005. Stellar Orbits around the Galactic Center Black Hole. *ApJ*, 620 : 744. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2005ApJ...620..744G>.
- Ghez A.M., Salim S., Weinberg N.N., Lu J.R., Do T., Dunn J.K., Matthews K., Morris M.R., Yelda S., Becklin E.E., Kremenek T., Milosavljevic M., & Naiman J., 2008. Measuring Distance and Properties of the Milky Way's Central Supermassive Black Hole with Stellar Orbits. *ApJ*, 689 : 1044. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008ApJ...689.1044G>.
- Gillessen S., Eisenhauer F., Perrin G., Brandner W., Straubmeier C., Perraut K., Amorim A., Schöller M., Araujo-Hauck C., Bartko H., Baumeister H., Berger J., Carvas P., Cassaing F., Chapron F., Choquet E., Clénet Y., Collin C., Eckart A., Fedou P., Fischer S., Gendron E., Genzel R., Gitton P., Gonté F., Gräter A., Haguénauer P., Haug M., Haubois X., Henning T., Hippler S., Hofmann R., Jocu L., Kellner S., Kervella P., Klein R., Kudryavtseva N., Lacour S., Lapeyrere V., Laun W., Lena P., Lenzen R., Lima J., Moratschke D., Moch D., Moulin T., Naranjo V., Neumann U., Nollot A., Paumard T., Pfuhl O., Rabien S., Ramos J., Rees J.M., Rohloff R., Rouan D., Rousset G., Sevin A., Thiel M., Wagner K., Wiest M., Yazici S., & Ziegler D.,

2010. GRAVITY : a four-telescope beam combiner instrument for the VLTI. Dans *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, volume 7734 de *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010SPIE.7734E..28G>.
- Gillessen S., Eisenhauer F., Quataert E., Genzel R., Paumard T., Trippe S., Ott T., Abuter R., Eckart A., Lagage P.O., Lehnert M.D., Tacconi L.J., & Martins F., 2006. Variations in the Spectral Slope of Sagittarius A\* during a Near-Infrared Flare. *ApJL*, 640 : L163. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006ApJ...640L.163G>.
- Gillessen S., Eisenhauer F., Trippe S., Alexander T., Genzel R., Martins F., & Ott T., 2009. Monitoring Stellar Orbits Around the Massive Black Hole in the Galactic Center. *ApJ*, 692 : 1075. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...692.1075G>.
- Goodman J.W., 2005. *Introduction to Fourier Optics (3<sup>ème</sup> édition)*. Roberts & Company Publishers, Greenwood Village, Colorado.
- Gourgoulhon E., 2007. 3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity. ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2007gr.qc.....3035G>.
- Gourgoulhon E., 2010a. An introduction to the theory of rotating relativistic stars. ArXiv e-prints. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010arXiv1003.5015G>.
- Gourgoulhon E., 2010b. *Relativité Restreinte, des particules à l'astrophysique*. EDP Sciences / CNRS Éditions, Les Ulis.
- Gourgoulhon E., 2010c. Relativité Générale, Cours du M2 Astronomie et Astrophysique. <http://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/>.
- Gourgoulhon E. & Bonazzola S., 1994. A formulation of the virial theorem in general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 11 : 443. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1994CQGra..11..443G>.
- Grandclément P. & Novak J., 2009. Spectral Methods for Numerical Relativity. *Living Reviews in Relativity*, 12 : 1. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009LRR....12....1G>.
- Hamaus N., Paumard T., Müller T., Gillessen S., Eisenhauer F., Trippe S., & Genzel R., 2009. Prospects for Testing the Nature of Sgr A\*'s Near-Infrared Flares on the Basis of Current Very Large Telescope and Future Very Large Telescope Interferometer Observations. *ApJ*, 692 : 902. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...692..902H>.
- Hameury J., Marck J., & Pelat D., 1994.  $E^+e^-$  annihilation lines from accretion discs around Kerr black holes. *A&A*, 287 : 795. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1994A%26A...287..795H>.

- Haniff C., 2007. An introduction to the theory of interferometry. *New Astronomy Reviews*, 51 : 565. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2007NewAR...51..565H>.
- Harko T., Kovács Z., & Lobo F.S.N., 2009. Can accretion disk properties distinguish gravastars from black holes? *Classical and Quantum Gravity*, 26(21) : 215006. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009CQGra...26u5006H>.
- Haubois X., 2009. *Imagerie interférométrique infrarouge et perspective pour l'observation interférométrique du centre galactique : le projet GRAVITY*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris, École doctorale Astronomie & Astrophysique d'Île de France. [http://tel.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=v70ufuj6lfg9n9dbdsqe7lste4&view\\_th](http://tel.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=v70ufuj6lfg9n9dbdsqe7lste4&view_th)
- Hawking S.W. & Ellis G.F.R., 1973. The large scale structure of the universe.
- Henriques A.B. & Mendes L.E., 2005. Boson-Fermion Stars : Exploring Different Configurations. *Astrophys. Space Sci.*, 300 : 367. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2005Ap%26SS.300..367H>.
- Högbom J.A., 1974. Aperture Synthesis with a Non-Regular Distribution of Interferometer Baselines. *A&AS*, 15 : 417. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1974A%26AS...15..417H>.
- Israel W., 1966. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cimento B*, 44 : 1.
- Israel W., 1967. Erratum to : Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cimento B*, 48 : 463.
- Johannsen T. & Psaltis D., 2010a. Testing the No-hair Theorem with Observations in the Electromagnetic Spectrum. I. Properties of a Quasi-Kerr Spacetime. *ApJ*, 716 : 187. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010ApJ...716..187J>.
- Johannsen T. & Psaltis D., 2010b. Testing the No-hair Theorem with Observations in the Electromagnetic Spectrum. II. Black Hole Images. *ApJ*, 718 : 446. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010ApJ...718..446J>.
- Johannsen T. & Psaltis D., 2011. Testing the No-hair Theorem with Observations in the Electromagnetic Spectrum. III. Quasi-periodic Variability. *ApJ*, 726 : 11. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2011ApJ...726...11J>.
- Karas V., Vokrouhlicky D., & Polnarev A.G., 1992. In the vicinity of a rotating black hole - A fast numerical code for computing observational effects. *MNRAS*, 259 : 569. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1992MNRAS.259..569K>.
- Kassim N.E., Larosa T.N., Lazio T.J.W., & Hyman S.D., 1999. Wide Field Radio Imaging of the Galactic Center. Dans *The Central Parsecs of the Galaxy*. ASP Conf. Ser., volume 186, p. 403. [http://cdsads.u-strasbg.fr/cgi-bin/nph-bib\\_query?bibcode=1999cpj.conf..403K&db\\_key](http://cdsads.u-strasbg.fr/cgi-bin/nph-bib_query?bibcode=1999cpj.conf..403K&db_key)

- Kaup D.J., 1968. Klein-Gordon Geon. *Phys. Rev.*, 172 : 1331.
- Kerr R.P., 1963. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11 : 237.
- Kervella P., 2001. *Interférométrie Optique avec le VLT - Application aux Étoiles Céphéides*. Thèse de doctorat, Université Paris VII.
- Labeyrie A., Lipson S.G., & Nisenson P., 2006. *An Introduction to Optical Stellar Interferometry*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Le Besnerais G., Lacour S., Mugnier L.M., Thiebaut E., Perrin G., & Meimon S., 2008. Advanced Imaging Methods for Long-Baseline Optical Interferometry. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2 : 767. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008ISTSP...2...767L>.
- Lehner L., 2001. TOPICAL REVIEW : Numerical relativity : a review. *Classical and Quantum Gravity*, 18 : 25. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2001CQGra...18R...25L>.
- Levin J. & Perez-Giz G., 2008. A periodic table for black hole orbits. *Phys. Rev. D*, 77 : 103005.
- Li L.X., Zimmerman E.R., Narayan R., & McClintock J.E., 2005. Multitemperature Blackbody Spectrum of a Thin Accretion Disk around a Kerr Black Hole : Model Computations and Comparison with Observations. *ApJS*, 157 : 335. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2005ApJS...157...335L>.
- Lichnerowicz A., 1939. *Sur certains problèmes globaux relatifs au système des équations d'Einstein*. Hermann, Paris.
- Liu S., Melia F., & Petrosian V., 2006. Stochastic Electron Acceleration During the Near-Infrared and X-Ray Flares in Sagittarius A\*. *ApJ*, 636 : 798. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006ApJ...636...798L>.
- Liu S., Petrosian V., & Melia F., 2004. Electron Acceleration around the Supermassive Black Hole at the Galactic Center. *ApJL*, 611 : L101. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2004ApJ...611L.101L>.
- Lobo F.S.N., 2006. Stable dark energy stars. *Classical and Quantum Gravity*, 23 : 1525. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006CQGra...23.1525L>.
- Luminet J.P., 1979. Image of a spherical black hole with thin accretion disk. *A&A*, 75 : 228. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1979A%26A...75...228L>.
- Lynden-Bell D. & Rees M.J., 1971. On quasars, dust and the galactic centre. *MNRAS*, 152 : 461. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1971MNRAS.152...461L>.

- Mahadevan R., Narayan R., & Yi I., 1996. Harmony in Electrons : Cyclotron and Synchrotron Emission by Thermal Electrons in a Magnetic Field. *ApJ*, 465 : 327. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1996ApJ...465..327M>.
- Maoz E., 1998. Dynamical Constraints on Alternatives to Super-massive Black Holes in Galactic Nuclei. *ApJ*, 494 : L181+. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1998ApJ...494L.181M>.
- Marck J., 1996. Short-cut method of solution of geodesic equations for Schwarzschild black hole. *Classical and Quantum Gravity*, 13 : 393. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1996CQGra..13..393M>.
- Markoff S., Falcke H., Yuan F., & Biermann P.L., 2001. The Nature of the 10 kilosecond X-ray flare in Sgr A\*. *A&A*, 379 : L13. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2001A%26A...379L..13M>.
- Marrone D.P., Baganoff F.K., Morris M.R., Moran J.M., Ghez A.M., Hornstein S.D., Dowell C.D., Muñoz D.J., Bautz M.W., Ricker G.R., Brandt W.N., Garmire G.P., Lu J.R., Matthews K., Zhao J., Rao R., & Bower G.C., 2008. An X-Ray, Infrared, and Submillimeter Flare of Sagittarius A\*. *ApJ*, 682 : 373. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008ApJ...682..373M>.
- Mazur P.O. & Mottola E., 2001. Gravitational Condensate Stars : An Alternative to Black Holes. *ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints*. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2001gr.qc.....9035M>.
- Mazur P.O. & Mottola E., 2004. Gravitational vacuum condensate stars. *Proceedings of the National Academy of Science*, 101 : 9545. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2004PNAS..101.9545M>.
- Meheut H., Casse F., Varniere P., & Tagger M., 2010. Rossby wave instability and three-dimensional vortices in accretion disks. *A&A*, 516 : A31+. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010A%26A...516A..31M>.
- Meimon S., Mugnier L.M., & Le Besnerais G., 2008. Self-calibration approach for optical long-baseline interferometry imaging. *Journal of the Optical Society of America A*, 26 : 108. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008JOSAA..26..108M>.
- Meyer L., Eckart A., Schödel R., Duschl W.J., Mužić K., Dovčiak M., & Karas V., 2006a. Near-infrared polarimetry setting constraints on the orbiting spot model for Sgr A\* flares. *A&A*, 460 : 15. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006A%26A...460...15M>.
- Meyer L., Schödel R., Eckart A., Karas V., Dovčiak M., & Duschl W.J., 2006b. K-band polarimetry of an Sgr A\* flare with a clear sub-flare structure. *A&A*, 458 : L25. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006A%26A...458L..25M>.

- Mihalas D. & Mihalas B., 1984. *Foundations of Radiation Hydrodynamics*. Oxford University Press, Oxford.
- Misner C., Thorne K., & Wheeler A., 1973. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, San Fransisco.
- Mościbrodzka M., Gammie C.F., Dolence J.C., Shiokawa H., & Leung P.K., 2009. Radiative Models of SGR A\* from GRMHD Simulations. *ApJ*, 706 : 497. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...706..497M>.
- Müller T., 2009. Analytic observation of a star orbiting a Schwarzschild black hole. *General Relativity and Gravitation*, 41 : 541. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009GRGr...41..541M>.
- Munyaneza F. & Viollier R.D., 2002. The Motion of Stars near the Galactic Center : A Comparison of the Black Hole and Fermion Ball Scenarios. *ApJ*, 564 : 274. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2002ApJ...564..274M>.
- Narayan R. & Yi I., 1994. Advection-dominated accretion : A self-similar solution. *ApJL*, 428 : L13. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1994ApJ...428L..13N>.
- Narayan R. & Yi I., 1995. Advection-dominated Accretion : Underfed Black Holes and Neutron Stars. *ApJ*, 452 : 710. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1995ApJ...452..710N>.
- Noble S.C., Leung P.K., Gammie C.F., & Book L.G., 2007. Simulating the emission and outflows from accretion discs. *Classical and Quantum Gravity*, 24 : 259. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2007CQGra...24..259N>.
- Paczynski B., 1978. A model of selfgravitating accretion disk. *Acta Astronomica*, 28 : 91. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1978AcA....28...91P>.
- Paczyński B. & Wiita P.J., 1980. Thick accretion disks and supercritical luminosities. *A&A*, 88 : 23. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1980A%26A....88...23P>.
- Page D.N. & Thorne K.S., 1974. Disk-Accretion onto a Black Hole. Time-Averaged Structure of Accretion Disk. *ApJ*, 191 : 499. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1974ApJ...191..499P>.
- Pani P., Berti E., Cardoso V., Chen Y., & Norte R., 2009. Gravitational wave signatures of the absence of an event horizon : Nonradial oscillations of a thin-shell gravastar. *Phys. Rev. D*, 80(12) : 124047. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009PhRvD...8014047P>.
- Paumard T., 2003. *Etude de la cinématique et de la population stellaire du centre galactique*. Thèse de doctorat, Ecole doctorale d'astronomie et d'astrophysique d'Ile de France.



- Paumard T., Genzel R., Martins F., Nayakshin S., Beloborodov A.M., Levin Y., Trippe S., Eisenhauer F., Ott T., Gillessen S., Abuter R., Cuadra J., Alexander T., & Sternberg A., 2006. The Two Young Star Disks in the Central Parsec of the Galaxy : Properties, Dynamics, and Formation. *ApJ*, 643 : 1011. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006ApJ...643.1011P>.
- Paumard T., Perrin G., Eckart A., Genzel R., Léna P., Schödel R., Eisenhauer F., Müller T., & Gillessen S., 2008. Scientific Prospects for VLTI in the Galactic Centre : Getting to the Schwarzschild Radius. Dans *The Power of Optical/IR Interferometry : Recent Scientific Results and 2nd Generation*, édité par A. Richichi, F. Delplancke, F. Paresce, & A. Chelli, p. 313–+. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008poi.conf...313P>.
- Perrin G., 2007. Code de simulation de l'instrument GRAVITY, non publié.
- Press W.H., 1978. Flicker noises in astronomy and elsewhere. *Comments on Astrophysics*, 7 : 103. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1978ComAp...7..103P>.
- Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., & Flannery B.P., 1986. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Psaltis D., 2008. Probes and Tests of Strong-Field Gravity with Observations in the Electromagnetic Spectrum. *Living Reviews in Relativity*, 11(9).  
URL <http://www.livingreviews.org/lrr-2008-9>
- Psaltis D. & Johannsen T., 2010. A Ray-Tracing Algorithm for Spinning Compact Object Spacetimes with Arbitrary Quadrupole Moments. I. Quasi-Kerr Black Holes. *ArXiv e-prints*. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010arXiv1011.4078P>.
- Qian L., Abramowicz M.A., Fragile P.C., Horák J., Machida M., & Straub O., 2009. The Polish doughnuts revisited. I. The angular momentum distribution and equipressure surfaces. *A&A*, 498 : 471. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009A%26A...498..471Q>.
- Rabien S., Gillessen S., Ziegler J., Thiel M., Gräter A., Haug M., Eisenhauer F., Perrin G., Brandner W., & Straubmeier C., 2008. Fringe detection laser metrology for differential astrometric stellar interferometers. Dans *SPIE Conference Series*, volume 7013 de *Presented at the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference*. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008SPIE.7013E..16R>.
- Rees M.J., Begelman M.C., Blandford R.D., & Phinney E.S., 1982. Ion-supported tori and the origin of radio jets. *Nature*, 295 : 17. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1982Natur.295...17R>.
- Rieke G.H. & Low F.J., 1973. Infrared maps of the Galactic Nucleus. *ApJ*, 184 : 415. [http://cdsads.u-strasbg.fr/cgi-bin/nph-bib\\_query?bibcode=1973ApJ...184..415R&db\\_key](http://cdsads.u-strasbg.fr/cgi-bin/nph-bib_query?bibcode=1973ApJ...184..415R&db_key)

- Riess A.G., Filippenko A.V., Challis P., Clocchiatti A., Diercks A., Garnavich P.M., Gilliland R.L., Hogan C.J., Jha S., Kirshner R.P., Leibundgut B., Phillips M.M., Reiss D., Schmidt B.P., Schommer R.A., Smith R.C., Spyromilio J., Stubbs C., Suntzeff N.B., & Tonry J., 1998. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *Astronomical Journal*, 116 : 1009. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1998AJ...116.1009R>.
- Ruffini R. & Bonazzola S., 1969. Systems of Self-Gravitating Particles in General Relativity and the Concept of an Equation of State. *Physical Review*, 187 : 1767. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1969PhRv..187.1767R>.
- Rybicki G.B. & Lightman A.P., 1979. *Radiative Processes in Astrophysics*. John Wiley & Sons, Inc.
- Sądowski A., 2009. Slim Disks Around Kerr Black Holes Revisited. *ApJS*, 183 : 171. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJS..183..171S>.
- Schnittman J.D., Krolik J.H., & Hawley J.F., 2006. Light Curves from an MHD Simulation of a Black Hole Accretion Disk. *ApJ*, 651 : 1031. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006ApJ...651.1031S>.
- Schödel R., Eckart A., Iserlohe C., Genzel R., & Ott T., 2005. A Black Hole in the Galactic Center Complex IRS 13E? *ApJ*, 625 : L111. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2005ApJ...625L.111S>.
- Schödel R., Ott T., Genzel R., Hofmann R., Lehnert M., Eckart A., Mouawad N., Alexander T., Reid M.J., Lenzen R., Hartung M., Lacombe F., Rouan D., Gendron E., Rousset G., Lagrange A., Brandner W., Ageorges N., Lidman C., Moorwood A.F.M., Spyromilio J., Hubin N., & Menten K.M., 2002. A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the Milky Way. *Nature*, 419 : 694. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2002Natur.419..694S>.
- Semay C. & Silvestre-Brac B., 2005. *Relativité Restreinte, Bases et Applications*. Dunod, Paris.
- Shakura N.I. & Sunyaev R.A., 1973. Black holes in binary systems. Observational appearance. *A&A*, 24 : 337. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1973A%26A...24..337S>.
- Shao M. & Colavita M.M., 1992. Potential of long-baseline infrared interferometry for narrow-angle astrometry. *A&A*, 262 : 353. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1992A%26A...262..353S>.
- Sharma R., Karmakar S., & Mukherjee S., 2008. Boson star and dark matter. *ArXiv*. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008arXiv0812.3470S>.

- Shcherbakov R.V. & Huang L., 2011. General relativistic polarized radiative transfer : building a dynamics-observations interface. *MNRAS*, 410 : 1052. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2011MNRAS.410.1052S>.
- Shen Z., 2008. The Size of Sgr A\*. Dans *Astrophysics of Compact Objects*, édité par Y.-F. Yuan, X.-D. Li, & D. Lai, volume 968 de *American Institute of Physics Conference Series*, p. 340–347.
- Tagger M. & Melia F., 2006. A Possible Rossby Wave Instability Origin for the Flares in Sagittarius A\*. *ApJL*, 636 : L33. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006ApJ...636L..33T>.
- Thiébaud E., 2008. MIRA : an effective imaging algorithm for optical interferometry. Dans *SPIE Conference Series*, volume 7013 de *Presented at the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference*. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008SPIE.7013E..43T>.
- Torres D.F., Capozziello S., & Lambiase G., 2000. Supermassive boson star at the galactic center? *Physical Review D*, 62(10) : 104012. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2000PhRvD..62j4012T>.
- Tóth G., 1996. A General Code for Modeling MHD Flows on Parallel Computers : Versatile Advection Code. *Astrophysical Letters Communications*, 34 : 245. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1996ApL%26C..34..245T>.
- Trap G., Goldwurm A., Dodds-Eden K., Weiss A., Terrier R., Ponti G., Gillessen S., Genzel R., Ferrando P., Bélanger G., Clénet Y., Rouan D., Predehl P., Capelli R., Melia F., & Yusef-Zadeh F., 2011. Concurrent X-ray, near-infrared, sub-millimeter, and GeV gamma-ray observations of Sagittarius A\*. *A&A*, 528 : A140+. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2011A%26A...528A.140T>.
- Trippe S., Paumard T., Ott T., Gillessen S., Eisenhauer F., Martins F., & Genzel R., 2007. A polarized infrared flare from Sagittarius A\* and the signatures of orbiting plasma hotspots. *MNRAS*, 375 : 764. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2007MNRAS.375..764T>.
- Turimov B.V., Ahmedov B.J., & Abdujabbarov A.A., 2009. Electromagnetic Fields of Slowly Rotating Magnetized Gravastars. *Modern Physics Letters A*, 24 : 733. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009MPLA...24..733T>.
- van der Klis M., 2000. Millisecond Oscillations in X-ray Binaries. *ARA&A*, 38 : 717. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2000ARA%26A..38..717V>.
- van der Laan H., 1966. A Model for Variable Extragalactic Radio Sources. *Nature*, 211 : 1131. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1966Natur.211.1131V>.
- Vaughan S., 2005. A simple test for periodic signals in red noise. *A&A*, 431 : 391. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2005A%26A...431..391V>.

- Vigeland S.J. & Hughes S.A., 2010. Spacetime and orbits of bumpy black holes. *Phys. Rev. D*, 81(2) : 024030. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010PhRvD...81b4030V>.
- Viollier R.D., Trautmann D., & Tupper G.B., 1993. Supermassive neutrino stars and galactic nuclei. *Physics Letters B*, 306 : 79. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1993PhLB...306...79V>.
- Visser M., 2007. The Kerr spacetime : A brief introduction. *ArXiv e-prints*. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2007arXiv0706.0622V>.
- Visser M. & Wiltshire D.L., 2004. Stable gravastars an alternative to black holes? *Classical and Quantum Gravity*, 21 : 1135. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2004CQGra...21.1135V>.
- Will C.M., 1993. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Will C.M., 2006. The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Reviews in Relativity*, 9(3).  
URL <http://www.livingreviews.org/lrr-2006-3>
- Will C.M., 2008. Testing the General Relativistic “No-Hair” Theorems Using the Galactic Center Black Hole Sagittarius A\*. *ApJL*, 674 : L25. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008ApJ...674L...25W>.
- Will C.M., 2009. The Confrontation Between General Relativity and Experiment. *Space Sci. Rev.*, 148 : 3. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009SSRv...148...3W>.
- Wollman E.R., Geballe T.R., Lacy J.H., Townes C.H., & Rank D.M., 1977. NE II 12.8 micron emission from the galactic center. II. *ApJ*, 218 : L103. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1977ApJ...218L.103W>.
- Wu K., Fuerst S.V., Lee K., & Branduardi-Raymont G., 2006. General Relativistic Radiative Transfer : Emission from Accreting Black Holes in AGN. *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics Supplement*, 6(1) : 010000. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006ChJAS...6a.205W>.
- Xu Y., Narayan R., Quataert E., Yuan F., & Baganoff F.K., 2006. Thermal X-Ray Iron Line Emission from the Galactic Center Black Hole Sagittarius A\*. *ApJ*, 640 : 319. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006ApJ...640..319X>.
- Yuan F., 2010. Accretion and ejection in Sgr A\*. *ArXiv e-prints*. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010arXiv1002.3012Y>.
- Yuan F., Quataert E., & Narayan R., 2003. Nonthermal Electrons in Radiatively Inefficient Accretion Flow Models of Sagittarius A\*. *ApJ*, 598 : 301. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2003ApJ...598..301Y>.

- Yuan F., Quataert E., & Narayan R., 2004. On the Nature of the Variable Infrared Emission from Sagittarius A\*. *ApJ*, 606 : 894. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2004ApJ...606..894Y>.
- Yusef-Zadeh F., Bushouse H., Dowell C.D., Wardle M., Roberts D., Heinke C., Bower G.C., Vila-Vilaró B., Shapiro S., Goldwurm A., & Bélanger G., 2006a. A Multiwavelength Study of Sgr A\* : The Role of Near-IR Flares in Production of X-Ray, Soft  $\gamma$ -Ray, and Submillimeter Emission. *ApJ*, 644 : 198. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006ApJ...644..198Y>.
- Yusef-Zadeh F., Roberts D., Wardle M., Heinke C.O., & Bower G.C., 2006b. Flaring Activity of Sagittarius A\* at 43 and 22 GHz : Evidence for Expanding Hot Plasma. *ApJ*, 650 : 189. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006ApJ...650..189Y>.
- Yusef-Zadeh F., Wardle M., Heinke C., Dowell C.D., Roberts D., Baganoff F.K., & Cotton W., 2008. Simultaneous Chandra, CSO, and VLA Observations of Sgr A\* : The Nature of Flaring Activity. *ApJ*, 682 : 361. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008ApJ...682..361Y>.
- Zamaninasab M., Eckart A., Witzel G., Dovciak M., Karas V., Schödel R., Gießel R., Bremer M., García-Marín M., Kunneriath D., Mužić K., Nishiyama S., Sabha N., Straubmeier C., & Zensus A., 2010. Near infrared flares of Sagittarius A\*. Importance of near infrared polarimetry. *A&A*, 510 : A3+. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010A%26A...510A...3Z>.